



UNIVERSIDAD DE A CORUÑA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

TESIS DOCTORAL

**ESTUDIO DE SOLICITACIONES DE
CAMPO ELÉCTRICO PARA
CONFIGURACIONES ELECTRÓDICAS
TRIFÁSICAS EN EL DOMINIO DEL
TIEMPO EN RÉGIMEN PERMANENTE**

ROBERTO PALAU GARCÍA

MAYO 2006



UNIVERSIDAD DE A CORUÑA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

TESIS DOCTORAL

**“ESTUDIO DE SOLICITACIONES DE
CAMPO ELÉCTRICO PARA
CONFIGURACIONES ELECTRÓDICAS
TRIFÁSICAS EN EL DOMINIO DEL
TIEMPO EN RÉGIMEN PERMANENTE”**

REALIZADA POR
ROBERTO PALAU GARCÍA
INGENIERO DEL ICAI

**PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE DOCTOR EN
INGENIERÍA INDUSTRIAL**

DIRECTOR DE TESIS: JESÚS ÁNGEL GOMOLLÓN GARCÍA
DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

FERROL, MAYO 20006

AGRADECIMIENTOS

Me produce un cierto pudor la redacción de estas líneas pero ya que es tradición y además de justicia, intentaré hacerlo.

Mi primer agradecimiento ha de ser para mi director de tesis, Jesús Ángel Gomollón García, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él. Además de facilitarme una extraordinaria experiencia investigadora de la que he disfrutado enormemente a lo largo de estos años, ha sido para mí un maestro y un amigo. Desde luego, esta tesis nunca habría existido sin él, pero me ha aportado mucho más de lo que en ella queda reflejado. Gracias Jesús.

También quiero dejar aquí constancia de mi agradecimiento al departamento de Ingeniería Industrial, en cuyo seno he tenido la oportunidad de realizar esta tesis, y que, además, me ha dado la oportunidad de conocer a unas extraordinarias personas, Gerardo, Emilio, Miguel, siempre dispuestas a echar una mano, y a las que espero tener la oportunidad de conocer mejor. Muchas gracias a todos.

Por otra parte, qué decir de mis padres que, además de estar siempre ahí, se sacrificaron en dar estudios a sus hijos en tiempos y circunstancias muy difíciles. Y cuando hubo problemas, siempre estuvo su apoyo, incluso cuando era más difícil darlo, cuando no estaban de acuerdo con su hijo. Mil gracias.

Mi mujer ha sido la que más ha aportado en el andar del camino que ha llevado a la elaboración de la presente tesis, supliendo mis ausencias en circunstancias nada fáciles. Y sin embargo siempre me animó a continuar y acabar el trabajo iniciado. Mi esperanza es poder compensarla. Gracias Ana.

Además, tengo que decir que, en esta tesis, hay demasiado tiempo prestado por mis hijos. Y hoy, cuando ya han crecido, sé lo mucho que me hubiera gustado compartirlo con ellos, pues son lo mejor que me ha pasado en la vida. No renuncio a devolver este préstamo en todas las oportunidades que me puedan dar.

Por último, y ya en el terreno institucional, debo decir que he podido concluir este trabajo con una cierta tranquilidad dentro del presente curso, gracias a que la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia me concedió la licencia necesaria para hacerlo.

TRIBUNAL:

Presidente tribunal: Antonio Pastor Gutiérrez. Catedrático de Universidad. Área: Ingeniería Eléctrica (535). Departamento: Ingeniería Eléctrica. E.T.S.I.I. U.P.M. e-mail: apastor@inel.etsii.upm.es

Vocal : Fernando Garnacho Vecino. Catedrático de Escuela Universitaria. Área: Ingeniería Eléctrica (535). Departamento: Ingeniería Eléctrica. E.U.I.T.I. U.P.M. e-mail: fgarnacho@lcoe.etsii.upm.es

Vocal : Juan Bautista Arroyo García. Titular de Universidad. Área: Ingeniería Eléctrica (535). Departamento: Ingeniería Eléctrica. Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza. e-mail: jbarroyo@unizar.es

Vocal : María Elena Albo López. Titular de Universidad. Área: Ingeniería Eléctrica (535). Departamento: Ingeniería Eléctrica. E.T.S.I.I. Universidad de Vigo. e-mail: ecalbo@uvigo.es

Secretario : Gerardo González Filgueira. Profesor Colaborador. Área: Ingeniería de Sistemas y Automática. Departamento: Ingeniería Industrial. Escuela Universitaria Politécnica. Universidad de A Coruña. e-mail: gerardog@udc.es.

Fecha de Lectura: 7 de julio de 2006

Centro: Escuela Politécnica Superior. Campus de Esteiro. Ferrol. A Coruña.

ÍNDICE

Capítulo 1 .Planteamiento del problema y estructura de la tesis.....	1
1.1 Planteamiento del problema.....	1
1.2 Objetivos de la presente tesis.....	2
1.3 Antecedentes.....	4
1.4 Estructura de la presente tesis.....	8
Capítulo 2 .Cálculo numérico de campos electrostáticos.....	11
2.1 Introducción.....	11
2.2 Métodos para el cálculo de campos eléctricos.....	12
2.3 Método de simulación de cargas (CSM).....	16
2.3.1 Introducción.....	16
2.3.2 Campos bidimensionales.....	19
2.3.3 Campos tridimensionales con simetría rotacional.....	20
2.3.4 Campos asimétricos con dispositivos simétricos	23
2.3.5 Configuraciones con más de un dieléctrico.....	27
2.3.6 Aspectos importantes en la aplicación del método.....	31
2.4 Método de las cargas superficiales (SCM).....	34
2.4.1 Introducción.....	34
2.4.2 Consideraciones analíticas generales.....	35
2.4.3 Campos con simetría rotacional.....	35
2.4.4 Campo sin simetría rotacional.....	43
2.5 Método de los elementos de contorno(BEM).....	49
2.5.1 Introducción.....	49
2.5.2 El modelo matemático.....	50
2.5.2.1 Ecuaciones integrales en las superficies conductoras.....	50
2.5.2.2 Ecuaciones integrales sobre las fronteras dieléctricas.....	51
2.5.3 Procedimiento de discretización.....	53
2.5.4 Procedimientos numéricos.....	55
2.5.4.1 Elementos curvilíneos triangulares.....	55
2.5.4.2 Tratamiento de los elementos rectangulares.....	65

Capítulo 3 .Cálculo de máximos de campo.....	69
3.1 Introducción.....	69
3.2 Resolución de problemas de máximos espaciales.....	71
3.2.1 Métodos analíticos.....	71
3.2.2 Métodos numéricos.....	73
3.3 Resolución de problemas de máximos espacio-temporales.....	74
3.3.1 Métodos analíticos.....	74
3.3.2 Métodos numéricos.....	80
3.4 Configuraciones trifásicas en la literatura especializada.....	83
3.5 El cálculo de máximos espacio-temporales.....	86
Capítulo 4 .El método de las soluciones elementales.....	89
4.1 Introducción.....	89
4.2 Construcción y estructura del sistema de ecuaciones.....	91
4.3 La resolución del sistema de ecuaciones.....	101
4.3.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.....	101
4.3.2 El método de eliminación de Gauss.....	108
4.3.2.1 Operaciones elementales con matrices.....	108
4.3.2.2 Reducción de la matriz de coeficientes y resolución del sistema	112
4.3.2.3 Algoritmo de reducción por filas.....	115
4.3.3 Otros métodos directos de resolución de sistemas.....	118
4.3.4 Limitaciones de los métodos directos.....	119
4.4 La factorización LU.....	120
4.4.1 La factorización LU de la matriz de coeficientes.....	120
4.4.2 La factorización LU ante el intercambio de filas.....	122
4.4.3 La factorización LU con búsqueda de pivote.....	124
4.4.4 Aspectos operativos de la factorización LU.....	127
4.4.4.1 Almacenamiento de la matriz L e intercambios de fila....	127
4.4.4.2 Descarga de coeficientes en memoria.....	129

4.4.4.3 El coste operacional del algoritmo LU.....	130
4.5 Las soluciones elementales.....	132
4.5.1 Definición de soluciones elementales en sistemas lineales....	132
4.5.2 Las soluciones elementales en los problemas de campo.....	138
4.5.3 Las soluciones elementales ante potenciales variables.....	140
4.6 El método de las Soluciones Elementales.....	147
Capítulo 5 .Ejemplos de cálculo.....	151
5.1 Montaje de conductores paralelos con tensiones desfasadas.....	151
5.1.1 Descripción de la configuración.....	151
5.1.2 Objetivos del estudio.....	152
5.1.3 Aspectos estudiados.....	152
5.1.4 Resultados obtenidos.....	153
5.1.4.1 Modelización de la configuración.....	153
5.1.4.2 Estudio numérico de la configuración.....	155
5.1.5 Conclusiones.....	162
5.1.6 Tiempos de ejecución.....	163
5.2 Montajes de conductores trifásicos.....	163
5.2.1 Descripción de la configuración.....	163
5.2.2 Objetivos del estudio.....	165
5.2.3 Aspectos estudiados.....	165
5.2.4 Resultados obtenidos.....	166
5.2.4.1 El valor de la intensidad máxima de campo.....	166
5.2.4.2 Fases con la intensidad máxima de campo.....	168
5.2.4.3 Potenciales de electrodo ante el campo máximo.....	172
5.2.4.4 Localización de la Emax sobre los conductores.....	173
5.2.5 Conclusiones.....	175
5.2.6 Tiempos de ejecución.....	177
5.3 Montajes de barras trifásicas entubadas.....	177
5.3.1 Descripción de la configuración.....	177

5.3.2	Objetivos del estudio.....	178
5.3.3	Aspectos estudiados.....	179
5.3.4	Resultados obtenidos.....	179
5.3.4.1	El valor de la intensidad máxima de campo.....	179
5.3.4.2	Potenciales de electrodo ante el campo máximo.....	182
5.3.4.3	Fases con la intensidad máxima de campo.....	184
5.3.4.4	Localización de la Emax sobre los conductores.....	186
5.3.4.5	La intensidad máxima de campo en el tubo.....	188
5.3.5	La distancia $d_{2crítica}$ y el diseño del montaje.....	191
5.3.6	Conclusiones.....	193
5.3.7	Tiempos de ejecución.....	197
5.4	Montajes de barras trifásicas encapsuladas en tubo no centrado.....	197
5.4.1	Descripción de la configuración.....	197
5.4.2	Objetivos del estudio.....	198
5.4.3	Aspectos estudiados.....	199
5.4.4	Respuesta de montajes ante desplazamientos del tubo.....	200
5.4.4.1	La intensidad máxima de campo en las barras.....	200
5.4.4.2	Localización de la Emax sobre las barras.....	202
5.4.4.3	Potencial y valores de fase ante la Emax en las barras.....	203
5.4.4.4	La intensidad máxima de campo en el tubo.....	204
5.4.5	Diseño de montajes eléctricamente estables.....	206
5.4.5.1	Distancias barras-tubo seguras ante desvíos de éste.....	206
5.4.5.2	Distancias d_{2real} y $d_{2centrada}$	210
5.4.5.3	Análisis con el concepto de proximidad real barras-tubo.....	211
5.4.6	Conclusiones.....	216
5.4.7	Tiempos de ejecución.....	218
5.5	Barras trifásicas encapsuladas en tubos atornillados.....	219
5.5.1	Descripción de la configuración.....	219
5.5.2	Objetivos del estudio.....	220

5.5.3 Aspectos estudiados.....	220
5.5.4 Resultados obtenidos.....	221
5.5.5 Conclusiones.....	224
5.5.6 Tiempos de ejecución.....	224
5.6 Barras trifásicas encapsuladas en tubos no centrados.....	224
5.6.1 Descripción del montaje.....	224
5.6.2 Objetivos del estudio.....	226
5.6.3 Aspectos estudiados.....	226
5.6.4 Respuesta ante desplazamientos varios del tubo.....	228
5.6.4.1 La intensidad máxima de campo en la barra 1.....	228
5.6.4.2 Localización de la Emax y potenciales de electrodo.....	229
5.6.4.3 La intensidad máxima de campo en el tubo.....	230
5.6.5 Diseño de montajes eléctricamente estables.....	233
5.6.5.1 Distancias barras-tubo eléctricamente seguras.....	233
5.6.5.2 Resultados obtenidos.....	235
5.6.5.3 Conclusiones.....	241
5.6.6 Desplazamientos del tubo proporcionales a su diámetro.....	241
5.6.7 Conclusiones.....	245
5.6.8 Tiempos de ejecución.....	246
Capítulo 6 .Conclusiones.....	247
6.1 Resumen.....	247
6.2 Aportaciones.....	249
6.3 Sugerencias para futuros desarrollos.....	251
Bibliografía.....	253

Capítulo 1 . Planteamiento del problema y estructura de la tesis

1.1 Planteamiento del problema

El diseño de dispositivos eléctricos y de su localización espacial en ingeniería de alta tensión, se basa en el conocimiento del campo eléctrico al que están sometidos. Aunque las propiedades del material aislante y las condiciones ambientales son importantes, el valor de la intensidad de campo eléctrico es la condición fundamental a la hora de evaluar la calidad del aislamiento de un sistema determinado.

Históricamente se han desarrollado tres tipos de métodos para la determinación del campo eléctrico: métodos analíticos, métodos experimentales y métodos numéricos. Obviamente los métodos más precisos son los analíticos, sin embargo son ampliamente conocidas las limitaciones a las que está sometida su aplicación. Por ello se han tenido que desarrollar otros métodos, aunque hoy en día, gracias al gran desarrollo de los medios informáticos, los métodos numéricos han acabado por desplazar a los experimentales.

Tanto los métodos experimentales como los numéricos, presentan hasta hoy en día una cierta dificultad para analizar de forma concreta las solicitaciones de campo eléctrico en configuraciones con tensiones de electrodo dependientes del tiempo y no monofásicas, como es el caso que se presenta en las configuraciones trifásicas,

tanto en el caso de presencia de desequilibrios, como en el caso de funcionamiento equilibrado.

En efecto, cuando se utilizan métodos numéricos para calcular campos eléctricos en configuraciones de corriente alterna, el campo se determina para un instante de tiempo determinado en el que se considera que se presenta la mayor intensidad de campo como condición más desfavorable para la configuración. Si el sistema es un sistema monofásico, no existe problema alguno con esta forma de proceder pues, dada la linealidad de las ecuaciones, es suficiente considerar a los electrodos sometidos a la tensión de pico y proceder a determinar la distribución del campo para esta situación.

Para sistemas trifásicos equilibrados la situación ya no es tan evidente, pero tradicionalmente se asume que la máxima intensidad de campo se produce cuando alguna fase alcanza su pico de tensión por lo que se suele calcular la distribución de campo para esta situación.

Sin embargo el gran desarrollo que han llegado a alcanzar los equipos informáticos hoy en día, nos lleva a considerar que éste es el momento de enfrentar el problema del conocimiento del campo en configuraciones trifásicas en particular, y dependientes del tiempo en general, de forma precisa, con un método simple de aplicar, y prescindir de presunciones que, por lógicas y bien fundadas que estén, siempre serán presunciones bajo el riesgo de no ser correctas en todos los casos, como se ha llegado a comprobar en la investigación correspondiente a esta tesis. Por lo demás, el método que se desarrolle debe contar con una formulación lo suficientemente general del problema como para que permita su aplicación no sólo a sistemas trifásicos equilibrados, sino también a una configuración electródica cualquiera en la que el potencial de cada electrodo pueda formularse como una función temporal arbitraria.

1.2 Objetivos de la presente tesis

El presente trabajo se planteó como objetivo desarrollar un método capaz de realizar un análisis de las solicitaciones de campo eléctrico que aparecen en sistemas trifásicos cuando se tiene en cuenta la evolución temporal de las tensiones de electrodo.

Partiendo de la capacidad de resolver un problema de campos para una distribución dada de tensiones de electrodo, el análisis de la evolución temporal de las funciones de campo se reduce evidentemente a la solución continuada de una serie de problemas de campo para distintos instantes de tiempo, con la correspondiente variación de las condiciones de contorno.

Cuando los problemas de campo por resolver están asociados a gran cantidad de datos, ya venga dada ésta por la complicación de la propia configuración de campo o por la precisión requerida para los cálculos, el tiempo de computación requerido para la resolución de la sucesión de problemas de campo necesarios pasa a ser un factor importante a tener en cuenta.

Por esta razón se planteó también como objetivo que el método de cálculo de campos a desarrollar tiene que permitir una solución rápida de un número elevado de problemas de campo individuales. El análisis de la evolución en el tiempo de las distribuciones de campo permite determinar de forma precisa el estado de máxima sollicitación dieléctrica de la configuración, sin tener que acudir a presunciones de tipo alguno, por sólidas y bien fundadas que éstas puedan parecer.

Para la realización de los objetivos señalados se planteó el desarrollo de un programa de cálculo de campos que permita llevar a cabo los cálculos necesarios y que cuente con una interfaz gráfica de usuario que permita introducir de forma sencilla los datos eléctricos y geométricos de las configuraciones, y presente la posibilidad de ofrecer como salida de resultados, junto a los valores numéricos de las magnitudes calculadas, formas gráficas que ayuden a una mejor evaluación e interpretación de los resultados.

Se disponía como punto de partida para esta finalidad, de un programa de cálculo de campos desarrollado en la Universidad Técnica de Hamburgo-Harburgo por el director de esta Tesis Doctoral, que operaba en un entorno UNIX, y que combina los métodos de cargas discretas, cargas superficiales y elementos de contorno. El programa contaba con una entrada de datos a través de un fichero normalizado e incorporaba un conjunto de subrutinas para la presentación gráfica de los datos introducidos, así como un programa para el cálculo y representación de líneas de campo y líneas equipotenciales.

Como objetivo inicial de los trabajos por desarrollar en el marco de esta Tesis Doctoral, se planteó la adaptación de este programa a un entorno WINDOWS, la

programación de una nueva interfaz gráfica de usuario tanto para la entrada de datos, como para la salida de resultados, con posibilidad de evaluación interactiva de las magnitudes de campo. Este programa debía servir de base para ir incorporando en él, a medida que avanzase el trabajo, los nuevos métodos y técnicas desarrollados.

Como resumen de lo dicho hasta aquí, se pueden sintetizar los objetivos planteados para el trabajo que aquí se presenta, como sigue:

- a) Desarrollar un método que permita, con suficiente precisión y economía de tiempo y esfuerzo, el conocimiento del campo eléctrico más desfavorable en configuraciones tridimensionales con tensiones eléctricas dependientes del tiempo, de igual frecuencia pero diferentes amplitudes y desfases.
- b) Implementar el método en un programa de cálculo capaz de ejecutarse de forma amigable en ordenadores personales con sistema operativo Windows. El programa debe contar con una interfaz gráfica de usuario que permita una entrada de datos confortable y un sistema gráfico para la evaluación de los resultados.
- c) La utilidad del método que se desarrolle y el programa que lo implemente debe demostrarse mediante el cálculo de configuraciones técnicas seleccionadas.

1.3 Antecedentes

El punto de partida de esta tesis es el conocimiento que del campo eléctrico en configuraciones reales se ha alcanzado en los últimos años, sobre todo con el desarrollo de los métodos numéricos. Por ello se hará aquí una breve reseña del estado actual de los métodos de cálculo de campo eléctrico, que será ampliada en el capítulo 2 con el estado actual de los llamados métodos numéricos integrales que se han utilizado en la presente tesis.

Atendiendo a un cierto interés histórico, y según la técnica utilizada para la determinación del campo eléctrico, es posible clasificar los métodos de cálculo de

campo eléctrico en tres tipos:

1°.- Métodos analíticos.

2°.- Métodos experimentales.

3°.- Métodos numéricos.

Entre los métodos analíticos, la aplicación del teorema de Gauss resulta ser el más elemental, y conjuntamente con el principio de superposición permite conocer el campo eléctrico en configuraciones especialmente simples. Configuraciones también especialmente simples y simétricas son aquéllas en las que se pueden resolver las ecuaciones de Laplace y Poisson de forma puramente analítica. Además se pueden citar como métodos analíticos el método basado en la representación conforme [30] cuyo campo de aplicación se limita a sistemas bidimensionales, y el método por transformación de coordenadas [26][31] que resulta útil únicamente para ciertos tipos de electrodos. A pesar del interés que ofrecen los métodos analíticos por la exactitud en la determinación del campo eléctrico, están demasiado limitados para su aplicación a configuraciones reales.

Los métodos experimentales se basan en la analogía existente entre las leyes de Laplace y Poisson con las leyes que rigen otros fenómenos físicos de fácil tratamiento experimental, como es el caso de conducción eléctrica. En este caso se empleaba papel conductor [51] con resistividad homogénea, lo que permite calcular la distribución del campo a partir de la medición del potencial eléctrico en los diferentes puntos del papel. Este método está limitado a sistemas bidimensionales y, con dificultad, a sistemas tridimensionales de revolución.

Basado en el mismo principio se tiene el método de cuba electrolítica [51], donde el medio conductor es un líquido. Puede aplicarse a sistemas bidimensionales y tridimensionales, sean o no de revolución, pero su principal inconveniente consiste en la laboriosa construcción del modelo a escala reducida del sistema a estudiar.

Otro método experimental es el método reticular [51], basado en los mismos principios que los dos anteriores, con la diferencia fundamental de que el medio conductor de resistividad homogénea se sustituye por una malla compuesta por resistencias discretas. Es un método económico que puede aplicarse a sistemas bidimensionales y tridimensionales para realizar los primeros tanteos en el diseño de equipos.

Sin embargo, debido a las limitaciones y dificultad de los métodos anteriores y a la cada vez mayor disponibilidad de potencia de computación, los métodos basados en análisis numérico son los más utilizados en la actualidad. De estos, el Método de las Diferencias Finitas [8][37] (FDM: Finite Difference Method), consiste en desarrollar la ecuación de Laplace en serie de Taylor, y despreciar los términos a partir de un cierto orden, en función de la exactitud requerida, y aplicarla a un medio discretizado en una malla más o menos reducida según también la exactitud buscada. Es aplicable únicamente a sistemas cerrados.

El Método de los Elementos Finitos [18][19][20][56] (FEM: Finite Element Method) de aplicación común en otras áreas de la técnica (cálculo de estructuras, transmisión de calor, difusión de gases, magnetostática, etc...), consiste en discretizar el dominio de estudio en elementos en los que la función incógnita, el potencial eléctrico, se aproxima por una función de interpolación que depende del valor del potencial en los nudos de cada elemento. Siguiendo la formulación clásica variacional se establece el sistema de ecuaciones lineales que hacen mínimo el funcional asociado a la ecuación diferencial de Poisson. De la resolución de dicho sistema de ecuaciones se obtienen los potenciales en los nudos de los elementos, que, junto con la función de interpolación, definen el potencial en cualquier punto del dominio. Es aplicable únicamente a sistemas cerrados.

El Método de Simulación de Cargas [5][42][49] (CSM: Charge Simulation Method) se desarrolló con la sustitución de las cargas reales existentes en la superficie de un electrodo por otro conjunto de cargas equivalentes (puntuales, lineales, anulares) colocadas en su interior de forma que se satisfagan las condiciones de contorno en determinados puntos de su superficie. La posición de estas cargas se selecciona para evitar la singularidad del operador integral y de modo que los coeficientes de la ecuación matricial algebraica puedan ser determinados analíticamente. El método es aplicable tanto a sistemas cerrados como a sistemas abiertos. Este método se ha aplicado frecuentemente en el análisis de campos electrostáticos en ingeniería de alta tensión. Debido al tipo de cargas utilizadas en la simulación también se denomina Método de las Cargas Discretas. El método se amplió con la introducción de cargas superficiales equivalentes colocadas directamente en la superficie de los electrodos y contornos dieléctricos, desarrollándose de esta manera el Método de las Cargas Superficiales.

En el Método de Cargas Superficiales (SCM: Surface Charge Method)

[41][44][40][24], las superficies del electrodo y del aislador se dividen en elementos de superficie, y a cada elemento se le asigna una distribución de carga superficial y una condición de contorno. Dicha condición de contorno se impone en un número suficiente de nodos (puntos de contorno) que son definidos sobre los elementos de superficie. Se establece en cada nodo una ecuación integral, que representa la relación de las cargas distribuidas por el conjunto de la configuración con la condición de contorno correspondiente al punto elegido, normalmente su potencial en el caso de electrodos, y la relación entre las componentes normales de la intensidad de campo a ambos lados del punto en el caso de una superficie dieléctrica. En estas ecuaciones se formulan las magnitudes eléctricas como función de integrales de superficie de las funciones de densidad de carga superficial. De esta manera resulta posible formular el problema global como un sistema lineal de ecuaciones en el que las incógnitas son tantos valores de densidad de carga superficial como el número de puntos escogidos para formular las condiciones de contorno. Tras resolver este sistema de ecuaciones resulta posible calcular cualquier magnitud eléctrica en cualquier punto del espacio, evaluando las integrales de campo directamente como función de las densidades superficiales de carga calculadas.

El Método de los Elementos de Contorno [4][5] [16] (BEM: Boundary Element Method) se basa, al igual que el Método de Simulación de Cargas y el Método de Cargas Superficiales, en la formulación integral de las ecuaciones de Laplace o Poisson. Los tres métodos se basan en una discretización espacial que se limita a la superficie de electrodos y fronteras dieléctricas. Esto significa que esta clase de discretización se puede realizar con un número considerablemente más pequeño de elementos en comparación con el Método de Elementos Finitos por ejemplo. Por otro lado, esto conlleva que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones sea una matriz llena de elementos no nulos, frente a las matrices esparcidas que se establecen en el caso del FEM. Además, la limitación de la discretización al dominio de las superficies no permite incluir de forma simple posibles propiedades no lineales en el espacio circundante. Pero, con todo, estos métodos demuestran ser un modo económico de cálculo numérico de campos en ingeniería de alta tensión, particularmente en el caso de campos 3D sin simetrías, pues permiten en muchos casos alcanzar un grado más alto de exactitud con menor tiempo de computación y menores requerimientos de almacenamiento en memoria. Además, con relación a las mencionadas dificultades de BEM, SCM y CSM para tener en cuenta posibles propiedades no lineales del entorno, éstas no suelen resultar de

demasiada importancia por su poca entidad en las distribuciones reales de campo eléctrico. De todas formas existen adaptaciones del método BEM que permiten tratar estos casos.

Por otra parte, frecuentemente la aparamenta de alta tensión está formada por dispositivos con simetría de revolución, lo que simplifica notablemente la programación de los métodos numéricos descritos.

1.4 Estructura de la presente tesis

La presente tesis se estructura en seis capítulos, cada uno dedicado a los siguientes temas:

El presente capítulo 1 de introducción que, como se observa, comienza exponiendo el planteamiento del problema, los objetivos de la presente tesis, sus antecedentes y su propia estructura.

El capítulo 2 hace una revisión de los métodos de cálculo de campos eléctricos, fundamentalmente los métodos numéricos que se emplean hoy en día y, dentro de éstos, sobre todo de los métodos integrales, por ser los que se han utilizado en el programa de cálculo de campos en que se ha implementado el método desarrollado en esta tesis.

El capítulo 3 describe los problemas de máximos asociados a los problemas de campo eléctrico, así como los métodos disponibles para su resolución.

El capítulo 4 expone la estructura y construcción del sistema de ecuaciones que define un problema de campo analizado con métodos integrales, y una revisión de los métodos más habituales para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones. Posteriormente se presenta el método de las Soluciones Elementales desarrollado en la presente tesis, demostrando sus excelentes características para resolver los problemas de máximos espacio-temporales asociados a los problemas de campo en configuraciones con tensiones de electrodo variables en el tiempo.

El capítulo 5 presenta ejemplos de cálculo en los que se analizan, de forma exhaustiva, configuraciones con tensiones de electrodo dependientes del tiempo

utilizando el método de las Soluciones Elementales, con lo que se ilustra el profundo conocimiento que este método permite alcanzar con rapidez y sencillez sobre el comportamiento eléctrico de este tipo de configuraciones.

El capítulo 6 expone las conclusiones con un resumen del trabajo realizado, de las aportaciones originales presentadas y presenta sugerencias para futuros desarrollos.

Capítulo 2 . Cálculo numérico de campos electrostáticos

2.1 Introducción

En el pasado se han utilizado métodos experimentales para el estudio del campo eléctrico, estudiando por ejemplo el potencial eléctrico en el interior de un tanque electrolítico o sobre un papel conductor [51], basándose en la semejanza de las ecuaciones que describen su distribución con las ecuaciones de Laplace o Poisson. Hoy en día estos métodos han sido substituidos satisfactoriamente por métodos de cálculo numérico, en los que, además, los continuos avances en la tecnología de ordenadores permiten confiar en futuros progresos. Dentro de los métodos numéricos de cálculo de campo eléctrico existe una cierta variedad tanto para campos bidimensionales como tridimensionales, que se implementan no sólo en grandes ordenadores y estaciones de trabajo, sino también en ordenadores personales.

Entre los métodos disponibles para el cálculo de campos eléctricos están los métodos diferenciales como el método de las diferencias finitas (FDM) que se basa en la división del espacio a estudiar en pequeños elementos y en la posterior resolución de las ecuaciones de Laplace o Poisson formuladas en forma diferencial [8][37].

Una alternativa a este método son los llamados métodos integrales [5] como el

método de simulación de cargas (CSM: Charge Simulation Method) [5][42][49], el método de las cargas superficiales (SCM: Surface Charge Method) [41][44][40][24] y el método de los elementos de contorno (BEM: Boundary Element Method) [4][5][16][17], basados en la formulación integral de las ecuaciones de Laplace y Poisson. El rasgo característico de estos métodos es que el proceso de discretización se limita a las superficies electrónicas y fronteras dieléctricas, con lo que el número de elementos a tener en cuenta es muy inferior al caso de los métodos diferenciales. Por desgracia, al limitar el modelo del sistema a las superficies, no es posible tener en cuenta posibles propiedades no lineales del medio de forma simple. Pese a ello, estos métodos resultan una alternativa muy económica, particularmente en el caso de los campos tridimensionales asimétricos donde se pueden conseguir resultados con un alto grado de fiabilidad con mucho menos coste en tiempo de cálculo y de memoria de ordenador. Además, la desventaja del complejo tratamiento de propiedades no lineales del medio no resulta determinante en ingeniería de alta tensión, dado que en la mayoría de los casos las propiedades dieléctricas de los aislantes no se ven afectadas por la distribución de la intensidad de campo eléctrico.

También se dispone del método de los elementos finitos (FEM: finite element method) [19][20][56]. Se trata de un método muy potente, heredado del análisis estructural, pero que hoy en día se utiliza en una gran variedad de problemas en el campo del electromagnetismo. Es un método numérico que se basa en la discretización en elementos de la región objeto de estudio, y la posterior determinación del estado estacionario de la función de energía total en la misma. Este método resulta adecuado para tratar problemas con geometrías complejas en espacios cerrados y medios no homogéneos, pero conlleva una mayor dificultad de programación, y requiere mayor cantidad de memoria de ordenador así como tiempos de computación más elevados [36] que los métodos integrales antes citados.

2.2 Métodos para el cálculo de campos eléctricos

Una de las etapas más importantes y difíciles en el diseño de dispositivos

electromagnéticos, es el conocimiento de los propios procesos electromagnéticos que tienen lugar en los mismos. Las ecuaciones de Maxwell [23][7] proporcionan el modelo teórico del campo electromagnético, y se deben resolver de acuerdo con las condiciones de contorno de cada configuración. De esta forma, el problema directo consiste en resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales determinado por las correspondientes condiciones de contorno. Así, las ecuaciones de Maxwell junto a las características geométricas del sistema, las características electromagnéticas del medio donde se manifiesta el campo, y las características de las fuentes del campo, son suficientes para conocer en detalle todos los aspectos de interés en el mismo (valores de la intensidad de campo, líneas de campo, superficies equipotenciales, fuerzas, etc.).

Sin embargo pocas veces es posible el conocimiento cuantificado del campo por resolución analítica de las ecuaciones proporcionadas por el modelo teórico. En efecto, la resolución de las ecuaciones utilizando métodos analíticos sólo resulta posible en muy contadas ocasiones, normalmente configuraciones geométricas muy simples y con una gran simetría, con condiciones de contorno simples y características electromagnéticas constantes. Sin embargo, el rápido desarrollo de ordenadores cada vez más potentes ha posibilitado el uso de métodos numéricos para resolver las ecuaciones del modelo teórico, pero ello exige ciertas simplificaciones para poder llegar a establecer un modelo matemático del sistema que pueda ser resuelto de esta manera.

En cada caso, el modelo matemático a tomar en consideración será establecido a partir de determinadas ecuaciones proporcionadas por el modelo teórico, de acuerdo con las características del sistema, de las necesidades, posibilidades e, incluso, de las preferencias del usuario. Así, dependiendo de qué ecuaciones se tomen en consideración, los modelos matemáticos pueden clasificarse en los siguientes tipos [5]:

- a) Diferenciales, donde el modelo matemático se establece con un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con las adecuadas condiciones de contorno.
- b) Integrales, donde el modelo matemático toma la forma de un sistema de ecuaciones integrales. En este caso las condiciones de contorno ya están incluidas en el mismo sistema de ecuaciones.

- c) Diferenciales-integrales, que combina los dos modelos anteriores de forma que una parte del sistema se establece con un sistema de ecuaciones en derivadas parciales y otra parte con un sistema de ecuaciones integrales.

Por lo que respecta a la resolución de modelos matemáticos diferenciales, entre los métodos numéricos aplicados cabe citar el método de las diferencias finitas (FDM: Finite Difference Method) [8][37].

El método de las diferencias finitas (FDM) ha sido ampliamente aplicado en la práctica para el cálculo de campos electrostáticos bidimensionales en sistemas cerrados, así como para el cálculo de campos magnetostáticos. En este método un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales se convierte en un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales, a través de la discretización del espacio mediante una red ortogonal apropiada. Este proceso conduce a un sistema de ecuaciones de orden muy alto, que se describe con una matriz de coeficientes con un elevadísimo número de elementos nulos. Este método da buenos resultados en modelos bidimensionales de aparatos de alta tensión y en máquinas eléctricas cuando resulta necesario tener en cuenta la curva de magnetización. Las desventajas de este método son la dificultad de establecer una red bien ajustada a las líneas de contorno entre diferentes medios y el gran número de datos de entrada que son necesarios.

Por lo que respecta a la resolución de los modelos matemáticos integrales, los métodos numéricos utilizados son:

- a) El método de elementos finitos (FEM: Finite Element Method)
- b) El método de simulación de cargas (CSM: Charge Simulation Method)
- c) El método de las cargas superficiales (SCM: Surface Charge Method)
- d) El método de los elementos de contorno (BEM: Boundary Element Method)

El método de elementos finitos (FEM) se utiliza con éxito en la resolución de campos electromagnéticos bidimensionales y tridimensionales, y en otras

aplicaciones técnicas no eléctricas. Este método se basa en el cálculo variacional, donde la solución del problema del campo se reduce a obtener el estado estacionario de la función de energía total. A partir de ésta, y teniendo en cuenta que en partes lo suficientemente pequeñas (elementos finitos) de la zona de estudio la función de campo se puede expresar de forma algebraica, el problema se puede aproximar mediante un sistema de ecuaciones algebraicas. Una vez resuelto éste, se puede conseguir la información necesaria sobre la función del campo en el espacio estudiado. También aquí se obtiene una matriz de coeficientes de orden muy alto y con numerosos elementos nulos. La ecuación matricial resultante puede resolverse por diversos métodos iterativos o directos. La desventaja de este método consiste en el elevado número de datos de entrada que es preciso proporcionar para definir la geometría y las características materiales de los elementos finitos establecidos en el área de estudio.

En el método de simulación de cargas (CSM), las cargas reales libres existentes en las superficies de los conductores y las cargas de polarización de las fronteras dieléctricas, son substituidas por cargas discretas equivalentes situadas en el espacio, y cuyos valores se calculan a partir del conocimiento de las condiciones de contorno. Las cargas discretas son puntuales, lineales o anulares, y su posición se determina tratando de evitar la singularidad del operador integral, es decir desplazando las cargas fuera de las fronteras entre medios, donde se encuentran las cargas reales. De esta manera resulta posible determinar analíticamente los coeficientes de la ecuación matricial algebraica resultante. Este método es ampliamente utilizado en el estudio de campos electrostáticos en ingeniería de alta tensión. Además, se ha ampliado con la introducción de cargas superficiales, equivalentes a las reales, localizadas directamente sobre las superficies de los conductores y de las fronteras dieléctricas, dando lugar a lo que se conoce como método de las cargas superficiales (SCM: Surface Charge Method).

En el método de los elementos de contorno (BEM), se formulan ecuaciones integrales que se traducen en un sistema de ecuaciones algebraicas mediante la substitución de las integrales de superficie y volumen por una suma finita de integrales sobre pequeñas superficies bien elegidas sobre los contornos situados entre dos medios con características diferentes, o sobre pequeños volúmenes situados dentro de los medios con propiedades electromagnéticas no lineales. Estos pequeños elementos son llamados “Surface Boundary Elements”(SBE) o “Volume Boundary Elements” (VBE), respectivamente. Los elementos se

determinan de forma que las características del medio resulten constantes en cada uno. El campo se evalúa en los nodos del elemento de contorno. Como consecuencia, la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones algebraicas resulta de un orden relativamente bajo. No obstante es una matriz llena, y con valores de coeficientes no constantes en el caso de medios no lineales. En este último caso, la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas se realiza con una combinación de un cálculo directo y de un procedimiento iterativo para el ajuste de los parámetros no lineales sobre los elementos de contorno. En general, el punto débil de este método es una matriz de coeficientes sin elementos nulos y un gasto relativamente grande de tiempo de computación para el cálculo de la matriz de coeficientes pues se trata en cada caso del cálculo numérico de una integral. Las ventajas del método son que el número de datos de entrada necesarios para describir exactamente todas las características del sistema es relativamente pequeño, y que sólo se necesitan definir elementos de contorno en las fronteras entre diferentes medios. El método tiene una alta fiabilidad debido a que la información sobre las condiciones de contorno es directamente introducida en el sistema de ecuaciones algebraicas, y por otra parte permite resolver con facilidad los sistemas abiertos (con límites en el infinito) donde la aplicación de los métodos diferenciales es más difícil.

En los apartados siguientes de este capítulo se va a proceder a una descripción más detallada de los métodos de cálculo utilizados en el programa de cálculo que se ha tomado como base en esta tesis doctoral, que son:

- a) El método de simulación de cargas,
- b) El método de las cargas superficiales y
- c) El método de los elementos de contorno

2.3 Método de simulación de cargas (CSM)

2.3.1 Introducción

El método de simulación de cargas o de las cargas discretas se basa en la

substitución de las cargas superficiales existentes en electrodos y fronteras dieléctricas por un conjunto de cargas simuladas situadas fuera de las superficies. Las cargas utilizadas para la simulación son cargas puntuales, lineales y anulares. La posición y el tipo de estas cargas están predeterminadas siendo su valor desconocido. El valor de estas cargas se determina forzando que su efecto conjunto satisfaga las condiciones de contorno de la configuración en un número determinado de puntos de contorno (puntos sobre las superficies de los electrodos y fronteras dieléctricas).

Así, por lo que respecta a los puntos de contorno situados en las superficies de los electrodos, el principio de superposición determina que la suma de los potenciales creados en cada punto P_i por el conjunto de las cargas simuladas en toda la configuración, debe ser igual al potencial Φ_i existente en la superficie donde esté situado dicho punto:

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot Q_j = \Phi_i \quad (2.1)$$

siendo n el número de cargas simuladas, Q_j la carga simulada j -ésima y p_{ij} su correspondiente coeficiente de potencial para el punto P_i .

En el caso de existir algún electrodo C_E a potencial desconocido pero con carga neta conocida (normalmente cero, como es el caso de los electrodos a potencial flotante), este potencial desconocido Φ_i sería una incógnita más, por lo que habría que añadir una ecuación más para cada electrodo, que sería la condición de que la carga neta en dicho electrodo es el valor conocido. Así para cada electrodo C_E :

$$\sum_{j \in C_E} Q_j = Q_{E, neta} \quad (2.2)$$

De la misma forma, hay que establecer condiciones de contorno para las fronteras dieléctricas. En este caso se utilizan dos cargas simuladas para cada punto de contorno, por lo que es preciso establecer dos ecuaciones para cada uno de ellos. Estas ecuaciones corresponden a la condición de continuidad del potencial a ambos lados del punto de contorno por un lado, y del salto en el valor de la componente normal del campo por el otro. La primera de las condiciones se establece formulando la ecuación 2.1 por separado para las cargas situadas a uno y

otro lados de la superficie e igualando ambas. La segunda condición normalmente adopta, de acuerdo con el teorema de Gauss, la forma siguiente para cada punto de contorno P_i de la frontera (supuesto que, como es habitual, no existan cargas libres en la misma):

$$\epsilon_1 \cdot E_{i1n} = \epsilon_2 \cdot E_{i2n} \quad (2.3)$$

y dada la relación lineal entre intensidad de campo y carga, a partir de esta ecuación se puede llegar, para cada punto de contorno P_i de la frontera, a una ecuación de la forma:

$$\sum_{j=1}^n f_{ij,\eta} \cdot Q_j = 0 \quad (2.4)$$

siendo $f_{ij,\eta}$ el coeficiente de la componente de campo eléctrico normal a la frontera en cada punto de contorno i con relación a la carga simulada Q_j .

Con la aplicación de estas ecuaciones a todos los puntos de contorno se establece un sistema de n ecuaciones lineales con n cargas incógnita, que en forma matricial adopta la forma:

$$[A] \cdot [Q] = [\Phi] \quad (2.5)$$

donde el vector $[Q]$ contiene las n cargas simuladas incógnita, el vector $[\Phi]$ está formado por los valores del potencial en los puntos de contorno sobre los electrodos a potencial conocido, y por ceros en el caso de los demás puntos de contorno (para los electrodos de potencial desconocido, el potencial desconocido se integra en el vector incógnitas, quedando ceros en el vector $[\Phi]$).

El valor de los $n \times n$ elementos de la matriz $[A]$ de coeficientes depende del tipo y la posición de la carga correspondiente, así como de la situación de cada punto de contorno, y debe ser determinado en cada caso.

Una vez determinados el valor de los $n \times n$ elementos de la matriz $[A]$, se puede proceder a la resolución de la ecuación (2.5) por alguno de los métodos disponibles.

Después de la resolución del sistema de ecuaciones se debe comprobar la fiabilidad de la solución encontrada, verificando si se ajusta a las condiciones de

contorno de la configuración. En el caso de que la solución se demuestre fiable, el potencial y la intensidad del campo en cualquier otro punto P_i del espacio se puede calcular analíticamente por medio de las siguientes expresiones [5]:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot Q_j \tag{2.6}$$

$$\vec{E}_i = - \sum_{j=1}^n (\vec{\nabla} \cdot p_{ij}) \cdot Q_j \tag{2.7}$$

donde previamente habrá que determinar los coeficientes de potencial y campo eléctrico correspondientes al punto P_i con el mismo método con que se determinan para establecer la matriz de coeficientes.

2.3.2 Campos bidimensionales

En el caso de campos bidimensionales, resulta suficientemente fiable la utilización de cargas lineales de longitud infinita y densidad lineal de carga λ desconocida.

El coeficiente de potencial de este tipo de carga, así como las componentes de la intensidad de campo que determina en cualquier punto del espacio, son bien conocidas. Si se tiene en cuenta la contribución de las cargas imagen, utilizadas frecuentemente para simular la presencia de un plano de tierra XZ, el coeficiente de potencial que determina la contribución de la carga $\lambda_j(x_j, y_j)$ al potencial en el punto $P_i(x, y)$ es el siguiente:

$$p_{ij} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{\sqrt{(y + y_j)^2 + (x - x_j)^2}}{\sqrt{(y - y_j)^2 + (x - x_j)^2}} \tag{2.8}$$

Y los coeficientes de la intensidad de campo son:

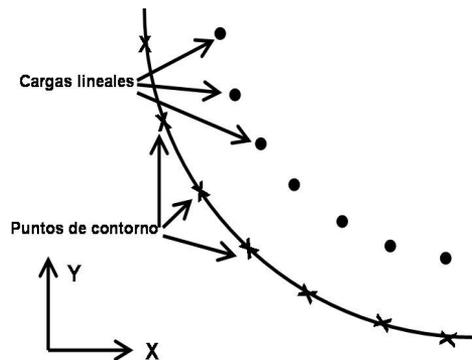


Figura 2.1 Sección de configuración bidimensional

$$\begin{aligned}
 f_{ij,x} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left[\frac{x-x_j}{(y-y_j)^2 + (x-x_j)^2} - \frac{x-x_j}{(y+y_j)^2 + (x-x_j)^2} \right] \\
 f_{ij,y} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left[\frac{y-y_j}{(y-y_j)^2 + (x-x_j)^2} - \frac{y+y_j}{(y+y_j)^2 + (x-x_j)^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

expresiones deducibles analíticamente a partir de la aplicación del teorema de Gauss [5].

De forma que la contribución de la carga λ_j a las componentes del campo eléctrico en el punto P_i resulta:

$$\begin{aligned}
 E_{ij,x} &= f_{ij,x} \cdot \lambda_j \\
 E_{ij,y} &= f_{ij,y} \cdot \lambda_j
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Y en el caso de ser $P_i(x,y)$ un punto de contorno, los coeficientes de campo correspondientes a las componentes normal y tangencial a la superficie de contorno del campo eléctrico en dicho punto son por tanto:

$$\begin{aligned}
 f_{ij,\eta} &= f_{ij,x} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{i}) + f_{ij,y} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{j}) \\
 f_{ij,\tau} &= f_{ij,x} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{i}) + f_{ij,y} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{j})
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

siendo los vectores $\vec{\eta}_i$ y $\vec{\tau}_i$ los vectores unitarios normal y tangente, respectivamente, a la superficie de contorno en el punto $P_i(x,y)$.

2.3.3 Campos tridimensionales con simetría rotacional

En configuraciones con simetría rotacional se utilizan cargas puntuales, cargas lineales de longitud finita y cargas anulares como cargas simuladas, las dos últimas con densidad de carga constante. Se verán a continuación los coeficientes de potencial que determina cada uno de estos tipos de carga, así como su contribución a la intensidad de campo en un punto cualquiera $P_i(r,z)$ localizado en el plano (r,z) en el que se definen las generatrices de las superficies de los dispositivos [42].

a) Carga puntual $Q_j(\theta, z_j)$ sobre el eje Z . Su coeficiente de potencial es [42]:

$$p_{ij} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_j)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + z_j)^2}} \right] \quad (2.12)$$

Y los correspondientes coeficientes de la intensidad de campo serán [42]:

$$\begin{aligned} f_{ij,r} &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left[\frac{r}{[\sqrt{r^2 + (z - z_j)^2}]^3} - \frac{r}{[\sqrt{r^2 + (z + z_j)^2}]^3} \right] \\ f_{ij,z} &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left[\frac{z - z_j}{[\sqrt{r^2 + (z - z_j)^2}]^3} - \frac{z + z_j}{[\sqrt{r^2 + (z + z_j)^2}]^3} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

De forma que la contribución de la carga Q_j a las componentes del campo eléctrico en el punto $P_i(r,z)$ resulta:

$$\begin{aligned} E_{ij,r} &= f_{ij,r} \cdot Q_j \\ E_{ij,z} &= f_{ij,z} \cdot Q_j \end{aligned} \quad (2.14)$$

Y en el caso de ser $P_i(r,z)$ un punto de contorno, los coeficientes de campo correspondientes a las componentes del campo eléctrico normal y tangencial a la superficie de contorno en dicho punto son por tanto:

$$\begin{aligned} f_{ij,\eta} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{u}_z) \\ f_{ij,\tau} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_z) \end{aligned} \quad (2.15)$$

b) Carga lineal de densidad λ_j , situada sobre el eje Z y con extremos en z_{j1} y z_{j2} . Su coeficiente de potencial en el punto $P_i(r,z)$ es [42]:

$$p_{ij} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot (z_{j2} - z_{j1})} \cdot \ln \frac{(z_{j2} - z + \gamma_2) \cdot (z_{j1} + z + \gamma_1)}{(z_{j2} + z + \delta_2) \cdot (z_{j1} - z + \delta_1)} \quad (2.16)$$

Y los correspondientes coeficientes de la intensidad de campo son [42]:

$$\begin{aligned} f_{ij,r} &= \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot (z_{j2} - z_{j1})} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{z + z_{j2}}{\delta_2} + \frac{z - z_{j2}}{\gamma_2} - \frac{z - z_{j1}}{\delta_1} - \frac{z + z_{j1}}{\gamma_1} \right] \\ f_{ij,z} &= \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot (z_{j2} - z_{j1})} \cdot \left[-\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\gamma_1} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{r^2 + (z_{j1} + z)^2}; \gamma_2 = \sqrt{r^2 + (z_{j2} - z)^2} \\ \delta_1 &= \sqrt{r^2 + (z_{j1} - z)^2}; \delta_2 = \sqrt{r^2 + (z_{j2} + z)^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

De forma que la contribución de la carga λ_j a las componentes del campo eléctrico en el punto P_i resulta:

$$\begin{aligned} E_{ij,r} &= f_{ij,r} \cdot \lambda_j \\ E_{ij,z} &= f_{ij,z} \cdot \lambda_j \end{aligned} \quad (2.19)$$

Y en el caso de ser P_i un punto de contorno, los coeficientes de campo correspondientes a sus componentes normal y tangencial a la superficie de contorno en dicho punto son por tanto:

$$\begin{aligned} f_{ij,\eta} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{n}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{n}_i \cdot \vec{k}) \\ f_{ij,\tau} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

c) Carga anular λ_j , con centro en $(0, z_j)$, radio r_j , y con su plano perpendicular al eje Z . El coeficiente de potencial correspondiente al punto $P_i(r, z)$ es [42]:

$$p_{ij} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{K(k_1)}{\alpha_1} - \frac{K(k_2)}{\alpha_2} \right] \quad (2.21)$$

donde:

$$k_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{r \cdot r_j}}{\alpha_1}; k_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{r \cdot r_j}}{\alpha_2}; \quad (2.22)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{(r + r_j)^2 + (z - z_j)^2}; \alpha_2 = \sqrt{(r + r_j)^2 + (z + z_j)^2} \quad (2.23)$$

y $K(k)$ y $E(k)$ son las integrales elípticas de primera y segunda especie, que pueden ser evaluadas con aproximaciones polinómicas [42].

Y los coeficientes de las componentes del campo en dicho punto son [42]:

$$\begin{aligned} f_{ij,r} &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{\pi \cdot r} \cdot \dots \\ &\dots \left[\frac{(r_j^2 - r^2 + (z + z_j)^2) \cdot E(k_2) - \beta_2^2 \cdot K(k_2)}{\alpha_2 \cdot \beta_2^2} - \frac{(r_j^2 - r^2 + (z - z_j)^2) \cdot E(k_1) - \beta_1^2 \cdot K(k_1)}{\alpha_1 \cdot \beta_1^2} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$f_{ij,z} = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{(z+z_j) \cdot E(k_2)}{\alpha_2 \cdot \beta_2^2} + \frac{(z-z_j) \cdot E(k_1)}{\alpha_1 \cdot \beta_1^2} \right] \quad (2.25)$$

donde:

$$\beta_1 = \sqrt{(r-r_j)^2 + (z-z_j)^2}; \beta_2 = \sqrt{(r-r_j)^2 + (z+z_j)^2} \quad (2.26)$$

De esta forma, la contribución de la carga λ_j a las componentes del campo eléctrico en el punto $P_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ resulta:

$$\begin{aligned} E_{ij,r} &= f_{ij,r} \cdot \lambda_j \\ E_{ij,z} &= f_{ij,z} \cdot \lambda_j \end{aligned} \quad (2.27)$$

Y en el caso de ser $P_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ un punto de contorno, los coeficientes de campo correspondientes a sus componentes normal y tangencial a la superficie de contorno en dicho punto son por tanto:

$$\begin{aligned} f_{ij,-n} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{n}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{n}_i \cdot \vec{k}) \\ f_{ij,\tau} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3.4 Campos asimétricos con dispositivos simétricos

En ingeniería de alta tensión a menudo se encuentran superficies conductoras y fronteras dieléctricas rotacionalmente simétricas, pero con una localización espacial que da lugar a un campo eléctrico asimétrico.

Para el cálculo del campo eléctrico tridimensional de estas configuraciones, es posible seguir utilizando el CSM, y de la misma manera que en los campos con simetría rotacional, también en estos casos se pueden seguir utilizando cargas puntuales, lineales y anulares para modelizar estas configuraciones. Sin embargo, en estos casos, se hace necesario introducir algunas modificaciones.

Se pueden utilizar dos tipos de cargas anulares diferentes, a saber:

- Una carga anular con diferentes valores de carga constante en cada uno de los tramos definidos en dirección acimutal (figura 2.2) [49], o alternativamente varias cargas anulares constantes excéntricas (figura 2.3).

- Una carga anular con valor continuamente variable en dirección acimutal (figura 2.4) [42][43].

En el caso de las cargas anulares con valor de densidad de carga diferente en cada uno de los tramos que se definen en dirección acimutal (figura 2.2), a cada uno de estos valores se le hace corresponder un punto de contorno.

Así, tomando carga anular perpendicular al eje Z y con centro sobre el mismo eje, y con radio r_j , el coeficiente de potencial del tramo con carga λ_{jk} para un punto $P_i(r, \psi, z)$ es el siguiente [5]:

$$P_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon \cdot \Delta\alpha} \cdot \int_{\alpha_{j,i}}^{\alpha_{j,i+1}} \frac{d\alpha}{\sqrt{D^2 - 2r r_j \cdot \cos(\psi - \alpha)}} \quad (2.29)$$

Y los coeficientes de las componentes del campo eléctrico creado por la misma carga λ_{jk} en dicho punto P_i son [5]:

$$\begin{aligned} f_{i,jk,r} &= \frac{1}{K_j} \cdot \int_{\alpha_{j,k}}^{\alpha_{j,k+1}} \frac{r - r_j \cdot \cos(\psi - \alpha)}{F_j} \cdot d\alpha \\ f_{i,jk,\psi} &= \frac{-1}{K_j} \cdot \int_{\alpha_{j,k}}^{\alpha_{j,k+1}} \frac{r_j \cdot \text{sen}(\psi - \alpha)}{F_j} \cdot d\alpha \quad (2.30) \\ f_{i,jk,z} &= \frac{1}{K_j} \cdot \int_{\alpha_{j,k}}^{\alpha_{j,k+1}} \frac{z - z_j}{F_j} \cdot d\alpha \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} D^2 &= (z - z_j)^2 + r_j^2 + r^2 \\ K_j &= 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \Delta\alpha \\ F_j &= \left(\sqrt{D^2 - 2 \cdot r \cdot r_j \cdot \cos(\psi - \alpha)} \right)^3 \end{aligned} \quad (2.31)$$

De forma que la contribución de la carga λ_{jk} a las componentes del campo

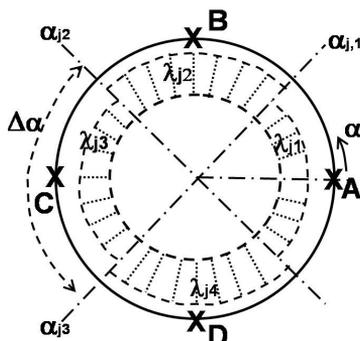


Figura 2.2 Carga anular constante en tramos

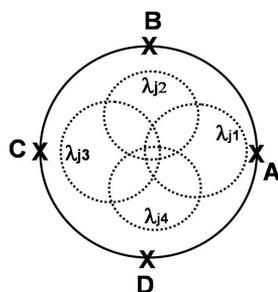


Figura 2.3 Cargas anulares excéntricas

eléctrico en el punto P_i resulta:

$$\begin{aligned} E_{i,jk,r} &= f_{i,jk,r} \cdot \lambda_{jk} \\ E_{i,jk,\psi} &= f_{i,jk,\psi} \cdot \lambda_{jk} \\ E_{i,jk,z} &= f_{i,jk,z} \cdot \lambda_{jk} \end{aligned} \tag{2.32}$$

En el caso de ser $P_i(r,\psi,z)$ un punto de contorno, los coeficientes de campo correspondientes a sus componentes normal y tangencial a la superficie de contorno en dicho punto son por tanto:

$$\begin{aligned} f_{i,jk,\eta} &= f_{i,jk,r} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{i,jk,z} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{k}) \\ f_{i,jk,\tau} &= f_{i,jk,r} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{i,jk,z} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{k}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Las integrales son calculadas numéricamente, ya sea por aplicación de la regla de los trapecios, las reglas de Simpson, la cuadratura de Gauss, u cualquier otro de los métodos numéricos disponibles [36][52].

Por lo que respecta a la utilización de cargas anulares con densidad de carga continuamente variable a lo largo del anillo, su distribución se determina de forma similar al análisis de Fourier, sumando una parte constante y varios armónicos (co)sinusoidales, siendo las incógnitas el valor constante y las amplitudes de los armónicos.

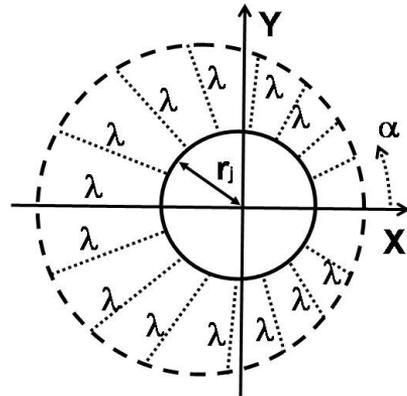


Figura 2.4 Carga anular con densidad continuamente variable

De esta manera la distribución de la densidad de carga a lo largo del anillo responde a la siguiente expresión:

$$\lambda_j(\alpha) = \sum_{k=0}^N \lambda_{jk} \cdot \cos(k \cdot \alpha) \tag{2.34}$$

siendo λ_{j0} el término constante, y $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \lambda_{j3} \dots$ las amplitudes de los armónicos, que hay que determinar forzando el cumplimiento de las condiciones de contorno.

De esta manera, cada una de estas distribuciones anulares de carga aportan $N+1$

incógnitas al sistema, siendo N el número de armónicos, lo que a su vez exige utilizar, por cada carga anular, $N+1$ puntos de contorno en los que forzar el cumplimiento de las correspondientes condiciones de contorno.

Por lo que respecta al coeficiente de potencial correspondiente a la aportación del k -ésimo armónico de la carga anular j al potencial de un punto $P_i(r, \psi, z)$ es el siguiente [42]:

$$p_{i,jk} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \sqrt{\frac{r_j}{r}} \cdot Q_{k-1/2}(k_j) \cdot \cos(k\psi) \quad (2.35)$$

siendo $Q_{k-1/2}(k_j)$ la función de Legendre de segunda especie, orden $k-1/2$ y parámetro k_j , con:

$$k_j = \frac{D^2}{2rr_j} \quad (2.36)$$

y estando D^2 establecido en la ecuación 2.31.

Por su parte, los coeficientes de las componentes de la intensidad de campo eléctrico creado por este armónico k -ésimo de la carga anular j en dicho punto son [42]:

$$\begin{aligned} f_{i,jk,r} &= \frac{-1}{2\pi\epsilon} \cdot \cos(k\psi) \cdot \sqrt{\frac{r_j}{r}} \cdot F_r \\ f_{i,jk,\psi} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot k \cdot \text{sen}(k\psi) \cdot \sqrt{\frac{r_j}{r^3}} \cdot \frac{1}{r} \cdot F_\psi \\ f_{i,jk,z} &= \frac{-1}{2\pi\epsilon} \cdot \cos(k\psi) \cdot \sqrt{\frac{r_j}{r}} \cdot F_z \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde:

$$F_r = -\frac{1}{2r} Q_{k-1/2}(k_j) + \frac{k+1/2}{D^4 - 4r^2 r_j^2} \cdot 2r_j \cdot \dots \quad (2.38)$$

$$\dots \cdot (2r^2 - D^2) \cdot (Q_{k+1/2}(k_j) - k_j \cdot Q_{k-1/2}(k_j))$$

$$F_\psi = Q_{k-1/2}(k_j) \quad (2.39)$$

$$F_z = \frac{k+1/2}{D^4 - 4r^2 r_j^2} \cdot 4r r_j \cdot (z - z_j) \cdot (Q_{k+1/2}(k_j) - k_j \cdot Q_{k-1/2}(k_j)) \quad (2.40)$$

y con el mismo significado para D^2 , k_j , $Q_{i+1/2}$ y $Q_{i-1/2}$ que el visto en los coeficientes de potencial.

De esta forma, la contribución de este armónico a las componentes del campo eléctrico en el punto P_i resulta:

$$\begin{aligned} E_{i,jk,r} &= f_{i,jk,r} \cdot \lambda_{jk} \\ E_{i,jk,\psi} &= f_{i,jk,\psi} \cdot \lambda_{jk} \\ E_{i,jk,z} &= f_{i,jk,z} \cdot \lambda_{jk} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Y en el caso de ser P_i un punto de contorno, los coeficientes de campo correspondientes a sus componentes normal y tangencial a la superficie de contorno en dicho punto serán por tanto:

$$\begin{aligned} f_{i,jk,\eta} &= f_{i,jk,r} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{i,jk,z} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{k}) \\ f_{i,jk,\tau} &= f_{i,jk,r} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{i,jk,z} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

siendo \vec{u}_r el vector unitario radial.

2.3.5 Configuraciones con más de un dieléctrico

Los procedimientos descritos anteriormente son aplicables a sistemas con un único dieléctrico, por ejemplo sistemas electródicos en aire o SF₆. En ingeniería de alta tensión hay que calcular campos con más de un dieléctrico con cierta frecuencia. El método de las cargas discretas puede aplicarse también en estos casos mediante la utilización de técnicas especiales para la colocación de las cargas y la consideración de su influencia en las regiones ocupadas por los distintos dieléctricos [42][5].

Una configuración con varios dieléctricos puede subdividirse en regiones. Cada región es homogénea con respecto a sus propiedades materiales, es decir contiene un solo dieléctrico. Las cargas discretas son situadas de la forma que se explica a continuación (figura 2.5):

- a) Para cada punto de contorno sobre las superficies de los electrodos se coloca una carga enfrente de la región adyacente.
- b) Para cada punto de contorno en una frontera dieléctrica se colocan dos cargas, una a cada lado de la superficie.

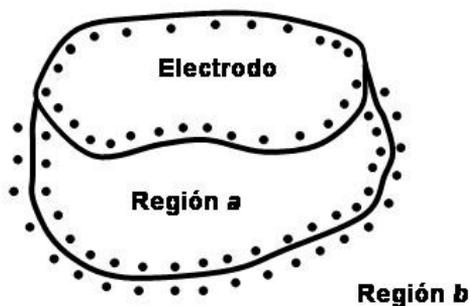


Figura 2.5 Montaje con dos dieléctricos

De esta forma, sobre las fronteras dieléctricas, el número de cargas desconocidas es el doble que el número de puntos de contorno. Sin embargo, también son dos las condiciones de contorno disponibles por cada uno de estos puntos:

- a) Continuidad de potenciales a ambos lados de la frontera. Para cada punto en una frontera entre la región “a” y la región “b”, se fuerza la condición:

$$\Phi_a = \Phi_b \quad (2.43)$$

- b) Discontinuidad entre las componentes normales de la intensidad de campo a ambos lados de la frontera. Para cada punto de contorno como los citados anteriormente se fuerza la condición:

$$\epsilon_a \cdot E_{na} = \epsilon_b \cdot E_{nb} \quad (2.44)$$

Por lo que respecta al cálculo del campo dentro de las regiones hay dos métodos para realizarlo denominados CSM-orientado a superficies y CSM-orientado a regiones [5].

1. CSM-orientado a superficies (figura 2.6)

Con este método para el cálculo del potencial y de la intensidad de campo dentro de una región se tienen en cuenta todas las cargas establecidas excepto las localizadas dentro de dicha región.

Así, para calcular el potencial y la intensidad de campo en un punto P_i dentro de una región R_a , se procede de la siguiente forma, teniendo en cuenta únicamente aquellas cargas no pertenecientes a la región considerada [5]:

$$\Phi_i = \sum_{j \notin R_a} p_{ij} \cdot Q_j \quad (2.45)$$

$$\vec{E}_i = - \sum_{j \notin R_a} (\vec{\nabla} p_{ij}) \cdot Q_j \quad (2.46)$$

Este mismo procedimiento se aplica a los puntos de contorno cuando se establece el sistema de ecuaciones.

Así, para un punto P_i situado sobre una superficie electródica C_E ante a la región R_a , la ecuación sería la 2.45.

En el caso de que se trate de un electrodo a potencial flotante, el potencial Φ_E sería una incógnita más, por lo que habría que añadir una ecuación más, que normalmente sería la condición de carga neta nula en dicho electrodo:

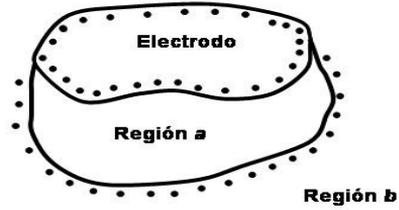
$$\sum_{j \in C_E} Q_j = 0 \quad (2.47)$$

De la misma forma, para establecer la dos ecuaciones correspondientes a cada punto de contorno P_i sobre una frontera dieléctrica entre las regiones R_a y R_b , se procedería estableciendo la continuidad del potencial a ambos lados de la frontera (ecuación 2.48) y la discontinuidad de la componente normal del campo (ecuación 2.49):

$$\sum_{j \notin R_a} p_{ij} \cdot Q_j = \sum_{j \notin R_b} p_{ij} \cdot Q_j \quad (2.48)$$

$$\epsilon_a \cdot \sum_{j \notin R_a} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} p_{ij}) \cdot Q_j = \epsilon_b \cdot \sum_{j \notin R_b} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} p_{ij}) \cdot Q_j \quad (2.49)$$

Cargas a considerar en puntos de región a :



Cargas a considerar en puntos de región b :

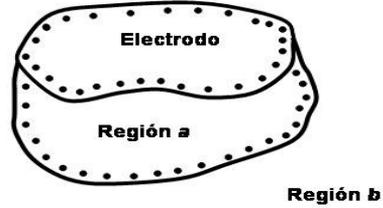


Figura 2.6: Cargas a considerar en el CSM orientado a superficies

Este método se ha utilizado con éxito en montajes con dos dieléctricos, y aunque también es posible utilizarlo con un número mayor de ellos, resulta demasiado sensible a la posición de las cargas discretas. En efecto, éstas deben situarse muy próximas a su superficie correspondiente para evitar su superposición con cargas correspondientes a otras superficies, lo que los algoritmos que se aplican en los programas de cálculo no siempre consiguen realizar adecuadamente.

2. CSM – Orientado a regiones (figura 2.7)

Las cargas se organizan en grupos, de forma que para cada región se tendría en cuenta sólo uno de estos grupos de cargas. Cada grupo de cargas corresponde a la región a la que rodea. Así, para el cálculo del potencial y de la intensidad de campo en un punto P_i de la región R_a se aplicarían las siguientes ecuaciones [5]:

$$\Phi_i = \sum_{j \in R_a} p_{ij} \cdot Q_j \tag{2.50}$$

$$\vec{E}_i = - \sum_{j \in R_a} (\vec{\nabla} \cdot p_{ij}) \cdot Q_j \tag{2.51}$$

donde la expresión $j \in R_a$ se refiere a las cargas situadas en los puntos j que rodean a la región R_a .

De la misma manera que estas ecuaciones, se pueden establecer las ecuaciones correspondientes a los puntos de contorno que conforman el sistema de ecuaciones a resolver. Así, para un punto P_i situado sobre una superficie electródica C_E , se utilizaría la misma ecuación (2.50) siendo R_a la región ante la que se encuentra el punto P_i . Si el punto de contorno se encontrara frente a la región R_b se utilizarían las cargas correspondientes a dicha región.

En el caso de que la superficie electródica C_E pertenezca a un electrodo a potencial flotante se procederá de la misma forma, pero el potencial Φ_E sería una incógnita

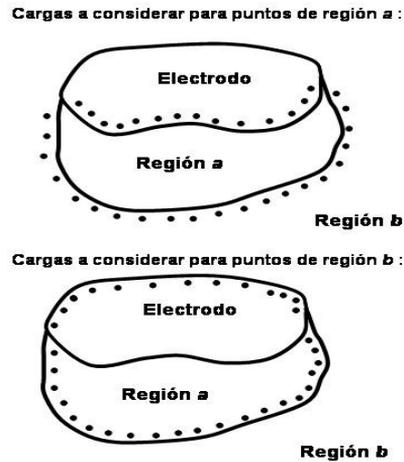


Figura 2.7: Cargas a considerar en el CSM orientado a regiones

más, por lo que habría que añadir una ecuación más que normalmente sería la suma de cargas nula en el interior de dicho electrodo. Sin embargo, al no adjudicarse cargas a las superficies sino a las regiones, la condición de carga nula no se puede calcular directamente con la suma de cargas contenidas en la superficie electródica sino que, de acuerdo con la ley de Gauss, debe ser obtenida a través de la integración del vector desplazamiento eléctrico sobre dicha superficie.

De la misma forma, para establecer la dos ecuaciones correspondientes a cada punto de contorno P_i sobre una frontera dieléctrica entre las regiones R_a y R_b , se procedería así:

$$\sum_{j \in R_a} p_{ij} \cdot Q_j = \sum_{j \in R_b} p_{ij} \cdot Q_j \quad (2.52)$$

$$\epsilon_a \cdot \sum_{j \in R_a} (\vec{n}_j \cdot \vec{\nabla} \cdot p_{ij}) \cdot Q_j = \epsilon_b \cdot \sum_{j \in R_b} (\vec{n}_j \cdot \vec{\nabla} \cdot p_{ij}) \cdot Q_j \quad (2.53)$$

Entre las ventajas de este método está que da lugar a una matriz con más elementos nulos que la correspondiente al método orientado a superficies.

En este método las cargas que determinan el campo eléctrico en una región no se utilizan para el cálculo del campo en otras regiones. Esto es muy útil para posicionar las cargas pues no aparecen los problemas citados en el método anterior. En efecto, al colocar un punto en una frontera entre dos regiones a y b y determinar la posición de las cargas asignadas a cada una de las regiones fronterizas, la única condición de la carga asignada a la región a es que no esté situada dentro de ésta, pero no es necesario que esté situada dentro de la región b , y viceversa. Esta misma regla se aplica en el caso de un electrodo: las cargas asignadas a puntos de contorno sobre la superficie electródica no es necesario que se encuentren dentro del electrodo. Adicionalmente, esto evita dificultades en el caso de que el electrodo sea una chapa muy delgada.

2.3.6 Aspectos importantes en la aplicación del método

1. Posición de las cargas discretas

Un aspecto fundamental en la aplicación del CSM es la localización de las cargas

discretas y los correspondientes puntos de contorno. Un criterio empírico que se ha demostrado útil es la utilización de un factor de asignación f_a tal que [5]:

$$a_2 = f_a \cdot a_1 \tag{2.54}$$

siendo a_1 la distancia entre el punto de contorno considerado y otro punto adyacente, y a_2 la distancia entre el punto de contorno y su carga discreta correspondiente. La experiencia ha demostrado que valores de f_a entre 1.0 y 2.0 dan buenos resultados [5].

Sin embargo, para superficies curvadas, el factor de asignación se demuestra insuficiente para evitar distancias excesivamente pequeñas entre cargas y puntos de contorno, por lo que resulta conveniente definir adicionalmente un criterio de curvatura que determine una superficie imaginaria sobre la que situar las cargas. Así, si r es el radio de curvatura de la superficie de contorno a considerar, ρ_1 el radio de curvatura de la superficie imaginaria sobre la que situar las cargas discretas en el caso de que la superficie considerada sea cóncava, y ρ_0 el radio de curvatura de dicha superficie imaginaria si la superficie considerada es convexa (figura 2.8), estos radios vienen determinados por las siguientes expresiones [42]:

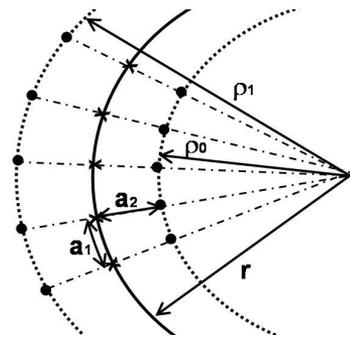


Figura 2.8 Localización de las cargas ficticias

$$\begin{aligned} \rho_1 &= r \cdot \left[\sqrt{1 + \left(f_a \cdot \frac{a_1}{r} \right)^2} + f_a \cdot \frac{a_1}{r} \right] \\ \rho_0 &= r \cdot \left[\sqrt{1 + \left(f_a \cdot \frac{a_1}{r} \right)^2} - f_a \cdot \frac{a_1}{r} \right] \end{aligned} \tag{2.55}$$

La experiencia demuestra que mientras los valores del factor de asignación se mantengan entre 1.0 y 2.0, normalmente el cálculo no se ve demasiado influenciado por la posición de las cargas [5]. Este modo de proceder se demuestra útil siempre que, en el caso del método orientado a superficies, las cargas discretas

permanezcan dentro de las regiones a las que pertenecen. Sin embargo, esto último no siempre está garantizado por el método aquí descrito, por lo resulta conveniente que los programas que lo implementan incluyan herramientas que permitan al usuario comprobar una localización segura de las cargas.

Existen otros métodos para determinar la posición de las cargas discretas basados en procedimientos de optimización como el algoritmo de Fletcher [55] pero que no demuestran ventajas claras sobre los aquí descritos. De todas formas la exactitud del cálculo depende de una adecuada elección de los puntos de contorno, pudiendo mejorarse situando una mayor densidad de puntos en las áreas de mayor interés.

2. Pruebas de fiabilidad de los resultados

Como pruebas de fiabilidad de los resultados obtenidos en la resolución de un problema de campos se suelen tomar los siguientes [5][42]:

- a) Desviación de la superficie equipotencial $\Phi = \Phi_E$ de la superficie electródica E correspondiente. Esto se puede determinar evaluando la diferencia entre el potencial eléctrico calculado en puntos de prueba sobre la superficie electródica y el propio potencial de electrodo. La experiencia muestra que la aplicación del gradiente multiplica por **10** el error de la función escalar, por lo que un error de un **1%** en la determinación del campo debe basarse en un error no superior al **1** por mil en la determinación del potencial.
- b) Grado de desviación de la dirección del campo eléctrico calculado sobre las superficies de electrodo de la dirección normal a las mismas. Esto se puede evaluar comparando el valor de la componente normal con los valores de las componentes tangenciales en los puntos de contorno de dichas superficies, así como en puntos adicionales de las mismas.
- c) Relación entre la derivada de la intensidad de campo con relación a la normal a una superficie y la curvatura de la misma (fórmula de Spielrein [46][14]):

$$\frac{\partial E}{\partial n} \cdot \frac{1}{E} = -\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \quad (2.56)$$

siendo ρ_1 y ρ_2 los radios de curvatura de dos secciones transversales perpendiculares entre sí.

En el caso de existir más de un dieléctrico en la configuración, se pueden tomar en consideración criterios adicionales aplicados en puntos de las fronteras entre ellos:

- d) Continuidad del potencial.
- e) Continuidad de las componentes tangenciales del campo.
- f) Relación entre las componentes normales del campo.

2.4 Método de las cargas superficiales (SCM)

2.4.1 Introducción

La primera diferencia entre este método y el método de cargas discretas que se acaba de ver, es que el método de cargas discretas sitúa las cargas en lugares no coincidentes con la posición de las cargas reales, mientras que el método de las cargas superficiales simula las cargas reales con densidades de carga superficial situadas en las mismas localizaciones que las cargas reales: en la superficie de los conductores y en las fronteras dieléctricas.

Este método fue desarrollado por Singer [40][41][44] para aplicaciones en ingeniería de alta tensión, utilizando un mayor aparato matemático que el método de cargas discretas pues, en la búsqueda tanto de la máxima velocidad de cálculo como de la precisión en los resultados, se realiza la integración de forma analítica hasta donde es posible.

El método de las cargas superficiales resulta especialmente adecuado en configuraciones en las que conductores y dieléctricos poseen simetría rotacional pero que sin embargo, debido a su situación en el espacio, el campo eléctrico existente es asimétrico y por tanto requiere de una evaluación tridimensional.

2.4.2 Consideraciones analíticas generales

Dado un elemento diferencial de carga superficial σdA , éste creará, en un punto genérico P (figura 2.9), un potencial $d\Phi_P$, cuyo valor es:

$$d\Phi_P = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{\sigma \cdot dA}{s} \quad (2.57)$$

El potencial originado por una superficie finita es el resultado de considerar las aportaciones de todos los diferenciales de carga sobre ella:

$$\Phi_P = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \iint \frac{\sigma \cdot dA}{s} \quad (2.58)$$

siendo normalmente la densidad de carga superficial función de dA .

Los dispositivos con simetría rotacional se pueden definir a partir de la rotación de una generatriz C_Q , de forma que un diferencial de superficie se puede expresar en un sistema coordenado cilíndrico (figura 2.10) como:

$dA_Q = r_Q d\psi_Q dC_Q$, con lo que la integral 2.58 resulta:

$$\Phi_P = \frac{1}{4 \pi \epsilon} \cdot \iint \frac{\sigma \cdot r_Q \cdot d\psi_Q \cdot dC_Q}{s} \quad (2.59)$$

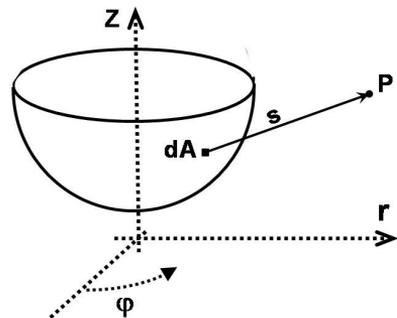


Figura 2.9 Elemento diferencial de carga superficial

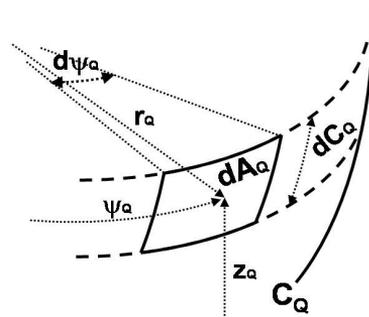


Figura 2.10 Diferencial de área en una superficie rotacionalmente simétrica

2.4.3 Campos con simetría rotacional.

En el caso de que la configuración, además de estar formada por dispositivos con simetría rotacional, también origine un campo eléctrico simétrico en dicha

dirección, la densidad de carga superficial será constante en la dirección ψ_Q por lo que resulta factible una integración analítica de la ecuación 2.59 en dicha dirección. De esta forma, para el potencial de un punto $P_i(r,z)$ localizado en el sistema de coordenadas cilíndricas local al dispositivo [41] se obtiene:

$$\Phi_P = \frac{1}{\pi \epsilon} \cdot \int \frac{\sigma \cdot K(k) \cdot r_Q \cdot dC_Q}{a} \tag{2.60}$$

siendo:

$$a = \sqrt{(r+r_Q)^2 + (z-z_Q)^2} \tag{2.61}$$

y $K(k)$ la integral elíptica de primera especie y parámetro k :

$$k = \frac{\sqrt{4rr_Q}}{a} \tag{2.62}$$

Para el cálculo de la integral resultante en C_Q (ecuación 2.60), se simula una variación lineal de la distribución de la carga a lo largo de la generatriz, lo que se ha venido demostrando suficientemente preciso [41]. Así, sea la distribución real de densidad de carga a lo largo del contorno C_Q la representada gráficamente en la figura 2.11, y sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ los valores de densidad de carga en los puntos de contorno P_1, P_2, P_3, \dots . Pues bien, la distribución real de la carga se aproxima a partir de los valores de densidad de carga correspondientes a los puntos de contorno citados, suponiendo una distribución lineal entre dichos puntos a lo largo del contorno C_Q , de acuerdo con la figura 2.12.

De esta forma la densidad de carga sobre

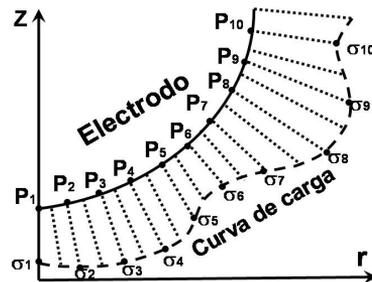


Figura 2.11 Distribución real de carga a lo largo de un contorno

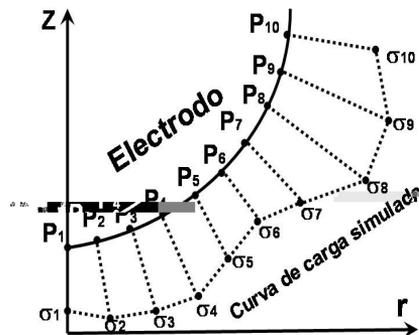


Figura 2.12 Simulación de la carga

cualquier punto situado entre los puntos de contorno P_j y P_{j+1} , resulta ser (figura 2.13):

$$\sigma_Q = \sigma_j + \frac{C_Q - C_j}{C_{j+1} - C_j} \cdot (\sigma_{j+1} - \sigma_j) \quad (2.63)$$

donde operando, y llamando L_j a la longitud del tramo $P_j P_{j+1}$, y L_Q a la longitud medida sobre el contorno desde el extremo inferior P_j del tramo hasta el punto genérico P (figura 2.13), la expresión anterior quedará:

$$\sigma_Q = \sigma_j \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \quad (2.64)$$

De esta manera, la contribución de una rodaja de contorno comprendida entre los puntos P_j y P_{j+1} (figura 2.14) al potencial de un punto P_i , viene determinada, de acuerdo con las ecuaciones 2.60 y 2.64, por la expresión:

$$\Phi_{i,j \rightarrow j+1}(P) = \frac{1}{\pi \epsilon} \int_j^{j+1} \left(\sigma_j \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \right) \cdot \frac{K(k) \cdot r_Q \cdot dL_Q}{a} \quad (2.65)$$

lo que se puede expresar, distinguiendo las aportaciones de los términos σ_j y σ_{j+1} , de la siguiente manera:

$$\Phi_{i,j}(P) = \frac{\sigma_j}{\pi \cdot \epsilon} \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot \frac{K(k) \cdot r_Q \cdot dL_Q}{a} \quad (2.66)$$

$$\Phi_{i,j+1}(P) = \frac{\sigma_{j+1}}{\pi \cdot \epsilon} \int_j^{j+1} \frac{L_Q}{L_j} \cdot \frac{K(k) \cdot r_Q \cdot dL_Q}{a} \quad (2.67)$$

De todas formas para tener en cuenta todas las contribuciones del término σ_j al

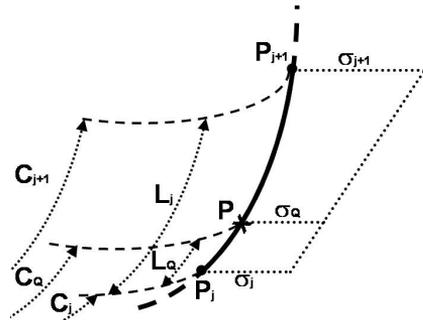


Figura 2.13 Distribución lineal de carga en un tramo de contorno

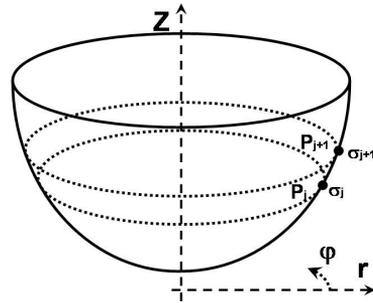


Figura 2.14 Rodaja de contorno entre P_j y P_{j+1}

potencial del punto P_j , se ha de tener en cuenta que, al realizar la integración a lo largo de todos los tramos en que se subdivide el contorno, también aparece un término en σ_j al realizar la integración en el tramo anterior, $P_{j-1}P_j$. Obviamente esta consideración es válida para todos los valores σ_j salvo el correspondiente al primer punto del contorno y el correspondiente al último. Así, las expresiones anteriores sólo son válidas para el primer punto de un contorno (ecuación 2.66) y para el último punto del contorno (ecuación 2.67). La contribución de cualquier otro punto j del contorno al potencial del punto P será:

$$\Phi_{ij}(P) = \frac{\sigma_j}{\pi \epsilon} \left[\int_{L_{j-1}}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot \frac{K(k) \cdot r_Q \cdot dL_Q}{a} + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot \frac{K(k) \cdot r_Q \cdot dL_Q}{a} \right] \quad (2.68)$$

siendo por tanto el coeficiente de potencial correspondiente a la contribución de la densidad de carga σ_j al potencial del punto P_i :

$$p_{ij} = \frac{1}{\pi \epsilon} \left[\int_{L_{j-1}}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot \frac{K(k) \cdot r_Q \cdot dL_Q}{a} + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot \frac{K(k) \cdot r_Q \cdot dL_Q}{a} \right] \quad (2.69)$$

salvo en el caso comentado de las contribuciones de las densidades de carga correspondientes al primero y último punto de un contorno.

La evaluación de estas integrales sobre C_Q se realiza por cualquiera de los métodos numéricos disponibles [36][52]. Sin embargo en el caso de contornos contruidos con arcos de circunferencia, r_Q y z_Q son funciones trigonométricas de una función angular, lo que requiere un tiempo de cálculo de ordenador relativamente alto. Esto es un problema importante dada la gran cantidad de veces que deben ser evaluadas dichas funciones. Se puede solucionar el problema con una precisión suficiente si se aproximan los contornos mediante funciones polinómicas de 2º o 3º grado, de forma que cada tramo de circunferencia se sustituya por una parábola o una spline cúbica [41]. En el caso de utilizar parábolas se trabaja con una función del tipo:

$$z_Q = A + B r_Q + C r_Q^2 \quad (2.70)$$

donde las constantes A , B y C se determinan a partir de la propia geometría del contorno. En este caso, expresando dL_Q en función de la coordenada r_Q , el

coeficiente de potencial genérico quedará:

$$p_{ij}(P) = \frac{1}{\pi \epsilon} \cdot \left[\int_{L_{j-1}}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot \frac{K(k) \cdot \sqrt{1 + (B + 2C r_Q)^2}}{a} \cdot dr_Q + \dots \right] \quad (2.71)$$

$$\left[\dots + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot \frac{K(k) \cdot \sqrt{1 + (B + 2C r_Q)^2}}{a} \cdot dr_Q \right]$$

lo que resulta mucho más económico en tiempo de computación.

Para los contornos con inclinación reducida resulta más interesante utilizar $z_Q = f(r_Q)$ como acaba de mostrarse, pero para contornos con pendientes mayores resulta mejor utilizar $r_Q = f(z_Q)$ [41], obteniéndose en este otro caso una expresión similar a la anterior para el coeficiente de potencial.

Para resolver numéricamente las integrales anteriores resulta apropiada la utilización de la regla de Simpson por su sencillez y, sobre todo, su posibilidad de adaptarse a pasos de integración diferentes. En efecto, las contribuciones de los diferentes intervalos de integración al potencial de un punto dado se hacen mayores cuanto más próximos se encuentran a éste, por lo que resulta de interés tener intervalos cada vez más pequeños cuando nos aproximamos al punto de cálculo. Se obtienen buenos resultados con tamaños de pasos de integración comprendidos entre el 50% y el 20% de la distancia entre el intervalo y el punto de cálculo [41].

Sin embargo, la integración debe interrumpirse cuando el punto de cálculo está sobre el contorno de integración y la distancia del intervalo de integración al punto de cálculo se hace excesivamente pequeña, pues aparece una singularidad. Normalmente se interrumpe la integración cuando el intervalo de integración se va a encontrar a una distancia s inferior a una distancia mínima s_{min} al punto de cálculo. Resulta útil tomar como distancia mínima un valor de 10^{-5} veces la longitud del tramo de integración sobre el que se esté trabajando ($s_{min} = 10^{-5} \cdot L_j$) [41].

Existen diferentes métodos para evitar esta singularidad. Resulta ampliamente utilizado el método consistente en sustituir un pequeño trozo de contorno en el entorno del punto de cálculo, por un pequeño tramo rectilíneo (figura 2.15). En

éste, dado su pequeño tamaño frente al tamaño del intervalo de integración (Longitud = $L \leq 2 \cdot s_{min} \ll L_j$), se puede considerar la densidad de carga constante, y así es posible realizar una integración analítica para obtener el correspondiente coeficiente de potencial evitando la singularidad. Realizando la integración analítica en este pequeño tramo rectilíneo, con el punto de cálculo situado en su centro y con una coordenada $r \neq 0$, se obtiene el resultado [41]

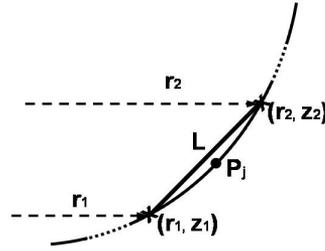


Figura 2.15 Linealización de un pequeño trozo de contorno

$$\Phi_{il} \approx \sigma_j \cdot \frac{L}{2\pi\epsilon} \cdot \left[\ln \frac{16r}{L} + 1 + \frac{L^2}{192r^2} \cdot \left[1 - \left(\ln \frac{16r}{L} + \frac{1}{3} \right) \right] \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{(r_2 - r_1)^2}{L^2} \right) \right] \quad (2.72)$$

siendo r_2 y r_1 las coordenadas r de los extremos del tramo rectilíneo de integración (figura 2.15).

Si la coordenada r del punto de cálculo fuese $r = 0$, el resultado sería [41]:

$$\Phi_{il} \approx \frac{\sigma_j}{2\epsilon} \cdot (r_2 - r_1) \quad (2.73)$$

Por lo que respecta a las componentes del campo eléctrico, éstas se pueden obtener por diferenciación analítica del potencial, resultando [41]:

$$E_{i,r} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \int_{C_Q} \sigma \cdot r_Q \cdot \frac{b^2 \cdot K(k) - c^2 \cdot E(k)}{ab^2} \cdot dC_Q \quad (2.74)$$

$$E_{i,z} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{1}{\pi\epsilon} \cdot \int_{C_Q} \sigma \cdot r_Q \cdot \frac{(z - z_Q) \cdot E(k)}{ab^2} \cdot dC_Q$$

siendo:

$$b^2 = (r - r_Q)^2 + (z - z_Q)^2; \quad c^2 = r_Q^2 - r^2 + (z - z_Q)^2 \quad (2.75)$$

y $E(k)$ la integral elíptica de 2ª especie cuyo módulo k es el establecido en la ecuación (2.62).

De esta forma, utilizando las ecuaciones 2.74 y 2.65, se encuentra la aportación del tramo $P_j P_{j+1}$ a las componentes del campo eléctrico en el punto de cálculo P_i que resulta:

$$\begin{aligned} E_{i(j \rightarrow j+1),r} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_j^{j+1} \left(\sigma_j \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \right) \cdot \frac{b^2 \cdot K(k) - c^2 \cdot E(k)}{a \cdot b^2} \cdot dL_Q \\ E_{i(j \rightarrow j+1),z} &= \frac{1}{\pi\epsilon} \int_j^{j+1} \left(\sigma_j \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \right) \cdot r_Q \cdot \frac{(z - z_Q) \cdot E(k)}{a \cdot b^2} \cdot dL_Q \end{aligned} \quad (2.76)$$

e identificando la aportación de cada densidad de carga a la intensidad de campo en el punto de cálculo, y teniendo en cuenta que todo punto j de un contorno (excepto el primer y último puntos) forma parte de los tramos $P_{j-1} P_j$ y $P_j P_{j+1}$, se obtiene:

$$E_{i,j,r} = \frac{\sigma_j}{2\pi\epsilon r} \left[\int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot r_Q \cdot F_1 \cdot dL_Q + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot r_Q \cdot F_1 \cdot dL_Q \right] \quad (2.77)$$

$$E_{i,j,z} = \frac{\sigma_j}{\pi\epsilon r} \left[\int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot r_Q \cdot F_2 \cdot dL_Q + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot r_Q \cdot F_2 \cdot dL_Q \right] \quad (2.78)$$

siendo:

$$F_1 = \frac{b^2 \cdot K(k) - c^2 \cdot E(k)}{a b^2} \quad (2.79)$$

$$F_2 = \frac{(z - z_Q) \cdot E(k)}{a b^2} \quad (2.80)$$

obteniéndose los coeficientes de campo:

$$f_{i,j,r} = \frac{1}{2\pi\epsilon r} \left[\int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot r_Q \cdot F_1 \cdot dL_Q + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot r_Q \cdot F_1 \cdot dL_Q \right] \quad (2.81)$$

$$f_{i,j,z} = \frac{1}{\pi\epsilon r} \left[\int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot r_Q \cdot F_2 \cdot dL_Q + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot r_Q \cdot F_2 \cdot dL_Q \right] \quad (2.82)$$

expresiones válidas para toda σ_j salvo las correspondientes al primer y último puntos de un contorno que sólo contribuyen con el tramo $P_j P_{j+1}$ y $P_{j-1} P_j$

respectivamente.

En el caso de ser P_i un punto de contorno, los coeficientes de campo correspondientes a las componentes del campo eléctrico normal y tangencial a la superficie de contorno en dicho punto serán por tanto:

$$\begin{aligned} f_{ij,\eta} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{k}) \\ f_{ij,\tau} &= f_{ij,r} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_r) + f_{ij,z} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.83)$$

siendo los vectores $\vec{\eta}_i$ y $\vec{\tau}_i$ los vectores unitarios normal y tangente a la superficie, definidos sobre la generatriz en el punto de contorno $P_i(r,z)$.

En este caso en que el punto de cálculo se encuentra sobre el contorno, aparece una singularidad que se puede resolver como se citó en el caso del cálculo de potenciales, por integración analítica sobre un pequeño tramo rectilíneo que sustituye al contorno real en el entorno del punto de cálculo. Con las mismas condiciones citadas en el caso del potencial, para puntos de cálculo con $r \neq 0$ se obtienen los siguientes resultados [41]:

$$\begin{aligned} E_{Lr} &= \sigma_j \cdot \frac{L}{4\pi\epsilon r} \cdot \left[\ln \frac{16r}{L} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{L^2} + \dots \right] \\ & \left[\dots + \frac{1}{96} \cdot \left[\frac{(z_2 - z_1)^2}{L^2} \cdot \left(1 + \frac{(r_2 - r_1)^2}{L^2} \right) + \frac{2 \cdot (z_2 - z_1)^2 - (r_2 - r_1)^2}{2r^2} - \frac{3L^2}{2r^2} \cdot \left(\ln \frac{16r}{L} + \frac{1}{3} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$E_{Lz} = \sigma_j \cdot \frac{(z_2 - z_1) \cdot (r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon r L} \cdot \left[\frac{L^2}{96r^2} \cdot \left(\ln \frac{16r}{L} + \frac{1}{3} \right) - \frac{5L^2 + 2 \cdot (r_2 - r_1)^2}{192r^2} - 1 \right] \quad (2.85)$$

siendo L la longitud del tramo rectilíneo de integración, (r_2, z_2) y (r_1, z_1) las coordenadas de los extremos de dicho tramo, y (r, z) las coordenadas del punto (figura 2.15).

En un punto con $r = 0$, el resultado es [41]:

$$\begin{aligned} E_{Lr} &= 0 \\ E_{Lz} &= -\sigma_j \cdot \frac{L}{4 \cdot \epsilon \cdot R} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Dado el caso, para establecer las ecuaciones correspondientes a los puntos de

contorno situados en fronteras dieléctricas, es necesario calcular las componentes normal y tangencial al contorno. Así, cuando el punto de cálculo está sobre un contorno, el E_{nj} calculado resulta ser la media de las componentes a ambos lados del contorno, siendo los valores a uno y otro lado, de acuerdo con el teorema de Gauss:

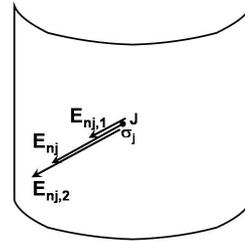


Figura 2.16 Punto singular sobre una frontera dieléctrica

$$E_{nj,1} = E_{nj} - \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0}$$

$$E_{nj,2} = E_{nj} + \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0}$$
(2.87)

siendo σ_j la densidad de carga existente en el punto de cálculo.

2.4.4 Campo sin simetría rotacional

Al igual que antes, la contribución de una superficie cargada al potencial de un punto genérico P es (ecuación 2.58):

$$\Phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iint_s \frac{\sigma \cdot dA}{s}$$

Y en los casos de dispositivos con geometría rotacionalmente simétrica, una diferencial de superficie sobre un contorno se puede expresar como:

$dA_Q = r_Q \cdot d\psi_Q \cdot dC_Q$, con lo que la integral resulta (ecuación 2.59):

$$\Phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iint_s \frac{\sigma \cdot r_Q \cdot d\psi_Q \cdot dC_Q}{s}$$

A menudo los electrodos y dieléctricos que forman parte de una configuración poseen simetría rotacional, pero su disposición en el espacio hace que el campo existente no posea dicha simetría. En este caso la densidad de carga no es constante en dirección acimutal con lo que ya no es posible una resolución analítica de la integral en dicha dirección de la forma en que se planteó en el apartado anterior.

Sin embargo, se puede considerar una distribución de carga con una variación simulada en dicha dirección, de forma análoga a como se hace en el análisis de Fourier, con una componente constante y varios armónicos (co)sinusoidales [41]. La distribución de la densidad de carga en la dirección acimutal queda entonces representada mediante la siguiente función:

$$\sigma = \sum_{k=0}^N \sigma_{Qk} \cdot \cos(k \cdot \psi_Q) \quad (2.88)$$

donde σ_{Q0} representa el valor constante y $\sigma_{Q1}, \sigma_{Q2}, \dots, \sigma_{QN}$, la amplitud de cada uno de los armónicos. Esta simulación se acompaña con la colocación de $N+1$ puntos de contorno en la dirección rotacional ψ_Q .

Con esta distribución de carga se puede realizar una integración analítica en la dirección de rotación, resultando $N+1$ integrales, una por cada uno de los $N+1$ armónicos. Cada una de estas integrales se puede considerar que representa la contribución de cada armónico al potencial del punto genérico de cálculo $P_i(r, \psi, z)$, resultando [41]:

$$\Phi_{ik} = \frac{\cos(k \psi)}{2 \pi \epsilon} \cdot \int_{C_Q} \sigma_{Qk} \cdot \sqrt{\frac{r_q}{r}} \cdot Q_{k-1/2}(\mu) \cdot dC_Q \quad (2.89)$$

siendo:

$$\mu = \frac{d^2}{2 r r_Q} \quad (2.90)$$

$$d^2 = r_Q^2 + r^2 + (z - z_Q)^2 \quad (2.91)$$

y $Q_{k-1/2}(\mu)$ la función de Legendre de segunda especie, orden $k-1/2$ y parámetro μ .

Por lo que respecta a la integración a lo largo del contorno C_Q , que se realiza de forma numérica, se simula la distribución de la carga a lo largo de las generatrices con una evolución continua de las amplitudes σ_{Qk} a lo largo de las mismas con funciones triangulares, de igual manera que se ha realizado anteriormente en el caso de un campo rotacionalmente simétrico. De esta manera, e identificando con σ_{jk} a las amplitudes de las densidades de carga utilizadas para describir la

distribución de carga a lo largo de la línea rotacional correspondiente a cada punto de contorno j , la amplitud correspondiente a cualquier otro punto de la generatriz se puede expresar en función de las amplitudes en los puntos de contorno adyacentes, simulando una evolución lineal entre ellos (figura 2.17):

$$\sigma_{Qk} = \sigma_{jk} \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1,k} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \quad (2.92)$$

Esta relación lineal proporciona una aproximación suficiente en la mayoría de los casos [41].

Evidentemente, los valores σ_{jk} no representan la densidad de carga en el punto de contorno P_j , sino la amplitud del armónico k de la función densidad de carga simulada con serie de Fourier a lo largo de la línea rotacional que incluye el punto de contorno P_j , y lo mismo se puede decir de los σ_{Qk} correspondientes a cualquier punto de la generatriz.

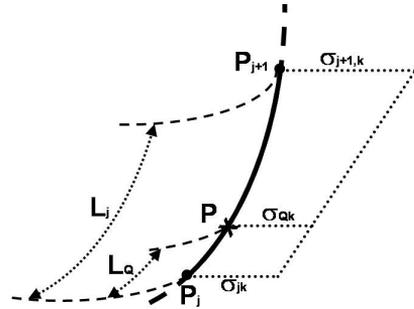


Figura 2.17 Variación lineal de la carga a lo largo del contorno

De esta forma, según las ecuaciones 2.89 y 2.92, la contribución de cada armónico k a lo largo del tramo $P_j P_{j+1}$ al potencial del punto $P_i(r, \psi, z)$ se expresa:

$$\Phi_{i, \{j \rightarrow j+1\}k} = \frac{\cos(k \psi)}{2 \pi \epsilon} \int_j^{j+1} \left(\sigma_{jk} \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1,k} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \right) \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot Q_{k-1/2}(\mu) \cdot dL_Q \quad (2.93)$$

Se pueden distinguir en la expresión anterior un término dependiente de σ_{jk} y otro dependiente de $\sigma_{j+1,k}$, que son los siguientes

$$\Phi_{i, jk} = \sigma_{jk} \cdot \frac{\cos(k \psi)}{2 \pi \epsilon} \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot Q_{k-1/2}(\mu) \cdot dL_Q \quad (2.94)$$

$$\Phi_{i, j+1,k} = \sigma_{j+1,k} \cdot \frac{\cos(k \psi)}{2 \pi \epsilon} \int_j^{j+1} \frac{L_Q}{L_j} \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot Q_{k-1/2}(\mu) \cdot dL_Q \quad (2.95)$$

Sin embargo, si se trata de determinar la aportación de σ_{jk} al potencial de P_i , hay que tener en cuenta que sólo las amplitudes correspondientes al primer y al último puntos del contorno C_Q aparecen en un sólo tramo, pues el resto de los valores σ_{jk} aparecen en la integración de dos tramos, en el $P_{j-1}P_j$ y en el P_jP_{j+1} . De acuerdo con esto, el coeficiente de potencial correspondiente a la contribución de σ_{jk} al potencial de un punto $P_i(r, \psi, z)$ resulta [41]:

$$P_{i,jk} = \frac{\cos(k\psi)}{2\pi\epsilon} \int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot F_k \cdot dL_Q + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot F_k \cdot dL_Q \quad (2.96)$$

siendo:

$$F_k = \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot Q_{k-1/2}(\mu) \quad (2.97)$$

Ahora la integración numérica se realiza a lo largo de la generatriz con cualquiera de los métodos existentes, y evitando la singularidad que se produce cuando el punto de cálculo se encuentra sobre el contorno, lo que, por ejemplo, se puede hacer de la misma forma que en el caso de los campos con simetría rotacional..

Por lo que respecta a las componentes de la intensidad de campo, obtenidas por diferenciación analítica del potencial, se obtiene [41]:

$$E_{i,jk,r} = -\frac{\partial \Phi_{i,jk}}{\partial r} = \frac{\cos(k\psi)}{\pi\epsilon} \int_{C_Q} \sigma_{Qk} \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot \left[\frac{1}{4r} \cdot F_{k1} + \dots \right] \left[\dots + \frac{k+1/2}{a^2 b^2} \cdot r_Q \cdot (d^2 - 2r^2) \cdot F_{k2} \right] dC_Q \quad (2.98)$$

$$E_{i,jk,\psi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_{i,jk}}{\partial \psi} = \frac{k \cdot \text{sen}(k\psi)}{2\pi\epsilon} \int_{C_Q} \sigma_{Qk} \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r^3}} \cdot F_{k1} \cdot dC_Q \quad (2.99)$$

$$E_{i,jk,z} = -\frac{\partial \Phi_{i,jk}}{\partial z} = \frac{\cos(k\psi)}{2\pi\epsilon} \cdot (k-1/2) \cdot \int_{C_Q} \sigma_{Qk} \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot \dots \dots \frac{4r r_Q (z_Q - z)}{a^2 b^2} \cdot F_{k2} \cdot dC_Q \quad (2.100)$$

teniendo \mathbf{a} y \mathbf{b} los valores indicados en la ecuación 2.75, \mathbf{d} el valor de la expresión 2.91, y siendo:

$$F_{kl} = Q_{k-1/2}(\mu) \quad (2.101)$$

$$F_{k2} = Q_{k+1/2}(\mu) - \mu \cdot Q_{k-1/2}(\mu) \quad (2.102)$$

Para la integración a lo largo del contorno C_Q , se simula la evolución de los valores de pico σ_{Qk} a lo largo del mismo con funciones triangulares igual que en el caso de los potenciales. Así, se expresa σ_{Qk} en función de σ_{jk} y $\sigma_{j+1,k}$ de forma que la integración a lo largo de cada tramo $P_j P_{j+1}$ (figura 2.17) queda de la siguiente forma [41]:

$$E_{i,(j \rightarrow j+1),k,r} = \frac{\cos(k\psi)}{\pi \epsilon} \int_j^{j+1} \left(\sigma_{jk} \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1,k} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \right) \cdot \dots \quad (2.103)$$

$$\dots \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot \left[\frac{1}{4r} \cdot F_{kl} + \frac{k+1/2}{a^2 b^2} \cdot r_Q \cdot (d^2 - 2r^2) \cdot F_{k2} \right] dL_Q$$

$$E_{i,(j \rightarrow j+1),k,\psi} = \frac{k \cdot \text{sen}(k\psi)}{2\pi \epsilon} \int_j^{j+1} \left(\sigma_{jk} \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1,k} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \right) \cdot \dots \quad (2.104)$$

$$\dots \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r^3}} \cdot F_{kl} \cdot dL_Q$$

$$E_{i,(j \rightarrow j+1),k,z} = \frac{\cos(k\psi)}{2\pi \epsilon} \cdot (k-1/2) \cdot \dots \quad (2.105)$$

$$\dots \cdot \int_j^{j+1} \left(\sigma_{jk} \cdot \frac{L_j - L_Q}{L_j} + \sigma_{j+1,k} \cdot \frac{L_Q}{L_j} \right) \cdot \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot \frac{4r r_Q (z_Q - z)}{a^2 b^2} \cdot F_{k2} \cdot dL_Q$$

y teniendo en cuenta que cada amplitud σ_{jk} aparece en la integración de dos tramos, en el $P_j P_{j+1}$ y en el anterior, $P_{j-1} P_j$, la contribución de este valor al potencial del punto de cálculo P_i resulta:

$$E_{i,jk,r} = \sigma_{jk} \cdot \frac{\cos(k\psi)}{\pi \epsilon} \cdot \left[\int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot F_{k3} \cdot dL_{Q3} + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot F_{k3} \cdot dL_Q \right] \quad (2.106)$$

$$E_{i,jk,\psi} = \sigma_{jk} \cdot \frac{\text{sen}(k\psi)}{2\pi\epsilon} \cdot k \cdot \left[\int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot F_{k4} \cdot dL_{Q3} + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot F_{k4} \cdot dL_Q \right] \quad (2.107)$$

$$E_{i,jk,z} = \sigma_{jk} \cdot \frac{\cos(k\psi)}{2\pi\epsilon} \cdot (k-1/2) \cdot \left[\int_{j-1}^j \frac{L_Q}{L_{j-1}} \cdot F_{k5} \cdot dL_{Q3} + \int_j^{j+1} \frac{L_j - L_Q}{L_j} \cdot F_{k5} \cdot dL_Q \right] \quad (2.108)$$

siendo:

$$F_{k3} = \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot \left[\frac{1}{4r} \cdot F_{k1} + \frac{k+1/2}{a^2 b^2} \cdot r_Q \cdot (d^2 - 2r^2) \cdot F_{k2} \right] dL_Q$$

$$F_{k4} = \sqrt{\frac{r_Q}{r^3}} \cdot F_{k1} \quad (2.109)$$

$$F_{k5} = \sqrt{\frac{r_Q}{r}} \cdot \frac{4rr_Q(z_Q - z)}{a^2 b^2} \cdot F_{k2}$$

Y en el caso de ser $P_i(r, \psi, z)$ un punto de contorno, las componentes normal y tangencial en la dirección de la generatriz del campo eléctrico en dicho punto serán:

$$E_{ij,\eta} = E_{ij,r} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{u}_{r_i}) + E_{ij,z} \cdot (\vec{\eta}_i \cdot \vec{k})$$

$$E_{ij,\tau} = E_{ij,r} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{u}_{r_i}) + E_{ij,z} \cdot (\vec{\tau}_i \cdot \vec{k}) \quad (2.110)$$

siendo los vectores $\vec{\eta}$ y $\vec{\tau}$ los vectores unitarios normal y tangente sobre la generatriz a la superficie de contorno en el punto $P_i(r, \psi, z)$. En este caso en que el punto de cálculo se encuentra sobre el contorno, la singularidad que aparece se puede resolver como anteriormente, por integración analítica sobre un pequeño tramo rectilíneo que sustituye al contorno real en el entorno del punto de cálculo (figura 2.15). Con las mismas condiciones citadas en el caso del potencial, para puntos de cálculo con $r \neq 0$ se obtienen los siguientes resultados [41]:

$$E_{Lrk} = \sigma_{jk} \cdot \frac{L \cdot \cos(k\psi)}{4\pi\epsilon r} \cdot \left[\ln \frac{16r}{L} - \frac{(r_2 - r_1)^2}{L^2} - 2 \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2s+1} \right) + \dots \right]$$

$$\left[\dots + \frac{1}{48} \left[\frac{2L^2 + (r_2 - r_1)^2}{r^2} \cdot k^2 - \frac{(r_2 - r_1)^2}{4r^2} + \frac{(z_2 - z_1)^2}{2r^2} \cdot \left(2 + \frac{(r_2 - r_1)^2}{L^2} \right) \right] + \dots \right] \quad (2.111)$$

$$\left[\dots - \frac{1}{48} \left[\left(\frac{1}{4} - k^2 \right) \cdot \frac{L^2 + 2(z_2 - z_1)^2}{r^2} + \frac{(r_2 - r_1)^2}{2r^2} \cdot \left[\ln \frac{16r}{L} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2s+1} \right) \right] \right] \right]$$

$$E_{L\psi k} = \sigma_{jk} \cdot \frac{Lk \operatorname{sen}(k\psi)}{2\pi\epsilon r} \cdot \left[\ln \frac{16r}{L} + 1 + \frac{L^2}{48r^2} \left(k^2 + \frac{1}{4} \right) - 2 \cdot \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2s+1} \right) + \dots \right] \\ \left[\dots + \frac{1}{48} \cdot \left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{2r^2} + \frac{L^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{4} - k^2 \right) \right] \cdot \left[2 \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2s+1} \right) - \ln \frac{16r}{L} - \frac{1}{3} \right] \right] \quad (2.112)$$

$$E_{Lzk} = \sigma_{jk} \cdot \frac{(z_2 - z_1) \cdot (r_2 - r_1) \cdot \cos(k\psi)}{4\pi\epsilon r L} \cdot \left[\left(\frac{1}{4} - k^2 \right) \cdot \frac{L^2}{24r^2} \cdot \dots \right] \\ \dots \left[\ln \frac{16r}{L} - \frac{1}{6} - 2 \sum_{s=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2s+1} \right) - 1 - \frac{2L^2 + (r_2 - r_1)^2}{96r^2} \right] \quad (2.113)$$

siendo L la longitud del tramo rectilíneo de integración, (r_2, z_2) y (r_1, z_1) las coordenadas de los extremos de dicho tramo, y (r, z) las coordenadas del punto.

En puntos de cálculo con $r = 0$, el resultado sería [41]:

$$E_{Lrk} = E_{L\psi k} = E_{Lzk} = 0 \quad (2.114)$$

En el caso de establecer las ecuaciones correspondientes a los puntos de contorno situados en fronteras dieléctricas, es necesario calcular las componentes normal y tangencial al contorno. Así, cuando el punto de cálculo está sobre un contorno, el E_{nj} calculado resulta ser la media de las componentes a ambos lados del contorno, viniendo determinados los valores a uno y otro lado por la ecuación 2.87 [41]:

$$E_{\eta j,1} = E_{\eta j} - \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0}$$

$$E_{\eta j,2} = E_{\eta j} + \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0}$$

siendo σ_j la densidad de carga existente en el punto de cálculo (figura 2.16).

2.5 Método de los elementos de contorno(BEM)

2.5.1 Introducción

En este método la geometría de la configuración y sus características eléctricas se

describen con los llamados elementos de contorno, que son pequeñas superficies, planas o curvas, con formas triangulares o rectangulares, sobre las que se establece una determinada distribución de densidad de carga superficial. Estos elementos de contorno se pueden utilizar directamente para describir las superficies conductoras y las fronteras dieléctricas que componen la configuración, o se pueden definir por subdivisión de superficies mayores (esféricas, cilíndricas, cónicas, toroidales, paraboloides, hiperboloides, o plano circulares) con las que a menudo también se puede describir, en todo o en parte, la configuración.

A continuación se describirá el modelo matemático utilizado por el método para establecer la distribución de campo eléctrico, para posteriormente describir la utilización de los elementos de contorno en la resolución numérica de las ecuaciones integrales resultantes.

2.5.2 El modelo matemático

2.5.2.1 Ecuaciones integrales en las superficies conductoras

En el caso de un punto I situado sobre una superficie conductora S_c , el potencial en dicho punto viene determinado por:

$$\Phi_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{e=1}^E \iint \frac{\sigma(G) \cdot dS_e}{r_{GI}} \rightarrow \text{para } I \in S_c \quad (2.115)$$

siendo E el número total de elementos de contorno de la configuración, y G un punto incluido en un diferencial de superficie dS_e definido sobre el elemento de contorno e .

El problema a resolver es encontrar la carga superficial σ que satisface esta ecuación integral de Fredholm de primera especie.

En el caso de no ser conocido el potencial sobre alguna superficie conductora, como suele ser el caso de los electrodos a potencial flotante, la ecuación anterior deberá ser complementada con la ecuación que determina la conservación de la carga sobre dicha superficie, de valor nulo generalmente:

$$Q_C = \sum_{c=1}^N \iint_{S_c} \epsilon_0 \cdot \epsilon_{rc} \cdot E_n \cdot dS_c \quad (2.116)$$

supuesto el electrodo dividido en N partes S_c , diferenciadas por tener frontera con medios dieléctricos diferentes, cada uno con una permitividad relativa ϵ_{rc} .

2.5.2.2 Ecuaciones integrales sobre las fronteras dieléctricas

Por lo que se refiere a los puntos situados sobre fronteras dieléctricas, la ley de Gauss determina que, a ambos lados de una frontera dieléctrica, las componentes normales del campo están relacionadas de acuerdo con las permitividades dieléctricas respectivas. Así, siendo el punto J un punto sobre una de estas fronteras, en las que no existe carga libre como suele ser el caso normal, se cumple:

$$\epsilon_1 \cdot E_{nJ1} - \epsilon_2 \cdot E_{nJ2} = 0 \quad (2.117)$$

Para la determinación de la componente normal de la intensidad de campo a cada lado del punto J de la frontera dieléctrica, se distingue entre la contribución de todos los puntos de la configuración excepto el punto J , y la contribución del propio punto J .

Así, los demás puntos de la configuración determinan en ese punto J una intensidad de campo que es exactamente la misma a ambos lados de la frontera, viniendo determinada la diferencia en el campo a ambos lados precisamente por la contribución de la carga de polarización contenida en el mismo punto J .

De esta manera, excluyendo de la integración al punto J , el campo creado en J por el resto de la configuración es:

$$E_{nJ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{c=1}^C \iint \frac{\sigma(M) \cdot \cos(r_{MJ}^{\vec{r}}, \vec{\eta}_J)}{r_{MJ}^2} \cdot dS_c + \dots \quad (2.118)$$

$$\dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{d=1}^D \iint \frac{\sigma(N) \cdot \cos(r_{NJ}^{\vec{r}}, \vec{\eta}_J)}{r_{NJ}^2} \cdot dS_d$$

siendo C el número de elementos de contorno sobre superficies conductoras, M un punto contenido en un diferencial de superficie dS_c sobre uno de estos elementos,

D el número de elementos de contorno sobre fronteras dieléctricas y N un punto contenido en un diferencial de superficie dS_d sobre uno de estos otros elementos de contorno. Dado que no se debe incluir en la integración al propio punto J , para $d = d_J$ (elemento de contorno que contiene al punto J) no se incluye en la integración una pequeña superficie circular alrededor del punto, que se aproxima plana en caso de no serlo, y con densidad superficial constante e igual a la del punto J . La contribución de esta pequeña superficie al campo a ambos lados de la misma, será una contribución en dirección normal, con sentidos opuestos en cada lado (figura 2.18) y, de acuerdo con el teorema de Gauss, con un valor absoluto que vendrá dado por la expresión

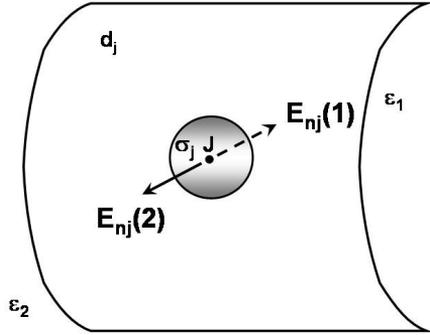


Figura 2.18 contribución al campo de una pequeña superficie alrededor de un punto de contorno

$$|\vec{E}_{nJ}^J(1)| = |\vec{E}_{nJ}^J(2)| = \frac{\sigma_J}{2\epsilon_0} \tag{2.119}$$

siendo σ_J la carga existente en ese punto.

De esta manera, la intensidad del campo a ambos lados de la frontera dieléctrica queda determinada por ambas contribuciones de la siguiente manera:

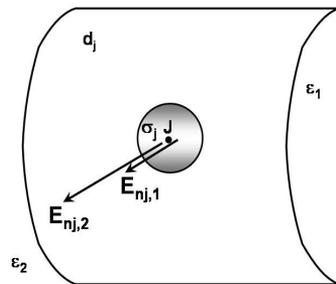


Figura 2.19 Campo a ambos lados de un punto de contorno de una frontera dieléctrica

$$E_{nJ,1} = E_{nJ} + E_{nJ}^J(1) = E_{nJ} - \frac{\sigma_J}{2\epsilon_0} \tag{2.120}$$

$$E_{nJ,2} = E_{nJ} + E_{nJ}^J(2) = E_{nJ} + \frac{\sigma_J}{2\epsilon_0}$$

Y como la condición de frontera dieléctrica es (ecuación 2.117):

$$\epsilon_2 \cdot E_{nJ2} - \epsilon_1 \cdot E_{nJ1} = 0 \tag{2.121}$$

substituyendo los valores de 2.120 en 2.121:

$$\epsilon_2 \cdot \left(E_{nJ} + \frac{\sigma_J}{2 \epsilon_0} \right) - \epsilon_1 \cdot \left(E_{nJ} - \frac{\sigma_J}{2 \epsilon_0} \right) = 0$$

Operando:
$$2 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot E_{nJ} + \sigma_J = 0$$

Y substituyendo E_{nJ} por su valor dado por la ecuación 2.118, se obtiene:

$$2 \epsilon_0 \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \left(\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \sum_{c=1}^C \iint_{S_c} \frac{\sigma(M) \cdot \cos(r_{MJ}^{\vec{}} , \vec{\eta}_J) \cdot dS_c}{r_{MJ}^2} + \dots \right) \quad (2.122)$$

$$\left(\dots + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \sum_{d=1}^D \iint_{S_d} \frac{\sigma(N) \cdot \cos(r_{NJ}^{\vec{}} , \vec{\eta}_J) \cdot dS_d}{r_{NJ}^2} \right) + \sigma_J = 0$$

La expresión 2.122 se puede simplificar agrupando en el mismo sumando la contribución de las cargas de los conductores y la contribución de las cargas de los dieléctricos, por lo que la ecuación anterior se puede expresar :

$$\frac{1}{2 \pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{e=1}^E \iint_{S_e} \frac{\sigma(G) \cdot \cos(r_{GJ}^{\vec{}} , \vec{\eta}_J) \cdot dS_e}{r_{GJ}^2} + \sigma_J = 0 \quad (2.123)$$

siendo E el número de elementos de contorno a considerar, ya sea sobre superficies conductoras o fronteras dieléctricas, y G cualquier punto encerrado en un diferencial de superficie sobre ellas. Se trata por tanto de resolver esta ecuación integral de Fredholm de 2ª especie.

2.5.3 Procedimiento de discretización

La resolución numérica de las ecuaciones integrales 2.115 y 2.123 pasa por establecer una función apropiada para la densidad de carga $\sigma(\mathbf{G})$. El método de los elementos de contorno resulta de gran eficacia para esta finalidad.

En el método de los elementos de contorno las superficies electródicas y dieléctricas reales son aproximadas con un cierto número de subáreas, normalmente curvilíneas, de forma triangular y rectangular, llamadas elementos de contorno. Estos elementos de contorno pueden utilizarse directamente para definir las superficies electródicas y fronteras dieléctricas. Sin embargo, esta forma de

proceder que suele resultar bastante trabajosa, y muchas veces se puede simplificar dado que, a menudo, las superficies reales son superficies de segundo orden que se pueden describir total o parcialmente con superficies cilíndricas, esféricas, cónicas, toroidales, con paraboloides o hiperboloides, apareciendo también superficies circulares planas. Esto resulta muy conveniente, pues permite describir la configuración con un pequeño número de superficies, simplificándose así también considerablemente su discretización en elementos de contorno (también llamados, en este caso, elementos parciales) pues se puede hacer subdividiéndolas de forma regular en pequeñas superficies triangulares o rectangulares.

Una vez discretizada la geometría de la configuración de la forma descrita, resulta útil utilizar funciones base para aproximar la distribución de la densidad de carga sobre cada elemento de contorno [5].

Las funciones base permiten, en general, definir el valor que toma una cierta función en un punto G genérico de un elemento de contorno, en función de los valores que toma en un cierto número m de puntos concretos del mismo, utilizando una combinación lineal de dichos valores:

$$f(G) = \sum_{i=1}^m K_i^{(e)} f_i \quad (2.124)$$

Las funciones base $K_i^{(e)}$ normalmente representan funciones de las coordenadas del punto G genérico del elemento de contorno, es recomendable establecerlas en un sistema de coordenadas local al mismo elemento, también llamado sistema natural de coordenadas L . Las funciones base suelen presentar formas polinómicas de un orden (e) diferente según los casos, aunque suele ser suficiente la utilización de polinomios de primer o segundo orden.

En el caso de la densidad de carga en un punto genérico de un elemento de contorno, la utilización de funciones base de primer orden $K_i^{(1)}$ suele resultar suficiente para determinarla en función de las densidades de carga que se establecen en los m vértices del elemento:

$$\sigma(G) = \sum_{i=1}^m K_i^{(1)} \sigma_i \quad (2.125)$$

mientras que la propia determinación geométrica del elemento de contorno puede

precisar una aproximación de segundo orden con funciones base del tipo $K_i^{(2)}$ [5]:

$$\vec{r}(G) = \sum_{i=1}^m K_i^{(2)} \vec{r}_i \quad (2.126)$$

Procediendo de esta manera y de acuerdo con la ecuación 2.125, una vez conocidos los valores de la densidad de carga en los m vértices del elemento de contorno, se puede establecer la distribución de la densidad de carga sobre su superficie como una función de la posición, lo que permite resolver numéricamente las ecuaciones integrales proporcionadas por el modelo matemático de forma conveniente.

Es decir, para un elemento de contorno de forma triangular, la función densidad de carga en un punto genérico perteneciente a dicho elemento se puede representar en función de las densidades de carga σ_1 , σ_2 y σ_3 existentes en los vértices del elemento y de la propia posición del punto. De esta forma, el conocimiento de la densidad de carga en cualquier punto de la configuración se consigue con el único conocimiento de las densidades de carga existentes en los vértices de cada uno de los elementos de contorno, con lo que el problema del método será determinar únicamente los valores de estas densidades de carga.

De este modo, en el sistema de ecuaciones algebraicas $[A][\sigma] = [\Phi]$, el vector de incógnitas $[\sigma]$ contiene únicamente las densidades de carga sobre los vértices de los elementos de contorno, debiendo el procedimiento establecer la matriz $[A]$ de coeficientes y el vector $[\Phi]$ de términos independientes, para luego proceder a resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultante.

2.5.4 Procedimientos numéricos

2.5.4.1 Elementos curvilíneos triangulares

1. Transformación-L de un elemento en el sistema natural de coordenadas

Dado cualquier elemento de contorno, el primer paso para establecer una función conveniente para la distribución de carga en su superficie, consiste en establecer

un sistema de coordenadas local al propio elemento y realizar la llamada transformación-L del elemento a dicho sistema de coordenadas.

En la figura 2.20 se presenta la transformación-L de un elemento de contorno de forma triangular curvilínea (figura izquierda) en el llamado triángulo maestro (figura derecha).

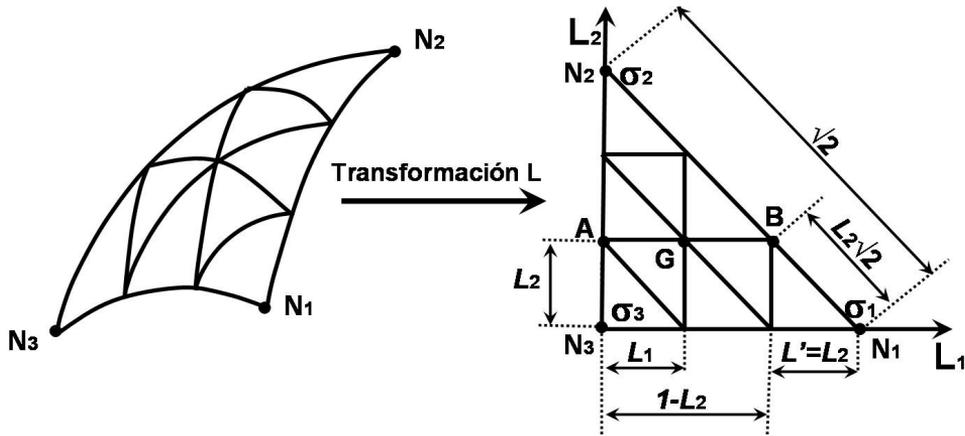


Figura 2.20 Transformación L

Al determinar la densidad de carga en un punto $G(L_1, L_2)$ genérico del elemento utilizando una aproximación lineal, suficientemente válida siempre que el elemento de contorno sea lo suficientemente pequeño [5], se puede establecer que (ver figura 2.20):

$$\sigma(G) = \frac{\sigma_A(1-L_1-L_2) + \sigma_B L_1}{1-L_2} \tag{2.127}$$

siendo σ_A y σ_B , de acuerdo con la misma figura 2.20:

$$\sigma_A = \sigma_3(1-L_2) + \sigma_2 L_2 \tag{2.128}$$

$$\sigma_B = \frac{\sigma_1(\sqrt{2}-L_2\sqrt{2}) + \sigma_2 L_2 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sigma_1(1-L_2) + \sigma_2 L_2 \tag{2.129}$$

operando con las expresiones 2.128 y 2.129 en la ecuación 2.127, se obtiene:

$$\sigma(G) = \sigma_1 \cdot L_1 + \sigma_2 \cdot L_2 + \sigma_3 \cdot (1-L_1-L_2) \tag{2.130}$$

y definiendo un L_3 tal que:

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2 \tag{2.131}$$

la expresión 2.130 resulta:

$$\sigma(G) = \sigma_1 \cdot L_1 + \sigma_2 \cdot L_2 + \sigma_3 \cdot L_3 \tag{2.132}$$

que es totalmente general para cualquier punto del elemento de contorno.

Para establecer otras funciones genéricas en el elemento de contorno pueden ser necesarias aproximaciones de orden superior. Así, para establecer las coordenadas globales de cualquier punto genérico de un elemento curvilíneo que permita definirlo geoméricamente, a menudo son necesarias aproximaciones de segundo orden.

Por ejemplo, en el caso de la transformación-L definida en la figura 2.20, y supuesta una superficie de segundo orden, las coordenadas globales (x, y, z) del punto genérico $G(L_1, L_2)$, se pueden determinar a partir de las coordenadas globales (x_i, y_i, z_i) de los vértices del elemento (N_1, N_2, N_3 , también llamados nodos principales) y de otros tres nodos auxiliares (N_4, N_5, N_6 en la figura 2.21) situados en el medio de los lados, utilizando funciones base de segundo orden $K_i^{(2)}$ [5]:

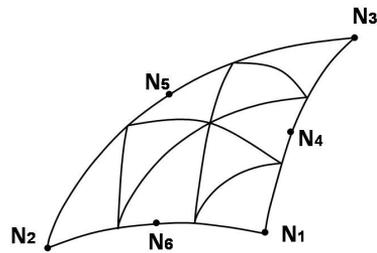


Figura 2.21 Determinación de un elemento triangular curvilíneo

$$x(G) = \sum_{i=1}^6 K_i^{(2)} x_i \quad ; \quad y(G) = \sum_{i=1}^6 K_i^{(2)} y_i \quad ; \quad z(G) = \sum_{i=1}^6 K_i^{(2)} z_i \tag{2.133}$$

siendo:

$$K_1^{(2)} = L_1(2L_1 - 1) \quad ; \quad K_2^{(2)} = L_2(2L_2 - 1) \quad ; \quad K_3^{(2)} = L_3(2L_3 - 1)$$

$$K_4^{(2)} = 4L_1L_2 \quad ; \quad K_5^{(2)} = 4L_2L_3 \quad ; \quad K_6^{(2)} = 4L_1L_3 \tag{2.134}$$

2. Contribución del elemento de contorno al potencial del punto I

La contribución del elemento de contorno triangular considerado hasta aquí, al

potencial de un punto I cualquiera viene determinada por la ecuación 2.115:

$$\Phi_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\sigma(G) \cdot dS}{r_I} \quad (2.135)$$

siendo:

- $\sigma(G) = \sigma_{e1} \cdot L_1 + \sigma_{e2} \cdot L_2 + \sigma_{e3} \cdot L_3$, de acuerdo con la ecuación 2.132, y representando los índices $e1$, $e2$, $e3$ a los nodos del elemento de contorno considerado.

- $dS = dL_1 \cdot dL_2 \cdot |n(L_1, L_2)|$, siendo $|n(L_1, L_2)|$ el Jacobiano de la transformación del sistema de coordenadas natural al sistema de coordenadas externo.

- $r_I = r_{GI}$, siendo G el punto contenido en cada diferencial de superficie.

De esta forma, la integral 2.135 resulta:

$$\Phi_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\sigma_{e1} \cdot L_1 + \sigma_{e2} \cdot L_2 + \sigma_{e3} \cdot L_3}{r_{GI}} \cdot |n(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.136)$$

En esta ecuación 2.136 se puede observar que el elemento de contorno contribuye con tres términos a los elementos de la matriz $[A]$ de coeficientes, pudiendo la integral anterior expresarse así:

$$\Phi_{el} = a_{Ie1} \cdot \sigma_{e1} + a_{Ie2} \cdot \sigma_{e2} + a_{Ie3} \cdot \sigma_{e3} \quad (2.137)$$

siendo los coeficientes a_{Ie1} , a_{Ie2} y a_{Ie3} la contribución de este elemento de contorno a la matriz de coeficientes $[A]$ del sistema de ecuaciones. De acuerdo con la ecuación 2.136, la determinación de estos coeficientes exige la resolución de las siguientes integrales:

$$a_{Ie1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{L_1}{r_{GI}} \cdot |n(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.138)$$

$$a_{Ie2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{L_2}{r_{GI}} \cdot |n(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.139)$$

$$a_{I, e3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{1-L_1-L_2}{r_{GI}} \cdot |n(L_1, L_2)| \cdot dL_1 \cdot dL_2 \quad (2.140)$$

Para resolver numéricamente las integrales anteriores 2.138, 2.139 y 2.140, se puede emplear el método de Gauss Radau [5]. Así, si se divide cada lado del triángulo maestro en N partes lo suficientemente pequeñas (figura 2.22), se obtienen N^2 subelementos triangulares, siendo las longitudes de sus lados horizontal y vertical :

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = 1/N$$

Con este procedimiento aparecen $0,5 \cdot (N+1) \cdot (N+2)$ puntos en el elemento, incluidos los nodos principales.

En el sistema natural de coordenadas (figura 2.22), las coordenadas locales (L_1, L_2) de cada punto quedan determinadas del siguiente modo:

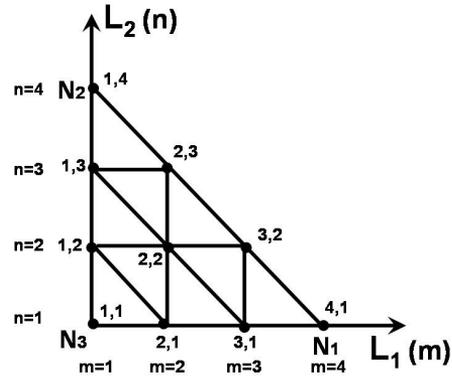


Figura 2.22 Sistema natural de coordenadas

$$(L_1(m), L_2(n)) = \left(\frac{m-1}{N}, \frac{n-1}{N} \right)$$

para $1 \leq m, n \leq N+1$

De esta forma, integrando a través de los subelementos, las expresiones 2.138, 2.139 y 2.140 se transforman en [5]:

$$a_{I, e1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{L_1(m)}{N^2 \cdot r_{GI}(G(L_1, L_2), I)} \cdot |n(L_1(m), L_2(n))| \quad (2.141)$$

$$a_{I, e2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{L_2(n)}{N^2 \cdot r_{GI}(G(L_1, L_2), I)} \cdot |n(L_1(m), L_2(n))| \quad (2.142)$$

$$a_{I, e3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{1-L_1(m)-L_2(n)}{N^2 \cdot r_{GI}(G(L_1, L_2), I)} \cdot |n(L_1(m), L_2(n))| \quad (2.143)$$

con los siguientes valores para los factores de ponderación g_{mn} :

$$g_{mn} = 1/6 \quad \text{para los puntos de los vértices del elemento triangular.}$$

$$g_{mn} = 1/2 \quad \text{para los puntos de los lados del elemento triangular.}$$

$$g_{mn} = 1 \quad \text{para los puntos del interior del elemento triangular.}$$

que vienen determinados por el número de veces que aparece cada punto como vértice en uno de los subelementos triangulares resultantes de la discretización: cada punto interior aparece en seis subelementos, cada punto de los lados aparece en tres subelementos, y cada nodo aparece en un subelemento (figura 2.22).

En el caso de los elementos de contorno que se definen por subdivisión regular de superficies mayores (elementos parciales), pueden ser de forma triangular (figura 2.23) o rectangular (figura 2.25), pero en ambos casos la distribución de la densidad de carga en cualquiera de los elementos se aproxima utilizando funciones base lineales, tal como se ha visto.

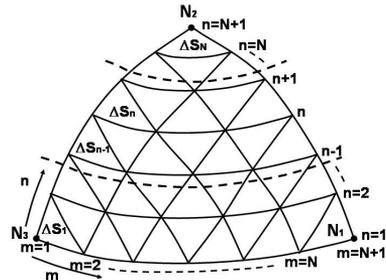


Figura 2.23 Subdivisión en elementos triangulares

Cuando se trata de elementos triangulares, las ecuaciones 2.141, 2.142 y 2.143 adoptan la forma [5]:

$$a_{1e1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{m-1}{N \cdot r_{GI}(G(m, n), I)} \quad (2.144)$$

$$a_{1e2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{n-1}{N \cdot r_{GI}(G(m, n), I)} \quad (2.145)$$

$$a_{1e3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{N+2-m-n}{N \cdot r_{GI}(G(m, n), I)} \quad (2.146)$$

con los siguientes valores para los factores de ponderación:

$$g_{mn} = (1/3)\Delta S_1 \quad \text{para los nodos principales con } n = 1$$

$$\mathbf{g}_{mn} = (1/3)\Delta\mathbf{S}_N \quad \text{para el nodo principal con } n = N+1$$

$$\mathbf{g}_{mn} = \Delta\mathbf{S}_I \quad \text{para los puntos en los lados del elemento triangular con } n = I$$

$$\mathbf{g}_{mn} = (1/3)\Delta\mathbf{S}_n + (2/3)\Delta\mathbf{S}_{n-1} \quad \text{para los puntos en los lados del elemento triangular con } m = I \text{ ó } m = N+1$$

$$\mathbf{g}_{mn} = \Delta\mathbf{S}_n + \Delta\mathbf{S}_{n-1} \quad \text{para los puntos del interior del elemento triangular.}$$

3. Puntos singulares en las superficies conductoras

Las expresiones anteriores presentan una singularidad cuando el punto I coincide con uno de los nodos principales del elemento, dado que en este caso: $r_{GI} = 0$.

Así, por ejemplo, en el caso de que sea el nodo N_3 el que determina la singularidad en el elemento de contorno estudiado, su contribución a las ecuaciones anteriores debe ser excluida, para lo que se deja de considerar la contribución del subelemento en el que se encuentra. Como resultado de esta exclusión de las ecuaciones 2.143, 2.144 y 2.145, se obtienen unos coeficientes que se denominarán $\mathbf{a}'_{1,e1}$, $\mathbf{a}'_{1,e2}$ y $\mathbf{a}'_{1,e3}$. Además, en este cálculo, las contribuciones de los otros dos puntos adyacentes al nodo N_3 , tendrán modificados los valores de sus factores de ponderación \mathbf{g}_{mn} a $1/3$, debido al hecho de que al eliminar del cálculo anterior la contribución del subelemento triangular que tiene como vértices a N_3 y estos otros dos puntos, estos dos puntos aparecerán sólo en dos subelementos en vez de aparecer en tres ($1/3$ de seis).

Ahora, para determinar los coeficientes reales $\mathbf{a}_{1,e1}$, $\mathbf{a}_{1,e2}$ y $\mathbf{a}_{1,e3}$, se debe sumar, a los valores anteriores $\mathbf{a}'_{1,e1}$, $\mathbf{a}'_{1,e2}$ y $\mathbf{a}'_{1,e3}$, la contribución del subelemento triangular no considerado. Denominando a los valores resultantes de esta contribución $\Delta\mathbf{a}_{1,e1}$, $\Delta\mathbf{a}_{1,e2}$ y $\Delta\mathbf{a}_{1,e3}$, los coeficientes buscados resultan [5]:

$$\begin{aligned}
 a_{I,e1} &= a'_{I,e1} + \Delta a_{I,e1} \\
 a_{I,e2} &= a'_{I,e2} + \Delta a_{I,e2} \\
 a_{I,e3} &= a'_{I,e3} + \Delta a_{I,e3}
 \end{aligned}
 \tag{2.147}$$

Para calcular la contribución del subelemento no considerado, resulta una aproximación suficiente el considerarlo un triángulo recto (figura 2.24), pudiendo así calcularse analíticamente su contribución al potencial, obteniéndose los siguientes valores [5]:

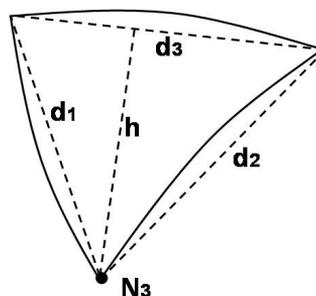


Figura 2.24 Aproximación del elemento de contorno con un punto singular

$$\begin{aligned}
 \Delta a_{I,e1} &= \frac{1}{16\pi\epsilon_0 d_3^4 N^4} \cdot \left[h \cdot (d_1^2 + d_3^2 - d_2^2) \cdot \ln \frac{d_1 + d_2 + d_3}{d_1 + d_2 - d_3} - 2d_3^2 \cdot (d_1 - d_2) \right] \\
 \Delta a_{I,e2} &= \frac{1}{16\pi\epsilon_0 d_3^4 N^4} \cdot \left[h \cdot (d_2^2 + d_3^2 - d_1^2) \cdot \ln \frac{d_1 + d_2 + d_3}{d_1 + d_2 - d_3} - 2d_3^2 \cdot (d_2 - d_1) \right] \\
 \Delta a_{I,e3} &= (n-1) \cdot (\Delta a_{I,e1} + \Delta a_{I,e2}) + \frac{h \cdot (N-0.5)}{16\pi\epsilon_0 d_3 N^3} \cdot \ln \frac{d_1 + d_2 + d_3}{d_1 + d_2 - d_3}
 \end{aligned}
 \tag{2.148}$$

4. Resultado de la resolución de las ecuaciones integrales sobre las superficies conductoras

Una vez establecida la contribución de cada elemento de contorno al potencial de un punto *I*, su potencial originado por la parte de la configuración definida con elementos triangulares, se puede determinar con el principio de superposición, por lo que sumando la aportación de todos los elementos de contorno se obtiene la expresión:

$$\Phi_I = \sum_{e=1}^E \Phi_{eI} = \sum_{e=1}^E a_{I,e1} \cdot \sigma_{e1} + a_{I,e2} \cdot \sigma_{e2} + a_{I,e3} \cdot \sigma_{e3}
 \tag{2.149}$$

Sin embargo hay que tener en cuenta que un nodo puede pertenecer a más de un elemento de contorno: a seis, a tres o a un elemento según los casos. Por ello, y procediendo a agrupar los términos que corresponden al mismo nodo en la ecuación anterior, se llega a la siguiente expresión:

$$\Phi_I = \sum_{e=1}^E a_{I e1} \cdot \sigma_{e1} + a_{I e2} \cdot \sigma_{e2} + a_{I e3} \cdot \sigma_{e3} = \sum_{i=1}^{N_T} a_{I i} \cdot \sigma_i \quad (2.150)$$

siendo N_T el número total de nodos existentes en elementos triangulares en la configuración y cada término a_{Ii} resulta de sumar todos los términos a_{Iei} que corresponden al mismo nodo.

Para cada uno de los nodos I existentes en los elementos de contorno definidos sobre las superficies conductoras de la configuración, se establece una ecuación de este tipo, cuyos coeficientes a_{Ii} constituirían una fila de la matriz $[A]$ en el caso de existir solamente elementos de contorno triangulares, y donde cada valor Φ_I es un elemento del vector de términos independientes $[\Phi]$. De esta manera se obtienen N_c filas de la matriz $[A]$, tantas como nodos existen en los elementos de contorno definidos sobre superficies conductoras, y los correspondientes N_c elementos del vector $[\Phi]$.

En el caso de existir elementos rectangulares en la configuración, habría que sumar la contribución de esos elementos al potencial del punto I de la forma que se verá más adelante.

5. Resultado de la resolución de de las ecuaciones integrales sobre las fronteras dieléctricas

En la ecuación 2.123 se formuló la ecuación integral para cada punto J sobre las fronteras dieléctricas:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{e=1}^E \iint_{S_e} \frac{\sigma(G) \cdot \cos(r_{GJ}^{\rightarrow}, \vec{n}_J^{\rightarrow}) \cdot dS_e}{r_{GJ}^2} + \sigma_J = 0$$

siendo E el número de elementos de contorno existentes en la configuración.

Realizando el proceso de discretización de las fronteras dieléctricas de la misma manera que se ha descrito anteriormente para las superficies de los conductores, y llevando a cabo la integración numérica correspondiente, se obtiene la siguiente expresión [5]:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{GJ}, \vec{n}_J)}{N^2 \cdot r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \cdot \dots \quad (2.151)$$

$$\dots \cdot |n(L_1(m), L_2(n))| \cdot \sigma(L_1(m), L_2(n)) + \sigma_J = 0$$

Lo que, teniendo en cuenta la transformación lineal 2.132 correspondiente a elementos triangulares, permite, de forma similar que en las superficies conductoras, convertir la ecuación 2.151 en la siguiente:

$$\sum_{e=1}^E [a_{J, e1} \cdot \sigma_{e1} + a_{J, e2} \cdot \sigma_{e2} + a_{J, e3} \cdot \sigma_{e3}] + \sigma_J = 0 \quad (2.152)$$

siendo por tanto los tres coeficientes $a_{J,ei}$ los siguientes:

$$a_{J, e1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} \left[g_{mn} \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{GJ}, \vec{n}_J) \cdot L_1(m)}{N^2 \cdot r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \cdot |n(L_1(m), L_2(n))| \right] \quad (2.153)$$

$$a_{J, e2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} \left[g_{mn} \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{GJ}, \vec{n}_J) \cdot L_2(n)}{N^2 \cdot r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \cdot |n(L_1(m), L_2(n))| \right] \quad (2.154)$$

$$a_{J, e3} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} \left[g_{mn} \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{GJ}, \vec{n}_J) \cdot L_3(m, n)}{N^2 \cdot r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \cdot |n(L_1(m), L_2(n))| \right] \quad (2.155)$$

y en los casos de elementos parciales:

$$a_{J, e1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{GJ}, \vec{n}_J) \cdot (m-1)}{N \cdot r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \quad (2.156)$$

$$a_{J, e2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{GJ}, \vec{n}_J) \cdot (n-1)}{N \cdot r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \quad (2.157)$$

$$a_{J, e3} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{n=1}^{N+2-m} g_{mn} \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{GJ}, \vec{n}_J) \cdot (N+2-m-n)}{N \cdot r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \quad (2.158)$$

con los mismos factores de ponderación expuestos en el caso de las superficies conductoras. De estas expresiones está excluida la contribución de la densidad de carga superficial σ_J por estar excluida de la integración una pequeña superficie que contiene al propio punto J .

De esta manera se puede escribir :

$$\sum_{e=1}^E [a_{J e1} \cdot \sigma_{e1} + a_{J e2} \cdot \sigma_{e2} + a_{J e3} \cdot \sigma_{e3}] + \sigma_J = \dots$$

$$\dots = a_{J 1} \cdot \sigma_1 + a_{J 2} \cdot \sigma_2 + a_{J 3} \cdot \sigma_3 + a_{J 4} \cdot \sigma_4 + \dots + a_{J N_T} \cdot \sigma_{N_T} = \sum_{i=1}^{N_T} a_{J i} \cdot \sigma_i$$

para N_T nodos en elementos triangulares, y siendo cada coeficiente a_{ji} el resultado de sumar los coeficientes $a_{J,ei}$ que corresponden al mismo nodo, y quedando por tanto la ecuación 2.152 de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{N_T} a_{J i} \cdot \sigma_i = 0 \tag{2.159}$$

Para cada uno de los nodos J existentes en los elementos de contorno definidos sobre las fronteras dieléctricas, se establece una ecuación de este tipo, cuyos coeficientes a_{ji} constituyen una fila de la matriz $[A]$ en el caso de existir solamente elementos de contorno triangulares, y donde el elemento correspondiente del vector de términos independientes $[\Phi]$ será un cero. De esta manera se establecerían N_d filas de la matriz $[A]$, tantas como nodos existen en los elementos de contorno definidos sobre la fronteras dieléctricas, y también se establecerían los correspondientes N_d elementos del vector $[\Phi]$ que en este caso son ceros.

En el caso de existir elementos rectangulares en la configuración, hay que sumar su contribución a la componente normal de la intensidad de campo en el punto J al desarrollar la ecuación 2.122.

2.5.4.2 Tratamiento de los elementos rectangulares

Los elementos rectangulares aparecen como resultado de la subdivisión regular de superficies mayores (elementos parciales) (figura 2.25).

En este caso, la aproximación lineal de la la distribución de carga sobre cada elemento de contorno

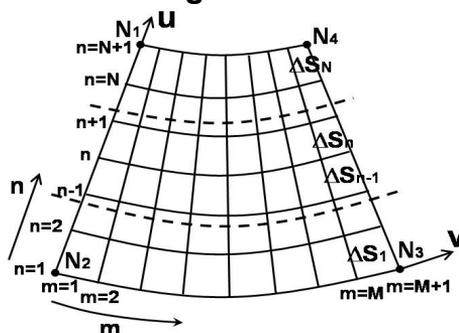


Figura 2.25 Elementos rectangulares

(figura 2.25) conduce a la siguiente expresión [5]:

$$\sigma_e = 0,25 \cdot (1 - \nu_m) \cdot (1 + u_n) \cdot \sigma_{e1} + 0,25 \cdot (1 - \nu_m) \cdot (1 - u_n) \cdot \sigma_{e2} + \dots \quad (2.160)$$

$$\dots + 0,25 \cdot (1 + \nu_m) \cdot (1 - u_n) \cdot \sigma_{e3} + 0,25 \cdot (1 + \nu_m) \cdot (1 + u_n) \cdot \sigma_{e4}$$

De esta manera, en el caso de las superficies conductoras se puede seguir el mismo procedimiento que para los elementos triangulares. Y así, para determinar la contribución de un elemento de contorno rectangular al potencial de un punto I de una de estas superficies se puede formular:

$$\Phi_{eI} = a_{I e1} \cdot \sigma_{e1} + a_{I e2} \cdot \sigma_{e2} + a_{I e3} \cdot \sigma_{e3} + a_{I e4} \cdot \sigma_{e4} \quad (2.161)$$

con los siguientes coeficientes en este caso [5]:

$$a_{I e1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} g_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 - \nu_m) \cdot (1 + u_n)}{r_{GI}(G(\nu_m, u_n), I)} \quad (2.162)$$

$$a_{I e2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} g_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 - \nu_m) \cdot (1 - u_n)}{r_{GI}(G(\nu_m, u_n), I)} \quad (2.163)$$

$$a_{I e3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} g_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 + \nu_m) \cdot (1 - u_n)}{r_{GI}(G(\nu_m, u_n), I)} \quad (2.164)$$

$$a_{I e4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} g_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 + \nu_m) \cdot (1 + u_n)}{r_{GI}(G(\nu_m, u_n), I)} \quad (2.165)$$

y con los siguientes factores de ponderación:

$$g_{mn} = 0,25 \Delta S_I \quad \text{para los nodos principales con } n = I$$

$$g_{mn} = 0,25 \Delta S_N \quad \text{para los nodos principales con } n = N+I$$

$$g_{mn} = 0,50 \Delta S_I \quad \text{para los puntos en los lados del elemento con } n=I$$

$$g_{mn} = 0,50 \Delta S_N \quad \text{para los puntos en los lados del elemento con } n=N+I$$

$$g_{mn} = 0,25 (\Delta S_n + \Delta S_{n-1}) \quad \text{para los puntos en los lados del elemento con } m=I \text{ o } m=M+I$$

$$\mathbf{g}_{mn} = 0,5 (\Delta \mathbf{S}_n + \Delta \mathbf{s}_{n-1}) \quad \text{para los puntos del interior del elemento.}$$

En el caso de las fronteras dieléctricas y procediendo como en el caso de los elementos triangulares, para cada nodo J de los elementos de contorno que las describen se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathbf{g}_{mn} \cdot \frac{\cos(r_{GJ}^{\vec{}} \cdot \vec{n}_J)}{r_{GJ}^2(G(L_1, L_2), J)} \cdot \sigma(m, n) \right] + \sigma_J = 0 \quad (2.166)$$

donde se opera con la transformación lineal 2.160, obteniéndose:

$$\sum_{e=1}^E [a_{J e1} \cdot \sigma_{e1} + a_{J e2} \cdot \sigma_{e2} + a_{J e3} \cdot \sigma_{e3} + a_{J e4} \cdot \sigma_{e4}] + \sigma_J = 0 \quad (2.167)$$

siendo los cuatro coeficientes $a_{J,ei}$ los siguientes [5]:

$$a_{J e1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathbf{g}_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 - v_m) \cdot (1 + u_n) \cdot \cos(r_{GJ}^{\vec{}} \cdot \vec{n}_J)}{r_{GJ}^2(G(v_m, u_n), J)} \right] \quad (2.168)$$

$$a_{J e2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathbf{g}_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 - v_m) \cdot (1 - u_n) \cdot \cos(r_{GJ}^{\vec{}} \cdot \vec{n}_J)}{r_{GJ}^2(G(v_m, u_n), J)} \right] \quad (2.169)$$

$$a_{J e3} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathbf{g}_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 + v_m) \cdot (1 - u_n) \cdot \cos(r_{GJ}^{\vec{}} \cdot \vec{n}_J)}{r_{GJ}^2(G(v_m, u_n), J)} \right] \quad (2.170)$$

$$a_{J e4} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \cdot \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathbf{g}_{mn} \cdot \frac{0,25 \cdot (1 + v_m) \cdot (1 + u_n) \cdot \cos(r_{GJ}^{\vec{}} \cdot \vec{n}_J)}{r_{GJ}^2(G(v_m, u_n), J)} \right] \quad (2.171)$$

con los mismos factores de ponderación expuestos en el caso de las superficies conductoras.

Capítulo 3 . Cálculo de máximos de campo

3.1 Introducción

Un aspecto normalmente relevante en el estudio de configuraciones de alta tensión es la determinación de la intensidad máxima de campo sobre la superficie de los electrodos y dieléctricos que las conforman, lo que exige resolver un problema de máximos.

En una configuración con todos sus electrodos a potencial fijo, se trata de resolver un problema de máximos espaciales que se puede abordar en dos pasos: en primer lugar determinando la distribución espacial de la intensidad de campo $E(x,y,z)$, y luego buscando el valor y localización de la intensidad máxima de campo sobre la superficie de los contornos. En la mayoría de los casos, de esta forma se pueden resolver los problemas de máximos espaciales ya sea de forma analítica o numérica.

En configuraciones con potenciales de electrodo dependientes del tiempo, como suelen ser muchas de las configuraciones de alta tensión, el problema de máximos es un problema de máximos espacio-temporales cuya resolución también se puede abordar en dos partes: en primer lugar determinando la distribución espacio-temporal de la intensidad de campo $E(x,y,z,t)$, y luego buscando el valor de la intensidad máxima de campo así como el instante y posición espacial en que ésta

se produce. La complejidad de la mayoría de las configuraciones reales hace que la resolución de los problemas de máximos espacio-temporales, pocas veces se pueda realizar de forma sencilla y rápida.

El cálculo analítico es aplicable a la resolución de aquellos problemas de máximos en los que es posible describir el campo como una función del espacio y del tiempo. Sin embargo esto es únicamente posible en algunas configuraciones especialmente simples y simétricas.

En la mayoría de las configuraciones reales con tensiones de electrodo dependientes del tiempo, las leyes del campo únicamente permiten describirlo en términos de ecuaciones diferenciales o integrales, imposibles de resolver en su totalidad de forma analítica, requiriendo en algún momento la aplicación de métodos numéricos. En estos casos, la descripción de la distribución espacio-temporal del campo, primera etapa de la resolución de un problema de máximos espacio-temporales, no es posible realizarla con una función sino que se tiene que hacer con un gran número de valores discretos. Y para ello es necesario resolver una gran cantidad de problemas de campo, lo que resulta enormemente engorroso.

Quizás debido a esto no es frecuente encontrar en la literatura especializada la resolución explícita de un problema de máximos espacio-temporales. De hecho, los autores que presentan estudios de configuraciones con tensiones de electrodo dependientes del tiempo a menudo soslayan el asunto resolviendo el problema de campo para un cierto conjunto de tensiones de electrodo tomado de forma aparentemente arbitraria y al margen de cualquier consideración explícita de máximos. Y cuando resulta evidente que los autores están tratando con la situación más desfavorable, la falta de consideración explícita del problema de máximos espacio-temporales lleva a concluir que ésta se ha establecido en base a hipótesis implícitas, normalmente bien fundadas en la simetría geométrica y eléctrica de las configuraciones estudiadas y, probablemente, en consideraciones extrapoladas de otros ámbitos como las normativas medioambientales relacionadas con las líneas eléctricas de alta tensión [1]. Sin embargo en la presente tesis se ha encontrado que las hipótesis que a menudo se manejan no siempre resultan tan generales como podría parecer.

Se revisarán a continuación estos aspectos de forma detallada.

3.2 Resolución de problemas de máximos espaciales

3.2.1 Métodos analíticos

Los métodos analíticos se pueden utilizar para resolver un problema de máximos espaciales en los casos en que es posible describir el campo con una función de la posición, lo que sucede únicamente en las pocas configuraciones en las que la resolución de las ecuaciones de Laplace o Poisson se puede realizar de forma puramente analítica. Se trata siempre de configuraciones especialmente simples y simétricas en las que la resolución analítica de las ecuaciones del campo permite describirlo como una función espacial:

$$E = f(\vec{r}) \quad (3.1)$$

Como ejemplos de este tipo de configuraciones pueden servir un condensador plano, un condensador cilíndrico y un condensador esférico, donde la resolución de la ecuación de Laplace permite llegar a expresar el campo como una función de la posición:

- Condensador plano:

$$E = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d} \quad (3.2)$$

siendo d la distancia entre electrodos, y Φ_1 y Φ_2 los potenciales de cada uno de ellos.

- Condensador cilíndrico:

$$\vec{E} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{r} \vec{u}_r \quad (3.3)$$

siendo a y b los radios de los electrodos interior y exterior respectivamente, y r la coordenada radial de cada punto.

- Condensador esférico:

$$\vec{E} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{b - a} \cdot \frac{a \cdot b}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.4)$$

siendo a y b los radios de los electrodos interior y exterior respectivamente, y r la coordenada radial de cada punto.

La simple observación de las ecuaciones 3.2, 3.3 y 3.4 permite establecer la localización del máximo de la función. En el primer caso éste se produce en cualquier punto del espacio dado que el campo es uniforme, y en los otros dos casos, el máximo se produce para el valor mínimo de r , o sea en la superficie del electrodo interior.

Pueden plantearse otros casos donde la función no sea tan simple pero, existiendo ésta, el problema de máximos se puede resolver con métodos analíticos. Considérese por ejemplo el caso de un cable coaxial con ambas armaduras puestas a tierra y con una distribución de carga espacial ρ distribuida uniformemente en el seno de un dieléctrico de permitividad ϵ que ocupa el espacio entre ellas. También en este caso, dada la simetría de la configuración, es factible resolver la ecuación de Poisson por métodos puramente analíticos, llegando a la expresión [6]:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon} \cdot \left(r - \frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{2r} \right) \vec{u}_r \quad (3.5)$$

Al contrario que en los casos anteriores, el módulo del campo es ahora una función creciente del radio, como se puede ver evaluando la primera derivada de la función:

$$\frac{\rho}{2\epsilon} \cdot \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{2r^2} \right) > 0 \quad (3.6)$$

por lo que el máximo del campo se produce, bien sobre la armadura interior, bien sobre la armadura exterior. La representación gráfica de la evolución de la intensidad del campo a lo largo de un radio (figura 3.1) ilustra perfectamente esta situación.

De todas formas, las configuraciones reales en las que es posible describir la intensidad de campo como una función de la posición son bastantes escasas, por lo que se debe recurrir a otros métodos más generales.

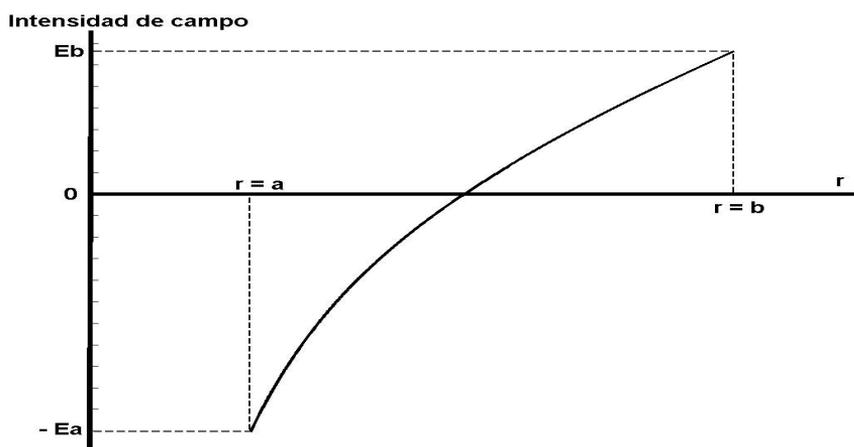


Figura 3.1 Evolución de la intensidad de campo entre dos armaduras cilíndricas

3.2.2 Métodos numéricos

La búsqueda del campo máximo en una distribución general calculada por métodos numéricos requeriría una evaluación del campo en todo el dominio, lo que conllevaría inevitablemente una cantidad ingente de cálculo. En el estudio de configuraciones técnicas, esta búsqueda puede restringirse en la práctica a las superficies de electrodos y fronteras dieléctricas, pues representan los puntos críticos para un posible inicio de descargas.

Así planteado, el problema se puede resolver en dos pasos:

- 1) Cálculo de la distribución espacial del campo sobre la superficie de los elementos que componen la configuración estudiada
- 2) Determinación del máximo espacial del campo en dicha distribución.

Con la utilización de métodos numéricos integrales, el cálculo de la distribución espacial del campo en un caso general requiere la resolución previa de la ecuación matricial:

$$[A] \cdot [q] = [\Phi] \quad (3.7)$$

siendo $[A]$ la matriz de coeficientes del sistema, $[q]$ el vector de cargas incógnitas, y $[\Phi]$ el vector de términos independientes que contiene los valores de las tensiones de electrodo.

La solución de esta ecuación 3.7, proporciona la distribución de cargas $[q]^{(*)}$:

$$[q]^{(*)} = [A]^{-1} \cdot [\Phi] \quad (3.8)$$

El vector solución $[q]^{(*)}$ determina la distribución de cargas que describe a la configuración, y permite establecer la distribución espacial de campo calculando el valor de su intensidad en cualquier punto i del espacio utilizando los correspondientes coeficientes de campo f_{ij} aplicados a cada una de las N entradas q_j del vector solución :

$$E_i = \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot q_j \quad (3.9)$$

Dado que el conjunto de puntos utilizado para establecer las condiciones de contorno del problema se distribuye por todas las superficies de interés técnico, el cálculo de la máxima intensidad de campo se puede llevar a cabo determinando, en una primera aproximación, el máximo de las intensidades de campo en dicho conjunto de puntos.

$$E_{m\acute{a}x} = M\acute{a}x \{ E_i \} \quad \forall i \in \text{contornos} \quad (3.10)$$

Para una determinación más exacta de la posición del máximo, se pueden realizar posteriormente discretizaciones sucesivamente más finas alrededor del punto encontrado, lo que normalmente se podrá realizar con una precisión suficiente utilizando el mismo vector solución $[q]^{(*)}$, es decir sin necesidad de volver a resolver el sistema de ecuaciones 3.7.

3.3 Resolución de problemas de máximos espacio-temporales

3.3.1 Métodos analíticos

Se pueden utilizar métodos analíticos para resolver un problema de máximos espacio-temporales en los casos en que es posible describir el campo con una función de la posición y del tiempo, lo que sucede únicamente en las pocas

configuraciones en las que la resolución de las ecuaciones de Laplace o Poisson se puede realizar de forma puramente analítica. Se trata siempre de configuraciones especialmente simples y simétricas en las que la resolución analítica de las ecuaciones permite describirlo como una función del espacio y del tiempo:

$$E = f(\vec{r}, t) \quad (3.11)$$

Son especialmente sencillas de estudiar aquellas configuraciones en las que la intensidad máxima de campo es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre electrodos, como ocurre en condensadores planos, cilíndricos o esféricos. En las ecuaciones 3.2, 3.3 y 3.4 ya se establecieron las expresiones de la intensidad de campo en este tipo de configuraciones, que en este caso se pueden reformular así:

- Condensador plano:

$$E = \frac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{d} \quad (3.12)$$

- Condensador cilíndrico:

$$\vec{E} = \frac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{r} \vec{u}_r \quad (3.13)$$

- Condensador esférico:

$$\vec{E} = \frac{\Phi_1(t) - \Phi_2(t)}{b-a} \cdot \frac{a \cdot b}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.14)$$

con los mismos significados para todos los parámetros y variables que los establecidos para las ecuaciones 3.2, 3.3 y 3.4.

La búsqueda de máximos y mínimos para estas funciones por métodos analíticos da como resultado:

- Se obtiene un máximo espacial, en cualquier instante de tiempo, para el valor mínimo de r , es decir para $r = a$ (en el condensador plano, para cualquier posición).

- Por lo que a la dependencia temporal se refiere, el máximo se produce cuando la diferencia de potenciales de electrodo es máxima, es decir para

$$\Phi'_1(t) - \Phi'_2(t) = 0 \tag{3.15}$$

Como ejemplo de lo expuesto se presenta a continuación el caso particular de un condensador cilíndrico, con las siguientes funciones para los potenciales de electrodo:

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cdot \text{sen } \omega t \tag{3.16}$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 \cdot \text{sen}(\omega t - \psi) \tag{3.17}$$

En este caso, de acuerdo con la ecuación 3.13, el campo eléctrico sobre la superficie del electrodo interior, o sea el máximo espacial, viene determinado por la ecuación 3.18:

$$E_a = \frac{\Phi_0 \cdot \text{sen } \omega t - \Phi_0 \cdot \text{sen}(\omega t - \psi)}{a \cdot \ln \frac{b}{a}} \tag{3.18}$$

Con lo que el máximo temporal se obtiene derivando la ecuación 3.18 con respecto al tiempo:

$$\frac{dE_a}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{a \cdot \ln \frac{b}{a}} \cdot [\Phi_0 \cdot \text{sen } \omega t - \Phi_0 \cdot \text{sen}(\omega t - \psi)] \right] = 0$$

que conduce a la ecuación:

$$\cos(\omega t) - \cos(\omega t - \psi) = 0 \tag{3.19}$$

Ecuación cuya solución en el primer semiperiodo es:

$$\omega t = \frac{\psi}{2} \tag{3.20}$$

Llevando ahora este valor a la ecuación 3.18, se obtiene la intensidad máxima de

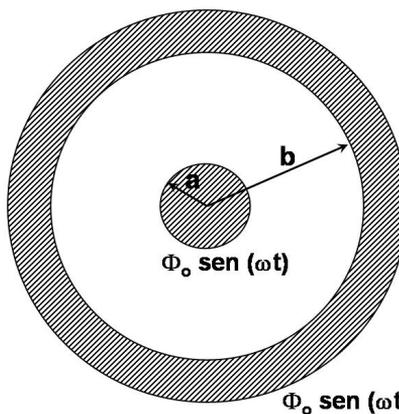


Figura 3.2 Conductores de un cable coaxial sometidos a potenciales desfasados

campo:

$$E_{max} = \frac{2 \cdot \text{sen} \frac{\psi}{2}}{a \cdot \ln \frac{b}{a}} \quad (3.21)$$

Como ya se ha dicho, son pocas las configuraciones que admiten un tratamiento puramente analítico como éste. Sin embargo, algunas configuraciones reales aún no siendo resolubles analíticamente hasta el final, admiten un tratamiento analítico parcial que permite simplificar la posterior resolución numérica que se hace necesaria para resolver el problema. Se trata de aplicar métodos analíticos hasta donde sea posible, extrayendo del estudio así realizado conclusiones que permitan aplicar un proceso de modelización capaz de simplificar la resolución numérica del problema. Esta forma de proceder se debe seguir con especial cuidado pues con frecuencia no es posible establecer a priori los márgenes de validez de las conclusiones obtenidas a partir de los modelos así establecidos, lo que sólo se podrá hacer una vez completada la resolución del problema por métodos numéricos.

Un ejemplo de esta situación es el de dos cables idénticos, paralelos, muy largos frente a su diámetro, y sometidos a tensiones sinusoidales con un cierto desfase entre ellas (figura 3.3), por ejemplo según las ecuaciones 3.16 y 3.17:

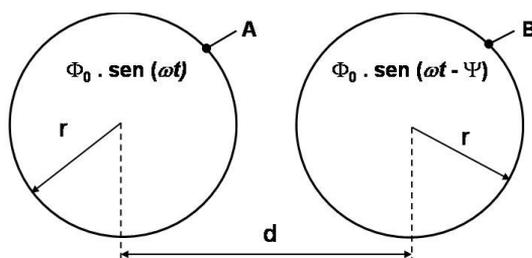


Figura 3.3 Cables paralelos con tensiones desfasadas

- Conductor A:

$$\Phi_A = \Phi_0 \cdot \text{sen} \omega t \quad (3.22)$$

- Conductor B:

$$\Phi_B = \Phi_0 \cdot \text{sen}(\omega t - \psi) \quad (3.23)$$

Este problema de campo puede formularse para cada instante de tiempo como el resultado de la superposición de dos problemas:

Problema 1 : Los dos conductores con el mismo potencial.

$$\text{- Conductor A:} \quad \Phi = \Phi_1 \quad (3.24)$$

$$\text{- Conductor B:} \quad \Phi = \Phi_1 \quad (3.25)$$

Problema 2 : Los dos conductores con potenciales opuestos.

$$\text{- Conductor A:} \quad \Phi = \Phi_2 \quad (3.26)$$

$$\text{- Conductor B:} \quad \Phi = -\Phi_2 \quad (3.27)$$

Siendo:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_A + \Phi_B}{2} \quad (3.28)$$

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_A - \Phi_B}{2} \quad (3.29)$$

El problema 2 se puede resolver analíticamente por medio de la transformación conforme [30]:

$$z = c \cdot \cotg w \quad (3.30)$$

que conduce a un valor para la máxima intensidad de campo de:

$$|E|_{m\acute{a}x} = \frac{\Phi_2}{2c} \cdot \frac{\frac{d}{2r} + 1}{\operatorname{arc} \cosh \frac{d}{2r}} \quad (3.31)$$

intensidad máxima que se localiza sobre el punto de cada electrodo más próximo al otro.

Por su parte, el problema 1 sólo se puede resolver aproximadamente para $d/2r \gg 1$ mediante la transformación conforme [30]:

$$z = \sqrt{e^w + 1} \quad (3.32)$$

lo que no permite completar la resolución del problema real.

De todas formas, un estudio cualitativo de este problema **1** permite establecer que la máxima intensidad de campo sobre la superficie de los conductores tiene que aumentar conforme se alejan uno de otro, produciéndose, para cada distancia entre ellos, con el mayor valor posible del potencial de electrodo. En cuanto al lugar donde se produce dicha intensidad máxima de campo, es siempre el punto de cada electrodo más alejado del otro, pero con tendencia a que el valor de la intensidad de campo se uniformice en dirección acimutal conforme los cables se alejan uno de otro. Por lo que respecta al valor de fase en el que se debe producir el campo máximo sobre un conductor en este problema **1**, será el valor que haga máximo al potencial de electrodo, o sea que haga máxima la expresión 3.28, por lo que, de acuerdo con las ecuaciones 3.22 y 3.23, será el valor que haga máxima la función:

$$f(t) = \text{sen } \omega t + \text{sen}(\omega t - \psi)$$

que proporciona la solución:

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2} \quad (3.33)$$

De acuerdo con este análisis se pueden extraer algunas conclusiones para la configuración real: se puede establecer que para d/r muy pequeño el campo dominante es el del problema **2** que, como se ve en las ecuaciones 3.29 y 3.31, depende directamente de la diferencia de potencial entre ambos electrodos por lo que el máximo de campo se produce para el valor de fase en que la diferencia de potencial entre ellos es máxima. Y la máxima diferencia de potencial entre electrodos, según se ha visto anteriormente en el condensador cilíndrico, corresponde a un valor de fase $\omega t = \psi / 2$ (ecuación 3.20). De todas formas, la contribución del problema **1** al resultado será cada vez mayor conforme aumente el valor del cociente d/r , no existiendo forma analítica de establecer un valor de este cociente por debajo del cual se puede establecer de forma fiable que el máximo de campo se produce exactamente para el valor de fase dado por la ecuación 3.20. Por ello, esta modelización del problema real no permite establecer de forma exacta cual es el valor de fase en el que realmente se producirá la intensidad máxima de campo aún cuando los cables estén muy próximos.

Por otra parte, para d/r grande ambos problemas **1** y **2** contribuyen de forma similar al campo resultante, y en el problema 1 el campo depende del potencial de electrodo. De acuerdo con esto, conforme el cociente d/r se hace más grande, el

valor de fase en que se produce el campo máximo debe ir separándose cada vez más del valor proporcionado por el problema 2 ($\omega t = \psi / 2$).

Ya se citó antes que no es posible establecer exactamente el valor de fase en el que se produce la intensidad máxima de campo aún cuando los cables estén muy próximos, pero de acuerdo con las consideraciones anteriores, un proceso de modelización permite predecir que en los casos de gran proximidad entre cables, el valor de fase buscado se encontrará dentro de un estrecho intervalo de fases cuyo límite inferior será el establecido por el problema 2. Se observa por tanto que esta modelización del problema real puede simplificar el problema de máximos espacio-temporales pues permite restringir el ámbito de busca del máximo de campo a intervalos temporales más pequeños de lo que sería necesario sin la misma, sobre todo en el caso de gran proximidad entre cables.

En el capítulo 5 se presenta un estudio de la fiabilidad y utilidad de las previsiones que proporciona este proceso de modelización de esta configuración, comparándolas con los resultados proporcionados por el método desarrollado en la presente tesis para la resolución de problemas de máximos espacio-temporales.

3.3.2 Métodos numéricos

En un caso general en el que no sea posible establecer la distribución del campo como una función del espacio y del tiempo, el establecimiento de la distribución espacio-temporal de campo como primer paso para la resolución del problema de máximos espacio-temporales, exige la resolución previa de la ecuación matricial $[A] \cdot [q] = [\Phi]$ donde el vector $[\Phi]$ ahora depende del tiempo: $[\Phi] = [\Phi]_t$

Así, el vector solución $[q]^{(*)}$ se puede plantear como la resolución de la ecuación:

$$[q]_t^{(*)} = [A]^{-1} \cdot [\Phi]_t \quad (3.34)$$

Una vez resuelta la ecuación 3.34 y conocida por tanto la distribución espacio-temporal de cargas que definen la configuración, la distribución de la intensidad de campo se puede establecer en un vector $[E]$ calculado con la matriz $[f]$ de coeficientes de campo:

$$[E]_t = [f] \cdot [q]_t \quad (3.35)$$

donde la matriz $[f]$ de coeficientes es función únicamente de la geometría de la configuración y, por tanto, independiente del tiempo.

La intensidad de campo también se puede expresar en función de los datos, combinando las ecuaciones 3.35 y 3.34, quedando:

$$[E]_t = [f] \cdot [A]^{-1} \cdot [\Phi]_t \quad (3.36)$$

donde las entradas $E_i(x, y, z, t)$ del vector $[E]_t$ indican la evolución temporal del valor de la intensidad de campo en los puntos del espacio previamente seleccionados. En una primera aproximación, estos puntos donde calcular la intensidad de campo pueden ser los mismos puntos utilizados para establecer las condiciones de contorno del problema dado que todos ellos se encuentran convenientemente distribuidos sobre las superficies de interés técnico.

De todas formas, la resolución de la ecuación 3.36 no será en general rápida ni simple. En efecto, resolver esta ecuación de forma que se pueda obtener un vector $[E]_t$ razonablemente representativo de la distribución espacio-temporal del campo en las superficies de interés técnico, normalmente exigirá resolver un conjunto de ecuaciones, normalmente numeroso, de la forma:

$$[E(t_j)] = [f] \cdot [A]^{-1} \cdot [\Phi(t_j)] \quad (3.37)$$

para $j = 1, 2, 3, \dots, n$, siendo n un número suficientemente grande.

Se resuelve la ecuación 3.37 para cada valor de j , y, en paralelo con la determinación de cada una de las entradas del vector campo, se procede a la determinación de la intensidad máxima de campo en ese instante por comparación de ese valor con el máximo de las entradas calculadas anteriormente:

$$E_{\max}(t_j) = \text{Máx}\{E_i(x, y, z, t_j)\} \quad (3.38)$$

Esta forma de proceder exige la resolución de n problemas de máximos espaciales que habrá que completar con la determinación del máximo de todos los máximos espaciales calculados en los n instantes estudiados. Esto completará la resolución del problema de máximos espacio-temporales. Esta fase final del proceso se suele realizar por comparación progresiva de los valores $E_{\max}(t_j)$ conforme se van calculando, de acuerdo con la ecuación 3.39:

$$E_{max} = \text{Max} \{ E_{max}(t_j) \} \quad (3.39)$$

Esta forma de resolver los problemas de máximos espacio-temporales presenta la dificultad de que, al tener que ser n un número en general grande para poder determinar de forma fiable el máximo espacio-temporal buscado, el número de veces que es preciso resolver la ecuación 3.37 resulta igualmente elevado, lo que convierte a la resolución del problema en un proceso normalmente largo y tedioso.

A pesar de lo trabajoso que puede ser resolver la ecuación 3.37, existen algunos casos de resolución sencilla. En efecto, cada una de las entradas del vector de términos independientes $[\Phi]_i$ es proporcionada por cada uno de los puntos de contorno que discretizan la configuración, y su valor depende de la superficie electródica o dieléctrica sobre la que se encuentre y del tiempo, $\Phi_i(k,t)$, siendo k un número identificador de cada superficie. Pues bien, aquellos casos en los que las entradas $\Phi_i(k,t)$ del vector de términos independientes sean de la forma:

$$\Phi_i(k,t) = K_i(k) \cdot f(t) \quad (3.40)$$

pueden resolverse de forma más sencilla pues el vector de términos independientes se transforma en el producto de otro vector por un escalar:

$$[\Phi]_i = [K] \cdot f(t) \quad (3.41)$$

Y así la ecuación 3.36 se transforma en:

$$[E]_i = [f] \cdot [A]^{-1} \cdot [\Phi]_i = [f] \cdot [A]^{-1} \cdot [K] \cdot f(t) \quad (3.42)$$

Dado el carácter escalar de $f(t)$, resulta evidente que la intensidad máxima de campo se producirá en el instante correspondiente al valor máximo de dicha función. De esta manera el problema de máximos espacio-temporales se convierte en un único problema de máximos espaciales a resolver para el instante $t=t_{max}$ que hace máxima a $f(t)$, es decir, tal como indica la ecuación 3.40, en el instante en el que todos los potenciales de electrodo dependientes del tiempo alcanzan su máximo valor.

Desafortunadamente son muy pocas las configuraciones en las que se cumple la condición 3.40, quedando limitadas en la práctica casi exclusivamente a las configuraciones monofásicas.

3.4 Configuraciones trifásicas en la literatura especializada

Es habitual en la literatura especializada analizar los problemas de campo con tensiones de electrodo dependientes del tiempo sin resolver de forma explícita el problema de máximos espacio-temporales correspondiente. Así, los autores estudian el comportamiento de estas configuraciones para una cierta distribución de tensiones de electrodo tomada de forma aparentemente arbitraria, distribución en la que sin embargo se suele presentar la máxima intensidad de campo, o en la que pudiera presentarse si las dimensiones de la configuración fuesen unas determinadas, lo que muchas veces tampoco queda suficientemente explicitado en los textos.

El profesor Singer [41] en un artículo sobre el método de cargas superficiales (SCM), presenta el estudio de una configuración en haz de barras trifásicas muy frecuente en la técnica de alta tensión (figura 3.4). En ella el profesor Singer informa que toma “*haces de barras*: 1: $\Phi = 1 \text{ kV}$; 2: $\Phi = -0,5 \text{ kV}$; 3: $\Phi = -0,5 \text{ kV}$ ”, con la que procede a determinar el lugar y el valor de la intensidad máxima campo tanto sobre la superficie de las barras como en el tubo dentro del que se encuentran.

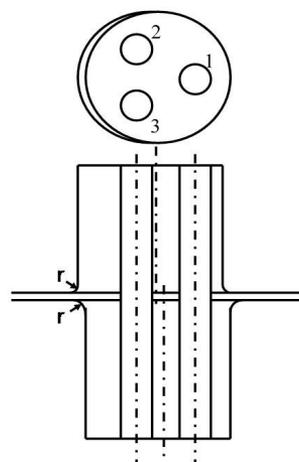


Figura 3.4 Haz de barras trifásicas entubadas

En el capítulo 5.6 de la presente tesis se resuelve el problema de máximos espacio-temporales correspondiente a esta misma configuración, resultando que, aunque el profesor Singer no la cite como tal, la distribución de tensiones que él estudia es en la que efectivamente se produce la intensidad máxima de campo siempre que las dimensiones de la configuración estén dentro de un amplio margen (como parece ser el caso de las que maneja el autor en la configuración objeto de su estudio, aunque no están lo suficientemente concretadas en el artículo).

Por su parte, Gutfleisch [17] en un artículo sobre nuevos desarrollos del método de

los elementos de contorno (BEM) en el cálculo numérico de campos eléctricos tridimensionales, presenta el estudio de un disco aislador en un equipo trifásico SF₆ (figura 3.5), configuración que eléctricamente es similar a la estudiada por el profesor Singer. Gutfleisch informa que “*El potencial de la primera fase es 1 kV y el de las otras es -0,5 kV.*”, y con esta distribución de tensiones procede a determinar el lugar en el que se produce la máxima intensidad de campo.

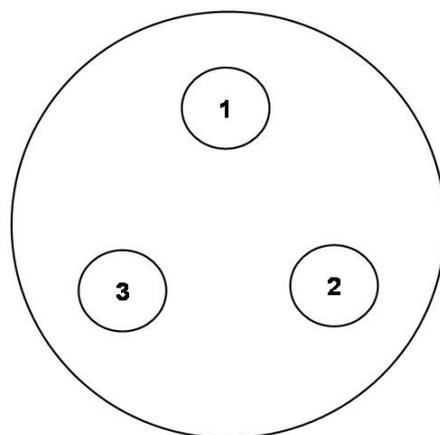


Figura 3.5 Estructura de un disco aislador en un equipo trifásico SF₆

En el capítulo 5.3 de la presente tesis se resuelve el problema de máximos espacio-temporales correspondiente a una configuración similar a ésta, resultando que, aunque el autor no la cite como tal, esta distribución de tensiones coincide con la situación más desfavorable siempre que las dimensiones de la configuración estén dentro de un cierto margen, dimensiones que sin embargo el autor no llega a citar.

Otros autores también han estudiado el campo eléctrico que se presenta en configuraciones trifásicas. Que y Sebo [33] presentan un estudio de aisladores, y Motrescu y Van Rienen [27] presentan la utilización de la FIT (Finite Integration Technique) en el estudio de campos eléctricos y sus efectos sobre las personas. En ambos casos los autores estudian el campo para una distribución de tensiones que incluye la tensión de pico en uno de los conductores. Parece que, dadas las finalidades de los artículos, sí es claro que a los autores les interesa tratar con la distribución de tensiones de electrodo

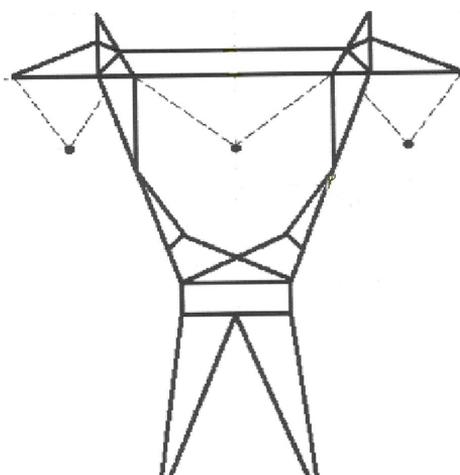


Figura 3.6 Línea trifásica a la altura de una torre de alta tensión

que hace máximo al campo. En el caso de Motrescu y Van Rienen normalmente podría justificarse que esta distribución de tensiones es la que determina la situación de mayor interés para el estudio recurriendo a normativas ambientales relacionadas con las líneas de alta tensión, algunas de las cuales sí citan la necesidad de tomar como intensidad máxima de campo la que se produce a una cierta altura sobre el suelo cuando la tensión es máxima en alguna de las fases [1]. Sin embargo los autores de este artículo, como resulta habitual, tampoco citan explícitamente, y por tanto no justifican, que la distribución de tensiones elegida sea la más desfavorable, proceder en el que coinciden también Que y Sebo.

Welly [53] en un artículo en el que presenta un nuevo método de optimización de contornos electródicos en equipos de alta tensión, estudia un montaje de barras trifásicas similar a los ya vistos en los estudios de Singer y Gutfleisch (figuras 3.4 y 3.5), tratando de la optimización del contorno de las barras estudiando sólo un tercio de la configuración (figura 3.7), sin hacer referencia a cual es la distribución de tensiones de electrodo que justificaría que este estudio parcial es representativo de la totalidad de la configuración, ya sea en su situación más desfavorable, como sería lógico esperar, o en cualquier otra.

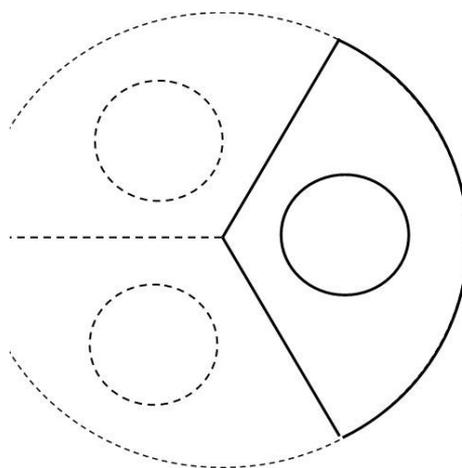


Figura 3.7 Rodaja imaginaria de un montaje de barras trifásicas

Como se ve, es habitual esta forma de proceder en la que los autores estudian configuraciones con potenciales de electrodo dependientes del tiempo sin resolver el problema de máximos espacio-temporales correspondiente, eligiendo una cierta distribución de tensiones en la que parece producirse el caso más desfavorable, pero sin citarlo, y por tanto sin justificarlo, como tal. Es decir se suele resolver el problema de máximos espaciales que correspondería a una configuración con tensiones de electrodo constantes, pero no el problema de máximos espacio-temporales que corresponde a la configuración con tensiones de electrodo dependientes del tiempo que realmente se está estudiando.

3.5 El cálculo de máximos espacio-temporales

Como se acaba de ver, cuando actualmente se utilizan métodos numéricos para calcular campos eléctricos en configuraciones alternas de alta tensión, los autores suelen resolver únicamente un problema de máximos espaciales correspondiente a una determinada distribución de potenciales de electrodo que suele incluir el pico de potencial en alguno de ellos. Normalmente parece que se está estudiando la situación eléctricamente más desfavorable, situación que normalmente se ha establecido sin identificarla como tal y por tanto sin ninguna justificación explícita de su supuesto carácter.

Si el sistema es monofásico, ya se ha visto que la distribución de potenciales que hace máximo al campo viene dada por las amplitudes del potencial alterno, por lo que resulta claro que una situación como la anterior efectivamente corresponde al caso más desfavorable.

Sin embargo en el caso de sistemas trifásicos, una distribución de potenciales en la que aparezca el valor de pico en alguno de los electrodos no siempre resulta la más desfavorable, como se verá. De hecho, un proceder basado en la consideración de que la aparición de una tensión de pico en alguno de los electrodos es la situación más desfavorable, y así substituir la resolución del correspondiente problema de máximos espacio-temporales por un problema de máximos espaciales, no se puede aceptar como hipótesis bien fundada para la generalidad de configuraciones trifásicas del tipo de las citadas anteriormente pues presenta importantes limitaciones dimensionales. Por otra parte, si las configuraciones con tensiones variables en el tiempo no presentan una simetría tan sencilla como éstas, todavía resultará más complejo establecer una hipótesis bien fundada sobre cuál es la distribución de potenciales de electrodo en la que se produce la situación más desfavorable. Por todo esto, en la mayoría de las ocasiones en que se necesita determinar el campo más desfavorable, la resolución del problema de máximos espacio-temporales correspondiente resulta imprescindible.

Sin embargo, como se ve, actualmente los autores no suelen resolver este problema, moviéndose en un terreno un tanto ambiguo en cuanto al carácter de la distribución concreta de tensiones que proceden a resolver. Esta forma de proceder es muy probable que esté condicionada por lo engorroso que normalmente resulta resolver un problema general de máximos espacio-temporales

con los métodos actualmente disponibles.

Resulta por tanto de interés poder resolver el problema de máximos espacio-temporales en una distribución de tensiones de electrodo variables en el tiempo, de una forma lo suficientemente cómoda para que no represente un aumento excesivo de esfuerzo y trabajo sobre la resolución del problema de máximos espaciales que normalmente se resuelve.

El método desarrollado en la presente tesis [13] y que se explica detalladamente en el capítulo siguiente, representa una herramienta útil para la resolución de este tipo de problemas.

Capítulo 4 . El método de las soluciones elementales

4.1 Introducción

Para una cierta geometría, el problema de campo puede ser descrito con un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

que puede escribirse matricialmente:

$$[A][x]=[b] \tag{4.1}$$

donde la matriz $[A]$ es la matriz de coeficientes del sistema, el vector $[x]$ es el vector incógnitas y el vector $[b]$ es el vector de términos independientes:

$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$[b] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

En los métodos integrales utilizados para la resolución de los problemas de campo, la mayoría de las ecuaciones del sistema proceden del establecimiento de condiciones de contorno en determinados puntos de las superficies electródicas y dieléctricas que existen en la configuración. En este caso, la matriz de coeficientes $[A]$ está formada por coeficientes de potencial, campo y carga que dependen únicamente de la geometría del sistema, el vector incógnitas $[x]$ está formado por cargas y potenciales de electrodo desconocidos, y el vector de términos independientes $[b]$ contiene potenciales electródicos conocidos y ceros. De acuerdo con esto, una simbología a menudo utilizada para representar la forma matricial del sistema de ecuaciones de un problema de campo es la siguiente:

$$[A] \cdot [q] = [\Phi] \quad (4.5)$$

En el caso de la resolución del problema de máximos de campo en configuraciones con potenciales de electrodo variables en el tiempo, la geometría de los numerosos problemas de campo que hay que resolver es siempre la misma, siendo los potenciales de los electrodos la única variación de un problema a otro. Por tanto cada uno de los problemas de campo se verá descrito por un sistema de ecuaciones con el mismo primer miembro y un segundo miembro distinto al de los demás. Esta característica permite el desarrollo de un método simplificado para la resolución de los numerosos problemas de campo que se deben definir en un estudio de máximos.

A lo largo de este capítulo se presentará el método desarrollado. Se comenzará por exponer la estructura del sistema de ecuaciones que define un problema de campo genérico, así como los métodos más comúnmente utilizados en la resolución del

mismo. Se verán después las dificultades que presentan estos métodos para adaptarse a una resolución razonable de problemas de campo con potenciales de electrodo variables en el tiempo. A continuación se describirán y justificarán las variaciones introducidas en dichos métodos para conseguir un procedimiento que permite resolver este tipo de problemas con un ahorro considerable de tiempo, medios y esfuerzos.

4.2 Construcción y estructura del sistema de ecuaciones

Un problema de campo genérico se presenta en una configuración formada por varios electrodos a potencial conocido (que puede ser fijo o variable en el tiempo), varias fronteras dieléctricas y un cierto número de electrodos a potencial flotante. La discretización de la configuración conducirá a la simulación de esta geometría con un determinado número de puntos localizados sobre los contornos :

- n_e puntos de contorno definidos sobre los electrodos a potencial conocido,
- n_d puntos de contorno sobre las fronteras dieléctricas,
- y n_f puntos de contorno definidos sobre los electrodos a potencial flotante.

Supuesto un número N_f de electrodos a potencial flotante, la resolución del problema de campo requiere por tanto el cálculo de $n_e + n_d + n_f + N_f$ valores:

- n_e valores de cargas libres, cada una correspondiente a un punto de contorno situado en la superficie de un electrodo a potencial conocido,
- n_d valores de cargas de polarización, cada una correspondiente a un punto de contorno situado en una frontera dieléctrica,
- n_f valores de cargas libres, cada una correspondiente a un punto de contorno situado en un electrodo a potencial flotante,
- y N_f valores del potencial desconocido de estos mismos electrodos.

De esta forma, la matriz de coeficientes $[A]$ es una matriz cuadrada de orden $n \times n$

y los vectores $[q]$ y $[\Phi]$ son vectores columna de orden n , siendo $n = n_e + n_d + n_f + N_f$,

Se define por tanto, un vector de incógnitas con las $n_e + n_f + n_d$ cargas incógnitas más los N_f potenciales incógnitas :

$$[q] = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_{e+d+f} \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_F \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

que será el vector de incógnitas de la ecuación matricial 4.5: $[A] \cdot [q] = [\Phi]$

En el vector 4.6, por razón de simplicidad, se utiliza como notación el siguiente convenio: subíndice e por la cantidad n_e , subíndice d por n_d , subíndice f por n_f y subíndice F por N_f . Este convenio se utilizará a lo largo de todo el presente capítulo.

La ordenación de las incógnitas dada en el vector 4.6 obliga a que las primeras columnas de la matriz de coeficientes contengan los coeficientes que operan sobre las cargas, y que las últimas columnas contengan los coeficientes que operan sobre los potenciales desconocidos de los electrodos a potencial flotante. Además, una ordenación de las entradas de la matriz de coeficientes que favorezca que las entradas de mayor valor absoluto se sitúen en la diagonal principal, favorece a su vez una resolución más sencilla del sistema de ecuaciones evitando intercambios de fila. Y como los coeficientes de mayor valor absoluto son los que afectan a las cargas correspondientes a los puntos de contorno donde se calcula el potencial, una buena colocación de las ecuaciones será aquella en la que se establecen las condiciones de contorno en cada punto (o sea cada ecuación) en el mismo orden en que se ordenan las incógnitas. Por ello, en la descripción de las $n_e + n_d + n_f + N_f$ ecuaciones que describen el problema de campo que sigue a continuación, se seguirá este criterio.

– **Ecuaciones correspondientes a las condiciones de contorno en los electrodos a potencial conocido:**

Se escriben n_e ecuaciones para establecer el potencial de cada uno de los n_e puntos de contorno sobre los electrodos a potencial conocido. Conforme se ha visto en el capítulo 2, cada una de ellas tendrá la forma:

$$\sum_{j=1}^{n_e+n_f+n_d} p_{ij} \cdot q_j = \Phi_i \tag{4.7}$$

para $i=1$ hasta n_e

Sin embargo esta ecuación sólo proporciona $n_e + n_f + n_d$ columnas en la matriz $[A]$ cuya dimensión es $n = n_e + n_f + n_d + N_f$, por lo que se necesita añadir N_f columnas más, que serán ceros.

Así, estas ecuaciones aportan a la ecuación matricial:

- n_e filas a la matriz de coeficientes con esta forma: $n_e + n_f + n_d$ columnas con los coeficientes de potencial p_{ij} y el resto, N_f columnas, con ceros:

$$\begin{array}{l} \text{Columna } n^\circ: \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_f \quad n_e+n_d+n_f+1 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_f+N_f \\ \text{Fila } i: \quad \quad p_{i,1} \quad p_{i,2} \quad \dots \quad p_{i,e+d+f} \quad \quad \quad 0 \quad \quad \dots \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

para $i = 1$ hasta n_e

- n_e entradas al vector de incógnitas: las n_e cargas libres correspondientes a los n_e puntos de contorno situados en los electrodos a potencial conocido. Se presentan a continuación estas entradas convenientemente subrayadas:

$$\begin{array}{l} \underline{\text{fila 1:}} \\ \underline{\text{fila 2:}} \\ \underline{\text{filas ...:}} \\ \underline{\text{fila } n_e:} \\ \text{fila } n_e+1: \\ \text{filas ...} \\ \text{fila } n_e+n_d+n_f: \\ \text{fila } n_e+n_d+n_f+1: \\ \text{filas:} \\ \text{fila } n_e+n_d+n_f+N_f: \end{array} \left(\begin{array}{l} \underline{q_1} \\ \underline{q_2} \\ \underline{\dots} \\ \underline{q_e} \\ q_{e+1} \\ \dots \\ q_{e+d+f} \\ \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_F \end{array} \right) \tag{4.8}$$

- n_e entradas al vector de términos independientes: los n_e potenciales conocidos correspondientes a los n_e puntos de contorno existentes en estos electrodos, de acuerdo con la ecuación 4.7. Estas entradas se presentan subrayadas a continuación:

$$\begin{array}{l}
 \underline{\text{fila 1:}} \\
 \underline{\text{filas ...:}} \\
 \underline{\text{fila } n_e:} \\
 \text{fila } n_e+1 \\
 \text{filas:} \\
 \text{fila } n_e+n_d+n_f: \\
 \text{fila } n_e+n_d+n_f+1: \\
 \text{filas:} \\
 \text{fila } n_e+n_d+n_f+N_f:
 \end{array}
 \left(\begin{array}{c}
 \underline{\Phi_1} \\
 \dots \\
 \underline{\Phi_e} \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0
 \end{array} \right) \quad (4.9)$$

- Ecuaciones correspondientes a las condiciones de contorno en las fronteras dieléctricas

Se escriben n_d ecuaciones para establecer las condiciones de contorno en los n_d puntos de contorno definidos sobre las fronteras dieléctricas.

Como se ha visto en el capítulo 2, los métodos SCM y BEM presentan evidentes ventajas para establecer las condiciones de contorno en las fronteras dieléctricas, sobre todo evitando problemas en la colocación de las cargas y limitando a la mitad el número de cargas necesarias para determinar el campo, entre otras. Por ello suelen ser el SCM y el BEM los métodos que se utilizan para estudiar las superficies dieléctricas. La condición de contorno utilizada por éstos establece el salto en el valor de la componente normal del campo a ambos lados de una frontera en la que solamente existen cargas de polarización:

$$\epsilon_A \cdot E_{nA} = \epsilon_B \cdot E_{nB} \quad (4.10)$$

siendo A y B dos puntos infinitamente próximos a un punto de contorno, y situados a ambos lados de la frontera, el primero en el medio A y el segundo en el medio B .

En el capítulo 2 se ha llamado $f_{ij,\eta}$ a los coeficientes que permiten establecer la

contribución de una carga q_j a la componente normal del campo en un punto P_i y, de acuerdo con esta nomenclatura, la componente normal de la intensidad de campo en un punto P_i cualquiera viene determinada por:

$$E_{ni} = \sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} f_{ij,\eta} \cdot q_j \quad (4.11)$$

La contribución del conjunto de la distribución de cargas a la intensidad de campo en un punto de una frontera dieléctrica determina el valor medio del campo a ambos lados de dicho punto, viniendo determinada la diferencia en la componente normal por la contribución de la densidad de carga localizada en el propio punto i [41]. Así, de acuerdo con las ecuaciones 2.87 y 2.120, las componentes normales de la intensidad de campo a ambos lados de la superficie dieléctrica son:

$$E_{ni,A} = \sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} f_{ij,\eta} \cdot q_j - \frac{q_i}{2\epsilon_0} \quad (4.12)$$

$$E_{ni,B} = \sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} f_{ij,\eta} \cdot q_j + \frac{q_i}{2\epsilon_0} \quad (4.13)$$

y así la condición de contorno 4.10 resulta:

$$\epsilon_A \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} f_{ij,\eta} \cdot q_j - \frac{q_i}{2\epsilon_0} \right) = \epsilon_B \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} f_{ij,\eta} \cdot q_j + \frac{q_i}{2\epsilon_0} \right) \quad (4.14)$$

Operando se obtiene la forma de las ecuaciones que aporta cada punto de contorno de una frontera dieléctrica en los métodos SCM y BEM:

$$\sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} f_{ij,\eta} \cdot q_j + \frac{\epsilon_B + \epsilon_A}{\epsilon_B - \epsilon_A} \cdot \frac{q_i}{2\epsilon_0} = 0 \quad (4.15)$$

para $i = n_e + 1$ hasta $n_e + n_d$

Sin embargo este tipo de ecuación sólo proporciona $n_e + n_f + n_d$ columnas a la matriz $[A]$, por lo que se necesitan añadir N_f columnas más que serán ceros. Así, estas ecuaciones aportan a la ecuación matricial:

- n_d filas a la matriz de coeficientes con esta forma: $n_e + n_f + n_d$ columnas con los coeficientes de la componente normal de la intensidad de campo y el

resto, N_f columnas, con ceros:

$$\begin{array}{l}
 \text{Columna } n^\circ: \quad 1 \quad \dots \quad i \quad \dots \quad n_e+n_d+n_f \quad n_e+n_d+n_f+1 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_f+N_f \\
 \text{Fila } i: \quad f_{i1,\eta} \quad \dots \quad f_{ii,\eta} + \frac{\epsilon_B + \epsilon_A}{2\epsilon_0(\epsilon_B - \epsilon_A)} \quad \dots \quad f_{ie+d+f,\eta} \quad 0 \quad \dots \quad 0
 \end{array}$$

para $i = n_e + 1$ hasta $n_e + n_d$

- n_d entradas al vector de incógnitas: las n_d cargas de polarización correspondientes a los n_d puntos de contorno situados sobre las fronteras dieléctricas. Se presentan a continuación convenientemente subrayadas:

$$\begin{array}{l}
 \text{fila } 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \underline{\text{fila } n_e + 1:} \\
 \underline{\text{filas } \dots} \\
 \underline{\text{fila } n_e + n_d:} \\
 \text{fila } n_e + n_d + 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e + n_d + n_f: \\
 \text{fila } n_e + n_d + n_f + 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e + n_f + n_d + N_f:
 \end{array}
 \left(\begin{array}{l}
 q_1 \\
 \dots \\
 \underline{q_{e+1}} \\
 \dots \\
 \underline{q_{e+d}} \\
 q_{e+d+1} \\
 \dots \\
 q_{e+d+f} \\
 \Phi_1 \\
 \dots \\
 \Phi_F
 \end{array} \right) \quad (4.16)$$

- n_d entradas en el vector de términos independientes, que, de acuerdo con la ecuación 4.15, son ceros. A continuación se representan subrayadas estas entradas :

$$\begin{array}{l}
 \text{fila } 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e: \\
 \underline{\text{fila } n_e + 1:} \\
 \underline{\text{filas } \dots} \\
 \underline{\text{fila } n_e + n_d:} \\
 \text{fila } n_e + n_d + 1: \\
 \text{filas } \dots \\
 \text{fila } n_e + n_d + n_f: \\
 \text{fila } n_e + n_d + n_f + 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e + n_d + n_f + N_f:
 \end{array}
 \left(\begin{array}{l}
 \Phi_1 \\
 \dots \\
 \Phi_e \\
 \underline{0} \\
 \dots \\
 \underline{0} \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0
 \end{array} \right) \quad (4.17)$$

- Ecuaciones correspondientes a las condiciones de contorno en los electrodos a potencial flotante

Se escriben n_f ecuaciones para establecer el potencial de cada uno de los n_f puntos de contorno sobre los electrodos a potencial flotante. Conforme se ha visto en el capítulo 2, cada una de ellas tendrá la forma:

$$\sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} p_{ij} \cdot q_j = \Phi_i^{(x)} \tag{4.18}$$

para $i = n_e+n_d + 1$ hasta $n_e+n_d + n_f$

En estas ecuaciones el segundo miembro es una incógnita mientras que en la estructura del sistema de ecuaciones las incógnitas deben estar en el primer miembro. Por ello se procede a situar el potencial desconocido en el primer miembro, quedando la ecuación:

$$\sum_{j=1}^{n_e+n_d+n_f} p_{ij} \cdot q_j - \Phi_i^{(x)} = 0 \tag{4.19}$$

Sin embargo esta ecuación sólo proporciona $n_e + n_d + n_f + 1$ columnas en la matriz $[A]$, por lo que es preciso añadir $N_f - 1$ columnas más, que serán ceros.

Por tanto, estas ecuaciones aportan a la ecuación matricial :

- n_f filas a la matriz de coeficientes con esta forma: $n_e + n_d + n_f$ columnas con los coeficientes de potencial p_{ij} , una columna con la constante $-I$, y el resto, $N_f - 1$ columnas, con ceros. Representando con n_{fi} el número de puntos de contorno del electrodo a potencial flotante número i , las n_{fi} filas que aporta el primer electrodo a potencial flotante a la matriz de coeficientes, tendrán la forma :

Columna	n°	1	...	$n_e+n_d+n_f$	$n_e+n_d+n_f+1$	$n_e+n_d+n_f+2$...	$n_e+n_d+n_f+N_f$
Fila	i	p_{i1}	...	$p_{i\ e+f+d}$	-1	0	...	0

para $i = n_e+n_d+1$ hasta $n_e+n_d+n_{f1}$.

Las siguientes n_{f2} filas que aportará el segundo electrodo a potencial flotante a la matriz de coeficientes serán :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \text{Columna } n^\circ & 1 & \dots & n_e+n_d+n_f & n_e+n_d+n_f+1 & n_e+n_d+n_f+2 & \dots & n_e+n_d+n_f+N_f \\
 \text{Fila } i & p_{i1} & \dots & p_{i\ e+f+d} & 0 & -1 & \dots & 0
 \end{array}$$

para $i = n_e+n_d+n_{f1} + 1$ hasta $n_e+n_d+n_{f1}+n_{f2}$.

Y así sucesivamente hasta el último electrodo a potencial flotante, cuyos puntos de contorno aportarán filas a la matriz de coeficientes de la forma:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \text{Columna } n^\circ & 1 & \dots & n_e+n_d+n_f & n_e+n_d+n_f+1 & n_e+n_d+n_f+2 & \dots & n_e+n_d+n_f+N_f \\
 \text{Fila } i & p_{i1} & \dots & p_{i\ e+f+d} & 0 & 0 & \dots & -1
 \end{array}$$

para $i = n_e+n_d+n_{f1} + n_{f2} + \dots + 1$ hasta $n_e+n_d+n_f$

- $n_f + N_f$ filas al vector de incógnitas: las n_f cargas libres correspondientes a los n_f puntos de contorno situados sobre los electrodos a potencial flotante, y los N_f potenciales desconocidos de los N_f electrodos de este tipo. Se presentan a continuación estas entradas convenientemente subrayadas:

$$\begin{array}{l}
 \text{fila } 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e+n_d: \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+1:} \\
 \underline{\text{filas } \dots:} \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+n_f:} \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+n_f+1:} \\
 \underline{\text{filas } \dots:} \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+n_f+N_f:}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{c}
 q_1 \\
 \dots \\
 q_{e+d} \\
 \underline{q_{e+d+1}} \\
 \dots \\
 \underline{q_{e+d+f}} \\
 \underline{\Phi_1} \\
 \dots \\
 \underline{\Phi_F}
 \end{array} \right) \tag{4.20}$$

- n_f entradas en el vector de términos independientes, que como se ve en la ecuación 4.19 son ceros. A continuación se presenta el vector de términos independientes subrayando las entradas aportadas por estas ecuaciones :

$$\begin{array}{l}
 \text{fila } 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e: \\
 \text{fila } n_e+1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+1:} \\
 \underline{\text{filas } \dots:} \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+n_f:} \\
 \text{fila } n_e+n_d+n_f+1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e+n_d+n_f+N_f:
 \end{array}
 \left(\begin{array}{c}
 \Phi_1 \\
 \dots \\
 \Phi_n \\
 0 \\
 \dots \\
 \underline{0} \\
 \dots \\
 \underline{0} \\
 0 \\
 \dots \\
 0
 \end{array} \right) \tag{4.21}$$

Sin embargo las ecuaciones correspondientes a los electrodos a potencial flotante aportan n_f ecuaciones pero también aportan $n_f + N_f$ incógnitas por lo que son necesarias N_f ecuaciones más. Se pueden establecer estas ecuaciones aplicando la ley de conservación de la carga a cada uno de los N_f electrodos a potencial flotante. Dado que estos electrodos están inicialmente descargados, al someterlos a un campo eléctrico las cargas libres se distribuirán sobre su superficie exterior permaneciendo nula la carga neta en cada uno, por lo que para el electrodo a potencial flotante k se puede establecer:

$$\sum_{j=n_e+n_d+n_{f1}+n_{f2}+\dots+n_{fk}}^{n_e+n_d+n_{f1}+n_{f2}+\dots+n_{fk}} g_{kj} \cdot q_j = 0 \quad (4.22)$$

para $k = n_e + n_d + n_f + 1$ hasta $n_e + n_d + n_f + N_f$, y siendo, igual que antes, n_{f1} el número de puntos de contorno situados sobre el primer electrodo a potencial flotante, n_{f2} el número de puntos de contorno situados sobre el segundo electrodo a potencial flotante, ..., y n_{fk} el número de puntos de contorno situados sobre el k -ésimo electrodo a potencial flotante. Los coeficientes g_{kj} toman los siguientes valores:

- valor 1 en el caso de representar el electrodo a potencial flotante con cargas discretas puntuales,
- la longitud del segmento de carga correspondiente en el caso de representarlo con cargas discretas rectilíneas o anulares.
- la contribución de la carga q_j a la integral de superficie que determina la carga total sobre el electrodo, en el caso de representarlo con cargas superficiales o elementos de contorno.

Estas ecuaciones se suelen situar en las últimas filas de la matriz de coeficientes, por lo que el subíndice k toma los valores indicados.

De acuerdo con esto, estas ecuaciones 4.22 proporcionan tantas filas a la matriz de coeficientes como electrodos, o conjuntos de electrodos interconectados, a potencial flotante existan. Cada una de estas filas contiene n_{fk} columnas con los coeficientes g_{mj} , siendo el resto de las columnas, tanto anteriores como posteriores, ceros. Por tanto, estas N_f filas aportadas a la matriz $[A]$ serán de la forma:

* Primera fila, correspondiente al primer electrodo a potencial flotante:

$$\begin{array}{l}
 \text{Columna } n^\circ: \quad 1 \quad \dots \quad n_e \quad n_e+n_d+1 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_{f1} \quad n_e+n_d+n_{f1}+1 \quad \dots \\
 \text{Fila } n_e+n_d+n_f+1: \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad g_{e+d+f+1 \ e+d+1} \quad \dots \quad g_{e+d+f+1 \ e+d+f1} \quad 0 \quad \dots
 \end{array}$$

* Segunda fila, correspondiente al segundo electrodo a potencial flotante:

$$\begin{array}{l}
 \text{Columna } n^\circ: \quad 1 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_{f1} \quad n_e+n_d+n_{f1}+1 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_{f1}+n_{f2} \quad n_e+n_d+n_{f1}+n_{f2}+1 \quad \dots \\
 \text{Fila } n_e+n_d+n_f+2: \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad g_{e+d+f+2 \ e+d+f1+1} \quad \dots \quad g_{e+d+f+2 \ e+d+f1+f2} \quad 0 \quad \dots
 \end{array}$$

* etc, hasta llegar a la última fila de la matriz que será:

$$\begin{array}{l}
 \text{Columna } n^\circ: \quad 1 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_{f1}+\dots+n_{f(N_f-1)}+1 \quad \dots \quad n_e+n_d+n_f \quad n_e+n_d+n_f+1 \quad \dots \\
 \text{Fila } n_e+n_d+n_f+N_f: \quad 0 \quad \dots \quad g_{e+d+f+F, \ e+d+f1+\dots+f(N_f-1)+1} \quad \dots \quad g_{e+d+f+F, \ e+d+f} \quad 0 \quad \dots
 \end{array}$$

Las ecuaciones 4.22 no aportan entradas nuevas al vector incógnitas pues las cargas que aparecen en ellas son las cargas situadas en los electrodos a potencial flotante, o sea las mismas cargas que aparecen en la ecuación 4.19 y subrayadas en el vector 4.20, pero aportan N_f ceros al vector de términos independientes que se presentan a continuación convenientemente subrayados:

$$\begin{array}{l}
 \text{fila } 1: \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e \\
 \text{fila } n_e+1 \\
 \text{filas } \dots: \\
 \text{fila } n_e+n_d+n_f: \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+n_f+1:} \\
 \underline{\text{filas } \dots} \\
 \underline{\text{fila } n_e+n_d+n_f+N_f:}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{c}
 \Phi_1 \\
 \dots \\
 \Phi_n \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 \dots \\
 \underline{0}
 \end{array} \right) \quad (4.23)$$

De acuerdo con la forma aquí descrita de todas las entradas de la matriz de coeficientes, la matriz $[A]$ tendrá la forma general indicada en la figura 4.1.

Los coeficientes que aparecen primados en la figura 4.1 afectan a las cargas situadas en fronteras dieléctricas, y los que aparecen doblemente primados afectan a cargas situadas en los electrodos a potencial flotante, mientras que los que aparecen sin primar afectan a las cargas situadas en electrodos a potencial conocido. Se sigue el mismo convenio con las cargas.

Los coeficientes $F_{ii}^!$ correspondientes a cargas de polarización situadas sobre

fronteras dieléctricas, son las expresiones $f_{ii} + \frac{\epsilon_B + \epsilon_A}{\epsilon_B - \epsilon_A} \cdot \frac{1}{2\epsilon_0}$.

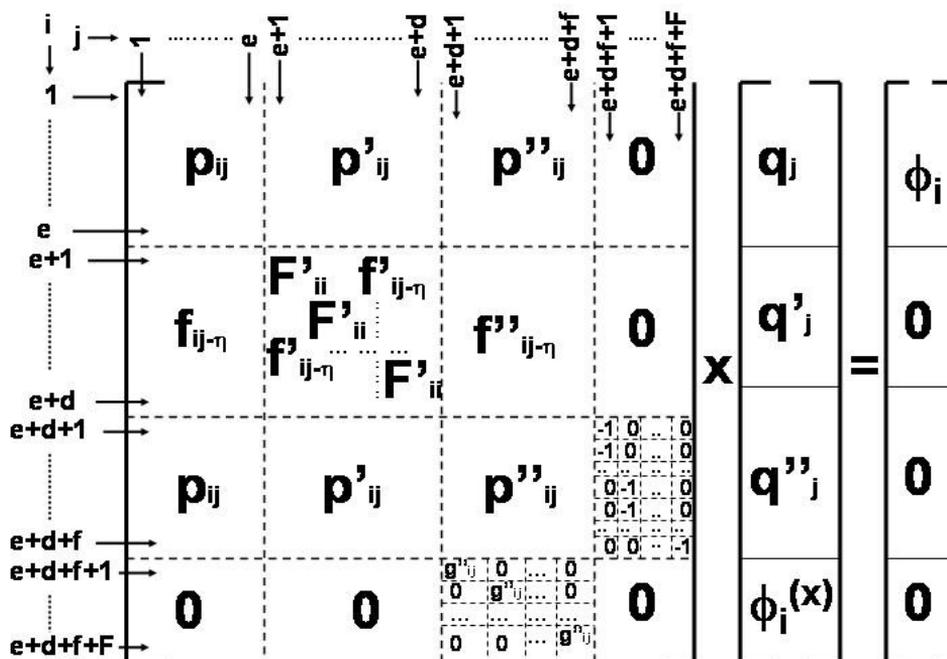


Figura 4.1 Detalle del sistema de ecuaciones en forma matricial

4.3 La resolución del sistema de ecuaciones

4.3.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Se presenta a continuación una revisión a los métodos más utilizados en la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales por ordenador. Posteriormente se describirá y justificará el método desarrollado en la presente tesis como más adecuado para la resolución de problemas de campo con tensiones de electrodo dependientes del tiempo.

Para la resolución de los grandes sistemas de ecuaciones el álgebra lineal ha desarrollado dos grandes grupos de métodos: los métodos iterativos y los métodos directos.

Los métodos iterativos [21] [15] [9] [35] generan una secuencia de vectores $[x]^{(0)}, [x]^{(1)}, \dots, [x]^{(n)}, \dots$ que aproximan la solución exacta:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [x]^{(i)} = [x]^{(*)} \quad (4.24)$$

donde $[x]^{(*)}$ es la solución del sistema.

Normalmente, a falta de información adicional, se inicia la iteración con el vector nulo, y se detiene después de la i -ésima iteración al minimizar alguna medida del error.

La secuencia recursiva general de un proceso iterativo es del tipo:

$$[x]^{(k+1)} = [M] \cdot [x]^{(k)} + [c] \quad (4.25)$$

siendo $[M]$ la matriz de iteración.

Dado un sistema de ecuaciones $[A][x] = [b]$, los métodos iterativos clásicos se basan en descomponer la matriz de coeficientes $[A]$ en otras dos matrices $[A_1]$ y $[A_2]$ tales que:

$$[A] = [A_1] + [A_2] \quad (4.26)$$

y así el sistema de ecuaciones adopta la forma:

$$\begin{aligned} [A][x] = [b] &\rightarrow ([A_1] + [A_2]) \cdot [x] = [b] \Rightarrow [A_1] \cdot [x] = -[A_2] \cdot [x] + [b] \Rightarrow \\ [x] &= -[A_1]^{-1} \cdot [A_2] \cdot [x] + [A_1]^{-1} \cdot [b] \end{aligned} \quad (4.27)$$

con lo que la matriz de iteración adopta la forma:

$$[M] = -[A_1]^{-1} \cdot [A_2] \quad (4.28)$$

y el vector $[c]$ de la secuencia recursiva general (ecuación 4.25) será:

$$[c] = [A_1]^{-1} \cdot [b] \quad (4.29)$$

De acuerdo con las expresiones 4.27 y siguientes, resulta evidente la conveniencia de establecer matrices $[A_1]$ que sean fácilmente invertibles.

Los métodos iterativos clásicos más utilizados son el de Jacobi, el de Gauss-Seidel y el de sobre-relajación SOR (Successive Over-Relaxation). Todos ellos parten de la descomposición de la matriz de coeficientes en otras tres:

$$[A]=[D]+[L]+[U] \quad (4.30)$$

siendo $[D]$ la matriz diagonal formada por las entradas de la diagonal principal de $[A]$, $[L]$ la matriz triangular inferior formada por las entradas situadas bajo la diagonal principal de la matriz $[A]$, y $[U]$ la matriz triangular superior formada por las entradas situadas sobre la diagonal principal de la matriz $[A]$.

El método de Jacobi toma $[A_1]=[D]$ y por tanto $[A_2]=[A]-[A_1]=[L]+[U]$. Así en el método de Jacobi, los parámetros de la secuencia recursiva general serán:

$$[M]=-[A_1]^{-1} \cdot [A_2]=-[D]^{-1} \cdot ([L]+[U]) \quad (4.31)$$

$$[c]=[A_1]^{-1} \cdot [b]=[D]^{-1} \cdot [b] \quad (4.32)$$

El método de Gauss-Seidel toma $[A_1]=[D]+[L]$ y por tanto $[A_2]=[A]-[A_1]=[U]$. Así los parámetros de la secuencia recursiva general serán:

$$[M]=-[A_1]^{-1} \cdot [A_2]=-([D]+[L])^{-1} \cdot [U] \quad (4.33)$$

$$[c]=[A_1]^{-1} \cdot [b]=([D]+[L])^{-1} \cdot [b] \quad (4.34)$$

Por su parte el método de sobre-relajación se suele considerar una variación del método de Gauss-Seidel, en el que se toma como $[A_1]=\omega^{-1}[D]+[L]$ y por tanto $[A_2]=[A]-[A_1]=(1-\omega^{-1})[D]+[U]$, siendo ω un escalar denominado parámetro de sobre-relajación. Y así los parámetros de la secuencia recursiva general serán:

$$[M]=-(\omega^{-1}[D]+[L])^{-1} \cdot ((1-\omega^{-1})[D]+[U]) \quad (4.35)$$

$$[c]=(\omega^{-1}[D]+[L])^{-1} \cdot [b] \quad (4.36)$$

Unos valores del parámetro de sobre-relajación comprendidos entre 0 y 2 garantizan la convergencia si el resto de las condiciones también lo hacen [29]. Sin embargo pocas veces es posible predecir un valor óptimo para el parámetro ω .

Todas estas secuencias recursivas expresan la búsqueda de un punto concreto de la función:

$$f(x)=[M] \cdot [x]+[c] \quad (4.37)$$

Se puede demostrar que esta secuencia converge siempre que el radio espectral

$\rho([M])$ de la matriz de iteración sea menor que I , siendo el radio espectral el máximo de los autovalores de $[M]$. La convergencia resulta ser más rápida cuanto más pequeño sea el radio espectral [29].

Una forma simple de evaluar esta condición de convergencia es comprobar si la matriz de coeficientes $[A]$ es de dominación diagonal estricta, lo que se produce cuando el valor absoluto de cada entrada en la diagonal sobrepasa a la suma de los valores absolutos de las demás entradas de la misma fila [21] [15]. En este caso, la rapidez de la convergencia depende de cuánto dominan las entradas de la diagonal a las demás entradas de la fila.

La iteración se detiene en base a algún criterio de parada que indique una minimización del error en la k -ésima iteración. Los métodos clásicos han venido utilizando como criterios de parada los propios resultados obtenidos en el proceso, controlando, por ejemplo, el momento en que el módulo del vector diferencia de dos soluciones sucesivas alcanza un valor lo suficientemente pequeño:

$$\frac{\| [x]^{(k)} - [x]^{(k-1)} \|_2}{\| [x]^{(k)} \|_2} \leq \epsilon \quad (4.38)$$

Obviamente se debe tener en cuenta el límite de precisión numérica del ordenador al establecer el valor de control.

En la mayoría de las ocasiones el método de Gauss-Seidel converge más rápidamente que el de Jacobi, y el de sobre-relajación con más rapidez que aquél, aunque existen excepciones. Sin embargo hay casos en los que ninguno converge, o que lo hacen con una lentitud tal que resultan inaplicables [21].

En los últimos años se ha desarrollado un nuevo grupo de métodos iterativos a partir del método del gradiente conjugado, a menudo conocidos como métodos de Krylov por trabajar con subespacios de este tipo, $K_i(A, v)$, generados por una base $\{v, Av, A^2v, \dots, A^{i-1}v\}$, y de forma que el resultado x_i de la i -ésima iteración se buscará en $x_i = x_0 + z_i$ con $z_i \in K_i(A, v)$. Estos métodos suelen ser más efectivos que los métodos clásicos debido a su carácter dinámico que evalúa la información obtenida en cada iteración.

La secuencia recursiva general característica de estos métodos carece de matriz de iteración, siendo su forma general:

$$[x]^{(k+1)} = [x]^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot [p]^{(k)} \quad (4.39)$$

donde el vector $[p]^{(k)}$ busca optimizar la dirección de búsqueda de la solución.

La forma de establecer el valor del parámetro $\alpha^{(k)}$, la determinación de las direcciones de búsqueda $[p]^{(k)}$ así como la utilización de diferentes técnicas de preconditionamiento de la matriz de coeficientes, tanto para generalizar el ámbito de aplicación del método como para acelerar su convergencia, distingue unos métodos de otros.

Una diferencia teóricamente importante de los métodos iterativos clásicos con los métodos de Krylov es que éstos son teóricamente capaces de determinar la solución exacta del sistema, por lo que en este sentido no serían estrictamente métodos iterativos aunque la metodología iterativa seguida en la resolución de los sistemas hace que se incluyan entre éstos. De hecho, en la mayoría de las ocasiones los límites de precisión de los ordenadores imposibilitan la determinación de la solución exacta por lo que, al igual que en cualquier método iterativo, se deben establecer secuencias de control para detener las iteraciones en el momento en que se optimice algún valor que minimice el error, normalmente el residuo o el mismo error. El residuo después de la iteración k-ésima se define como:

$$[r]^{(k)} = [A][x]^{(*)} - [A][x]^{(k)} \quad (4.40)$$

siendo $[x]^{(*)}$ la solución exacta del sistema. De esta forma, el residuo podrá calcularse así:

$$[r]^{(k)} = [b] - [A][x]^{(k)} \quad (4.41)$$

Por lo que respecta al error después de realizada la misma iteración k-ésima, éste será:

$$[e]^{(k)} = [x]^{(*)} - [x]^{(k)} \quad (4.42)$$

que, por tanto, se podrá calcular así:

$$[e]^{(k)} = [A]^{-1}[b] - [x]^{(k)} \quad (4.43)$$

Lo más habitual es utilizar como criterio de parada la norma del residuo de una u otra forma, por ejemplo controlando el momento en que su módulo alcanza un

valor lo suficientemente pequeño (inferior a una cierta tolerancia ϵ) [11]:

$$\frac{\| [b] - [A][x]^{(k)} \|_2}{\| [b] \|_2} \leq \epsilon \quad (4.44)$$

Estos métodos se han desarrollado introduciendo en el método del gradiente conjugado, variaciones apropiadas capaces de generalizar su aplicabilidad y de mejorar su robustez y convergencia. El método del gradiente conjugado es uno de los métodos iterativos más eficaces para resolver grandes sistemas de ecuaciones siempre que su matriz de coeficientes sea simétrica y definida positiva [39], además de grande y dispersa. Con este método se obtienen resultados óptimos en cuanto a minimalidad (mínima longitud de recurrencia) y optimalidad (óptima minimización del residuo). Sin embargo cuando se trata de problemas con matrices de coeficientes no simétricas y/o no definidas positivas, las dos propiedades anteriores no se pueden mantener simultáneamente en los métodos de resolución a implementar [11], por lo que se debe priorizar una u otra.

Para tratar los sistemas de ecuaciones con matrices de coeficientes no simétricas existen tres vías:

- 1) a través de la ecuación normal:

$$[A]^T [A][x] = [A]^T [b] \quad (4.45)$$

que sí tiene una matriz de coeficientes simétrica,

- 2) mediante la construcción de una base del subespacio de Krylov considerando relaciones biortogonales de tres términos,
- 3) o determinando todos los residuos para obtener una base ortonormal del subespacio de Krylov.

Con la primera vía surgen los llamados métodos de gradiente conjugado de la normal como el CGNR (Conjugate Gradient on the Normal Equations to Minimize Residual), el CGNE (Conjugate Gradient on the Normal Equations to Minimize Error), el GCR (Generalized Conjugate Residual), que sin embargo suelen presentar problemas de convergencia debido a los errores de redondeo.

Los métodos que siguen la segunda vía, como el QMR, el BiCG o el CGS, exigen

que la matriz de coeficientes sea definida positiva, teniendo una corta longitud de recurrencia (minimalidad) pero no la propiedad de optimalidad. Algunos de estos métodos tienen un alto coste computacional pues necesitan manejar, como los métodos anteriores, la matriz $[A]^T$. Esto lo consiguen mejorar otros métodos pero a costa de tener una convergencia mucho más irregular, y en los casos en que se consigue hacer ésta más regular es a costa de empeorar la velocidad de convergencia [11].

La tercera vía conduce a los métodos de residuo mínimo generalizado, los más potentes de los cuales se implementan a partir del GMRES (Generalized Minimal Residual), método desarrollado por Saad y Schultz [35] a mediados de los años 80. Son métodos que no necesitan que la matriz de coeficientes sea definida positiva (ni, claro está, simétrica), y vienen a mejorar sensiblemente los problemas de falta de convergencia y estabilidad que presentan los métodos anteriores. El método GMRES presenta ventajas adicionales en cuanto a que, en general, presenta menores necesidades de memoria y menor número de operaciones para llegar a una solución aceptable [35], habiéndose desarrollado preconditionadores específicos que mejoran su convergencia. Además, en los últimos años se han desarrollado numerosas variaciones de este método que vienen a mejorar los altos tiempos de computación y requisitos de memoria que en ciertas ocasiones presenta el método original [11].

En general, cuando la matriz de coeficientes es grande y dispersa, los algoritmos de iteración pueden ser más rápidos que los métodos directos, requerir menos tiempo de computación [35][39], así como, y sobre todo, provocar menores errores de redondeo [11]. Sin embargo, en la resolución de problemas de campo con métodos integrales la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones resultante es una matriz muy densa, por lo que los métodos iterativos resultan poco eficaces para resolverlo. En estos casos lo más conveniente es recurrir a alguno de los métodos del otro gran grupo de métodos de resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales, los métodos directos [39][15].

En efecto, el otro gran grupo de métodos utilizados para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales es el de los métodos directos, entre los cuales están el método de reducción de Gauss, el método de Gauss-Jordan, el método de la matriz inversa, y diferentes variaciones sobre ellos. A continuación se da una revisión detallada a estos métodos.

4.3.2 El método de eliminación de Gauss

El método de reducción de Gauss es ampliamente utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices de coeficientes grandes y densas, como las que se generan al estudiar el campo eléctrico con métodos integrales.

4.3.2.1 Operaciones elementales con matrices

El método de eliminación de Gauss consiste en la realización de operaciones elementales de fila aplicadas sistemáticamente a ambos miembros de la ecuación matricial que describe el sistema, y que transforman el sistema de ecuaciones original en otro más sencillo de resolver. Se aplican tres tipos de operaciones elementales de fila: operaciones de permutación de fila, operaciones de multiplicación de fila y operaciones de reemplazo de fila.

Las operaciones elementales de fila se realizan premultiplicando la matriz original por matrices elementales : matrices elementales de permutación de fila, matrices elementales de multiplicación de fila y matrices elementales de reemplazo de fila.

Las matrices elementales que pueden realizar una operación elemental de fila sobre una matriz genérica $[A]_{m \times n}$ son matrices cuadradas de $m \times m$ que se construyen aplicando la correspondiente operación elemental de fila sobre la matriz identidad $[I]_m$.

– Matriz permutación de fila E_{ij} o P_{ij} :

Una matriz elemental permutación de fila intercambia dos de las filas de otra matriz a la que pueda premultiplicar.

Se puede construir una matriz elemental permutación de fila, intercambiando dos de las filas de la matriz identidad. Por ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E_{13} = P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz elemental, E_{13} o P_{13} de orden $m \times m$, construida intercambiando las filas 1 y 3 de la matriz identidad I_m , permutará las filas 1 y 3 de cualquier otra matriz $A_{m \times n}$ a la que premultiplique.

En general, siendo $[A]$ una matriz de orden $m \times n$, la matriz elemental permutación capaz de permutar sus filas i y j será una matriz P_{ij} de orden $m \times m$ construida permutando las filas i y j de la matriz identidad I_m . De esta forma, al realizar la operación:

$$P_{ij} \cdot [A] = [A'] = [PA]$$

la matriz $[A']$, también llamada $[PA]$, aparece por intercambio las filas i y j e de la matriz $[A]$.

Entre las propiedades de las matrices permutación de fila cabe citar las siguientes:

1. Una matriz permutación, su inversa y su traspuesta son iguales:

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ji} \quad (4.46)$$

2. El producto de matrices permutación es otra matriz permutación capaz de realizar las mismas permutaciones de fila que las matrices originales, en orden riguroso. Así, denominando P_1 a la matriz elemental permutación capaz de realizar un primer intercambio de filas, P_2 a la matriz elemental permutación capaz de realizar un segundo intercambio de filas, ..., la matriz P producto de las anteriores:

$$P = P_s \cdot \dots \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1$$

es una matriz permutación de filas capaz de realizar, en el orden de multiplicación, todos los intercambios de fila que podrían realizar las matrices elementales originales.

– Matriz multiplicación de fila:

La matriz elemental de multiplicación de fila, aplicada a otra matriz a la que premultiplique, substituye una de las filas de ésta por un múltiplo o submúltiplo de

la misma.

Se puede construir una matriz elemental de multiplicación de fila aplicando la misma operación a la matriz identidad. Por ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E_3(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz elemental $E_3(C)$ de orden $m \times m$, construida multiplicando por C la 3ª fila de la matriz identidad I_m , multiplicará por la cantidad C la tercera fila de cualquier matriz $[A]_{m \times n}$ a la que se pueda aplicar.

En general, siendo $[A]$ una matriz de $m \times n$, la matriz elemental capaz de multiplicar por C su fila i será una matriz $E_i(C)$ de $m \times m$, derivada de la matriz identidad I_m , donde la fila i de ésta aparece multiplicada por C . Esto es equivalente a construir la matriz $E_i(C)$ por introducción de una entrada de valor C en la posición (i,i) de la matriz identidad.

De esta forma, al realizar la operación:

$$E_i(C) \cdot [A] = [A']$$

la matriz $[A']$ resulta de multiplicar por C la fila i de la matriz original $[A]$.

– Matriz elemental de reemplazo de fila

La matriz elemental de reemplazo de fila, aplicada a otra matriz a la que pueda premultiplicar, reemplaza una de las filas de ésta de por el resultado de sumarle un múltiplo de otra de sus filas.

Se puede construir una matriz elemental de reemplazo de fila, aplicando la misma operación a la matriz identidad. Por ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow E_{32}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz elemental $E_{32}(C)$ de orden $m \times m$, generada sumando a la tercera fila de la matriz identidad I_m el múltiplo C de la segunda fila, reemplazará la 3ª fila de la matriz a la que pueda premultiplicar por el resultado de sumarle el múltiplo C de la 2ª de sus filas a la 3ª fila original.

En general, siendo $[A]$ una matriz de $m \times n$, la matriz elemental capaz de reemplazar la fila i por el resultado de sumarle el múltiplo C de otra fila j de forma que sus entradas a_{ix} se vean alteradas a a'_{ix} :

$$a'_{ix} = a_{ix} + C \cdot a_{jx} \quad (\text{para } x = 1 \text{ hasta } n) \quad (4.47)$$

será una matriz $E_{ij}(C)$ de $m \times m$, derivada de la matriz identidad I_m , donde se ha reemplazado la fila i de ésta por el resultado de sumarle el múltiplo C de la fila j . Esto es equivalente a introducir una entrada de valor C en la posición ij de la matriz identidad.

De esta forma, al realizar la operación:

$$E_{ij}(C) \cdot [A] = [A']$$

la matriz $[A']$ resultará de sumarle a la fila i de la matriz original $[A]$ el múltiplo C de la fila j de la misma, de forma que las entradas originales a_{ix} se verán reemplazadas por las entradas a'_{ix} , de acuerdo con la ecuación (4.47).

Entre las propiedades de las matrices elementales de reemplazo de fila cabe citar las siguientes:

1. La matriz inversa de una matriz elemental de reemplazo de fila resulta de cambiar el signo de la constante C :

$$E_{ij}^{-1}(C) = E_{ij}(-C) \quad (4.48)$$

2. Dado que las matrices de este tipo o son triangulares inferiores o son triangulares superiores, si en un producto de varias de estas matrices todas ellas son triangulares inferiores (o superiores), su producto también lo será.
3. Dado el producto de varias matrices elementales de reemplazo de fila, todas triangulares inferiores (o todas superiores) y diferentes, ordenadas de derecha a izquierda por número de columna

decreciente (creciente, si son matrices triangulares superiores):

$$\dots E_{i-3 j-1} \cdot E_{i-2 j-1} \cdot E_{i-1 j-1} \dots E_{i-2 j} \cdot E_{i-1 j} \cdot E_{i j} \dots = L \quad (4.49)$$

la matriz resultante es otra matriz triangular inferior (superior) cuyas entradas son justamente las entradas de las matrices que se han multiplicado.

4.3.2.2 Reducción de la matriz de coeficientes y resolución del sistema

La eliminación de Gauss consiste en transformar el sistema de ecuaciones original $[A][x] = [b]$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

en el sistema equivalente $Ux=b'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \dots \\ b'_n \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

a través de sucesivas operaciones elementales de fila aplicadas a ambos miembros de la ecuación 4.50.

El interés de este método descansa en la facilidad de resolución del sistema de ecuaciones 4.51 por simple sustitución regresiva.

La transformación se consigue a base de sucesivas y ordenadas operaciones de reemplazo de fila, realizadas por multiplicación de ambos miembros de la ecuación matricial 4.50 por matrices elementales de reemplazo de fila $E_{ij}(l_{ij})$. Cada una de estas operaciones reemplaza por cero una entrada a_{ij} , para todo $i > j$, a base de reemplazar la fila i por el resultado de sumarle el múltiplo l_{ij} de la fila j .

De acuerdo con la operación 4.47 para convertir en cero la entrada a_{ij} , el factor multiplicador en cada operación de fila tendrá que ser:

$$l_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \quad (4.52)$$

y de esta manera aparecerá un cero en a'_{ix} para $x = j$.

Estas operaciones se tienen que realizar ordenada y sistemáticamente, de forma que:

- Cada fila j consigue ceros en las entradas a_{ij} para todo $i > j$,
- La realización de la operación de reemplazo de fila capaz de convertir en cero la entrada a_{ij} requiere la realización previa de las operaciones de reemplazo de fila que hayan generado ceros en todas las entradas a_{rs} tales que $s < j$, y también en aquellas en que $s = j$ siempre que $r < i$ (y desde luego $r > j$).

Estas condiciones requieren que la aplicación de las matrices elementales de reemplazo de fila a ambos miembros de la ecuación 4.50 se realice por orden creciente de columnas:

$$E_{nn-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [A] \cdot [x] = E_{nn-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [b] \quad (4.53)$$

Así, al convertir en cero todo a_{ij} para $i > j$, se termina por convertir a la matriz $[A]$ en una matriz $[U]$ triangular superior:

$$E_{nn-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [A] = [U] \quad (4.54)$$

quedando la ecuación 4.53:

$$[U] \cdot [x] = E_{nn-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [b] \quad (4.55)$$

$$[U] \cdot [x] = [b'] \quad (4.56)$$

Sistema de ecuaciones que, dado el carácter triangular superior de la matriz $[U]$, resulta fácilmente resoluble por sustitución regresiva.

Hasta ahora se ha soslayado la posibilidad de aparición de singularidades y otros problemas operativos en las operaciones de fila. Y sin embargo, en la ecuación

4.52 se observa que si el valor absoluto de la entrada a_{ij} , que se encuentra en la llamada posición pivote, es lo suficiente pequeño aparecerá una singularidad que impedirá la construcción de la matriz elemental $E_{ij}(l_{ij})$. Este problema se soluciona buscando un pivote apropiado entre las entradas a_{ij} para todo $i > j$, o sea entre las entradas situadas por debajo de la posición pivote. El pivote será la entrada más grande que exista entre las entradas citadas. Una vez encontrado el pivote apropiado, se realiza una permutación de fila entre las filas i y j . Luego ya se puede continuar realizando la operación de reemplazo de fila correspondiente. El proceso de reducción de la matriz en este caso sería :

$$E_{n \ n-1} \cdot \dots \cdot E_{i+1 \ i} \cdot P_{ij} \cdot \dots \cdot E_{21} \cdot [A] \cdot [x] = E_{n \ n-1} \cdot \dots \cdot E_{i+1 \ i} \cdot P_{ij} \cdot \dots \cdot E_{21} \cdot [b] \quad (4.57)$$

$$[U] \cdot [x] = E_{n \ n-1} \cdot \dots \cdot E_{i+1 \ i} \cdot P_{ij} \cdot \dots \cdot E_{21} \cdot [b] \quad (4.58)$$

$$[U] \cdot [x] = [b']$$

La posible aparición de singularidades no es el único problema numérico que puede aparecer. Resultan también muy serios los problemas de redondeo que aparecen cuando se suman números de orden de magnitud muy diferente o se restan números casi iguales [21]. En estos casos puede haber una pérdida de precisión tan grande que conduzca a que la solución encontrada para el sistema de ecuaciones sea totalmente errónea. Este tipo de problemas aparecen cuando se utilizan pivotes excesivamente pequeños, por lo que el método que anteriormente se describió para evitar singularidades se puede generalizar para proceder de forma sistemática en la evitación de estos problemas. Se llama pivoteo parcial a una forma de proceder consistente en elegir el pivote buscando de forma sistemática la entrada más grande de entre las existentes en la columna del pivote y bajo su posición.

Existe también el procedimiento llamado pivoteo total consistente en buscar la entrada de mayor valor absoluto no sólo entre las filas bajo la posición pivote sino también entre las entradas de su propia fila. La experiencia muestra que este último procedimiento resulta excesivamente costoso sin aportar beneficios significativos en los casos habituales, por lo que apenas se utiliza [15].

Con la utilización del método de pivoteo parcial puede haber más de un intercambio de fila en el proceso de reducción de la matriz ampliada, pero el proceso sería exactamente el mismo que se ha indicado en la transformación del

sistema de ecuaciones original $[A] \cdot [x] = [b]$ en el sistema escalonado $[U] \cdot [x] = [b']$ por aplicación de las operaciones 4.57 y 4.58, pero utilizando todas las matrices elementales permutación de fila que se hagan necesarias.

4.3.2.3 Algoritmo de reducción por filas

El proceso descrito equivale a la reducción de la matriz aumentada $[A|b]$:

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad (4.59)$$

a través de sucesivas operaciones elementales de fila por las que dicha matriz se transforma en una matriz U escalonada por filas :

$$[U] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right) \quad (4.60)$$

La matriz 4.60 es una forma de expresar el sistema de ecuaciones 4.56, por lo que, conseguida ésta, ya se puede resolver el sistema por sustitución regresiva. Por tanto, el proceso algorítmico para la reducción de la matriz de coeficientes se inicia con la construcción de la matriz aumentada del sistema:

$$[A] = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

En esta matriz, cada posición de la diagonal principal \mathbf{jj} será una posición pivote bajo la cual todas las entradas, \mathbf{a}_{j+1j} , \mathbf{a}_{j+2j} , ..., \mathbf{a}_{ij} , \mathbf{a}_{i+1j} , ..., \mathbf{a}_{nj} , tendrán que sustituirse por ceros procediendo de forma ordenada. Cada cero exige una operación elemental de fila, de forma que, para conseguir un cero en la posición que ocupe la entrada \mathbf{a}_{ij} , se precisará la siguiente operación de fila:

$$a'_{ix} = a_{ix} + \left(\frac{-a_{ij}}{a_{jj}} \right) \cdot a_{jx} \quad (4.61)$$

para todo x desde 1 hasta n . Operación de fila que, al ejecutarse sobre la matriz aumentada, se completa con:

$$b'_i = b_i + \left(\frac{-a_{ij}}{a_{jj}} \right) \cdot b_j \quad (4.62)$$

Llamando l_{ij} al factor multiplicador, las operaciones anteriores se pueden expresar así:

$$a'_{ix} = a_{ix} + l_{ij} \cdot a_{jx} \quad (4.63)$$

$$b'_i = b_i + l_{ij} \cdot b_j \quad (4.64)$$

siendo:

$$l_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \quad (4.65)$$

Esta forma de proceder se ejecuta sistemáticamente, consiguiendo ceros primero bajo la posición pivote de la primera fila (posición 1,1), luego bajo la posición pivote de la segunda fila (posición 2,2), y así sucesivamente.

Antes de operar para conseguir ceros bajo una posición pivote, el primer paso es realizar el correspondiente pivoteo parcial para buscar pivote. Luego, el proceso indicado reduciría la matriz de forma adecuada.

Así por ejemplo, un estado intermedio de una matriz podría ser el de la expresión 4.66 siguiente. El estado indicado es el inmediatamente anterior a conseguir un cero en la posición \mathbf{ij} (en este momento ocupada por la entrada \mathbf{a}'_{ij}), siendo el pivote actual la entrada \mathbf{a}'_{jj} . Se indican primadas las entradas que ya se han visto

cambiadas por alguna o algunas operaciones de fila anteriores:

$$[A'/b'] = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2j} & \dots & a'_{2i} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{jj} & \dots & a'_{ji} & \dots & a'_{jn} & b'_j \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{i-1i} & \dots & a'_{i-1n} & b'_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{a'_{ij}} & \dots & a'_{ii} & \dots & a'_{in} & b'_i \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nj} & \dots & a'_{ni} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right) \quad (4.66)$$

Ahora la operación de fila indicada en la ecuación 4.61, con a'_{jj} actuando como pivote, conseguiría un cero en la posición ij y, conjuntamente con la ecuación 4.62, cambiaría las demás entradas no nulas de la fila i , de forma que la matriz anterior quedaría cambiada de la siguiente forma:

$$[A''/b''] = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2j} & \dots & a'_{2i} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{jj} & \dots & a'_{ji} & \dots & a'_{jn} & b'_j \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{i-1i} & \dots & a'_{i-1n} & b'_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{\underline{0}} & \dots & \underline{a''_{ii}} & \dots & \underline{a''_{in}} & \underline{b''_i} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nj} & \dots & a'_{ni} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right)$$

Se indican subrayadas, y doblemente primadas, las entradas de la fila i que han resultado cambiadas tras esta operación de fila.

El siguiente paso consistiría en realizar la operación de fila necesaria para que la entrada a'_{i+1j} se convierta en cero, lo que de paso, claro está, cambiaría todas las entradas no nulas de la fila $i+1$. A continuación se realizaría la operación de fila necesaria para convertir en cero la entrada a'_{i+2j} , y así sucesivamente hasta, por último, convertir en cero la entrada a'_{nn} . En ese momento se habrá obtenido la matriz escalonada por filas $[U|c]$ equivalente al sistema de ecuaciones original. El sistema $[U|c]$ se resuelve fácilmente por sustitución hacia atrás:

$$[U | c] = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2i} & \dots & a'_{2n-1} & a'_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{ii} & \dots & a'_{in-1} & a'_{in} & c_i \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{n-1n-1} & a_{n-1n} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a'_{nn} & c_n \end{array} \right)$$

Este procedimiento resulta el método más práctico para resolver aquellos problemas en los que las tensiones de electrodo no dependen del tiempo o donde, aun dependiendo del tiempo, resulta simple saber cuales son los valores de potencial que provocan el caso más desfavorable, como es el caso de los sistemas monofásicos. Sin embargo este procedimiento no resulta el más adecuado para resolver el gran número de problemas electrostáticos que se hace necesario solucionar en el caso de problemas con potenciales dependientes del tiempo, si no resulta absolutamente evidente cual es la distribución de potenciales más desfavorable.

4.3.3 Otros métodos directos de resolución de sistemas

Otro método directo de resolver los grandes sistemas de ecuaciones es el método de Gauss-Jordan.

Así como la eliminación de Gauss consiste en obtener una matriz escalonada por filas equivalente a la matriz ampliada del sistema, el método de Gauss-Jordan consiste en obtener la matriz escalonada reducida por filas equivalente a la matriz del sistema, para lo cual cada fila pivote opera no sólo sobre las filas por debajo de ella sino también sobre las filas situadas por encima. En los problemas electrostáticos, en los que la matriz de coeficientes es cuadrada, la matriz escalonada reducida por filas correspondiente es la matriz identidad, por lo que el método de Gauss-Jordan consiste en aplicar ordenadamente las operaciones elementales de fila necesarias para pasar del sistema de ecuaciones original $[A] \cdot [x] = [b]$ al sistema $[I] \cdot [x] = [b']$, donde, por tanto, el vector $[b']$ es el vector solución.

Sin embargo este método presenta ciertas desventajas sobre la reducción de Gauss dado que, siendo n el número de ecuaciones del sistema, exige aproximadamente $n^3+n^2/2-n/2$ operaciones, lo que representa aproximadamente n^3 operaciones para n grande como es el caso de los problemas que aquí se trata de resolver, mientras que la reducción de Gauss precisa $2n^3/3+3n^2/2-7n/6$ operaciones, o sea aproximadamente $2n^3/3$ operaciones [15][10]. Se ve por tanto que el método de Gauss-Jordan requiere un 50% más de operaciones que la reducción de Gauss, de aquí que se prefiera esta última.

Existen versiones modificadas del método de Gauss-Jordan [15][28] que requieren exactamente el mismo número de operaciones que la eliminación de Gauss para resolver el sistema, pero en todo caso no presentan ninguna mejora operacional sobre éste.

Otro método directo de resolver el sistema de ecuaciones $[A][x] = [b]$ es calcular la matriz inversa $[A]^{-1}$, de forma que:

$$[x]=[A]^{-1}[b] \quad (4.67)$$

El cálculo más simple de $[A]^{-1}$ consiste en aplicar las operaciones elementales de fila necesarias para que la matriz de coeficientes $[A]_{n \times n}$ aumentada en la matriz identidad $[I]_n$ ($[A \mid I]$) se convierta en la matriz $[I \mid B]$, pues en este caso $[B]$ es precisamente la matriz inversa $[A]^{-1}$ [10][21]. Por tanto, se trataría de aplicar el algoritmo necesario para reducir la matriz de coeficientes $[A]$ a la matriz identidad $[I]$, lo que automáticamente convertiría a la matriz $[I]$ en la matriz $[A]^{-1}$.

$$[A:I] \rightarrow [I:A^{-1}] \quad (4.68)$$

Una vez calculada la matriz inversa A^{-1} , la ecuación 4.67 permite calcular la solución directamente.

Este método no es utilizado para resolver grandes sistemas de ecuaciones pues requiere $2n^3$ operaciones [15], un número sensiblemente mayor que la reducción de Gauss.

4.3.4 Limitaciones de los métodos directos

El proceso de reducción de Gauss presenta serias limitaciones para el tipo de

problemas con geometría fija y tensiones variables en el tiempo que aquí interesa resolver. En efecto en estos casos existe una sola matriz de coeficientes $[A]$ pero tantos vectores de términos independientes $[b]$ como conjuntos de tensiones interese estudiar. Y el método de Gauss reduce la matriz ampliada $[A \mid b]$ por lo que, en principio, cada cambio de tensiones y por tanto de vector $[b]$, daría lugar a una nueva matriz ampliada a reducir.

En realidad, no resulta necesario volver a reducir la matriz ampliada completa después de la primera vez pues, en el proceso de reducción de la matriz, las entradas de $[b]$ sólo afectan a otras entradas de $[b]$ por lo que las entradas de la matriz escalonada por filas resultante de la reducción de la matriz aumentada serán siempre las mismas salvo las de la última columna. Por ello, con cada cambio de vector $[b]$ sólo sería necesario someter a éste a todas y cada una de las operaciones de fila que se hicieron necesarias para reducir a la primera matriz ampliada. Pero para esto se hace necesario recordar todas las operaciones de fila realizadas la primera vez. Una forma práctica de mantener este recuerdo es realizar la factorización LU de la matriz de coeficientes.

4.4 La factorización LU

4.4.1 La factorización LU de la matriz de coeficientes

La resolución del sistema de ecuaciones utilizando la eliminación de Gauss es equivalente a resolverlo a través de una factorización de la matriz $[A]$ en un producto de matrices $[L][U]$, siempre que no existan intercambios de filas durante el proceso.

La factorización LU de la matriz de coeficientes consiste por tanto, en descomponer la matriz de coeficientes $[A]$ en el producto de dos matrices, una matriz $[L]$ triangular inferior y una matriz $[U]$ triangular superior:

$$[A]=[L]\cdot[U] \quad (4.69)$$

donde la matriz $[L]$ conserva el recuerdo de las operaciones de reemplazo de fila, que es precisamente lo que se necesita para simplificar la resolución de los

problemas de campo con potenciales dependientes del tiempo.

Se puede plantear el proceso de factorización partiendo de la conversión de la matriz de coeficientes en una matriz escalonada por filas por aplicación de sucesivas operaciones de reemplazo de fila, como ya se ha visto. En la ecuación 4.54 aparece representado el proceso de conversión:

$$E_{nn-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [A] = [U]$$

Si en la expresión anterior se multiplica en ambos miembros de forma ordenada por las inversas de las matrices elementales de reemplazo de fila, se obtiene:

$$[A] = E_{21}^{-1} \cdot E_{31}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n1}^{-1} \cdot E_{32}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n2}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{nn-1}^{-1} \cdot [U] \quad (4.70)$$

Y, de acuerdo con la tercera de las propiedades de las matrices elementales de reemplazo de fila citadas en el punto 4.3.2.1, el producto de las inversas de las matrices elementales en el orden en que aparecen en la ecuación 4.70, tiene que producir una matriz triangular inferior, con unos en la diagonal y cuyas entradas bajo ella son precisamente los factores l_{ij} aplicados en las operaciones de fila, cambiados de signo (ecuación 4.65). A esta matriz triangular inferior se le llama L , de forma que la ecuación 4.70 se transforma en la ecuación 4.69, $[A] = [L] \cdot [U]$, y así el sistema de ecuaciones $[A] \cdot [x] = [b]$ queda:

$$[L] \cdot [U] \cdot [x] = [b] \quad (4.71)$$

Este sistema resulta fácilmente resoluble en dos pasos:

1º Cálculo de un vector intermedio $[y]$ tal que:

$$[L] \cdot [y] = [b] \quad (4.72)$$

ecuación que se resuelve con facilidad por sustitución progresiva.

2º Y una vez conocido el vector intermedio $[y]$, cálculo del vector de incógnitas $[x]$:

$$[U] \cdot [x] = [y] \quad (4.73)$$

ecuación que se resuelve con facilidad por sustitución regresiva.

4.4.2 La factorización LU ante el intercambio de filas

La forma recién descrita para resolver el sistema de ecuaciones lineales resulta muy conveniente para enfrentar el problema de tensiones de electrodo variables en el tiempo, pues al ser la geometría de la configuración siempre la misma, la matriz $[A]$ también lo es, con lo que el trabajo fundamental de su determinación y posterior factorización LU no hay que repetirlo. Por tanto sólo habría que aplicar los dos pasos finales de la resolución (ecuaciones 4.72 y 4.73) para cada instante de tiempo en el que queramos resolver el problema de campo.

Sin embargo, según se acaba de ver, este proceso requiere que no haya intercambio de filas, y como se ha visto, el pivoteo parcial abre la posibilidad de que se produzcan estos intercambios por lo que hay que tomarlos en consideración. El problema es que en ese caso, en las operaciones sobre la matriz $[A]$ aparecen matrices permutación intercaladas entre las matrices elementales de reemplazo de fila, con lo que ya no es posible la construcción de la matriz $[L]$.

En efecto, aún cuando se produjese un único intercambio de fila, la situación final de la operación de triangulación de la matriz $[A]$ ya no sería la descrita en la ecuación 4.54 pues aparecería una matriz permutación intercalada entre las matrices elementales de reemplazo de fila. Por ejemplo, si la entrada a_{ii} no fuese la de mayor valor absoluto de entre las situadas por debajo en su columna, sino que lo fuera la entrada situada en la fila j , entonces el pivote tendría que ser la actual a_{ji} con lo que habría un intercambio de fila, y por tanto la matriz $[U]$ aparecería finalmente como resultado de las siguientes operaciones:

$$E_{n\ n-1} \cdot \dots \cdot E_{i+1\ i} \cdot P_{ij} \cdot E_{n\ i-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [A] = [U] \quad (4.74)$$

De esta forma, al operar ordenadamente con las matrices elementales inversas se tendrían las siguientes operaciones:

$$[A] = E_{21}^{-1} \cdot E_{31}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n1}^{-1} \cdot E_{32}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n2}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n\ i-1}^{-1} \cdot P_{ij} \cdot E_{i+1\ i}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n\ n-1}^{-1} \cdot [U] \quad (4.75)$$

Y así sería imposible construir la matriz $[L]$ pues aparecería una matriz permutación entre las matrices de reemplazo de fila (no se indica matriz permutación inversa con el exponente -1 pues una matriz permutación y su inversa son idénticas). Y la necesidad de realizar intercambios de fila no es una situación excepcional sino que a menudo resulta necesario realizar más de un intercambio, y algunas veces son numerosos los intercambios a realizar.

Sin embargo, si se pudiese saber, antes de comenzar la reducción de la matriz $[A]$, cuáles son las permutaciones de fila que se van a hacer necesarias, éstas se podrían realizar inicialmente. Y de esta forma, en vez de factorizar la matriz $[A]$, se factorizaría la matriz $[PA]$ en la que ya no sería necesario realizar intercambios de fila y por tanto ya no aparecerían matrices elementales permutación intercaladas entre las matrices elementales de reemplazo de fila. Con ello desaparecerían los problemas para la construcción de la matriz $[L]$, pues el sistema de ecuaciones a resolver sería:

$$P_k \cdot \dots \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot [A] \cdot [x] = P_k \cdot \dots \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot [b] \quad (4.76)$$

con lo que llamando $[PA]$ a la matriz $[A]$ una vez realizadas todas las permutaciones de fila necesarias, y $[Pb]$ al vector de términos independientes correspondiente, se podría representar el sistema de ecuaciones de la forma:

$$[PA] \cdot [x] = [Pb] \quad (4.77)$$

Ahora se podrían aplicar todas las operaciones de reemplazo de fila necesarias para obtener una matriz escalonada por filas equivalente a la matriz original, de forma que:

$$E_{n \ n-1} \cdot \dots \cdot E_{i+1 \ i} \cdot E_{n \ i-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [PA] = [U] \quad (4.78)$$

Con lo que, al operar ordenadamente con las matrices elementales inversas para, a partir de la matriz $[U]$, regresar a la matriz $[PA]$, se tendrían las siguientes operaciones:

$$[PA] = E_{21}^{-1} \cdot E_{31}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n1}^{-1} \cdot E_{32}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n2}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{i+1 \ i}^{-1} \cdot P_{ij} \cdot E_{i+1 \ i}^{-1} \cdot \dots \cdot E_{n \ n-1}^{-1} \cdot [U] \quad (4.79)$$

Y de esta forma se podría construir la matriz $[L]$ quedando:

$$[PA] = [L] \cdot [U] \quad (4.80)$$

Resultando el sistema de ecuaciones :

$$[L] \cdot [U] \cdot [x] = [Pb] \quad (4.81)$$

Que se podría resolver de la forma explicada anteriormente:

1º Cálculo del vector intermedio $[y]$ tal que:

$$[L] \cdot [y] = [Pb] \quad (4.82)$$

2º Cálculo del vector de incógnitas $[x]$ en:

$$[U] \cdot [x] = [y] \quad (4.83)$$

Sin embargo, no es posible prever las permutaciones de fila antes de iniciar el proceso de reducción de la matriz de coeficientes, por lo que parece que habría que aplicar una primera eliminación de Gauss para ver las permutaciones de fila necesarias, luego volver a la matriz original del sistema y reordenarla de acuerdo con éstas, para finalmente proceder a su factorización LU . Sin embargo se verá a continuación que es posible simular el proceso de factorización de la matriz reordenada trabajando a lo largo del proceso de reducción de la matriz sin reordenar.

4.4.3 La factorización LU con búsqueda de pivote

Como se ha visto la dificultad de realizar la factorización LU de forma razonablemente económica reside en que durante el proceso de reducción de la matriz de coeficientes con pivoteo parcial, es habitual que se necesite realizar permutaciones de fila. En efecto, en el pivoteo parcial se debe buscar aquella entrada que, situada en la columna de la posición pivote y por debajo de ella, pueda ser el pivote. En la expresión 4.84 se ilustra esta situación. En esta expresión se representa el estado de la matriz en el momento en que se debe elegir pivote para la posición ii , para lo que se debe realizar el correspondiente pivoteo parcial buscando la entrada de mayor valor absoluto entre las entradas a_{ri} para $r \geq i$ (entre las entradas subrayadas):

$$[A'] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2i} & \dots & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{a_{ii}} & \dots & a'_{ij} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{a'_{ji}} & \dots & a'_{jj} & \dots & a'_{jn} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{a'_{ni}} & \dots & a'_{nj} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Con lo que, si se encuentra ese nuevo pivote por ejemplo en la fila j , la matriz quedará reordenada de la siguiente manera:

$$[A'] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2i} & \dots & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{ji(ii)} & \dots & a'_{jj(ij)} & \dots & a'_{jn(in)} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{ii(ji)} & \dots & a'_{ij(jj)} & \dots & a'_{in(jn)} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{ni} & \dots & a'_{nj} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Se indican entre paréntesis los índices de la posición.

Las operaciones realizadas hasta este momento sobre la matriz $[A]$ son por tanto las siguientes:

$$P_{ij} \cdot E_{ni-1} \cdot \dots \cdot E_{n2} \cdot \dots \cdot E_{32} \cdot E_{n1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [A] \tag{4.85}$$

En cada una de estas operaciones, cada fila opera sobre las siguientes, y, en este ejemplo, las filas que hasta ahora han operado sobre las siguientes son las filas de la 1 a la $i-1$, apareciendo la dificultad al intentar conseguir un pivote en la fila i antes de que ésta opere sobre las siguientes. Es decir, hasta este momento las filas comprendidas entre la i y la n han sido filas pasivas sobre las que han operado las filas anteriores, pero que ellas mismas no han operado, y por tanto no han influido en los cambios de ninguna otra. Dado por tanto que las entradas actuales en las $n-i+1$ últimas filas son las que son en función de sus entradas iniciales, de las entradas que han tenido las $i-1$ primeras filas y de la posición en que se encontraban estas primeras filas, se comprueba que las entradas de las filas i y j hubieran sido las mismas fuera cual fuera el orden de sus filas hasta este momento siempre que hubiesen estado siempre por debajo de la fila $i-1$ como será siempre el caso. Por tanto, las entradas de las filas i y j hubieran sido las mismas si estas filas hubieran sido cambiadas inicialmente en vez de serlo en este momento, por lo que se da la siguiente propiedad:

$$P_{ij} \cdot E_{ni-1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot [A] = E_{ni-1} \cdot \dots \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot P_{ij} \cdot [A] \tag{4.86}$$

De acuerdo con esto, si en el proceso de reducción de la matriz de coeficientes

existen un número cualquiera de permutaciones de fila y por tanto la situación final es la siguiente (se nombran ahora las matrices elementales permutación y sustitución de fila por su número de orden):

$$\dots \cdot P_k \cdot \dots \cdot E_{j+1} \cdot E_j \cdot \dots \cdot P_2 \cdot \dots \cdot E_{i+1} \cdot E_i \cdot \dots \cdot P_1 \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot [A] = [U] \quad (4.87)$$

de acuerdo con la propiedad enunciada en la ecuación 4.86, esta situación es equivalente a la siguiente:

$$\dots \cdot E_{j+1} \cdot E_j \cdot \dots \cdot E_{i+1} \cdot E_i \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot P_k \cdot \dots \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot [A] = [U] \quad (4.88)$$

Con lo que las primeras operaciones de las matrices permutación sobre la matriz de coeficientes proporcionan precisamente la matriz $[PA]$, o sea:

$$\dots \cdot E_{j+1} \cdot E_j \cdot \dots \cdot E_{i+1} \cdot E_i \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot [PA] = [U] \quad (4.89)$$

Y multiplicando ahora ordenadamente por las matrices inversas de las matrices elementales de operación de fila, se tendrá:

$$[PA] = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_i^{-1} \cdot E_{i+1}^{-1} \cdot \dots \cdot E_j^{-1} \cdot E_{j+1}^{-1} \cdot [U] \quad (4.90)$$

Y por lo tanto se puede construir la matriz $[L]$, teniendo:

$$[PA] = [L] \cdot [U] \quad (4.91)$$

Es decir, es la misma situación que si se hubiesen realizado todas las permutaciones de fila inicialmente, antes de comenzar el proceso de reducción de la matriz de coeficientes, por lo que se puede resolver de igual manera. Es decir el sistema de ecuaciones original:

$$[A] \cdot [x] = [b]$$

es formalmente equivalente al sistema reordenado:

$$[PA] \cdot [x] = [Pb]$$

con lo que el proceso de triangulación de la matriz de coeficientes con el método de búsqueda de pivote e intercambio de fila conduce a la misma ecuación 4.81:

$$[L] \cdot [U] \cdot [x] = [Pb]$$

que se puede resolver en los dos pasos descritos en las ecuaciones 4.82 y 4.83:

1º Cálculo del vector intermedio $[y]$ tal que: $[L] \cdot [y] = [Pb]$

2º Cálculo del vector solución $[x]$: $[U] \cdot [x] = [y]$

4.4.4 Aspectos operativos de la factorización LU

4.4.4.1 Almacenamiento de la matriz L e intercambios de fila

Como se ha dicho, la factorización LU se puede considerar como una reducción de Gauss más el recuerdo de las operaciones de reemplazo de fila aplicadas que se conserva en la matriz $[L]$.

Así visto pudiera parecer que el proceso de factorización LU no es un proceso precisamente económico en términos de gestión de memoria, dado que se pasa de necesitar manejar las n^2 entradas de la matriz $[A]$, a necesitar manejar también las n^2 entradas de la matriz $[U]$ más el mismo número de la matriz $[L]$. Sin embargo, el algoritmo de reducción de Gauss que aquí se utiliza en la factorización va construyendo la matriz $[U]$ sobre la matriz $[A]$, por lo que la matriz $[U]$ no ocupa memoria extra. Además, dado que sus entradas por debajo de la diagonal principal son nulas, y son precisamente estas posiciones las que contienen entradas no nulas en la matriz $[L]$, se guardan las entradas de ésta última bajo las entradas de la matriz $[U]$. Con este procedimiento, la memoria utilizada por ambas matrices $[L]$ y $[U]$ es exactamente la misma que la utilizada por la matriz $[A]$ original (hay que recordar que las entradas de la diagonal principal de la matriz $[L]$ son siempre 1 por lo que no es necesario recordarlas).

Sin embargo esta forma de proceder podría presentar dificultades ante los posibles intercambios de fila provocados por el pivoteo parcial. Puede estudiarse el caso con el ejemplo visto en la matriz 4.84 donde se planteaba que, al elegir pivote para la posición ii , se necesitaba realizar un intercambio de fila entre las filas i y j . En la matriz 4.84 aparecían nulas todas las entradas a_{rs} para $s < i$ y $r > s$, conseguidas con operaciones de reemplazo de fila realizadas anteriormente. Sin embargo, con la gestión económica de memoria que se trata de hacer ahora, dichas entradas no serán nulas sino que contendrán los factores de multiplicación $-l_{rs}$. Es decir que, inmediatamente antes de proceder al intercambio entre las filas i y j , la situación

real no es la representada por la matriz 4.84 sino por la 4.92 (aparecen en negrita las entradas de la matriz $[L]$, y subrayadas las entradas que provocan el intercambio de filas):

$$[A'] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ i-1} & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ -l_{21} & a'_{22} & \dots & a_{2\ i-1} & a'_{2i} & \dots & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots \\ -l_{i-1\ 1} & -l_{i-1\ 2} & \dots & a'_{i-1\ i-1} & a'_{i-1\ i} & \dots & a'_{i-1\ j} & \dots & a'_{i-1\ n} \\ -l_{i1} & -l_{i2} & \dots & -l_{i\ i-1} & \underline{a'_{ii}} & \dots & a'_{ij} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots \\ -l_{j1} & -l_{j2} & \dots & -l_{j\ i-1} & \underline{a'_{ji}} & \dots & a'_{jj} & \dots & a'_{jn} \\ \dots & \dots \\ -l_{n1} & -l_{n2} & \dots & -l_{n\ i-1} & a'_{ni} & \dots & a'_{nj} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

Puede observarse que no existe problema alguno en intercambiar ambas filas completas, pues el intercambio arrastra a los factores de multiplicación, factores que obviamente ocuparían las mismas posiciones dentro de su fila si las filas i y j hubiesen estado intercambiadas desde el principio, pues su valor sólo depende de las filas anteriores a la i (que hubiesen sido las mismas) y del valor de las entradas iniciales en cada una de las filas i y j que obviamente sería el mismo sea cual fuere la posición que ocupasen estas filas. Por tanto hay que hacer el cambio de fila completo, incluidos los coeficientes multiplicadores (las entradas no nulas de la matriz $[L]$), lo que puede hacerse sin problema alguno.

Por otra parte no solamente resulta necesario recordar las operaciones de reemplazo de fila, sino que también resulta necesario recordar las operaciones de intercambio de fila realizadas dado que, para posteriormente poder resolver el sistema de ecuaciones 4.81, se debe utilizar el vector de términos independientes permutado $[Pb]$. En este sentido existen varias posibilidades que permitirían resolver esta necesidad, optándose aquí por crear un nuevo vector $[t]$ de orden n donde se almacena la posición definitiva de cada fila del vector de términos independientes original, de acuerdo con las permutaciones de fila que introduce el pivoteo parcial en la matriz de coeficientes del sistema. Se opta por esta forma de proceder pues se adapta óptimamente a las características de los problemas de campo con tensiones de electrodo dependientes del tiempo que se trata de resolver aquí.

4.4.4.2 Descarga de coeficientes en memoria

En los sistemas de ecuaciones especialmente grandes, la matriz de coeficientes permanece guardada en disco, descargándose en memoria dos bloques con un cierto número de filas completas cada uno, limitándose la búsqueda de pivote y el correspondiente intercambio de filas al primero de los bloques descargados en memoria. El tamaño de estos bloques depende lógicamente de la cantidad de memoria disponible, y puede fijarse de acuerdo con ésta, aunque cada tamaño máximo requerirá una compilación diferente del programa de cálculo utilizado.

Así, en el primero de los bloques descargados en memoria se realiza la búsqueda de pivotes y se generan ceros por debajo de éstos, mientras que en el segundo bloque, que contiene filas posteriores a las del primer bloque, únicamente se realizan operaciones de reemplazo de filas para generar ceros bajo las sucesivas posiciones pivote del primer bloque. Se opera primero sobre las filas del primer bloque situadas bajo los sucesivos pivotes, y luego se opera sobre todas las filas del segundo bloque.

Cuando se han generado ceros en las posiciones correspondientes de todas las filas del segundo bloque (las posiciones situadas bajo todos los pivotes del primer bloque), se descarga un nuevo bloque de filas posterior al anterior que pasa a ocupar las posiciones de memoria de éste, y se procede de igual forma. Así se actúa sistemáticamente hasta completar las operaciones de reemplazo de fila necesarias para conseguir ceros en todas las posiciones de la matriz de coeficientes bajo los sucesivos pivotes del primer bloque.

A continuación se descarga un nuevo bloque en las posiciones de memoria ocupadas por el primer bloque, y se procede a buscar pivotes en éste, y a realizar las operaciones de reemplazo de fila necesarias para conseguir ceros en las filas de éste. Y, posteriormente, se procede igual que antes en todas las filas de los sucesivos bloques que se descargan en el conjunto de posiciones de memoria correspondientes al segundo bloque.

Esta forma de proceder sistemáticamente permite realizar la factorización LU sin necesidad de tener en memoria la totalidad de la matriz de coeficientes. Y aunque limita la búsqueda de pivotes a las filas del primer bloque, funciona establemente siempre que el número de filas incluidas en cada bloque sea suficientemente grande.

4.4.4.3 El coste operacional del algoritmo LU

Se ha visto como la factorización LU es un método que permite superar la dificultad que plantea la eliminación de Gauss para resolver de forma razonable el problema de geometrías fijas con tensiones de electrodo variables en el tiempo, dado que permite recordar las operaciones de reemplazo de fila realizadas para escalonar la matriz de coeficientes. Se verá ahora además como el método de la factorización LU tiene un coste operacional mínimo para guardar dicho recuerdo.

En efecto, el número de operaciones necesarias para la resolución del sistema de ecuaciones utilizando la factorización LU es exactamente el mismo que en la eliminación de Gauss, encontrándose la única diferencia entre ambos métodos en la forma de operar sobre el vector de términos independientes. En la eliminación de Gauss las operaciones sobre la columna de términos independientes se realizan a la vez que se realizan las operaciones de reemplazo de fila en la matriz de coeficientes, mientras que en la factorización LU se realizan en el primer paso del proceso de resolución (ecuación 4.72: $[L] \cdot [y] = [b]$), pero las operaciones son exactamente las mismas en ambos casos. De hecho el vector intermedio $[y]$ es precisamente el vector de términos independientes transformado por aplicación de las mismas operaciones de reemplazo de fila que las aplicadas en la eliminación de Gauss a la matriz ampliada. En efecto, al examinar la ecuación 4.56 ($[U] \cdot [x] = [b']$) correspondiente al resultado final de la eliminación de Gauss de la matriz ampliada, y la ecuación 4.73 ($[U] \cdot [x] = [y]$) correspondiente al segundo paso de la resolución por factorización LU , y dado que en ambos casos la matriz $[U]$ es la misma pues procede de la reducción de la matriz $[A]$ con las mismas operaciones elementales de fila, la forma de ambas ecuaciones exige que el vector intermedio $[y]$ tiene que ser igual al vector $[b']$ transformado por las operaciones elementales de fila aplicadas a la matriz ampliada.

Exponiendo en detalle el recuento de operaciones en ambos casos, se obtienen los siguientes valores:

- En la eliminación de Gauss:
 - operaciones necesarias para reducir la matriz ampliada [21]:

$$[A \mid b] \rightarrow [U \mid b'] : \frac{2 \cdot n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7 \cdot n}{6} \text{ operaciones, siendo } n \text{ el número}$$

de ecuaciones (y por tanto el rango de la matriz).

- operaciones necesarias para solucionar el sistema por sustitución regresiva:

$$[U] \cdot [x] = [b'] : n^2 \text{ operaciones}$$

- Por tanto, operaciones totales [21] [15]:

$$N^{\circ}operaciones = \frac{2 \cdot n^3}{3} + \frac{3 \cdot n^2}{2} - \frac{7 \cdot n}{6} \quad (4.93)$$

- En la factorización LU:

- operaciones necesarias para factorizar la matriz de coeficientes::

$$[A] \rightarrow [L] \cdot [U] : \frac{2 \cdot n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} \text{ operaciones}$$

- operaciones necesarias para buscar el vector [y] intermedio:

$$[L] \cdot [y] = [b] : n^2 - n \text{ operaciones}$$

- operaciones necesarias para buscar el vector solución:

$$[U] \cdot [x] = [y] : n^2 \text{ operaciones}$$

- Por tanto, operaciones totales:

$$N^{\circ}operaciones = \frac{2 \cdot n^3}{3} + \frac{3 \cdot n^2}{2} - \frac{7 \cdot n}{6} \quad (4.94)$$

Por tanto, según se ve en las expresiones 4.93 y 4.94, en ambos casos la resolución del sistema requiere :

$$N^{\circ}operaciones = \frac{2 \cdot n^3}{3} + \frac{3 \cdot n^2}{2} - \frac{7 \cdot n}{6} \quad (4.95)$$

Para n grande, como es habitual en los problemas de campo eléctrico, el número de operaciones en ambos casos se puede aproximar a:

$$N^{\circ}operaciones = \frac{2 \cdot n^3}{3} \quad (4.96)$$

Se comprueba así que la factorización LU no requiere ni una sola operación más que el propio método de eliminación de Gauss, por lo que posee una eficacia máxima para recordar las operaciones elementales de reemplazo de fila aplicadas en la reducción de la matriz $[A]$ a su forma escalonada.

4.5 Las soluciones elementales

El procedimiento hasta aquí descrito evita tener que escalonar la matriz de coeficientes del sistema para cada problema de campo definido por un valor diferente de los potenciales de electrodo, pues factoriza únicamente la matriz de coeficientes que no cambia de un problema a otro.

De esta forma la factorización LU sólo se realiza una vez para todos los problemas de campo que se quieran resolver con esa misma geometría.

Sin embargo aunque de esta manera se ha simplificado el problema, aún resulta bastante tedioso resolver este sistema para los numerosos casos de diferentes potenciales de electrodo que a menudo se deben estudiar.

Pero los sistemas de ecuaciones que definen los problemas de campo en configuraciones reales tienen una característica adicional que permite aplicar un método más simple a su resolución, y esta característica es que el número de entradas diferentes existentes en el vector de términos independientes suele ser muy pequeño.

4.5.1 Definición de soluciones elementales en sistemas lineales

El carácter lineal de los sistemas de ecuaciones que describen los problemas de campo permite considerarlos como la superposición de un conjunto de sistemas de ecuaciones más simples.

En efecto, sea $[A] \cdot [x] = [b]$ un sistema de ecuaciones lineales. Su vector solución $[x]^{(*)}$ cumple pues:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(*)} \\ x_2^{(*)} \\ x_3^{(*)} \\ \dots \\ x_n^{(*)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

Dado el carácter lineal del sistema de ecuaciones, éste se puede descomponer en el siguiente conjunto de sistemas:

$$[A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

cuyos vectores solución $[x]^{(i)}$ satisfacen las ecuaciones:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \\ \dots \\ x_n^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \dots \\ x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

Siendo la solución del sistema de ecuaciones original la suma de las soluciones de los n sistemas 4.98 expuestas en la expresión 4.99. En efecto, al sumar miembro a miembro las n ecuaciones incluidas en la expresión 4.99, se obtiene:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + \dots + x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + \dots + x_2^{(n)} \\ x_3^{(1)} + x_3^{(2)} + x_3^{(3)} + \dots + x_3^{(n)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + x_n^{(3)} + \dots + x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Con lo que, comparando las ecuaciones 4.97 y 4.100 se puede observar que el vector solución del sistema de ecuaciones original coincide con el vector suma de las soluciones de los n sistemas de ecuaciones de la expresión 4.98:

$$[x]^{(*)} = \sum_{i=1}^n [x]^{(i)} \quad (4.101)$$

El carácter lineal del sistema de ecuaciones original también permite descomponerlo en este otro conjunto de sistemas de ecuaciones con los segundos miembros aún más simples:

$$[A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

cuyas soluciones $[x]^{(i)}$ obviamente cumplirán:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \\ \dots \\ x_n^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \dots \\ x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

Para conseguir la solución del sistema de ecuaciones original a partir de las soluciones de estos otros sistemas, es preciso combinar linealmente las soluciones de éstos, afectando la solución del primer sistema con el factor b_1 , a la solución del segundo sistema con el factor b_2 , a la solución del tercero con el factor b_3 Realizando de esta manera la suma ponderada de las ecuaciones 4.103 se obtiene como resultado:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} b_1 \cdot x_1^{(1)} + b_1 \cdot x_1^{(2)} + b_1 \cdot x_1^{(3)} + \dots + b_1 \cdot x_1^{(n)} \\ b_2 \cdot x_2^{(1)} + b_2 \cdot x_2^{(2)} + b_2 \cdot x_2^{(3)} + \dots + b_2 \cdot x_2^{(n)} \\ b_3 \cdot x_3^{(1)} + b_3 \cdot x_3^{(2)} + b_3 \cdot x_3^{(3)} + \dots + b_3 \cdot x_3^{(n)} \\ \dots \\ b_n \cdot x_n^{(1)} + b_n \cdot x_n^{(2)} + b_n \cdot x_n^{(3)} + \dots + b_n \cdot x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

Con lo que, comparando la ecuación 4.97 con la 4.104, se puede observar que el vector solución del sistema de ecuaciones original es una combinación lineal de los vectores solución de los n sistemas de ecuaciones de la expresión 4.102, lo que se puede expresar de la siguiente forma:

$$[x]^{(*)} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot [x]^{(i)} \tag{4.105}$$

Si se examina ahora un sistema de n ecuaciones con n incógnitas en cuyo vector de términos independientes sólo existen m valores diferentes ($m \ll n$), además de valores nulos:

$$[A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \\ b_k \\ \dots \\ b_m \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

su vector solución $[x]^{(*)}$ obviamente cumple:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(*)} \\ x_2^{(*)} \\ \dots \\ x_{i-1}^{(*)} \\ x_i^{(*)} \\ \dots \\ x_{j-1}^{(*)} \\ x_j^{(*)} \\ x_{j+1}^{(*)} \\ \dots \\ x_n^{(*)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \\ b_k \\ \dots \\ b_m \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.107}$$

El sistema 4.106 puede descomponerse en m sistemas elementales de la forma:

$$[A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

cuyas respectivos vectores solución $[x]^{(i)}$ cumplen:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_{i-1}^{(1)} \\ x_i^{(1)} \\ \dots \\ x_{j-1}^{(1)} \\ x_j^{(1)} \\ x_{j+1}^{(1)} \\ x_{j+2}^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_{i-1}^{(k)} \\ x_i^{(k)} \\ \dots \\ x_{j-1}^{(k)} \\ x_j^{(k)} \\ x_{j+1}^{(k)} \\ x_{j+2}^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; [A] \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ \dots \\ x_{i-1}^{(m)} \\ x_i^{(m)} \\ \dots \\ x_{j-1}^{(m)} \\ x_j^{(m)} \\ x_{j+1}^{(m)} \\ x_{j+2}^{(m)} \\ \dots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

Se puede observar que para conseguir la solución del sistema de ecuaciones original a partir de las soluciones de estos otros sistemas, basta combinar éstas linealmente.

En efecto, realizando la suma ponderada de las expresiones 4.109, utilizando como coeficientes multiplicadores las entradas diferentes de cero del vector de términos independientes del sistema de ecuaciones original, se obtiene la expresión 4.110:

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} b^{(1)} \cdot x_1^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_1^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_1^{(m)} \\ b^{(1)} \cdot x_2^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_2^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_2^{(m)} \\ \dots \\ b^{(1)} \cdot x_i^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_i^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_i^{(m)} \\ b^{(1)} \cdot x_{i+1}^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_{i+1}^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_{i+1}^{(m)} \\ \dots \\ b^{(1)} \cdot x_{j-1}^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_{j-1}^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_{j-1}^{(m)} \\ b^{(1)} \cdot x_j^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_j^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_j^{(m)} \\ \dots \\ b^{(1)} \cdot x_{n-1}^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_{n-1}^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_{n-1}^{(m)} \\ b^{(1)} \cdot x_n^{(1)} + \dots + b^{(k)} \cdot x_n^{(k)} + \dots + b^{(m)} \cdot x_n^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \\ b_k \\ \dots \\ b_m \\ b_m \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

Y la solución de este sistema coincide con la del sistema original, por lo que:

$$[x]^{(*)} = \sum_{i=1}^m b_i \cdot [x]^{(i)} \quad (4.111)$$

De acuerdo con esto: dada una ecuación matricial, se llamarán vectores elementales de términos independientes $[I]^{(i)}$ correspondientes a la misma, a todos aquellos vectores diferentes formados a partir del vector de términos independientes de la ecuación original, en el que un grupo de entradas iguales entre sí $b_i \neq 0$ se han substituido por unos, y el resto de las entradas por ceros. De esta manera, en cada ecuación matricial se podrán definir tantos vectores elementales de términos independientes como entradas diferentes, y diferentes de cero, haya en el vector de términos independientes original.

Igualmente, se llamarán soluciones elementales de un sistema de ecuaciones a las soluciones $[x]^{(i)}$ que se obtienen resolviendo cada una de las ecuaciones matriciales formadas con la matriz de coeficientes original y uno de sus vectores elementales de términos independientes $[I]^{(i)}$.

Se llamará conjunto de ecuaciones matriciales elementales equivalente a una ecuación matricial original, al conjunto de todos los sistemas de ecuaciones diferentes que se pueden establecer con la misma matriz de coeficientes que el sistema original y cada uno de los vectores elementales de términos independientes $[I]^{(i)}$ correspondientes a la misma. Con este procedimiento, cada vector elemental

de términos independientes $[I]^{(i)}$ establece una ecuación matricial elemental.

Utilizando esta terminología, la solución del sistema de ecuaciones original es la combinación lineal de sus soluciones elementales afectadas de los valores de las entradas diferentes de cero del vector de términos independientes original (expresión 4.111).

4.5.2 Las soluciones elementales en los problemas de campo

En un sistema de ecuaciones que describe un problema de campo $[A][q]=[Φ]$ como en cualquier sistema de ecuaciones, habrá una solución elemental por cada vector elemental de términos independientes que se genere a partir del sistema original. Y como se ha visto, cada uno de los valores diferentes, y diferentes de cero, que aparezcan en el segundo miembro del sistema de ecuaciones original genera un vector elemental de términos independientes. Pues bien, en el sistema de ecuaciones de un problema de campo, las ecuaciones son de la forma 4.7 cuando son generadas por puntos de contorno situados sobre electrodos a potencial conocido, y son de la forma 4.15 cuando son aportadas por puntos de contorno sobre fronteras dieléctricas, y de la forma 4.19 y 4.22 cuando son aportadas por puntos de contorno sobre electrodos a potencial flotante. Y de estos cuatro tipos de ecuaciones sólo las ecuaciones 4.7, correspondientes a electrodos a potencial dado, aportan valores diferentes de cero al vector de términos independientes. Así, ni las fronteras dieléctricas ni los electrodos a potencial flotante generan vectores elementales de términos independientes, y por tanto tampoco generan soluciones elementales. Por tanto, en general habrá muy pocas soluciones elementales en los sistemas de ecuaciones que definen problemas de campo.

De todas formas, el cálculo de la solución de un sistema de ecuaciones lineales a través de la resolución de su conjunto de sistemas de ecuaciones elementales equivalente pudiera parecer de interés meramente académico, pues resulta evidente que es más económico resolver un sólo sistema de ecuaciones, el sistema original, que los m sistemas de ecuaciones elementales equivalentes y la posterior realización de una combinación lineal de sus soluciones. Sin embargo, este método resulta de una extraordinaria eficacia cuando se trata de resolver un número muy grande de sistemas de ecuaciones, todos con la misma matriz de coeficientes pero

diferentes vectores de términos independientes en los que siempre aparece el mismo número de entradas diferentes, nunca en número muy grande, y siempre en las mismas posiciones. En efecto, en estos casos, el conjunto de vectores elementales de términos independientes que se pueden definir para cada sistema son siempre los mismos, por lo que las soluciones elementales serán también las mismas para todos los sistemas de ecuaciones. De esta forma, una vez calculado el conjunto de soluciones elementales para cualquiera de los sistemas originales, la solución de este y de los demás sistemas se obtendrá por una simple combinación lineal de dichas soluciones elementales.

Este es el caso de los problemas de campo en configuraciones reales con potenciales de electrodo variables en el tiempo, donde el número de entradas diferentes y diferentes de cero en el vector de términos independientes es siempre el mismo y se encuentran situadas siempre en las mismas posiciones, siendo además su número raramente mayor de tres (que sería el caso de los sistemas trifásicos). Así, los sistemas de ecuaciones elementales a resolver, y por tanto los conjuntos de soluciones elementales a calcular serían tres, mientras que los instantes a resolver, y por tanto los vectores de términos independientes diferentes a considerar, pueden ser muchas decenas e incluso centenares. Por ello, el método desarrollado en la presente tesis resuelve el sistema de ecuaciones que define un problema de campo con tensiones de electrodo variables en el tiempo, utilizando soluciones elementales:

- 1) Se calculan las soluciones elementales del sistema de ecuaciones $[PA][q]=[P\Phi]$, habiendo tantas soluciones elementales como electrodos con amplitud de potencial y fase inicial diferente haya. Para ello se construye cada uno de los sistemas elementales estableciendo un vector elemental de términos independientes $[I]^{(i)}$, con entradas unidad en las posiciones correspondientes a un electrodo o grupo de electrodos con la misma amplitud de potencial y la misma fase inicial, y entradas nulas en las demás posiciones.

Por tanto se resuelve cada uno de los sistemas elementales:

$$[PA] \cdot [q]^{(i)} = [PI]^{(i)} \quad (4.112)$$

que, de acuerdo con la factorización LU , será:

$$[L] \cdot [U] \cdot [q]^{(i)} = [PI]^{(i)} \quad (4.113)$$

con un vector $[I]^{(i)}$ por cada electrodo o grupo de electrodos, convenientemente permutado a $[PI]^{(i)}$ de acuerdo con la reordenación de filas que la búsqueda de pivote haya provocado en la matriz de coeficientes. La resolución de este sistema de ecuaciones puede realizarse de forma similar a la indicada en las ecuaciones 4.82 y 4.83:

1º Cálculo del vector intermedio $[y]^{(i)}$ tal que:

$$[L] \cdot [y]^{(i)} = [PI]^{(i)} \quad (4.114)$$

2º Y cálculo del vector solución $[q]^{(i)}$ tal que:

$$[U] \cdot [q]^{(i)} = [y]^{(i)} \quad (4.115)$$

De esta forma se obtiene la solución elemental $[q]^{(i)}$ correspondiente al potencial unitario del conjunto de electrodos considerado. Se resuelve el sistema (ecuaciones 4.114 y 4.115) tantas veces como vectores elementales de términos independientes se hayan generado, obteniendo otras tantas soluciones elementales. Este número de resoluciones N_e , igual al número de conjuntos de electrodos con amplitud de potencial y fase inicial diferente, normalmente será un número muy inferior al número de instantes que puede interesar estudiar por lo que esta forma de proceder resulta muy rentable como se verá.

2) Una vez determinadas las N_e soluciones elementales, la solución correspondiente a un conjunto de potenciales reales será una combinación lineal de las soluciones elementales. Así, siendo las soluciones elementales N_e vectores $[q]^{(i)}$, dados unos potenciales reales $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{N_e}$, el vector $[q]^{(*)}$ con la solución correspondiente a estos potenciales reales, se obtendrá así:

$$[q]^{(*)} = \sum_{i=1}^{N_e} \Phi_i \cdot [q]^{(i)} \quad (4.116)$$

4.5.3 Las soluciones elementales ante potenciales variables

Se trata de evaluar las posibles ventajas que puede aportar la utilización de las soluciones elementales para la resolución de problemas de campo con potenciales

de electrodo variables en el tiempo, sobre todo comparativamente al otro método disponible, la resolución directa del sistema $LU\cdot q = P\Phi$ tantas veces como potenciales diferentes se haga necesario considerar.

Para realizar dicha evaluación se hace necesario estudiar dos aspectos críticos: los requerimientos de memoria y el tiempo de computación.

Por lo que respecta a los requerimientos de memoria, el método de resolución directa de cada sistema requiere básicamente n^2+n posiciones de memoria, siendo n el número de ecuaciones del sistema. Esta cantidad, para n grande, como es el caso de los problemas de campo, se puede aproximar a n^2 . En caso de la utilización de soluciones elementales se requiere una memoria adicional de $n\cdot N_e$ posiciones de memoria para las soluciones elementales, siendo N_e el número de soluciones elementales. N_e será siempre un número sensiblemente inferior a n , pues raramente superará un valor de tres, lo cual implica que para n grande, como es el caso de los problemas de campo, el sumando $n\cdot N_e$ es despreciable frente a n^2 . De esta forma, la utilización de las soluciones elementales presenta un incremento en los requerimientos de memoria prácticamente despreciable.

Por lo que respecta al tiempo de computación, en general resulta difícil de evaluar por métodos no experimentales, aunque una forma de valorarlo aproximadamente es determinando la complejidad computacional del problema [15] fijada por la cantidad de operaciones necesarias en cada caso [10]. Esta forma de proceder presenta ciertas dificultades por cuanto estrictamente requeriría la cuantificación de sumas/restas por un lado, de multiplicaciones por otro y de divisiones aún por otro, dado que el tiempo empleado por los ordenadores en las diferentes operaciones aritméticas es también diferente. Sin embargo no se suele considerar que esta diferenciación introduzca modificaciones notables a las conclusiones que se pueden extraer de su consideración global, por lo que los diferentes autores suelen realizar cómputos globales de operaciones aritméticas, a menudo llamadas flops (operaciones de punto flotante) [21][10].

Procediendo de esta manera, la resolución directa de cada sistema $LUq = P\Phi$, exige la resolución de las ecuaciones 4.82 y 4.83: $[L][y]=[P\Phi]$ y $[U][q]=[y]$ tantas veces como instantes queramos estudiar, y dado que la resolución de la primera de las ecuaciones anteriores exige un número de operaciones de $n\cdot(n-1)$, y la resolución de la segunda un número de n^2 operaciones [21], el número total de

operaciones a realizar será:

$$N^{\circ}\text{operaciones} = (n \cdot (n-1) + n^2) \cdot N_i$$

siendo N_i el número de instantes a estudiar, y por tanto el número de conjuntos de potenciales de electrodo, a considerar. Operando en la ecuación anterior, resulta:

$$N^{\circ}\text{operaciones}_{sse} = (2n-1) \cdot n \cdot N_i \quad (4.117)$$

representando el subíndice *sse* el significado "sin soluciones elementales".

Para n grande, el valor anterior se reduce a:

$$N^{\circ}\text{operaciones}_{sse} \approx 2n^2 N_i \quad (4.118)$$

Sin embargo la resolución del sistema con el método de las Soluciones Elementales exige resolver las ecuaciones 4.114 y 4.115 tantas veces como conjuntos de electrodos, o sea $(2n-1) \cdot n \cdot N_e$ operaciones, y además realizar posteriormente una combinación lineal (ecuación 4.116) en cada instante a estudiar, lo que exige realizar $(2N_e-1) \cdot n \cdot N_i$ operaciones adicionales en el total de instantes. Por lo tanto, el número de operaciones a realizar para resolver el sistema con el método de las Soluciones Elementales será la suma de ambas cantidades:

$$N^{\circ}\text{operaciones}_{cse} = (2n-1) \cdot n \cdot N_e + (2N_e-1) \cdot n \cdot N_i \quad (4.119)$$

representando el subíndice *cse* el significado "con soluciones elementales".

Para n grande, y con una simplificación conservadora para 4.119, se tendrá que:

$$N^{\circ}\text{operaciones}_{cse} \approx 2nN_e \cdot (n + N_i) \quad (4.120)$$

Una forma aproximada de evaluar el ahorro de tiempo que proporciona el método de las Soluciones Elementales puede ser relacionar el tiempo empleado sin soluciones elementales (t_{sse}) con el tiempo empleado utilizando las soluciones elementales (t_{cse}), y, considerando que cada uno de estos tiempos es proporcional al número de operaciones realizadas en cada caso, esta relación se puede expresar:

$$\frac{t_{sse}}{t_{cse}} \approx \frac{2n^2 N_i}{2nN_e \cdot (n + N_i)} = \frac{n \cdot N_i}{(n + N_i) \cdot N_e}$$

es decir:

$$\frac{t_{sse}}{t_{cse}} \approx \frac{n \cdot N_i}{(n + N_i) \cdot N_e} \quad (4.121)$$

En esta expresión se observa que para que el método de las soluciones elementales adquiera ventaja sobre el método directo basta que se cumpla la condición:

$$n \cdot N_i > (n + N_i) \cdot N_e$$

en la que operando para obtener una relación entre el número de instantes a estudiar y el número de electrodos electricamente diferentes, se obtiene:

$$N_i > \frac{n \cdot N_e}{n - N_e}$$

y como siempre $n \gg N_e$, la expresión anterior se convierte en:

$$N_i > \frac{n \cdot N_e}{n - N_e} \approx N_e \quad (4.122)$$

Con lo que se observa que basta con que el número de instantes (a menudo **180**) sea mayor que el número de electrodos eléctricamente diferentes (raramente más de **3**, caso de las configuraciones trifásicas), para que el método de las soluciones elementales obtenga ventaja sobre el método directo, lo que se cumple siempre con amplitud.

Más en detalle, a continuación se evaluará la ventaja concreta que el método de las soluciones elementales proporciona sobre el método directo, aplicando la expresión 4.121 a varios casos muy diferentes.

- 1) El primer caso a examinar será un caso extremo y que, como tal, se presentará muy raramente. Se trata del caso en el que N_i sea despreciable frente a n (por ejemplo **12** instantes a examinar en una configuración especialmente compleja definida con **5000** puntos de contorno). En este caso, la expresión 4.121 se convertirá en:

$$\frac{t_{sse}}{t_{cse}} \approx \frac{n \cdot N_i}{(n + N_i) \cdot N_e} \approx \frac{n \cdot N_i}{n \cdot N_e} = \frac{N_i}{N_e} \quad (4.123)$$

Se observa en este resultado la misma condición general obtenida en la expresión 4.122: para obtener ventaja del método de las Soluciones Elementales basta que el número de instantes a considerar sea mayor que el número de electrodos eléctricamente diferentes, siendo éstos raramente más de tres, como ya se ha citado. Esta condición lógicamente se producirá en la inmensa mayoría de los casos (por no decir en todos los casos), en los que N_i no sólo será mayor sino mucho mayor que N_e . Con los datos citados inicialmente se estaría comparando un valor de **12** frente a otro de **3**, o sea más de cuatro veces más tiempo empleado resolviendo el problema sin utilizar soluciones elementales que utilizándolas. Se verá a continuación que en cualquier caso más habitual que éste, la ventaja a favor del método de las Soluciones Elementales es bastante superior.

- 2) Un segundo caso a evaluar, mucho más habitual que el anterior, será el caso de una configuración también bastante compleja, o de la que se necesita tener un conocimiento muy preciso, y que por tanto estará definida por un gran número de puntos de contorno, por ejemplo del orden de **2500**, mientras que el número de instantes a considerar en una primera revisión a menudo serán **180**, uniformemente distribuidos durante el primer semiperiodo de los valores de fase, correspondiendo a valores de fase separados entre sí de grado en grado. Se trataría por tanto de un caso en el que $N_i \approx 0,08n$, por lo que la expresión 4.121 se convertirá en:

$$\frac{t_{sse}}{t_{cse}} \approx \frac{n \cdot N_i}{(n + N_i) \cdot N_e} = \frac{n \cdot 0,08 \cdot n}{(n + 0,08n) \cdot N_e} \approx \frac{n}{13,5 \cdot N_e} \quad (4.124)$$

donde n siempre será mucho mayor que $13,5N_e$. En concreto con los datos citados más arriba será dividir **2500** por **40,5** ($13,5 \cdot 3$), con lo que el tiempo de computación utilizando el método de las Soluciones Elementales será más de **60** veces inferior al empleado con el método directo.

- 3) Un tercer caso a evaluar, que también puede ser un caso habitual, será el de una configuración de un cierta complejidad, o de la que deseemos tener un conocimiento bastante preciso, en la que, por tanto, el número de puntos de contorno a considerar puede ser mayor de **1000**, mientras que el número de instantes a considerar en una primera revisión pueden ser **180**, uniformemente distribuidos a lo largo del primer semiperiodo de los

valores de fase igual que en el caso anterior. Sería éste un caso en el que $N_i \approx 0,2n$, por lo que la expresión 4.121 se convertirá en:

$$\frac{t_{sse}}{t_{cse}} \approx \frac{n \cdot N_i}{(n + N_i) \cdot N_e} = \frac{n \cdot 0,2 \cdot n}{(n + 0,2n) \cdot N_e} = \frac{n}{6 N_e} \quad (4.125)$$

donde n siempre será mucho mayor que $6N_e$. En concreto, con los datos citados inicialmente, el tiempo de computación con el método de las Soluciones Elementales será más de **50** veces inferior al tiempo de computación con el método directo (división de **1000** entre $6 \cdot 3 = 18$).

- 4) Un cuarto caso podría ser el de una configuración especialmente simple, en la que por tanto el número de puntos de contorno a considerar (entre **200** y **300**, por ejemplo) y el número de instantes a examinar (**180**) podrían ser del mismo orden, $N \approx n$. En este caso la expresión 4.121 se convertirá en:

$$\frac{t_{sse}}{t_{cse}} \approx \frac{n \cdot N_i}{(n + N_i) \cdot N_e} = \frac{n \cdot n}{(n + n) \cdot N_e} = \frac{n}{2 N_e} \quad (4.126)$$

donde **n** siempre será sensiblemente mayor que $2N_e$. Con los datos iniciales, $n=200$ y $2N_e=6$, el tiempo de computación con el método de las Soluciones Elementales será más de **30** veces inferior al tiempo empleado con el el método directo.

Se han evaluado hasta aquí un abanico de casos representativos de una gran cantidad de casos reales, en los que han quedado demostradas las ventajas de la utilización del método de las Soluciones Elementales frente a los métodos directos.

Otra forma de evaluar el ahorro de tiempo de computación que aporta la utilización de las soluciones elementales se puede hacer comparando los tiempos empleados en cada método por sustracción del número de operaciones necesarias en cada caso. Esta operación permitirá evaluar la cantidad absoluta de tiempo realmente ahorrada, que según las ecuaciones 4.117 y 4.119 será

$$\begin{aligned} t_{sse} - t_{cse} &= K \cdot \left\{ (2n - 1) \cdot n \cdot N_i - [(2n - 1) \cdot n \cdot N_e + (2N_e - 1) \cdot n \cdot N_i] \right\} \approx \\ &\approx K \cdot \left(2 \cdot (N_i - N_e) \cdot n^2 - 2N_e \cdot N_i \cdot n \right) \end{aligned} \quad (4.127)$$

Siendo K una constante de proporcionalidad. Este resultado puede aproximarse teniendo en cuenta que en este tipo de problemas normalmente $N_i \gg N_e$, y que siempre es $n \gg N_e$, por lo que la diferencia de tiempos quedaría:

$$t_{sse} - t_{cse} \approx K \cdot 2 \cdot n^2 \cdot N_i \quad (4.128)$$

En esta expresión 4.128 se comprueba que la diferencia de tiempos se hace mayor cuanto más puntos es necesario establecer para definir la configuración con precisión (ahorro proporcional a n^2), y cuantos más instantes se necesiten estudiar. Es decir, cuanto más complejo sea el problema y por tanto más crítico sea el problema del tiempo de computación, mayor es la ventaja del método de las Soluciones Elementales.

Para un caso extraño en el que no se cumpla la condición anterior y N_i no sea mucho mayor que N_e , la ventaja del método de las Soluciones Elementales puede ser inferior pero se puede comprobar que sigue siendo claramente ventajoso sobre el método directo. Así, tomando un caso en el que, por ejemplo, $N_i = 4 \cdot N_e$ (sería el caso del estudio de **12** instantes en una configuración trifásica), la ventaja del método de las soluciones elementales medido en ahorro absoluto de tiempo será, de acuerdo con la ecuación 4.127 :

$$\begin{aligned} t_{sse} - t_{cse} &= K \cdot (2 \cdot (N_i - N_e) \cdot n^2 - 2 N_e \cdot N_i \cdot n) = .. \\ &= K \cdot (2 \cdot n^2 \cdot (4N_e - N_e) - 2n \cdot N_e \cdot 4 N_e) = ... \\ &= K \cdot 2 \cdot n \cdot N_e (3n - 4N_e) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que siempre $3n \gg 4N_e$, el ahorro de tiempo absoluto utilizando las soluciones elementales será en este caso:

$$t_{sse} - t_{cse} \approx K \cdot 6 \cdot n^2 \cdot N_e = 1,5 \cdot K \cdot n^2 \cdot N_i \quad (4.129)$$

Se observa que el ahorro de tiempo sigue siendo importante en este caso (también proporcional a n^2) si se utilizan las soluciones elementales.

En los análisis de las ventajas que proporciona la utilización de las soluciones elementales realizados hasta aquí, se ha considerado que se realiza un único estudio temporal del comportamiento eléctrico de la configuración, o sea para un único conjunto de potenciales de electrodo. Sin embargo, en no pocos casos, una vez realizado un primer estudio de máximos espacio-temporales, es necesario

realizar estudios adicionales, ya sea buscando los resultados en otro intervalo temporal, o ya sea realizando un análisis más fino de parte del intervalo temporal inicial. Pues bien, el método de la resolución directa requeriría la nueva resolución del sistema de ecuaciones $LUq = P\Phi$ varias veces más, mientras que con la utilización de soluciones elementales sólo se requeriría la realización de varias combinaciones lineales (ecuación 4.116). Es decir, del orden de $2n^2$ operaciones en la resolución directa, frente a otro de $2N_e n$ operaciones con las soluciones elementales, por cada distribución adicional de potenciales de electrodo a resolver, y dado que siempre $N_e \ll n$, el tiempo adicional requerido será enormemente inferior en el caso de utilizar soluciones elementales. De esta manera, los ahorros en el tiempo de computación conseguidos con el método de las Soluciones Elementales serán realmente aún más considerables que los antes calculados.

4.6 El método de las Soluciones Elementales

Las siguientes consideraciones son válidas para cualquier método de cálculo en el que el campo se obtenga aplicando el método de los elementos de contorno, el método de las cargas superficiales, el método de las cargas discretas o una combinación de todos ellos.

De acuerdo con lo visto hasta aquí, el problema de campo consiste en el establecimiento y posterior resolución de un sistema de ecuaciones de la forma:

$$[A] \cdot [q] = [\Phi] \quad (4.130)$$

donde $[A]$ es una matriz de coeficientes de potencial, campo y carga muy densa, $[q]$ es un vector de densidades de carga y potenciales desconocidos, y $[\Phi]$ es un vector de potenciales y ceros, potenciales para las condiciones de contorno correspondientes a electrodos a potencial dado y ceros para las condiciones de contorno correspondientes a fronteras dieléctricas y electrodos a potencial flotante.

Cuando, de un problema de campo a otro solamente cambian las tensiones de los electrodos, manteniéndose la misma geometría, se establecerá un nuevo sistema de ecuaciones en el que sólo cambiará el segundo miembro.

En el método de las Soluciones Elementales los electrodos son agrupados en N_e

grupos de electrodos, de forma que dentro de cada grupo todos los electrodos tengan la misma tensión en todo instante. De esta forma el sistema de ecuaciones puede reescribirse de la siguiente forma:

$$[A] \cdot [q] = \Phi_1 \cdot [1]^{(1)} + \Phi_2 \cdot [1]^{(2)} + \dots + \Phi_{N_e} \cdot [1]^{(N_e)} \quad (4.131)$$

Donde Φ_i es la tensión del grupo de electrodos i , y $[1]^{(i)}$ es el vector elemental de términos independientes que contiene **unos** en las filas correspondientes a los puntos de contorno pertenecientes al conjunto de electrodos i y **ceros** en el resto de las filas.

El carácter lineal del sistema de ecuaciones permite escribir la solución para un conjunto dado de potenciales de electrodo como:

$$[q]^{(*)} = \Phi_1 \cdot [q]^{(1)} + \Phi_2 \cdot [q]^{(2)} + \dots + \Phi_{N_e} \cdot [q]^{(N_e)} \quad (4.132)$$

Donde $[q]^{(i)}$ es la solución del sistema elemental:

$$[A] \cdot [q] = [1]^{(i)} \quad (4.133)$$

Y el conjunto $\{ [q]^{(1)}, [q]^{(2)}, \dots, [q]^{(N_e)} \}$ es el conjunto de soluciones elementales del sistema original. Este conjunto de soluciones elementales determina la solución del sistema de ecuaciones original de acuerdo con la combinación lineal 4.132.

De esta manera el número de problemas a resolver para una configuración dada se reduce al número de potenciales de electrodo y fases independientes del sistema. En el caso de un sistema trifásico este número es siempre **tres** pues los electrodos a tierra y los electrodos a potencial flotante establecen ecuaciones con término independiente nulo y por lo tanto no generan una solución elemental.

La matriz del sistema se reduce una sola vez utilizando la factorización **LU** con pivoteo parcial. Para sistemas muy grandes (en términos de la cantidad de memoria **RAM** necesaria), la matriz del sistema se almacena en disco, descargándose en memoria dos bloques de filas cuyo tamaño se puede ajustar según la cantidad de memoria disponible (aunque en cada caso se debe compilar una versión del programa diferente según el valor de este parámetro). La búsqueda de pivote se restringe a las filas contenidas al primero de los dos bloques que coexisten en memoria.

No es necesaria memoria extra pues la matriz U se almacena en los lugares que inicialmente ocupa la matriz A , y la matriz L se almacena en los lugares donde la matriz U contiene ceros.

Dado que la búsqueda de pivote requiere intercambios de fila, cada una de las ecuaciones elementales a resolver es:

$$[PA] \cdot [q] = [PI]^{(i)} \quad (4.134)$$

Así, para cada conjunto de tensiones de electrodo, y teniendo en cuenta que $[PA] = [L] \cdot [U]$, el sistema elemental a resolver es:

$$[L] \cdot [U] \cdot [q] = [PI]^{(i)} \quad (4.135)$$

y se resuelve en los dos pasos expuestos en las ecuaciones 4.114 y 4.115:

1º Cálculo del vector intermedio $[y]^{(i)}$ por sustitución progresiva en:

$$[L] \cdot [y] = [PI]^{(i)}$$

2º Y cálculo del vector solución $[q]^{(i)}$ por sustitución regresiva en:

$$[U] \cdot [q] = [y]^{(i)}$$

Habrà que resolver N_e veces la ecuación 4.135 obteniéndose N_e soluciones elementales $[q]^{(i)}$, siendo N_e el número de conjuntos de electrodos existentes.

Una vez conocidas las N_e soluciones elementales $[q]^{(i)}$, la solución $[q]^{(*)}$ del sistema para un conjunto dado de N_e potenciales de electrodo se calculará con la ecuación 4.116:

$$[q]^{(*)} = \sum_{i=1}^{N_e} \Phi_i \cdot [q]^{(i)}$$

Capítulo 5 . Ejemplos de cálculo

5.1 Montaje de conductores paralelos con tensiones desfasadas

5.1.1 Descripción de la configuración

Se trata de estudiar el comportamiento eléctrico de la configuración descrita en el apartado 3.3.1, formada por dos conductores cilíndricos paralelos con tensiones sinusoidales desfasadas. Se han estudiado numerosos montajes, cada uno caracterizado por un valor del parámetro d/R que relaciona la

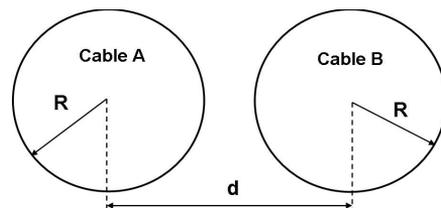


Figura 5.1 Montaje de dos conductores con tensiones desfasadas

distancia entre los centros de los conductores y su radio (figura 5.1). Los conductores tienen siempre las mismas características geométricas y eléctricas: 20 m de longitud y $1,8\text{ cm}$ de radio, con una amplitud de potencial de 1 kV y un desfase de $\psi = 60^\circ$ entre sus tensiones. Así, el sistema de tensiones de electrodo es:

$$\Phi_A = \text{sen}(\omega t) \quad (5.1)$$

$$\Phi_B = \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (5.2)$$

Cada conductor se ha descrito con **21** cargas superficiales y **35** armónicos en dirección acimutal. Así, el sistema de ecuaciones resultante tiene por tanto $2 \times 21 \times 36 = 1512$ incógnitas y otros tantos puntos de contorno. En cuanto a la distribución de los puntos de contorno, se han distribuido axialmente con una concentración doble en la parte central que en los extremos, mientras que en dirección acimutal se han distribuido uniformemente.

5.1.2 Objetivos del estudio

Se trata de aplicar el método desarrollado en la presente tesis al estudio detallado del comportamiento eléctrico de la configuración citada, con la finalidad de comprobar la utilidad y fiabilidad de las conclusiones extraídas en el estudio parcialmente analítico realizado en el apartado 3.3.1.

5.1.3 Aspectos estudiados

Se han investigado los valores de fase en que se produce la máxima intensidad de campo, el valor de ésta ($E_{m\acute{a}x}$) y su localización sobre la superficie de los conductores. Debido a las propiedades de las funciones de potencial en los conductores basta con estudiar el campo en medio periodo de la función $\Phi_A(0 \leq \omega t < 180^\circ)$. Se evalúa el campo en una sección transversal del montaje situada en la mitad de los **20 m** de longitud de los conductores.

Inicialmente se ha estudiado el campo que se produce con valores de fase diferenciados de grado en grado, y por tanto en **180** instantes a lo largo del primer semiperiodo, en los puntos de contorno situados en la sección transversal media de la superficie de los conductores (puntos separados **10°** entre sí). Una vez determinados los valores de fase en los que se produce la intensidad máxima de campo, cuando se ha deseado tener una mayor precisión en los resultados, se ha vuelto a buscar la intensidad máxima de campo en un intervalo de fases en torno al valor encontrado inicialmente, estudiando ahora valores de fase de décima en décima de grado.

Los valores de fase se citarán siempre con relación a Φ_A , y el valor de fase donde se produce la intensidad de campo máxima se nombrará ωt_{max} .

5.1.4 Resultados obtenidos

5.1.4.1 Modelización de la configuración

En el capítulo 3 se estudió esta configuración con la superposición de dos problemas de idéntica geometría, un problema *1* con los electrodos a igual potencial, y un problema *2* con potenciales de electrodo de igual valor y signo contrario. Sin embargo, debido a la imposibilidad de resolver exactamente el problema *1*, no fue posible realizar el estudio analítico completo

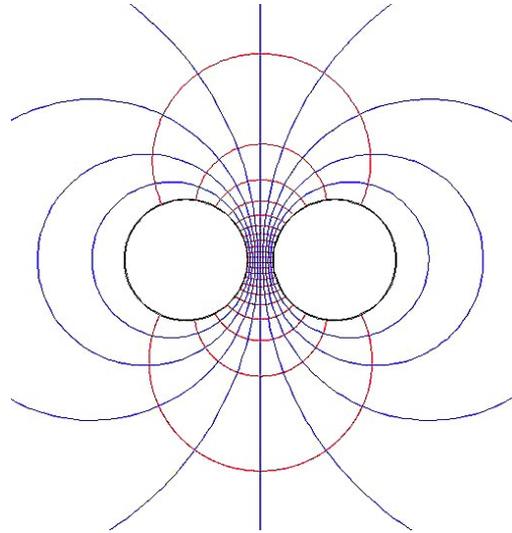


Figura 5.2 Distribución gráfica de campo en el problema 2 (electrodos con potenciales opuestos)

de la configuración por lo que no se pudo establecer la distribución de la intensidad de campo como una función del espacio y del tiempo. Aún así, el problema *2* (figura 5.2), que sí es posible resolver analíticamente de forma exacta, es determinante en la descripción de la configuración real cuando los cables se encuentran lo suficientemente próximos, por lo que en estos casos se puede aproximar el estudio de la configuración real con el estudio del problema *2*. Así, según este modelo de proximidad, la intensidad máxima de campo se tiene que localizar en el punto de la periferia de cada cable más próximo al otro cable, y se debe producir en el instante en que la diferencia de potencial entre ellos sea máxima, de acuerdo con las ecuaciones 3.31 y 3.29.

Sin embargo, si los cables no se encuentran muy próximos, la influencia de ambos problemas en el resultado global es similar, y en el problema *1* la influencia decisiva en la intensidad máxima de campo es el propio potencial de cada electrodo. De esta forma, el modelo de proximidad debe mostrar resultados cada vez más diferentes de los proporcionados por el estudio de la configuración real conforme los cables se alejan uno de otro, de forma que el valor de fase en el que

realmente aparece la intensidad máxima de campo se debe ir alejando del valor proporcionado por el problema 2 (ecuación 3.20), 30° en este ejemplo.

Dado que no se puede encontrar ningún caso en el que la influencia del problema 1 sea determinante, no cabe esperar que la intensidad máxima de campo se llegue a producir, ni siquiera aproximar, al valor de fase proporcionado por aquél, sea lo grande que sea el alejamiento entre cables. De todas formas sí cabe predecir un límite al valor de fase en el que se puede producir la intensidad máxima de campo en la superficie de cada electrodo cuando se encuentran muy alejados entre sí. En efecto, cualquier configuración formada por dos electrodos lo suficientemente alejados debe producir un campo sobre sus superficies muy similar al que se produciría en un electrodo aislado, por lo que el campo máximo en cada uno se debe producir en valores de fase cada vez más próximos a los que determinen el máximo potencial en su superficie. De acuerdo con esto y las ecuaciones 5.1 y 5.2, en los casos de mucho alejamiento entre cables los valores de ωt_{max} en el primer semiperiodo deben estar limitados por los siguientes valores:

$$\omega t_{max} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad (5.3)$$

para el cable **A**. Para el cable **B**, el valor límite de ωt_{max} será :

$$\omega t_{max} = \frac{\pi}{2} + \psi = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \quad (5.4)$$

Según este análisis, cuando los cables se alejan mucho uno de otro, la intensidad máxima de campo se debe producir en cada cable con valores de fase cada vez más próximos al valor en que se produce su pico de potencial. Así se puede establecer un nuevo modelo, esta vez para aproximar el comportamiento de las configuraciones que presenten un gran alejamiento entre cables, modelo de alejamiento, según el cual el campo en la superficie de los conductores debe evolucionar hacia el producido por un cable en solitario. Según este modelo de alejamiento, la evolución de ωt_{max} conforme los cables se alejan, debería ser la siguiente (en el primer semiperiodo): en el cable **A** debe aumentar desde 30° hacia un valor límite de 90° , y en el cable **B** debe disminuir primero desde 30° hasta 0° y luego disminuir desde 180° hacia un valor límite de 150° .

En el capítulo 3, se vio que, ante la imposibilidad de resolver la configuración real

de forma puramente analítica, la utilización de modelos puede ayudar a simplificar la resolución numérica del problema de máximos espacio-temporales correspondiente, acotando la búsqueda del máximo temporal que es siempre la parte más tediosa del problema general, sobre todo en el caso de aplicar métodos tradicionales a la resolución de este tipo de problemas. La principal dificultad que presenta esta forma de estudiar el problema es que ni el cálculo analítico ni la aplicación de modelos permiten establecer de forma precisa un intervalo de fases dentro del cual se tenga la garantía de encontrar el valor de fase en el que realmente se produce el máximo de campo buscado. Así, en este caso sólo se puede predecir que deberá existir una relación entre los límites del intervalo buscado y alguna cuantificación de los términos "**cables muy próximos**" o "**cables muy alejados**". Es decir se puede establecer de forma razonable que una distancia entre los centros de los cables igual a, por ejemplo, **2,3** veces su radio describe una configuración con los cables muy próximos, y que por tanto se puede esperar que el valor de fase en el que se produce el máximo de campo no se aleje mucho del valor dado por el modelo de proximidad. Sin embargo resulta mucho más difícil establecer un intervalo de fases estrecho y fiable para distancias entre cables sensiblemente superiores. Se estudiará este problema en detalle a continuación, comparando los resultados proporcionados por la aplicación de los modelos y los resultados obtenidos en la resolución numérica del problema. Tanto en este caso como en los ejemplos que se estudiarán más adelante, se considerarán los resultados del cálculo numérico como representativos de la situación real. De esta manera, cuando se hable de valores reales de las magnitudes eléctricas, se estará haciendo referencia a los obtenidos como resultado del cálculo numérico.

5.1.4.2 Estudio numérico de la configuración

En primer lugar se han estudiado montajes en los que los cables están muy próximos entre sí. En estos casos el modelo de proximidad predice que la intensidad máxima de campo se debe producir en ambos cables para un valor de fase no muy alejado del valor en que la diferencia de potencial entre ambos cables es máxima (**30°**). Esto se ha comprobado aplicando el método de las Soluciones Elementales desarrollado en la presente tesis con el que se ha resuelto el problema de máximos espacio-temporales correspondiente a cada montaje, lo que ha permitido comprobar la desviación entre las previsiones del modelo y la realidad.

Después se han continuado estudiando montajes en los que los cables van estando cada vez más alejados, y se han comprobando las desviaciones que se producen entre las previsiones proporcionadas por cada modelo, el de proximidad y el de alejamiento, y el comportamiento del montaje real.

Los resultados de estos estudios se presentan en las figuras 5.3 y 5.4 en las que se pueden observar los valores de fase ωt_{max} en los que realmente se produce el campo máximo sobre el conductor *A* en función de la distancia entre cables.

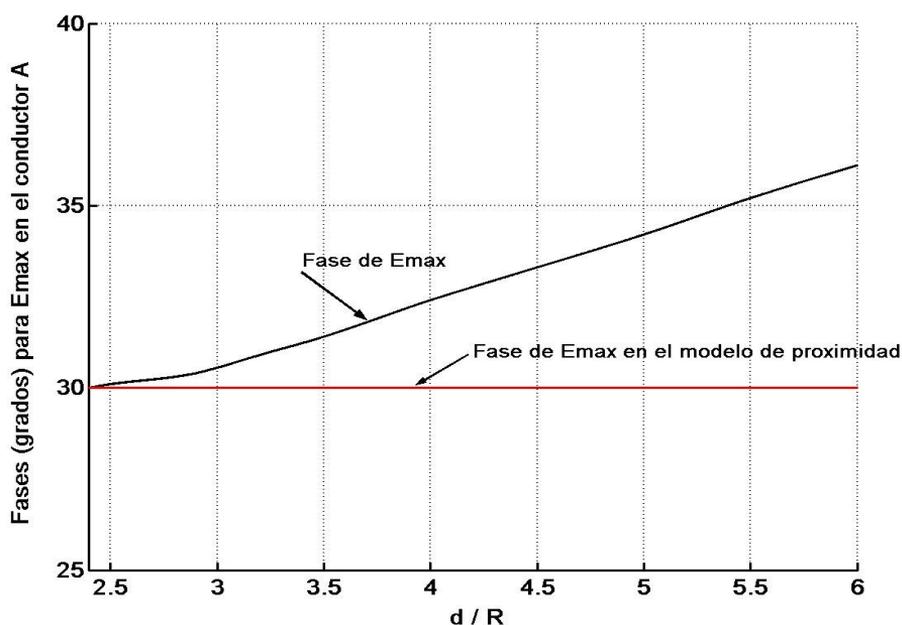


Figura 5.3 Fase en la que se produce la E_{max} en función de d/R

Recordando que la solución proporcionada por el modelo de proximidad es 30° , y que el modelo de alejamiento proporciona un valor límite para el cable *A* de 90° , se puede observar en la figura 5.3 que el valor de la fase en el que se produce la intensidad máxima de campo sobre este conductor se mantiene exactamente en el valor proporcionado por el modelo de proximidad mientras los cables se sitúan a una distancia entre sus centros inferior a 2,5 veces su radio (trabajando con precisiones de décimas tanto en fases como en distancias), aumentando el valor de la fase en la que realmente se produce la intensidad máxima de campo para distancias mayores, manteniéndose por debajo del valor límite de 90° establecido por el modelo de alejamiento como es de esperar (figura 5.4).

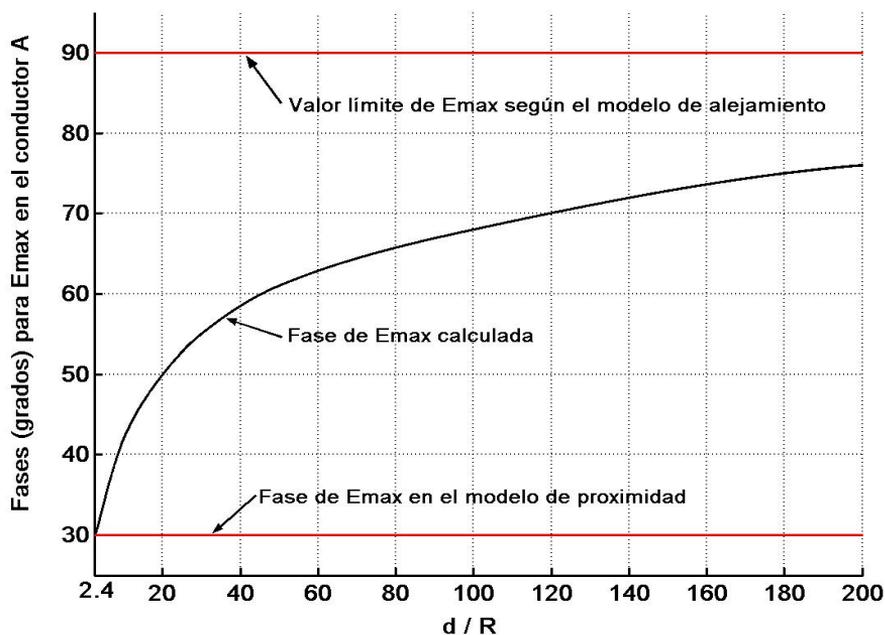


Figura 5.4 Fase en la que se produce la E_{max} en función de d/R

Así se observa que el valor de fase en el que se produce la intensidad máxima de campo en el cable A se encuentra entre 30° y 40° para distancias entre cables de hasta 10 veces el radio, manteniéndose por debajo de 60° para distancias de hasta 40 veces el radio. Para distancias superiores, ωt_{max} hay que buscarlo ya entre 60 y 90° .

Sin embargo, quizá aún más indicativo de la fiabilidad de las previsiones de ambos modelos sea observar la desviación del valor de la intensidad máxima de campo producida en el valor de fase proporcionado por cada uno de ellos con relación a la E_{max} proporcionada por la resolución numérica del problema.

Así, en el caso de montajes con los cables muy próximos, se ha comparado el valor de la intensidad máxima de campo que se produce en el valor de fase previsto por el modelo de proximidad con la intensidad máxima de campo producida realmente tal como la proporciona la resolución del problema de máximos espacio-temporales con el método de las Soluciones Elementales.

Se puede comprobar que ambos valores se mantienen muy próximos hasta distancias entre cables ya bastante considerables (figura 5.5), quedando patente la

fiabilidad de los valores que se pueden obtener utilizando las previsiones del modelo de proximidad para los casos en los que las distancias entre cables no son demasiado grandes.

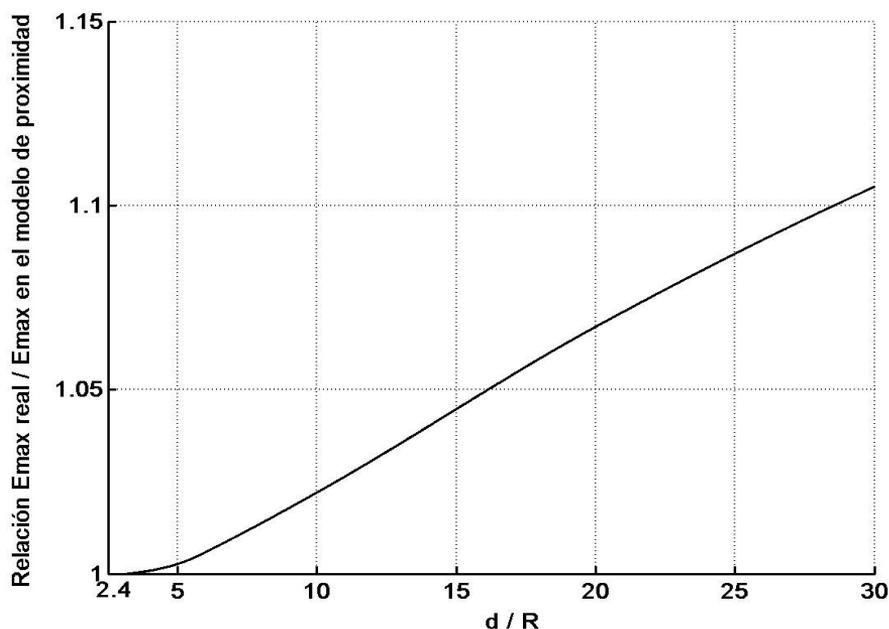


Figura 5.5 Cociente entre la intensidad máxima de campo real y la prevista por el modelo de proximidad

Esta fiabilidad del modelo de proximidad se confirma al observar en la figura 5.5 que, para encontrar una desviación de la intensidad máxima de campo real superior al 5% a la proporcionada por el modelo, hay que situar los centros de los cables a distancias superiores a **16** veces el valor del radio de los conductores, siendo la desviación inferior al 1% para distancias entre centros inferiores a 7 veces el valor del radio. Se comprueba así que la utilización del término "distancias suficientemente pequeñas" para justificar la utilización del modelo de proximidad, se puede realizar con una cierta seguridad dado que se encuentran distancias seguras hasta alcanzar valores bastante grandes para lo que inicialmente se podría suponer. De acuerdo con esto, se puede concluir que el modelo de proximidad permite establecer los resultados de la configuración con una gran precisión para distancias entre cables no demasiado grandes, encontrando el valor exacto del campo máximo en valores de fase muy próximos al proporcionado por el mismo. Así se comprueba que la búsqueda del campo máximo en un estrecho intervalo de

fases con límite inferior (superior para el cable **B**) en el valor previsto por el modelo de proximidad, permite localizar el valor exacto con un gran ahorro de tiempo y esfuerzo, sobre todo en el caso de resolver el problema de máximos espacio-temporales aplicando métodos tradicionales.

Sin embargo para distancias entre cables bastante grandes, resulta más difícil realizar previsiones sobre los límites concretos de un intervalo de fases dentro del cual encontrar el campo máximo buscado, dado que el modelo de alejamiento sólo proporciona un valor límite para la fase ωt_{max} . Se puede profundizar en este aspecto comparando las intensidades máximas de campo que se producen en el valor de fase límite establecido por el modelo de alejamiento con las intensidades máximas de campo obtenidas en la resolución del problema de máximos espacio-temporales con el método desarrollado en la presente tesis (figura 5.6).

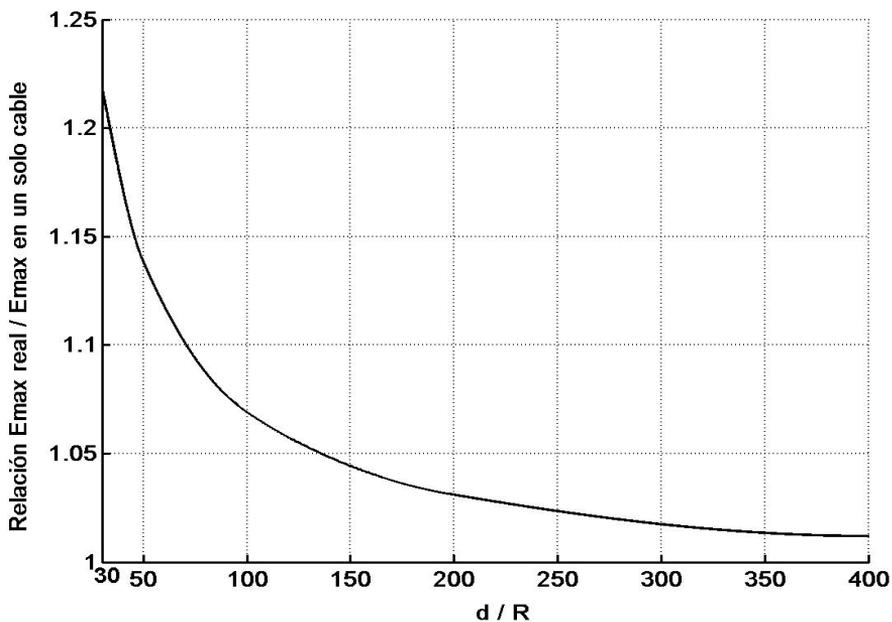


Figura 5.6 Cociente entre la E_{max} real y la producida en la fase límite del modelo de alejamiento

En este caso, para obtener una desviación de la intensidad máxima de campo inferior al 3% sobre la producida en el valor de fase límite establecido por el modelo de alejamiento, los cables se deben situar a distancias superiores a **200** veces el radio (figura 5.6), y para encontrar un margen de fiabilidad equivalente al que posee una distancia de **16** veces el radio en el caso de las previsiones del

modelo de proximidad (5%) se debe acudir a distancias superiores a **140** veces el radio.

Como se ha visto, las figuras 5.5 y 5.6 dan una clara idea de la utilidad y fiabilidad de los resultados obtenidos con una utilización directa de los modelos desarrollados. También resulta ilustrativa de la utilidad y fiabilidad de cada uno de los modelos, la observación en la figura 5.7 de la transición de la mayor fiabilidad de los resultados obtenidos con el modelo de proximidad a la mayor fiabilidad de los resultados obtenidos utilizando el valor límite de fase dado por el modelo de alejamiento, viendo el cruce de las curvas de desviación con relación al valor real de los valores obtenidos de acuerdo con las previsiones de cada uno de los modelos.

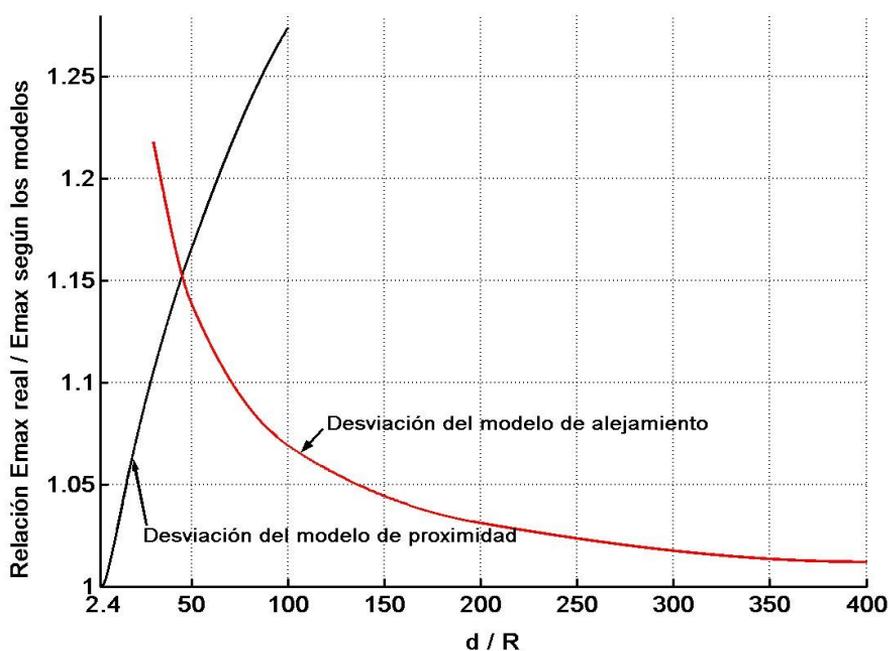


Figura 5.7 Fiabilidad de cada modelo (según la desviación del E_{\max} real con relación al E_{\max} dado por cada modelo) en función de la distancia entre cables

Se puede observar en la figura 5.7 que se alcanza la misma desviación en ambos casos (el 15%) para una distancia entre cables de **40** veces el radio. Por debajo de esta distancia presentan una mayor fiabilidad los resultados producidos en el valor de fase proporcionado por el modelo de proximidad, y para distancias superiores a la misma es mayor la fiabilidad de los resultados encontrados con el valor límite

establecido por el modelo de alejamiento.

Otra forma de poner de manifiesto la evolución de la mayor fiabilidad de las previsiones de un modelo hacia la mayor fiabilidad que se puede obtener utilizando las previsiones del otro, es determinar la evolución de los valores de las intensidades máxima y mínima de campo en la periferia de los cables conforme aumentan las distancias entre ellos (figuras 5.8 y 5.9). Efectivamente, según el modelo de proximidad las diferencias entre intensidad máxima e intensidad mínima de campo producidas en la periferia de un conductor, en el instante en que se produce el máximo de campo, deben ser grandes, mientras que según el modelo de alejamiento la diferencia entre ambas debe tender a cero, dado que en el límite, electrodo aislado, el campo es uniforme a lo largo del perímetro de los conductores en todo momento.

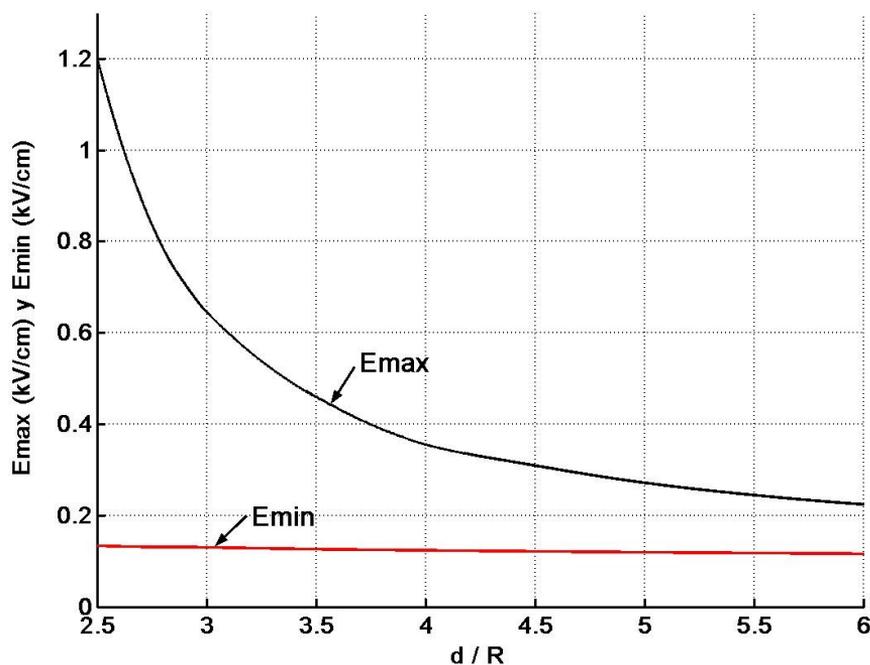


Figura 5.8 Evolución de E_{max} y E_{min} con la distancia entre cables

En la figura 5.8 se observa cómo la intensidad máxima de campo desciende rápidamente conforme los cables se alejan, mientras que la intensidad mínima desciende con mucha mayor lentitud, de forma que se produce un paulatino acercamiento entre ambos valores.

Este acercamiento se observa con mayor detalle si se examinan distancias entre cables aún mayores (figura 5.9). De hecho a partir de una distancia entre cables de **30** veces el radio, la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la intensidad de campo en la periferia de los conductores desciende por debajo del **8%**, y para distancias entre conductores por encima de **50** veces el radio, la diferencia entre ambos valores desciende por debajo del **3,5%**.

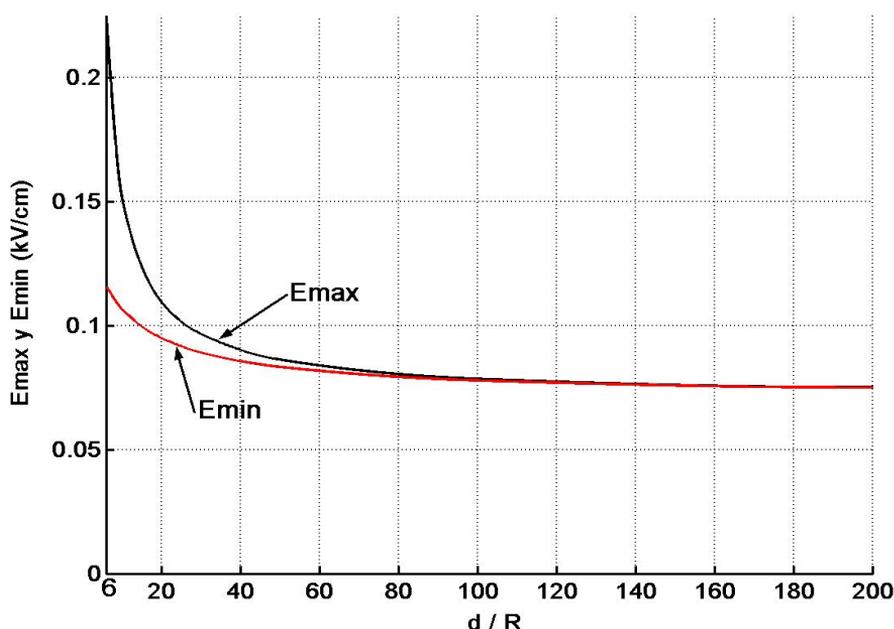


Figura 5.9 Evolución de Emax y Emin con la distancia entre cables

5.1.5 Conclusiones

En este caso se ha comprobado que los métodos analíticos, aun no siendo capaces de resolver completamente un problema de máximos espacio-temporales, pueden permitir establecer modelos de comportamiento, como el modelo de proximidad utilizado en este ejemplo, que ayuden a simplificar la resolución del problema por métodos numéricos de forma significativa, permitiendo establecer márgenes de búsqueda de la solución suficientemente estrechos y fiables.

Se ha comprobado también como modelos establecidos de forma más intuitiva, como el modelo de alejamiento también utilizado en este ejemplo, aun siendo

también útiles, pueden presentar mayores limitaciones a la hora de simplificar la resolución del problema por métodos numéricos.

5.1.6 Tiempos de ejecución

Utilizando un PC Pentium *IV* a 1,3 Ghz con 750 Mb de memoria RAM, el tiempo empleado para calcular las 1512 cargas superficiales que simulan cada montaje (para un d/R dado) ha sido 1 minuto y 12 segundos utilizando el método de las Soluciones Elementales. Comparativamente se ha medido el tiempo empleado en resolver el sistema de forma directa, y ha sido también 1 minuto y 12 segundos. Sin embargo, la determinación de las soluciones elementales permite estudiar 180 instantes buscando la máxima intensidad de campo a lo largo de medio periodo, en 3 minutos.

5.2 Montajes de conductores trifásicos

5.2.1 Descripción de la configuración

Se trata de una configuración formada por tres conductores trifásicos paralelos de 20 m de longitud y 1,8 cm de radio (figura 5.10), situados a igual distancia unos de otros, manteniéndose así la simetría de la configuración. Se han estudiado una diversidad de montajes, cada uno identificado con un valor del parámetro d/R que relaciona la distancia entre los centros de los conductores con su radio (figura 5.11).

Los conductores están numerados 1, 2 y

3. En la misma figura 5.11 también se ha dibujado el baricentro O del triángulo determinado por los centros de los conductores, y los puntos A donde las medianas del triángulo cortan a las superficies de los conductores. Se utilizarán estos puntos

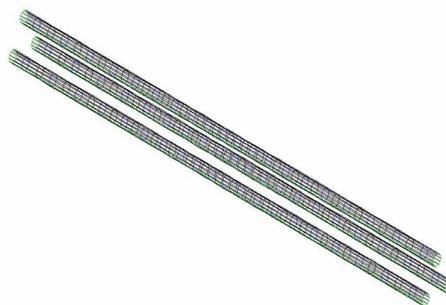


Figura 5.10 Montaje de conductores trifásicos y distribución de cargas

como referencia para referirse a la situación de otros puntos sobre la superficie de los conductores.

Inicialmente se supone un funcionamiento equilibrado de la configuración trifásica, definido por una secuencia de tensiones de electrodo con una amplitud de 1 kV . De esta forma, el sistema de tensiones queda definido así:

$$V_1 = \text{sen}(\omega t) \quad (5.5)$$

$$V_2 = \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5.6)$$

$$V_3 = \text{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (5.7)$$

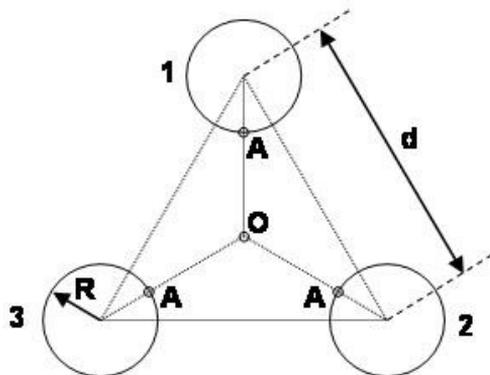


Figura 5.11 Sección transversal del montaje de tres conductores

Posteriormente se consideran dos posibles funcionamientos con tensiones de electrodo desequilibradas en los que se mantienen equilibradas las tensiones de línea (figuras 5.12 y 5.13).

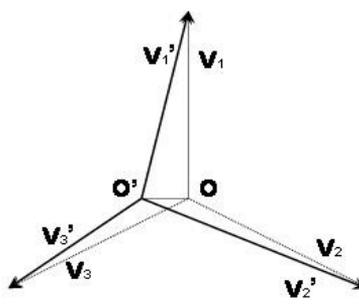
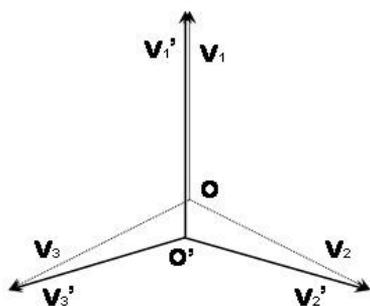


Figura 5.12 Sistema desequilibrado tipo I Figura 5.13 Sistema desequilibrado tipo II

En ambos casos se ha considerado un desplazamiento del centro de tensiones (de O a O' en las figuras 5.12 y 5.13) del 30% sobre el valor de la amplitud de las tensiones de electrodo en el sistema equilibrado.

Las amplitudes de las tensiones de electrodo en estas operaciones con tensiones

desequilibradas se presentan en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Amplitud de las tensiones de electrodo en las operaciones desequilibradas

Operación	Fase 1	Fase 2	Fase 3
Desequilibrada tipo I	1,30000 kV	0,88882 kV	0,88882 kV
Desequilibrada tipo II	1,04403 kV	1,26871 kV	0,755238 kV

Cada conductor se ha descrito con **21** cargas superficiales y **11** armónicos en dirección acimutal (**35** armónicos para relaciones $d/R < 4,5$). De esta forma, el sistema de ecuaciones resultante tiene $21 \times 12 \times 3 = 756$ incógnitas ($21 \times 36 \times 3 = 2268$ incógnitas para $d/R < 4,5$). En cuanto a los puntos de contorno se han distribuido uniformemente tanto en dirección axial como acimutal.

5.2.2 Objetivos del estudio

Se trata de estudiar el comportamiento eléctrico de montajes seleccionados, tanto en su operación equilibrada más simple como en algunas operaciones desequilibradas más complejas, aplicando el método desarrollado en la presente tesis que permite estudiar una gran cantidad de problemas electrostáticos con gran economía de tiempo y esfuerzo.

5.2.3 Aspectos estudiados

En este ejemplo se han investigado los valores de la máxima intensidad de campo (E_{max}), su localización sobre la superficie de los conductores, y los valores de potencial y fase existentes cuando se producen estos máximos. Debido a las propiedades de las funciones de potencial en los conductores basta con estudiar el campo en medio periodo de la función $V_r (0 \leq \omega t < 180^\circ)$. Se evalúa el campo en una sección transversal del montaje situada en la mitad de los **20 m** de longitud de los conductores.

Inicialmente, se ha estudiado el campo que se produce con valores de fase diferenciados de grado en grado, y por tanto en **180** instantes a lo largo del primer medio periodo, en puntos separados **10°** entre sí sobre la sección transversal media de la superficie de los conductores. Una vez determinados los valores de fase en

los que se produce la intensidad máxima de campo, cuando se ha deseado tener una mayor precisión en los resultados, se ha vuelto a buscar la intensidad máxima de campo en un intervalo de fases en torno al valor encontrado inicialmente, estudiando ahora valores de fase de medio en medio grado y puntos sobre la superficie de los conductores de grado en grado.

Los valores de fase se citarán siempre con relación a V_1 , y el valor de fase donde se produce la intensidad de campo máxima se nombrará ωt_{\max} .

5.2.4 Resultados obtenidos

5.2.4.1 El valor de la intensidad máxima de campo

Al aplicar el método de las Soluciones Elementales para conocer el valor de la intensidad de campo más desfavorable, se ha encontrado que las diferencias en los valores de la intensidad máxima de campo entre los tres tipos de operación son poco significativas, y todavía menos cuanto mayores son los valores de esta intensidad máxima, lógicamente obtenidos cuando los conductores se encuentran más próximos.

Se puede observar esto realizando una representación gráfica de los valores de intensidad máxima de campo obtenidos con los conductores situados a diferentes distancias. Se ha estudiado el comportamiento del sistema situando los centros de los conductores a distancias comprendidas entre **2,5** y **20** veces su radio, y se han construido las tres gráficas correspondientes a los tres regímenes de funcionamiento estudiados, con una escala en la que se pudieran presentar todos los valores de intensidad máxima de campo obtenidos dentro del rango de distancias citado. Hechas así las tres gráficas, éstas resultan prácticamente indistinguibles (figura 5.14).

Para discernir las tres gráficas más claramente, se pueden examinar los valores de intensidad máxima de campo en el rango de distancias en que se producen mayores diferencias entre los tres tipos de operación, que es con las mayores distancias entre conductores, y por tanto los casos en que dichos valores máximos tienen valores menores.

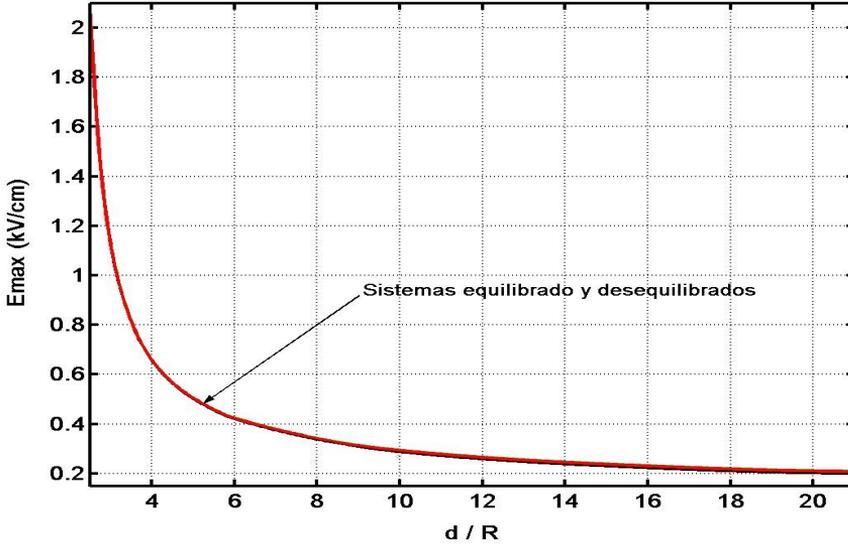


Figura 5.14 Intensidad de campo máxima como función de d/R

Se puede ver en la figura 5.15 cómo examinando valores de d por encima de $6R$ se puede ya visualizar la diferencia entre la gráfica del sistema equilibrado y las de los dos sistemas desequilibrados, pero aún resulta difícil discernir entre las de estos dos últimos.

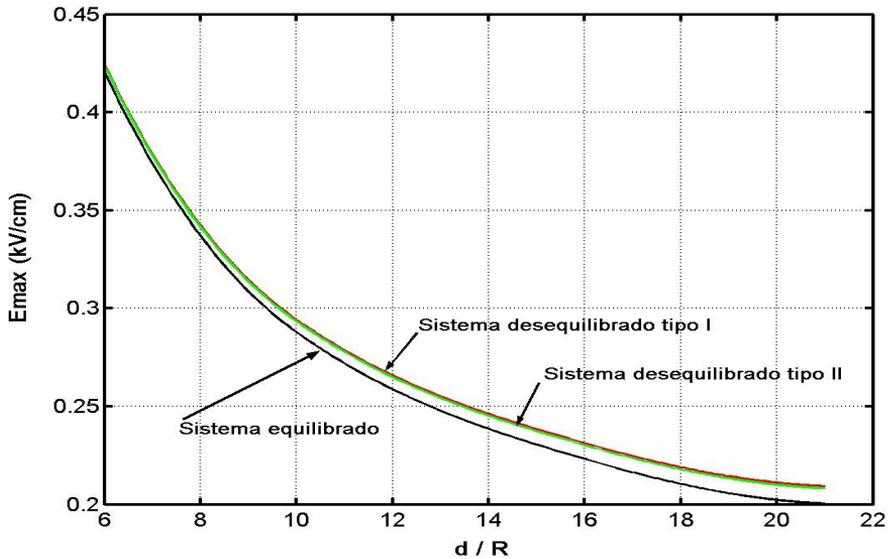


Figura 5.15 Intensidad de campo máxima como función de d/R (de 6 a 20)

Para poder ver claramente la diferencia entre los campos máximos obtenidos en cada tipo de operación, se tienen que examinar los datos numéricos. En la tabla 5.2 se presentan los valores de la intensidad de campo máxima para diferentes distancias entre los conductores en los tres tipos de operación.

Tabla 5.2 Valores de E_{max} (kV/cm) para varios valores de d/R en los tres tipos de operación

d/R=	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	10	15	20
Equilibrada	2,083	1,125	0,8097	0,6564	0,5642	0,5018	0,4203	0,2878	0,2304	0,2023
Desq. tipo I	2,083	1,127	0,8110	0,6584	0,5664	0,5046	0,4242	0,2941	0,2383	0,2111
Desq. tipo II	2,084	1,127	0,8110	0,6584	0,5662	0,5042	0,4236	0,2933	0,2373	0,2100
Máxima diferenc. (%)	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,6	0,9	2,2	3,4	4,3

Se puede ver que las diferencias entre la intensidad de campo máxima en los tres tipos de operación para una distancia dada, sólo supera el **1%** a partir de un valor de **6R**, lo que demuestra que, por lo que a la intensidad máxima de campo se trata, este montaje resulta ser un sistema extraordinariamente estable ante desequilibrios como los estudiados.

5.2.4.2 Fases con la intensidad máxima de campo

Por lo que respecta al caso equilibrado, se presenta a continuación el estudio de los valores de fase en que se produce la máxima intensidad de campo. Hay que recordar que sólo se estudia el primer semiperiodo, pues dada la simetría del sistema los resultados obtenidos en éste se repiten exactamente en los siguientes.

Para montajes contruidos con $d > 4,5R$, se obtienen tres valores de fase en los que se produce E_{max} , cada uno correspondiente a un máximo en cada cable. Para montajes contruidos con distancias entre conductores menores de la indicada, se obtienen seis valores de fase en los que se produce la intensidad máxima de campo, dos para cada cable. En la tabla 5.3 se indican los valores de todas estas fases proporcionando el correspondiente valor de ωt_{max} en cada momento.

En la figura 5.16 se representan los valores de fase en que se produce la E_{max} en el conductor **I** durante el primer semiperiodo en función de la distancia entre cables.

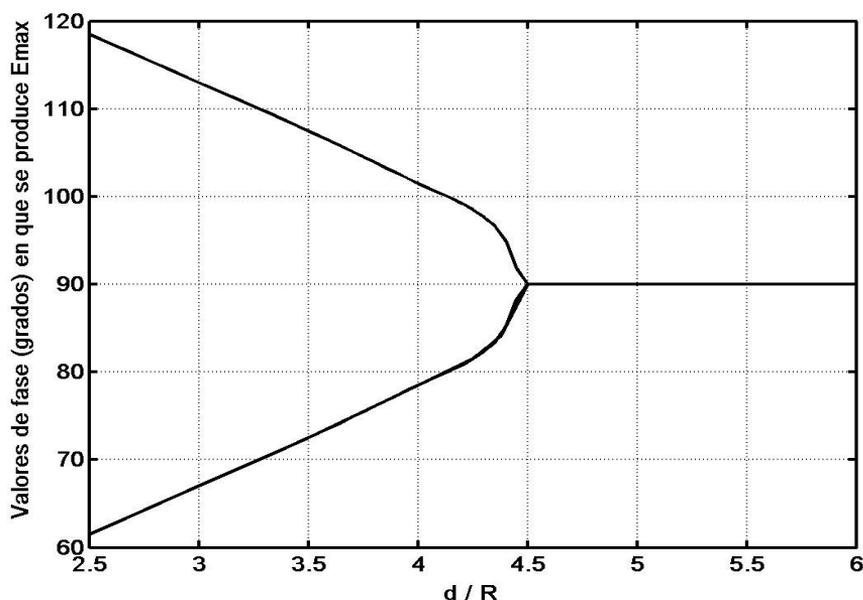


Figura 5.16 Valores de fase en los que se produce la intensidad máxima de campo sobre la superficie del conductor 1

Se puede observar en la figura 5.16 que para distancias entre cables por debajo de una cierta distancia crítica, $d=4,5R$, la E_{max} se produce en dos valores de fase diferentes, simétricos con relación a 90° , y que conforme los cables se alejan entre sí y se acercan a la distancia crítica, confluyen hacia este valor. Sólo se representan estas distancias hasta un valor de d/R de 6 pues a partir de este valor la intensidad máxima de campo sigue apareciendo en el mismo valor de fase, 90° .

El valor de 90° en el que se produce la E_{max} cuando los cables están situados a distancias iguales o mayores que la distancia crítica ($d \geq 4,5R$), es uno de los valores de fase en los que se estudia tradicionalmente el comportamiento de este tipo de configuraciones, como se ha visto en el capítulo 3, pues corresponde a uno de los instantes en que uno de los conductores se encuentra en su pico de tensión.

Los otros dos valores de fase en los que se produce la intensidad máxima de campo para distancias entre cables iguales o mayores que la distancia crítica, son 30° y 150° , correspondiendo igualmente a la misma condición de un máximo de potencial en alguno de los otros dos conductores (figura 5.17). Sin embargo para distancias entre conductores inferiores a dicho valor crítico, el valor de fase en el que se produce el campo máximo ya no cumple la condición citada.

En el caso de los desequilibrios *I* y *II* la situación es similar. En las figuras 5.18 y 5.19 se ilustra esta situación. En la figura 5.18 se representan los valores de fase ωt_{max} en que se produce la intensidad máxima de campo en el desequilibrio *I*, junto con la gráfica más similar de entre las que presentan esos mismos valores en el equilibrio (la gráfica del cable *I*).

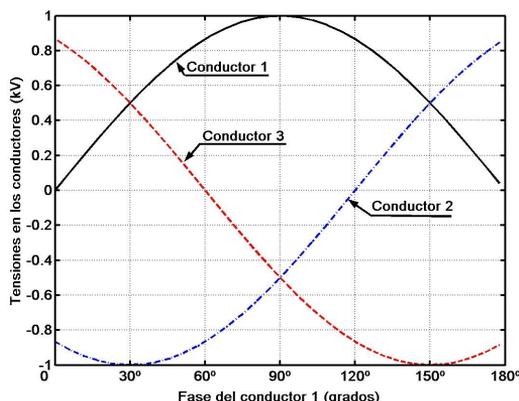


Figura 5.17 Tensiones en función de ωt

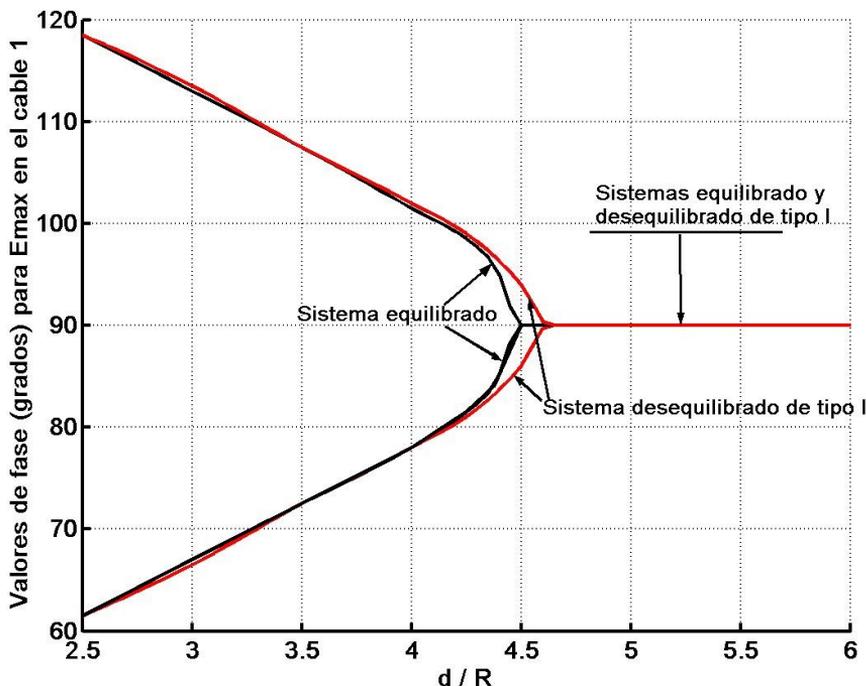


Figura 5.18 Valores de fase ωt_{max} en que se produce E_{max} en el conductor 1 con un funcionamiento equilibrado y con un funcionamiento desequilibrado de tipo I

En la figura 5.19 se procede de igual forma para representar los valores obtenidos en el desequilibrio *II* (ωt_{max} en el cable 2).

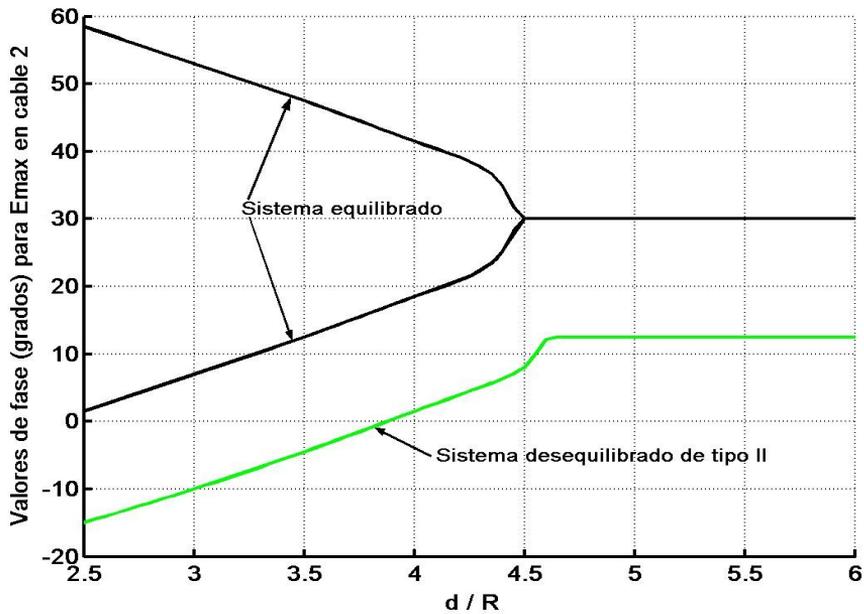


Figura 5.19 Valores de fase ωt_{max} en que se produce E_{max} en el conductor 2

Se pueden ver los resultados numéricos a continuación en la tabla 5.3:

Tabla 5.3 Valores de ωt_{max} cuando se produce el E_{max} para varios valores de d/R en los tres tipos de operación

d/R=	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	10	15	20
Equilibrada	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)
Máximo en conductor 1	61,5° 118,5°	67° 113°	72,5° 107,5°	78,5° 101,5°	90°	90°	90°	90°	90°	90°
Máximo en conductor 2	1,5° 58,5°	7° 53°	12,5° 47,5°	18,5° 41,5°	30°	30°	30°	30°	30°	30°
Máximo en conductor 3	121,5° 178,5°	127° 173°	132,5° 167,5°	138,5° 161,5°	150°	150°	150°	150°	150°	150°
Deseq.tipo I (máximo en conductor 1)	(*) 61,5° 118,5°	(*) 66,5° 113,5°	(*) 72,5° 107,5°	(*) 78° 102°	(*) 86° 94°	90°	90°	90°	90°	90°
Desq.tipo II (máximo en conductor 2)	165°	170°	175,5°	1,5°	8°	12,5°	12,5°	12,5°	12,5°	12°

(*) Se dan dos valores de fase cuando se producen máximos en dos instantes diferentes durante el primer medio periodo.

A la vista de estos resultados se puede concluir que la hipótesis que tradicionalmente se utiliza en el estudio de este tipo de configuraciones de que el caso más desfavorable es aquel en el que un conductor se encuentra en un máximo de tensión, solamente es correcta a partir de una cierta distancia crítica entre conductores, que en el caso de operación con tensiones equilibradas se comprueba que es cuatro veces y media el radio de los conductores, y de cinco veces para el caso de las tensión desequilibrada de tipo *I*, no siendo cierta en ningún caso en la operación desequilibrada de tipo *II*.

5.2.4.3 Potenciales de electrodo ante el campo máximo

Para estudiar más en detalle las circunstancias en las que se produce la intensidad máxima de campo, se examina a continuación el potencial existente en los conductores cuando se produce la intensidad máxima de campo en la operación con tensiones equilibradas. A la vista de los valores de fase examinados anteriormente, la hipótesis tradicional de que ésta se produce cuando una de las fases se encuentra en su pico de tensión, es decir cuando la diferencia de potencial entre el conductor donde se está produciendo E_{max} y cualquiera de los otros dos

tiene un valor igual a $\Delta V = 1,5 \cdot V_{pico} = \frac{1,5 \cdot V_{linea}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V_{linea}$, solamente se

cumple para distancias entre conductores iguales o superiores a la distancia crítica. Es decir, que al representar en una gráfica en función de la distancia entre conductores, la máxima diferencia de potencial existente entre conductores en el momento que se produce la intensidad máxima de campo, ya no se encuentra una

línea horizontal correspondiente a un valor de $\frac{\Delta V}{V_{linea}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para cualquier

distancia entre conductores como se deduce de la hipótesis tradicional, sino que, por debajo de la distancia crítica, habrá una gráfica diferente tal como se puede observar en la figura 5.20.

En montajes construidos con distancias entre los centros de los conductores por debajo de la distancia crítica de $4,5R$, se observa en la figura 5.20 como la diferencia de potencial entre ellos en el momento de producirse la intensidad de campo máxima, es mayor de lo previsto tradicionalmente. Y cuanto más próximos estén los conductores entre si, más próxima está la diferencia de potencial máxima

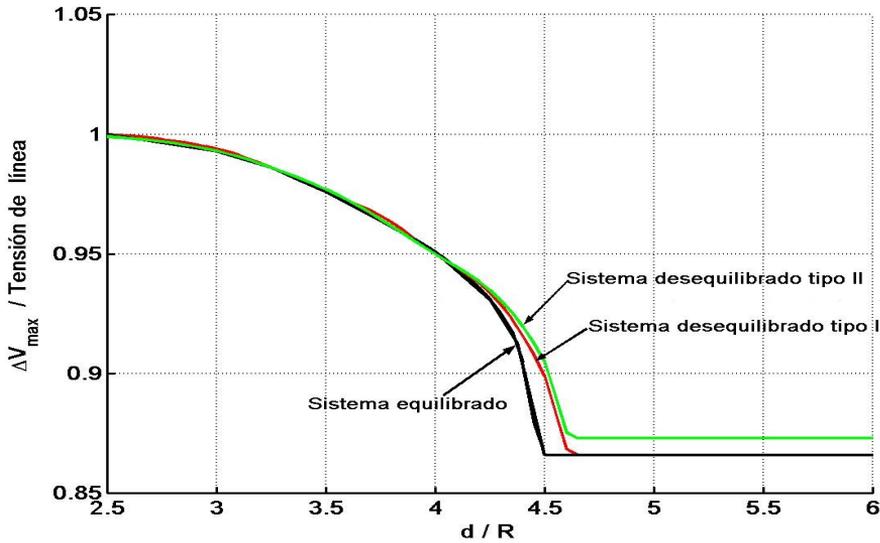


Figura 5.20 Diferencia de potencial máxima entre fases cuando se produce E_{\max}

entre conductores a la tensión de línea. Y esto es así también en las operaciones de tipo desequilibrado que aquí se han estudiado, en las que se puede resaltar como apenas hay diferencia entre el sistema equilibrado y el sistema desequilibrado de tipo *I* (figura 5.20), salvo que para el caso desequilibrado es algo mayor la distancia crítica entre conductores.

En el sistema desequilibrado de tipo *II* existe otra diferencia: en montajes realizados con distancias entre conductores superiores a la distancia crítica, la diferencia de potencial máxima entre conductores no es exactamente la misma que en los otros dos regímenes de funcionamiento.

5.2.4.4 Localización de la E_{\max} sobre los conductores

Por lo que respecta al lugar de la superficie de los conductores donde se produce la intensidad máxima de campo, se toma como referencia el punto *A*, que es el punto de corte con la línea que va del centro del

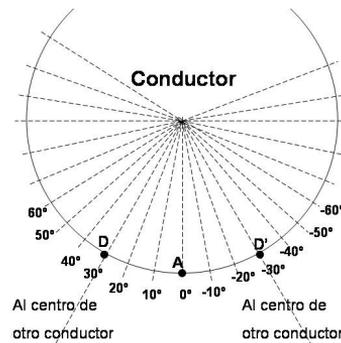


Figura 5.21 Localización de puntos sobre la superficie de un conductor

conductor al centro del sistema (figura 5.11). Así, se localizan puntos sobre la superficie del conductor con ángulos tomados en sentido horario o antihorario a partir de dicho punto A (figura).

Utilizando esta referencia se encuentra que, para distancias entre conductores iguales o superiores a la distancia crítica, la intensidad máxima de campo se produce siempre en el punto A , tanto en el funcionamiento equilibrado como en el desequilibrado de tipo I (figura 5.22).

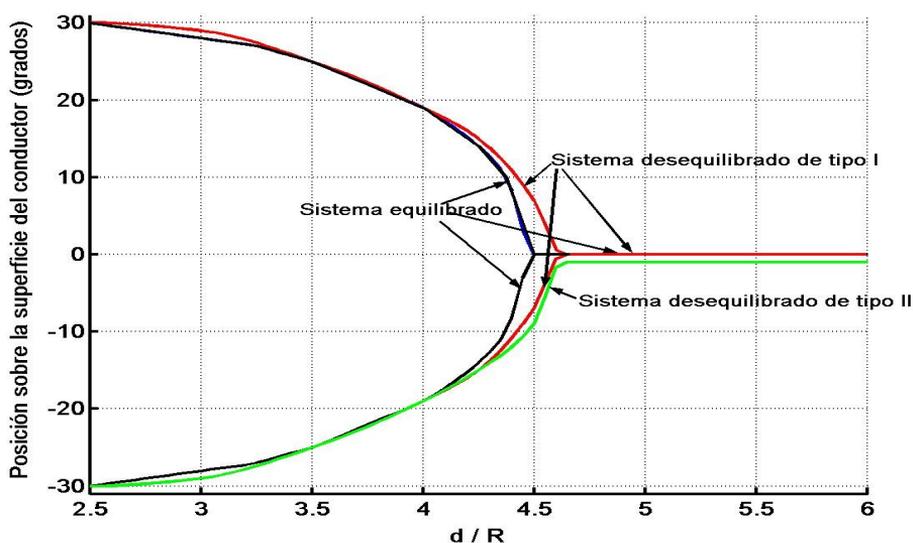


Figura 5.22 Localización de la intensidad máxima de campo

Sin embargo para distancias entre conductores inferiores a la distancia crítica, la intensidad máxima de campo se produce en otros puntos. En cada uno de estos casos, tanto en el funcionamiento equilibrado como en el desequilibrado de tipo I , se observa que la intensidad máxima de campo se produce en dos puntos diferentes, simétricos con relación al punto A .

Se puede observar en esta figura 5.22 como, conforme los conductores se aproximan entre sí, el lugar donde se produce el campo máximo tiende hacia los puntos D y D' (figura 5.22) situados en la línea que une los centros de los conductores, dándose en uno u otro punto según cuál sea el otro conductor con el que se tiene mayor diferencia de potencial en ese instante. En el caso del régimen de funcionamiento equilibrado, la E_{max} aparece en los puntos D y D' de cada

conductor, mientras que en el régimen desequilibrado de tipo **I** sólo en los puntos **D** y **D'** del conductor **1**. En el caso del funcionamiento en desequilibrio de tipo **II**, la localización de la intensidad máxima de campo se localiza sólo en el punto **D'** del conductor **2**.

En definitiva, por lo que respecta a las operaciones desequilibradas, en el sistema desequilibrado tipo **I** la localización de la intensidad de campo máximo casi coincide con la del sistema equilibrado para todas las distancias entre conductores (en el conductor **1**), salvo la diferencia correspondiente a su distinta distancia crítica. Sin embargo no es así en el sistema desequilibrado tipo **II**, donde el campo máximo, además de producirse en un solo lugar para todas las distancias entre conductores, su estabilización para distancias entre conductores superiores a la distancia crítica no se produce en el punto **A** como en los otros regímenes de funcionamiento, aunque sí en un punto muy próximo a éste.

5.2.5 Conclusiones

El método de las Soluciones Elementales que se presenta en esta tesis ha permitido estudiar con facilidad, rapidez y en detalle, sin necesidad de ningún tipo de hipótesis simplificadoras o modelizaciones previas, el comportamiento de un sistema trifásico, tanto en régimen de funcionamiento equilibrado como desequilibrado. Y en este estudio se han encontrado algunas situaciones que no se ajustan a la hipótesis con la que tradicionalmente se parece abordar el estudio de este tipo de sistemas.

Para resumir los resultados obtenidos, se puede establecer lo siguiente.

- 1) La intensidad de campo aumenta cuando los conductores se encuentran más próximos entre sí, pero los valores de las tensiones instantáneas en los diferentes conductores en el momento en que se produce la intensidad máxima de campo, así como el lugar sobre la superficie de los conductores donde ésta se presenta no siempre coincide con lo que tradicionalmente se supone.
- 2) Cuando los conductores están alejados por encima de una cierta distancia crítica ($> 4,5R$ para el caso equilibrado), la máxima intensidad de campo se presenta en el conductor que se encuentra en su pico de tensión mientras las otras dos fases presentan igual tensión, como tradicionalmente se asume. En

estos casos, la intensidad máxima de campo se localiza en el plano de simetría de ese conductor respecto a los otros dos conductores (punto *A* en la figura 5.22). En la figura 5.24 se presenta un esquema de líneas de fuerza y equipotenciales, dibujadas por el mismo programa en el que se ha implementado el presente método, para un montaje construido con una distancia entre conductores superior a la distancia crítica.

- 3) Cuando existe una distancia entre los conductores inferior a la distancia crítica, la máxima intensidad de campo se presenta en un conductor cuando su diferencia de potencial con otro de los conductores tiende hacia el valor de la tensión de línea, y, en el caso equilibrado, el valor de la tensión del tercer conductor tiende a cero. En estos casos, la intensidad máxima de campo se localiza en puntos cada vez más próximos al conductor con el que se presenta la máxima diferencia de potencial, localizándose en los puntos *D* y *D'* de la figura 5.22 en los casos de mayor proximidad entre conductores. Las líneas de campo ilustran perfectamente esta situación (figura 5.23).

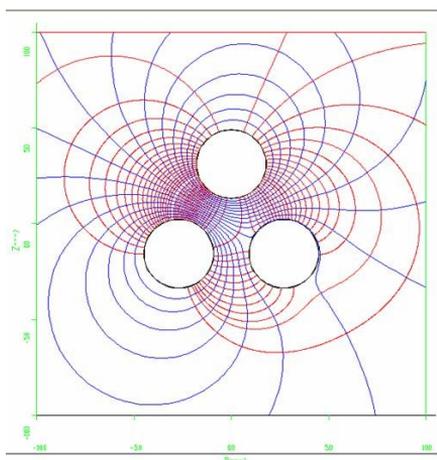


Figura 5.23 Líneas de campo y equipotenciales en el caso equilibrado para $d/R = 3$ para $\omega t = 113^\circ$

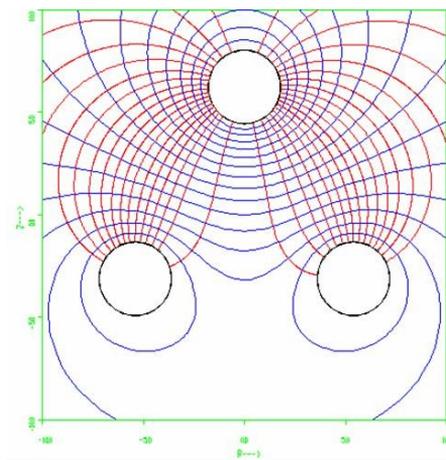


Figura 5.24 Líneas de campo y equipotenciales en el caso equilibrado para $d/R = 6$ y $\omega t = 90^\circ$

- 4) Estas consideraciones también son válidas para el caso de la operación desequilibrada de tipo *I*, y con ciertos matices para la operación desequilibrada de tipo *II*. La diferencia en estos casos es que la intensidad máxima de campo se produce para diferentes valores de fase ($\omega t + \phi$) de las funciones de potencial.

- 5) Por último es interesante reseñar la gran estabilidad electrostática que presenta este montaje frente a desequilibrios como los estudiados, sobre todo para pequeñas distancias entre conductores, pues en estos casos el valor de la máxima intensidad de campo apenas varía entre el caso equilibrado y los casos desequilibrados. En efecto, aumentos de hasta un **30%** en el valor de la tensión de pico en algún conductor produce aumentos en la máxima intensidad de campo que no superan el **1%** para distancias entre conductores de hasta **6R**.

5.2.6 Tiempos de ejecución

Estos cálculos fueron realizados en un *PC* con un Intel® Pentium® a **1,3 Ghz** y **750MB** de *RAM*. La duración del proceso de resolución del sistema de ecuaciones con **2268** ecuaciones y las correspondientes incógnitas, es de **3 minutos y 15 segundos** cuando se resuelve directamente, y **3 minutos y 30 segundos** cuando se resuelve con el método de las Soluciones Elementales. Sin embargo, la determinación de las soluciones elementales permite estudiar **180** instantes a lo largo de medio periodo buscando la máxima intensidad de campo, en **11 minutos**.

5.3 Montajes de barras trifásicas entubadas

5.3.1 Descripción de la configuración

Se trata de una configuración típica de la tecnología SF₆, formada por tres barras trifásicas paralelas de **4 m** de longitud y **4 cm** de radio, situadas a igual distancia unas de otras, encapsuladas en un tubo de cuya superficie interior se encuentran las tres a igual distancia de forma que se mantiene siempre la simetría de la configuración (figura 5.25). El tubo tiene la misma longitud que las barras.



Figura 5.25 Montaje (y distribución de las cargas superficiales)

En la figura 5.26 se muestra una sección transversal de la configuración. Se han estudiado una diversidad de montajes, cada uno identificado con un valor diferente de cada uno de los parámetros $c_1 = d_1/R$, que determina la distancia entre barras, y $c_2 = d_2/R$, que determina la distancia entre barras y tubo (figura 5.26). Las barras están identificadas como barra 1, barra 2 y barra 3.

Se estudian nueve distancias diferentes entre barras, las correspondientes a los valores del parámetro $c_1 = 3, 3'5, 4, 4'5, 5, 5'5, 6, 7$ y 10 . Con cada una de estas distancias se definen diferentes montajes, cada uno caracterizado por una distancia barras-tubo diferente, o sea por diferentes valores del parámetro c_2 y, por tanto, del tamaño del tubo.

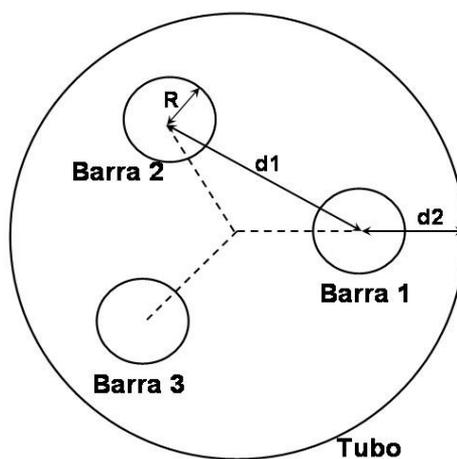


Figura 5.26 Sección transversal del montaje

Se asume que las tres barras operan en un régimen de funcionamiento con tensiones equilibradas tal como se dan en las ecuaciones 5.5, 5.6 y 5.7.

Cada barra se ha descrito con **13** cargas superficiales y **11** armónicos en dirección acimutal, y el tubo con **13** cargas superficiales y **35** armónicos en dirección acimutal. Así, el sistema de ecuaciones resultante tiene por tanto **936** incógnitas, y la configuración otros tantos puntos de contorno.

5.3.2 Objetivos del estudio

Se trata de estudiar el comportamiento eléctrico de una diversidad de montajes de barras trifásicas entubadas, aplicando el método desarrollado en la presente tesis.

Dado que la diferencia de este tipo de montajes con los montajes estudiados en el ejemplo anterior se encuentra básicamente en la existencia del tubo, se trata de comprobar las modificaciones que introduce éste sobre las conclusiones que se obtuvieron en dicho ejemplo.

5.3.3 Aspectos estudiados

Se investigan los valores de la máxima intensidad de campo ($E_{m\acute{a}x}$), su localización sobre las superficies electrónicas y los valores de los potenciales de electrodo y de fase en el momento de producirse aquélla. Debido a las propiedades de las funciones de potencial en las barras, basta con estudiar el campo en medio periodo de la función V_1 ($0 \leq \omega t < 180^\circ$) (ecuación 5.5). Se evalúa el campo en la sección transversal media de la configuración.

Inicialmente se estudia el campo que se produce en valores de fase diferenciados de grado en grado a lo largo del primer semiperiodo, y por tanto en **180** instantes, en puntos situados sobre la superficie de barras y tubo separados **10°** entre sí. Una vez determinado en cuáles de los valores de fase estudiados se produce la intensidad máxima de campo, cuando se ha querido tener una mayor precisión, se ha vuelto a buscar la intensidad máxima de campo en un intervalo de fases en torno al valor encontrado inicialmente, estudiando ahora fases de medio en medio grado y puntos sobre la superficie de los electrodos de grado en grado.

Como en el ejemplo anterior, los valores de fase se citarán siempre con relación a V_1 , y el valor de fase donde se produce la intensidad de campo máxima se nombrará como ωt_{max} .

5.3.4 Resultados obtenidos

5.3.4.1 El valor de la intensidad máxima de campo

En la figura 5.27 se representa la evolución del valor de la máxima intensidad de campo eléctrico en función de c_2 , y para diferentes valores de c_1 .

Se puede observar que, para cada valor de c_1 , es decir para una distancia fija entre barras, el valor del campo máximo desciende rápidamente conforme el tubo se aleja de las barras (aumento de c_2) hasta un determinado valor de c_2 que se llamará valor crítico $c_{2crítico}$, a partir del cual el valor de la intensidad máxima de campo prácticamente se estabiliza ante alejamientos adicionales del tubo. Se puede comprobar el grado de esta estabilización en la figura 5.28, donde se presenta la relación entre la intensidad máxima de campo para la distancia crítica barras-tubo,

y la intensidad máxima de campo si el tubo se aleja hasta el infinito (si se retira el tubo).

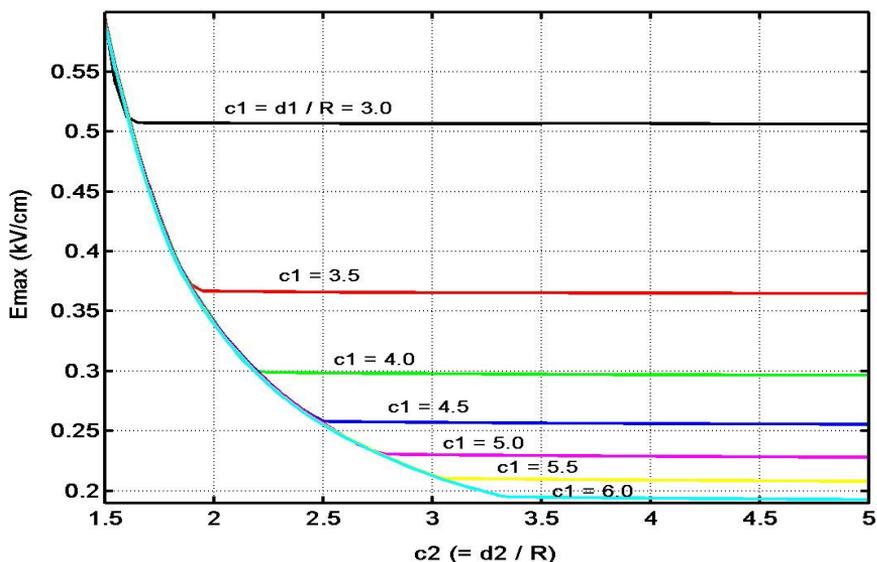


Figura 5.27 E_{max} como función de $c_2 (=d_2/R)$ para diferentes valores de $c_1 (=d_1/R)$

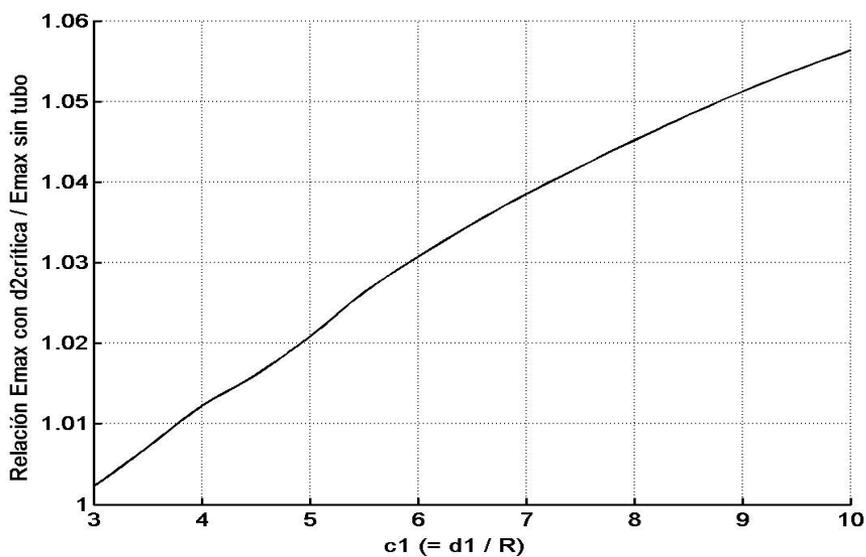
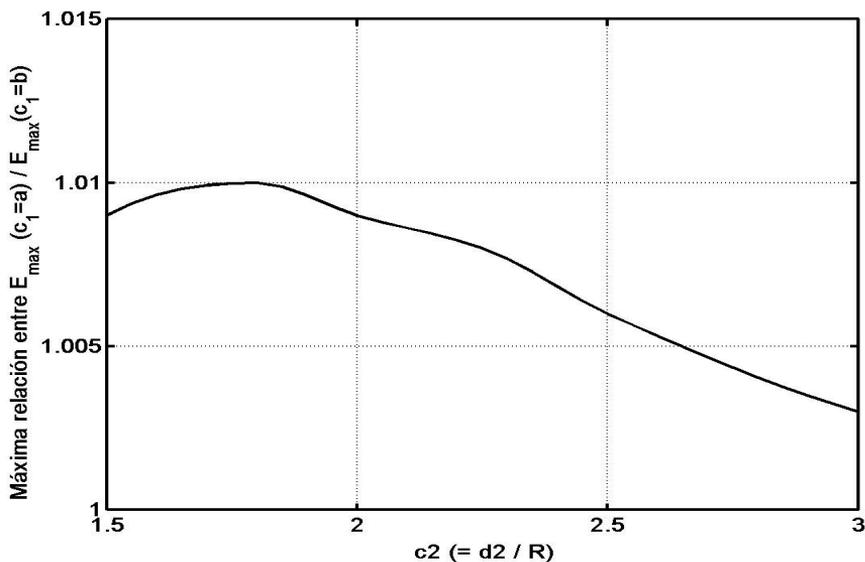


Figura 5.28 Relación entre E_{max} con el tubo a la distancia crítica y E_{max} sin tubo

Se observan aumentos que apenas superan el 5% en el caso del mayor alejamiento entre barras considerado, por lo que se puede concluir que, una vez determinada la distancia crítica barras-tubo y en consecuencia el tamaño correspondiente del tubo, cualquier tamaño de tubo superior a éste, y por tanto cualquier aumento en el volumen de la configuración, presenta muy poca relevancia a efectos de mejorar su seguridad eléctrica. Así se puede concluir que para montajes construidos con distancias barras-tubo iguales o superiores a la distancia crítica, el elemento absolutamente predominante para determinar la intensidad máxima de campo es la distancia entre barras, siendo la distancia barras-tubo substancialmente irrelevante.

Otro aspecto importante que se puede observar en la figura 5.27 es que, para distancias entre barras y tubo inferiores a la distancia crítica, las curvas correspondientes a diferentes distancias entre barras (diferentes c_1) resultan prácticamente indistinguibles con la escala utilizada. En efecto, si se representa la máxima diferencia existente entre las intensidades máximas de campo que se producen en configuraciones con la misma d_2 (inferior a $d_{2crítica}$) pero diferentes distancias entre barras (figura 5.29), se observa que las diferencias no superan en ningún caso el 1%, por lo que se puede concluir que el elemento absolutamente determinante para determinar intensidad máxima de campo cuando las distancias entre barras y tubo son inferiores a la distancia crítica, es la propia distancia barras-tubo, siendo la distancia entre barras irrelevante.



Resulta también de especial interés observar en la figura 5.27 que, si un montaje se construye con una distancia d_2 inferior a la distancia crítica, cualquier pequeña variación en esta d_2 (por ejemplo por ligeras variaciones en el radio del tubo), produce enormes variaciones en el valor del campo máximo.

5.3.4.2 Potenciales de electrodo ante el campo máximo

Por lo que respecta a las diferencias de potencial que existen entre barras en el momento en que se produce la intensidad máxima de campo, se comienzan estudiando las que se producen a partir de la estabilización, es decir en montajes construidos con la $d_{2crítica}$. En la figura 5.30 se indica la máxima diferencia de potencial existente entre barras, referida a la tensión de línea, en el momento de producirse la E_{max} en estos montajes. Estos resultados son exactamente los mismos en montajes construidos con distancias barras-tubo superiores a la $d_{2crítica}$, con una pequeña excepción para las distancias entre barras comprendidas entre $4,5R$ y $5R$ como se citará más adelante.

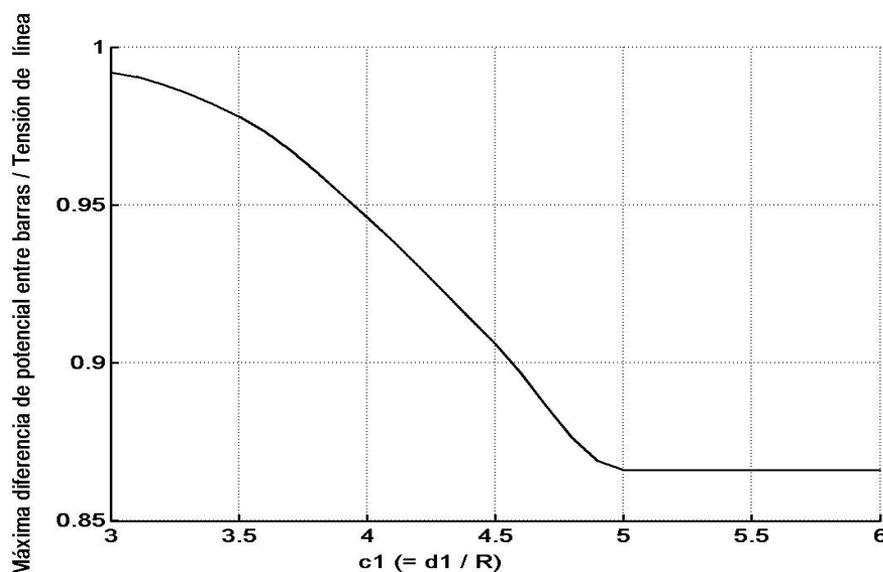


Figura 5.30 Relación entre la mayor diferencia de potencial entre barras (en el instante en el que se produce la E_{max} en montajes con $d_{2crítica}$) y la tensión de línea

Al igual que ocurría en el ejemplo 5.2, se pueden ver en la figura 5.30 dos zonas claramente definidas, una para valores de $c_1 < 5$ y otra para valores de $c_1 \geq 5$. Los mayores valores de c_1 corresponden a la suposición tradicional de que el máximo

valor de la intensidad de campo se produce cuando la barra en la que se presenta éste se encuentra en su pico de tensión, mientras que las otras dos barras se encuentran con la mitad de la misma y signo contrario (correspondiente a una diferencia de potencial máxima entre barras de $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V_{línea}$). Sin embargo, se observa que para una mayor proximidad entre barras ($c_1 < 5$), la situación ya no es ésa, sino que la máxima intensidad de campo se produce con mayores diferencias de potencial entre barras, tendiendo hacia la tensión de línea conforme las barras se aproximan. Esto confirma lo encontrado para los montajes estudiados en el apartado anterior: la existencia de una distancia crítica entre barras $d_{1crítica}$, que en este tipo de montajes vale 5, y a partir de la cual resulta válida la hipótesis tradicional de que la intensidad máxima de campo aparece en un conductor en el momento que éste alcanza su pico de tensión. Hipótesis que, sin embargo, no resulta acertada para distancias entre conductores por debajo de la citada $d_{1crítica}$, donde la intensidad de campo máxima se da en momentos en los que la diferencia de potencial entre barras es mayor que antes y se aproxima cada vez más a la tensión de línea conforme los conductores se sitúan más próximos entre sí.

A todo lo anterior hay que añadir una pequeña matización en lo que se refiere a montajes con distancias entre barras entre $4,5R$ y $5R$. Según lo dicho hasta ahora se trata de un caso en el que la intensidad máxima de campo se da para un potencial en barras diferente de la tensión de pico dado que se trata de casos de $c_1 < c_{1crítico} = 5$. Sin embargo, en el ejemplo anterior se vio que para ese tipo de montajes pero sin tubo, el valor $c_{1crítico}$ estaba en $4,5$. Pues bien, en este caso se comprueba la absoluta coherencia de los dos resultados obtenidos: para una distancia entre conductores comprendida entre $4,5R$ y $5R$, la diferencia de potencial entre barras en el instante de campo máximo, no permanece constante si aumentamos el radio del tubo (o sea c_2). Así, conforme aumenta el radio del tubo, el potencial de la barra donde aparece E_{max} se aproxima cada vez más al valor de pico, valor que se alcanza cuando el radio del tubo se hace infinito (o sea cuando se hace desaparecer el tubo). De esta manera se tiene que para montajes contruidos con la $d_{2crítica}$, el valor $d_{1crítico}$ es $5R$, mientras que para montajes contruidos con $d_2 \rightarrow \infty$ (sin tubo, como en el ejemplo anterior), la $d_{1crítica}$ es $4,5R$.

Por lo que respecta a montajes contruidos con distancias barras-tubo por debajo de la distancia $d_{2crítica}$, aquí la intensidad máxima de campo se produce siempre que

un conductor alcanza su tensión de pico. Esto pudiera parecer un comportamiento similar al obtenido en montajes construidos dentro de la zona de estabilización con distancias entre barras superiores a la $d_{1crítica}$, pero sin embargo se verá que, aun pareciéndose en este aspecto, se diferencian claramente en otros aspectos como la localización de dicha intensidad máxima de campo sobre la superficie de las barras.

5.3.4.3 Fases con la intensidad máxima de campo

Los valores de fase en que se presenta la intensidad máxima de campo son aquellos en los que las barras se encuentran con los potenciales indicados en los párrafos anteriores. Pues bien, al igual que se ha hecho con los potenciales, se comienza por representar en la figura 5.31 los valores de fase en los que se produce la E_{max} en montajes construidos con distancias barras-tubo iguales a la correspondiente $d_{2crítica}$. Estos mismos valores de fase son en los que se produce la E_{max} en montajes construidos con distancias barras-tubo superiores a la $d_{2crítica}$ con la salvedad ya citada de montajes con distancias entre barras comprendidas entre $4,5R$ y $5R$, donde los valores de fase evolucionan con el aumento de dicha distancia barras-tubo y cuyo caso se matizará más adelante.

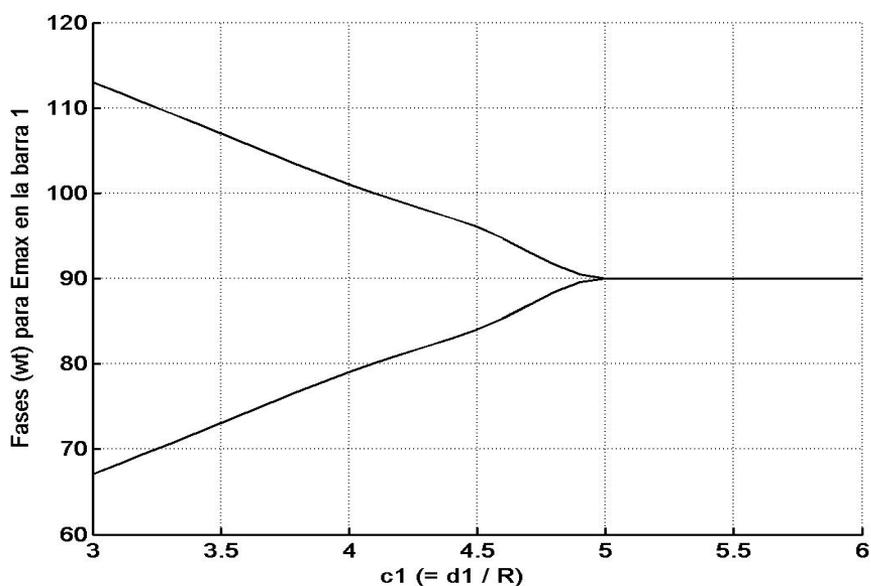


Figura 5.31 Valores de fase ωt_{max} para E_{max} en barra 1 en montajes con $d_{2crítica}$

Se observa de nuevo la diferencia que marca la $d_{1crítica} = 5R$ ($c_1 = 5$) en este tipo de montajes: para montajes con distancias entre barras iguales o superiores a esta distancia crítica, la intensidad máxima de campo aparece en la barra **1** en el momento en que esta alcanza su potencial de pico, momento que corresponde a un valor de fase de 90° , al igual que ocurre en las otras dos barras en los valores de fase ωt de 30° y 150° .

Sin embargo, no ocurre lo mismo en configuraciones construidas con una distancia entre barras inferior a la $d_{1crítica}$. En estos casos, como se observa en la gráfica de la figura 5.31, la intensidad máxima de campo se presenta en dos valores de fase diferentes, simétricos con relación a 90° en el caso de la barra **1** representado en dicha gráfica, y también simétricos pero con relación a 30° y 150° en el caso de las otras dos barras, correspondientes a los dos instantes del primer semiperiodo en que cada barra alcanza la diferencia de potencial indicada en la gráfica de la figura 5.30 con cada una de las otras dos barras.

Sin embargo, de acuerdo con la ya citado cuando se habló de los valores de potencial en barras cuando se produce el E_{max} , hay que matizar el caso de los montajes con distancias entre barras comprendidas entre $4,5R$ y $5R$. Según lo visto, dado que se trata de un caso de distancia entre barras por debajo de la distancia crítica $d_{1crítica} = 5R$, en estos montajes se debería producir la E_{max} en dos valores de fase diferentes de 90° para el caso de la barra **1**. Y así es para montajes construidos con la distancia crítica barras-tubo $d_{2crítica}$, pero conforme la distancia barras-tubo aumenta, los valores de fase evolucionan hacia 90° , o sea el comportamiento de este montaje se aproxima al comportamiento de los montajes sin tubo estudiados en el ejemplo anterior. Esto es coherente con que, para configuraciones sin tubo, la distancia crítica entre barras $d_{1crítica}$ es $4,5R$, mientras que para configuraciones con el tubo situado a la distancia $d_{2crítica}$ de las barras, la distancia crítica entre barras $d_{1crítica}$ es $5R$.

Por lo que respecta a los valores de fase en que se presenta la intensidad máxima de campo en montajes construidos con distancias barras-tubo por debajo de la distancia crítica $d_{2crítica}$, de acuerdo con lo indicado con relación a los potenciales en barras, estos son los valores de fase ωt en los que la tensión de cada barra alcanza su valor de pico, es decir 90° , 30° y 150° , para las barras **1**, **2** y **3** respectivamente.

5.3.4.4 Localización de la E_{max} sobre los conductores

Para ilustrar los resultados obtenidos en este aspecto se presentan en primer lugar las referencias que se van a utilizar para identificar puntos concretos sobre la superficie de la barra. Así, los diferentes puntos en la superficie de las barras serán citados con el ángulo que forma el radio que les corresponde con el radio que pasa por el punto A equidistante de los centros de las

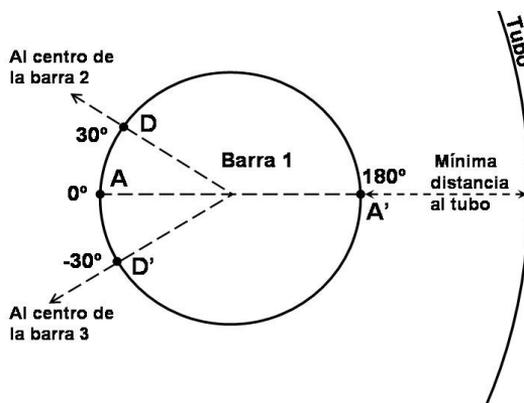


Figura 5.32 Referencias angulares para la localización de puntos sobre las barras

otras dos barras (figura 5.32). Así, los puntos D y D' , que se encuentran en la recta de unión entre los centros de las barras, se encuentran en $+30^\circ$ y -30° respectivamente, mientras que el punto A' , el más próximo a la superficie interior del tubo, se encuentra en 180° .

En la figura 5.33 se representan las posiciones donde se produce el E_{max} en los montajes realizados con la distancia crítica barras-tubo, identificándose los puntos sobre la superficie de las barras con el ángulo que forman con el punto A , como ya se ha comentado. Estos lugares son también en los que se produce la intensidad máxima de campo en los montajes construidos con distancias barras-tubo mayores que la distancia crítica, salvo en el caso de los montajes construidos con valores de c_l entre 4,5 y 5 cuyo caso, como ya se vio anteriormente, se deberá matizar más adelante.

Se observa de nuevo la diferencia que marca la $d_{crítica} = 5R$ ($c_{crítico} = 5$) en este tipo de montajes: para montajes con distancias entre barras iguales o superiores a esta distancia crítica, la intensidad máxima de campo aparece en el punto A (posición = 0°) en todas las barras. Sin embargo, no ocurre lo mismo en configuraciones construidas con una distancia entre barras inferior a la $d_{crítica}$. En estos casos, como se observa en la gráfica de la figura 5.33, la intensidad máxima de campo se presenta en dos lugares diferentes, simétricos con relación al punto A , correspondientes a los dos instantes del primer semiperiodo en que cada barra alcanza la diferencia de potencial indicada en la gráfica de la figura 5.30 con una

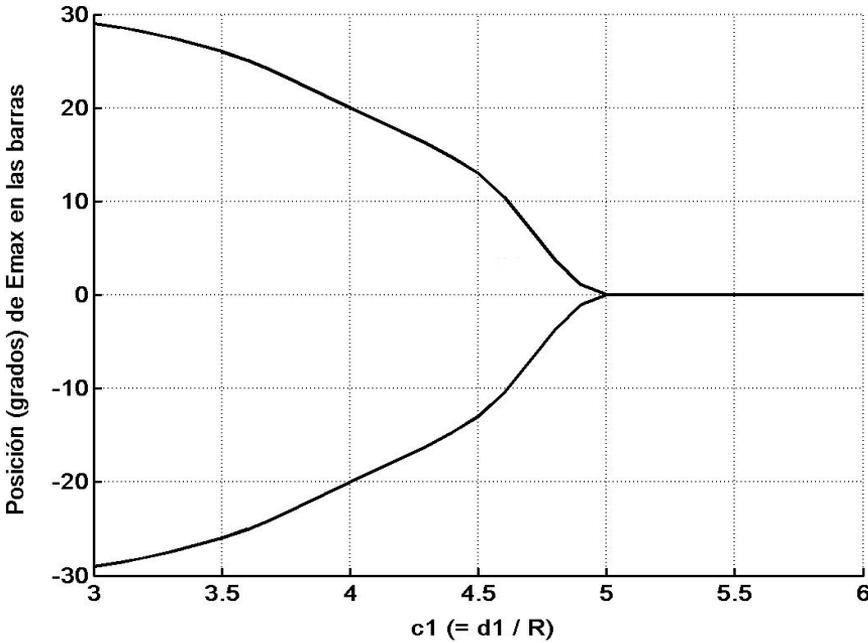


Figura 5.33 Evolución con c_1 de la posición en que se produce E_{max} para $d_{2crítica}$,

de las otras dos barras.

Como ya se ha dicho, hay que matizar el caso de los montajes con distancias entre barras comprendidas entre $4,5R$ y $5R$. Según lo visto, dado que se trata de un caso de distancia entre barras por debajo de la distancia crítica $d_{1crítica} = 5R$, en estos montajes se debería producir la E_{max} en dos lugares diferentes del punto A . Y así es para montajes construidos con la distancia crítica barras-tubo $d_{2crítica}$, pero si la distancia barras-tubo aumenta, los lugares donde se produce la intensidad máxima de campo cambian, aproximándose hacia el punto A , que es en donde, de hecho, se localiza la E_{max} en los montajes sin tubo estudiados en el ejemplo anterior. Esto es coherente con el hecho de que, para configuraciones sin tubo ($d_2 = \infty$), la distancia crítica entre barras $d_{1crítica}$ es $4,5R$, mientras que para configuraciones con el tubo situado a la distancia crítica de las barras ($d_2 = d_{2crítica}$), la distancia crítica entre barras $d_{1crítica}$ es $5R$.

Por lo que respecta a los montajes construidos con distancias barras-tubo por debajo de la distancia crítica $d_{2crítica}$, es decir a las configuraciones con el tubo muy próximo a las barras, los puntos de las barras en que se presenta la intensidad máxima de campo son los puntos más próximos al tubo, es decir los puntos A' de

la figura 5.32 (posición = 180°). Esto es coherente con los resultados citados para el valor del potencial existente en una barra en el momento en que se produce sobre ella la E_{max} , que se veía que era el valor de pico, lo que concuerda con la mayor diferencia de potencial posible entre una barra y el tubo.

Se presenta un resumen de la localización de la intensidad máxima de campo en función de c_2 , con gráficas para diferentes valores de c_1 en la figura 5.34.

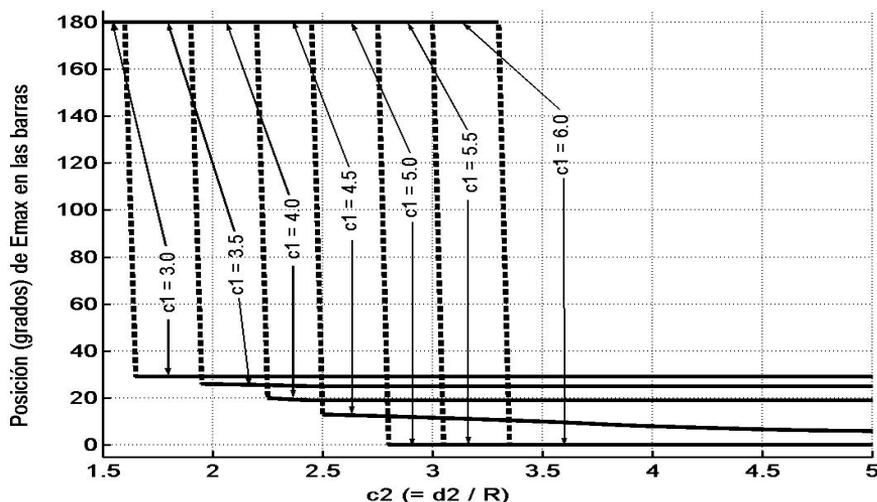


Figura 5.34 Localización de la E_{max} como función de c_2 para cada c_1

En estas gráficas se representa con línea de puntos el cambio brusco que se produce en la posición en la que aparece la intensidad máxima de campo en el momento de alcanzarse la distancia crítica barras-tubo. Es decir, para distancias barras-tubo inferiores a la $d_{2critica}$, el E_{max} , aparece siempre en el punto A' (posición = 180° según la figura 5.32), pero en el momento de establecer una distancia barras-tubo igual a la $d_{2critica}$, el E_{max} , pasa repentinamente a producirse en algún punto comprendido entre D y D' (posiciones $\leq 30^\circ$ según la misma figura 5.32).

5.3.4.5 La intensidad máxima de campo en el tubo

Por lo que se refiere a la máxima intensidad de campo que se produce sobre la superficie interior del tubo, se estudia cómo evoluciona con la distancia barras-tubo, para cada una de las siete distancias diferentes entre barras que se han

estudiado. Se construye una gráfica para cada una de estas siete distancias entre barras (figura 5.35).

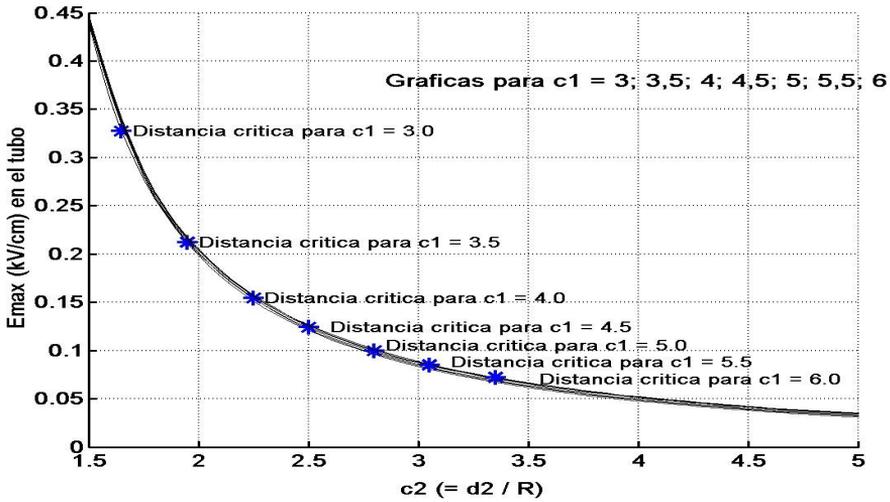


Figura 5.35 Valor de E_{max} en el tubo como función de c_2 para distintos valores de c_1

Se observa en la figura 5.35 como apenas resultan distinguibles las siete gráficas al utilizar una escala que permita ver todo el rango de valores de E_{max} en el tubo.

Si, para cada distancia d_2 , se examinan las pequeñas diferencias que existen entre las E_{max} en el tubo según sea la distancia entre barras, se encuentra que resultan proporcionalmente mayores cuanto mayor sea la distancia d_2 entre barras y tubo, aunque, lógicamente son los casos de menor valor del E_{max} en éste. En la figura 5.36 se representa, en función de la distancia barras-tubo, el valor máximo que se puede encontrar en la relación entre las E_{max} en el tubo según sea la distancia entre barras. Esta relación máxima es siempre: E_{max} con $(d_1 = 3R) / E_{max}$ con $(d_1 = 6R)$, es decir se produce cuando se consideran las distancias entre barras más diferentes entre sí. En la gráfica de la figura se puede ver que esta relación máxima, representativa de la diferencia existente entre las E_{max} en el tubo según sea la distancia entre barras, aumenta con c_2 , pero apenas llega a significar un 12% de diferencia entre las E_{max} , dándose este valor con una distancia entre barras y tubo ya muy considerable ($c_2=5$). Esto permite establecer que la influencia fundamental en la intensidad máxima de campo en el tubo es la distancia entre barras-tubo (c_2), resultando mucho menor la influencia de la distancia entre barras (c_1).

Resulta también de interés observar en la figura 5.36, la dependencia lineal entre la

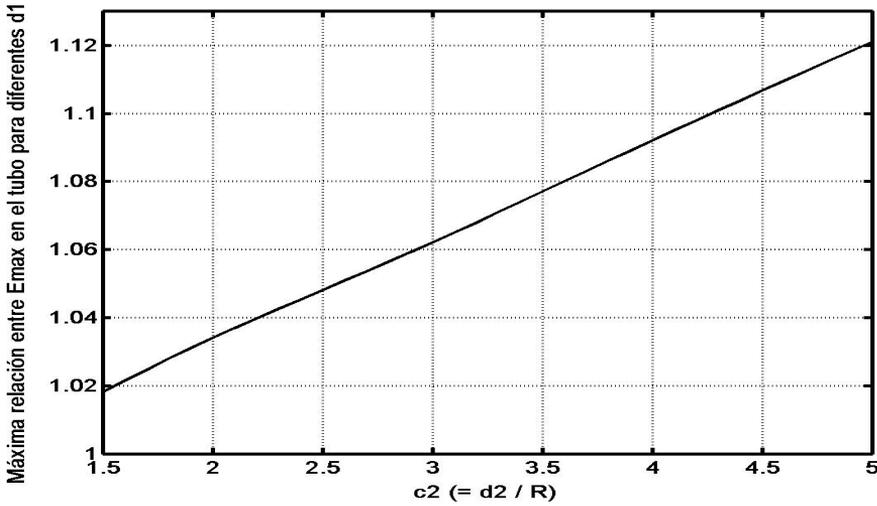


Figura 5.36 Máxima relación entre las E_{max} en el tubo con los distintos valores de distancias entre barras

máxima relación entre las diferentes E_{max} en el tubo y c_2 .

De todas formas la intensidad máxima de campo en el tubo es siempre inferior a la que se produce en las barras, como se ilustra en la figura 5.37, donde se presentan los valores de las intensidades máximas de campo en barras y tubo en función de la distancia d_1 , en configuraciones construidas con las respectivas $d_{2crítica}$.

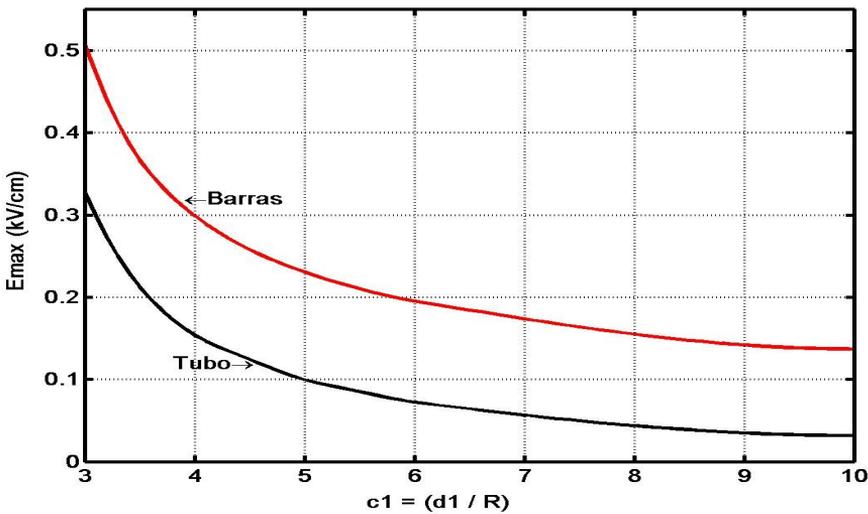


Figura 5.37 Evolución de las E_{max} en barras y tubo para $d_{2crítica}$

Se puede precisar más la información de la figura 5.37 presentando en la figura 5.38, en función de c_1 , una gráfica con la evolución del cociente que relaciona la intensidad máxima de campo en las barras con la del tubo en estas configuraciones realizadas con la distancia crítica barras-tubo.

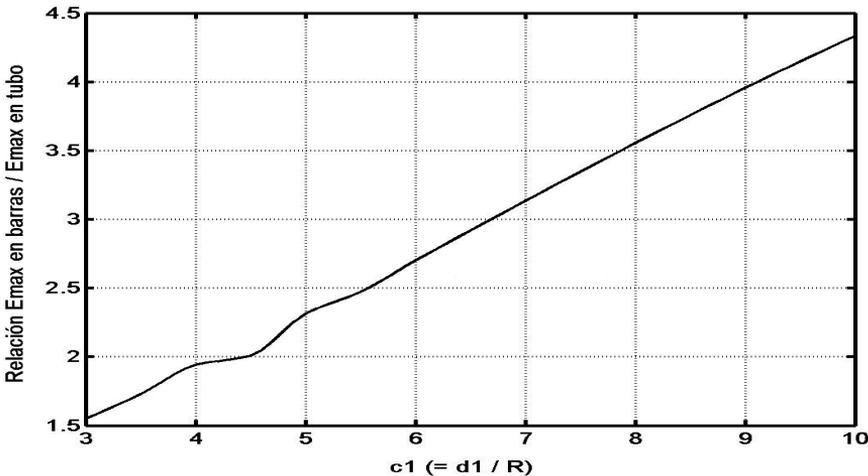


Figura 5.38 Evolución de la relación entre las E_{max} en barras y tubo, para $d_{2crítica}$

Hay que hacer notar que para distancias d_1 inferiores a la distancia crítica entre barras ($d_{1crítica} = 5$), las intensidades máximas de campo en barras y en tubo no se producen nunca en el mismo valor de fase ωt_{max} , pues el campo máximo en el tubo se produce siempre para valores de fase correspondientes a la tensión de pico en cada barra, lo que no ocurre con el campo máximo sobre las barras, como ya se ha visto (figura 5.31).

5.3.5 La distancia $d_{2crítica}$ y el diseño del montaje

Un resultado de mucho interés se obtiene al representar los valores obtenidos para el parámetro $c_{2crítico}$ en función del parámetro c_1 en la figura 5.39. Se puede observar en la gráfica de esta figura una evidente relación lineal entre ambos parámetros.

Calculando la relación $c_1 / c_{2crítico}$ se encuentra, con los límites de precisión de estos cálculos, un valor constante de **1,80** con una desviación máxima de dos centésimas: **1,80 ± 0,02**, como se puede observar en la tabla 5.4.

Tabla 5.4 Valores obtenidos para $c_{2crítica}$ y su relación con c_1

$c_1 =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
$c_{2crítica}$	1,65	1,95	2,25	2,50	2,80	3,05	3,35	3,90	5,55
Relación $c_1 / c_{2crítica}$	1,82	1,79	1,78	1,80	1,79	1,80	1,79	1,79	1,80

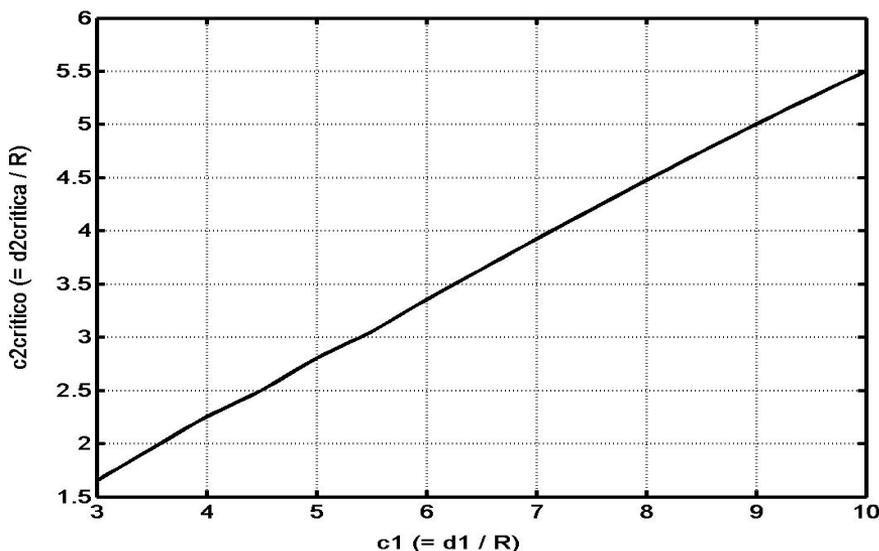


Figura 5.39 Relación entre los parámetros $c_{2crítico}$ y c_1

Esta constancia en la relación permite prever con precisión la distancia crítica barras-tubo una vez establecida la distancia entre barras, lo que es tanto como decir una vez establecida la intensidad máxima de campo admisible si se quiere trabajar dentro de la zona de campo estabilizado. En efecto, es la distancia entre barras la que determina la intensidad máxima de campo en las configuraciones diseñadas con valores del parámetro c_2 iguales o superiores al $c_{2crítico}$ (figuras 5.27 y 5.28). Así, si, para los montajes construidos con la $d_{2crítica}$, se construye una gráfica con el valor de la intensidad máxima de campo en función del parámetro c_1 , se obtiene la gráfica de la figura 5.40. Esta gráfica permite determinar el valor del parámetro c_1 para un montaje a partir de la intensidad máxima de campo admisible en el mismo si se va a trabajar, como parece lógico esperar, en la zona de campo estabilizado.

Una vez determinado así el parámetro c_1 , éste a su vez determina, por una parte, la distancia entre barras $d_1 = c_1 \cdot R$, y por otra la distancia $d_2 = d_{2crítica}$ (y por tanto el

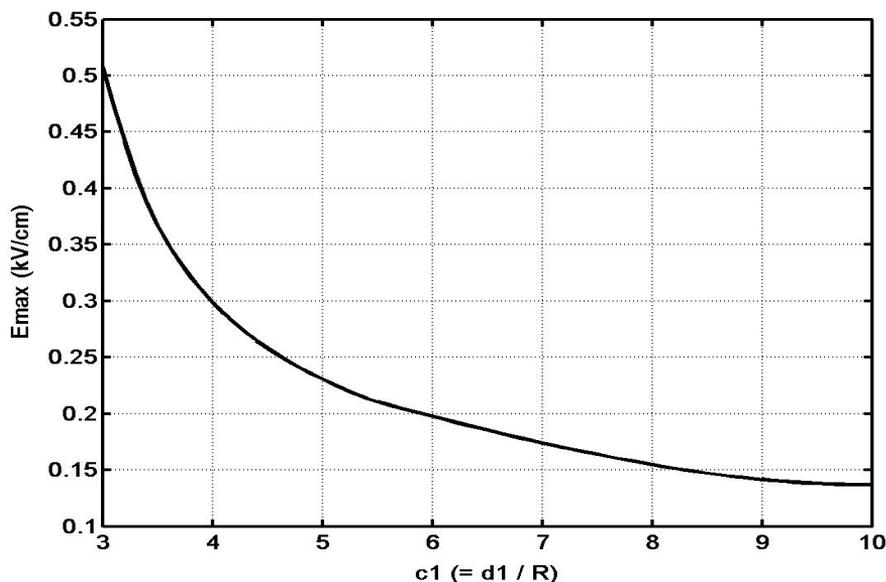


Figura 5.40 Valor de E_{max} en función de $c_1 (=d_1/R)$ en montajes construidos con $c_{2critica}$

diámetro del tubo) a partir del coeficiente **1,80**: $d_{2critica} = d_1 / 1,8$.

5.3.6 Conclusiones

Gracias al método de las Soluciones Elementales que se ha desarrollado en esta tesis, se han podido extraer con relativa facilidad varias conclusiones importantes para este tipo de configuraciones, bastante corrientes en la tecnología de alta tensión, y que pueden facilitar enormemente su diseño:

- En primer lugar se confirman los resultados obtenidos en el ejemplo anterior, obteniendo que, también en este tipo de configuraciones, la usual suposición de que la intensidad máxima de campo se presenta siempre en los puntos de una barra equidistantes a las otras dos, en el instante en el que aquella se encuentra en su pico de tensión, es solamente cierto para distancias entre conductores iguales o superiores a una cierta distancia crítica, cuyo valor para ese tipo de montajes está en $d_{1critica} = 5$ veces el radio del conductor. Sin embargo para distancias entre barras inferiores a esta distancia crítica, la intensidad máxima de campo se presenta en otros lugares, más próximos a alguna de las otras dos barras y cuando la diferencia de potencial entre ellas tiende hacia la tensión de línea.

Se verá a continuación que, además, estas afirmaciones deben ser precisadas según sea la distancia barras-tubo.

- Se encuentra otro valor crítico, éste para la distancia barras-tubo, que establece un límite muy claro en los comportamientos eléctricos de este tipo de montajes. Así, para una distancia dada entre barras, distancias barras-tubo superiores a ésta distancia crítica apenas disminuyen el valor de la intensidad máxima de campo que se produce en el montaje. Y manteniendo igualmente constante la distancia entre barras, distancias barras-tubo inferiores a esta distancia crítica provocan grandes aumentos en la intensidad máxima de campo.

Por otra parte, para una distancia barras-tubo inferior a la distancia crítica, resulta casi indiferente variar la distancia entre barras (siempre que la distancia barras-tubo siga siendo inferior a la distancia crítica), pues la intensidad máxima de campo permanece prácticamente constante.

Se encuentra por tanto que, siempre que las configuraciones se mantengan con distancias barras-tubo iguales o superiores a la distancia crítica, el elemento que determina fundamentalmente el valor de la intensidad máxima de campo es la distancia entre barras, mientras que para distancias barras-tubo inferiores a la distancia crítica, la intensidad máxima de campo queda prácticamente determinada por esta distancia barras-tubo.

- Se encuentra que esta distancia crítica barras-tubo está bien determinada (dentro del margen de distancias trabajadas) por la distancia entre barras, pues existe una relación constante entre ellas:

$$d_{2crítica} = \frac{d_1}{1,80} \quad (5.8)$$

$$c_{2crítica} = \frac{c_1}{1,80} \quad (5.9)$$

- Como consecuencia de lo anterior, dada una determinada distancia d_1 entre barras, existe un tamaño eléctricamente óptimo para el tubo, establecido con la distancia $d_{2crítica}$ correspondiente, fácilmente calculable con la ecuación 5.12. Se puede definir este tamaño del tubo como eléctricamente óptimo por ser el mínimo tamaño a partir del cual la intensidad máxima de campo apenas sufre disminución ante posibles aumentos de su tamaño, mientras que tamaños

inferiores a éste determinan grandes aumentos en la intensidad máxima de campo. Así, tamaños del tubo superiores al tamaño óptimo sólo determinan aumentos en el coste de la instalación sin conseguir disminuciones substanciales del riesgo eléctrico, mientras que tamaños inferiores sí que provocan grandes aumentos en los riesgos eléctricos. Este tamaño óptimo es fácilmente determinable a partir de su relación geométrica con d_1 y d_2 (figura 5.26) :

$$R_{tubo} = \frac{d_1}{\sqrt{3}} + d_2 \quad (5.10)$$

Y dado que el radio óptimo es el correspondiente a la $d_{2crítica}$, se podrá poner:

$$R_{tubo-óptimo} = \frac{d_1}{\sqrt{3}} + d_{2crítica} \quad (5.11)$$

Con lo que, operando:

$$R_{tubo-óptimo} = \frac{d_1}{\sqrt{3}} + d_{2crítica} = \frac{c_1 \cdot R}{\sqrt{3}} + c_{2crítica} \cdot R = \frac{c_1 \cdot R}{\sqrt{3}} + \frac{c_1}{1,8} \cdot R$$

Y así, el radio óptimo del tubo será:

$$R_{tubo-óptimo} = c_1 \cdot R \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1,8} \right) \quad (5.12)$$

que queda perfectamente determinado a partir de c_1 , o sea del máximo valor admisible para la intensidad de campo (figura 5.40).

- Para tamaños de tubo iguales o superiores al tamaño óptimo, las circunstancias que rodean a la aparición de la intensidad máxima de campo dependen de la distancia establecida entre barras. Así, para distancias d_1 iguales o superiores al valor crítico de la distancia entre barras $d_{1crítica} = 5R$, el comportamiento del campo es el que se viene suponiendo tradicionalmente, localizándose la intensidad máxima de campo en los puntos de la superficie de la barra equidistantes de las otras dos barras, y en los instantes en que el potencial de la barra alcanza su valor de pico (figura 5.41). Sin embargo para distancias entre barras inferiores a su distancia crítica $5R$, la localización del campo máximo sobre la superficie de las barras tiende a desplazarse hacia puntos más próximos

a las otras dos barras, en instantes en que la máxima diferencia de potencial entre la barra correspondiente y una de las otras dos se aproxima a la tensión de línea (figura 5.42).

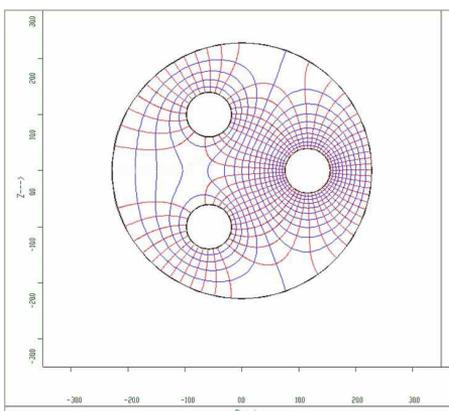


Figura 5.41 Líneas de campo con E_{max} para $c_1 = 5$ y $c_2 = 2,8 (= c_{2critico})$

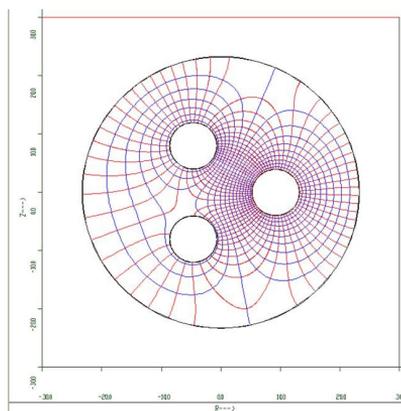


Figura 5.42 Líneas de campo con E_{max} para $c_1 = 4 (< c_{1critico})$ y $c_2 = 3,5 (> c_{2crit})$

- Para tamaños de tubo inferiores al tamaño óptimo, la E_{max} se localiza siempre en los puntos de las barras más próximos al tubo y cuando se alcanza la mayor diferencia de potencial entre ellos, o sea cuando la barra alcanza el potencial máximo (figura 5.43).

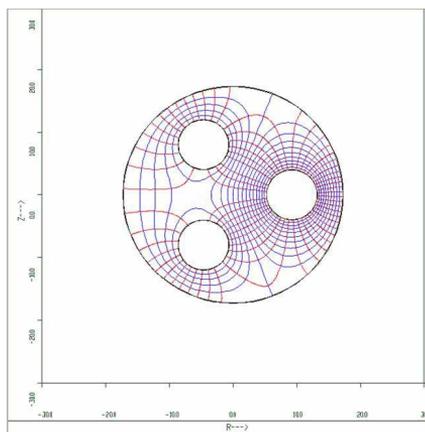


Figura 5.43 Líneas de campo con E_{max} para $c_1 = 4$ y $c_2 = 2 (< c_{2critico})$

- Estos hechos permiten realizar con facilidad un primer diseño de un montaje de este tipo, si se desea que trabaje dentro de la zona de campo estabilizado. En efecto, a partir de la intensidad máxima de campo admisible en el montaje, se puede establecer el valor del parámetro c_1 de acuerdo con la figura 5.40, y conocido éste parámetro se puede calcular el radio óptimo para el tubo utilizando la ecuación 5.12, con lo que el montaje queda inicialmente determinado, y listo para, aplicando los coeficientes de seguridad correspondientes, realizar los cálculos específicos necesarios en cada caso con el método aquí desarrollado.

5.3.7 Tiempos de ejecución

Utilizando un PC Pentium IV a **1,3 Ghz** con **750 Mb** de memoria RAM, los tiempos de resolución utilizando el método de soluciones elementales fueron **32 segundos** para calcular las cargas superficiales que simulan cada configuración (para un c_1 y un c_2 dados), y **3 minutos y 50 segundos** en realizar los **180 cálculos** a lo largo del primer medio periodo para determinar el instante en que se produce la intensidad máxima de campo, su valor y localización.

5.4 Montajes de barras trifásicas encapsuladas en tubo no centrado

5.4.1 Descripción de la configuración

A continuación se estudia la respuesta eléctrica de los montajes de barras trifásicas encapsuladas que se estudiaron en el ejemplo anterior, ante un posible desplazamiento del tubo de su posición centrada.

Se sigue considerando que la longitud axial de la configuración es de **4 m**, que los radios de las barras son **4 cm**, y que el régimen de funcionamiento es trifásico equilibrado.

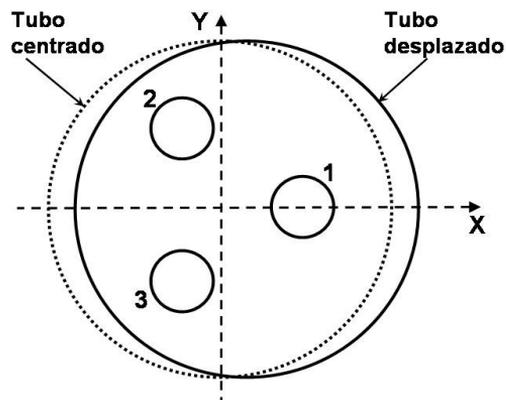


Figura 5.44 Desplazamiento I

Se estudia la respuesta ante desplazamientos en tres direcciones: +X, -Y y -X, que aquí se denominan desplazamiento I, desplazamiento II y desplazamiento III respectivamente. En las figuras 5.44, 5.45 y 5.46 se presentan las secciones transversales de las configuraciones resultantes de cada uno de los desplazamientos citados (con línea de puntos se representa la situación centrada del tubo y con línea continua se representa la situación desplazada).

En los tres casos se estudian inicialmente nueve montajes, cada uno definido por uno de los siguientes valores del parámetro $c_1 = 3, 3'5, 4, 4'5, 5, 5'5, 6, 7$ y 10 . Todos ellos están realizados con la distancia crítica barras-tubo tal como se calculó en el ejemplo anterior con el tubo centrado.

Posteriormente se estudian un gran número de montajes definidos a partir de cada una de las nueve distancias entre barras correspondientes a los valores anteriores del parámetro c_1 . A partir de cada una de estas distancias se definen una cierta cantidad de montajes concretos, cada uno caracterizado por un valor diferente del parámetro c_2 .

Cada barra se describe con **13** cargas superficiales y **11** armónicos en dirección acimutal, y el tubo con **13** cargas superficiales en dirección axial y **35** armónicos en dirección acimutal, distribuidas uniformemente. Por tanto, el sistema de ecuaciones resultante tiene **936** incógnitas y la configuración otros tantos puntos de contorno.

5.4.2 Objetivos del estudio

Se trata de estudiar el comportamiento eléctrico de montajes de barras trifásicas encapsuladas en un tubo no centrado, aplicando el método desarrollado en la presente tesis.

Dado que la diferencia de este tipo de montajes con los montajes estudiados en el

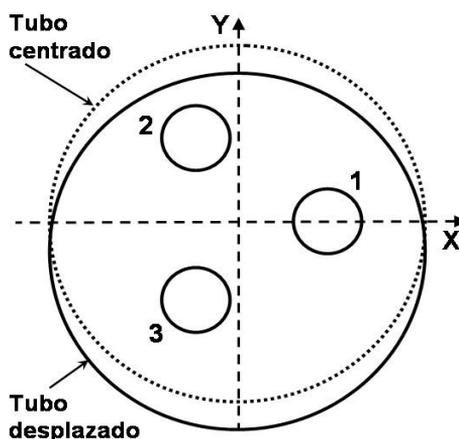


Figura 5.45 Desplazamiento II

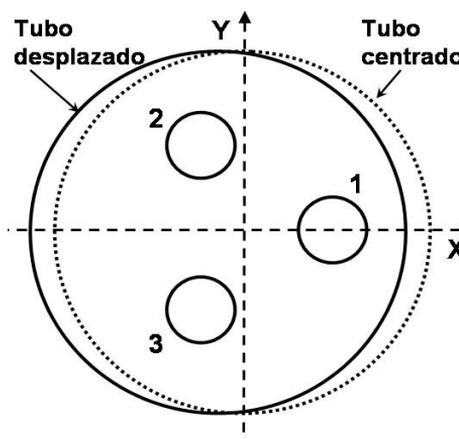


Figura 5.46 Desplazamiento III

ejemplo anterior se encuentra únicamente en el desplazamiento del tubo, se trata de comprobar las modificaciones que introduce este hecho sobre las conclusiones que se obtuvieron en el estudio anterior.

5.4.3 Aspectos estudiados

En todos los montajes estudiados se han investigado los valores de la máxima intensidad de campo que aparece, su localización sobre las superficies de los electrodos y los valores de potencial y fase existentes cuando se producen estos máximos. Debido a las propiedades de las funciones de potencial en los conductores, basta con estudiar el campo en el primer medio periodo de la función $V_I(0 \leq \omega t < 180^\circ)$ (ecuación 5.5). Se evalúa el campo en la sección transversal media del montaje.

Inicialmente, se estudia el campo que se produce en **180** valores de fase diferentes, uniformemente distribuidos a lo largo del primer semiperiodo, en puntos situados en las superficies de barras y tubo separados **10°** entre sí. Una vez determinado en cuáles de los valores de fase estudiados se produce la intensidad máxima de campo, cuando se ha necesitado una mayor precisión, se ha vuelto a buscar la intensidad máxima de campo en un intervalo de fases más estrecho en torno al valor encontrado inicialmente, estudiando ahora fases de medio en medio grado y puntos sobre las superficies electrónicas de grado en grado. Como en los ejemplos anteriores, los valores de fase se citarán siempre con relación a V_I , y el valor de fase donde se produce la intensidad máxima de campo será identificado como ωt_{\max} .

Se estudia en primer lugar el efecto que los desplazamientos del tubo tienen sobre configuraciones realizadas con la distancia crítica barras-tubo correspondiente a tubos centrados. Podría tratarse del caso de un error de montaje no previsto, y se estudian las consecuencias eléctricas que este hecho tendría.

Los desplazamientos considerados para el tubo fueron en todos los casos proporcionales al radio del mismo, partiendo de una desviación de **1,5 cm** para la distancia crítica de $c_1 = 5$, correspondiente a una desviación porcentual de más del **3%** sobre el diámetro del tubo y de más del **16%** sobre la distancia entre paredes de tubo y barra, por lo que se trata de una distancia muy considerable para

producirse inadvertidamente en configuraciones reales (se toma este valor de desplazamiento, del estudio realizado por Singer [41] ya citado en el capítulo 3). Para introducir estos desplazamientos en el programa de cálculo se utiliza una precisión de un milímetro, y así los desplazamientos absolutos considerados para cada valor del parámetro c_1 son los indicados en la tabla 5.5 siguiente.

Tabla 5.5 Desplazamientos del tubo tenidos en cuenta para cada valor de c_1

$c_1 =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
Desplazamiento (cm)	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,1	3,0

Posteriormente se estudia si realmente existen distancias críticas para este tipo de situaciones, entendidas como las distancias d_2 ante las que posibles desviaciones del tubo de su posición centrada hasta un valor máximo previamente establecido, no tendrían influencia significativa en el valor de la intensidad de campo eléctrico, que permanecería substancialmente constante. Y en caso existir esas distancias críticas, averiguar si son tan fácilmente predecibles como en el ejemplo anterior.

5.4.4 Respuesta de montajes ante desplazamientos del tubo

5.4.4.1 La intensidad máxima de campo en las barras

Inicialmente se estudian nueve montajes definidos por cada uno de los nueve valores siguientes del parámetro $c_1 = 3, 3'5, 4, 4'5, 5, 5'5, 6, 7$ y 10 y por su distancia crítica barras-tubo respectiva, tal como fue establecida en el ejemplo anterior. Se aplican los desplazamientos citados (tabla 5.5) en cada una de las tres direcciones planteadas (figuras 5.44, 5.45 y 5.46), y se estudia la respuesta eléctrica de la configuración resultante en cada caso.

En los resultados obtenidos se encuentran aumentos substanciales de la intensidad máxima de campo sobre las barras en todos los montajes estudiados con las tres desviaciones aplicadas (figura 5.47), aumentos que son mayores en los montajes contruidos con las barras más próximas entre sí, es decir con menor valor del parámetro c_1 .

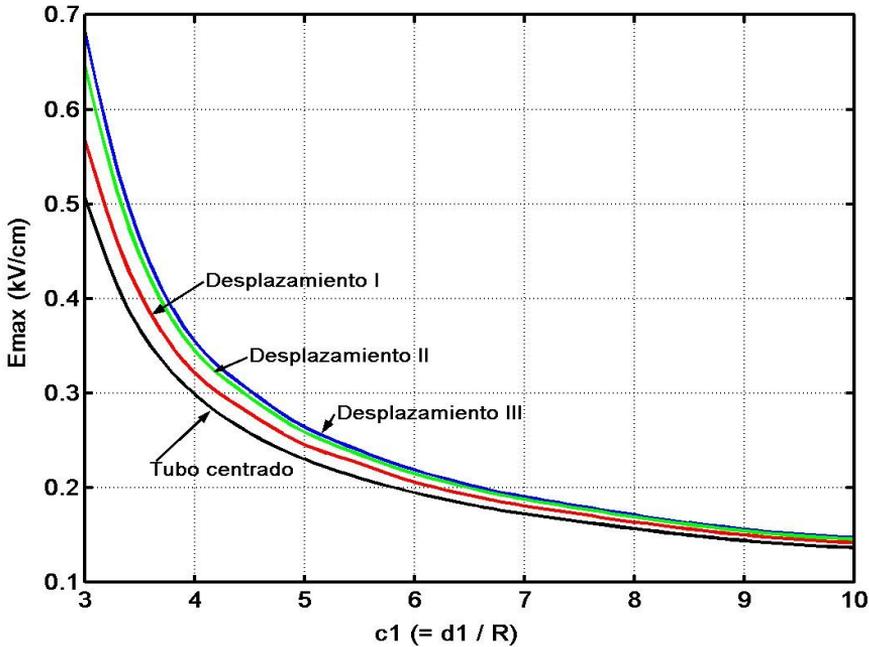


Figura 5.47 Valor de E_{max} cuando el tubo se desplaza de su posición centrada en un montaje construido con la distancia $d_{2critica}$

Como se ve en la figura 5.47, los aumentos producidos son diferentes en los tres desplazamientos considerados, dándose el mayor aumento de la intensidad máxima de campo con el desplazamiento **III** y el menor con el desplazamiento **I**, es decir aparece un mayor aumento de la intensidad máxima de campo con el desplazamiento que produce una mayor aproximación entre el tubo y alguna de las barras, y un menor aumento con el desplazamiento que produce un menor acercamiento entre barras y tubo.

Se presenta en la figura 5.48 una gráfica con el factor de multiplicación f_1 que se produce en la intensidad máxima de campo eléctrico en cada uno de los tipos de desplazamiento considerados para el tubo. El factor f_1 corresponde a la relación:

$$E_{max \text{ con desplazamiento}} = f_1 \cdot E_{max \text{ sin desplazamiento}}$$

Se observa en la figura 5.48 que, para un diámetro de tubo correspondiente a la distancia crítica, un desplazamiento de apenas el 3% del valor del diámetro produce aumentos de entre el 10% y 20% en la intensidad máxima de campo para configuraciones de tamaño habitual.

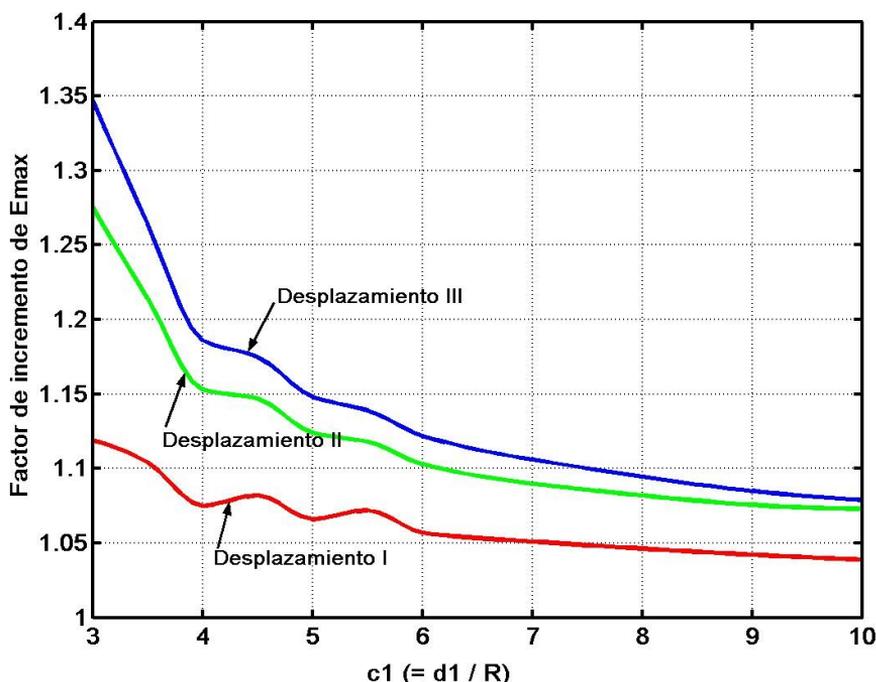


Figura 5.48 Factor de aumento de E_{\max} con desplazamientos de tubo con relación al E_{\max} producido con el tubo centrado.

Se puede ver, por tanto, que este tipo de desplazamientos del tubo tienen efectos muy negativos en el comportamiento eléctrico de la configuración sino son previstos ni considerados.

5.4.4.2 Localización de la E_{\max} sobre las barras

En el caso del desplazamiento *I*, la mayor intensidad de campo se produce tanto en la barra 2 como en la barra 3 (en diferentes instantes, evidentemente), mientras que en el desplazamiento *II* la mayor intensidad de campo se produce solamente en la barra 2, y con el desplazamiento *III* la mayor intensidad de campo se produce sobre la barra *I*.

Es decir, el aumento de la intensidad máxima de campo se produce en las barras que quedan más próximas al tubo tras el desplazamiento de éste, y con mayor valor cuando el tipo de desplazamiento del tubo produce a su vez una mayor aproximación de éste a alguna de las barras.

En cuanto al lugar concreto de cada barra donde se produce la intensidad máxima de campo, en los montajes con el tubo centrado contruidos con la distancia crítica ya se vio que ésta aparece siempre en las zonas más próximas a las otras barras, es decir en puntos situados en la zona comprendida entre los puntos D y D' de la figura 5.32, mientras que cuando se produce un desplazamiento del tubo se ve ahora que la intensidad máxima de campo pasa a localizarse siempre en los puntos de la barra más próximos al tubo.

5.4.4.3 Potencial y valores de fase ante la E_{max} en las barras

Coherentemente con esto, lo que determina la máxima intensidad de campo es la máxima diferencia de potencial entre el tubo y su barra más próxima, o sea que la intensidad máxima de campo se produce en el instante en que la barra más próxima al tubo alcanza su máximo potencial de electrodo.

En la tabla 5.6 se presentan los valores de fase y potencial en barras en el momento de producirse la intensidad máxima de campo en cada uno de los desplazamientos estudiados para el tubo.

Tabla 5.6 : Fases en las que se produce la E_{max}

	Desplazamiento I	Desplazamiento II	Desplazamiento III
Barra más próxima al tubo	2 y 3	2	1
Barra en la que está E_{max}	2 y 3	2	1
Tensión en barra con E_{max}	1 kV	1 kV	1 kV
Fase ωt_{max}	30° / 150°	30°	90°

Este comportamiento, tal como se vio en el ejemplo anterior, es el de una configuración con una distancia barras-tubo inferior a la distancia crítica, situación que es la que realmente se está produciendo al desplazar el tubo hacia alguna de las barras. Si se examina este comportamiento eléctrico en términos de las diferentes zonas que se pueden distinguir en la representación gráfica de la intensidad máxima de campo frente a diferentes distancias entre barras (figura 5.27), la desviación del tubo traslada a la configuración desde el inicio de la zona de intensidad máxima de campo estabilizada a la zona de intensidad máxima de campo no estabilizada.

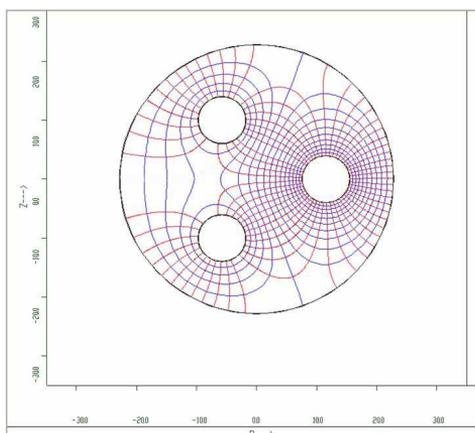


Figura 5.49 Líneas con el tubo centrado

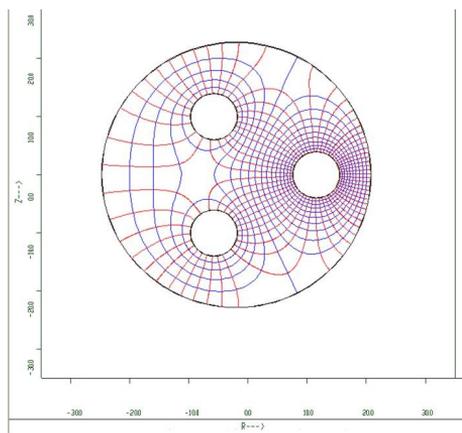
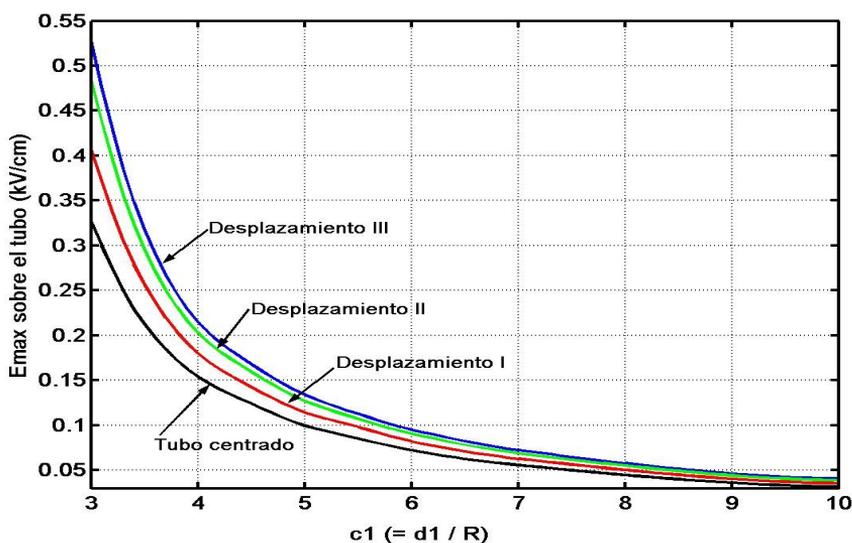


Figura 5.50 Líneas con el tubo desplazado

Los gráficos de líneas de campo correspondientes al montaje construido con una distancia entre barras $d_I=5R$ y una distancia barras-tubo igual a la distancia crítica, primero con el tubo centrado (figura 5.49) y luego con el tubo desplazado (figura 5.50), ilustran esta situación.

5.4.4.4 La intensidad máxima de campo en el tubo

También la intensidad máxima de campo que aparece en el tubo se ve aumentada con relación a la que se produce con su colocación centrada (figura 5.51).



Puede verse la similitud del aumento de la intensidad máxima de campo en el tubo ante los desplazamientos de éste con el aumento de la intensidad máxima de campo en las barras en las mismas circunstancias, observando la similitud de las gráficas de las figuras 5.51 y 5.47.

Observando las gráficas de la figura 5.51 se puede tener una cierta idea del grado de aumento de la intensidad máxima de campo que aparece en el tubo con los diferentes tipos de desplazamiento de éste. Pero con las gráficas de la figura 5.52 se tiene el dato concreto de estos aumentos, y se observa que son sensiblemente superiores a los aumentos que se producen en las barras que eran de entre el **10** y **20%** en los montajes de tamaño más habitual para un desplazamiento de tipo **III**, mientras que en el tubo están entre el **30** y el **40%** en los mismos montajes.

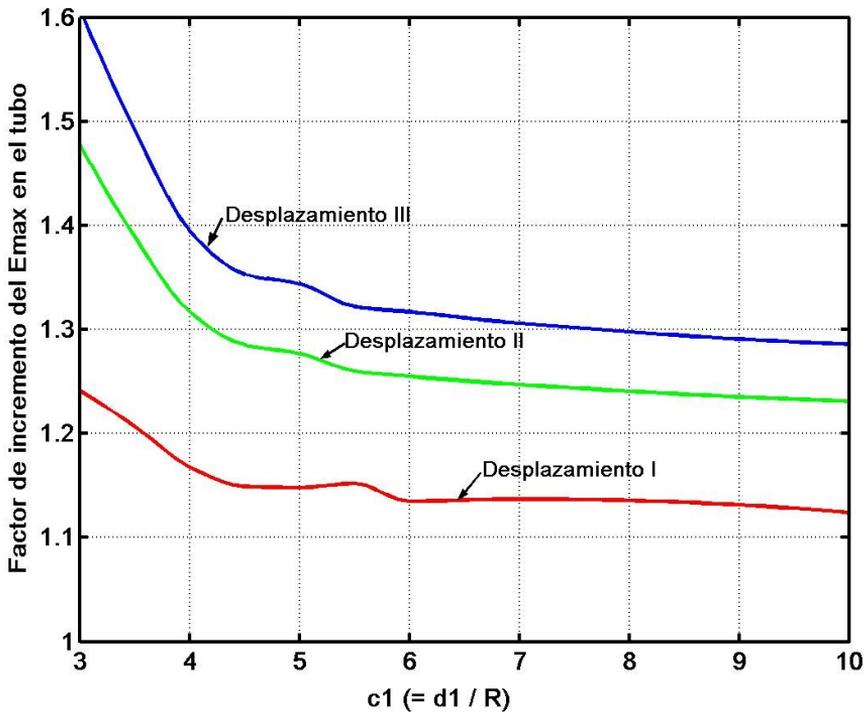


Figura 5.52 Incremento del E_{max} en el tubo con relación al montaje con tubo centrado

Sin embargo pese a este mayor aumento, los valores de la intensidad de campo en la superficie interior del tubo siguen siendo inferiores a los que se producen sobre la superficie exterior de la(s) barra(s) más próxima(s) al tubo, como se puede ver en las gráficas de la figura 5.53.

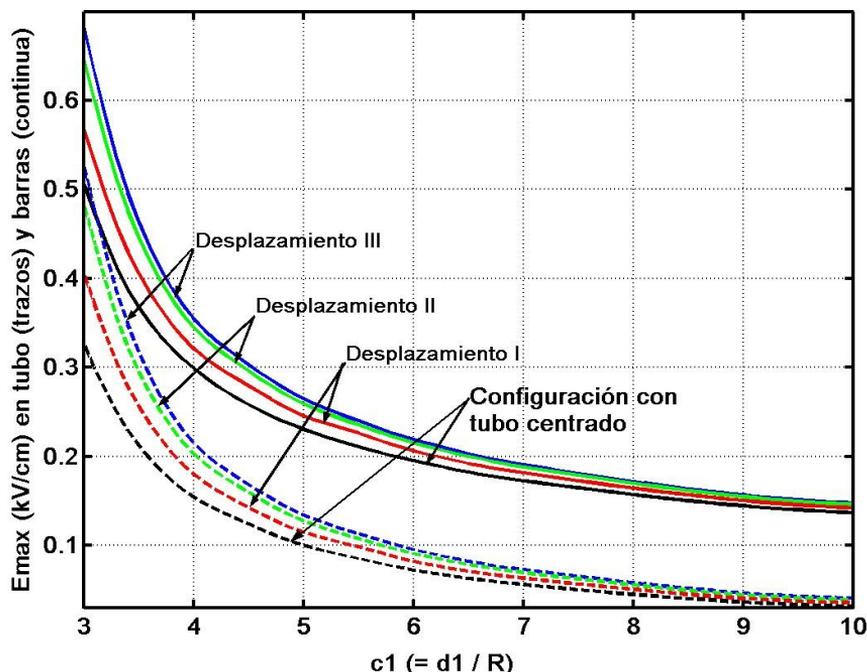


Figura 5.53 E_{max} en barra(s) y tubo con los desplazamientos considerados para éste

5.4.5 Diseño de montajes eléctricamente estables

5.4.5.1 Distancias barras-tubo seguras ante desvíos de éste

Como se acaba de ver el aspecto fundamental en el conocimiento del comportamiento eléctrico de este tipo de configuraciones es la intensidad máxima de campo que se produce sobre las barras, y es por tanto el aspecto que se va a estudiar en detalle.

Lo primero que cabe preguntarse es si en estos casos existirá una distancia crítica tal que, desplazamientos del tubo como los considerados, no produzcan aumentos significativos en la intensidad máxima de campo por continuar la configuración dentro de la zona de campo estabilizado. Se trataría de encontrar un tamaño para el tubo que fuese seguro ante desplazamientos de un valor máximo previamente establecido.

Se realizan los cálculos únicamente para el tipo de desplazamiento más

desfavorable, el desplazamiento **III**, pues si se consigue encontrar una distancia crítica eléctricamente segura para éste, esta distancia crítica será también una distancia segura para posibles desplazamientos de otro tipo, dado que desplazamientos de otro tipo producen un menor acercamiento entre barras y tubo que aquél, y ya se comprobó que esta característica es el aspecto fundamental en estas situaciones.

Se estudian nueve distancias diferentes entre barras. En la tabla 5.5 anterior aparece identificada cada una de estas nueve distancias con el valor de su parámetro c_1 característico. En dicha tabla 5.5 también se indica el desplazamiento de tubo considerado para cada c_1 . Para cada distancia entre barras se estudia la evolución de la intensidad máxima de campo en función del valor del parámetro c_2 . Se presenta en la figura 5.54 una gráfica de dicha evolución para cada distancia entre barras considerada, identificada cada una de ellas con su valor c_1 . Los valores de la distancia d_2 utilizados para cuantificar el parámetro c_2 son los que corresponderían al tubo centrado.

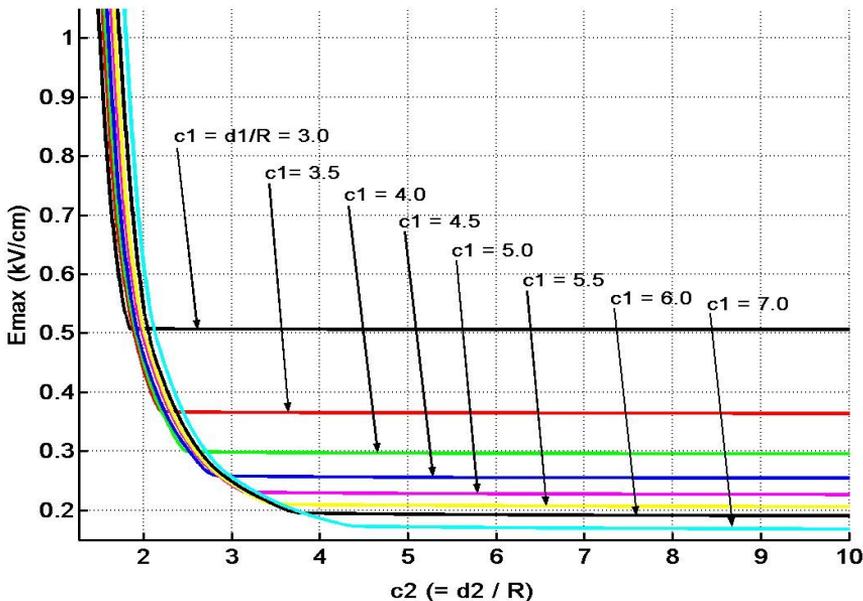


Figura 5.54 E_{max} en barra 1 con los desplazamientos considerados para el tubo

En la figura 5.54 se observa que, para todas las distancias entre barras consideradas, efectivamente existe un valor crítico del parámetro c_2 a partir del cual la intensidad máxima de campo permanece significativamente estabilizada

para mayores valores del mismo.

En cuanto a las circunstancias en las que se presenta la intensidad máxima de campo en este tipo de montajes son exactamente las mismas que se encuentran en los montajes construidos con tubo centrado. Así, en los montajes construidos con distancias barra-tubo iguales o superiores a la distancia crítica, las circunstancias en que se presenta el E_{max} dependen de la distancia establecida entre barras. Es decir, para distancias d_I iguales o superiores al valor crítico de la distancia entre barras $d_{Icrítica} = 5R$, el comportamiento del campo es el que se viene suponiendo tradicionalmente, localizándose la intensidad máxima de campo en los puntos de la superficie de la barra equidistantes de las otras dos barras, y en los instantes en que el potencial de la barra alcanza su valor de pico. Sin embargo para distancias entre barras inferiores a su distancia crítica $5R$, la localización del campo máximo sobre la superficie de las barras tiende a desplazarse hacia puntos más próximos a las otras dos barras, en instantes en que la máxima diferencia de potencial entre la barra correspondiente y las otras dos es mayor que antes y está cada vez más próxima a la tensión de línea.

Para distancias barras-tubo inferiores a la distancia crítica, las circunstancias son también las mismas que en los montajes con el tubo centrado: la E_{max} se localiza siempre en los puntos de las barras más próximos al tubo, o sea en los puntos A' (figura 5.32) de la barra I , y cuando se alcanza la mayor diferencia de potencial entre ambos electrodos, o sea cuando la barra alcanza el potencial máximo.

Volviendo a la figura 5.54, se observa que para valores del parámetro c_2 por debajo de cada valor crítico, hay una diferencia muy significativa entre las gráficas de esta figura y las gráficas de la figura 5.27 correspondientes a montajes con el tubo centrado, pues así como en la figura correspondiente a montajes con el tubo centrado las gráficas se confunden unas con otras en dicha zona previa a la zona de campo estabilizado, en esta figura 5.54 correspondiente al tubo desplazado se ven claramente diferenciadas las gráficas de los diferentes c_1 . Es decir, lo que se encuentra para el tubo centrado sobre la relevancia fundamental del parámetro c_2 para determinar la intensidad máxima de campo en configuraciones con distancias barras-tubo inferiores a la distancia crítica, deja de ser cierto para montajes con el tubo desplazado, en los que también parece influir la distancia entre barras.

Por lo que respecta a los valores críticos encontrados para el parámetro c_2 , $c_{2crítico}$, en cada c_1 considerado, aparecen expuestos en la tabla 5.7 conjuntamente con los

que se encontraron en el ejemplo anterior para montajes con el tubo centrado.

Tabla 5.7 Valores de $c_{2crítica}$ con los desplazamientos estudiados y sin desplazamiento

$c_1 =$		3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
Desplazamiento (cm)		0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,1	3,0
Tubo desplazado	$c_{2crítico}$	1,85	2,20	2,55	2,85	3,15	3,45	3,80	4,40	6,25
	$c_1 / c_{2crítica}$	1,62	1,59	1,57	1,58	1,59	1,59	1,58	1,59	1,60
Tubo centrado	$c_{2crítico}$	1,65	1,95	2,25	2,50	2,80	3,05	3,35	3,90	5,55
	$c_1 / c_{2crítica}$	1,82	1,79	1,78	1,80	1,79	1,80	1,79	1,79	1,80

Se observa que, igual que en los montajes con el tubo centrado, aparece en los montajes con el tubo desplazado una constancia entre el valor del parámetro c_1 y su correspondiente $c_{2crítica}$, pero que ahora ya no es $1,80 \pm 0,02$ sino $1,60 \pm 0,02$.

Representando gráficamente estos resultados, se obtiene la figura 5.55.

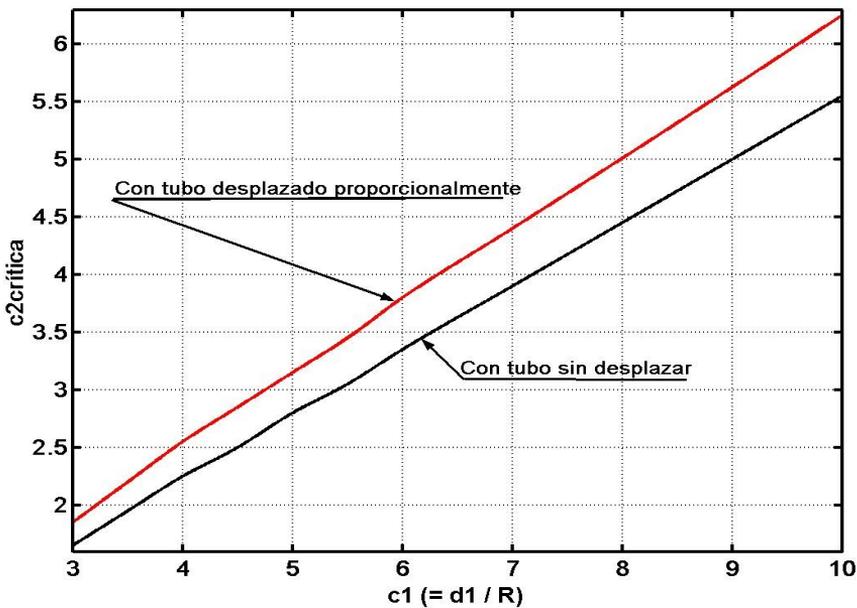


Figura 5.55 Valores de $c_{2crítica}$ para tubo centrado y para tubo desplazado

Resulta evidente la linealidad de la dependencia entre $c_{2crítica}$ y c_1 en ambas gráficas, aunque se aprecia que la pendiente de las dos rectas es ligeramente diferente.

5.4.5.2 Distancias d_{2real} y $d_{2centrada}$

Antes de continuar con el análisis de los resultados, resulta conveniente precisar el significado del parámetro d_2 . En efecto, al considerar a esta configuración como el resultado de un simple desplazamiento de un tubo situado inicialmente centrado, se está en una situación confusa en cuanto al significado del parámetro d_2 .

En una configuración con el tubo centrado como la representada en la figura 5.26 el significado del parámetro d_2 es claro, representando la distancia entre barras-tubo, pero en una configuración con el tubo desviado las tres distancias barras-tubo ya no son iguales y, de hecho, la d_2 que se está considerando no indica ninguna de ellas.

Por tanto la utilización de este parámetro en configuraciones no centradas requiere una precisión del significado que se le ha venido dando, precisión que se puede realizar de diversas formas siendo, en principio, la elección entre ellas totalmente arbitraria, sin ningún problema más allá de la propia utilidad o comodidad de uso que pudiere tener una u otra elección.

De hecho, hasta aquí se ha venido considerando al parámetro d_2 como la distancia barras-tubo que se encontraría si se centrara el tubo en estos montajes descentrados. Sin embargo, dada la importancia decisiva que, para el valor de la intensidad máxima de campo, tiene la máxima proximidad entre barras y tubo, parecería lógico también utilizar como significado para d_2 la distancia que nos indica la máxima proximidad entre barras y tubo, y ver posteriormente las ventajas que produce esta nueva definición.

Por otra parte, el significado que se le ha venido dando a la distancia d_2 hasta ahora permite determinar el radio del tubo independientemente de que se produzca desplazamiento del tubo o no, lo que representa también una cierta utilidad.

Por todo esto conviene precisar estos dos conceptos y diferenciarlos claramente en el momento de utilizarlos.

Denominando d_{2real} a la distancia que determina la máxima proximidad entre barras y tubo, y denominando $d_{2centrada}$ al valor que indicaría la proximidad barras-tubo si se procediera a centrar el tubo en un montaje con él descentrado, la relación entre ellos es la siguiente:

$$d_{2real} = d_{2centrada} - \delta \quad (5.13)$$

siendo δ el valor del desplazamiento del tubo desde su posición centrada.

Al tener dos valores para d_2 también se pueden definir dos valores para el parámetro c_2 :

$$c_{2centrado} = \frac{d_{2centrada}}{R} \quad (5.14)$$

$$c_{2real} = \frac{d_{2real}}{R} \quad (5.15)$$

Y la relación entre ambos se puede establecer a partir de la ecuación 5.13 de la siguiente manera:

$$c_{2real} = c_{2centrado} - \frac{\delta}{R} \quad (5.16)$$

Con la distancia $d_{2centrada}$ se puede determinar, junto con d_1 , el radio del tubo de acuerdo con la ecuación 5.10, haya desplazamiento de éste o no:

$$R_{tubo} = \frac{d_1}{\sqrt{3}} + d_{2centrada} \quad (5.17)$$

5.4.5.3 Análisis con el concepto de proximidad real barras-tubo

La distancia d_2 y el parámetro c_2 que se han venido utilizando hasta ahora son la distancia $d_{2centrada}$ y el parámetro $c_{2centrado}$, pero a partir de este momento se procederá a analizar los resultados utilizando también la distancia d_{2real} y el correspondiente parámetro c_{2real} .

Se comienza por volver a realizar la figura 5.54 en la que aparecían representados los valores de la intensidad máxima de campo en función de $c_{2centrado}$, pero ahora se presentarán los resultados obtenidos en función de c_{2real} (figura 5.56).

Se confirma, para cada valor de c_1 , la existencia de una zona de campo estabilizado para valores de c_2 superiores a un cierto $c_{2crítico-real}$. Por tanto, por lo que respecta al cociente entre c_1 y $c_{2crítico}$, que hasta ahora era el correspondiente a la $c_{2crítico-centrado}$,

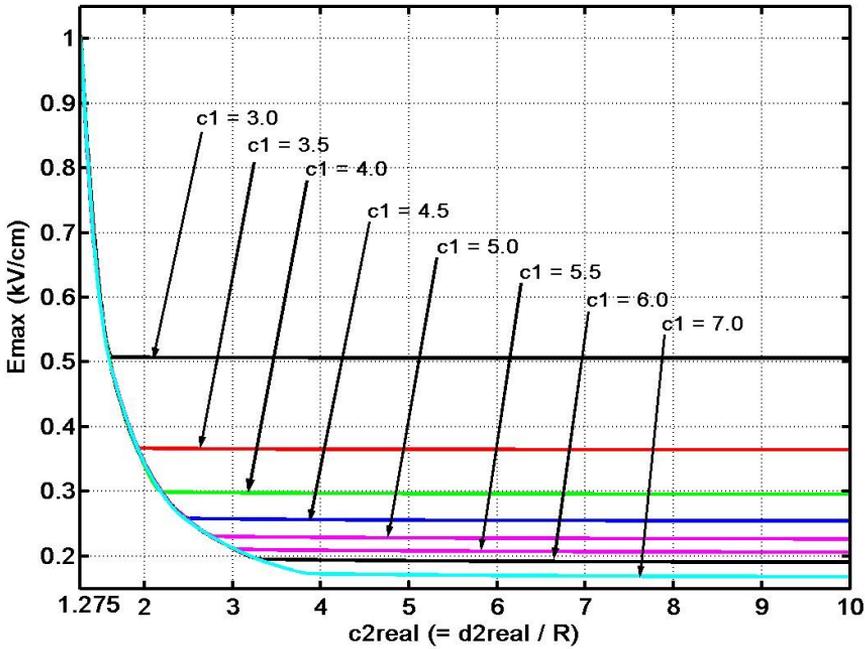


Figura 5.56 E_{max} en barra 1 con desplazamiento del tubo, en función de la c_{2real}

ya no será único sino que habrá dos :

$$Relación \ c_1/c_{2crítico-centrado} = \frac{c_1}{c_{2crítico-centrado}} \tag{5.18}$$

$$Relación \ c_1/c_{2crítico-real} = \frac{c_1}{c_{2crítico-real}} \tag{5.19}$$

Utilizando las ecuaciones 5.16 y 5.19 para realizar el cálculo de $c_{2crítico-real}$ y de su relación con c_1 , se encuentran los valores indicados en la tabla 5.8.

Se observa que utilizando el parámetro c_{2real} la relación entre c_1 y $c_{2crítico}$ vuelve a valer $1,80 \pm 0,02$, la misma cantidad que nos permitía prever el tamaño óptimo del tubo para una intensidad máxima de campo dada en configuraciones centradas. O sea que se mantiene dicho valor como relación entre c_1 y $c_{2crítico}$ también para configuraciones con tubo desplazado, salvo, aparentemente, para el caso de máxima aproximación entre barras ($c_1 = 3$). Sin embargo incluso en este caso se está dentro de los márgenes de dicho valor, dada la precisión de cinco centésimas que se maneja para la determinación de c_2 .

Tabla 5.8 Valores de $c_{2critico_real}$ con los desplazamientos estudiados

$c_1 =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
Desplazamiento (cm)	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,1	3,0
$C_{2critico_centrado}$	1,85	2,20	2,55	2,85	3,15	3,45	3,80	4,40	6,25
$C_{2critico_real}$ correspondiente	1,625	1,925	2,200	2,525	2,775	3,050	3,350	3,875	5,500
Relación $c_1 / C_{2critico_real}$	1,85	1,82	1,82	1,78	1,80	1,80	1,79	1,81	1,82

Resulta de interés observar los valores de la intensidad máxima de campo producida en un montaje con tubo desplazado pero construido con su correspondiente $C_{2critico_real}$, y compararlos con el valor de la intensidad máxima de campo producida en un montaje con tubo centrado construido con la misma distancia entre barras y con su $C_{2critico}$ correspondiente, como se muestra en la tabla 5.9:

Tabla 5.9 Valores de E_{max} con la $d_{2critica_real}$ con el tubo centrado y con el tubo desplazado

$c_1 =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
Tubo centrado: E_{max} (kV/cm) con $C_{2critica}$	0,5075	0,3673	0,2990	0,2580	0,2305	0,2105	0,1950	0,1726	0,1369
Tubo desplazado: E_{max} (kV/cm) con $C_{2critica--real}$.	0,5078	0,3673	0,2992	0,2583	0,2309	0,2108	0,1953	0,1731	0,1374
Diferencia (%)	0,01	0,00	0,07	0,12	0,17	0,14	0,15	0,29	0,37

Se observa que para superar un **0,2%** de diferencia entre ambos valores se tienen que tomar separaciones de barras ya muy considerables, por lo que se puede estimar con total seguridad que, al igual que ocurría con la configuración con tubo centrado estudiada en el ejemplo anterior, la distancia entre barras es la que determina la intensidad máxima de campo cuando se trabaja en zona de campo estabilizado.

Por lo que respecta a la influencia determinante sobre la intensidad máxima de campo en montajes construidos con valores de d_{2real} inferiores a la correspondiente distancia crítica real (con proximidades mayores que las establecidas por ésta), se puede ver ahora en la figura 5.56 que las gráficas de los diferentes c_1 resultan indistinguibles en dicho rango de distancias, igual que en las gráficas de la figura 5.27 correspondientes a la configuración con tubo centrado. Esto es así para la

escala utilizada, que permite ver todo el rango de valores. Pero aún examinando los datos numéricos concretos, se encuentra que en las zonas anteriores a la estabilización, para un valor dado del parámetro c_{2real} , la diferencia de valor en la intensidad máxima de campo entre las configuraciones con diferentes distancias entre barras (diferentes c_1) no sobrepasa el 3%, por lo que, en estos casos, se puede considerar, al igual que en los montajes con tubo centrado, que la contribución del parámetro c_{2real} al valor de dicha intensidad de campo es la fundamental, es decir el aspecto determinante es la distancia entre barras y tubo.

Aunque con menos interés, pues el valor de la intensidad de campo en la superficie del tubo es siempre inferior a la que se produce en la superficie de la barra I , se puede ver una situación similar a la anterior representando las gráficas del valor de la intensidad máxima de campo en la superficie interior del tubo en función de la proximidad real barra-tubo, para cada uno de los valores de c_1 considerados.

Se presentan estas gráficas en la figura 5.57, y se observa que resultan prácticamente indistinguibles con una escala que permita ver todo el rango de valores.

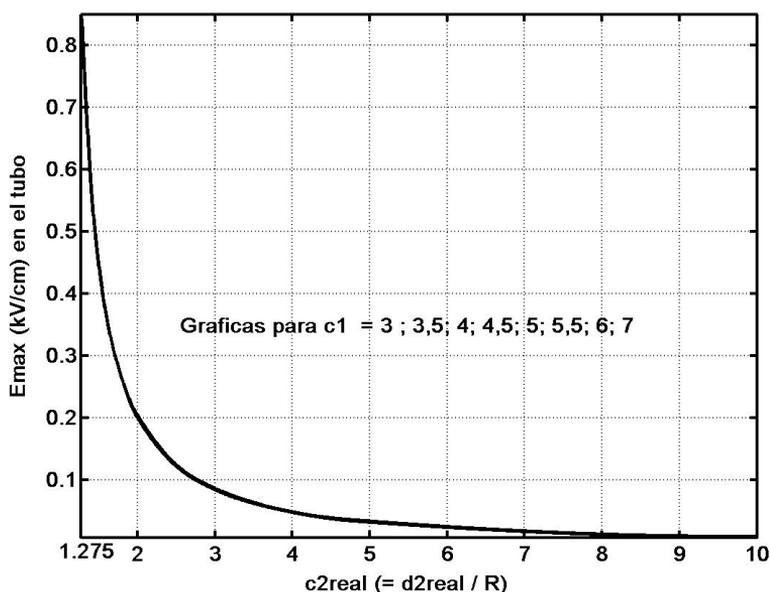


Figura 5.57 E_{max} en el tubo, con este desplazado, en función de la c_{2real} ($= d_{2real} / R$)

En realidad las diferencias entre las diferentes gráficas se hacen mayores cuanto

mayor es el alejamiento barras-tubo, y por tanto es menor la intensidad de campo, de forma que para proximidades barra-tubo del orden de $7R$ las diferencias llegan al **20%**, aunque coincidiendo con pequeños valores de la intensidad de campo en el tubo, de entre **0,018** y **0,022** kV/cm, mientras que para grandes proximidades, y por tanto grandes intensidades de campo en el tubo, del orden de **0,85** kV/cm, las diferencias no llegan al **1%**, dándose una disminución paulatina de las diferencias entre ambos casos. En estas diferencias se puede ver que, para determinar el valor de la máxima intensidad de campo en la superficie del tubo, la importancia del parámetro c_{2real} (proximidad real barras-tubo) es mucho mayor que la del parámetro c_1 (proximidad entre barras).

En la figura 5.57 se puede ver también lo rápidamente que aumenta el valor de la máxima intensidad de campo en la superficie interior del tubo si barras y tubo se aproximan excesivamente. Si se comparan estas gráficas con las de la figura 5.35 correspondientes al tubo centrado, pudieran parecer estas últimas menos pendientes, pero al comprobar los valores numéricos, se comprueba que son prácticamente iguales, sin que las diferencias superen en ningún caso el **5%** (figura 5.58).

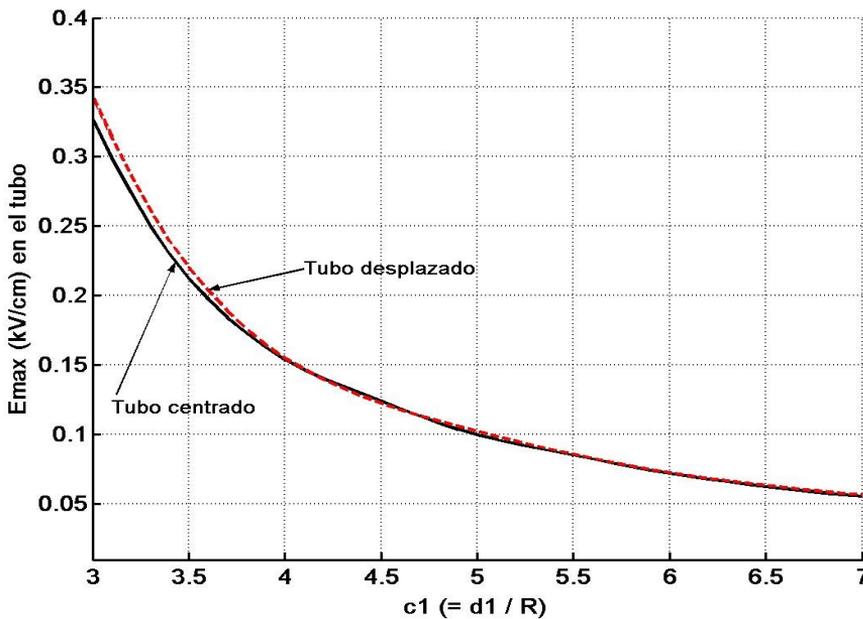


Figura 5.58 Para montajes realizados con $c_{2crítico-real}$, E_{max} en el tubo, con este centrado y con él desplazado

Es decir, es la d_{2real} la que determina decisivamente la intensidad máxima de campo en el tubo en todos los montajes construidos con la distancia crítica real barras-tubo, ya tengan tubo centrado o tubo desplazado.

5.4.6 Conclusiones

Se observa que, estudiando montajes con tubo desviado de su posición centrada, se confirman las conclusiones obtenidas estudiando montajes con tubo centrado, sin más que referir los resultados a la máxima proximidad real barras-tubo d_{2real} .

En concreto se confirma la existencia de una distancia crítica $d_{2crítica-real}$, a partir de la cual la intensidad máxima de campo permanece prácticamente estabilizada por mucho que se amplíe la distancia barras-tubo, siempre que se mantenga constante la distancia entre barras, confirmando así que este valor crítico actúa como un límite muy claro para prever el comportamiento eléctrico de este tipo de montajes. Así, según la máxima proximidad entre barras-tubo sea superior o inferior a dicha distancia crítica, la influencia fundamental para determinar la intensidad máxima de campo será la distancia entre barras o será la propia proximidad barras-tubo. La distancia entre barras, o sea el valor del parámetro c_1 , es el parámetro determinante para la intensidad máxima de campo en configuraciones con valores del parámetro c_{2real} iguales o superiores a su valor crítico, mientras que la proximidad entre barras y tubo, o sea el parámetro c_{2real} , es el parámetro determinante tanto para establecer el valor de la intensidad máxima de campo para distancias barras-tubo menores que la distancia crítica ($d_{2real} < d_{2crítica-real}$), como para establecer la intensidad máxima de campo sobre la superficie interior del tubo en cualquier situación.

Se encuentra que esta distancia crítica real barras-tubo está bien determinada por la distancia entre barras, pues existe una relación constante entre ellas:

$$d_{2crítica-real} = \frac{d_1}{1,80} \quad (5.20)$$

$$c_{2crítico-real} = \frac{c_1}{1,80} \quad (5.21)$$

De esta manera, igual que se puede hacer con los montajes con el tubo centrado, se puede prever el radio eléctricamente óptimo para el tubo, definiendo el concepto

óptimo en función de ser mínimo y ser eléctricamente seguro. Esto se puede hacer a partir de un valor para el radio de las barras, de una intensidad máxima de campo admisible y de un desplazamiento máximo tolerable para el tubo.

A partir de la intensidad máxima de campo admisible se puede establecer el valor del coeficiente c_1 utilizando la gráfica de la figura 5.40 (o la tabla 5.9, u otra más detallada para propósitos prácticos). Y este valor proporciona la $c_{2\text{crítico-real}}$ utilizando el coeficiente **1,8**:

$$c_{2\text{crítico-real}} = c_1 / 1,8$$

Con este dato, el radio de las barras y las ecuaciones 5.17 y 5.13 se puede determinar el radio eléctricamente óptimo para el tubo, una vez establecido el desplazamiento máximo admisible. En efecto, se sabe que el radio óptimo del tubo es, según la ecuación 5.17:

$$R_{\text{tubo-óptimo}} = \frac{d_1}{\sqrt{3}} + d_{2\text{crítica-centrada}} = \frac{c_1 \cdot R}{\sqrt{3}} + c_{2\text{crítico-centrado}} \cdot R$$

Por lo que el radio óptimo para el tubo será:

$$R_{\text{tubo-óptimo}} = R \cdot \left(\frac{c_1}{\sqrt{3}} + c_{2\text{crítico-centrado}} \right) \quad (5.22)$$

pudiendo deducir el valor $c_{2\text{crítico-centrado}}$ a partir del valor $c_{2\text{crítico-real}}$, el desplazamiento admisible y la ecuación 5.16.

Una forma más elegante de expresar el radio eléctricamente óptimo del tubo es hacerlo en función de los parámetros reales, utilizando el desplazamiento δ del tubo por ejemplo así:

$$R_{\text{tubo-óptimo}} = \frac{d_1}{\sqrt{3}} + d_{2\text{crítica-centrada}} = \frac{d_1}{\sqrt{3}} + d_{2\text{crítica-real}} + \delta$$

Y según la ecuación 5.21:

$$R_{\text{tubo-óptimo}} = \frac{c_1 \cdot R}{\sqrt{3}} + c_{2\text{crítico-real}} \cdot R + \delta = \frac{c_1 \cdot R}{\sqrt{3}} + \frac{c_1 \cdot R}{1,8} + \delta$$

Es decir que el radio eléctricamente óptimo para el tubo se puede expresar así:

$$R_{\text{tubo-óptimo}} = c_1 \cdot R \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1,8} \right) + \delta \quad (5.23)$$

Si se compara este valor con el radio óptimo dado en la ecuación 5.12 para montajes con el tubo centrado, se ve que lo único que se debe hacer en este caso es aumentar aquel valor en el desplazamiento previsto.

En cuanto a las circunstancias en las que se presenta la intensidad máxima de campo en este tipo de montajes son exactamente las mismas que se encontraron en los montajes contruidos con tubo centrado: en los montajes contruidos con distancias barra-tubo reales iguales o superiores a la distancia crítica real, las circunstancias en que se presenta el E_{max} dependen de si la distancia entre barras es superior o inferior al valor crítico $d_{\text{crítica}} = 5R$. En el caso de ser superior, el comportamiento del campo es el que se viene suponiendo tradicionalmente, localizándose la intensidad máxima de campo en los puntos de la superficie de la barra equidistantes de las otras dos barras, y en los instantes en que el potencial de la barra alcanza su valor de pico. Pero para distancias entre barras inferiores a su $d_{\text{crítica}}$ la localización del campo máximo sobre la superficie de las barras tiende a desplazarse hacia puntos más próximos a las otras dos barras, en instantes en que la máxima diferencia de potencial entre la barra correspondiente y una de las otras dos está cada vez más próximas a la tensión de línea.

Para distancias barras-tubo inferiores a la distancia crítica real, la E_{max} se localiza siempre en los puntos A' (figura 5.32) de la barra más próxima al tubo cuando se alcanza la mayor diferencia de potencial entre ellos, o sea cuando la barra alcanza el potencial máximo.

5.4.7 Tiempos de ejecución

Utilizando un PC Pentium IV a 1,3 Ghz con 750 Mb de memoria RAM, los tiempos de resolución utilizando el método de soluciones elementales fueron **32 segundos** para calcular las cargas superficiales que simulan cada configuración (para un c_1 y un c_2 dados), y **3 minutos y 50 segundos** en realizar **180 cálculos** a lo largo del primer medio periodo para determinar el instante en que se produce la intensidad máxima de campo, su valor y localización.

5.5 Barras trifásicas encapsuladas en tubos atornillados

5.5.1 Descripción de la configuración

Se estudia a continuación una variación del haz de barras trifásicas encapsuladas de 4 cm de radio que ya se estudió en el ejemplo 5.3 (figura 5.59), con una única modificación respecto a aquella: ahora el encapsulamiento de las barras se produce en dos tubos iguales, atornillados sobre un anillo de espaciamiento de $0,5\text{ cm}$ de espesor situado en la parte central de la configuración. En la zona de atornillamiento existen unos pequeños codos de $0,5\text{ cm}$ de radio (figura 5.60). Cada semitubo tiene 2 m de longitud, y cada barra $4,15\text{ m}$. Esta configuración está tomada de Singer [41].

Se estudian las mismas nueve distancias entre barras que en el ejemplo 5.3, las correspondientes a los valores del parámetro $c_1 = 3, 3'5, 4, 4'5, 5, 5'5, 6, 7$ y 10 . Con cada una de estas distancias se definen diferentes montajes concretos, cada uno caracterizado por una distancia barras-tubo diferente, o sea por diferentes valores del parámetro c_2 y, por tanto, del tamaño del tubo.

Se asume que las tres barras operan con tensiones equilibradas tal como se dan en las ecuaciones 5.5, 5.6 y 5.7.

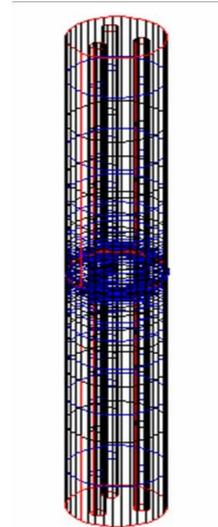


Figura 5.59 Montaje de tres barras trifásicas encapsuladas en doble tubo, y distribución de cargas superficiales.

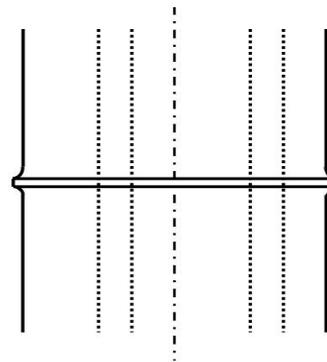


Figura 5.60 Detalle de la zona de atornillamiento

Cada barra se describe con **23** cargas superficiales y **11** armónicos en dirección acimutal, y cada tubo con **12** cargas superficiales y **35** armónicos en dirección acimutal, con una distribución de carga más concentrada en la zona de atornillamiento. Tanto los pequeños codos como el anillo fueron modelizados con **5** cargas superficiales y **35** armónicos. En total **2232** incógnitas y otros tantos puntos de contorno.

5.5.2 Objetivos del estudio

Se trata de estudiar las modificaciones que introducen los pequeños codos existentes en el tubo en los resultados obtenidos en el caso de las barras encapsuladas en un tubo único, antes de profundizar más en detalle en el montaje concreto estudiado por Singer [41], lo que se hará en el ejemplo siguiente.

5.5.3 Aspectos estudiados

En todos los montajes se han investigado los valores de la máxima intensidad de campo, su localización sobre las superficies electródicas y los valores de potencial y fase existentes cuando se producen estos máximos.

Así como los montajes estudiados en los ejemplos anteriores eran bidimensionales, los montajes actuales son tridimensionales por lo que se debe evaluar el campo en muchos más puntos que antes. Por ello resulta fundamental comenzar por restringir la búsqueda del máximo a unos ámbitos temporal y espacial lo más estrechos posibles, siempre que se pueda garantizar que el máximo buscado se encuentra entre sus límites y que, en caso contrario, se detectará fácilmente el problema.

Por lo que se refiere al ámbito temporal, en el estudio de los ejemplos 5.2 (caso equilibrado) y 5.3 se comprobó que, como era previsible dadas sus simetrías geométricas y de la función potencial en los electrodos, bastaba el conocimiento de la evolución de la distribución del campo durante el primer cuarto de periodo para predecir su distribución en cualquier otro instante posterior. De acuerdo con ello, y con que de nuevo las simetrías son idénticas a las citadas, en este ejemplo se estudiará la distribución del campo únicamente en el primer cuarto de periodo de la función V_I ($0 \leq \omega t \leq 90^\circ$).

En lo que respecta al ámbito espacial de búsqueda, se evaluó el campo en las proximidades del plano transversal medio de la configuración, estableciendo sus límites por ensayo y error.

Se ha llegado a evaluar el campo producido en 90 valores de fase del primer cuarto de periodo separadas de grado en grado entre sí. El máximo tamaño del ámbito espacial de búsqueda se ha producido evaluando el campo en más de 1500 puntos de los contornos electródicos, separados entre sí 10° en dirección acimutal y localizados en el anillo de espaciamiento, en el codo superior y en los 40 cm inferiores del tubo superior, así como en las zonas de las barras incluidas dentro de las cotas citadas. Alguna vez ha sido necesario realizar una segunda búsqueda más precisa, lo que se ha realizado volviendo a buscar la intensidad máxima de campo en un intervalo de fases más estrecho en torno al valor encontrado inicialmente, estudiando ahora fases de medio en medio grado, y en un ámbito espacial también más restringido en el entorno del punto donde inicialmente se localizó el máximo, evaluando el campo en puntos situados sobre las superficies de los electrodos separados de grado en grado en dirección acimutal.

Como en los ejemplos anteriores, los valores de fase se citarán siempre con relación a V_1 , y el valor de fase donde se produce la intensidad de campo máxima se identificará como ωt_{\max} .

5.5.4 Resultados obtenidos

En cuanto a los resultados, no aparecen diferencias con relación a la configuración con tubo único estudiada en el ejemplo 5.3, salvo en lo que se refiere al campo máximo sobre el tubo que ahora se produce sobre los pequeños codos existentes en la zona de atornillamiento y con valores superiores a los anteriores.

Por lo demás, los siguientes valores son idénticos a los valores obtenidos en el caso de tubo único:

- El valor crítico del parámetro c_1 que indica el límite del comportamiento del campo acorde con la hipótesis tradicional, y que se mantiene en $c_{1\text{crítico}} = 5$.
- El valor crítico del parámetro c_2 correspondiente a cada valor del parámetro c_1 , que indica el valor mínimo del parámetro c_2 a partir del cual la intensidad

máxima de campo permanece prácticamente estabilizada. Así, el valor del cociente entre c_1 y su correspondiente $c_{2crítico}$ ($c_1/c_{2crítico}$) sigue en $1,80 \pm 0,02$.

- Los valores de campo máximo sobre las barras.
- Los lugares donde se produce el campo máximo.
- Los valores del potencial en barras en el momento de producirse el E_{max} , y por tanto los valores de fase ωt_{max} en los que se produce el campo máximo.

Por lo que se refiere a las diferencias que aparecen en los valores del campo máximo sobre el tubo, este mantiene un coeficiente multiplicador con relación al caso de tubo único, similar para todos los valores de c_1 (del orden de $1,27$) en los montajes construidos con la distancia crítica barras-tubo.

En las gráficas de la figura 5.61 se presentan los valores de campo máximo sobre el tubo y sobre las barras en las configuraciones construidas con la distancia crítica, donde se puede comprobar que la intensidad máxima de campo sobre las barras se mantiene siempre mayor que sobre el tubo.

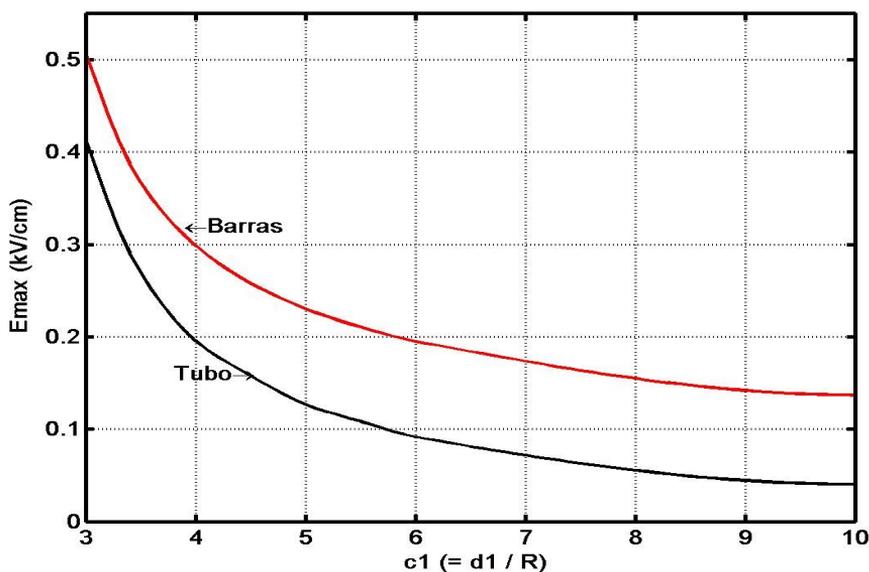


Figura 5.61 Evolución de las E_{max} en barras y tubo para $d_{2crítica}$

Si se comparan estas gráficas con las de la figura 5.37, se verá que la gráfica de la

intensidad máxima de campo sobre las barras es idéntica en ambos casos, mientras que la gráfica de la intensidad máxima de campo en el tubo presenta valores superiores en este caso, aproximándose a la gráfica de la intensidad máxima de campo sobre las barras.

En la tabla 5.10 se pueden ver los datos referidos a la intensidad máxima de campo para tubo único y para tubo doble atornillado en configuraciones construidas con la distancia crítica. Se debe hacer notar que, para distancias entre barras inferiores a $5R$ ($c_1 = 5$), la intensidad máxima de campo (en barras) y la intensidad máxima de campo en la superficie del tubo se producen en instantes diferentes. También se debe hacer notar que las fases $\omega_{t_{max}}$ que se incluyen en la tabla son aquéllas en las que se produce la intensidad máxima de campo en la barra 1.

Tabla 5.10 Valores correspondientes a E_{max} para varios valores de c_1

$c_1 =$		3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
E _{max} con tubo único y doble (kV/cm)	Tubo único	0,5075	0,3669	0,2990	0,2580	0,2305	0,2105	0,1950	0,1726	0,1364
	Tubo doble	0,5075	0,3669	0,2990	0,2580	0,2306	0,2105	0,1950	0,1726	0,1364
Relación c_1/c_{2crit}	Tubo único	1,82	1,79	1,78	1,80	1,79	1,80	1,79	1,79	1,80
	Tubo doble	1,82	1,79	1,78	1,80	1,79	1,80	1,79	1,79	1,80
E _{max} en tubo (kV/cm)	Tubo único	0,3275	0,2124	0,1541	0,1242	0,09973	0,08522	0,07225	0,05557	0,03161
	Tubo doble	0,4140	0,2693	0,1957	0,1578	0,1267	0,1083	0,09161	0,07067	0,04021
	Relación	1,26	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
Fase $\omega_{t_{max}}$ para E _{max} en barra 1	Tubo único	67° 113°	72° 108°	78,5° 101,5°	85° 95°	90°	90°	90°	90°	90°
	Tubo doble	67° 113°	72° 108°	78,5° 101,5°	85° 95°	90°	90°	90°	90°	90°
Posición de E _{max}	Tubo único	±29°	±26°	±20°	±13°	0°	0°	0°	0°	0°
	Tubo doble	±29°	±26°	±20°	±13°	0°	0°	0°	0°	0°

5.5.5 Conclusiones

A la vista de los resultados expuestos, se mantienen las mismas conclusiones extraídas para la configuración de tubo único.

Además se constata que los pequeños codos que existen en la zona de atornillamiento son una zona adicional a vigilar especialmente en este tipo de configuraciones.

5.5.6 Tiempos de ejecución

Utilizando un PC Pentium IV a 1,3 Ghz con 750 Mb de memoria RAM, el tiempo empleado para calcular las 2232 cargas superficiales que simulan cada montaje (para un c_1 y un c_2 dados) ha sido 3 minutos y 30 segundos utilizando el método de las Soluciones Elementales.

La posterior resolución del problema de máximos espacio-temporales conllevó la evaluación del campo en diferentes intervalos espaciales y temporales, llegando a ser evaluado hasta en un máximo de 1504 puntos en 90 instantes diferentes uniformemente distribuidos a lo largo del primer cuarto de período. En estos casos, que han sido los de máximo tiempo de computación, el programa empleó 35 minutos en resolver el problema utilizando el método de las soluciones elementales.

5.6 Barras trifásicas encapsuladas en tubos no centrados

5.6.1 Descripción del montaje

Se estudia a continuación una variación sobre la configuración anterior en la que el tubo superior sufre una cierta desviación, de forma que se acerca indebidamente a la barra *I* (figuras 5.62 y 5.63).

Se trata de una desviación de tipo *III*, tal como fue denominada en el ejemplo 5.4,

tratándose de la desviación eléctricamente más desfavorable tal como se comprobó en dicho ejemplo.

Un caso concreto de esta configuración fue estudiado por Singer [41] utilizando cargas discretas para modelizar las barras, y cargas superficiales para modelizar los tubos, codos y anillo.

Se estudian inicialmente nueve montajes, cada uno definido por uno de los siguientes valores del parámetro $c_1 = 3, 3'5, 4, 4'5, 5, 5'5, 6, 7$ y 10 y por la distancia crítica barras-tubo correspondiente al tubo centrado. Posteriormente se estudian un gran número de montajes definidos a partir de las nueve distancias entre barras correspondientes a los valores anteriores del parámetro c_1 . Con cada una de estas distancias se definen diferentes montajes, cada uno de ellos caracterizado por un valor diferente del parámetro c_2 .

Cada barra se describe con **23** cargas superficiales y **11** armónicos, y cada semitubo con **12** cargas superficiales y **35** armónicos. En todos los casos se toma una distribución de carga más concentrada en la zona del atornillamiento. Los pequeños codos y el anillo fueron modelizados con **5** cargas superficiales y **35** armónicos cada uno. En total **2232** incógnitas con el mismo número de puntos de contorno.

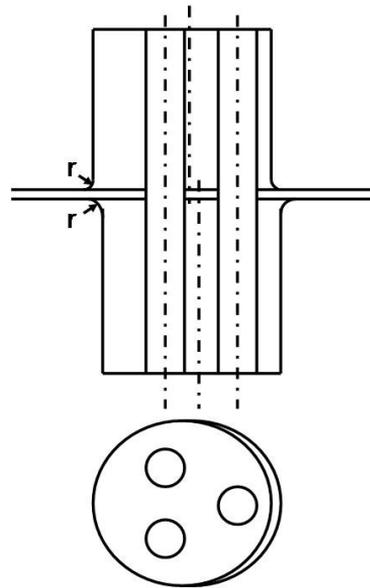


Figura 5.62 Barras encapsuladas con tubo superior desplazado

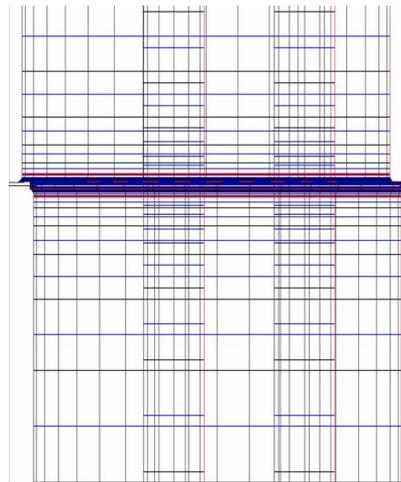


Figura 5.63 Detalle de la zona de atornillamiento y de la distribución de carga sobre los electrodos

5.6.2 **Objetivos del estudio**

Se trata de aplicar el método de las Soluciones Elementales desarrollado en la presente tesis al estudio detallado de un elevado número de montajes de barras trifásicas entubadas, sin necesidad de ninguna hipótesis simplificadora.

Estos montajes se diferencian de montajes estudiados anteriormente en el desplazamiento del tubo en unos casos (ejemplo 5.5), y en la existencia de los pequeños codos y la zona atornillada en otros (ejemplo 5.4). Por ello se procede a investigar los cambios que estas diferencias introducen en las conclusiones que se obtuvieron en los ejemplos anteriores.

5.6.3 **Aspectos estudiados**

En todos los montajes estudiados se han investigado los valores de la máxima intensidad de campo, su localización sobre las superficies electródicas y los valores de potencial y fase existentes cuando se producen estos máximos.

Se trata de montajes tridimensionales por lo que se debe evaluar el campo en una cantidad importante de puntos. Por ello resulta fundamental comenzar por restringir la búsqueda del máximo a unos ámbitos temporal y espacial lo más estrechos posibles siempre que se pueda garantizar que el máximo buscado se encuentra entre sus límites. Por lo que se refiere al ámbito temporal, se puede establecer que, dados los resultados obtenidos en el ejemplo 5.4, la intensidad máxima de campo en barras se tiene que producir en la barra *I*, por lo que, dadas también las propiedades de las funciones de potencial en los conductores, bastará con estudiar el campo en el primer cuarto de periodo de la función $V_I (0 \leq \omega t \leq 90^\circ)$ para encontrar la situación eléctricamente más desfavorable. En lo que respecta al ámbito espacial de búsqueda, se evaluó el campo en las proximidades del plano transversal medio de la configuración, estableciendo sus límites por ensayo y error.

Se ha llegado a evaluar el campo producido en **90** valores de fase del primer cuarto de periodo separadas entre sí de grado en grado. El ámbito espacial de búsqueda de mayor amplitud ha incluido a más de **1900** puntos de los contornos electródicos separados entre sí **10°** en dirección acimutal y situados en los **3** cm superiores del tubo inferior, en el codo inferior, en el anillo de espaciamiento, en el codo superior

y en los **40** cm inferiores del tubo superior. Alguna vez ha sido necesario realizar una segunda búsqueda más precisa, lo que se ha realizado en un intervalo de fases más estrecho en torno al valor encontrado inicialmente, estudiando ahora fases de medio en medio grado, y en un ámbito espacial también más restringido en el entorno del punto donde inicialmente se localizó el máximo, evaluando el campo en puntos situados sobre las superficies de los electrodos separados de grado en grado en dirección acimutal. Como en los ejemplos anteriores, los valores de fase se citarán siempre con relación a V_I , y el valor de fase donde se produce la intensidad de campo máxima se nombrará como ω_{\max} .

En cuanto a los montajes estudiados, en primer lugar se consideraron montajes contruidos con la distancia $d_{\text{crítica}}$ correspondiente al tubo centrado y se estudiaron los efectos eléctricos que les producen desplazamientos del tubo de valores **0'5, 1, 1'5 y 2 cm** (se extrapolaron estos valores a partir de un estudio de Singer [41]).

Posteriormente se estudió el campo eléctrico producido en montajes contruidos con cada una de las distancias entre barras consideradas y con una diversidad de tamaños de tubo diferentes, y sometidos todos ellos a los desplazamientos del tubo antes citados. Con esto se trató de comprobar la validez de las conclusiones establecidas en el ejemplo 5.4 para determinar si son también aplicables al diseño de montajes eléctricamente seguros en este otro tipo de configuraciones.

Posteriormente se realizaron los mismos estudios con desviaciones del tubo proporcionales a su propio radio, partiendo de una desviación de **1,5 cm** para un montaje contruido con un valor de $c_I = 5$ y con la distancia crítica barras-tubo correspondiente, desviación que viene a representar un poco más del **3%** sobre el tamaño total del diámetro del tubo, pero que sin embargo representa una desviación de más del **16%** sobre la distancia entre las superficies de barras y tubo. Para cuantificar estos desplazamientos en el programa de cálculo se tomó una precisión de un milímetro, y así los desplazamientos considerados para cada valor del parámetro c_I fueron los indicados en la tabla 5.11.

Tabla 5.11 Desplazamientos del tubo considerados para cada valor de c_I

$c_I =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
Desplazamiento δ (cm)	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,1	3,0

5.6.4 Respuesta ante desplazamientos varios del tubo

5.6.4.1 La intensidad máxima de campo en la barra 1

Con relación al efecto que tienen los cuatro primeros desplazamientos citados en un montaje diseñado con la distancia crítica correspondiente a los tubos centrados, se presentan en la figura 5.64 las gráficas comparativas de la intensidad máxima de campo que aparecería sobre la barra 1 con cada desviación.

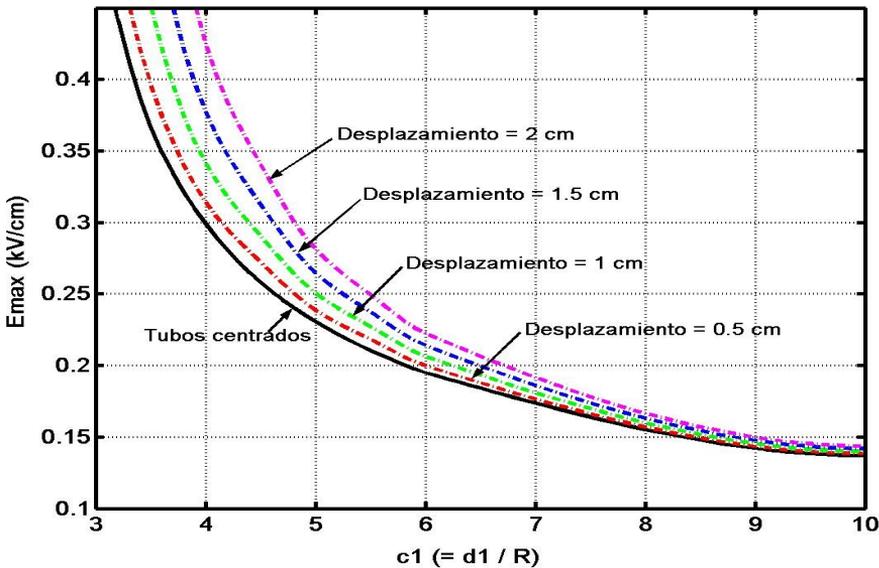


Figura 5.64 Gráficas de E_{max} sobre la barra 1 para la $d_{critica}$ de tubos centrados

Evidentemente la intensidad máxima de campo en las otras barras descende con relación a la que aparece con el tubo centrado.

Lógicamente, cuanto mayor sea la distancia entre barras (y por tanto la distancia crítica barras-tubo correspondiente), menor es el aumento de la intensidad máxima de campo en la barra 1 ante estos desplazamientos, pues el desplazamiento relativo es menor.

Se presentan en la figura 5.65 cuatro gráficas con el factor de multiplicación f_I que se produce en la intensidad máxima de campo eléctrico en la barra 1 ante este tipo de problemas de montaje, una gráfica para cada uno de los cuatro desplazamientos

considerados para el tubo. El factor f_I corresponde a la relación:

$$E_{max \text{ con desplazamiento}} = f_I \cdot E_{max \text{ sin desplazamiento}}$$

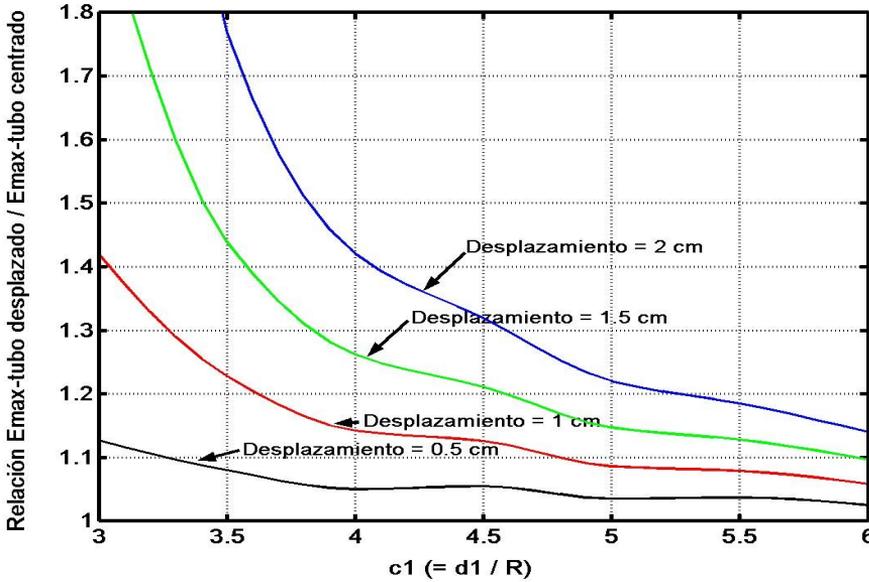


Figura 5.65 Gráficas del incremento de E_{max} en montajes construidos con la $d_{2critica}$ ante los desplazamientos estudiados

En las gráficas de la figura 5.65 se ve que, en configuraciones construidas con un diámetro de tubo correspondiente a la distancia crítica centrada, un desplazamiento de apenas 1,5 cm, lo que representa un máximo del 4% del tamaño del tubo en configuraciones de tamaño habitual, produce aumentos de hasta el 30% en la intensidad máxima de campo sobre la barra I (figura 5.65).

Se puede ver, por tanto, que este tipo de errores, sino son previstos ni considerados, pueden tener efectos muy negativos en el comportamiento eléctrico de una configuración.

5.6.4.2 Localización de la E_{max} y potenciales de electrodo

La intensidad máxima de campo en barras se produce siempre en la barra I que es la barra que, tras el desplazamiento del tubo, queda más próxima a éste, siendo mayor el valor de esta E_{max} cuanto mayor sea dicha aproximación.

En cuanto a los lugares concretos donde se produce este valor en la barra *I* se trata siempre de los puntos más próximos al tubo, es decir los puntos *A'* de la figura 5.32, situados a una altura superior a 1 cm por encima del plano transversal medio de la configuración.

Y el valor de fase en el que se produce la E_{max} durante el primer medio periodo es $\omega t_{max} = 90^\circ$. Es decir los resultados confirman lo observado en el ejemplo 5.4, o sea que la intensidad máxima de campo en barras se debe a la diferencia de potencial entre la barra *I* y el tubo, y por tanto se produce cuando el potencial en la barra *I* es máximo.

5.6.4.3 La intensidad máxima de campo en el tubo

Por lo que respecta al campo en el tubo, se representan en la figura 5.66 las gráficas de la respuesta de la intensidad máxima de campo sobre su superficie interior ante los desplazamientos estudiados.

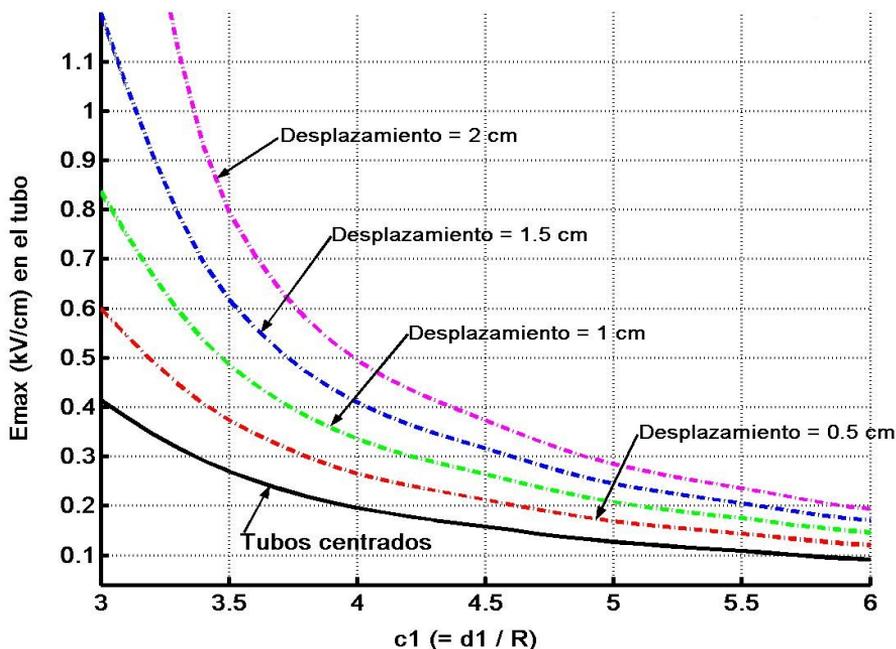


Figura 5.66 Gráficas de E_{max} en el tubo para la $d_{2critica}$ de tubos centrados

Todos estos valores se producen para valores de fase ωt_{max} de 90° , en puntos de los

pequeños codos situados en la generatriz más próxima a la barra *I*. Es decir todo apunta a que, en estos casos, la intensidad máxima de campo en el tubo se debe al pequeño radio de curvatura de los codos y a la diferencia de potencial entre éstos y la barra *I*.

Estudiando comparativamente la intensidad máxima de campo producida sobre el tubo y la intensidad máxima de campo producida sobre la barra *I*, resulta de interés comprobar que existen situaciones en las que el campo es mayor en los pequeños codos existentes en la zona de atornillamiento que en la superficie de la propia barra. En la figura 5.67 se presentan las gráficas que ilustran este hecho.

Las gráficas de la figura 5.67 presentan el valor de la intensidad máxima de campo sobre la barra *I* y sobre el tubo para los cuatro desplazamientos estudiados. La familia de líneas menos pendientes (líneas continuas) representa los valores de la intensidad máxima de campo en la barra *I*, mientras que la familia de líneas más pendientes (líneas a trazos) indica la intensidad máxima de campo en los pequeños codos existentes en el tubo.

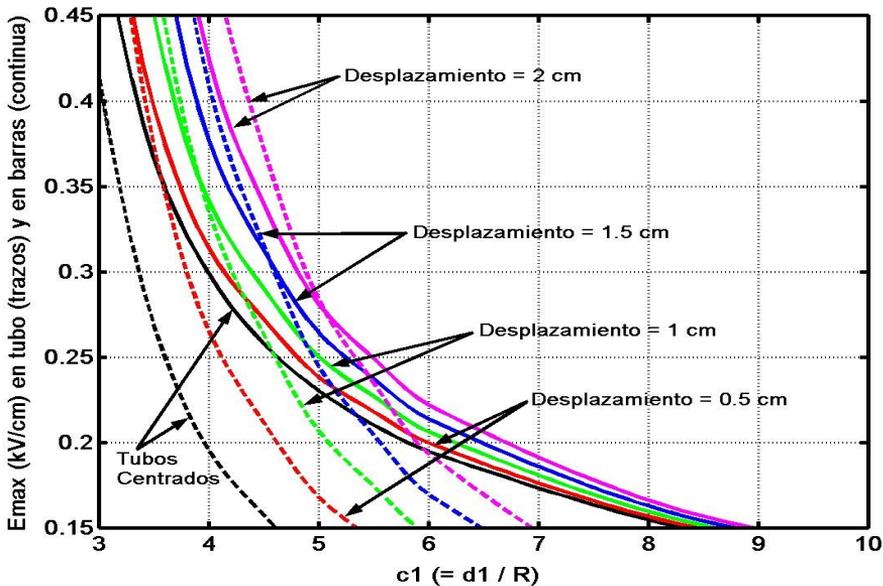


Figura 5.67 Gráficas de E_{max} en tubo y barras con la d_{2crit} de tubos centrados

Como se vio en el ejemplo 5.5, con los tubos centrados la intensidad máxima de campo siempre se produce sobre las barras y no sobre el tubo, pero, como se ve ahora, esto no es así cuando existen desplazamientos inesperados en el tubo.

En efecto, para un desplazamiento de **0,5 cm**, el campo es mayor sobre el tubo para coeficientes c_1 iguales o inferiores a **3,5**; para un desplazamiento de **1 cm** esto ocurre para valores c_1 de inferiores a **4,3**; para desplazamiento de **1,5 cm** se produce para c_1 inferiores a **4,6**; y para desplazamientos de **2 cm** ocurre para valores de c_1 inferiores a **5**.

Surge aquí la pregunta de si este hecho se debe a la existencia de los pequeños codos en la zona de atornillamiento, o se debe simplemente a los desplazamientos del tubo. Para poder responder a esta pregunta se puede estudiar cómo se comportan los montajes con tubo único ya estudiados en el ejemplo 5.4 ante estos mismos desplazamientos del tubo. Hay que recordar que ambos tipos de montajes, con tubo único y con tubo doble atornillado, son plenamente comparables ante estos desplazamientos dado que, en configuraciones centradas, tienen las mismas distancias críticas barras-tubo, y por tanto el mismo radio de tubo.

Al estudiar como responden los montajes de tubo único diseñados con la distancia crítica barras-tubo ante los mismos desplazamientos del tubo de **0'5, 1, 1'5 y 2 cm**, se encuentran los resultados presentados en las gráficas de la figura 5.68.

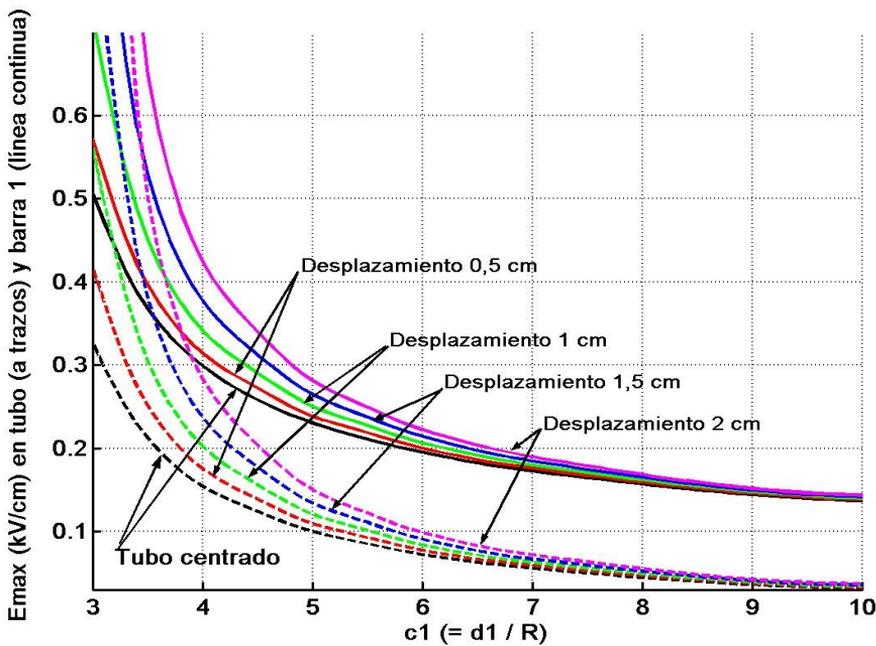


Figura 5.68 Gráficas de E_{max} en tubo y barras en montajes de tubo único construidos con la $d_{2criticas}$ ante varios desplazamientos del tubo

En estas gráficas se ve que, en todos los casos, la intensidad máxima de campo es mayor en la barra *I* que en el tubo, por lo que se puede concluir con total seguridad que el hecho de la aparición de la intensidad máxima de campo sobre el tubo se debe exclusivamente a la existencia de los pequeños codos en la zona de atornillamiento. Por ello, resulta evidente que codos de tan pequeño tamaño aún aumentan más el riesgo eléctrico, ya de por si considerable, de la aparición de desplazamientos imprevistos en el tubo.

5.6.5 Diseño de montajes eléctricamente estables

5.6.5.1 Distancias barras-tubo eléctricamente seguras

Como se acaba de ver, los aumentos de la intensidad máxima de campo cuando se producen desplazamientos del tubo no previstos, representan un grave peligro para el funcionamiento eléctrico de la instalación estudiada. Para tratar de prever este tipo de situaciones, cabe preguntarse si existe, y se puede determinar con facilidad, una distancia crítica barras-tubo tal que una posible desviación del tubo de su posición centrada no provoque un aumento significativo de la intensidad máxima de campo, por lo menos en las barras, tal como se vio que existía para los montajes de tubo único en el ejemplo 5.4.

Se da al concepto de distancia crítica el mismo significado que anteriormente: una distancia barras-tubo con la que la intensidad máxima de campo se mantiene significativamente estable ante un desplazamiento máximo del tubo previamente establecido.

Para realizar este estudio se recuperan los conceptos definidos en el ejemplo 5.4, para comprobar su utilidad en una configuración de este otro tipo. En el ejemplo citado se precisaba definir una d_{2real} como el parámetro que definía la máxima proximidad entre barras y tubo, esté éste desplazado o no, y se distinguía del concepto $d_{2centrada}$ que establece la proximidad barras-tubo solamente en la situación centrada del tubo. Es decir la d_{2real} proporciona la proximidad real entre barras y tubo, mientras que la $d_{2centrada}$ proporcionaría la distancia barras-tubo si el tubo estuviera centrado en la configuración. Evidentemente $d_{2centrada}$ y d_{2real} coinciden si se trata de una configuración con tubo centrado.

Ambos conceptos resultan de utilidad: la distancia d_{2real} por cuanto es el parámetro que realmente define el estado de la configuración, y la $d_{2centrada}$ por cuanto es un concepto independiente de cualquier desplazamiento considerado, lo que lo hace mucho más genérico y utilizable en cualquier situación.

De acuerdo con esto, se parte de las conclusiones del ejemplo 5.4 utilizándolas aquí a modo de hipótesis. Así, se supone un valor para $c_{2crítico-real}$ dado por la ecuación 5.21, a partir del cual y de la ecuación 5.16 se deduce el valor de $c_{2crítico-centrado}$:

$$c_{2crítico-centrado} = c_{2crítico-real} + \frac{\delta}{R} \quad (5.24)$$

o sea:

$$c_{2crítico-centrado} = \frac{c_1}{1,8} + \frac{\delta}{R} \quad (5.25)$$

De todas formas, como se está trabajando con una precisión de cinco centésimas en los valores de c_2 , se procede a realizar el correspondiente redondeo del valor $c_{2crítico-centrado}$ así calculado, con lo que se tendrá un $c_{2crítico-centrado-redondeado}$ con el que se trabaja, y en concreto a partir del que se calcula el hipotético valor del radio eléctricamente óptimo con la ecuación 5.22:

$$R_{tubo-óptimo} = R \cdot \left(\frac{c_1}{\sqrt{3}} + c_{2crítico-centrado-redondeado} \right) \quad (5.26)$$

Así en los estudios que se hacen para cada una de las nueve distancias entre barras estudiadas (o sea para cada uno de los nueve valores del parámetro c_1 que se han considerado: **3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 7; 10.**) se comienza por estudiar el montaje correspondiente a un valor de $c_2 = c_{2crítico-centrado-redondeado}$ con su correspondiente radio de tubo dado por la ecuación 5.26, para luego seguir estudiando configuraciones en el entorno de dicho valor de c_2 , y, posteriormente, montajes con valores de c_2 sensiblemente mayores y menores a dicho $c_{2crítico-centrado-redondeado}$, hasta completar el conocimiento de cada configuración básica.

Además, en el caso de confirmar la hipótesis de la existencia de una distancia crítica segura por lo que se refiere a la intensidad máxima de campo en la barra I , y que por tanto ésta permanezca substancialmente constante ante los

desplazamientos estudiados, se trata de ver también cómo afectan estos desplazamientos a la intensidad máxima de campo en el tubo, que como se ha visto es la situación más desfavorable en algunos casos.

El hecho de trabajar con valores centrados de c_2 es porque resulta más cómodo presentar los resultados en función del mismo parámetro con el que se viene trabajando hasta ahora que no cambiar a trabajar con c_{2real} , que además es propio de cada desplazamiento. Esta manera de proceder facilitará la presentación de los resultados de los diferentes desplazamientos de forma comparativa en las mismas gráficas y tablas.

5.6.5.2 Resultados obtenidos

Se comienza por exponer un descripción general del campo eléctrico en este tipo de configuraciones, para luego compararlo con las previsiones realizadas.

1) En los cálculos realizados se encuentra que efectivamente aparece una distancia crítica barras-tubo a partir de la cual la intensidad máxima de campo sobre la barra I permanece substancialmente constante ante posibles desplazamientos del tubo desde su posición centrada hasta un cierto valor máximo considerado en cada caso. Se ilustra esta situación con la figura 5.69, donde, en cinco montajes, todos ellos con una distancia entre barras dada por $c_1 = 5$, se presenta la evolución de la intensidad máxima de campo conforme el radio del tubo se hace más grande (o sea conforme aumenta $c_{2centrado}$). Uno de los cinco montajes presentados está construido con el tubo centrado y los otros cuatro están contruidos con el tubo superior desviado 0'5, 1, 1'5 y 2 cm respectivamente. Se presentan valores de $c_{2centrado}$ solamente hasta 3,5 pues a partir de este valor el valor máximo del campo permanece substancialmente estabilizado en los cinco montajes.

También se observa en la figura 5.69 que el valor de la distancia crítica centrada (y por tanto el radio eléctricamente óptimo para el tubo según la ecuación 5.22) es cada vez mayor conforme se consideran desplazamientos del tubo también mayores.

2) Se observa de la figura 5.69 que la estabilización de la intensidad máxima de campo se produce en el mismo valor de E_{max} en las cinco gráficas, es decir se

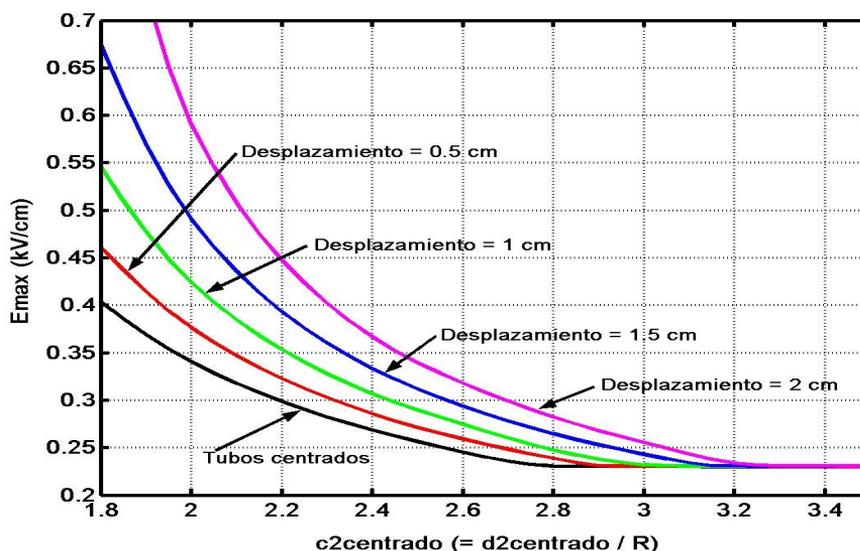


Figura 5.69 Gráficas de E_{max} en función de $c_{2centrado}$ en configuraciones construidas con $c_1=5$ que sufren diferentes desplazamientos del tubo

produce en el mismo valor tanto en el caso de no producirse desviación del tubo como en el caso de producirse ésta con cualquier valor. Esta igualdad se mantiene hasta la cuarta cifra significativa. Así, en la figura 5.70 en la que se presenta la E_{max} en montajes construidos con la $d_{2critica}$, no resultan distinguibles las cinco gráficas incluidas para presentar los valores de la E_{max} estabilizada en la barra I en cada uno de los cinco casos estudiados (tubos centrados y tubo superior desplazado cada una de las cantidades estudiadas).

Se puede concluir con estos resultados que la influencia fundamental para determinar el valor de la intensidad máxima de campo en la zona de campo estabilizado es la distancia entre barras, dado que es el elemento común a todos los casos.

- 3) También se observa en la figura 5.70 que, en los montajes construidos con la $d_{2critica}$, la existencia de los pequeños codos en los tubos determina que, cuando el tubo está muy próximo a la barra (lo que se da con pequeños valores de $c_{2critico}$), la intensidad máxima de campo aparezca sobre ellos y no sobre la barra I . Se trata de casos correspondientes a desplazamientos grandes en configuraciones pequeñas: se da la intensidad máxima de campo en los pequeños codos para configuraciones de $c_1 < 3,5$ con desplazamientos del orden de 1 cm , y de $c_1 < 4$ con desplazamientos de entre $1,5$ y 2 cm .

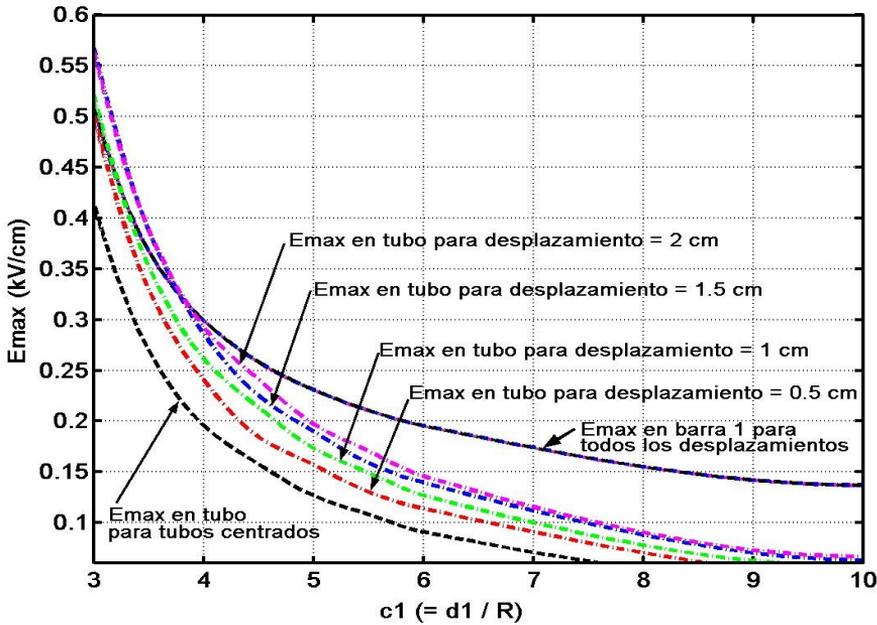


Figura 5.70 Gráficas de E_{max} en barra 1 y en tubo para montajes construidos con la $d_{2critica}$

- 4) En este tipo de montajes construidos con su distancia crítica barras-tubo real, se encuentran valores de potencial en las barras en el momento de producirse el campo máximo sobre la barra I , que son idénticos a los que se producen en el caso de tubos centrados. Es decir se encuentran diferencias de potencial entre barras que tienden a la tensión de línea en configuraciones con valores de c_1 inferiores a $c_{1critico} = 5$, y se encuentra que el potencial en la barra I está en su valor de pico en configuraciones con valores mayores de c_1 .

Cuando la intensidad máxima de campo se produce sobre los pequeños codos, ésta se da con el pico de tensión en la barra I , correspondiente a la máxima diferencia de potencial entre ésta y el tubo.

- 5) Se encuentran valores idénticos que en el caso de tubos centrados, en los valores de fase ωt_{max} en los que se produce la intensidad máxima de campo sobre la barra I , y que evidentemente son los valores de fase en los que se dan los potenciales de electrodo citados en el punto anterior.
- 6) También se encuentra que los lugares donde se produce la intensidad máxima de campo son los mismos que en el caso de tubos centrados, cuando ésta

aparece sobre la barra *I*. Es decir, la intensidad máxima de campo aparece en puntos de la superficie de la barra *I* cada vez más próximos a las otras dos barras conforme el valor de c_1 de la configuración desciende desde su valor crítico $c_{1crítico} = 5$.

Para configuraciones con valores de c_1 superiores a $c_{1crítico} = 5$, la intensidad máxima de campo se produce siempre en puntos de la superficie de la barra *I* equidistantes de las otras dos barras y situados ligeramente por encima del plano transversal medio del montaje.

Cuando la intensidad máxima de campo se produce sobre el tubo, aparece en el pequeño acodamiento superior, en concreto en el punto medio de la generatriz más próxima a la barra *I*.

- 7) En cuanto a los valores de $c_{2crítico-centrado}$ encontrados en la resolución numérica del problema son los previstos en todos los casos. En efecto, se observa en la tabla 5.12 que en todos los casos se confirma la hipótesis planteada, pues se obtienen valores de $c_{2crítico-centrado}$ o bien exactamente iguales a los previstos cuando estos tenían la necesaria precisión de cinco centésimas, o en caso contrario se obtiene uno de los dos valores situados en el entorno de la cantidad prevista, entorno definido en base a la precisión con la que se ha trabajado.

Estos resultados se perciben muy claramente al presentar gráficamente las relaciones de $c_{2crítico-centrado}$ y $c_{2crítico-real}$ en función de c_1 en las figuras 5.71 y 5.72 respectivamente.

En la figura 5.71 se observan claramente diferenciadas las gráficas correspondientes a cada desplazamiento, mientras que en la figura 5.72 resultan indistinguibles las cinco gráficas, es decir, los valores de $c_{2crítico-real}$ son substancialmente idénticos entre sí para todos los casos dentro del margen de precisión con que se trabaja el parámetro c_2 . Por tanto, la figura 5.72 muestra como el $c_{2crítico-real}$ queda efectivamente determinado únicamente por c_1 (y el coeficiente **1,80**, como establece la ecuación 5.21), mientras que la figura 5.71 muestra como el valor $c_{2crítico-centrado}$ no es solamente función de c_1 , sino también de cada desplazamiento considerado. Esto se explica perfectamente con la ecuación 5.24, donde se observa como a partir de un valor de $c_{2crítico-real}$ se obtienen tantos valores de $c_{2crítico-centrado}$ como desplazamientos se consideren.

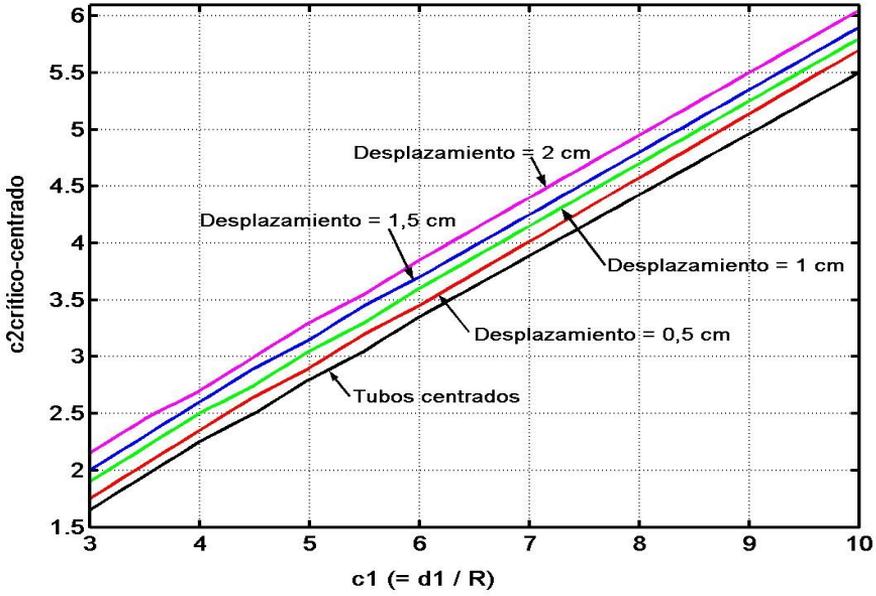


Figura 5.71 Gráficas de $c_{2\text{crítico-centrado}}$ en función de c_1 para cada desplazamiento de tubo

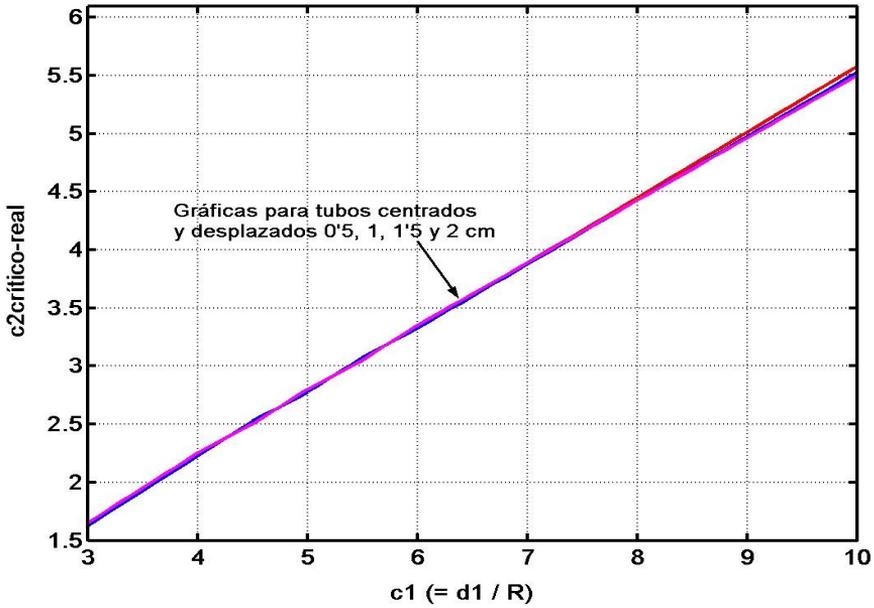


Figura 5.72 Gráficas de $c_{2\text{crítico-real}}$ en función de c_1 para cada desplazamiento del tubo

Tabla 5.12 Valores de $c_{2\text{crítico-centrado}}$ previsto y encontrado, y relación $c_1 / c_{2\text{crítico-real}}$ encontrada en cada desplazamiento

Valores de $c_1 =$		3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	10,0
Desplazamiento $\delta_Y = -0,5$ cm	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -previsto (*)	1,79 (1,75/ 1,80)	2,07 (2,05/ 2,10)	2,35	2,625 (2,65/ 2,70)	2,90	3,18 (3,15/ 3,20)	3,46 (3,45/ 3,50)	5,68 (5,65/ 5,70)
	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -encontrado	1,75	2,05	2,35	2,65	2,90	3,20	3,45	5,70
	$C_{2\text{crítico-real}}$ -encontrado (**)	1,625	1,925	2,225	2,525	2,775	3,075	3,325	5,575
	Relación $C_1/C_{2\text{crítico-real}}$	1,85	1,82	1,80	1,78	1,80	1,79	1,80	1,79
Desplazamiento $\delta_Y = -1$ cm	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -previsto (*)	1,92 (1,90/ 1,95)	2,19 (2,15/ 2,20)	2,47 (2,45/ 2,50)	2,75	3,03 (3,00/ 3,05)	3,31 (3,30/ 3,35)	3,58 (3,55/ 3,60)	5,81 (5,80/ 5,85)
	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -encontrado	1,90	2,20	2,50	2,75	3,05	3,30	3,60	5,80
	$C_{2\text{crítico-real}}$ -encontrado (**)	1,65	1,95	2,25	2,50	2,80	3,05	3,35	5,55
	Relación $C_1/C_{2\text{crítico-real}}$	1,82	1,79	1,78	1,80	1,79	1,80	1,79	1,80
Desplazamiento $\delta_Y = -1,5$ cm	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -previsto (*)	2,04 (2,00/ 2,05)	2,32 (2,30/ 2,35)	2,60	2,875 (2,85/ 2,90)	3,15	3,43 (3,40/ 3,45)	3,71 (3,70/ 3,75)	5,93 (5,90/ 5,95)
	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -encontrado	2,00	2,30	2,60	2,90	3,15	3,45	3,70	5,90
	$C_{2\text{crítico-real}}$ -encontrado (**)	1,625	1,925	2,225	2,525	2,775	3,075	3,325	5,525
	Relación $C_1/C_{2\text{crítico-real}}$	1,85	1,82	1,80	1,78	1,80	1,79	1,80	1,81
Desplazamiento $\delta_Y = -2$ cm	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -previsto (*)	2,17 (2,15/ 2,20)	2,44 (2,40/ 2,45)	2,72 (2,50/ 2,75)	3,00	3,28 (3,25/ 3,30)	3,56 (3,55/ 3,60)	3,83 (3,80/ 3,85)	6,06 (6,05/ 6,10)
	$C_{2\text{crítico-centrado}}$ -encontrado	2,15	2,45	2,70	3,00	3,30	3,55	3,85	6,05
	$C_{2\text{crítico-real}}$ -encontrado (**)	1,65	1,95	2,20	2,50	2,80	3,05	3,35	5,55
	Relación $C_1/C_{2\text{crítico-real}}$	1,82	1,79	1,82	1,80	1,79	1,80	1,79	1,80

(*) Los valores que se proporcionan en estas celdas para $c_{2\text{crítico-centrado}}$ -previsto, son los que proporciona la ecuación 5.25 redondeados a la centésima. Sin embargo en este estudio se trabaja con una precisión de cinco centésimas para c_2 por lo que, en la mayoría de los casos, los resultados proporcionados por la ecuación tienen

que ser redondeados a dicha precisión. Por ello, en la tabla, además de indicar el valor que proporciona dicha ecuación redondeado a la centésima, a continuación se indican entre paréntesis los dos valores que, con precisión de cinco centésimas, se encuentran en el entorno del valor calculado.

(**) En los cálculos se ha trabajado con valores de $c_{2centrado}$, por eso los valores de c_2 encontrados son valores de $c_{2centrado}$. Los valores de c_{2real} , necesarios para calcular la relación c_1/c_{2real} , se obtienen a partir de $c_{2centrado}$ aplicando la ecuación 5.16. La operación proporciona valores con precisión de hasta cinco milésimas, que se dejan indicados en la tabla.

5.6.5.3 Conclusiones

En principio, si se prescinde de las situaciones en las que la intensidad máxima de campo se produce sobre los pequeños codos, se puede establecer que las conclusiones obtenidas para montajes con tubo único son perfectamente aplicables a montajes con tubo doble sometido a desplazamientos arbitrarios como los aquí estudiados.

Sin embargo se deben tener en cuenta las configuraciones donde la intensidad máxima de campo se produce en el acodamiento. Para poder valorar la relevancia de estos casos se estudian a continuación otros desplazamientos, proporcionales en este caso al diámetro del tubo.

5.6.6 Desplazamientos del tubo proporcionales a su diámetro

Se estudia ahora el comportamiento de montajes contruidos con la distancia crítica ante desplazamientos imprevistos del tubo superior proporcionales a su diámetro. La proporcionalidad se ha establecido a partir de un desplazamiento de **1,5 cm** para el montaje de $c_1 = 5$ (se toma este valor para el desplazamiento estudiado por Singer [41]). Son desplazamientos del orden del **3 %** sobre el diámetro del tubo, y del orden del **16%** sobre la distancia entre superficies de las barras y del tubo.

Para cuantificar estos desplazamientos, en el programa de cálculo se utiliza una precisión de un milímetro, y así los desplazamientos considerados para cada montaje son los indicados en la tabla 5.13 siguiente en función de los valores de c_1 correspondientes.

Tabla 5.13 Desplazamientos considerados para el tubo

$c_1 =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
Desplazamiento (cm)	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,1	3,0

Se comienza por confirmar los resultados obtenidos en el apartado anterior. Y en este sentido se comprueba que, en un montaje realizado con la distancia crítica sin tener en cuenta posibles desplazamientos, si se produjeran éstos, también aparecerían aumentos sensibles de la intensidad máxima de campo en la barra *I*, aumentos que pueden ser entre un **8%** y un **35%** (figura 5.73) en los montajes estudiados.

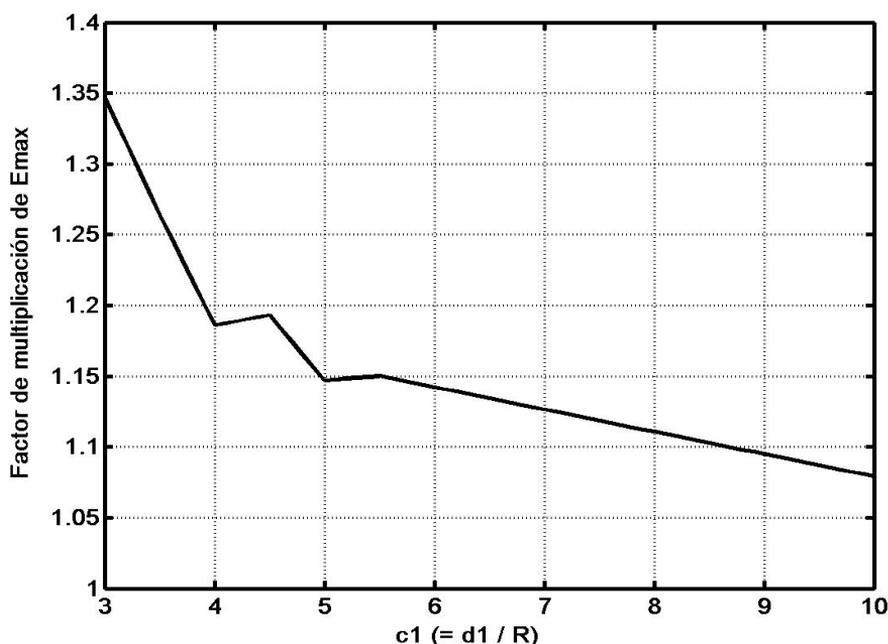


Figura 5.73 Factor de multiplicación del E_{max} en montajes construidos con la distancia crítica de tubos centrados, ante desviaciones de los ejes de los tubos proporcionales al diámetro de estos

También en este caso de desplazamientos proporcionales al diámetro del tubo, se confirma la existencia de una distancia crítica barras-tubo a partir de la cual la intensidad máxima de campo en la barra *I* permanece substancialmente estable ante desplazamientos máximos del tubo como los estudiados. Se encuentra también que el valor de la E_{max} estabilizada es el mismo que en el caso de tubos

centrados. Por tanto también en este caso se encuentra que la intensidad máxima de campo en la barra *I* depende prácticamente en exclusiva del parámetro c_1 , o sea de la distancia entre barras, cuando se está dentro de la zona de campo estabilizado, o sea para valores del parámetro c_2 mayores o iguales que el valor $c_{2crítico}$.

Se ilustra este hecho en la figura 5.74, donde se puede observar que resultan indistinguibles las gráficas trazadas para configuraciones con el tubo centrado y para configuraciones con el tubo desplazado en diferentes cantidades, proporcionales al diámetro o no, siempre que se trate de montajes construidos con el radio eléctricamente óptimo para el tubo (o sea con la distancia crítica barras-tubo correspondiente a cada desplazamiento).

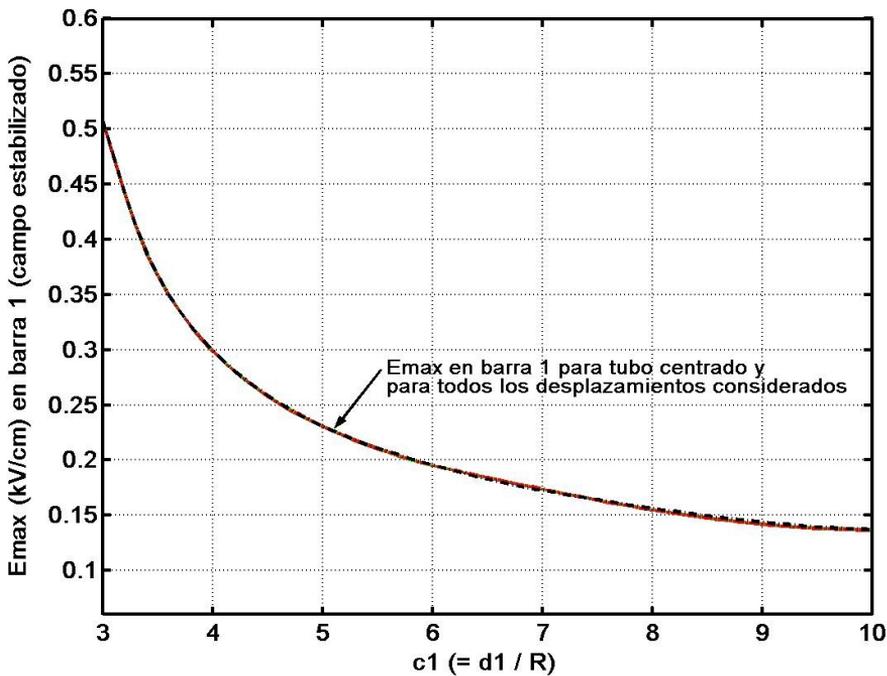


Figura 5.74 Valor de E_{max} en barra 1 en configuraciones realizadas con la distancia crítica, tanto con tubo centrado como con cualquier desplazamiento

Para poder ver las diferencias entre los valores de la intensidad máxima de campo en unos casos y en otros se puede consultar la tabla 5.14. Se observa que las diferencias se encuentran en la cuarta cifra por lo que se pueden considerar irrelevantes.

Tabla 5.14 Valores de E_{max} (kV/cm) en diferentes configuraciones realizadas con distancia crítica

$c_1 =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	7	10
Tubo único	0,5075	0,3669	0,2990	0,2580	0,2305	0,2105	0,1726	0,1369
Doble tubo centrado	0,5075	0,3669	0,2990	0,2580	0,2306	0,2105	0,1726	0,1369
Doble tubo: tubo superior desplazado 1,5 cm	0,5079	0,3674	0,2994	0,2582	0,2305	0,2108	0,1727	0,1371
Doble tubo: tubo superior desplazado cantidades proporcionales	0,5078	0,3673	0,2994	0,2583	0,2305	0,2108	0,1727	0,1371

También, se encuentra que el valor $c_{2critico-centrado}$ es diferente en los casos de tubo centrado y de tubo desviado. Pero se comprueba que el valor del parámetro $c_{2critico-centrado}$ encontrado coincide exactamente con el previsto por la ecuación 5.25, conforme se puede observar en los resultados presentados en la tabla 5.15.

Tabla 5.15 Valores de $c_{2critico-centrado}$ previstos y encontrados, y relación $c_1 / c_{2critico-real}$ encontrada en cada desplazamiento

$c_1 =$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	10
Desplazamiento considerado (cm)	0,9	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2,1	3,0
$c_{2critico-centrado}$ previsto	1,89 (1,85/ 1,90)	2,22 (2,20/ 2,25)	2,52 (2,50/ 2,55)	2,83 (2,80/ 2,85)	3,15	3,46 (3,45/ 3,50)	3,78 (3,75/ 3,80)	4,41 (4,40/ 4,45)	6,3
$c_{2critico-centrado}$ encontrado	1,85	2,20	2,55	2,85	3,15	3,45	3,80	4,40	6,25
$c_{2critico-real}$ encontrado	1,625	1,925	2,250	2,500	2,775	3,025	3,350	3,875	5,500
Relación $c_1 / c_{2critico-real-encontrado}$	1,85	1,82	1,78	1,80	1,80	1,82	1,79	1,81	1,82

Un aspecto muy importante en el estudio de estos montajes construidos con la distancia crítica barras-tubo correspondiente a cada desplazamiento, es determinar los valores de la E_{max} en la superficie interior del tubo. Pues bien, nuevamente se encuentra que, en las configuraciones de pequeño tamaño, la intensidad de campo resulta ser mayor en la superficie interior del tubo que en la propia barra (figura 5.75).

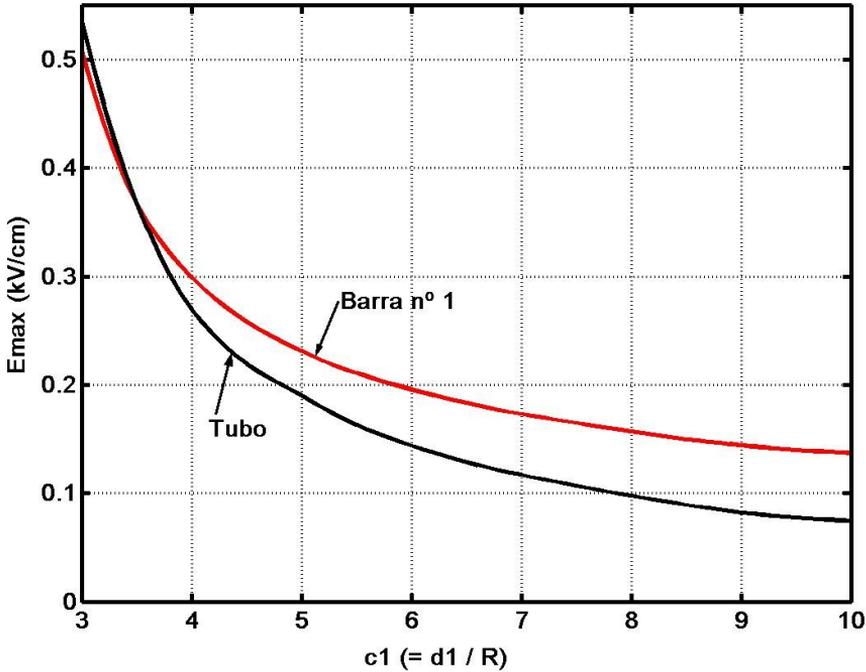


Figura 5.75 E_{max} en barras y tubo ante desviaciones de los ejes de los tubos proporcionales al diámetro de estos

Sin embargo, como se observa en la figura 5.75, son casos excepcionales pues la intensidad máxima de campo sobre los pequeños codos solamente es mayor que sobre la barra *I* en montajes con valores del parámetro c_1 por debajo de 3,5, y que en este caso el valor de intensidad máxima que aparece sobre los pequeños codos apenas llega a multiplicar por 1,06 el valor de la intensidad máxima de campo prevista para la barra *I* en el peor de los casos.

5.6.7 Conclusiones

Se confirman todas las conclusiones obtenidas en los ejemplos anteriores. En concreto reviste especial interés la existencia de valores críticos de los parámetros c_1 y c_2 , indicando el primero el límite de validez de los métodos utilizados tradicionalmente para resolver este tipo de problemas, y el segundo el límite inferior de los radios del tubo eléctricamente seguros en este tipo de montajes.

Sin embargo se encuentra que los pequeños codos que pueden existir en este tipo

de configuraciones revisten un especial peligro eléctrico si son demasiado pequeños, pues la intensidad de campo que aparece en los mismos puede llegar a superar la intensidad máxima de campo que aparece en las propias barras.

5.6.8 Tiempos de ejecución

Utilizando un PC Pentium IV a 1,3 Ghz con 750 Mb de memoria RAM, el tiempo empleado para calcular las 2232 cargas superficiales que simulan cada montaje (para un c_1 y un c_2 dados) ha sido 3 minutos y 30 segundos utilizando el método de las Soluciones Elementales.

La posterior resolución del problema de máximos espacio-temporales conllevó la evaluación del campo en diferentes intervalos espaciales y temporales, llegando a ser evaluado hasta en un máximo de 1908 puntos en 90 instantes diferentes uniformemente distribuidos a lo largo del primer cuarto de período. En estos casos, que han sido los de máximo tiempo de computación, el programa empleó 41 minutos en resolver el problema utilizando el método de las soluciones elementales.

Capítulo 6 . Conclusiones

6.1 Resumen

En el capítulo *1* del presente trabajo se expusieron los objetivos del mismo, el primero de los cuales era desarrollar un método que debería permitir, con suficiente precisión y economía de tiempo y esfuerzo, el conocimiento del campo eléctrico más desfavorable en configuraciones tridimensionales con tensiones de electrodo sinusoidales dependientes del tiempo, todas ellas de igual frecuencia pero con posibles amplitudes y desfases iniciales diferentes.

El segundo objetivo era implementar el método en un programa de cálculo capaz de ejecutarse de forma amigable en ordenadores personales con sistema operativo Windows, programa que debería incluir una interfaz gráfica de usuario que permitiera una entrada de datos confortable y una evaluación visual de los resultados, además de proporcionar, claro está, los datos numéricos necesarios para el conocimiento detallado del campo.

El tercer y último objetivo era la comprobación de la utilidad del método que se desarrollara y del programa que lo implementara, mediante el cálculo de configuraciones técnicas seleccionadas.

En el capítulo *2* se ha expuesto el estado actual del desarrollo de métodos numéricos para el cálculo del campo eléctrico, con especial hincapié en los llamados métodos integrales: método de las cargas discretas, método de las cargas superficiales y método de los elementos de contorno, que son los que se han

implementado en el programa de cálculo desarrollado.

En el capítulo 3 se han expuesto las características de los problemas de máximos en los estudios del campo eléctrico, la relevancia de la resolución de estos problemas para el mejor conocimiento del comportamiento eléctrico de muchas configuraciones reales, los métodos disponibles para resolverlos, una revisión al tratamiento que reciben las configuraciones con potenciales de electrodo dependientes del tiempo en la literatura especializada, y la necesidad de disponer de un método menos engorroso que los actuales para resolver los problemas de máximos espacio-temporales tan comunes en la tecnología de alta tensión.

De acuerdo con el primero de los objetivos planteados en el capítulo 1, en el capítulo 4 se ha comenzado por dar una revisión a los métodos que actualmente se emplean para resolver los grandes sistemas de ecuaciones que definen un problema de campo y las limitaciones que presentan para el objetivo de resolver problemas de máximos espacio-temporales de una forma cómoda y sencilla. Luego se expusieron las variaciones que se han introducido a los mismos para conseguir este objetivo, para, por último, describir detalladamente el método de cálculo desarrollado que, a la vez que simple de implementar en cualquier programa de cálculo de campos eléctricos, es capaz de resolver los problemas de máximos espacio-temporales de forma cómoda, eficaz y económica.

Para el segundo de los objetivos de esta tesis, se dispuso como punto de partida, de un programa de cálculo de campos desarrollado en la Universidad Técnica de Hamburgo-Harburgo por el director de esta Tesis Doctoral, programa que opera en un entorno UNIX, y que combina los métodos de cargas discretas, cargas superficiales y elementos de contorno. Partiendo de éste, se construyó un programa de cálculo de campos que, operando en el entorno Windows de los pequeños ordenadores personales, permite realizar los cálculos necesarios para determinar la situación más desfavorable en cualquier intervalo de fases de un problema de campo con tensiones de electrodo dependientes del tiempo, así como la distribución de campo para cualquier valor de fase que se desee estudiar. Este programa cuenta con una interfaz gráfica de usuario con la que se pueden introducir cómodamente los datos eléctricos y geométricos que definen una configuración, y ofrece como salida de resultados tanto los valores numéricos de las magnitudes calculadas como formas gráficas que ayudan a una mejor evaluación e interpretación de los resultados, permitiendo además interactuar con

ellas para conocer más cómodamente la distribución del campo en el plano de representación.

De acuerdo con el tercero de los objetivos planteados para este trabajo, en el capítulo 5 se ha aplicado el método desarrollado al cálculo de configuraciones reales muy típicas de la ingeniería de alta tensión. En los resultados obtenidos se han establecido de forma precisa los límites de validez de las hipótesis que tradicionalmente se vienen utilizando de forma implícita en la literatura especializada para determinar las situaciones eléctricamente más desfavorables en este tipo de configuraciones.

6.2 Aportaciones

A partir de la factorización LU como método de resolución de grandes sistemas de ecuaciones, se ha desarrollado el método de las Soluciones Elementales basado en el carácter lineal de las ecuaciones y en la estructura de los sistemas de ecuaciones que se definen en un problema de campo eléctrico utilizando métodos integrales. Un aspecto determinante en el desarrollo del presente método ha sido que la gran cantidad de sistemas de ecuaciones que se deben solucionar para resolver los problemas de máximos espacio-temporales asociados a los problemas de campo eléctrico con tensiones de electrodo dependientes del tiempo, son sistemas todos ellos con el mismo primer miembro y con diferente segundo miembro, teniendo éste además pocos valores diferentes y siempre en las mismas posiciones.

El método de las Soluciones Elementales, consiste en substituir la resolución de un gran número de sistemas de ecuaciones por la solución de un pequeño número de sistemas, raramente más de tres, y la combinación lineal de las soluciones obtenidas.

El método de las Soluciones Elementales es simple de implementar en cualquier programa de cálculo, tanto directamente como a partir de cualquier algoritmo basado en la reducción de Gauss o en cualquier otro método de resolución directa de sistemas de ecuaciones. Además se ha demostrado extraordinariamente eficaz y rápido para resolver cualquier problema de máximos espacio-temporales asociado a un problema de campos con tensiones de electrodo dependientes del tiempo, incluso en configuraciones simuladas con un gran número de puntos de contorno.

En la investigación realizada durante la presente tesis, el método de soluciones elementales se ha implementado en un programa de cálculo de campos que, previamente, se ha desarrollado para resolver problemas de campo en pequeños PCs con entorno Windows, implementando los entornos gráficos necesarios tanto para una cómoda entrada de datos en particular como para una fácil interacción usuario-programa en general, permitiendo en concreto realizar gráficas de campo que faciliten la evaluación de los resultados de forma visual, tanto cualitativa como cuantitativamente. El método de resolución que inicialmente se ha implementado en el programa para la resolución de los sistemas de ecuaciones que definen cada problema de campo ha sido la factorización **LU**.

Una vez desarrollado este programa, se ha introducido el método de las Soluciones Elementales para la resolución de problemas de campo con tensiones de electrodo dependientes del tiempo, manteniendo la factorización **LU** como método directo para la resolución de problemas de campo no dependientes del tiempo. De todas formas se ha mantenido la posibilidad de que el usuario del programa pueda elegir entre uno u otro método en un problema concreto.

La aplicación del método de las Soluciones Elementales ha permitido estudiar configuraciones clásicas en tecnología de alta tensión en muy pocos minutos, determinando las situaciones más desfavorables con un coste en tiempo y esfuerzo de definición del problema idéntico al de estudiar una única distribución de tensiones de electrodo, y con un coste en medios y tiempo de ejecución muy poco superior. Esto permite a cualquier usuario que precise estudiar una configuración dependiente del tiempo, resolver el correspondiente problema de máximos espacio-temporales y estudiar el detalle de la situación eléctricamente más desfavorable con prácticamente el mismo coste que resolver el problema para una distribución de tensiones concreta, y desde luego con el mismo esfuerzo personal.

Es decir, con este método, no habrá que dejar sin resolver un problema de máximos espacio-temporales porque su pequeña relevancia en el contexto de un estudio concreto unido al gran coste en tiempo y esfuerzo de su resolución, lo hagan aparentemente prohibitivo, pues ahora el problema de máximos espacio-temporales se puede resolver con prácticamente el mismo coste con que se resuelve una única distribución de tensiones.

Utilizando este método se han estudiado a fondo algunas configuraciones clásicas en la tecnología de alta tensión, lo que ha permitido establecer pautas de

comportamiento del campo eléctrico en las mismas en función de sus dimensiones, aspecto crucial para las labores de diseño de equipos. Además estos estudios han permitido determinar los márgenes concretos de validez de las hipótesis que tradicionalmente se utilizan para reemplazar la resolución del problema de máximos espacio-temporales en este tipo de configuraciones, trazando fronteras claras para su posible aplicabilidad.

Así, el método desarrollado en la presente tesis ha permitido poner de manifiesto que la distribución de tensiones con la que tradicionalmente se resuelven los problemas de campo en las configuraciones trifásicas que se presentan en la literatura especializada, no resulta la más desfavorable en todos los casos. Además, como se ha citado, este método hace innecesario substituir la resolución del problema de máximos espacio-temporales general por un problema concreto de máximos espaciales, que además no es posible garantizar que sea el caso de mayor interés, pues el coste de hacer una u otra cosa viene a resultar prácticamente el mismo.

6.3 Sugerencias para futuros desarrollos

Por lo que respecta a la utilización del método de las Soluciones Elementales desarrollado en la presente tesis, queda pendiente de realizar el estudio de nuevas configuraciones hasta ahora no analizadas como podrían ser las distribuciones de campo durante los transitorios desequilibrados de sistemas trifásicos. Igualmente se puede utilizar el método de las Soluciones Elementales para el cálculo de capacidades entre electrodos de geometrías complicadas.

En lo que se refiere a nuevos trabajos dentro del cálculo de campos electrostáticos, el trabajo desarrollado en esta tesis muestra que aún es posible mejorar o completar los métodos numéricos de cálculo de campos electrostáticos, aunque no resulta evidentemente una tarea fácil, especialmente dentro de un panorama dominado por los grandes paquetes comerciales de cálculo. Sin embargo en el ámbito del cálculo de campos eléctricos de baja frecuencia, con la consideración de densidades de corriente resistivas y capacitivas aún es posible, por ejemplo, plantear la búsqueda de nuevas formulaciones más exactas de las condiciones de contorno por lo que a la precisión y estabilidad numéricas se refiere.

También, otro posible campo de trabajo podría consistir en el estudio de cómo pueden utilizarse las técnicas aquí desarrolladas para la realización de cálculos de optimización de electrodos y de aisladores en alta tensión.

Por otra parte, en el estricto campo del estudio de máximos de campo espacio-temporales en particular, el método desarrollado se ha implementado para aplicarse con el caso habitual de tensiones sinusoidales, pero la implementación puede ampliarse sin ninguna dificultad para incluir el caso de tensiones de electrodo con otras formas de onda.

Igualmente, ya en un terreno más general, el método de las soluciones elementales puede extenderse a otros problemas de máximos no unidimensionales que se puedan resolver por métodos numéricos, siempre, claro está, que las ecuaciones que definan el problema sean lineales. La utilidad de hacerlo así aumentará en la medida que el número de valores diferentes dentro del vector de términos independientes sea más pequeño.

Bibliografía

1	Florida Administrative Code, Electric and Magnetic Fields, "Report on Compliance with Electric and Magnetic Field (EMF) Standards", Capítulo 62-814, Florida, 1993
2	Abramowitz M., Stegun I.A. "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, New York, 1972.
3	Albertos Perez, P., Galvez Hernanz, J.M.; Sanchez Pérez, A.M. "Campos Electromagnéticos", Tomo1, pgs. 119-121. Publicaciones de la E.T.S.I. Industriales. U.P.M., 1972.
4	Andjelic Z. "A Contribution to the BEM for Calculation and Optimization of 3D Electrostatic Fields", Ph. D. Thesis, Faculty of Electrical Engineering, Zagreb, 1984.
5	Andjelic, Z., Krstajic B., Milojkovic, S.: "Integral Methods for the Calculation of Electric Fields". For Application in High Voltage Engineering. Forschungszentrum Jülich GmbH. Scientific Series of the International Bureau. KFA, Jülich 1992.
6	Benito, E. "Problemas de campos electromagnéticos". Editorial AC, Madrid, 1984.
7	Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. "Física. Volumen II: Electromagnetismo y materia". Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware, EUA, 1987.
8	Forsythe, G. E., Wasow, W. R. "Finite Difference Methods for Partial Differential Equations". Wiley, New York, 1965.
9	Fox, L. "An Introduction to Numerical Linear Algebra". Oxford University Press, New York, 1965.

10	Fraleigh, J. B., Beaugard, R. A. "Algebra lineal". Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1989.
11	Galán Moreno, M.J. "Avances en el Método del Residuo Mínimo Generalizado (GMRES), su desarrollo en ANSI-C con algoritmos de vectorización y paralelización y sus aplicaciones al Método de los Elementos Finitos" Tesis doctoral. Universidad de Las Palmas, 1994
12	Gomollón, J.A, Arroyo, J.B, Pastor, A. "Efectos mecánicos de las corrientes de cortocircuito en los elementos de las instalaciones eléctricas de A.T.", Energía. Revista de ingeniería energética y medioambiental, pp 65-76. Madrid, Marzo/abril 1996.
13	Gomollón, J. A., Palau, R. "Steady State 3-D Field Calculations in Three-Phase Systems With Surface Charge Method", IEEE Trans on Power Delivery, Vol. 20, pp: 919-924, 2005.
14	González-Filgueira, G. "Optimización de aisladores de alta tensión en el seno de distribuciones tridimensionales de campo eléctrico" Tesis doctoral. Universidad de A Coruña, 2003
15	Grossman, S. I. "Algebra lineal". McGrawHill, México, 1991.
16	Gutfleisch, F., Berechnung Elektrischer Felder Durch Nachbildung der Grenzschichten mit Ausgewählten Flächenelementen. VDI-Verlag, vol. 21, Fortschritt-Berichte Reihe. Düsseldorf, 1989.
17	Gutfleisch, F. " Calculation of the Electric Field by the Boundary Element Method with different surface elements". 5 th International Symposium on High Voltage Engineering. Paper 31.01. Braunschweig. Austria, 1987.
18	Hinton, E. And Owen, D.R.J. "An introduction to Finite Element Computations", Ed. Pineridge Press Limited, 1979.
19	Huebner, Kenneth, H. "The Finite Element Method for Engineers", Ed. John Wiley and Sons, United States of America, 1975.
20	Janiszewski, J. M. y Gambirasio, G. "Improved Finite Element Method for Static Electromagnetic Field Mapping", 3- th International Symposium on High Voltage Engineering, 11.09, Milan, August 1979.
21	Lay, D. C. "Algebra lineal y sus aplicaciones. Segunda edición". Addison Wesley Longman, México, 1999.
22	Malik, N. H. "A Review of the Charge Simulation Method and its Applications". IEEE Transactions on Electrical Insulation. Vol. 24, No. 1, pp. 3-20, 1989.
23	Maxwell, J.C. "A Treatise in Electricity and Magnetism. 3 rd edition, At the Clarendon Press, Oxford 1891.

24	Misaki, T., Tsuboi, H. Itaka, K. and Hara, T., “Computation of Three-Dimensional Electric Field Problems by a Surface Charge Method and its Application to Insulation Design”, IEEE Trans. PAS, Vol. PAS-101, No. 3. pp. 627-634, March 1982.
25	Misaki, T., Yamamoto, H, H., Itaka, K. “An analisis of 3-Dimensional Asymmetric Field Distribution in SF ₆ Gas Insulated Cables”. <i>IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems</i> . Vol. 92, No. 6, pp. 2024-2031, Nov.-Dec. 1973.
26	Moon, P., Spencer, D.E. “Field Theory Handbook. Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions”. Second Edition. Springer-Verlag, 1988.
27	Motrescu, V.C., van Rienen, U. “Computation of currents induced by ELF electric fields in anisotropic human tissues using the Finite Integration Technique”. <i>Advances in Radio Science</i> , 3, 227-231, 2005
28	Nicholson, W. K. “Algebra lineal con aplicaciones”. McGrawHill, Madrid, 2003.
29	Nigro, N., Storti, M “Métodos numéricos en fenómenos de transporte”. Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería, 2005. En: http://venus.ceride.gov.ar/twiki/pub/Cimec/CursoCFD/curso.pdf
30	Prinz, H. Hochspannungsfelder. Oldenbourg Verlag. München, 1959.
31	Prinz., H. “Curso especial sobre el campo Eléctrico a alta tensión”, E.T.S.I.Industriales. Universidad Politécnica de Madrid, 1971.
32	Puig Adam, P. “Curso Teórico-Práctico de Cálculo Integral Aplicado a la Física y Técnica”, pp. 286-289, 306-313. Ed. Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, 1973.
33	Que, W., Sebo, S.A. “Electric Field and Potential Distributions along Dry and Clean Non-Ceramic Insulators”, 2004. En: www.integratedsoft/Papers/research .
34	Que, W., Sebo, S.A. “Electric Field Distribution in Air: Examples for Various Energized and Grounded Electrode Configurations”, Integrated Engineering Software, Diciembre 2000. En: www.integratedsoft.com/Newsletters%5CDec2000Newsletter.asp .
35	Saad, Y., Schultz, M.H. “GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems”, <i>Siam J. Sci. Stat. Comput.</i> Vol. 7, No. 3, July 1986.
36	Sadiku, Mathiew N. O. <i>Numerical Techniques in Electromagnetics</i> . CRC press, Boca Ratón, Florida, USA 2001.

37	Satyanarayana, S., Natarajan, K.: "An improved procedure for computation of electric fields in unbounded axisymmetric regions by boundary relaxation", <i>3th International Symposium on High voltage Engineering</i> , 11.04, Milan, Aug. 1979.
38	Schaub B. "Wissensbasierte Datenvorverarbeitung" für die numerische Feldberechnung in einer hochspannungstechnischen CAD-Umgebung". Dissertation UNI Karlsruhe, 1990.
39	Schewchuk, J.R. "An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without Agonizing Pain". Article, 1994. En: www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient.pdf
40	Singer H. "Feldberechnung mit Oberflächenleitschichten und Volumenleitfähigkeit der Isolation", <i>ETZ-Archiv</i> 3, pp. 265-267, 1981.
41	Singer H. "Feldstärkeberechnung mit Hilfe von Flächenladungen und Flächenströmen" <i>Archiv für Elektrotechnik</i> Vol. 67. Springer-Verlag, pp. 309-316, 1984.
42	Singer, H. , Steinbigler, H. y Weiss, P. "A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields", <i>IEEE Trans on PAS</i> , Vol. 93, pp: 1660-1668, 1974.
43	Singer, H. "Das elektrische Feld von Polycon-elektroden". <i>Bull. SEV</i> 63, pp. 579-583, 1972.
44	Singer, H. "Flächenladungen zur Feldberechnung von Hochspannungssystemen", <i>Bull SEV</i> , Vol. 65, pp: 739-746, Mayo 1974.
45	Spielrein, J. "Geometrisches zur elektrischen Festigkeitsrechnung". <i>Archiv für Elektrotechnik IV</i> , Band, Vol. 4, pp. 78-85, 1915.
46	Spielrein, J. "Geometrisches zur elektrischen Festigkeitsrechnung II", <i>Archiv für Elektrotechnik V</i> , Band, Vol. 5, pp. 245-54, 1917.
47	Steinbigler, H. "Combined Application of Finite Element Method and Charge Simulation Method for the Computation of Electrical Fields", <i>3th International Symposium on High Voltage Engineering</i> , 11.11, Milan, Aug. 1979.
48	Tokumasu, S., Murakawa, H., Myojin T. "Geometry Optimization of Electrode by Boundary Element Method" <i>Electrical Engineering in Japan</i> , Vol. 104, N° 4, pp. 62-67. 1984. Translated from <i>Denshi Gakkai Roabunshi</i> , Vol. 104B, N° 4, pp. 253-258, April 1984.
49	Utmischi, D. "Charge Substitution Method for Three-Dimensional High Voltage Fields", <i>3th International Symposium on High voltage Engineering</i> , 11.01, Milan, Aug. 1979.
50	Varga, R. S. "Matrix Iterative Analysis". Prectice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

51	Vitkovitch, D (edited by). "Field Analysis, Experimental and Computational Methods", Van Nostrand Company Ltd., 1966.
52	Volkov, E.A., <i>Métodos numéricos</i> . Editorial Mir, Moscú, 1990.
53	Welly, J. D. "Optimization of Electrode Contours in High Voltage Equipment Using Circular Contour Element". <i>5th International Symposium on High Voltage Engineering</i> . Paper 31.03. Braunschweig, Austria, 1987.
54	Xu X.B, Liu, G. "A Two-step Numerical Solution of Magnetic Field Produced by Elf Sources within Steel Pipe". <i>Progress in Electromagnetics Research</i> , PIER 28, 17-28, 2000
55	Youssself, F. "An Accurate Fiting-oriented Charge Simulation Method for Electric Field Calculation". <i>Fourth International Symposium on High Voltage Engineering (ISH)</i> , Athens Ref. 11.13, 1983.
56	Zienkiewicz, O.C. "El Método de los elementos Finitos". Editorial Reverté, Barcelona, 1997.