

ANEXO 1

DEDUCCIÓN COMPLETA DE LA INTEGRACIÓN ANALÍTICA

En los apartados siguientes se presentan las deducciones completas de las expresiones analíticas de las integrales $\mathcal{I}\{m\}$ y $\mathcal{J}\{m\}$, así como todas las fórmulas intermedias que aparecen y los parámetros auxiliares que es preciso definir. El parámetro m es el exponente del término potencial que aparece en las integrales $\mathcal{I}\{m\}[a, b, c, d]$ y $\mathcal{J}\{m\}[a, b, c, d]$, en tanto que los parámetros $[a, b, c, d]$ contienen la información geométrica de los electrodos cilíndricos en el espacio. El procedimiento seguido para la obtención de las expresiones analíticas es el siguiente. En primer lugar se deducen todas las funciones primitivas de forma recurrente, considerando todos los posibles casos a que puedan lugar en función de las propiedades geométricas de las dos rectas, contenidas en $[a, b, c, d]$. A continuación, se realizan todas las sustituciones de los cambios de variable que se hayan empleado, para posteriormente evaluar las funciones primitivas entre los límites de integración correspondientes y, finalmente, compactar las expresiones resultantes.

Los parámetros geométricos $[a, b, c, d]$, definidos anteriormente en (eV.57) y (eV.64), vienen dados por las expresiones

$$\begin{aligned} a &= \pm \frac{1}{\lambda} - \mathcal{A} \\ b &= -\mathcal{B} \\ c^2 &= \mathcal{C}^2 + a^2 \\ d &= \mathcal{D} - a\mathcal{B} \end{aligned} \tag{eA1.1}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\mathcal{L}^\beta}{\mathcal{L}^\alpha}, \quad \mathcal{A} = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0y}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right), \quad \mathcal{B} = \tilde{s}_y^\beta \\ \mathcal{D} &= \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_x^\beta + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_z^\beta, \quad \mathcal{C}^2 = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 + \hat{\phi}^2 \end{aligned} \tag{eA1.2}$$

A1.1. INTEGRAL $\mathcal{I}\{m\}[a, b, c, d]$

Con el fin de simplificar la notación se prescindirá de indicar en todas las expresiones la dependencia de las integrales con los parámetros geométricos $[a, b, c, d]$.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\{m\} &= \int_{x=-1}^{x=1} x^m \ln \left(a + bx + \sqrt{x^2 + 2dx + c^2} \right) dx \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} x^m \ln \left(a + bx + \sqrt{(x+d)^2 + (c^2 - d^2)} \right) dx\end{aligned}\tag{eA1.3}$$

Es interesante demostrar que el término $(c^2 - d^2)$ es siempre positivo. Este hecho es muy importante para las demostraciones posteriores dado que permite calcular la función primitiva con un único cambio de variable (éste se verá más adelante) evitando una proliferación de casos distintos.

$$\begin{aligned}c^2 - d^2 &= \mathcal{C}^2 + a^2 - (\mathcal{D} - a\mathcal{B})^2 \\ &= \mathcal{C}^2 - \mathcal{D}^2 + a^2 - a^2\mathcal{B}^2 + 2a\mathcal{B}\mathcal{D}\end{aligned}\tag{eA1.4}$$

La sustitución de los parámetros por sus definiciones geométricas (eA1. 2) permite su interpretación, de modo que $(c^2 - d^2)$ puede reescribirse como

$$\begin{aligned}c^2 - d^2 &= \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right)^2 \left(1 - (\tilde{s}_x^\beta)^2 \right) + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right)^2 \left(1 - (\tilde{s}_z^\beta)^2 \right) + \tilde{\phi}^2 \\ &\quad - 2 \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \tilde{s}_x^\beta \tilde{s}_z^\beta + a^2 \left(1 - (\tilde{s}_y^\beta)^2 \right) \\ &\quad + 2a \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \tilde{s}_x^\beta \tilde{s}_y^\beta + 2a \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \tilde{s}_z^\beta \tilde{s}_y^\beta\end{aligned}\tag{eA1.5}$$

Dado que las componentes del versor director $\tilde{\mathbf{s}}^\beta$ están normalizadas, sustituyendo en (eA1. 5) de forma conveniente la relación $(\tilde{s}_x^\beta)^2 + (\tilde{s}_y^\beta)^2 + (\tilde{s}_z^\beta)^2 = 1$,

resulta

$$\begin{aligned}
 c^2 - d^2 &= \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 \left((\tilde{s}_y^\beta)^2 + (\tilde{s}_z^\beta)^2 \right) + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 \left((\tilde{s}_y^\beta)^2 + (\tilde{s}_x^\beta)^2 \right) + \hat{\phi}^2 \\
 &\quad - 2 \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_x^\beta \tilde{s}_z^\beta + a^2 \left((\tilde{s}_x^\beta)^2 + (\tilde{s}_z^\beta)^2 \right) \\
 &\quad + 2a \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_x^\beta \tilde{s}_y^\beta + 2a \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_z^\beta \tilde{s}_y^\beta
 \end{aligned} \tag{eA1.6}$$

y agrupando los términos que corresponden a desarrollos de cuadrados de binomios, se obtiene

$$\begin{aligned}
 c^2 - d^2 &= \left[\left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_z^\beta - \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_x^\beta \right]^2 + \left[\left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_y^\beta + a \tilde{s}_x^\beta \right]^2 \\
 &\quad + \left[\left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_y^\beta + a \tilde{s}_z^\beta \right]^2 + \hat{\phi}^2
 \end{aligned} \tag{eA1.7}$$

Como puede observarse, la diferencia $(c^2 - d^2)$ será siempre positiva, y además no nula ya que, aún en el caso de anularse los tres primeros binomios, el último sumando —correspondiente al término $\hat{\phi}$ de los diámetros de los electrodos— siempre es estrictamente positivo. En lo sucesivo $(c^2 - d^2)$ se denotará como R^2 .

Substituyendo este resultado en el cálculo de la primitiva (eA1. 3), y efectuando el cambio de variable $(x + d = t)$, resulta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}\{m\} &= \int_{x=-1}^{x=1} x^m \ln \left(a + bx + \sqrt{(x+d)^2 + R^2} \right) dx \\
 &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} (t-d)^m \ln \left((a-bd) + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) dt
 \end{aligned} \tag{eA1.8}$$

La diferencia $(a - bd)$ aparece muy a menudo en el desarrollo de la formulación y, para simplificar, se denota como f . Si se aplica la fórmula de Newton al binomio

$(t - d)^m$ en (eA1. 8), la expresión final viene dada por

$$\mathcal{I}\{m\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^j t^{m-j} \ln \left(f + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) dt \quad (\text{eA1.9})$$

que puede reescribirse como

$$\mathcal{I}\{m\} = \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^j \mathcal{I}_1\{m - j\} \quad (\text{eA1.10})$$

siendo $\mathcal{I}_1\{n\}$ la integral de reducción

$$\mathcal{I}_1\{n\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^n \ln \left(f + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) dt \quad (\text{eA1.11})$$

Con esta técnica de reducción se transforma el problema de obtener $\mathcal{I}\{m\}[a, b, c, d]$ a calcular la integral más general $\mathcal{I}_1\{n\}[a, b, c, d]$ para distintos valores de n .

A1.2. INTEGRAL $\mathcal{I}_1\{n\}[a, b, c, d]$

La integral $\mathcal{I}_1\{n\}[a, b, c, d]$ se puede determinar de forma recurrente mediante el uso de una serie de funciones auxiliares. Para ello, integrando por partes, se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1\{n\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^n \ln \left(f + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) dt = \\ & \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln \left(f + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} - \frac{b}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+1}}{f + bt + \sqrt{t^2 + R^2}} dt \\ & - \frac{1}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+2}}{\left(f + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) \sqrt{t^2 + R^2}} dt \end{aligned} \quad (\text{eA1.12})$$

Si se multiplican y dividen los sumandos integrales por el término del denominador conjugado, $(\sqrt{t^2 + R^2} - (f + bt))$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_1\{n\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^n \ln \left(f + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) dt \\
 &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln \left(f + bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\
 &\quad + \frac{bf}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+1}}{t^2 + R^2 - (f + bt)^2} dt \\
 &\quad + \frac{b^2}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+2}}{t^2 + R^2 - (f + bt)^2} dt \\
 &\quad - \frac{b}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+3}}{(t^2 + R^2 - (f + bt)^2) \sqrt{t^2 + R^2}} dt \quad (\text{eA1.13}) \\
 &\quad - \frac{bR^2}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+1}}{(t^2 + R^2 - (f + bt)^2) \sqrt{t^2 + R^2}} dt \\
 &\quad - \frac{1}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+2}}{t^2 + R^2 - (f + bt)^2} dt \\
 &\quad + \frac{f}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+2}}{(t^2 + R^2 - (f + bt)^2) \sqrt{t^2 + R^2}} dt \\
 &\quad + \frac{b}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+3}}{(t^2 + R^2 - (f + bt)^2) \sqrt{t^2 + R^2}} dt
 \end{aligned}$$

y se evalúan, en los límites de integración indicados, el primer sumando y simplificamos el cuarto y el octavo, los restantes términos se pueden agrupar

definiendo unas integrales auxiliares $\mathcal{K}_1\{n\}$ y $\mathcal{K}_2\{n\}$, obteniéndose

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1\{n\} = & \frac{(d+1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(a + b + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right) \\ & - \frac{(d-1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(a - b + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right) \\ & + \frac{bf}{n+1} \mathcal{K}_1\{n+1\} - \frac{1-b^2}{n+1} \mathcal{K}_1\{n+2\} \\ & - \frac{bR^2}{n+1} \mathcal{K}_2\{n+1\} + \frac{f}{n+1} \mathcal{K}_2\{n+2\} \end{aligned} \quad (\text{eA1.14})$$

$$\mathcal{K}_1\{n\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2 - f^2)} dt \quad (\text{eA1.15})$$

$$\mathcal{K}_2\{n\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{\left((1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2 - f^2) \right) \sqrt{t^2 + R^2}} dt$$

Es particularmente interesante distinguir en la evaluación de $\mathcal{I}_1\{n\}$ el caso en que el valor de $b^2 = 1$, que corresponde a una disposición espacial de rectas paralelas. El motivo de tratar este caso por separado es doble: en primer lugar es una disposición muy frecuente y, en segundo lugar, la expresión final —aún siendo equivalente a (eA1. 14)— es mucho más simple dado que, como se presentará más adelante, la evaluación de $\mathcal{K}_1\{n\}$ y $\mathcal{K}_2\{n\}$ es tremendamente compleja. Será preciso, no obstante, hacer uso de una tercera integral auxiliar, $\mathcal{K}_3\{n\}$. Un resultado muy útil que debe demostrarse previamente es que si $b^2 = 1$, entonces el valor del parámetro f es nulo: a partir de las definiciones (eA1. 1), f puede escribirse como

$$f = a - bd = a + \mathcal{B}(\mathcal{D} - a\mathcal{B}) = a(1 - \mathcal{B}^2) + \mathcal{B}\mathcal{D} \quad (\text{eA1.16})$$

que es igual a cero ($\mathcal{B} = -b$ es una de las componentes del versor director normalizado; si $b^2 = 1$, las demás componentes de dicho versor son nulas y también lo es el parámetro \mathcal{D} en el cual intervienen —ecuación (eA1. 2)—).

Con este resultado, la integral $\mathcal{I}_1\{n\}$, tras efectuar la integración por partes de (eA1. 13), queda reducida a dos sumandos,

$$\mathcal{I}_1\{n\} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln \left(bt + \sqrt{t^2 + R^2} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} - \frac{b}{n+1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+1}}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt \quad (\text{eA1.17})$$

y si se evalúa la función primitiva en los límites de integración indicados y se define la integral auxiliar $\mathcal{K}_3\{n\}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1\{n\} &= \frac{(d+1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(b(d+1) + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right) \\ &\quad - \frac{(d-1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(b(d-1) + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{eA1.18})$$

$$- \frac{b}{n+1} \mathcal{K}_3\{n+1\};$$

$$\mathcal{K}_3\{n\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt \quad (\text{eA1.19})$$

A1.3. INTEGRAL $\mathcal{J}\{m\}[a, b, c, d]$

La evaluación de $\mathcal{J}\{m\}$ es análoga a la efectuada en (eA1. 3) para $\mathcal{I}\{m\}$. Sustituyendo $(c^2 - d^2) = R^2$ y el cambio de variable $(x + d = t)$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\{m\} &= \int_{x=-1}^{x=1} x^m \sqrt{x^2 + 2dx + c^2} dx \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} x^m \sqrt{(x+d)^2 + R^2} dx \quad (\text{eA1.20}) \\ &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} (t-d)^m \sqrt{t^2 + R^2} dt \end{aligned}$$

y aplicando la fórmula de Newton al binomio,

$$\mathcal{J}\{m\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^j t^{m-j} \sqrt{t^2 + R^2} dt \quad (\text{eA1.21})$$

Del mismo modo que en (10), $\mathcal{J}\{m\}$ se puede reescribir como

$$\mathcal{J}\{m\} = \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^j \mathcal{J}_1\{m-j\} \quad (\text{eA1.22})$$

$$\mathcal{J}_1\{n\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^n \sqrt{t^2 + R^2} dt \quad (\text{eA1.23})$$

A1.4. INTEGRAL $\mathcal{J}_1\{n\}[a, b, c, d]$

La obtención de una expresión para calcular de forma recurrente la integral $\mathcal{J}_1\{n\}$ es muy simple, dado que se puede expresar en términos de la función auxiliar $\mathcal{K}_3\{n\}$, (eA1. 19), ya utilizada en el apartado A1.2., multiplicando y dividiendo en (eA1. 23) por el factor $\sqrt{t^2 + R^2}$. De este modo, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1\{n\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^n \sqrt{t^2 + R^2} dt \\ &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n+2}}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt + R^2 \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt \end{aligned} \quad (\text{eA1.24})$$

o la expresión equivalente en términos de $\mathcal{K}_3\{n\}$,

$$\mathcal{J}_1\{n\} = \mathcal{K}_3\{n+2\} + R^2 \mathcal{K}_3\{n\} \quad (\text{eA1.25})$$

Hasta este punto se ha transformado el problema de integrar las funciones $\mathcal{I}\{n\}$ y $\mathcal{J}\{n\}$ a evaluar otras integrales distintas, las funciones auxiliares $\mathcal{K}_1\{n\}$, $\mathcal{K}_2\{n\}$ y $\mathcal{K}_3\{n\}$.

A1.5. INTEGRAL $\mathcal{K}_3\{n\}[a, b, c, d]$

Esta función auxiliar es la más sencilla de resolver de forma recurrente. Para ello basta con efectuar unas pequeñas modificaciones en el numerador de la fracción y descomponer de forma conveniente.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_3\{n\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt \\
 &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-2} (t^2 + R^2 - R^2)}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt \quad (\text{eA1.26}) \\
 &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^{n-2} \sqrt{t^2 + R^2} dt - R^2 \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt
 \end{aligned}$$

El segundo sumando corresponde a la misma integral $\mathcal{K}_3\{n\}$ pero de grado 2 unidades inferior, es decir, $\mathcal{K}_3\{n-2\}$; si, por otra parte, se efectúa la integración por partes del primer término se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_3\{n\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^{n-2} \sqrt{t^2 + R^2} dt - R^2 \mathcal{K}_3\{n-2\} \\
 &= \left[\frac{t^{n-1} \sqrt{t^2 + R^2}}{n-1} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} - \frac{1}{n-1} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt \quad (\text{eA1.27}) \\
 &\quad - R^2 \mathcal{K}_3\{n-2\} \\
 &= \left[\frac{t^{n-1} \sqrt{t^2 + R^2}}{n-1} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} - \frac{1}{n-1} \mathcal{K}_3\{n\} - R^2 \mathcal{K}_3\{n-2\}
 \end{aligned}$$

Esta última expresión es cíclica, es decir, tras realizar la integración por partes, reaparece como término a integrar la misma función del inicio del proceso $\mathcal{K}_3\{n\}$. En consecuencia, aislando ésta de la igualdad (eA1. 27),

$$\left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \mathcal{K}_3\{n\} = \left[\frac{t^{n-1} \sqrt{t^2 + R^2}}{n-1} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} - R^2 \mathcal{K}_3\{n-2\} \quad (\text{eA1.28})$$

evaluando el primer sumando entre los límites de integración indicados y despejando $\mathcal{K}_3\{n\}$, resulta la expresión final que permite obtener cada integral $\mathcal{K}_3\{n\}$ a partir de $\mathcal{K}_3\{n-2\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3\{n\} &= \frac{(d+1)^{n-1} \sqrt{(d+1)^2 + R^2}}{n} - \frac{(d-1)^{n-1} \sqrt{(d-1)^2 + R^2}}{n} \\ &\quad - \frac{(n-1)R^2}{n} \mathcal{K}_3\{n-2\} \end{aligned} \quad (\text{eA1.29})$$

Evidentemente para poder iniciar los cálculos es preciso determinar los valores de las integrales $\mathcal{K}_3\{0\}$ y $\mathcal{K}_3\{1\}$, que corresponden a $(n=0)$ y $(n=1)$, y que vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3\{1\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt = \left[\sqrt{t^2 + R^2} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\ &= \sqrt{(d+1)^2 + R^2} - \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \end{aligned} \quad (\text{eA1.30})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3\{0\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\sqrt{t^2 + R^2}} dt = \left[\ln \left(t + \sqrt{t^2 + R^2} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\ &= \text{ArgSh} \left(\frac{d+1}{R} \right) - \text{ArgSh} \left(\frac{d-1}{R} \right) \end{aligned}$$

A1.6. INTEGRAL $\mathcal{K}_1\{n\}[a, b, c, d]$

La evaluación de la integral auxiliar $\mathcal{K}_1\{n\}$ es más compleja que en el caso anterior, pero no deja de tratarse, al fin y al cabo, de la integral de una función racional —con las ventajas que ello supone, dado que se trata de primitivas muy habituales—. Sin embargo, y dado que se ha decidido adoptar una metodología de cálculo recursivo es preciso mantenerlo también en este tipo de integrales que, como se verá, da lugar a expresiones muy cómodas de manejar, sobre todo, teniendo en cuenta que el objetivo es la implementación final de toda la formulación en un entorno de diseño asistido por ordenador.

En el apartado A1.2. se obtuvieron las expresiones para la integral $\mathcal{I}_1\{n\}$, que interviene directamente en el cálculo de $\mathcal{I}\{n\}$, para todos los valores del exponente n y para todos los posibles parámetros geométricos $[a, b, c, d]$. Además se distinguió el caso de la disposición paralela de los electrodos, es decir $b^2 = 1$. Una ventaja adicional a las mencionadas de separar este caso de los demás es que la integral resultante de $\mathcal{I}_1\{n\}$ sólo depende de la integral auxiliar $\mathcal{K}_3\{n\}$, y no intervienen las integrales auxiliares $\mathcal{K}_1\{n\}$ ni $\mathcal{K}_2\{n\}$. Esto se traduce en que en la integración analítica de estas integrales no entraña ningún tipo de problema si aparecen fracciones cuyos denominadores contengan términos de la forma $(1 - b^2)$, ya que el caso en que pudieran anularse fue excluido previamente.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1\{n\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2 - f^2)} dt \\ &= \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2}\right)} dt \end{aligned} \tag{eA1.31}$$

Si se efectúan una serie de manipulaciones en el numerador de la fracción que constituye la función a integrar, puede obtenerse

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1\{n\} &= \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-2} \left(t^2 \pm \frac{2bf}{1-b^2}t \pm \frac{R^2 - f^2}{1-b^2} \right)}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} t^{n-2} dt \\ &\quad + \frac{2bf}{(1-b^2)^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-1}}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2}\right)} dt \\ &\quad - \frac{R^2 - f^2}{(1-b^2)^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-2}}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2}\right)} dt \end{aligned} \tag{eA1.32}$$

e integrando la expresión anterior y evaluando en los límites indicados, pueden identificarse las expresiones recurrentes $\mathcal{K}_1\{n-1\}$ y $\mathcal{K}_1\{n-2\}$, es decir,

$$\mathcal{K}_1\{n\} = \frac{1}{1-b^2} \left[\frac{(d+1)^{n-1} - (d-1)^{n-1}}{n-1} + 2bf\mathcal{K}_1\{n-1\} - (R^2 - f^2)\mathcal{K}_1\{n-2\} \right]. \quad (\text{eA1.33})$$

Esta expresión permite calcular las integrales auxiliares $\mathcal{K}_1\{n\}$ para los distintos valores de n , pero al igual que en el caso de $\mathcal{K}_3\{n\}$ se precisan los valores de las integrales que inician los cálculos $\mathcal{K}_1\{1\}$ y $\mathcal{K}_1\{0\}$:

$$\mathcal{K}_1\{1\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t}{(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2 - f^2)} dt \quad (\text{eA1.34})$$

$$\mathcal{K}_1\{0\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2 - f^2)} dt$$

La primera de las integrales se expresa en términos de la segunda, $\mathcal{K}_1\{0\}$, efectuando una serie de operaciones en el numerador de la fracción.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1\{1\} &= \frac{1}{2(1-b^2)} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{\left(2t \pm \frac{2bf}{1-b^2}\right)}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{2(1-b^2)} \left[\int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{2t - \frac{2bf}{1-b^2}}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2}\right)} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{\frac{2bf}{1-b^2}}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2}\right)} dt \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_1\{1\} = \frac{1}{2(1-b^2)} \left[\ln \left(t^2 - \frac{2bf}{1-b^2}t + \frac{R^2-f^2}{1-b^2} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} + \frac{bf}{1-b^2} \mathcal{K}_1\{0\} \quad (\text{eA1.35})$$

Si se evalúa el término logarítmico en los límites de integración indicados y se sustituye el parámetro auxiliar $f = a - bd$, la expresión puede compactarse en la forma

$$\begin{aligned} & \left[\ln \left(t^2 - \frac{2bf}{1-b^2}t + \frac{R^2-f^2}{1-b^2} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\ &= \ln \left(\frac{(d+1)^2 - \frac{2bf}{1-b^2}(d+1) + \frac{R^2-f^2}{1-b^2}}{(d-1)^2 - \frac{2bf}{1-b^2}(d-1) + \frac{R^2-f^2}{1-b^2}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(1-b^2)(d+1)^2 - 2b(a-bd)(d+1) + R^2 - (a-bd)^2}{(1-b^2)(d-1)^2 - 2b(a-bd)(d-1) + R^2 - (a-bd)^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(d+1)^2 - (a+b)^2 + R^2}{(d-1)^2 - (a-b)^2 + R^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{eA1.36})$$

Sustituyendo este resultado en (eA1. 35), resulta

$$\mathcal{K}_1\{1\} = \frac{1}{2(1-b^2)} \left[\ln \left(\frac{(d+1)^2 - (a+b)^2 + R^2}{(d-1)^2 - (a-b)^2 + R^2} \right) + 2bf \mathcal{K}_1\{0\} \right] \quad (\text{eA1.37})$$

Por otra parte, y con el fin de facilitar el desarrollo posterior es interesante reescribir la integral $\mathcal{K}_1\{0\}$ en términos de un binomio al cuadrado más una constante,

$$\mathcal{K}_1\{0\} = \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2} \right) t + \left(\frac{R^2-f^2}{1-b^2} \right)} dt$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_1\{0\} &= \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\left(t - \frac{bf}{1-b^2}\right)^2 + \frac{R^2-f^2}{1-b^2} - \frac{b^2 f^2}{(1-b^2)^2}} dt \\
 &= \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\left(t - \frac{bf}{1-b^2}\right)^2 + \frac{R^2(1-b^2) - f^2}{(1-b^2)^2}} dt
 \end{aligned} \tag{eA1.38}$$

Dependiendo del signo del término $R^2(1-b^2) - f^2$ la integral anterior puede dar lugar a distintas soluciones ya que el cambio de variable a utilizar es distinto. Sin embargo, si se realizan una serie de operaciones en este término y se sustituyen por los valores de los parámetros geométricos,

$$\begin{aligned}
 R^2(1-b^2) - f^2 &= (c^2 - d^2)(1-b^2) - (a-bd)^2 \\
 &= c^2 - d^2 - c^2 b^2 - a^2 + 2abd \\
 &= c^2 - d^2 - C^2 b^2 - a^2 b^2 - a^2 + 2abd \tag{eA1.39} \\
 &= C^2(1-b^2) - (d-ab)^2 \\
 &= (c^2 - a^2)(1-b^2) - (d-ab)^2
 \end{aligned}$$

y éstos a su vez por sus definiciones (eA1. 2), la diferencia $R^2(1-b^2) - f^2$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 R^2(1-b^2) - f^2 &= C^2(1-B^2) - (D - aB + aB)^2 \\
 &= \left(\left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 + \tilde{\phi}^2 \right) \left((\tilde{s}_x^\beta)^2 + (\tilde{s}_z^\beta)^2 \right) \tag{eA1.40} \\
 &\quad - \left(\left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_x^\beta + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_z^\beta \right)^2
 \end{aligned}$$

Efectuando todos los productos en la expresión anterior y agrupando aquellos que corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio, resulta

$$R^2(1 - b^2) - f^2 = \left(\left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \tilde{s}_z^\beta - \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \tilde{s}_x^\beta \right)^2 + \tilde{\phi}^2 \left(1 - (\tilde{s}_x^\beta)^2 \right) \quad (\text{eA1.41})$$

por lo que puede concluirse que $R^2(1 - b^2) - f^2$ será siempre estrictamente positivo, y en lo sucesivo se denotará por ω^2 . Este resultado es importante en tanto que permite obtener un único valor para la integral $\mathcal{K}_1\{0\}$ de (eA1. 38)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1\{0\} &= \frac{1}{1 - b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\left(t - \frac{bf}{1 - b^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{1 - b^2} \right)^2} dt \\ &= \frac{1}{\omega} \left[\arctan \left(\frac{t - \frac{bf}{1 - b^2}}{\frac{\omega}{1 - b^2}} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \end{aligned} \quad (\text{eA1.42})$$

y evaluando (eA1. 42) en los límites de integración indicados resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1\{0\} &= \frac{1}{\omega} \left[\arctan \left(\frac{(d + 1)(1 - b^2) - bf}{\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. - \arctan \left(\frac{(d - 1)(1 - b^2) - bf}{\omega} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{\frac{(d + 1)(1 - b^2) - bf}{\omega} - \frac{(d - 1)(1 - b^2) - bf}{\omega}}{1 + \frac{[(d + 1)(1 - b^2) - bf][(d - 1)(1 - b^2) - bf]}{\omega^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{2\omega(1 - b^2)}{\omega^2 + [(1 - b^2)d - bf]^2 - (1 - b^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{eA1.43})$$

Esta última expresión puede simplificarse al sustituir el valor ω^2 de (eA1. 39) y efectuar todos los desarrollos de los binomios

$$\mathcal{K}_1\{0\} = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{2\omega(1-b^2)}{(c^2-a^2)(1-b^2) - (d-ab)^2 + [(1-b^2)d-bf]^2 - (1-b^2)^2} \right)$$

$$\mathcal{K}_1\{0\} = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{2\omega}{c^2-a^2} \right) \quad (\text{eA1.44})$$

A1.7. INTEGRAL $\mathcal{K}_2\{n\}[a, b, c, d]$

La integral auxiliar $\mathcal{K}_2\{n\}$ es la más compleja de obtener para los distintos valores de los parámetros $[a, b, c, d]$ debido al término irracional $\sqrt{t^2+R^2}$. Dado que el caso correspondiente a una disposición de barras paralelas, $b^2 = 1$, ya ha sido excluido en el apartado A1.6., el proceso que se sigue es el mismo que el empleado en las integrales $\mathcal{K}_1\{n\}$ y $\mathcal{K}_3\{n\}$.

$$\mathcal{K}_2\{n\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{\left[(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2 - f^2) \right] \sqrt{t^2 + R^2}} dt$$

$$= \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^n}{\left[t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2} \right) t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2} \right) \right] \sqrt{t^2 + R^2}} dt$$

(eA1.45)

Si se suman y restan en el numerador de la fracción los términos necesarios con el fin de, posteriormente, descomponer la integral en suma de integrales más elementales o conocidas, puede obtenerse

$$\mathcal{K}_2\{n\} = \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-2} \left(t^2 \pm \frac{2bf}{1-b^2} t \pm \frac{R^2 - f^2}{1-b^2} \right)}{\left[t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2} \right) t + \left(\frac{R^2 - f^2}{1-b^2} \right) \right] \sqrt{t^2 + R^2}} dt$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{n\} &= \frac{1}{1-b^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+R^2}} dt \\
 &+ \frac{2bf}{(1-b^2)^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-1}}{\left[t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2} \right) t + \left(\frac{R^2-f^2}{1-b^2} \right) \right] \sqrt{t^2+R^2}} dt \\
 &- \frac{R^2-f^2}{(1-b^2)^2} \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t^{n-2}}{\left[t^2 - \left(\frac{2bf}{1-b^2} \right) t + \left(\frac{R^2-f^2}{1-b^2} \right) \right] \sqrt{t^2+R^2}} dt
 \end{aligned} \tag{eA1.46}$$

e identificando estas tres integrales con las funciones auxiliares $\mathcal{K}_3\{n-2\}$, $\mathcal{K}_2\{n-1\}$ y $\mathcal{K}_2\{n-2\}$, resulta

$$\mathcal{K}_2\{n\} = \frac{1}{1-b^2} \left[\mathcal{K}_3\{n-2\} + 2bf \mathcal{K}_2\{n-1\} - (R^2-f^2) \mathcal{K}_2\{n-2\} \right] \tag{eA1.47}$$

Esta expresión, que permite obtener el valor de la integral auxiliar $\mathcal{K}_2\{n\}$ para cualquier valor de los parámetros geométricos $[a, b, c, d]$ y del exponente n , precisa de los valores iniciales de las integrales correspondientes a $n = 0$ y $n = 1$, es decir,

$$\mathcal{K}_2\{1\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t}{\left[(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2-f^2) \right] \sqrt{t^2+R^2}} dt \tag{eA1.48}$$

$$\mathcal{K}_2\{0\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\left[(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2-f^2) \right] \sqrt{t^2+R^2}} dt$$

Ambas integrales pueden obtenerse convirtiéndolas, mediante los cambios de variable oportunos, en integrales de funciones racionales. El procedimiento es muy similar en ambas y se basa en manipular las funciones para poder efectuar un cambio de variable en términos de funciones hiperbólicas. Si se considera en primer lugar el cálculo de la integral auxiliar $\mathcal{K}_2\{1\}$,

$$\mathcal{K}_2\{1\} = \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t}{\left[(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2-f^2) \right] \sqrt{t^2+R^2}} dt$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{1\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t}{\left[(t^2 + R^2) - (f + bt)^2\right] \sqrt{t^2 + R^2}} dt \\
 &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{t}{\left[\sqrt{t^2 + R^2} - (f + bt)\right] \left[\sqrt{t^2 + R^2} + (f + bt)\right] \sqrt{t^2 + R^2}} dt
 \end{aligned} \tag{eA1.49}$$

el cambio $t = R \operatorname{Sh} z$ permite reescribir la integral y obtener

$$\mathcal{K}_2\{1\} = \int \frac{R \operatorname{Sh} z}{[R \operatorname{Ch} z - f - bR \operatorname{Sh} z][R \operatorname{Ch} z + f + bR \operatorname{Sh} z]} dz \tag{eA1.50}$$

Se ha obviado intencionadamente los límites de integración para facilitar las operaciones analíticas de las expresiones que siguen y, al final del proceso, se considerarán de nuevo. Si ahora, en la integral (eA1. 50) se cambian las funciones hiperbólicas por sus definiciones y se efectúa el cambio en la variable $e^z = s$, (el diferencial es $dz = ds/s$), se obtiene la integral de una función racional aunque un tanto más compleja que las aparecidas en los apartados anteriores.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{1\} &= \frac{1}{R} \int \frac{\frac{s^2 - 1}{2s}}{\left[\frac{s^2 + 1}{2s} - \frac{f}{R} - b\frac{s^2 - 1}{2s}\right] \left[\frac{s^2 + 1}{2s} + \frac{f}{R} + b\frac{s^2 - 1}{2s}\right]} \frac{ds}{s} \\
 &= \frac{2}{R} \int \frac{s^2 - 1}{\left[(1 - b)s^2 - \frac{2f}{R}s + (1 + b)\right] \left[(1 + b)s^2 + \frac{2f}{R}s + (1 - b)\right]} ds \\
 &= \frac{2}{R(1 - b^2)} \int \frac{s^2 - 1}{\left[s^2 - \frac{2f}{R(1 - b)}s + \frac{1 + b}{1 - b}\right] \left[s^2 + \frac{2f}{R(1 + b)}s + \frac{1 - b}{1 + b}\right]} ds
 \end{aligned} \tag{eA1.51}$$

Para la obtención de la función primitiva de esta última integral es interesante reescribir los términos cuadráticos del denominador en forma de cuadrado de binomios más unas constantes. De este modo es posible identificar las raíces del denominador y, en consecuencia, determinar el tipo de primitivas que van

a resultar.

$$s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1+b}{1-b} = \left(s - \frac{f}{R(1-b)} \right)^2 + \frac{\omega^2}{R^2(1-b)^2} \quad (\text{eA1.52})$$

$$s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1-b}{1+b} = \left(s + \frac{f}{R(1+b)} \right)^2 + \frac{\omega^2}{R^2(1+b)^2}$$

Como puede observarse ambas expresiones cuadráticas dan lugar a raíces complejas, por lo que la descomposición en fracciones simples de (eA1. 51) es única, salvo en un caso: aquel en el que las dos expresiones cuadráticas coincidan, es decir, cuando los coeficientes f y b sean simultáneamente nulos, ya que entonces (eA1. 51) se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2\{1\} &= \frac{2}{R} \int \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} ds = \frac{2}{R} \left[\int \frac{1}{s^2 + 1} ds - 2 \int \frac{1}{(s^2 + 1)^2} ds \right] \\ &= \frac{-2}{R} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{eA1.53})$$

Recuperando los dos cambios de variable efectuados ($t = R \text{Sh } z$, $e^z = s$), que en una única expresión pueden escribirse como $s = (t + \sqrt{t^2 + R^2})/R$, y sustituidos en (eA1. 53), la integral $\mathcal{K}_2\{1\}$ viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2\{1\} &= \frac{-2}{R} \left[\frac{R(t + \sqrt{t^2 + R^2})}{2(t^2 + R^2 + t\sqrt{t^2 + R^2})} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} = \left[\frac{-1}{\sqrt{t^2 + R^2}} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\ \mathcal{K}_2\{1\} &= \frac{1}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}} \end{aligned} \quad (\text{eA1.54})$$

Exceptuado este caso, en donde $f = b = 0$, la descomposición en dos fracciones de (eA1. 51) es única. Este proceso se realiza en dos fases, ya que posteriormente en el cálculo de $\mathcal{K}_2\{0\}$ van a aparecer los mismos términos y va a ser interesante disponer de resultados parciales. Si se multiplica y divide en el numerador por $(1-b)$, se añaden y sustraen varios términos en (eA1. 51) y se opera, resulta

$$\mathcal{K}_2\{1\} = \frac{2}{R(1-b)} \int \frac{(1-b)s^2 - (1-b) \pm \frac{2f}{R}s \pm (1+b)}{\left[(1-b)s^2 - \frac{2f}{R}s + (1+b) \right] \left[(1+b)s^2 + \frac{2f}{R}s + (1-b) \right]} ds$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{1\} &= \frac{2}{R(1-b)} \int \frac{1}{\left[(1+b)s^2 + \frac{2f}{R}s + (1-b) \right]} ds \\
 &+ \frac{4f}{R^2(1-b)} \int \frac{s}{\left[(1-b)s^2 - \frac{2f}{R}s + (1+b) \right] \left[(1+b)s^2 + \frac{2f}{R}s + (1-b) \right]} ds \\
 &- \frac{4}{R(1-b)} \int \frac{1}{\left[(1-b)s^2 - \frac{2f}{R}s + (1+b) \right] \left[(1+b)s^2 + \frac{2f}{R}s + (1-b) \right]} ds
 \end{aligned} \tag{eA1.55}$$

La descomposición en fracciones simples del segundo y tercer sumando conduce al conjunto de integrales racionales siguientes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{1\} &= \frac{2}{R(1-b^2)} \int \frac{1}{\left[s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1-b}{1+b} \right]} ds \\
 &+ \frac{4f}{R^2(1-b)(1-b^2)} \int \frac{s}{\left[s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1-b}{1+b} \right] \left[s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1+b}{1-b} \right]} ds \\
 &- \frac{4}{R(1-b)(1-b^2)} \int \frac{1}{\left[s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1-b}{1+b} \right] \left[s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1+b}{1-b} \right]} ds \\
 &= \frac{2}{R(1-b^2)} \int \frac{1}{\left[s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1-b}{1+b} \right]} ds \\
 &+ \frac{f}{R^2(1-b)(1-b^2)(R^2b^2 + f^2)} \int \frac{-bR^2(1-b^2)s + fR(1+b)^2}{\left[s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1-b}{1+b} \right]} ds \\
 &+ \dots / \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{f}{R^2(1-b)(1-b^2)(R^2b^2+f^2)} \int \frac{bR^2(1-b^2)s - fR(1-b)^2}{\left[s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1+b}{1-b}\right]} ds \\
 & - \frac{1}{R(1-b)(1-b^2)(R^2b^2+f^2)} \int \frac{-fR(1-b^2)s + 2f^2(1+b) - R^2b(1-b^2)}{\left[s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1-b}{1+b}\right]} ds \\
 & - \frac{1}{R(1-b)(1-b^2)(R^2b^2+f^2)} \int \frac{fR(1-b^2)s + 2f^2(1-b) + R^2b(1-b^2)}{\left[s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1+b}{1-b}\right]} ds
 \end{aligned} \tag{eA1.56}$$

y que, a su vez, agrupando todos los términos de igual denominador, el cálculo de $\mathcal{K}_2\{1\}$ puede reducirse a la combinación lineal de dos integrales

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{1\} & = \frac{1}{R^2(1-b^2)(R^2b^2+f^2)} \int \frac{R^2f(1-b^2)s + R(1+b)(R^2b-f^2)}{s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1-b}{1+b}} ds \\
 & + \frac{1}{R^2(1-b^2)(R^2b^2+f^2)} \int \frac{-R^2f(1-b^2)s - R(1-b)(R^2b+f^2)}{s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1+b}{1-b}} ds
 \end{aligned} \tag{eA1.57}$$

Teniendo en cuenta las expresiones cuadráticas de (eA1. 52), el cálculo de las dos primitivas corresponde a la integración de dos funciones racionales con raíces complejas:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{1\} & = \frac{f}{2(R^2b^2+f^2)} \ln \left(\frac{R(1-b^2)s^2 - 2f(1+b)s + R(1+b)^2}{R(1-b^2)s^2 + 2f(1-b)s + R(1-b)^2} \right) \\
 & + \frac{R^2b}{\omega(R^2b^2+f^2)} \left[\arctan \left(\frac{R(1-b)s - f}{\omega} \right) - \arctan \left(\frac{R(1+b)s + f}{\omega} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{eA1.58}$$

Esta expresión es la primitiva de la integral $\mathcal{K}_2\{1\}$ para cualquier valor de los coeficientes a, b, c, d , excepto en el caso de que los parámetros b y f sean nulos, que ya ha sido considerado en (eA1. 54). A continuación, se realizará el mismo desarrollo para la integral $\mathcal{K}_2\{0\}$, y finalmente se aplicará el cambio de variable

inverso para evaluar las dos integrales auxiliares en los límites de integración originales.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{0\} &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\left[(1-b^2)t^2 - 2bft + (R^2 - f^2)\right] \sqrt{t^2 + R^2}} dt \\
 &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\left[(t^2 + R^2) - (f + bt)^2\right] \sqrt{t^2 + R^2}} dt \\
 &= \int_{t=d-1}^{t=d+1} \frac{1}{\left[\sqrt{t^2 + R^2} - (f + bt)\right]\left[\sqrt{t^2 + R^2} + (f + bt)\right]\sqrt{t^2 + R^2}} dt
 \end{aligned} \tag{eA1.59}$$

Al igual que en el desarrollo de la integral (eA1. 49), en lo sucesivo se omitirán los límites de integración, que se considerarán al final del desarrollo junto con $\mathcal{K}_2\{1\}$; efectuando en (eA1. 59) el cambio de variable $t = R \operatorname{Sh} z$, el término $\sqrt{t^2 + R^2}$ se reduce a $R \operatorname{Ch} z$ y se obtiene

$$\mathcal{K}_2\{0\} = \int \frac{1}{[R \operatorname{Ch} z - f - bR \operatorname{Sh} z][R \operatorname{Ch} z + f + bR \operatorname{Sh} z]} dz \tag{eA1.60}$$

El cambio en la variable $e^z = s$ permite transformar la integral en términos de funciones hiperbólicas por la integral de una expresión racional, semejante a la obtenida en el caso de $\mathcal{K}_2\{1\}$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2\{0\} &= \frac{1}{R^2} \int \frac{1}{\left[\frac{s^2+1}{2s} - \frac{f}{R} - b\frac{s^2-1}{2s}\right] \left[\frac{s^2+1}{2s} + \frac{f}{R} + b\frac{s^2-1}{2s}\right]} \frac{ds}{s} \\
 &= \frac{4}{R^2} \int \frac{s}{\left[(1-b)s^2 - \frac{2f}{R}s + (1+b)\right] \left[(1+b)s^2 + \frac{2f}{R}s + (1-b)\right]} ds \\
 &= \frac{4}{R^2(1-b^2)} \int \frac{s}{\left[s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1+b}{1-b}\right] \left[s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1-b}{1+b}\right]} ds
 \end{aligned} \tag{eA1.61}$$

Esta ecuación es muy similar a la obtenida para $\mathcal{K}_2\{1\}$ en (eA1. 51), y no existen diferencias esenciales en cuanto a su integración ya que el denominador es

el mismo y da lugar al mismo tipo de funciones primitivas. También es equivalente la discusión sobre la unicidad de la descomposición en fracciones simples de (eA1. 61) salvo en el caso que las dos expresiones cuadráticas coinciden (cuando los coeficientes f y b sean simultáneamente nulos), es decir,

$$\mathcal{K}_2\{0\} = \frac{4}{R^2} \int \frac{s}{(s^2 + 1)^2} ds = \frac{-2}{R^2} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \quad (\text{eA1.62})$$

Los dos cambios de variable efectuados ($t = R \text{Sh } z$, $e^z = s$), se resumen en una única expresión $s = (t + \sqrt{t^2 + R^2})/R$, de tal forma que al sustituir en (eA1. 62) y evaluar en los límites de integración, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2\{0\} &= - \left[\frac{1}{t^2 + R^2 + t\sqrt{t^2 + R^2}} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} = - \left[\frac{\sqrt{t^2 + R^2} - t}{R^2 \sqrt{t^2 + R^2}} \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\ \mathcal{K}_2\{0\} &= \frac{1}{R^2} \left[\frac{d+1}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}} - \frac{d-1}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{eA1.63})$$

Al separar este caso, la descomposición en fracciones simples de (61) es única y puede obtenerse la función primitiva de $\mathcal{K}_2\{0\}$. Al realizar este proceso en la integral $\mathcal{K}_2\{1\}$, (eA1. 55), ya se sugirió que iban a aparecer posteriormente los mismos términos; si se comparan la tercera integral de (eA1. 55) y la segunda de (eA1. 61) coinciden exactamente, por lo que de forma inmediata puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2\{0\} &= \frac{4}{R^2(1-b^2)} \int \frac{s}{\left[(1-b)s^2 - \frac{2f}{R}s + (1+b) \right] \left[(1+b)s^2 + \frac{2f}{R}s + (1-b) \right]} ds \\ &= \frac{1}{R^2(1-b^2)(R^2b^2 + f^2)} \int \frac{-bR^2(1-b^2)s + fR(1+b)^2}{s^2 - \frac{2f}{R(1-b)}s + \frac{1-b}{1+b}} ds \\ &+ \frac{1}{R^2(1-b^2)(R^2b^2 + f^2)} \int \frac{bR^2(1-b^2)s - fR(1-b)^2}{s^2 + \frac{2f}{R(1+b)}s + \frac{1+b}{1-b}} ds \end{aligned} \quad (\text{eA1.64})$$

y, haciendo uso de las expresiones cuadráticas de (eA1. 52), pueden identificarse las dos primitivas como la integración de dos funciones racionales con raíces

complejas, que vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2\{0\} = & \frac{b}{2(R^2b^2 + f^2)} \ln \left(\frac{R(1-b^2)s^2 + 2f(1-b)s + R(1-b)^2}{R(1-b^2)s^2 - 2f(1+b)s + R(1+b)^2} \right) \\ & + \frac{f}{\omega(R^2b^2 + f^2)} \left[\arctan \left(\frac{R(1-b)s - f}{\omega} \right) - \arctan \left(\frac{R(1+b)s + f}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{eA1.65})$$

Las fórmulas (eA1. 58) y (eA1. 65) son las funciones primitivas de $\mathcal{K}_2\{1\}$ y $\mathcal{K}_2\{0\}$ para el caso más general de valores de los parámetros geométricos. Sin embargo, es preciso deshacer los cambios de variable efectuados en su deducción y evaluar las funciones primitivas en los límites de integración ($t = d - 1$) y ($t = d + 1$). Dado que las dos integrales dan lugar a primitivas con las mismas funciones elementales, este desarrollo se realizará en dichas funciones por separado, y finalmente se resumirá todo el conjunto.

Los dos cambios de variable $t = R \operatorname{Sh} z$ y $s = e^z$ se pueden escribir en una única expresión $s = (t + \sqrt{t^2 + R^2})/R$. Las expresiones finales se obtienen de la sustitución de s en los términos logarítmicos y trigonométricos de (eA1. 58) y (eA1. 65), y de operar convenientemente con los parámetros a, b, c, d . Este proceso se refleja en las fórmulas (eA1. 66), (eA1. 67), (eA1. 68), (eA1. 69) y (eA1. 70) que por su extensión se agrupan en las páginas siguientes.

$$\begin{aligned}
 & \ln \left(\frac{R(1-b^2)s^2 + 2f(1-b)s + R(1-b)^2}{R(1-b^2)s^2 - 2f(1+b)s + R(1+b)^2} \right) \\
 &= \left[\ln \left(\frac{(1-b^2)(t + \sqrt{t^2 + R^2})^2 - 2f(1+b)(t + \sqrt{t^2 + R^2}) + R^2(1+b)^2}{(1-b^2)(t + \sqrt{t^2 + R^2})^2 + 2f(1-b)(t + \sqrt{t^2 + R^2}) + R^2(1-b)^2} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\
 &= \ln \left(\frac{(1-b^2)(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2})^2 - 2f(1+b)(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2}) + R^2(1+b)^2}{(1-b^2)(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2})^2 + 2f(1-b)(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2}) + R^2(1-b)^2} \right) \\
 &\quad - \ln \left(\frac{(1-b^2)(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2})^2 - 2f(1+b)(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2}) + R^2(1+b)^2}{(1-b^2)(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2})^2 + 2f(1-b)(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2}) + R^2(1-b)^2} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{2(1+b)(d+1-b-a)\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + 2(1+b)[(d+1)(d+1-b-a) + R^2]}{2(1-b)(d+1+b+a)\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + 2(1-b)[(d+1)(d+1+b+a) + R^2]} \right) \\
 &\quad - \ln \left(\frac{2(1+b)(d-1-a+b)\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + 2(1+b)[(d-1)(d-1-a+b) + R^2]}{2(1-b)(d-1+a-b)\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + 2(1-b)[(d-1)(d-1+a-b) + R^2]} \right)
 \end{aligned}$$

(eA1.66)

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left(\frac{(d+1-b-a) \left(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right) + R^2}{(d+1+b+a) \left(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right) + R^2} \right) \\
 &- \ln \left(\frac{(d-1-a+b) \left(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right) + R^2}{(d-1+a-b) \left(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right) + R^2} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{(d+1)^2 + (d+1)\sqrt{(d+1)^2 + R^2} - (a+b)(d+1) - (a+b)\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + R^2}{(d+1)^2 + (d+1)\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + (a+b)(d+1) + (a+b)\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + R^2} \right) \\
 &- \ln \left(\frac{(d-1)^2 + (d-1)\sqrt{(d-1)^2 + R^2} - (a-b)(d-1) - (a-b)\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + R^2}{(d-1)^2 + (d-1)\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + (a-b)(d-1) + (a-b)\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + R^2} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2}) \left(\sqrt{(d+1)^2 + R^2} - (a+b) \right)}{(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2}) \left(\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + (a+b) \right)} \right) \\
 &- \ln \left(\frac{(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2}) \left(\sqrt{(d-1)^2 + R^2} - (a-b) \right)}{(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2}) \left(\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + (a-b) \right)} \right)
 \end{aligned}$$

(eA1.67)

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left(\frac{\sqrt{(d+1)^2 + R^2} - (a+b)}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + (a+b)} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{(d-1)^2 + R^2} - (a-b)}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + (a-b)} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{1 - \frac{a+b}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}}}{1 + \frac{a+b}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}}} \right) - \ln \left(\frac{1 - \frac{a-b}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}}}{1 + \frac{a-b}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}}} \right) \\
 &= 2 \left\{ \operatorname{ArgTh} \left(\frac{a+b}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}} \right) - \operatorname{ArgTh} \left(\frac{a-b}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

(eA1.68)

$$\begin{aligned}
 & \arctan\left(\frac{R(1-b)s-f}{\omega}\right) - \arctan\left(\frac{R(1+b)s+f}{\omega}\right) \\
 &= \arctan\left(\frac{\frac{R(1-b)s-f}{\omega} - \frac{R(1+b)s+f}{\omega}}{1 + \left(\frac{R(1-b)s-f}{\omega}\right)\left(\frac{R(1+b)s+f}{\omega}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{-2\omega(Rbs+f)}{\omega^2 + R^2s^2 - (Rbs+f)^2}\right) \\
 &= \left[\arctan\left(\frac{-2\omega(bt + b\sqrt{t^2 + R^2} + f)}{\omega^2 + R^2(t + \sqrt{t^2 + R^2}) - (bt + b\sqrt{t^2 + R^2} + f)^2}\right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\
 &= \left[\arctan\left(\frac{-2\omega(bt + b\sqrt{t^2 + R^2} + f)}{\omega^2 + R^2 + 2t(t + \sqrt{t^2 + R^2}) - f^2 - b^2(2t^2 + R^2 + 2t\sqrt{t^2 + R^2}) - 2bf(t + \sqrt{t^2 + R^2})}\right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\
 &= \left[\arctan\left(\frac{-\omega(bt + b\sqrt{t^2 + R^2} + f)}{\omega^2 + (1-b^2)t(t + \sqrt{t^2 + R^2}) - bf(t + \sqrt{t^2 + R^2})}\right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\
 &= \left[\arctan\left(\frac{-\omega(bt + b\sqrt{t^2 + R^2} + f)}{\omega^2 + ((1-b^2)t - bf)(t + \sqrt{t^2 + R^2})}\right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1}
 \end{aligned}$$

(eA1.69)

$$\begin{aligned}
 & \left[\arctan \left(\frac{-\omega \left(bt + b\sqrt{t^2 + R^2} + f \right)}{\omega^2 + ((1 - b^2)t - bf) \left(t + \sqrt{t^2 + R^2} \right)} \right) \right]_{t=d-1}^{t=d+1} \\
 &= \arctan \left(\frac{\omega \left(b(d-1) + b\sqrt{(d-1)^2 + R^2} + f \right)}{\omega^2 + ((1 - b^2)(d-1) - bf) \left(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right)} \right) \\
 &- \arctan \left(\frac{\omega \left(b(d+1) + b\sqrt{(d+1)^2 + R^2} + f \right)}{\omega^2 + ((1 - b^2)(d+1) - bf) \left(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right)} \right) \\
 &= \arctan \left(\frac{\omega \left(a - b + b\sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right)}{\omega^2 + (d - ab - (1 - b^2)) \left(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right)} \right) \\
 &- \arctan \left(\frac{\omega \left(a + b + b\sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right)}{\omega^2 + (d - ab + (1 - b^2)) \left(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

(eA1.70)

ANEXO 2

RESUMEN DE LA
INTEGRACIÓN ANALÍTICA

A2.1. PARÁMETROS UTILIZADOS

Los parámetros definidos durante las deducciones de las expresiones integrales analíticas presentadas en el anexo A1 se resumen en el siguiente cuadro:

$$\begin{aligned}
 R^2 &= c^2 - d^2 \\
 f &= a - bd \\
 \omega^2 &= (c^2 - a^2)(1 - b^2) - (d - ab)^2 \\
 \nu^2 &= R^2 b^2 + f^2
 \end{aligned}$$

siendo los valores de los coeficientes a, b, c^2, d (apartado 6.3.), los términos

$$\begin{aligned}
 a &= \pm \frac{1}{\lambda} - \mathcal{A} \\
 b &= -\mathcal{B} \\
 c^2 &= \mathcal{C}^2 + a^2 \\
 d &= \mathcal{D} - a\mathcal{B}.
 \end{aligned}$$

Estos parámetros se determinan, a su vez, en función de las magnitudes geométricas que definen la posición de dos electrodos cualesquiera en el espacio (apartado 6.2.) y que vienen dadas por las expresiones (eV.57):

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}^\beta}{\mathcal{L}^\alpha}, \quad \mathcal{A} = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0y}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right), \quad \mathcal{B} = \tilde{s}_y^\beta$$

$$\mathcal{C}^2 = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right)^2 + \tilde{\phi}^2, \quad \mathcal{D} = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \tilde{s}_x^\beta + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^\beta/2} \right) \tilde{s}_z^\beta$$

A2.2. INTEGRALES $\mathcal{I}\{n\}$, $\mathcal{I}_1\{n\}$, $\mathcal{J}\{n\}$, $\mathcal{J}_1\{n\}$

$$\mathcal{I}\{m\} = \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^j \mathcal{I}_1\{m-j\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I/ si } b^2 = 1 \\ \\ \mathcal{I}_1\{n\} = \frac{(d+1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(b(d+1) + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right) \\ \\ - \frac{(d-1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(b(d-1) + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right) \\ \\ - \frac{b}{n+1} \mathcal{K}_3\{n+1\} \\ \\ \text{II/ si } b^2 \neq 1 \\ \\ \mathcal{I}_1\{n\} = \frac{(d+1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(a+b + \sqrt{(d+1)^2 + R^2} \right) \\ \\ - \frac{(d-1)^{n+1}}{n+1} \ln \left(a-b + \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \right) \\ \\ + \frac{bf}{n+1} \mathcal{K}_1\{n+1\} - \frac{1-b^2}{n+1} \mathcal{K}_1\{n+2\} \\ \\ - \frac{bR^2}{n+1} \mathcal{K}_2\{n+1\} + \frac{f}{n+1} \mathcal{K}_2\{n+2\} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{J}\{m\} = \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^j \mathcal{J}_1\{m-j\}$$

$$\mathcal{J}_1\{n\} = \mathcal{K}_3\{n+2\} + R^2 \mathcal{K}_3\{n\}$$

A2.3. INTEGRAL $\mathcal{K}_1\{n\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_1\{n\} = \frac{1}{1-b^2} \left[\frac{(d+1)^{n-1} - (d-1)^{n-1}}{n-1} + 2bf\mathcal{K}_1\{n-1\} \right. \\ \left. - (R^2 - f^2)\mathcal{K}_1\{n-2\} \right] \\ \mathcal{K}_1\{1\} = \frac{1}{2(1-b^2)} \left[\ln \left(\frac{(d+1)^2 - (a+b)^2 + R^2}{(d-1)^2 - (a-b)^2 + R^2} \right) + 2bf\mathcal{K}_1\{0\} \right] \\ \mathcal{K}_1\{0\} = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{2\omega}{c^2 - a^2} \right) \end{array} \right.$$

A2.4. INTEGRAL $\mathcal{K}_2\{n\}$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathcal{K}_2\{n\} = \frac{1}{1-b^2} \left[\mathcal{K}_3\{n-2\} + 2fb\mathcal{K}_2\{n-1\} - (R^2 - f^2)\mathcal{K}_2\{n-2\} \right] \\
 \\
 \text{I/ si } b = f = 0 \\
 \mathcal{K}_2\{1\} = \frac{1}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}} \\
 \mathcal{K}_2\{0\} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{d+1}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}} - \frac{d-1}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}} \right] \\
 \\
 \text{II/ si } b \neq 0 \text{ o } f \neq 0 \\
 \mathcal{K}_2\{1\} = \frac{f}{\nu^2} \left[\text{ArgTh} \left(\frac{a-b}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}} \right) - \text{ArgTh} \left(\frac{a+b}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}} \right) \right] \\
 + \frac{R^2 b}{\omega \nu^2} \left[\arctan \left(\frac{\omega (a-b + b\sqrt{(d-1)^2 + R^2})}{\omega^2 + (d-1-ab+b^2)(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2})} \right) \right. \\
 \left. - \arctan \left(\frac{\omega (a+b + b\sqrt{(d+1)^2 + R^2})}{\omega^2 + (d+1-ab-b^2)(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2})} \right) \right] \\
 \mathcal{K}_2\{0\} = \frac{b}{\nu^2} \left[\text{ArgTh} \left(\frac{a+b}{\sqrt{(d+1)^2 + R^2}} \right) - \text{ArgTh} \left(\frac{a-b}{\sqrt{(d-1)^2 + R^2}} \right) \right] \\
 + \frac{f}{\omega \nu^2} \left[\arctan \left(\frac{\omega (a-b + b\sqrt{(d-1)^2 + R^2})}{\omega^2 + (d-1-ab+b^2)(d-1 + \sqrt{(d-1)^2 + R^2})} \right) \right. \\
 \left. - \arctan \left(\frac{\omega (a+b + b\sqrt{(d+1)^2 + R^2})}{\omega^2 + (d+1-ab-b^2)(d+1 + \sqrt{(d+1)^2 + R^2})} \right) \right]
 \end{array} \right.$$

A2.5. INTEGRAL $\mathcal{K}_3\{n\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_3\{n\} = \frac{(d+1)^{n-1}}{n} \sqrt{(d+1)^2 + R^2} - \frac{(d-1)^{n-1}}{n} \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \\ \quad - \frac{(n-1)R^2}{n} \mathcal{K}_3\{n-2\} \\ \mathcal{K}_3\{1\} = \sqrt{(d+1)^2 + R^2} - \sqrt{(d-1)^2 + R^2} \\ \mathcal{K}_3\{0\} = \text{ArgSh} \left(\frac{d+1}{R} \right) - \text{ArgSh} \left(\frac{d-1}{R} \right) \end{array} \right.$$

CAPÍTULO VI

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO DESARROLLADA

La física no solamente nos ha dado la ocasión de resolver problemas, (...) sino que también nos ha hecho sentir la solución. (H. Poincaré, 1854-1912)

1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha presentado el desarrollo completo de una formulación numérica en elementos de contorno para el cálculo de las mallas de conductores que conforman una instalación de toma de tierra. En este capítulo de “presentación de resultados” nos proponemos validar la formulación propuesta, comparar los resultados con los obtenidos mediante otros métodos tradicionales, e ilustrar su eficacia como herramienta de cálculo en problemas reales de aplicación.

La validación del modelo propuesto se realizará mediante la preparación y posterior resolución de un problema de prueba. Los resultados obtenidos se compararán con los cálculos realizados con otros métodos numéricos, en concreto los métodos de elementos finitos y elementos de contorno. Este problema de prueba se ha diseñado especialmente para que su resolución sea factible mediante este tipo de técnicas, cuya aplicación es inviable en general para cualquier otro problema más complejo.

El estudio comparativo con otros métodos y procedimientos tradicionales recogidos en la bibliografía se efectuará mediante el cálculo de diferentes mallas de electrodos con distintas formas y dimensiones. Los resultados obtenidos haciendo uso de la formulación de elementos de contorno se compararán con los métodos semi-numéricos, fórmulas y técnicas analíticas simplificadas que

se encuentran en la guía para el cálculo de sistemas de puestas a tierra del *IEEE* [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶] y en el reglamento español sobre seguridad en instalaciones eléctricas [MIE-RAT¹⁹⁹³]. Los ejemplos presentados son geoméricamente simples y en general contienen pocos conductores, debido a la imposibilidad de calcular otras mallas más complejas, y en particular sistemas reales de tomas de tierra, con estas técnicas tradicionales.

Finalmente se presentará una serie de aplicaciones del modelo numérico de elementos de contorno al cálculo de mallas de tomas de tierra reales. Los dos primeros casos que se mostrarán corresponden a instalaciones existentes en subestaciones eléctricas actualmente en servicio (Barberá y Balaídos II) y el tercero es un ejemplo preparado a partir de una de las mallas anteriores (Balaídos II), con el fin de poner de manifiesto la potencia de la formulación propuesta y su versatilidad y eficacia como herramienta avanzada para el análisis de los problemas relacionados con la seguridad en las instalaciones eléctricas.

2. VALIDACIÓN DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO

2.1. Planteamiento del problema de prueba

Como se ha explicado en los capítulos anteriores, el fenómeno físico de la disipación de corriente eléctrica en un terreno se puede modelizar matemáticamente en términos de un problema exterior de Dirichlet (ecuaciones eIII.22). En los casos reales de mallas de electrodos, la resolución directa de este problema es inviable mediante técnicas numéricas basadas en la subdivisión del dominio, debido por una parte a que éste es semiinfinito y por otra a su gran complejidad, ya que sería preciso discretizar todo el terreno a excepción de la parte del mismo que ocupa la malla de conductores de tierra. Sin embargo, con el objetivo explícito de validar la formulación de elementos de contorno que se ha desarrollado, es posible preparar un problema de prueba que pueda resolverse directamente mediante métodos numéricos convencionales.

La validación que presentamos consistirá en el cálculo de la densidad de corriente que emana de un electrodo cilíndrico recto sometido a una diferencia de potencial unidad respecto a un punto suficientemente alejado del electrodo, y que se encuentra en un espacio infinito D . Este problema se caracteriza por poseer

de Dirichlet (eIII.22) en coordenadas cilíndricas (r, z) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{en } D \\ V &= 1 \quad \text{en } C \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 \quad \text{en } C_q \\ V &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{eVI.1}$$

Este problema puede resolverse mediante una técnica de elementos finitos bidimensionales, obteniéndose como resultado el valor del potencial en los puntos nodales de la discretización del dominio D . Con el fin de comparar los resultados obtenidos con la formulación numérica de elementos de contorno unidimensional, es necesario calcular la densidad de corriente normal σ que emana del electrodo a partir de los valores del potencial en los puntos nodales próximos a su contorno. Obviamente, si deseamos una elevada precisión en el cálculo de esta densidad de corriente es preciso diseñar una malla de elementos finitos con una gran densidad de elementos regulares en las zonas cercanas al contorno del electrodo. Asimismo, esta malla deberá ser lo bastante extensa como para representar de forma conveniente la condición de contorno en el infinito, imponiendo potencial nulo en puntos nodales suficientemente alejados. Este requisito se ha logrado con la generación de una malla que incorpora elementos triangulares y rectangulares de modo que su tamaño aumenta de forma exponencial con la distancia que los separa del contorno, tal y como se muestra en la figura VI.2.

2.2. Modelo numérico

Una forma variacional equivalente al problema de prueba (eVI.1) se puede plantear del modo siguiente: obtener la función V tal que la ecuación diferencial de (eVI.1) se satisfaga en el sentido de residuos ponderados, es decir que se verifique

$$\int \int_D W \left[r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{\partial r} + r \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dD = 0 \tag{eVI.2}$$

para todas las funciones de test W de una determinada clase definidas en D .

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno de (eVI.1) de tipo Neumann (en C_q), la aplicación de la identidad de Green a (eVI.2) [Colominas et al. ¹⁹⁹²]

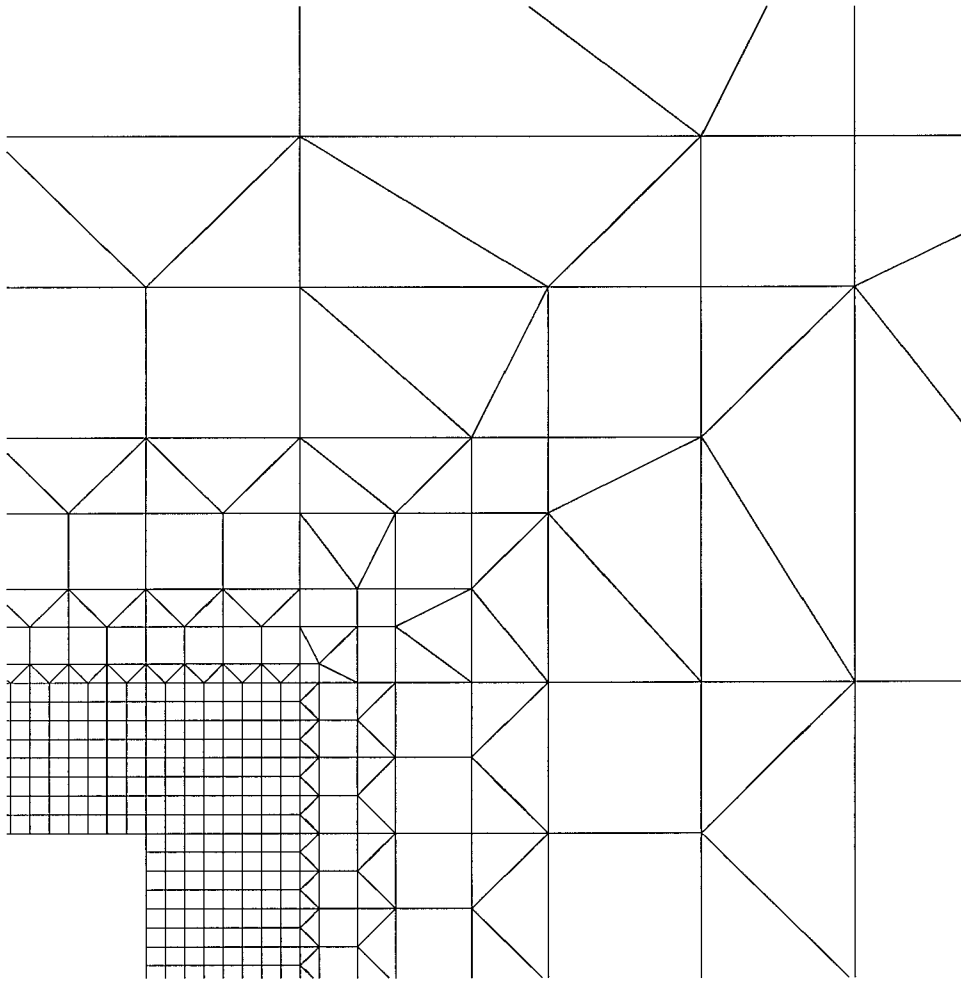


Fig. VI.2 – Problema de Prueba: Malla de elementos finitos. (Detalle de la zona próxima al punto A indicado en la figura VI.1).

permite obtener una forma débil de esta ecuación:

$$\int \int_D r \left(\frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dD = q_V. \quad (\text{eVI.3})$$

donde q_V indica los términos correspondientes a las reacciones en los contornos en que están prescritos los valores del potencial:

$$\begin{aligned} V &= 1 \quad \text{en } C, \\ V &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (\text{eVI.4})$$

El potencial eléctrico V en un punto (r, z) puede discretizarse ahora en la forma

$$V(r, z) = \sum_{j=1}^{j=N} V_j N_j(r, z), \quad (\text{eVI.5})$$

siendo V_j los valores del potencial en los N puntos nodales de la malla y $N_j(r, z)$ las funciones de forma. Haciendo uso de la formulación de Galerkin, la ecuación (eVI.3) y las condiciones de contorno (eVI.4) conducen al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} V_j &= q_i, \quad i = 1, \dots, N \\ V_j &= 1, \quad \forall j \in Q \\ q_i &= 0, \quad \forall i \notin Q \\ K_{ij} &= \int \int_D r \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dD \end{aligned} \quad (\text{eVI.6})$$

donde Q denota el conjunto de los puntos nodales del contorno C del cilindro.

Este sistema de ecuaciones lineales se caracteriza por poseer una matriz de coeficientes simétrica, definida positiva y en banda [Colominas¹⁹⁹²]. El tamaño de los problemas planteados (en algún caso, de hasta 80,000 grados de libertad) hace prohibitivo el empleo de métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones, por lo que se han ensayado diversas técnicas iterativas: Jacobi, Gauss-Seidel (con y sin sobrerrelajación y preconditionadores) y gradientes conjugados. Los mejores resultados se han obtenido con un algoritmo de gradientes conjugados con preconditionamiento diagonal sin ensamblaje de la matriz de coeficientes [Pini & Gambolati¹⁹⁹⁰], que ha resultado ser extremadamente eficiente para la resolución de los problemas con mayor número de grados de libertad planteados. En la figura VI.3 se ha representado gráficamente la evolución del error con el número de iteraciones haciendo uso de este algoritmo. Como medida del error se emplea la norma del máximo del vector de residuos del sistema de ecuaciones en cada iteración.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (eVI.6), podemos obtener la densidad de corriente que emana del electrodo cilíndrico a partir de los valores del potencial en los puntos nodales cercanos al contorno, mediante las expresiones

$$\sigma_r = -\gamma \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad \sigma_z = -\gamma \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=L/2} \quad (\text{eVI.7})$$

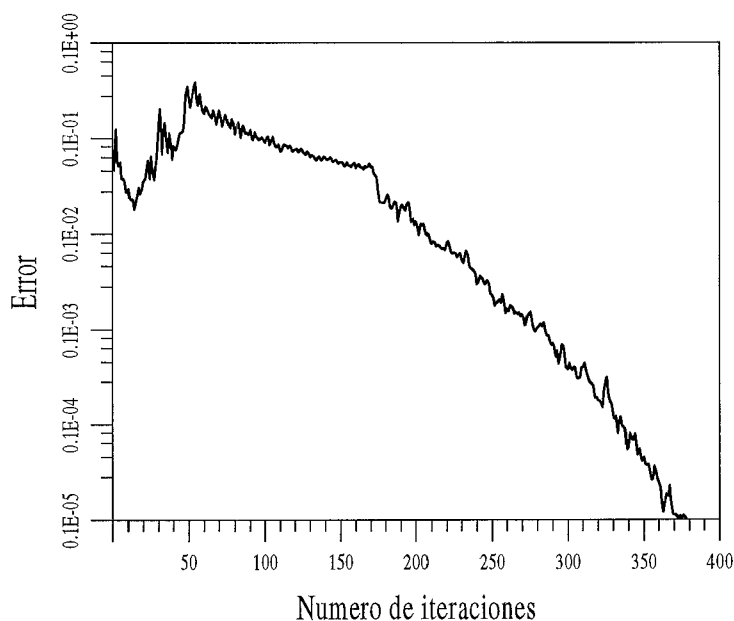


Fig. VI.3 – Problema de Prueba: Evolución del error (en escala logarítmica) con el número de iteraciones durante la resolución del sistema de ecuaciones en el modelo de elementos finitos, empleando un algoritmo de gradientes conjugados con preconditionamiento diagonal.

siendo σ_z la densidad de corriente que emana de los extremos del electrodo cilíndrico, y σ_r la densidad de corriente que emana de la superficie lateral del mismo. También es posible determinar estas densidades de corriente a partir de los términos de flujo correspondientes a las reacciones q_i del sistema de ecuaciones (eVI.6).

Tal y como se ha comentado anteriormente, las mallas de elementos finitos que se han empleado en la resolución de este problema de prueba tienen la mayoría de sus elementos (aproximadamente las tres cuartas partes del total) en los alrededores de la superficie del electrodo. De este modo, concentramos el esfuerzo computacional en conseguir una elevada exactitud y precisión en el cálculo de la densidad de corriente que emana del electrodo, a partir de los valores del potencial en las inmediaciones de su contorno.

2.3. Resultados numéricos

Las características del problema de prueba que se ha preparado son las siguientes:

- Longitud total del electrodo cilíndrico: 2 m
- Radio de la sección transversal: 0.005 m
- Resistividad del terreno: $1 \Omega \cdot \text{m}$

A continuación presentaremos dos estudios comparativos de la resolución de este problema de prueba. En el primero se compararán los resultados obtenidos con la formulación de elementos finitos que se ha expuesto en el apartado anterior (y que en lo sucesivo se denotará como FEM) y la de elementos de contorno unidimensional que se ha desarrollado (BEM1D), con objeto de verificar la solución que se obtiene con esta técnica. En el segundo estudio se presentará una comparación entre la formulación de elementos de contorno unidimensional aproximada BEM1D y una técnica bidimensional de elementos de contorno para problemas con simetría axial (que en las tablas, figuras y comentarios se indicará como BEMSA), con la finalidad de valorar los efectos de las aproximaciones realizadas en el modelo numérico de la formulación BEM1D propuesta en esta tesis doctoral.

En la exposición siguiente se emplearán las siguientes abreviaturas para indicar específicamente la clase de formulación BEM1D empleada en cada caso, así como el tipo de elemento utilizado en la discretización:

- G-D0 : formulación de Galerkin con elementos de contorno de Densidad de corriente Constante,
- G-D1 : formulación de Galerkin con elementos de contorno de Densidad de corriente Lineal,
- G-D2 : formulación de Galerkin con elementos de contorno de Densidad de corriente Parabólica,
- G-V1 : formulación de Galerkin con elementos finitos de Potencial Lineal,
- CP-D1 : formulación de Colocación Puntual con elementos de contorno de Densidad de corriente Lineal.

Además se emplearán las siglas “gdl” para indicar los grados de libertad del modelo numérico en cada ejemplo.

2.3.1. Estudio comparativo con elementos finitos

En la figura VI.4 se presentan los resultados comparativos de la densidad de corriente que emana a lo largo de la longitud del electrodo (σ_r), obtenidos mediante el método de elementos finitos (FEM) y mediante la formulación numérica de elementos de contorno BEM1D.

En los ejemplos que se muestran de la formulación BEM1D, el electrodo cilíndrico del problema de prueba se ha discretizado en 100 elementos de contorno de densidad de corriente constante (lo que en las figuras y tablas se indicará como 100 G-D0), 100 elementos de contorno de densidad de corriente lineal (100 G-D1) y 50 elementos de contorno de densidad de corriente parabólica (50 G-D2), lo que implica la existencia de 100 grados de libertad (100 gdl) en el caso de elementos de densidad constante y 101 en los otros dos casos.

La discretización del dominio del problema de prueba (ver figura VI.1) en los casos resueltos mediante el método de elementos finitos FEM, se ha realizado utilizando elementos bidimensionales de potencial lineal (G-P1). Los tres ejemplos que presentamos corresponden a mallas como la que se muestra en la figura VI.2, con 13410 elementos finitos (lo que implica un total de 12441 grados de libertad), 26914 elementos finitos (24987 gdl) y 84528 elementos finitos (80533 gdl).

En la tabla VI.1 se resumen los valores de la resistencia equivalente calculados con la formulación de elementos de contorno BEM1D y con el modelo de elementos finitos (FEM). Como puede observarse, existe una gran concordancia entre los resultados obtenidos mediante las dos técnicas numéricas; por ejemplo, la resistencia equivalente calculada con 50 elementos de contorno de densidad de corriente parabólica (G-D2) y con 84528 elementos finitos (G-P1) difieren en menos de un 0.7%.

Asimismo, si se comparan entre sí los valores de la resistencia equivalente obtenidos con la formulación BEM1D, no se observan diferencias significativas por el hecho de utilizar elementos de contorno de densidad de corriente de orden mayor (G-D1 y G-D2). Este hecho parece indicar que para obtener primeras aproximaciones de la resistencia equivalente del sistema en la práctica, será suficiente con discretizar la malla de electrodos mediante elementos de contorno de densidad de corriente constante.

En lo que respecta a la distribución de la densidad de corriente que emana del electrodo cilíndrico, ésta es muy suave en la zona central del conductor y

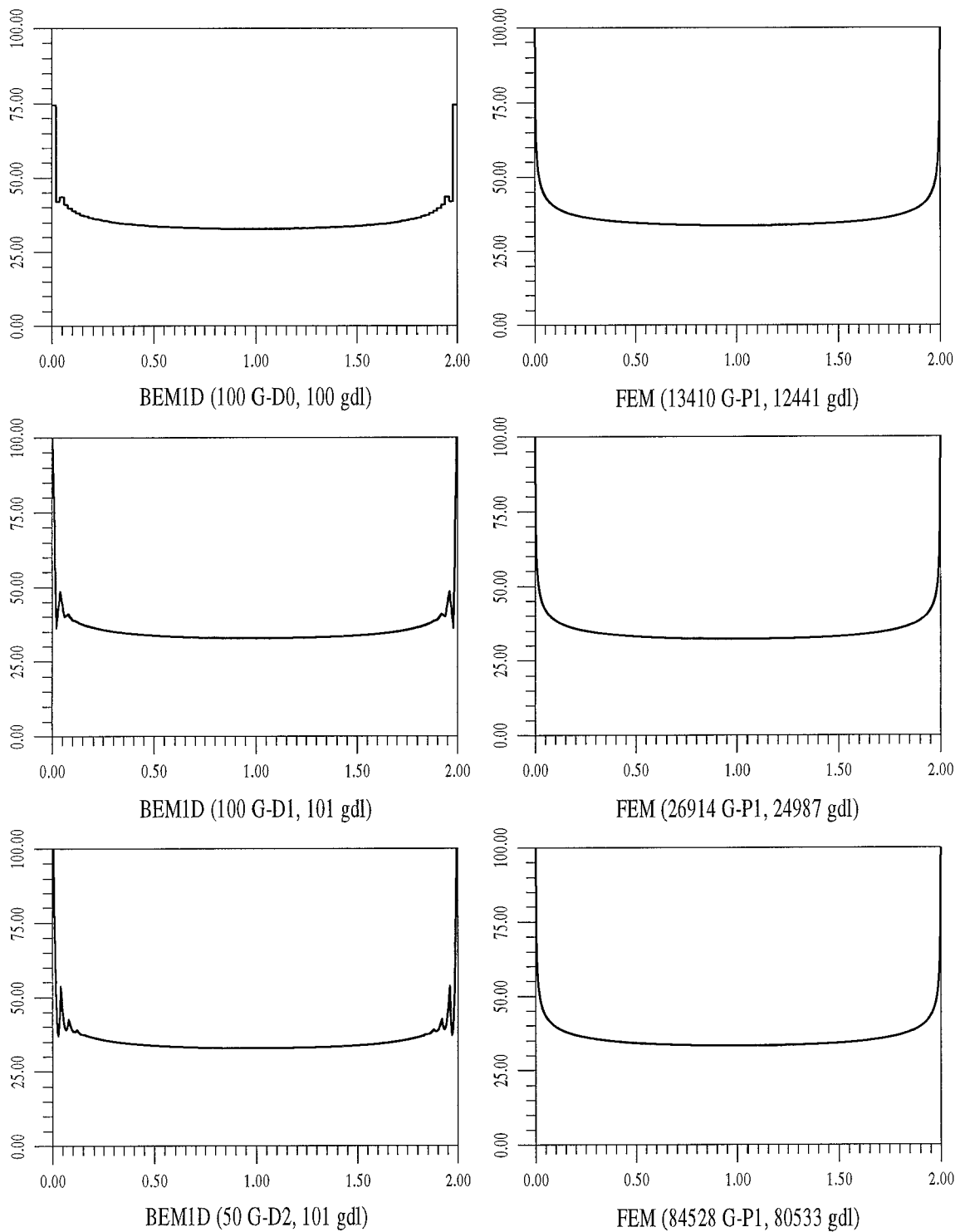


Fig. VI.4 – Problema de Prueba: Densidad de corriente que emana a lo largo de la longitud del electrodo cilíndrico. Resultados obtenidos con la formulación BEM1D y con elementos finitos FEM.

RESISTENCIA EQUIVALENTE		
MÉTODO	DISCRETIZACIÓN	(Ω)
BEM1D	100 G-D0 (100 gdl)	0.4478
BEM1D	100 G-D1 (101 gdl)	0.4473
BEM1D	50 G-D2 (101 gdl)	0.4473
FEM	13410 G-P1 (12441 gdl)	0.4397
FEM	26914 G-P1 (24987 gdl)	0.4549
FEM	84528 G-P1 (80533 gdl)	0.4442

Tabla VI.1 – Problema de Prueba: Valores de la Resistencia Equivalente del sistema obtenidos con la formulación de elementos de contorno BEM1D y con elementos finitos (FEM).

varía fuertemente en los extremos del mismo (ver gráficos FEM de la figura VI.4). Obsérvese que el modelo numérico de elementos de contorno BEM1D proporciona una distribución de la densidad de corriente que, en promedio, se ajusta muy bien a la solución obtenida mediante elementos finitos.

Como puede verse, los resultados obtenidos para este problema de prueba entre el modelo de elementos de contorno BEM1D y el método de elementos finitos FEM no difieren significativamente ni en la densidad de corriente que emana del electrodo ni en su resistencia equivalente. Sin embargo, nótese que los cálculos realizados con BEM1D requieren un número despreciable de grados de libertad (101) en comparación con los que precisa el método de elementos finitos (80533). Cabe insistir en que además la resolución por elementos finitos ha sido posible porque se ha diseñado un problema específico con simetría de revolución, que ha reducido el problema exterior de Dirichlet tridimensional (eIII.22) a otro en dos dimensiones. De hecho, ante la falta de simetría axial en los casos reales de mallas de tierra de instalaciones eléctricas, el cálculo sería inabordable por elementos finitos debido a su elevadísimo coste computacional.

Cabe atribuir las oscilaciones observadas en la densidad de corriente que emana del electrodo cerca de los extremos (ver gráficos BEM1D de la figura VI.4) a dos posibles causas. La primera es el hecho de que en la formulación de elementos de contorno propuesta se desprecia la densidad de corriente que emana de los extremos del conductor cilíndrico, por lo que cabe esperar algún efecto local en esta zona y

no es extraño que la condición de contorno $V = 1$ se ajuste con mayor dificultad. Sin embargo, en los ensayos que hemos realizado utilizando fuentes puntuales con el fin de tener en cuenta de alguna forma la densidad de corriente que emana por los extremos libres de un electrodo cilíndrico, no se consiguió eliminar ni disminuir estas perturbaciones en la distribución de la densidad de corriente cerca de los extremos. Por otra parte, se ha podido calcular la intensidad de corriente que emana de los extremos libres del electrodo mediante la técnica de elementos finitos mencionada anteriormente, resultando ser insignificante en comparación con la intensidad de corriente total que fluye del electrodo.

Estas observaciones nos conducen a pensar que las oscilaciones en la densidad de corriente que emana del electrodo se deben a otra causa, directamente relacionada con las aproximaciones realizadas en la formulación de elementos de contorno BEM1D. Como se ha expuesto en el capítulo anterior, en el tratamiento numérico de la ecuación integral (eV.4) se realizan una serie de aproximaciones en el núcleo —atendiendo a las características geométricas de los sistemas de puesta a tierra en la práctica—, a las que atribuimos estas oscilaciones en los valores de la densidad de corriente, que se acentúan cuando el tamaño de los elementos en la discretización del contorno del electrodo es del mismo orden de magnitud que su diámetro. Con objeto de analizar el efecto de las aproximaciones realizadas en el desarrollo de la formulación numérica, a continuación presentamos un estudio comparativo entre los resultados obtenidos para el problema de prueba mediante la formulación numérica de elementos de contorno propuesta BEM1D y un modelo numérico tradicional de elementos de contorno (BEMSA), en el que no se han realizado simplificaciones en el núcleo integral de la ecuación. Al igual que en el caso de elementos finitos, la resolución del problema de prueba mediante el método de elementos de contorno BEMSA ha sido posible por tratarse de un ejemplo muy sencillo con simetría axial.

2.3.2. Estudio comparativo con una formulación bidimensional de elementos de contorno para problemas axisimétricos

En el capítulo precedente hemos presentado el desarrollo completo de la formulación numérica de elementos de contorno y, en particular, todos los pasos e hipótesis simplificadoras que se han seguido para su deducción. Como hemos visto, las aproximaciones realizadas en el núcleo de la ecuación integral (eV.4) —expresiones eV.29 y eV.33— evitan el cálculo de las integrales elípticas que resultan de la hipótesis de uniformidad circunferencial en la densidad de corriente

que emana de la sección transversal del electrodo (eV.13 y eV.15).

Con objeto de estudiar los efectos de estas aproximaciones en la formulación BEM1D, nos proponemos resolver el problema de prueba (figura VI.1) mediante un programa de cálculo basado en el método de elementos de contorno para problemas con simetría de revolución (BEMSA), en el que no se efectúan aproximaciones en el núcleo de la ecuación y se evalúan explícitamente las integrales elípticas. El coste computacional que supone la formulación BEMSA no es excesivo en este caso, debido a que el problema de prueba es axisimétrico; sin embargo, la aplicación de una formulación bidimensional de elementos de contorno sería prohibitiva en cualquier problema real, dado que implicaría unos requerimientos de computación inasequibles. El programa utilizado, desarrollado en el *Wessex Institute of Technology* (Reino Unido) por [Brebbia & Wrobel¹⁹⁸⁴] permite el análisis de diversos problemas de ingeniería relacionados con la teoría del potencial y está basado en una formulación numérica de elementos de contorno con “colocación puntual”. La formulación unidimensional de elementos de contorno BEM1D propuesta permite utilizar también colocación puntual, a pesar de que —como se verá en los ejemplos que se presentan— se requiere un número considerablemente mayor de discretizaciones del electrodo que mediante la formulación de Galerkin, lo que en definitiva implica un mayor coste computacional.

La figura VI.5 muestra los resultados de la distribución de la densidad de corriente que emana a lo largo de la longitud del electrodo del problema de prueba calculada mediante las dos formulaciones de elementos de contorno: BEM1D y BEMSA. Los gráficos presentados corresponden a tres ejemplos de discretizaciones del conductor cilíndrico en 80, 200 y 300 elementos de contorno con densidades de corriente lineales (CP-D1).

Como puede observarse en la figura VI.5, la densidad de corriente que emana del electrodo en los ejemplos calculados con la formulación de elementos de contorno no simplificada (BEMSA) es la misma que la obtenida mediante elementos finitos (FEM) —ver figura VI.4—. Asimismo, los resultados de la formulación numérica de elementos de contorno aproximada BEM1D, en promedio concuerdan perfectamente con los calculados haciendo uso de la formulación BEMSA. Las oscilaciones producidas son tanto más importantes cuanto mayor es el número de elementos unidimensionales de la discretización, es decir, cuanto menor es el tamaño del elemento. Tal y como se ha explicado en el capítulo anterior, las aproximaciones —(eV.29) y (eV.33)— que se realizan en el núcleo de la ecuación

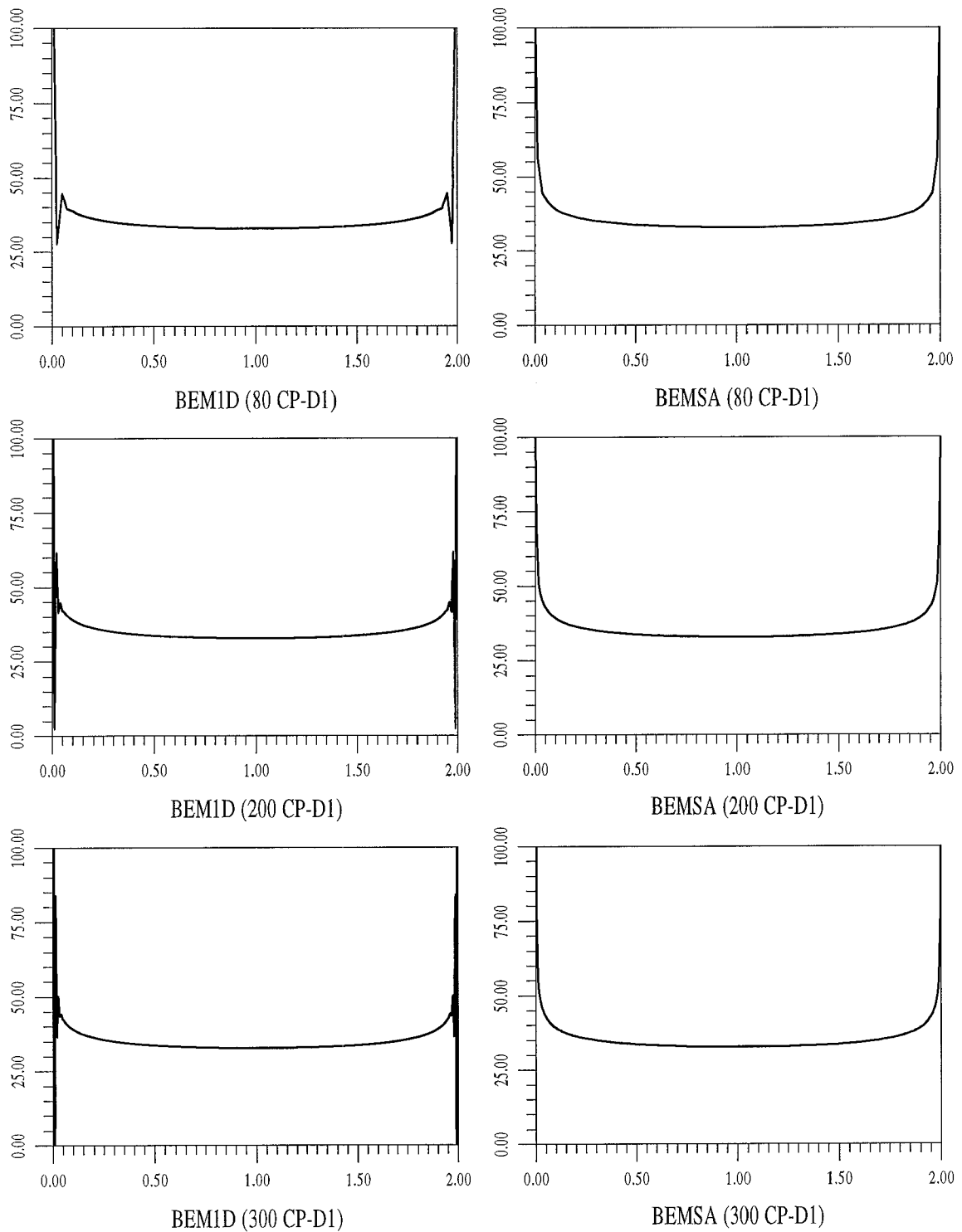


Fig. VI.5 – Problema de Prueba: Densidad de corriente que emana a lo largo de la longitud del electrodo cilíndrico. Resultados de la formulación de elementos de contorno unidimensionales BEM1D y de elementos de contorno bidimensionales BEMSA.

integral son satisfactorias en general, a menos que el tamaño del elemento sea del mismo orden de magnitud (o menor) que el diámetro del conductor cilíndrico.

En todo caso, las magnitudes empleadas para caracterizar los sistemas de toma de tierra asociadas a la densidad de corriente que emana de un electrodo, como por ejemplo la intensidad total y la resistencia equivalente, calculadas mediante la formulación de elementos de contorno BEM1D, no difieren significativamente de los resultados que se obtienen mediante el método de elementos finitos (FEM) o el método de elementos de contorno sin realizar simplificaciones en el núcleo integral (BEMSA). Así mismo, no se observan variaciones significativas de estas magnitudes al aumentar la discretización en la formulación unidimensional de elementos de contorno BEM1D (ver tabla VI.1). Por otra parte, no se han constatado perturbaciones ni oscilaciones en los valores del potencial calculados en puntos del dominio, a pesar de las oscilaciones observadas en la densidad de corriente que emana del electrodo, en el límite. Como hemos visto en los capítulos precedentes, el potencial en un punto se obtiene de la integración de la densidad de corriente que emana del contorno del electrodo σ , mediante las expresiones (eV.18) y (eV.35).

Una vez más, resaltamos que ha sido posible realizar esta comparación entre la formulación BEM1D y otras técnicas más costosas basadas en la subdivisión del dominio (elementos finitos) o del contorno, exclusivamente con un problema preparado con simetría axial y formado por un único electrodo aislado. El cálculo de una malla de conductores de tierra como las que se emplean en la práctica sería inabordable mediante estas técnicas numéricas, por el elevado coste computacional que requerirían. Como veremos a continuación, el modelo numérico de elementos de contorno BEM1D permitirá analizar y caracterizar mallas reales de electrodos de toma de tierra sin ninguna restricción en cuanto a su geometría ni a la disposición espacial de sus conductores, con un coste computacional relativamente bajo.

3. COMPARACIÓN CON OTROS MÉTODOS TRADICIONALES

En este estudio, compararemos los valores de los principales parámetros característicos de una instalación de toma de tierra —la Resistencia Equivalente del Sistema, la Tensión de Paso (T.P.) y la Tensión de Malla (T.M.)— calculados mediante la formulación de elementos de contorno BEM1D y mediante distintos métodos, fórmulas y programas existentes en la bibliografía técnica.

Como hemos explicado en los capítulos anteriores, la resistencia equivalente es el cociente entre la Sobretensión de Tierra (V_G), o *Ground Potential Rise*, y la Intensidad de Corriente Total (I_G) que emana desde la toma de tierra al terreno —ver ecuación (eIII.25)—. A su vez, esta intensidad se calcula integrando la densidad de corriente normal σ que emana del contorno de todos los electrodos Γ_G que conforman la malla —ecuación (eIII.24)—. La Tensión de Paso (T.P.) se determina como la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie del terreno, uno sobre la vertical de la toma de tierra en una esquina de la malla, y el otro separado una distancia de un metro, medida en la diagonal de la esquina dirigida hacia el exterior de la malla. En el caso de mallas irregulares se toma como tensión de paso la mayor de las calculadas en todas las esquinas de la malla. La Tensión de la Malla (T.M.) es la diferencia entre la Sobretensión de Tierra y el valor más pequeño del potencial eléctrico en la superficie del terreno en el que está situado la malla de tierra.

En los ejemplos que se presentarán a continuación, denotaremos con las siglas BEM1D a los resultados obtenidos mediante la formulación unidimensional de elementos de contorno propuesta, en tanto que los resultados de otros autores para los mismos problemas los indicaremos con la referencia bibliográfica de la que se han extraído.

En lo que respecta a los ejemplos calculados mediante BEM1D, todos ellos se han realizado con una formulación de Galerkin de elementos de contorno de densidad de corriente lineal (G-D1), dado que para la resolución de un mismo problema, en general se precisa siempre un número de grados de libertad menor empleando este tipo de elementos, en comparación con los de densidad de corriente constante o parabólica. Así mismo, con el método de Galerkin, a diferencia de las formulaciones de colocación puntual, se obtienen resultados suficientemente precisos sin necesidad de efectuar excesivas subdivisiones adicionales en cada uno de los electrodos.

3.1 Problema 1

El primer ejemplo que presentamos es el cálculo de los parámetros de una malla de electrodos cuadrada (figura VI.6) con las características siguientes:

- Malla cuadrada de $8 \times 8 \text{ m}^2$.
- Número de electrodos: 4
- Sobretensión de Tierra (*Ground Potential Rise, GPR*): 1 V.
- Resistividad del suelo (isótropo y homogéneo): $100 \Omega \cdot \text{m}$.
- Diámetro de los conductores: $14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
- Profundidad de la malla: 0.5 m.

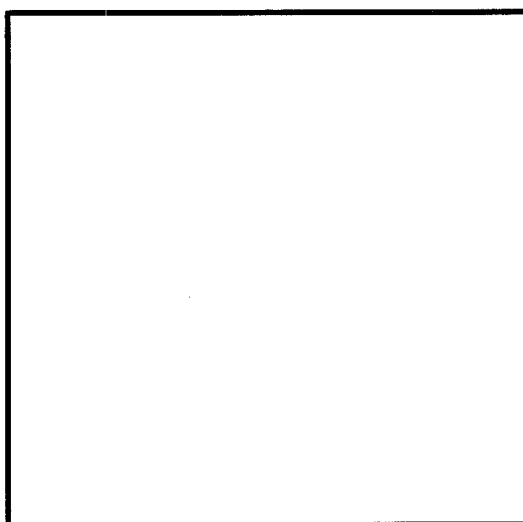


Fig. VI.6 – Problema 1: Malla de cuatro electrodos de $8 \times 8 \text{ m}^2$.

La tabla VI.2.a muestra los valores de la resistencia equivalente de la malla de electrodos calculados mediante la formulación BEM1D, el programa de ordenador RESIS y la fórmula dada por Heppe para el cálculo de la resistencia equivalente de un conjunto de electrodos [Heppe^{1979-b}].

RESIS es un programa de ordenador basado en técnicas de cálculo matricial desarrollado por Thapar B., Gerez V. y otros [Thapar et al.^{1991-b}] en la Universidad de Montana (*USA*), en el que los electrodos que forman la malla se subdividen en pequeños segmentos rectos, de modo que su resistencia equivalente se calcula a partir de la resistencia propia de cada segmento y de las resistencias mutuas entre ellos, que se determinan a partir de fórmulas analíticas fundamentadas en métodos de promediado del potencial.

RESISTENCIA EQUIVALENTE (Ω)		
BEM1D	RESIS	He-79
6.42	6.42	6.42
RESIS: [Thapar et al. ^{1991-b}], He-79: [Heppe ^{1979-b}]		

Tabla VI.2.a – Problema 1: Resistencia Equivalente de la malla de electrodos.

TENSIONES DE MALLA (T.M.) Y TENSIONES DE PASO (T.P.), (V)					
T.M. BEM1D	T.M. RESIS	T.M. SGSA	T.P. BEM1D	T.P. RESIS	T.P. SGSA
0.457	0.455	0.470	0.199	0.198	0.185
RESIS: [Thapar et al. ^{1991-a}], SGSA: [Joy et al. ¹⁹⁸²]					

Tabla VI.2.b – Problema 1: Tensiones de Malla y de Paso del sistema de electrodos.

La tabla VI.2.b muestra los resultados de las tensiones de malla y de paso calculadas mediante la formulación BEM1D, el programa RESIS y el programa SGSA (*Substation Grounding System Analysis*), desarrollado por el *Electric Power Research Institute (EPRI)* en el marco del proyecto de investigación EL-2682 [Joy et al. ¹⁹⁸²].

Como puede observarse, existe una total coincidencia en los resultados de la resistencia equivalente (tabla VI.2.a) obtenidos con las distintas técnicas, así como diferencias inferiores al 7% en las tensiones de paso y malla (tabla VI.2.b).

3.2 Problema 2

En este segundo ejemplo, se presenta el cálculo de una malla de electrodos cuadrada formada por 24 conductores (figura VI.7) y constituida por 9 submallas cuadradas elementales de $8 \times 8 \text{ m}^2$ cada una.

Las características de este problema son:

- Malla cuadrada de $24 \times 24 \text{ m}^2$ con 9 submallas cuadradas elementales en su interior.
- Número total de electrodos: 24
- Sobretensión de Tierra (*Ground Potential Rise, GPR*): 1 V.

- Resistividad del suelo: $100 \Omega \cdot \text{m}$.
- Diámetro de los conductores: $14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
- Profundidad de la malla: 0.5 m .

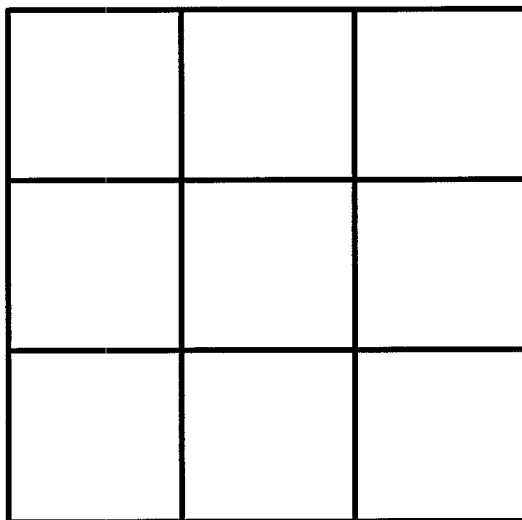


Fig. VI.7 – Problema 2: Malla de electrodos cuadrada de $24 \times 24 \text{ m}^2$ con 9 submallas cuadradas elementales en su interior de $8 \times 8 \text{ m}^2$.

Las tablas VI.3.a y VI.3.b muestran los valores de la resistencia equivalente y de las tensiones de malla y de paso calculados con los mismos métodos y fórmulas que los empleados en el problema 1 (BEM1D, RESIS y la fórmula de Heppe para la resistencia equivalente, y BEM1D, RESIS y SGSA en el caso de las tensiones).

RESISTENCIA EQUIVALENTE (Ω)		
BEM1D	RESIS	He-79
2.05	2.08	2.06
RESIS: [Thapar et al. ^{1991-b}], He-79: [Heppe ^{1979-b}]		

Tabla VI.3.a – Problema 2: Resistencia Equivalente de la malla de electrodos.

Al igual que en el primer ejemplo presentado, podemos observar la gran concordancia existente entre los resultados obtenidos con las distintas técnicas y fórmulas ensayadas (tablas VI.3.a y VI.3.b), aunque las mallas de electrodos que se han podido calcular (figuras VI.6 y VI.7) son sencillas, muy regulares y tienen

TENSIONES DE MALLA (T.M.) Y TENSIONES DE PASO (T.P.), (V)					
T.M. BEM1D	T.M. RESIS	T.M. SGSA	T.P. BEM1D	T.P. RESIS	T.P. SGSA
0.287	0.281	0.287	0.145	0.144	0.141
RESIS: [Thapar et al. ^{1991-a}], SGSA: [Joy et al. ¹⁹⁸²]					

Tabla VI.3.b – Problema 2: Tensiones de Malla y de Paso de la malla de electrodos.

pocos conductores, por lo que no pueden considerarse problemas de aplicación práctica.

A continuación, presentaremos cuatro ejemplos de problemas que implican el cálculo de mallas con un número mayor de conductores. Como veremos no dejan de ser ejemplos que podríamos considerar casi académicos, debido a las limitaciones que tienen las técnicas tradicionales en lo referente a su aplicación a problemas de mayor envergadura. Todos los ejemplos han sido extraídos de diversos artículos y monografías técnicas publicadas recientemente, en las que se exponen los métodos y fórmulas de cálculo con los que compararemos los resultados obtenidos mediante la formulación BEM1D.

3.3 Problema 3

En el presente ejemplo se muestran los resultados del cálculo de seis mallas reticulares cuadradas (como la de la figura VI.7), cada una de ellas constituida por N_m submallas cuadradas elementales.

Las características de los ensayos realizados son las siguientes:

- Número total de ensayos (E) : 6.
- Malla cuadrada de $L_X \times L_Y$ m² constituida por N_m submallas cuadradas elementales.
- Número de electrodos en cada ensayo : N_e
- Sobretensión de Tierra (*Ground Potential Rise, GPR*): 1 V.
- Resistividad del suelo: 100 $\Omega \cdot$ m.
- Diámetro de los conductores: $10 \cdot 10^{-3}$ m.
- Profundidad de la malla: 0.5 m.

En la tabla VI.4.a se resumen los valores de la resistencia equivalente calculados con la formulación de elementos de contorno unidimensional BEM1D, el programa RESIS [Thapar et al. ^{1991-b}] y las fórmulas de Sverak y Schwarz propuestas por la guía [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶], que básicamente son las mismas que se utilizan en la norma española del “Reglamento de Seguridad en Centrales Eléctricas” [MIE-RAT ¹⁹⁹³]. Así mismo, la tabla VI.4.b muestra los resultados de las tensiones de paso y de malla en cada uno de los casos, obtenidos haciendo uso de las técnicas y fórmulas mencionadas.

RESISTENCIA EQUIVALENTE (Ω)						
E	N_m (N_e)	L_X, L_Y (m)	BEM1D	RESIS	Svrk	Schz
1	4 (12)	20., 20.	2.63	2.63	2.96	2.56
2	16 (40)	20., 20.	2.36	2.37	2.62	2.49
3	4 (12)	40., 40.	1.41	1.41	1.51	1.35
4	16 (40)	40., 40.	1.25	1.25	1.34	1.29
5	64 (144)	40., 40.	1.15	1.15	1.23	1.22
6	16 (40)	60., 60.	0.86	0.86	0.90	0.88
RESIS: [Thapar et al. ^{1991-b}], Svrk, Schz: fórmulas de Sverak y Schwarz [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶]						

Tabla VI.4.a – Problema 3: Resistencia Equivalente de seis mallas de electodos cuadradas de las dimensiones y características que se indican.

Como podemos observar de la tabla VI.4.a, existe una gran coincidencia en los valores de la resistencia equivalente entre la formulación BEM1D y el programa RESIS. Los resultados proporcionados por las fórmulas de la guía *IEEE* presentan diferencias que como máximo son del 8%. No obstante, en la tabla VI.4.b podemos observar que se producen mayores discrepancias —sobre todo con las fórmulas de la *IEEE*— en los valores de las tensiones de malla y de paso. Concretamente, las diferencias en las tensiones de malla se sitúan entre el 15–26% por exceso, y en las tensiones de paso entre un 9–29% por defecto, lo cual significa que el valor proporcionado por la guía está del lado de la seguridad en el caso de las tensiones de malla, en tanto que, en todos los casos, las tensiones de paso obtenidas han sido

TENSIONES DE MALLA (T.M.) Y TENSIONES DE PASO (T.P.), (V)						
E	T.M. BEM1D	T.M. RESIS	T.M. IEEE	T.P. BEM1D	T.P. RESIS	T.P. IEEE
1	0.944	0.943	1.098	0.435	0.420	0.356
2	0.565	0.576	0.670	0.367	0.342	0.327
3	0.566	0.564	0.653	0.212	0.206	0.167
4	0.348	0.349	0.411	0.172	0.166	0.143
5	0.219	0.224	0.251	0.148	0.137	0.135
6	0.257	0.255	0.326	0.111	0.107	0.090
RESIS: [Thapar et al. ^{1991-a}], IEEE: [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶]						

Tabla VI.4.b – Problema 3: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas de electrodos.

inferiores y por tanto, las fórmulas empleadas en su determinación no garantizan la seguridad de la instalación.

3.4 Problema 4

Los tres ejemplos que se han expuesto anteriormente han consistido en el cálculo de mallas de electrodos de forma cuadrada, constituidas cada una de ellas por un número variable de conductores. A continuación, se presentan los resultados comparativos obtenidos del cálculo de los parámetros característicos de seis mallas rectangulares, formadas por N_m submallas cuadradas elementales.

Al igual que en el ejemplo anterior, la resistencia equivalente (tabla VI.5.a) y las tensiones de malla y de paso (tabla VI.5.b) se han determinado con la formulación de elementos de contorno BEM1D, el programa RESIS y las fórmulas propuestas por la guía *IEEE*.

Las características de los ensayos realizados son las siguientes:

- Número total de ensayos (E) : 6.
- Malla rectangular de $L_X \times L_Y \text{ m}^2$ constituida por N_m submallas cuadradas elementales.
- Número de electrodos en cada ensayo : N_e
- Sobretensión de Tierra (*Ground Potential Rise, GPR*): 1 V.

- Resistividad del suelo: $100 \Omega \cdot \text{m}$.
- Diámetro de los conductores: $10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
- Profundidad de la malla: 0.5 m .

RESISTENCIA EQUIVALENTE (Ω)						
E	$N_m (N_e)$	$L_X, L_Y \text{ (m)}$	BEM1D	RESIS	Svrk	Schz
1	16 (40)	80., 5.	1.51	1.64	2.53	1.42
2	4 (12)	80.,20.	1.21	1.28	1.47	1.14
3	16 (40)	80.,20.	1.09	1.13	1.33	1.11
4	16 (40)	160.,10.	0.79	0.87	1.29	0.75
5	16 (40)	120.,30.	0.75	0.78	0.89	0.76
6	16 (40)	240.,15.	0.54	0.60	0.87	0.52

RESIS: [Thapar et al. ^{1991-b}],
Svrk, Schz: fórmulas de Sverak y Schwarz [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶]

Tabla VI.5.a – Problema 4: Resistencia Equivalente de seis mallas rectangulares de las dimensiones y características que se indican.

TENSIONES DE MALLA (T.M.) Y TENSIONES DE PASO (T.P.), (V)						
E	T.M. BEM1D	T.M. RESIS	T.M. IEEE	T.P. BEM1D	T.P. RESIS	T.P. IEEE
1	0.444	0.476	0.587	0.215	0.257	0.257
2	0.407	0.543	0.615	0.174	0.189	0.203
3	0.251	0.332	0.471	0.144	0.154	0.199
4	0.202	0.290	0.363	0.093	0.125	0.278
5	0.188	0.245	0.297	0.092	0.100	0.126
6	0.134	0.214	0.270	0.058	0.082	0.175

RESIS: [Thapar et al. ^{1991-a}], IEEE: [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶]

Tabla VI.5.b – Problema 4: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas rectangulares de electrodos.

En estos ejemplos podemos observar (tabla VI.5.a) que relativamente existe una buena concordancia entre los valores de la resistencia equivalente obtenidos con la formulación BEM1D y el programa RESIS, aunque se observan diferencias algo mayores en el caso de los valores proporcionados por las expresiones de la guía *IEEE*. Sin embargo, como vemos en la tabla VI.5.b se obtienen valores muy dispares de las tensiones de paso y de malla con las fórmulas de la *IEEE*; las diferencias (siempre por exceso) se sitúan entre el 16–201% y el 51–101%, respectivamente, lo que significa una caracterización de las tensiones de paso y de malla muy del lado de la seguridad.

3.5 Problema 5

En este ejemplo presentamos los resultados del cálculo de seis mallas de electrodos distintas con forma de L (como muestra la figura VI.8), constituidas por N_m submallas cuadradas elementales. Las dimensiones de cada una de las mallas (B_S , L_I , B_I , L_D) se indican sobre esta figura y en la tabla VI.6.a.

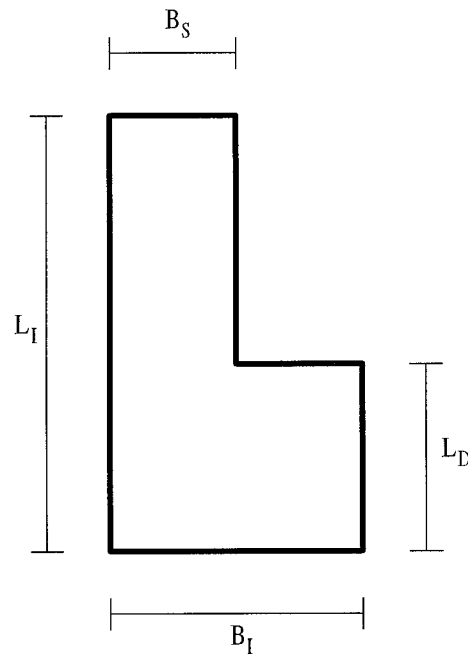


Fig. VI.8 – Problema 5: Geometría de la malla de electrodos.

Las características de los ensayos que se han realizado son:

- Número total de ensayos (E) : 6.
- Malla en forma de \bar{L} cuyas dimensiones vienen dadas por los parámetros B_S, L_I, B_I, L_D , (figura VI.8) formada por N_m submallas elementales cuadradas.
- Número de electrodos en cada ensayo : N_e
- Sobretensión de Tierra (*Ground Potential Rise, GPR*): 1 V.
- Resistividad del suelo: $100 \Omega \cdot m$.
- Diámetro de los conductores: $10 \cdot 10^{-3} m$.
- Profundidad de la malla: 0.5 m.

Las tablas VI.6.a y VI.6.b resumen los valores de la resistencia equivalente y las tensiones de malla y de paso obtenidas al aplicar las formulaciones BEM1D, el programa RESIS y las fórmulas propuestas por la *IEEE* para el cálculo de cada una de las seis mallas de electrodos indicadas.

RESISTENCIA EQUIVALENTE (Ω)						
E	$N_m (N_e)$	B_S, L_I, B_I, L_D (m)	BEM1D	RESIS	Svrk	Schz
1	32 (82)	10., 70., 20., 10.	1.36	1.36	1.77	1.55
2	48 (76)	20., 40., 40., 20.	1.29	1.29	1.43	1.42
3	20 (56)	20., 60.,100., 10.	0.88	0.88	1.16	1.11
4	32 (82)	20.,140., 40., 20.	0.71	0.71	0.90	0.80
5	1 (6)	80.,140.,200., 20.	0.49	0.48	0.53	0.50
6	34 (85)	80.,140.,200., 20.	0.38	0.38	0.44	0.44

RESIS: [Thapar et al. ^{1991-b}],
Svrk, Schz: fórmulas de Sverak y Schwarz [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶]

Tabla VI.6.a – Problema 5: Resistencia Equivalente de seis mallas en forma de \bar{L} (figura VI.8) de las dimensiones y características que se indican.

Como observamos en la tabla VI.6.a, existe de nuevo una gran coincidencia en los valores de la resistencia equivalente entre la formulación BEM1D y el programa RESIS, mientras que las fórmulas de la guía *IEEE* presentan diferencias que llegan hasta el 22%. Al igual que en los ejemplos anteriormente presentados, las tensiones

TENSIONES DE MALLA (T.M.) Y TENSIONES DE PASO (T.P.), (V)						
E	T.M. BEM1D	T.M. RESIS	T.M. IEEE	T.P. BEM1D	T.P. RESIS	T.P. IEEE
1	0.318	0.320	0.432	0.201	0.187	0.347
2	0.262	0.266	0.282	0.174	0.162	0.173
3	0.287	0.286	0.396	0.126	0.114	0.173
4	0.193	0.194	0.269	0.094	0.090	0.150
5	0.273	0.271	0.306	0.066	0.066	0.056
6	0.133	0.133	0.164	0.048	0.041	0.052

RESIS: [Thapar et al.^{1991-a}], IEEE: [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶]

Tabla VI.6.b – Problema 5: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas de electrodos.

de malla calculadas con las fórmulas del *IEEE* (tabla VI.6.b) discrepan mucho de las obtenidas con la formulación BEM1D (entre el 7–40%), así como también las tensiones de paso (se observan diferencias entre el 1–73%, por exceso).

3.6 Problema 6

El último de estos ejemplos comparativos que presentamos es el cálculo de la resistencia equivalente y las tensiones de malla y paso de seis mallas de electrodos distintas con forma de \mathbb{T} (figura VI.9), constituidas por N_m submallas elementales cuadradas. Las dimensiones de las mallas se indican sobre esta figura y en la tabla VI.7.a.

Las características de los ensayos realizados son:

- Número total de ensayos (E) : 6.
- Malla en forma de \mathbb{T} , cuyas dimensiones vienen dadas por los parámetros B_S, L_S, L_I, B_I (figura VI.9), constituida por N_m submallas cuadradas elementales.
- Número de electrodos en cada ensayo : N_e
- Sobretensión de Tierra (*Ground Potential Rise, GPR*): 1 V.

- Resistividad del suelo: $100 \Omega \cdot \text{m}$.
- Diámetro de los conductores: $10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
- Profundidad de la malla: 0.5 m .

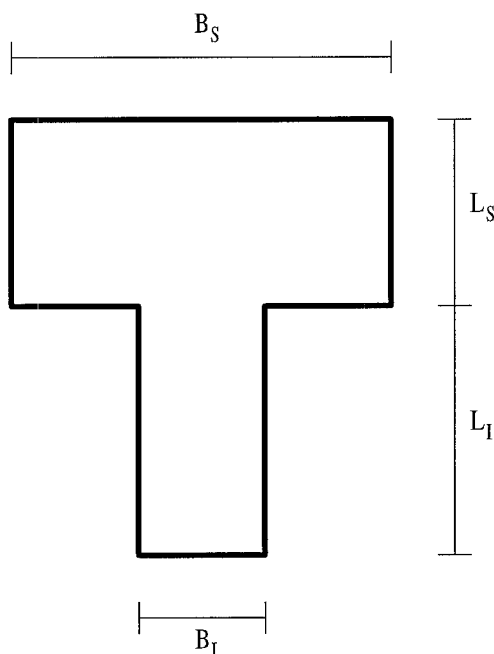


Fig. VI.9 – Problema 6: Geometría de la malla de electrodos.

Al igual que en los ejemplos anteriores, los parámetros característicos de cada malla de electrodos —resistencia equivalente (tabla VI.7.a) y tensiones de malla y paso (tabla VI.7.b)— se han calculado mediante la formulación de elementos de contorno unidimensional desarrollada BEM1D, el programa RESIS de la Universidad de Montana y las fórmulas propuestas en la guía de la *IEEE*.

En la tabla VI.7.a podemos observar la concordancia de los valores de la resistencia equivalente obtenidos con la formulación BEM1D y el programa RESIS. Las fórmulas de la guía *IEEE* presentan diferencias que, en este caso, llegan hasta el 25%. Las tensiones de malla calculadas con las fórmulas *IEEE* difieren por exceso de las obtenidas con la formulación BEM1D entre un 27–59% y las tensiones de paso entre un 5–66% (tabla VI.7.b). De nuevo, los resultados proporcionados por la guía *IEEE* en estos ejemplos se sitúan muy del lado de la seguridad.

RESISTENCIA EQUIVALENTE (Ω)						
E	N_m (N_e)	B_S, L_S, L_I, B_I (m)	BEM1D	RESIS	Svrk	Schz
1	10 (31)	45., 5., 5., 5.	2.40	2.41	3.30	2.58
2	10 (31)	50., 10., 50., 10.	1.31	1.31	1.69	1.59
3	1 (8)	100., 20., 60., 20.	0.89	0.90	1.05	0.97
4	8 (25)	100., 20., 60., 20.	0.82	0.82	0.98	0.93
5	8 (25)	500.,100.,300.,100.	0.19	0.18	0.24	0.25
6	40 (102)	100., 20.,100., 20.	0.63	0.63	0.79	0.79

RESIS: [Thapar et al. ^{1991-b}],
Svrk, Schz: fórmulas de Sverak y Schwarz [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶]

Tabla VI.7.a – Problema 6: Resistencia Equivalente de seis mallas en forma de T (figura VI.9) de las dimensiones y características que se indican.

TENSIONES DE MALLA (T.M.) Y TENSIONES DE PASO (T.P.), (V)						
E	T.M. BEM1D	T.M. RESIS	T.M. IEEE	T.P. BEM1D	T.P. RESIS	T.P. IEEE
1	0.717	0.723	0.923	0.405	0.391	0.674
2	0.450	0.447	0.606	0.196	0.193	0.249
3	0.386	0.385	0.492	0.126	0.127	0.129
4	0.313	0.311	0.412	0.112	0.111	0.118
5	0.085	0.091	0.115	0.021	0.020	0.022
6	0.164	0.197	0.262	0.080	0.077	0.107

RESIS: [Thapar et al. ^{1991-a}], IEEE: [ANSI/IEEE Std.80 ¹⁹⁸⁶]

Tabla VI.7.b – Problema 6: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas de electodos.

3.7 Recapitulación sobre los ensayos realizados

En los apartados anteriores se han presentado seis ejemplos comparativos del cálculo de distintas mallas de electrodos mediante la formulación numérica de elementos de contorno BEM1D y diversos métodos y fórmulas tradicionales que se recogen en la bibliografía y en la guía *IEEE*. Las técnicas referenciadas en los problemas presentados —fórmula de Heppe ([Heppe^{1979-b}]), programas RESIS ([Thapar et al.^{1991-a}], [Thapar et al.^{1991-b}]) y SGSA ([Joy et al.¹⁹⁸²]) y las fórmulas de Sverak y Schwarz ([ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶)]— son, a nuestro juicio, las más importantes y más utilizadas en el análisis de mallas de conductores de tierra. Además de estos métodos, merecen destacarse los estudios de [Kouteynikoff¹⁹⁸⁰], [Guven & Sebo¹⁹⁸⁶], [Joy & Wilson¹⁹⁸⁶], [Villas et al.¹⁹⁸⁷], [Meliopoulos et al.¹⁹⁸⁸], [Yamashita et al.¹⁹⁸⁸], [Machias et al.¹⁹⁸⁹], [Kurtovic & Vujevic¹⁹⁹¹] y [Joy et al.¹⁹⁹³].

Todos los ejemplos mostrados han sido extraídos de diversos artículos de revistas del *IEEE*, y corresponden a los casos de mallas de electrodos más complicados que se han encontrado en la bibliografía técnica consultada. Asimismo, con el fin de evidenciar las diferencias entre los distintos métodos de cálculo, en los problemas 3, 4, 5 y 6 se han presentado los resultados obtenidos variando las dimensiones geométricas de las mallas y el número de electrodos de cada una de ellas.

En general, los métodos tradicionales de cálculo de electrodos de tierra únicamente permiten el análisis de mallas de conductores con geometrías sencillas (cuadradas o rectangulares) o que estén formadas por submallas cuadradas elementales. Como se puede observar de los ejemplos anteriores, en todos los casos se han tratado mallas geométricamente muy regulares dispuestas siempre en un plano paralelo a la superficie del terreno.

El análisis de los valores de la resistencia equivalente obtenidos para las distintas mallas calculadas es satisfactorio: tal y como puede verse en las tablas VI.2.a, VI.3.a, VI.4.a, VI.5.a, VI.6.a y VI.7.a, no existen prácticamente diferencias significativas entre los resultados de la formulación BEM1D y los programas basados en técnicas de cálculo matricial (RESIS). Los valores de la resistencia equivalente obtenidos con las fórmulas propuestas por la guía *IEEE*, en general, difieren por exceso de los anteriores, lo cual significa que se obtienen diseños de mallas de electrodos que se encuentran ligeramente sobredimensionadas del lado de la seguridad mediante la aplicación de estas fórmulas.

En cuanto a las tensiones de malla y de paso, las conclusiones que podemos obtener son parecidas a las anteriores. Por una parte existe una buena concordancia entre los valores que proporcionan la formulación de elementos de contorno unidimensional BEM1D y los programas RESIS y SGSA, como podemos ver en las tablas VI.2.b, VI.3.b, VI.4.b, VI.5.b, VI.6.b y VI.7.b. Sin embargo, los resultados que se obtienen con las fórmulas de la guía *IEEE* son en todos los casos bastantes dispares (se han observado diferencias superiores al 200%), e incluso en uno de los ejemplos se han obtenido valores por defecto, lo que significa una caracterización de la malla de electrodos de lado de la inseguridad.

Como hemos podido comprobar en esta presentación, las expresiones empíricas y fórmulas analíticas simplificadas de los métodos tradicionales existentes permiten caracterizar mallas de electrodos de geometrías sencillas. Desde un punto de vista práctico, con estas técnicas es posible estimar el orden de magnitud de los distintos parámetros característicos de una malla de conductores de tierra en fases preliminares del diseño de una instalación.

Sin embargo, como ya se ha insistido anteriormente las mallas de toma de tierra en instalaciones eléctricas reales están formadas por complicados entramados de conductores —de diferentes longitudes y diámetros— que se disponen en cualquier orientación espacial y a distintas profundidades (por ejemplo, es muy frecuente el empleo de picas hincadas verticalmente en el terreno). Con las técnicas tradicionales existentes no es posible analizar de una forma rigurosa y fiable ni calcular de un modo eficaz, un sistema de tales características. A continuación presentaremos varios ejemplos de tomas de tierra reales y demostraremos la viabilidad y eficacia de la formulación unidimensional de elementos de contorno que hemos desarrollado.

4. APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN A CASOS REALES

4.1. Subestación E.R. Barberá

El primero de los ejemplos de aplicación de la formulación BEM1D al cálculo de sistemas reales de tomas de tierra que presentamos en esta tesis lo constituye la malla de electrodos de la subestación eléctrica E.R. Barberá, situada en una población cercana a la ciudad de Barcelona.

El sistema de tomas de tierra de esta subestación está formada por 408 electrodos cilíndricos rectos de diámetro constante (12.85 mm), constituyendo una malla paralela a la superficie del terreno, enterrada a una profundidad de 80 cm. No existen electrodos hincados verticalmente en el suelo. El conjunto del sistema tiene una forma prácticamente triangular con una longitud de 140 m y una anchura de 90 m, cubriendo una superficie de más de 6500 m². La disposición de los conductores de esta malla de puesta a tierra se presenta a escala en la figura VI.10. Como puede observarse casi todos los electrodos tienen diferentes longitudes y la malla que forman no es completamente ortogonal, dado que existen barras que entre sí se encuentran en disposición oblicua.

La resistividad escalar aparente del terreno en el que se asienta la subestación se estima, en función de su composición principal, en 60 $\Omega \cdot \text{m}$; por otra parte, su superficie puede considerarse horizontal, debido a la regularización que se realiza previamente a la instalación del sistema de tomas de tierra durante el proceso de construcción de la subestación.

Teniendo en cuenta las intensidades y tensiones de operación normales en una subestación eléctrica de tamaño medio como la que presentamos, consideraremos que la derivación de corriente eléctrica a la toma de tierra produce una Sobretensión de Tierra de 10 kV en condiciones de fallo [Wildi¹⁹⁸³].

Al igual que en los ejemplos mostrados en el apartado anterior, el modelo numérico elegido para la resolución de este problema ha consistido en una formulación de Galerkin de elementos de contorno de densidad de corriente lineal. El número total de elementos de contorno es 408 y el de nodos (que coincide con el número de grados de libertad del modelo) es 238.

La figura VI.11 muestra la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno en el que se encuentra el sistema de tomas de tierra y en las zonas cercanas al mismo. El área total sometida a estudio es la de un rectángulo de 117 m por 186 m, lo que supone una superficie de más de 21000 m². (En este gráfico se han dibujado regruesadas las líneas de isopotencial cada 1 kV y los niveles intermedios correspondientes a intervalos de 0.2 kV). La “tensión de malla” (T.M.) de este sistema es 1.8 kV en un punto situado en las proximidades de la zona inferior derecha de la malla. La máxima “tensión de paso” (T.P.) que se produce en este sistema de tierras es 1.0 kV y tiene lugar a 1 m de distancia del punto situado en el extremo superior de la malla. Esta tensión de paso es muy elevada y sumamente peligrosa para cualquier persona que se encuentre transitando por esa

zona de la instalación. Como se puede observar en el mapa de líneas de isopotencial de la figura VI.11, los mayores gradientes se originan en las zonas perimetrales de la subestación, en tanto que se produce una importante homogeneización de los niveles de potencial (por tanto las tensiones de paso son considerablemente inferiores) en las zonas centrales de la malla en las que existe un número elevado de electrodos conductores, como podemos ver en la figura VI.10. En la práctica, las zonas perimetrales con elevados gradientes de potencial (como son las proximidades de las vallas y los linderos de la subestación eléctrica) se aíslan especialmente, de forma que se restringe su acceso directo y se impide el tránsito de personas o seres vivos por sus inmediaciones.

Además de los niveles de potencial en la superficie del terreno, se ha obtenido la resistencia equivalente del sistema de tierras (0.315Ω) y la intensidad total de corriente que emana del conjunto de la malla de electrodos (31.8 kA). Desde el punto de vista de la resistencia equivalente, esta malla de toma de tierra se considera de calidad “excelente”, dado que su resistencia es inferior a 1Ω [Ramírez Vázquez¹⁹⁷⁷].

Este mismo problema se ha calculado aumentando el número de elementos de contorno del modelo numérico, mediante la subdivisión de cada uno de los electrodos de la malla. Al nivel del conjunto de la toma de tierra no se han apreciado diferencias ni en la distribución de los potenciales en la superficie del terreno, ni en los valores de la resistencia equivalente e intensidad total de la malla, por lo que en general, no se considerará necesaria la subdivisión adicional de los conductores que forman la malla de toma de tierra.

Los cálculos de la toma de tierra de la subestación E.R. Barberá se han realizado en un VAX-4300 con 64 Mb de memoria central requiriendo un tiempo de computación de 205 segundos. Con las características actuales de un ordenador personal (por ejemplo, un PC-486 de 66 MHz con 16 Mb de memoria), este cálculo se puede efectuar en menos de siete minutos [Casteleiro et al.¹⁹⁹⁴].

Como puede verse, la formulación unidimensional de elementos de contorno propuesta permite caracterizar completamente, y de un modo riguroso y fiable, una toma de tierra de una instalación eléctrica con unos requerimientos de computación muy aceptables. La incorporación de esta formulación en un sistema de diseño asistido por ordenador permite con toda facilidad la realización de cálculos más detallados en zonas concretas de la malla de electrodos y facilita el diseño de una toma de tierra real de un modo prácticamente interactivo.

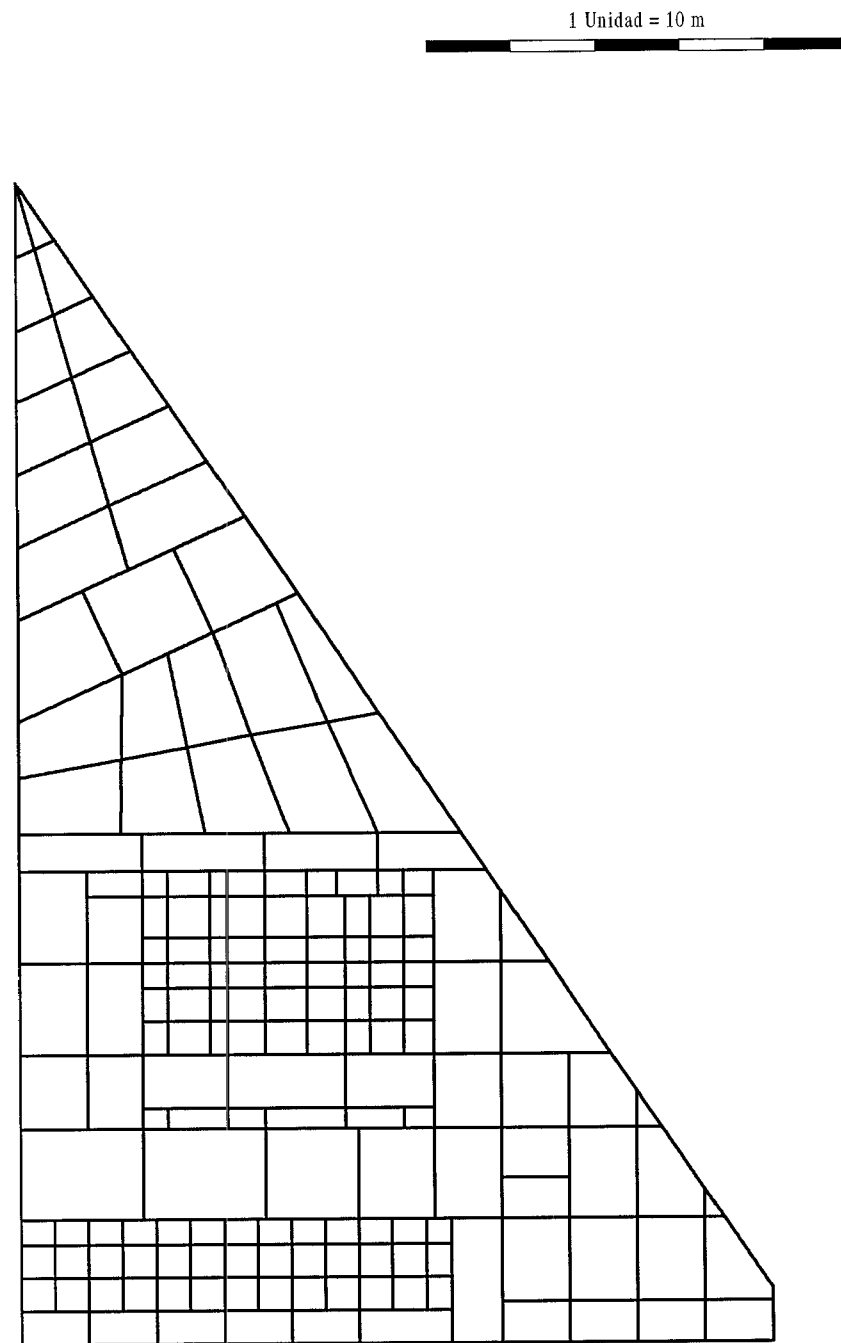


Fig. VI.10 – E.R. Barberá: Malla de electrodos que constituyen el sistema de tomas de tierra de la subestación.

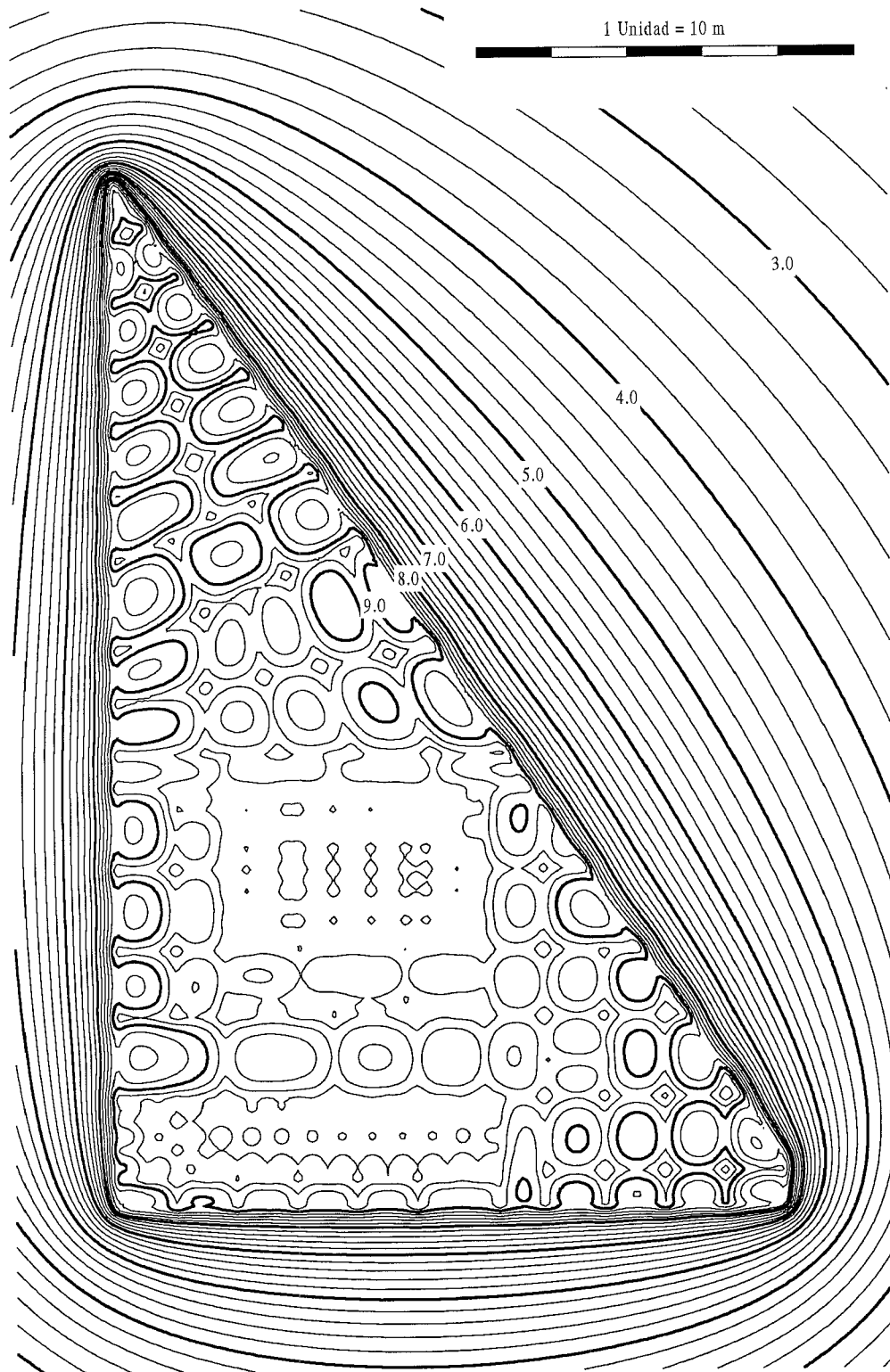


Fig. VI.11 - E.R. Barberá: Distribución de los niveles de potencial (en kV) sobre la superficie del terreno. (Se han dibujado las líneas con incrementos de 0.2 kV y, en negra, cada 1 kV).

4.2. Subestación E. Balaídos II

El segundo ejemplo de aplicación de la formulación BEM1D que presentamos es el cálculo del sistema de tomas de tierra de la subestación E. Balaídos II, emplazada en la ciudad de Vigo (Pontevedra).

Este sistema de puesta a tierra está formado por un total de 174 electrodos cilíndricos rectos. De éstos, 107 conductores con un diámetro de 11.28 mm constituyen una malla paralela a la superficie del terreno, enterrada a una profundidad de 80 cm. Los restantes 67 electrodos tienen un diámetro de 14.0 mm y están hincados en el terreno perpendicularmente a la malla horizontal. Estas picas tienen todas la misma longitud (2.5 m) y se encuentran entre la cota -0.8 m y -3.3 m respecto de la superficie del terreno, considerado perfectamente horizontal.

El conjunto del sistema de tierras tiene una forma rectangular con una longitud de 60 m y una anchura de 80 m, cubriendo una superficie de 4800 m², tal como se muestra a escala en la figura VI.12. Como podemos observar, la malla de tierra que forman los electrodos es ortogonal (en esta figura, las picas se indican mediante puntos negros). En la figura VI.13 se presenta una vista tridimensional del conjunto de conductores de la toma de tierra, en la que pueden verse claramente la disposición de las barras verticales.

Al igual que en el caso de la subestación E.R. Barberá analizada anteriormente, consideraremos que la Sobretensión de Tierra producida durante una derivación de corriente a la toma de tierra es 10 kV. Así mismo, estimamos el valor de la resistividad escalar aparente del terreno en $60 \Omega \cdot \text{m}$.

Este sistema de toma de tierra se ha resuelto mediante la formulación BEM1D, con un modelo numérico basado en el método de Galerkin con elementos de contorno de densidad de corriente parabólica. El número total de elementos es 174, el de nodos es 141 y el número total de grados de libertad del modelo es 315 (uno por nodo más uno por elemento dado que se emplean elementos de densidad de corriente parabólica).

La figura VI.14 muestra la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno en el que se encuentra la toma de tierra y sus inmediaciones (la zona total estudiada es un rectángulo de 121 m por 108 m, lo que supone una superficie de algo más de 13000 m²).

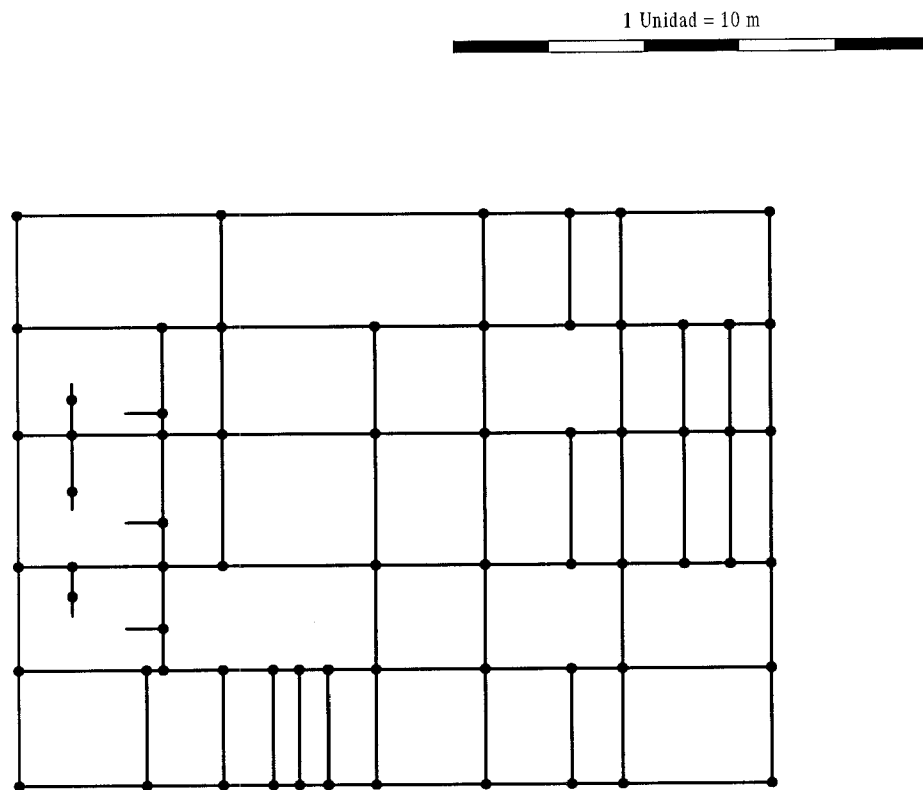


Fig. VI.12 – E. Balaídos II: Vista en planta de la malla de electrodos del sistema de tomas de tierra. (Se indica con puntos negros la situación de las barras verticales).

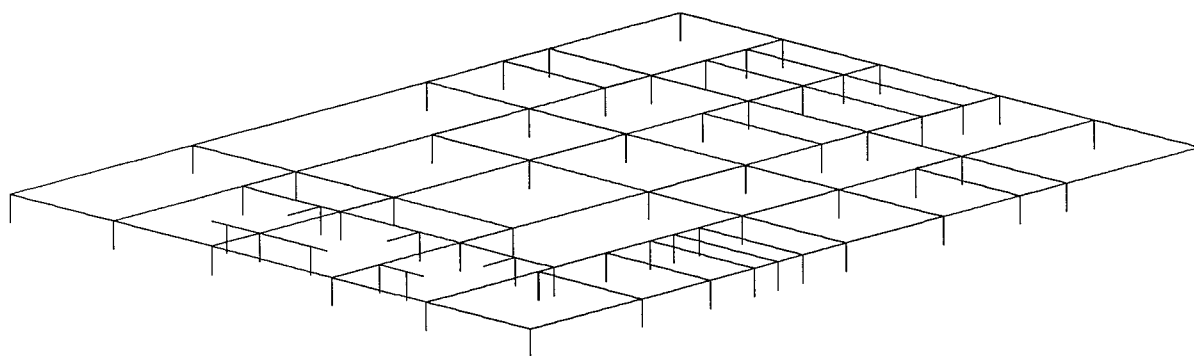


Fig. VI.13 – E. Balaídos II: Vista tridimensional de la malla de electrodos del sistema de tomas de tierra.

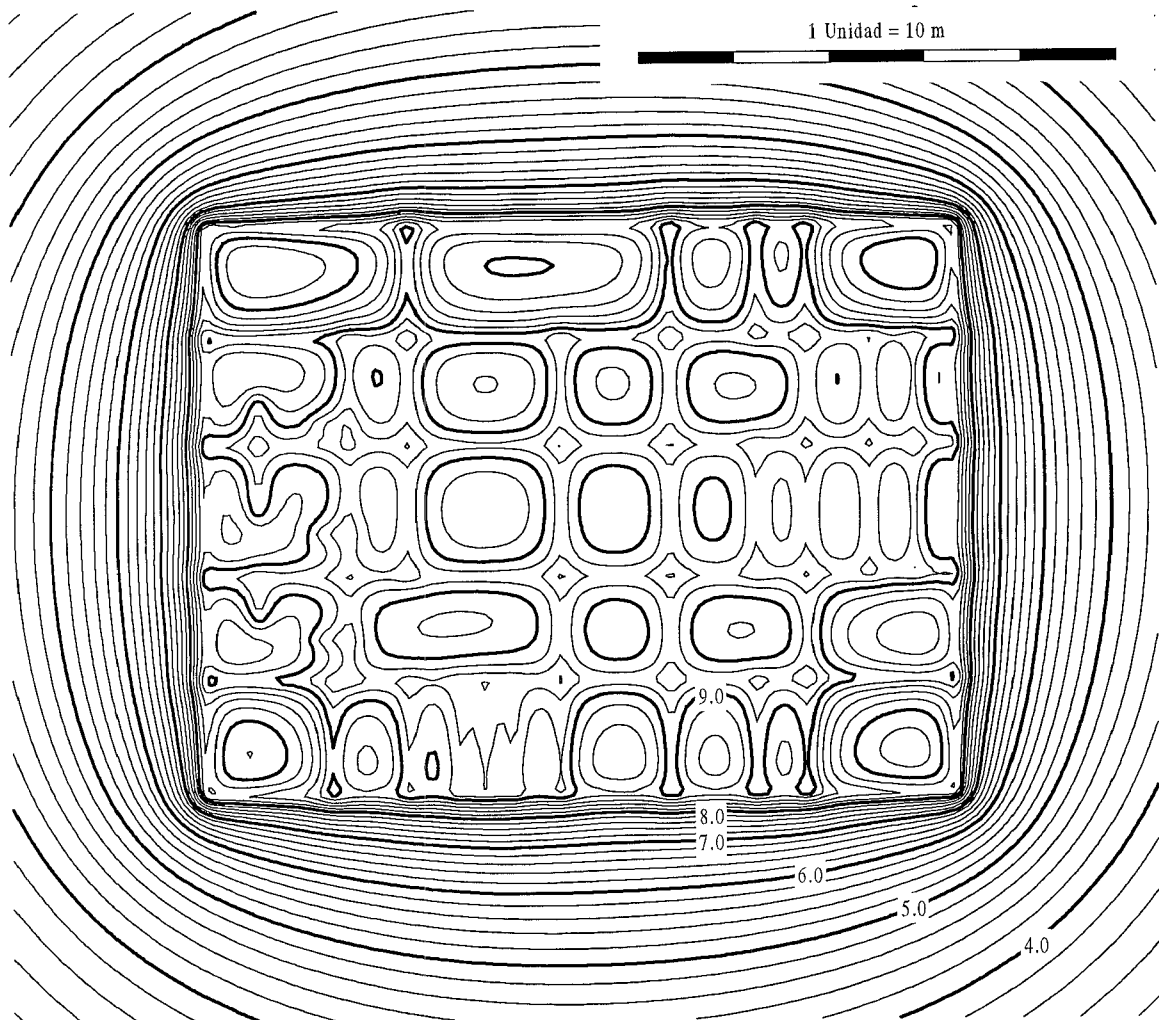


Fig. VI.14 – E.R. Balaídos II: Distribución de los niveles de potencial (en kV) en la superficie del terreno. (Se han dibujado las líneas con incrementos de 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV).

La figura VI.15 es una vista tridimensional de la distribución de los niveles de potencial que se produce en la superficie del terreno cuando tiene lugar una descarga eléctrica en el sistema de tomas de tierra de la subestación E. Balaídos II. Sobre la misma imagen se ha superpuesto la malla de electrodos con objeto de facilitar la identificación de cada zona de la malla.

Como puede observarse de las figuras VI.14 y VI.15, la zona de la superficie del terreno protegida por la toma de tierra presenta evidentemente unos niveles de potencial elevados, aunque con una distribución considerablemente homogénea.

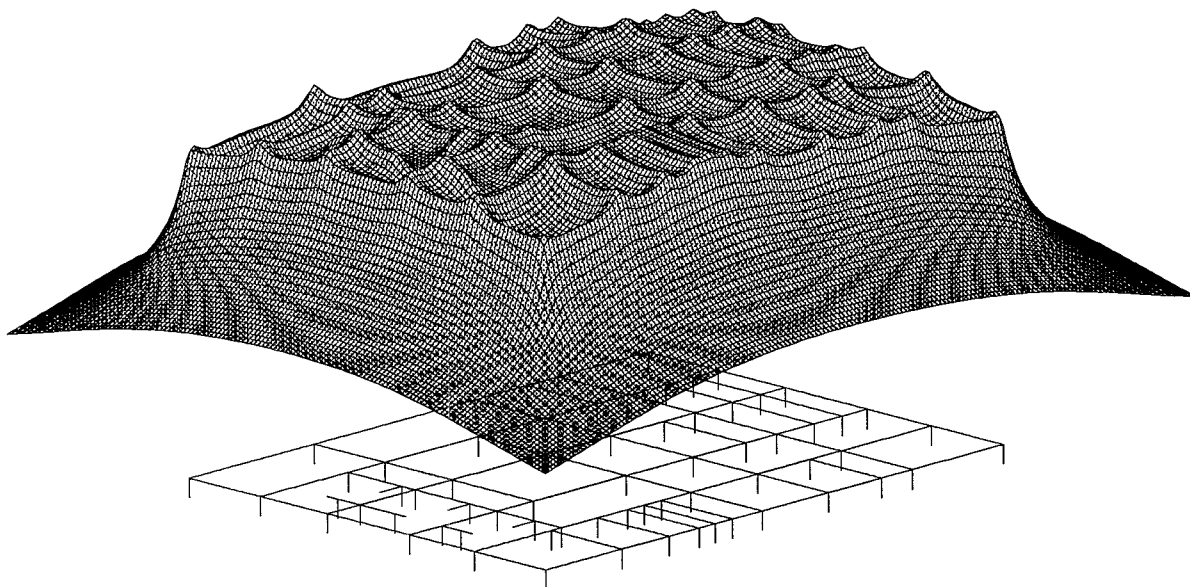


Fig. VI.15 - E.R. Balaídos II: Vista tridimensional de los niveles de potencial sobre la superficie del terreno.

Obsérvese que, al igual que en la subestación E.R. Barberá, los mayores gradientes de potencial en la superficie del terreno se originan en las esquinas de la malla de electrodos: la máxima “tensión de paso” (T.P.) que se produce en este sistema es 0.86 kV, y la “tensión de malla” (T.M.) es 2.4 kV.

La caracterización de esta puesta a tierra se completa con el cálculo de su resistencia equivalente (0.40Ω) cuyo valor permite calificar como “excelente” esta instalación de tierras, y con la determinación de la intensidad total que emana del conjunto de los electrodos (25 kA).

El tiempo de computación requerido en el cálculo de esta toma de tierra ha sido de 95 segundos (en un VAX-4300 con 64 MB de memoria central), lo cual permite su diseño y caracterización de un modo completamente interactivo con los medios de computación de que se dispone en la actualidad. A pesar de que en este ejemplo se han empleado elementos de densidad de corriente de orden mayor que en el caso anterior, este tiempo es inferior al precisado en el cálculo de la malla E.R. Barberá dado que el modelo tiene un número menor de grados de libertad. Razonablemente, la utilización de elementos de densidad de corriente de mayor orden permite obtener resultados más precisos, por lo que es recomendable si se

desea realizar los cálculos con mayor precisión en zonas concretas de un sistema de tomas de tierra.

5. EXISTENCIA DE VARIOS SISTEMAS DE TOMAS DE TIERRA

Este tercer ejemplo de aplicación de la formulación BEM1D es un caso ficticio que nos permitirá estudiar los efectos e influencias que pueden originarse entre dos o más sistemas de tomas de tierra que se encuentren próximos, cuando en uno de ellos se produce una condición de fallo y en consecuencia, una derivación de corriente al terreno.

El estudio que presentamos es el cálculo de dos sistemas de tomas de tierra iguales, separados entre sí una distancia de 20 m. Como malla de electrodos hemos tomado la misma del sistema de tierras de la subestación E. Balaídos II presentada en el subapartado anterior, formada por 107 conductores cilíndricos rectos, de un diámetro igual a 11.28 mm, y 67 picas de una longitud de 2.5 m y un diámetro de 14.0 mm. Las dos mallas están enterradas a 80 cm de la superficie del terreno. La figura VI.16 muestra a escala una vista en planta de las dos mallas de electrodos y en la misma se indica con puntos negros la situación de las picas. El área total considerada (32000 m^2) es la de un rectángulo que contiene las dos instalaciones de toma de tierra y sus alrededores con una longitud de 200 m y una anchura de 160 m.

Por otra parte, consideraremos que la Sobretensión de Tierra que se produce durante una derivación de corriente a la puesta a tierra en condiciones de fallo es 10 kV. Así mismo, estimamos la resistividad escalar aparente del terreno en $60 \Omega \cdot \text{m}$.

Este sistema de tierras se ha calculado mediante la formulación BEM1D, haciendo uso de un modelo numérico basado en el método de Galerkin con elementos de contorno de densidad de corriente lineal. Por tanto, el número total de elementos de la modelización es 348 y el de nodos, que coincide con el número de grados de libertad, es 282.

1 Unidad = 10 m

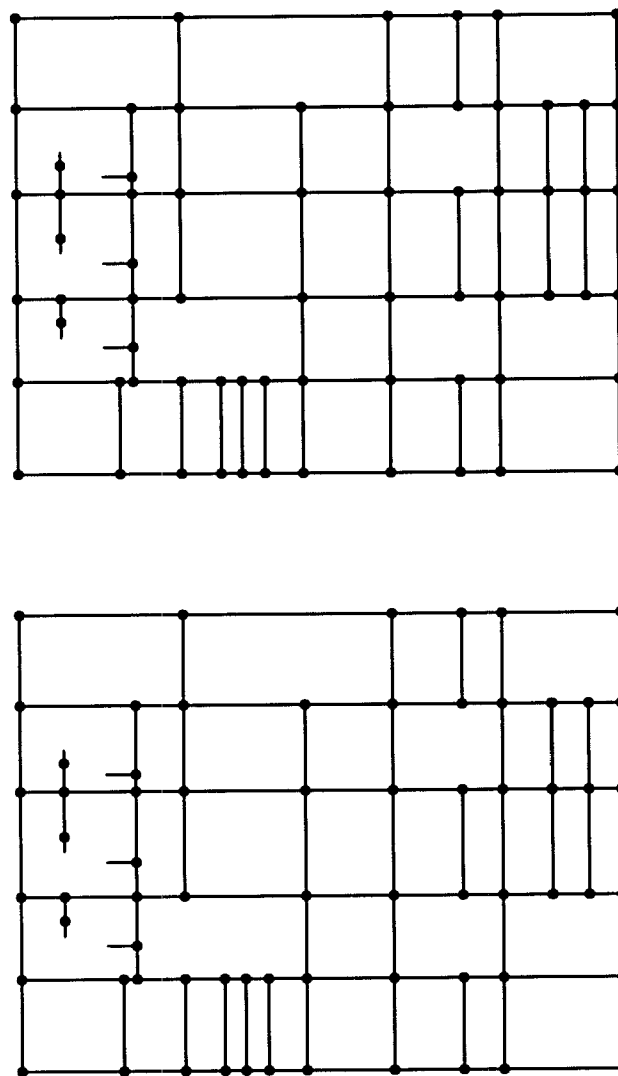


Fig. VI.16 – Existencia de dos tomas de tierra: Vista en planta de las mallas de electrodos de los dos sistemas de tierras separados entre sí una distancia de 20 m. (Se indican con puntos negros la situación de las barras verticales).

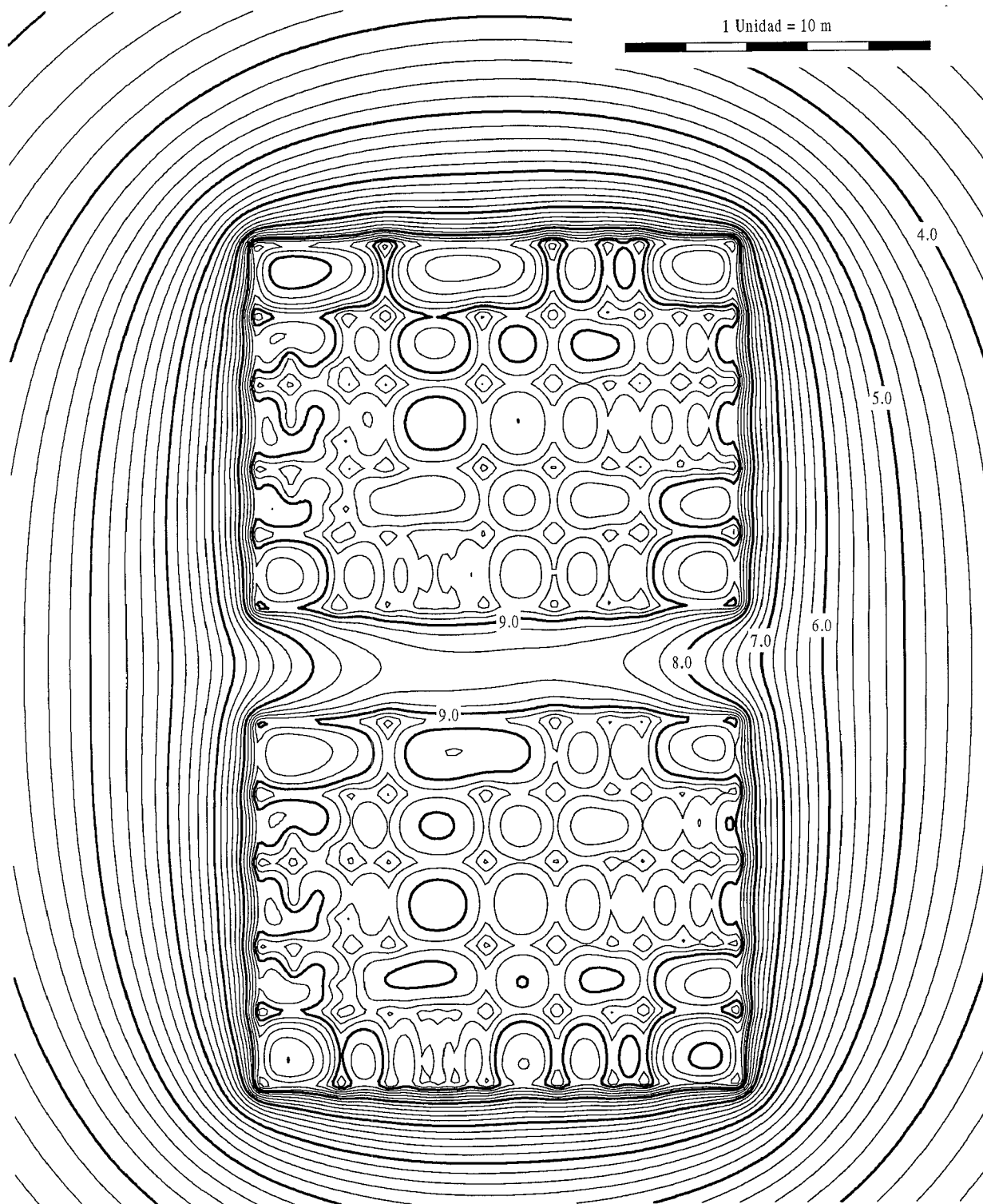


Fig. VI.17 - Existencia de dos tomas de tierra: Líneas de isopotencial (kV) sobre la superficie del terreno cuando se produce una descarga en una malla y las dos tierras están conectadas entre sí. (Se han dibujado líneas cada 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV).

5.1. Conexión eléctrica de las dos mallas

En primer lugar, consideraremos el sistema de tierras formado por las dos mallas conectadas entre sí mediante un conductor aislado, de modo que ambas adquieren en el momento de la descarga la misma sobretensión de tierra (desde el punto de vista de la disipación de corriente, el sistema se comporta como si hubiera una única malla de electrodos). La distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno cuando se produce una derivación de corriente en un punto del sistema de tierras se muestra en la figura VI.17.

La resistencia equivalente de este sistema es 0.26Ω , inferior al ejemplo de E. Balaídos II del apartado anterior —que presentaba una resistencia de 0.40Ω — ya que ahora el conjunto de electrodos que disipan corriente es considerablemente mayor, y la intensidad total que fluye al terreno es 38.5 kA . Las “tensiones de paso” (T.P.) y “de malla” (T.M.) varían muy poco respecto al ejemplo de E. Balaídos II y son 0.840 kV y 2.2 kV respectivamente.

5.2. Desconexión eléctrica de las dos mallas

Consideremos, a continuación, el sistema de tierras formado únicamente por una de las dos mallas de electrodos de la figura VI.16, de modo que no se establece unión eléctrica directa entre las dos mallas. Denominaremos “malla activa” a la que está conectada a la instalación eléctrica en fallo y adquiere la sobretensión de tierra en el momento de la descarga, y a través de la cual se produce la derivación y disipación de la corriente de falta en el terreno. La pregunta que inmediatamente podemos formularnos es: ¿afecta de algún modo a la distribución de la corriente en el terreno, la presencia de un sistema conductor (como es otra malla de electrodos) en las proximidades de una malla de tierra activa?, o lo que es lo mismo, ¿puede ignorarse este segundo sistema cuando se estudia el fenómeno de la disipación en la malla de electrodos activa?

Tal y como se ha indicado, el sistema de tomas de tierra “activo” adquiere un valor del potencial igual a la sobretensión de tierra cuando tiene lugar una descarga. Sin embargo, la existencia de un sistema conductor próximo a esta malla activa origina una distribución de la corriente en el terreno distinta, aunque no haya conexión eléctrica entre ambas, dado que las propiedades conductoras del terreno cambian de una forma importante en la zona del mismo ocupada por la malla de electrodos en la que no se produce descarga eléctrica (“malla pasiva”). Al tratarse de un sistema muy conductor (una de las hipótesis de la descripción del fenómeno

físico es que los electrodos son conductores perfectos, como ya comentamos en capítulos anteriores), esta segunda malla adquirirá un mismo valor del potencial (inferior a la sobretensión de tierra) creando un efecto de homogeneización de la distribución del potencial en las inmediaciones de la malla pasiva.

Con objeto de verificar estas aseveraciones calcularemos el sistema de tomas de tierra de la malla activa en dos casos: **a)** si no existe una segunda malla de electrodos cercana a la primera, y **b)** si existe una malla conductora próxima a la activa, pero sin conexión eléctrica directa entre ambas.

El primer caso es exactamente el mismo ejemplo de la subestación E. Balaídos II. Sin embargo, la distribución de potenciales en la superficie del terreno se ha recalculado para poder comparar dicha distribución en la misma área sometida a estudio. El resultado se muestra en la figura VI.18. La resistencia equivalente del sistema es 0.40Ω , la intensidad total 25 kA, la “tensión de paso” (T.P.) 0.86 kV y la “tensión de malla” (T.M.) es 2.4 kV.

El caso **b)** es más complicado de calcular dado que inicialmente la malla activa adquiere una sobretensión de tierra fija y conocida (10 kV), pero en la malla pasiva —que también adquiere un valor del potencial constante— éste es desconocido. El análisis de este tipo de problemas en el que existen varias mallas de toma de tierra desconectadas entre sí, puede realizarse por superposición de estados elementales (véase capítulo II). Los más sencillos son aquellos casos en los que únicamente haya dos mallas de puesta a tierra. El estado final es el siguiente: la malla activa con una sobretensión de tierra igual a 10 kV y la malla pasiva con una sobretensión desconocida (igual a una fracción λ del aumento de tensión de la malla activa). Los dos estados elementales en que se puede descomponer éste son: **estado 1)** la malla activa con una sobretensión de tierra igual a 1 V y la malla pasiva a 0 V; **estado 2)** la malla activa con una sobretensión de tierra igual a 0 V y la malla pasiva a 1 V. Dado que en los dos estados elementales se conocen las sobretensiones de tierra, las intensidades totales que fluyen por unidad de voltaje de cada una de las mallas (A: activa, P: pasiva) pueden determinarse mediante la formulación de elementos de contorno desarrollada en cada estado elemental (1 y 2): i_{A1} , i_{A2} , i_{P1} e i_{P2} . El estado final se obtiene de la suma de los estados elementales, ponderando el estado **1)** por 10^4 y el estado **2)** por el factor $10^4\lambda$. Finalmente, este valor λ y la intensidad total que fluye del sistema de tierras (I_G) se obtienen sin más que

imponer que la descarga eléctrica se produce en la malla activa y, por tanto,

$$I_G = 10^4 i_{A1} + 10^4 \lambda i_{A2}$$

$$0 = 10^4 i_{P1} + 10^4 \lambda i_{P2}.$$

Aplicando la formulación BEM1D en el cálculo de los dos estados elementales en que se descompone el estado final de la derivación de corriente eléctrica a través de las mallas de tierra desconectadas de la figura VI.16, se obtienen los siguientes resultados:

- Sobretensión de tierra de la malla activa: 10 kV.
- Sobretensión de tierra de la malla pasiva: 3.1 kV.
- Intensidad total que fluye del sistema de electrodos de tierra: 25.2 kA.
- Resistencia equivalente del sistema: 0.396 Ω .
- Tensión de Paso (T.P.) : 0.95 kV.
- Tensión de Malla (T.M.): 2.5 kV.

Es de destacar que la resistencia equivalente y la intensidad total que fluye (0.396 Ω y 25.2 kA) prácticamente son iguales a los del caso en que únicamente hay una malla de conductores (0.40 Ω y 25.0 kA), dado que la derivación de corriente eléctrica se produce en una sola toma de tierra.

La figura VI.19 muestra la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno en el que se encuentran las dos mallas y en las zonas adyacentes. Tal y como preveíamos, la presencia de una malla pasiva origina una homogeneización de los valores del potencial en la superficie del terreno. Sin embargo, si se comparan las figuras VI.18 y VI.19 pueden observarse también zonas de gradientes de potencial mucho mayores en determinadas regiones del terreno donde no eran esperados: en el ejemplo de la figura VI.19 la máxima tensión de paso que se produce en la región de la superficie del terreno sobre la malla pasiva es 0.165 kV, frente a la tensión de paso de 0.016 kV que se produce en el mismo punto en ausencia de la malla no conectada (figura VI.18). Si tal y como hemos visto en los capítulos anteriores, consideramos que la resistencia eléctrica del cuerpo humano es 1,000 Ω , esta tensión de paso de 165 V originaría una circulación de corriente por el cuerpo de una persona que se encontrase en ese punto igual a 0.165 A. Como se recordará (capítulo II), esta intensidad de corriente es sumamente peligrosa, dado que para valores superiores a 0.100 A existe un riesgo potencialmente elevado de que la persona sufra un paro cardíaco [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶].

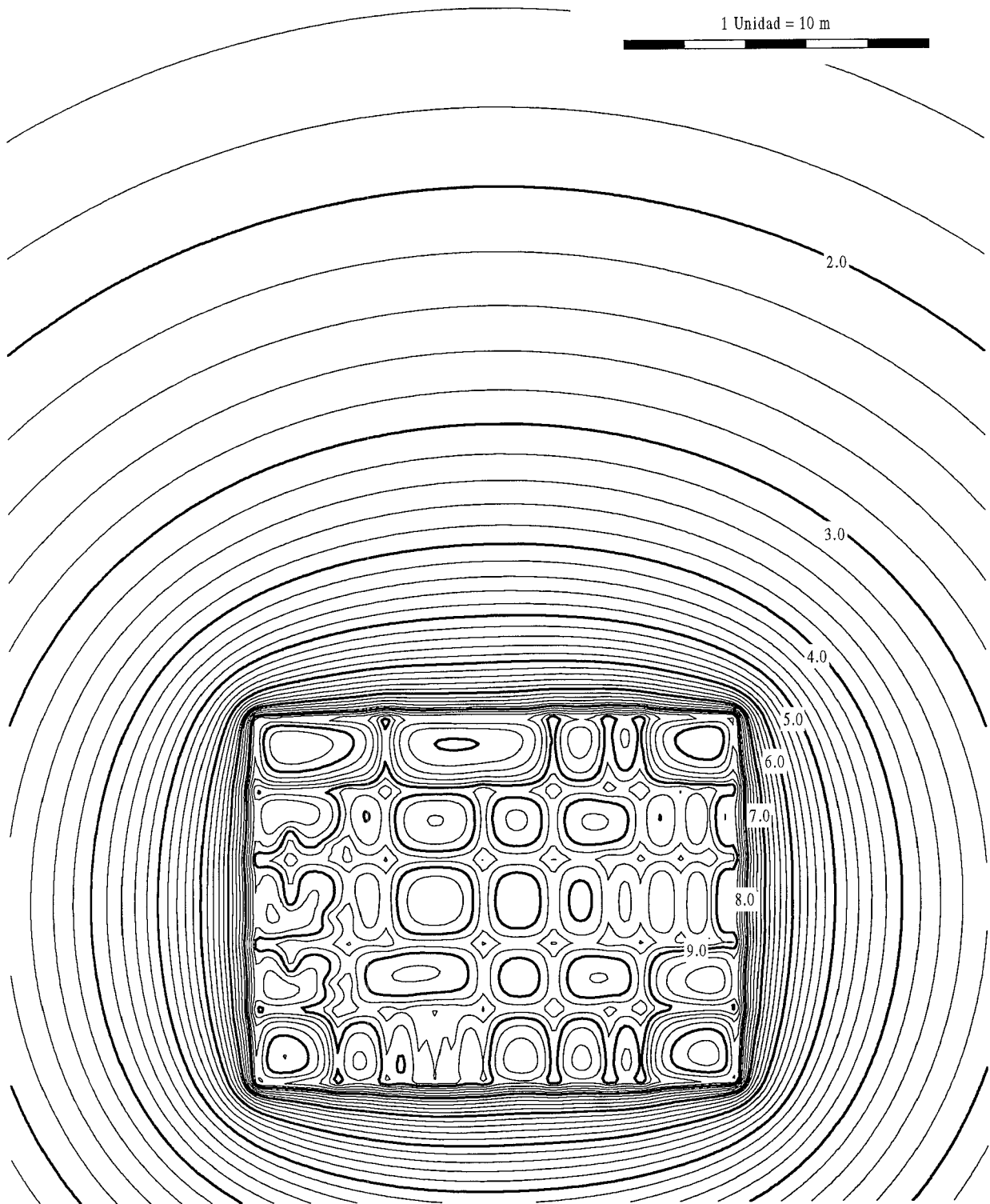


Fig. VI.18 - Existencia de dos tomas de tierra: Líneas de isopotencial (kV) sobre la superficie del terreno cuando se produce una descarga y solamente existe un sistema de tomas de tierra. (Se han dibujado líneas cada 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV).

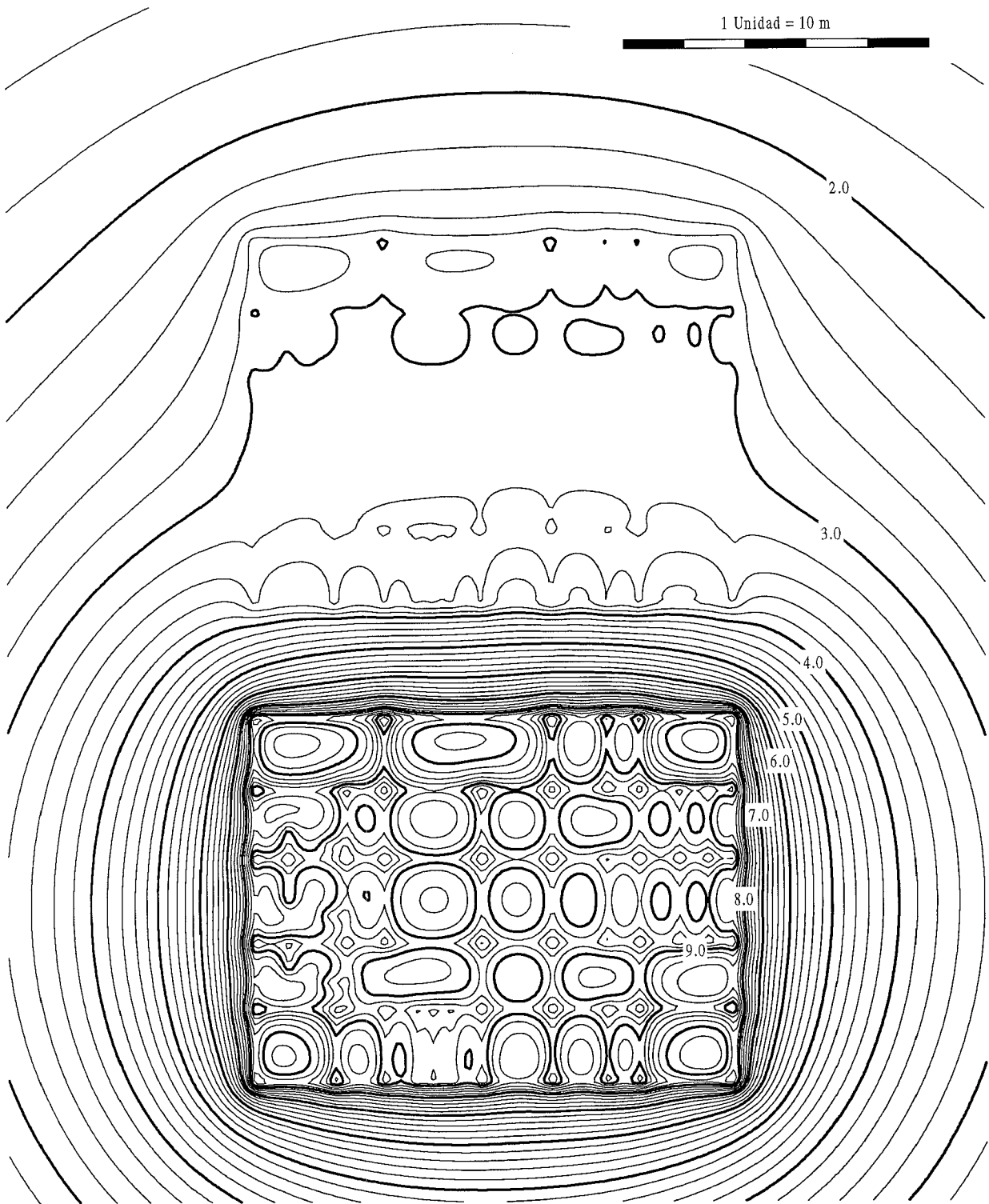


Fig. VI.19 – Existencia de dos tomas de tierra: Líneas de isopotencial (kV) sobre la superficie del terreno cuando se produce una descarga en una malla y no existe conexión entre las dos tomas de tierra. (Se han dibujado líneas cada 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV).

En resumen, la presencia de un sistema de conductores no conectado a una malla de toma de tierra en condiciones de fallo no modifica sustancialmente la resistencia equivalente de la malla, ni la intensidad total que fluye de ésta hacia el terreno ni tampoco la “tensión de malla”. Esta misma conclusión ya la obtuvimos en el capítulo **II** al explicar el funcionamiento de una toma de tierra en el caso de un contacto accidental de una persona con una parte de una instalación en fallo (como vimos, la resistencia equivalente de un sistema de tomas de tierra no se modifica de forma significativa con la presencia de una persona o cualquier elemento conductor próximo). Sin embargo, la existencia de tomas de tierra no conectadas afecta de una forma importante a la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno, generándose gradientes de potencial que pueden ser muy importantes en determinadas zonas de la superficie del terreno, donde en un principio no se preveían.

Tal y como se ha puesto de manifiesto con este ejemplo, el estudio de la conexión o no-conexión eléctrica entre sí de tomas de tierra es fundamental si éstas se encuentran próximas, debido a las graves consecuencias que puede originar el efecto de homogeneización de los niveles de potencial en la superficie del terreno. Este efecto puede tener mucha importancia en las inmediaciones de las instalaciones eléctricas con grandes tomas de tierra en las que se opera con intensidades de corriente elevadas, por la existencia de otros elementos muy conductores tales como cercas metálicas, tuberías, canalizaciones subterráneas, raíles, etc. que actúan como “mallas pasivas” y modifican la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno.

6. DISCRETIZACIÓN Y ELECCIÓN DEL TIPO DE ELEMENTO EN PROBLEMAS REALES

En cuanto a la discretización de un problema real de toma de tierra y a la elección del tipo de elemento del modelo numérico, podemos resumir en los siguientes puntos la experiencia acumulada durante la realización de esta tesis doctoral.

En primera aproximación, parece razonable para los fines prácticos discretizar una malla de tierra utilizando un elemento de densidad de corriente constante por electrodo. Esta discretización puede ser insuficiente si la relación entre el radio a de los electrodos y la longitud L de los elementos es relativamente pequeña (digamos, $a/L \ll 10^{-3}$), y en casos extremos podrían obtenerse resultados evidentemente

erróneos, tales como potenciales negativos o superiores a la Sobretensión de Tierra en puntos de la superficie del terreno. Para evitar efectos anómalos y obtener resultados satisfactorios es recomendable subdividir los electrodos hasta lograr que la relación radio/longitud de los elementos sea adecuada (por ejemplo, $a/L \approx 10^{-3}$).

Si se desea obtener resultados con elevada precisión, la estrategia más razonable parece ser utilizar elementos de densidad de corriente parabólica, antes de recurrir a subdividir nuevamente los elementos. En todo caso, es importante tener en cuenta que subdividir en exceso podría conducir a relaciones radio/longitud de los elementos excesivamente elevadas (digamos, $a/L > 10^{-2}$) para las cuales las aproximaciones realizadas en el modelo introducen errores de truncamiento de importancia creciente a medida que la longitud del elemento se aproxima al orden de magnitud del radio de los electrodos.

Por todo ello, y con carácter general, tal vez la mejor estrategia consista en utilizar inicialmente un elemento de densidad de corriente lineal por electrodo, subdividiendo los elementos si es necesario hasta que su relación radio/longitud sea adecuada. Si se desea obtener resultados más precisos, una alternativa razonable es mantener la misma discretización y utilizar elementos de densidad de corriente parabólica. En todo caso se podría subdividir de nuevo los elementos si se requiere aumentar la precisión.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Los científicos estudian la naturaleza no porque sea útil, sino porque encuentran placer en ello, y encuentran placer porque es hermosa. Si no lo fuera, no merecería la pena conocerla, y si la naturaleza no mereciera la pena, la vida tampoco. No me refiero, claro está, a la hermosura que estimula los sentidos sino a esa hermosura más profunda que emana del orden armonioso de las partes, susceptible de ser captada por una inteligencia pura. (H. Poincaré, 1854-1912)

1. CONCLUSIONES

Tradicionalmente, los estudios sobre el cálculo de tomas de tierra se han planteado con el fin de obtener fórmulas sencillas y rápidas que permitan la estimación de los principales parámetros característicos de este tipo de instalaciones. En la mayor parte de los casos, estas técnicas y fórmulas tradicionales, obtenidas frecuentemente a partir de mediciones experimentales en modelos de laboratorio, han sido el resultado de la experiencia acumulada por los técnicos y profesionales que han trabajado en su proyecto y diseño.

Desde mediados de los años setenta se han desarrollado nuevos métodos, propiciados por el importante avance de la microinformática, que se han materializado en programas de ordenador cuyo objetivo es el cálculo de las mallas de conductores que conforman una toma de tierra. Todos los programas de aplicación práctica están basados en la utilización directa de fórmulas intuitivas y expresiones empíricas tradicionales, o en técnicas de cálculo matricial que intentan ponderar el efecto de los segmentos en que se subdividen los electrodos de la toma

de tierra, a partir de algunas hipótesis básicas y simplificaciones poco justificadas, cuando no cuestionables.

Estas fórmulas intuitivas y métodos de cálculo tradicionales han resultado ser insuficientes para el análisis de tomas de tierra de instalaciones eléctricas reales. En muchos casos, los errores derivados de la aplicación de estas técnicas son evidentes e inadmisibles, y en general la insuficiente fundamentación teórica de estos métodos impide realizar un estudio mínimamente riguroso de las posibles fuentes de error, así como garantizar la validez de los resultados obtenidos.

En este estudio se ha desarrollado una formulación general para el cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra, aplicable a un amplio rango de instalaciones eléctricas reales. En la práctica, estos sistemas de puesta a tierra consisten en entramados de conductores cilíndricos rectos con distintas longitudes y diámetros, situados en cualquier disposición espacial y que se entierran a partir de una determinada profundidad bajo la superficie del terreno.

El desarrollo de esta formulación general se ha realizado de la siguiente forma:

- Se ha efectuado un análisis riguroso del funcionamiento de un sistema de toma de tierra como elemento que deriva al terreno la corriente eléctrica en condiciones de fallo. En primer lugar se han revisado los distintos tipos de toma de tierra, su funcionalidad y los parámetros y magnitudes empleados en su caracterización; en segundo lugar se ha estudiado detalladamente el funcionamiento de una toma de tierra cuando se produce un contacto accidental de una persona con una parte de una instalación puesta bajo tensión debido a un cortocircuito. Como resultado de este estudio se ha podido identificar claramente tanto la naturaleza del fenómeno físico subyacente como las hipótesis fundamentales de trabajo y los distintos parámetros que definen un sistema de toma de tierra desde el punto de vista de la seguridad. Todo ello nos permite concluir que el análisis de una instalación de toma de tierra puede centrarse exclusivamente en la disipación de corriente en el terreno, sin que sea preciso contemplar *a priori* todos los posibles tipos y modos de contacto accidental que se pueden producir.
- A partir de las ecuaciones generales del electromagnetismo se ha desarrollado un modelo matemático de la disipación de corriente eléctrica en el terreno. La introducción razonada de una serie de hipótesis, plenamente justificadas si se tienen en cuenta las características de los sistemas de puesta a tierra en

la práctica, nos ha permitido reescribir el modelo en términos de un problema exterior de Dirichlet, cuya resolución completa debería permitir el análisis de cualquier sistema de toma de tierra, y determinar todos los parámetros que se emplean en su caracterización.

- Se ha estudiado la resolución de este problema en el marco general de la Teoría del Potencial. Debido a que las características propias de los sistemas de toma de tierra en la práctica (el dominio semiinfinito en el que se produce la disipación de corriente y la complejidad del entramado que constituye la malla de tierra) imposibilitan la resolución directa de este problema, se ha replanteado en términos de una ecuación integral lineal de primera clase definida sobre el contorno de los electrodos que forman la toma de tierra. Así mismo, se ha puesto de manifiesto que la resolución de esta ecuación integral permitiría realizar el análisis y determinar todos los parámetros y magnitudes que definen un sistema de toma de tierra.
- Expresado el modelo matemático en términos de una ecuación integral definida sobre el contorno de los conductores de la toma de tierra, y una vez analizadas las diferentes alternativas, la mejor estrategia para el desarrollo de una formulación numérica eficaz en el tratamiento de este tipo de problemas parece ser el Método de Elementos de Contorno.
- Para ello, se ha planteado una formulación variacional débil de la ecuación integral. La discretización de la superficie de los electrodos en elementos de contorno bidimensionales permite reducir el problema a la resolución de un sistema algebraico de ecuaciones lineales. No obstante, el elevado coste computacional involucrado en el cálculo de cada uno de los elementos de la matriz de coeficientes (que requiere integrar dos veces sobre la superficie de todos los electrodos de la toma de tierra) obliga a realizar forzosamente simplificaciones adicionales en el modelo.
- En este sentido, y teniendo en cuenta las particulares características geométricas de los sistemas reales de toma de tierra (mallas de electrodos cilíndricos de gran longitud en relación con su diámetro), se justifica la introducción de una nueva aproximación en el modelo numérico: considerar que la densidad de corriente que emana de la sección transversal de un electrodo es uniforme circunferencialmente. Así, las ecuaciones del modelo se pueden expresar en términos de integrales de línea definidas sobre

los ejes de los electrodos. La discretización de éstos en elementos de contorno unidimensionales permite obtener un sistema de ecuaciones lineales, cuyos coeficientes matriciales se calculan ahora integrando dos veces sobre la línea de los ejes de los conductores y dos veces circunferencialmente en cada sección. En comparación con la formulación bidimensional de elementos de contorno, en esta formulación unidimensional el volumen de trabajo computacional es drásticamente menor. Sin embargo, debido fundamentalmente al coste de la integración circunferencial, es necesario introducir ciertas simplificaciones adicionales para reducir los tiempos de cálculo bajo niveles aceptables.

- A pesar de estas simplificaciones, el cálculo de las restantes integrales no es obvio. Debido al malcondicionamiento de las funciones subintegrando no es posible utilizar las técnicas habituales de integración numérica, que arrojan resultados muy imprecisos a menos que se recurra a cuadraturas de coste inadmisibles. Por todo ello se ha desarrollado una formulación completamente analítica para el cálculo de todas las integrales que intervienen en la discretización en elementos de contorno unidimensionales. Este proceso se ha realizado en dos fases:
 - En primer lugar se han obtenido las expresiones analíticas del potencial generado por un electrodo cilíndrico en un punto cualquiera del espacio. Las fórmulas resultantes únicamente dependen de los parámetros geométricos del electrodo, de las coordenadas del punto y de la resistividad eléctrica del terreno.
 - A continuación se han obtenido las expresiones analíticas para el cálculo de los coeficientes de la matriz del sistema de ecuaciones lineales, que pueden interpretarse físicamente como los valores ponderados de los potenciales inducidos por cada uno de los electrodos sobre cualquier electrodo de la malla. Las expresiones finales solamente dependen de los parámetros geométricos de ambos electrodos y de la resistividad eléctrica del terreno.

Las expresiones analíticas correspondientes a los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales se han desarrollado de forma que su evaluación sea recursiva, con el objetivo de automatizar el cálculo y optimizar el número de operaciones requeridas cuando se incorpora esta formulación a un programa de ordenador.

- Finalmente, la selección de distintos tipos de funciones de prueba y de test en la formulación unidimensional de elementos de contorno conduce a formulaciones específicas (por ejemplo Colocación Puntual o de Galerkin) en las que los métodos intuitivos y técnicas tradicionales se pueden identificar como casos particulares. Así, las dificultades encontradas con la aplicación de estos métodos por diversos investigadores se pueden explicar ahora desde un punto de vista matemáticamente riguroso; estos problemas son debidos a la pérdida de validez de las simplificaciones realizadas para reducir el coste de la integración circunferencial, que no son satisfactorias cuando el tamaño de los elementos en la discretización es comparable al radio de los electrodos cilíndricos.

La formulación numérica propuesta se ha implementado en un sistema de diseño asistido por ordenador para el cálculo y diseño de tomas de tierra en instalaciones eléctricas, con el que se han resuelto varios ejemplos de aplicación, de cuyo análisis podemos concluir que:

- La formulación numérica es válida y proporciona resultados suficientemente precisos para los fines prácticos, sin que sea necesario recurrir a discretizaciones muy finas, y por tanto muy costosas, para las que eventualmente las simplificaciones realizadas pierden validez a medida que el tamaño de los elementos se hace comparable al radio de los electrodos.
- En todo caso, la formulación numérica permite obtener resultados más precisos mediante la utilización de elementos de densidad de corriente de orden superior, sin que sea necesario aumentar indefinidamente el número de elementos.
- La formulación numérica propuesta constituye una metodología que — por primera vez— permite obtener resultados de gran precisión en el análisis de tomas de tierra de subestaciones eléctricas de tamaño medio/grande, prácticamente en tiempo real y utilizando un ordenador personal convencional (PC-486) de bajo coste y amplia disponibilidad en el momento en que se presenta esta tesis doctoral. Obviamente, los requerimientos de cálculo aumentan en el caso de instalaciones de mayor tamaño, para cuyo estudio sería preciso utilizar ordenadores más potentes, aunque siempre dentro de unos límites computacionales y costes operativos razonables. Con el avance de la tecnología informática en los próximos años se

podrán resolver —sin duda— problemas mucho mayores, siempre utilizando la formulación numérica propuesta, aunque probablemente replanteando la organización de los cálculos.

- Los resultados obtenidos mediante la formulación numérica desarrollada y otros métodos, técnicas tradicionales y fórmulas de la guía *IEEE* y de la norma española coinciden en el orden de magnitud en los casos de mallas de electrodos con pocos conductores y geometrías muy sencillas. En mallas más complicadas se ha observado que los resultados proporcionados por la guía *IEEE* y la norma española son notablemente conservadores dando lugar a valores característicos de las tomas de tierra muy del lado de la seguridad. Sin ninguna duda, la existencia de esta nueva herramienta de cálculo que se pone a disposición de los técnicos especialistas, permitirá tomar decisiones más racionales en el diseño de instalaciones más seguras, y con costes menores.

2. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

A partir de la realización de esta tesis doctoral se han abierto nuevas líneas de investigación, entre las que destacamos las siguientes:

- Desde el punto de vista de la generalización de la formulación numérica propuesta, consideramos prioritario contemplar el cálculo de sistemas de tomas de tierra con modelos de terreno de varias capas. Aunque este reto está formalmente resuelto mediante la aplicación del método de las imágenes, parece razonable investigar hasta qué punto es posible reducir el coste computacional que ello conlleva. En la misma línea consideramos importante estudiar la forma de relajar la hipótesis de superficie del terreno horizontal, para poder analizar problemas tales como la influencia de la proximidad de un terraplén en el comportamiento de una toma de tierra. Y —aunque presumiblemente el análisis involucrará una extraordinaria dificultad— tal vez la introducción de una componente estocástica en la modelización del suelo sea la línea más fructífera a largo plazo.
- En la actualidad, se dispone de fórmulas muy aproximadas (guía *IEEE*) para la estimación de los valores máximos de parámetros fundamentales en la evaluación de la seguridad de una instalación (como por ejemplo, la tensión de paso y la tensión de contacto), sin que sea posible conocer las zonas de

mayor peligrosidad de ésta. Por ello, consideramos importante el desarrollo —a partir de la formulación propuesta— de una metodología que permita determinar automáticamente estos parámetros, con el fin de disponer de una herramienta de cálculo que posibilite la localización rápida de las zonas de una instalación de toma de tierra en que se producen las circunstancias de riesgo más desfavorables.

- En todo caso, y una vez establecido formalmente un método de cálculo satisfactorio, parece razonable abordar el análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos respecto a los datos, con el objetivo de plantear y resolver los problemas de estimación de parámetros y optimización de diseño.
- Y por último, y todavía desde el punto de vista de la completitud del modelo, consideramos importante estudiar la incorporación de otros posibles efectos acoplados a la disipación de corriente eléctrica en un terreno (por ejemplo, la corrosión de los electrodos que forman la malla de la toma de tierra), de modo que sea posible cuantificar la disminución de la eficacia de la instalación a lo largo del tiempo, y a ser posible evitarla.
- En otro orden de cosas, y desde el punto de vista del diseño de este tipo de instalaciones, es evidente que la presentación de esta formulación debería promover, con carácter inmediato, el análisis por parte de los especialistas de los numerosos problemas abiertos y sobre los que se ha trabajado hasta este momento con conjeturas, tales como la conveniencia de conectar o no conectar eléctricamente a la toma de tierra los elementos conductores enterrados en el suelo y situados en sus inmediaciones, vallas perimetrales, etc. Este análisis podría tener importantes repercusiones en el desarrollo de otros sistemas de protección complementarios a los existentes, por las posibles ventajas que conlleva la homogeneización de los niveles de potencial en la superficie del terreno.

REFERENCIAS

AIEE —

“*Application guide on methods of substation grounding*”, AIEE Transactions, vol. 73, III-A, 271-277, (1954).

AIEE —

“*Guide for safety in alternating current substation grounding*”, AIEE Public. New York, (1961).

ALAMO J.L. —

“*A second order gradient technique for an improved estimation of soil parameters in a two layer earth*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 6, 1166-1170, (1991).

ALLEN R.C., BOLAND W.R., FABER V., WING G.M. —

“*Singular values and condition numbers of Galerkin matrices arising from linear integral equations of the first kind*”, Journ. Math. Anal. Appl., vol 109, 564-590, (1985).

ANDERSSEN R.S., HOOG F.R., LUKAS M.A. —

“*The application and numerical solution of integral equations*”, Sijhoff and Noordhoff. Alphen aan den Rijn, (1980).

ANSELONE P.M., MOORE R.H. —

“*Approximate solutions of integral and operator equations*”, Journ. Math. Anal. Appl., vol 9, 268-277, (1964).

ANSI/IEEE STD.80 —

“*IEEE Guide for safety in AC substation grounding*”, New York, (1986).

ARMSTRONG H.B., SIMPKIN L.J. —

“*Grounding electrode potential gradients from model test*”, AIEE Transactions, vol. 78, III, 618-622, (1960).

ATKINSON K. —

"A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind", SIAM. Philadelphia, (1976).

BAISHIKI R.D., KENT OSTERBERG C., DAWALIBI F. —

"Earth resistivity measurements using cylindrical electrodes at short spacings", IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 2, 64-71, (1987).

BAKER C.T.H, MILLER G.F. —

"Treatment of integral equations by numerical methods", Academic Press. London, (1982).

BECKER E.B., CAREY G.F., ODEN J.T. —

"Finite elements, (vol. I)", Prentice Hall. New Jersey, (1981).

BIDDLE COMPANY J.G. —

"Manual on ground resistance testing", Publ. 25 J, (1952).

BLATTNER C.J. —

"Prediction of soil resistivity and ground rod resistance for deep ground electrodes", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 99, September-October, (1980).

BLATTNER C.J. —

"Study of driven ground rods and four point soil resistivity tests", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 101, 2837-2850, (1982).

BLATTNER C.J. —

"Analysis of soil resistivity test methods in two layer earth", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 104, 3603-3608, (1985).

BOSSI A., COPPI E. —

"Impianti di terra di funzionamenti e di protezione", Ulrico Hoepli Editore. Milán, (1975).

BREBBIA C.A. —

"The Boundary Element Method for engineers", Pentech Press Ltd. Plymouth, (1978).

BREBBIA C.A., WALKER S. —

"Boundary element techniques in engineering", Butterworth & Co. London, (1980).

BREBBIA C.A., WROBEL L. —

“Boundary element techniques”, Springer Verlag. Berlín, (1984).

BRICHAU F. —

“A mathematical model for the cathodic protection of underground pipelines including stray currents”, Ph.D. Thesis. Vrije Universiteit Brussel, (1994).

CASTELEIRO M., HERNÁNDEZ L.A., COLOMINAS I., NAVARRINA F. —

“Memoria y Manual de Usuario del sistema TOTBEM para cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra de instalaciones eléctricas”, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de La Coruña, (1994).

COLOMINAS I., NAVARRINA F., CASTELEIRO M. —

“A validation of the boundary element method for grounding grid design and computation”, International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, vol. II, 1187-1196. Concepción, (Chile), (1992).

COLOMINAS I., NAVARRINA F., CASTELEIRO M. —

“Fórmulas analíticas de integración para el cálculo de tomas de tierra mediante el método de los elementos de contorno (BEM)”, II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, vol. II, 857-864. La Coruña, (1993).

COLOMINAS I., NAVARRINA F., CASTELEIRO M. —

“A BEM approach for grounding grid computation”, 16th International Conference on Boundary Element Methods, 117-124. Southampton, (Reino Unido), (1994).

COURANT R., HILBERT D. —

“Methods of mathematical physics, (vols. I y II)”, John Wiley & Sons. New York, (1962).

DALZIEL C.F. —

“Dangerous electric currents”, AIEE Transactions, vol. 65, 579-585, 1123-1124, (1946).

DALZIEL C.F., LEE W.R. —

“Reevaluation of lethal electric currents”, IEEE Trans., vol. IGA-4, 467-476, (1968).

DALZIEL C.F. —

“*Lethal electric currents*”, IEEE Spectrum, 44-50, (1969).

DALZIEL C.F. —

“*Electrical shock hazard*”, IEEE Spectrum, 41-50, (1972).

DAUTRAY R., LIONS J.L. —

“*Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, (vol. 6)*”, Masson, Paris, (1988).

DAWALIBI F., MUKHEDKAR D. —

“*Optimum design of substation grounding in two layer earth structure. Part I: Analytical study. Part II: Comparison between theoretical and experimental results.*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 94, 252-261, 262-272, (1975).

DAWALIBI F., MUKHEDKAR D. —

“*Multi step analysis of interconnected grounding electrodes*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 95, 113-119, (1976).

DAWALIBI F., MUKHEDKAR D. —

“*Resistance calculation of interconnected grounding electrodes*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 96, 59-65, (1977).

DAWALIBI F., MUKHEDKAR D. —

“*Influence of ground rods on grounding grids*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 98, 2089-2098, (1979).

DAWALIBI F., BOUCHARD M., MUKHEDKAR D. —

“*Survey on power systems grounding design practices*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 99, 1396-1405, (1980).

DAWALIBI F. —

“*Transmission line grounding*”, EPRI Research Project 1494, (1982).

DAWALIBI F., BLATTNER C.J. —

“*Earth resistivity measurement interpretation techniques*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 103, 374-382, (1984).

DAWALIBI F., BARBEITO N. —

“*Measurements and computations of the performance of grounding systems buried in multilayer soils*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 6, 1483-1490, (1991).

DELVES L.M., MOHAMED J.L. —

“*Computational methods for integral equations*”, Cambridge University Press. Cambridge, (1985).

DURAND E. —

“*Électrostatique*”, Masson Ed. Paris, (1966).

DWIGHT H.B. —

“*Calculation of resistance to ground*”, Electrical Engineering, vol. 55, 1319-1328, (1936).

EATON J.R. —

“*Grounding electric circuits effectively*”, General Electric Review, vol. 55, 323-327 (parte I), 397-404 (parte II), 451-456 (parte III), (1941).

EL-MORSHEDY A., ZEITOUN A.G., GHOURAB M.M. —

“*Modelling of substation grounding grids*”, IEE Proceedings, vol. 133, 287-292, (1986).

ELEK A. —

“*Hazards of electric shock at stations during fault and method of reduction*”, Ontario Hydro Research News, vol. 10, 1-6, (1958).

ENGL H.W., GFRERERER H. —

“*A posteriori parameter choice for general regularization methods for solving ill-posed problems*”, Appl. Numer. Math., vol. 4, 395-417, (1988).

EWY K.A., SMOLLECK H.A. —

“*A graphical explanation of the resistance and surface potential calculations for grounding systems in two layer earth*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 103, 631-639, (1984).

FERRIS L.P., KING B.G., SPENCE P.W., WILLIAMS H. —

“*Effect of electric shock on the heart*”, AIEE Trans., vol. 55, 498-515, (1936).

FEYNMAN R.P., LEIGHTON R.B., SANDS M. —

“*The Feynman lectures on physics, mainly electromagnetism and matter, (vol II)*”, Addison-Wesley Pub. Reading, (1964).

FLANAGAN T.M., MALLON C.E., DENSON R. —

“*Electrical breakdown characteristics of soil*”, IEEE Trans. on Nuclear Science, vol. 29, 1887-1890, (1982).

FLEURY P., MATHIEU J.P. —

“Électrostatique, courants continus, magnétisme”, Eyrolles. París, (1957).

FREDHOLM I. —

“Sur une classe d'équations fonctionnelles”, Acta Math., vol. 27, 365-390, (1903).

FUNG Y.C. —

“Foundations of solid mechanics”, Prentice Hall, Inc. New Jersey, (1965).

GAGNON J., MUKHEDKAR D. —

“Earth resistivity measurements in a two layer earth structure”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 97, (1978).

GARRETT D.L. —

“The Average Potential Method of calculating the resistance of power substation grounding systems”, M.S.Thesis, University of Alabama, (1978).

GARRETT D.L., PRUITT J.G. —

“Problems encountered with the Average Potential Method of analyzing substation grounding systems”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 104, 3586-3596, (1985).

GARRETT D.L. —

“Practical Applications of ANSI/IEEE Standard 80-186. IEEE Guide for Safety”, IEEE Power Engineering Society. New York, (1986).

GOLBERG M.A. —

“Solution methods for integral equations”, Plenum Press. New York, (1978).

GROETSCH C.W. —

“The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind”, Pitman. Boston, (1984).

GROETSCH C.W., NEUBAUER A. —

“Regularization of ill-posed problems: optimal parameter choice in finite dimensions”, Journ. Approx. Theory, vol. 58, 184-200, (1989).

GUVEN A.N., SEBO S.A. —

“Analysis of ground fault current distribution along underground cables”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 1, 9-18, (1986).

HARNWELL G.P. —

“Principles of electricity and magnetism, (2^a Edic.)”, Mc Graw-Hill. New York, (1950).

HEPPE R.J. —

“Step potentials and body currents near grounds in two layer earth”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 98, 45-59, (1979-a).

HEPPE R.J. —

“Computation of potential at surface above an energized grid or other electrode, allowing for non-uniform current distribution”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 98, 1978-1988, (1979-b).

HOCHSTADT H. —

“Integral equations”, John Wiley & Sons. New York, (1973).

HUGHES T.J.R. —

“The finite element method”, Prentice Hall. New Jersey, (1987).

IEEE STD.81 —

“Recommended guide for measuring earth resistivity, ground impedance, and earth surface potentials of a ground system”, IEEE Inc.. New York, (1961).

JACKSON J.D. —

“Classical electrodynamics”, John Wiley & Sons. New York, (1962).

JASWON M.A. —

“Integral equation methods in potential theory, I”, Proceedings Royal Society Series, A 275, 23-32, (1963).

JASWON M.A., SYMM G.T. —

“Integral equation methods in potential theory and elastostatics”, Academic Press, London, (1977).

JOHNSON C. —

“Numerical solution of partial differential equations by the finite element method”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987).

JONES W.R. —

“Bentonite rods assure ground rod installation in problem soils”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 99, 1343-1346, (1980).

JOY E.B., MELIOPOULOS A.P., WEBB R.P. —

“*Analysis techniques for power substation grounding systems. Design methodology and tests. User’s manual.*”, EPRI Final Report EL-2682, (1982).

JOY E.B., PAIK N., BREWER T.E., WILSON R.E., WEBB R.P., MELIOPOULOS A.P. —

“*Graphical data for ground grid analysis*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 102, 3038-3048, (1983).

JOY E.B., WILSON R.E. —

“*Accuracy study of the ground grid analysis algorithm*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 1, 97-103, (1986).

JOY E.B., MELIOPOULOS A.P., XIA F., COKKINIDES G.J. —

“*An advanced computer model for grounding system analysis*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 8, 13-23, (1993).

KASTEN D.G., CALDECOTT R. —

“*Substation grounding scale model test*”, EPRI Interim Report EL-3099, (1983).

KASTEN D.G., CALDECOTT R. —

“*Soil resistivity tests using modelling techniques*”, EPRI Final Report EL-3983, (1985).

KELLOG O.D. —

“*Foundations of potential theory*”, Springer Verlag. Berlín, (1967).

KINYON A.L. —

“*Correlation of measured and calculated substation ground grid resistance*”, AIEE Trans., vol. 78, part I, 698-701, (1959).

KISELIEV —

“*Research into electrical shock*”, Electrical Review, n. 31, (1965).

KLINE M. —

“*Mathematical thought from ancient to modern times, (vols. I, II y III)*”, Oxford University Press. New York, (1972).

KOCH W. —

“*Grounding methods for high-voltage stations with grounded neutrals*”, Elektrotechnische Zeit, vol. 71, 89-91, (1950).

KOSTIC M.B., SHIRKOOHI G.H. —

“Numerical analysis of a class of foundation grounding systems surrounded by two layer soil”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 8, 1080-1087, (1993).

KOUTEYNIKOFF P. —

“Numerical computation of the grounding resistance of substations and towers”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 99, 957-965, (1980).

KOUWENHOVEN W.B. —

“AC shocks of varying parameters affecting the heart”, AIEE Trans., vol. 78, (I), 163-169, (1959).

KRESS R. —

“Linear integral equations”, Springer Verlag. New York, (1989).

KURTOVIC M., VUJEVIC S. —

“Potential of earthing grid in heterogeneous soil”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 31, 677-688, (1991).

LAGACÉ P.J., HOULE J.L., GREISS H., MUKHEDKAR D. —

“Computer aided design of a toroidal ground electrode in a two layer soil”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 2, 744-749, (1987).

LAGACÉ P.J., HOULE J.L., GERVAIS Y., MUKHEDKAR D. —

“Evaluation of the voltage distribution around toroidal HVDC ground electrodes in n-layer soils”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 3, 1573-1579, (1988).

LAGACÉ P.J., MUKHEDKAR D., HOANG H.H., GREISS H. —

“Evaluation of the effect of vertical faults on the voltage distribution around HVDC electrodes using a supercomputer”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 5, 1309-1313, (1990).

LAURENT P.G. —

“General fundamentals of electric grounding technique”, Bulletin de la Société Française des Electriciens, vol. 1, 368-402, (1951).

LAZZARA J., BARBEITO N. —

“Simplified two layer model substation ground grid design methodology”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 5, 1741-1750, (1990).

LEE W.R. —

“*Death from electrical shock*”, IEE Proceedings, vol. 113, 144-148, (1966).

LIPAVSKY P., NIENABER R.E. —

“*Measurement of ground potential difference at power substations*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol 6, 62-69, (1991).

LLAVERÍAS J., DE LA CASA A., TRABALÓN C. —

“*Aplicación del método de la inversión generalizada al estudio electrocinético del comportamiento de terrenos por modelización bicapa*”, Actas de las Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica, (1990).

LORRAIN P., CORSON R.D. —

“*Campos y ondas electromagnéticos*”, Selecciones Científicas. Madrid, (1990).

MACHIAS A.V., DIALYNAS E.N., PROTOPAPAS C.A. —

“*An expert system approach to designing and testing substation grounding grids*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 4, 234-240, (1989).

MAXWELL J.C. —

“*A Treatise on Electricity and Magnetism*”, Oxford, (1885).

MELIOPOULOS A.P., PAPALEXOPOULOS A.D., WEBB R.P., BLATTNER C.J. —

“*Estimation of soil parameters from driven rod measurements*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 103, 2579-2587, (1984).

MELIOPOULOS A.P., PAPALEXOPOULOS A.D. —

“*Interpretation of soil resistivity measurements: Experience with the model SOMIP*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 1, 142-151, (1986).

MELIOPOULOS A.P., COKKINIDES G.J., DUNLAP J. —

“*Analysis of DC grounding systems*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 3, 1595-1604, (1988).

MINISTERIO DE INDUSTRIA Y ENERGÍA —

“*Reglamento electrotécnico para baja tensión*”, Madrid, (1992).

MINISTERIO DE INDUSTRIA Y ENERGÍA —

“*Reglamento sobre centrales eléctricas, subestaciones y centros de transformación*”, Madrid, (1993).

MORENO LL. —

“Diseny assistit per ordinador de postes a terra en instalacions elèctriques”, Tesina de Especialidad ETSICCPB-UPC. Barcelona, (1989).

MORENO L., NAVARRINA F., BENDITO E., ENCINAS A., LEDESMA A., CASTELEIRO M. —

“Diseño Asistido por Ordenador de Tomas de Tierra: Una formulación basada en la resolución de ecuaciones integrales mediante el Método de Elementos de Contorno”, I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, 637-643. Gran Canaria, (1990).

MORENO CLEMENTE J. —

“Instalaciones de puesta a tierra en centros de transformación”, Asociación de Abastecimientos de Agua y Saneamientos de Andalucía. Málaga, (1991).

NAGAR R.P., VELAZQUEZ R., LOELOEIAN M., MUKHEDKAR D., GERVAIS Y. —

“Review of analytical methods for calculating the performance of large grounding electrodes. Part I: Theoretical considerations. Part II: Numerical results”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 104, 3124-3133, 3134-3141, (1985).

NAHMAN J., SKULETICH S. —

“Resistances to ground and mesh voltages of grounding grid”, IEE Proceedings, vol. 126, 57-61, (1979).

NAHMAN J., SALAMON D. —

“Analytical expressions for the resistance of grounding grids in nonuniform soil”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 103, 880-885, (1984).

NAHMAN J., SALAMON D. —

“Analytical expressions for the resistance of rodbeds and of combined grounding systems in nonuniform soil”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 1, 90-96, (1986).

NAHMAN J., JELOVAC D. —

“High voltage/medium (low) voltage substation earthing systems”, IEE Proceedings, vol. 134, 75-80, (1987).

NAVARRINA F., MORENO L., BENDITO E., ENCINAS A., LEDESMA A., CASTELEIRO M. —

“*Computer aided design of grounding grids: a boundary element approach*”, Mathematics in Industry, 307-314, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, (The Netherlands), (1991).

NAVARRINA F., COLOMINAS I., CASTELEIRO M. —

“*Analytical integration techniques for earthing grid computation by boundary element methods*”, International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, vol. II, 1197-1206. Concepción, (Chile), (1992).

NAVARRINA F., COLOMINAS I., CASTELEIRO M. —

“*Una formulación aproximada mediante el método de elementos de contorno para la solución de problemas en teoría del potencial*”, II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, vol. II, 1566-1575. La Coruña, (1993).

OSYPKA P. —

“*Quantitative investigation of current strength and routing in AC electrocution accident involving human beings and animals*”, Technische Hochschule Braunschweig. Brunswick, (1966).

PALMER L.S. —

“*Examples of geotechnical surveys*”, IEE Journal, 231-244, (1955).

PANOFSKY W.K.H., PHILIPS M. —

“*Classical electricity and magnetism, (2^a Edic.)*”, Addison-Wesley Pub. Reading, (1962).

PHILLIPS D.L. —

“*A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind*”, Journ. Assoc. Comput. Mach., vol. 9, 84-97, (1962).

PINI G., GAMBOLATI G. —

“*Is a simple diagonal scaling the best preconditioner for conjugate gradients on supercomputers ?*”, Advances on Water Resources, vol. 13, 147-153, (1990).

RAMÍREZ VÁZQUEZ J. —

“*Estaciones de transformación y distribución. Protección de sistemas eléctricos*”, Ed. CEAC S.A. Barcelona, (1977).

RIZZO F.J., SHIPPY D.J. —

“A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions”, Mech. Res. Commun., vol. 6, 99-103, (1979).

ROSSEL J. —

“Física general”, Ed. AC. Madrid, (1974).

RUDENBERG R. —

“Grounding principles and practices. I-Fundamental considerations on ground currents”, Electrical Engineering, vol. 64, 1-13, (1945).

RUDIN W. —

“Real and complex analysis, (3ª Edic.)”, Mc Graw-Hill. New York, (1987).

SATO S., ZAENGL W.S. —

“Effective grounding mesh calculation technique”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 3, 173-182, (1988).

SCHWARZ S.J. —

“Analytical expression for resistance of grounding systems”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 73, 1011-1016, (1954).

SEEDHER H.R., ARORA J.K., THAPAR B. —

“Finite expressions for computation of potential in two layer soil”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 2, 1098-1102, (1987).

SILVESTER P.P., FERRARI R.L. —

“Finite elements for electrical engineers”, Cambridge University Press. New York, (1990).

SIMMONS G.F. —

“Differential equations with applications and historical notes, (2ª Edic.)”, Mc Graw-Hill. New York, (1991).

SMITHIES F. —

“Integral equations”, Cambridge University Press. London, (1958).

SOKOLNIKOFF I.S., REDHEFFER R.M. —

“Mathematics of physics and modern engineering, (2ª Edic.)”, Mc Graw-Hill. New York, (1966).

SOKOLNIKOFF I.S. —

“*Análisis tensorial, (2ª Edic.)*”, Index Prial, (traducción al castellano del “*Tensor analysis*” de John Wiley & Sons). Madrid, (1971).

SPITTA A.F. —

“*Eletrische Installationstechnik, (vols. I y II)*”, Siemens Aktiengesellschaft, Berlín, (1975).

STAKGOLD I. —

“*Boundary value problems of mathematical physics, (vols. I y II)*”, The MacMillan Company. New York, (1968).

STAKGOLD I. —

“*Green’s functions and boundary value problems*”, John Wiley & Sons. New York, (1979).

STEFANESCU S.S., SCHLUMBERGER M. —

“*Sur la distribution électrique potentielle autour d’une prise de terre ponctuelle dans un terrain à couches horizontales homogènes et isotropes*”, Journal de Physique et Radium, vol. 1, serie VII, 132-140, (1930).

SUNDE E.D. —

“*Earth conduction effects in transmission systems*”, McMillan Ed. New York, (1968).

SVERAK J.G., DICK W.K., DODDS T.H., HEPPE R.H. —

“*Safe substation grounding. (Part I)*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 100, 4281-4290, (1981).

SVERAK J.G., BENSON R.U., DICK W.K., DODDS T.H., GARRETT D.L., IDZKOWSKI J.E., KEIL R.P., PATEL S.G., RAGAN M.E., SMITH G.E., VERMA R., ZUKERMAN L.G. —

“*Safe substation grounding. (Part II)*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 101, 4006-4023,, (1982).

SVERAK J.G. —

“*Simplified analysis of electrical gradients above a ground grid-I. How good is the present IEEE method ?*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 103, 7-25, (1984).

SYMM G.T. —

“Integral equation methods in potential theory, II”, Proceedings Royal Society Series, A 275, 33-46, (1963).

TAGG G.F. —

“Earth resistances”, Pitman Publishing Corporation. New York, (1964).

TAKAHASHI T., KAWASE T. —

“Analysis of apparent resistivity in a multi layer earth structure”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 5, 604-612, (1990).

TAKAHASHI T., KAWASE T. —

“Calculation of earth resistance for a deep driven rod in a multilayer earth structure”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 6, 608-614, (1991).

THAPAR B., PURI K.K. —

“Mesh potentials in high-voltage grounding grids”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. 86, 249-254, (1967).

THAPAR B., GEREZ V., BALAKRISHNAN A., BLANK D.A. —

“Simplified equations for mesh and step voltages in an AC substation”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 6, 601-607, (1991-a).

THAPAR B., GEREZ V., BALAKRISHNAN A., BLANK D.A. —

“Evaluation of ground resistance of a grounding grid of any shape”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 6, 640-647, (1991-b).

TIKHONOV A.N. —

“On the solution of incorrectly formulated problems and the regularization method”, Soviet Math. Dokl., vol. 4, 1035-1038, (1963).

TIT RESEARCH INSTITUTE —

“Electrical shock prevention investigation”, TITRI Project E6373. Washington, (1977).

TOWNE H.M. —

“Lightning arrester grounds”, General Electric Review, vol. 35, 173-280, (1932).

UNESA —

“Método de cálculo y proyecto de instalaciones de puesta a tierra para centros de transformación conectados a redes de tercera categoría”, Madrid, (1989).

VILLAS J.E.T., MAIA F.C., MUKHEDKAR D., DA COSTA V.S. —
“*Computation of electric fields using ground grid performance equations*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 2, 709-716, (1987).

WENDLAND W.L. —
“*On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems*”, Technische Hochschule Darmstadt (Preprint Nr.857), (1984).

WENDLAND W.L., ARNOLD D.N. —
“*Collocation versus Galerkin procedures for boundary integral methods*”, Boundary Elements in Engineering, 3-17. Springer Verlag. Berlín, (1987).

WENNER F. —
“*A method for measuring earth resistances*”, Bulletin of the Bureau of Standards, vol. 12, 469-482, (1916).

WILDI T. —
“*Tecnología de los sistemas eléctricos de potencia*”, Editorial Hispano Europea, S.A. Barcelona, (1983).

WING G.M. —
“*A primer on integral equations of the first kind*”, SIAM. Philadelphia, (1991).

YAMASHITA H., SHINOZAKI K., NAKAMAE E. —
“*A boundary-finite element method to compute directly electric field intensity with high accuracy*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 3, 1754-1760, (1988).

ZIENKIEWICZ O.C. —
“*El Método de los Elementos Finitos*”, Editorial Reverté. Barcelona, (1982).

ZIENKIEWICZ O.C., MORGAN K. —
“*Finite elements and approximation*”, John Wiley & Sons. New York, (1983).