

# **Análisis de la distribución de tensiones en sólidos viscoelásticos**

I. Herrera  
E.I.I. Badajoz  
Universidad de Extremadura

## **1. INTRODUCCIÓN**

Los sólidos viscoelásticos presentan un comportamiento que es de los más generales y complejos dentro de la Mecánica de los Medios Continuos. Se ha desarrollado principalmente siguiendo un proceso de extensión y ampliación de otras disciplinas, en especial gracias al previo y fuerte avance que se ha dado a los sólidos elásticos con la Teoría de la Elasticidad.

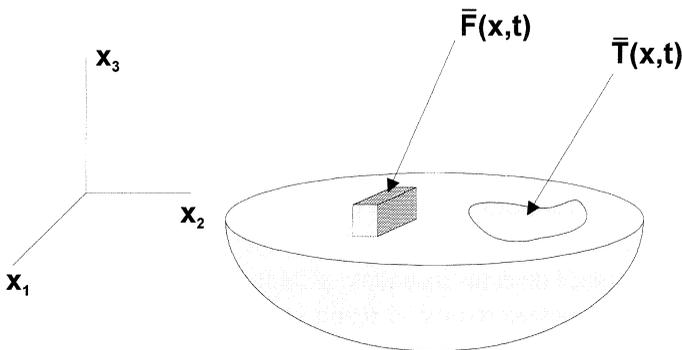
Ante el doble enfoque que inspiran el objeto de la jornada de hoy que es también el general de estas jornadas: «Cálculo de elementos estructurales con materiales polímeros» y el título más específico de la ponencia: «Análisis de la distribución de tensiones en sólidos viscoelásticos» se ha optado por desarrollar primeramente, desde la perspectiva teórica, la Mecánica de los sólidos viscoelásticos introduciendo sus estados de tensión y de deformación, sus ecuaciones constitutivas y su planteamiento de resolución; para pasar a continuación a la visión más práctica y aplicada del cálculo de los elementos estructurales con materiales polímeros analizando los

métodos de resolución y haciendo especial hincapié en aquellos que tengan una aplicación práctica directa. Se pretende así que las inevitables simplificaciones del planteamiento práctico se vean debidamente justificadas y sancionadas por la teoría.

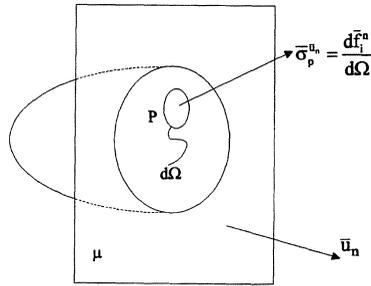
Aunque el desarrollo teórico es consistente consigo mismo, la dificultad intrínseca de los conceptos que se manejan hacen especialmente recomendable que los alumnos esten familiarizados con la Mecánica de los Medios Continuos, en particular con la Elasticidad y Resistencia de Materiales.

## 2. ESTADOS DE TENSION

Cuando un sólido viscoelástico se encuentra en equilibrio sometido a la acción en el instante  $t$  de fuerzas de volumen  $F_j(x,t)$  y de fuerzas de superficie  $T_j(x,t)$  en el contorno (Ver figura) se generan, al igual que en cualquier otro medio continuo sólido, unos esfuerzos interiores entre partes adyacentes de un mismo cuerpo, quedando este sometido a un estado de tensión.



La tensión permite conocer la intensidad y dirección de los esfuerzos interiores entre partículas vecinas a través del vector tensión, una vez se defina el plano de aislamiento que separe las partículas vecinas de la considerada (Ver figura siguiente).



La tensión es una magnitud tensorial que se puede representar por una matriz,  $\sigma$ ; precisándose por tanto 9 valores escalares:

$$\sigma_{ij} = \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

donde el símbolo  $\sigma_{ij}$  utiliza la notación indicial en la que cada subíndice  $i$  y  $j$  puede tomar los valores 1, 2 y 3 con referencia a un sistema de ejes cartesianos ortogonales  $x_1, x_2, x_3$ . El convenio de suma o sumatorio que se aplica a esta notación supone que si se repite en una expresión la letra indicativa de un subíndice se interpreta implícitamente que a dicha expresión le antecede el signo de suma sobre ese subíndice repetido:

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\sigma_{ij}n_j = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3$$

También se utiliza frecuentemente en las expresiones el tensor unidad o delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Las relaciones entre las componentes del tensor de tensiones y las componentes convencionales de la tensión es como sigue:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{11} = \sigma_{nx} & \sigma_{12} = \tau_{xy} & \sigma_{13} = \tau_{xz} \\ \sigma_{22} = \sigma_{ny} & \sigma_{21} = \tau_{yx} & \sigma_{23} = \tau_{yz} \\ \sigma_{33} = \sigma_{nz} & \sigma_{31} = \tau_{zx} & \sigma_{32} = \tau_{zy} \end{array}$$

donde con el subíndice n queremos indicar las tensiones normales y con  $\tau$  las tensiones tangenciales.

Se verifican en los sólidos viscoelásticos las mismas propiedades en su tensor de tensión que en cualquier otro modelo de sólido. Desarrollamos aquí parte de la formulación al objeto de evitar la duda en los matices y definir una nomenclatura que más tarde se va a necesitar.

En concreto la tensión normal media es un invariante y se puede expresar como:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

El tensor de tensión  $\sigma_{ij}$  puede descomponerse en dos tensores; uno de tipo hidrostático de valor la tensión media  $\sigma_m$  del tensor dado y otro de desviación respecto de la tensión media,  $s_{ij}$  que se denomina tensor desvia

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij} \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO

Formando un paralelepípedo elemental entorno a un punto del sólido por aislamiento sucesivo mediante planos paralelos a los ejes coordenados; y exigiendo que esta parte del sistema se encuentre en equilibrio de fuerzas se obtienen las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_i} + F_j(x, t) = 0$$

Si se exige el equilibrio de momentos se obtiene la igualdad de las componentes de la tensión tangencial:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

con lo cual se reduce a 6 las componentes independientes que definen el tensor de tensiones.

## 2.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN EL CONTORNO

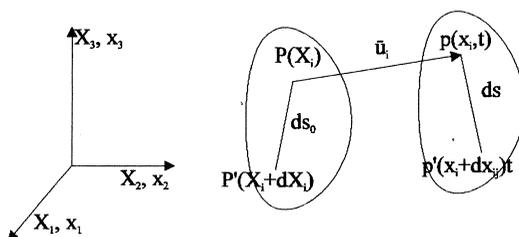
No es posible el aislamiento realizado en el epígrafe anterior si el punto se encuentra en el contorno, se utiliza en su lugar un tetraedro elemental con tres de sus caras paralelas a los ejes coordenados y el cuarto en dirección de la normal exterior al contorno en ese punto  $n_j$ , teniendo que actuar sobre esa cara la fuerza de superficie  $T_j(x, t)$ :

$$T_j(x, t) = \sigma_{ij}(x, t)n_i(x, t) \quad \forall P(x) \in \Gamma_T$$

donde  $\Gamma_T$  representa la región del contorno del sólido en la que se conocen las fuerzas de superficie en el instante  $t$ .

### 3. ESTADO DE DEFORMACIÓN Y VECTOR DESPLAZAMIENTO

Consideremos una porción de un medio continuo cuyo punto P representativo tiene definida su posición respecto de un sistema cartesiano ortogonal por las coordenadas  $X_i$  en su configuración indeformada o de partida. Consideremos también un punto próximo al P, P' de coordenadas  $X_i + dX_i$  donde  $i=1,2,3$  (Ver figura).



Producida la deformación por la acción de las fuerzas exteriores, en el momento  $t$  los puntos P y P' ocupan otras posiciones cuyas coordenadas son  $x_i$  y  $x_i+dx_i$  con  $i=1,2,3$  respectivamente. Si se admite que el proceso de cambio desde la configuración inicial a la final es continuo y que no produce huecos ni concentración de la materia, se verificará que la correspondencia entre P y p es de carácter biunívoco:

$$x_i = x_i[X_q, t] \quad X_i = X_i[x_q, t]$$

Los cuadrados de las longitudes de los segmentos PP' y pp' se pueden expresar como:

$$(ds_0)^2 = dX_i dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_l} \cdot dx_k \cdot dx_l$$

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial X_l} \cdot dX_k \cdot dX_l$$

La diferencia entre los cuadrados de las longitudes puede escribirse como:

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial X_l} - \delta_{kl} \right) dX_k dX_l = 2E_{kl} dX_k dX_l$$

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = - \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_l} - \delta_{kl} \right) dx_k dx_l = 2e_{kl} dx_k dx_l$$

donde  $E_{kl}$  es el tensor de deformación de Green que mide el cambio de la forma respecto del estado indeformado; y  $e_{kl}$  es el tensor de deformación de Cauchy que mide el cambio de forma con respecto del estado deformado o actual. Se definen como:

$$E_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial X_l} - \delta_{kl} \right)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \delta_{kl} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_l} \right)$$

Ambos son, como se desprende de su definición, tensores simétricos.

El vector desplazamiento  $u_i$  de un punto P se puede definir fácilmente a partir de sus coordenadas inicial y del instante t:

$$u_i(\mathbf{X}, t) = x_i(\mathbf{X}, t) - X_i \quad \text{ó} \quad u_i(\mathbf{x}, t) = x_i - X_i(\mathbf{x}, t)$$

Derivando las anteriores expresiones respecto de las coordenadas se puede expresar los tensores de deformación en función de las coordenadas de los desplazamientos:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_j} \right]$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right]$$

Si las componentes del desplazamiento son tales que sus derivadas espaciales son infinitésimos, el término de productos de derivadas puede despreciarse conociéndose el tensor de deformaciones resultante como tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

cuyas componentes se definen convencionalmente por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \varepsilon_{yx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \varepsilon_{zx}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \varepsilon_{zy}$$

donde  $\gamma_{ij}$  es la deformación angular de las direcciones definidas por los subíndice  $i$  y  $j$ .

El tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy, en el que centraremos nuestro estudio, admite una descomposición parecida a la del tensor de tensiones partiendo de la definición de deformación longitudinal media:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + d_{ij}$$

donde  $d_{ij}$  se conoce como tensor de deformaciones desviadoras:

$$d_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

### 3.1 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Por razón de simetría el tensor de deformaciones cumple idénticas propiedades que el tensor de tensiones. Queda definido por 6 componentes escalares que están ligadas entre sí para que se cumpla la condición de correspondencia biunívoca antes aludida. Esta condición se sintetiza en las ecuaciones de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}$$

### 3.2 ECUACIONES DE DESPLAZAMIENTO EN EL CONTORNO

Están definidas en una región del contorno del sólido  $\Gamma_u$  en la que se conocen los desplazamientos:

$$U_j(x, t) = u_j(x, t) \quad \forall p(x) \in \Gamma_u$$

donde  $U_j$  representa a las componentes del desplazamiento de los puntos conocidos.

## 4. ECUACIONES CONSTITUTIVAS

### 4.1 FORMA DIFERENCIAL PARA ESTADOS DE TENSIÓN SIMPLES

La forma lineal más general que pueda relacionar la tensión simple  $\sigma = \sigma(t)$  con la deformación asociada  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  y sus derivadas se puede escribir en forma más compacta haciendo uso de los denominados operadores temporales P y Q:

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad [4.1]$$

donde P y Q son operadores diferenciales con respecto al tiempo de la variable que se sitúa a la derecha:

$$P = \sum_{r=0}^a p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad ; \quad Q = \sum_{r=0}^b q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}$$

donde  $p_r$  y  $q_r$  son constantes características del material independientes de la tensión y de la deformación y dependientes en general del tiempo;  $p_0$  puede tomarse igual a la unidad sin pérdida de generalidad.

La transformada de Laplace de [4.1] suponiendo condiciones iniciales nulas y tomando s como la variable de transformación será:

$$\frac{\hat{Q}(s)}{\hat{P}(s)} = \frac{\hat{\sigma}(s)}{\hat{\varepsilon}(s)}$$

En la tabla (páginas siguientes) se resumen las formas características de algunos modelos que se vienen adoptando de sólido viscoelástico y se especifican los coeficientes  $p_r$  y  $q_r$  de los operadores  $P$  y  $Q$  así como otros datos útiles para poderlos aplicar.

#### 4.2 FORMA DIFERENCIAL PARA ESTADOS DE TENSIÓN MULTIAXIALES

Se ha observado que en algunos materiales viscoelásticos la presión hidrostática, en el rango de valores inferiores a su resistencia a tracción, produce un cambio de volumen elástico lineal y dependiente del tiempo mucho más pequeño que el debido a las tensiones tangenciales, siendo esta última la responsable de la distorsión dependiente del tiempo en el seno del material.

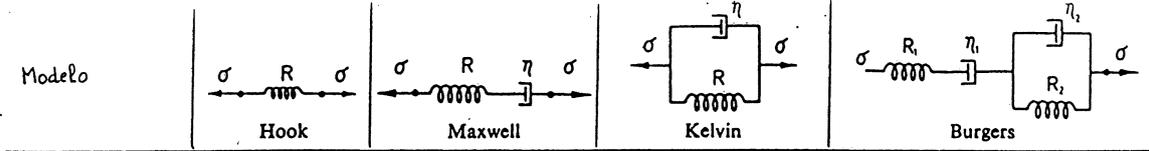
Por la razón que se acaba de exponer es conveniente considerar separadamente los efectos de la deformación transversal y los de la dilatación:

$$\begin{aligned} P_1 s_{ij}(t) &= Q_1 d_{ij}(t) \\ P_2 \sigma_{ii}(t) &= Q_2 \varepsilon_{ii}(t) \end{aligned}$$

donde  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_2$  y  $Q_2$  son operadores temporales en general diferentes (excepto cuando se modeliza un estado de tensión simple ya que entonces  $P_1=P_2$  y  $Q_1=Q_2$  por lo que convencionalmente se designan  $P$  y  $Q$  respectivamente).

Teniendo en cuenta que las ecuaciones de Lamé de la elasticidad reformuladas en función de las tensiones y de las deformaciones desviadoras adopta la forma:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G d_{ij} \\ \text{con} \quad \sigma_{ii} &= (2G + 3\lambda)\varepsilon_{ii} = 3K \varepsilon_{ii} \end{aligned}$$



Operador Temporal Transformada

$$P\sigma = p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + \dots = Q\varepsilon = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + \dots$$

$$\hat{P}(s)\hat{\sigma}(s) = (p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots)\hat{\sigma}(s) = \hat{Q}(s)\hat{\varepsilon}(s) = (q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots)\hat{\varepsilon}(s)$$

<p>Ecuación diferencial.</p> <p>Operadores para estados simples</p>	$\sigma = R\varepsilon$ $P = 1, Q = R$  $p_0 = 1, q_0 = R$	$\sigma + \frac{\eta}{R}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}$ $P = 1 + \frac{\eta}{R}\frac{\partial}{\partial t}, Q = \eta\frac{\partial}{\partial t}$  $p_0 = 1, p_1 = \eta/R, q_1 = \eta$	$\sigma = R\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ $P = 1, Q = R + \eta\frac{\partial}{\partial t}$  $p_0 = 1, q_0 = R, q_1 = \eta$	$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon}$ $P = 1 + p_1\frac{\partial}{\partial t} + p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, Q = q_1\frac{\partial}{\partial t} + q_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  $p_0 = 1, p_1 = \frac{\eta_1}{R_1} + \frac{\eta_1}{R_2} + \frac{\eta_2}{R_2}, p_2 = \frac{\eta_1\eta_2}{R_1R_2}, q_1 = \eta_1, q_2 = \eta_1\eta_2/R_2$
<p>Operadores desviadores</p> <p>Transformada</p>	$P_1 = 1, Q_1 = 2G$  $\hat{P}_1(s) = 1, \hat{Q}_1(s) = 2G$	$P_1 = 1 + \frac{\eta'}{R'}\frac{\partial}{\partial t}, Q_1 = \eta'\frac{\partial}{\partial t}$ (5.93)  $\hat{P}_1(s) = 1 + \frac{\eta'}{R'}s, \hat{Q}_1(s) = \eta's$	$P_1 = 1, Q_1 = R' + \eta'\frac{\partial}{\partial t}$  $\hat{P}_1(s) = 1, \hat{Q}_1(s) = R' + \eta's$	$P_1 = 1 + p'_1\frac{\partial}{\partial t} + p'_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, Q_1 = q'_1\frac{\partial}{\partial t} + q'_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  $\hat{P}_1(s) = 1 + p'_1s + p'_2s^2, \hat{Q}_1(s) = q'_1s + q'_2s^2$
<p>Operadores dilatacionales</p>	$P_2 = 1, Q_2 = 3K$ (5.94)	$P_2 = 1 + \frac{\eta''}{R''}\frac{\partial}{\partial t}, Q_2 = \eta''\frac{\partial}{\partial t}$	$P_2 = 1, Q_2 = R'' + \eta''\frac{\partial}{\partial t}$	$P_2 = 1 + p''_1\frac{\partial}{\partial t} + p''_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, Q_2 = q''_1\frac{\partial}{\partial t} + q''_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Transformada	$\hat{P}_2(s) = 1$ $\hat{Q}_2(s) = 3K$	$\hat{P}_2(s) = 1 + \frac{\eta''}{3K} s$ $\hat{Q}_2(s) = \eta'' s$	$\hat{P}_2(s) = 1$ $\hat{Q}_2(s) = R'' + \eta'' s$	$\hat{P}_2(s) = 1 + p_1' s + p_2' s^2$ $\hat{Q}_2(s) = q_1' s + q_2' s^2$
Capacitancia $J(t)$	$1/R$	$\frac{1}{R} + \frac{t}{\eta}$	$\frac{1}{R}(1 - e^{-Rt/\eta})$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}(1 - e^{-R_2 t/\eta_2}) + \frac{t}{\eta_1}$
Transformada $\hat{J}(s)$	$1/Rs$	$\frac{1}{Rs} + \frac{1}{\eta s^2}$	$\frac{1/\eta}{s(s+R/\eta)} = \frac{1}{s(R+\eta s)}$	$\frac{1}{R_1 s} + \frac{1/\eta_2}{s(s+R_2/\eta_2)} + \frac{1/\eta_1}{s^2}$
Módulo $E(t)$	$R$	$Re^{-Rt/\eta}$ (5.9)	$R + \eta \delta(t)$	$[(q_1 - q_2 r_1)e^{-r_1 t} - (q_1 - q_2 r_2)e^{-r_2 t}]/A$ $r_1, r_2 = (p_1 \mp A)/2p_2, A = \sqrt{p_1^2 - 4p_2}$
Transformada $\hat{E}(s) = \frac{1}{s^2 \hat{J}(s)}$	$R/s$	$\frac{R}{s+(R/\eta)}$	$(R/s) + \eta$	$\frac{q_1 + q_2 s}{1 + p_1 s + p_2 s^2}$
Transformada E. simple $\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\epsilon}} = \frac{\hat{Q}(s)}{\hat{P}(s)} =$ $= s\hat{E}(s) = \frac{1}{s \hat{J}(s)}$	$R$	$\frac{Rs}{s+(R/\eta)}$	$R + \eta s$	$\frac{q_1 s + q_2 s^2}{p_0 + p_1 s + p_2 s^2}$
Capacitancia Compleja $J^* = J_1 - iJ_2$	$1/R$	$1/R$	$\frac{R}{R^2 + \eta^2 \omega^2}$	$\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1^2 + \eta_2^2 \omega^2}$
Parte real $J_1(\omega)$	$1/R$	$1/R$	$\frac{R\omega}{R^2 + \eta^2 \omega^2}$	$\frac{1}{\eta_1 \omega} + \frac{\eta_2 \omega}{R_1^2 + \eta_2^2 \omega^2}$
Parte imaginaria $J_2(\omega)$	$0$	$1/\eta \omega$		
$E^* = E_1 + iE_2 = 1/J^*$				
Parte real $E_1(\omega)$	$R$	$\frac{\eta^2 \omega^2 / R}{1 + \eta^2 \omega^2 / R^2}$	$R$	$\frac{p_1 q_1 \omega^2 - q_2 \omega^2 (1 - p_2 \omega^2)}{p_1^2 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2}$
Parte imaginaria $E_2(\omega)$	$0$	$\frac{\eta \omega}{1 + \eta^2 \omega^2 / R^2}$	$\eta \omega$	$\frac{p_1 q_2 \omega^2 + q_1 \omega (1 - p_2 \omega^2)}{p_1^2 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2}$

donde  $G$  y  $\lambda$  son las constantes de Lamé y  $K$  el módulo de compresibilidad; es factible extender la relación constitutiva considerando unas constantes elásticas equivalentes –  $G(t)$  y  $K(t)$  – a las ecuaciones viscoelásticas planteadas (estas constantes sólo se distinguen de las elásticas porque a continuación llevan la dependencia de  $t$ ):

$$G(t) = Q_1 / 2 P_1 ; \quad K(t) = Q_2 / 3 P_2$$

Como por otra parte las demás constantes elásticas que se utilizan están relacionadas con  $K$  y  $G$ , se puede definir también:

$$E(t) = 9K(t)G(t) / (3K(t) + 2G(t)) = 3Q_1Q_2 / (P_2Q_1 + 2P_1Q_2)$$

$$\mu(t) = (3K - 2G) / (6K + 2G) = (P_1Q_2 - P_2Q_1) / (P_2Q_1 + 2P_1Q_2)$$

que representan el módulo de Young viscoelástico y el coeficiente de Poisson viscoelástico.

Cuando las deformaciones volumétricas son despreciables (la deformación volumétrica es 3 veces la deformación longitudinal media) comparadas con las deformaciones desviadoras, el análisis tensional se simplifica notablemente.

### 4.3 FORMA INTEGRAL PARA ESTADOS MULTIAXIALES

La forma integral es especialmente útil porque proporciona una representación directa de las propiedades de los materiales correspondientes a un instante dado; mostrando así la evolución de las propiedades con el tiempo.

Se ha visto en la ponencia sobre Viscoelasticidad lineal como se puede obtener información del comportamiento viscoelástico mediante ensayos en los que el estado de tensión es simple. En concreto se ha utilizado el concepto de módulo,  $G(t)$  correspondiente a un ensayo de relajación ( $\tau(t) = \gamma_0 G(t)$ ) y posteriormente se ha extendido la relación a una deformación transversal de variación temporal arbitraria ( $\gamma = \gamma(t)$ ) mediante la

integral de convolución. Recordemos que en la elasticidad la relación equivalente entre la tensión tangencial y la mitad de la deformación transversal unitaria es una constante de valor  $2G$ . La analogía de las ecuaciones constitutivas elasticidad-viscoelasticidad nos conduciría a sustituir en aquellas:

$$G \text{ por el operador } \int_0^t G(t-\xi) d\xi \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$K \text{ por el operador } \int_0^t K(t-\xi) d\xi \frac{\partial}{\partial \xi}$$

donde  $K(t)$  es el módulo hidrostático obtenido en un ensayo de relajación hidrostático ( $\sigma(t) = 3K(t) \epsilon_0$ ). Resultando:

$$s_{ij}(t) = 2 \int_0^t G(t-\xi) \frac{\partial d_{ij}}{\partial \xi} d\xi$$

$$\sigma_{ii}(t) = 3 \int_0^t K(t-\xi) \frac{\partial \epsilon_{ii}}{\partial \xi} d\xi$$

De modo similar pueden obtenerse las ecuaciones viscoelásticas de las ecuaciones de Lamé expresándose éstas últimas como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}$$

y de la inversa de la anterior para expresar las deformaciones en función de las tensiones:

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2G(2G+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} \sigma_{ij}$$

La conversión a un estado dependiente del tiempo de esta última conduce a:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \delta_{ij} \left[ a_0 \sigma_{kk}(t) + \int_0^t \varphi_1(t - \xi) \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial \xi} d\xi \right] + b_0 \sigma_{ij}(t) + \int_0^t \varphi_2(t - \xi) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi} d\xi$$

donde  $a_0 = -\lambda / [2G(2G + 3\lambda)]$ ,  $b_0 = 1/2G$  son constantes elásticas del material, y  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son funciones de fluencia pero no coinciden con el módulo pues se ha separado la respuesta instantánea o término elástico. Estas ecuaciones tienen la ventaja de no necesitar unas ecuaciones independientes para el comportamiento de las dilataciones.

Las 4 constantes anteriores se pueden determinar mediante dos ensayos de fluencia de diferente estado tensional. Por ejemplo, mediante un ensayo de fluencia uniaxial y un ensayo de fluencia a cortadura pura. Del ensayo de fluencia uniaxial, bajo el supuesto de que la curva experimental obedece a la forma:  $\varepsilon_{11}(t) = \varepsilon_{11}^0 \sigma + \varepsilon_{11}^+ t^n \sigma$  donde  $n$ ,  $\varepsilon_{11}^0$  y  $\varepsilon_{11}^+$  son constantes conocidas, se obtiene  $\varepsilon_{11}(t)$ . Particularizando la primera ecuación general para el estado uniaxial ( $\sigma_{11} = \sigma_0 H(t)$ ;  $\sigma_{ij} = 0$  si  $i$  y  $j$  son distintos de 1); se obtiene:

$$\varepsilon_{11}(t) = a_0 \sigma_0 + \sigma_0 \varphi_1(t) + b_0 \sigma_0 + \sigma_0 \varphi_2(t)$$

De la comparación de las dos expresiones de  $\varepsilon_{11}(t)$  se obtienen dos ecuaciones que ligan la 4 constantes.

Del ensayo de fluencia a cortadura pura, suponiendo que la curva experimental obedece a la forma:  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{12}^+ t^q$  donde  $q$ ,  $\varepsilon_{12}^0$  y  $\varepsilon_{12}^+$  son constantes, se obtiene - de modo similar al caso anterior - al sustituir en la ecuación general para  $i=1$  y  $j=2$ ; otras dos ecuaciones que permiten hallar dichas 4 constantes:

$$a_0 = \varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{12}^0 \quad ; \quad b_0 = \varepsilon_{12}^0$$

$$\varphi_1(t) = \varepsilon_{11}^+ t^n - \varepsilon_{12}^+ t^q \quad ; \quad \varphi_2(t) = \varepsilon_{12}^+ t^q$$

## 5. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA VISCOELÁSTICO. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

Para analizar las tensiones, los desplazamientos y la deformación de un sólido viscoelástico que se encuentra en equilibrio bajo acciones exteriores son necesarios tres grupos de ecuaciones: las ecuaciones de equilibrio interno, las ecuaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas. Las condiciones particulares de las anteriores ecuaciones diferenciales derivan de las ecuaciones de contorno en tensión y de las ecuaciones de contorno de los desplazamientos.

Como se ha podido apreciar los dos primeros grupos de ecuaciones son idénticos a los que se formulan en un problema elástico convencional (en las cuales la acción exterior es una constante respecto de las variables independientes), salvo por la existencia de la variable  $t$ , que juega el papel de un parámetro. El carácter de la viscoelasticidad sobreviene de su ecuación constitutiva. En su globalidad, el conjunto de los grupos de ecuaciones anteriormente apuntadas materializan el problema viscoelástico.

El principio de correspondencia surge como consecuencia de comparar todas las ecuaciones de condición transformadas mediante la transformación de Laplace y las ecuaciones que definen un problema elástico. Procedemos, por tanto, en primer lugar a hallar las transformadas de Laplace:

$$\left\{ \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}(x, s)}{\partial_i} + \hat{F}_j(x, s) = 0 \right.$$

$$\left. \begin{cases} \hat{S}_{ij}(x, s) = 2s\hat{G}(s)\hat{d}_{ij}(x, s) \\ \hat{\sigma}_{ii}(x, s) = 3s\hat{K}(s)\hat{e}_{ii}(x, s) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \hat{S}_{ij}(x, s) = \frac{\hat{Q}_1(s)}{\hat{P}_1(s)} \hat{d}_{ij}(x, s) \\ \hat{\sigma}_{ij}(x, s) = \frac{\hat{Q}_2(s)}{\hat{P}_2(s)} \hat{e}_{ij}(x, s) \end{cases}$$

$$\hat{Q}_1(s) = \sum_{r=0}^{b'} q'_r s^r; \quad \hat{Q}_2(s) = \sum_{r=0}^{b''} q''_r s^r$$

$$\hat{P}_1(s) = \sum_{r=0}^{a'} p'_r s^r; \quad \hat{P}_2(s) = \sum_{r=0}^{a''} p''_r s^r$$

$$\left\{ \varepsilon_{ij}(x, s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \hat{u}_i(x, s)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j(x, s)}{\partial x_i} \right] \right.$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \hat{T}_j(x, s) = \hat{\sigma}_{ij}(x, s) n_i \quad ; \forall p(x) \in \Gamma_T \\ \hat{U}_j(x, s) = \hat{\mu}_j(x, s) \quad ; \forall p(x) \in \Gamma_u \end{array} \right.$$

Al comparar con las ecuaciones del problema elástico se desprende que estas son formalmente idénticas si se aplica la correspondencia:

$$G \longrightarrow s G(s) \text{ ó } Q_1(s)/2P_1(s)$$

$$K \longrightarrow s K(s) \text{ ó } Q_2(s)/3P_2(s)$$

que también se puede extender a todas las constantes elásticas que se expresen en función de G y K:

$$E \longrightarrow s \hat{E}(s) \text{ ó } 3\hat{Q}_1(s)\hat{Q}_2(s) / (\hat{P}_2(s)\hat{Q}_1(s) + 2\hat{P}_1(s)\hat{Q}_2(s))$$

$$\mu \longrightarrow (\hat{P}_1(s)\hat{Q}_2(s) - \hat{P}_2(s)\hat{Q}_1(s)) / (\hat{P}_2(s)\hat{Q}_1(s) + 2\hat{P}_1(s)\hat{Q}_2(s))$$

Además, el sólido elástico equivalente se debe encontrar sometido a unas fuerzas de volumen  $F_j(s)$  (en lugar de  $F_j$ ), a unas fuerzas de superficie

$T_j(s)$  (en lugar de  $T_j$ ) en  $\Gamma_T$  y a unos desplazamientos  $U_j(s)$  (en lugar de  $U_j$ ) en  $\Gamma_u$ .

Al tener estas funciones una variable o parámetro  $s$ , el problema se materializa en una familia de ecuaciones diferenciales según dicho parámetro.

Sería como resolver una infinidad de problemas elásticos por variación de las constantes elásticas, de las condiciones de contorno e incluso de las regiones donde deben aplicarse esas condiciones de contorno. Ahora bien, si se llega o se conoce la solución del problema elástico equivalente la consecuencia inmediata es que sin más que aplicar la transformación inversa de Laplace conoceríamos:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x,t) \\ \varepsilon_{ij}(x,t) \\ u_j(x,t) \end{aligned}$$

En resumen, la solución a un problema viscoelástico, se puede obtener a partir de la solución de un problema elástico equivalente de igual geometría realizando los siguientes pasos:

1º) Efectuar la transformada de Laplace de la solución elástica.

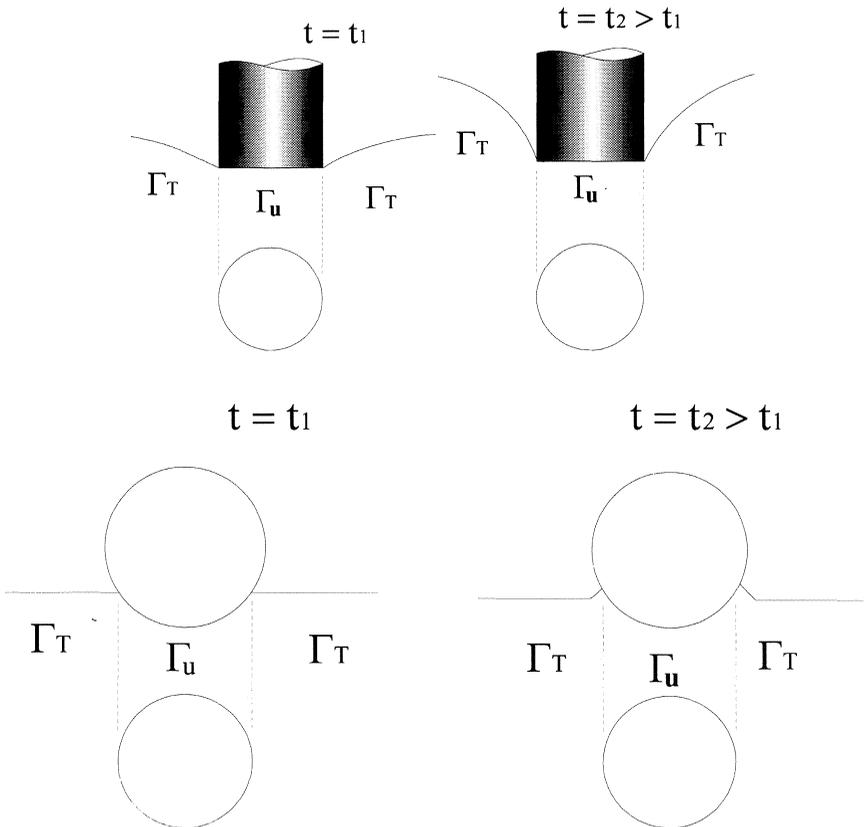
2º) Sustituir en las expresiones transformadas las constantes elásticas ( $G$ ,  $K$ , etc.) por las funciones de correspondencia transformadas ( $s\hat{G}(s)$ ,  $s\hat{K}(s)$ , ...)

3º) Hallar la transformación inversa de Laplace

Este último paso de hallar la transformación inversa de Laplace de las funciones solución, desgraciadamente no está garantizada en todo caso, lo cual limita también la aplicabilidad del método. No obstante se pueden emplear fórmulas de aproximación y descomposición funcional en las que la familia de funciones base tengan inversa conocida.

El principio de correspondencia no puede aplicarse a cualesquiera recintos  $\Gamma_T$  y  $\Gamma_u$ . Se ha de verificar que la forma y dimensiones de la línea frontera entre los dos recintos permanezca invariable. Si bien, ambos recin-

tos pueden variar en el tiempo de posición y extensión. Se ilustra a continuación esta particularidad con el proceso de indentación sobre un cuerpo viscoelástico de un punzón cilíndrico al que si es aplicable el principio de correspondencia y de un punzón esférico al que no lo es.



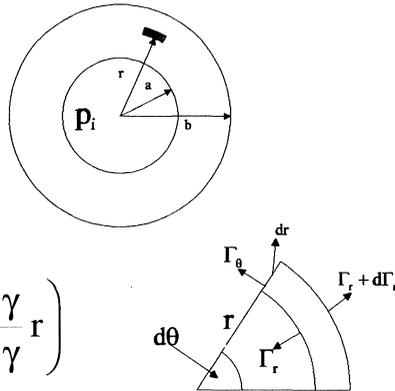
### 5.1 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

Se considera un tubo viscoelástico de paredes gruesas con diámetro exterior  $b$  y diámetro interior  $a$  sometido a una presión interior  $p$ . La solución elástica puede encontrarse en los tratados clásicos de Resistencia de Materiales (Ver por ejemplo: Pisarenko y otros, *Manual de Resistencia de Materiales*, pag.408) es:

$$\sigma_r = \frac{\rho_i a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho_i a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\mu = \frac{\rho_i a^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1 + \gamma}{E} \left( \frac{b^2}{r} + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} r \right)$$



Puede apreciarse como las tensiones normal radial  $\sigma_r$  y normal azimutal  $\sigma_\theta$  no dependen de las constantes elásticas del material, y por ello la aplicación del principio de correspondencia conduce a que la solución viscoelástica tenga la misma expresión formal, ahora bien la presión será  $p = p(t)$  y en consecuencia también variarán las tensiones con el tiempo pero sólo en la medida que lo haga la presión.

Sin embargo en la expresión del desplazamiento radial  $u$  aparecen las constantes  $E$  y  $\mu$ , por lo que aplicando el principio de correspondencia se obtiene:

$$\hat{\mu}(s) = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \hat{p}_i(s) \cdot \frac{\hat{P}_1(s)}{\hat{Q}_1(s)} \cdot \left[ \frac{b^2}{r} + \frac{r}{3} \left( \frac{2\hat{P}_2(s)\hat{Q}_1(s)}{\hat{P}_1(s)\hat{Q}_2(s)} + 1 \right) \right]$$

Si consideramos por ejemplo que el tubo se comporta como elástico bajo presión hidrostática y que sigue el modelo de Maxwell bajo tensiones

desviadoras las funciones P y Q toman los valores (Ver la tabla de los diferentes modelos de sólidos):

$$\hat{P}_1(s) = 1 + \frac{\eta'}{R'} s \quad \hat{P}_2(s) = 1$$

$$\hat{Q}_1(s) = \eta' s \quad \hat{Q}_2(s) = 3k$$

Si consideramos una presión interna  $p_0$  que se aplica repentinamente en el instante  $t=0$ :

$$p(t) = p_0 H(t) \longrightarrow p(s) = p_0/s$$

sustituyendo lo anterior en la expresión del desplazamiento radial:

$$\hat{\mu}(s) = \frac{\rho_0 a^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{M}{s^2} + \frac{N}{s} \right) \quad ; M = \frac{1}{\eta'} \left( \frac{b^2}{r} + \frac{r}{3} \right) \quad ; N = \frac{1}{R'} \left( \frac{b^2}{r} + \frac{r}{3} \right) + \frac{2r}{9k}$$

y aplicando la transformación inversa:

$$\mu(t) = \frac{\rho_0 a^2}{b^2 - a^2} (Mt + N)$$

El término N describe el desplazamiento instantáneo producido por el repentino salto de la presión y el término M describe el comportamiento compatible con la velocidad de flujo constante del modelo de Maxwell.

## 6. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Al igual que en la Elasticidad, la solución exacta de las ecuaciones diferenciales que caracterizan el problema viscoelástico a través del principio de correspondencia es sólo abordable en casos muy particulares de forma geométrica y de tipo de las cargas aplicadas. Cabe entonces plantear los siguientes métodos:

- Simplificados
- Numéricos
- Analíticos aproximados
- Experimentales

Los métodos numéricos merecen especial mención ante la enorme facilidad de aplicación y materialización que proporciona la potencia de cálculo de los ordenadores. Serán tratados en la siguiente ponencia.

Los métodos experimentales están especialmente limitados por la necesaria utilización y/o desarrollo de máquinas de ensayo. Los métodos experimentales de la Elasticidad como la Extensometría y la Fotoelasticidad pueden aplicarse aunque con ciertas precauciones.

Son métodos analíticos aproximados el de la tensión de referencia (RSM) cuya idea básica es la de que un sistema dado pueda ser analizado con la información obtenida de un ensayo de fluencia uniaxial efectuado a su tensión de referencia; y los métodos de acotación de límite superior y del límite inferior basados en el principio de los trabajos virtuales.

Y por último, los métodos simplificados, caracterizados por la adopción de hipótesis simplificativas sobre la distribución de las tensiones basadas en la forma de los cuerpos o en la forma de las cargas aplicadas. En definitiva, nos referimos a las técnicas que en su conjunto se encuadran dentro de la disciplina de la Resistencia de Materiales.

Quizá la primera hipótesis global que deba enunciarse sea la de admitir el principio de rigidez relativa. Ello exigirá a nivel práctico limitar las deformaciones a no más allá del 1%. Sin embargo la anterior restricción no debe preocuparnos en demasía para el diseño de elementos mecánicos con polímeros, donde lógicamente se pretende la estabilidad en el tiempo y la duración de la solución adoptada. Si no es el caso, como por ejemplo en las aplicaciones del caucho donde precisamente su función normal se efectúa a deformaciones más elevadas, no podemos aplicar la teoría desarrollada y tendríamos que considerar que los desplazamientos son finitos, lo que supone replantear las relaciones cinemáticas del problema a partir del tensor de Green o del tensor de Cauchy en lugar del tensor de deformación infinitesimal de Cauchy.

Retomando la idea principal de los métodos simplificados, se puede decir que el comportamiento de sólidos viscoelásticos sometidos a tracción-compresión uniaxial es bien conocido gracias a la enorme cantidad de ensayos experimentales que se han realizado. En efecto, la tensión normal y la deformación longitudinal se extraen directamente de los datos que proporcionan los ensayos de fluencia, relajación, etc.; y el desplazamiento axial de cualquier sección transversal es fácilmente deducible de la deformación como se obtiene en la Resistencia de Materiales.

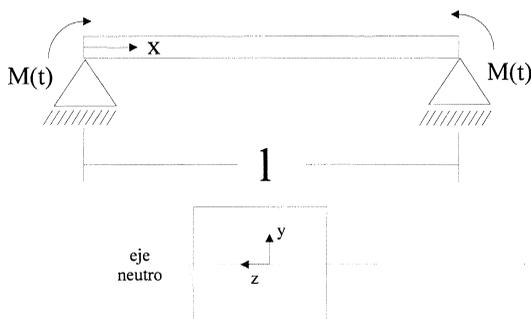
También aparecen en la bibliografía especializada análisis de las tensiones en la flexión de vigas rectas, en la torsión y en la tracción biaxial (teoría de la membrana y cilindros de paredes gruesas). En todos estos casos se parte de la solución elástica y se le aplica el principio de correspondencia. A modo de ejemplo se trata a continuación la flexión pura de vigas.

Se considera una viga de un material viscoelástico lineal de longitud  $l$  sometida a un momento  $M(t)$  en sus extremos (Ver figura adjunta). La solución elástica es:

$$\epsilon(t, y) = - \frac{M(t)y}{E_y}$$

$$\sigma(t, y) = - \frac{M(t)y}{I_z}$$

$$\frac{d^2 v(x, t)}{dx^2} = \frac{M(t)}{EI_z}$$



donde  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal (que la consideraremos rectangular por ejemplo) respecto del eje neutro. Aplicamos la transformada de Laplace y sustituimos  $E$  por  $s\hat{E}(s)$  o mejor aún por  $1/s\hat{J}(s)$  (donde  $J(t)$  representa la capacitancia, ó relación deformación-tensión en un ensayo a tensión constante):

$$\hat{\varepsilon}(s, y) = -\frac{y}{I_z} \cdot \frac{\hat{M}(s)}{s\hat{E}(s)} = -\frac{y}{I_z} s\hat{J}(s)\hat{M}(s) = -\frac{y}{I_z} \frac{\hat{P}(s)}{\hat{Q}(s)} \hat{M}(s)$$

$$\hat{\sigma}(s, y) = -\frac{y}{I_z} \hat{M}(s)$$

$$\frac{d^2 v(s, x)}{dx^2} = \frac{1}{I_z} \cdot \frac{\hat{M}(s)}{s\hat{E}(s)} = \frac{1}{I_z} \hat{J}(s)s\hat{M}(s) = \frac{1}{I_z} \cdot \frac{\hat{P}(s)}{\hat{Q}(s)} \cdot \hat{M}(s)$$

Invirtiendo las ecuaciones anteriores al dominio de t:

$$\varepsilon(t, y) = -\frac{y}{I_z} \int_0^t J(t-\xi) \dot{M}(\xi) d\xi$$

$$\sigma(t, y) = -\frac{M(t)}{I_z} y$$

$$\frac{d^2 v(x, t)}{dx^2} = \frac{1}{I_z} \int_0^t J(t-\xi) \dot{M}(\xi) d\xi$$

Si el material de la viga se adaptara bien al modelo de Maxwell (ver tabla):

$$J(t) = \frac{1}{R} + \frac{t}{\eta}$$

donde R es el factor de rigidez y  $\eta$  la viscosidad; y el momento aplicado de tipo escalón en  $t=0$ :

$$M(t) = M_0 H(t)$$

siendo  $H(t)$  la función de Heaviside, obtenemos:

$$\int_0^t \left( \frac{1}{R} + \frac{t-\xi}{\eta} \right) \cdot M_0 \cdot \frac{dH(\xi)}{d\xi} d\xi = \int_0^t \left( \frac{1}{R} + \frac{t-\xi}{\eta} \right) \cdot M_0 \cdot \delta(\xi) d\xi = M_0 \left( \frac{1}{R} + \frac{t}{\eta} \right)$$

Este último paso es posible gracias a que se verifica:

$$\int_0^t f(\xi) \cdot \delta(\xi - a) d\xi = f(a) ; \quad \delta = \text{Delta de Dirac}$$

finalmente se llega a:

$$\varepsilon(t) = -\frac{y}{I_z} M_0 \left( \frac{1}{R} + \frac{t}{\eta} \right)$$

$$\frac{d^2 v(x,t)}{dx^2} = \frac{M_0}{I_z} \left( \frac{1}{R} + \frac{t}{\eta} \right) \Rightarrow V(x,t) = \frac{M_0}{I_z} \left( \frac{1}{R} + \frac{t}{\eta} \right) \left[ \frac{\alpha^2}{2} - \frac{lx}{2} \right]$$