



Máster en Ingeniería Matemática  
2008/2010

Proyecto Fin de Máster

## Desarrollo e implementación de sistemas NVH para la reducción de ruidos y vibraciones en autobuses

Francisco José González Diéguez

***Director:***

Andrés Prieto Aneiros (Universidade de Santiago de Compostela)

***Empresa:***

Castrosua





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Visión general . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Metodología . . . . .	3
<b>2. Descripción del problema</b>	<b>7</b>
2.1. Geometría . . . . .	7
2.2. Modelos matemáticos . . . . .	14
2.2.1. Fluido compresible . . . . .	14
2.2.2. Medio poroso . . . . .	15
2.2.3. Modelo de Reissner-Mindlin para placas . . . . .	16
2.2.4. Modelo de Timoshenko para barras . . . . .	20
2.3. Condiciones de contorno . . . . .	24
2.4. Materiales . . . . .	27
<b>3. Discretización</b>	<b>35</b>
3.1. Descripción de la malla . . . . .	35
3.2. Descripción del acoplamiento . . . . .	38
<b>4. Ajuste de datos con medidas experimentales</b>	<b>41</b>
4.1. Descripción de las medidas . . . . .	41
4.1.1. Medidas acústicas . . . . .	42
4.1.2. Medidas estructurales . . . . .	44
4.2. Ajuste de los datos al modelo discretizado . . . . .	45
<b>5. Validación</b>	<b>49</b>
5.1. Convención de Actran de la dependencia armónica . . . . .	49
5.2. Problema de la esfera con condición Dirichlet . . . . .	51
5.3. Problema de la esfera con una fuente puntual . . . . .	52
5.4. Acoplamiento fluido-estructura . . . . .	55
<b>6. Resultados numéricos</b>	<b>61</b>
6.1. Caso de carga “A” . . . . .	61
6.2. Caso de carga “B” . . . . .	75



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Visión general

Hoy en día, existen tanto obligaciones legales [2] como una creciente sensibilización social [7], respecto a la reducción de los niveles del ruido y las vibraciones para enmarcarlos dentro de unos niveles aceptables de seguridad y confort. Estas exigencias se aplican en diferentes ámbitos: ruido urbano, confort doméstico, seguridad laboral, medios de transportes, etc. De hecho, las normativas referentes a los vehículos de transporte son mucho más exigentes que hace una década [3].

Éste es uno de los factores que ha causado que las empresas involucradas en el sector de la automoción y, en general, del transporte público, hayan focalizado parte de sus intereses en la reducción de los niveles de ruido y vibraciones en los vehículos que producen. En consecuencia, la tendencia actual de los fabricantes de vehículos (véase por ejemplo [1]) es la de invertir en investigación, desarrollo e innovación para mejorar las características acústicas de sus vehículos, teniendo siempre como objetivo final el aumento de la competitividad con respecto a otros fabricantes.

El término inglés *Noise, Vibration and Harshness* (Ruido, Vibraciones y Severidad) o su acrónimo NVH, puede englobar a casi todos los proyectos que llevan a cabo estudios sobre el control de vibraciones y ruido no deseado en cualquier tipo de estructura [9].

Intuitivamente, “Ruido” hace referencia en el lenguaje coloquial a un sonido molesto y no deseado. El término “Vibración” engloba las vibraciones sufridas por la estructura (no siempre audibles pero sí perceptibles al tacto) que pueden tener un efecto perjudicial en la fiabilidad y la eficiencia de los componentes. Por último, “Severidad” se refiere a los efectos vibro-acústicos transitorios de corta duración como impactos y sacudidas que pueden llegar a poner en peligro la integridad de la estructura.

En particular, en el sector de la automoción, uno de los objetivos generales de un proyecto NVH consiste en el diseño de vehículos con un reducido nivel de ruido y vibraciones sufridos por los pasajeros. En este sector, se pueden encontrar un amplio abanico de empresas e instituciones que desarrollan proyectos NVH tanto a nivel de simulación numérica como de instrumentación y ensayos experimentales. Por ejemplo, se pueden destacar las empresas Brüel and Kjaer (Dinamarca) y FFT Technologies (Bélgica), el grupo de investigación Automotive Noise and Vibration del Institute of Sound and Vibration Research (Reino Unido), el departamento de Ingeniería Mecánica

del Centro Tecnológico de Automoción de Galicia o el mismo departamento del centro tecnológico Ikerlan (País Vasco) o del centro de investigación de Idiada (Cataluña), entre muchos otros.

En la mayoría de los casos, los proyectos dentro del marco NVH conllevan el uso de herramientas de simulación numérica para evaluar el comportamiento acústico-estructural de un producto, así como de medidas realizadas en las instalaciones habilitadas para llevar a cabo ensayos experimentales.

## 1.2. Objetivos

A pesar de la proliferación de estudios NVH en el campo de la automoción (véase por ejemplo las contribuciones presentadas en los últimos congresos “SAE Noise and Vibration Conference and Exhibition”), el número de aplicaciones reales de estos métodos al proceso de fabricación y diseño de autobuses urbanos es reducido.

El proyecto CENIT “Tecnologías ecológicas para el transporte urbano” - ECOTRANS, del que forma parte la empresa Castrosua, se puede enmarcar dentro de este contexto NVH de mejora de las características acústicas y estructurales de los vehículos de transporte público.

Uno de los objetivos del proyecto ECOTRANS consiste en el desarrollo de un modelo numérico capaz de reproducir los niveles de ruido y vibraciones en el interior de un vehículo de transporte urbano. El presente trabajo fin de máster está centrado justamente en este objetivo: la respuesta acústico-estructural de un autobús urbano.

Básicamente, el trabajo ha consistido en aprovechar las técnicas y los métodos de simulación numérica, ampliamente utilizados y bien conocidos en el contexto de los proyectos NVH, para el estudio numérico de un vehículo de transporte público urbano. De hecho, en el presente proyecto fin de máster se pueden identificar algunos de los objetivos comunes a otros proyectos NVH, como los que se listan a continuación:

- Modelar matemáticamente la respuesta en frecuencia de distintos componentes empleados en el vehículo (materiales de recubrimientos, piezas estructurales, etc.).
- Estudiar el comportamiento acústico-estructural del vehículo, tanto la valoración del ruido producido en el interior del habitáculo del vehículo como las vibraciones soportadas por la estructura.
- Identificar los componentes estructurales o las regiones del habitáculo que son susceptibles de mejora, mediante una modificación del diseño de la estructura o con la incorporación de técnicas pasivas de reducción de ruido.

Se debe hacer notar que este proyecto fin de máster nace como continuación del trabajo previo realizado dentro del marco del proyecto NVH que se ha llevado a cabo durante los últimos dos años por parte de la empresa Castrosua. Aunque parte de los objetivos que aparecen listados anteriormente son comunes a estudios técnicos realizados en anteriores etapas de este mismo proyecto, el presente trabajo no utiliza ninguno de los resultados previos y, de hecho, se ha iniciado desde cero.

A pesar de que se continúa utilizando el mismo núcleo de cálculo para resolver el problema acoplado discretizado mediante un método de elementos finitos, el empleo de modelos de barras y placas en un contexto tridimensional ha llevado consigo un cambio total en el diseño de la geometría del CAD, en la construcción de la malla y en la definición de las características de los modelos. Estas diferencias son las que han hecho imposible aprovechar el trabajo realizado previamente.

### 1.3. Metodología

Con la finalidad de que exista una coherencia cualitativa entre las medidas experimentales y los resultados numéricos, las condiciones de contorno del modelo matemático se han ajustado para una frecuencia en concreto con medidas realizadas *in situ* en el interior del vehículo. Estas medidas (tanto de nivel de presión sonora como de aceleraciones) proporcionan valores reales con los que estimar las condiciones de contorno y las fuentes de ruido que están presentes en el modelo matemático.

Para alcanzar los objetivos listados anteriormente, se ha utilizado el programa de ordenador comercial ACTRAN (con código fuente cerrado bajo licencia propietaria) capaz de simular numéricamente la respuesta en frecuencia del problema acoplado acústico-estructural.

ACTRAN es una herramienta de simulación numérica, desarrollada por la empresa Free Field Technologies (FFT), cuyo núcleo de cálculo está basado en la implementación del método de elementos finitos para distintos modelos de fluidos, sólidos elásticos tridimensionales, placas, barras, etc, tanto en dos como en tres dimensiones. Este núcleo de cálculo se completa con un pre/post-procesador, llamado ACTRANVI.

Hasta la realización de este trabajo, la geometría CAD, el mallado y el preprocesado se realizaban mediante la interface gráfica del programa MSC.PATRAN, que disponía de una plantilla proporcionada por FFT. Después del último cambio de versión el pasado año, la empresa FFT ha dejado de dar soporte a esta plantilla, lo que ha dejado obsoleta esta metodología de trabajo.

Como contrapartida, el pre-procesador ACTRANVI permite incorporar en el modelo de forma sencilla los coeficientes de los modelos, el tipo de condiciones de contorno o la definición de materiales. Sin embargo, con este pre-procesador no es posible crear ni el diseño CAD ni una malla asociada a una geometría.

Como consecuencia, tanto la geometría del modelo, como su posterior mallado, han sido creados con otros programas para, finalmente, importar la malla en el pre-procesador ACTRANVI. Después de evaluar la compatibilidad entre diferentes programas y la capacidad de éstos para exportar e importar ficheros entre si y a los formatos soportados por ACTRANVI, se ha hecho la siguiente elección:

- **Geometría:** la definición del CAD se realiza mediante el programa de diseño CATIA. Este programa permite realizar geometrías complejas de forma sencilla y crear entidades y grupos, lo que facilita el posterior proceso de mallado. La geometría CAD se exporta en formato IGES.
- **Mallado:** se emplea el programa de mallado HYPERMESH, desarrollado por la empresa Altair. Esta elección se ha hecho debido a la variedad de formatos en

los que puede exportar y por su potente interfaz de uso simple. La geometría se recupera en el formato IGES y la información de la malla se almacena en formato NASTRAN.

- Pre/post-procesado:** la incorporación de datos del modelo y su posterior visualización gráfica se realiza mediante el programa ACTRANVI. Este pre-procesador importa las mallas en formato NASTRAN y las convierte al formato propio de malla utilizado por el núcleo de cálculo ACTRAN. Como post-procesador, ACTRANVI es capaz de leer los formatos PLT y OP2, en los que se guarda la información necesaria para representar las curvas de respuesta en frecuencia y la visualización de campos en tres dimensiones, respectivamente.

Por último, se ha utilizado el entorno de programación de alto nivel MATLAB, para realizar el ajuste de las condiciones de contorno con respecto a las medidas experimentales y validar ciertas partes del núcleo de cálculo (véanse los Capítulos 4 y 5 para más detalles).

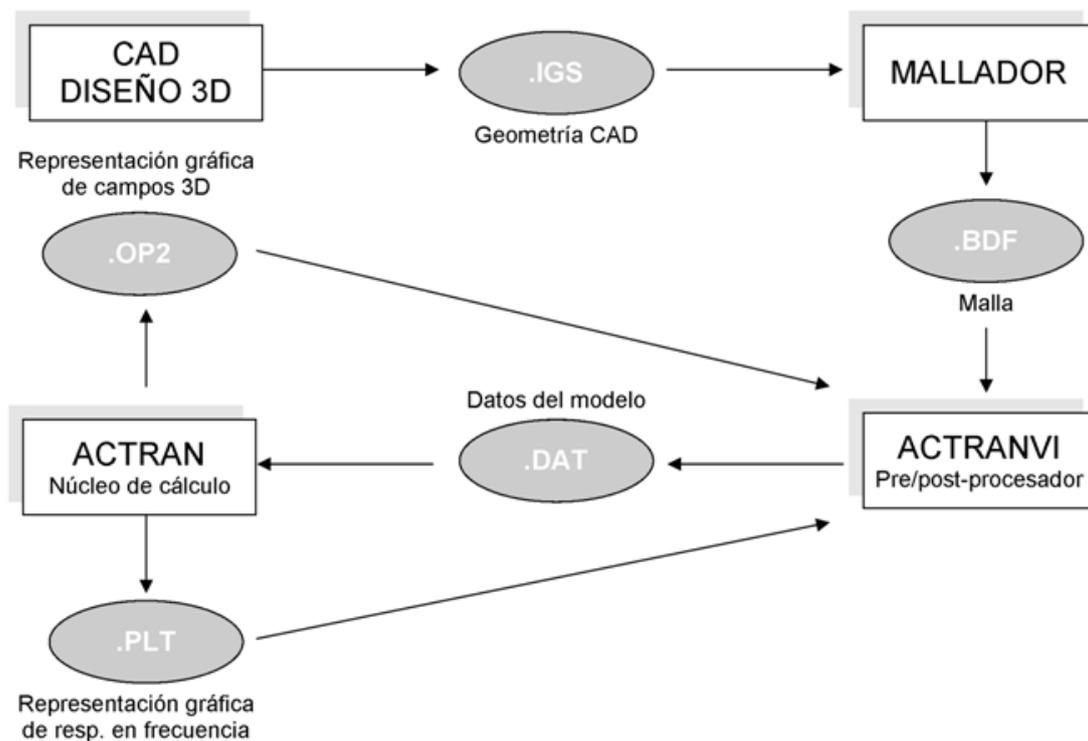


Figura 1.1: Diagrama de flujo con la interacción de los programas de ordenador utilizados en el desarrollo de este proyecto y las extensiones de los ficheros de importación/exportación.

---

La estructura de este trabajo fin de máster se describe a continuación. El Capítulo 2 está dedicado a la descripción de los modelos matemáticos que gobiernan el comportamiento acústico-estructural de cada una de las partes que forman el autobús. El método de elementos finitos y el tratamiento especial que posee la discretización de un problema acoplado se analiza en el Capítulo 3. En el Capítulo 4, se describe el método numérico que se ha utilizado para ajustar las condiciones de contorno del problema a las medidas experimentales hechas sobre un autobús urbano real. Finalmente, la validación del uso de ciertas características del núcleo de cálculo y los resultados numéricos obtenidos en la simulación del problema acoplado aparecen, respectivamente, en los Capítulos 5 y 6.



## Capítulo 2

# Descripción del problema

### 2.1. Geometría

La geometría del modelo matemático que se ha considerado en este trabajo viene dada por las dimensiones de la estructura de un autobús urbano, tipo “MAN A35”. Éste es uno de los modelos de autobús con el que trabaja la empresa Castrosua, cuyas medidas globales son: 2.490 m de alto, 2.400 m de ancho y 8.753 m de largo.

La primera fase en la modelación matemática de cualquier problema, consiste en la reproducción precisa de la geometría del problema. En este caso, la geometría del autobús se ha realizado mediante un programa de diseño CAD en tres dimensiones a partir de los planos proporcionados por la empresa Castrosua, con lo que se respetan las medidas originales del autobús.

Para ello, con ayuda de la simetría longitudinal del vehículo, se ha creado un perfil bidimensional de uno de los laterales para, posteriormente, extrusionarlo. En este paso se ha obtenido un único volumen tridimensional del autobús. Puesto que se necesita dividir este volumen tridimensional en subdominios asociados a cada parte del autobús, se ha empleado un programa de diseño CAD para poder seccionar el único volumen tridimensional en las partes principales del vehículo: las bóvedas superiores, la cavidad principal donde viajan los pasajeros, el habitáculo del motor y el recubrimiento absorbente de la cavidad del motor. A cada una de ellas se les asigna un grupo (véase la Figura 2.1).

La segunda fase consiste en crear una réplica del complejo sistema de barras que posee el autobús MAN A35, compuesto por 55 tipos de barras diferentes atendiendo a su sección (véase Tabla 2.1). Por un lado, las barras se introducen en el modelo como elementos unidimensionales, trazados por el punto medio de su sección transversal (siempre sobre las superficies de los elementos tridimensionales). En el caso en el que existan dos barras físicamente pegadas, se asumen como una única barra.

Para verificar la precisión con la que se han reproducido las dimensiones de la geometría del autobús y el sistema de barras que lo forman, en la Figura 2.2 se ha representado el perfil correspondiente a un corte vertical de la geometría utilizada en este trabajo (diseño de la parte superior) y el plano real proporcionado por la empresa (diseño de la parte inferior). Se puede apreciar como la geometría considerada conserva la estructura principal de las barras del autobús a pesar de las simplificaciones hechas.

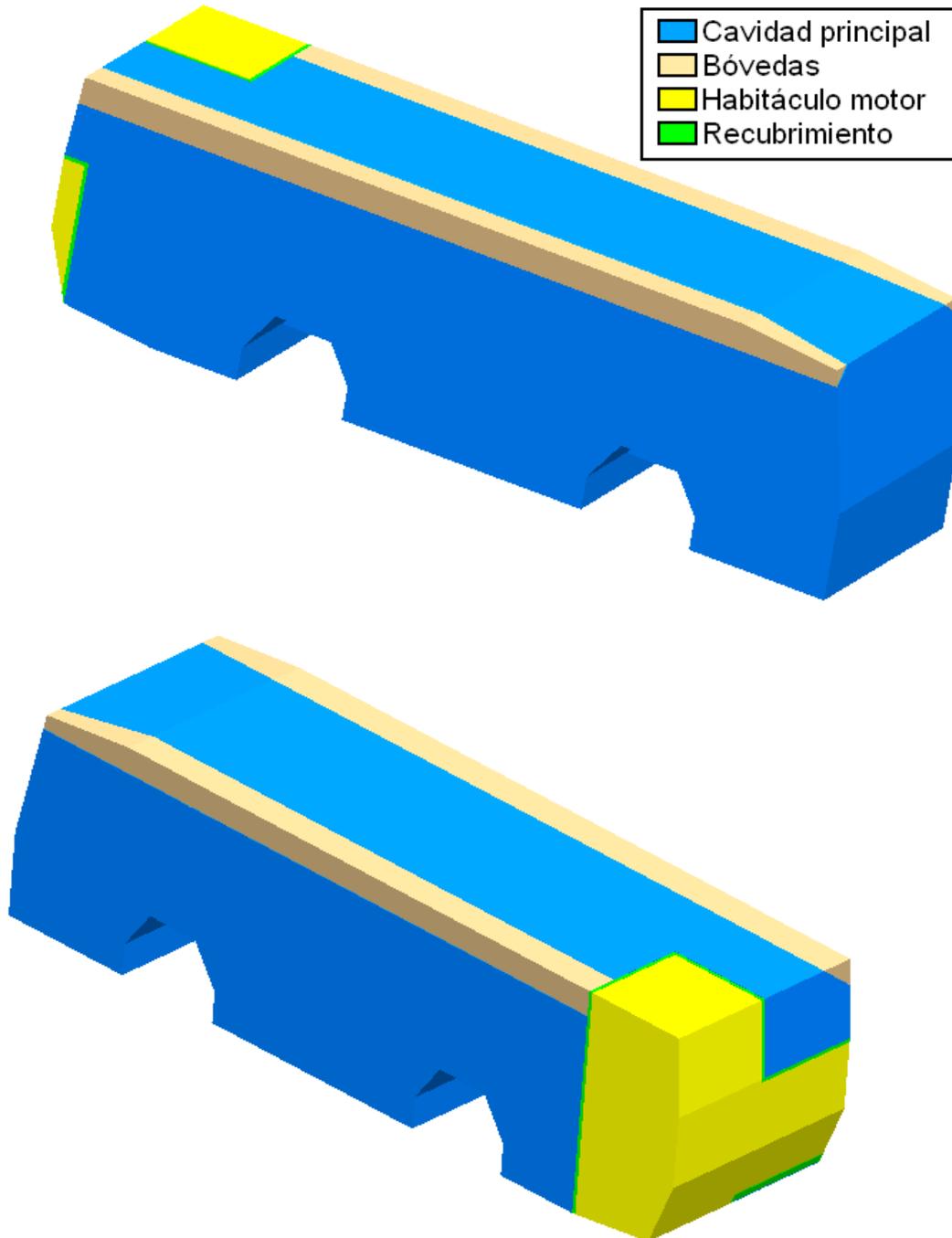


Figura 2.1: Subdominios tridimensionales en los que se ha dividido la geometría del autobús, coloreados por grupos.

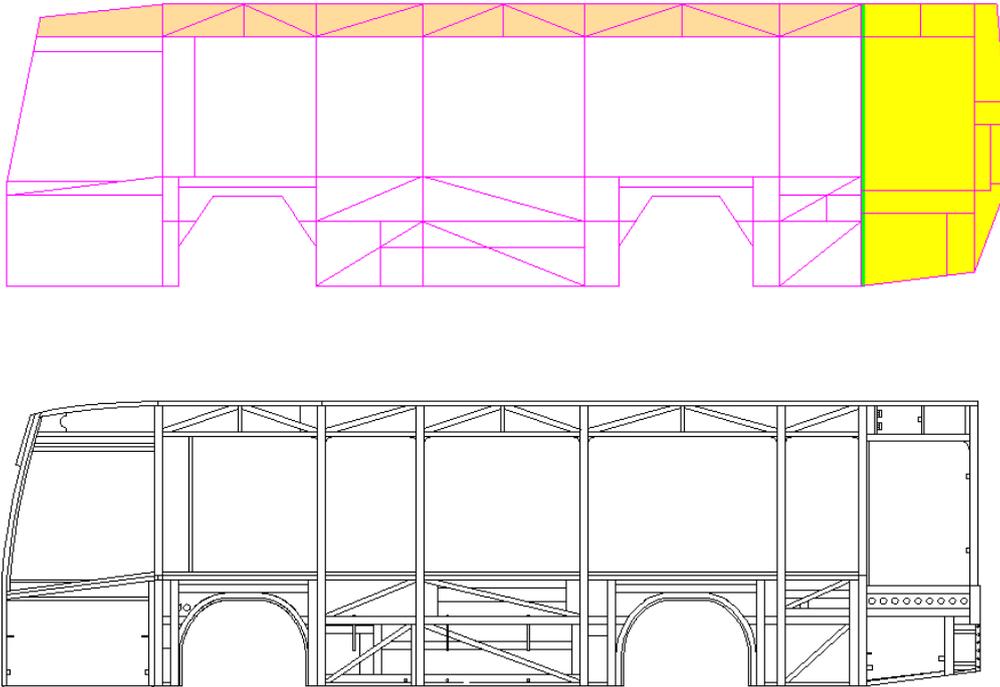


Figura 2.2: Corte vertical de la geometría utilizada en el modelo matemático (diseño de la parte superior) y de la estructura de barras del autobús “MAN A35” (diseño de la parte inferior).

Debido al gran número de barras existentes en la estructura, además de numerarlas (primera columna de la Tabla 2.1) se les ha asignado un código (segunda columna de la Tabla 2.1) y un atributo dependiendo si la barra posee pletina interior o no (tercera columna de la Tabla 2.1). Asimismo, la Tabla 2.1 especifica las características dimensionales de la sección transversal de una barra (véase 2.3). Con estas características se especifica el alto y el ancho de las secciones transversales, denotados respectivamente por  $H$  y  $W$ . Puesto que las secciones transversales de las barras son rectangulares pero huecas, también se deben especificar los espesores superiores e inferiores en cada una de las direcciones normales a las caras de la sección rectangular. Estos espesores están denotados por  $t_j$ ,  $j = 1,2,3,4$  (véase Figura 2.3).

En resumen, se han creado los 55 grupos de barras mostrados en el Tabla 2.1. Nótese que una entidad geométrica unidimensional puede pertenecer a diferentes grupos de barras al mismo tiempo. En ese caso, un sólo segmento representa dos tipos de barras.

En la Figura 2.4 se ha representado gráficamente el sistema de barras completo que ha sido incorporado en la geometría del modelo. Para contextualizar esta estructura se han representado las placas de los bajos del autobús junto con las placas del suelo y la placa de caucho.

Una vez que la estructura de barras ha sido incorporada con el programa de diseño CAD y han sido creados sus grupos, las barras sirven como fronteras que delimitan

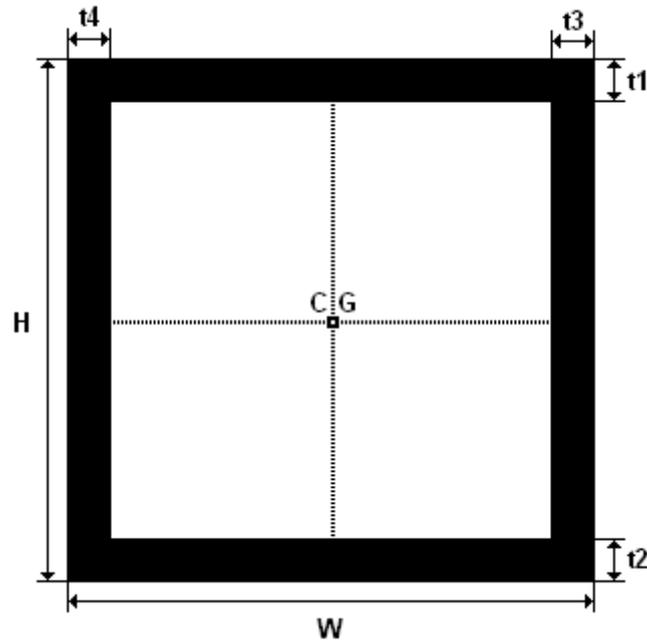


Figura 2.3: Sección transversal típica de una barra rectangular hueca de dimensiones  $W \times H$  y espesores  $t_j$ ,  $j = 1,2,3,4$ .

cada una de las placas que se van a definir en el autobús.

Se puede ver en la Figura 2.5 los siete grupos de placas que se han diferenciado en la estructura del autobús. Esta división en grupos viene dada por los distintos materiales utilizados en cada uno de los grupos. A modo de ejemplo, el grupo “caucho” está formado por todas aquellas placas que van a estar compuestas por caucho, mientras que el grupo de “ventanas” está formado por aquellas que están construidas con cristal templado.

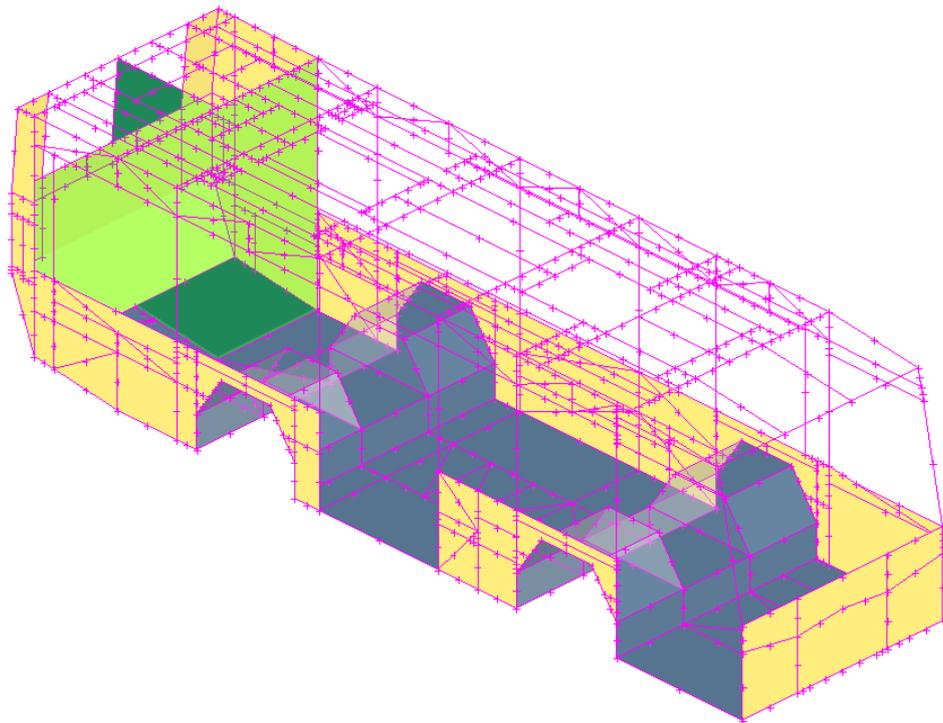


Figura 2.4: Estructura completa de barras incorporada en la geometría del modelo matemático.

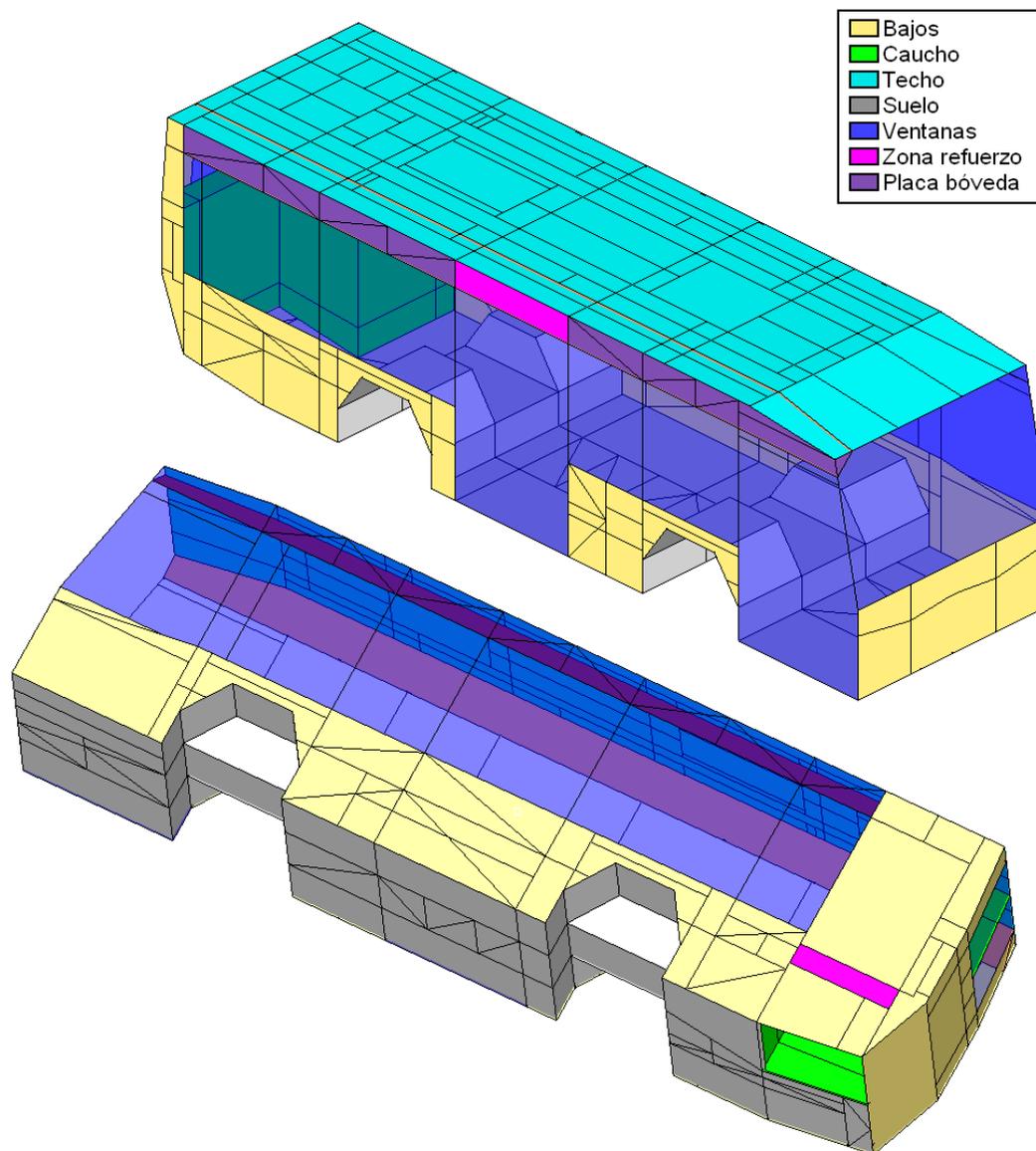


Figura 2.5: Grupos de placas bidimensionales incorporadas en la geometría del modelo matemático.

	Barra	Pletina	$H$ [m]	$W$ [m]	$t_1$ [m]	$t_2$ [m]	$t_3$ [m]	$t_4$ [m]
1	20x10x1.5	-	2.00e-2	1.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
2	20x20x1.5	-	2.00e-2	2.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
3	20x30x1.5	-	2.00e-2	3.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
4	20x40x1.5	-	2.00e-2	4.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
5	20x45x1.5	-	2.00e-2	4.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
6	25x25x1.5	-	2.50e-2	2.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
7	25x25x2.0	-	2.50e-2	2.50e-2	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3
8	25x30x1.5	-	2.50e-2	3.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
9	25x40x1.5	-	2.50e-2	4.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
10	25x45x1.5	Plt103	2.50e-2	4.50e-2	7.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
11	25x45x1.5	-	2.50e-2	4.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
12	30x15x1.5	-	3.00e-2	1.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
13	30x20x1.5	-	3.00e-2	2.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
14	30x25x1.5	Plt00D	3.00e-2	2.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	7.50e-3	1.50e-3
15	30x25x1.5	-	3.00e-2	2.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
16	30x30x1.5	Plt00C	3.00e-2	3.00e-2	1.50e-3	7.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
17	30x30x1.5	-	3.00e-2	3.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
18	30x30x2.0	Plt110	3.00e-2	3.00e-2	2.00e-3	2.00e-3	8.00e-3	2.00e-3
19	30x40x2.0	-	3.00e-2	4.00e-2	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3
20	30x45x1.5	-	3.00e-2	4.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
21	40x20x1.5	-	4.00e-2	2.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
22	40x25x1.5	Plt00G	4.00e-2	2.50e-2	1.50e-3	7.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
23	40x25x1.5	-	4.00e-2	2.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
24	40x30x2.0	Plt110	4.00e-2	3.00e-2	2.00e-3	7.00e-3	8.00e-3	2.00e-3
25	40x40x1.5	-	4.00e-2	4.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
26	40x40x2.0	-	4.00e-2	4.00e-2	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3
27	40x40x4.0	-	4.00e-2	4.00e-2	4.00e-3	4.00e-3	4.00e-3	4.00e-3
28	40x45x2.0	-	4.00e-2	4.50e-2	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3
29	45x15x1.5	-	4.50e-2	1.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
30	45x25x1.5	-	4.50e-2	2.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
31	45x45x1.5	-	4.50e-2	4.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
32	45x45x2.0	-	4.50e-2	4.50e-2	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3
33	45x45x3.0	Plt089	4.50e-2	4.50e-2	3.00e-3	9.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
34	45x45x3.0	Plt113	4.50e-2	4.50e-2	3.00e-3	9.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
35	45x45x3.0	-	4.50e-2	4.50e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
36	45x70x3.0	-	4.50e-2	7.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
37	60x20x1.5	-	6.00e-2	2.00e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
38	60x40x2.0	-	6.00e-2	4.00e-2	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3
39	60x40x3.0	Plt109	6.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	7.00e-3
40	60x40x3.0	-	6.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
41	70x15x1.5	-	7.00e-2	1.50e-2	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3	1.50e-3
42	70x40x3.0	Plt050	7.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	8.00e-3
43	70x40x3.0	Plt069	7.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	8.00e-3

44	70x40x3.0	Plt071	7.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	8.00e-3
45	70x40x3.0	Plt091	7.00e-2	4.00e-2	9.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
46	70x40x3.0	Plt092	7.00e-2	4.00e-2	9.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
47	70x40x3.0	Plt105	7.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	8.00e-3
48	70x40x3.0	Plt111	7.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	8.00e-3
49	70x40x3.0	-	7.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
50	70x45x2.0	-	7.00e-2	4.50e-2	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3	2.00e-3
51	70x45x3.0	-	7.00e-2	4.50e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
52	80x40x3.0	Plt070	8.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	8.00e-3
53	80x40x3.0	-	8.00e-2	4.00e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
54	80x45x3.0	-	8.00e-2	4.50e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3
55	120x45x3.0	-	1.20e-1	4.50e-2	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3	3.00e-3

Tabla 2.1: Características de los grupos de barras: numeración, nombre, atributo, altura  $H$ , ancho  $W$ , espesor vertical superior  $t_1$ , espesor vertical inferior  $t_2$ , espesor horizontal izquierdo  $t_3$  y espesor horizontal derecho  $t_4$ .

## 2.2. Modelos matemáticos

En lo que sigue se describirán las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan la propagación de ruido y vibraciones en régimen armónico, para cada componente del problema acoplado acústico-estructural del autobús.

A lo largo de todo este trabajo,  $f$  denota la frecuencia, medida en Hz (Herzios), la cual define la excitación armónica del sistema en el dominio del tiempo. Se denotará por  $\omega$ , la frecuencia angular dada por  $\omega = 2\pi f$ , medida en rad/s.

Dado un campo complejo  $B(x, y, z)$  que sólo depende de las coordenadas espaciales, la convención que se sigue a lo largo de todo el trabajo para asociarle un campo en el dominio del tiempo es

$$b(x, y, z, t) = \text{Re}(B(x, y, z)e^{-i\omega t}).$$

Esta convención concuerda con la elegida por el núcleo de cálculo ACTRAN (véase Sección 5.1 para una discusión detallada).

### 2.2.1. Fluido compresible

Si se supone que las propiedades de un fluido compresible son constantes, la perturbación lineal del campo de presiones en un fluido compresible se puede modelar en el dominio del tiempo mediante la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \quad (2.1)$$

siendo  $c$  la velocidad de propagación del sonido en el fluido y  $p$  la perturbación del campo de presiones con respecto a su estado de reposo. En lo que sigue, se abusará del lenguaje y llamaremos *campo de presión acústica* a la perturbación lineal de la presión medida desde el estado de reposo (véase [10] para una derivación rigurosa).

Si se asume la dependencia armónica del término fuente y de las condiciones de contorno, se puede escribir  $p(x, t) = \text{Re}(P(x)e^{-i\omega t})$ , donde el campo de presiones armónico  $P$  satisface

$$-\omega^2 P - c^2 \Delta P = 0. \quad (2.2)$$

Esta ecuación puede escribirse como la ecuación de Helmholtz  $-\Delta P - k^2 P = 0$  siendo  $k = \omega/c$  el número de onda del movimiento armónico.

Debe hacerse notar que, aunque en (2.2) la densidad de masa no interviene en la ecuación en derivadas parciales que gobierna la presión, ésta sí interviene en el cálculo del campo de velocidades  $\mathbf{V}$ , desplazamientos  $\mathbf{U}$  e intensidades  $\mathbf{I}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{1}{i\omega\rho_0} \text{grad}P, \\ \mathbf{I} &= P\mathbf{V}, \\ \mathbf{U} &= -i\omega\mathbf{V}. \end{aligned}$$

En resumen, los coeficientes físicos que caracterizan completamente el comportamiento de un fluido compresible homogéneo son aquellos que definen la densidad de masa  $\rho_0$  y la velocidad de propagación del sonido  $c$ . Hay que tener en cuenta que la información contenida en estos dos coeficientes se puede dar a partir de la densidad de masa y el módulo de compresibilidad  $K$ , que el caso de un fluido compresible es  $K = \rho_0 c$ .

Tanto en las ecuaciones (2.1), en el dominio del tiempo, como (2.2), en el dominio de la frecuencia, se ha supuesto un término fuente nulo (miembro del lado izquierdo de las ecuaciones). Sin embargo, en el problema del autobús, la presencia de fuentes de ruido implica fuentes volumétricas no nulas.

En particular, a lo largo de este trabajo sólo se considerarán fuentes volumétricas puntuales de forma que la ecuación que gobierna el campo de presiones viene dada por

$$-\omega^2 \rho_0 P - \rho_0 c^2 \Delta P = -i\rho_0 \omega Q \delta_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad (2.3)$$

donde  $Q$  es la velocidad de volumen de la fuente puntual y  $(x_0, y_0, z_0)^t$  es el vector posición del soporte de la fuente (véase [12] para una discusión detallada de la interpretación física de la fuente puntual como el paso al límite de una esfera vibrante).

### 2.2.2. Medio poroso

El movimiento armónico de un medio poroso se puede modelar mediante las ecuaciones de Allard-Champoux. Este modelo pertenece a la familia de modelos *fluido-equivalente*, en los cuales el comportamiento disipativo del material poroso queda caracterizado por la dependencia dinámica de la densidad de masa y del módulo de compresibilidad con respecto a la frecuencia.

Para definir estos coeficientes dinámicos, son necesarias las siguientes funciones auxiliares:

$$\begin{aligned} G_1 \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right) &= \sqrt{1 - \frac{1}{i\pi} \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right)}, \\ G_2 \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right) &= G_1 \left( \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right) 4N_{pr} \right), \end{aligned}$$

donde  $\rho_0$  es la densidad del fluido que rellena el material poroso,  $N_{pr}$  es el número de Prandtl,  $f$  es la frecuencia, y  $\sigma$  es la resistividad al flujo.

La densidad dinámica, que trata de modelar las fuerzas inerciales y aquellos efectos producidos por la viscosidad dinámica del fluido en cada poro del material, viene dada por

$$\rho(\omega) = \rho_0 \left( 1 - \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right) G_1 \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right) \right). \quad (2.4)$$

El módulo de compresibilidad dinámico, que relaciona la divergencia del desplazamiento medio del aire y la variación media de la presión en cada unidad de volumen del material poroso, viene dado por

$$K(\omega) = \gamma P_0 \left( \gamma - \frac{\gamma - 1}{1 - \left( \frac{1}{i8\pi N_{pr}} \right) \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right)^{-1} G_2 \left( \frac{\rho_0 f}{\sigma} \right)} \right)^{-1}, \quad (2.5)$$

siendo  $\gamma$  el cociente de calores específicos del fluido a presión y volumen constante, y  $P_0$  la presión del fluido en reposo.

Nótese que aunque el comportamiento acústico del material queda perfectamente caracterizado por los coeficientes (2.4)-(2.5), el núcleo de cálculo ACTRAN sólo admite como entrada de datos la densidad de masa y la velocidad de propagación del sonido.

Dado que en el modelo de Allard-Champoux tanto la densidad,  $\rho(\omega)$ , como el módulo de compresibilidad,  $K(\omega)$ , son dinámicos, la velocidad de propagación del sonido en el medio poroso resulta dinámica y definida por

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{K(\omega)}{\rho(\omega)}}.$$

En conclusión, la ecuación que gobierna la presión armónica en el medio poroso se puede escribir como

$$-\omega^2 P - c^2(\omega) \Delta P = 0,$$

y los campos de velocidades, desplazamientos y intensidades se calculan de forma análoga al caso del fluido,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{1}{i\omega\rho(\omega)} \text{grad}P, \\ \mathbf{I} &= P\mathbf{V}, \\ \mathbf{U} &= -i\omega\mathbf{V}, \end{aligned}$$

donde la densidad de masa ahora depende de la frecuencia (aunque sigue siendo constante con respecto a las variables espaciales).

### 2.2.3. Modelo de Reissner-Mindlin para placas

Aunque el núcleo de cálculo ACTRAN no tiene especificado en su manual que tipo de modelo matemático de placa tiene implementado, los valores que se toman como

datos de entrada, parecen indicar que se utiliza el modelo de placa Reissner-Mindlin (véase [22, 18] o [21] para una discusión más detallada). Este trabajo se restringirá al caso de placas formadas por materiales homogéneos e isótropos que satisfacen la ley de Hooke de la elasticidad lineal.

Por simplicidad, en lo que sigue se asume que la placa es paralela al plano definido por los ejes cartesianos  $x$  e  $y$ , sobre la que tiene su plano medio, y posee un espesor  $\zeta$  constante. Por lo tanto, el dominio ocupado por la placa viene dado por  $\Omega \times (-\zeta/2, \zeta/2)$ , donde  $\Omega$  denota el dominio bidimensional de su superficie paralela al plano  $xy$ .

En el caso de las placas del autobús, la anterior suposición geométrica no es siempre correcta, ya que existen placas situadas en distintos planos diferentes al plano  $xy$ . Sin embargo, el dominio de cualquier placa puede ser transformado por un movimiento rígido, de tal forma que el eje  $z$  coincida con el eje perpendicular al plano que define la superficie plana de la placa. Para construir dicha transformación rígida, basta tomar un vector normal  $\mathbf{n}$  a la superficie de la placa, un punto  $P$  de su plano medio y calcular la inversa de la transformación afín  $P + z\mathbf{n}$ .

El modelo de Reissner-Mindlin se caracteriza por suponer que las fibras transversales de la placa sigue siendo planas y perpendiculares a la superficie lateral de la placa a lo largo del movimiento vibratorio que posee. Esta suposición conlleva la introducción de los ángulos de rotaciones de las fibras transversales de la placa como nuevas variables del problema. En lo que sigue, para derivar las ecuaciones que gobiernan dicho modelo, se supondrá un modelo un poco más general conocido como modelo de Naghdi para placas [19, 11].

Si el campo de desplazamientos en régimen armónico de la placa se denotado por  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^t$ , el modelo de Naghdi asume que existen cinco funciones que dependen sólo de las variables espaciales  $x$  e  $y$  tales que

$$U_1(x, y, z) = u(x) - z\beta_x(x), \quad (2.6)$$

$$U_2(x, y, z) = v(x) - z\beta_y(x), \quad (2.7)$$

$$U_3(x, y, z) = w(x), \quad (2.8)$$

donde  $u, v, w$  son los campos de desplazamiento y  $\beta_x, \beta_y$  son las rotaciones asociados al movimiento de la fibra normal en cada punto del plano medio de la placa.

Para derivar las ecuaciones que gobiernan seguiremos formalmente el procedimiento que aparece en [22]. Para simplificar su derivación, supondremos que tanto las fuerzas de carga superficiales y volumétricas como las condiciones de contorno esenciales que actúan sobre la placa son nulas.

Puesto que el material de la placa tiene un comportamiento elástico lineal, el campo de desplazamientos armónico satisface

$$-\omega^2 \rho \mathbf{U} - \operatorname{div} \sigma(\varepsilon(\mathbf{U})) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (-\zeta/2, \zeta/2), \quad (2.9)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia angular,  $\rho$  la densidad de masa,  $\sigma$  el tensor de tensiones y  $\varepsilon$  el tensor de deformaciones dado por  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$ , para  $1 \leq i, j \leq 3$ .

La relación entre el tensor de tensiones y deformaciones está determinada por la ley constitutiva lineal del material, en el régimen de las pequeñas deformaciones. En este

caso, para derivar el modelo de placas se supone que se satisface la ley de Hooke

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} - \nu\varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} - \nu\varepsilon_{11}), \\ \sigma_{i3}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \kappa G \varepsilon_{i3}, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $G$  es el coeficiente de cizallamiento, y  $\kappa$  es el factor de corrección del cizallamiento. Este factor corrector depende de la geometría de la placa y no directamente de las propiedades elásticas del material de la barra. Usualmente se toma como valor  $\kappa = 5/6$ .

La última hipótesis del modelo de Reissner-Mindlin es  $\sigma_{33} = 0$ . Debe hacerse notar que esta hipótesis no es consistente con las expresiones de los desplazamientos dadas por (2.6)-(2.8), ya que que los desplazamientos transversales no deberían depender de la coordenada  $z$ .

Para derivar formalmente el sistema de ecuaciones en derivadas parciales del modelo de Naghdi es útil describir los tensores de deformaciones y tensiones por bloques. Con este objetivo, introducimos  $\boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{e}$ , tensores de orden dos y tamaño  $2 \times 2$ , tales que

$$\begin{aligned}e_{ij}((U_1, U_2)^t) &= \varepsilon_{ij}((U_1, U_2, 0)^t) && \text{para } 1 \leq i, j \leq 2, \\ \tau_{ij}(\boldsymbol{e}((U_1, U_2)^t)) &= \sigma_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}((U_1, U_2, 0)^t)) && \text{para } 1 \leq i, j \leq 2,\end{aligned}$$

para cualquiera que sea el campo vectorial  $(U_1, U_2)^t$ .

Teniendo en cuenta las hipótesis sobre los desplazamientos (2.6)-(2.8), las componentes no nulas del tensor de deformaciones se pueden escribir como

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}) = e_{ij}((u, v)^t) - z e_{ij}((\beta_1, \beta_2)^t) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq 2, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{13}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_1 \right), \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{23}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_2 \right), \quad (2.12)$$

y, por lo tanto, los coeficientes no nulos del tensor de tensiones son

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \tau_{ij}(\boldsymbol{e}) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq 2, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{12}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \kappa G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_1 \right), \quad (2.14)$$

$$\sigma_{13}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \kappa G \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_2 \right). \quad (2.15)$$

Ahora se procederá a escribir formalmente la formulación variacional asociada a (2.9). Multiplicando esta ecuación por un desplazamiento virtual  $\boldsymbol{\delta U}$  que verifica las

condiciones de contorno homogéneas, e integrando por partes en  $\Omega \times (-\zeta/2, \zeta/2)$ , se obtiene

$$-\omega^2 \int_{\Omega} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \rho \mathbf{U} \cdot \delta \mathbf{U} \, dz \, dS + \int_{\Omega} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{U}) \, dz \, dS = 0,$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \rho (U_1 \delta U_1 + U_2 \delta U_2 + U_3 \delta U_3) \, dz \, dS \\ & + \int_{\Omega} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((U_1, U_2)^t))) : \mathbf{e}((\delta U_1, \delta U_2)^t) \\ & \quad + 2\sigma_{12}(\mathbf{U})\varepsilon_{12}(\delta \mathbf{U}) + 2\sigma_{13}(\mathbf{U})\varepsilon_{13}(\delta \mathbf{U}) + \sigma_{33}(\mathbf{U})\varepsilon_{33}(\delta \mathbf{U}) \, dz \, dS = 0. \end{aligned}$$

Si se aplican las suposiciones hechas sobre el campo de desplazamientos (2.6)-(2.8) tanto para  $\mathbf{U}$  como para el campo virtual  $\delta \mathbf{U}$ , y se tienen en cuenta las expresiones (2.10)-(2.15), se tiene

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \rho \{u\delta u + v\delta v + w\delta w - z(u\delta\beta_1 + \beta_1\delta u + v\delta\beta_2 + \beta_2\delta v) \\ & \quad + z^2(\beta_1\delta\beta_1 + \beta_2\delta\beta_2)\} \, dz \, dS \\ & + \int_{\Omega} \int_{-\zeta/2}^{\zeta/2} \{ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((u, v)^t)) : \mathbf{e}((\delta u, \delta v)^t) \\ & \quad - z(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((u, v)^t)) : \mathbf{e}((\delta\beta_1, \delta\beta_2)^t) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((\beta_1, \beta_2)^t)) : \mathbf{e}((\delta u, \delta v)^t)) \\ & \quad + z^2(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((\beta_1, \beta_2)^t)) : \mathbf{e}((\delta\beta_1, \delta\beta_2)^t) \\ & \quad + \kappa G(\text{grad}w - (\beta_1, \beta_2)^t) \cdot (\text{grad}\delta w - (\delta\beta_1, \delta\beta_2)^t) \} \, dz \, dS = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que tanto las funciones que determinan los desplazamientos  $u, v, w$  como los ángulos que definen las rotaciones  $\beta_1, \beta_2$  son independientes de la coordenada cartesiana  $z$ , es inmediato integrar con respecto a esta variable y obtener

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_{\Omega} \rho \left\{ \zeta(u\delta u + v\delta v + w\delta w) + \frac{\zeta^3}{12}(\beta_1\delta\beta_1 + \beta_2\delta\beta_2) \right\} \, dS \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \zeta \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((u, v)^t)) : \mathbf{e}((\delta u, \delta v)^t) + \frac{\zeta^3}{12}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((\beta_1, \beta_2)^t)) : \mathbf{e}((\delta\beta_1, \delta\beta_2)^t) \right. \\ & \quad \left. + \zeta \kappa G(\text{grad}w - (\beta_1, \beta_2)^t) \cdot (\text{grad}\delta w - (\delta\beta_1, \delta\beta_2)^t) \right\} \, dS = 0. \end{aligned}$$

Si ahora se utiliza la fórmula de Green para evitar la derivación en los desplazamientos virtuales y se tiene en cuenta que la derivación ha sido hecha para un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{U}$  arbitrario que verifica (2.6)-(2.8), se obtiene la formulación diferencial fuerte del modelo de Naghdi para el problema dinámico de vibraciones sin cargas de una placa

en régimen armónico:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho \zeta (u, v)^t - \zeta \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((u, v)^t)) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ -\omega^2 \rho \frac{\zeta^3}{12} (\beta_1, \beta_2)^t - \frac{\zeta^3}{12} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}((\beta_1, \beta_2)^t)) - \kappa G \zeta (\operatorname{grad} w - (\beta_1, \beta_2)^t) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ -\kappa G \zeta \operatorname{div} (\operatorname{grad} w - (\beta_1, \beta_2)^t) &= 0 && \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Como caso particular de este modelo, si se supone que los desplazamientos tangenciales al plano medio de la placa no están permitidos (por ejemplo, si la placa está encastrada en su frontera), los campos de desplazamiento  $u$  y  $v$  son nulos, con lo que se recupera así, la formulación clásica del modelo de Reissner-Mindlin.

Por último, se debe destacar que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (2.29)-(2.34), está planteado en un dominio bidimensional, lo que desde el punto de vista del coste computacional, representa un ahorro si se compara con el coste que supondría resolver el problema de elasticidad lineal tridimensional del que se había partido en la derivación del modelo.

Nótese también, que el sistema (2.29)-(2.34) debería ser completado con las condiciones de contorno adecuadas sobre la frontera de la placa.

#### 2.2.4. Modelo de Timoshenko para barras

Aunque el núcleo de cálculo ACTRAN no tiene especificado en su manual que tipo de modelo matemático de barra tiene implementado, a partir de los valores que toma como dato de entrada, se ha supuesto que utiliza el modelo de Timoshenko [24]. Este trabajo se restringirá al caso de barras formadas por materiales homogéneos e isótropos que satisfacen la ley de Hooke de la elasticidad lineal.

Por simplicidad, en lo que sigue se asumirá que la barra tiene un eje longitudinal recto y que este coincide con el eje cartesiano de la variable espacial  $x$ . Evidentemente, en un caso general como puede ser el de cualquier barra de la estructura del autobús, esta simplificación no es correcta. Sin embargo, cualquier barra recta de extremos  $P$  y  $Q$ , puede ser transformada por un movimiento rígido, de tal forma que el eje  $x$  coincida con el eje longitudinal de la barra. Para construir dicha transformación rígida, basta tomar el vector que une los extremos de la barra  $\vec{PQ}$  y calcular la inversa de la transformación afín  $P + x\vec{PQ}$ .

Al igual que en el modelo de placas descrito en la sección anterior, el modelo de Timoshenko se caracteriza por suponer que la sección transversal de la barra sigue siendo plana y perpendicular a la superficie lateral de la barra, a lo largo del movimiento vibratorio que posee. Esta suposición conlleva la introducción de los ángulos de rotaciones de las secciones transversales de la barra como nuevas variables del problema.

Si el campo de desplazamientos en régimen armónico de la barra es denotado por  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^t$ , el modelo de Timoshenko asume que existen seis funciones que dependen sólo de la coordenada espacial  $x$  tales que

$$U_1(x, y, z) = u(x) - y\theta(x) + z\psi(x), \quad (2.16)$$

$$U_2(x, y, z) = v(x) - z\varphi(x), \quad (2.17)$$

$$U_3(x, y, z) = w(x) - y\varphi(x), \quad (2.18)$$

donde  $u, v, w$  son los campos de desplazamiento y  $\theta, \psi, \varphi$  son las rotaciones asociados al movimiento de la sección transversal en cada punto del eje de la barra.

Por simplicidad, puesto que en el caso del autobús todas las barras tienen la misma sección transversal en cualquier punto de su eje, se asumirá adicionalmente esta hipótesis. Por tanto, se denotará por  $(0, L) \times \Omega$  el dominio tridimensional ocupado por la barra, siendo  $\Omega$  su sección transversal bidimensional. También se supondrá que el eje  $x$  coincide con el centro de gravedad y con el centro cortante de su sección transversal.

Para derivar las ecuaciones que gobiernan el movimiento de las barras, se seguirá un procedimiento análogo al que es usado en [25]. Para simplificar su derivación, se supondrá que tanto las fuerzas de carga superficiales y volumétricas como las condiciones de contorno esenciales de la barra son nulas.

Puesto que el material de la barra tiene un comportamiento elástico lineal, el campo de desplazamientos armónico satisface

$$-\omega^2 \rho \mathbf{U} - \operatorname{div} \sigma(\varepsilon(\mathbf{U})) = 0 \quad \text{en } (0, L) \times \Omega, \quad (2.19)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia angular,  $\rho$  la densidad de masa,  $\sigma$  el tensor de tensiones y  $\varepsilon$  el tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$ , para  $1 \leq i, j \leq 3$ .

La relación entre el tensor de tensiones y deformaciones determinan la ley constitutiva lineal del material, en el régimen de las pequeñas deformaciones. En este caso, para derivar el modelo de Timoshenko se supondrá que

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{12} = \kappa G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = \kappa G\varepsilon_{13}, \quad (2.20)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $G$  es el coeficiente de cizallamiento, y  $\kappa$  es el factor de corrección de Timoshenko para el cizallamiento. Este factor corrector depende de la geometría de la sección transversal y no directamente de las propiedades elásticas del material de la barra. Adicionalmente, también se supondrá que

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \quad (2.21)$$

aunque estas tres condiciones no son consistentes con las expresiones de los desplazamientos dadas por (2.16)-(2.18). Teniendo en cuenta estas hipótesis sobre los desplazamientos, las componentes no nulas del tensor de deformaciones se pueden escribir como

$$\varepsilon_{11} = \frac{du}{dx} - y \frac{d\theta}{dx} + z \frac{d\psi}{dx}, \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} - z \frac{d\varphi}{dx} - \theta \right), \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} + y \frac{d\varphi}{dx} + \psi \right), \quad (2.24)$$

y, por lo tanto, los coeficientes no nulos del tensor de tensiones son

$$\sigma_{11} = E \left( \frac{du}{dx} - y \frac{d\theta}{dx} + z \frac{d\psi}{dx} \right), \quad (2.25)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\kappa G}{2} \left( \frac{dv}{dx} - z \frac{d\varphi}{dx} - \theta \right), \quad (2.26)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\kappa G}{2} \left( \frac{dw}{dx} + y \frac{d\varphi}{dx} + \psi \right). \quad (2.27)$$

Ahora se procederá a escribir formalmente la formulación variacional asociada a (2.19). Multiplicando esta ecuación por un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{U}$  que verifica las condiciones de contorno homogéneas, se obtiene al integrar por partes en  $(0, L) \times \Omega$ ,

$$-\omega^2 \int_0^L \int_{\Omega} \rho \mathbf{U} \cdot \delta \mathbf{U} \, dS \, dx + \int_0^L \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{U}) \, dS \, dx = 0,$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_0^L \int_{\Omega} \rho (U_1 \delta U_1 + U_2 \delta U_2 + U_3 \delta U_3) \, dS \, dx \\ & + \int_0^L \int_{\Omega} (\sigma_{11}(\mathbf{U}) \varepsilon_{11}(\delta \mathbf{U}) + 2\sigma_{12}(\mathbf{U}) \varepsilon_{12}(\delta \mathbf{U}) + 2\sigma_{13}(\mathbf{U}) \varepsilon_{13}(\delta \mathbf{U})) \, dS \, dx = 0. \end{aligned}$$

Si se aplican las suposiciones hechas sobre el campo de desplazamientos (2.16)-(2.18) tanto para  $\mathbf{U}$  como para el campo virtual  $\delta \mathbf{U}$ , y se tienen en cuenta las expresiones (2.22)-(2.27), después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_0^L \int_{\Omega} \rho ((u - y\theta + z\psi)\delta u + (v - z\varphi)\delta v + (w + y\varphi)\delta w - y(u - y\theta + z\psi)\delta\theta \\ & \quad + z(u - y\theta + z\psi)\delta\psi + (yw - zv + (y^2 + z^2)\varphi)\delta\varphi) \, dS \, dx \\ & + \int_0^L \int_{\Omega} \left\{ E \left( \frac{du}{dx} - y \frac{d\theta}{dx} + z \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d\delta u}{dx} - E \left( y \frac{du}{dx} - y^2 \frac{d\theta}{dx} + yz \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d\delta\theta}{dx} \right. \\ & \quad + E \left( z \frac{du}{dx} - yz \frac{d\theta}{dx} + z^2 \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d\delta\psi}{dx} + \kappa G \left( \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) - z \frac{d\varphi}{dx} \right) \left( \frac{d\delta v}{dx} - \delta\theta \right) \\ & \quad + \kappa G \left( \left( \frac{dw}{dx} + \psi \right) - y \frac{d\varphi}{dx} \right) \left( \frac{d\delta w}{dx} - \delta\psi \right) \\ & \quad \left. + \kappa G \left( y \left( \frac{dw}{dx} + \psi \right) - z \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) + (y^2 + z^2) \frac{d\varphi}{dx} \right) \frac{d\delta\varphi}{dx} \right\} \, dS \, dx = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde  $\delta u, \delta v, \delta w$  son los campos de desplazamiento y  $\delta\theta, \delta\psi, \delta\varphi$  son las rotaciones asociados al desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{U}$ .

Puesto que todas las funciones involucradas en la ecuación anterior sólo dependen de la variable espacial  $x$ , la ecuación anterior se puede simplificar si se introduce el área y los momentos de inercia de primer orden

$$A = \int_{\Omega} 1 \, dS, \quad A_y = \int_{\Omega} y \, dS, \quad A_z = \int_{\Omega} z \, dS,$$

y los momentos de inercia de segundo orden

$$I_{yy} = \int_{\Omega} y^2 dS, \quad I_{zz} = \int_{\Omega} z^2 dS, \quad I_{yz} = \int_{\Omega} yz dS.$$

Nótese que debido a las simplificaciones hechas, el módulo de torsión  $J = I_{yy} + I_{zz}$ . En el caso en el que el centro cortante no coincida sobre el eje longitudinal de la viga, no se tiene esta igualdad en general.

Teniendo en cuenta estas definiciones de los momentos de inercia y utilizando que la densidad de masa y los coeficientes  $E$  y  $G$  son constantes en toda la barra, a partir de (2.28) se puede escribir

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \int_0^L \rho((Au - A_y\theta + A_z\psi)\delta u + (Av - A_z\varphi)\delta v + (Aw + A_y\varphi)\delta w) dx \\ & -\omega^2 \int_0^L \rho(-(A_yu - I_{yy}\theta + I_{yz}\psi)\delta\theta + (A_zu - I_{yz}\theta + I_{zz}\psi)\delta\psi) dx \\ & -\omega^2 \int_0^L \rho(A_yw - A_zv + (I_{yy} + I_{zz})\varphi)\delta\varphi dx \\ & + \int_0^L \left\{ E \left( A \frac{du}{dx} - A_y \frac{d\theta}{dx} + A_z \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d\delta u}{dx} \right. \\ & \quad + E \left( A_y \frac{du}{dx} - I_{yy} \frac{d\theta}{dx} + I_{yz} \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d\delta\theta}{dx} \\ & \quad + E \left( A_z \frac{du}{dx} - I_{yz} \frac{d\theta}{dx} + I_{zz} \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d\delta\psi}{dx} \\ & \quad + \kappa G \left( A \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) - A_z \frac{d\varphi}{dx} \right) \left( \frac{d\delta v}{dx} - \delta\theta \right) \\ & \quad + \kappa G \left( A \left( \frac{dw}{dx} + \psi \right) + A_y \frac{d\varphi}{dx} \right) \left( \frac{d\delta w}{dx} - \delta\psi \right) \\ & \quad \left. + \kappa G \left( A_y \left( \frac{dw}{dx} + \psi \right) - A_z \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) + (I_{yy} + I_{zz}) \frac{d\varphi}{dx} \right) \frac{d\delta\varphi}{dx} \right\} dx = 0. \end{aligned}$$

Si ahora se integra por partes para evitar la derivación en los campos que dependen de los desplazamientos virtuales y se tiene en cuenta que la derivación ha sido hecha para un desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{U}$  arbitrario, se obtiene la formulación diferencial fuerte del modelo de barra Timoshenko para el problema dinámico de vibraciones sin

cargas en régimen armónico:

$$-\omega^2 \rho (A_u - A_y \theta + A_z \psi) - E \left( A \frac{d^2 u}{dx^2} - A_y \frac{d^2 \theta}{dx^2} + A_z \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{en } (0, L), \quad (2.29)$$

$$-\omega^2 \rho (A_v - A_z \varphi) - \kappa G \left( A \left( \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) - A_z \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{en } (0, L), \quad (2.30)$$

$$-\omega^2 \rho (A_w + A_y \varphi) - \kappa G \left( A \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx} \right) + A_y \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{en } (0, L), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho (A_y u - I_{yy} \theta + I_{yz} \psi) - E \left( A_y \frac{d^2 u}{dx^2} - I_{yy} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + I_{yz} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) \\ - \kappa G \left( A \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) - A_z \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0 \quad \text{en } (0, L), \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho (A_z u - I_{yz} \theta + I_{zz} \psi) - E \left( A_z \frac{d^2 u}{dx^2} - I_{yz} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + I_{zz} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) \\ - \kappa G \left( A \left( \frac{dw}{dx} + \psi \right) + A_y \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0 \quad \text{en } (0, L), \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho (A_y w - A_z v + (I_{yy} + I_{zz}) \varphi) - \kappa G A_y \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx} \right) \\ - \kappa G \left( -A_z \left( \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} \right) + (I_{yy} + I_{zz}) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{en } (0, L). \quad (2.34) \end{aligned}$$

Por último, se debe destacar que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.29)-(2.34), de seis ecuaciones con seis funciones incógnita, debe completarse con las condiciones de contorno adecuadas en los extremos de la barra, esto es, en los puntos  $x = 0$  y  $x = L$ .

Nótese que el modelo utilizado por el núcleo de cálculo ACTRAN debe implementar un modelo de barra más sofisticado de una forma más general ya que permite introducir factores correctores de cizallamiento  $\kappa_y$  y  $\kappa_z$  diferentes para cada tensión  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{13}$ , respectivamente.

### 2.3. Condiciones de contorno

Una vez estudiados cada uno de los modelos que gobiernan el movimiento en la parte fluida, porosa y estructural del problema del autobús, se debe precisar cuales son las condiciones de contorno que se han impuesto sobre la frontera de cada dominio donde se han planteado los distintos modelos.

En el caso de los dominios rellenos de fluido compresible (en el caso del autobús, aire), las condiciones de contorno que aparecen en su frontera pueden ser de tres tipos: (A) acoplamiento fluido-placa, (B) condición de salto debido a una placa micro-perforada y (C) condición de radiación de orden cero. En lo que sigue, se precisa la descripción de cada una de estas condiciones.

#### (A) Condición de acoplamiento fluido-placa

Si se denota por  $\mathbf{V}_f$  y  $P_f$  el campo de velocidades y presiones en la parte fluida, por  $\mathbf{U}_s$  y  $\mathbf{F}_s$ , el campo de desplazamientos y fuerzas superficiales ejercidas por la placa, y

$\mathbf{n}$  denota el vector unitario exterior al fluido y normal a la superficie de acoplamiento, la condición de acoplamiento

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{n} &= -i\omega \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n}, \\ -P_f &= \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n},\end{aligned}$$

garantiza la continuidad de los desplazamientos normales y de las fuerzas superficiales normales sobre la interfaz común al fluido y la placa.

**(B) Condición de salto debido a una placa micro-perforada (MPP)**

Los elementos absorbentes delgados de reacción local, como puede ser el caso de placas micro-perforadas, velos o recubrimientos porosos pegados a una interfaz de contacto entre dos fluidos, en general, no se modelan mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, sino que se aproximan con la ayuda de condiciones de salto [20] entre los medios que lo rodean.

En el caso de una placa micro-perforada, se denota por  $(\mathbf{V}_+, P_+)$  y  $(\mathbf{V}_-, P_-)$ , el campo de velocidades y presiones a cada uno de los lados de la interfaz donde se sitúa la placa micro-perforada, y  $\mathbf{n}_+, \mathbf{n}_-$  los vectores unitarios normales a la interfaz de la placa MPP donde  $\mathbf{n}_+$  apunta del lado “-” al lado “+” y  $\mathbf{n}_-$  apunta del lado “+” al lado “-”. La condición de salto que caracteriza la placa micro-perforada viene dada por

$$\mathbf{V}_+ \cdot \mathbf{n}_+ = -\mathbf{V}_- \cdot \mathbf{n}_-, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{V}_+ \cdot \mathbf{n}_+ = \frac{1}{Z_{\text{mpp}}(\omega)}(P_+ - P_-), \quad (2.36)$$

donde  $Z_{\text{mpp}}$  es la impedancia asociada a la placa micro-perforada.

Esta condición de salto garantiza la continuidad de las velocidades normales. Esta velocidad normal se calcula a partir del salto de presiones entre las dos caras de la interfaz de la placa. En la bibliografía existen diferentes formas de caracterizar las impedancias asociadas a los elementos MPP [8]. En este proyecto, se ha escogido la fórmula propuesta por Maa [16, 17] que viene dada por la expresión

$$Z_{\text{mpp}}(\omega) = -i \frac{\omega \rho \zeta}{s} \left( 1 - \frac{2}{d\sqrt{-i}} \frac{J_1(d\sqrt{-i})}{J_0(d\sqrt{-i})} \right)^{-1},$$

donde  $d = r_0 \sqrt{\rho\omega/\eta}$ ,  $\rho$  y  $\eta$  son, respectivamente, la densidad de masa y el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido que rodea a la placa MPP,  $\zeta$  es el espesor de la placa MPP,  $r_0$  es el radio de las perforaciones,  $s$  es el tanto por uno de superficie perforada en la placa, y  $J_n(\cdot)$  son las funciones de Bessel de primera clase y orden  $n$ .

El núcleo de cálculo ACTRAN permite incorporar esta condición de contorno de salto (2.35)-(2.36) mediante una función de transferencia que vincula las presiones y las velocidades en ambas caras de la placa MPP mediante el sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_+ \cdot \mathbf{n}_+ \\ \mathbf{V}_- \cdot \mathbf{n}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{\text{mpp}}(\omega) & -Y_{\text{mpp}}(\omega) \\ -Y_{\text{mpp}}(\omega) & Y_{\text{mpp}}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix},$$

donde  $Y_{\text{mpp}}(\omega) = 1/Z_{\text{mpp}}(\omega)$  es la admitancia asociada a la placa micro-perforada.

**(C) Condición de radiación de orden cero**

En la parte de la frontera del dominio del fluido que no está en contacto con ninguna parte de la estructura, se supone que está conectada con el dominio fluido exterior que rodea a la estructura. Este dominio fluido exterior no es simulado en el presente trabajo. Sin embargo, para aproximar la influencia que tendría sobre esta parte de la frontera, se ha escogido la condición absorbente de orden cero

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mathbf{n}} - i\frac{\omega}{c}P_f = 0,$$

donde  $P_f$  es la presión en el fluido y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal exterior a la frontera. Teniendo en cuenta que la velocidad normal se escribe como  $\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{n} = (1/i\omega\rho)\partial P_f/\partial \mathbf{n}$ , la anterior condición de absorción se puede interpretar como la condición de admitancia (implementada en el núcleo de cálculo ACTRAN)

$$\frac{\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{n}}{P_f} = Y_f,$$

siendo  $Y_f = 1/(\rho c)$  la admitancia característica del fluido.

Finalmente, debemos precisar también las condiciones de contorno que se imponen sobre los elementos de la estructura del autobús. Además del ya descrito acoplamiento entre la parte fluida y la parte estructural, debemos precisar: (D) acoplamiento barra-barra, placa-placa, o placa-barra, (E) condición en los puntos de montaje de la suspensión, (F) condición en los anclajes del motor, y (G) condición de carga libre sobre la estructura. Veamos cada una de ellas en detalle.

**(D) Acoplamiento barra-barra, placa-placa, o placa-barra**

Puesto que la estructura está formada por placas o barras conectadas entre si, el comportamiento del conjunto de la estructura viene determinado no sólo por los modelos que se utilizan en cada componente, sino también por las condiciones de acoplamiento entre ellos.

Considérense  $(\mathbf{U}_+, \Theta_+)$  y  $(\mathbf{U}_-, \Theta_-)$  respectivamente los campos de desplazamientos y los ángulos de las rotaciones que definen el movimiento de dos elementos de la estructura. Recuérdese que estas incógnitas ya fueron introducidas en los modelos de placas y/o barras estudiados en las secciones precedentes. En este trabajo, se han utilizado las condiciones de acople

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_+ &= \mathbf{U}_-, \\ \Theta_+ &= \Theta_-, \end{aligned}$$

que preservan la continuidad de desplazamientos y rotaciones entre todos los elementos de la estructura.

**(E) Condición en los puntos de montaje de la suspensión**

Para modelar que los puntos de montaje de la suspensión están fijos, se ha considerado la condición de contorno Dirichlet homogénea sobre las tres componentes del desplazamiento en dichos puntos.

**(F) Condición en los puntos de anclaje del motor**

Una de las principales fuentes de ruido y vibraciones tiene su origen en el motor. Para

incorporar las vibraciones que el funcionamiento del motor produce sobre sus puntos de anclaje en la estructura, se ha decidido imponer en estos puntos una condición Dirichlet no homogénea sobre las tres componentes del desplazamiento.

### (G) Carga libre sobre la estructura

A pesar de que la estructura del autobús está rodeada en su parte exterior por un dominio fluido (el aire que rodea al autobús), en la modelización realizada en este trabajo no se ha tenido en cuenta esta interacción. La condición de acoplamiento que debería existir entre la estructura y el fluido exterior ha sido reemplazada por la imposición de fuerzas superficiales nulas en la cara exterior de todas las placas que forman la estructura del autobús.

## 2.4. Materiales

Los subdominios asociados a la cavidad principal, las bóvedas y el habitáculo del motor, están llenos de aire, que, como fluido compresible no viscoso, está caracterizado por su densidad de masa,  $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$ , y por la velocidad de propagación del sonido,  $c = 343 \text{ m/s}$ .

Puesto que el material poroso se modelada como un fluido equivalente donde la densidad de masa y el módulo de compresibilidad son dinámicos, es decir, que dependen de la frecuencia, basta fijar las constantes que definen las expresiones del modelo de Allard-Champoux para caracterizar el comportamiento del material.

En este caso se ha escogido el cociente de calores específicos  $\gamma = 1.4$ , la resistencia al flujo  $\sigma = 1e+4 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}^2$ , la presión del fluido en reposo  $P_0 = 1.0132e+05 \text{ Pa}$ , y el número de Pradtl  $N_{pr} = 0.71$ .

Las barras de la estructura del autobús están compuestas de acero. Para caracterizar la respuesta elástica lineal del acero, se considera como módulo de Young  $E = 2e+11 \text{ Pa}$ , el coeficiente de Poisson  $\nu = 2.90e-1$ , y la densidad de masa  $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$ .

Además de los coeficientes físicos anteriormente descritos, el núcleo de cálculo ACTRAN necesita información adicional sobre la geometría de la sección transversal de cada una de las barras. Los valores de las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4, han sido calculados a partir de las dimensiones de la sección transversal de cada una de las barras y de las propiedades del material que las componen usando el pre-procesador MSC.PATRAN con la plantilla para NASTRAN (véase [5] y [4] para una descripción más detallada).

Las Tablas 2.2 y 2.3 muestran los valores de los momentos de inercia de segundo orden  $I_{yy}$ ,  $I_{yz}$  y  $I_{zz}$ , el módulo de torsión  $J$ , los factores de corrección de cizallamiento  $\kappa_x$  y  $\kappa_y$ , y el valor del área de las secciones transversales de cada grupo de barras  $A$ .

Adicionalmente, es necesario proporcionar al núcleo de cálculo ACTRAN tanto las coordenadas del centro de gravedad  $(y_G, z_G)$ , como el centro de cizallamiento  $(y_C, z_C)$ . La Tabla 2.4 muestra los valores de estas coordenadas para cada grupo de barras de la estructura del autobús. Se debe remarcar que el centro de gravedad siempre es  $(0, 0)$  ya que el origen del sistema de coordenadas sobre el que se escribe el modelo de barras se sitúa sobre el centro de gravedad de la sección transversal.

Sin embargo, el centro de cizallamiento no siempre coincide con el centro de gravedad. Es posible demostrar que si la sección transversal es simétrica con respecto al eje

$y$ , entonces la coordenada  $y_C = y_G = 0$ . Una propiedad análoga también se satisface en el caso de la simetría con eje  $z$  y la coordenada del centro de cortadura.

	Barra	Pletina	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_{yy}/A$ [m <sup>2</sup> ]	$I_{yz}/A$ [m <sup>2</sup> ]
1	20x10x1.5	-	8.1000e-5	3.8007e-9	0.0000e-0
2	20x20x1.5	-	1.1100e-4	6.3732e-9	0.0000e-0
3	20x30x1.5	-	1.4100e-4	1.7116e-8	0.0000e-0
4	20x40x1.5	-	1.7100e-4	1.1518e-8	0.0000e-0
5	20x45x1.5	-	1.8600e-4	1.2805e-8	0.0000e-0
6	25x25x1.5	-	1.4100e-4	1.3031e-8	0.0000e-0
7	25x25x2.0	-	1.8400e-4	1.6345e-8	0.0000e-0
8	25x30x1.5	-	1.5600e-4	1.5105e-8	0.0000e-0
9	25x40x1.5	-	1.8600e-4	1.9252e-8	0.0000e-0
10	25x45x1.5	Plt103	4.5300e-4	2.9238e-8	0.0000e-0
11	25x45x1.5	-	2.0100e-4	2.1326e-8	0.0000e-0
12	30x15x1.5	-	1.2600e-4	4.5495e-9	0.0000e-0
13	30x20x1.5	-	1.4100e-4	8.9457e-9	0.0000e-0
14	30x25x1.5	Plt00D	3.1800e-4	3.0006e-8	0.0000e-0
15	30x25x1.5	-	1.5600e-4	1.5105e-8	0.0000e-0
16	30x30x1.5	Plt00C	2.8800e-4	2.8443e-8	0.0000e-0
17	30x30x1.5	-	1.7100e-4	2.3213e-8	0.0000e-0
18	30x30x2.0	Plt110	3.8000e-4	3.8207e-8	0.0000e-0
19	30x40x2.0	-	2.6400e-4	3.7272e-8	0.0000e-0
20	30x45x1.5	-	2.1600e-4	3.2359e-8	0.0000e-0
21	40x20x1.5	-	1.7100e-4	3.4908e-8	0.0000e-0
22	40x25x1.5	Plt00G	3.1800e-4	5.9415e-8	0.0000e-0
23	40x25x1.5	-	1.8600e-4	4.0469e-8	0.0000e-0
24	40x30x2.0	Plt110	5.8000e-4	1.0233e-7	9.6207e-9
25	40x40x1.5	-	2.3100e-4	5.7153e-8	0.0000e-0
26	40x40x2.0	-	3.0400e-4	7.3365e-8	0.0000e-0
27	40x40x4.0	-	5.7600e-4	1.2595e-7	0.0000e-0
28	40x45x2.0	-	3.2400e-4	8.0592e-8	0.0000e-0
29	45x15x1.5	-	1.7100e-4	3.9818e-8	0.0000e-0
30	45x25x1.5	-	2.0100e-4	5.4016e-8	0.0000e-0
31	45x45x1.5	-	2.6100e-4	8.2411e-8	0.0000e-0
32	45x45x2.0	-	3.4400e-4	1.0624e-7	0.0000e-0
33	45x45x3.0	Plt089	7.3800e-4	1.9314e-7	0.0000e-0
34	45x45x3.0	Plt113	7.3800e-4	1.9314e-7	0.0000e-0
35	45x45x3.0	-	5.0400e-4	1.4893e-7	0.0000e-0
36	45x70x3.0	-	6.5400e-4	2.1519e-7	0.0000e-0
37	60x20x1.5	-	2.3100e-4	9.7643e-8	0.0000e-0
38	60x40x2.0	-	3.8400e-4	1.9315e-7	0.0000e-0
39	60x40x3.0	Plt109	7.8000e-4	3.2634e-7	0.0000e-0
40	60x40x3.0	-	5.6400e-4	2.7385e-7	0.0000e-0
41	70x15x1.5	-	2.4600e-4	1.2799e-7	0.0000e-0
42	70x40x3.0	Plt050	9.4400e-4	5.0982e-7	0.0000e-0

43	70x40x3.0	Plt069	9.4400e-4	5.0982e-7	0.0000e-0
44	70x40x3.0	Plt071	9.4400e-4	5.0982e-7	0.0000e-0
45	70x40x3.0	Plt091	8.2800e-4	5.3050e-7	0.0000e-0
46	70x40x3.0	Plt092	8.2800e-4	5.3050e-7	0.0000e-0
47	70x40x3.0	Plt105	9.4400e-4	5.0982e-7	0.0000e-0
48	70x40x3.0	Plt111	9.4400e-4	5.0982e-7	0.0000e-0
49	70x40x3.0	-	6.2400e-4	4.0059e-7	0.0000e-0
50	70x45x2.0	-	6.5400e-4	4.3428e-7	0.0000e-0
51	70x45x3.0	-	4.4400e-4	3.0397e-7	0.0000e-0
52	80x40x3.0	Plt070	1.0540e-3	7.2738e-7	0.0000e-0
53	80x40x3.0	-	6.8400e-4	5.5853e-7	0.0000e-0
54	80x45x3.0	-	7.1400e-4	6.0302e-7	0.0000e-0
55	120x45x3.0	-	9.5400e-4	1.6650e-6	0.0000e-0

Tabla 2.2: Propiedades de las secciones transversales de los grupos de barras: área  $A$  y momentos de inercia de orden dos,  $I_{yy}$  y  $I_{yz}$ .

	Barra	Pletina	$I_{zz}/A$ [m <sup>2</sup> ]	$J/A$ [m <sup>2</sup> ]	$\kappa_x$	$\kappa_y$
1	20x10x1.5	-	1.1807e-9	2.7475e-9	6.2963e-1	2.5926e-1
2	20x20x1.5	-	6.3732e-9	9.4974e-9	4.5946e-1	4.5946e-1
3	20x30x1.5	-	8.9457e-9	1.7744e-8	5.7447e-1	3.6170e-1
4	20x40x1.5	-	3.4908e-8	2.6700e-8	2.9825e-1	6.4912e-1
5	20x45x1.5	-	4.6917e-8	3.1337e-8	2.7419e-1	6.7742e-1
6	25x25x1.5	-	1.3031e-8	1.9467e-8	4.6809e-1	4.6809e-1
7	25x25x2.0	-	1.6345e-8	2.4334e-8	4.5652e-1	4.5652e-1
8	25x30x1.5	-	2.0164e-8	2.5879e-8	4.2308e-1	5.1923e-1
9	25x40x1.5	-	4.0469e-8	3.9608e-8	3.5484e-1	5.9677e-1
10	25x45x1.5	Plt103	9.1060e-8	5.1194e-8	1.0596e-1	8.3444e-1
11	25x45x1.5	-	5.4016e-8	4.6791e-8	3.2836e-1	6.2687e-1
12	30x15x1.5	-	1.4067e-8	1.0574e-8	2.8571e-1	6.4286e-1
13	30x20x1.5	-	1.7116e-8	1.7744e-8	3.6170e-1	5.7447e-1
14	30x25x1.5	Plt00D	2.0677e-8	2.7235e-8	7.6415e-1	1.5094e-1
15	30x25x1.5	-	2.0164e-8	2.5879e-8	4.2308e-1	5.1923e-1
16	30x30x1.5	Plt00C	2.0429e-8	2.7205e-8	2.1875e-1	6.8750e-1
17	30x30x1.5	-	2.3213e-8	3.4724e-8	4.7368e-1	4.7368e-1
18	30x30x2.0	Plt110	3.9082e-8	4.6118e-8	6.8421e-1	2.1053e-1
19	30x40x2.0	-	5.8912e-8	6.8612e-8	3.9394e-1	5.4545e-1
20	30x45x1.5	-	6.1115e-8	6.4041e-8	3.7500e-1	5.8333e-1
21	40x20x1.5	-	1.1518e-8	2.6700e-8	6.4912e-1	2.9825e-1
22	40x25x1.5	Plt00G	2.4576e-8	4.2095e-8	2.9245e-1	6.2264e-1
23	40x25x1.5	-	1.9252e-8	3.9608e-8	5.9677e-1	3.5484e-1
24	40x30x2.0	Plt110	5.7789e-8	8.2350e-8	5.3448e-1	3.1034e-1
25	40x40x1.5	-	5.7153e-8	8.5600e-8	4.8052e-1	4.8052e-1
26	40x40x2.0	-	7.3365e-8	1.0974e-7	4.7368e-1	4.7368e-1
27	40x40x4.0	-	1.2595e-7	1.8662e-7	4.4444e-1	4.4444e-1

28	40x45x2.0	-	9.6987e-8	1.3185e-7	4.4444e-1	5.0617e-1
29	45x15x1.5	-	6.6082e-9	1.8151e-8	7.3684e-1	2.1053e-1
30	45x25x1.5	-	2.1326e-8	4.6791e-8	6.2687e-1	3.2836e-1
31	45x45x1.5	-	8.2411e-8	1.2347e-7	4.8276e-1	4.8276e-1
32	45x45x2.0	-	1.0624e-7	1.5901e-7	4.7674e-1	4.7674e-1
33	45x45x3.0	Plt089	1.7859e-7	2.4027e-7	2.6829e-1	6.3415e-1
34	45x45x3.0	Plt113	1.7859e-7	2.4027e-7	2.6829e-1	6.3415e-1
35	45x45x3.0	-	1.4893e-7	2.2226e-7	4.6429e-1	4.6429e-1
36	45x70x3.0	-	4.3428e-7	4.3589e-7	3.5780e-1	5.8716e-1
37	60x20x1.5	-	1.6663e-8	4.5634e-8	7.4026e-1	2.2078e-1
38	60x40x2.0	-	1.0227e-7	2.0240e-7	5.8333e-1	3.7500e-1
39	60x40x3.0	Plt109	1.7856e-7	3.1540e-7	6.9231e-1	2.3077e-1
40	60x40x3.0	-	1.4313e-7	2.8391e-7	5.7447e-1	3.6170e-1
41	70x15x1.5	-	1.0040e-8	3.1286e-8	8.1707e-1	1.4634e-1
42	70x40x3.0	Plt050	2.0885e-7	3.9793e-7	7.4576e-1	1.8432e-1
43	70x40x3.0	Plt069	2.0885e-7	3.9793e-7	7.4576e-1	1.8432e-1
44	70x40x3.0	Plt071	2.0885e-7	3.9793e-7	7.4576e-1	1.8432e-1
45	70x40x3.0	Plt091	1.8336e-7	3.7945e-7	4.2029e-1	4.9275e-1
46	70x40x3.0	Plt092	1.8336e-7	3.7945e-7	4.2029e-1	4.9275e-1
47	70x40x3.0	Plt105	2.0885e-7	3.9793e-7	7.4576e-1	1.8432e-1
48	70x40x3.0	Plt111	2.0885e-7	3.9793e-7	7.4576e-1	1.8432e-1
49	70x40x3.0	-	1.6371e-7	3.5454e-7	6.1538e-1	3.2692e-1
50	70x45x2.0	-	2.1519e-7	4.3589e-7	5.8716e-1	3.5780e-1
51	70x45x3.0	-	1.5250e-7	3.0810e-7	5.9459e-1	3.6937e-1
52	80x40x3.0	Plt070	2.3555e-7	4.8425e-7	7.7230e-1	1.6509e-1
53	80x40x3.0	-	1.8429e-7	4.2720e-7	6.4912e-1	2.9825e-1
54	80x45x3.0	-	2.4170e-7	5.2733e-7	6.2185e-1	3.2773e-1
55	120x45x3.0	-	3.4772e-7	9.1122e-7	7.1698e-1	2.4528e-1

Tabla 2.3: Propiedades de las secciones transversales de los grupos de barras: momento de inercia de orden dos  $I_{zz}$ , constante torsional  $J$  y factores de corrección del cizallamiento  $\kappa_x$  y  $\kappa_y$ .

	Barra	Pletina	$y_G$ [m]	$z_G$ [m]	$y_C$ [m]	$z_C$ [m]
1	20x10x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
2	20x20x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
3	20x30x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
4	20x40x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
5	20x45x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
6	25x25x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
7	25x25x2.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
8	25x30x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
9	25x40x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
10	25x45x1.5	Plt103	0	0	0.0000e-0	-8.8300e-4
11	25x45x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
12	30x15x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
13	30x20x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
14	30x25x1.5	Plt00D	0	0	-1.2579e-3	0.0000e-0
15	30x25x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
16	30x30x1.5	Plt00C	0	0	0.0000e-0	2.1875e-3
17	30x30x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
18	30x30x2.0	Plt110	0	0	-1.8947e-3	0.0000e-0
19	30x40x2.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
20	30x45x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
21	40x20x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
22	40x25x1.5	Plt00G	0	0	0.0000e-0	3.8994e-3
23	40x25x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
24	40x30x2.0	Plt110	0	0	-2.7931e-3	5.9387e-3
25	40x40x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
26	40x40x2.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
27	40x40x4.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
28	40x45x2.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
29	45x15x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
30	45x25x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
31	45x45x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
32	45x45x2.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
33	45x45x3.0	Plt089	0	0	0.0000e-0	3.0183e-3
34	45x45x3.0	Plt113	0	0	0.0000e-0	3.0183e-3
35	45x45x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
36	45x70x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
37	60x20x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
38	60x40x2.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
39	60x40x3.0	Plt109	0	0	1.8462e-3	0.0000e-0
40	60x40x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
41	70x15x1.5	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
42	70x40x3.0	Plt050	0	0	1.6757e-3	0.0000e-0
43	70x40x3.0	Plt069	0	0	1.6757e-3	0.0000e-0

44	70x40x3.0	Plt071	0	0	1.6757e-3	0.0000e-0
45	70x40x3.0	Plt091	0	0	0.0000e-0	-7.3551e-3
46	70x40x3.0	Plt092	0	0	0.0000e-0	-7.3551e-3
47	70x40x3.0	Plt105	0	0	1.6757e-3	0.0000e-0
48	70x40x3.0	Plt111	0	0	1.6757e-3	0.0000e-0
49	70x40x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
50	70x45x2.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
51	70x45x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
52	80x40x3.0	Plt070	0	0	1.5008e-3	0.0000e-0
53	80x40x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
54	80x45x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0
55	120x45x3.0	-	0	0	0.0000e-0	0.0000e-0

Tabla 2.4: Propiedades de las secciones transversales de los grupos de barras: coordenadas del centro de gravedad ( $y_G, z_G$ ) y del centro de cizallamiento o cortadura ( $y_C, z_C$ ).

Cada grupo de placas que forma parte de la estructura del autobús, está constituido por materiales diferentes. El modelo de placas que utiliza el núcleo de cálculo ACTRAN sólo necesita el módulo de Young  $E$ , el coeficiente de Poisson  $\nu$ , la densidad de masa  $\rho$  y el espesor de la placa para caracterizar el comportamiento elástico lineal de cada placa.

En el caso de las placas del grupo de bajos, están hechas de acero, donde  $E = 2e+11$ ,  $\nu = 2.90e-1$  Pa,  $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$  y tienen un espesor de  $1.20e-3$  m. En lo referente a las placas de las bóvedas, con un espesor de  $3.00e-3$  m, y a las placas del techo, con un espesor de  $1.50e-3$  m, se ha empleado aluminio, donde  $E = 6.9e+10$  Pa,  $\nu = 3.30e-1$ ,  $\rho = 2690 \text{ kg/m}^3$ . Para el caso de las placas del grupo de las ventanas, se ha utilizado cristal templado, donde  $E = 7.5e+10$  Pa,  $\nu = 2.40e-1$  y  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ .

Las zonas de refuerzo son un caso especial dentro de los grupos de placas, ya que están compuestas por dos placas pegadas con las mismas dimensiones. Una de las placas pertenece a la estructura de barras y actúa como refuerzo de la estructura de placas y que, como el resto de la estructura de barras, está realizada en acero. La otra placa está hecha del mismo material que el de las placas que la rodean. El núcleo de cálculo ACTRAN no permite acoplar dos placas pegadas sobre el mismo plano. Como aproximación naive para esta situación particular, la zona de refuerzo de los bajos se ha empleado como material el acero con  $E = 2e+11$  Pa,  $\nu = 2.90e-1$ ,  $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$ , y donde el espesor es la suma de los dos espesores,  $5.20e-3$  m. Para la zona de refuerzo de las ventanas, se ha calculado la media de los valores de los materiales de cada una de las placas, acero y cristal templado, resultando como valores  $E = 1.375e+11$  Pa,  $\nu = 2.65e-1$ ,  $\rho = 5085 \text{ kg/m}^3$ , mientras que el espesor es la suma de los espesores de las dos placas,  $8.00e-3$  m.

Debido a las propiedades elásticas del caucho, entendido como un material particular dentro de la familia de los elastómeros, se ha seguido el trabajo [15]. El caucho se ha modelado como un material homogéneo isótropo gobernado por la elasticidad lineal. En la anterior referencia, el coeficiente de Poisson es constante mientras que el módulo de Young es complejo y además dependiente de la frecuencia. Para modelar este módulo de Young  $E$  dinámico y disipativo, se supone que  $E = E_s - iE_l$ , donde la parte real es

el módulo de almacenamiento,  $E_s$ , y la parte imaginaria  $E_l$  es el módulo de pérdida. Tanto la parte real como la imaginaria vienen dadas por las expresiones

$$E_s(\omega) = E_0 + \frac{E_0 k [\cos(\pi\alpha/2) \omega_n^\alpha + \omega_n^{2\alpha}]}{1 + 2 \cos(\pi\alpha/2) \omega_n^\alpha + \omega_n^{2\alpha}}, \quad (2.37)$$

$$E_l(\omega) = E_0 \frac{k \sin(\pi\alpha/2) \omega_n^\alpha}{1 + 2 \cos(\pi\alpha/2) \omega_n^\alpha + \omega_n^{2\alpha}}, \quad (2.38)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $E_0$  es el módulo de Young estático,  $\omega_n = \omega\tau$ , con  $1/\tau$  la frecuencia angular en la que se alcanza el máximo módulo de pérdida,  $\alpha$  es el orden fraccionario de la derivada temporal del tensor de deformación en el modelo [15], y  $k$  es una constante que mide la discrepancia entre el módulo de Young estático y el módulo dinámico a alta frecuencia.

Para el caso particular del autobús, se ha seleccionado como referencia el caucho tipo “Durometer 55” [15] que tiene como valores asociados  $E_0 = 0.74\text{e}+6$  Pa,  $\alpha = 0.65$ ,  $k = 727$ ,  $\tau = 1/93220$  s/rad. El espesor para la placa de  $2.00\text{e}-3$  m.

El material empleado en las placas del suelo es madera. Se ha escogido como material de referencia el abedul amarillo, cuyos datos se han extraído los datos del trabajo [13], con un espesor de  $1.60\text{e}-2$  m.

Ya que la madera es un material fibroso radial, se ha tomado como modelo el de la elasticidad lineal homogénea y ortótropa en las direcciones longitudinal, transversal y radial a las fibras. En [13], se especifican los siguientes valores para el módulo de Young:  $E_L = 1.39\text{e}+10$  Pa (longitudinal),  $E_T = 7.6450\text{e}+08$  Pa (transversal),  $E_R = 1.1926\text{e}+09$  Pa (radial); mientras que para el coeficiente de Poisson:  $\nu_{RT} = 6.97\text{e}-01$  (radial-transversal),  $\nu_{LR} = 4.26\text{e}-01$  (longitudinal-radial) y  $\nu_{LR} = 4.51\text{e}-01$  (longitudinal-radial). Por último, se ha fijado la densidad de masa al valor  $\rho = 520$  kg/m<sup>3</sup>.

Por último, la membrana micro-perforada (MPP), la cual es modelada por la fórmula de Maa, queda caracterizada por las constantes físicas que aparecen en la fórmula de la impedancia que tiene asociada, esto es, la viscosidad dinámica del fluido  $\eta = 1.789\text{e}-5$  Pa·s, el radio de perforaciones  $r_0 = 1.800\text{e}-2$  m, el espesor de la membrana  $h = 3.700\text{e}-3$  m, y el tanto por uno del área perforada  $s = 0.198$ .

Una vez descrito tanto la geometría como los modelos y sus coeficientes, se puede pasar a analizar en detalle la discretización. Este es el tema central del próximo capítulo.



## Capítulo 3

# Discretización

Puesto que la geometría del autobús está formada por subdominios tridimensionales (reellenos de fluido o de material poroso), placas bidimensionales y barras unidimensionales, cada uno de estos tres conjuntos debe tratarse con un método de elementos finitos diferente.

Dentro de las opciones que permite el núcleo de cálculo ACTRAN, se han escogido elementos tetraédricos Lagrange  $\mathcal{P}_1$  (polinomios lineales a trozos) para discretizar el campo escalar de presiones de los fluidos compresibles y del medio poroso. En consecuencia, sólo existirá un grado de libertad por nodo de la malla de tetraedros.

En cuanto a la discretización de las barras y las placas, el núcleo de cálculo ACTRAN permite seleccionar elementos especiales tipo “Beam” y “Plate” con seis grados de libertad por nodo de la malla: tres grados de libertad para las componentes del desplazamiento y tres para las rotaciones flexionales.

Debe hacerse notar que en la documentación del núcleo de cálculo ACTRAN no aparece ninguna referencia a la discretización de la rotación por torsión (si es que hubiese sido incluida en el modelo de barra). Tampoco existe referencia alguna ni descripción detallada de las funciones de base utilizadas para cada grado de libertad.

### 3.1. Descripción de la malla

Se han seguido dos estrategias diferentes para construir la malla en la parte de la estructura elástica y en la parte del fluido de la geometría del autobús: una malla compatible en la estructura y una malla incompatible en el fluido.

Cabe reseñar la estrategia empleada para representar las barras que, según los planos originales proporcionados por la empresa Castrosua, están físicamente pegadas y en el mismo eje de coordenadas. En el momento de realizar la geometría, se había tratado como una sola entidad unidimensional trazada a lo largo del punto medio de su sección transversal. En el momento de mallar, se han creado distintos elementos para cada una de las dos barras. Puesto que se ha creado una malla compatible para la estructura, los nodos duplicados se identifican y se realiza una equivalencia para obtener un solo grupo de nodos asociados a dos grupos de elementos distintos.

Para construir la malla, se debe determinar el tamaño del elemento  $h$  necesario para obtener unos resultados numéricos fiables en base al contexto del problema acústico con

el que se trabaja en este proyecto. En general, en problemas acústicos de baja frecuencia, existe la regla ingenieril de emplear al menos 10 nodos por longitud de onda, donde  $\lambda = 2\pi/k = c/f$ , siendo  $f$  la frecuencia y  $c$  la velocidad de propagación del sonido en el medio. Por lo tanto, atendiendo a este criterio, se debe escoger  $h \leq \lambda/10 = c/10f$ . En el caso del fluido,  $h$  simplemente dependerá de  $f$  y de la velocidad del sonido  $c = 343$  m/s.

Puesto que se ha construido una malla compatible entre placas y barras y, asumiendo que las ondas de flexión son las más importantes en cada una de las placas, se va a definir un modelo simplificado [23] con el que calcular su velocidad de propagación  $c_l$  en el caso longitudinal. Bajo ciertas simplificaciones, la velocidad de propagación  $c_l$  de las ondas en una placa bidimensional gobernada por la elasticidad lineal viene dada por

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (3.1)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\nu$  el coeficiente de Poisson y  $\rho$  la densidad de masa del material, y el número de onda  $k$  viene dado por

$$k = \sqrt{\frac{\sqrt{48}\pi f_{max}}{\zeta c_l}} \quad (3.2)$$

siendo  $f_{max}$  la frecuencia máxima a estudiar en la malla y  $\zeta$  el espesor de la placa.

El objetivo de este trabajo es construir una malla suficientemente fina para realizar la simulación numérica para una frecuencia máxima de 50 Hz. Para ello, se han realizado los cálculos antes descritos para conocer el tamaño máximo de elemento de la malla de la estructura y del fluido. Nótese que, siguiendo el criterio antes mencionado de  $h \leq \lambda/10 = c/10f$ , se ha usado el menor valor del módulo de Young para realizar los cálculos en los casos del caucho y de la madera. En el caso del material poroso, sus coeficientes se han aproximado por los del aire.

Grupo	$\zeta$ [m]	$c_l$ [m/s]	$k$ [m <sup>-1</sup> ]	$h_{max}$ [m]
Bajos	1.20e-3	5.2675e+3	1.3121e+1	4.7900e-2
Caucho	2.00e-3	2.9406e+1	1.3603e+2	4.6000e-3
Placa bóvedas	3.00e-3	5.3652e+3	8.2227e+0	7.6400e-2
Suelo	1.60e-2	1.3402e+3	7.1240e+0	8.8200e-2
Techo	1.50e-3	5.3652e+3	1.1629e+1	5.4000e-2
Ventanas	5.00e-3	5.8823e+3	6.0829e+0	1.0330e-1
Refuerzo bajos	5.20e-3	5.2675e+3	6.3032e+0	9.9700e-2
Refuerzo ventanas	8.00e-3	5.3928e+3	5.0224e+0	1.2510e-1
Fluido	-	3.4300e+2	9.1590e-1	6.8600e-1

Tabla 3.1: Características relevantes para calcular el tamaño máximo del paso de la malla.

La Tabla 3.1 muestra los valores de los espesores  $\zeta$ , las velocidades de propagación  $c_l$  y el número de onda  $k$  asociado a cada uno de los grupos de placas que forman la

estructura. La última de las columnas muestra el tamaño máximo del paso de la malla calculado como  $h_{max} = 2\pi/10k = \pi/5k$ .

Si se quiere construir una malla compatible entre todas las entidades de la estructura, seleccionar un único tamaño de elemento para todos los elementos puede implicar un aumento considerable del tamaño de la malla. Se puede comprobar en la Tabla 3.1 que el cuello de botella se localiza en la malla de la placa caucho. Por este motivo, se ha decidido mallar toda la estructura con un tamaño de elemento excepto la placa de caucho, que se construirá con otro. Este cambio de tamaño se realiza de forma compatible dentro de la placa de caucho (véase Figura 3.1).

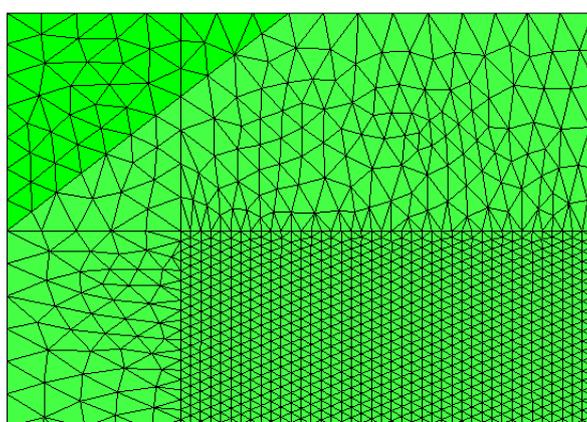


Figura 3.1: Detalle de la malla compatible entre la placa de caucho y las placas que la rodean.

Mallar el fluido con el mismo tamaño de elemento que el aplicado en la estructura también provoca una discretización de gran tamaño, ya que se está tratando con volúmenes tridimensionales. El núcleo de cálculo ACTRAN permite realizar el acoplamiento entre el fluido y la estructura mediante el uso de interfaces de contacto utilizando mallas incompatibles. Esta característica permite escoger un tamaño de elemento para el fluido diferente al de la estructura (véase Figura 3.2).

Si se siguiera el criterio calculado para los tamaños de malla mostrados en la Tabla 3.1, el tamaño de elemento para la malla del fluido sería  $6.86e-1$  m, el de la estructura  $4.79e-2$  m y el de la placa de caucho  $4.60e-3$  m. Sin embargo, se han modificado ligeramente estos valores para mantener cierta proporcionalidad entre los tamaños de los elementos en la estructura y en el fluido. Además, se ha relajado el criterio del paso de malla. En concreto, se ha utilizado como tamaño para el fluido  $1.50e-1$  m, para la estructura  $4.20e-2$  m y para reducir el número de nodos de la placa de caucho,  $1.30e-2$  m. Con esta selección de tamaño de elemento, se obtiene un total de 568762 grados de libertad, distribuidos en 8286 nodos en el sistema de barras, 92926 nodos en la estructura y 11206 nodos en el fluido (recuérdese que en cada nodo de la estructura existen 6 grados de libertad).

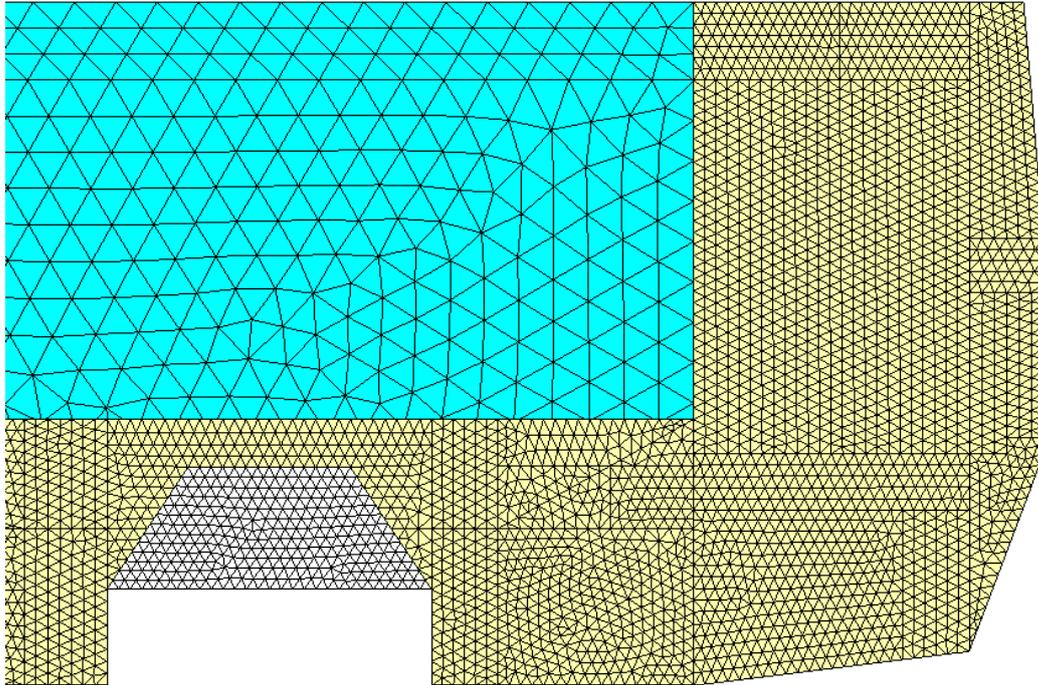


Figura 3.2: Detalle del mallado del aire y de la estructura.

### 3.2. Descripción del acoplamiento

La malla de cada subdominio del fluido está formada por tetraedros. Como cada una de ellas está separada por placas, se ha decidido hacerlas incompatibles entre sí para tener mayor libertad en cuanto al tamaño de las caras de sus fronteras. Además, también se han construido de forma que son incompatibles con las mallas bidimensionales de las placas que rodean a estos subdominios del fluido.

La estrategia seguida para construir la malla de barras y placas ha sido justo la contraria. Una vez mallado cada una de las placas de la estructura, se han empleado los nodos de cada una de las fronteras de las placas como los nodos pertenecientes a los elementos de cada barra. Como resultado de este proceso, las mallas de las placas y las barras son compatibles, es decir, los nodos de todas las barras son los nodos de las fronteras de las placas (véase el detalle de la malla en la Figura 3.3, donde los nodos de la barra aparecen resaltados con la etiqueta “CBEAM”).

El núcleo de cálculo ACTRAN permite acoplar mallas incompatibles entre dominios de fluidos tridimensionales y estructuras bidimensionales mediante una formulación débil en la que hay que definir una interfaz de contacto.

El procedimiento que sigue el núcleo de cálculo ACTRAN, consiste en identificar el par de superficies del fluido y la estructura que formarán la interfaz de contacto. Una vez identificadas estas superficies de acoplamiento, el núcleo de cálculo ACTRAN

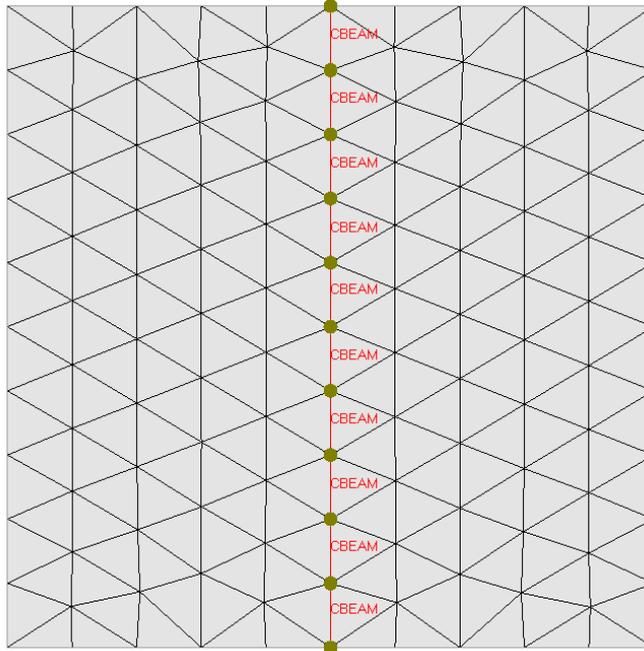


Figura 3.3: Detalle de la malla compatible en la parte estructural formado por dos placas y una barra en la frontera.

realizará una proyección de los nodos de una superficie sobre la otra. Esta proyección se realiza a lo largo de la dirección normal de la cara del elemento, en busca de los nodos de la otra superficie.

En este sentido, la identificación de la proyección de un nodo particular sobre la superficie se reduce a la evaluación en cada elemento particular de una pseudo-malla que se genera como extrusión de la malla de la superficie en la dirección normal. El núcleo de cálculo ACTRAN permite controlar la altura de esta pseudo-malla y la amplitud del plano de la extrusión a través de un factor, permitiendo capturar nodos que no están colocados estrictamente a lo largo de la dirección normal de la cara del elemento. Para más detalles, véase la descripción incluida en el manual de ACTRAN[6].



## Capítulo 4

# Ajuste de datos con medidas experimentales

Una vez analizados los modelos matemáticos (tanto las ecuaciones que gobiernan los modelos como las condiciones que las acoplan) y construida la malla para aplicar un método de elementos finitos, se deben calcular los valores asociados a la excitación que produce el motor en la estructura y sobre la cavidad de aire que lo rodea. Esta excitación se va a introducir en el modelo matemático mediante la imposición de un desplazamiento dado en los tres puntos de anclaje del motor y mediante la amplitud no nula de una fuente puntual.

En lo que sigue, se muestra cómo se han realizado las medidas experimentales y cómo se han obtenido los valores para los desplazamientos en los anclajes y para la velocidad de flujo de volumen de la fuente puntual.

### 4.1. Descripción de las medidas

En la Figura 4.1, se muestran los puntos sobre la geometría del autobús en los que se han realizado las medidas experimentales. En los puntos numerados del uno al ocho, se ha usado un sonómetro para medir el nivel de presión sonora y en el resto, del nueve al veinticinco, se ha empleado un acelerómetro para medir las aceleraciones normales sufridas por la estructura.

El conjunto de medidas descrito anteriormente se ha realizado con dos regímenes de trabajo del motor diferentes: el primero asumiendo que el motor está en funcionamiento pero el autobús está en reposo, caso que se etiquetará como caso de carga “A”, y el segundo suponiendo que el motor está trabajando a un alto régimen de revoluciones por minuto, caso de carga “B”.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>En estos dos casos no ha sido posible cuantificar las revoluciones por minuto a las que trabajaba el motor del autobús ya que no se dispuso de un aparato para su medida.

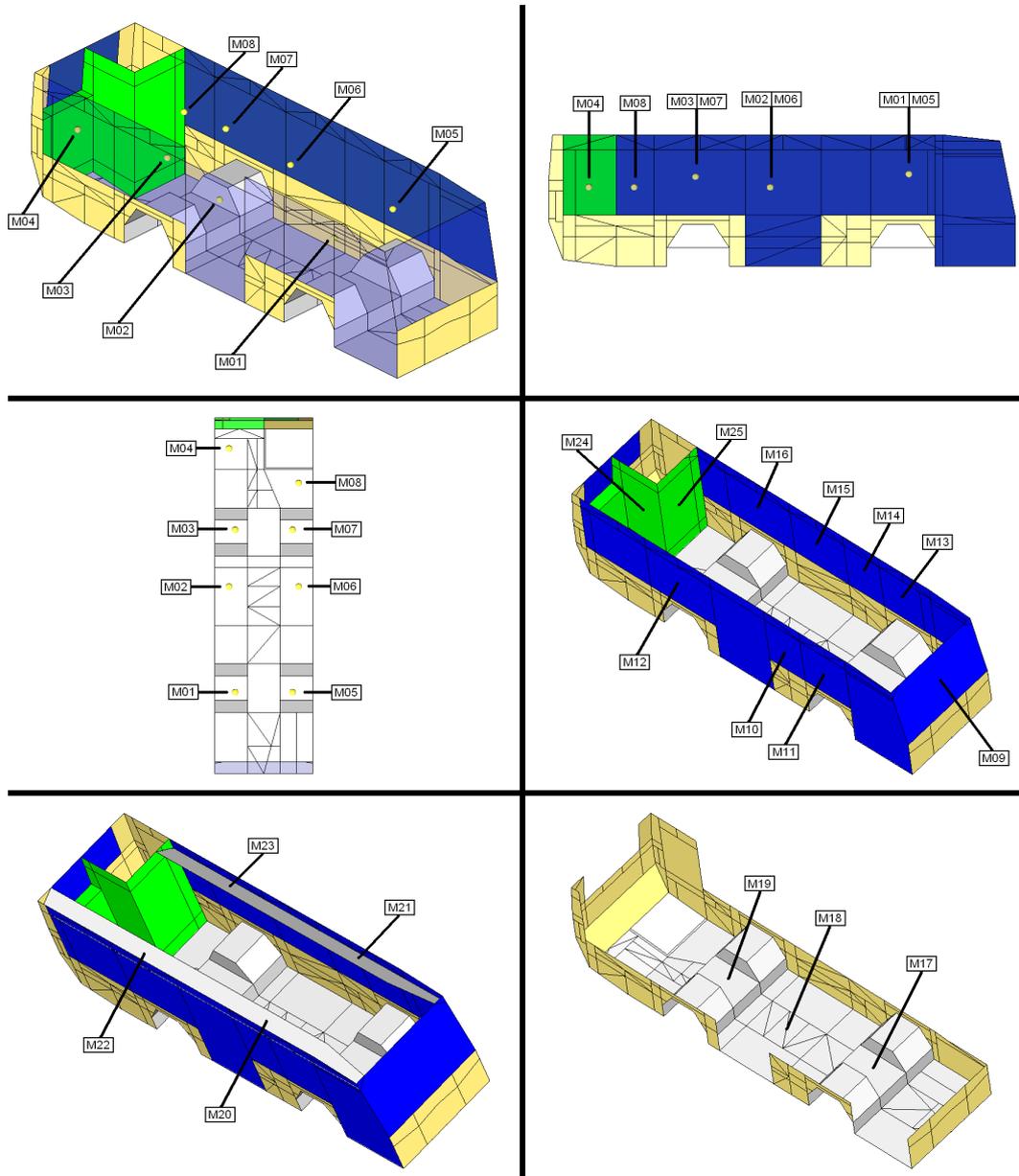


Figura 4.1: Posición de los puntos  $M_j$ ,  $1 \leq j \leq 25$ , donde se han realizado las medidas experimentales.

#### 4.1.1. Medidas acústicas

Para la realización de las medidas del nivel de presión sonora, se ha empleado un sonómetro de la empresa Quest Technologies, modelo 2700, seleccionando ponderación dBA y filtrando la señal medida por octavas. Este filtrado permite tener una aproximación del valor de presión sonora en ciertas frecuencias concretas.

El nivel de presión sonora medido en dBA viene dado por la expresión,

$$SPL_A = 20 \log_{10} \left( \frac{|P|}{\sqrt{2}P_{ref}} \frac{R_A(f)}{R_A(1000)} \right), \quad (4.1)$$

siendo  $P$  la presión armónica medida en Pa,  $P_{ref} = 2e-5$  Pa es la presión de referencia y  $f$  es la frecuencia en Hz, donde

$$R_A(f) = \frac{12200^2 f^4}{(f^2 + 20,6^2) (f^2 + 12200^2) \sqrt{(f^2 + 107,7^2) (f^2 + 737,9^2)}},$$

es el factor de ponderación “A” (véase [14] para una discusión de las diferentes ponderaciones). La Figura 4.2 muestra la representación gráfica de esta ponderación con respecto a la frecuencia.

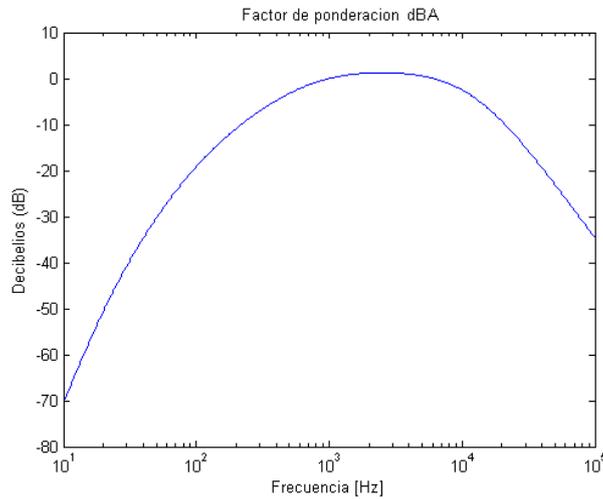


Figura 4.2: Representación gráfica de la ponderación dBA con respecto a la frecuencia.

Puesto que el post-procesador sólo permite pintar resultados numéricos sin ponderación en decibelios (dB), se presenta el cálculo del nivel de presión sonora (dB), dado por

$$SPL = 20 \log_{10} \left( \frac{|p|}{\sqrt{2}p_{ref}} \right), \quad (4.2)$$

el cual se calculará a partir del valor  $SPL_A$ , mediante la fórmula

$$SPL = SPL_A - 20 \log_{10} \left( \frac{R_A(f)}{R_A(1000)} \right). \quad (4.3)$$

Punto	$f$ [Hz]								
	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
M01	54.20	50.10	57.60	55.80	54.30	57.70	56.70	43.10	34.40
M02	53.40	49.70	55.70	57.90	57.60	57.30	57.30	43.70	34.80
M03	48.90	50.80	54.20	61.70	59.10	60.30	60.30	46.20	36.30
M04	54.90	47.80	57.90	60.60	62.50	65.10	63.70	51.60	37.30
M05	54.20	48.40	55.30	54.90	54.90	57.40	56.10	43.10	34.50
M06	48.20	46.30	53.80	60.10	57.20	58.30	57.40	43.90	34.70
M07	52.70	50.80	56.40	59.50	57.00	59.50	59.30	46.70	35.80
M08	52.70	54.60	60.90	60.90	61.70	63.60	64.30	50.80	38.40

Tabla 4.1: Medidas experimentales del nivel de presión sonora (dBA) para el caso de carga “A”.

Punto	$f$ [Hz]								
	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
M01	40.70	52.30	61.40	66.50	63.80	65.20	65.20	53.30	42.50
M02	34.60	45.10	58.20	57.10	56.90	58.90	59.10	48.90	37.80
M03	38.80	50.40	56.50	57.90	59.00	62.80	63.20	51.10	41.20
M04	43.30	53.80	58.40	67.60	67.10	64.20	62.90	54.00	43.50
M05	40.30	53.60	66.60	67.60	62.30	67.70	66.20	55.70	44.60
M06	36.70	50.80	57.50	59.60	57.40	58.80	58.50	49.50	38.60
M07	38.10	51.90	63.00	64.90	63.40	62.30	62.80	51.30	40.80
M08	41.80	52.70	66.80	65.00	64.10	66.30	65.40	54.70	43.70

Tabla 4.2: Medidas experimentales del nivel de presión sonora (dBA) para el caso de carga “B”.

#### 4.1.2. Medidas estructurales

Para completar el conjunto de medidas experimentales, se ha usado un acelerómetro para medir la aceleración normal media cuadrática. Ya que en este caso el aparato de medida no posee filtros de frecuencia, se ha supuesto que el valor medido es constante para todas las frecuencias en las que se ha hecho la simulación numérica.

La aceleración normal media cuadrática viene dada por la expresión

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|^2 dt}, \quad (4.4)$$

donde  $T$  es el intervalo de tiempo de medida,  $\mathbf{a}$  es la aceleración en el dominio del tiempo, y  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^t$  es el vector normal exterior al aparato de medida.

En la Tabla 4.3 se muestran las tres componentes del vector normal y la aceleración normal media cuadrática medida para los casos de carga “A” y “B”. Es fácil comprobar

que, si se supone que el tiempo de medida  $T$  es múltiplo del periodo  $2\pi/\omega$ , entonces

$$a_{rms} = \frac{\omega^2 |\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|}{\sqrt{2}},$$

siendo  $\mathbf{U}$  es el campo de desplazamientos armónico de la estructura.

Punto	$n_x$ [m]	$n_y$ [m]	$n_z$ [m]	carga "A"	carga "B"
				$a_{rms}$ [m/s <sup>2</sup> ]	$a_{rms}$ [m/s <sup>2</sup> ]
M09	0.0000	-0.9804	0.1968	0.00	0.20
M10	-1.0000	0.0000	0.0000	0.40	0.30
M11	-1.0000	0.0000	0.0000	0.50	0.40
M12	-1.0000	0.0000	0.0000	0.70	0.50
M13	1.0000	0.0000	0.0000	0.60	0.80
M14	1.0000	0.0000	0.0000	0.50	0.50
M15	1.0000	0.0000	0.0000	2.30	0.70
M16	1.0000	0.0000	0.0000	0.40	0.70
M17	0.0000	0.0000	1.0000	0.10	0.10
M18	0.0000	0.0000	1.0000	0.20	0.50
M19	0.0000	0.0000	1.0000	0.10	0.10
M20	0.6154	0.0000	-0.7882	0.30	0.10
M21	-0.6154	0.0000	0.7882	0.10	0.30
M22	0.6154	0.0000	-0.7882	0.10	0.30
M23	-0.6154	0.0000	0.7882	0.20	0.40
M24	-1.0000	0.0000	0.0000	0.40	1.00
M25	0.0000	-1.0000	0.0000	0.30	0.70

Tabla 4.3: Medidas experimentales de la aceleración normal media cuadrática en la estructura y el vector normal exterior a la estructura en cada punto de medida.

## 4.2. Ajuste de los datos al modelo discretizado

Todas las medidas descritas en las subsecciones anteriores deberían ser reproducidas de forma precisa por el modelo matemático si las componentes de los desplazamientos en los anclajes del motor y la amplitud de la fuente puntual de ruido se ajustan adecuadamente. Evidentemente, el problema reside en saber cuáles son los valores adecuados para recuperar estas medidas experimentales. Para resolverlo, se debe calcular cuáles son los diez mejores parámetros ( $3 \times 3$  componentes de desplazamientos más una amplitud) para recuperar veinticinco valores experimentales.

En primer lugar, se ha realizado una batería de simulaciones fijando a uno el primer parámetro y a cero el resto. Este proceso se repite hasta recorrer los diez parámetros y así crear un conjunto de diez soluciones numéricas  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{10} \in \mathbb{C}^N$ , donde  $N$  es el número de grados de libertad no sólo de la discretización sino de todos los valores calculados en el post-proceso. De esta forma, para cualquier vector

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10})^t \in \mathbb{C}^{10}$  se obtiene una solución numérica  $\boldsymbol{\phi}_\lambda$  tal que

$$\boldsymbol{\phi}_\lambda = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \in \mathbb{C}^N. \quad (4.5)$$

Por otro lado, supóngase por simplicidad que los puntos donde se han realizado las medidas experimentales se corresponden con las primeras 25 componentes de los vectores solución  $(\boldsymbol{\phi}_i)_j$  con  $j = 1, \dots, 25$  para cada  $i = 1, \dots, 10$ . Para encontrar el mejor vector de parámetros  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{10}$ , se debe minimizar la función coste

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{25} \left| |(\boldsymbol{\phi}_\lambda)_j| - \xi_j \right|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{25} \left| \left| \sum_{i=1}^{10} \lambda_i (\boldsymbol{\phi}_i)_j \right| - \xi_j \right|^2}, \quad (4.6)$$

siendo  $\xi_1, \dots, \xi_{25}$  los valores experimentales medidos.

La definición de este funcional coste no tiene significado físico ya que el vector  $(\xi_1, \dots, \xi_{25})$  de medidas experimentales contiene diferentes magnitudes físicas. Para adimensionalizar esta función, se modifica para considerar

$$\sqrt{\nu_1 \frac{\sum_{j=1}^8 \left| \left| \sum_{i=1}^{10} \lambda_i (\boldsymbol{\phi}_i)_j \right| - \xi_j \right|^2}{\sum_{j=1}^8 \xi_j^2} + \nu_2 \frac{\sum_{j=9}^{25} \left| \left| \sum_{i=1}^{10} \lambda_i (\boldsymbol{\phi}_i)_j \right| - \xi_j \right|^2}{\sum_{j=9}^{25} \xi_j^2}}, \quad (4.7)$$

siendo  $\nu_1$  y  $\nu_2$  dos pesos de ponderación adimensionales.

Para resolver este problema de optimización no lineal, se ha utilizado la función `fminsearch` de MATLAB. En el proceso de ajuste, se han fijado  $\nu_1 = 1$  y  $\nu_2 = 0.6$  aproximadamente para el caso de carga "A" y  $\nu_1 = 1$  y  $\nu_2 = 0.8$  para el caso de carga "B". Esta ponderación ha sido escogida para equilibrar en el ajuste el error cometido en la parte de la presión y de la aceleración.

La Tabla 4.4 muestra los valores óptimos que se han calculado para los diez parámetros usando las medidas experimentales con el régimen de cargas "A" y "B". En la Tabla 4.4 aparecen indicadas las componentes de los tres desplazamientos  $(U_{0,x}, U_{0,y}, U_{0,z})^t$ ,  $(U_{1,x}, U_{1,y}, U_{1,z})^t$ , y  $(U_{2,x}, U_{2,y}, U_{2,z})^t$ , además de la velocidad de volumen  $Q$ .

El error relativo obtenido para el caso de carga "A" con los valores resultantes del ajuste, es del 26.17% para el modelo acoplado fluido-estructura, mientras que el error relativo cometido en el fluido es del 15.34% y en la estructura del 26.70%. En el caso de carga "B", el error relativo cometido para el modelo acoplado fluido-estructura es del 39.58%, sin embargo, el error relativo cometido en la estructura es del 43.26% y en el fluido 8.97%.

Parámetro	Caso "A"		Caso "B"	
	Parte Re	Parte Im	Parte Re	Parte Im
$U_{0,x}$ [m]	-3.3391e-4	5.0252e-6	3.3529e-4	-6.0863e-5
$U_{0,y}$ [m]	5.7119e-5	2.6930e-6	4.7711e-5	6.1114e-5
$U_{0,z}$ [m]	7.8684e-5	9.2305e-6	7.2175e-5	6.5980e-5
$U_{1,x}$ [m]	7.4864e-7	-2.5360e-5	-6.8371e-6	-9.9153e-6
$U_{1,y}$ [m]	-9.6949e-5	1.1473e-5	-6.7028e-6	-3.9849e-5
$U_{1,z}$ [m]	3.8884e-5	-8.5476e-7	1.6957e-6	2.0030e-5
$U_{2,x}$ [m]	-5.0839e-6	-1.9316e-5	5.4044e-6	-1.9892e-5
$U_{2,y}$ [m]	-1.0015e-5	-2.6376e-6	-1.4957e-5	-6.3737e-6
$U_{2,z}$ [m]	-4.5555e-6	-1.0263e-5	-1.0799e-5	-1.0439e-5
$Q$ [m <sup>3</sup> s/kg]	-7.9172e-3	1.5291e-2	1.8252e-2	-1.4619e-2

Tabla 4.4: Parte real y parte imaginaria de los valores de los desplazamientos en los anclajes del motor y de la amplitud de la fuente puntual obtenidos en el ajuste.



## Capítulo 5

# Validación

Aunque el núcleo de cálculo ACTRAN está perfectamente testado y validado, debido a la reducida documentación disponible sobre los modelos y los métodos de discretización que utiliza, se ha considerado necesario construir tres pequeños problemas que sirven para comparar: (a) la convención de la dependencia armónica que utiliza, (b) como de precisa es la discretización mediante elementos finitos de un problema con una fuente puntual, y por último, (c) como resuelve el acoplamiento débil de dos mallas incompatibles.

### 5.1. Convención de Actran de la dependencia armónica

Es fundamental conocer cuál es la convención que usa el núcleo de cálculo ACTRAN para escribir de forma correcta los coeficientes de los materiales, especialmente para modelar los materiales con disipación. Esta disipación se modela con la parte imaginaria de los coeficientes de los materiales que, a su vez, tienen una dependencia dinámica con respecto a la frecuencia.

En este primer ejemplo, se considera como dominio  $\Omega$  un cubo  $(0,1)^3$  en el que se plantea el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\omega^2}{c^2}P - \Delta P = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 1 & \text{sobre } \Gamma = \{x \in \bar{\Omega} : x = 0\}, \\ \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Como la velocidad se puede escribir en términos de la presión,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{1}{i\omega\rho} \text{grad}P \right) \cdot \mathbf{n},$$

el problema (5.1) se puede reescribir como

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\omega^2}{c^2}P - \Delta P = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = 1 \quad \text{en } \Gamma, \\ \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Dada la simetría del dominio  $\Omega$  y de las condiciones de contorno con respecto al sistema de coordenadas cartesianas, la solución del problema (5.1) viene dada por

$$P(x) = Ae^{-\frac{\omega}{c}x} + Be^{i\frac{\omega}{c}x}.$$

Para conocer los valores de las constantes complejas  $A$  y  $B$ , se aplican las condiciones de contorno en  $x = 0$  y en  $x = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx}(0) &= i\frac{\omega}{c}(-A + B) = -i\omega\rho, \\ \frac{dP}{dx}(1) &= i\frac{\omega}{c}\left(-Ae^{-i\frac{\omega}{c}} + Be^{i\frac{\omega}{c}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema lineal, se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho ce^{i\frac{\omega}{c}}}{\frac{i\omega}{c}\left(-e^{-i\frac{\omega}{c}} + e^{i\frac{\omega}{c}}\right)}, \\ B &= \frac{\rho ce^{i\frac{\omega}{c}}}{\frac{i\omega}{c}\left(-e^{-i\frac{\omega}{c}} + e^{i\frac{\omega}{c}}\right)} - \rho c. \end{aligned}$$

Con las expresiones de  $A$  y  $B$  y el conocimiento de la expresión para  $P$ , no se puede deducir nada sobre la convención empleada para la dependencia armónica en el núcleo de cálculo ACTRAN.

Sin embargo, se va a aprovechar que el núcleo de cálculo permite aplicar una velocidad normal  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  como condición de contorno y que permite visualizar como resultado para los desplazamientos. Internamente, como post-proceso, el núcleo de cálculo ACTRAN calcula la velocidad a partir de los desplazamientos mediante la expresión  $\mathbf{V} = -i\omega\mathbf{U}$  (o mediante  $\mathbf{V} = +i\omega\mathbf{U}$ ), en función de la convención empleada. En el primer caso se trataría de la dependencia armónica positiva y en el segundo, de la dependencia armónica negativa.

El problema (5.1) se ha simulado numéricamente para  $\omega = 1$  rad/s y, por completitud, se han usado dos pasos de malla diferentes,  $h = 0.05$  m y  $h = 0.025$  m, para conocer que convención está usando. Puesto que la parte imaginaria es positiva, la convención empleada es la de la dependencia armónica negativa, esto es,  $p(x, t) = \text{Re}(P(x)e^{-i\omega t})$ . En la Figura 5.1 se puede observar la representación gráfica del módulo de la parte imaginaria de los desplazamientos, en la que se observa la propagación de las ondas en una sola dirección.

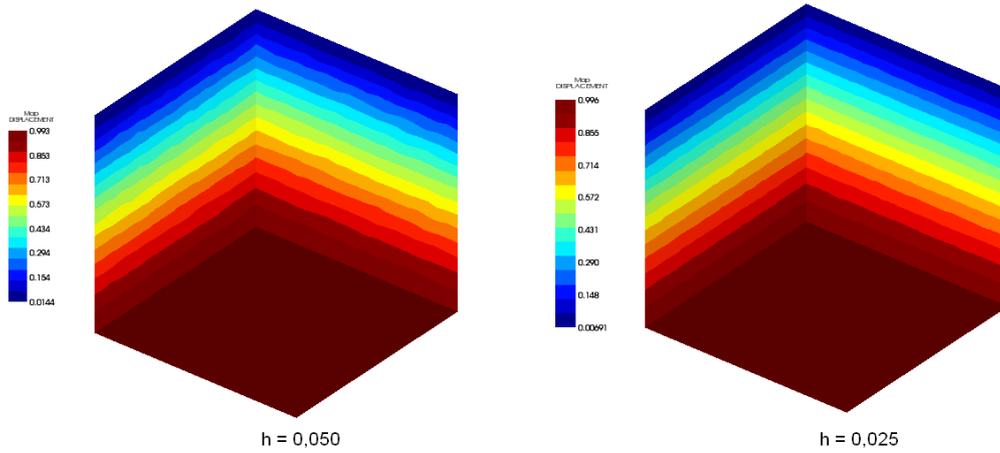


Figura 5.1: Módulo de la parte imaginaria de los desplazamientos para dos mallas con tamaño  $h = 0.05$  (izquierda) y  $h = 0.025$  (derecha) con la velocidad  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 1$  aplicada en la base del cubo.

## 5.2. Problema de la esfera con condición Dirichlet

Se considera ahora como dominio  $\Omega$  una esfera de radio  $R$  con centro en el origen de coordenadas, en la que se calculará la solución exacta del problema

$$\begin{cases} -\frac{\omega^2}{c^2}P - \Delta P = 0 & \text{en } \Omega, \\ P = P_0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

Por la simetría radial del dominio y ya que  $P_0$  es una constante, se sabe que

$$P(r) = C_0 J_\alpha\left(\frac{\omega}{c}r\right) + C_1 N_\alpha\left(\frac{\omega}{c}r\right),$$

donde  $C_0$  y  $C_1$  son dos constantes complejas a fijar,  $J_\alpha$  es la función de Bessel de primer tipo y  $N_\alpha$  es la función de Bessel de segundo tipo, o función de Weber, que vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$J_\alpha(r) = \frac{r^\alpha}{2^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{ir \cos \theta} \sin^{2\alpha} \theta \, d\theta,$$

$$N_\alpha(r) = \frac{J_\alpha(r) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(r)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Puesto que el campo de presiones debe ser acotado en  $\Omega$  y  $N_\alpha$  posee una singularidad en  $r = 0$ , entonces  $C_1 = 0$ . Por lo tanto, se obtiene

$$P(r) = C_0 J_\alpha\left(\frac{\omega}{c}r\right).$$

Para calcular la constante  $C_0$  se emplea la condición de contorno en la superficie de la esfera,

$$P(R) = C_0 J_\alpha\left(\frac{\omega}{c}R\right) = P_0,$$

con lo que resulta

$$C_0 = \frac{P_0}{J_\alpha\left(\frac{\omega}{c}R\right)},$$

y la solución del problema (5.3) viene dada por

$$P(r) = P_0 \frac{J_\alpha\left(\frac{\omega}{c}r\right)}{J_\alpha\left(\frac{\omega}{c}R\right)}. \quad (5.4)$$

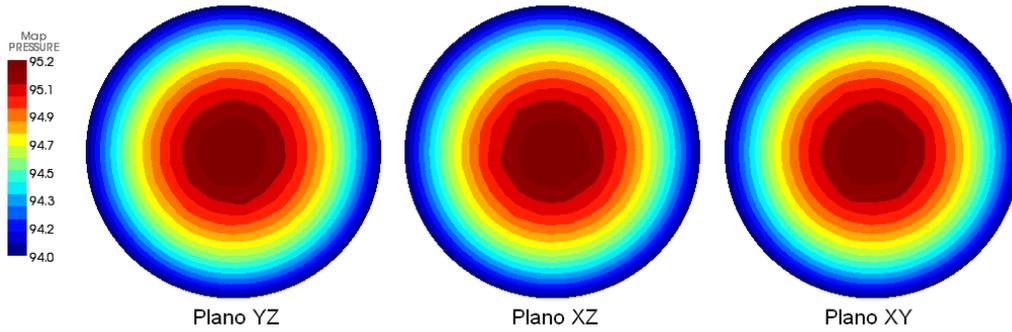


Figura 5.2: Campo de presiones (dB) aproximado, solución del problema de Helmholtz con una condición Dirichlet constante sobre su superficie.

En la Figura 5.2 representa el resultado de una simulación numérica con una esfera de radio  $R = 1$  m para una frecuencia de 50 Hz y con una presión  $P_0 = 1$  Pa, construida sobre una malla no simétrica con un tamaño de elemento  $h = 0.025$  m. Se observa como el nivel de presión sonora medido en decibelios (dB) disminuye radialmente desde el origen hacia la frontera de la esfera. Al verificar cuantitativamente la precisión con la que el núcleo de cálculo ACTRAN resuelve este problema, se ha obtenido un error relativo en norma  $\ell^2$  del 4.64 %.

### 5.3. Problema de la esfera con una fuente puntual

El anterior problema sirve como referencia para calibrar la precisión del método de elementos finitos con  $h = 0.025$  m. Ahora se procede para el caso de una fuente puntual.

Se considera de nuevo el dominio  $\Omega$  como una esfera de radio  $R$  y centrada en el origen de coordenadas. Se va a calcular la solución exacta del problema

$$\begin{cases} -\frac{\omega^2}{c^2}P - \Delta P = \delta_0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial P}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde  $\delta_0$  es la delta de Dirac situada en el origen de coordenadas.

De nuevo, por la simetría radial del dominio y ya que la amplitud del monopolo es igual a 1, se tiene que

$$P(r) = \frac{1}{r} \left( \lambda e^{i\frac{\omega}{c}r} + (1 - \lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}r} \right).$$

Debido a que el dominio es una esfera, el vector normal exterior  $\mathbf{n}$  es igual al vector posición  $\mathbf{r}$ , por lo que se puede calcular

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = P'(R) = -\frac{1}{R^2} \left( \lambda e^{i\frac{\omega}{c}R} + (1-\lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}R} \right) + \frac{1}{R} \left( i\frac{\omega}{c} \lambda e^{i\frac{\omega}{c}R} - i\frac{\omega}{c} (1-\lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}R} \right).$$

Al aplicar la condición de contorno en  $R = 1$  para obtener el valor de  $\lambda$ , resulta

$$-\lambda e^{i\frac{\omega}{c}} - (1-\lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}} + i\frac{\omega}{c} \lambda e^{i\frac{\omega}{c}} - i\frac{\omega}{c} (1-\lambda) e^{-i\frac{\omega}{c}} = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\lambda \left[ e^{i\frac{\omega}{c}} \left( 1 - i\frac{\omega}{c} \right) - e^{-i\frac{\omega}{c}} \left( 1 + i\frac{\omega}{c} \right) \right] = -e^{-i\frac{\omega}{c}} \left( 1 + i\frac{\omega}{c} \right),$$

con lo que se tiene

$$\lambda = \frac{-e^{-i\frac{\omega}{c}} \left( 1 + i\frac{\omega}{c} \right)}{e^{i\frac{\omega}{c}} \left( 1 - i\frac{\omega}{c} \right) - e^{-i\frac{\omega}{c}} \left( 1 + i\frac{\omega}{c} \right)},$$

por lo tanto, la solución al problema (5.5) viene dada por

$$P(r) = \frac{1}{r} \left( \frac{-e^{i\frac{\omega}{c}(r-1)} \left( 1 + i\frac{\omega}{c} \right)}{e^{i\frac{\omega}{c}} \left( 1 - i\frac{\omega}{c} \right) - e^{-i\frac{\omega}{c}} \left( 1 + i\frac{\omega}{c} \right)} + \frac{e^{i\frac{\omega}{c}(1-r)} \left( 1 - i\frac{\omega}{c} \right)}{e^{i\frac{\omega}{c}} \left( 1 - i\frac{\omega}{c} \right) - e^{-i\frac{\omega}{c}} \left( 1 + i\frac{\omega}{c} \right)} \right). \quad (5.6)$$

Si se fija el radio  $R = 1$  y la amplitud del monopolo a uno, la Tabla 5.1 muestra los errores relativos en norma  $\ell^2$  obtenidos al comparar la solución exacta con la calculada numéricamente para distintos tamaños de elemento  $h$  de la malla. Estos errores relativos en norma  $\ell^2$  se evalúan para tres tipos de malla diferentes. La primera de ellas se construye sin ningún tipo de restricción y el monopolo se coloca en el nodo más próximo al origen de coordenadas (véase la Figuras 5.3), mientras que en la segunda malla el monopolo se sitúa en el origen de coordenadas (véase la Figura 5.4). La tercera malla se construye de forma simétrica a partir de un octante de esfera (véase la Figura 5.5). En este último caso, el origen de coordenadas coincide con un nodo, el cual es seleccionado como soporte del monopolo.

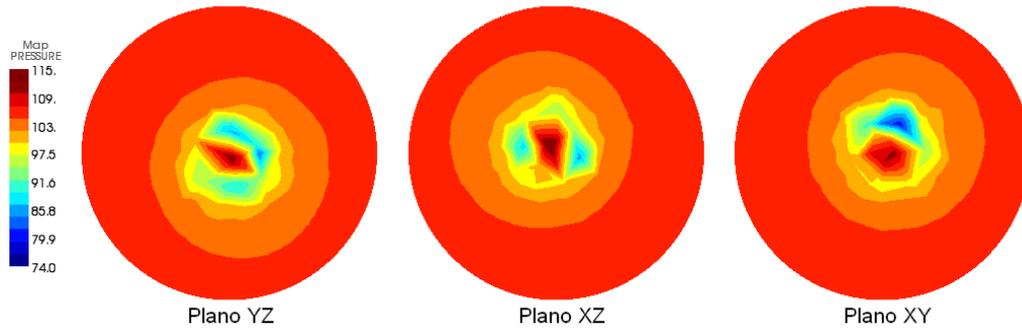


Figura 5.3: Campo de presiones aproximado (dB) utilizando una malla no simétrica y un monopolo centrado en el nodo más próximo al origen de coordenadas ( $h = 0.025$ ).

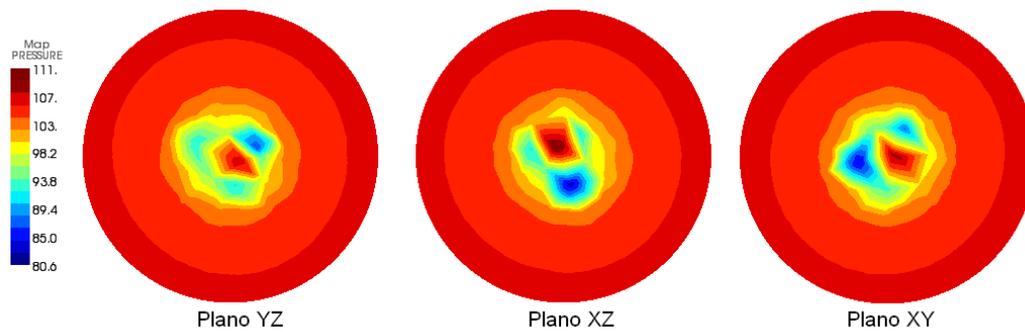


Figura 5.4: Campo de presiones aproximado (dB) utilizando una malla no simétrica con monopolo en el origen de coordenadas ( $h = 0.025$ ).

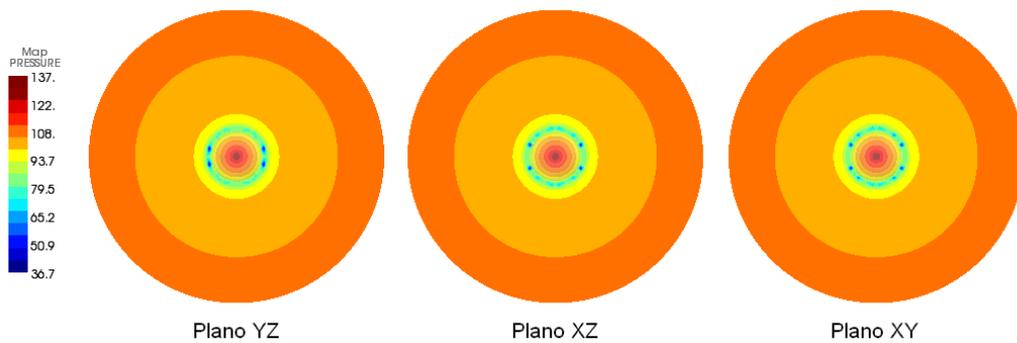


Figura 5.5: Campo de presiones aproximado (dB) utilizando una malla simétrica con monopolo en el origen de coordenadas y sobre un nodo ( $h = 0.025$ ).

$h$ [m]	Centro nodo	Centro origen de coordenadas	Malla simétrica
1.0000e-1	1.0667e+1	1.2516e+0	2.9114e+0
5.0000e-2	6.2060e+0	7.5155e-1	7.8692e-1
2.5000e-2	4.3844e+0	3.3869e-1	6.6846e-1

Tabla 5.1: Errores relativos (%) en norma  $\ell^2$  de la aproximación del campo de presiones cuando el monopolo está: centrado en el nodo más próximo al origen de coordenadas (primera columna), en el origen de coordenadas (segunda columna) y en el origen de coordenadas con una malla simétrica (tercera columna).

A la vista de los resultados mostrados en la Tabla 5.1 se podría deducir que los resultados más precisos se obtienen en los problemas donde el monopolo está situado en el origen de coordenadas. Sin embargo, de esta afirmación no podemos concluir que el núcleo de cálculo resuelve de forma más precisa el problema con la delta de Dirac en el interior de un tetraedro ya que hay que destacar que al situar el monopolo en un nodo próximo al origen de coordenadas y no exactamente en él, se está cometiendo, antes de discretizar, un error ya que la solución analítica no es radial. Ésta es parte de la causa por la que el error relativo en norma  $\ell^2$  es superior al cometido por los otros dos tipos de mallas.

De todas formas, la Tabla 5.1 muestra que los errores son de magnitud similar en todos los casos, ya sea la malla simétrica o no. De hecho, no sería posible construir una malla simétrica en el habitáculo del motor del autobús porque la propia geometría de la cavidad lo impide.

Como conclusión, se ha decidido colocar el monopolo, que reproduce la excitación del motor en el autobús, centrado en un nodo de la malla.

## 5.4. Acoplamiento fluido-estructura

En la sección 3.2, se describe como el núcleo de cálculo ACTRAN realiza el acoplamiento fluido-estructura mediante interfaces de acoplamiento. Al tratarse de un programa de ordenador privativo, no es posible revisar el código fuente para conocer en detalle cómo se calcula el acoplamiento fluido-estructura. Es por esta razón, por lo que se han realizado una serie de tests para comprobar que dicho acoplamiento se realiza de forma correcta.

El núcleo de cálculo ACTRAN permite un método alternativo para realizar el acoplamiento fluido-estructura cuando las mallas son compatibles. Éste consiste en compartir los nodos de la cara de la estructura que se quiere acoplar con los de la cara del fluido con los que está en contacto. Esto quiere decir que un mismo nodo pertenece a un elemento de la estructura y del fluido al mismo tiempo.

Para conocer la fiabilidad de los dos métodos de acoplamiento fluido-estructura, se ha calculado el campo de velocidades normales en la cara de acoplamiento del fluido y se compara con el mismo campo en la cara de la estructura. En todos los tests, se ha aplicado como condición de contorno una presión igual a la unidad en la cara del fluido opuesta a la del acoplamiento. Para obtener el campo de velocidades en la estructura,

se han multiplicado los desplazamientos por la dependencia armónica  $i\omega$ , de forma que el error relativo de acoplamiento se calcula como

$$\frac{\|\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{n} - i\omega \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n}\|_{\ell^2}}{\|\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{n}\|_{\ell^2}}, \quad (5.7)$$

siendo  $\mathbf{V}_f$  la velocidad en el fluido y  $\mathbf{U}_s$  el desplazamiento en la estructura.

$h$ [m]	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4
1.0000e-1	1.3300e-2	1.3300e-2	3.5027e+1	3.5024e+1
5.0000e-2	7.3000e-3	6.3000e-3	1.6554e+1	1.6556e+1

Tabla 5.2: Error relativo (%) en norma  $\ell^2$  para los tests sobre un cubo y una placa cuadrada que cubre totalmente una de sus caras.

Sobre una misma geometría (véase, en la Figura 5.6, la malla superior izquierda), se han creado una serie de 4 tests cuyos errores relativos se exponen en la Tabla 5.2. Se ha construido una cavidad para el fluido, un cubo  $(0,1)^3$  acoplado con una placa de dimensiones  $(0,1)^2$  sobre una de sus caras. En el **test 1**, el acoplamiento se realiza compartiendo los nodos de la placa con los de la cara del fluido contigua a la placa, mientras que en el **test 2** este acoplamiento se efectúa mediante el uso de una interfaz de contacto entre la placa y el fluido.

Teniendo como base el test 1, se crea el **test 3** imponiendo desplazamiento nulo en el contorno de la placa. El **test 4** es análogo: se parte del test 2 y se impone desplazamiento nulo en el contorno de la placa.

$h$ [m]	Test 5	Test 6	Test 7	Test 8	Test 9
1.0000e-1	6.8097e+0	6.8099e+0	6.8099e+0	2.7941e+1	2.7953e+1
5.0000e-2	3.4487e+0	3.4489e+0	3.4489e+0	1.3354e+1	1.3361e+1

Tabla 5.3: Error relativo (%) en norma  $\ell^2$  para los tests sobre un cubo y una placa rectangular que está parcialmente cubierta por una de las caras del cubo.

En la Tabla 5.3 se ven reflejados los errores relativos para los distintos tests contruidos con una cavidad fluida, un cubo  $(0,1)^3$ , acoplada con una placa  $(0,1) \times (0,1.5)$  sobre una de sus caras (véase, en la Figura 5.6, la malla superior derecha). En el **test 5**, el acoplamiento se realiza compartiendo los nodos de la placa con los de la cara del fluido contigua a la placa. Mientras, en el **test 6** y en el **test 7**, este acoplamiento se efectúa mediante el uso de una interfaz de contacto entre la placa y el fluido.

La diferencia entre estos dos últimos tests reside en el orden de definición de las superficies de acoplamiento dentro de la interfaz de contacto: en el test 6, la segunda superficie de acoplamiento pertenece a la placa y en el test 7, ésta pertenece a la cara del fluido.

Sin abandonar este grupo de tests, se ha impuesto desplazamiento nulo en el contorno de la placa al test 5, obteniendo el **test 8**, y procediendo de manera análoga con el test 6, se obtiene el **test 9**.

$h$ [m]	Test 10	Test 11	Test 12	Test 13
1.0000e-1	6.8097e+0	6.8099e+0	2.7941e+1	2.7939e+1
5.0000e-2	3.4487e+0	3.4489e+0	1.3354e+1	1.3362e+1

Tabla 5.4: Error relativo (%) en norma  $\ell^2$  para los tests sobre un cubo y dos placas con malla conforme en la frontera común, una de las cuales cubre totalmente una de las caras del cubo.

Como se puede apreciar en la parte inferior derecha de la Figura 5.6, se diseña una tercera geometría compuesta de una cavidad para el fluido, un cubo  $(0,1)^3$ , una placa  $S_1$  de dimensiones  $(0,1)^2$  y una placa  $S_2$  de dimensiones  $(0,1) \times (0,0.5)$ . La malla de estas placas es compatible en la frontera común. El acoplamiento se realiza entre la placa  $S_1$  y la cara del fluido contigua a la placa  $S_1$ , compartiendo sus nodos en el **test 10** y mediante el uso de una interfaz de contacto en el **test 11**.

Los **test 12** y **test 13** añaden a los test 10 y 11, respectivamente, la imposición de desplazamientos nulos en el contorno de la placas  $S_1$  y  $S_2$ , excepto en el contorno común de ambas placas, dónde se aplica desplazamiento nulo sólo en la componente del vector normal del plano perpendicular a la interfaz de acoplamiento. Los errores obtenidos pueden verse en la Tabla 5.4.

$h$ [m]	Test 14	Test 15	Test 16	Test 17	Test 18
1.0000e-1	9.2240e+0	9.2247e+0	9.2247e+0	9.2240e+0	9.2247e+0
5.0000e-2	4.5560e+0	4.5563e+0	4.5563e+0	4.5560e+0	4.5563e+0

Tabla 5.5: Error relativo (%) en norma  $\ell^2$  para los tests sobre dos cubos y una placa rectangular que queda totalmente cubierta por una cara de cada uno de los dos cubos.

Por último, se construye una cavidad  $\Omega_1$  para el fluido, un cubo  $(0,1)^3$ , otra cavidad  $\Omega_2$  con el mismo fluido, un cubo de dimensiones  $(0,1)^2 \times (0,0.5)$  y una placa de dimensiones  $(0,1) \times (0,1.5)$  entre los dos fluidos. Se ha aplicado una presión igual a uno en la cara del fluido  $\Omega_1$  opuesta a la placa. Los errores relativos se ver apreciar en la Tabla 5.5.

En el **test 14**, el acoplamiento se realiza compartiendo los nodos de la placa con los de la cara del fluido  $\Omega_1$  contigua a la placa y con los de la cara del fluido  $\Omega_2$ . En el **test 15** y en el **test 16**, se usa una interfaz de contacto para el acoplamiento, teniendo como segunda superficie de acoplamiento la placa en el test 15 y la cara del fluido en el test 16.

Dentro de este último grupo de tests, cuya malla se muestra en la parte inferior izquierda de la Figura 5.6, se han creado dos variantes. Se ha construido una cavidad  $\Omega_1$  para el fluido, un cubo  $(0,1)^3$ , otra cavidad  $\Omega_2$  con el mismo fluido, un cubo de dimensiones  $(0,1)^2 \times (0,0.5)$ , una placa  $S_1$  de dimensiones  $(0,1)^2$  y una placa  $S_2$  de dimensiones  $(0,1) \times (0,0.5)$ . Las mallas son compatibles entre dichas placas. El acoplamiento se realiza, por un lado, entre la placa  $S_1$  y la cara del fluido  $\Omega_1$  contigua y, por otro lado, entre la cara del fluido  $\Omega_2$  y la otra placa  $S_2$ . El **test 17** efectúa el mismo

acoplamiento con mallas compatibles, y el **test 18** emplea interfaces de contacto.

Se observa que los dos métodos que ACTRAN tiene implementados poseen una precisión similar, con lo que el uso de interfaces de contacto queda parcialmente validado. Esto permite tener cierta garantía a la hora de usar mallas incompatibles con diferentes tamaños de elemento en el fluido y en la estructura, lo que ha permitido simplificar la construcción de las mallas al no ser necesario usar mallas compatibles.

También se ha comprobado con estos tests, que a la hora de realizar el acoplamiento, el hecho de tener superficies de acoplamiento de distinto tamaño no influye en la calidad del resultado. Además, se ha comprobado que no existe una diferencia apreciable al cambiar el orden de las superficies de acoplamiento dentro de una interfaz de contacto.

ACTRAN tiene como incógnita primal la presión en el fluido y como dual los desplazamientos. Esto quiere decir que el problema acoplado se resuelve con la presión como incógnita y los desplazamientos se calculan como un postproceso. Se ha comprobado también, gracias a los tests, que la inclusión de condiciones de contorno sobre los desplazamientos hace empeorar drásticamente los errores cometidos en el acoplamiento.

De hecho, en el caso de los tests 3, 4, 8, 9, 12 y 13, el porcentaje de error relativo es muy superior al del resto de tests al imponer desplazamiento nulo sobre la frontera de las placas.

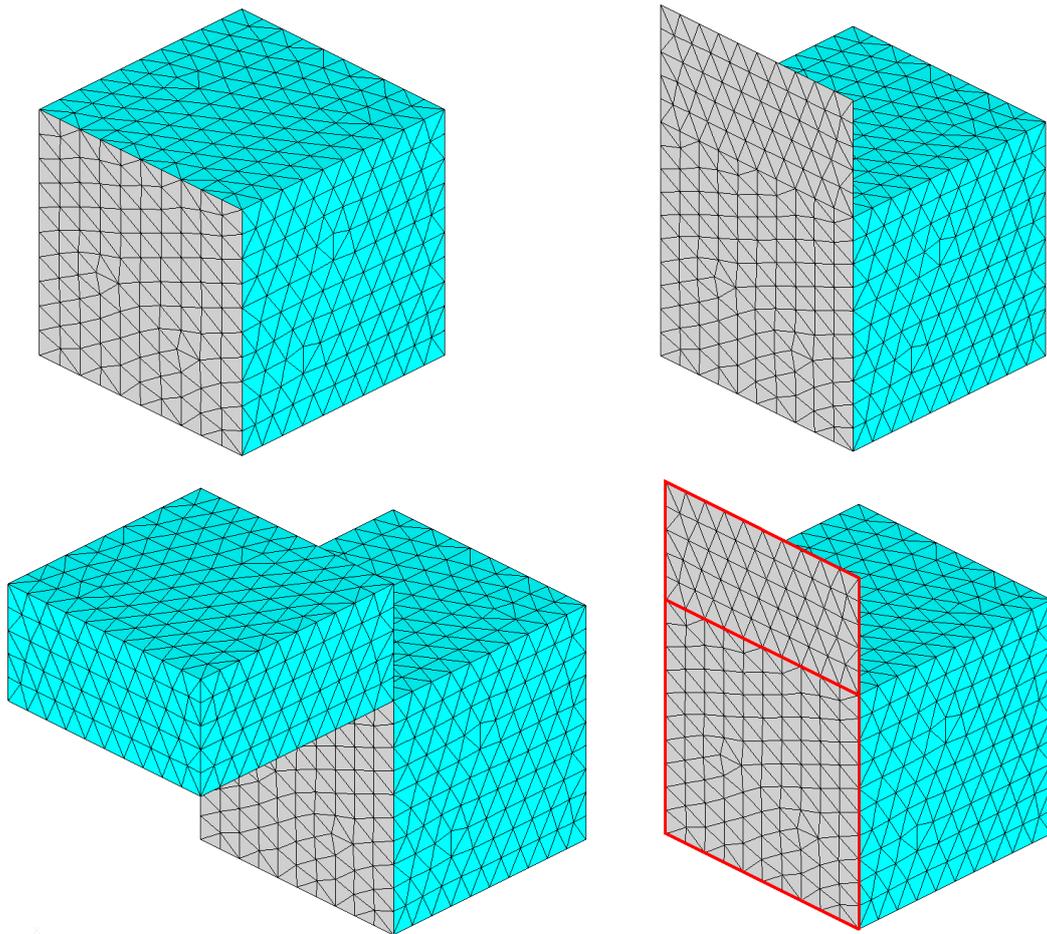


Figura 5.6: Mallas para los cuatro grupos de tests realizados: tests 1-4 (malla superior izquierda), tests 5-9 (malla superior derecha), tests 10-13 (malla inferior derecha) y tests 14-18 (malla inferior izquierda)



## Capítulo 6

# Resultados numéricos

En este capítulo se muestran y se discuten los resultados numéricos obtenidos mediante las simulaciones realizadas con el modelo matemático y el método numérico descrito en los capítulos anteriores. En esta descripción, se ha revisado la creación inicial de la geometría en el Capítulo 2, la construcción de la malla y la selección de los modelos matemáticos adecuados a cada elemento del problema en el Capítulo 3 y el ajuste de los valores de las condiciones de contorno a partir de medidas experimentales en el Capítulo 4.

Este capítulo se ha dividido en dos secciones, según el caso de carga aplicada al motor: una primera sección para el caso de carga “A” y otra segunda sección para el caso de carga “B”. Cada una de las secciones se ha redactado de forma que sea posible su lectura por separado e independientemente una de la otra, para evitar referencias cruzadas. Se han escogido tres frecuencias, 10 Hz, 30 Hz y 50 Hz, para ilustrar los resultados numéricos obtenidos para el campo de presiones, de desplazamientos (tanto en el fluido y como en la estructura) y el campo vectorial asociado a la intensidad.

### 6.1. Caso de carga “A”

Para caracterizar el comportamiento acústico-estructural del autobús, se ha realizado una batería de simulaciones en el rango de 0.2 a 50 Hz para el caso de carga “A”. Dentro de este rango, se han escogido como frecuencias representativas 10 Hz, 30 Hz y 50 Hz.

En la Figura 6.1, en la Figura 6.3 y en la Figura 6.5, se representa el campo de presiones en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante.

Para ilustrar el comportamiento de la presión en el interior de los dominios, en la Figura 6.2, en la Figura 6.4 y en la Figura 6.6, se realiza un corte de la presión sonora a la altura de 1.5 m para cada una de las frecuencias, donde también se muestran los desplazamientos en la estructura de barras.

La Figura 6.1 se corresponde con el campo de presiones para la frecuencia de 10 Hz. Se puede apreciar que el nivel más alto de presión sonora se encuentra en el habitáculo del motor, llegando a 106 dB en la zona donde se ha modelado la excitación del motor mediante la imposición de desplazamientos en los anclajes y mediante el uso

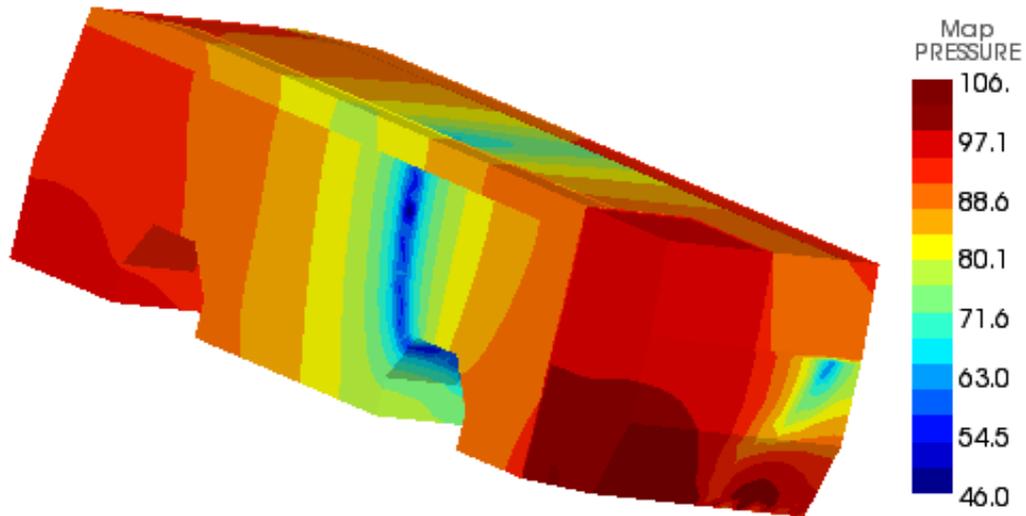


Figura 6.1: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga “A” y frecuencia 10 Hz).

de una fuente puntual de ruido. La otra región del autobús con mayor presión sonora se encuentra en la zona donde se posiciona el conductor, alcanzando, aproximadamente, 92 dB. La zona con menor presión sonora, entre 50 y 80 dB, se sitúa en la parte central del autobús y las ruedas traseras.

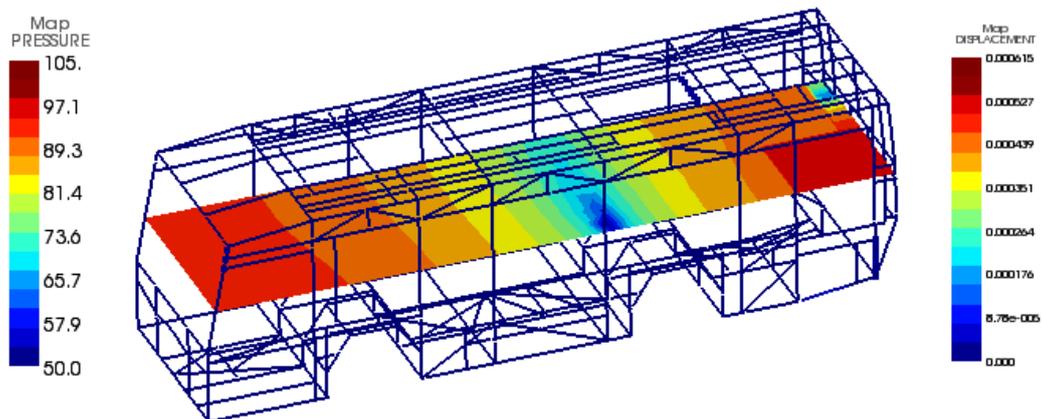


Figura 6.2: Campo de presiones (dB) sobre un corte longitudinal a una altura de 1.5 m (escala de la izquierda), y desplazamientos (m) de las barras (escala de la derecha), para frecuencia 10 Hz y en el caso de carga “A”.

La Figura 6.2 muestra el campo de presiones sobre un corte longitudinal realizado, aproximadamente, a la altura de la cabeza de un pasajero que se encuentra sentado, esto es 1.5 m. En esta figura, se han representado los desplazamientos de las barras para ayudar a contextualizar la geometría del autobús. Con este corte se puede comprobar que el comportamiento del campo de presiones posee las mismas zonas de alta y baja presión sonora analizados a partir de la Figura 6.1

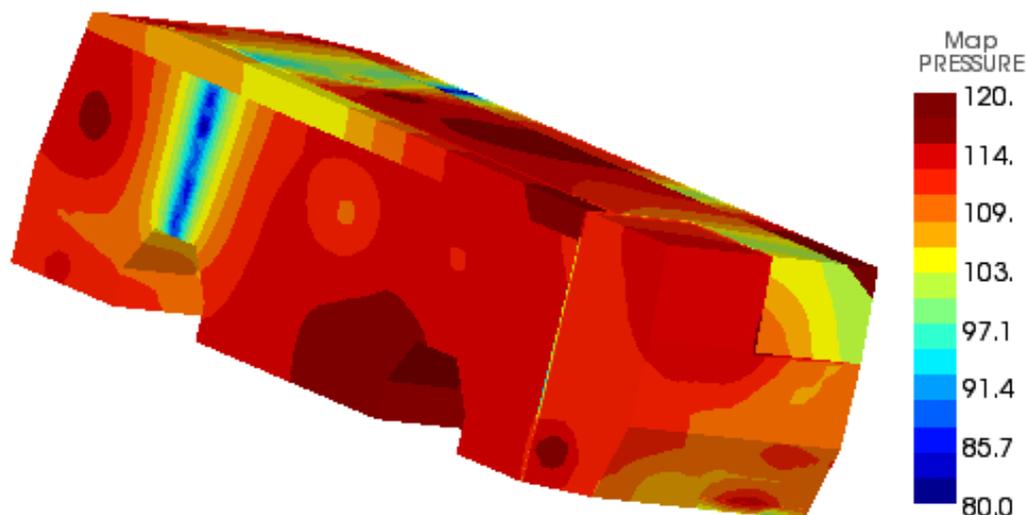


Figura 6.3: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga "A" y frecuencia 30 Hz).

La Figura 6.3 muestra aproximadamente valores de presión sonora para la frecuencia de 30 Hz más altos que en el caso de 10 Hz (compárese con la Figura 6.1). Aunque en el habitáculo del motor se siguen produciendo altos valores de presión sonora, es en la cavidad principal donde ahora se concentran los niveles más altos de presión sonora. Concretamente, se observa en la zona proxima a las ruedas traseras, así como en la parte central del techo, un nivel de 120 dB.

Cabe destacar que este valor de presión sonora de 120 dB también se registra en la parte donde se sitúa el conductor. Para esta frecuencia de 30 Hz, los niveles más bajos de presión sonora aparecen en la zona de las ruedas delanteras, en un rango comprendido entre 85 dB y 103 dB, y en la parte trasera contigua al habitáculo del motor, con un rango de 98 dB a 105 dB.

La representación del campo de presiones sobre el corte longitudinal a una altura de 1.5 m para la frecuencia de 30 Hz, aparece en la Figura 6.4. Este corte confirma el análisis hecho a partir de la Figura 6.3, remarcando además que el valor máximo de presión sonora se encuentra no sólo en la parte central del techo, sino también parte central de toda la cavidad principal. Cabe destacar los diferentes niveles de presión en el interior de la capa de recubrimiento aislante (véase la fina línea en la parte posterior del autobús sobre el plano de corte).

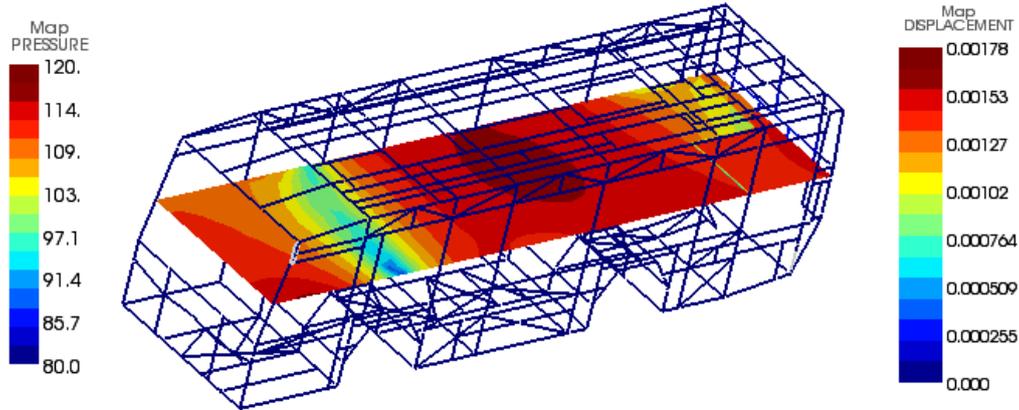


Figura 6.4: Campo de presiones (dB) sobre un corte longitudinal a una altura de 1.5 m (escala de la izquierda), y desplazamientos (m) de las barras (escala de la derecha), para frecuencia 30 Hz y en el caso de carga “A”.

Adicionalmente se ha incluido la Tabla 6.1 de los valores del nivel de presión sonora (en dB) obtenidos con las medidas experimentales descritas en el Capítulo 4. Nótese ahora que los valores de esta tabla están en unidades dB (y no en dBA como ocurría en el caso de las Tablas 4.1 y 6.3 del Capítulo 4). A pesar de que el ajuste de las condiciones de contorno ha sido hecho para la frecuencia 31.5 Hz, y que en este proceso se cometía un error de aproximadamente el 15 % en el fluido, los valores obtenidos a partir de la Figura 6.4 tienen una correspondencia coherente con los de la Tabla 6.1.

Punto	$f$ [Hz]								
	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
M01	93.73	76.32	73.79	64.47	57.55	57.70	55.50	42.14	35.54
M02	92.93	75.92	71.89	66.57	60.85	57.30	56.10	42.74	35.94
M03	88.43	77.02	70.39	70.37	62.35	60.30	59.10	45.24	37.44
M04	94.43	74.02	74.09	69.27	65.75	65.10	62.50	50.64	38.44
M05	93.73	74.62	71.49	63.57	58.15	57.40	54.90	42.14	35.64
M06	87.73	72.52	69.99	68.77	60.45	58.30	56.20	42.94	35.84
M07	92.23	77.02	72.59	68.17	60.25	59.50	58.10	45.74	36.94
M08	92.23	80.82	77.09	69.57	64.95	63.60	63.10	49.84	39.54

Tabla 6.1: Medidas experimentales del nivel de presión sonora (dB) para el caso de carga “A”.

La representación gráfica de la presión sonora para una frecuencia de 50 Hz, se presenta en la Figura 6.5. En ella se pueden ver tres zonas, la parte delantera, central y trasera, con un nivel de presión sonora alto (entre 105 y 115 dB), separadas entre sí por dos zonas donde el nivel de presión sonora desciende hasta el rango de 80 dB a

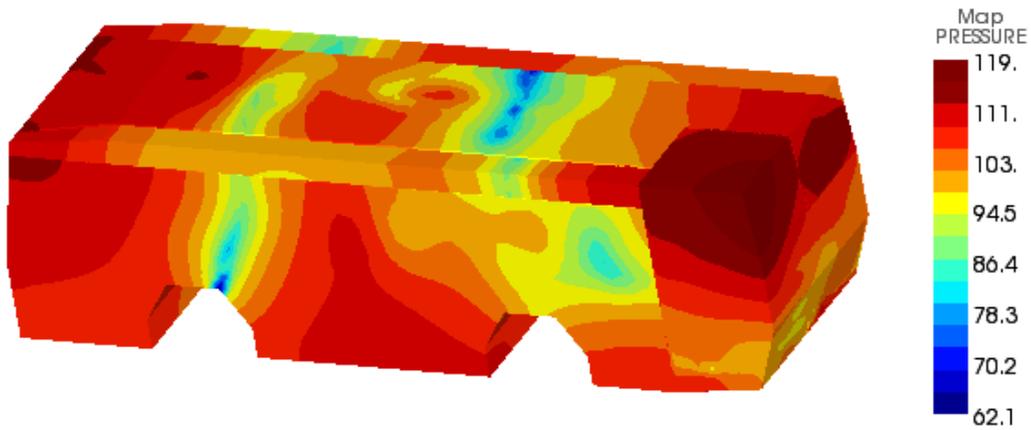


Figura 6.5: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga "A" y frecuencia 50 Hz).

95 dB. El nivel más alto de presión sonora se registra en la parte alta del habitáculo del motor, donde alcanza un valor de 119 dB.

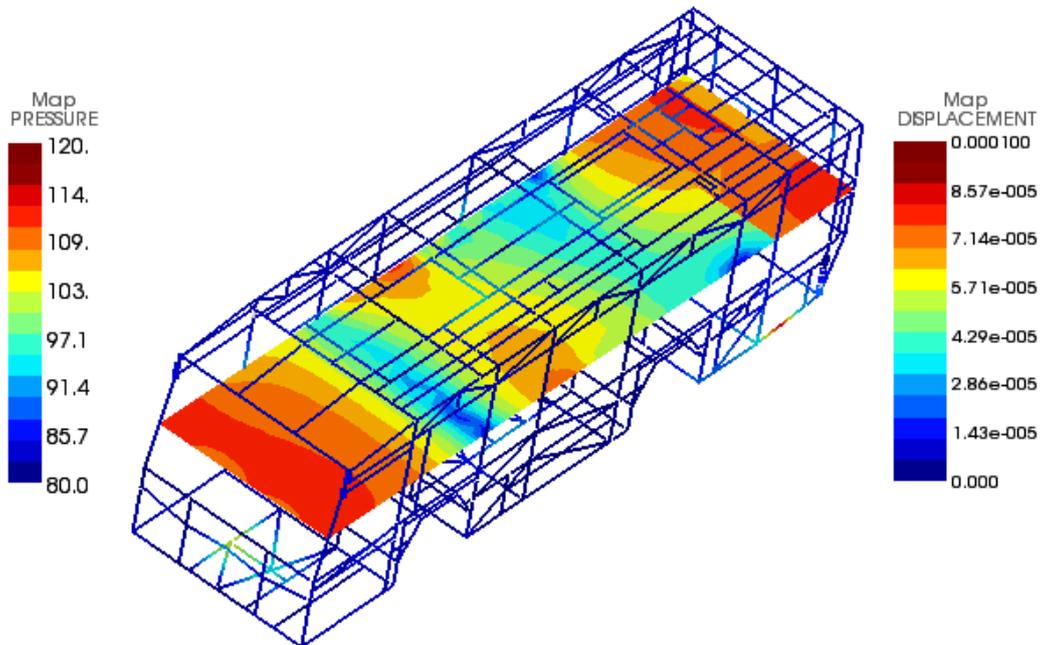


Figura 6.6: Campo de presiones (dB) sobre un corte longitudinal a una altura de 1.5 m (escala de la izquierda), y desplazamientos (m) de las barras (escala de la derecha), para frecuencia 50 Hz y en el caso de carga "A".

El nivel de presión sonora asociado al campo de presiones mostrado en la Figura 6.5 para un frecuencia de 50 Hz, se muestra en la Figura 6.6. En este corte se puede apreciar que las zonas donde los niveles de presión sonora son relativamente bajos (entre 90 y 103 dB) son más amplias de lo que se puede ver en la Figura 6.5.

Para completar el análisis del problema acoplado del autobús, se muestra la norma de la parte real de los desplazamientos (en el caso del fluido y de la estructura) para las frecuencias de 10 Hz, 30 Hz y 50 Hz.

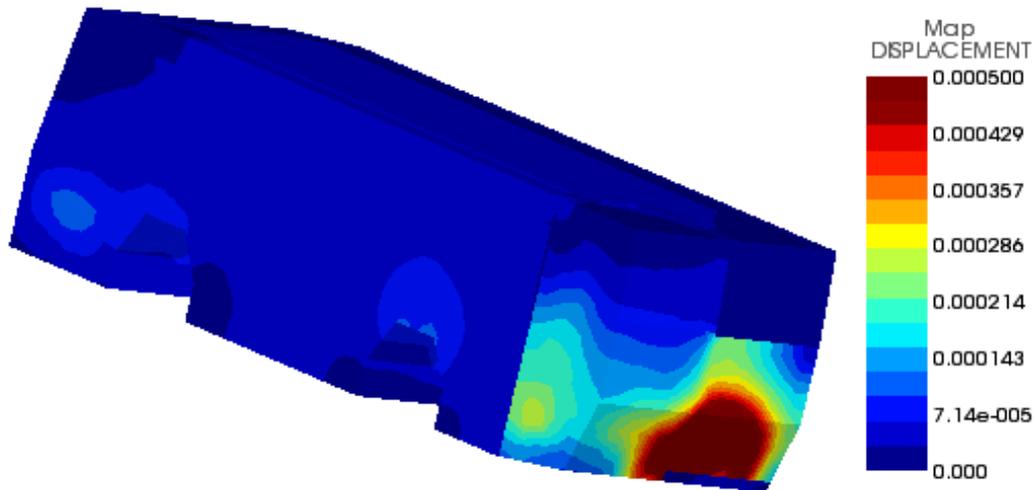


Figura 6.7: Norma de la parte real del campo de desplazamientos del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 10 Hz y en el caso de carga “A”.

En la Figura 6.7 se muestra la norma de la parte real de los desplazamientos en el fluido para la frecuencia de 10 Hz. Los valores más elevados de la norma de la parte real de los desplazamientos se centran en el habitáculo del motor, alcanzando una magnitud máxima de  $5e-4$  m en la zona más próxima a los anclajes y donde las dimensiones del habitáculo son menores. En la parte izquierda del habitáculo del motor también se ve reflejada la acción de la fuente puntual de ruido en los desplazamientos en el fluido, alcanzando estos una magnitud de  $2.5e-4$  m. Cabe reseñar que en el resto de los subdominios del fluido, la magnitud de la norma de la parte real de los desplazamientos es prácticamente nula, excepto en la parte de la puerta del conductor, a la altura de los pies, donde existen unos desplazamientos de  $1.43e-4$  m.

La Figura 6.8 muestra la parte real de los desplazamientos en la estructura. En ella se representan gráficamente los desplazamientos de las placas y barras que rodean el dominio del fluido. En la parte trasera y lateral de este habitáculo se aprecia el lugar donde se han colocado los anclajes del motor ya que en las proximidades de estos puntos es donde se alcanzan los valores más elevados de los desplazamientos. A partir de la Figura 6.2, se puede extraer que los desplazamientos en el sistema de barras son prácticamente nulos.

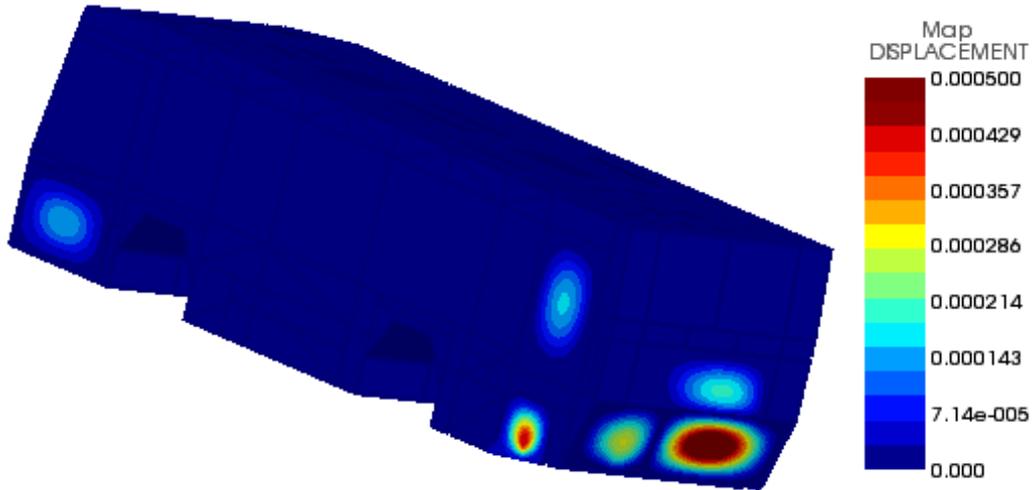


Figura 6.8: Norma de la parte real del campo de desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 10 Hz y en el caso de carga "A".

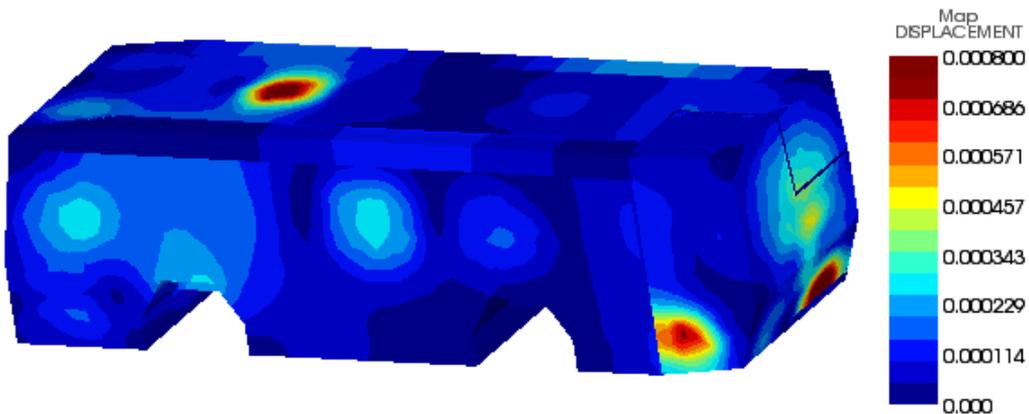


Figura 6.9: Norma de la parte real del campo de desplazamientos del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 30 Hz y en el caso de carga "A".

Los desplazamientos en el fluido para la frecuencia de 30 Hz se pueden ver en la Figura 6.9. En ella se aprecia como existen tres zonas donde los desplazamientos alcanzan su máximo valor,  $8e-4$  m. Estas zonas se sitúan en los puntos próximos a los anclajes del motor y en el techo, concretamente en la placa de la estructura donde se coloca una especie de portón para facilitar la ventilación del autobús.

A pesar de su menor magnitud,  $2.75e-4$  m, se deben mencionar los desplazamientos producidos en la zona de la ventana lateral del conductor y en la zona de la ventana que se sitúa enfrente de la puerta central de entrada y salida de pasajeros (véase Figura 6.9).

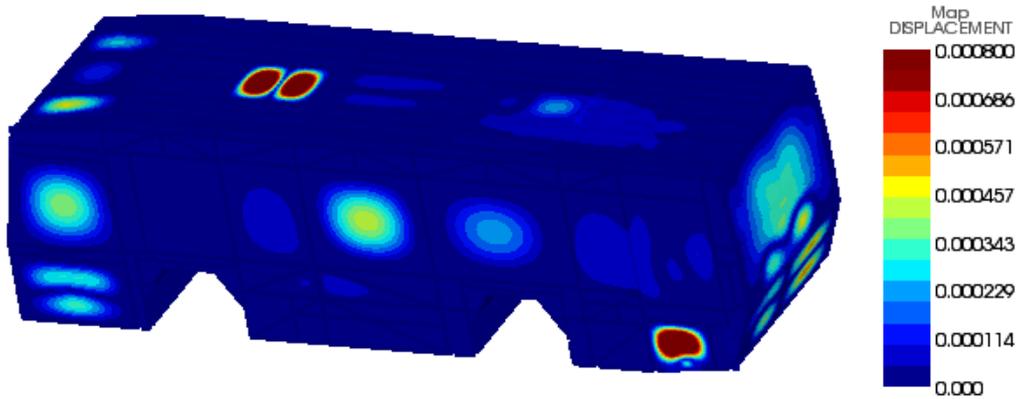


Figura 6.10: Norma de la parte real del campo de desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 30 Hz y en el caso de carga “A”.

Al analizar la Figura 6.10, la cuál muestra los desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 30 Hz, se recupera el patrón de los desplazamientos obtenidos en la Figura 6.9, pero con una magnitud menor. Se deben destacar los valores de los desplazamientos en la parte delantera izquierda del techo en comparación con los vistos en el fluido. Estos desplazamientos tienen una magnitud de  $4.25e-4$  m.

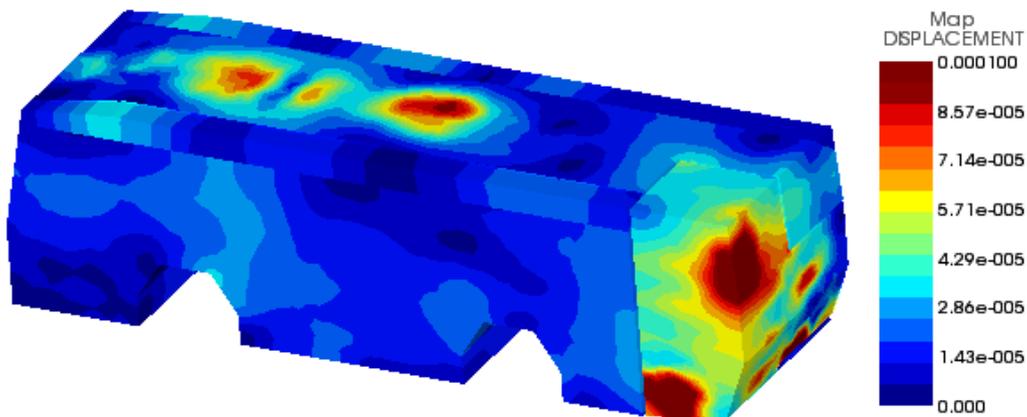


Figura 6.11: Norma de la parte real del campo de desplazamientos del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 50 Hz y en el caso de carga “A”.

Los resultados numéricos asociados a la frecuencia de 50 Hz, muestran unos desplazamientos en el fluido de menor magnitud que los vistos para las otras frecuencias (véase Figura 6.11). Los mayores valores de los desplazamientos se concentran en el habitáculo del motor, sobre todo en los puntos próximos al anclaje del motor y en la parte superior de la unión entre la parte trasera y la parte lateral izquierda del ha-

bitáculo, alcanzando una magnitud de  $1e-4$  m. En el techo se crea una concentración central desde la parte delantera hasta la posterior, tomando valores dentro de un rango de  $5e-5$  m a  $1e-4$  m.

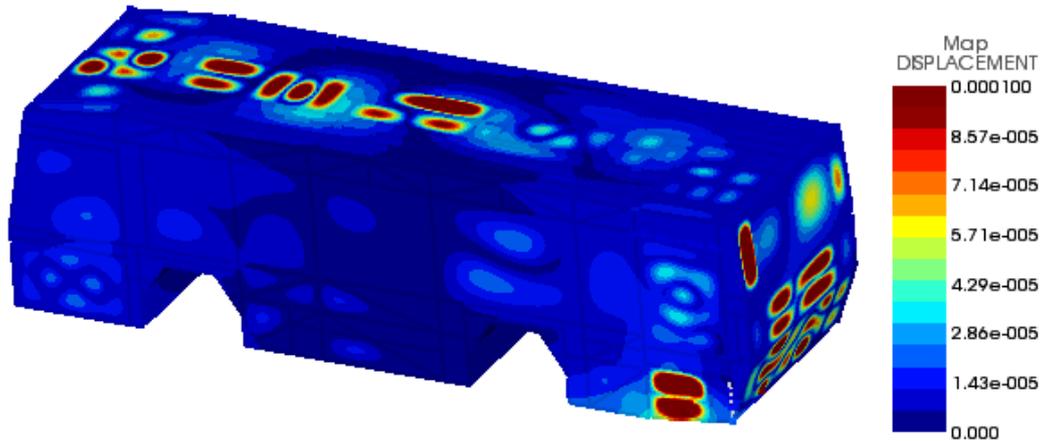


Figura 6.12: Norma de la parte real del campo de desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 50 Hz y en el caso de carga "A".

La Figura 6.12 muestra la norma de la parte real de los desplazamientos en la estructura para la frecuencia de 50 Hz. Cabe señalar la importante magnitud de los desplazamientos en la estructura en la zona inferior de la parte trasera, ya que es ahí donde se encuentra una de las placas de la estructura con mayor superficie, y sus modos propios de vibración son más pequeños que en otras placas de menor superficie.

Además, se deben destacar los desplazamientos de la zona inferior de la parte lateral del habitáculo del motor que están próximos a los anclajes del motor, los cuáles también aparecen en la barra situada en el mismo lugar (véase Figura 6.6).

Nótese que el mapa de correspondencia entre la escala de los valores de los desplazamientos, no es el mismo para las Figuras 6.2, 6.4 y 6.6.

Para finalizar el análisis de resultados numéricos para la carga "A", las Figuras 6.13, 6.14 y 6.15 muestran las representaciones gráficas de la norma de la parte real de las intensidades en los subdominios del fluido del autobús: la cavidad principal, las bóvedas, el habitáculo del motor y la capa de recubrimiento aislante.

Debido a que la definición de la intensidad es el producto de presión por velocidad, es decir  $I = -i\omega UP$ , las Figuras 6.13 - 6.15 son análogas a las Figuras 6.7, 6.9 y 6.11, las cuáles representan los desplazamientos.

En la Figura 6.16, se muestra el campo de presiones, para una frecuencia de 9.8 Hz, en la cavidad fluida del motor sobre el techo del autobús, a una altura de 2.49 m, y del recubrimiento multicapa formado por la capa de material poroso y la placa microperforada, que sirve como aislante de la cavidad del motor. Se puede apreciar que la presión sonora es prácticamente constante e igual a 96.4 dB en toda la cavidad del motor. En el lateral izquierdo y en el lateral inferior del dominio representando, se muestran los dominios que se corresponden al recubrimiento aislante multicapa y se

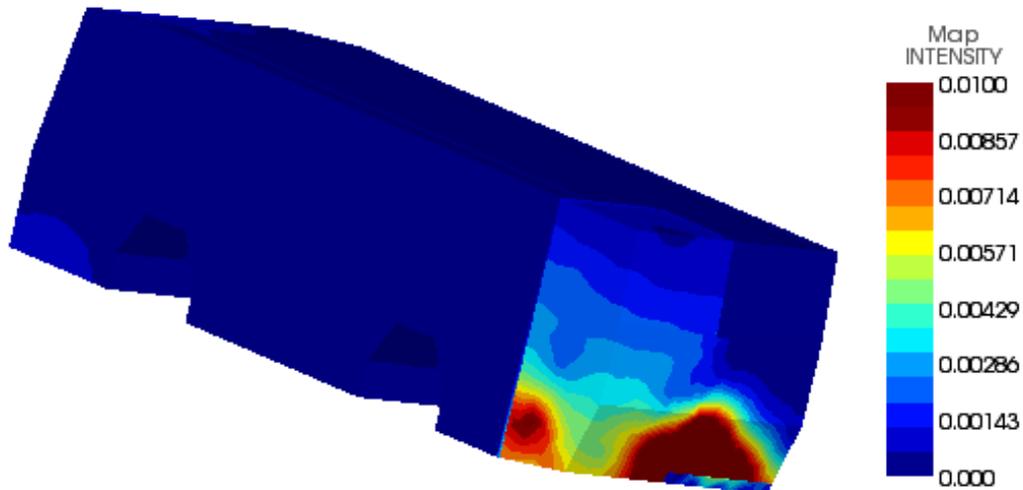


Figura 6.13: Norma de la parte real del campo de intensidad del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 10 Hz y en el caso de carga “A”.

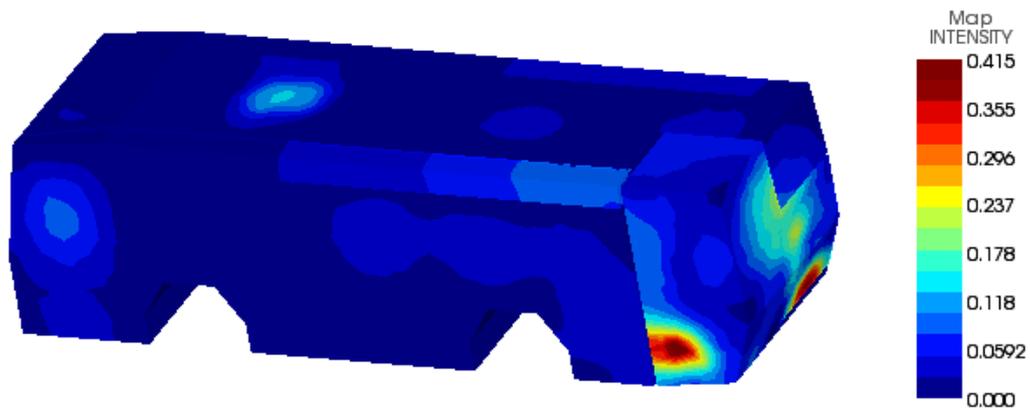


Figura 6.14: Norma de la parte real del campo de intensidad del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 30 Hz y en el caso de carga “A”.

observa un descenso leve de los valores de la presión sonora en estos dominios.

Por último, se analiza más en detalle los resultados numéricos obtenidos en el régimen de muy bajas frecuencias. Aunque esto no sea muy relevante desde el punto de vista acústico, ya que el oído humano sólo alcanza a percibir ondas sonoras por encima de 20 Hz, desde un punto de vista estructural las frecuencias propias muy bajas podrían ser peligrosas para la integridad de la estructura. En la Figura 6.17 se muestra el nivel de presión sonora en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor

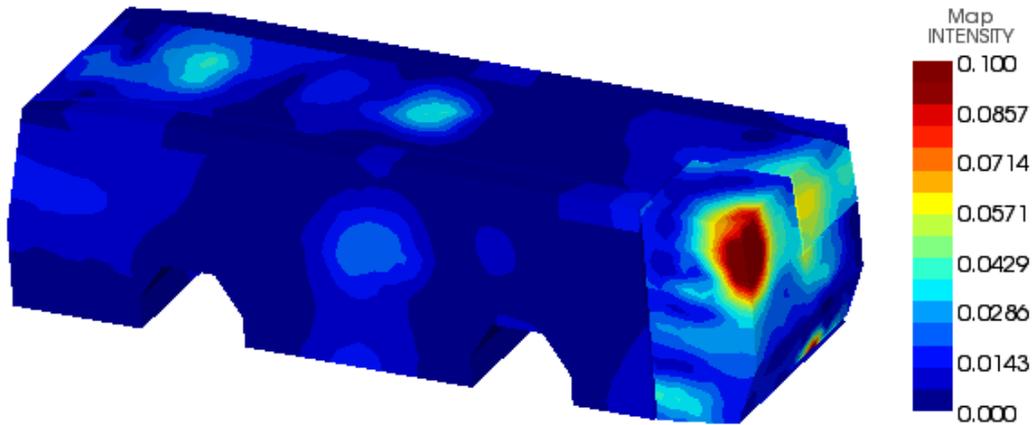


Figura 6.15: Norma de la parte real del campo de intensidad del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 50 Hz y en el caso de carga "A".

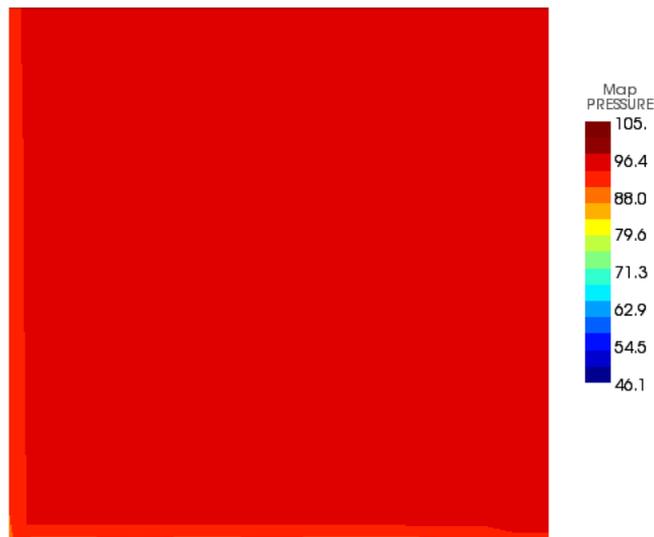


Figura 6.16: Campo de presiones (dB) sobre la sección transversal definida sobre el techo del autobús (a una altura de 2.49 m) de la cavidad del motor junto con el recubrimiento formado por el medio poroso y la placa micro-perforada.

y en la capa de recubrimiento aislante, para un frecuencia de 0.2 Hz. En dicha imagen se puede apreciar un nivel distinto de presión sonora entre las dos bóvedas: la bóveda izquierda posee un nivel de 108 dB, mientras que la de la derecha, 99 dB.

En un principio se podría haber esperado un comportamiento similar en ambas bóvedas. Para determinar la raíz de esta diferencia se han calculado los quince primeros

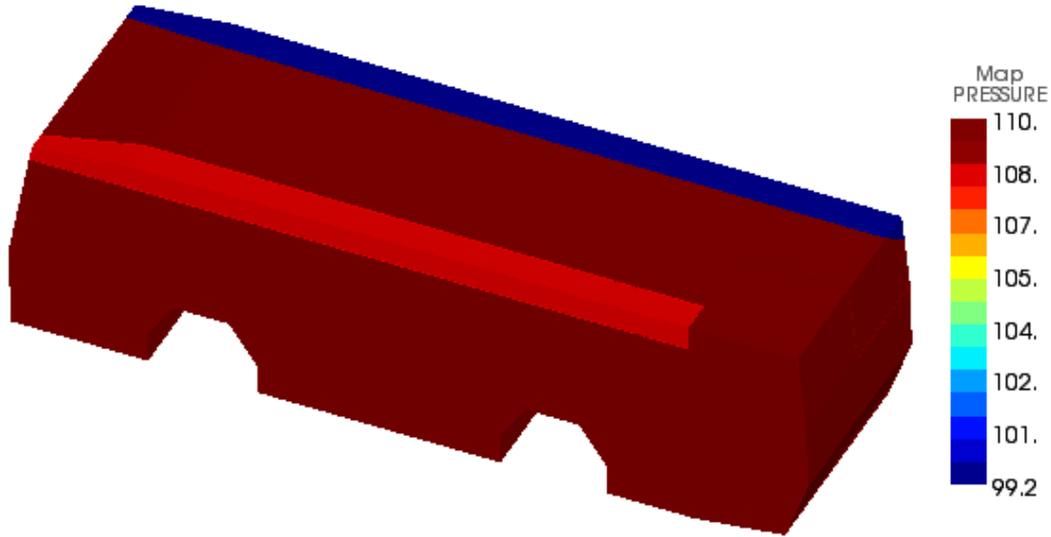


Figura 6.17: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga “A” y frecuencia 0.2 Hz).

	Frecuencia propia [Hz]	$v_n$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
1	5.9127e-2	7.1320e-3
2	7.6234e-2	1.1856e-2
3	8.4122e-2	1.4436e-2
4	9.0551e-2	1.6727e-2
5	1.0602e-1	2.2930e-2
6	1.2450e-1	3.1623e-2
7	1.3950e-1	3.9700e-2
8	1.5145e-1	4.6792e-2
9	1.7122e-1	5.9802e-2
10	1.8029e-1	6.6310e-2
11	1.8838e-1	7.2397e-2
12	1.9335e-1	7.6266e-2
13	2.0019e-1	8.1752e-2
14	2.2459e-1	1.0290e-1
15	2.3528e-1	1.1293e-1

Tabla 6.2: Frecuencias propias más bajas de la estructura y el valor de la velocidad normal media cuadrática de la placa de caucho.

modos propios de la estructura (véase Tabla 6.2). Centrándose en la primera columna de esta tabla, se observa que estas frecuencia propias están próximas a la frecuencia de

estudio, 0.2 Hz. Tras ver la velocidad normal media cuadrática,

$$v_n = \frac{1}{\text{área}(\Omega)} \int_{\Omega} |\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}| dS,$$

siendo  $\Omega$  el dominio de cada uno de los elementos que forman la estructura, se comprueba que son todas prácticamente nulas, excepto para la placa de caucho que forma parte del recubrimiento aislante del motor. En la segunda columna de la Tabla 6.2 se especifican los valores de la velocidad normal media cuadrática de la placa de caucho para las quince primeras frecuencias propias.

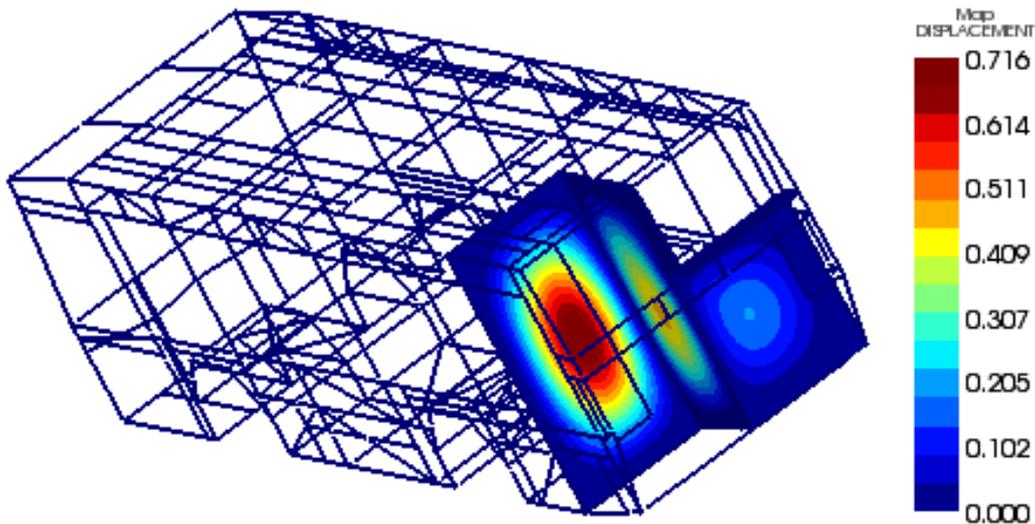


Figura 6.18: Norma de la parte real de los desplazamientos en la placa de caucho y en las barras para la primera frecuencia propia de la estructura, ( $f_1 = 5.9127e-2$  Hz).

Las Figuras 6.18 y 6.19 muestran la norma de la parte real de los desplazamientos para la primera y séptima frecuencia propia, respectivamente. Teniendo esto en cuenta, se puede comprobar que las velocidades (y por tanto los desplazamientos) en la estructura para frecuencias propias muy bajas se localizan en la placa de caucho. Esto es la causa por la cual el nivel de presión en la bóveda izquierda, en la que una de sus caras limita con la placa de caucho, es superior al nivel de la bóveda derecha. Además, la propia geometría de la bóveda sirve como guía de ondas, de forma que el nivel de presión sonora generado por la placa de caucho se propaga a través de toda la bóveda.

En la Figura 6.20 se muestra la gráfica con la respuesta en frecuencia (de 0.2Hz a 50 Hz) del problema acoplado acústico-estructural. En esta gráfica se representa media cuadrática de la presión sonora de la cavidad principal del autobús con respecto a la frecuencia.

Se debe remarcar que el núcleo de cálculo ACTRAN no permite resolver el problema de las frecuencias propias para un problema acoplado fluido-estructura como el presentando en este proyecto. Por lo tanto, para tener un conocimiento aproximado

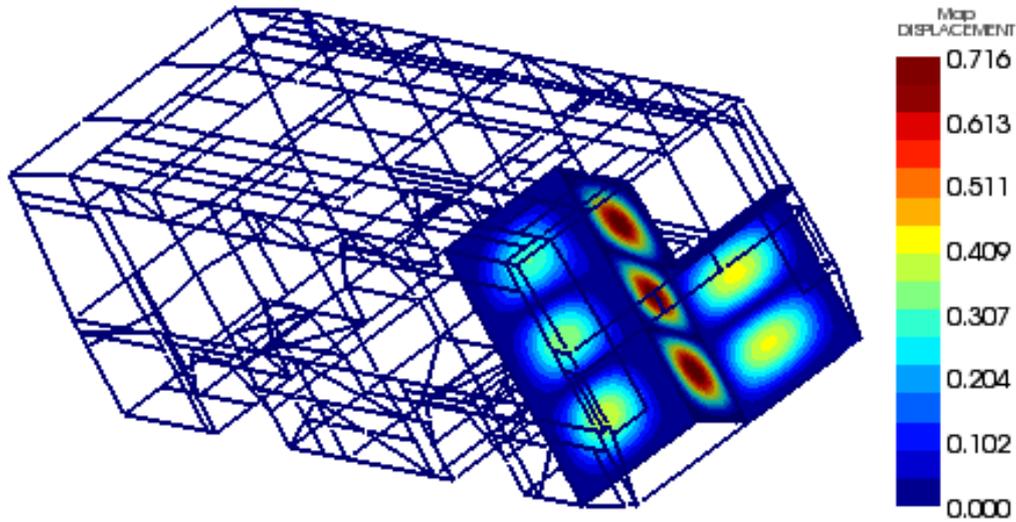


Figura 6.19: Norma de la parte real de los desplazamientos en la placa de caucho y en las barras para la primera frecuencia propia de la estructura, ( $f_1 = 1.3950e-1$  Hz).

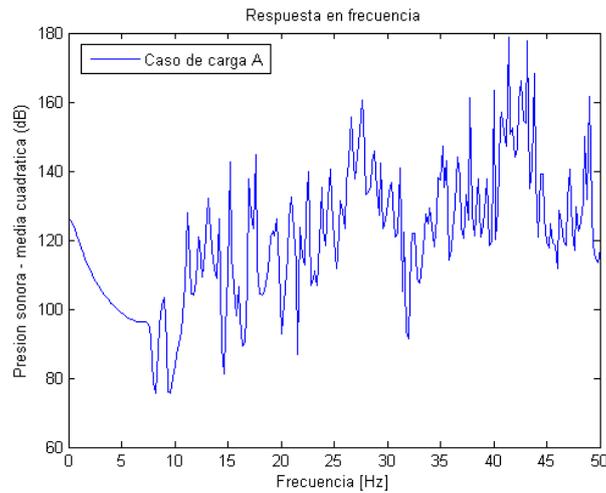


Figura 6.20: Respuesta en frecuencia (de 0.2 Hz a 50 Hz) de la presión cuadrática media calculada en la cavidad principal del autobús en el caso de carga “A”.

del valor de estas frecuencias propias, se deben analizar los “picos” que presentan las gráficas de la respuesta en frecuencia. Podemos concluir, a partir de la figura 6.20, que no existen frecuencias propias del problema acoplado en el rango de 0.2 a 7.5 Hz. Sin embargo, para el intervalo de 10 Hz a 50 Hz, existe una alta concentración de “picos” en la respuesta en frecuencia, lo que indica una gran cantidad de frecuencias propias (principalmente debidas a la parte estructural del autobús).

Además de la representación de la gráfica de la respuesta en frecuencia, se han calculado las frecuencias propias para la cavidad fluida principal y para la parte estructural. En el caso de la cavidad principal, en el rango de 0.2 a 50 Hz, se han obtenido dos: la primera a  $2.0654e+1$  Hz y la segunda a  $3.74740e+1$  Hz. En el caso de la estructura, se ha resuelto el problema desde 0.2 Hz a 10 Hz, y, en este pequeño rango, se han encontrado más de 1100 frecuencias propias. En la Tabla 6.2 se muestran los quince primeros modos propios calculados. Si se centra la atención en el rango de frecuencias de 0.2 Hz a 10 Hz, los modos propios de la estructura se focalizan en los desplazamientos de la placa caucho y en una de las barras de la parte trasera del lateral derecho del autobús (véanse Figuras 6.18 y 6.19).

## 6.2. Caso de carga “B”

Para caracterizar el comportamiento acústico-estructural del autobús, se ha realizado una batería de simulaciones en el rango de 0.2 a 50 Hz para el caso de carga “B”. Dentro de este rango, se han escogido como frecuencias representativas 10 Hz, 30 Hz y 50 Hz.

En la Figura 6.21, en la Figura 6.23 y en la Figura 6.25, se representa el campo de presiones en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante.

Para ilustrar el comportamiento de la presión en el interior de los dominios, en la Figura 6.22, en la Figura 6.24 y en la Figura 6.26, se realiza un corte de la presión sonora a la altura de 1.5 m para cada una de las frecuencias, donde también se muestran los desplazamientos en la estructura de barras.

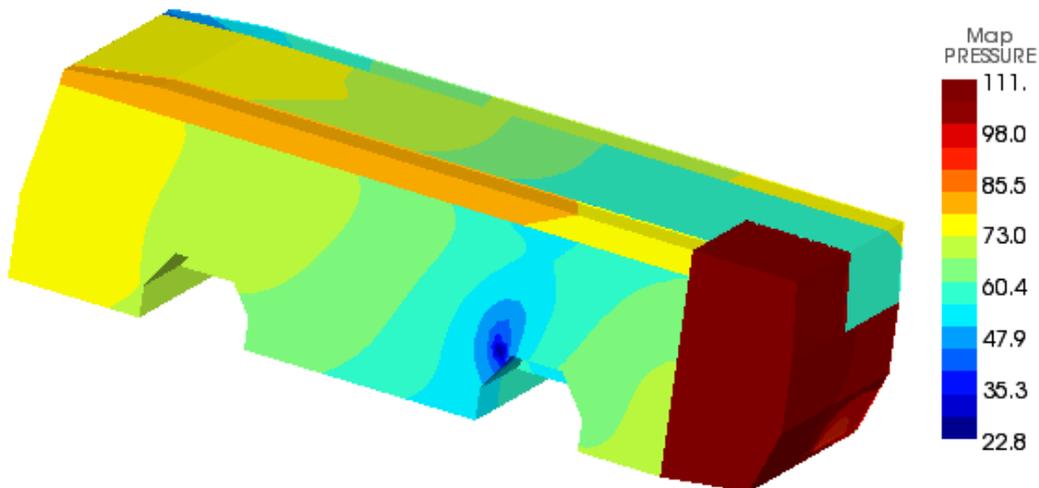


Figura 6.21: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga “B” y frecuencia 10 Hz).

La Figura 6.21 se corresponde con el campo de presiones para la frecuencia de

10 Hz. Se puede apreciar que el nivel más alto de presión sonora se encuentra en el habitáculo del motor, a una presión sonora constante de 111 dB. La otra región del autobús con mayor presión sonora se encuentra en la zona en la bóveda izquierda, alcanzando, aproximadamente, 82.5 dB. La cavidad principal del autobús posee una presión sonora dentro del rango de 50 dB a 73 dB.

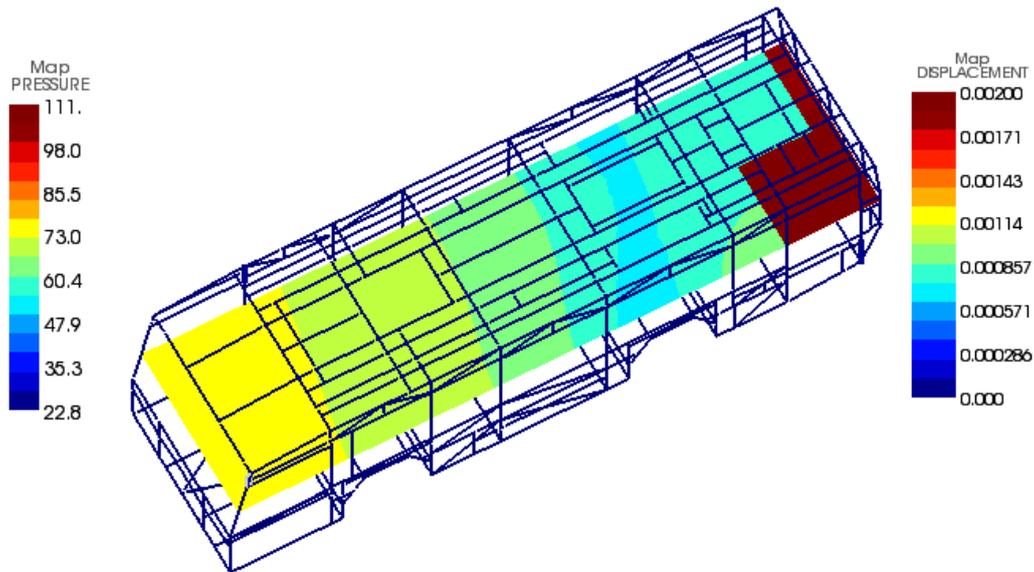


Figura 6.22: Campo de presiones (dB) sobre un corte longitudinal a una altura de 1.5 m (escala de la izquierda), y desplazamientos (m) de las barras (escala de la derecha), para frecuencia 10 Hz y en el caso de carga "B".

La Figura 6.22 muestra el campo de presiones sobre un corte longitudinal realizado, aproximadamente, a la altura de la cabeza de un pasajero que se encuentra sentado, esto es 1.5 m. En esta figura, se han representado los desplazamientos de las barras para ayudar a contextualizar la geometría del autobús. Con este corte se puede comprobar que el comportamiento del campo de presiones posee las mismas zonas de alta y baja presión sonora analizados a partir de la Figura 6.21, a excepción de las bóvedas que no se visualizan en el corte.

La Figura 6.23 muestra aproximadamente valores de presión sonora para la frecuencia de 30 Hz más altos que en el caso de 10 Hz (compárese con la Figura 6.21). Aunque en el habitáculo del motor se siguen produciendo altos valores de presión sonora, es en la cavidad principal donde ahora se concentran los niveles más altos de presión sonora. Concretamente, se observa en la zona proxima a las ruedas traseras, así como en la parte central del techo, un nivel de 117 dB.

Cabe destacar que este valor de presión sonora de 117 dB también se registra en la parte donde se sitúa el conductor. Para esta frecuencia de 30 Hz, los niveles más bajos de presión sonora aparecen en la zona de las ruedas delanteras, en un rango comprendido entre 80 dB y 95.3 dB, y en la parte trasera contigua al habitáculo del motor, con un rango de 95.3 dB a 103 dB.

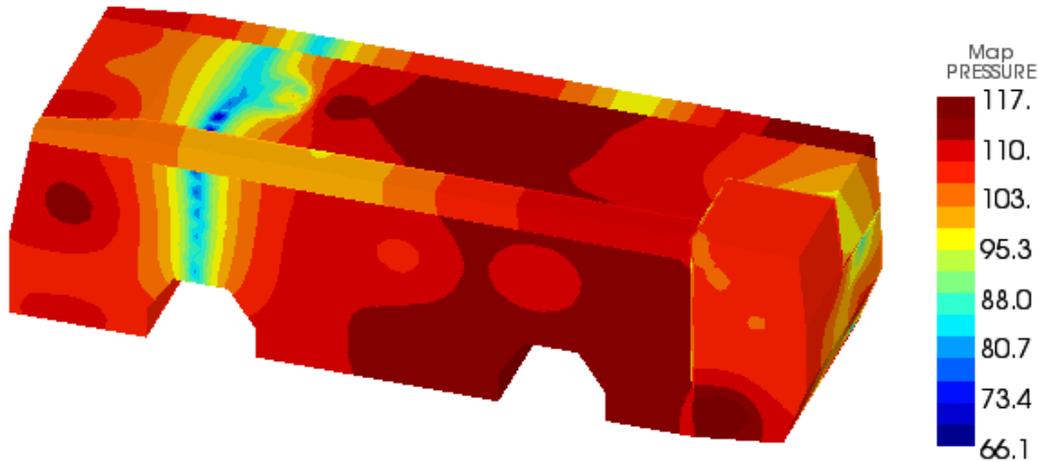


Figura 6.23: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga “B” y frecuencia 30 Hz).

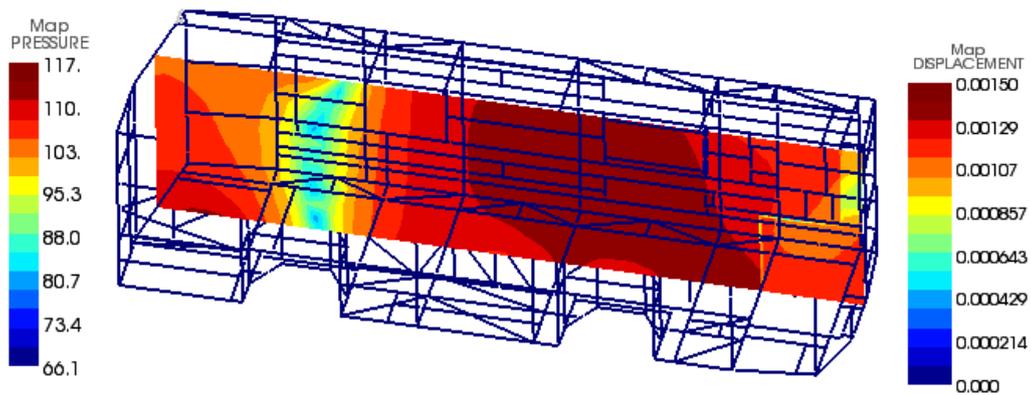


Figura 6.24: Campo de presiones (dB) sobre un corte longitudinal a una altura de 1.5 m (escala de la izquierda), y desplazamientos (m) de las barras (escala de la derecha), para frecuencia 30 Hz y en el caso de carga “B”.

La representación del campo de presiones sobre el corte longitudinal a una altura de 1.5 m para la frecuencia de 30 Hz, aparece en la Figura 6.24. Este corte confirma el análisis hecho a partir de la Figura 6.23, remarcando además que el valor máximo de presión sonora se encuentra no sólo en la parte central del techo, sino también en la parte central de toda la cavidad principal. Cabe destacar los diferentes niveles de presión en el interior de la capa de recubrimiento aislante (véase la fina línea en la parte posterior del autobús sobre el plano de corte).

Adicionalmente se ha incluido la Tabla 6.3 de los valores del nivel de presión sonora (en dB) obtenidos con las medidas experimentales descritas en el Capítulo 4. Nótese

Punto	$f$ [Hz]								
	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
M01	80.23	78.52	77.59	75.17	67.05	65.20	64.00	52.34	43.64
M02	74.13	71.32	74.39	65.77	60.15	58.90	57.90	47.94	38.94
M03	78.33	76.62	72.69	66.57	62.25	62.80	62.00	50.14	42.34
M04	82.83	80.02	74.59	76.27	70.35	64.20	61.70	53.04	44.64
M05	79.83	79.82	82.79	76.27	65.55	67.70	65.00	54.74	45.74
M06	76.23	77.02	73.69	68.27	60.65	58.80	57.30	48.54	39.74
M07	77.63	78.12	79.19	73.57	66.65	62.30	61.60	50.34	41.94
M08	81.33	78.92	82.99	73.67	67.35	66.30	64.20	53.74	44.84

Tabla 6.3: Medidas experimentales del nivel de presión sonora (dB) para el caso de carga “B”.

ahora que los valores de esta tabla están en unidades dB (y no en dBA como ocurría en el caso de las Tablas 4.2 y 6.3 de Capítulo 4). A pesar de que el ajuste de las condiciones de contorno ha sido hecho para la frecuencia de 31.5 Hz, y que en este proceso se cometía un error de aproximadamente el 8% en el fluido, los valores obtenidos a partir de la Figura 6.24 tienen una correspondencia coherente con los de la Tabla 6.3.

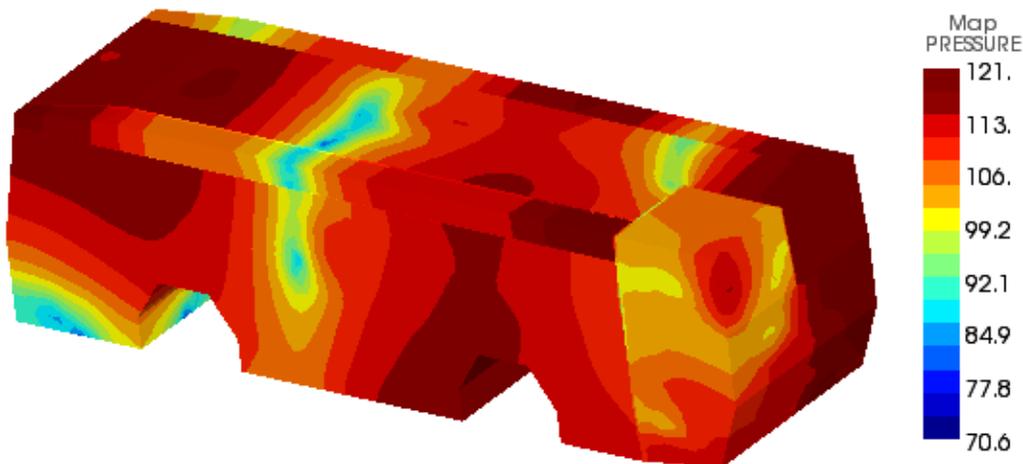


Figura 6.25: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga “B” y frecuencia 50 Hz).

La representación gráfica de la presión sonora para una frecuencia de 50 Hz, se presenta en la Figura 6.25. En ella se pueden ver tres zonas: la parte superior delantera, la zona de la ruedas traseras y la parte trasera contigua al motor; con un nivel de presión sonora alto 121 dB. En la parte central y en la parte inferior delantera, se registran los valores más bajos de presión sonora, entre 85 y 100 dB.

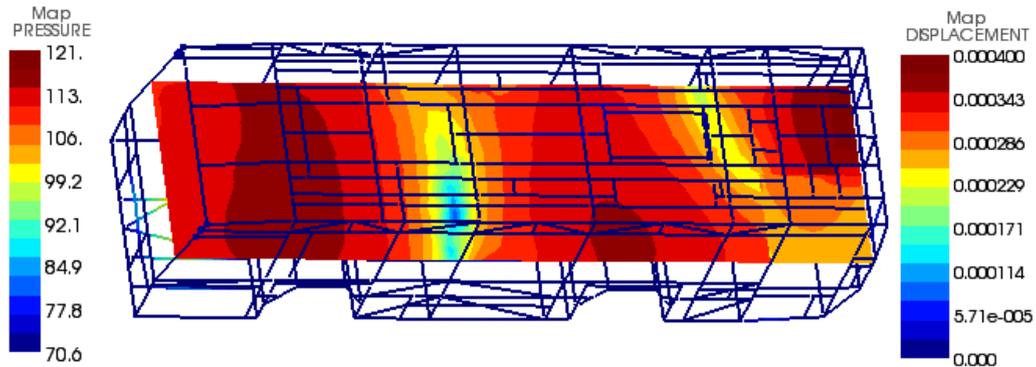


Figura 6.26: Campo de presiones (dB) sobre un corte longitudinal a una altura de 1.5 m (escala de la izquierda), y desplazamientos (m) de las barras (escala de la derecha), para frecuencia 50 Hz y en el caso de carga “B”.

El nivel de presión sonora asociado al campo de presiones mostrado en la Figura 6.25 para un frecuencia de 50 Hz, se muestra en la Figura 6.26. En este corte se puede apreciar que la zona central en donde los niveles de presión sonora son relativamente bajos (entre 85 y 100 dB) es más amplia de lo que se puede ver en la Figura 6.25.

Para completar el análisis del problema acoplado del autobús, se muestra la norma de la parte real de los desplazamientos (en el caso del fluido y de la estructura) para las frecuencias de 10 Hz, 30 Hz y 50 Hz.

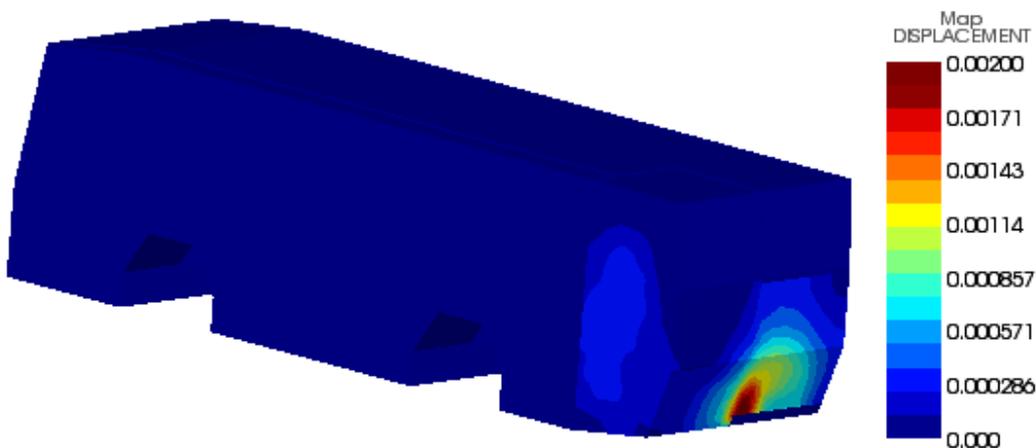


Figura 6.27: Norma de la parte real del campo de desplazamientos del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 10 Hz y en el caso de carga “B”.

En la Figura 6.27 se muestra la norma de la parte real de los desplazamientos en el fluido para la frecuencia de 10 Hz. Los valores más elevados de la norma de la

parte real de los desplazamientos se centran en el habitáculo del motor, alcanzando una magnitud máxima de  $2e-3$  m en la zona más próxima a los anclajes y donde las dimensiones del habitáculo son menores. En la parte izquierda del habitáculo del motor también se ve reflejada la acción de la fuente puntual de ruido en los desplazamientos en el fluido, alcanzando estos una magnitud de  $5.71e-4$  m. Cabe reseñar que en el resto de los subdominios del fluido, la magnitud de la norma de la parte real de los desplazamientos es prácticamente nula.

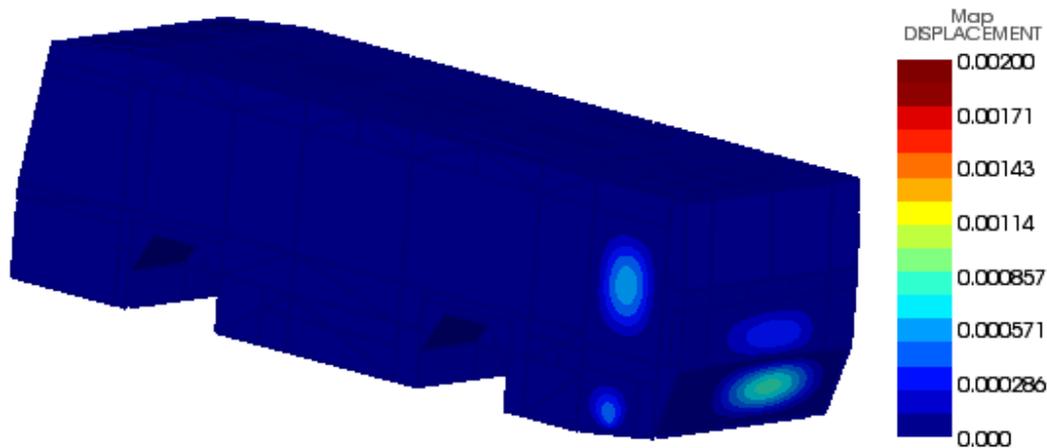


Figura 6.28: Norma de la parte real del campo de desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 10 Hz y en el caso de carga “B”.

La Figura 6.28 muestra la parte real de los desplazamientos en la estructura. En ella se representan gráficamente los desplazamientos de las placas y barras que rodean el dominio del fluido. En la parte trasera y lateral de este habitáculo se aprecia el lugar donde se han colocado los anclajes del motor ya que en las proximidades de estos puntos es donde se alcanzan los valores más elevados de los desplazamientos. A partir de la Figura 6.22, se puede extraer que los desplazamientos en el sistema de barras son prácticamente nulos.

Los desplazamientos en el fluido para la frecuencia de 30 Hz se pueden ver en la Figura 6.29. En ella se aprecia como el valor más alto,  $7.5e-4$  m, para el módulo de la parte real de los desplazamientos se concentra en la parte inferior del lateral del habitáculo del motor.

A pesar de su menor magnitud,  $2.14e-4$  m, se deben mencionar los desplazamientos producidos en la zona de la ventana lateral del conductor y en la zona de la ventana que se sitúa enfrente de la puerta central de entrada y salida de pasajeros, así como en la zona donde se coloca una especie portón para facilitar la ventilación en el techo del autobús (véase Figura 6.29).

Al analizar la Figura 6.30, la cuál muestra los desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 30 Hz, se recupera el patrón de los desplazamientos obtenidos en la Figura 6.29, pero con una magnitud mayor.

Los resultados numéricos asociados a la frecuencia de 50 Hz, muestran unos de

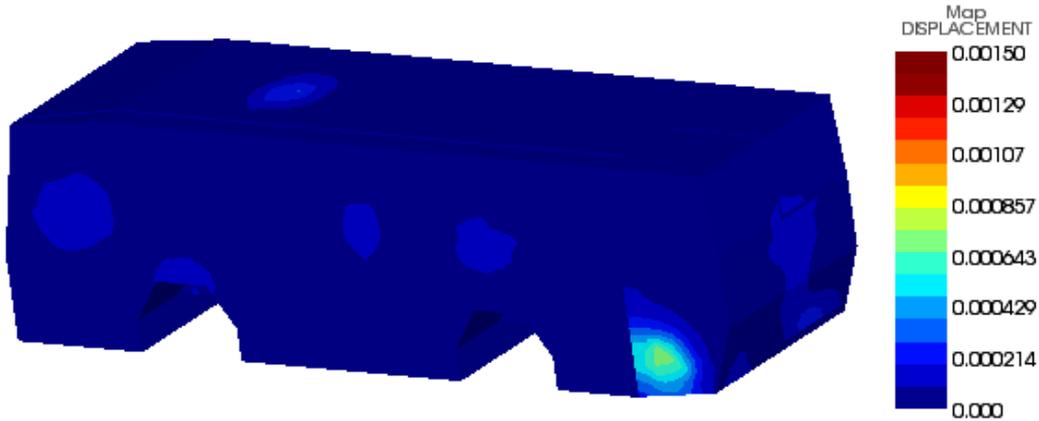


Figura 6.29: Norma de la parte real del campo de desplazamientos del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 30 Hz y en el caso de carga “B”.

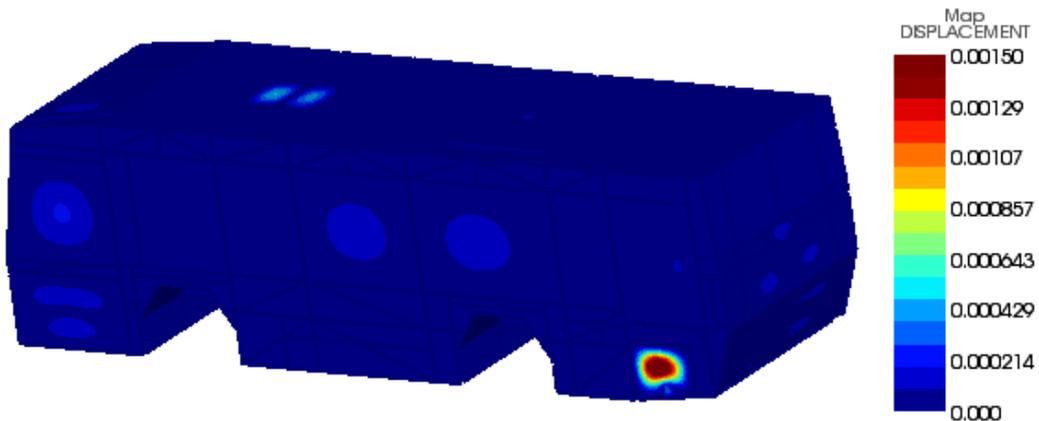


Figura 6.30: Norma de la parte real del campo de desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 30 Hz y en el caso de carga “B”.

desplazamientos en el fluido de menor magnitud que los vistos para las otras frecuencias (véase Figura 6.31). Los mayores valores de los desplazamientos se concentran en el habitáculo del motor, sobre todo en los puntos próximos al anclaje del motor y en la parte superior de la unión entre la parte trasera y la parte lateral izquierda del habitáculo, alcanzando una magnitud de  $2.29 \times 10^{-4}$  m.

La Figura 6.32 muestra la norma de la parte real de los desplazamientos en la estructura para la frecuencia de 50 Hz. Cabe señalar la importante magnitud de los desplazamientos en la estructura en la zona inferior de la parte trasera, ya que es ahí donde se encuentra una de las placas de la estructura con mayor superficie, y sus modos propios de vibración son más pequeños que en otras placas de menor superficie. También se señalan los desplazamientos de la parte trasera superior, en la parte derecha

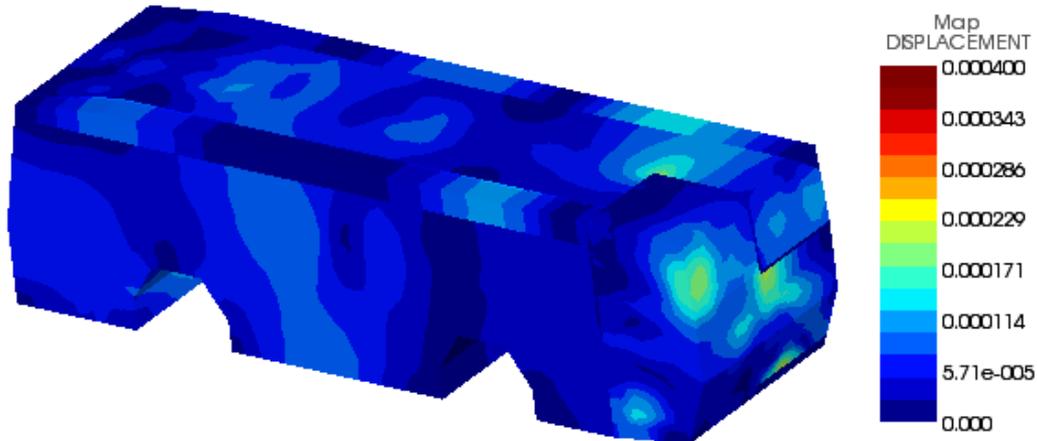


Figura 6.31: Norma de la parte real del campo de desplazamientos del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 50 Hz y en el caso de carga “B”.

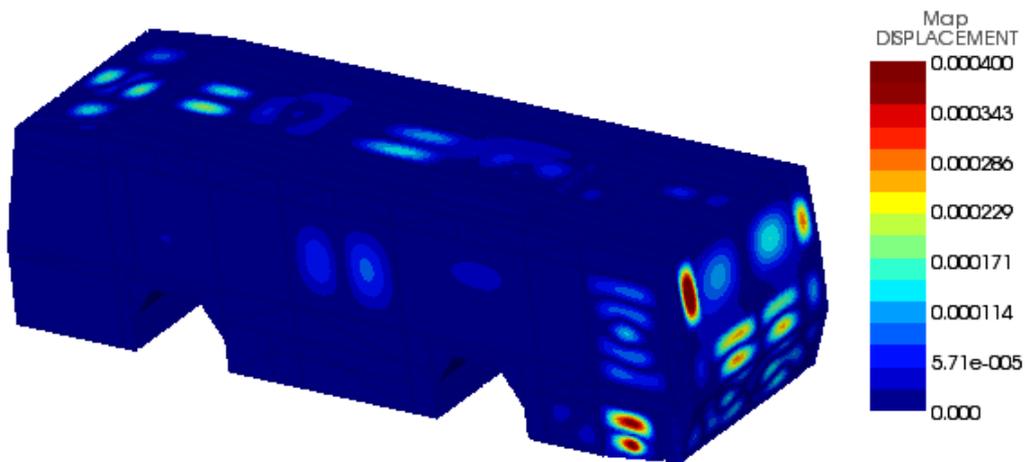


Figura 6.32: Norma de la parte real del campo de desplazamientos de la estructura para la frecuencia de 50 Hz y en el caso de carga “B”.

y en la parte izquierda.

Además, se deben destacar los desplazamientos de la zona inferior de la parte lateral del habitáculo del motor que están próximos a los anclajes del motor. Asimismo, se mencionan los desplazamientos que tienen lugar en el techo, con una magnitud de  $1.5e-4$  m.

Nótese que el mapa de correspondencia entre la escala de los valores de los desplazamientos, no es el mismo para las Figuras 6.22, 6.24 y 6.26.

Para finalizar el análisis de resultados numéricos para la carga “B”, las Figuras 6.33,

6.34 y 6.35 muestran las representaciones gráficas de la norma de la parte real de las intensidades en los subdominos del fluido del autobús: la cavidad principal, las bóvedas, el habitáculo del motor y la capa de recubrimiento aislante.

Debido a que la definición de la intensidad es el producto de presión por velocidad, es decir  $I = -i\omega UP$ , las Figuras 6.33 - 6.35 son análogas a las Figuras 6.27, 6.29 y 6.31, las cuales representan los desplazamientos.

Sin embargo, en la Figura 6.33 se puede apreciar de forma adicional la intensidad de la fuente puntual de sonido en el habitáculo del motor.

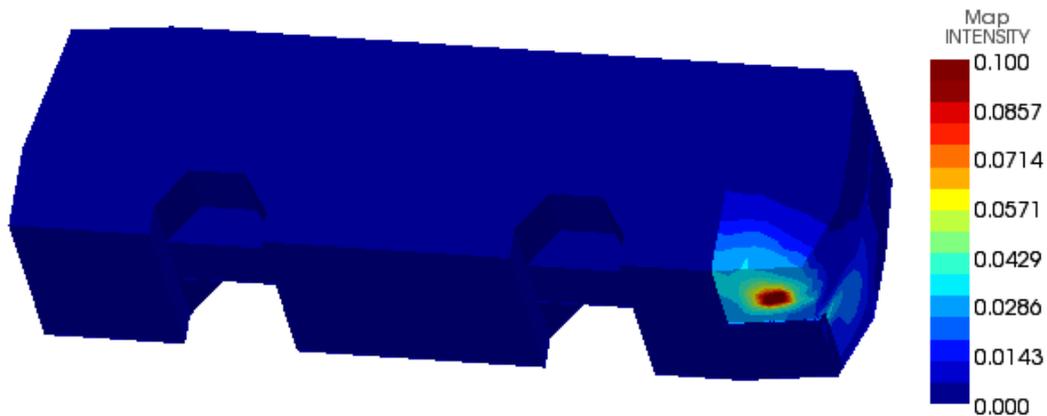


Figura 6.33: Norma de la parte real del campo de intensidad del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 10 Hz y en el caso de carga “B”.

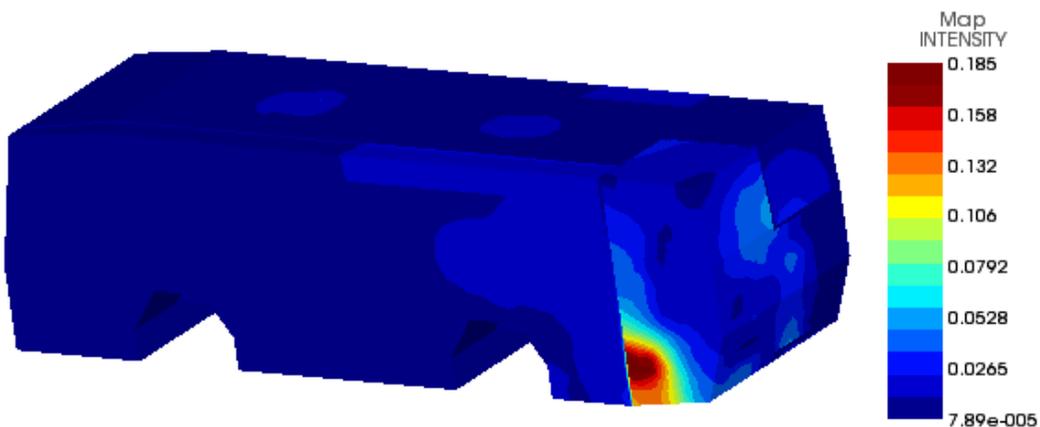


Figura 6.34: Norma de la parte real del campo de intensidad del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 30 Hz y en el caso de carga “B”.

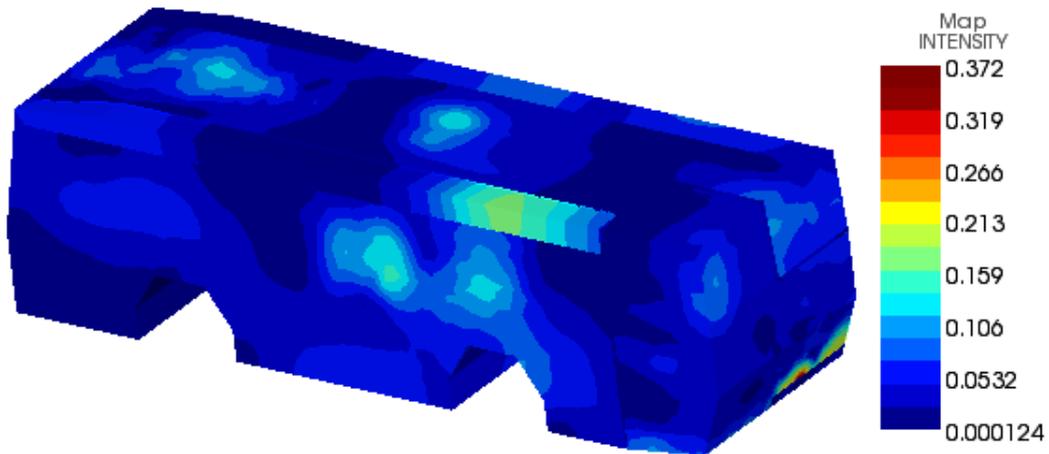


Figura 6.35: Norma de la parte real del campo de intensidad del fluido en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para la frecuencia de 50 Hz y en el caso de carga “B”.



Figura 6.36: Campo de presiones (dB) sobre la sección transversal definida sobre el techo del autobús (a una altura de 2.49 m) de la cavidad del motor junto con el recubrimiento formado por el medio poroso y la placa micro-perforada.

En la Figura 6.36, se muestra el campo de presiones, para una frecuencia de 9.8 Hz, en la cavidad fluida del motor sobre el techo del autobús, a una altura de 2.49 m, y del recubrimiento multicapa formado por la capa de material poroso y la placa micro-perforada, que sirve como aislante de la cavidad del motor. Se puede apreciar que la

presión sonora es prácticamente constante e igual a 98.4 dB en toda la cavidad del motor. En el lateral izquierdo y en el lateral inferior del dominio representando, se muestran los dominios que se corresponden al recubrimiento aislante multicapa y se observa un descenso leve de los valores de la presión sonora en estos dominios.

Por último, se analiza más en detalle los resultados numéricos obtenidos en el régimen de muy bajas frecuencias. Aunque esto no sea muy relevante desde el punto de vista acústico, ya que el oído humano sólo alcanza a percibir ondas sonoras por encima de 20 Hz, desde un punto de vista estructural las frecuencias propias muy bajas podrían ser peligrosas para la integridad de la estructura. En la Figura 6.37 se muestra el nivel de presión sonora en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante, para un frecuencia de 0.2 Hz. En dicha imagen se puede apreciar un nivel distinto de presión sonora entre las dos bóvedas: la bóveda izquierda posee un nivel de 112 dB, mientras que la de la derecha, 101 dB.

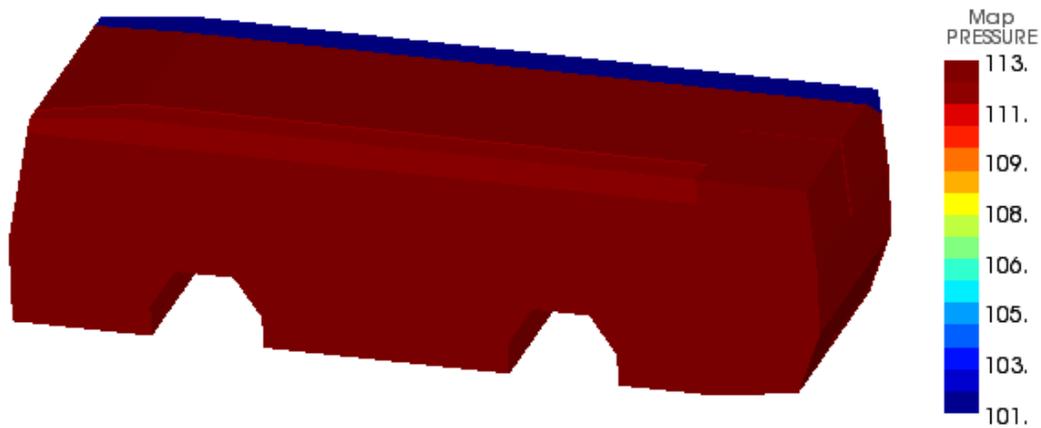


Figura 6.37: Campo de presiones (dB) en la cavidad principal, en las bóvedas, en el habitáculo del motor y en la capa de recubrimiento aislante (caso de carga “B” y frecuencia 0.2 Hz).

En un principio se podría haber esperado un comportamiento similar en ambas bóvedas. Para determinar la raíz de esta diferencia se han calculado los quince primeros modos propios de la estructura (véase Tabla 6.2). Centrándose en la primera columna de esta tabla, se observa que estas frecuencia propias están próximas a la frecuencia de estudio, 0.2 Hz. Tras ver la velocidad normal media cuadrática,

$$v_n = \frac{1}{\text{área}(\Omega)} \int_{\Omega} |\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}| \, dS,$$

siendo  $\Omega$  el dominio de cada uno de los elementos que forman la estructura, se comprueba que son todas prácticamente nulas, excepto para la placa de caucho que forma parte del recubrimiento aislante del motor. En la segunda columna de la Tabla 6.2 se especifican los valores de la velocidad normal media cuadrática de la placa de caucho para las quince primeras frecuencias propias.

	Frecuencia propia [Hz]	$v_n$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
1	5.9127e-2	7.1320e-3
2	7.6234e-2	1.1856e-2
3	8.4122e-2	1.4436e-2
4	9.0551e-2	1.6727e-2
5	1.0602e-1	2.2930e-2
6	1.2450e-1	3.1623e-2
7	1.3950e-1	3.9700e-2
8	1.5145e-1	4.6792e-2
9	1.7122e-1	5.9802e-2
10	1.8029e-1	6.6310e-2
11	1.8838e-1	7.2397e-2
12	1.9335e-1	7.6266e-2
13	2.0019e-1	8.1752e-2
14	2.2459e-1	1.0290e-1
15	2.3528e-1	1.1293e-1

Tabla 6.4: Frecuencias propias más bajas de la estructura y el valor de la velocidad normal media cuadrática de la placa de caucho.

Las Figuras 6.38 y 6.39 muestran la norma de la parte real de los desplazamientos para la primera y séptima frecuencia propia, respectivamente. Teniendo esto en cuenta, se puede comprobar que las velocidades (y por tanto los desplazamientos) en la estructura para frecuencias propias muy bajas se localizan en la placa de caucho. Esto es la causa por la cual el nivel de presión en la bóveda izquierda, en la que una de sus caras limita con la placa de caucho, es superior al nivel de la bóveda derecha. Además, la propia geometría de la bóveda sirve como guía de ondas, de forma que el nivel de presión sonora generado por la placa de caucho se propaga a través de toda la bóveda.

En la Figura 6.20 se muestra la gráfica con la respuesta en frecuencia (de 0.2Hz a 50 Hz) del problema acoplado acústico-estructural. En esta gráfica se representa media cuadrática de la presión sonora de la cavidad principal del autobús con respecto a la frecuencia.

Se debe remarcar que el núcleo de cálculo ACTRAN no permite resolver el problema de las frecuencias propias para un problema acoplado fluido-estructura como el presentando en este proyecto. Por lo tanto, para tener un conocimiento aproximado del valor de estas frecuencias propias, se deben analizar los “picos” que presentan las gráficas de la respuesta en frecuencia. Podemos concluir, a partir de la figura 6.40, que no existen frecuencias propias del problema acoplado en el rango de 0.2 a 7.5 Hz, a excepción de una posible frecuencia propia a 2.5 Hz, aproximadamente. Sin embargo, para el intervalo de 10 Hz a 50 Hz, existe una alta concentración de “picos” en la respuesta en frecuencia, lo que indica una gran cantidad de frecuencias propias (principalmente debidas a la parte estructural del autobús).

Además de la representación de la gráfica de la respuesta en frecuencia, se han calculado las frecuencias propias para la cavidad fluida principal y para la parte estructural.

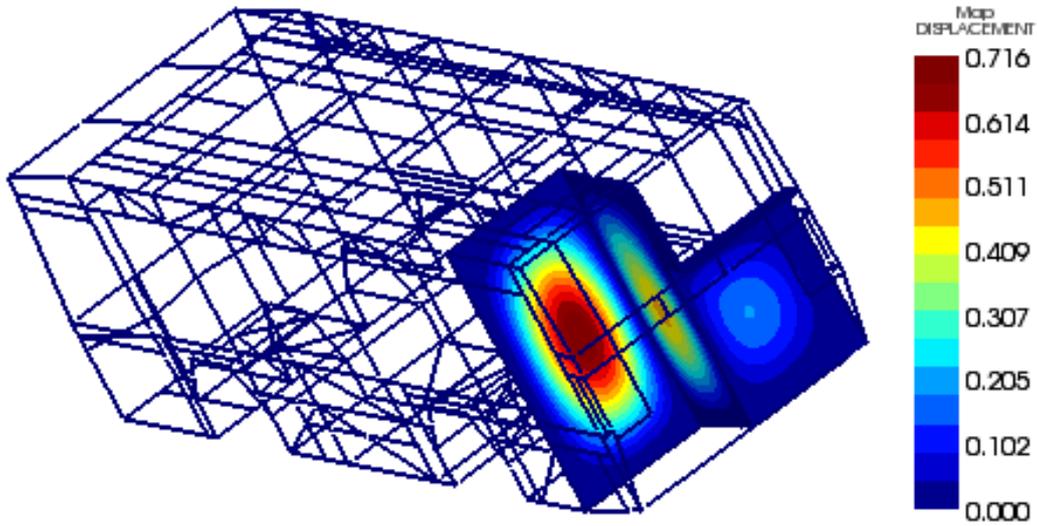


Figura 6.38: Norma de la parte real de los desplazamientos en la placa de caucho y en las barras para la primera frecuencia propia de la estructura, ( $f_1 = 5.9127\text{e-}2$  Hz).

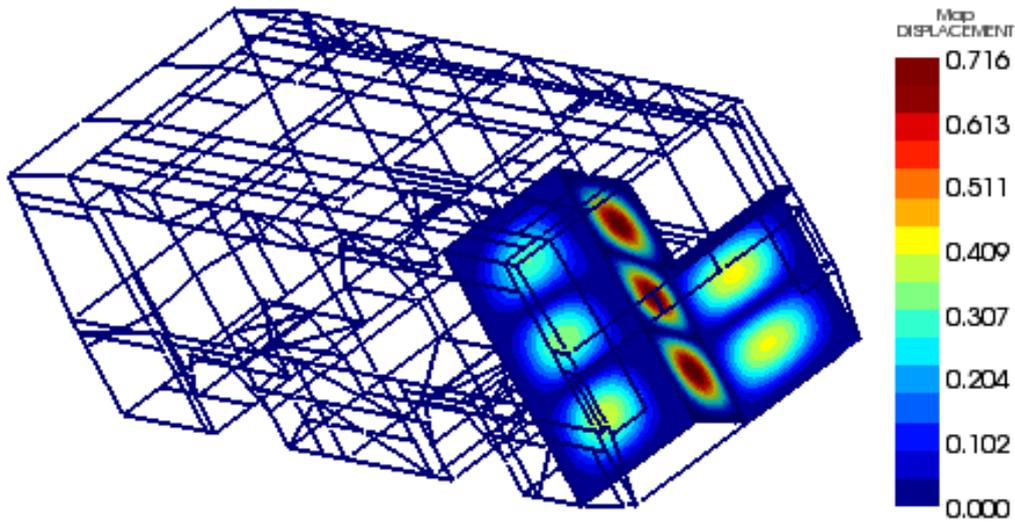


Figura 6.39: Norma de la parte real de los desplazamientos en la placa de caucho y en las barras para la primera frecuencia propia de la estructura, ( $f_1 = 1.3950\text{e-}1$  Hz).

En el caso de la cavidad principal, en el rango de 0.2 a 50 Hz, se han obtenido dos: la primera a  $2.0654\text{e+}1$  Hz y la segunda a  $3.74740\text{e+}1$  Hz. En el caso de la estructura, se ha resuelto el problema desde 0.2 Hz a 10 Hz, y, en este pequeño rango, se han encontrado más de 1100 frecuencias propias. En la Tabla 6.4 se muestran los quince primeros

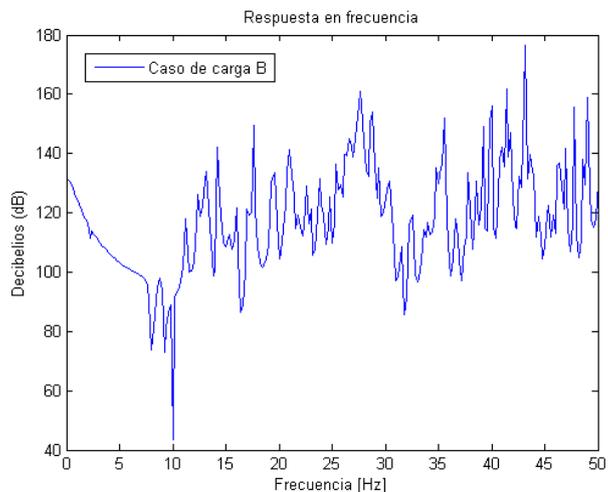


Figura 6.40: Respuesta en frecuencia (de 0.2 Hz a 50 Hz) de la presión cuadrática media calculada en la cavidad principal del autobús en el caso de carga “B”.

modos propios calculados. Si se centra la atención en el rango de frecuencias de 0.2 Hz a 10 Hz, los modos propios de la estructura se focalizan en los desplazamientos de la placa caucho y en una de las barras de la parte trasera del lateral derecho del autobús (véanse Figuras 6.38 y 6.39).

# Bibliografía

- [1] Bruel and kjaer's case study: Ctag vehicle research <http://www.bksv.com/Applications/AutomotiveNVH/AutomotiveCaseStudies/CTAG.aspx>.
- [2] Real Decreto 1367/2007, de 19 de octubre, por el que se desarrolla la Ley 37/2003, de 17 de noviembre, del Ruido, en lo referente a zonificación acústica, objetivos de calidad y emisiones acústicas.
- [3] Real decreto 2822/1998, de 23 de diciembre, por el que se aprueba el reglamento general de vehículos.
- [4] *MSC Nastran 2005 documentation*. MSC Software, 2005.
- [5] *MSC Patran 2005 documentation*. MSC Software, 2005.
- [6] *Actran 10.2 Users' Guide*. Free Field Technologies SA, 2010.
- [7] Cesva risk manager: Software para evaluación de la exposición al ruido laboral, 2010.
- [8] J. Allard y N. Atalla. *Propagation of sound in porous media: modelling sound absorbing materials*. Wiley, 2009.
- [9] L.L. Beranek y I.L. Vér. *Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications*. John Wiley and Sons, 1992.
- [10] A. Bermúdez. Continuum Thermomechanics. *Progress in Mathematical Physics, Birkhauser-Verlag, Berlin*, 2005.
- [11] M. Bernadou y C.A. James. *Finite element methods for thin shell problems*. Wiley New York, 1996.
- [12] P. Gamallo. *Contribución al estudio matemático de problemas de simulación elastoacústica y control activo del ruido*. PhD thesis, PhD. Thesis. Universidade de Santiago de Compostela, Spain, 2002.
- [13] D.W. Green, J.E. Winandy, y D.E. Kretschmann. *Wood handbook: wood as an engineering material*. Madison, WI: USDA Forest Service, Forest Products Laboratory, 1999.
- [14] J. Low y A. Reed. *Audio Engineer's Reference Book, Second Edition*. Michael Talbot-Smith, 1999.

- 
- [15] Y.C. Lu. Fractional derivative viscoelastic model for frequency-dependent complex moduli of automotive elastomers. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 3(4):329–336, 2006.
- [16] D.Y. Maa. Microperforated-panel wideband absorbers. *Noise Control Engineering Journal*, 29(3):77–84, 1987.
- [17] D.Y. Maa. Potential of microperforated panel absorber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104:2861, 1998.
- [18] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J. appl. Mech*, 18(1):31–38, 1951.
- [19] P.M. Naghdi. The theory of shells and plates. *Handbuch der Physik*, 6:425–640, 1972.
- [20] A. Prieto. *Some contributions in time-harmonic dissipative problems*. PhD thesis, PhD. Thesis. Universidade de Santiago de Compostela, Spain, 2007.
- [21] J.N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC, 2004.
- [22] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech*, 12(2):69–72, 1945.
- [23] T.D. Rossing y N.H. Fletcher. *Principles of Vibration and Sound*. Springer-Verlag, 1995.
- [24] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, y S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill New York, 1959.
- [25] W. Weaver, S. Timoshenko, y D.H. Young. *Vibration problems in engineering*. Wiley-Interscience, 1990.