



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



E. T. S. DE INGENIEROS DE
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TESIS DOCTORAL

CÁLCULO Y DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR DE TOMAS DE TIERRA DE INSTALACIONES ELÉCTRICAS: UNA FORMULACIÓN NUMÉRICA BASADA EN EL MÉTODO INTEGRAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO

POR

IGNASI COLOMINAS EZPONDA

DIRIGIDA POR

FERMÍN L. NAVARRINA MARTÍNEZ

LA CORUÑA - MARZO 1995



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



E. T. S. DE INGENIEROS DE
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TESIS DOCTORAL

CÁLCULO Y DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR DE TOMAS DE TIERRA DE INSTALACIONES ELÉCTRICAS: UNA FORMULACIÓN NUMÉRICA BASADA EN EL MÉTODO INTEGRAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO

POR

IGNASI COLOMINAS EZPONDA
Ingeniero Industrial

DIRIGIDA POR

FERMÍN L. NAVARRINA MARTÍNEZ
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

LA CORUÑA - MARZO 1995

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

**CÁLCULO Y DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR
DE TOMAS DE TIERRA EN INSTALACIONES ELÉCTRICAS :
UNA FORMULACIÓN NUMÉRICA BASADA
EN EL MÉTODO INTEGRAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO**

“Premio Grupo ENDESA 1995, concedido por la Fundación C.E.O.E.”

Ignasi Colominas Ezponda

*Trabajo realizado como parte de los requisitos
exigidos para optar al Grado de Doctor.*

Dirigido por:
Dr. Fermín L. Navarrina Martínez

La Coruña, Marzo de 1995

AGRADECIMIENTOS

La investigación llevada a cabo y que se resume en esta tesis doctoral ha contado con el apoyo de diversos organismos e instituciones. Deseo expresar mi agradecimiento:

- A la Subdirección General de Producción Hidráulica, Transporte y Transformación de UNIÓN FENOSA por la Beca personal y Bolsas de Viaje concedidas para la realización de este trabajo. Así mismo, deseo agradecer la información técnica facilitada sobre diversas instalaciones de toma de tierra de subestaciones eléctricas y centrales transformadoras.
- Al *Instituto Galego da Vivenda e Solo* de la XUNTA de GALICIA por la beca concedida para realizar una estancia en el *Wessex Institute of Technology* (Reino Unido), así como al Instituto Tecnológico de Galicia por toda la colaboración prestada.
- Al Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación de la Universidad de La Coruña, a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de La Coruña y al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad de La Coruña por las ayudas económicas recibidas, tanto para la asistencia a Congresos y Reuniones Científicas en las que se han presentado resultados de las investigaciones efectuadas, como para la realización y edición de esta tesis doctoral.
- Al Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Demarcación de Galicia) y a la Fundación de la Ingeniería Civil de Galicia por las diversas ayudas para viajes concedidas.
- A FECSA por la financiación parcial de la investigación que ha concluido en esta tesis doctoral, dentro del marco del Programa de Investigación Electrotécnico (PIE) del Sector Eléctrico Español, y por los datos técnicos facilitados sobre tomas de tierra de diversas instalaciones eléctricas.

Desde que me incorporé a la Universidad de La Coruña hace tres años, y durante los cuales he realizado el trabajo que se presenta en esta tesis doctoral, he vivido la puesta en marcha de la nueva Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de La Coruña. A principios de 1992 el número de profesores, estudiantes y personal de administración y servicios que componíamos la Escuela en la localidad de Arteixo, era muy reducido. Desde esos días que ahora parecen tan lejanos —en que para tener una terminal de ordenador en el despacho había que levantar todos los falsos techos y pasar los cables— hasta el día de hoy, en el que la Escuela está magníficamente ubicada y excepcionalmente dotada, son muchas las personas a las que les debo mi más profundo agradecimiento por su ayuda, colaboración y consejo.

En primer lugar quiero agradecerle al profesor Fermín Navarrina la dirección de esta tesis, tarea nada fácil que ha compaginado de forma ejemplar y precisa con la ardua dirección de la Escuela precisamente durante la fase más compleja del desarrollo del Plan de Estudios. A Fermín le agradezco su infinita paciencia y su dedicación, su tiempo y sus consejos, su interés y su preocupación. Durante estos tres años, no le he considerado un “jefe” sino mi mejor amigo y un gran maestro, y de él he aprendido a investigar, a dudar, a criticar y a valorar el trabajo bien hecho.

Una persona significativa en el desarrollo de esta tesis doctoral ha sido el profesor Manuel Casteleiro, a quien deseo expresar mi admiración, gratitud y estima. A Manolo le agradezco sinceramente sus certeras críticas, sus oportunos consejos, su continua preocupación por la evolución del trabajo y la ayuda que me ha prestado durante la fase final de esta tesis.

A los profesores Rosa Fernández Esteller, Ramón Martul Álvarez de Neyra y Juan Pérez Valcárcel deseo agradecerles la ayuda y las facilidades de todo tipo que me han brindado desde que me incorporé a esta Universidad, así como el interés y colaboración que me han dispensado en distintos momentos y situaciones a lo largo de la realización de este trabajo.

Al profesor Rodrigo del Hoyo le agradezco su entusiasmo y su desinteresada colaboración desde el inicio de esta tesis, y a D. Ángel Sánchez Toscano, Jefe de la División de Protecciones y Medidas de Unión Fenosa, su interés y apoyo en la investigación llevada a cabo.

A mi amigo Santiago Hernández quiero agradecerle sus acertados consejos y comentarios durante la realización de esta tesis. Así mismo quiero reconocer, a mis compañeros y amigos Fernando Martínez, Miguel Rodríguez Bugarín, Joaquín Suárez por sus sugerencias y revisiones del trabajo, y a Luis Hernández por su tiempo y su dedicación en la elaboración de los gráficos y figuras con los “dichosos PC’s”.

A mis amigos y compañeros del Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación —en especial a Cristina Vázquez, Gregorio Iglesias, Isabel Martínez y Jaime Fe— y a todos los profesores y miembros de la Escuela les agradezco el interés, la paciencia y la ayuda que me han dispensado.

Así mismo, quiero expresar mi agradecimiento al profesor Eugenio Oñate, Director del Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería, por su confianza, apoyo y comprensión en el inicio de mi tesis doctoral.

También deseo agradecer al profesor Luiz Wrobel del *Wessex Institute of Technology* su inestimable colaboración en la validación de la formulación numérica desarrollada.

Finalmente, quiero agradecerles a mis padres el apoyo incondicional que siempre me han prestado y los sacrificios, desvelos y preocupaciones permanentes por mis estudios. A ellos les debo lo que soy.

Y a mi esposa Anabel, que también “ha hecho la tesis” con su apoyo, esfuerzo, paciencia y amor, a veces sugiriendo, otras leyendo, las más de las veces escuchando, le dedico de todo corazón esta tesis.

Ignasi Colominas Ezponda
Marzo de 1995

ÍNDICE GENERAL

	<u>pag.</u>
– ÍNDICE DE FIGURAS	vii
– ÍNDICE DE TABLAS	xi
– RESUMEN	xiii
– TRIBUNAL DE TESIS Y CALIFICACIÓN	xiv
– PREMIO GRUPO ENDESA 1995	xv
I. REVISIÓN HISTÓRICA Y ESTADO ACTUAL DEL CONOCIMIENTO	
1. Antecedentes	1
2. Estado del conocimiento de los sistemas de puesta a tierra de instalaciones eléctricas	3
2.1 Antecedentes de la Guía <i>AIEE Std.80</i>	4
2.2 Los fundamentos de la <i>AIEE Std.80</i>	4
2.3 Aspectos no resueltos en la guía de 1961	6
2.4 Las posteriores revisiones y la edición de 1986	9
2.5 La evolución de los trabajos a partir de los años ochenta	11
2.6 Resumen del estado del conocimiento anterior a esta tesis doctoral	15
3. Planteamiento del problema	17
4. Objetivos específicos de esta tesis doctoral	18
5. Contenido de esta tesis doctoral	20
II. GENERALIDADES SOBRE LAS INSTALACIONES DE PUESTA A TIERRA	
1. Introducción	23
2. Definición de “Sistema de puesta a tierra”	24
3. Seguridad de las instalaciones de toma de tierra	25
3.1 Objetivos de una instalación de toma de tierra	25
3.2 Clasificación de las tomas de tierra según su función	26
3.3 Circunstancias y factores de riesgo que influyen en una instalación de toma de tierra	28
3.4 Seguridad humana	29
3.5 Funcionamiento de una toma de tierra	34
4. Características del terreno	54

4.1	La resistividad y su medida	54
4.2	Factores que influyen en la resistividad del suelo	56
4.3	Hipótesis de suelo uniforme	57
4.4	Modelo de terreno de “doble capa”	58
4.5	Modelo de terreno “multi capa”	67
5.	Resumen	69

III. MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA FÍSICO

1.	Introducción	73
2.	Planteamiento del problema	76
3.	Ecuaciones del modelo físico	77
3.1.	Ecuaciones generales	77
3.2.	Ecuaciones generales en la hipótesis de modelo estacionario	79
3.3.	Ecuaciones del modelo matemático del problema	80
4.	Modelo de terreno	83
4.1.	Medio conductor isótropo	83
4.2.	Medio conductor isótropo y homogéneo	84
4.3.	Superficie del terreno horizontal	85
5.	Relación entre las magnitudes del modelo matemático y del fenómeno físico	87
6.	Resumen	88

IV. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DEL POTENCIAL

1.	Introducción	91
2.	Breve apunte histórico	93
3.	Conceptos previos	97
3.1	Funciones de clase $C^k(\Omega)$	97
3.2	Funciones armónicas	97
3.3	Solución fundamental	98
3.4	Teorema de la Divergencia	98
3.5	Primera Identidad de Green	99
3.6	Segunda Identidad de Green	100
3.7	Integración impropia múltiple	100
3.8	Tercera Identidad de Green	102
4.	Problema Exterior de Dirichlet	105
4.1	Notación de la geometría del problema	105
4.2	Planteamiento del problema	106
4.3	Planteamiento del problema mediante la función de Green	106
5.	El problema exterior de Dirichlet en términos de una ecuación integral lineal	108
5.1	Expresión del potencial en un punto del terreno	109

5.2	Expresión del potencial en un punto de la toma de tierra	115
5.3	Ecuación integral del problema exterior de Dirichlet	119
6.	Técnicas de resolución numérica de ecuaciones integrales lineales	120
6.1	Métodos basados en “aproximaciones sucesivas”	122
6.2	Métodos basados en “cuadraturas numéricas”	123
6.3	Métodos basados en “técnicas de proyección”	124
7.	Resumen	127

V. MODELIZACIÓN NUMÉRICA

1.	Introducción	129
2.	Formulación general en elementos de contorno	131
3.	Planteamiento variacional 1D aproximado	133
4.	Discretización en elementos de contorno 1D	134
4.1	Formulación en elementos de contorno 1D simplificada	135
4.2	Coste computacional de la formulación en elementos de contorno 1D simplificada	140
5.	Integración analítica del potencial generado por un electrodo en un punto del espacio	142
5.1	Cálculo de la integral de línea en el electrodo	142
5.2	Análisis geométrico	143
6.	Integración analítica del potencial de dos electrodos en el espacio	145
6.1	Cálculo de las integrales de línea sobre los electrodos	145
6.2	Análisis geométrico de dos rectas en el espacio	147
6.3	Cálculo de las integrales elementales	148
6.4	Cálculo de las integrales genéricas $\mathcal{I}\{m\}$ y $\mathcal{J}\{m\}$	151
A1.	DEDUCCIÓN COMPLETA DE LA INTEGRACIÓN ANALÍTICA	152
A2.	RESUMEN DE LA INTEGRACIÓN ANALÍTICA	181

VI. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO DESARROLLADA

1.	Introducción	187
2.	Validación de la formulación de elementos de contorno	188
2.1	Planteamiento del problema académico de prueba	188
2.2	Modelo numérico	190
2.3	Resultados numéricos	194
3.	Comparación con otros métodos tradicionales	202
3.1	Problema 1	203
3.2	Problema 2	204
3.3	Problema 3	206
3.4	Problema 4	208
3.5	Problema 5	210

3.6	Problema 6	212
3.7	Recapitulación sobre los ensayos realizados	215
4.	Aplicación de la formulación a casos reales	216
4.1	Subestación E.R. Barberá	216
4.2	Subestación E. Balaídos II	221
5.	Existencia de varios sistemas de tomas de tierra	225
5.1.	Conexión eléctrica de dos mallas	228
5.2.	Desconexión eléctrica de dos mallas	228
6.	Discretización y elección del tipo de elemento en problema reales	233

VII. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

1.	Conclusiones	235
2.	Líneas de investigación abiertas	240

REFERENCIAS	243
--------------------	------------

ÍNDICE DE FIGURAS

	<u>pag.</u>
II. GENERALIDADES SOBRE LAS INSTALACIONES DE PUESTA A TIERRA	
Fig. II.1 – Esquema de los distintos elementos que constituyen un sistema de puesta a tierra	25
Fig. II.2 – Esquema de los dos tipos de tomas de tierra según su funcionalidad	26
Fig. II.3.a – Toma de tierra de 16 m × 16 m formada por 12 conductores (de diámetro 1 cm) enterrada a 80 cm	28
Fig. II.3.b – Líneas de isopotencial en la superficie del terreno al producirse una corriente de fallo en la malla	28
Fig. II.4.a – Esquema del contacto accidental de “tensión de paso”	32
Fig. II.4.b – Esquema del contacto accidental de “tensión de contacto”	33
Fig. II.5 – Esquema del circuito eléctrico cuando se produce el contacto accidental de una persona con una parte de la instalación puesta bajo tensión por un cortocircuito	35
Fig. II.6 – Esquema del circuito subterráneo	37
Fig. II.7.a – Esquema del estado elemental 1) en que puede descomponerse el circuito subterráneo	37
Fig. II.7.b – Esquema del estado elemental 2) en que puede descomponerse el circuito subterráneo	38
Fig. II.8 – Circuito eléctrico equivalente al circuito subterráneo	40
Fig. II.9 – Esquema del problema de la disipación de corriente eléctrica en un terreno cuando se produce una derivación a través de un sistema de toma de tierra	43
Fig. II.10 – Fracción de la intensidad de corriente que circula por la persona (I_H) sobre la intensidad total (I) en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación)	45
Fig. II.11 – Fracción de la intensidad de corriente que circula por la toma de tierra de la instalación (I_T) sobre la intensidad total (I) en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación)	47

- Fig. II.12** – Relación entre la intensidad de corriente que circula por la persona (I_H) si existe toma de tierra en la instalación y la misma intensidad (I_H) sin no existe toma de tierra en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra) 48
- Fig. II.13** – Relación entre la intensidad de corriente que circula por el motor (I_M) cuando se produce una derivación de corriente a la toma de tierra, y la intensidad que circula en condiciones normales en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación) 52
- Fig. II.14** – Relación entre la intensidad de corriente que circula por el circuito (I) cuando se produce una derivación de corriente a la toma de tierra, y la intensidad que circula en condiciones normales en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación) 53
- Fig. II.15** – Representación esquemática de un modelo de “doble capa” 59
- Fig. II.16.a** –Esquema de un estrato de material de resistividad constante separado del aislante perfecto por dos planos paralelos 62
- Fig. II.16.b** –Situación de una fuente puntual de corriente entre los dos planos y esquema de las fuentes puntuales “imágenes” que se obtienen tras las primeras “reflexiones” 62
- Fig. II.17** – Generación y lugar geométrico de las “imágenes eléctricas” de una fuente puntual de corriente situada en el estrato inferior 2) a una distancia d de la superficie del terreno 65
- Fig. II.18** – Generación y lugar geométrico de las “imágenes eléctricas” de una fuente puntual de corriente situada en el estrato superior 1) a una distancia d de la superficie del terreno 66
- Fig. II.19** – Generación de “imágenes eléctricas” de una fuente puntual de corriente en un modelo de suelo de tres capas 68

III. MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA FÍSICO

- Fig. III.1** – Esquema del fenómeno físico de la disipación de corriente en un terreno a través de una toma de tierra 74

IV. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DEL POTENCIAL

- Fig. IV.1** – Esquema del análisis de las distancias desde un punto \mathbf{x} (aislado por una esfera de radio ε y situado en el interior del terreno) a un punto ξ de la superficie de la toma de tierra Γ_G y al punto simétrico respecto de la superficie del terreno ξ' en la imagen Γ'_G 110
- Fig. IV.2** – Esquema de los dominios formados al aislar un punto \mathbf{x} , situado en la superficie de la toma de tierra, por una esfera de radio ε 115

V. MODELIZACIÓN NUMÉRICA

- Fig. V.1** – Esquema del análisis de la distancia de un punto \mathbf{x} cualquiera a un punto ξ situado en el contorno de un cilindro 136

VI. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO DESARROLLADA

- Fig. VI.1** – Representación esquemática del problema de prueba (la línea regruessada representa el contorno del electrodo) 189
- Fig. VI.2** – Problema de Prueba: Malla de elementos finitos. (Detalle de la zona próxima al punto A indicado en la figura VI.1) 191
- Fig. VI.3** – Problema de Prueba: Evolución del error (en escala logarítmica) con el número de iteraciones durante la resolución del sistema de ecuaciones en el modelo de elementos finitos, empleando un algoritmo de gradientes conjugados con preconditionamiento diagonal 193
- Fig. VI.4** – Problema de Prueba: Densidad de corriente que emana a lo largo de la longitud del electrodo cilíndrico. Resultados obtenidos con la formulación BEM1D y con elementos finitos FEM 196
- Fig. VI.5** – Problema de Prueba: Densidad de corriente que emana a lo largo de la longitud del electrodo cilíndrico. Resultados de la formulación de elementos de contorno unidimensionales BEM1D y de elementos de contorno bidimensionales BEMSA 200
- Fig. VI.6** – Problema 1: Malla de cuatro electrodos de $8 \times 8 \text{ m}^2$ 203
- Fig. VI.7** – Problema 2: Malla de electrodos cuadrada de $24 \times 24 \text{ m}^2$ con 9 submallas cuadradas elementales en su interior de $8 \times 8 \text{ m}^2$ 205

Fig. VI.8 – Problema 5: Geometría de la malla de electrodos	210
Fig. VI.9 – Problema 6: Geometría de la malla de electrodos	213
Fig. VI.10 – E.R. Barberá: Malla de electrodos que constituyen el sistema de tomas de tierra de la subestación	219
Fig. VI.11 – E.R. Barberá: Distribución de los niveles de potencial (en kV) sobre la superficie del terreno. (Se han dibujado las líneas con incrementos de 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV)	220
Fig. VI.12 – E. Balaídos II: Vista en planta de la malla de electrodos del sistema de tomas de tierra. (Se indica con puntos negros la situación de las barras verticales)	222
Fig. VI.13 – E. Balaídos II: Vista tridimensional de la malla de electrodos del sistema de tomas de tierra	222
Fig. VI.14 – E.R. Balaídos II: Distribución de los niveles de potencial (en kV) en la superficie del terreno. (Se han dibujado las líneas con incrementos de 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV)	223
Fig. VI.15 – E.R. Balaídos II: Vista tridimensional de los niveles de potencial sobre la superficie del terreno	224
Fig. VI.16 – Existencia de dos tomas de tierra: Vista en planta de las mallas de electrodos de los dos sistemas de tierras separados entre sí una distancia de 20 m. (Se indican con puntos negros la situación de las barras verticales)	226
Fig. VI.17 – Existencia de dos tomas de tierra: Líneas de isopotencial (kV) sobre la superficie del terreno cuando se produce una descarga en una malla y las dos tierras están conectadas entre sí. (Se han dibujado líneas cada 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV)	227
Fig. VI.18 – Existencia de dos tomas de tierra: Líneas de isopotencial (kV) sobre la superficie del terreno cuando se produce una descarga y solamente existe un sistema de tomas de tierra. (Se han dibujado líneas cada 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV)	231
Fig. VI.19 – Existencia de dos tomas de tierra: Líneas de isopotencial (kV) sobre la superficie del terreno cuando se produce una descarga en una malla y no existe conexión entre las dos tomas de tierra. (Se han dibujado líneas cada 0.2 kV y, en negrita, cada 1 kV)	232

ÍNDICE DE TABLAS

	<u>pag.</u>
II. GENERALIDADES SOBRE LAS INSTALACIONES DE PUESTA A TIERRA	
Tabla II.1 – Efectos fisiológicos del paso de corriente eléctrica (de frecuencia entre 50 y 60 Hz) por el cuerpo humano	30
Tabla II.2 – Resistividades medias según el tipo de terreno	54
Tabla II.3 – Resistividades según la naturaleza del terreno	55
VI. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO DESARROLLADA	
Tabla VI.1 – Problema de Prueba: Valores de la Resistencia Equivalente del sistema obtenidos con la formulación de elementos de contorno BEM1D y con elementos finitos (FEM)	197
Tabla VI.2.a – Problema 1: Resistencia Equivalente de la malla de electrodos	204
Tabla VI.2.b – Problema 1: Tensiones de Malla y de Paso del sistema de electrodos	204
Tabla VI.3.a – Problema 2: Resistencia Equivalente de la malla de electrodos	205
Tabla VI.3.b – Problema 2: Tensiones de Malla y de Paso de la malla de electrodos	206
Tabla VI.4.a – Problema 3: Resistencia Equivalente de seis mallas de electrodos cuadradas de las dimensiones y características que se indican	207
Tabla VI.4.b – Problema 3: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas de electrodos	208
Tabla VI.5.a – Problema 4: Resistencia Equivalente de seis mallas rectangulares de las dimensiones y características que se indican	209
Tabla VI.5.b – Problema 4: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas rectangulares de electrodos	209
Tabla VI.6.a – Problema 5: Resistencia Equivalente de seis mallas en forma de L (figura VI.8) de las dimensiones y características que se indican	211

Tabla VI.6.b – Problema 5: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas de electrodos	212
Tabla VI.7.a – Problema 6: Resistencia Equivalente de seis mallas en forma de T (figura VI.9) de las dimensiones y características que se indican	214
Tabla VI.7.b – Problema 6: Tensiones de Malla y de Paso de las seis mallas de electrodos	214

RESUMEN

La puesta a tierra de una instalación eléctrica es imprescindible para garantizar su seguridad. Sin embargo, a pesar de su gran importancia y del elevado coste que tiene —sobre todo en las grandes instalaciones industriales, centrales productoras y subestaciones transformadoras de energía eléctrica—, su comportamiento en condiciones de fallo, su análisis y su diseño constituyen aspectos relativamente poco conocidos en el ámbito del uso controlado de la electricidad.

En esta tesis doctoral se presenta una formulación numérica general para el cálculo y el diseño asistido por ordenador de tomas de tierra en instalaciones eléctricas. En primer lugar, se identifica la naturaleza de los fenómenos físicos subyacentes en la disipación de corriente eléctrica en un terreno a través de una puesta a tierra, y se realiza el análisis detallado del funcionamiento de estos sistemas en condiciones de fallo. Así mismo, se discuten los parámetros y magnitudes que deben de calcularse para caracterizar una toma de tierra y se identifican con los utilizados en la práctica. A continuación se desarrolla un modelo matemático a partir de las ecuaciones generales que rigen los fenómenos electromagnéticos, se introducen razonadamente distintas hipótesis simplificadoras atendiendo a las características específicas del tipo de problemas que se desea resolver, y se analiza la viabilidad de la resolución directa de las ecuaciones obtenidas.

Con el fin de desarrollar una formulación numérica viable y eficaz, se reescribe el modelo matemático en términos de una ecuación integral lineal de primera clase, explorando las distintas estrategias para su tratamiento efectivo en problemas reales de tomas de tierra. El modelo numérico se desarrolla partiendo de una formulación variacional de la ecuación integral y aplicando el Método de Elementos de Contorno. Debido al elevado coste computacional que implica esta formulación es imprescindible introducir algunas simplificaciones importantes, así como desarrollar completamente una técnica de integración analítica específica de gran eficacia.

Finalmente, la formulación numérica obtenida se incorpora a un sistema de diseño asistido por ordenador de tomas de tierra, mediante el cual se resuelven diversos problemas de aplicación, se contrasta la validez de los resultados obtenidos, y se evidencia la viabilidad y eficacia de esta técnica como herramienta de cálculo en el diseño y proyecto de instalaciones de puesta a tierra.

TRIBUNAL DE TESIS Y CALIFICACIÓN

Esta Tesis Doctoral se presentó el día 30 de Mayo de 1995 en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de La Coruña.

El Tribunal de Tesis Doctoral lo componían los siguientes doctores:

- Presidente: **Dr. Manuel CASTELEIRO MALDONADO**
Catedrático de Universidad del área de Matemática Aplicada
Universidad de La Coruña
- Secretario: **Dr. Enrique ALARCÓN ÁLVAREZ**
Catedrático de Universidad del área de Mecánica de Medios
Continuos y Teoría de Estructuras
Universidad Politécnica de Madrid
- Vocal: **Dr. José Manuel CORREAS DOBATO**
Catedrático de Universidad del área de Matemática Aplicada
Universidad de Zaragoza
- Vocal: **Dr. José Jesús FRAILE MORA**
Catedrático de Universidad del área de Ingeniería Eléctrica
Universidad Politécnica de Madrid
- Vocal: **Dr. Juan de la Cruz SOLÁ MORALES**
Catedrático de Universidad del área de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Cataluña

La calificación otorgada fue APTO *CUM LAUDE* por unanimidad.

PREMIO GRUPO ENDESA 1995

Esta Tesis Doctoral fue galardonada con el *Premio del Grupo ENDESA 1995 para la Investigación Científica sobre Aplicaciones de la Electricidad en los Procesos Industriales* concedido por la Fundación CEOE en un premio único e indivisible, dotado con dos millones de pesetas, “por su contribución innovadora al diseño avanzado de subestaciones y otras instalaciones, por la protección efectiva de personas y equipos, así como por la mejora que aporta a una mayor calidad del servicio”.

El Jurado del Premio estaba formado por los Sres.:

Presidente: D. Eugenio TRIANA
Secretario: D. Juan Manuel DEL AMO
Vocal: D. José María FLUXÁ
Vocal: D. Antonio PASTOR
Vocal: D. Santiago PUENTE-VILLEGAS
Vocal: D. Juan TEMBORUY

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Una ciencia está formada por hechos, como una casa está construida de piedras; pero una colección de hechos no es una ciencia, como un montón de piedras no es una casa. (H. Poincaré, 1854-1912)

1. ANTECEDENTES

El espectacular aumento de la demanda energética en los países desarrollados desde finales del siglo pasado, ha ido acompañado del diseño y construcción de grandes centrales productoras y transformadoras de energía, que en la mayor parte de los casos —y con independencia de la fuente empleada— tienen la finalidad de producir electricidad.

Un aspecto esencial a tener en cuenta en las instalaciones eléctricas —y en particular en las centrales eléctricas, subestaciones y centros de transformación que operan con intensidades de corriente elevadas— es la seguridad, que entendida en su sentido más amplio incluye no solamente la protección de las personas que se encuentren en las inmediaciones de la instalación sometida a tensión, con la que pueden sufrir un contacto accidental, sino también la integridad de los equipos y de su funcionalidad cuando se produce una situación de fallo, y el mantenimiento de la regularidad del suministro eléctrico en la medida de lo posible.

Los “sistemas de puesta a tierra”, “tomas de tierra” o simplemente “tierras” son los dispositivos que se establecen con los objetivos de limitar la tensión a la que pueden estar sometidos los equipos en una situación de fallo, asegurar el correcto funcionamiento de los mecanismos activos de protección (por ejemplo, los interruptores automáticos) e intentar evitar o minimizar las averías que eventualmente puedan producirse. Desde el punto de vista funcional, las puestas a tierra actúan como elementos derivadores de la corriente eléctrica producida

durante un cortocircuito o un fallo en el aislamiento para su disipación en el interior del terreno. Y en general, las tomas de tierra de la mayor parte de las instalaciones eléctricas de corriente alterna están formadas por conductores cilíndricos, que conforman una malla de electrodos enterrada a una profundidad mínima de cincuenta centímetros.

Los primeros estudios sobre la conducción de la corriente eléctrica en el terreno datan de finales del siglo pasado, aunque estaban orientados a la determinación de sus propiedades eléctricas —en particular la resistividad— y se planteaban con fines muy distintos a los de esta tesis doctoral: principalmente la obtención de información sobre la composición de un subsuelo o la localización de objetos enterrados. De hecho, hasta mediados de los años treinta no se publicaron artículos ni otros trabajos científicos sobre la derivación de corriente eléctrica a través de una instalación de toma de tierra, ni se realizaron estudios con el objetivo de diseñar y analizar el comportamiento de este tipo de sistemas.

Durante la década de los cuarenta, se realizaron en Estados Unidos un número importante de ensayos experimentales sobre los efectos del paso de la corriente en seres humanos, con el objetivo de determinar las características eléctricas del cuerpo y las magnitudes máximas tolerables, y se publicaron varios estudios sobre la disipación de la corriente en el terreno y los factores que influyen en este fenómeno. A partir de los resultados de algunos de estos trabajos se elaboraron fórmulas y recomendaciones para la determinación o la estimación de la resistencia de los electrodos que constituyen la toma de tierra, las tensiones máximas que se producen, o los gradientes de potencial originados en la superficie del terreno cuando tiene lugar una descarga eléctrica en la instalación de tierra. De la recopilación de las principales conclusiones de estos primeros estudios y de las técnicas utilizadas en la práctica, surgió en 1954 un primer documento que contenía un conjunto de normas, especificaciones mínimas y recomendaciones a tener en cuenta en el momento de diseñar un sistema de tomas de tierra.

A principios de los años sesenta se publicó en Estados Unidos la primera guía para el cálculo y diseño de sistemas de puestas a tierra de instalaciones eléctricas, constituyendo una referencia obligada para la mayoría de las normativas que fueron surgiendo en los demás países del mundo. Posteriores ediciones de esta guía han ido incorporando las sucesivas novedades y mejoras de las técnicas y fórmulas propuestas en el documento original, incluyendo además la recopilación de los principales trabajos publicados sobre el tema.

En España, las normativas vigentes que contienen las normas básicas de obligado cumplimiento para el cálculo de los parámetros característicos de una toma de tierra se recogen en dos documentos: la Instrucción Técnica Complementaria número 13 del Real Decreto 3275/1982 sobre Condiciones Técnicas y Garantías de Seguridad en Centrales Eléctricas, Subestaciones y Centros de Transformación (también conocido como MIE-RAT) para las instalaciones de alta tensión, y la Instrucción Técnica Complementaria número 39 del Reglamento de Baja Tensión (MIE-BT). En líneas generales, podemos considerar que tanto ambas normativas como sus posteriores revisiones constituyen una síntesis de la edición de la guía americana de 1986.

2. ESTADO DEL CONOCIMIENTO DE LOS SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA DE INSTALACIONES ELÉCTRICAS

Antes de presentar el planteamiento y los objetivos del presente trabajo, es esencial situar en un contexto histórico el problema del cálculo de los sistemas de puesta a tierra de instalaciones eléctricas. En su sentido más amplio, denominaremos “instalación eléctrica” a cualquier conjunto de elementos conectados, susceptible de conducir la corriente eléctrica por su propia concepción o por causa accidental y de una forma permanente u ocasional. Los ejemplos de estas instalaciones abarcan desde las placas de circuitos impresos a las centrales transformadoras de alto voltaje.

El desarrollo de sistemas de seguridad que permitan una rápida disipación de la corriente eléctrica en el caso de producirse un defecto en el aislamiento, es particularmente crítico en las centrales y subestaciones transformadoras, debido a las elevadas intensidades de corriente con que operan. El primer intento de establecer unas normas y especificaciones mínimas de diseño de instalaciones de tomas de tierra fue realizado por el *American Institute of Electrical Engineers, AIEE* (precursor del actual *Institute of Electrical and Electronics Engineers, IEEE*) en 1954, con la publicación del artículo “*Application Guide on Methods of Substation Grounding*” [AIEE¹⁹⁵⁴]. En este trabajo, de apenas siete páginas, se resumían las principales técnicas utilizadas hasta ese momento en los sistemas industriales de puesta a tierra y se exponían algunas recomendaciones (fundamentalmente de tipo práctico) sobre aspectos tales como las dimensiones de los electrodos y picas, los valores admisibles de la resistencia equivalente de un sistema, la situación de las puestas a tierra de equipos específicos o los

métodos de medición experimental de parámetros eléctricos (como la resistencia de los electrodos o la resistividad del terreno). Sin embargo, esta primera recopilación no incluía, o solamente citaba de forma muy superficial, muchos aspectos importantes relacionados con las tomas de tierra (el efecto de los gradientes de potencial, por ejemplo). Todo ello, junto con la enorme cantidad de información disponible —en su mayor parte procedente de trabajos y experimentos realizados de forma independiente desde mediados de los años treinta— suscitó la necesidad de preparar un documento de síntesis y divulgación del conocimiento técnico acumulado. Este trabajo se inició en 1956 y se publicó como una Guía (la *AIEE Std.80*) en 1961 [AIEE¹⁹⁶¹].

2.1 Antecedentes de la Guía *AIEE Std.80*

Uno de los primeros artículos publicados sobre sistemas de puesta a tierra fue escrito por Dwight en 1936 [Dwight¹⁹³⁶] y se recoge, en parte, en la primera edición de la *AIEE Std.80*. En este artículo se presentan las primeras fórmulas para el cálculo de la resistencia equivalente de los electrodos de tierra en distintas disposiciones y formas, junto con ejemplos de aplicación práctica.

Una recopilación importante de trabajos anteriores sobre las características eléctricas del suelo (resistividad, influencia de las condiciones de humedad y temperatura, etc) y sus técnicas de medición (como el “método de las cuatro picas” de Wenner) fue publicado por Eaton en 1941 en la primera parte del artículo “*Grounding electric circuits effectively*” [Eaton¹⁹⁴¹]. Las otras dos partes están dedicadas a presentar variantes de las fórmulas de Dwight para el cálculo de la resistencia de los electrodos de una puesta a tierra y a introducir el concepto de “Sobretensión de Tierra (*Ground Potential Rise, GPR*)” aplicado a una instalación, así como a explicar los efectos de los gradientes de potencial sobre la superficie del terreno.

2.2 Los fundamentos de la *AIEE Std.80*

Los trabajos de Dwight, Eaton y otros autores propiciaron la organización por parte de la *AIEE* de una serie de conferencias sobre los sistemas de tomas de tierra de instalaciones eléctricas entre los años 1943 y 1944. Los principales resultados y conclusiones de estas reuniones técnicas se publicaron en varios artículos en 1945. El primero de los mismos (“*Fundamental considerations on ground currents*”, [Rudenberg¹⁹⁴⁵]) se convertiría unos años más tarde en uno de los tres trabajos que

más contribuyeron a la primera edición de la *AIEE Std.80*. Rudenberg se planteó desde un punto de vista científico los problemas relacionados con la disipación de la corriente eléctrica en el terreno a través de una instalación de toma de tierra. Fue, en definitiva, el primer autor que se propuso obtener expresiones de validez general para calcular la resistencia equivalente de las tomas de tierra. También apuntó la posible existencia de otros fenómenos de segundo orden, como el transporte de la corriente eléctrica por inducción sobre elementos conductores enterrados en el suelo y no conectados al sistema de tierras (tuberías o raíles por ejemplo), la desigual distribución de corriente en una malla de electrodos interconectados, la disminución del valor del potencial a lo largo de conductores de gran longitud debido a las pérdidas reactivas, y la eventual importancia de otros fenómenos colaterales de distinta naturaleza, como la corrosión. Así mismo, Rudenberg sugirió que al disminuir la resistencia equivalente del sistema de electrodos, los efectos de inducción magnética en la transmisión de corriente alterna podrían tener importancia en zonas localizadas en la superficie de los electrodos de la toma de tierra, aunque el fenómeno sería inapreciable en otros puntos del sistema.

Seis años después Laurent publicó su artículo “*General fundamentals of electric grounding technique*” [Laurent¹⁹⁵¹] que fue incorporado íntegramente a uno de los apéndices de la primera edición de la *AIEE Std.80*. En este artículo, Laurent se planteó en detalle el estudio de la resistencia y los gradientes de potencial de un conjunto de electrodos en cualquier disposición geométrica, proponiendo una serie de expresiones para el cálculo de la resistencia equivalente en las que se intentaba cuantificar tanto la influencia de la longitud de los conductores como la de su sección transversal. Laurent fue el primer autor que presentó una teoría sobre la estimación de los parámetros característicos de una toma de tierra, considerando el terreno formado por un conjunto de estratos horizontales con distintas propiedades eléctricas.

Probablemente el artículo más controvertido entre los incorporados a la Guía *AIEE Std.80*, fue el publicado por Koch en 1950 con el título “*Grounding methods for high-voltage stations with grounded neutrals*” [Koch¹⁹⁵⁰]. En su artículo, Koch propuso la inclusión de una serie de “factores de no-uniformidad” en las fórmulas y expresiones del cálculo de la resistencia equivalente, de la tensión de paso y de la tensión de malla, como resultado de los ensayos experimentales realizados en modelos de laboratorio de sistemas de puesta a tierra. Estos factores, que dependían de la geometría de la malla de electrodos (número de conductores, longitud total, etc.) contenían unos parámetros empíricos que debían ser ajustados

y que el autor no reportó en su totalidad, por lo que fue difícil reproducir las correlaciones presentadas.

Además de estos artículos de Rudenberg, Laurent y Koch, cabe destacar los trabajos de los investigadores Armstrong, Gross, Sunde, Tagg y Zaborszky (entre otros) en las disciplinas relacionadas con la transmisión y disipación de la corriente eléctrica en el suelo [Garrett¹⁹⁸⁶]; de Schwarz en la obtención de expresiones analíticas para el cálculo de la resistencia equivalente de mallas formadas por electrodos horizontales y picas [Schwarz¹⁹⁵⁴]; y las investigaciones de Dalziel sobre el comportamiento del cuerpo humano frente a descargas eléctricas y la estimación de sus características eléctricas, tales como las tensiones máximas admisibles o la resistencia eléctrica [Dalziel¹⁹⁴⁶].

Estos artículos y trabajos constituyeron el núcleo fundamental de la primera edición de la guía *AIEE Std.80* publicada en 1961. Sin embargo, algunos de estos puntos suscitaron críticas y desacuerdos desde la presentación del primer borrador del texto, como quedó de manifiesto en el *Winter Power Engineering Society Meeting* de 1958. A pesar de ello, esta guía se convirtió desde ese momento —y hasta nuestros días— en la primera fuente de información mundial sobre el cálculo y diseño de tomas de tierra de instalaciones eléctricas, siendo además la base de la práctica totalidad de las normativas elaboradas en lo sucesivo, aún vigentes en todo el mundo.

2.3 Aspectos no resueltos en la guía de 1961

La aparición de la guía y sus primeros intentos de puesta en práctica provocaron nuevas cuestiones, relacionadas principalmente con los “factores de no-uniformidad” sugeridos por Koch para la determinación de las tensiones de malla, contacto y paso de una instalación de tomas de tierra. Haciendo uso de las expresiones propuestas en la *AIEE Std.80*, el desarrollo de los primeros programas de ordenador permitió el cálculo de mallas con un número mayor de electrodos, aunque sólo en ejemplos académicos de geometría muy simple que —aún así— requerían tiempos de computación de varias horas en los ordenadores de la época. Con frecuencia, los valores obtenidos en zonas específicas de las mallas (por ejemplo en las esquinas) resultaban ser contradictorios o absurdos, obteniéndose potenciales negativos y otro tipo de soluciones sin sentido físico. Por otra parte, los diseñadores observaron dificultades para satisfacer simultáneamente los requerimientos de tensiones de paso y de contacto máximas admisibles debido al efecto combinado

de los factores de no-uniformidad. Otro punto importante a destacar era de índole económica: la intensidad de corriente de pérdida recomendada en la guía era entre un 30 y un 100 % mayor que la observada en la práctica, lo que representaba la instalación de un número mayor de conductores en la malla y —en consecuencia— un aumento notable y aparentemente innecesario en el coste total.

En otro orden de cosas, la guía de 1961 (a diferencia del artículo del año 1954, [AIEE¹⁹⁵⁴]) hacía muy poco énfasis en el empleo de picas (electrodos conductores hincados verticalmente en el suelo), a pesar de los importantes trabajos realizados por Eaton y Schwarz que demostraban la reducción de la resistencia equivalente de la toma de tierra y la modificación de los perfiles de potencial con su uso. En cuanto a las propiedades eléctricas del terreno (su resistividad, principalmente) la guía se remitía a la hipótesis de suelo homogéneo e isótropo, facilitando poca información sobre la obtención de los valores que debían de utilizarse en las fórmulas. Todo ello dio lugar a la adopción por parte de los ingenieros de valores excesivamente conservadores de estos parámetros, dando lugar a diseños muy sobredimensionados en la mayoría de los casos.

A principios de la década de los setenta las críticas se acentuaron, no solamente sobre las expresiones y fórmulas sugeridas por la *AIEE Std. 80* sino también sobre las teorías desarrolladas en la misma. A pesar de ello, la revisión del texto en 1976 no presentó diferencias conceptualmente importantes respecto al documento original. Las numerosas cuestiones planteadas que habían quedado sin respuesta en esta segunda edición propiciaron la formación de un grupo de trabajo por parte de un subcomité de la *IEEE*, con el objetivo de clarificar el tema y efectuar una puesta al día con las nuevas técnicas que se estaban estudiando. Los puntos clave de la guía que eran motivo de discusiones y críticas pueden resumirse en:

- la confusión que generaban los factores de no-uniformidad de Koch;
- los valores de los parámetros eléctricos del cuerpo humano —intensidades de corriente máximas admisibles, principalmente—, y los efectos de la colocación de capas de materiales pedregosos (grava, por ejemplo) en la superficie del terreno;
- el desconocimiento de los valores de la intensidad de corriente de pérdida a emplear en las fórmulas;
- el uso exclusivo de modelos de terreno homogéneo e isótropo sin posibilidad de generalización a modelos más sofisticados;
- la ausencia de instrucciones sobre la utilización de picas;

- la indefinición sobre el tamaño óptimo de las mallas de electrodos conductores a instalar; y por encima de todo,
- LA AUSENCIA DE UNA FORMULACIÓN SISTEMÁTICA COMPLETA PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA [Garrett¹⁹⁸⁶].

En efecto, la evolución de los trabajos relacionados con el cálculo y diseño de tomas de tierra de instalaciones eléctricas ha seguido históricamente dos tendencias claramente diferenciadas. Por un lado se han propuesto diferentes modelos matemáticos, normalmente a partir de ideas intuitivas sobre la circulación de corriente en un medio conductor y no a partir de un análisis riguroso de los fenómenos físicos subyacentes. En todo caso, los intentos de aplicar estos métodos a problemas reales han obligado tradicionalmente a realizar numerosas simplificaciones —algunas en absoluto evidentes, como la sustitución de los electrodos conductores cilíndricos por esferas— cuyos efectos ha sido imposible cuantificar hasta este momento debido a la insuficiente fundamentación teórica de los modelos propuestos y a la ausencia de una metodología de cálculo lo suficientemente precisa como para poder establecer una comparación. Por otro lado, se han propuesto numerosas expresiones empíricas, ajustadas a partir de mediciones experimentales realizadas en condiciones ideales y en casos muy sencillos.

Obviamente, el objetivo fundamental en el desarrollo de estos métodos tradicionales —tanto en uno como en otro caso— ha sido la obtención de fórmulas rápidas y expresiones analíticas simplificadas para la caracterización de las tomas de tierra. Y aunque este tipo de técnicas pueden tener utilidad durante las fases iniciales del diseño, su utilización durante el análisis y la definición final del sistema de tomas de tierra debería ser absolutamente cuestionable, debido a la incertidumbre sobre la validez de los resultados obtenidos mediante su aplicación.

Así, en el artículo *“Problems encountered with the Average Potential Method of analyzing substation grounding systems”* [Garrett & Pruitt¹⁹⁸⁵], se pone de manifiesto que uno de los métodos clásicos —probablemente el más sofisticado y mejor fundamentado de todos ellos— proporciona resultados tanto más absurdos e imprecisos cuanto mayor es la exactitud que se intenta conseguir. Para explicar esta paradoja los autores admiten múltiples conjeturas, aunque reconocen su impotencia para resolver el problema en ausencia de un estudio razonado y coherente de la fundamentación matemática del método y de las posibles fuentes de error.

Una parte no desdeñable de los trabajos se han orientado tradicionalmente hacia un aspecto que en este estudio se considera de interés secundario, como es la modelización del terreno mediante varias capas o estratos horizontales de diferente resistividad eléctrica. Por los motivos anteriormente expuestos, los métodos propuestos conducen en general a expresiones complicadas en series de funciones, que en muchos casos no son convergentes o dan resultados evidentemente erróneos (distribuciones de potencial que alcanzan valores más elevados en la superficie del terreno que en la propia toma de tierra, o incluso inferiores al potencial de referencia en un punto remoto).

Como se verá a continuación, este principal punto no resuelto de la guía de 1961 —“la ausencia de una formulación sistemática completa para el análisis de sistemas de puesta a tierra”, en palabras de Garrett en 1986— sigue siendo el principal problema abierto en la actualidad, ya que hasta la presentación de esta tesis doctoral no se conoce una técnica general de cálculo que permita acometer con garantías la caracterización de un sistema real de toma de tierra formado por un número muy elevado de conductores, con picas, electrodos situados a distintos niveles y en cualquier disposición espacial. Los métodos y modelos desarrollados por otros autores hasta el momento presente tan sólo permiten resolver problemas académicos con mallas extremadamente sencillas, todo ello con inaceptables requerimientos computacionales, y con una prácticamente absoluta incertidumbre sobre la exactitud e incluso la validez de los resultados obtenidos.

2.4 Las posteriores revisiones y la edición de 1986

El grupo de trabajo que recibió en 1978 el encargo de investigar las objeciones planteadas a la *AIEE Std.80* se denominó Grupo 78.1 y estaba dirigido por J.G. Sverak de la *Gibbs & Hill Inc.* de Nueva York. El primer proyecto que acometió el grupo fue el de intentar reproducir los resultados presentados por distintos autores ([Armstrong & Simpkin¹⁹⁶⁰], [Thapar & Puri¹⁹⁶⁷], etc.) con el objetivo de verificar los trabajos anteriores, recabar información proveniente de ensayos experimentales y contrastar los datos medidos con los obtenidos mediante las fórmulas y ecuaciones de la guía.

A raíz de la incorporación del *Electric Power Research Institute (EPRI)* al grupo de trabajo, se fijó también como objetivo del proyecto desarrollar un programa de ordenador que pudiera ser empleado para el cálculo de sistemas de puestas a tierras de subestaciones y equipamientos industriales. Uno de

los convenios de cooperación se firmó en 1980 entre el *EPRI* y la *Ohio State University* para la realización de los ensayos de verificación y la introducción de nuevas técnicas basadas en modelos de terreno de “doble capa”, publicándose los resultados en sendos informes: “*Substation grounding scale model test*” [Kasten & Caldecott¹⁹⁸³] y “*Soil resistivity tests using modelling techniques*” [Kasten & Caldecott¹⁹⁸⁵]. El segundo convenio se suscribió (también en 1980) entre el *EPRI* y el *Georgia Institute of Technology* con el compromiso de preparar programas de ordenador para el cálculo de las intensidades de corriente de pérdida y los diseños de las mallas de tierra. El informe final (conteniendo el fundamento teórico y el manual del usuario) fue publicado dos años más tarde [Joy et al.¹⁹⁸²], y el resumen del análisis (haciendo uso de la formulación desarrollada) de mallas de electrodos con distintas configuraciones e hipótesis fue presentado —en forma de gráficos y tablas— en una reunión técnica en Nueva York al año siguiente [Joy et al.¹⁹⁸³]. No obstante, estos cálculos se realizaron en mallas de conductores muy simples, y en los casos en que se emplearon electrodos de gran longitud los resultados obtenidos por los programas eran contradictorios (como lo muestra el hecho de que se obtuvieran valores del potencial en la superficie del terreno superiores a los aplicados en las mallas de tierra) [Garrett & Pruitt¹⁹⁸⁵].

Antes de la aparición del texto definitivo de la *AIEE Std.80* de 1986, sus contenidos se publicaron en un artículo titulado “*Safe substation grounding*” dividido en dos partes. La primera [Sverak et al.¹⁹⁸¹] se presentó en el *Summer Power Engineering Society Meeting* de 1980, celebrado en Minneapolis (Minnesota). En la misma se establecen, como criterios de diseño, los valores máximos admisibles de las diferencias de tensión que pueden existir en una subestación eléctrica en condiciones de fallo, y se exponen los distintos factores que deben ser considerados en toda instalación de tomas de tierra. Por otra parte, se hace especial énfasis en los métodos y fórmulas para la determinación de los parámetros eléctricos del cuerpo humano, en los tipos de circuitos accidentales que se producen con la intervención de seres vivos y en los efectos de la colocación de capas de material pedregoso en la superficie del terreno en el cual se encuentra la malla de electrodos. Se realiza además una puesta al día de las expresiones para el cálculo de los voltajes de paso y de contacto de una instalación eléctrica. La segunda parte del artículo [Sverak et al.¹⁹⁸²] se presentó en el *Winter Power Engineering Society Meeting* celebrado en Nueva York durante el mes de Febrero de 1982. Esta parte contiene una extensa información sobre el diseño de mallas de toma de tierra formadas tanto por electrodos horizontales como por picas, e

instrucciones sobre el modo de efectuar las conexiones del sistema. Un capítulo está exclusivamente dedicado a las subestaciones con aislamientos por gas comprimido (*Gas Insulated Substation, GIS*) y sus particulares características de seguridad. También se incluye un apartado especial destinado a la elección del tipo de material de los electrodos conductores, a sus dimensiones mínimas admisibles y a los problemas derivados de la corrosión. Cabe mencionar la inclusión de una breve introducción a la teoría del modelo de terreno de “doble capa” y sus repercusiones de tipo práctico, así como la revisión y actualización de las distintas expresiones para el cálculo de la resistencia equivalente de un sistema.

Las correcciones en los factores de no-uniformidad fueron presentadas por J.G. Sverak en 1983, junto con nuevas fórmulas simplificadas desarrolladas para el cálculo de las magnitudes de diseño de las instalaciones de puestas a tierra [Sverak¹⁹⁸⁴].

Estos trabajos constituyeron el núcleo fundamental de las modificaciones que se realizaron en la edición de la guía de 1986. Además se incorporaron (en forma de apéndices) los artículos más relevantes, así como programas de ordenador para el cálculo de mallas de conductores con las fórmulas propuestas, ejemplos de aplicación y las referencias de las principales publicaciones relacionadas con el cálculo y diseño de tomas de tierra de instalaciones eléctricas existentes hasta aquel momento.

2.5 La evolución de los trabajos a partir de los años ochenta

El desarrollo de la investigación en la modelización del fenómeno físico (la disipación de corriente eléctrica en el terreno) se ha visto fuertemente influenciada desde el inicio de la década de los ochenta por la importante expansión de la informática. Hasta ese momento todos los esfuerzos de la guía habían ido encaminados a presentar fórmulas, expresiones o gráficos sencillos en la medida de lo posible, con el objetivo de facilitar la labor de los diseñadores de mallas de conductores de tierra.

A partir del año 1979, aproximadamente, se empezaron a desarrollar con mayor generalidad programas de ordenador para el cálculo de los parámetros que caracterizan las tomas de tierra, haciendo uso de las fórmulas y métodos ya existentes. Una parte importante de los algoritmos propuestos están basados en técnicas de cálculo matricial. En este tipo de análisis los electrodos conductores se subdividieron en pequeños segmentos rectilíneos, cuyo comportamiento se supone

equivalente —de forma totalmente arbitraria— al de un conjunto finito o infinito de esferas o fuentes puntuales de corriente, para las que existe solución analítica. A su vez, los parámetros libres que determinan el comportamiento de las esferas (las intensidades de corriente que emanan de cada una de ellas) se ajustan imponiendo algún criterio de verificación aproximada de las condiciones de contorno (potencial constante y conocido en los electrodos). Las magnitudes eléctricas se obtienen finalmente teniendo en cuenta la acción de cada segmento individualmente y los efectos combinados de todos ellos [Kouteynikoff¹⁹⁸⁰], [Joy et al.¹⁹⁸²], [Joy & Wilson¹⁹⁸⁶], [Villas et al.¹⁹⁸⁷], [Meliopoulos et al.¹⁹⁸⁸], [Joy et al.¹⁹⁹³]. Un resumen de estas técnicas y su aplicación puede encontrarse en [Nagar et al.¹⁹⁸⁵].

Así, en algunos métodos se impone el valor del potencial (calculado aproximadamente) en un número suficientemente elevado de puntos arbitrariamente seleccionados, normalmente un punto en cada esfera. En métodos más sofisticados, como el “método de promediado del potencial” (*Average Potential Method, APM*), la distribución de la corriente que emana del conjunto de electrodos de la puesta a tierra se obtiene de forma que el potencial medio —también calculado aproximadamente— sea constante en cada uno de los segmentos en que se fragmentan los conductores [Garrett¹⁹⁷⁸], [Heppe¹⁹⁷⁹] [Garret & Pruitt¹⁹⁸⁵]. Como ya se ha indicado anteriormente, la aplicación indiscriminada de estos métodos conduce a resultados inverosímiles y claramente erróneos. Además, no es posible en general ni garantizar la validez de los resultados ni mejorar razonadamente la precisión y la eficacia de estas técnicas, debido —en esencia— a su insuficiente fundamentación y a la ausencia de un modelo matemático consistente.

En otro orden de cosas, se ha propuesto reiteradamente la utilización de métodos basados en la discretización de todo el dominio en elementos finitos (incorporando elementos infinitos para modelizar el contorno exterior) y/o en la discretización de la superficie de los electrodos mediante elementos de contorno [Yamashita et al.¹⁹⁸⁸], [Kurtovic & Vujevic¹⁹⁹¹]. Aunque la fundamentación matemática de este tipo de técnicas queda fuera de toda duda, su coste computacional es inaceptable cuando se aplican a los problemas que estamos considerando. De hecho, mediante los programas de cálculo desarrollados hasta el momento presente tan sólo se han podido analizar mallas extraordinariamente sencillas, con muy pocos conductores o con simetría de revolución. Para ello, además, es necesario utilizar supercomputadores de muy elevado coste, y no parece posible que mediante esta línea de desarrollo se puedan tratar problemas reales de

aplicación práctica en un futuro inmediato.

A raíz de la publicación de los artículos de Sverak de 1981 y 1982 [Sverak et al.¹⁹⁸¹],[Sverak et al.¹⁹⁸²], una parte importante de las líneas de investigación se dirigió no solamente a desarrollar formulaciones numéricas y programas de cálculo por ordenador, sino también a validar las fórmulas y expresiones sugeridas en la Guía y a eliminar en lo posible sus restricciones y limitaciones. La principal razón para seguir estudiando este tipo de métodos es la de disponer de fórmulas rápidas y fáciles de evaluar que permitan estimar los parámetros de una instalación de puestas a tierra en las fases iniciales del diseño. Entre estos trabajos merecen destacarse las expresiones analíticas para el cálculo de la resistencia equivalente obtenidas por [Dawalibi & Mukhedkar¹⁹⁷⁷] basadas en métodos de promediado del potencial, las sugeridas por [Nahman & Salamon^{1984,1986}] extendidas a modelos de terreno de “doble capa”, y las variantes de la fórmula de Schwarz de la *AIEE Std.80* propuestas por [Thapar et al.^{1991-b}]. Este último artículo contiene además una interesante comparación entre los resultados de la resistencia equivalente obtenidos mediante fórmulas analíticas y programas basados en técnicas de elementos finitos, aunque —como es habitual— tanto unas como otras se emplean exclusivamente en ejemplos muy sencillos y de tipo académico, sin aplicación práctica en instalaciones reales de toma de tierra.

A diferencia de lo que ocurre con la determinación de la resistencia eléctrica de un sistema de conductores, la deducción de fórmulas para las tensiones de malla y de contacto es mucho menos frecuente. Las más simples son las de Sverak y se encuentran publicadas en la Guía de 1986. No obstante, es interesante destacar la referencia [Thapar et al.^{1991-a}] en la que se propone modificar los factores de no-uniformidad para permitir la aplicación de las fórmulas analíticas a tomas de tierra de distintas formas y tamaños (aunque restringidas a mallas formadas por submallas cuadradas).

Como ya se ha mencionado anteriormente, otra de las líneas de estudio tradicionales relacionadas con las tomas de tierra de instalaciones eléctricas es el desarrollo de formulaciones generales que representen el terreno mediante modelos más sofisticados. Dadas las características particulares de este tipo de instalaciones, en las cuales se procede a regularizar el terreno antes de enterrar la malla de electrodos, los modelos más estudiados son aquellos que representan el suelo mediante un conjunto de capas horizontales de materiales

distintos y, por consiguiente, con propiedades eléctricas diferentes, de manera que en el interior de cada capa éstas se consideran constantes. El más sencillo de estos modelos es el denominado de “doble capa”, cuya aplicación al estudio ideal de una fuente puntual de corriente puede encontrarse en el texto *Earth resistances* de [Tagg¹⁹⁶⁴]. Uno de los primeros artículos en que se presentó el desarrollo de unas fórmulas (junto con un programa de ordenador y una comparación con datos experimentales) para el cálculo del potencial y la resistencia equivalente de un conjunto de conductores de tierra con un modelo de “doble capa” fue publicado en 1975 [Dawalibi & Mukhedkar¹⁹⁷⁵]. En este trabajo se presentan expresiones analíticas (basadas en considerar cada electrodo como una fuente puntual de corriente) y empíricas para la estimación de los parámetros de una instalación de tomas de tierra, incluyendo el efecto de la presencia de dos estratos horizontales de terreno mediante el método de las imágenes. Una interesante interpretación gráfica de este método aplicado a la modelización de “doble capa” puede encontrarse en [Ewy & Smolleck¹⁹⁸⁴]. Entre los trabajos recientes relacionados con este tipo de modelos cabe citar [Seedher et al.¹⁹⁸⁷], [Sato & Zaengl¹⁹⁸⁸], [Lazzara & Barbeito¹⁹⁹⁰] y [Kostic & Shirkoohi¹⁹⁹³], donde se exponen fórmulas y expresiones mejoradas o técnicas numéricas más o menos sofisticadas para los cálculos del potencial y la resistencia equivalente.

A finales de la década de los ochenta, el estudio de los modelos de terreno se extendió al desarrollo de formulaciones que admiten un número mayor de capas de materiales distintos: los denominados modelos “multi capa”. En estos casos, los requerimientos computacionales para el cálculo de los parámetros que caracterizan una toma de tierra son considerablemente más elevados que en los de “doble capa”, aunque a nivel conceptual tanto el análisis como las modificaciones que es preciso introducir en los procedimientos de cálculo son idénticos. En definitiva, se utilizan variantes del método de las imágenes, que obligan a simular un número importante de reflexiones de los electrodos para tener en cuenta los efectos de la presencia de varios estratos de terreno [Lagacé et al.¹⁹⁸⁸], [Dawalibi & Barbeito¹⁹⁹¹], [Takahashi & Kawase¹⁹⁹¹]. En [Lagacé et al.¹⁹⁹⁰] se presenta una interesante aplicación del método de las imágenes a suelos modelizados con estratos verticales para representar discontinuidades del terreno tales como fallas geológicas. Al igual que en el caso de los modelos “multi capa” convencionales, se precisa simular un número muy elevado de imágenes de los conductores para garantizar la imposición de las condiciones de contorno entre las interfases de los estratos. Así, en el caso particular presentado por los autores para

el cálculo de un electrodo con simetría de revolución, haciendo uso de un modelo de terreno con cinco estratos horizontales y verticales se necesitaron cerca de cien mil imágenes (y por tanto, un tiempo de computación cien mil veces mayor que en un modelo de una capa) para conseguir un error inferior al uno por ciento en el valor del potencial.

Tal y como se ha comentado anteriormente, en España los procedimientos de cálculo y diseño de instalaciones de toma de tierra se recogen casi en su totalidad en los Reglamentos de Alta y Baja Tensión [MIE-RBT¹⁹⁹²], [MIE-RAT¹⁹⁹³], y en publicaciones (patrocinadas por organismos públicos y empresas eléctricas [Unesa¹⁹⁸⁹], [Moreno Clemente¹⁹⁹¹]) que desarrollan y estructuran las fórmulas que aparecen en las normativas existentes para facilitar su aplicación en la práctica.

2.6 Resumen del estado del conocimiento anterior a esta tesis doctoral

Históricamente, la mayor parte de los trabajos y estudios sobre el cálculo y diseño de tomas de tierra de instalaciones eléctricas se han planteado con el objetivo de obtener fórmulas rápidas y sencillas para la estimación de los parámetros y magnitudes que intervienen en un sistema de puesta a tierra, principalmente la resistencia equivalente de los electrodos y las tensiones de paso, de contacto y de malla.

Por otro lado, a pesar de que se conoce bien el fenómeno de la disipación de la corriente eléctrica en el interior de un terreno y su modelización matemática a partir de las ecuaciones del electromagnetismo, no se dispone de un método general que permita abordar el análisis de un sistema real de tomas de tierra. Los desarrollados hasta este momento únicamente permiten el cálculo de instalaciones de toma de tierra muy sencillas (mallas cuadradas o rectangulares) y con un número pequeño de conductores. Además, en muchos casos, las hipótesis de partida de estos métodos son más que cuestionables, por ejemplo la sustitución de cada electrodo conductor de una toma de tierra (que suele ser una barra cilíndrica de varios metros de longitud y de unos pocos milímetros de diámetro) por una fuente puntual de corriente. La mayoría de los programas de ordenador existentes se basan o bien en aplicar las fórmulas intuitivas o expresiones semiempíricas, o en métodos basados en técnicas de cálculo matricial que analizan y ponderan el efecto de los segmentos en que se pueden dividir los electrodos que forman la malla. En ninguno de los casos se dispone de un estudio de los errores que se cometen con el empleo de estos métodos, ni una justificación de los motivos por los cuales

se producen resultados erróneos en muchos de los cálculos. Sin una metodología completa, razonada y general es imposible el análisis detallado de las hipótesis y simplificaciones que se realizan, así como la valoración de los resultados obtenidos y la mejora de los métodos de cálculo.

A su vez, las dificultades encontradas por los investigadores que han intentado desarrollar formulaciones fundamentadas en métodos de subdivisión del dominio (por ejemplo, el método de elementos finitos) para la resolución de este problema, están intrínsecamente relacionadas con las características propias de una instalación de puesta a tierra: el dominio (el terreno) es semiinfinito y su discretización geométrica es extraordinariamente complicada, ya que es preciso subdividir todo el dominio no ocupado por la toma de tierra, que suele estar constituida por un número elevado de conductores cilíndricos entrelazados, de gran longitud con respecto a su diámetro, no necesariamente iguales y situados en cualquier disposición y orientación espacial. Además, es relativamente sencillo comprobar (por ejemplo, utilizando un modelo ideal de una esfera en un dominio infinito) que en este tipo de problemas la solución varía fuertemente con el diámetro de los conductores y es singular cuando el diámetro tiende a cero, lo que impide “concentrar” el efecto de los conductores en su eje, y simplificar consiguientemente la discretización.

En 1989 se inició en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona —en particular en el seno del Departamento de Matemática Aplicada III de la *Universitat Politècnica de Catalunya*— una línea de investigación cuyo objetivo era desarrollar un método para el cálculo de las magnitudes y parámetros que intervienen en una instalación de toma de tierra. Las técnicas generales existentes en la bibliografía hasta ese momento, así como una introducción al modelo matemático que rige el fenómeno físico de la disipación de corriente en un terreno y su modelo numérico correspondiente (basado en el método de elementos de contorno) se resumieron en una Tesina de Especialidad [Moreno¹⁹⁸⁹] y en sendos artículos [Moreno et al.¹⁹⁹⁰], [Navarrina et al.¹⁹⁹¹]. Con esta formulación sólo pudieron resolverse algunos problemas académicos muy sencillos, debido a su elevadísimo coste computacional. No obstante, el planteamiento general sugería la posibilidad de identificar los cuellos de botella computacionales, y desarrollar otros métodos de mayor eficacia. Además, se observaron anomalías similares a las señaladas por otros autores en los métodos tradicionales [Garrett & Pruitt¹⁹⁸⁵], que aunque no pudieron explicarse adecuadamente sugerían de alguna forma que su origen se encontraba

específicamente en algunas simplificaciones realizadas en el desarrollo de la formulación. Estos prometedores trabajos, realizados durante los años 1989, 1990 y 1991 en Barcelona, constituyen el punto de partida de la presente tesis doctoral.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El proyecto de los sistemas de puesta a tierra en instalaciones eléctricas experimentaría un avance cualitativo de extraordinaria importancia si los técnicos tuviesen acceso a una herramienta integrada de “diseño asistido por ordenador de tomas de tierra”, en esencia: un programa que permita la definición, cálculo, visualización y representación de las tomas de tierra y de su comportamiento en condiciones de fallo, y la verificación de las normativas de seguridad.

Hace décadas que la evolución de la tecnología permite concebir una herramienta informática que facilite la definición, el cálculo y la modificación interactiva del diseño en los proyectos de ingeniería, incluyendo su visualización y representación en forma de planos. De hecho, desde hace poco menos de veinte años es posible desarrollar este tipo de herramientas para el tratamiento de diferentes problemas (cálculo de estructuras, análisis de circuitos, etcétera). Y el espectacular y continuo descenso en el coste de los sistemas informáticos facilita —desde hace relativamente poco tiempo— su implementación en estaciones de trabajo y ordenadores personales de bajo coste.

Sin embargo, tal y como se ha puesto de manifiesto en la exposición anterior, hasta el momento en que se presenta esta tesis doctoral no se dispone en las oficinas de proyectos —ni tampoco en los centros de investigación— de una metodología consistente y eficaz —ni siquiera viable— para el cálculo de los sistemas de puesta a tierra en instalaciones eléctricas. En consecuencia, el proyecto de este tipo de sistemas de protección se realiza de acuerdo con algunas recomendaciones sancionadas por la experiencia acumulada y la tradición, y algunas fórmulas simplificadas de cálculo —razonables, obviamente, aunque insuficientemente fundamentadas— que en ningún caso permiten analizar el comportamiento efectivo de los diseños propuestos en la práctica, y cuya fiabilidad se desconoce.

Por todo ello, el objetivo fundamental de esta tesis doctoral es el desarrollo de una formulación para el cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra en instalaciones eléctricas. La formulación deberá permitir el análisis de sistemas

de puesta a tierra reales, esto es: mallas con un número elevado de conductores cilíndricos de distintos materiales, con distintas longitudes y diámetros, y en cualquier disposición espacial (incluyendo los casos más frecuentes: barras enterradas horizontalmente y picas clavadas verticalmente). La caracterización de la instalación de toma de tierra deberá incluir la determinación de todas las magnitudes necesarias para verificar el cumplimiento de las condiciones de seguridad de la instalación, tanto en lo referente a la protección de los seres vivos como de los equipos que se encuentran en la instalación.

4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE ESTA TESIS DOCTORAL

A pesar de la gran importancia y el elevado coste que tienen los sistemas de puesta a tierra, y de su generalizada presencia en la mayor parte de las instalaciones eléctricas realizadas durante las últimas tres décadas (desde las unidades domésticas de consumo hasta las industriales, incluyendo las estaciones de producción, transformación y distribución de energía), no existe en la actualidad —hasta donde nosotros sabemos— ningún texto científico o técnico donde se encuentre correctamente analizado y explicado el funcionamiento de una toma de tierra, con todas sus implicaciones.

Por esta razón, el primer objetivo de esta tesis ha sido presentar de una forma clara y rigurosa el funcionamiento de una toma de tierra cuando tiene lugar el contacto accidental de una persona con una instalación sometida a tensión durante un cortocircuito. Este estudio permitirá identificar perfectamente la naturaleza de los fenómenos físicos involucrados —en esencia la derivación de corriente eléctrica hacia la toma de tierra y su disipación en el terreno— así como las hipótesis de trabajo que es razonable asumir, y las distintas magnitudes y parámetros que será necesario calcular para caracterizar el comportamiento de la toma de tierra en condiciones de fallo y la verificación de las normativas de seguridad. El buen entendimiento de todo ello es además —y en última instancia— un requerimiento imprescindible para plantear razonada y justificadamente la metodología de cálculo que se propone en esta tesis doctoral.

Una vez identificado el fenómeno físico esencial, las hipótesis de trabajo y los resultados esperados del análisis, el segundo objetivo de esta tesis ha sido deducir un modelo matemático adecuado a partir de las ecuaciones generales que rigen los fenómenos electromagnéticos. Este modelo matemático se ha desarrollado con la intención de que reproduzca con la máxima fidelidad los fenómenos físicos

relevantes para el análisis que nos proponemos efectuar, obviando el cálculo de lo innecesario, y teniendo en cuenta los datos de los que presumiblemente se dispondrá en el momento de realizar el proyecto de la instalación de toma de tierra.

Una vez establecido el modelo matemático propuesto, el tercer objetivo de esta tesis ha sido estudiar las posibles estrategias para su resolución efectiva en problemas de aplicación práctica al análisis de sistemas de tomas de tierra reales. Este estudio se ha abordado desde una perspectiva general, aunque posibilista, para lo que se han tenido en cuenta las características específicas de los problemas en cuestión. En todo caso, nuestro propósito ha sido seleccionar, entre las posibles, la estrategia más prometedora, para desarrollar finalmente una formulación numérica viable, robusta y eficaz, que permita la resolución de este tipo de problemas en la práctica con unos requerimientos computacionales aceptables.

Una vez establecida la modelización matemática que rige el fenómeno físico del problema sometido a estudio, y una vez identificada la estrategia más prometedora para su tratamiento, el cuarto objetivo de esta tesis ha sido el desarrollo completo de una formulación numérica para su resolución, atendiendo especialmente a las particulares características geométricas de los sistemas de tomas de tierra utilizados en la práctica. En esta fase de la investigación es imprescindible conjugar el máximo rigor con la búsqueda de la simplicidad, con el fin de obtener finalmente un modelo numérico consistente y matemáticamente bien fundamentado que pueda ser implementado en un sistema de diseño asistido por ordenador de tomas de tierra.

Y por último, el quinto objetivo de esta tesis doctoral ha sido contrastar la validez de la formulación desarrollada, y mostrar su potencia como herramienta efectiva para el análisis de grandes mallas de electrodos de tomas de tierra. Con el fin de validar la formulación se plantean diversos problemas académicos, y se comparan los resultados obtenidos con los que proporcionan otras técnicas numéricas y los métodos tradicionales de cálculo comúnmente empleados en la práctica. Con el fin de mostrar la eficacia de la formulación propuesta se resuelven diversos problemas de aplicación de una gran complejidad, en los que se analiza el comportamiento de varias mallas de tomas de tierra de gran tamaño que se encuentran actualmente en servicio en subestaciones eléctricas.

5. CONTENIDO DE ESTA TESIS DOCTORAL

En el capítulo **II** se presentan y estudian las características generales de los sistemas de puesta a tierra de una instalación eléctrica. En primer lugar se definen las distintas magnitudes y parámetros empleados en estos sistemas desde el punto de vista de la seguridad, y las circunstancias y factores de riesgo que pueden influir en los mismos cuando se produce una derivación de corriente al terreno. Con objeto de estudiar el funcionamiento de una toma de tierra, clarificar las distintas magnitudes que se emplean en su caracterización y justificar la metodología de cálculo que se propone posteriormente, se presenta un análisis completo de la circulación de corriente y disipación de cargas en el terreno cuando se produce el contacto accidental de una persona con una parte de una instalación eléctrica sometida a tensión debido a un defecto en el aislamiento. Por último, se describen las principales características y propiedades eléctricas del terreno, así como los modelos propuestos en la bibliografía técnica para representar el suelo como medio conductor.

En el capítulo **III** se desarrolla en detalle el modelo matemático del problema físico sometido a estudio, esto es: la disipación en el interior del terreno de la corriente eléctrica derivada a través de la toma de tierra. El punto de partida para la descripción matemática de este fenómeno son las ecuaciones de conservación de la carga eléctrica, las ecuaciones generales de Maxwell del electromagnetismo y la ecuación constitutiva del medio conductor. A continuación, se exponen y justifican las distintas hipótesis simplificadoras que se pueden introducir razonablemente en la formulación y en la modelización del terreno, teniendo en cuenta las peculiares características de los problemas que nos proponemos abordar y resolver. Estas hipótesis permiten plantear el comportamiento de la toma de tierra durante una condición de fallo en términos de un problema exterior de Dirichlet. Finalmente, se analiza la inviabilidad de la resolución directa de este problema, consistente en una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en un dominio tridimensional e infinito, cuyo contorno es geoméricamente muy complicado.

En el capítulo **IV** se presentan conceptos importantes de la “teoría del potencial”, necesarios para transformar el problema anterior en una ecuación integral de Fredholm de primera especie en un dominio bidimensional (la superficie de los electrodos que conforman la toma de tierra). A pesar de que mediante esta estrategia el problema tridimensional se ha sustituido por un problema bidimensional equivalente —y por tanto teóricamente más sencillo— cuya solución

es viable, su tratamiento numérico constituye un problema en absoluto trivial. Por ello, se efectúa también una breve revisión de los métodos numéricos históricamente planteados para la resolución de este tipo de ecuaciones integrales, y se selecciona razonadamente la estrategia más prometedora para la solución del tipo de problemas que nos proponemos abordar.

En el capítulo **V** se desarrolla completamente el modelo numérico propuesto para la resolución de la ecuación integral. El primer paso es la obtención de una formulación variacional de tipo general mediante la aplicación de residuos ponderados, y su posterior discretización mediante elementos de contorno bidimensionales. El aún excesivo coste computacional de esta formulación de elementos de contorno bidimensionales requiere la introducción de algunas simplificaciones adicionales, que se explican y justifican razonadamente con el fin de obtener una nueva formulación en términos de elementos de contorno unidimensionales. Finalmente se discute su implementación práctica, y se desarrollan técnicas de integración analítica especialmente concebidas para la incorporación de la formulación simplificada de elementos de contorno unidimensionales en un sistema de diseño asistido por ordenador. Estas técnicas de integración analítica son esenciales para la viabilidad y el buen funcionamiento de la formulación, como es frecuente en las aplicaciones del método de elementos de contorno, debido al fuerte malcondicionamiento numérico de los subintegrandos de los distintos términos que aparecen en el desarrollo. La deducción completa de esta formulación, caracterizada por la estructura recursiva de los cálculos, y un resumen de la misma se presentan en sendos anexos a este capítulo.

El capítulo **VI** está dedicado a la presentación y análisis de resultados. En primer lugar, se realiza una validación del modelo numérico propuesto mediante la resolución de un problema académico y la comparación de los resultados que se obtienen al resolverlo con distintos métodos (elementos finitos y elementos de contorno). Para permitir la aplicación de estos métodos es obligado plantear un problema ideal, con una geometría muy sencilla. En la segunda parte de este capítulo se efectúa una comparación entre los resultados obtenidos mediante la formulación numérica desarrollada con los obtenidos mediante algunos métodos tradicionales recogidos en la bibliografía. Obviamente, en este estudio comparativo se analizan también problemas de tipo académico (malladas cuadradas o rectangulares con pocos electrodos) que no corresponden a ninguna instalación real, dadas las limitaciones que tienen las técnicas tradicionales de cálculo. Finalmente, se presentan tres ejemplos de aplicación de la formulación numérica

propuesta que demuestran su viabilidad para el cálculo de mallas reales de tomas de tierra de subestaciones eléctricas. La primera es la malla Barberá situada en una población cercana a Barcelona. Esta toma de tierra está constituida por más de 400 electrodos cilíndricos que conforman un entramado plano enterrado a 80 cm de profundidad de la superficie del terreno, y que cubre una extensión de más de 6500 m². En segundo lugar se presenta la toma de tierra de la subestación Balaidos II (cercana a la ciudad de Vigo) constituida por 107 conductores que conforman una malla paralela a la superficie del terreno, y por 67 picas de 2.5 m de longitud clavadas verticalmente en el suelo, y que cubre un área total de 4800 m². El tercer ejemplo que se muestra es un caso de gran complejidad, en el que se comparan los efectos de la conexión o no-conexión eléctrica de tomas de tierra próximas cuando en una de ellas tiene lugar una derivación de corriente. El estudio se realiza con dos mallas de toma de tierra iguales (se utiliza arbitrariamente la malla de la subestación Balaidos II) con 174 conductores cada una (incluyendo las picas), y que cubren una superficie total de 32000 m².

Finalmente, en el capítulo **VII** se exponen las conclusiones de este estudio y las perspectivas abiertas para futuras líneas de investigación.

Y por último, se recogen las referencias mencionadas a lo largo de todo el documento y la bibliografía consultada.

CAPÍTULO II

GENERALIDADES SOBRE LAS INSTALACIONES DE PUESTA A TIERRA

Si al pasar por un terreno cercano a un poste eléctrico notas corriente eléctrica en las piernas, sepárate rápido en sentido contrario; si pretendes apoyarte en el poste, eres muerto. (“Manual de Conservación de Líneas de Alta Tensión y Líneas de Contacto”. RENFE, 1970)

1. INTRODUCCIÓN

Una de las mayores preocupaciones de los ingenieros eléctricos desde los inicios del uso controlado de la electricidad por el hombre ha sido garantizar la seguridad de las instalaciones eléctricas. Se denomina “instalación eléctrica” al conjunto de aparatos y circuitos asociados previstos para un fin determinado: producción, conversión, rectificación, transformación, transmisión, distribución o utilización de la energía eléctrica.

Los problemas relacionados con la seguridad están presentes en todo tipo de instalaciones eléctricas: desde las redes de distribución, centrales, subestaciones y centros de transformación de alta tensión (tensión nominal superior a 1 kV) a los equipos y circuitos electrónicos de baja tensión. El cálculo y diseño de sistemas de protección (entre los que se incluyen las instalaciones de puesta a tierra) es particularmente importante en centros y subestaciones transformadoras, ya que las intensidades de las “corrientes de falta o de defecto” (*fault currents*) que pueden circular por la instalación (y debidas a eventuales defectos en su aislamiento) son muy elevadas. Los aspectos relativos a la seguridad abarcan, en su sentido más amplio, no solamente la seguridad de las personas sino también la del equipamiento (en definitiva, garantizar la integridad de la instalación eléctrica cuando tiene lugar una derivación de corriente) y la continuidad del suministro eléctrico.

2. DEFINICIÓN DE “SISTEMA DE PUESTA A TIERRA”

El Reglamento Electrotécnico de Baja Tensión del Ministerio de Industria y Energía [MIE-RBT¹⁹⁹²] en la Instrucción Técnica Complementaria número 39 define los “sistemas de puesta a tierra” como “toda ligazón metálica directa sin fusible ni protección alguna, de sección suficiente, entre determinados elementos o partes de una instalación y un electrodo, o conjunto de electrodos, enterrados en el suelo, con objeto de conseguir que en el conjunto de instalaciones, edificios y superficies próximas del terreno no existan diferencias de potencial peligrosas, y que al mismo tiempo, permita el paso a tierra de las corrientes de falta o las corrientes procedentes de cortocircuitos y de descargas de origen atmosférico”. Los sistemas de puesta a tierra (figura II.1) están formados por la toma de tierra, las líneas principales de tierra, sus derivaciones y los conductores de protección que se conectan a las masas y equipos que se desean preservar.

Se denomina “toma de tierra” a la instalación que tiene como fin establecer la unión eléctrica de una parte del circuito (o una parte conductora no perteneciente al mismo) con el terreno y que en general está formada por un conjunto de electrodos, líneas de enlace y puntos de puesta a tierra, tal como se indica en la figura II.1.

De una forma genérica, se habla de “electrodo” para referirse al conductor o malla de conductores que se encuentra permanentemente en buen contacto eléctrico con el terreno y que sirve para facilitar el paso a éste de las corrientes de falta que puedan originarse. Las “líneas de enlace con tierra” son el conjunto de conductores que unen los electrodos enterrados con los puntos de puesta a tierra. Estos conductores pueden encontrarse fuera del terreno o en el seno del mismo pero, en todo caso, convenientemente aislados. Un “punto de puesta a tierra” es un punto equipado con dispositivos de conexión de conductores situado fuera del terreno que sirve de unión entre la línea de enlace con tierra y la línea principal de tierra de la instalación eléctrica. Las “líneas principales de tierra” unen, a través de derivaciones y de conductores de protección, los puntos de puesta a tierra con las masas que se desean proteger (figura II.1).

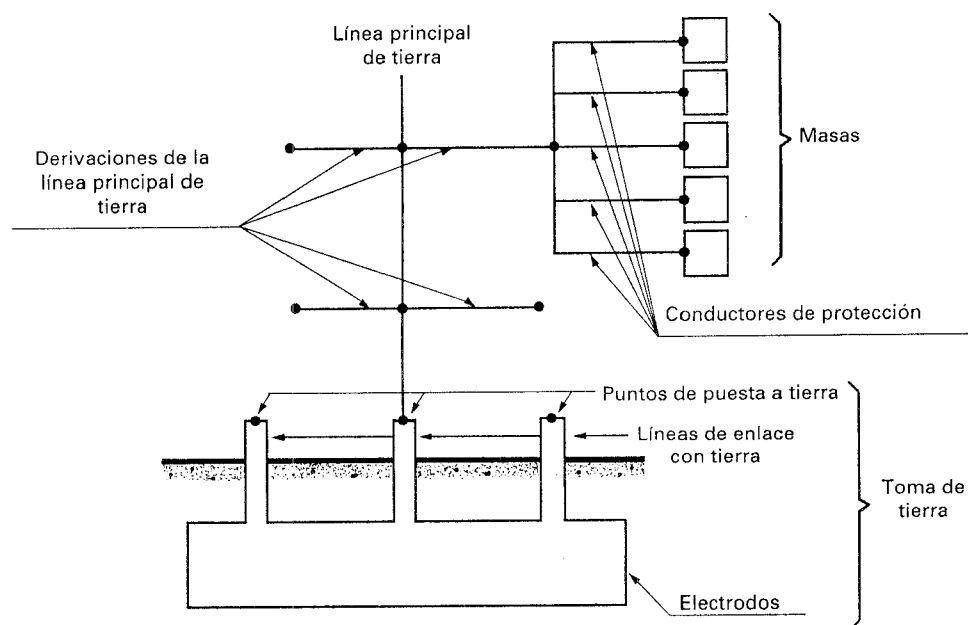


Fig. II.1 – Esquema de los distintos elementos que constituyen un sistema de puesta a tierra. (Fuente: [MIE-RBT¹⁹⁹²]).

3. SEGURIDAD DE LAS INSTALACIONES DE TOMA DE TIERRA

3.1 Objetivos de una instalación de toma de tierra

Sin duda alguna, la parte más importante de un sistema de puesta a tierra —objeto del presente estudio— es la toma de tierra, y concretamente el conjunto de electrodos que constituyen la unión eléctrica con el terreno. Los dos objetivos del diseño e instalación de una toma de tierra son:

- el transporte y disipación por el subsuelo de las corrientes eléctricas producidas, tanto en condiciones de funcionamiento normales —sin exceder ninguno de los límites operativos de los equipos que puedan afectar a la continuidad del servicio—, como en condiciones de fallo —de modo que se garantice la integridad de los equipos—; y
- la protección a las personas que trabajan o caminan por los alrededores de una instalación eléctrica, evitando que queden expuestas a sufrir *shocks* o descargas de importancia.

3.2 Clasificación de las tomas de tierra según su función

Las tomas de tierra de una instalación eléctrica pueden clasificarse de acuerdo con su funcionalidad en dos tipos: de protección y de servicio (ver figura II.2).

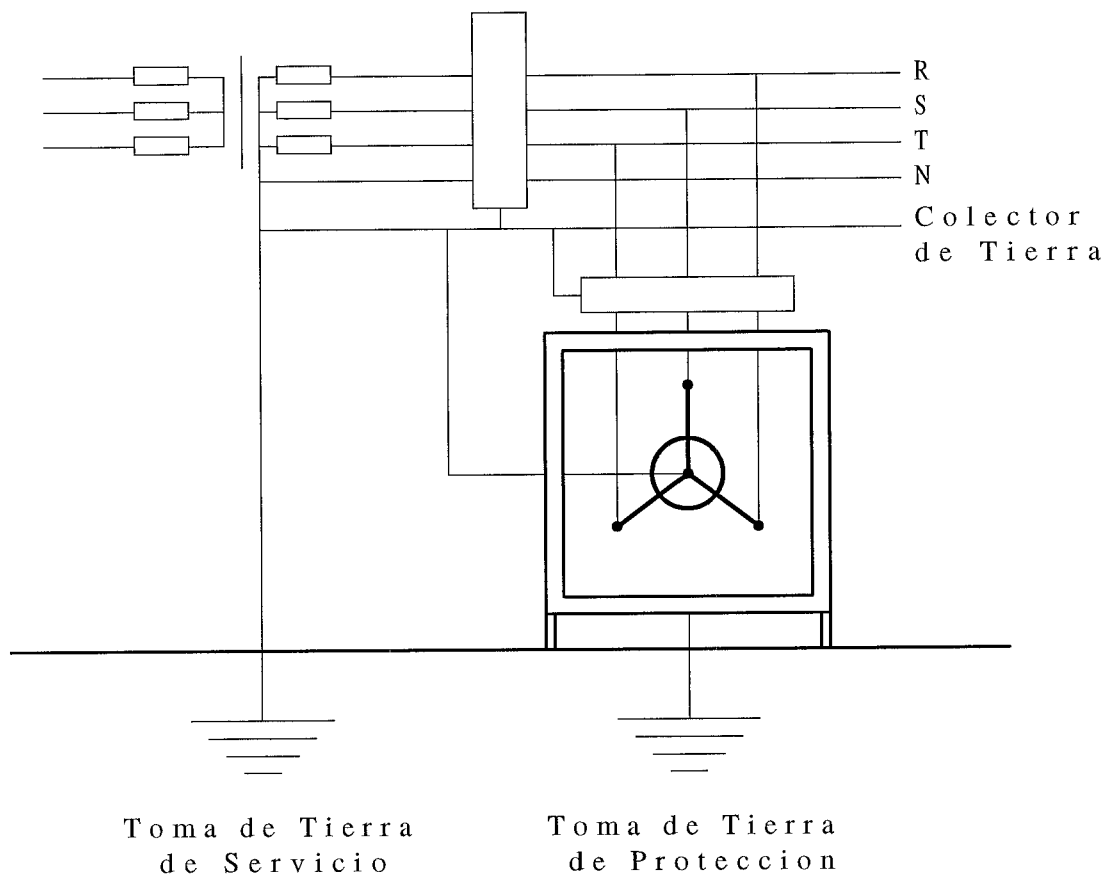


Fig. II.2 – Esquema de los dos tipos de tomas de tierra según su funcionalidad.

3.2.1 Toma de tierra de protección

Es la conexión directa de partes conductoras de una instalación no sometidas (normalmente) a tensión eléctrica pero que lo pudieran estar debido a una avería, un contacto accidental, una descarga atmosférica o una sobretensión. Estas tomas de tierra tienen dos funciones básicas: **1)** favorecer un circuito de retorno a tierra entre la parte conductora del equipo afectado y la entrada de la alimentación, y **2)** aproximar el potencial de la parte conductora al de la superficie del terreno

cercano a la misma, de forma que se proteja a las personas contra diferencias de tensión peligrosas.

El Reglamento de Centrales Eléctricas, Subestaciones y Centros de Transformación del Ministerio de Industria y Energía [MIE-RAT¹⁹⁹³] establece la obligatoriedad de instalar tomas de tierra de protección en:

- los chasis y bastidores de aparatos de maniobra;
- las envolventes de los conjuntos de armarios metálicos;
- los elementos metálicos de la estructura de los edificios (columnas, soportes, pórticos, armaduras del hormigón armado), puertas, ventanas, escaleras, barandillas, registros y tapas;
- las vallas y cercas metálicas;
- los elementos metálicos que salen fuera del recinto de la instalación tales como raíles, tuberías y blindajes y conductos metálicos;
- las carcasas de transformadores, generadores, motores y otras máquinas; y
- los hilos de guarda y cables de tierra de las líneas aéreas de conducción.

3.2.2 Toma de tierra de servicio

Una toma de tierra de servicio tiene por objeto la derivación de corrientes elevadas al terreno, uniendo a tierra de forma temporal parte de las instalaciones que están normalmente bajo tensión, o de forma permanente ciertos puntos de los circuitos eléctricos de servicio. Este tipo de toma de tierra se encuentra en:

- los neutros de los transformadores, alternadores y otros aparatos;
- los circuitos de baja tensión de los transformadores de medida;
- los limitadores, descargadores, autoválvulas, pararrayos, centros de estrella de motores trifásicos;
- uno de los polos de una batería de acumuladores;
- la entrada de las subestaciones; y
- los elementos de derivación a tierra de los seccionadores de puesta a tierra.

3.3 Circunstancias y factores de riesgo que influyen en una instalación de toma de tierra

La corriente eléctrica que fluye al terreno cuando se produce una situación de fallo origina una distribución de potenciales eléctricos en la superficie del terreno en el que está enterrada la toma de tierra (figuras II.3.a y II.3.b). Como consecuencia de ello, en determinadas zonas de la superficie, se crean regiones con gradientes de potencial importantes que pueden afectar a las personas que se encuentren en los alrededores de la instalación.

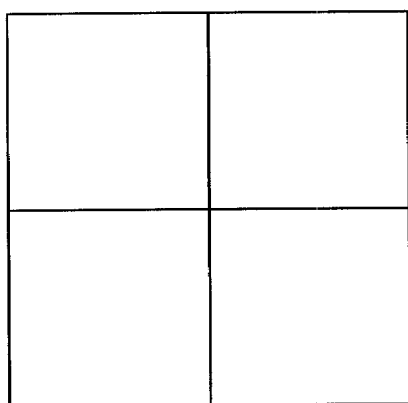


Fig. II.3.a - Toma de tierra de 16 m \times 16 m formada por 12 conductores (de diámetro 1 cm) enterrada a 80 cm de profundidad.

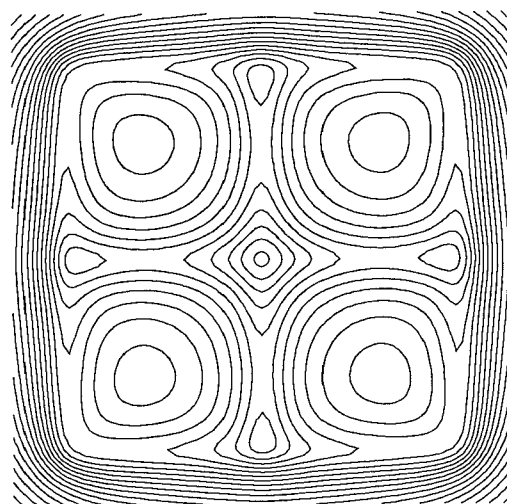


Fig. II.3.b - Líneas de isopotencial en la superficie del terreno al producirse una corriente de fallo en la malla.

Los principales condicionantes que deben tenerse en cuenta en el momento de evaluar la seguridad de un sistema de puesta a tierra son: **1)** el tamaño de la instalación de toma de tierra y el estado de conservación en que se encuentra, **2)** el valor de la resistividad del terreno, y **3)** la ausencia de resistencias u otros sistemas de protección que limiten la intensidad de la corriente de fallo si se produce el contacto fortuito de una persona con la instalación eléctrica.

Los factores más destacados que condicionan la importancia de un *shock* eléctrico y de sus efectos sobre una persona que toca una parte de la instalación

cuando tiene lugar una descarga son:

- la elevada intensidad de corriente que puede fluir al conjunto de electrodos de la toma de tierra, en comparación con el tamaño y resistencia del sistema diseñado;
- la distribución de potencial en la superficie del terreno, originada por el flujo de corriente, que puede dar lugar a elevadas diferencias de potencial entre puntos cercanos de la superficie;
- el valor de la frecuencia de la corriente eléctrica; y
- la duración de la descarga eléctrica.

A estos factores deben añadirse dos circunstancias relacionadas directamente con las personas que se encuentran en la instalación eléctrica cuando tiene lugar la descarga: **1)** la presencia del individuo en un lugar, en un momento y en una postura tal que esté en contacto simultáneamente con dos puntos entre los que existe una elevada diferencia de potencial; y **2)** el tiempo que dura el contacto del individuo con la instalación eléctrica durante la derivación de corriente.

Obviamente, desde un punto de vista práctico, establecer sistemas de prevención absolutamente fiables no es posible, o no es económicamente viable. Sin embargo, el número de accidentes observados en la vida real es bajo. En la actualidad las normativas sobre diseño de instalaciones de puesta a tierra, como por ejemplo la alemana DIN-57141 (edición de 1977) o la española ([MIE-RAT¹⁹⁹³], ITC número 13), permiten, en determinadas instalaciones, reducciones de los parámetros utilizados para el dimensionamiento de las tomas de tierra al tener en cuenta la escasa probabilidad de que se produzcan las condiciones más desfavorables [Rudenberg¹⁹⁴⁵], [Sverak¹⁹⁸¹], [Garrett¹⁹⁸⁶].

3.4 Seguridad humana

Los parámetros eléctricos más importantes que caracterizan el cuerpo humano son su resistencia eléctrica, la intensidad máxima tolerable (generalmente es la intensidad a partir de la cual se produce la fibrilación ventricular del corazón) y las diferencias de potencial máximas permisibles. La determinación de estas magnitudes y sus márgenes de variación han sido profusamente estudiados desde los años cuarenta, existiendo una amplia documentación al respecto [Dalziel & Lee¹⁹⁶⁸], [Dalziel^{1969,1972}], [Elek¹⁹⁵⁸], [Ferris et al.¹⁹³⁶], [Kiseliev¹⁹⁶⁵], [Kouwenhoven¹⁹⁵⁹], [Lee¹⁹⁶⁶], [Osypka¹⁹⁶⁶], [TIT Research Institute¹⁹⁷⁷]. Una recopilación de parte de estos trabajos se recoge en la normativa americana

ANSI/IEEE 80-1986, y un resumen de las misma puede encontrarse en [Garrett ¹⁹⁸⁶] y [Sverak et al. ¹⁹⁸¹].

Los efectos que produce el paso de la corriente eléctrica por un ser humano y cómo afecta a los órganos vitales dependen de la duración, magnitud y frecuencia de la corriente de descarga, siendo la fibrilación ventricular del corazón una de las consecuencias más peligrosas que acarrea. En lo referente a la frecuencia de la corriente, una persona es capaz de tolerar intensidades elevadas a frecuencias grandes (3,000-10,000 Hz), pero es extremadamente vulnerable a las frecuencias normales de 50 ó 60 Hz (se ha constatado que pueden ser mortales intensidades de corriente superiores a 0.1 A). La tabla II.1 resume los efectos fisiológicos más comunes, resultantes del paso de corriente eléctrica (de frecuencia entre 50 y 60 Hz) por el cuerpo humano dependiendo de la magnitud de ésta.

Intensidad (A)	Efectos Fisiológicos
0.001	Límite de percepción. La corriente se nota sensiblemente en las yemas de los dedos.
0.001-0.009	Se percibe perfectamente el paso de la corriente, pero no afecta la coordinación muscular.
0.009-0.025	Intensidad de corriente molesta; es difícil sujetar el objeto sometido a tensión.
0.025-0.060	Intensidad de corriente peligrosa, que provoca contracciones musculares y dificulta la respiración.
0.060-0.100	Intensidad de corriente muy peligrosa. Se produce fibrilación ventricular, parada cardíaca y colapso respiratorio.

Tabla II.1 – Efectos fisiológicos del paso de corriente eléctrica (de frecuencia entre 50 y 60 Hz) por el cuerpo humano.

En cuanto a la duración de la descarga eléctrica, Dalziel estableció en 1941 una correlación entre la intensidad de corriente que un individuo es capaz de soportar (I_H) y el tiempo durante el cual circula la corriente (t_D) (en el rango de 0.3 a 3 segundos). La relación (obtenida empíricamente) es $I_H = k_H / \sqrt{t_D}$, siendo k_H una constante dependiente de la constitución física de la persona, fundamentalmente de su peso (los valores usuales son de $k_H = 0.116$ para 50 kg y de $k_H = 0.157$ para 70 kg) [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶]. En definitiva, la intensidad de corriente que el cuerpo puede absorber es mayor cuanto menor sea el tiempo de exposición (una persona de 70 kg es capaz de soportar una corriente de hasta 0.222 A si la descarga dura 0.5 s y solamente la mitad si ésta es de 2 s).

Un parámetro importante que interviene en el cálculo y dimensionamiento de una toma de tierra (por ejemplo, para establecer las tensiones máximas permisibles en una instalación) es la resistencia eléctrica del cuerpo humano. En la mayoría de los casos, esta resistencia se considera medida entre las extremidades de una persona: de una mano al pie del lado contrario, entre ambas manos, entre una mano y los dos pies, entre los dos pies, etc. La gran variabilidad observada en mediciones de la resistencia eléctrica de seres humanos (entre los 300 Ω y 3,000 Ω [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶]) hace muy difícil fijar un único valor de la misma, dado que depende de múltiples factores como por ejemplo la existencia de heridas sobre la piel en el punto donde se produce la descarga, el tipo de contacto con la superficie del terreno y su grado de aislamiento, etc. En la práctica, el valor comúnmente asignado a la resistencia eléctrica del cuerpo humano es de 1,000 Ω [MIE-RAT¹⁹⁹³].

3.4.1 Tipos de contactos accidentales

Las dos circunstancias más frecuentes en las que se puede producir una circulación de corriente eléctrica de cierta intensidad a través del cuerpo humano son:

- el paso de corriente de un pie a otro (circuito “pie-pie”), sin ningún otro contacto con la instalación eléctrica. En este tipo de contacto accidental cabe incluir el flujo de corriente en el caso de que una persona se encuentre tendida en el suelo en el momento de la descarga, o la corriente circulante entre las extremidades delanteras y traseras de un cuadrúpedo que, en el caso de animales grandes, pueden conectar puntos de la superficie del terreno con una elevada diferencia de potencial. Esta diferencia, denominada “tensión de paso” y que depende de la distancia que separa ambos pies (d_p), genera una

intensidad de corriente (I_H) inversamente proporcional a la resistencia que el individuo ofrezca al paso de la corriente eléctrica [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶]. La figura II.4.a muestra de forma simplificada esta situación de fallo.

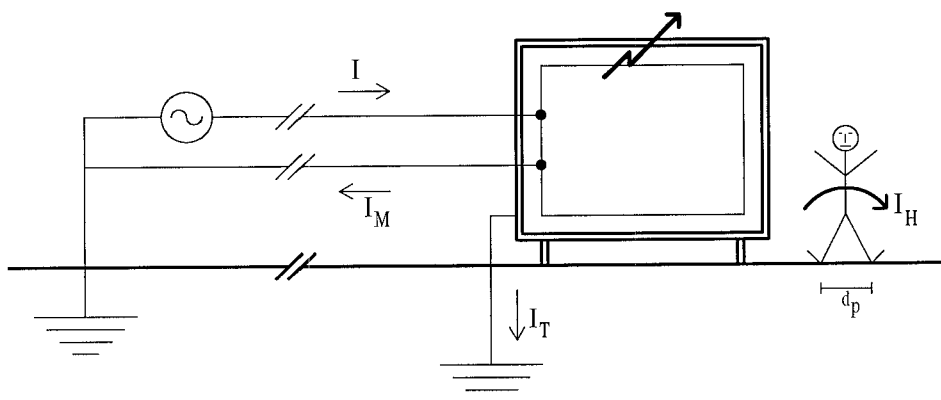


Fig. II.4.a – Esquema del contacto accidental de “tensión de paso”.

- el paso de corriente de una mano a los pies al tocar una parte de una instalación (circuito “mano-pie”), tal como muestra la figura II.4.b. En este tipo de accidente están incluidos los contactos que se puedan producir con otras partes del cuerpo o en otras posturas. La diferencia existente entre el potencial a que está sometida la parte de la instalación que toca el individuo y el potencial en la superficie del terreno se denomina “tensión de contacto” y genera una circulación de corriente (I_H) a través de la persona proporcional a su resistencia eléctrica total [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶].

La determinación de las máximas tensiones de paso y de contacto admisibles en una instalación eléctrica (que se obtienen a partir de la resistencia eléctrica del cuerpo humano y de la intensidad máxima tolerable, entre otras magnitudes) pueden verse en [Sunde¹⁹⁶⁸], [Garrett¹⁹⁸⁶] y [Sverak et al.¹⁹⁸¹], y también se recogen en la mayor parte de las normativas sobre sistemas de puesta a tierra de los distintos países, como por ejemplo RAT en España [MIE-RAT¹⁹⁹³], VDE en Alemania [Spitta¹⁹⁷⁵] o CIE en Italia [Bossi & Coppi¹⁹⁷⁵].

- Tensión Transferida (*Transferred Voltage*).
Es la tensión de contacto en los casos en que una persona dentro de una instalación eléctrica toca un conductor conectado a tierra en otro sistema distinto, o bien cuando una persona en un punto remoto toca un conductor conectado a la toma de tierra de la instalación. En ambos casos, y en circunstancia de fallo, la tensión transferida es la máxima tensión de contacto, dado que es prácticamente igual a la sobretensión de tierra *GPR*.
- Intensidad Total del Sistema (*Ground Current*).
Es la intensidad eléctrica total que fluye de la instalación de toma de tierra cuando tiene lugar una derivación de corriente a través de la misma.
- Resistencia Equivalente del Sistema (*Ground Resistance*).
Es la resistencia que ofrece la instalación de toma de tierra al paso de la corriente eléctrica. Se calcula como el cociente entre la sobretensión de tierra (*GPR*) y la intensidad total del sistema.

3.5 Funcionamiento de una toma de tierra

En los apartados anteriores se han presentado los aspectos generales que intervienen en una instalación de toma de tierra desde el punto de vista de la seguridad. En el estudio que sigue a continuación se analizará el funcionamiento de una malla de electrodos de tierra tomando como ejemplo el circuito accidental de contacto “mano-pie” (figura II.4.b).

La figura II.5 muestra de una forma esquemática el circuito eléctrico que se origina cuando una persona toca parte de una instalación (por ejemplo la carcasa de un motor) que se encuentra sometida a tensión debida a un cortocircuito. Las magnitudes que se indican en la figura son:

- V_0 : Potencial de referencia (considerado nulo) en un punto alejado de la instalación.
- V_1 : Potencial generado por el elemento electromotor E .
- V_2 : Potencial en la entrada del equipo, en la carcasa cuando se produce un cortocircuito y en la toma de tierra.
- V_3 : Potencial en el punto de la superficie del terreno en el que se encuentra la persona.
- I : Intensidad de corriente debida a la diferencia de potencial del elemento electromotor y a la resistencia eléctrica del conjunto del circuito.
- I_M : Intensidad de corriente que circula por el motor.

3.5.1 Circuito eléctrico exterior

El circuito eléctrico exterior tiene lugar a través de los cables, del motor y de la persona, y su modelización matemática puede realizarse en la forma:

- Ecuación de continuidad:

$$I = I_M + I_T + I_H \quad (\text{eII.1})$$

- Ley de Ohm:

$$\begin{aligned} E &= V_1 - V_0 \\ I R_C &= V_1 - V_2 \\ I_M (R_M + R_C) &= V_2 - V_0 \\ I_H R_H &= V_2 - V_3 \end{aligned} \quad (\text{eII.2})$$

Las incógnitas son V_1 , V_2 , V_3 , I , I_M , I_T y I_H , en tanto que se conocen el potencial de referencia ($V_0 = 0$), la fuerza electromotriz E y las resistencias R_C , R_M y R_H .

3.5.2 Circuito subterráneo

La circulación de corriente que tiene lugar en el terreno se muestra esquemáticamente en la figura II.6. Al tratarse de un medio continuo, se puede modelizar matemáticamente —con las hipótesis de terreno isótropo, homogéneo y de superficie horizontal— en términos de un problema exterior de Dirichlet tridimensional (se demostrará en el capítulo siguiente), consistente en obtener el potencial V (que verifica la ecuación de Laplace) en cualquier punto del terreno si se conocen los valores del potencial en la superficie de la toma de tierra y se cumple la hipótesis de que el potencial de referencia V_0 en un punto suficientemente alejado sea cero.

Este circuito subterráneo se puede resolver mediante una superposición de estados elementales [Durand¹⁹⁶⁶]. Esta técnica, fundamentada en el “principio de superposición” de resolución de ecuaciones diferenciales lineales en problemas de frontera [Stakgold¹⁹⁷⁹], consiste en la sustitución del estado final (representado en la figura II.6, y del cual no se conocen los valores de V_2 , V_3 , I_T e I_H) por la combinación lineal de dos estados elementales, de modo que sea posible obtener una relación entre las variables.

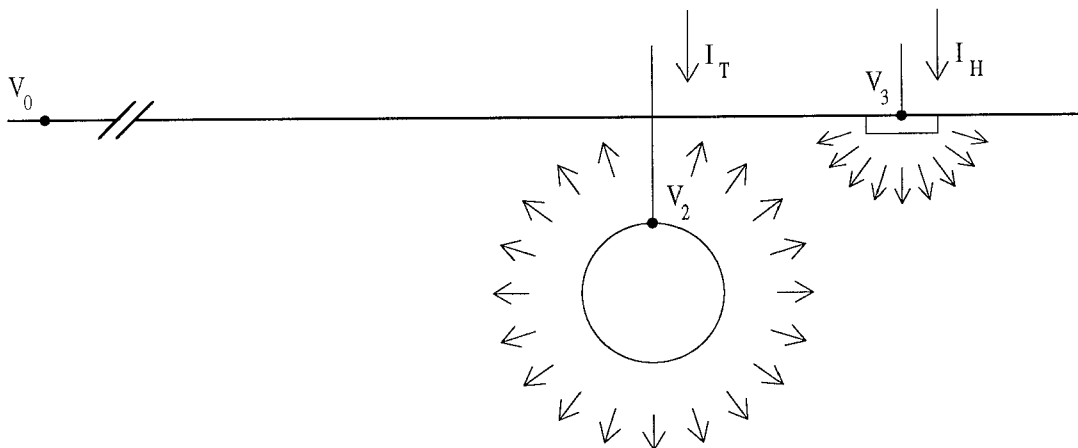


Fig. II.6 - Esquema del circuito subterráneo.

El **estado elemental 1)** se muestra en la figura II.7.a. En él se fijan los valores del potencial igual a 1 en los puntos de la toma de tierra de la instalación eléctrica, e igual a 0 en la unión a tierra que se produce en los pies de la persona.

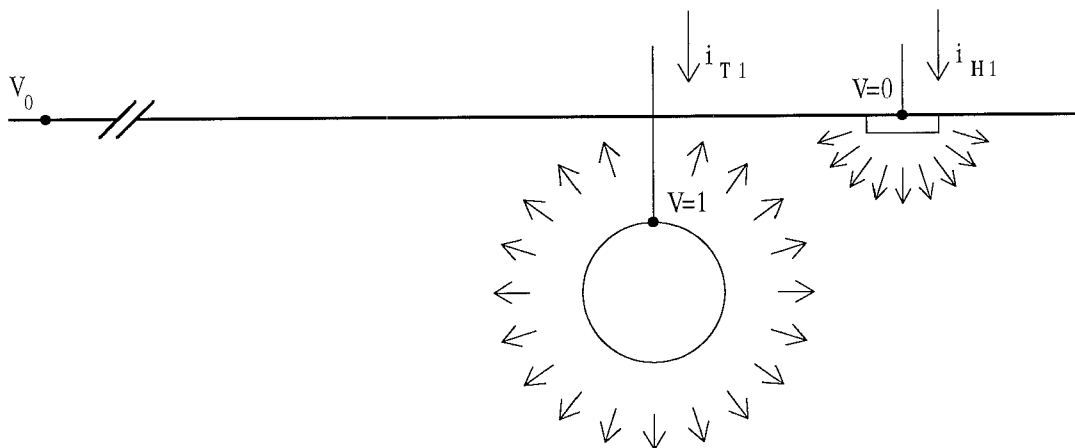


Fig. II.7.a - Esquema del estado elemental 1) en que puede descomponerse el circuito subterráneo.

Las magnitudes i_{T1} e i_{H1} son las intensidades de corriente por unidad de voltaje (ya que se ha impuesto un potencial unitario en el sistema) que fluyen de las dos tomas de tierra (la instalación y el individuo) en este estado elemental 1. Los valores de estas dos intensidades por unidad de voltaje se podrían determinar resolviendo el problema de Dirichlet, por ejemplo, mediante una técnica numérica

basada en subdivisiones del dominio de solución (métodos de elementos finitos o de elementos de contorno).

El **estado elemental 2)** se muestra en la figura II.7.b. Está caracterizado por la imposición de los valores del potencial igual a 0 en la toma de tierra de la instalación, e igual a 1 en la conexión a tierra que tiene lugar a través de los pies de la persona.

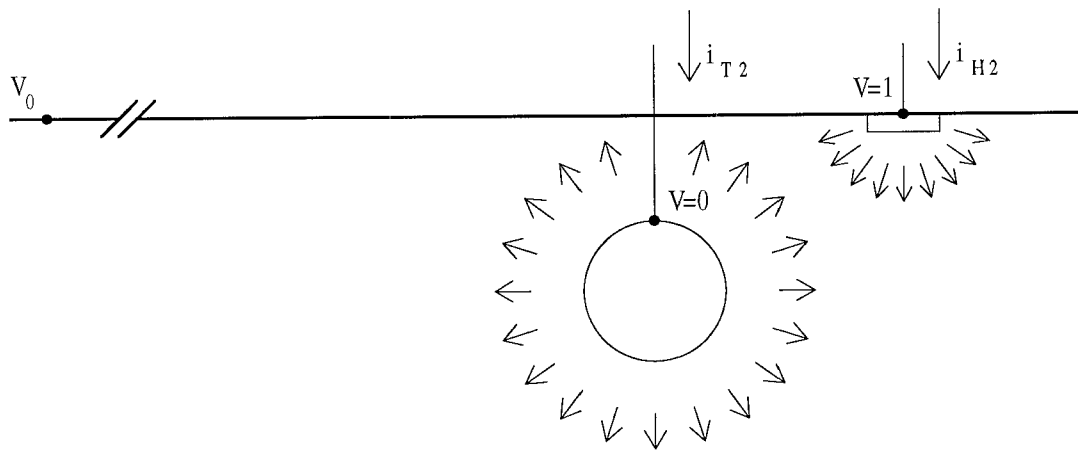


Fig. II.7.b – Esquema del estado elemental 2) en que puede descomponerse el circuito subterráneo.

i_{T2} e i_{H2} indican las intensidades de corriente por unidad de voltaje que fluyen de las dos tomas de tierra (instalación y persona) en el estado elemental 2 y, al igual que en el estado 1, también se pueden calcular resolviendo el problema de Dirichlet.

El estado final (figura II.6) es la combinación lineal de los dos elementales: el **estado 1** ponderado por el valor del potencial V_2 más el **estado 2** ponderado por el valor del potencial V_3 . Teniendo en cuenta que las intensidades de corriente de este estado final son I_T (en la instalación) e I_H (en los pies de la persona), se verifican las relaciones

$$I_T = i_{T1} V_2 + i_{T2} V_3 \tag{eII.3}$$

$$I_H = i_{H1} V_2 + i_{H2} V_3$$

y por el teorema de reciprocidad de Maxwell [Fung¹⁹⁶⁵], [Lorrain & Corson¹⁹⁹⁰] se cumple también la igualdad:

$$i_{T2} = i_{H1}. \tag{eII.4}$$

3.5.3 Ecuaciones del modelo del circuito accidental

Las ecuaciones del modelo de circuito accidental que tiene lugar cuando una persona toca una instalación eléctrica durante un cortocircuito presentadas en las subapartados anteriores se pueden resumir en:

$$\begin{aligned}
 I &= I_M + I_T + I_H \\
 E &= V_1 - V_0 \\
 I R_C &= V_1 - V_2 \\
 I_M (R_M + R_C) &= V_2 - V_0 \\
 I_H R_H &= V_2 - V_3 \\
 I_T &= i_{T1} V_2 + i_{T2} V_3 \\
 I_H &= i_{H1} V_2 + i_{H2} V_3.
 \end{aligned}
 \tag{eII.5}$$

La resolución de estas siete ecuaciones, correspondientes a la unión del circuito eléctrico exterior con el subterráneo, proporciona los valores de las incógnitas V_1 , V_2 , V_3 , I , I_M , I_T y I_H .

3.5.4 Circuito eléctrico equivalente al circuito subterráneo

El estudio del circuito subterráneo —presentado en el subapartado 3.5.2 y en la figura II.6— implica la resolución de un problema diferencial en un dominio continuo. Con el fin de poder sacar conclusiones rápidas e identificar los parámetros que intervienen en su análisis (i_{T1} , i_{T2} , i_{H1} e i_{H2}) con variables eléctricas, se sustituye esta circulación de corriente en el terreno por un circuito eléctrico equivalente (figura II.8). Las nuevas magnitudes que se han introducido son:

- R_T^E : Resistencia al paso de la corriente de la toma de tierra de la instalación eléctrica (es la “Resistencia equivalente del sistema” o *Ground Resistance* definida en el apartado 3.4.2).
- R_H^E : Resistencia eléctrica que ofrece la unión a tierra a través de los pies de la persona.
- R_{TH}^E : Resistencia a la circulación de corriente existente entre las dos tomas de tierra: la instalación y el individuo.

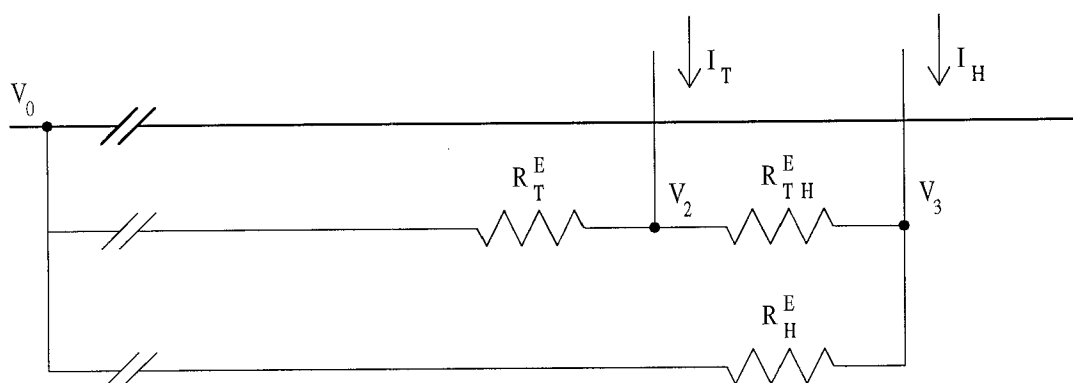


Fig. II.8 – Circuito eléctrico equivalente al circuito subterráneo.

La resolución de este circuito eléctrico (introduciendo unas intensidades de corriente internas) proporciona las siguientes dos relaciones:

$$I_T = \left(\frac{1}{R_T^E} + \frac{1}{R_{TH}^E} \right) V_2 + \left(\frac{-1}{R_{TH}^E} \right) V_3 \quad (\text{eII.6})$$

$$I_H = \left(\frac{-1}{R_{TH}^E} \right) V_2 + \left(\frac{1}{R_H^E} + \frac{1}{R_{TH}^E} \right) V_3$$

Obsérvese que si se comparan las dos ecuaciones de (eII.3) —correspondientes a la circulación de corriente en el continuo— y las dos expresiones de (eII.6) —del circuito equivalente— se concluye que la relación existente entre las resistencias del circuito equivalente y las intensidades por unidad de voltaje de los estados elementales viene dada por:

$$R_T^E = \frac{1}{i_{T1} + i_{H1}} \quad (\text{eII.7})$$

$$R_H^E = \frac{1}{i_{T2} + i_{H2}} \quad (\text{eII.8})$$

$$R_{TH}^E = \frac{-1}{i_{H1}} \quad (\text{eII.9})$$

De las equivalencias (eII.7), (eII.8) y (eII.9) se deducen los siguientes resultados importantes:

- i_{T1} e i_{H1} son las intensidades de corriente por unidad de voltaje que emanan de la toma de tierra de la instalación eléctrica y de la unión a tierra de la persona en el estado elemental 1 (caracterizado por imponer potencial 1 en la instalación y 0 en los pies del individuo). Habitualmente, la toma de tierra presenta una extensa superficie de contacto con el terreno para la disipación de corriente, por lo que la intensidad que emana de ella (i_{T1}) será relativamente importante (la intensidad se calcula como la integral de superficie de la densidad de corriente que emana del contorno de la unión a tierra, que a su vez es directamente proporcional al potencial impuesto). Así, la intensidad de corriente i_{H1} que fluye por la unión a tierra de la persona, debida a la circulación de cargas provocada por la intensidad i_{T1} , va a ser muy pequeña en relación con ésta, dado que la unión a tierra de la persona tiene una superficie total ínfima, en comparación con la toma de tierra.
- i_{T2} e i_{H2} son las intensidades de corriente por unidad de voltaje que emanan de la toma de tierra de la instalación y de la unión a tierra de la persona en el estado elemental 2 (caracterizado por imponer potencial 0 en la instalación eléctrica y 1 en los pies del individuo). Dado que la superficie de la unión a tierra de la persona es muy pequeña (solamente los pies), la intensidad de corriente que emana (i_{H2}) también es pequeña, en comparación con la intensidad que emana de la instalación en el estado elemental 1 (i_{T1}). La intensidad i_{T2} que fluye por la toma de tierra de la instalación debido a la circulación de cargas provocada por i_{H2} va a ser también muy reducida, en relación con las anteriores.

También es posible verificar esta afirmación a partir del principio de reciprocidad de Maxwell dado que, por (eII.4), i_{H1} y i_{T2} deben ser iguales y la intensidad por unidad de voltaje i_{H1} es relativamente pequeña, tal como se ha comentado anteriormente.

En consecuencia, y teniendo presente las relaciones (eII.7), (eII.8) y (eII.9), la resistencia mutua (R_{TH}^E) entre las dos tomas de tierra (la instalación y la persona) será muy elevada, y dado que los dos sumandos del cociente de (eII.8) serán pequeños, la resistencia equivalente de la unión a tierra de la persona (R_H^E) también será elevada. Por otra parte, debido a que la intensidad que emana de la toma de tierra de la instalación (i_{T1}) es relativamente importante, su resistencia equivalente (R_T^E) será muy pequeña comparada con las otras dos del circuito equivalente.

Obviamente, estas aseveraciones se pueden confirmar resolviendo el problema de la circulación de corriente en el medio continuo subterráneo, mediante una técnica numérica basada en la subdivisión del dominio (por ejemplo, el método de elementos de contorno), y determinando las intensidades por unidad de voltaje en los dos estados elementales (i_{T1} , i_{H1} , i_{T2} e i_{H2}).

Los resultados anteriores relativos a los valores de las resistencias equivalentes R_{TH}^E y R_H^E , junto con el análisis detallado del circuito de la figura II.5 y del circuito eléctrico equivalente II.8, permiten la deducción de una serie de conclusiones muy interesantes:

- Para valores muy elevados de las resistencias R_{TH}^E y R_H^E , la intensidad de corriente que circulará por la toma de tierra (I_T) fundamentalmente dependerá del valor de la resistencia eléctrica equivalente de sus electrodos (R_T^E), y ésta será prácticamente independiente de las intensidades i_{H1} , i_{T2} e i_{H2} por ser relativamente pequeñas en comparación con i_{T1} .
- Además, la resistencia equivalente de la toma de tierra (R_T^E) no se modificará de forma apreciable por la presencia de una persona en las inmediaciones de la instalación, ni dependerá de la posición en que se encuentre si se produce un contacto accidental con ésta durante una situación de fallo.
- Por el mismo motivo, los valores de los potenciales en la carcasa (V_2) y en los pies del individuo (V_3) no variarán apreciablemente con la resistencia de la persona (R_H), de modo que permanecerán prácticamente constantes, independientemente de que alguien se encuentre efectivamente en contacto con la instalación en un determinado punto.

De las conclusiones anteriores se deduce algo muy importante desde el punto de vista práctico para el cálculo de una instalación de toma de tierra: la intensidad I_T que se disipa a través de la toma de tierra se puede calcular con suficiente precisión considerando exclusivamente la malla de tierra, sin tener en cuenta ni dónde ni cómo se produce el contacto accidental de la persona; además la intensidad I_H que pasa por el cuerpo de la persona se podrá obtener con bastante exactitud si se conoce la diferencia de potencial ($V_2 - V_3$), existente entre la instalación y el terreno en el punto donde esté situado el individuo, y su resistencia eléctrica R_H . Este resultado acota considerablemente el problema a estudiar, ya que éste queda ceñido al estudio exclusivamente de la instalación de toma de tierra: su resistencia equivalente y la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno cuando tiene lugar una derivación de corriente (de intensidad I_T) sin considerar

contacto accidental alguno (ver figura II.9). Por lo tanto este problema, que es más sencillo de resolver ya que no es necesario contemplar todas las posibles situaciones de contacto con la instalación en fallo, requiere analizar no solamente la malla de electrodos que forman la toma de tierra, sino también poder determinar los valores del potencial en cualquier punto de la superficie del terreno.

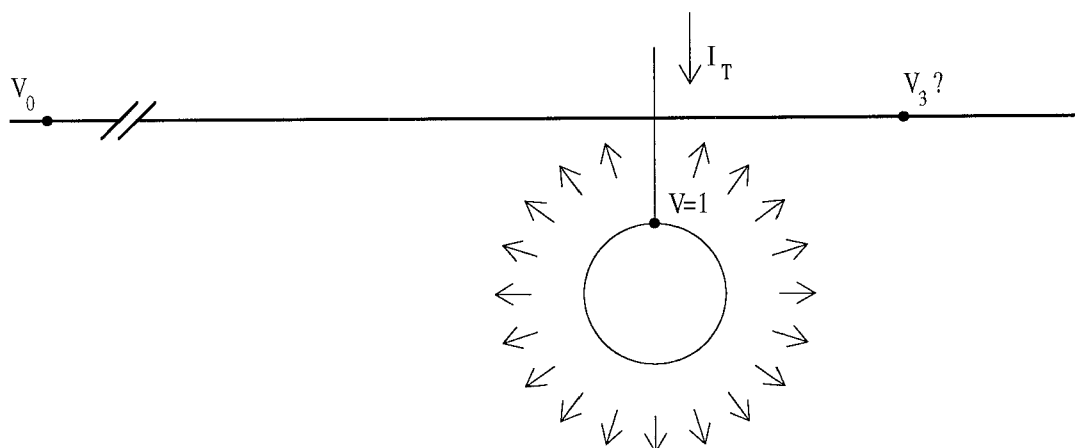


Fig. II.9 – Esquema del problema de la disipación de corriente eléctrica en un terreno cuando se produce una derivación a través de un sistema de toma de tierra.

3.5.5 Efectos de la existencia de toma de tierra en condiciones de fallo.

El efecto de la existencia de una toma de tierra en una instalación eléctrica cuando tiene lugar un cortocircuito se puede evaluar solucionando el sistema de ecuaciones (eII.5) y las equivalencias establecidas para el circuito subterráneo (eII.7), (eII.8) y (eII.9).

La resolución de todas estas ecuaciones es muy laboriosa por lo que tan solo se presentarán algunas de las expresiones resultantes. Con objeto de poder sacar conclusiones de las mismas, éstas se han normalizado en función de una serie de parámetros relacionados con las magnitudes definidas en el apartado 3.5 y que se muestran en la figura II.5: R_C (resistencia eléctrica del cable), R_M (resistencia eléctrica del motor) y R_H (resistencia eléctrica de la persona) y las resistencias

equivalentes R_H^E , R_{TH}^E y R_T^E . Los parámetros definidos son:

$$\alpha = \frac{R_M}{R_C}, \quad \beta = \frac{R_H^E}{R_C}, \quad \tau = \frac{R_{TH}^E}{R_C}, \quad \delta = \frac{R_H}{R_C}, \quad \theta = \frac{R_T^E}{R_C}; \quad (\text{eII.10})$$

$$d_2 = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{1/\beta}{1/\delta + 1/\tau} \right); \quad d_3 = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} + \frac{1}{\theta} \right) \left(1 + \frac{1/\beta}{1/\delta + 1/\tau} \right). \quad (\text{eII.11})$$

El parámetro θ es una medida de la resistencia equivalente de una toma de tierra (referida a la resistencia de los conductores). Como se verá más adelante, una malla de tierra es tanto mejor cuanto menor sea su resistencia equivalente, es decir, para valores de θ bajos.

El primer análisis que se presenta es el estudio de la fracción de intensidad que circula por la persona (I_H) sobre la intensidad total (I), en función de los distintos valores de la resistencia equivalente de la toma de tierra R_T^E . Teniendo en cuenta (eII.10) y (eII.11), esta relación se expresa como

$$\frac{I_H}{I} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1 - d_2/d_3}{d_2 - 1} \right). \quad (\text{eII.12})$$

La figura II.10 muestra gráficamente la fracción (eII.12) en función de la variable θ para distintos valores del parámetro α . Los valores de β y τ que se han considerado en este estudio son ambos de 20,000, y se han obtenido a partir de los cálculos realizados de las intensidades por unidad de voltaje (i_{T1} , i_{T2} , i_{H1} e i_{H2}) para un problema de una malla real de toma de tierra, resolviendo el circuito subterráneo en el continuo mediante una técnica numérica basada en el método de elementos de contorno. Por otra parte, teniendo presente los valores de la resistencia eléctrica de un ser humano, el valor del parámetro δ considerado ha sido de 2,000. Los valores de α que se han empleado en los distintos cálculos corresponden a elementos de transformación que se encuentran habitualmente instalados en subestaciones eléctricas modernas [Wildi¹⁹⁸³].

Como se observa en la figura II.10, cuanto más pequeña sea la resistencia equivalente de la toma de tierra de la instalación (R_T^E) tanto menor será la fracción de intensidad de corriente (I_H) que circula por el cuerpo humano en relación con la intensidad total durante un cortocircuito. Por otra parte, del análisis de la expresión de I_H en función de la resistencia equivalente R_T^E que se obtiene de las ecuaciones del circuito (eII.5) y (eII.6), podemos concluir que esta intensidad que circula por la persona en condiciones de fallo será menor cuanto menor sea la resistencia R_T^E .

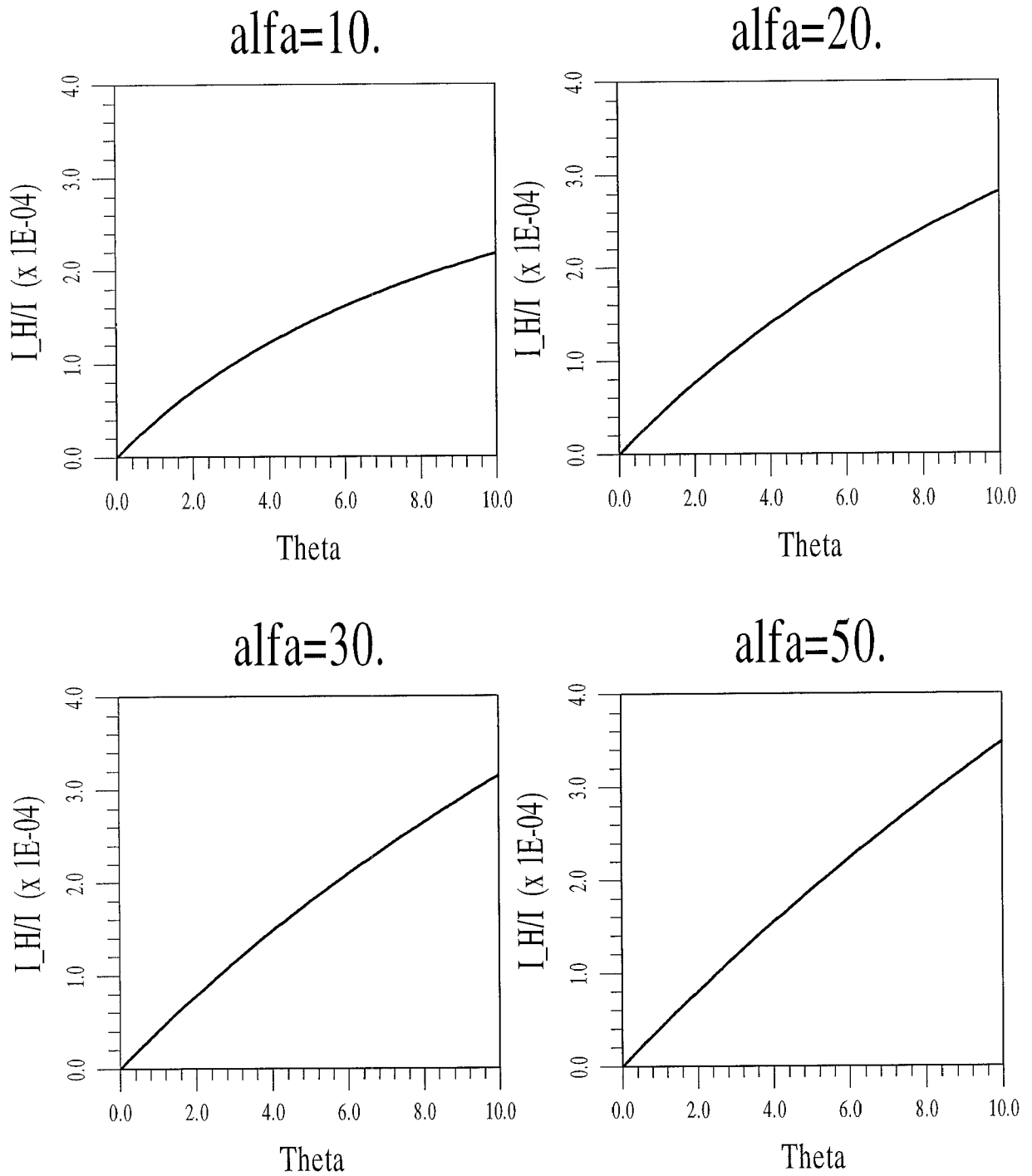


Fig. II.10 – Fracción de la intensidad de corriente que circula por la persona (I_H) sobre la intensidad total (I) en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación).

En lo que respecta a la instalación de toma de tierra, es interesante estudiar qué intensidad de corriente circula por la misma (I_T) durante una derivación de corriente y cómo varía con su resistencia equivalente R_T^E . La fracción de intensidad que circula por la toma de tierra I_T sobre la intensidad total se expresa en términos de los mismos parámetros de (eII.10) y (eII.11) en la forma:

$$\frac{I_T}{I} = \frac{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{d_2}{d_3}\right)}{d_2 - 1}. \quad (\text{eII.13})$$

La figura II.11 muestra gráficamente la variación de esta fracción en función de la resistencia equivalente (θ) para distintos valores del parámetro α (los valores de β , τ y δ son los mismos que los considerados en el caso precedente). Como puede observarse, casi la totalidad de la corriente de pérdida circula por la instalación de toma de tierra durante una descarga si su resistencia equivalente R_T^E es baja. A medida que ésta va aumentando la fracción de corriente eléctrica que va al terreno por la malla de electrodos de tierra es cada vez menor, siendo este descenso prácticamente lineal.

Desde el punto de vista de la seguridad humana, en la figura II.10 se ha presentado la variación de la fracción de intensidad de corriente que circula por una persona que toca la instalación respecto de la intensidad total en función de la resistencia equivalente, observándose una variación casi lineal. Una cuestión que se suscita con frecuencia es la siguiente: una toma de tierra deriva más corriente al terreno cuanto menor sea su resistencia equivalente y, de este modo, por el individuo que ha establecido el contacto accidental circula menos intensidad de corriente. Sin embargo, ¿qué fracción de intensidad circula por la persona si existe toma de tierra respecto de la intensidad que circula si no existe esta instalación? La resolución del sistema de ecuaciones planteado para modelizar el circuito de la figura II.5 —y que se resumen en (eII.5)— puede realizarse según exista o no toma de tierra en la instalación eléctrica. Obteniendo las expresiones de la intensidad (I_H) en ambos casos, su cociente resulta en términos de los parámetros (eII.10) y (eII.11) en la forma:

$$\frac{I_H \text{ (con t.t.)}}{I_H \text{ (sin t.t.)}} = \frac{\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3}}{\frac{1}{\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} + \frac{1 + \delta/\beta}{\beta}} - \frac{1}{\frac{1}{\beta} + \frac{(\alpha + 2)(1 + \delta/\beta)}{\alpha + 1}}} \quad (\text{eII.14})$$

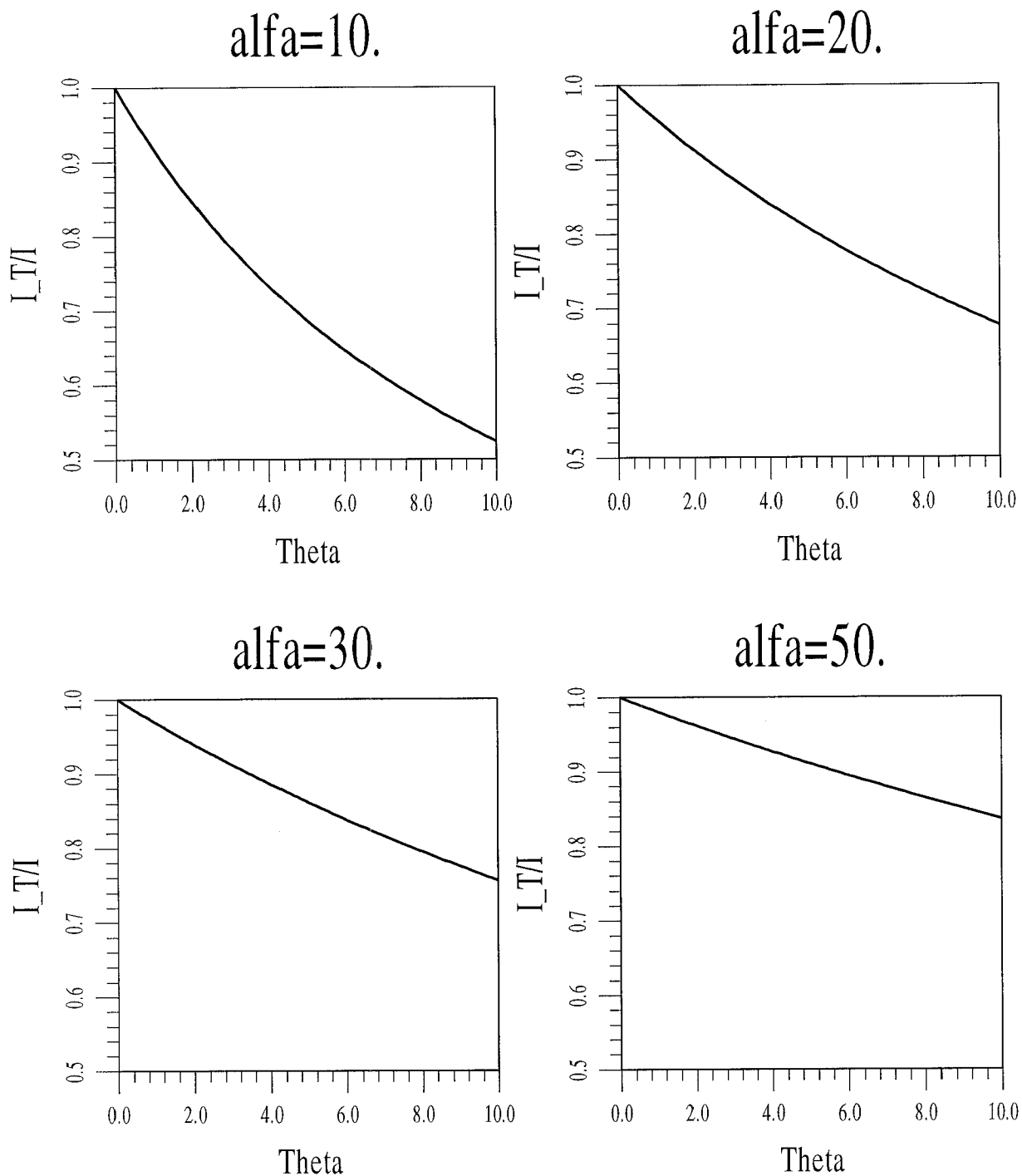


Fig. II.11 – Fracción de la intensidad de corriente que circula por la toma de tierra de la instalación (I_T) sobre la intensidad total (I) en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación).

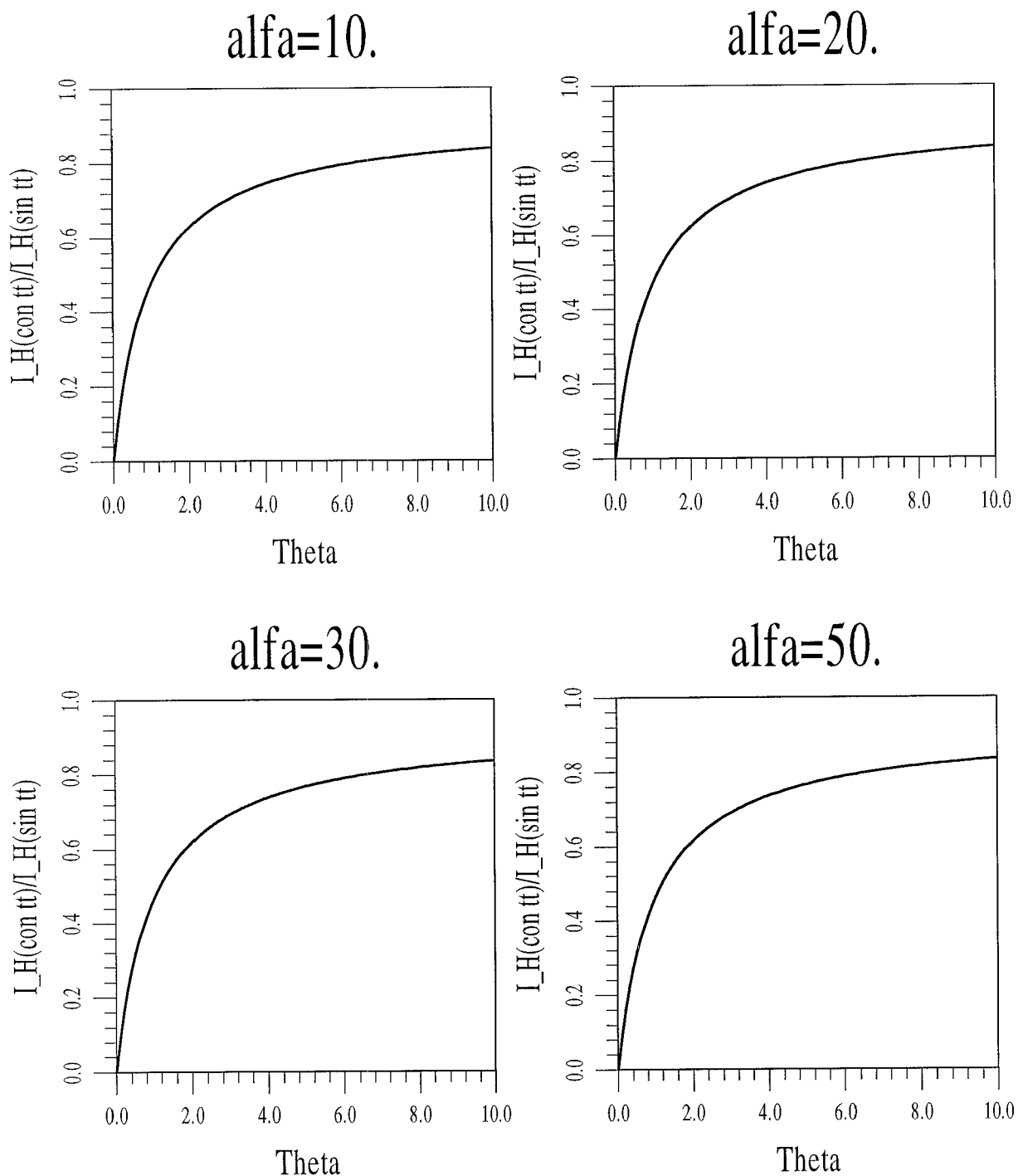


Fig. II.12 – Relación entre la intensidad de corriente que circula por la persona (I_H) si existe toma de tierra en la instalación y la misma intensidad (I_H) si no existe toma de tierra en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra).

La representación gráfica de (eII.14) en función de la variable θ se muestra en la figura II.12 para distintos valores del parámetro α . Como puede observarse, la relación existente entre el cociente I_H (con t.t.)/ I_H (sin t.t.) y θ es una curva muy acusada, lo cual reafirma la conclusión ya obtenida anteriormente de que una instalación de toma de tierra será tanto mejor, desde el punto de vista de la seguridad humana, cuanto menor sea su resistencia equivalente. Es importante insistir en este hecho: o la resistencia de la toma de tierra es muy baja o de poco va a servir, ya que la intensidad de corriente que circulará por la persona será una parte importante de la que circularía si no hubiese toma de tierra.

Para finalizar este estudio sobre el funcionamiento de una toma de tierra de una instalación es interesante analizar qué ocurre en el equipo eléctrico durante un cortocircuito como el que se muestra en la figura II.5. Los sistemas de puesta a tierra son sistemas pasivos en el sentido de que no evitan que se produzcan los cortocircuitos sino que actúan de elementos derivadores al terreno de las corrientes de fallo que se puedan producir. Sin embargo, una toma de tierra tiene un papel esencial combinado con otros elementos de la instalación eléctrica que sí son activos ya que, si bien no evitan el cortocircuito, al menos cortan el suministro de corriente en el sistema (interruptores automáticos, fusibles, relés, etc).

La relación entre la intensidad que circula por el motor cuando tiene lugar una derivación de corriente a la toma de tierra de la instalación, y la intensidad que circula por el equipo en condiciones normales se puede expresar, en términos de las variables normalizadas de (eII.10) y (eII.11), en la forma:

$$\frac{I_M \text{ (fallo)}}{I_M \text{ (normal)}} = \frac{\alpha + 2}{(\alpha + 1)d_2} \quad (\text{eII.15})$$

Los gráficos de la figura II.13 muestran la variación de esta relación (eII.15) en función de la variable θ para distintos valores del parámetro α (β , δ y τ son los mismos de los ejemplos anteriores). Tal como es posible observar, cuanto menor es la resistencia equivalente de la toma de tierra de la instalación más pequeña es la fracción de intensidad de corriente que pasa por el equipo durante el cortocircuito (es importante precisar el hecho de que éste se produce en la entrada del motor tal como muestra la figura II.5). En consecuencia, circula mucha menos corriente por el equipo durante la derivación si la resistencia de la malla de tierra es baja.

Esta variación brusca en el valor de la intensidad que circula por el equipo cuando se produce la derivación de corriente, se puede analizar también en la

relación existente entre la intensidad que circula por el circuito I en condiciones de fallo y la que circula en condiciones normales. Esta relación, expresada según los parámetros definidos en (eII.10) y (eII.11), viene dada por

$$\frac{I(\text{fallo})}{I(\text{normal})} = (\alpha + 2) \left(1 - \frac{1}{d_2} \right). \quad (\text{eII.16})$$

En la figura II.14 se muestra gráficamente la variación de esta relación con la variable θ para distintos valores de α . Los parámetros β , δ y τ son los mismos que en los casos ya presentados. Obsérvese que cuanto menor es la resistencia equivalente, mayor es la variación que se produce en la intensidad de corriente que circula durante un cortocircuito respecto de la intensidad en condiciones de funcionamiento normal.

Los aumentos significativos de la intensidad de corriente eléctrica que circula cuando se produce un incremento en el consumo de potencia en una instalación se detectan mediante elementos activos (magnetotérmicos y cortacircuitos fusibles), que son sensibles al aumento de temperatura producido por la circulación de mayor intensidad de corriente. Dado que en condición de fallo se produce un notable incremento de la intensidad que circula por la instalación (figura II.14), que es tanto mayor cuanto más baja es la resistencia equivalente de la toma de tierra, podría parecer que la mera existencia de estos elementos y de una toma de tierra de resistencia equivalente suficientemente baja, garantiza automáticamente la desconexión de la instalación si se produce una derivación a tierra. No obstante, debido precisamente a que la variable de medida de estos elementos activos es la temperatura, el tiempo que transcurriría antes de cortar el suministro eléctrico en el sistema sería demasiado largo. Entretanto, por la instalación —y eventualmente por una persona que esté en contacto accidentalmente con ella en ese instante— circularía una elevada intensidad de corriente.

Por ello se colocan en el circuito eléctrico interruptores “diferenciales” que tienen una gran sensibilidad para la detección de pequeñas variaciones en la intensidad de corriente e interrumpen rápidamente el suministro eléctrico. El principio básico del funcionamiento de estos equipos es el siguiente: en condiciones normales, las intensidades que circulan por los conductores (de “ida” I y de “retorno” I_M en el esquema de la figura II.5) son iguales y por tanto, la corriente neta ($|I - I_M|$) es nula [Wildi¹⁹⁸³]; sin embargo, cuando se produce una derivación de corriente al terreno (bien por la toma de tierra, o directamente a través de un

ser humano), la intensidad de corriente neta ($|I - I_M|$) ya no es nula, sino que es igual a la que se deriva al terreno. Los “diferenciales” miden esta variación de la intensidad, disparando un interruptor que corta el suministro de corriente cuando la diferencia de intensidades supera un determinado valor límite. Esta corriente neta ($|I - I_M|$) en condiciones de fallo se puede evaluar perfectamente con el circuito de la figura II.5 para distintos valores de la resistencia equivalente de la toma de tierra R_T^E . Dado que en condiciones de fallo la intensidad de corriente I_M que circula por el equipo es muy inferior a la intensidad total I (figuras II.13 y II.14), la representación de la corriente neta en función del parámetro θ coincide sensiblemente con la de la intensidad total, dada en la figura II.14. En definitiva, cuanto más pequeña sea la resistencia equivalente, mayor será la variación de la corriente neta; por lo tanto el error relativo en la medida del detector diferencial instalado será menor y en consecuencia, actuará de un modo más eficaz.

Para finalizar, cabe mencionar que el estudio que se ha presentado es ampliable a otros supuestos de cortocircuito, por ejemplo el caso en que una persona se encuentre caminando cerca de la instalación eléctrica y se produzca un circuito accidental “de paso”, como los comentados anteriormente. La conclusión, en definitiva, será la misma: el estudio de la seguridad de una instalación de toma de tierra se podrá ceñir exclusivamente a la caracterización de la toma de tierra (su resistencia equivalente R_T^E) y al cálculo de los valores del potencial en la superficie del terreno (figura II.9), sin necesidad de considerar los distintos tipos de contactos accidentales.

En todo caso, un sistema de puesta a tierra convencional, como el presentado, será tanto más eficaz desde el punto de vista de la seguridad humana y de la integridad de los equipos cuanto menor sea la resistencia que ofrezca el sistema de tierras al paso de la corriente eléctrica. Esta resistencia R_T^E se puede identificar con uno de los parámetros característicos de una toma de tierra anteriormente definidos (ver apartado 3.4.2): la Resistencia Equivalente del Sistema. Por otra parte, para garantizar la seguridad de las personas es esencial que las diferencias de potencial existentes entre la instalación eléctrica y los puntos de la superficie del terreno cercanos a ésta —($V_3 - V_2$) en el esquema de la figura II.5— se encuentren por debajo de un determinado umbral (“tensión de contacto”), así como que las diferencias de potencial entre puntos de la superficie del terreno próximos (separados entre sí un metro) sean inferiores a un determinado valor límite (“tensión de paso” máxima admisible).

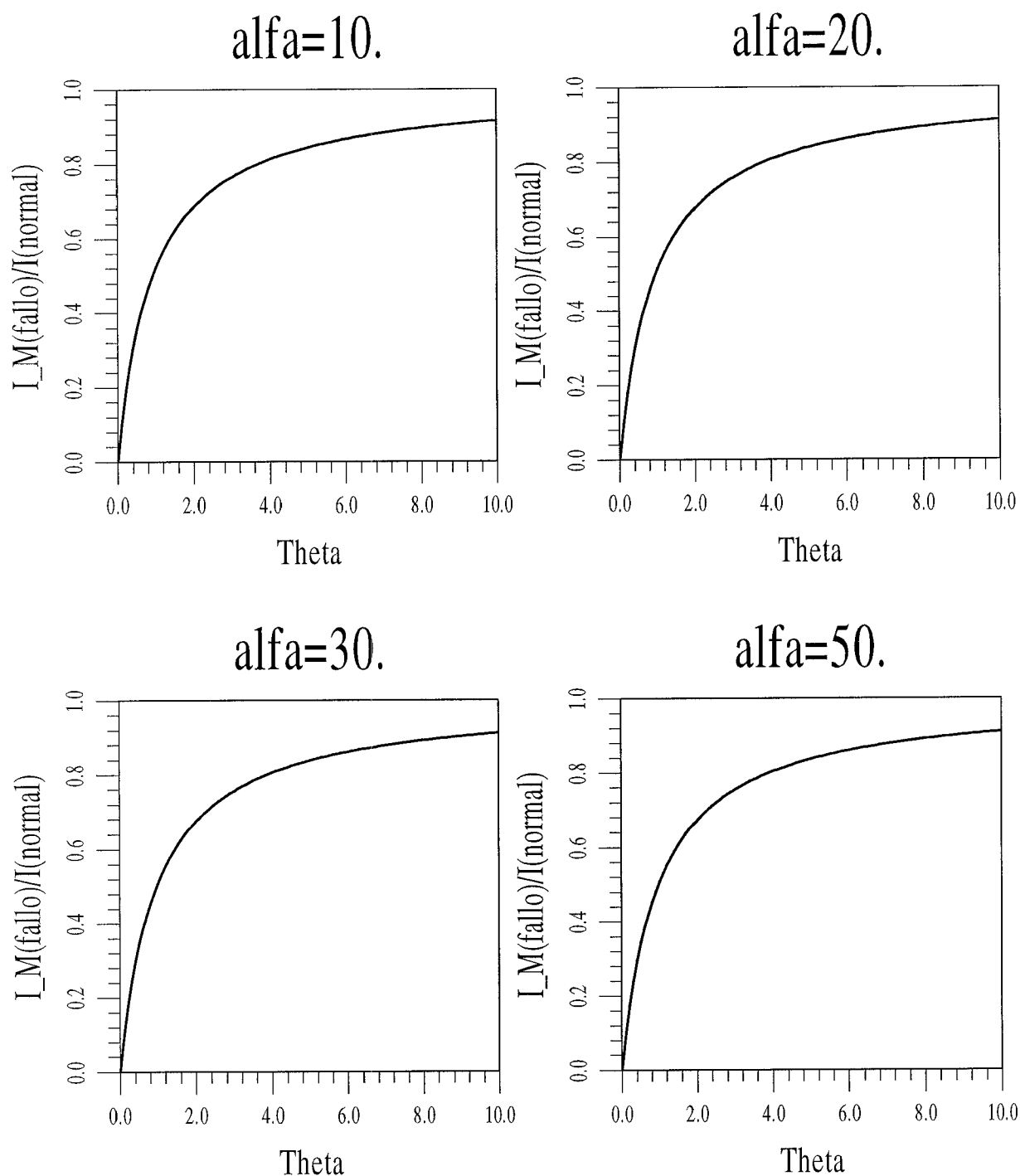


Fig. II.13 – Relación entre la intensidad de corriente que circula por el motor (I_M) cuando se produce una derivación de corriente a la toma de tierra, y la intensidad que circula en condiciones normales en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación).

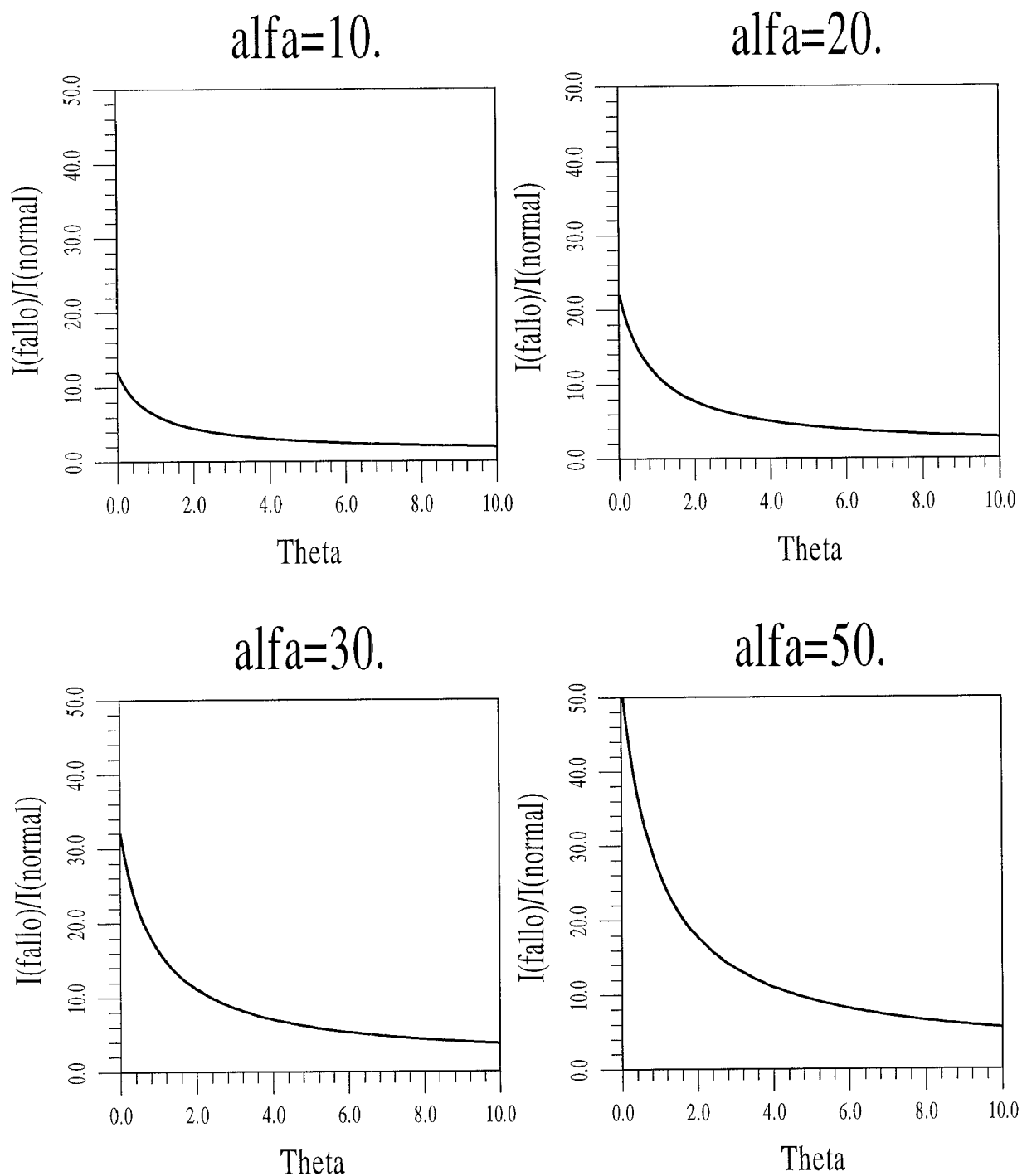


Fig. II.14 – Relación entre la intensidad de corriente que circula por el circuito (I) cuando se produce una derivación de corriente a la toma de tierra, y la intensidad que circula en condiciones normales en función del parámetro θ (medida de la resistencia de la toma de tierra de la instalación).

4. CARACTERÍSTICAS DEL TERRENO

4.1 La resistividad y su medida

Uno de los parámetros críticos que intervienen en el diseño de los sistemas de puesta a tierra es la resistividad eléctrica del terreno donde se encuentra situada la toma de tierra. Esta resistividad se define como la resistencia que ofrece al paso de la corriente eléctrica una muestra de suelo (supuesto homogéneo e isótropo) de longitud y de sección transversal unitarias. La forma rigurosa de representar matemáticamente la resistividad es mediante un tensor que incorpora la variabilidad de esta propiedad en los distintos puntos y direcciones del terreno, aunque en la mayoría de casos, y debido a la poca información disponible de las propiedades del medio, ésta se reduce a un parámetro escalar.

La resistividad del suelo influye directamente en la resistencia del electrodo de tierra y en la distribución de los gradientes de potencial en la superficie del terreno. Como en la mayoría de problemas de ingeniería en que interviene el suelo de una forma u otra (hidrología, geotecnia, dinámica sísmica, etc), uno de los problemas fundamentales es la caracterización de alguna propiedad escalar, en este caso, la resistividad.

En diseños preliminares de instalaciones de tomas de tierra o en cálculos de instalaciones pequeñas suele emplearse una estimación del valor de la resistividad en base al tipo de terreno que se trata. La clasificación más sencilla se debe a [Rudenberg¹⁹⁴⁵] y se reproduce en la tabla II.2.

Tipo de Terreno	Resistividad Media (Ω m)
Suelo Orgánico Mojado	10
Suelo Mojado	100
Suelo Seco	1,000
Suelo Rocoso	10,000

Tabla II.2 – Resistividades medias según el tipo de terreno. (Fuente: [Sverak et al.¹⁹⁸²]).

La normativa española [MIE-RAT¹⁹⁹³], [MIE-RBT¹⁹⁹²], al igual que las normas alemana e italiana es un poco más explícita y da una serie de valores orientativos

de la resistividad dependiendo de la naturaleza del terreno, tal como se muestran en la tabla II.3. Otras clasificaciones pueden encontrarse en [Biddle Co.¹⁹⁵²], [Kinyon¹⁹⁵⁹] y [Tagg¹⁹⁶⁴].

Naturaleza del Terreno	Resistividad (Ω m)
Terrenos pantanosos	1 a 30
Limo	20 a 100
Humus	10 a 150
Turba húmeda	5 a 100
Arcilla plástica	50
Margas y arcillas compactas	100 a 200
Margas del Jurásico	30 a 40
Arena arcillosa	50 a 500
Arena silíceas	200 a 3,000
Suelo pedregoso cubierto de césped	300 a 500
Suelo pedregoso desnudo	1,500 a 3,000
Calizas blandas	100 a 300
Calizas compactas	1,000 a 5,000
Calizas agrietadas	500 a 1,000
Pizarras	50 a 300
Rocas de mica y cuarzo	800
Granitos y Gres procedentes de alteración	1,500 a 10,000
Granitos y Gres muy alterados	100 a 600
Hormigón	2,000 a 3,000
Balasto o grava	3,000 a 5,000

Tabla II.3 – Resistividades según la naturaleza del terreno. (Fuente: [MIE-RAT¹⁹⁹³]).

Sin embargo, si se desean realizar cálculos más precisos es necesario efectuar mediciones experimentales de la resistividad en distintos puntos y a distintas profundidades, sobre todo si el terreno está formado por múltiples estratos, obteniéndose un perfil de “resistividades aparentes del suelo” [Tagg¹⁹⁶⁴]. Las técnicas y procedimientos de medida de la resistividad se detallan en la *Guide for*

measuring earth resistivity de [IEEE Std.81¹⁹⁶¹] y un resumen de la misma puede verse en [Sverak et al.¹⁹⁸²]. Una de las más utilizadas en la práctica es el “método de las cuatro picas” [Wenner¹⁹¹⁶] consistente en clavar cuatro electrodos en el terreno (verticalmente y alineados de forma equiespaciada) y medir la intensidad de corriente que circula entre las picas de los extremos cuando se aplica una diferencia de potencial en las dos picas centrales. A partir de estos datos, es posible calcular la resistencia mutua de los electrodos y, en base a su profundidad de enterramiento y a la distancia que los separa, obtener la resistividad. Existen múltiples variantes de este método, como la de Schlumberger-Palmer de situar las picas no equiespaciadas [Palmer¹⁹⁵⁵], que están descritas en [Garrett¹⁹⁸⁶] y [IEEE Std.81¹⁹⁶¹].

La determinación del perfil de resistividades de un terreno, así como su interpretación con el fin de poderlo emplear en los cálculos de una instalación de toma de tierra, han dado lugar a un número importante de publicaciones, en su mayor parte recogidas en artículos y monografías del *Institute of Electrical and Electronics Engineers, (IEEE)*, entre los que cabe mencionar: [Baishiki et al.¹⁹⁸⁷], [Blattner^{1980,1982}], [Dawalibi et al.¹⁹⁸⁰], [Dawalibi & Blattner¹⁹⁸⁴], [Gagnon & Mukhedkar¹⁹⁷⁸], [Meliopoulos et al.¹⁹⁸⁴] y [Meliopoulos & Papalexopoulos¹⁹⁸⁶].

4.2 Factores que influyen en la resistividad del suelo

Los principales factores que pueden influir en las propiedades eléctricas del terreno, y en particular en su resistividad, se relacionan a continuación.

- Humedad.
La conducción eléctrica en el seno del terreno es fundamentalmente de naturaleza electrolítica. Por lo tanto, un aumento del grado de humedad en el suelo origina una disminución importante del valor de la resistividad.
- Temperatura.
El efecto de la temperatura es importante en aquellas zonas en que pueda ser inferior a 0°C, ya que el agua presente en el suelo es mucho menos conductora en estado sólido. En el caso de temperaturas superiores a los 0°C, el efecto térmico sobre la resistividad es prácticamente despreciable.
- Composición química del suelo.
La presencia de sales iónicas en el terreno provoca disminuciones importantes de la resistividad debido al carácter electrolítico de la conducción eléctrica

en el suelo [Sverak et al.¹⁹⁸²], [Towne¹⁹³²]. Esta propiedad suele utilizarse en el acondicionamiento previo del terreno donde se desea instalar una toma de tierra, añadiendo en las inmediaciones de los electrodos sales iónicas (cloruros cálcico y sódico, sulfatos de magnesio y cobre) o arcillas de origen volcánico (bentonita) que aumenten la conductividad del medio y sean duraderas e inertes desde el punto de vista de la corrosión de los conductores [Jones¹⁹⁸⁰]. Por otra parte, una práctica habitual es la de extender en la superficie del terreno una capa de unos 20 cm de grava que retrasa la evaporación de la humedad y limita el secado de la capa superficial del suelo [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶] creando además una capa de material de alta resistividad [Garrett¹⁹⁸⁶], [Rudenberg¹⁹⁴⁵], [Sverak et al.¹⁹⁸²].

Además, la existencia de una malla de electrodos de tierra de una instalación eléctrica (en condiciones de fallo) puede influir en la resistividad del terreno de la siguiente forma:

- Gradientes de potencial.
Si en las inmediaciones de la toma de tierra se producen fuertes gradientes de potencial, existe el riesgo de que el terreno pueda sufrir una “perforación de dieléctrico” y se transforme en un conductor casi perfecto con el grave peligro que ello supone [Flanagan¹⁹⁸²]. No obstante, estos valores límite de los gradientes son muy superiores a los máximos permitidos en los sistemas de puesta a tierra (“tensión de paso” y “tensión de contacto”).
- Magnitud de la corriente de descarga.
La resistividad puede variar de forma importante en zonas muy localizadas próximas a la toma de tierra, debido principalmente al aumento de temperatura producido por efecto Joule en el momento de producirse la descarga eléctrica.

4.3 Hipótesis de suelo uniforme

La mayoría de las fórmulas y expresiones utilizadas en la práctica para el cálculo de los parámetros característicos de una instalación de toma de tierra se basan en la hipótesis de considerar el terreno isótropo y homogéneo y, por tanto, con un único valor de la resistividad [Garrett¹⁹⁸⁶], [IEEE Std. 81¹⁹⁶¹]. El método experimental más empleado para su determinación es el de Wenner de las cuatro picas [Wenner¹⁹¹⁶] o alguna de sus variantes [Tagg¹⁹⁶⁴]. Si los ensayos muestran una poca variabilidad en las propiedades eléctricas del terreno, una

aproximación suficiente en muchos casos es la de considerar la resistividad media a una profundidad h como el valor medido cuando los electrodos se encuentran separados una distancia h [Sverak et al. ¹⁹⁸²]. En este contexto, se entiende por “poca variabilidad” la obtención de diferencias máximas iguales o inferiores al 30% entre las medidas efectuadas en puntos extremos de la instalación [Garrett ¹⁹⁸⁶].

4.4 Modelo de terreno de “doble capa”

En las situaciones en que se observan variaciones importantes de la resistividad con la profundidad, podría parecer necesario inicialmente representar el terreno con modelos más sofisticados que incorporen diferencias en la conductividad del medio. El más simple de los propuestos es el denominado de “doble capa” (*two layer model*) consistente en considerar el suelo formado por dos estratos de terreno paralelos: uno superior de grosor h y otro inferior de espesor infinito, y asignar a cada estrato un valor constante de la resistividad (ésta se supone invariante en todas direcciones en el interior de cada estrato).

En un número importante de publicaciones científicas y técnicas sobre los modelos de “doble capa” se recogen métodos y expresiones que permiten estimar las resistividades de los estratos de suelo a partir de las mediciones experimentales [Blattner ^{1980,1982}], [Dawalibi & Blattner ¹⁹⁸⁴], [Dawalibi & Mukhedkar ¹⁹⁷⁵], [Dawalibi ¹⁹⁸²], [Kasten & Caldecott ¹⁹⁸⁵], [Garrett ¹⁹⁸⁶], [Meliopoulos & Papalexopoulos ¹⁹⁸⁶], [Sunde ¹⁹⁶⁸]. Por otra parte, se han derivado fórmulas para la obtención de la denominada “resistencia aparente entre electrodos”, que depende de las resistividades de las capas y de las distancias entre los conductores, empleada en la práctica para el cálculo de la resistencia equivalente y las tensiones de paso y contacto de la instalación de toma de tierra [Alamo ¹⁹⁹¹], [Blattner ¹⁹⁸⁵], [Dawalibi & Mukhedkar ¹⁹⁷⁹], [Heppe ^{1979-a}], [Llaverías et al. ¹⁹⁹⁰], [Meliopoulos et al. ¹⁹⁸⁴], [Tagg ¹⁹⁶⁴].

Las expresiones matemáticas que rigen el fenómeno físico de la disipación de la corriente eléctrica en un modelo de terreno de “doble capa” se obtienen del planteamiento de las ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell en las dos capas de terreno por separado, imponiendo una serie de condiciones de compatibilidad en la interfase entre los dos estratos [Silvester & Ferrari ¹⁹⁸⁰]. Si se circunscribe el problema a la obtención de la respuesta estacionaria y no se consideran posibles efectos electromagnéticos, estas condiciones establecen:

- la continuidad en las componentes tangenciales del campo eléctrico, y

- la continuidad en las componentes normales de la densidad de corriente.

Con estos condicionantes, se observa que el comportamiento de las líneas de flujo eléctricas en las inmediaciones de la frontera entre los dos medios es equivalente al de los rayos de luz en óptica [Silvester & Ferrari¹⁹⁸⁰], por lo que es posible definir un parámetro análogo al coeficiente de refracción óptico (característico de la interfase) que viene dado por la relación

$$k_{12} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (\text{eII.17})$$

siendo ρ_1 la resistividad de la capa superior y ρ_2 la de la inferior (figura II.15). Dado que ambos valores son siempre positivos, este factor está siempre comprendido entre -1 y $+1$, y es igual a cero en la hipótesis de terreno completamente uniforme.

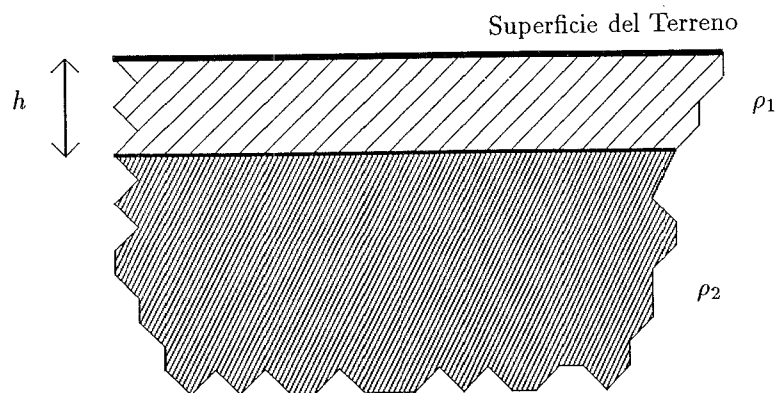


Fig. II.15 – Representación esquemática de un modelo de “doble capa”.

La equivalencia existente entre el fenómeno del flujo de la corriente eléctrica a través de un terreno dividido en estratos horizontales de distintos materiales y los fenómenos ópticos ha motivado que a las líneas de flujo generadas tras las refracciones en la interfase se las denomine “imágenes eléctricas” [Kellog¹⁹⁶⁷]. A la aplicación de esta analogía se la conoce también como “método de las imágenes”, y su desarrollo en el ámbito de las instalaciones de toma de tierra puede encontrarse en las referencias [Dawalibi & Mukhedkar¹⁹⁷⁷], [IEEE Std.81¹⁹⁶¹] y [Tagg¹⁹⁶⁴].

Los modelos de “doble capa” suponen una representación ligeramente más precisa frente al modelo de suelo isótropo y homogéneo (“simple capa”), dado

que las variaciones de la resistividad del terreno pueden influir en la resistencia equivalente de una toma de tierra y en la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno.

En comparación con el modelo de “simple capa”, si se considera que el conjunto de electrodos de una toma de tierra se encuentra enterrada en el estrato superior (resistividad ρ_1) de un terreno, se observa que:

- Para valores negativos del coeficiente k_{12} ($\rho_1 < \rho_2$), la resistencia equivalente y las tensiones de paso y contacto son menores que en la hipótesis de suelo uniforme con resistividad ρ_2 . Si el factor k_{12} es positivo, las magnitudes obtenidas (resistencia y diferencias de potencial) son mayores que en el caso de considerar uniformidad total.
- La existencia de electrodos clavados verticalmente en el suelo (picas) en una instalación de toma de tierra contribuye, de forma significativa, a disminuir la resistencia y las tensiones de paso y contacto en los casos en que $\rho_1 > \rho_2$ ($k_{12} > 0$). Este efecto se acentúa si el espesor h de la capa superior es pequeño en comparación con la longitud de las picas ya que la mayor parte de la corriente que circula por las mismas se descarga en la capa inferior del terreno. Si, por el contrario, el terreno presenta una relación de resistividades tal que $\rho_1 < \rho_2$, los efectos dependerán mucho de las longitudes de los conductores y el espesor de los estratos pero, en general, la existencia de picas no contribuye a mejorar las características de la instalación de toma de tierra en cuanto a su resistencia equivalente y tensiones de paso y contacto [Garrett¹⁹⁸⁶].

El método de las imágenes, aplicado a la determinación del potencial en un punto debido a una fuente de corriente puntual, fue propuesto originalmente por Maxwell en su “*A Treatise on Electricity and Magnetism*” [Maxwell¹⁸⁸⁵] como un procedimiento de resolución del problema en un modelo de “doble capa” de forma que se satisfacen automáticamente las condiciones de compatibilidad en las interfases entre estratos.

El ejemplo más simple que puede plantearse es el de un terreno de resistividad constante con una interfase con la atmósfera (la superficie del terreno). La existencia de una fuente puntual de corriente en el interior del terreno origina una circulación de cargas en el seno del mismo. La hipótesis de considerar la atmósfera como un aislante perfecto implica que no hay paso de cargas a la misma, es decir, no existe flujo de electrones en la dirección normal a la superficie del terreno. Dado

que el objetivo básico es el de obtener un modelo matemático de este fenómeno físico de la disipación de corriente en un medio, es interesante poder representar de una forma más sencilla esta condición de “no circulación de cargas a través de una interfase”. Una formulación alternativa (y perfectamente equivalente a esta condición en el contorno) que simplifica notablemente la modelización consiste en reproducir el semiespacio del terreno por la parte superior del plano de la superficie y situar en él una fuente puntual —análoga a la ya existente— a la misma distancia de la superficie (como si ésta actuase de espejo y reflejase los objetos en el semiespacio opuesto). Esta nueva fuente puntual recibe el nombre de “imagen”. Si existe solo una interfase, únicamente se produce una “reflexión” y por tanto cada punto de la toma de tierra (que puede pensarse como el lugar geométrico de un conjunto de fuentes puntuales de corriente) tiene una única imagen en el semiespacio opuesto respecto del plano de la superficie del terreno. Cabe añadir además que en este caso la reflexión es perfecta (la fuente puntual imagen es exactamente igual a la original) ya que se ha supuesto que la atmósfera es un aislante perfecto. Con esta técnica de generación de imágenes, la superficie de la interfase entre los dos medios se puede ignorar por completo en el cálculo del potencial en un punto cualquiera del terreno: por superposición, éste se calculará como la suma del potencial generado por la fuente puntual de corriente que existe realmente, más el potencial generado por una fuente puntual de corriente inexistente pero que se ha añadido al sistema para eliminar la condición de contorno impuesta en la interfase (la fuente puntual “imagen”) [Kellogg¹⁹⁶⁷], [Stakgold¹⁹⁷⁹].

Antes de presentar este método de las imágenes aplicado al modelo de “doble capa” es interesante estudiar un caso ficticio más simple. Considérese un estrato de material de resistividad constante limitado por dos planos paralelos que lo separan de un aislante perfecto (los planos se extienden hasta el infinito y se supone que no hay variaciones de la resistividad) como muestra la figura II.16.a. La aplicación del método de las imágenes a una fuente puntual de corriente situada entre los dos planos paralelos consiste en reproducir el mismo efecto que tiene lugar cuando un observador se coloca entre dos espejos paralelos y observa las infinitas reflexiones perfectas que se producen. En la figura II.16.b se ha representado esquemáticamente este fenómeno (para visualizar mejor las imágenes superpuestas, la propagación de las mismas se ha dibujado linealmente y se indica la posición geométrica de cada una de ellas). El cálculo del potencial en un punto del terreno se realiza, por el principio de superposición, como la suma de los potenciales generados por todas las fuentes puntuales de corriente: la que existe en el terreno

y las fuentes ficticias (“imágenes”) añadidas y equivalentes a las condiciones de contorno impuestas sobre el valor del flujo de cargas en las dos interfases entre los medios. A diferencia del ejemplo presentado anteriormente, el cálculo del potencial en cada punto se obtendrá de la suma de una serie ya que la generación de imágenes es infinita.

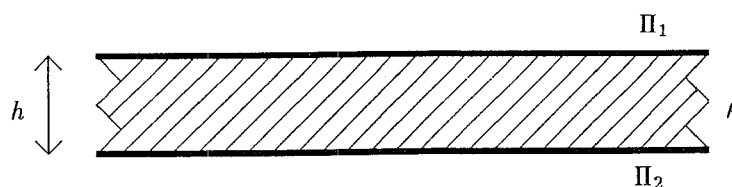


Fig. II.16.a – Esquema de un estrato de material de resistividad constante separado del aislante perfecto por dos planos paralelos.

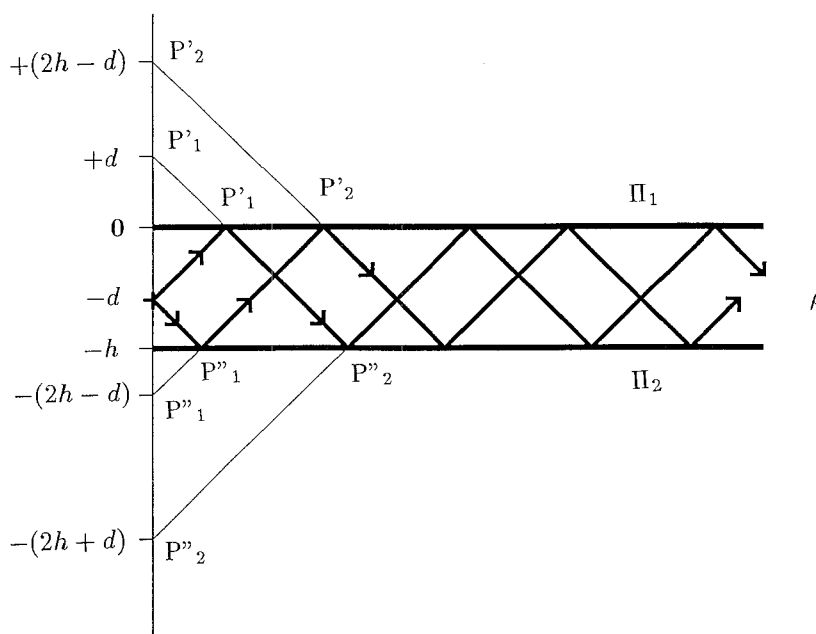


Fig. II.16.b – Situación de una fuente puntual de corriente entre los dos planos y esquema de las fuentes puntuales “imágenes” que se obtienen tras las primeras “reflexiones”.

El ejemplo precedente es una simplificación de un modelo de “doble capa” en el que se ha sustituido el estrato inferior de terreno por un material aislante.

Considérese el modelo formado por dos estratos horizontales de terreno y dos planos paralelos: uno limitando la capa superior (de espesor h) con la atmósfera, y el segundo situado en la interfase de las dos capas. Ambos estratos se extienden lateralmente hasta el infinito y sus resistividades son constantes en el interior de los mismos e iguales a ρ_1 y ρ_2 , (figura II.15).

En este modelo, el estrato inferior no es un aislante perfecto como en el caso presentado anteriormente. Las líneas de flujo eléctricas generadas por una fuente puntual de corriente no se reflejan totalmente en la interfase de los dos estratos sino solamente en parte, según la relación existente entre las resistividades de los estratos y determinada por el “coeficiente de imagen” k_{12} (eII.17).

Tal y como se ha comentado, este coeficiente es equivalente en el estudio de los fenómenos de óptica al factor de refracción: por cada unidad de intensidad de corriente emitida por la fuente puntual e incidente en la interfase entre los estratos 1 y 2, una fracción k_{12} no cruza la interfase y se propaga en el mismo estrato (1), en tanto que la parte restante $1 - k_{12}$ sí la cruza y se propaga en el estrato (2) [Silvester & Ferrari¹⁹⁸⁰]. Esta técnica de generación de imágenes en modelos de varios estratos puede encontrarse en [Maxwell¹⁸⁸⁵], [Durand¹⁹⁶⁶] y [Kellogg¹⁹⁶⁷], y una interesante interpretación gráfica en [Ewy & Smolleck¹⁹⁸⁴].

Al igual que en los ejemplos presentados anteriormente, las condiciones de contorno impuestas sobre los flujos de cargas en la interfase entre los distintos medios de un modelo de “doble capa” se sustituirán por un conjunto de fuentes puntuales ficticias situadas en unos puntos determinados mediante la aplicación del método de las imágenes. Como se verá a continuación, la generación de estas imágenes es distinta según en qué estrato se encuentre la fuente puntual de corriente.

Consideremos, en primer lugar, la fuente puntual de corriente situada en el estrato inferior 2) a una distancia d de la superficie del terreno: coordenada vertical $z = -d$ (en todo el análisis siguiente se supondrá que el origen de coordenadas es el punto de la superficie del suelo sobre la vertical del punto en el que está la fuente puntual). El “coeficiente de imagen” entre la interfase del estrato 2) y el 1) según la expresión (eII.17) es $k_{21} = -k_{12}$. La figura II.17 muestra la generación de las distintas fuentes puntuales ficticias o imágenes que equivalen a imponer condiciones sobre el flujo de cargas en la interfase entre los dos medios. La fuente puntual se “refleja” en la interfase según el factor k_{21} y permanece en el estrato 2) (el lugar geométrico de esta imagen es el punto P_1'' , de coordenada vertical

$z = -(2h - d)$), en tanto que la parte restante $(1 - k_{21})$ pasa al estrato superior 1) y se “refleja”, de nuevo, de forma total en la interfase entre 1) y la atmósfera (esta nueva imagen es el punto P'_1 de la figura II.17 de coordenada vertical $z = +d$). Esta imagen se vuelve a “reflejar” en la interfase entre 1) y 2) con un factor k_{12} , es decir, la propagación en el estrato 1) es $(1 - k_{21})k_{12}$ y cruza la interfase la parte restante $(1 - k_{21})(1 - k_{12})$ (esta imagen es el punto P''_2 , de coordenada vertical $z = -(2h + d)$). Este proceso se repite de forma indefinida generándose un número infinito de imágenes eléctricas, cada una de ellas ponderada por el “coeficiente de imagen” de la interfase entre los estratos. El cálculo del potencial en un punto del terreno puede efectuarse por el principio de superposición como la suma de los potenciales generados por todas las fuentes puntuales: la existente y todas las ficticias añadidas (el generado por cada imagen estará ponderado por el factor correspondiente tras las “reflexiones” producidas).

Si la fuente puntual de corriente se encuentra situada en el estrato superior 1) a una distancia d de la superficie del terreno (punto de la figura II.18 de coordenada vertical $z = -d$), la generación de las imágenes eléctricas es muy parecida al caso precedente. La diferencia está en que inicialmente se producen dos “reflexiones distintas”: una en la interfase con el aislante perfecto (la imagen corresponde al punto P'_1 de la figura II.18 de coordenada vertical $z = +d$) y otra imagen se produce en la interfase del estrato inferior (punto P''_1 de la figura II.18 de coordenada vertical $z = -(2h - d)$), aunque ésta con un “coeficiente de imagen” k_{12} , de modo que la parte restante cruza la interfase. A partir de este punto, las sucesivas reflexiones con las dos interfases generan infinitas imágenes, tal como muestra esquemáticamente la figura II.18. Del mismo modo que en los casos anteriores, el potencial en un punto se obtiene de la superposición de los potenciales generados por todas las fuentes puntuales y sus imágenes, ponderados por los “coeficientes de imagen” correspondientes.

Estos modelos de “doble capa” y sus extensiones a modelos “multi capa” han sido estudiados en profundidad desde finales de los años cincuenta. Su fundamentación, desarrollo e implementación práctica pueden encontrarse en las referencias [Dawalibi & Mukhedkar¹⁹⁷⁵], [Ewy & Smolleck¹⁹⁸⁴], [Garrett¹⁹⁸⁶], [Hepe^{1979-b}], [IEEE Std.81¹⁹⁶¹], [Lagacé et al.¹⁹⁸⁷], [Lazzara & Barbeito¹⁹⁹⁰], [Sato & Zaengl¹⁹⁸⁸], [Sunde¹⁹⁶⁸], [Sverak et al.¹⁹⁸²] y [Tagg¹⁹⁶⁴].

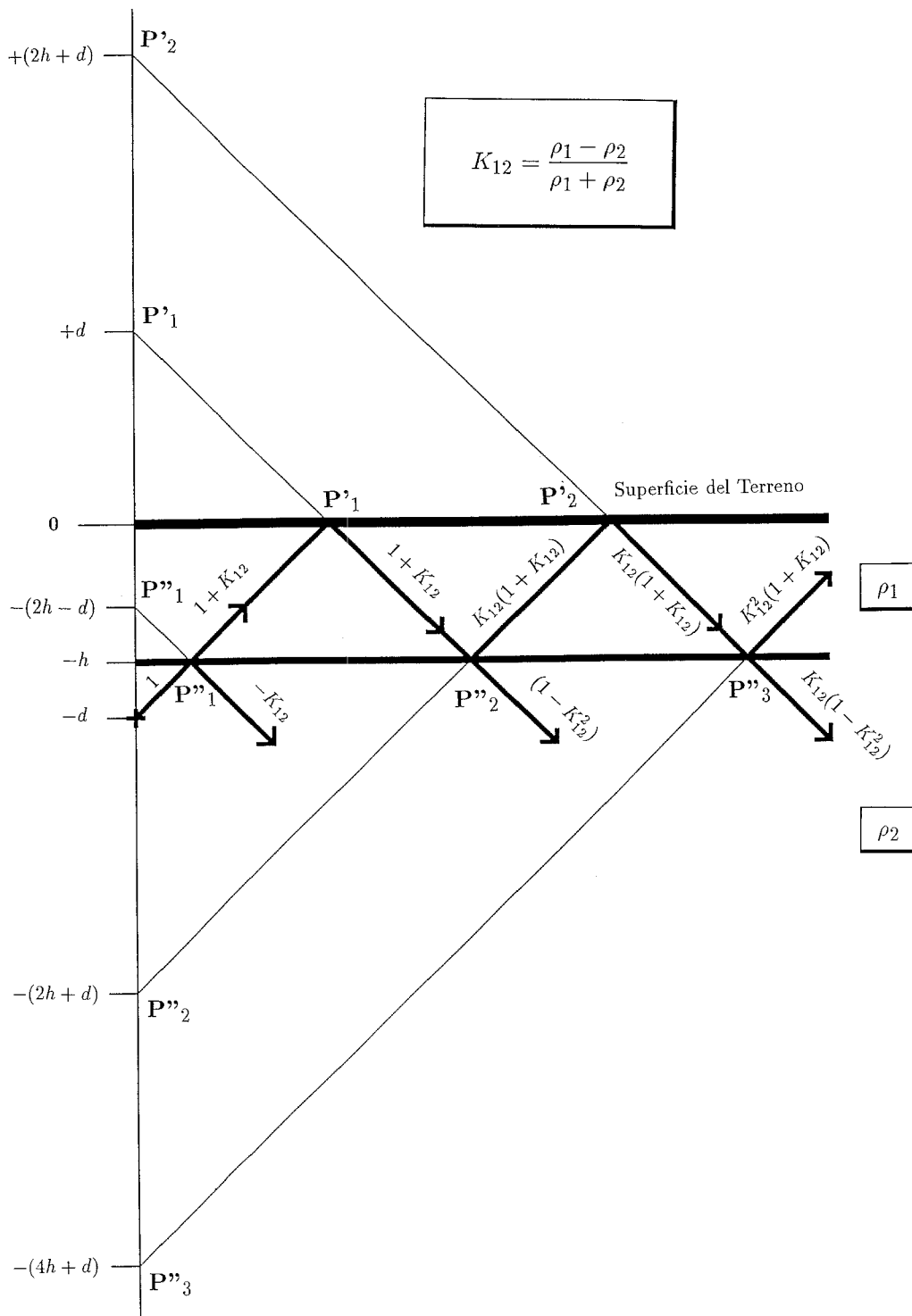


Fig. II.17 – Generación y lugar geométrico de las “imágenes eléctricas” de una fuente puntual de corriente situada en el estrato inferior 2) a una distancia d de la superficie del terreno.

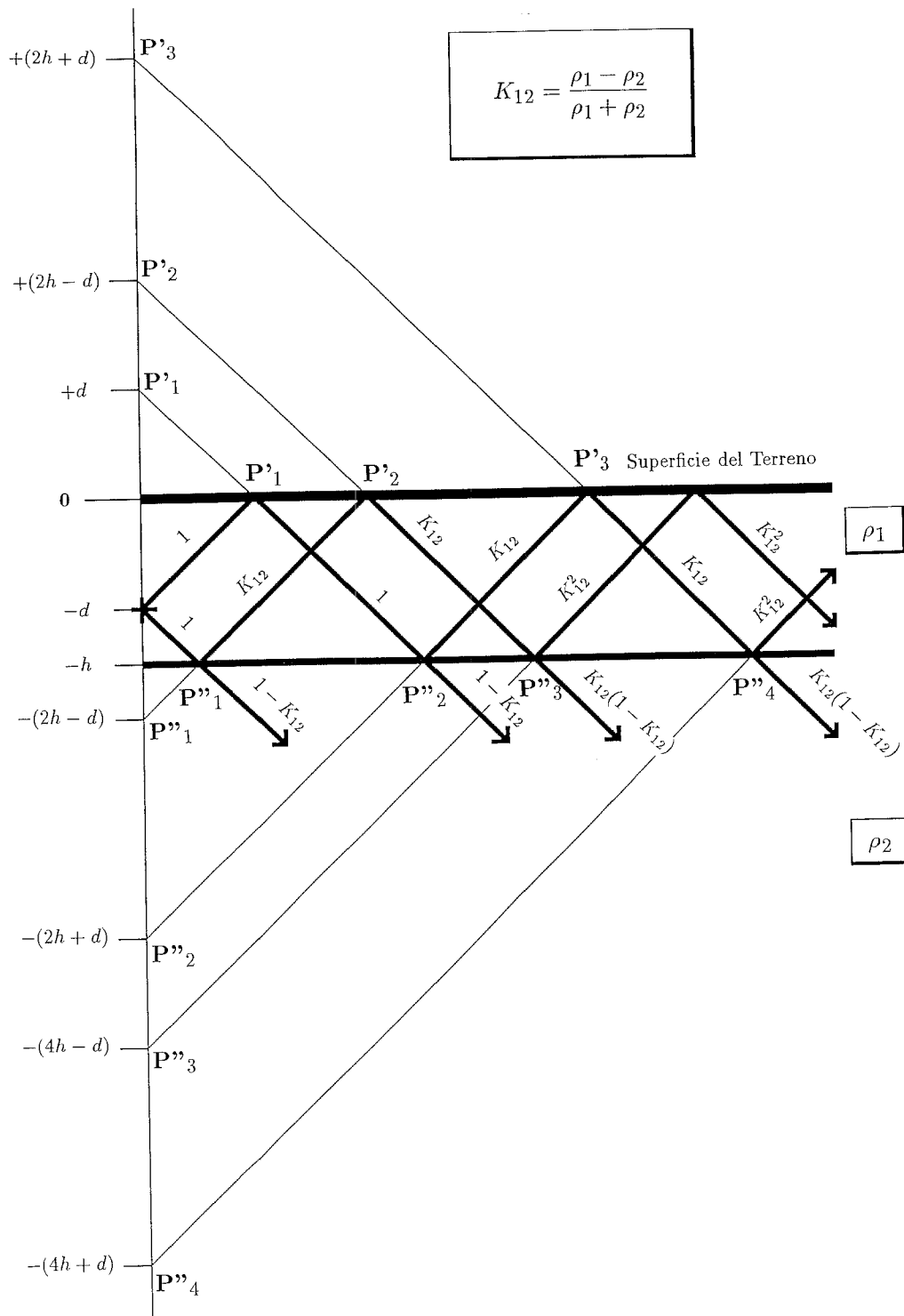


Fig. II.18 – Generación y lugar geométrico de las “imágenes eléctricas” de una fuente puntual de corriente situada en el estrato superior 1) a una distancia d de la superficie del terreno.

A la vista del estudio realizado de los modelos de “doble capa”, éstos implican siempre un aumento considerable del coste computacional frente a los modelos de “simple capa” y no aportan nada nuevo desde el punto de vista conceptual. Además, dado que el terreno sobre el que se asienta la toma de tierra es regularizado previamente a la construcción de las instalaciones eléctricas, existen serias dudas sobre si este incremento computacional está justificado con la obtención de mejores resultados. A este punto cabe añadir también la incertidumbre que existe en los valores de la resistividad, que se estima generalmente en función de la composición mayoritaria del terreno.

Como extensión natural de los modelos de “doble capa” se han propuesto en la bibliografía los “multi capa”, consistentes en aumentar el número de estratos del modelo de terreno. Estos modelos, que se presentarán brevemente a continuación, precisan unos elevadísimos requerimientos de cálculo lo que limita sus aplicaciones a meros ejercicios académicos.

Por estas razones y fundamentalmente porque hasta la presentación de esta tesis doctoral no se dispone de una técnica general que permita abordar el cálculo de una malla real de toma de tierra con un modelo de terreno de “simple capa”, en esta tesis se considerará que el estudio de modelos más sofisticados (con dos o más capas) tiene un interés secundario.

4.5 Modelo de terreno “multi capa”

Los modelos “multi capa” están basados en la hipótesis de considerar el terreno constituido por estratos horizontales de diferentes espesores y resistividades, aunque constantes en una misma capa. Estos modelos se aplicaron por primera vez en el ámbito de la disipación de corriente eléctrica en el suelo para problemas sencillos (fuentes puntuales, esferas, etc) por [Stefanescu & Schlumberger¹⁹³⁰] mediante técnicas basadas en la generación de imágenes eléctricas [Dawalibi & Barbeito¹⁹⁹¹].

La generación de las imágenes en estos modelos “multi capa” se realiza del mismo modo que en los de “doble capa”, definiendo unos “coeficientes de imagen” distintos en cada una de las interfases. Como en los casos anteriores, se obtienen también infinitas imágenes. La figura II.19 muestra un ejemplo de las primeras imágenes de una fuente puntual de corriente en un modelo de terreno con tres capas. El potencial en un punto cualquiera del terreno se calcularía por superposición del potencial que generan la fuente puntual y sus imágenes.

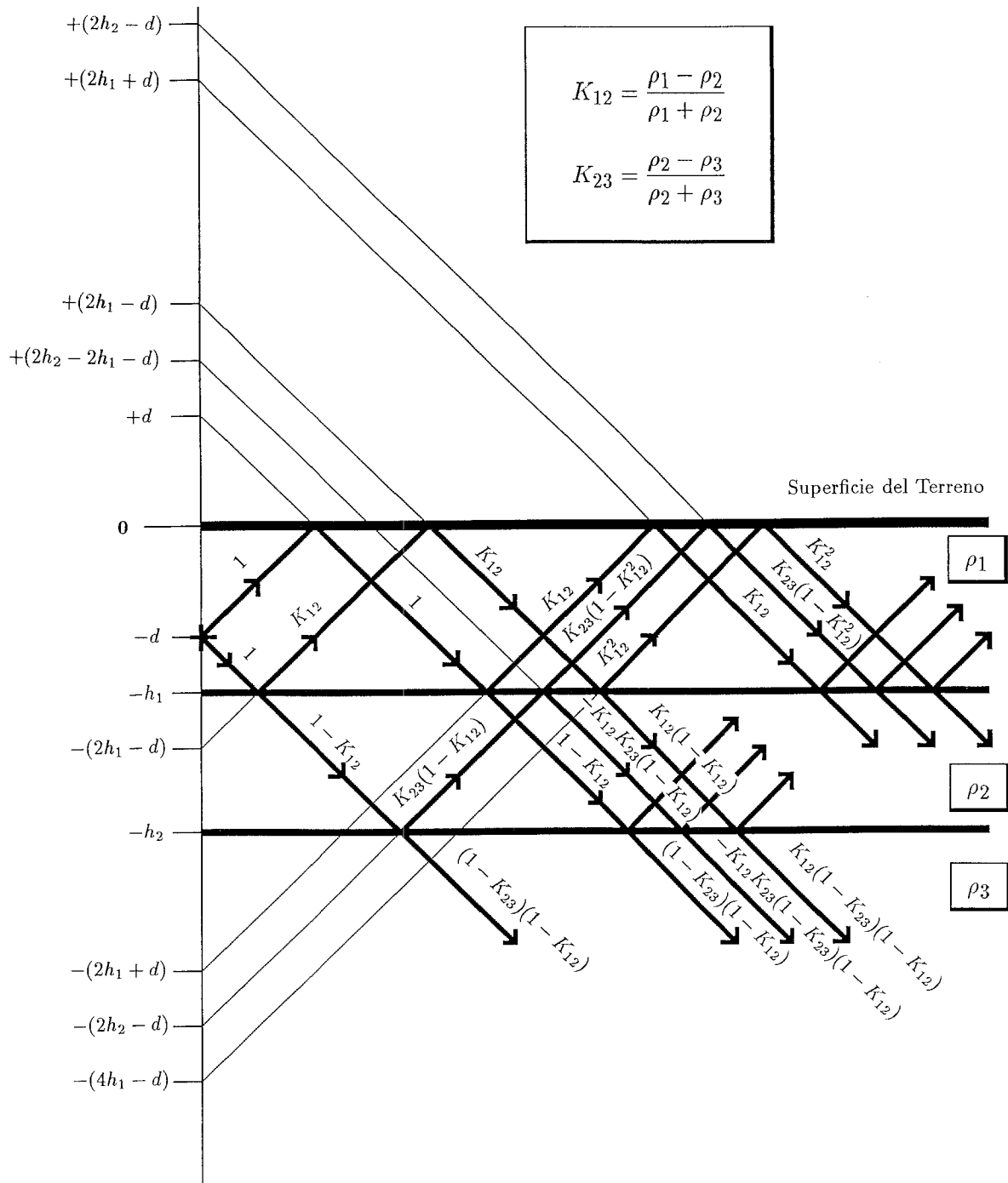


Fig. II.19 – Generación de “imágenes eléctricas” de una fuente puntual de corriente en un modelo de suelo de tres capas.

En general, los objetivos de los estudios y trabajos que incorporan modelos de terreno más complejos (incluidos los de “doble capa”) en la determinación de los parámetros característicos de una instalación de toma de tierra (resistencia equivalente, tensiones de paso y de contacto, etc) están dirigidos a obtener expresiones analíticas o empíricas y fórmulas rápidas para estimar dichas magnitudes [Lagacé et al.¹⁹⁸⁸], [Seedher et al.¹⁹⁸⁷]. En fechas muy recientes, en que se ha dispuesto de herramientas de cálculo intensivo, se ha intentado abordar el cálculo de tomas de tierra con geometrías extremadamente sencillas mediante técnicas de cálculo matricial y de subdivisión del dominio de solución [Takahashi & Kawase^{1990,1991}],[Kostic & Shirkoohi¹⁹⁹³].

A pesar de que en los modelos “multi capa” se representa el terreno como un conjunto de distintos estratos horizontales y paralelos, últimamente se han realizado también estudios del fenómeno de la disipación de corriente a través de una toma de tierra en terrenos con una distribución vertical de estratos como los que existen en determinadas formaciones geológicas, tales como plegamientos o fallas [Lagacé et al.¹⁹⁹⁰]. Un problema particularmente interesante relacionado con estas nuevas aplicaciones del método de las imágenes no es tanto la presencia de capas verticales de terreno (dado que en la práctica se regulariza previamente la zona donde va a ubicarse la instalación de tierra), sino el estudio de la distribución de los niveles de potencial en la superficie de instalaciones eléctricas situadas en terrenos a distintos niveles, como por ejemplo aquéllas que pueden encontrarse en la ladera de una montaña.

5. RESUMEN

Los sistemas de puesta a tierra de instalaciones eléctricas están formados genéricamente por una red colectora convenientemente aislada (líneas principales, de enlace, conductores de protección, puntos de puesta a tierra, etc) y por un electrodo de tierra que es el elemento principal (une eléctricamente la instalación con el terreno). En la mayor parte de los casos, este electrodo es una malla de conductores cilíndricos. El objetivo principal de una toma de tierra es la disipación en el interior del terreno de las corrientes de fallo o de retorno que se puedan producir. Con carácter general, un buen sistema de puesta a tierra será aquel cuya toma de tierra ofrezca la menor resistencia al paso de la corriente eléctrica, lo cual significa que uno de los objetivos básicos de diseño es el de conseguir que la resistencia equivalente del conjunto de electrodos que la componen se reduzca

al mínimo.

Por otra parte, la existencia de una toma de tierra en una zona determinada origina una distribución de potenciales en la superficie del terreno en el momento en que se produce una derivación de corriente al mismo. Esta distribución, que no se altera significativamente por la presencia de personas en las inmediaciones de la instalación eléctrica, puede afectar seriamente a la seguridad de aquéllas que se encuentren trabajando o transitando por la zona. La existencia de gradientes de potencial elevados entre puntos cercanos de la superficie o entre puntos de la instalación eléctrica y la superficie del terreno puede originar la circulación de grandes intensidades de corriente a través de las personas. Por tanto, es muy importante el estudio de las distribuciones de potencial en la superficie del terreno debidas a la energización de la instalación de toma de tierra, así como la localización y minimización de las diferencias de potencial entre puntos cercanos (tensión de paso) o entre puntos de la instalación y de la superficie (tensión de contacto y tensión de malla).

Como se ha mostrado, la resistencia equivalente del sistema de toma de tierra y la distribución de potenciales en la superficie del terreno se pueden calcular sin necesidad de considerar todas las circunstancias en las que se podría producir un contacto accidental de una persona con la parte de la instalación puesta bajo tensión debido a un cortocircuito. La presencia de un individuo en las inmediaciones de la instalación no modifica sustancialmente ni la resistencia eléctrica del sistema ni la distribución de los niveles de potencial. De este modo, el problema sometido a estudio se reduce exclusivamente al análisis de la circulación de corriente eléctrica en un terreno cuando tiene lugar una derivación a través de una toma de tierra (figura II.9).

Para efectuar este análisis de la disipación de corriente en un terreno es preciso determinar la resistividad eléctrica de éste. El modelo de suelo más simple que puede considerarse (isótropo y homogéneo) caracteriza el medio con un valor de la resistividad constante. Éste es el modelo más utilizado en la práctica debido a que el terreno en el que se asienta una instalación de toma de tierra es regularizado previamente a la construcción de ésta. Otro modelo propuesto con frecuencia es el de "doble capa" consistente en representar el suelo por dos estratos horizontales de distinta resistividad eléctrica entre sí pero constante en el interior de cada estrato. En este tipo de modelos, la aplicación del método de las imágenes permite el cálculo del potencial en un punto cualquiera del terreno como la superposición

de los potenciales generados por cada fuente puntual y todas sus infinitas fuentes “imagen” equivalentes a “reflexiones” de las fuentes puntuales en las interfases entre los medios. La extensión a modelos de terreno con un número mayor de estratos no supone ninguna novedad conceptual, ya que simplemente implica la generación de más imágenes eléctricas con distintos factores entre las interfases.

Desde los años cuarenta se han desarrollado fórmulas analíticas y expresiones empíricas que intentan estimar los valores de los parámetros propios de una toma de tierra. Sin embargo, tal y como se ha comentado en el capítulo anterior, hasta la presentación de esta tesis no se disponía de ningún procedimiento general que permitiera abordar el cálculo de una instalación de toma de tierra real: con un número elevado de conductores, con picas hincadas en el suelo y con una forma completamente irregular (los conductores que forman la malla suelen tener todos distintas longitudes y, en ocasiones, también distintos diámetros). Las técnicas existentes en la actualidad permiten únicamente la caracterización de tomas de tierra con geometrías extremadamente simples (malladas cuadradas o rectangulares) y con pocos conductores.

En todo el estudio que se ha presentado en este capítulo, no se ha efectuado ninguna restricción respecto al punto en el que se produce esta derivación de corriente a la toma de tierra. Obviamente, existe una caída óhmica en los electrodos que forman la toma de tierra y, por tanto, se origina una variación de potencial en ella. Sin embargo, la elevadísima conductividad de la instalación de toma de tierra (formada por conductores metálicos), comparada con la conductividad del medio que la rodea (el terreno), nos hace pensar que esta diferencia de potencial en la toma de tierra será prácticamente insignificante y tendrá una importancia secundaria, por lo que en la práctica podremos considerar que el potencial es constante en la toma de tierra, tal y como se verá en el capítulo siguiente. En éste se presentará un modelo matemático del fenómeno físico sometido a estudio que se ha indicado en la figura II.9: la disipación de corriente eléctrica en un terreno a través de un sistema de toma de tierra. Esta modelización se llevará a cabo mediante las ecuaciones generales del electromagnetismo, la ecuación de conservación de la carga eléctrica y la ecuación constitutiva del terreno.

CAPÍTULO III

MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA FÍSICO

Confrontando con los hallazgos experimentales de Faraday, Ampère y otros, el gran físico y matemático escocés James Clerk Maxwell se interrogó sobre la forma matemática de las ecuaciones que surgían de aquellos hallazgos. Con un notable golpe de intuición propuso un cambio en las ecuaciones —pequeño en apariencia, pero fundamental en sus conclusiones. Este cambio no era sugerido en absoluto por los hechos experimentales conocidos (aunque era consistente con ellos); fue un resultado de las propias exigencias teóricas de Maxwell, en parte físicas, en parte matemáticas y en parte estéticas. (R. Penrose, 1989)

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se ha presentado un ejemplo del funcionamiento de una toma de tierra, cuando tiene lugar el contacto accidental de una persona con una parte de una instalación eléctrica sometida a tensión debido a un defecto en el aislamiento. Con este estudio se ha puesto de manifiesto que el análisis y caracterización de una toma de tierra se puede realizar, desde el punto de vista de la seguridad, analizando el fenómeno de la disipación de corriente eléctrica en el terreno a través de la malla de electrodos que conforman la puesta a tierra, sin que sea preciso particularizar el estudio a los distintos tipos y modos de contacto accidental que se puedan producir.

El objetivo de este capítulo es presentar un modelo matemático del fenómeno físico de la circulación de corriente en un terreno debido a la derivación de corriente producida en una toma de tierra de una instalación eléctrica (ver figura II.9).

Para el modelo geométrico del problema sometido a estudio (ver figura III.1) se establece la notación siguiente:

C = Dominio (3D) del medio conductor en el que tiene lugar la disipación de la corriente eléctrica (el terreno).

G = Dominio (3D) del medio generador de la corriente eléctrica (la toma de tierra).

A = Dominio (3D) correspondiente al medio aislante (la atmósfera exterior).

Γ_A = Contorno que separa los medios conductor y aislante (la superficie del terreno).

Γ_G = Contorno que separa los medios conductor y generador (la superficie de los electrodos que forman la toma de tierra).

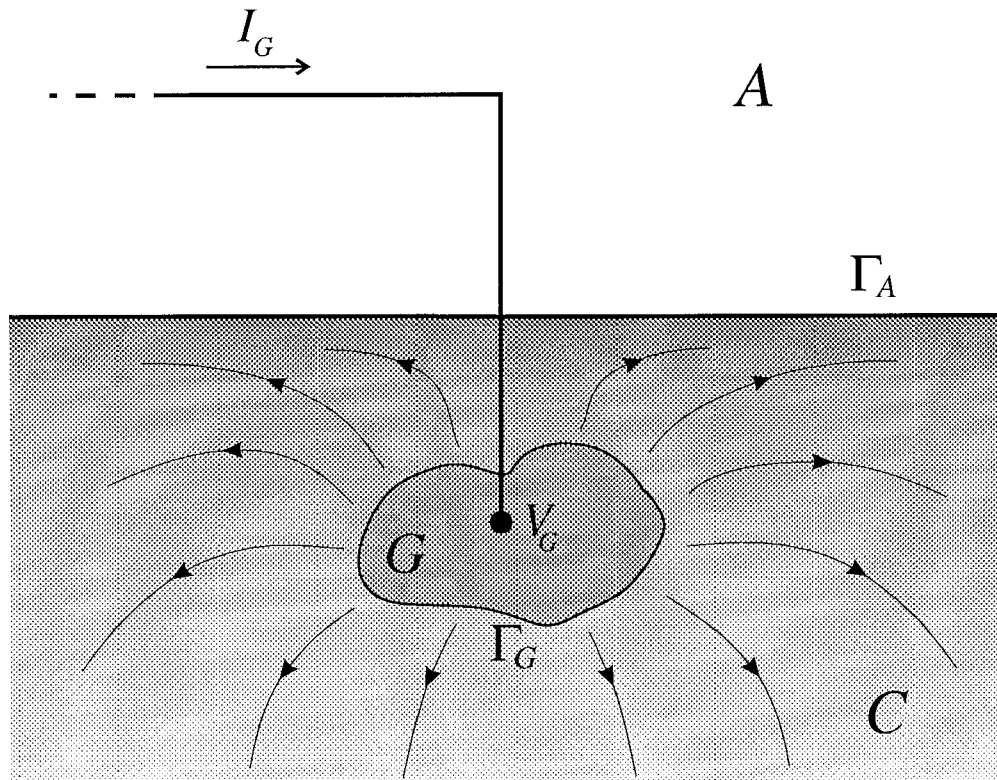


Fig. III.1 – Esquema del fenómeno físico de la disipación de corriente en un terreno a través de una toma de tierra.

Para representar las magnitudes físicas que se utilizarán en todo el desarrollo se empleará la siguiente notación:

- \mathbf{E} = Campo eléctrico en el medio conductor (V/m).
- \mathbf{E}_G = Campo eléctrico en el medio generador (V/m).
- \mathbf{E}_A = Campo eléctrico en el medio aislante (V/m).
- \mathbf{B} = Inducción magnética (T).
- σ = Densidad de corriente en el medio conductor (A/m²).
- σ_G = Densidad de corriente en el medio generador (A/m²).
- σ_A = Densidad de corriente en el medio aislante (A/m²).
- \mathbf{k} = Densidad lineal de corriente (A/m).
- \mathbf{n} = Versor normal exterior a una superficie.
- V = Potencial (V).
- V_G = Potencial en el punto del medio generador en que se produce la descarga eléctrica (V).
- V_0 = Potencial de referencia en un punto alejado de la toma de tierra (V).
- I_G = Intensidad total de corriente que emana de la toma de tierra (A).
- σ = Densidad de corriente normal que emana de una superficie (A/m²).
- q_v = Densidad volumétrica de carga en el medio conductor (C/m³).
- q_{vG} = Densidad volumétrica de carga en el medio generador (C/m³).
- q_{vA} = Densidad volumétrica de carga en el medio aislante (C/m³).
- q_{sG} = Densidad superficial de carga en Γ_G (C/m²).
- q_{sA} = Densidad superficial de carga en Γ_A (C/m²).
- $\underline{\underline{\gamma}}$ = Tensor de conductividad del medio conductor (mhos/m).
- $\underline{\underline{\gamma}}_A$ = Tensor de conductividad del medio aislante (mhos/m).
- $\underline{\underline{\gamma}}_G$ = Tensor de conductividad del medio generador (mhos/m).
- $\underline{\underline{I}}$ = Tensor identidad.
- $\hat{\gamma}$ = Conductividad escalar del medio conductor correspondiente a un modelo de terreno isótropo (mhos/m).
- $\hat{\gamma}_G$ = Conductividad escalar de un medio generador isótropo (mhos/m).
- $\hat{\gamma}_A$ = Conductividad escalar de un medio aislante isótropo (mhos/m).
- γ = Conductividad escalar del medio conductor en un modelo de terreno isótropo y homogéneo (mhos/m).
- ϵ = Constante dieléctrica o “permitividad” del medio (F/m).

$\epsilon_0 =$ Constante dieléctrica o “permitividad” en el vacío ($8.8452 \cdot 10^{-12}$ F/m).

$\mu =$ Permeabilidad magnética (H/m).

$\mu_0 =$ Permeabilidad magnética en el vacío ($4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tal como se ha expuesto detalladamente en el capítulo anterior, para caracterizar los dispositivos de seguridad (las tomas de tierra) empleados en la disipación de las corrientes de pérdida que se generan en las instalaciones eléctricas, es preciso determinar una serie de parámetros fundamentales. Los principales son, sin duda alguna, la resistencia equivalente del sistema R_{eq} (R_T^E , en la notación del capítulo anterior) y los valores del potencial eléctrico generado en la superficie del terreno en el que se encuentra la instalación cuando tiene lugar una corriente de falta. A partir de éstos se pueden determinar de forma inmediata las tensiones de paso, de malla y de contacto de la puesta a tierra.

Conceptualmente, diremos que la toma de tierra actúa de medio generador (G) con una fuerza electromotriz constante ($V_G - V_0$). Por otra parte, el terreno donde se produce la disipación de la corriente eléctrica actúa como un medio conductor (C) de conductividad $\underline{\gamma}$, mucho más pequeña que la del generador $\underline{\gamma}_G$ que se supondrá formado por electrodos perfectos y por tanto, con una conductividad infinita. La atmósfera (A) se considerará como un “aislante perfecto” (conductividad nula) y en consecuencia, no existirá flujo de corriente del terreno a la atmósfera (la componente de la densidad de corriente normal a la superficie del terreno es nula).

En conclusión, el planteamiento general del problema puede resumirse en los siguientes datos:

- La geometría del medio generador G , que incluye la disposición espacial de los electrodos que conforman una toma de tierra y sus dimensiones.
- La geometría del medio conductor (el terreno) y de su frontera (Γ_A) con el medio aislante (la atmósfera).
- La conductividad del medio conductor ($\underline{\gamma}$).
- La fuerza electromotriz ($V_G - V_0$) del medio generador.

Por otra parte, las hipótesis generales del modelo son:

- El medio generador está formado por conductores perfectos.
- La atmósfera es un aislante perfecto.

Las magnitudes que deseamos calcular en nuestro problema de la disipación de corriente en un terreno a través de un sistema de toma de tierra son:

- La densidad de corriente normal (σ) que emana del contorno de la toma de tierra hacia el terreno, como consecuencia de la fuerza electromotriz aplicada por el medio generador.
- El potencial eléctrico (V) en cualquier punto del medio conductor, resultado del movimiento de cargas en su seno.

3. ECUACIONES DEL MODELO FÍSICO

A continuación se presentan las distintas expresiones de la modelización matemática del fenómeno físico sometido a estudio. En primer lugar, se relacionan las ecuaciones generales que rigen la circulación de corriente en un dominio tridimensional genérico \mathcal{V} , y las condiciones que se verifican en el contorno $\partial\mathcal{V}$ que separa este medio de otro con distinta conductividad. En segundo lugar, estas ecuaciones generales y sus condiciones de contorno en un dominio genérico se reescribirán para el estudio del estado estacionario del fenómeno físico. Seguidamente, las expresiones obtenidas se aplicarán en el planteamiento del modelo de nuestro problema concreto (ver figura III.1) para los tres medios presentes en el mismo: la toma de tierra, el terreno y la atmósfera.

3.1. Ecuaciones generales

La circulación de corriente eléctrica en un dominio conductor tridimensional \mathcal{V} se rige por las ecuaciones generales del electromagnetismo o “ecuaciones de Maxwell-Faraday” [Lorrain & Corson¹⁹⁹⁰]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E}) &= \frac{q_v}{\epsilon_0} \quad \text{en } \mathcal{V}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}) &= 0 \quad \text{en } \mathcal{V}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{en } \mathcal{V}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{B}) &= \mu_0 \left[\boldsymbol{\sigma} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad \text{en } \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{eIII.1.a}$$

La aplicación de las expresiones anteriores a cualquier contorno $\partial\mathcal{V}$ que separe este medio conductor de otro con distinta conductividad permite obtener además las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \frac{q_s}{\epsilon_0} \quad \text{en } \partial\mathcal{V}, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{V}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\mathcal{V}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= \mu_0 \mathbf{k} \quad \text{en } \partial\mathcal{V}, \end{aligned} \tag{eIII.1.b}$$

donde los subíndices 1 y 2 indican el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} en cada uno de los dos medios separados por el contorno $\partial\mathcal{V}$.

Por otra parte, la ecuación de continuidad o “de conservación de la carga eléctrica” se puede escribir, en el caso más general en que exista variación de la densidad volumétrica de cargas a lo largo del tiempo, como

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{\partial q_v}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \mathcal{V}, \tag{eIII.2.a}$$

y en el contorno $\partial\mathcal{V}$ que separe dos medios (1 y 2) de distinta conductividad, se verifica

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) + \frac{\partial q_s}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{V}. \tag{eIII.2.b}$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}_1$ y $\boldsymbol{\sigma}_2$ las densidades de corriente en los dos medios.

La ecuación constitutiva de este medio tridimensional conductor \mathcal{V} , que relaciona la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ con el campo eléctrico \mathbf{E} a través del tensor de conductividad $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$, viene dada por la expresión

$$\boldsymbol{\sigma} = \underline{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{E} \quad \text{en } \mathcal{V}. \tag{eIII.3}$$

3.2. Ecuaciones generales en la hipótesis de modelo estacionario

La modelización del fenómeno físico de la disipación de corriente eléctrica en un terreno mediante una toma de tierra se va a limitar al estudio del estado estacionario, dado que el periodo transitorio es extremadamente corto (aproximadamente unos 15 órdenes de magnitud menor) respecto de la duración de la corriente de fuga o de cortocircuito [ANSI/IEEE Std.80¹⁹⁸⁶],[Moreno¹⁹⁸⁹].

Con esta consideración, las ecuaciones generales expuestas en el apartado anterior se reducen a las ecuaciones de Coulomb

$$\begin{aligned}\mathbf{div}(\mathbf{E}) &= \frac{q_v}{\epsilon_0} \quad \text{en } \mathcal{V}, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{V},\end{aligned}\tag{eIII.4.a}$$

con las condiciones adicionales en el contorno entre dos medios

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \frac{q_s}{\epsilon_0} \quad \text{en } \partial\mathcal{V}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\mathcal{V};\end{aligned}\tag{eIII.4.b}$$

y a las leyes de Ampère del magnetismo:

$$\begin{aligned}\mathbf{div}(\mathbf{B}) &= 0 \quad \text{en } \mathcal{V}, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{B}) &= \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \quad \text{en } \mathcal{V},\end{aligned}\tag{eIII.4.c}$$

junto con las ecuaciones que se verifican en la interfase entre dos medios conductores 1 y 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{V}, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= \mu_0 \mathbf{k} \quad \text{en } \partial\mathcal{V}.\end{aligned}\tag{eIII.4.d}$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad o de conservación de la carga eléctrica en estado estacionario se reduce a

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{en } \mathcal{V},\tag{eIII.5.a}$$

válida para cualquier punto del medio conductor \mathcal{V} ; en los puntos situados en la frontera de este dominio se verifica

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{V}.\tag{eIII.5.b}$$

Este hipótesis de estado estacionario permite desacoplar las ecuaciones del electromagnetismo permitiendo el estudio por una parte de los fenómenos eléctricos (eIII.4.a) y (eIII.4.b), y por otra de los magnéticos (eIII.4.c) y (eIII.4.d). Dado que el objetivo concreto de nuestro problema es la obtención de la densidad de corriente σ que emana de los electrodos de la toma de tierra hacia el terreno y el potencial eléctrico V en cualquier punto de éste, podemos prescindir de las ecuaciones que involucran magnetismo.

Una vez presentadas las ecuaciones generales que rigen el fenómeno físico del estado estacionario de la circulación de corriente eléctrica — (eIII.3),(eIII.4.a),(eIII.4.b),(eIII.5.a) y (eIII.5.b)—en un medio conductor genérico \mathcal{V} con frontera $\partial\mathcal{V}$, vamos a aplicarlas en la resolución de nuestro problema (ver figura III.1).

3.3. Ecuaciones del modelo matemático del problema

Tal como se ha indicado anteriormente, en el fenómeno físico sometido a estudio se pueden distinguir tres dominios con distintas conductividades: la toma de tierra, el terreno y la atmósfera, y dos fronteras entre éstos: el contorno de la toma de tierra (Γ_G) y la superficie del terreno (Γ_A). La aplicación de las ecuaciones generales del modelo estacionario a estos tres dominios y sus fronteras permite obtener las siguientes expresiones:

- En el medio conductor C (el terreno):

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{E}) &= \frac{qv}{\epsilon_0} \quad \text{en } C, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}) &= \mathbf{0} \quad \text{en } C, \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } C, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \underline{\underline{\gamma}}\mathbf{E} \quad \text{en } C. \end{aligned} \tag{eIII.6.a}$$

- En el medio generador G (la toma de tierra):

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{E}_G) &= \frac{qv_G}{\epsilon_0} \quad \text{en } G, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}_G) &= \mathbf{0} \quad \text{en } G, \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_G) &= 0 \quad \text{en } G, \\ \boldsymbol{\sigma}_G &= \underline{\underline{\gamma}}_G\mathbf{E}_G \quad \text{en } G. \end{aligned} \tag{eIII.6.b}$$

- En el medio aislante A (la atmósfera):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{div}(\mathbf{E}_A) &= \frac{q_{vA}}{\epsilon_0} \quad \text{en } A, \\
 \mathbf{rot}(\mathbf{E}_A) &= \mathbf{0} \quad \text{en } A, \\
 \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_A) &= 0 \quad \text{en } A, \\
 \boldsymbol{\sigma}_A &= \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_A \mathbf{E}_A \quad \text{en } A.
 \end{aligned}
 \tag{eIII.6.c}$$

- En el contorno de la toma de tierra:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_G - \mathbf{E}) &= \frac{q_{sG}}{\epsilon_0} \quad \text{en } \Gamma_G, \\
 \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_G - \mathbf{E}) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_G, \\
 \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_G - \boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } \Gamma_G.
 \end{aligned}
 \tag{eIII.6.d}$$

- En la superficie del terreno:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_A - \mathbf{E}) &= \frac{q_{sA}}{\epsilon_0} \quad \text{en } \Gamma_A, \\
 \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_A - \mathbf{E}) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_A, \\
 \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_A - \boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } \Gamma_A.
 \end{aligned}
 \tag{eIII.6.e}$$

Centrando nuestra atención en el estudio de la circulación de corriente en el medio conductor (dado que deseamos caracterizar las magnitudes eléctricas de este dominio), y teniendo presente las hipótesis relativas a las conductividades de los medios generador y aislante, podemos afirmar que:

- la componente de la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ normal a la superficie del terreno Γ_A es nula, ya que la conductividad del medio aislante es cero al tratarse de un aislante perfecto (en un medio isótropo $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_A = \hat{\gamma}_A \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, y $\hat{\gamma}_A = 0$). En consecuencia, no existe flujo de corriente eléctrica a través de la superficie del terreno [Silvester & Ferrari¹⁹⁹⁰].
- la componente del campo eléctrico \mathbf{E} tangencial al contorno de la toma de tierra Γ_G es nula, como consecuencia de que ésta está formada por conductores perfectos (en un medio generador isótropo $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_G = \hat{\gamma}_G \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, y $\hat{\gamma}_G \rightarrow \infty$) [Silvester & Ferrari¹⁹⁹⁰].

Con estas consideraciones, se pueden desacoplar las expresiones que rigen el estado estacionario del fenómeno de la disipación de corriente eléctrica en el terreno

de las expresiones correspondientes a los medios generador y aislante. De este modo, con las hipótesis de que la atmósfera es un aislante perfecto y la toma de tierra un conductor perfecto, las ecuaciones que gobiernan el fenómeno en el medio conductor son:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\mathbf{E}) &= \frac{q_v}{\epsilon_0} \quad \text{en } C, \\ \mathbf{rot}(\mathbf{E}) &= \mathbf{0} \quad \text{en } C, \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } C, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \underline{\underline{\gamma}}\mathbf{E} \quad \text{en } C; \end{aligned} \tag{eIII.7.a}$$

válidas en cualquier punto del medio C , y en la frontera de este dominio se verifican las condiciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_A, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_G. \end{aligned} \tag{eIII.7.b}$$

La primera de las ecuaciones de (eIII.7.a) permite obtener la densidad volumétrica de cargas en el medio conductor a partir del campo eléctrico \mathbf{E} . Dado que se trata de un resultado secundario, en el que en principio no estamos interesados podemos prescindir de esa expresión. Por otra parte, el campo eléctrico \mathbf{E} es irrotacional —segunda ecuación de (eIII.7.a)—, y por lo tanto admite un potencial escalar V tal que $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(V)$. De este modo, las ecuaciones (eIII.7.a) se pueden reescribir en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } C, \\ \boldsymbol{\sigma} &= -\underline{\underline{\gamma}}\mathbf{grad}(V) \quad \text{en } C; \end{aligned} \tag{eIII.8.a}$$

y las condiciones en la frontera de este dominio C :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_A, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{grad}(V) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_G. \end{aligned} \tag{eIII.8.b}$$

Es posible escribir la condición de contorno anterior en la toma de tierra Γ_G de forma alternativa, teniendo presente que $\mathbf{n} \times \mathbf{grad}(V) = \mathbf{0}$ implica que los vectores \mathbf{n} y $\mathbf{grad}(V)$ son paralelos, y por tanto el valor del potencial V es constante en el contorno Γ_G e igual al potencial en el punto en que se produce la descarga ($V = V_G$ en Γ_G). Esta condición de potencial constante en todo el contorno

de la toma de tierra Γ_G ya se comentó en el resumen del capítulo precedente al apuntar la importancia secundaria que tendría el saber en qué punto exacto de la toma de tierra se produce la derivación de corriente. Esta constante es uno de los datos de nuestro problema, ya que conocemos la fuerza electromotriz ($V_G - V_0$) del medio generador (la toma de tierra). Concretamente, esta fuerza electromotriz es el aumento de tensión producido en la toma de tierra debido a la derivación de corriente eléctrica en ella, y se corresponde con la Sobretensión de Tierra definida en el capítulo anterior. En definitiva, con esta hipótesis de que los electrodos de tierra están formados por conductores perfectos, toda la instalación de toma de tierra adquiere un mismo potencial V_G , independientemente del punto en que tiene lugar la descarga eléctrica. Teniendo en cuenta estas consideraciones, si tomamos el potencial de referencia V_0 igual a cero en un punto suficientemente alejado de la toma de tierra, es posible escribir las expresiones (eIII.8.a) y (eIII.8.b) en la forma:

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.9.a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\underline{\underline{\gamma}} \mathbf{grad}(V) \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.9.b})$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{en } \Gamma_A, \quad (\text{eIII.10.a})$$

$$V = V_G \quad \text{en } \Gamma_G. \quad (\text{eIII.10.b})$$

Estas ecuaciones y condiciones en la frontera del dominio del medio conductor (el terreno) son las expresiones básicas del modelo matemático de nuestro problema con las hipótesis y consideraciones indicadas en los apartados anteriores. A continuación se presentará una modelización simplificada de (eIII.9) y (eIII.10) basada en la introducción de modelos de terreno específicos.

4. MODELO DE TERRENO

4.1. Medio conductor isótropo

Una nueva simplificación que puede efectuarse es considerar el terreno como un medio isótropo, de modo que el tensor de conductividad del terreno $\underline{\underline{\gamma}}$ se sustituye por una conductividad escalar $\hat{\gamma}$ que varía únicamente con la posición ($\underline{\underline{\gamma}} = \hat{\gamma} \underline{\underline{\mathbf{I}}}$). Esta aproximación permite formular de un modo más sencillo la condición (eIII.10.a) sobre la superficie del terreno Γ_A . Así, si se sustituye la

expresión (eIII.9.b) de la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ en (eIII.10.a) y se tiene en cuenta la hipótesis de terreno isótropo indicada, la condición (eIII.10.a) puede escribirse en términos de la derivada direccional respecto de la normal \mathbf{n} en el contorno Γ_A :

$$\mathbf{n} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \mathbf{grad}(V) \right) = \hat{\gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}(V) = \hat{\gamma} \frac{dV}{dn} = 0. \quad (\text{eIII.11})$$

Por otra parte, la ecuación diferencial (eIII.9.a) en el dominio del medio conductor C se reduce a la expresión

$$\mathbf{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \mathbf{grad}(V)) = \mathbf{div}(\hat{\gamma} \mathbf{grad}(V)) = 0. \quad (\text{eIII.12})$$

En resumen, la propiedad de isotropía del medio conductor (el terreno) permite simplificar nuevamente las ecuaciones del modelo, que se reducen a

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.13.a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\hat{\gamma} \mathbf{grad}(V) \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.13.b})$$

$$\frac{dV}{dn} = 0 \quad \text{en } \Gamma_A, \quad (\text{eIII.14.a})$$

$$V = V_G \quad \text{en } \Gamma_G. \quad (\text{eIII.14.b})$$

4.2. Medio conductor isótropo y homogéneo

En el modelo de terreno del apartado anterior (medio isótropo) se puede introducir una simplificación adicional, añadiendo la hipótesis de homogeneidad en todo el medio (es decir, el terreno está formado por una única capa de material conductor con las mismas propiedades eléctricas en todos los puntos y en todas las direcciones). De este modo, sustituyendo la conductividad escalar variable punto a punto ($\hat{\gamma}$) por una “conductividad escalar aparente” (γ), constante en todo el medio conductor (que se determinaría o estimaría experimentalmente), se obtiene una formulación matemática más sencilla del problema:

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.15.a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\gamma \mathbf{grad}(V) \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.15.b})$$

$$\frac{dV}{dn} = 0 \quad \text{en } \Gamma_A, \quad (\text{eIII.16.a})$$

$$V = V_G \quad \text{en } \Gamma_G, \quad (\text{eIII.16.b})$$

dato que la ecuación diferencial en el dominio C queda reducida a la ecuación de Laplace,

$$\mathbf{div}(\hat{\gamma} \mathbf{grad}(V)) = \gamma \Delta V = 0. \quad (\text{eIII.17})$$

En resumen, las ecuaciones que rigen el fenómeno físico con este modelo de terreno isótropo y homogéneo vienen dadas por el problema elíptico mixto

$$\begin{aligned} \Delta V &= 0 \quad \text{en } C, \\ \frac{dV}{dn} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_A, \\ V &= V_G \quad \text{en } \Gamma_G. \end{aligned} \quad (\text{eIII.18})$$

Por otra parte, dado que todas las fuentes de intensidad de corriente están acotadas en una región del espacio (en la toma de tierra) el potencial V cumple las “condiciones normales en el infinito” que, básicamente, significan que el valor del potencial en puntos lejanos de la toma de tierra es como mínimo un infinitésimo de primer orden y el gradiente del potencial como mínimo de segundo orden [Durand¹⁹⁶⁶], [Moreno¹⁹⁸⁹]. Matemáticamente, se dice que una función V cumple “condiciones normales en ∞ ” si existen los valores de $K > 0$ y $M > 0$ tales que, para todo punto P , se verifican las desigualdades

$$\begin{aligned} |V(P)| &< \frac{M}{r}, \\ |\mathbf{grad}(V(P))| &< \frac{M}{r^2}, \end{aligned} \quad (\text{eIII.19})$$

siendo $r = d(OP) > K$ la distancia al origen [Kellog¹⁹⁶⁷].

4.3. Superficie del terreno horizontal

En la práctica profesional, el terreno en el que se construye una instalación eléctrica y sus alrededores se regularizan previamente a la colocación de los equipos y ejecución de los viales y zonas de servicios. Por esta razón, una aproximación que se realiza muy frecuentemente es considerar que la superficie del terreno es horizontal.

Desde el punto de vista de las ecuaciones (eIII.18) del modelo del fenómeno físico, esta simplificación permite aplicar el “método de las imágenes” consistente

en convertir el problema de la determinación del campo eléctrico en otro problema equivalente más sencillo de calcular [Durand¹⁹⁶⁶], [Lorrain & Corson¹⁹⁹⁰], tal como se ha comentado en el capítulo anterior. Concretamente, si la superficie del terreno es horizontal, la condición de contorno $\frac{dV}{dn} = 0$ en la superficie Γ_A entre el medio conductor (el terreno) y el aislante (la atmósfera) se puede sustituir por otra condición mediante un problema “imagen” equivalente: reproducir el terreno junto con la toma de tierra por encima del plano de la superficie —como si de un espejo se tratara— e imponer una nueva condición sobre el valor del potencial no en el plano sino en la nueva toma de tierra “imagen” Γ'_G .

Teniendo presente esta hipótesis de superficie del terreno horizontal, las ecuaciones y condiciones de contorno de (eIII.15) y (eIII.16) se pueden escribir en la forma:

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.20.a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\gamma \mathbf{grad}(V) \quad \text{en } C, \quad (\text{eIII.20.b})$$

$$V = V_G \quad \text{en } \Gamma_G \text{ y } \Gamma'_G, \quad (\text{eIII.21.a})$$

$$V \text{ cumple condiciones normales en } \infty, \quad (\text{eIII.21.b})$$

y las ecuaciones y condiciones de (eIII.18) se reducen al problema exterior de Dirichlet:

$\Delta V = 0 \quad \text{en } C$ $V = V_G \quad \text{en } \Gamma_G \text{ y } \Gamma'_G$ $V \text{ cumple condiciones normales en } \infty$	(eIII.22)
---	-----------

5. RELACIÓN ENTRE LAS MAGNITUDES DEL MODELO MATEMÁTICO Y DEL FENÓMENO FÍSICO

El modelo matemático del estado estacionario de la disipación de corriente eléctrica en un terreno isótropo, homogéneo y con superficie horizontal a través de una toma de tierra viene dado por el problema exterior de Dirichlet (eIII.22). Sin embargo, en nuestro problema no solamente deseamos calcular el potencial V en cada punto del dominio del medio conductor C sino que, tal como se ha indicado en el apartado 2 de este capítulo, es esencial determinar la densidad de corriente normal σ que emana del contorno de la toma de tierra. Como a continuación veremos, a partir de esta densidad de corriente, se puede obtener la intensidad total que fluye de la puesta a tierra y la resistencia equivalente.

La solución del problema de Dirichlet (eIII.22) es el potencial en cualquier punto del terreno. Una vez obtenido éste, se puede determinar la densidad de corriente σ en el medio conductor (el terreno) a partir de la ecuación (eIII.20.b). La densidad de corriente normal σ que emana del contorno de la puesta a tierra Γ_G se obtendrá entonces mediante la relación

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{en } \Gamma_G, \quad (\text{eIII.23})$$

siendo \mathbf{n} el versor unitario normal a dicho contorno.

Una vez que se conoce la densidad de corriente normal σ se puede calcular inmediatamente la intensidad de corriente total I_G que fluye de los electrodos que forman la toma de tierra y la resistencia equivalente del sistema de tierras R_{eq} . Concretamente, la intensidad I_G se obtiene integrando la densidad de corriente normal σ en el contorno Γ_G de la toma de tierra:

$$I_G = \int \int_{\Gamma_G} \sigma \, d\Gamma_G, \quad (\text{eIII.24})$$

y la resistencia equivalente R_{eq} , definida en el capítulo anterior como la relación entre el voltaje de la malla V_G (la sobretensión de tierra) y la intensidad total que fluye de los electrodos I_G , viene dada consecuentemente por el cociente

$$R_{eq} = \frac{V_G}{I_G}. \quad (\text{eIII.25})$$

Por otra parte, las tensiones de malla, de paso y de contacto se pueden obtener a partir de la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno resolviendo el problema de Dirichlet (eIII.22). Específicamente, la tensión de paso se obtiene de la diferencia entre los valores del potencial calculados en dos puntos de la superficie separados una distancia de un metro; la tensión de contacto en un punto de la misma es la diferencia entre la sobretensión de tierra V_G y el potencial en dicho punto, y la tensión de malla es el mayor valor de tensión de contacto que se puede producir en el sistema de tierras. En definitiva, a partir de la densidad de corriente normal σ que emana del contorno Γ_G y de los valores del potencial V en la superficie del terreno es posible calcular todas las magnitudes y parámetros que caracterizan una instalación de toma de tierra.

6. RESUMEN

El análisis de la disipación de corriente eléctrica en el interior de un terreno a través de una toma de tierra se ha modelizado matemáticamente a partir de las ecuaciones generales del electromagnetismo, la ecuación de conservación de la carga eléctrica y la ecuación constitutiva del medio conductor, introduciendo unas hipótesis simplificadoras perfectamente aceptables teniendo en cuenta la naturaleza del fenómeno sometido a estudio. Este modelo se escribe matemáticamente en términos de un problema exterior de Dirichlet (eIII.22).

Las hipótesis básicas que se han introducido en este modelo son: **1)** el estudio se restringe al estado estacionario del fenómeno de la disipación de corriente en el suelo (por lo que se desacoplan las ecuaciones de la electricidad de las que involucran fenómenos de magnetismo), **2)** el terreno se considera isótropo y homogéneo (caracterizado por una resistividad escalar constante en todo el medio), **3)** la superficie del terreno es horizontal, y **4)** el potencial que adquiere la instalación de toma de tierra cuando tiene lugar la descarga eléctrica (V_G) es el mismo en todos los puntos de su contorno.

Para la resolución de este problema se conoce: **a)** la geometría de la toma de tierra y por tanto, su contorno (Γ_G), y **b)** el valor del potencial V_G en este contorno ya que, cuando tiene lugar la descarga eléctrica, el conjunto de todos los electrodos de la toma de tierra adquieren un potencial correspondiente a la sobretensión de tierra (*Ground Potential Rise, GPR*). Lo que se pretende calcular es el valor del potencial V en cada punto del terreno, y en particular en aquellos

situados en su superficie (concretamente en la zona abarcada por la instalación de tierra y sus inmediaciones donde los efectos de la descarga van a ser más notorios).

Una vez determinado el potencial V se puede obtener la densidad de corriente del medio conductor a partir de la expresión (eIII.20.b): $\sigma = -\gamma \mathbf{grad}(V)$. Además, dado que la caracterización de una toma de tierra exige el cálculo de una magnitud intermedia importante: la densidad de corriente normal σ que emana del contorno de la puesta de tierra, ésta se puede determinar a partir de la anterior mediante la ecuación (eIII.23), o bien, directamente de los valores del potencial en el contorno del medio generador: $\sigma = -\gamma \frac{dV}{dn}$ en Γ_G . La intensidad de la malla y la resistencia equivalente se calculan posteriormente haciendo uso de esta densidad de corriente normal σ —(eIII.24) y (eIII.25)—.

En conclusión, la resolución del problema de Dirichlet (eIII.22) es la clave para la determinación de los principales parámetros que nos permiten caracterizar una instalación de toma de tierra: las tensiones de malla, de paso y de contacto son magnitudes que se obtienen directamente a partir de los valores del potencial en determinados puntos de la superficie del terreno; la intensidad total de la malla y la resistencia equivalente del sistema se calculan a partir de la densidad de corriente normal que fluye del contorno de la toma de tierra (que a su vez, se obtiene de los valores del potencial en determinados puntos del terreno).

No obstante, la resolución de este problema exterior de Dirichlet no es en absoluto trivial, dadas la geometría y características propias de un sistema de tomas de tierra en la práctica. En el capítulo siguiente se presentará una introducción a la teoría del potencial centrandó nuestro objetivo en resolver el problema exterior tridimensional (eIII.22) en el caso de una instalación real de toma de tierra.

CAPÍTULO IV

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DEL POTENCIAL

As Henri Poincaré once remarked, “solution of a mathematical problem” is a phrase of indefinite meaning. Pure mathematicians sometimes are satisfied with showing that the non-existence of a solution implies a logical contradiction, while engineers might consider a numerical result as the only reasonable goal. Such one sided views seem to reflect human limitations rather than objective values. In itself mathematics is an indivisible organism uniting theoretical contemplation and active application. (R. Courant, 1941)

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo **II** se han presentado los principales aspectos generales relacionados con la seguridad en las instalaciones de puesta a tierra y entre ellos, las magnitudes y parámetros que caracterizan un sistema de toma de tierra. Así mismo se ha estudiado en profundidad el funcionamiento de estas instalaciones de tierra cuando tiene lugar una derivación de corriente, poniéndose de manifiesto que el problema objeto de nuestro estudio queda centrado en el análisis de la disipación de corriente eléctrica al terreno a través de la malla de electrodos que forman la toma de tierra. En el capítulo anterior se ha presentado una modelización matemática de este fenómeno físico de la disipación de corriente en el seno de un medio conductor. Este modelo, fundamentado en las ecuaciones generales de Maxwell del electromagnetismo, se ha reducido mediante una serie de hipótesis perfectamente aceptables teniendo presente la naturaleza misma del problema que deseamos estudiar, y que se pueden resumir en: **a)** analizar únicamente el estado

estacionario, **b**) representar el terreno por un único estrato de material isótropo y homogéneo y con una superficie horizontal, y **c**) suponer que el potencial es constante en todo el contorno de la toma de tierra cuando se produce una corriente de fallo. De este modo, el problema de determinar el potencial generado por la circulación de corriente eléctrica en un terreno se puede reducir al problema exterior de Dirichlet (eIII.22).

La incógnita de este problema exterior es el valor del potencial V en cualquier punto del medio conductor C (el terreno), que debe de verificar la ecuación de Laplace. Tal y como se ha expuesto en el capítulo anterior, las condiciones de contorno son, por una parte, el valor del potencial en el contorno de la toma de tierra Γ_G (la sobretensión de tierra V_G) y, por otra parte, las condiciones de normalidad (eIII.19) del potencial V en el infinito. Este problema exterior de Dirichlet también se conoce por “primer problema de contorno de la teoría del potencial” y genéricamente consiste en la resolución de la ecuación de Laplace cuando están prescritos los valores de la función (en este caso el potencial eléctrico V) en la frontera del dominio.

Los problemas estudiados clásicamente en la teoría del potencial se caracterizan por poseer geometrías relativamente sencillas (poliedros o esferas, por ejemplo) con condiciones de contorno complicadas, para los cuales se han desarrollado métodos de resolución específicos, como los basados en la función de Green. En este punto, nuestro problema presenta una diferencia importante: la condición de contorno es muy simple (el valor del potencial es constante en todos los puntos del contorno de la toma de tierra), pero el dominio de solución es geoméricamente muy complejo, dado que se trata del dominio del medio conductor (el terreno) no ocupado por la toma de tierra. Como se ha comentado en el capítulo II, en general éstas están formadas por entramados de conductores cilíndricos de una gran longitud con relación a su diámetro, conectados entre sí en cualquier disposición espacial.

Esta característica que presentan los sistemas reales de toma de tierra hace que sea inviable en la práctica la resolución directa del problema exterior de Dirichlet (eIII.22). El dominio de solución no solamente es semiinfinito, sino que además es muy complicado dado que se trata de todo el medio conductor (el terreno), a excepción de la parte del mismo ocupada por la malla de electrodos de la toma de tierra. Dado que nuestro objetivo fundamental es el desarrollo de una técnica numérica eficiente y rápida para el cálculo y caracterización de un sistema real de tomas de tierra, en este capítulo se presentará la transformación de este problema

exterior tridimensional en otro problema equivalente que permita salvar, en la medida de lo posible, estos inconvenientes. La función incógnita de este nuevo problema (como se verá más adelante, éste está tipificado por una ecuación integral de Fredholm de primera clase definida sobre el contorno de la toma de tierra Γ_G) se demostrará que físicamente se corresponde con la densidad de corriente normal σ que emana del contorno de la toma de tierra.

Antes de presentar todo este desarrollo, veamos a continuación una breve introducción del desarrollo histórico de la teoría del potencial.

2. BREVE APUNTE HISTÓRICO

“...lo mismo que en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, los matemáticos no crearon de una manera consciente la disciplina de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Continuaron explorando los mismos problemas físicos que condujeron a aquéllas, y a medida que fueron adquiriendo una mejor comprensión de los principios físicos subyacentes a los fenómenos estudiados, formularon proposiciones matemáticas que hoy pertenecen al campo de las ecuaciones en derivadas parciales...” [Kline¹⁹⁷²]. Este párrafo resume de una forma clara, en opinión de Morris Kline, el origen de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a principios del siglo XVIII.

Las primeras ecuaciones en derivadas parciales como tales aparecieron en escritos de Leonhard Euler (1734) y en el “*Traité de dynamique*” de Jean le Rond D’Alembert (1743). Los problemas que se plantearon inicialmente estuvieron relacionados con la cuerda vibrante, caracterizada en la cuerda de violín, a la que siguieron los estudios de propagación del sonido en otros instrumentos (órgano, tambor, etc). Éstos junto con las leyes del movimiento de los fluidos, los problemas de elasticidad y de la atracción gravitatoria ejercida por los cuerpos fueron, probablemente, los temas de la física-matemática más estudiados a lo largo del siglo XVIII.

El estudio de la cuerda vibrante fue tratado a finales de los años veinte del siglo XVIII por Jean Bernoulli. Sin embargo, el establecimiento de la ecuación de ondas tal como se conoce en la actualidad se debe a D’Alembert, así como también un ingenioso procedimiento de resolución. El estudio de los modos de vibración y sus diferentes interpretaciones suscitaron la controversia entre Euler y D’Alembert, a la que se añadieron posteriormente Daniel Bernoulli (hijo de Jean) y Joseph

Lagrange. Como resultado de los trabajos y artículos de estos matemáticos, no sólo se inició el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, sino que aparecieron conceptos nuevos como son el de la analicidad de funciones, o la construcción de funciones de determinadas clases como suma infinita de funciones seno y coseno.

Los problemas sobre atracción gravitatoria de cuerpos, planteados y resueltos por Newton (finales del siglo XVII) o Maclaurin (principios del siglo XVIII), estaban limitados a casos muy particulares de posiciones de los mismos y con formas geométricas simples. Con objeto de extender el estudio de los fenómenos de gravitación a la mecánica celeste, se desarrollaron procedimientos analíticos más generales basados en considerar la fuerza de gravitación ejercida por un cuerpo sobre una masa unitaria (supuesta concentrada en la partícula P) igual a la suma de las fuerzas ejercidas por todas las pequeñas masas de las partículas que forman el cuerpo. A partir de la ley de gravitación de Newton puede determinarse cada una de las componentes de la fuerza de atracción (F_x, F_y, F_z) que se ejerce sobre la masa unitaria en el punto P . Para evitar el trabajar con las tres componentes de la fuerza, se definió una nueva función $V(x, y, z)$ con la propiedad de que sus derivadas parciales respecto a las variables x, y, z coincidieran con cada una de las componentes de la fuerza. Daniel Bernoulli sugirió en 1738 denominar a esta función como “función potencial”. Una propiedad adicional que verificaba esta nueva función es que para puntos situados fuera del cuerpo, se cumple la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

conocida como “ecuación del potencial” o “ecuación de Laplace” ($\Delta V = 0$). Los primeros escritos en los cuales aparece esta función son los estudios sobre el movimiento de fluidos de Euler en 1752. (En el siglo XIX, Helmholtz denominó a la función como “potencial de velocidades” en sus artículos sobre fluidos incompresibles).

La resolución de la ecuación del potencial, no obstante, se limitó en un principio a problemas muy específicos sin que se lograra obtener un procedimiento general. Legendre y Laplace, interesados en problemas de atracción gravitatoria entre cuerpos de revolución, reescribieron la ecuación del potencial en coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) para transformar la ecuación diferencial en derivadas parciales mediante la técnica de separación de variables en dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Una de ellas es la conocida “ecuación diferencial de Legendre”, de cuya

solución en serie de potencias se deducen los “polinomios ortogonales de Legendre”. Laplace aplicó estos resultados en la obtención de la función potencial de la fuerza gravitatoria que un cuerpo (con una forma geométrica arbitraria) ejerce sobre un punto exterior y demostró en 1782 que se puede expresar en coordenadas esféricas en la forma

$$V(\rho, \theta, \phi) = \frac{U_0(\theta, \phi)}{\rho} + \frac{U_1(\theta, \phi)}{\rho^2} + \frac{U_2(\theta, \phi)}{\rho^3} + \dots$$

siendo $U_n(\theta, \phi)$ unas funciones que denominó “esféricas” y que se pueden obtener a partir de los polinomios ortogonales de Legendre.

Estos trabajos de Legendre y Laplace durante el siglo XVIII fueron el origen de muchos otros sobre la resolución de ecuaciones diferenciales mediante series de funciones pero aplicada siempre a problemas físicos específicos y no desarrollaron una teoría general sobre la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales.

Fourier y Poisson, a principios del siglo XIX, se centraron en el estudio de la “ecuación del calor” y en su resolución en serie de funciones trigonométricas, siendo éste último uno de los primeros autores en sugerir que la teoría del potencial se podía extender a problemas de electricidad y magnetismo. Poisson precisó la validez de la ecuación de Laplace según que el punto considerado a estudio esté contenido o no en el cuerpo que ejerce la fuerza (“ecuación de Poisson”).

El principal impulsor de la teoría del potencial en el siglo XIX fue George Green, interesado en diversos problemas de electricidad estática y magnetismo. Contribuyó de forma importante con varios teoremas sobre las funciones armónicas y, fundamentalmente, en el desarrollo de un procedimiento general para la resolución de la ecuación del potencial basado en la representación de la función V en el interior del cuerpo que ejerce la fuerza en términos de su valor conocido en la frontera. Para ello, es preciso obtener en cada punto P del dominio una nueva función G (posteriormente denominada “función de Green”) con las propiedades de que

- es nula en la superficie del cuerpo,
- se hace infinita en un punto P en la forma $1/r$, siendo r la distancia de un punto cualquiera a P , y,
- verifica la ecuación de Laplace en el interior del cuerpo.

A los trabajos de Green siguieron los estudios de Gauss, Thompson, Rayleigh, Stokes y Maxwell, entre otros, que obtuvieron importantes resultados sobre las

propiedades de la función potencial y su existencia. Uno de estos resultados demostrado por Gauss sobre la función V —solución a la ecuación del potencial— es que el valor de dicha función en el centro de una bola es igual al promedio de los valores de la función sobre la superficie de la misma, resultado que se conoce como “teorema del valor medio” de las funciones armónicas. Como ejemplo intuitivo, puede considerarse la ecuación del potencial en una dimensión $y'' = 0$, cuya solución es la recta $y = \alpha x + \beta$: el valor de esta función en el centro de un intervalo cualquiera viene dado por el promedio de los valores en sus extremos. Thompson, a mediados del siglo XIX, enunció un procedimiento aproximado (“principio de Thompson o de Dirichlet”) para solucionar el problema de Dirichlet, basado en transformar éste en uno de cálculo de variaciones sobre la función de Green. Como es sabido, a la resolución de la ecuación de Laplace se la denomina “problema de Dirichlet” —o primer problema de contorno de la teoría del potencial— cuando están prescritos los valores de la función en la frontera del dominio, y se la denomina “problema de Neumann” cuando están prescritos los valores de la derivada normal en el contorno.

A partir de la teoría de funciones complejas desarrollada por Riemann, se dio un nuevo enfoque al problema de Dirichlet en el que se enmarca, por ejemplo, el tratamiento que hizo Helmholtz de la ecuación del potencial en sus estudios sobre fluidos.

A medida que se profundizaba más en el estudio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se hacían patente las clases de ecuaciones en las que se agrupaban (elípticas, parabólicas, hiperbólicas, etc). De ahí el hecho de que, desde finales del siglo XIX, el estudio de la ecuación del potencial sea la parte básica del análisis de las ecuaciones diferenciales elípticas. Como decía Kline, “...hoy en día estamos acostumbrados a clasificar las ecuaciones diferenciales en tipos. Al inicio del siglo XIX, se sabía tan poco de la materia que no se podía haber tenido la idea de distinguir los distintos tipos. Los problemas físicos dictaban qué ecuaciones debían ser atacadas y los matemáticos pasaban libremente de un tipo a otro sin reconocer diferencias entre ellos, que hoy en día consideramos fundamentales...” [Kline¹⁹⁷²].

3. CONCEPTOS PREVIOS

En este apartado se exponen una serie de conceptos importantes de la teoría del potencial, o relacionados con la misma, que nos serán útiles en todo el desarrollo siguiente para la transformación del problema exterior de Dirichlet tridimensional en un problema integral bidimensional equivalente. En primer lugar se revisarán algunas definiciones fundamentales, y a continuación se presentarán las identidades de Green, que serán el fundamento del análisis posterior.

3.1. Funciones de clase $C^k(\Omega)$

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es k veces diferenciable con continuidad —es decir, de clase $C^k(\Omega)$ — si todas sus derivadas hasta orden k existen y son continuas. C^0 indica la clase de las funciones continuas y C^∞ la clase de funciones que tienen derivadas continuas de cualquier orden. Las funciones de clase C^k que además están acotadas en el dominio Ω se denotan como de clase C_b^k y verifican que $|f(x)| < \alpha$, siendo α una constante real, en todos los puntos $x \in \Omega$.

Un concepto muy utilizado y un tanto ambiguo, por no tener una definición universal aceptada por la comunidad científica, es el de función suficientemente regular o función *smooth* [Hughes¹⁹⁸⁷]. Generalmente, se consideran como tales aquellas funciones con, al menos, una derivada continua (de clase C^1 o C_b^1).

Por otra parte, en el caso de que el dominio Ω sea cerrado, no hay diferencias entre las clases C^k y C_b^k por lo que, frecuentemente, se relaja la notación a C^k .

3.2. Funciones armónicas

Una función real U se dice que es “armónica en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ” si existen y son continuas sus segundas derivadas ($U \in C^2$) y verifica la ecuación de Laplace $\Delta U = 0$ en el entorno de dicho punto. Por otra parte, la función U se dice que es “armónica en un abierto” si es armónica en todos sus puntos, y “armónica en un cerrado” si es continua en toda la región (incluyendo el contorno) y armónica en todos sus puntos interiores. En el caso de dominios infinitos es preciso añadir condiciones adicionales, denominadas “condiciones normales en el infinito”, que posteriormente analizaremos.

Las funciones armónicas intervienen en muchos campos de la física-matemática, como por ejemplo en la modelización de fenómenos electrostáticos

y magnetostáticos, en el análisis de la distribución de temperaturas en sistemas estacionarios, en el estudio de los campos de velocidades en fluidos incompresibles e irrotacionales, etc.

3.3. Solución fundamental

Se denomina “solución fundamental” de la ecuación de Laplace a la función u que verifica la ecuación simbólica

$$\Delta u = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}); \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3.$$

Esta función u que depende de \mathbf{x} y $\boldsymbol{\xi}$ viene dada en \mathbb{R}^3 por la expresión

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \quad (\text{eIV.1})$$

siendo $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ la distancia euclídea entre los puntos \mathbf{x} y $\boldsymbol{\xi}$.

Esta solución fundamental se puede interpretar en el ámbito de la electrostática como el campo generado por una carga unitaria concentrada que actúa en el punto $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$.

3.4. Teorema de la Divergencia

El teorema de la divergencia de Gauss relaciona una integral sobre un dominio cerrado con la integral sobre la región contenida en dicho dominio. En \mathbb{R}^3 , si denominamos \mathcal{V} a una región cerrada y $\partial\mathcal{V}$ a su frontera, el campo vectorial suficientemente regular \mathbf{v} definido en el dominio \mathcal{V} verifica

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{v}) \, d\mathcal{V} = \int \int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathcal{S} \quad (\text{eIV.2})$$

siendo \mathbf{n} el versor unitario normal exterior al contorno $\partial\mathcal{V}$.

3.5. Primera Identidad de Green

La aplicación del teorema de la divergencia (eIV.2) al campo vectorial regular $\mathbf{v} = V \mathbf{grad}(U)$ permite obtener la “Primera Identidad de Green”:

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} (V \Delta U + \mathbf{grad}(U) \cdot \mathbf{grad}(V)) d\mathcal{V} = \int \int_{\partial \mathcal{V}} V \frac{\partial U}{\partial n} d\mathcal{S} \quad (\text{eIV.3})$$

siendo U y V funciones reales en el dominio cerrado \mathcal{V} con contorno $\partial \mathcal{V}$ tales que $U \in C^2$ y $V \in C^1$. Por otro lado, $\frac{\partial U}{\partial n}$ es la derivada direccional en la dirección del versor normal unitario \mathbf{n} exterior al contorno $\partial \mathcal{V}$, y dado que la función U es diferenciable podemos escribir $\frac{\partial U}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}(U)$.

Un resultado interesante que se deduce de esta primera identidad es que toda función armónica W en la región cerrada \mathcal{V} verifica

$$\int \int_{\partial \mathcal{V}} \frac{\partial W}{\partial n} d\mathcal{S} = 0. \quad (\text{eIV.4})$$

Por otra parte, a partir de esta primera identidad de Green también puede demostrarse [Kellog¹⁹⁶⁷], [Kress¹⁹⁸⁹], [Stakgold¹⁹⁶⁸] una serie de propiedades sobre funciones armónicas entre las que se destacan las siguientes:

- si una función armónica en un dominio cerrado \mathcal{V} se anula en todos los puntos del contorno, entonces la función es nula en todos los puntos del dominio;
- una función armónica en un dominio cerrado \mathcal{V} está únicamente determinada por los valores de la función en el contorno;
- si una función armónica U toma un único valor en el contorno de un dominio cerrado \mathcal{V} y la derivada normal al contorno es nula en cada punto del mismo, entonces U es constante en todos los puntos del dominio.

3.6. Segunda Identidad de Green

La “Segunda Identidad de Green” se deduce a partir de la primera (eIV.3), permutando entre sí las funciones U y V y restando. Si denominamos \mathcal{V} a una región cerrada de \mathbb{R}^3 , $\partial\mathcal{V}$ a su contorno y consideramos las funciones U, V de clase $C^2(\mathcal{V})$, se verifica

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} (U\Delta V - V\Delta U) d\mathcal{V} = \int \int_{\partial\mathcal{V}} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\mathcal{S} \quad (\text{eIV.5})$$

que en el caso de que ambas sean armónicas se reduce a

$$\int \int_{\partial\mathcal{V}} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\mathcal{S} = 0.$$

3.7. Integración impropia múltiple

Una integral se dice que es “impropia” cuando en uno o más puntos de un recinto de integración Ω el valor del integrando toma valores infinitos. Para abordar su estudio, es preciso aislar el punto \mathbf{x} donde la función integrando f se hace infinita mediante una región abierta Ω_ε que contiene al punto \mathbf{x} y cuyo radio ε se hace tender a cero. Si la integral de la función f en el dominio $\Omega - \Omega_\varepsilon$ conduce a un valor finito F , se dice que la integral impropia “converge” al valor límite, es decir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} f d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega = F$$

Dado que en principio no se establece restricción alguna en la elección de la región Ω_ε , el cálculo práctico de este límite se puede simplificar eligiendo por conveniencia regiones geoméricamente sencillas, por ejemplo bolas abiertas centradas en el punto \mathbf{x} y de radio ε arbitrariamente pequeño. Sin embargo, es preciso demostrar que se obtiene siempre el mismo valor límite, independientemente de la sucesión de abiertos Ω_ε de radios decrecientes considerada.

Si la función f es positiva en $\Omega - \{\mathbf{x}\}$ y el límite existe cuando se elige como dominio Ω_ε una bola abierta centrada en el punto \mathbf{x} y de radio ε , entonces el límite también existe y tiene el mismo valor cualquiera que sea el recinto Ω_ε . Se dice que

la integral impropia de la función f en el dominio Ω es absolutamente convergente, si la integral

$$\int_{\Omega} |f| d\Omega$$

es convergente. Obviamente, si una integral es absolutamente convergente también es convergente, por lo que en este caso la existencia del límite, utilizando bolas abiertas centradas en el punto y de radio ε arbitrariamente pequeño, garantiza la convergencia de la integral impropia [Sokolnikoff & Redheffer ¹⁹⁶⁶].

En los apartados que siguen a continuación se analizarán diversas expresiones que contienen integrales impropias. Este análisis se realizará en la mayor parte de los casos aislando mediante esferas el punto (o los puntos) en el que la función del integrando se hace infinita. Por otra parte, y dado que el dominio de solución de nuestro problema es infinito y se requiere la introducción de unas condiciones de normalización, es interesante resolver la integral impropia

$$I(n, \mathbf{x}) = \int \int \int_{\xi \in \Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|^n} d\Omega, \quad n \in \mathbb{N}$$

siendo Ω una esfera de radio R centrada en el punto \mathbf{x} . En el punto $\xi = \mathbf{x}$ la integral es impropia por lo que debe de aislarse mediante una esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ centrada en \mathbf{x} y de radio ε , y evaluarse la integral como el límite

$$I(n, \mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(n, \mathbf{x}); \quad I_{\varepsilon}(n, \mathbf{x}) = \int \int \int_{\xi \in (\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon))} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|^n} d\Omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La transformación de la integral $I_{\varepsilon}(n, \mathbf{x})$ en coordenadas esféricas resulta en la forma

$$I_{\varepsilon}(n, R) = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=\varepsilon}^{\rho=R} \frac{\sin \theta}{\rho^n} \rho^2 d\rho d\theta d\phi = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-n} \left[\frac{1}{R^{n-3}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-3}} \right], & \text{si } n \neq 3; \\ 4\pi [\ln R - \ln \varepsilon], & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

Del resultado anterior se puede concluir que el límite, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe si y solo si $n < 3$ y la integral $I(n, R)$ converge al valor

$$I(n, R) = \frac{4\pi}{3-n} \frac{1}{R^{n-3}}.$$

Si se considera, a continuación, una función f continua en el dominio cerrado Ω (a excepción de un entorno del punto \mathbf{x} en que toma valor infinito) tal que

$$|f| \leq \frac{K}{r^n}, \quad K \in \mathbb{R}, K > 0 \quad (\text{eIV.6})$$

siendo r la distancia euclídea entre dos puntos \mathbf{x} e $\boldsymbol{\xi}$, se verifica que

$$\int \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} |f| d\Omega \leq K \int \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} \frac{1}{r^n} d\Omega \leq \frac{4\pi K}{(3-n)R^{n-3}}, \quad n < 3. \quad (\text{eIV.7})$$

3.8. Tercera Identidad de Green

La “Tercera Identidad de Green” tiene una importante repercusión en la teoría del potencial, dado que se trata de una expresión que liga de forma explícita el valor de una función V en un punto de un dominio cerrado con los valores de las segundas derivadas de V en el dominio y los valores de V y sus derivadas normales sobre el contorno del dominio.

Su deducción puede realizarse a partir de la segunda identidad de Green (eIV.5). Para ello, consideremos el dominio cerrado Ω con frontera $\partial\Omega$, un punto \mathbf{x} en el interior del dominio y una función $V \in C^2(\Omega)$. Dado que la función $1/r$ (siendo $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ la distancia entre dos puntos del dominio $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$) es una función característica en las soluciones de la ecuación de Laplace, sustituyamos $1/r$ por la función U en la expresión (eIV.5). La singularidad de esta función en el punto del dominio $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ se puede aislar mediante una esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ centrada en el punto \mathbf{x} y de radio ε , de modo que la aplicación de la segunda identidad de Green la realizamos en el dominio $\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ que está limitado por los contornos $\partial\Omega$ y $\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ (la superficie de la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$):

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{1}{r} \Delta V d\mathcal{V} &= \int \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS \\ &+ \int \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (\text{eIV.8})$$

siendo \mathbf{n} el versor normal unitario exterior al contorno de $\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

La integral sobre la superficie de la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ se puede expresar en función del ángulo sólido ω en la forma

$$\int \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS = -\varepsilon \int \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} d\omega - 4\pi \widehat{V}(B(\mathbf{x}, \varepsilon))$$

siendo $\widehat{V}(B(\mathbf{x}, \varepsilon))$ el valor de la función V en algún punto del contorno de la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ (resultado de aplicar el teorema del valor medio de una integral de superficie). Si se toman valores cada vez más pequeños del radio ε de la esfera, $\widehat{V}(B(\mathbf{x}, \varepsilon))$ tiende al valor de la función V en el punto \mathbf{x} y el primer sumando es nulo dado que el término $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$ está acotado al ser la función V de clase C^2 . De este modo, la integral en la superficie de la esfera en el límite resulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS = -4\pi V(\mathbf{x}).$$

La tercera identidad de Green se obtiene de la sustitución de este resultado en (eIV.8):

$$V(\mathbf{x}) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \int_{\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{1}{4\pi r} \Delta V dV + \int \int_{\partial \Omega} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial V}{\partial n} dS - \int \int_{\partial \Omega} \frac{V}{4\pi} \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS \quad (\text{eIV.9})$$

Las condiciones que debe de cumplir la función V que verifica la tercera identidad de Green son: continuidad de la función y de sus derivadas parciales de primer orden en el dominio Ω , y continuidad de las segundas derivadas parciales en los puntos interiores de dicho dominio [Kellog¹⁹⁶⁷]. Por otra parte, en el problema sometido a estudio de la disipación de corriente a través de una toma de tierra, el medio conductor (y por tanto, el dominio Ω) es semiinfinito. Si la función potencial V verifica las condiciones de regularidad en el infinito (eIII.19), entonces las integrales de superficie involucradas en la tercera identidad de Green (eIV.9) se anulan cuando se extiende la integración sobre todo el espacio Ω [Sokolnikoff¹⁹⁷¹].

La tercera identidad de Green ha dado lugar a múltiples trabajos en la extensa bibliografía sobre la teoría del potencial [Courant & Hilbert¹⁹⁶²], [Kellog¹⁹⁶⁷], [Kress¹⁹⁸⁹], [Sokolnikoff & Redheffer¹⁹⁶⁶], [Sokolnikoff¹⁹⁷¹], [Stakgold¹⁹⁶⁸]. Para comprender mejor este resultado, se ilustra el significado de (eIV.9) con una interpretación física en el ámbito de la electrostática: si consideramos la función V como el potencial en un punto \mathbf{x} del dominio generado por una distribución de cargas, entonces

- la integral de volumen representa la contribución al potencial de una distribución volumétrica de cargas de densidad $\Delta V/4\pi r$;
- el primer término de integral de superficie representa el potencial en el punto \mathbf{x} debido a una distribución superficial de cargas sobre el contorno del dominio;

- el tercer sumando puede interpretarse considerando una carga positiva $q_{(+)}$ situada en un punto del contorno del dominio D , y una carga igual pero de signo contrario $q_{(-)}$ situada a una distancia Δn del punto sobre la línea de acción del versor unitario normal exterior a la superficie. La distancia del punto \mathbf{x} a la carga negativa se denomina r_0 y la distancia a la carga positiva r_1 . Si la carga q se expresa como $q = \mu/\Delta n$, siendo μ una constante, el potencial en el punto \mathbf{x} se obtiene de

$$q \frac{1}{r_1} - q \frac{1}{r_0} = q \Delta \frac{1}{r} = \mu \frac{\Delta(1/r)}{\Delta n} \quad (\text{eIV.10})$$

que en el límite ($\Delta n \rightarrow 0$) resulta $\mu \frac{\partial(1/r)}{\partial n}$, —que es la definición de derivada direccional de una función—. Esta configuración recibe el nombre de “dipolo”, y la constante μ “momento dipolar”. De este modo la segunda integral sobre el contorno representa el potencial en el punto \mathbf{x} debido a una distribución superficial de dipolos de momento dipolar igual a $-\frac{V dS}{4\pi}$. Esta disposición se denomina de “capa doble”.

En conclusión, el potencial en un punto del dominio se puede expresar como la suma de tres términos (eIV.9): la contribución proveniente de una distribución volumétrica de cargas, de una distribución superficial de cargas (“capa simple”) y de una distribución de dipolos en la superficie del dominio (“capa doble”).

La tercera identidad de Green permite obtener directamente algunos resultados interesantes, y en particular, cabe destacar que

- toda función armónica V definida en un dominio cerrado Ω se puede representar como la suma de las contribuciones al potencial de una distribución de “capa simple” y de una de “capa doble” sobre el contorno de Ω , es decir,

$$V(\mathbf{x}) = \int \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial V}{\partial n} dS - \int \int_{\partial\Omega} \frac{V}{4\pi} \frac{\partial(1/r)}{\partial n} dS. \quad (\text{eIV.11})$$

- si el dominio Ω en el que está definido la función armónica de (eIV.11) está limitado por una esfera $B(\mathbf{x}, R)$, centrada en el punto \mathbf{x} , radio R y contorno $\partial B(\mathbf{x}, R)$, entonces teniendo en cuenta (eIV.4) el primer sumando de (eIV.11) es nulo y se obtiene

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int \int_{\partial B(\mathbf{x}, R)} V dS. \quad (\text{eIV.12})$$

Este resultado se conoce como “teorema del valor medio” o “teorema de Gauss de la media aritmética” [Kellog¹⁹⁶⁷]. Una consecuencia de este teorema es el “principio del máximo y mínimo de una función armónica” que puede enunciarse como: toda función armónica (no constante) definida en un dominio cerrado toma siempre sus valores máximos y mínimos en el contorno del mismo [Kress¹⁹⁸⁹].

4. PROBLEMA EXTERIOR DE DIRICHLET

En el capítulo anterior, se ha expuesto en detalle la modelización matemática del fenómeno físico de la disipación de corriente eléctrica en un terreno, a través de una toma de tierra. El modelo obtenido se ha reducido finalmente a la resolución de un problema exterior de Dirichlet. Con objeto de centrar nuestra atención en el estudio de este problema, a continuación se presenta la notación de la geometría general que se va a emplear en todo el desarrollo que sigue a continuación, así como el planteamiento de este problema exterior.

4.1. Notación de la geometría del problema

La notación de la geometría general del problema sometido a estudio es la siguiente:

Ω = Dominio tridimensional del medio conductor en el que tiene lugar la disipación de la corriente eléctrica que emana de los electrodos que forman la toma de tierra.

Γ_G = Contorno del medio generador (la superficie de los electrodos de la toma de tierra).

Γ'_G = Contorno de la toma de tierra imagen de Γ_G .

$\Gamma_{\Omega(R)}$ = Contorno del terreno en puntos suficientemente alejados (a una distancia R) de la toma de tierra y de su imagen.

$\partial\Omega$ = Contorno del dominio Ω formado por $\Gamma_G \cup \Gamma'_G \cup \Gamma_{\Omega(R)}$.

4.2. Planteamiento del problema

Como es sabido, el problema de determinar la función armónica V en un dominio Ω a partir de los valores especificados de la función V en el contorno se denomina “problema de Dirichlet”. Si el dominio es finito, el problema es “interior”, mientras que si el dominio es infinito y la frontera es una superficie cerrada el problema es “exterior”.

El fenómeno físico de la disipación de corriente en un terreno (modelizado en el capítulo anterior a partir de las ecuaciones generales del electromagnetismo) se resume en términos matemáticos en el problema exterior de Dirichlet consistente en determinar la función V que verifica

$$\begin{aligned} V &\in C^2 \text{ en } \Omega \\ V &\in C^1 \text{ en } \Gamma_G \text{ y en } \Gamma'_G \\ \Delta V &= 0 \text{ en } \Omega \\ V &= V_G \text{ (constante) en } \Gamma_G \text{ y } \Gamma'_G \\ V &\text{ cumple las "condiciones normales en } \infty". \end{aligned} \tag{eIV.13}$$

Un resultado interesante, que se deduce de forma trivial a partir del principio del máximo y mínimo de una función armónica, es que el problema exterior de Dirichlet tiene, a lo sumo, una única solución. (Si consideramos la existencia de dos soluciones V_1 y V_2 , la diferencia de ambas $V = V_1 - V_2$ es también una función armónica y debe verificar la condición sobre el contorno $V = 0$. Si los valores máximos y mínimos de una función armónica están en el contorno y el potencial V en el infinito es nulo, la única solución es $V = 0$, es decir, $V_1 = V_2$).

4.3. Planteamiento del problema de Dirichlet mediante la función de Green

Históricamente, la forma clásica de resolver este tipo de problemas de Dirichlet en teoría del potencial es mediante la introducción de una “función característica” del problema comúnmente denominada “función de Green”. A continuación se presenta una breve síntesis de su fundamento y se analiza su viabilidad en la resolución de nuestro problema. (En [Stakgold¹⁹⁶⁸] y [Sokolnikoff¹⁹⁷¹] puede encontrarse un desarrollo amplio de este método).

Si consideramos un punto fijo \mathbf{x} y una variable $\boldsymbol{\xi}$ en el dominio Ω , se denomina “función de Green” $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ a aquella función que cumple las siguientes propiedades:

- $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ siendo $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ y $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ una función armónica en Ω ,
- $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ en el contorno $\partial\Omega$.

La aplicación del segundo teorema de Green (eIV.5), considerando como función U la función de Green $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, requiere aislar la singularidad en el punto $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ mediante una esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ centrada en \mathbf{x} y de radio ε en la forma

$$\int_{\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)} (G\Delta V - V\Delta G) dV = \int_{\partial(\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon))} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función de Green y el hecho de que en el problema exterior de Dirichlet planteado (eIV.13) la condición sobre el contorno de la toma de tierra es que el valor del potencial es una constante (V_G), la expresión anterior se puede reducir a

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{V_G}{4\pi} \int_{\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS \quad (\text{eIV.14})$$

siendo $\partial\Omega$ la superficie de la toma de tierra y su imagen ($\partial\Omega : \Gamma_G \cup \Gamma'_G$) en las que está prescrito el valor del potencial constante V_G .

Este método no es fácilmente aplicable al problema del cálculo del potencial generado por la derivación de corriente eléctrica en un sistema real de toma de tierra, aunque la condición de contorno sea sencilla. La razón de ello estriba en que el dominio de solución Ω es muy complicado, dado que se trata de todo el medio conductor semiinfinito (el terreno) excepto la parte ocupada por la malla de tierra, que tal y como se ha comentado anteriormente, está formada por un gran número de electrodos entrelazados de distintas dimensiones. Para poder hacer uso de la expresión (eIV.14), se precisaría la función de Green obtenida de la resolución —en cada punto \mathbf{x} del dominio Ω — del problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= 0, & \forall \boldsymbol{\xi} \in \Omega; \\ w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}, & \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

5. EL PROBLEMA EXTERIOR DE DIRICHLET EN TÉRMINOS DE UNA ECUACIÓN INTEGRAL LINEAL

Las particulares características del problema exterior de Dirichlet (eIV.13) en lo referente a la complejidad del dominio de solución (el medio conductor no ocupado por la toma de tierra) y a la simplicidad de la condición a imponer sobre su contorno (valor del potencial V_G constante) sugieren transformar el problema diferencial en otro, en términos de una ecuación integral lineal que relacione únicamente los valores de la incógnita en el contorno.

Una “ecuación integral” es aquella cuya función incógnita aparece en el integrando de una determinada expresión. La modelización de algunos problemas de la física-matemática conducen directamente a ecuaciones integrales, en tanto que otros, que dan lugar a ecuaciones diferenciales, se pueden analizar mejor transformados en ecuaciones integrales. El primer caso de planteamiento explícito y consciente de una ecuación integral se debe a Niels H. Abel en 1823 en el que se denomina “problema mecánico de Abel” [Kline¹⁹⁷²], consistente en determinar la forma de la curva que tiene que tener un hilo, para que una cuenta, partiendo del reposo desde una altura h , deslice sin rozamiento en un tiempo fijado $T(h)$ [Simmons¹⁹⁹¹], —es el clásico problema de la *tautócrona* cuando se considera el tiempo independiente de la altura h y constante—. Unos años más tarde (en 1832), Joseph Liouville demostró que se podía obtener la solución de determinadas ecuaciones diferenciales previa transformación en ecuaciones integrales, que resolvió por un método de iteraciones sucesivas.

Las ecuaciones integrales lineales de nuestro interés son de dos tipos básicamente:

$$g(x) = \int_a^x K(x, t) f(t) dt$$

$$f(x) = g(x) + \int_a^x K(x, t) f(t) dt$$

donde $g(x)$ y $K(x, t)$ son funciones conocidas y $f(t)$ la función incógnita. $K(x, t)$ recibe el nombre de “núcleo” de la ecuación integral. Estos dos tipos se denominan ecuaciones de Volterra de primera clase y de segunda clase respectivamente, en honor a Vito Volterra que inició el estudio general de las ecuaciones integrales ideando un método de resolución para las de segunda clase. En los casos en que el límite superior de integración es un valor fijo b se denominan ecuaciones integrales de Fredholm.

David Hilbert interesado en diversos problemas de física-matemática (como el del potencial o el cálculo de variaciones) desarrolló rigurosamente buena parte del fundamento teórico de las ecuaciones integrales y su resolución tipificada en el núcleo de la ecuación integral, estableciendo la teoría espectral general para el caso de núcleos simétricos. Demostró, asimismo, que el desarrollo de una función en las autofunciones pertenecientes a una ecuación integral de segunda clase depende de la resolubilidad de su correspondiente ecuación integral de primera clase. Su contribución más importante en este campo es la conversión de problemas planteados en ecuaciones diferenciales en ecuaciones integrales, y la demostración de que éstas son el punto de partida para el planteamiento de muchos problemas físicos [Kline¹⁹⁷²].

Las primeras aplicaciones de las ecuaciones integrales para la resolución de problemas en teoría del potencial las realizó Fredholm a principios de este siglo, demostrando la existencia de soluciones a partir de métodos basados en la discretización del dominio. Sin embargo, las dificultades para la obtención de soluciones analíticas de este tipo de ecuaciones, excepto en los casos de geometrías sencillas, ha limitado considerablemente su uso hasta fechas muy recientes [Jaswon¹⁹⁶³],[Symm¹⁹⁶³].

Centrando de nuevo nuestra atención en la obtención de una ecuación integral equivalente al problema exterior de Dirichlet (eIV.13), a continuación se presenta la deducción, a partir de la segunda identidad de Green, de la expresión del potencial generado por una toma de tierra en un punto cualquiera del dominio Ω . Con el fin de facilitar esta deducción, ésta se presentará dividida en dos partes según que el punto del dominio esté en el terreno o en el contorno de la toma de tierra, en cuyo caso deberemos estudiar la singularidad que se produce.

5.1. Expresión del potencial en un punto del terreno

El punto de partida es la aplicación del segundo teorema de Green (eIV.5) a un punto de referencia \mathbf{x} situado en el terreno (dominio Ω), considerando como función U la función $1/r$ ($r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$). La singularidad en el punto $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ se puede aislar mediante una esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ centrada en \mathbf{x} , de radio ε y contorno $\Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}$, de modo que la expresión (eIV.5) resulta

$$\int \int \int_{\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left(V \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta V \right) dV = \int \int_{\partial(\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon))} \left(V \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS \quad (\text{eIV.15})$$

donde $\partial(\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon))$ indica el contorno del problema: $\Gamma_G \cup \Gamma'_G \cup \Gamma_{\Omega(R)} \cup \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}$. La figura IV.1 muestra de una forma esquemática los diferentes dominios y la notación empleada.

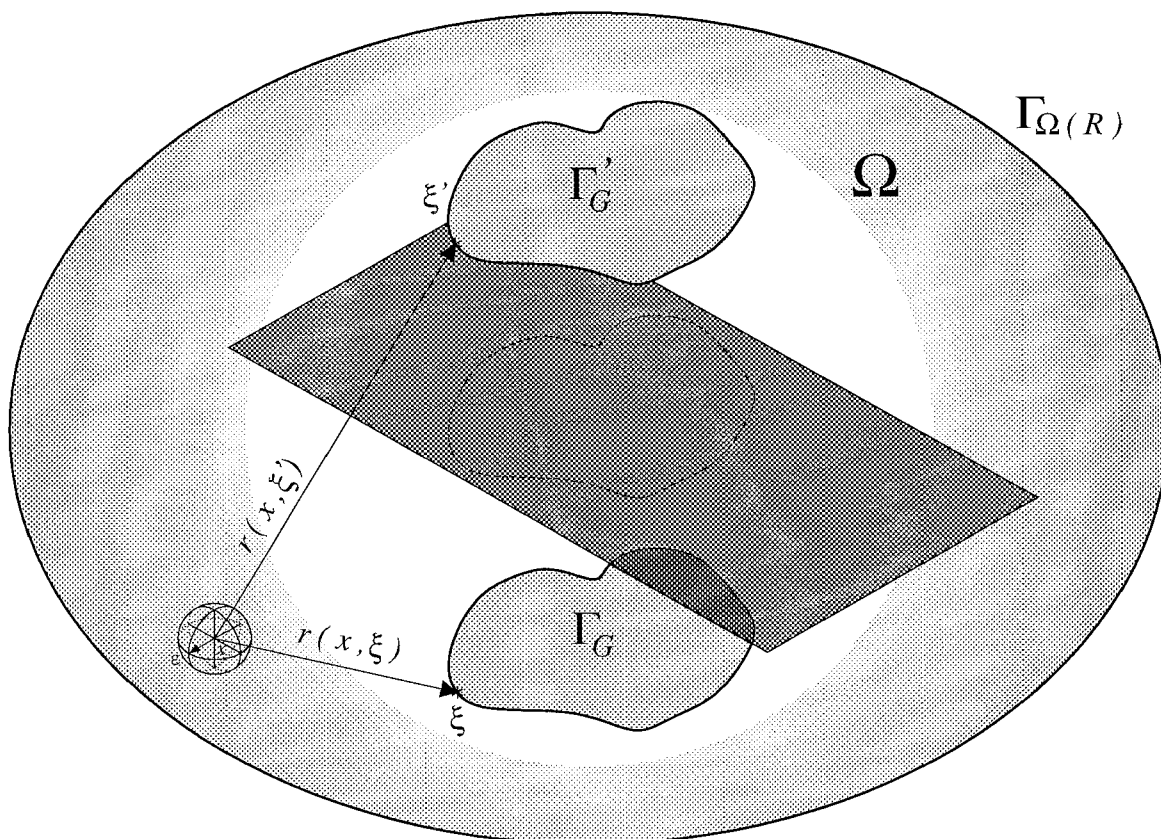


Fig. IV.1 – Esquema del análisis de las distancias desde un punto \mathbf{x} (aislado por una esfera de radio ε y situado en el interior del terreno) a un punto ξ de la superficie de la toma de tierra Γ_G y al punto simétrico respecto de la superficie del terreno ξ' en la imagen Γ'_G .

A continuación se analizarán los distintos sumandos de (eIV.15) teniendo en cuenta que la integral de superficie puede descomponerse en cuatro términos, uno por cada tipo de contorno del problema.

5.1.1. Integral en el volumen $\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$

$$I(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int \int \int_{\xi \in (\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon))} \left(V(\xi) \Delta \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \Delta V(\xi) \right) dV \quad (\text{eIV.16})$$

En esta integral de volumen hay que destacar dos aspectos importantes:

- El potencial V está definido en todo el dominio $\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ y es una función armónica (eIV.13).
- La función $1/r(\mathbf{x}, \xi)$ también está definida en todo el dominio $\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ y es la solución fundamental de la ecuación de Laplace.

En consecuencia, la función integrando de (eIV.16) es nula en todo el dominio $\Omega - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Puesto que sea cual sea el valor de esta función en la singularidad en todos los puntos donde está definida vale cero — $I(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon \neq 0$ —, la integral impropia es nula:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0 \quad (\text{eIV.17})$$

5.1.2. Integral en el contorno $\Gamma_{\Omega(R)}$

$$I(\mathbf{x}, R) = \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} \left(V(\xi) \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} \right) dS \quad (\text{eIV.18})$$

Para analizar esta integral es importante tener en cuenta que, tal y como se ha mencionado anteriormente, en nuestro problema el potencial V cumple las condiciones de normalidad en el infinito (eIII.19). Si consideramos una esfera centrada en el punto \mathbf{x} y de radio R de modo que las funciones $V(\xi)$ y $1/r(\mathbf{x}, \xi)$ estén definidas en todos los puntos del contorno $\Gamma_{\Omega(R)}$, siendo \mathbf{n} el versor unitario normal exterior a dicha esfera, (eIV.18) resulta

$$I(\mathbf{x}, R) = -\frac{1}{R^2} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} V(\xi) dS - \frac{1}{R} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS,$$

expresión que puede acotarse superiormente haciendo uso de (eIII.19), obteniendo

$$\begin{aligned}
 |I(\mathbf{x}, R)| &\leq \left| \frac{1}{R^2} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} V(\xi) dS + \frac{1}{R} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS \right| \\
 &\leq \frac{1}{R^2} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} |V(\xi)| dS + \frac{1}{R} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} \left| \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} \right| dS \\
 &\leq \frac{1}{R^2} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} \frac{M}{r(\mathbf{x}, \xi)} dS + \frac{1}{R} \int \int_{\xi \in \Gamma_{\Omega(R)}} \frac{M}{r^2(\mathbf{x}, \xi)} dS \\
 &\leq \frac{8\pi M}{R}
 \end{aligned}$$

En consecuencia la integral en el contorno de $\Omega(R)$, cuando R tiende a infinito, es nula:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(\mathbf{x}, R) = 0 \quad (\text{eIV.19})$$

5.1.3. Integral en el contorno $\Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}$

$$I(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int \int_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \left(V(\xi) \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} \right) dS \quad (\text{eIV.20})$$

La función potencial V verifica las condiciones del problema exterior de Dirichlet (eIV.13) y, a su vez, tanto la función como su derivada verifican las hipótesis del teorema del valor medio (eIV.12). Dado que el dominio es una esfera centrada en el punto \mathbf{x} , por simetría se cumple

$$I(\mathbf{x}, \varepsilon) = - \int \int_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} V(\xi) \frac{1}{r^2(\mathbf{x}, \xi)} dS - \int \int_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS,$$

y haciendo tender a cero el radio de la esfera ε ,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{x}, \varepsilon) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} V(\xi) dS - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS \\
 &= - 4\pi \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} V(\xi) dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS \right) \\
 &= - 4\pi \left(V(\mathbf{x}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{\partial \widehat{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial n} \right) \\
 &= - 4\pi V(\mathbf{x}),
 \end{aligned} \quad (\text{eIV.21})$$

donde $\frac{\partial \widehat{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial n}$ denota un valor promedio límite de la derivada normal en un punto de la superficie de la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

En consecuencia, la integral en la superficie de la esfera centrada en el punto \mathbf{x} y de radio ε , es proporcional al valor del potencial en el punto, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

5.1.4. Integral en los contornos Γ_G y Γ'_G

$$I_{GG'} = \int \int_{\xi \in (\Gamma_G \cup \Gamma'_G)} \left(V(\xi) \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} \right) dS \quad (\text{eIV.22})$$

En el problema exterior de Dirichlet (eIV.13), el valor del potencial en los contornos de la toma de tierra (Γ_G y Γ'_G) es constante (V_G). Teniendo presente esta condición de contorno, la integral $I_{GG'}$ vendrá dada por

$$I_{GG'} = V_G \int \int_{\xi \in (\Gamma_G \cup \Gamma'_G)} \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} dS - \int \int_{\xi \in (\Gamma_G \cup \Gamma'_G)} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS$$

Para facilitar el análisis siguiente es útil separar el primero de los dos sumandos en dos integrales de contorno,

$$\begin{aligned} \int \int_{\xi \in (\Gamma_G \cup \Gamma'_G)} \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} dS &= \int \int_{\xi \in \Gamma_G} \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} dS \\ &+ \int \int_{\xi \in \Gamma'_G} \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} dS. \end{aligned}$$

La malla de electrodos es un medio generador G situado en el interior del terreno. Se trata, por tanto, de un volumen cerrado por su superficie Γ_G en el que la función $1/r(\mathbf{x}, \xi)$ está perfectamente definida, (el punto \mathbf{x} sometido a estudio es un punto del terreno y no pertenece ni a la superficie Γ_G ni a su imagen Γ'_G). Dado que $1/r(\mathbf{x}, \xi)$ es armónica, en virtud de la propiedad (eIV.4), la integral en el contorno es nula. Este razonamiento es también válido para el dominio G' , obteniéndose la misma conclusión. Por tanto, $I_{GG'}$ se reduce a

$$I_{GG'} = - \int \int_{\xi \in (\Gamma_G \cup \Gamma'_G)} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS$$

El dominio imagen G' es simétrico a G por el plano de la superficie del terreno, por lo que todo punto de G está directamente relacionado con su simétrico en G' . Si denominamos $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ a la distancia desde un punto del terreno \mathbf{x} a un punto $\boldsymbol{\xi}$ en G y $r'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ a la distancia de \mathbf{x} al punto simétrico $\boldsymbol{\xi}'$ en G' ,

$$\begin{aligned} I_{GG'} &= - \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS - \int \int_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma_{G'}} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \frac{\partial V(\boldsymbol{\xi}')}{\partial n} dS \\ &= - \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G} \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \right) \frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS, \end{aligned} \quad (\text{eIV.23})$$

Reuniendo los resultados obtenidos —(eIV.17), (eIV.19), (eIV.21), (eIV.23)— para las distintas integrales de volumen y sobre los contornos de (eIV.15), el potencial en un punto \mathbf{x} del terreno se puede expresar como

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G} \sigma(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \right) dS, \quad \mathbf{x} \notin \Gamma_G, \quad (\text{eIV.24})$$

siendo $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ la densidad de corriente normal que emana del electrodo de tierra y γ la conductividad escalar aparente del terreno (ver apartado 5 del capítulo III), que se relacionan con la derivada normal del potencial mediante la expresión

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = -\gamma \frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial n}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G;$$

donde \mathbf{n} es el versor unitario normal al contorno Γ_G .

La expresión integral (eIV.24) es la clave de todo el desarrollo que se seguirá para el cálculo del potencial en un punto del terreno, ya que relaciona de una forma directa el potencial en un punto \mathbf{x} con los valores en el contorno a través de una función incógnita $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ que solamente depende de los puntos del contorno de la toma de tierra. Para la determinación de esta función es importante que la expresión (eIV.24) sea válida si el punto \mathbf{x} está situado en la superficie de la toma de tierra, ya que en ese caso el potencial es conocido e igual a V_G (la sobretensión de tierra) y puede plantearse la resolución de una ecuación integral que permita la obtención de la función σ .

5.2. Expresión del potencial en un punto de la superficie de la toma de tierra

En el apartado anterior se desarrolló la expresión del potencial generado en un punto del terreno por una toma de tierra. Para completar el análisis es preciso estudiar, también, qué ocurre si el punto está situado en la superficie de la toma de tierra y determinar el potencial en dicho punto. Al igual que en el desarrollo anterior, el punto de partida es la segunda identidad de Green (eIV.5) considerando como función U la función $1/r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ (siendo $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$). La singularidad en el punto \mathbf{x} se aísla mediante una esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ con centro en \mathbf{x} y radio ε , de modo que quedan definidos tres subdominios importantes (figura IV.2):

- $E(\mathbf{x}, \varepsilon)$: Parte de la esfera situada en el exterior de la toma de tierra G .
- $I(\mathbf{x}, \varepsilon)$: Parte de la esfera situada en el interior de la toma de tierra G .
- $C(\mathbf{x}, \varepsilon)$: Intersección entre la superficie de la toma de tierra y la esfera centrada en \mathbf{x} y de radio ε . ($\Gamma_G \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon)$).

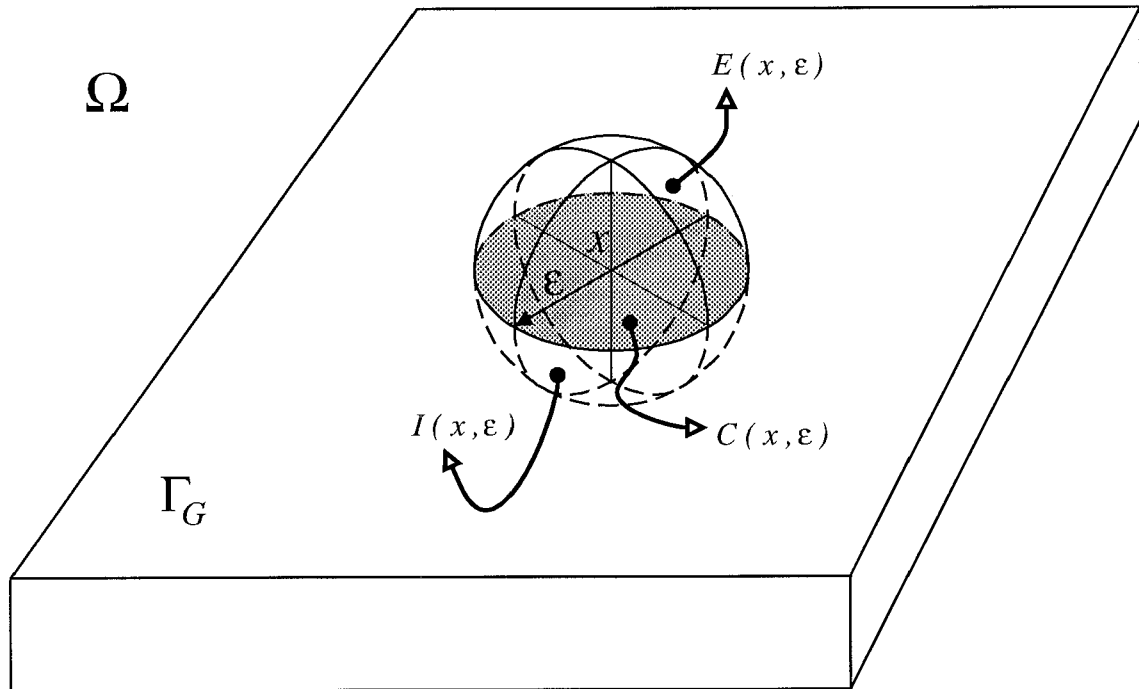


Fig. IV.2 – Esquema de los dominios formados al aislar un punto \mathbf{x} , situado en la superficie de la toma de tierra, por una esfera de radio ε .

La aplicación del segundo teorema de Green (eIV.5) al dominio formado por $\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon)$ resulta

$$\int \int \int_{\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left(V \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta V \right) dV = \int \int_{\partial(\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon))} \left(V \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS \quad (\text{eIV.25})$$

donde $\partial(\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon))$ indica el contorno compuesto por

- Γ'_G : Contorno de la toma de tierra imagen de G (figura IV.1).
- $\Gamma_{\Omega(R)}$: Contorno del terreno en puntos suficientemente alejados de la toma de tierra Γ_G y su imagen Γ'_G (figura IV.1).
- $(\Gamma_G - C(\mathbf{x}, \varepsilon)) \cup \Gamma_{E(\mathbf{x}, \varepsilon)}$: Contorno de la toma de tierra G no afectado por la esfera más el contorno de la parte de la esfera situada en el exterior.

De las cuatro integrales que intervienen en (eIV.25) —una de volumen y tres sobre contornos— se pueden simplificar tres, ya que el análisis es el mismo que en el caso de que el punto \mathbf{x} se encuentre en el terreno (figura IV.1). Concretamente,

- la función potencial V está definida en todo el dominio $\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon)$, así como también la solución fundamental $1/r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, por lo que la integral de volumen es nula

$$\int \int \int_{\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left(V \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta V \right) dV = 0; \quad (\text{eIV.26})$$

- la integral sobre el contorno de $\Omega(R)$, cuando R tiende a infinito, es exactamente igual que en (eIV.18), por lo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{\Gamma_{\Omega(R)}} \left(V \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS = 0; \quad (\text{eIV.27})$$

- la integral sobre el contorno Γ'_G , desarrollada en (eIV.22) en las mismas condiciones, puede escribirse como

$$\int \int_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma'_G} \left(V(\boldsymbol{\xi}') \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}'))}{\partial n} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \frac{\partial V(\boldsymbol{\xi}')}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma'_G} \frac{\sigma(\boldsymbol{\xi}')}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} dS. \quad (\text{eIV.28})$$

Con estos tres resultados la identidad de Green (eIV.25) se reduce a

$$\begin{aligned} & \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in [(\Gamma_G - C(\mathbf{x}, \varepsilon)) \cup \Gamma_{E(\mathbf{x}, \varepsilon)}]} \left(V(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))}{\partial n} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right) dS \\ & + \frac{1}{\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma'_G} \sigma(\boldsymbol{\xi}') \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} dS = 0. \end{aligned} \quad (\text{eIV.29})$$

El contorno $(\Gamma_G - C(\mathbf{x}, \varepsilon)) \cup \Gamma_{E(\mathbf{x}, \varepsilon)}$ encierra el dominio formado por la toma de tierra G y la parte del exterior de la esfera. Para analizar la integral en este contorno se descompone el dominio en dos subdominios:

- la toma de tierra G excluidos los puntos interiores de la esfera
- la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, formada por las dos partes exterior e interior.

5.2.1. Integral en el contorno $\Gamma_G - \Gamma_{I(\mathbf{x}, \varepsilon)}$

$$I_{\Gamma(GI)} = \int \int_{\xi \in (\Gamma_G - \Gamma_{I(\mathbf{x}, \varepsilon)})} \left(V(\xi) \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} \right) dS \quad (\text{eIV.30})$$

El contorno $\Gamma_G - \Gamma_{I(\mathbf{x}, \varepsilon)}$ cierra el dominio formado por la toma de tierra G excepto la parte de la esfera situada en su interior. En todo este dominio, incluido su contorno, el valor del potencial es constante (V_G), dado que se ha considerado que los electrodos que forman la toma de tierra son conductores perfectos, por lo que no existe resistencia al paso de la corriente en todo el dominio. Este valor de potencial constante no sólo se cumple en el dominio indicado sino también en toda la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, ya que en (eIV.25) se ha aplicado la identidad de Green al dominio $\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon)$, extendiendo la condición $V = V_G$ al contorno $\partial(\Omega - E(\mathbf{x}, \varepsilon))$.

Por otro lado, la parte interior de la esfera aísla del resto del dominio el punto \mathbf{x} donde la integral es impropia, por lo que la función $1/r(\mathbf{x}, \xi)$ está perfectamente definida en $\Gamma_G - \Gamma_{I(\mathbf{x}, \varepsilon)}$. Con estas consideraciones, (eIV.30) se reescribe como

$$I_{\Gamma(GI)} = V_G \int \int_{\xi \in (\Gamma_G - \Gamma_{I(\mathbf{x}, \varepsilon)})} \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} dS - \int \int_{\xi \in \Gamma_G} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS + \int \int_{\xi \in \Gamma_{I(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS \quad (\text{eIV.31})$$

donde el primer término es nulo por (eIV.4).

El tercer sumando, que hace referencia a la integral sobre el contorno de la parte interior de la esfera situada en la toma de tierra, también es nulo dado que es la derivada normal del potencial en todo el interior de la toma de tierra y sus extensiones (la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$) donde el potencial es constante.

Estos dos resultados permiten simplificar la integral (eIV.31) que, en términos de la densidad de corriente que emana de la toma de tierra G y de la conductividad

escalar aparente del terreno γ —del mismo modo que (eIV.28)—, puede escribirse como

$$I_{\Gamma(GI)} = \frac{1}{\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma_G} \sigma(\xi) \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} dS. \quad (\text{eIV.32})$$

5.2.2. Integral en el contorno de la esfera $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$

$$I(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int \int_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \left(V(\xi) \frac{\partial(1/r(\mathbf{x}, \xi))}{\partial n} - \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} \right) dS \quad (\text{eIV.33})$$

El desarrollo en este punto es exactamente igual al efectuado en (eIV.20), por lo que, en aplicación del teorema del valor medio (eIV.12), la integral anterior se puede escribir en términos de la función potencial y de su derivada normal en el punto \mathbf{x} , y llevando al límite esta expresión resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{x}, \varepsilon) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int \int_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} V(\xi) dS - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int \int_{\xi \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} dS \\ &= -4\pi \left(V(\mathbf{x}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{\partial \widehat{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial n} \right) \\ &= -4\pi V(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{eIV.34})$$

Al sustituir este resultado, junto con (eIV.32), en (eIV.29) se obtiene la expresión del potencial para un punto situado en el contorno de la toma de tierra que, con la misma notación del subapartado 5.1, viene dada por

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma_G} \sigma(\xi) \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} + \frac{1}{r'(\mathbf{x}, \xi)} \right) dS, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_G, \quad (\text{eIV.35})$$

y es idéntica a la obtenida para el caso en que el punto \mathbf{x} se encuentre en el terreno.

5.3. Ecuación integral del problema exterior de Dirichlet

En los apartados anteriores hemos mostrado cómo es posible escribir la solución del problema exterior de Dirichlet (eIV.13) —obtenido al modelizar el problema de la disipación de corriente en estado estacionario en el interior de un terreno isótropo y homogéneo con superficie horizontal a través de una toma de tierra— en términos de la expresión integral (eIV.35). Esta nueva ecuación es válida para cualquier punto del dominio, incluyendo la superficie de la toma de tierra ya que la integral impropia es convergente en la singularidad. Si definimos la función $k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ como

$$k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \right), \quad r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \quad r'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}'|; \quad (\text{eIV.36})$$

donde $\boldsymbol{\xi}'$ indica el punto simétrico a $\boldsymbol{\xi}$ respecto del plano de la superficie del terreno, la expresión del potencial (eIV.35) se reescribe en la forma

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) dS. \quad (\text{eIV.37})$$

Esta expresión integral relaciona el potencial en un punto cualquiera del dominio Ω con los valores de una función desconocida $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ en los puntos de la superficie de la toma de tierra, a través de la función $k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de (eIV.36). Esta función σ , que físicamente corresponde a la densidad de corriente que emana del contorno de los electrodos de la toma de tierra, deberá determinarse sabiendo que el valor del potencial en el contorno (la sobretensión de tierra) es constante ($V(\boldsymbol{\chi}) = V_G$, $\boldsymbol{\chi} \in \Gamma_G$). Por tanto, el problema se reduce a resolver la siguiente ecuación integral de Fredholm de primera clase, consistente en obtener la función σ que verifique

$$V_G = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) dS, \quad \boldsymbol{\chi} \in \Gamma_G. \quad (\text{eIV.38})$$

La función $k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi})$ viene dada por (eIV.36) y se denomina “núcleo” de la ecuación integral. Este núcleo es simétrico — $k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) = k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi})$ — y débilmente

singular, es decir, está definido y es continuo en todos los puntos $\xi, \chi \in \Gamma_G$, ($\xi \neq \chi$) y existen las constantes positivas α , m y M tales que, para todos los pares de puntos $\xi, \chi \in \Gamma_G$, ($\xi \neq \chi$), se verifica

$$k(\xi, \chi) \leq M \frac{1}{|\xi - \chi|^{m-\alpha}}, \quad \alpha \in (0, m].$$

Estas dos propiedades, junto con el hecho de que la condición que se impone sobre el contorno Γ_G es una función constante (V_G), garantizan la existencia de una única función solución σ de la ecuación integral (eIV.38) [Jaswon & Symm¹⁹⁷⁷], [Dautray & Lions¹⁹⁸⁴], [Johnson¹⁹⁸⁷].

La expresión (eIV.37) permite calcular el potencial V en un punto cualquiera del terreno, a partir de la densidad de corriente (σ) normal al contorno Γ_G . A su vez, ésta se obtiene de la resolución de la ecuación integral (eIV.38), dado que el valor del potencial V_G en el contorno de los electrodos de la toma de tierra es conocido (es constante en todos los puntos de la superficie). El hecho de que la función incógnita de (eIV.38) sea la densidad de corriente normal que emana de los conductores representa una ventaja sustancial en el desarrollo de un método de cálculo que permita caracterizar un sistema de tomas de tierra: a partir de σ se calculan directamente, no solo el potencial (eIV.37), sino también la intensidad de corriente total I_G (eIII.24) que fluye de los electrodos que forman la toma de tierra y la resistencia equivalente del sistema (eIII.25), tal como se ha presentado en el capítulo anterior. En conclusión, el objetivo a partir de este momento es el de desarrollar una técnica numérica eficiente y rápida que permita resolver la ecuación integral (eIV.38).

6. TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES INTEGRALES LINEALES

Con objeto de desarrollar una formulación que permita el cálculo automático del potencial generado por una toma de tierra cualquiera que sea su geometría y que pueda implementarse en un ordenador, se presenta a continuación una breve revisión de las principales técnicas numéricas empleadas para la resolución de ecuaciones integrales lineales. Como se ha comentado en el apartado anterior, éstas pueden clasificarse en dos grandes tipos: **a)** de primera clase

$$g(x) = \int_a^x K(x, t) f(t) dt, \quad (\text{eIV.39})$$

y **b)** de segunda clase

$$f(x) = g(x) + \int_a^x K(x, t) f(t) dt, \quad (\text{eIV.40})$$

La teoría general de ecuaciones integrales lineales, desarrollada a principios del siglo XX [Fredholm¹⁹⁰³], se encuentra bien estudiada en la literatura matemática [Courant & Hilbert¹⁹⁶²], [Hochstadt¹⁹⁷³], [Kress¹⁹⁸⁹], [Smithies¹⁹⁵⁸]. En particular, en el caso de las ecuaciones integrales lineales de segunda clase (eIV.40), se han desarrollado también en estas últimas décadas una colección importante de métodos numéricos que permiten la obtención de buenas aproximaciones a la función incógnita $f(x)$ [Atkinson¹⁹⁷⁶], [Baker & Miller¹⁹⁸²], [Delves & Mohamed¹⁹⁸⁵].

Las ecuaciones integrales lineales de primera clase (eIV.39) suelen presentarse en la bibliografía de forma aparte debido, principalmente, a una dificultad inherente a la propia naturaleza de estas ecuaciones integrales: si se considera el núcleo $K(x, t)$ una función continua, la ecuación integral (eIV.39) transforma el conjunto de todas las funciones continuas a trozos $f(x)$ en un conjunto más restringido $g(x)$ de funciones continuas; si el núcleo $K(x, t)$ es diferenciable, la ecuación integral transforma el conjunto de todas las funciones continuas a trozos $f(x)$ en un conjunto más restringido $g(x)$ de funciones diferenciables. En general, la solución a la ecuación integral (eIV.39), con la función $g(x)$ continua, no puede venir dada por una función $f(x)$ continua. Para una clase más general de funciones $g(x)$, la ecuación integral (eIV.39) podrá resolverse solamente si el núcleo $K(x, t)$ no presenta un “comportamiento normal” de un modo u otro (por ejemplo, si contiene una singularidad en algún punto). Las condiciones necesarias y suficientes de existencia de una solución de cuadrado integrable $f(x)$ de una ecuación integral de primera clase vienen dadas por un teorema de Piccard del año 1910, y pueden encontrarse en [Courant & Hilbert¹⁹⁶²].

Volviendo al problema de resolver la ecuación integral (eIV.38), a la dificultad mencionada en cuanto al comportamiento de las ecuaciones de primera clase, hay que añadir el hecho de que el dominio de integración Γ_G es muy complejo en los casos reales.

En este apartado se presentan brevemente algunos de los métodos más utilizados para la resolución numérica de ecuaciones integrales lineales, incidiendo especialmente en las de primera clase [Kress¹⁹⁸⁹], [Wing¹⁹⁹¹].

6.1. Métodos basados en “aproximaciones sucesivas”

Los métodos de “aproximaciones sucesivas” a la solución $f(x)$ de una ecuación están basados en la obtención de una sucesión de soluciones aproximadas $f_i(x)$ convergentes a $f(x)$. Este procedimiento, debido a Piccard y muy empleado en la resolución de ecuaciones diferenciales [Simmons¹⁹⁹¹], se puede extender de forma natural a la resolución de ecuaciones integrales de segunda clase de modo que la solución $f(x)$ a

$$f(x) = g(x) + \int_a^b K(x, t) f(t) dt \quad (\text{eIV.41})$$

se obtiene de la sucesión de soluciones aproximadas

$$f_{i+1}(x) = g(x) + \int_a^b K(x, t) f_i(t) dt. \quad (\text{eIV.42})$$

El análisis de la convergencia y de estimación del error de este esquema general de aproximaciones a la solución de ecuaciones integrales de segunda clase puede encontrarse en [Anselone & Moore¹⁹⁶⁴] y [Kress¹⁹⁸⁹].

Para las ecuaciones integrales de primera clase se han desarrollado también métodos basados en “aproximaciones sucesivas”, pero en el marco de lo que se denominan “métodos de regularización”, iniciados por [Phillips¹⁹⁶²] en Estados Unidos y por [Tikhonov¹⁹⁶³] en la antigua Unión Soviética. Los esquemas de regularización se fundamentan en la minimización penalizada del funcional del residuo en cada iteración (*funcional de Tikhonov*),

$$\mathcal{F} = \int_a^b \left[g(x) - \int_a^b K(x, t) f_\beta(t) dt \right]^2 dx + \beta \int_a^b [f_\beta(t)]^2 dt$$

para valores fijados de un parámetro β . Esta reformulación en términos de un problema de optimización —para cada valor del parámetro β — permite transformar la resolución de una ecuación integral lineal de primera clase en una de segunda clase que se aborda por alguna de las técnicas de aproximaciones sucesivas. Este problema de optimización se resuelve para distintos valores de β , cada vez más pequeños. En el límite (cuando $\beta \rightarrow 0$) el proceso es inestable, por lo que en la práctica no es posible obtener la solución del problema con total exactitud, aunque sí puede obtenerse una “solución regularizada” $f_\beta(x)$, correspondiente a

un valor del parámetro β suficientemente pequeño, que aproxima razonablemente bien a la función solución de la ecuación integral.

El funcional a minimizar \mathcal{F} también puede plantearse de forma que intervengan en él las derivadas de la función regularizada $f'_\beta(x)$, $f''_\beta(x)$, etc. Estas expresiones alternativas, su fundamentación matemática, así como las condiciones de existencia y unicidad de solución y otros aspectos, tales como la convergencia del algoritmo numérico o la elección inicial del parámetro de penalización β , pueden encontrarse en [Engl & Gfrerer¹⁹⁸⁵], [Groetsch¹⁹⁸⁴], [Groetsch & Neubauer¹⁹⁸⁹] y [Kress¹⁹⁸⁹].

6.2. Métodos basados en “cuadraturas numéricas”

Los métodos basados en “cuadraturas numéricas” consisten en la obtención de soluciones aproximadas a ecuaciones integrales de primera y segunda clase obtenidas al sustituir la integración por una cuadratura de N valores de la función del integrando en una serie de puntos t_i , (“puntos de integración”) multiplicados por unas funciones de ponderación $\omega(t_i)$ evaluadas en los mencionados puntos,

$$\int_a^b K(x, t) f(t) dt \approx \sum_{i=1}^{i=N} \omega(t_i) K(x, t_i) f(t_i). \quad (\text{eIV.43})$$

La aplicación de cuadraturas numéricas para el caso de ecuaciones integrales de segunda clase se conoce como “método de Nyström” [Kress¹⁹⁸⁹], y consiste fundamentalmente en obtener una solución aproximada $f_N(x)$ a la ecuación

$$f_N(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{i=N} \omega(t_i) K(x, t_i) f_N(t_i) \quad (\text{eIV.44})$$

Los valores de las funciones $f_N(x)$ en los puntos de integración x_j , $j = 1, \dots, N$, ($f_N(x_j) = f_j$), se pueden determinar del sistema de ecuaciones lineales

$$f_j = g(x_j) + \sum_{i=1}^{i=N} \omega(t_i) K(x_j, t_i) f_i; \quad j = 1, \dots, N; \quad (\text{eIV.45})$$

y la solución $f_N(x)$ a (eIV.44) se obtiene de la expresión

$$f_N(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{i=N} \omega(t_i) K(x, t_i) f_i. \quad (\text{eIV.46})$$

El análisis de error de estas técnicas de integración numérica aplicadas a ecuaciones integrales de segunda clase, extendiendo el estudio al desarrollo de cuadraturas específicas para ecuaciones con núcleos débilmente singulares, se debe a Nyström y puede encontrarse en las referencias [Anderssen et al.¹⁹⁸⁰], [Atkinson¹⁹⁷⁶], [Baker & Miller¹⁹⁸²], [Delves & Mohamed¹⁹⁸⁵], [Golberg¹⁹⁷⁸] y [Kress¹⁹⁸⁹].

6.3. Métodos basados en “técnicas de proyección”

Los métodos aproximados basados en cuadraturas se aplican, casi exclusivamente, a ecuaciones integrales de segunda clase, para las que se han derivado una colección importante de resultados y teoremas sobre la convergencia de los operadores integrales aproximados, el estudio del error de las aproximaciones, etc. La extensión de estas técnicas numéricas a las ecuaciones integrales de primera clase ha dado lugar a los que se conocen como “métodos de proyección”.

Las ecuaciones integrales lineales (eIV.39) y (eIV.40) pueden escribirse en términos de un operador lineal integral $\mathcal{K} f$ definido por

$$\mathcal{K} f = \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \quad (\text{eIV.47})$$

de modo que las ecuaciones integrales de primera y segunda clase se reescriben en la forma

$$g = \mathcal{K} f, \quad (\text{eIV.48})$$

$$f = g + \mathcal{K} f. \quad (\text{eIV.49})$$

Se dice que un operador lineal acotado \mathcal{P} de un espacio normado X al subespacio Y ($\mathcal{P} : X \rightarrow Y$) es un “operador de proyección” si verifica que $\mathcal{P} f = f$, $\forall f \in Y$ y $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

Los *métodos de proyección* aplicados a las ecuaciones integrales de primera clase se basan en transformar éstas en ecuaciones “proyectadas”. Multiplicando (eIV.48) por un operador lineal de proyección aproximado (de dimensión n), \mathcal{P}_n , la ecuación integral se aproxima por

$$\mathcal{P}_n g = \mathcal{P}_n \mathcal{K} f_n. \quad (\text{eIV.50})$$

El método es convergente en el operador \mathcal{K} si para cada función g existe una única solución aproximada f_n y si estas f_n convergen a la única solución f de (eIV.48) cuando $n \rightarrow \infty$. (Un método se dice que es “convergente en un operador” si el operador aproximado $\mathcal{K}_n = \mathcal{P}_n \mathcal{K}$ es invertible).

Para la resolución de ecuaciones integrales de segunda clase el operador de proyección \mathcal{P}_n permite transformar (eIV.49) en la obtención de una solución aproximada f_n a la ecuación “proyectada”

$$f_n = \mathcal{P}_n g + \mathcal{P}_n \mathcal{K} f_n. \quad (\text{eIV.51})$$

Un desarrollo breve y conciso de estas técnicas numéricas basadas en operadores de proyección, sus propiedades, estudio del error y de la estabilidad puede encontrarse en [Kress¹⁹⁸⁹].

Uno de los métodos de proyección más utilizado para la resolución de ecuaciones integrales lineales de primera clase es el conocido “método de Galerkin”, que puede formularse como sigue: la función f_n perteneciente a un subespacio de dimensión n , X_n , del espacio normado X es solución de la ecuación “proyectada” (eIV.50) si y solo si se verifica

$$\int_a^b \left(\int_a^b K(x,t) f_n(t) dt \right) w(x) dx = \int_a^b g(x) w(x) dx \quad (\text{eIV.52})$$

para todas las funciones $w(x)$ de un subespacio de dimensión n , Y_n , del espacio imagen Y .

Si se consideran los subespacios X_n e Y_n formados por las n funciones componentes $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ y $\{w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)\}$, la función f_n se puede reescribir como la combinación lineal

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i u_i(x) \quad (\text{eIV.53})$$

y la ecuación (eIV.52) es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[\int_a^b \left(\int_a^b K(x,t) u_i(t) dt \right) w_j(x) dx \right] f_i = \int_a^b g(x) w_j(x) dx; \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{eIV.54})$$

En los casos en que los subespacios X_n e Y_n coinciden, es decir $u_i(x) = w_i(x); \forall i = 1, \dots, n$, el método se denomina “de Bubnov-Galerkin” [Kress¹⁹⁸⁹]. Como puede observarse de la expresión (eIV.54), la determinación de cada uno de los términos de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones requiere dos integraciones extendidas en todo el dominio.

Los métodos de “colocación puntual” están basados en la elección de las funciones $w_i(x)$ como *deltas de Dirac*: $\delta(x - x_k)$ de modo que la ecuación integral únicamente se verifica en los puntos “de colocación:” $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Respecto al método de Galerkin presentan la ventaja de que el cálculo de los coeficientes de la matriz del sistema de ecuaciones (eIV.54) requiere solamente una integración en el dominio frente a la doble integración de Galerkin. Otros aspectos numéricos de la aplicación de estos métodos a la resolución de ecuaciones integrales de primera clase pueden encontrarse en [Allen et al.¹⁹⁸⁵], [Baker & Miller¹⁹⁸²], [Brebbia & Wrobel¹⁹⁸⁴] y [Delves & Mohamed¹⁹⁸⁵].

Un tercer método de proyección, también muy utilizado, es el de “mínimos cuadrados” que puede formularse del siguiente modo [Kress¹⁹⁸⁹]: para cada función $g(x)$, perteneciente al espacio imagen Y , existe una única función f_n —función solución aproximada a la ecuación integral de primera clase (eIV.48)— perteneciente al subespacio de dimensión n , X_n , del espacio normado X , tal que, el error de la aproximación es mínimo. Si se denomina \mathcal{E} al error de la aproximación

$$\mathcal{E} = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, t) f_n(t) dt - g(x) \right)^2 dx, \quad (\text{eIV.55})$$

teniendo presente la expresión de $f_n(x)$ de la ecuación (eIV.53), el problema de minimizar el error respecto de los valores que lo producen se reduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n;$$

que en forma desarrollada resulta

$$\sum_{j=1}^{j=n} \left[\int_a^b \mathcal{U}_j(x) \mathcal{U}_i(x) dx \right] f_j = \int_a^b g(x) \mathcal{U}_i(x) dx; \quad i = 1, \dots, n; \quad (\text{eIV.56})$$

$$\mathcal{U}_l(x) = \int_a^b K(x, t) u_l(t) dt.$$

En este caso, la obtención de la matriz del sistema de ecuaciones lineales tiene un coste considerablemente mayor respecto al método de Galerkin (eIV.54) ya que se precisan tres integraciones sobre el dominio para calcular cada uno de los coeficientes.

7. RESUMEN

El problema del cálculo del potencial generado por un sistema de toma de tierra cuando tiene lugar una derivación de corriente eléctrica al terreno (modelizado mediante las ecuaciones generales del electromagnetismo) se puede reducir, haciendo uso de una serie de hipótesis simplificadoras (capítulo III), a la resolución de un problema exterior de Dirichlet (eIV.13). La extraordinaria complejidad del dominio de solución de este problema (el medio conductor semiinfinito no ocupado por la malla de electrodos de la toma de tierra), junto con el hecho de que la condición que se impone sobre el contorno de la toma de tierra Γ_G sea muy sencilla (valor del potencial constante en todo el contorno), sugiere la transformación de este problema exterior tridimensional en un problema integral equivalente. Como se ha demostrado en este capítulo, este nuevo problema consiste en la resolución de una ecuación integral lineal de primera clase (eIV.38) definida sobre el contorno Γ_G de la toma de tierra, en el que se conoce el valor del potencial (la sobretensión de tierra V_G).

A diferencia de lo que ocurre en otros problemas de ingeniería cuya modelización matemática también puede plantearse en términos de ecuaciones integrales, en nuestro problema en particular la función incógnita de la ecuación integral tiene un significado físico inmediato y muy importante, dado que se trata de la densidad de corriente normal σ que emana de los electrodos de la toma de tierra. Como se recordará del capítulo anterior —ver ecuaciones (eIII.24) y (eIII.25)—, la intensidad de corriente total que fluye de la toma de tierra (I_G) y la resistencia equivalente del sistema (R_{eq}) se determinan sin mayores dificultades a partir de esta densidad de corriente σ .

Por otra parte, la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno y las tensiones de paso, de malla y de contacto se pueden calcular a partir de la expresión del potencial (eIV.37). Esta expresión permite determinar el potencial V en un punto cualquiera \mathbf{x} del medio conductor (el terreno), y depende únicamente de la densidad de corriente normal σ que emana del contorno Γ_G —obtenida de la resolución de la ecuación integral (eIV.38)— y del núcleo integral

$k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ evaluado en el punto del dominio \mathbf{x} y en cada punto del contorno $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G$.

En conclusión, el objetivo fundamental a partir de este momento es resolver la ecuación integral (eIV.38) de la que se obtiene la densidad de corriente normal σ . Como ya se ha comentado, una vez obtenida ésta se pueden calcular todas las magnitudes y parámetros que caracterizan un sistema de toma de tierra. Para resolver esta ecuación integral nos proponemos utilizar una de las técnicas de proyección más conocida y más ampliamente utilizada en la solución numérica de problemas de ingeniería, como es el método de Galerkin. La generalidad y versatilidad de esta técnica y sus buenas propiedades desde un punto de vista computacional, deberían permitir el análisis de sistemas reales de toma de tierra formados por complicados entramados de electrodos conductores (de gran longitud en relación con su diámetro) dispuestos en cualquier disposición espacial. Si todo ello es cierto, se podría desarrollar una formulación numérica general que permita el cálculo de una forma rápida y eficaz de cualquier puesta a tierra en la práctica, y que se pueda incorporar a un sistema integrado de diseño asistido por ordenador de tomas de tierra.

En el capítulo siguiente se presentará el desarrollo completo de esta modelización numérica basada en el método de Galerkin para la resolución de la ecuación integral (eIV.38).

CAPÍTULO V

MODELIZACIÓN NUMÉRICA

Uno debe de estar bien seguro de que ha permitido a la ciencia hacer un progreso, si va a cargarla con una multitud de términos nuevos y a exigir que los lectores sigan una investigación que les ofrece tantas cosas extrañas. (A.L. Cauchy, 1789–1857)

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno físico que subyace a la disipación de corriente eléctrica en un terreno se ha modelizado mediante las ecuaciones del electromagnetismo, limitando el análisis a la respuesta electrocinética en estado estacionario e introduciendo una serie de hipótesis y simplificaciones, como son: despreciar la resistencia eléctrica de los electrodos que componen la toma de tierra (por lo que el potencial en todos los puntos de su contorno es constante), considerar el terreno con superficie horizontal isótropo y homogéneo y la atmósfera como un aislante perfecto (capítulo II). El problema tridimensional asociado a la derivación de corriente en un medio conductor con las hipótesis indicadas se resume en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= -\gamma \mathbf{grad}(V), & \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } C; \\
 V &= V_G \quad \text{en } \Gamma_G, & V &\rightarrow 0 \quad \text{si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \\
 \sigma &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{en } \Gamma_G, & I_G &= \int \int_{\Gamma_G} \sigma \, d\Gamma_G, & R_{eq} &= \frac{V_G}{I_G}.
 \end{aligned}
 \tag{eV.1}$$

La aplicación de la Identidad de Green a este problema exterior de Dirichlet (capítulo III) nos ha permitido expresar el potencial V en cualquier punto del medio conductor C (el terreno) en términos de la densidad de corriente σ normal que emana del contorno de la toma de tierra Γ_G :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma_G} k(\mathbf{x}, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma_G \quad (\text{eV.2})$$

siendo $k(\mathbf{x}, \xi)$ el núcleo integral débilmente singular

$$k(\mathbf{x}, \xi) = \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} + \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi')} \right), \quad r(\mathbf{x}, \xi) = |\mathbf{x} - \xi|, \quad (\text{eV.3})$$

donde ξ' es el punto simétrico de ξ respecto a la superficie del terreno, situado en la toma de tierra imagen Γ'_G .

Con el fin de caracterizar un sistema de toma de tierra, necesitamos obtener los valores del potencial V en cualquier punto del dominio, la intensidad total que fluye del conjunto de electrodos de la toma de tierra y la resistencia equivalente del sistema. Como se ha comentado en el capítulo anterior, todas estas magnitudes es posible calcularlas a partir de la densidad de corriente normal al contorno de la puesta a tierra (σ). A su vez, esta densidad de corriente se puede determinar sabiendo que, en todos los puntos de dicho contorno, el valor del potencial es constante e igual a la sobretensión de tierra (*Ground Potential Rise, GPR*): V_G . Dado que la ecuación (eV.2) se verifica también en el contorno de los electrodos Γ_G de la toma de tierra [Moreno¹⁹⁸⁹], [Navarrina et al.¹⁹⁹¹], la elección de una sobretensión de tierra unitaria $V_G = 1$ conduce, sin pérdida de generalidad, a la siguiente ecuación integral de Fredholm de primera especie en el contorno Γ_G

$$1 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma_G} k(\chi, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma_G \quad \forall \chi \in \Gamma_G, \quad (\text{eV.4})$$

cuya incógnita es la densidad de corriente normal σ que emana del contorno de la malla de electrodos de la toma de tierra.

El principal objetivo de esta tesis es el desarrollo de una técnica general que permita el cálculo de un sistema real de toma de tierra en la práctica. Tal y

como se ha demostrado anteriormente, el modelo matemático del fenómeno físico de la disipación de corriente se ha reducido a la resolución de la ecuación integral (eV.4), a partir de la cual se determinan las magnitudes y parámetros de un sistema de toma de tierra. En este capítulo, se presenta el desarrollo de una formulación numérica de la ecuación integral (eV.4), basada en una de las técnicas de proyección más conocida y empleada para la resolución de problemas integrales en ingeniería, como es el método de Galerkin.

2. FORMULACIÓN GENERAL EN ELEMENTOS DE CONTORNO

Una forma variacional débil de la ecuación (eV.4) puede formularse del modo siguiente: determinar la función σ tal que la ecuación integral (eV.4) se satisfaga en el sentido de “residuos ponderados”, es decir, que se verifique

$$\int \int_{\chi \in \Gamma_G} w(\chi) \left[1 - \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma_G} k(\chi, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma_G \right] d\Gamma_G = 0, \quad (\text{eV.5})$$

para todas las funciones de test $w(\chi)$ de una determinada clase suficientemente amplia de funciones regulares definidas en el contorno Γ_G , que permite asegurar que las ecuaciones (eV.4) y (eV.5) son equivalentes [Becker et al. ¹⁹⁸¹], [Hughes ¹⁹⁸⁷], [Zienkiewicz & Morgan ¹⁹⁸³].

La resolución de la ecuación integral (eV.5) exige la discretización del continuo (en este caso, el contorno de los electrodos de la toma de tierra Γ_G) en \mathcal{M} elementos 2D de contorno, $\{\Gamma_G^\alpha\}$ [Brebbia ¹⁹⁷⁸], [Brebbia & Walker ¹⁹⁸⁰], así como también la discretización de la función incógnita σ mediante \mathcal{N} funciones de prueba $\{N_i(\xi)\}$ definidas en Γ_G y \mathcal{N} coeficientes σ_i correspondientes a cada uno de los nodos que constituyen la discretización:

$$\sigma(\xi) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i N_i(\xi), \quad \Gamma_G = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \Gamma_G^\alpha, \quad (\text{eV.6})$$

a partir de las cuales, y teniendo en cuenta (eV.2), se obtiene la expresión discretizada del potencial eléctrico V en un punto \mathbf{x}

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i V_i(\mathbf{x}), \quad V_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} V_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (\text{eV.7})$$

$$V_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G^\alpha} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_G^\alpha. \quad (\text{eV.8})$$

Finalmente, la selección de un conjunto de \mathcal{N} funciones de test $\{w_j(\boldsymbol{\chi})\}$ definidas en Γ_G y convenientemente elegidas para que se verifique la ecuación integral (eV.4) permite reescribir la forma variacional (eV.5) en el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_{ji} \sigma_i = \nu_j, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad (\text{eV.9})$$

$$R_{ji} = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} R_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \nu_j = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \nu_j^\beta, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad (\text{eV.10})$$

$$R_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma_G^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) \left[\int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_G^\alpha} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_G^\alpha \right] d\Gamma_G^\beta, \quad (\text{eV.11})$$

$$\nu_j^\beta = \int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma_G^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) d\Gamma_G^\beta. \quad (\text{eV.12})$$

Obsérvese que el sistema de ecuaciones lineales (eV.9) verifica la ecuación integral (eV.4) en la medida que los conjuntos de funciones $\{N_i(\boldsymbol{\xi})\}$ y $\{w_j(\boldsymbol{\chi})\}$ sean lo suficientemente representativos [Johnson¹⁹⁸⁷].

El número de discretizaciones bidimensionales requeridas para el análisis de problemas reales obliga a manipular una cantidad extremadamente elevada de grados de libertad, con el agravante de que la matriz de coeficientes de (eV.9) es llena, y que la integración 2D en (eV.11) debe de efectuarse dos veces sobre el contorno de cada uno de los electrodos. Por esta razón es preciso introducir simplificaciones adicionales al modelo matemático del problema.

3. PLANTEAMIENTO VARIACIONAL 1D APROXIMADO

Consideremos un punto genérico ξ en el contorno de un electrodo cilíndrico, y sean $\hat{\xi}$ su proyección ortogonal sobre el eje de la barra, $\phi(\hat{\xi})$ el diámetro (que se supone mucho más pequeño que la longitud del electrodo) y $C(\hat{\xi})$ el perímetro circunferencial de la sección transversal en ese punto. Sea L el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados.

Si la densidad de corriente normal que emana del contorno se supone constante en la sección transversal, puede definirse una nueva función $\hat{\sigma}$ que solamente depende de la proyección ortogonal del punto ξ sobre el eje de la barra ($\hat{\xi}$) de modo que $\sigma(\xi) = \hat{\sigma}(\hat{\xi}) \quad \forall \xi \in C(\hat{\xi})$. Con este supuesto, la ecuación (eV.2) resulta de la forma

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} \left[\int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \right] \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL. \quad (\text{eV.13})$$

Esta hipótesis de uniformidad circunferencial es acertada y no demasiado restrictiva si se tiene en cuenta la geometría real de las tomas de tierra, que están formadas por electrodos cilíndricos de gran longitud en comparación con su diámetro. Sin embargo, la condición de contorno $V_G = 1$ no puede ahora satisfacerse exactamente en todos los puntos y la ecuación (eV.5) no se verifica, excepto en casos particulares donde efectivamente hay uniformidad circunferencial. En general, se puede asegurar que la ecuación (eV.5) se satisface si se restringe la clase de funciones a aquellas con simetría circunferencial, es decir, se cumple: $w(\chi) = \hat{w}(\hat{\chi}), \quad \forall \chi \in C(\hat{\chi})$, obteniéndose:

$$\int_{\hat{\chi} \in L} \hat{w}(\hat{\chi}) \left[\pi\phi(\hat{\chi}) - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \right] dL = 0 \quad (\text{eV.14})$$

que se debe de verificar para todas las funciones $\hat{w}(\hat{\chi})$ de una determinada clase de funciones adecuadamente elegidas definidas en L , siendo el núcleo integral

$$K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) = \int_{\chi \in C(\hat{\chi})} \left[\int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\chi, \xi) dC \right] dC. \quad (\text{eV.15})$$

De este modo la condición de contorno $V_G = 1$ se satisface en el sentido de residuos ponderados en la sección transversal del electrodo cilíndrico. De hecho,

(eV.14) puede considerarse como una forma variacional débil de la ecuación de Fredholm de primera especie definida en L

$$\pi\phi(\widehat{\chi}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\xi} \in L} K(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) \widehat{\sigma}(\widehat{\xi}) dL \quad \forall \widehat{\chi} \in L. \quad (\text{eV.16})$$

En definitiva, nuestro objetivo a partir de este punto es la obtención de la densidad de corriente aproximada $\widehat{\sigma}$ mediante la ecuación (eV.14) — $\widehat{\sigma}$ es la densidad de corriente que emana del contorno de la malla de tierra correspondiente a suponer que existe simetría circunferencial—. Una vez calculada esta densidad de corriente, su sustitución en la expresión (eV.13) proporciona una aproximación al valor del potencial V en cualquier punto \mathbf{x} del dominio.

4. DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS DE CONTORNO 1D

La resolución de la ecuación (eV.14) requiere la discretización del contorno, en este caso el conjunto L de los ejes de los electrodos, en m elementos 1D de contorno $\{L^\alpha\}$, así como también la discretización de la función densidad de corriente normal aproximada $\widehat{\sigma}$ mediante un conjunto de n funciones de prueba $\{\widehat{N}_i(\widehat{\xi})\}$ definidas en L y n coeficientes $\widehat{\sigma}_i$ correspondientes a cada uno de los nodos que constituyen la discretización [Brebbia¹⁹⁷⁸]:

$$\widehat{\sigma}(\widehat{\xi}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{N}_i(\widehat{\xi}), \quad L = \bigcup_{\alpha=1}^m L^\alpha, \quad (\text{eV.17})$$

a partir de las cuales se obtiene la discretización de la expresión aproximada del potencial (eV.13):

$$\widehat{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{V}_i(\mathbf{x}), \quad \widehat{V}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^m \widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (\text{eV.18})$$

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\xi} \in L^\alpha} \left[\int_{\xi \in C(\widehat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \right] \widehat{N}_i(\widehat{\xi}) dL. \quad (\text{eV.19})$$

Por otra parte, tomando un conjunto de n funciones de test $\{\widehat{w}_j(\widehat{\chi})\}$ convenientemente elegidas definidas en L , la ecuación (eV.14) se reduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^n \widehat{R}_{ji} \widehat{\sigma}_i = \widehat{v}_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (\text{eV.20})$$

$$\widehat{R}_{ji} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \widehat{v}_j = \sum_{\beta=1}^m \widehat{v}_j^{\beta}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n; \quad (\text{eV.21})$$

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\chi} \in L^\beta} \widehat{w}_j(\widehat{\chi}) \left[\int_{\widehat{\xi} \in L^\alpha} K(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) \widehat{N}_i(\widehat{\xi}) dL \right] dL, \quad (\text{eV.22})$$

$$\widehat{v}_j^{\beta} = \int_{\widehat{\chi} \in L^\beta} \pi \phi(\widehat{\chi}) \widehat{w}_j(\widehat{\chi}) dL. \quad (\text{eV.23})$$

El sistema de ecuaciones (eV.20) cuyos coeficientes se obtienen mediante las expresiones (eV.21), (eV.22) y (eV.23) supone una reducción computacional importante respecto del sistema de ecuaciones (eV.9) —cuyos términos se calculan con (eV.10), (eV.11) y (eV.12)— dado que las integrales en el perímetro de los electrodos cilíndricos están desacopladas de las integrales de línea en los ejes de éstos.

No obstante, la caracterización de los sistemas reales de tomas de tierra (formadas por varios centenares de conductores cilíndricos) implica el cálculo de un número muy elevado de integraciones circunferenciales: las que se precisan para calcular $K(\widehat{\chi}, \widehat{\xi})$ a partir de (eV.15), y que intervienen en (eV.22), y las que aparecen en $\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x})$ de (eV.19). Este hecho hace necesario introducir nuevas simplificaciones para disminuir el coste computacional a niveles más aceptables.

4.1. Formulación en elementos de contorno 1D simplificada

La integral circunferencial del núcleo $k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de (eV.19) se puede expresar como la suma de dos términos

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\xi})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC = \int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\xi})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} dC + \int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\xi})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} dC. \quad (\text{eV.24})$$

Si se analiza el primero de los sumandos, la distancia r entre el punto \mathbf{x} del dominio y un punto cualquiera $\boldsymbol{\xi}$ situado en el contorno del electrodo, se puede descomponer en

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \widehat{\xi}|^2 + \frac{\phi^2(\widehat{\xi})}{4} - |\mathbf{x} - \widehat{\xi}| \phi(\widehat{\xi}) \sin \omega \cos \theta} \quad (\text{eV.25})$$

donde θ es la posición angular en el perímetro de la sección transversal del electrodo cilíndrico, y ω el ángulo formado por el vector que une el punto \mathbf{x} con la proyección $\hat{\xi}$ sobre el eje del electrodo ($\hat{\xi} - \mathbf{x}$) y el versor director unitario del eje del cilindro $\hat{s}(\hat{\xi})$, de forma que

$$\sin \omega = \frac{|(\hat{\xi} - \mathbf{x}) \times \hat{s}(\hat{\xi})|}{|\hat{\xi} - \mathbf{x}|}$$

como se muestra en el esquema de la figura V.1.

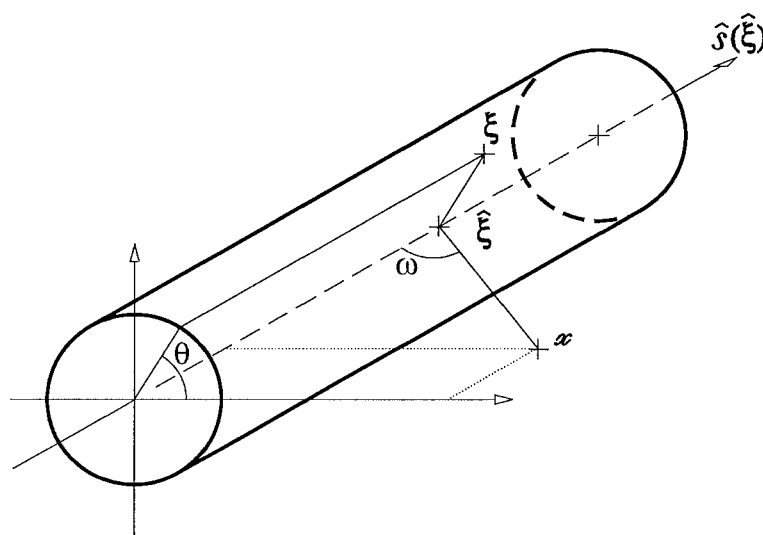


Fig. V.1 – Esquema del análisis de la distancia de un punto \mathbf{x} cualquiera a un punto ξ situado en el contorno de un cilindro.

De este modo la primera de las integrales circunferenciales de (eV.24) resulta

$$\int_{\xi \in C(\hat{\xi})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} dC = \frac{\phi(\hat{\xi})}{2} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\xi}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\xi})}{4} - |\mathbf{x} - \hat{\xi}| \phi(\hat{\xi}) \sin \omega \cos \theta}} \quad (\text{eV.26})$$

La expresión (eV.26) es una integral elíptica cuya primitiva no es expresable en general en términos de un número finito de funciones sencillas. Una aproximación a (eV.26) puede obtenerse por integración numérica utilizando una cuadratura de Newton-Cotes con un solo punto: el centro del intervalo ($-1 \leq \cos \theta \leq +1$). Un razonamiento equivalente es decir que, dada la variación de los límites de integración entre $-\pi$ y π , se aproxima el valor de la integral dando un valor

constante al subintegrando (el que corresponde a evaluar dicho subintegrando cuando $\cos \theta = 0$). En la práctica, esta simplificación es suficientemente válida dado que los puntos \mathbf{x} en los cuales interesa obtener el valor del potencial (aquellos situados en la superficie del terreno) están muy alejados de la toma de tierra, en comparación con el diámetro del electrodo (las distancias $|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}|$ son varios órdenes de magnitud mayores que el diámetro de la barra $\phi(\hat{\boldsymbol{\xi}})$). Con esta hipótesis, la función subintegrando de (eV.26), que puede considerarse como una función \mathcal{F} de $\cos \theta$, se aproxima en la forma

$$\int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \mathcal{F}(\cos \theta) d\theta \approx 2\pi \mathcal{F}(0).$$

A su vez, este resultado puede interpretarse como una aproximación de la distancia $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ en la expresión (eV.25) en términos de la distancia del punto \mathbf{x} a la proyección de $\boldsymbol{\xi}$ sobre el eje del electrodo ($\hat{\boldsymbol{\xi}}$) y del diámetro del cilindro en ese punto:

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \approx \hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{4}}, \quad (\text{eV.27})$$

por lo que la integral circunferencial (eV.26) resulta

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\hat{\boldsymbol{\xi}})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} dC \approx \frac{\phi(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{2} \left(2\pi \frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}})} \right). \quad (\text{eV.28})$$

Este proceso puede repetirse para la distancia entre el punto \mathbf{x} y el simétrico de $\boldsymbol{\xi}$ respecto a la superficie del terreno $\boldsymbol{\xi}'$, y se obtiene una aproximación sencilla para la integral circunferencial de (eV.19)

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\hat{\boldsymbol{\xi}})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \approx \pi \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (\text{eV.29})$$

$$\hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad \hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{4}}. \quad (\text{eV.30})$$

$\hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ es una variante del núcleo de integración original (eV.3) en el que no interviene el punto $\boldsymbol{\xi}$ sino su proyección sobre el eje del cilindro $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ y la distancia se

redefine ya que se añade a la distancia entre este punto y \mathbf{x} , el cuadrado del radio del electrodo.

La aproximación (eV.29) efectuada en la integral circunferencial del núcleo integral $k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ permite obtener una primera simplificación del núcleo de integración (eV.15) en la forma

$$K(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) \approx \int_{\chi \in C(\widehat{\chi})} \pi \phi(\widehat{\xi}) \widehat{k}(\chi, \widehat{\xi}) dC. \quad (\text{eV.31})$$

La distancia del punto χ a $\widehat{\xi}$ se puede expresar, efectuando las mismas hipótesis de (eV.27), en función de la distancia entre puntos situados sobre los ejes de los electrodos ($\widehat{\chi}$ y $\widehat{\xi}$) y el diámetro $\phi(\widehat{\chi})$, de modo que

$$|\chi - \widehat{\xi}|^2 \approx |\widehat{\chi} - \widehat{\xi}|^2 + \frac{\phi^2(\widehat{\chi})}{4}. \quad (\text{eV.32})$$

De forma análoga a la aproximación (eV.29), el núcleo (eV.15) se puede simplificar en la forma

$$K(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) \approx \pi \phi(\widehat{\xi}) \pi \phi(\widehat{\chi}) \widehat{k}(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}), \quad (\text{eV.33})$$

$$\widehat{k}(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) = \left(\frac{1}{\widehat{r}(\widehat{\chi}, \widehat{\xi})} + \frac{1}{\widehat{r}(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}')} \right), \quad \widehat{r}(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) = \sqrt{|\widehat{\chi} - \widehat{\xi}|^2 + \frac{\phi^2(\widehat{\xi}) + \phi^2(\widehat{\chi})}{4}}. \quad (\text{eV.34})$$

Las aproximaciones (eV.29) y (eV.33) son satisfactorias a menos que la distancia entre los puntos \mathbf{x} o χ (según sea el caso) y $\widehat{\xi}$ sea del mismo orden de magnitud que los diámetros de los electrodos. En las ecuaciones del cálculo del potencial \widehat{V} de (eV.18) y (eV.19) estas simplificaciones tienen una importancia muy pequeña porque tal como se ha comentado anteriormente, en la práctica se desea obtener el potencial en puntos de la superficie del terreno (muy alejados del contorno de la toma de tierra comparados con el diámetro de los electrodos que la componen). Sin embargo, esto puede no ser así en la resolución de la ecuación integral (eV.4) y (eV.14) en el sentido de residuos ponderados ya que se integra sobre el contorno de los electrodos de la toma de tierra (eV.22) y algunos de éstos se encuentran entre sí muy próximos.

La selección de distintos tipos de funciones de prueba y test conduce a diferentes formulaciones específicas. Así, con elementos de densidad de corriente

constante, la Colocación Puntual se identifica con los métodos intuitivos más antiguos, basados en la idea de sustituir cada segmento de conductor por una “esfera imaginaria”; la formulación de Galerkin se identifica con una clase de métodos más recientes (APM) basados en la idea de que cada segmento de conductor se sustituye por una “línea de fuentes puntuales de corriente sobre la longitud del conductor”; y los coeficientes (eV.22) corresponden a “resistencias mutuas y propias” entre “segmentos de conductor” [Garret & Pruitt¹⁹⁸⁵].

Los problemas que se han encontrado con la aplicación de estos métodos [Garret & Pruitt¹⁹⁸⁵], [Navarrina et al.¹⁹⁹¹], [Colominas et al.¹⁹⁹²] pueden explicarse ahora desde un punto de vista matemático, y son debidos básicamente a que las aproximaciones (eV.29) y (eV.33) no son válidas cuando el tamaño de los elementos llega a ser comparable al diámetro del conductor, lo que introduce errores significativos en los coeficientes del sistema (eV.20), incluidos los diagonales. Por otra parte, puesto que el error de la aproximación aumenta con el nivel de discretización, los resultados numéricos para discretizaciones finas no tienden a la solución de la ecuación integral (eV.16) con el núcleo (eV.15), sino a la solución de una ecuación integral distinta y mal condicionada con el núcleo aproximado por (eV.33), y en todo caso a la solución de un problema diferente [Colominas et al.¹⁹⁹²], [Navarrina et al.¹⁹⁹²]. Ello explica la razón por la que se obtienen resultados poco realistas cuando aumenta la discretización [Garret & Pruitt¹⁹⁸⁵], y se impide la convergencia [Navarrina et al.¹⁹⁹¹]. No obstante, se ha observado que los resultados obtenidos con niveles de discretización normales son suficientemente precisos en la práctica [Colominas et al.¹⁹⁹²].

Las expresiones que permiten determinar los coeficientes $\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x})$ que intervienen en el cálculo del potencial aproximado (eV.18) se pueden simplificar si se tiene en cuenta la simplificación en la integral circunferencial (eV.29), de modo que resultan

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\gamma} \pi \phi^\alpha \int_{\widehat{\xi} \in L^\alpha} \widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}) \widehat{N}_i(\widehat{\xi}) dL, \quad (\text{eV.35})$$

En lo sucesivo, el modelo numérico se restringirá a formulaciones de “Galerkin”, donde la matriz del sistema (eV.20) es simétrica y definida positiva [Johnson¹⁹⁸⁷]. Si se introducen las simplificaciones de las integrales circunferenciales —(eV.33) y (eV.34)— en la expresión del cálculo de los coeficientes del sistema de ecuaciones del problema discretizado (eV.22), éstos

se pueden reescribir en la forma

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} \approx \frac{\pi\phi^\beta \pi\phi^\alpha}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\chi} \in L^\beta} \widehat{N}_j(\widehat{\chi}) \left[\int_{\widehat{\xi} \in L^\alpha} \widehat{k}(\widehat{\chi}, \widehat{\xi}) \widehat{N}_i(\widehat{\xi}) dL \right] dL, \quad (\text{eV.36})$$

donde ϕ^α y ϕ^β representan el diámetro del conductor (que se supone constante) en los elementos L^α y L^β . Obviamente, (eV.36) conduce a una matriz simétrica.

4.2. Coste computacional de la formulación en elementos de contorno 1D simplificada

El coste computacional global de esta formulación se puede analizar teniendo en cuenta que para una discretización dada, con m elementos de p nodos cada uno y un total de n grados de libertad, se debe generar y resolver el sistema de ecuaciones lineal (eV.21) de dimensión n . La matriz de coeficientes es simétrica pero no vacía, por lo que su resolución mediante un método directo requiere $O(n^3/3)$ operaciones. Por su parte, la generación de esta matriz requiere $O(m^2 p^2/2)$ operaciones, cada una de ellas equivalente a una integral doble, debido a las p^2 contribuciones que se calculan mediante la expresión (eV.36) para cada par de elementos (considerando que aproximadamente la mitad se obtienen directamente por simetría).

En el caso de problemas pequeños/medianos el mayor esfuerzo computacional se invierte en la generación de la matriz, en tanto que la resolución del sistema de ecuaciones debería ser el factor predominante en problemas medianos/grandes. Sin embargo, a partir de un cierto tamaño del problema la utilización de un método directo para la solución del sistema de ecuaciones lineales es prohibitiva, por lo que se preferirá una técnica iterativa o semiiterativa. En nuestro caso, los mejores resultados los ha proporcionado un algoritmo de gradientes conjugados con preconditionamiento diagonal ensamblando la matriz de coeficientes [Pini & Gambolati¹⁹⁹⁰], que se ha implementado finalmente en nuestro sistema de diseño asistido por computador de tomas de tierra, y que se ha utilizado para resolver todos los ejemplos presentados. Esta técnica ha demostrado ser enormemente eficaz en este tipo de problemas, y tiene un coste computacional relativamente bajo en comparación con el volumen de cálculo necesario para generar el sistema de ecuaciones. Por ello, el tamaño del problema más grande que es posible resolver en este momento en un entorno de computación normal, está limitado por la capacidad de memoria que requiere el almacenamiento y manipulación de la matriz de coeficientes. Así, para un problema de 2000 grados

de libertad, se precisan ya 16Mb, mientras que los tiempos de generación de la matriz y resolución del sistema serían todavía aceptables y del mismo orden de magnitud (del orden de una hora en una estación de trabajo considerada de gama media en el momento en que se presenta esta tesis doctoral). En un futuro próximo se podrán tratar sin duda problemas de mayor tamaño. En todo caso, y dependiendo de la evolución de la tecnología informática, la velocidad de proceso y las cantidades disponibles de memoria central y memoria en disco (o sus equivalentes) determinarán si el esquema que nosotros proponemos para la realización de los cálculos debe mantenerse, o por el contrario debe evitarse el ensamblaje de la matriz, conviene precalcular y almacenar las matrices elementales en un medio externo, etc.

Por otra parte, una vez obtenida la densidad de corriente normal que emana de los electrodos de la toma de tierra, el coste de calcular la resistencia equivalente (eV.1) es despreciable. El coste adicional asociado a la obtención del potencial en un punto dado (normalmente en la superficie del terreno) por medio de (eV.18) y (eV.35) requiere sólo $O(mp)$ operaciones. No obstante, si es necesario calcular potenciales en un gran número de puntos (por ejemplo para el dibujo de isolíneas) el tiempo de computación puede ser considerable.

En cuanto a la elección del tipo de elemento en un problema determinado, para una discretización dada es evidente que la utilización de elementos de densidad de corriente constante proporcionará resultados menos precisos, aunque con un coste computacional menor, que la utilización de elementos de densidad de corriente lineal o parabólica.

Obviamente, en comparación con los resultados obtenidos con una malla relativamente grosera de elementos de densidad de corriente constante, podremos aumentar la precisión o bien incrementando el número de elementos o utilizando elementos de mayor orden. Sin embargo, no es posible aumentar de forma indiscriminada el número de elementos ya que, como hemos comentado anteriormente, las aproximaciones realizadas no son satisfactorias si el tamaño del elemento es del mismo orden de magnitud que el radio del electrodo cilíndrico. En todo caso, será necesario valorar cuidadosamente hasta qué punto es conveniente aumentar el número de elementos o utilizar elementos de mayor orden. Por ejemplo, para una malla determinada en la que se ha utilizado un elemento de densidad de corriente constante por electrodo, subdividir cada elemento en tres elementos de densidad de corriente constante implica triplicar el número

de incógnitas y multiplicar por nueve el número de operaciones elementales. Alternativamente, utilizar un elemento de densidad de corriente parabólica por electrodo representará también multiplicar por nueve el número de operaciones elementales —que presumiblemente serán ligeramente más costosas ya que se trata de integrar funciones de forma de mayor grado (eV.36)— aunque el número de incógnitas tan sólo se duplicará en la mayor parte de los casos, dependiendo de la topología de la malla el factor de aumento.

5. INTEGRACIÓN ANALÍTICA DEL POTENCIAL GENERADO POR UN ELECTRODO EN UN PUNTO DEL ESPACIO

Las sucesivas simplificaciones aplicadas a la formulación general de elementos de contorno del apartado 2. han permitido reducir paulatinamente la complejidad del problema de cálculo de una toma de tierra. El resultado es que cada uno de los conductores cilíndricos que conforman la toma de tierra puede modelizarse mediante un segmento de recta en el espacio —el eje de la barra cilíndrica— definido por sus puntos extremos, y dotado de una propiedad geométrica adicional —el diámetro de la barra— que se tiene en cuenta en los cálculos.

El potencial (eV.18) generado por un electrodo en un punto del dominio \mathbf{x} puede obtenerse como suma de las contribuciones de cada uno de los conductores que componen la toma de tierra (eV.35). De este modo, en la formulación simplificada 1D de elementos de contorno es preciso determinar los términos $\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x})$ de (eV.35) correspondientes a la contribución de la función de prueba i -ésima al potencial generado por el elemento recto L^α que forma parte del electrodo L (que ha sido discretizado en m elementos de contorno 1D $\{L^\alpha\}$) en un punto del espacio \mathbf{x} .

5.1. Cálculo de la integral de línea en el electrodo

La línea de un elemento L^α queda perfectamente definida por las coordenadas cartesianas de sus puntos extremos $\widehat{\xi}_1$ y $\widehat{\xi}_2$. Haciendo uso del punto medio $\widehat{\xi}_0$, la longitud \mathcal{L}^α , y el versor director $\widehat{\mathbf{s}}^\alpha$ cualquier punto $\widehat{\xi}$ del elemento se expresa como:

$$\widehat{\xi} = \widehat{\xi}_0 + \xi \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2} \widehat{\mathbf{s}}^\alpha; \quad \widehat{\xi}_0 = \frac{\widehat{\xi}_2 + \widehat{\xi}_1}{2}; \quad \mathcal{L}^\alpha = |\widehat{\xi}_2 - \widehat{\xi}_1|; \quad \widehat{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{\widehat{\xi}_2 - \widehat{\xi}_1}{\mathcal{L}^\alpha} \quad (\text{eV.37})$$

para un valor del parámetro escalar ξ comprendido entre -1 y 1 , (dominio de las funciones de forma en coordenadas de referencia propias del elemento, utilizadas normalmente en elementos finitos [Hughes¹⁹⁸⁷]). Efectuando este cambio de la variable en la expresión del cálculo del potencial elemental (eV.35) se obtiene

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\phi^\alpha \mathcal{L}^\alpha}{8\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi)) \widehat{N}_i(\widehat{\xi}(\xi)) d\xi. \quad (\text{eV.38})$$

Las funciones de prueba $\widehat{N}_i(\widehat{\xi}(\xi))$ se denotarán, en lo sucesivo, como $\widetilde{N}_i(\xi)$ haciendo referencia a las funciones de forma comúnmente empleadas en elementos finitos, por lo que, teniendo en cuenta el núcleo (eV.30) de la ecuación integral,

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\phi^\alpha \mathcal{L}^\alpha}{8\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widetilde{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi))} d\xi + \frac{\phi^\alpha \mathcal{L}^\alpha}{8\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widetilde{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}'(\xi))} d\xi. \quad (\text{eV.39})$$

Por otra parte, el desarrollo en serie de potencias hasta el término de segundo grado de la función $\widetilde{N}_i(\xi)$ alrededor del punto μ permite expresar ésta en términos de valores conocidos de la función, su primera y segunda derivadas, como

$$\widehat{n}_{0i} = \widetilde{N}_i(\mu) - \mu \widetilde{N}_i'(\mu) + \frac{\mu^2}{2} \widetilde{N}_i''(\mu); \quad \widehat{n}_{1i} = \widetilde{N}_i'(\mu) - \mu \widetilde{N}_i''(\mu); \quad \widehat{n}_{2i} = \frac{1}{2} \widetilde{N}_i''(\mu)$$

$$\widetilde{N}_i(\xi) = \widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i} \xi + \widehat{n}_{2i} \xi^2. \quad (\text{eV.40})$$

5.2. Análisis geométrico

Sean p_0 la distancia del punto \mathbf{x} a su proyección ortogonal sobre la dirección del electrodo; y q la distancia desde dicha proyección al punto medio $\widehat{\xi}_0$. La distancia desde cualquier punto \mathbf{x} a un punto $\widehat{\xi}$ del electrodo es igual a

$$|\mathbf{x} - \widehat{\xi}| = \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2} \sqrt{\widehat{p}_0^2 + (\widehat{q} - \xi)^2}, \quad \widehat{p}_0 = \frac{p_0}{\mathcal{L}^\alpha/2}, \quad \widehat{q} = \frac{q}{\mathcal{L}^\alpha/2}. \quad (\text{eV.41})$$

Analizando el primero de los sumandos integrales de (eV.39), el término $\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi))$ se puede escribir en términos de parámetros constantes para un elemento α y un punto \mathbf{x} dados, siendo únicamente función de la variable escalar ξ , es decir,

$$\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi)) = \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2} \sqrt{\widehat{p}^2 + (\widehat{q} - \xi)^2}, \quad \widehat{p}^2 = \widehat{p}_0^2 + \widehat{\phi}^2, \quad \widehat{\phi} = \frac{\phi^\alpha/2}{\mathcal{L}^\alpha/2}. \quad (\text{eV.42})$$

Mediante la sustitución de las funciones (eV.40) y la expresión de $\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi))$ en el primer término de (eV.39) se obtienen

$$\frac{\phi^\alpha \mathcal{L}^\alpha}{8\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widehat{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi))} d\xi = \frac{\phi^\alpha}{4\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i} \xi + \widehat{n}_{2i} \xi^2}{\sqrt{\widehat{p}^2 + (\widehat{q} - \xi)^2}} d\xi. \quad (\text{eV.43})$$

Si se efectúa un cambio en la variable para facilitar la integración, esta expresión se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{\phi^\alpha \mathcal{L}^\alpha}{8\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widehat{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi))} d\xi &= \frac{\phi^\alpha}{4\gamma} \left\{ \left(\widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i} \widehat{q} + \widehat{n}_{2i} \widehat{q}^2 \right) \int_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} \frac{1}{\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2}} dt \right. \\ &+ \left. \left(\widehat{n}_{1i} + 2\widehat{q}\widehat{n}_{2i} \right) \int_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2}} dt + \widehat{n}_{2i} \int_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2}} dt \right\}. \end{aligned} \quad (\text{eV.44})$$

La resolución analítica de estas tres integrales conduce a las expresiones finales:

$$\frac{\phi^\alpha \mathcal{L}^\alpha}{8\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{1}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\xi}(\xi))} \widehat{N}_i(\xi) d\xi = \frac{\phi^\alpha}{4\gamma} \Phi(\widehat{p}, \widehat{q}), \quad (\text{eV.45})$$

$$\Phi(\widehat{p}, \widehat{q}) = \nu^{(0)} \varphi^{(0)} + \nu^{(1)} \varphi^{(1)} + \nu^{(2)} \varphi^{(2)}.$$

$$\nu^{(0)} = \widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i} \widehat{q} + \widehat{n}_{2i} \left(\widehat{q}^2 - (\widehat{p}^2/2) \right), \quad \nu^{(1)} = \widehat{n}_{1i} + 2\widehat{q}\widehat{n}_{2i}, \quad \nu^{(2)} = \widehat{n}_{2i}/2$$

$$\varphi^{(0)} = \text{ArgSh} \left(\frac{1-\widehat{q}}{\widehat{p}} \right) + \text{ArgSh} \left(\frac{1+\widehat{q}}{\widehat{p}} \right)$$

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{(1-\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2} - \sqrt{(1+\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2} \quad (\text{eV.46})$$

$$\varphi^{(2)} = (1-\widehat{q}) \sqrt{(1-\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2} + (1+\widehat{q}) \sqrt{(1+\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2}$$

El cálculo se completa aplicando el resultado de la ecuación (eV.45) al segundo término de los sumandos integrales de (eV.39). Si se denominan \hat{p} y \hat{q} los parámetros geométricos de los puntos $(\mathbf{x}, \hat{\xi})$, y \hat{p}' y \hat{q}' los parámetros geométricos de los puntos $(\mathbf{x}, \hat{\xi}')$, el potencial del elemento α se obtiene de

$$\hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\phi^\alpha}{4\gamma} [\Phi(\hat{p}, \hat{q}) + \Phi(\hat{p}', \hat{q}')]. \quad (\text{eV.47})$$

6. INTEGRACIÓN ANALÍTICA DEL POTENCIAL DE DOS ELECTRODOS EN EL ESPACIO

La discretización simplificada en elementos de contorno 1D del problema, conduce a un sistema de ecuaciones lineales cuyos coeficientes $\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha}$ vienen dados por (eV.36), y corresponden a la contribución de la función de prueba i -ésima al potencial generado por el elemento L^α sobre otro elemento L^β de diámetro ϕ^β , promediado por la función de test j -ésima.

6.1. Cálculo de las integrales de línea sobre los electrodos

La línea de un elemento L^β queda definida por las coordenadas cartesianas de sus puntos extremos $\hat{\chi}_1$ y $\hat{\chi}_2$. El punto medio $\hat{\chi}_0$, la longitud del elemento \mathcal{L}^β , y el versor director $\hat{\mathbf{s}}^\beta$ permiten expresar un punto cualquiera $\hat{\chi}$ del elemento como

$$\hat{\chi} = \hat{\chi}_0 + \chi \frac{\mathcal{L}^\beta}{2} \hat{\mathbf{s}}^\beta; \quad \hat{\chi}_0 = \frac{\hat{\chi}_2 + \hat{\chi}_1}{2}; \quad \mathcal{L}^\beta = |\hat{\chi}_2 - \hat{\chi}_1|; \quad \hat{\mathbf{s}}^\beta = \frac{\hat{\chi}_2 - \hat{\chi}_1}{\mathcal{L}^\beta}. \quad (\text{eV.48})$$

para valores del parámetro escalar χ comprendido entre -1 y 1 , (dominio de las funciones de forma en coordenadas de referencia elementales). Introduciendo este cambio de variable $\hat{\chi}$, junto con el cambio de $\hat{\xi}$ de (eV.37) en la expresión (eV.36),

$$\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi \phi^\alpha \phi^\beta \mathcal{L}^\alpha \mathcal{L}^\beta}{16\gamma} \left\{ \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \hat{N}_j(\hat{\chi}(\chi)) \left[\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \hat{k}(\hat{\chi}(\chi), \hat{\xi}(\xi)) \hat{N}_i(\hat{\xi}(\xi)) d\xi \right] d\chi \right\}. \quad (\text{eV.49})$$

Al igual que en el caso de $\hat{N}_i(\hat{\xi}(\xi))$ en la ecuación del potencial (eV.38), las funciones $\hat{N}_j(\hat{\chi}(\chi))$ se denotarán, en lo sucesivo, como $\tilde{N}_j(\chi)$. Desarrollando

en serie de potencias hasta el término de segundo grado de las funciones $\tilde{N}_j(\chi)$ alrededor del punto δ , resulta

$$\hat{n}_{0j} = \tilde{N}_j(\delta) - \delta \tilde{N}'_j(\delta) + \frac{\delta^2}{2} \tilde{N}''_j(\delta); \quad \hat{n}_{1j} = \tilde{N}'_j(\delta) - \delta \tilde{N}''_j(\delta); \quad \hat{n}_{2j} = \frac{1}{2} \tilde{N}''_j(\delta)$$

$$\tilde{N}_j(\chi) = \hat{n}_{0j} + \hat{n}_{1j} \chi + \hat{n}_{2j} \chi^2, \tag{eV.50}$$

siendo $\tilde{N}_j(\delta)$, $\tilde{N}'_j(\delta)$ y $\tilde{N}''_j(\delta)$ la función, primera y segunda derivadas evaluadas en el punto δ . Si se sustituyen en (eV.49) estas expresiones, las de (eV.40) y el núcleo integral (eV.34) resulta

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi \phi^\alpha \phi^\beta \mathcal{L}^\alpha \mathcal{L}^\beta}{16\gamma} & \left\{ \int_{\chi=-1}^{\chi=1} (\hat{n}_{0j} + \hat{n}_{1j} \chi + \hat{n}_{2j} \chi^2) \right. \\ & \left[\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\hat{n}_{0i} + \hat{n}_{1i} \xi + \hat{n}_{2i} \xi^2}{\sqrt{|\hat{\chi}(\chi) - \hat{\xi}(\xi)|^2 + \left(\frac{\phi^\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\phi^\beta}{2}\right)^2}} d\xi \right. \\ & \left. \left. + \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\hat{n}_{0i} + \hat{n}_{1i} \xi + \hat{n}_{2i} \xi^2}{\sqrt{|\hat{\chi}(\chi) - \tilde{\xi}'(\xi)|^2 + \left(\frac{\phi^\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\phi^\beta}{2}\right)^2}} d\xi \right] d\chi \right\}. \tag{eV.51} \end{aligned}$$

Las integrales involucradas en (eV.51) son análogas a las de (eV.43) ya calculadas en el apartado anterior para la integración del potencial generado por un electrodo en un punto del espacio. Haciendo uso de los resultados (eV.46) y (eV.47), la expresión de $\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha}$ de (eV.51) se puede reescribir en la forma

$$\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi \phi^\alpha \phi^\beta \mathcal{L}^\beta}{8\gamma} \left\{ \hat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) + \hat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\hat{\xi}'_1, \hat{\xi}'_2, \hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) \right\} \tag{eV.52}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) = \int_{\chi=-1}^{\chi=1} (\hat{n}_{0j} + \hat{n}_{1j} \chi + \hat{n}_{2j} \chi^2) \Phi(\hat{p}(\hat{\chi}(\chi)), \hat{q}(\hat{\chi}(\chi))) d\chi \tag{eV.53}$$

$$\widehat{p}^2(\widehat{\chi}(\lambda)) = \widehat{p}_0^2(\widehat{\chi}(\lambda)) + \widehat{\phi}^2, \quad \widehat{\phi} = \frac{\sqrt{(\phi^\alpha/2)^2 + (\phi^\beta/2)^2}}{\mathcal{L}^\alpha/2}. \quad (\text{eV.54})$$

$\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2, \widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2)$ es la integral en dos barras cilíndricas que se definen por las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de sus ejes. Así se analizará el primero de los sumandos de (eV.52), y el segundo se considerará como la integral en otras dos barras con coordenadas distintas (las de los puntos simétricos a $\widehat{\xi}_1$ y $\widehat{\xi}_2$) y a la que se aplicarán los mismos resultados.

6.2. Análisis geométrico de dos rectas en el espacio

Dos rectas cualesquiera en el espacio siempre pueden orientarse, efectuando las oportunas traslaciones, de forma tal que el origen de coordenadas esté situado en el centro de una de las dos rectas y que por ella pase uno de los ejes cartesianos.

Sean la recta α aquella definida por los puntos extremos $(\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)$ y la recta β aquella definida por los puntos $(\widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2)$. Si se sitúa el origen en el centro de la recta α y se hace coincidir dicha barra con el eje Y , las rectas estarán definidas por unas nuevas coordenadas de sus puntos extremos referidos a este nuevo sistema que se denominarán $(\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2)$ y $(\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2)$. Haciendo uso de las relaciones (eV.37), las nuevas coordenadas de la recta α y el versor director son

$$\widetilde{\xi}_1 = (0, -\frac{\mathcal{L}^\alpha}{2}, 0), \quad \widetilde{\xi}_0 = (0, 0, 0), \quad \widetilde{\xi}_2 = (0, \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2}, 0), \quad \widetilde{\mathbf{s}}^\alpha = (0, 1, 0).$$

A su vez, la recta β queda ahora definida por los nuevos puntos $(\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2)$ y caracterizada por las coordenadas del punto medio $\widetilde{\chi}_0$ y el versor director $\widetilde{\mathbf{s}}^\beta$.

Las distancias p_0 y q (eV.41) de un punto $\widetilde{\chi}$ de la recta β a un punto de la recta α son, en función de las coordenadas cartesianas de $\widetilde{\chi}$

$$p_0^2 = \widetilde{\chi}_{\beta x}^2 + \widetilde{\chi}_{\beta z}^2, \quad q^2 = \widetilde{\chi}_{\beta y}^2, \quad (\text{eV.55})$$

y dado que cualquier punto de la recta β se puede determinar con (eV.48), haciendo uso de (eV.54), las distancias adimensionales \widehat{p} y \widehat{q} resultan

$$\widehat{p} = \lambda \left\{ \sqrt{\mathcal{C}^2 + 2\mathcal{D}\chi + \mathcal{E}^2\chi^2} \right\}, \quad \widehat{q} = \lambda \{ \mathcal{A} + \mathcal{B}\chi \} \quad (\text{eV.56})$$

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}^\beta}{\mathcal{L}^\alpha}, \quad \mathcal{A} = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0y}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right), \quad \mathcal{B} = \tilde{s}_y^\beta, \quad \mathcal{D} = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_x^\beta + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right) \tilde{s}_z^\beta$$

$$\mathcal{C}^2 = \left(\frac{\tilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(\phi^\alpha/2)^2 + (\phi^\beta/2)^2}}{\mathcal{L}^{\beta/2}} \right)^2, \quad \mathcal{E}^2 = (\tilde{s}_x^\beta)^2 + (\tilde{s}_z^\beta)^2. \quad (\text{eV.57})$$

Estos coeficientes son la clave de todo el desarrollo que sigue a continuación ya que en ellos está contenida toda la información para calcular las distancias entre dos puntos de dos rectas α y β en cualquier disposición espacial.

6.3. Cálculo de las integrales elementales

La sustitución en (eV.53) de las fórmulas analíticas $\Phi(\hat{p}, \hat{q})$ deducidas en la ecuación del potencial (eV.46) conduce a una expresión que es función únicamente de las funciones de forma y de los parámetros geométricos adimensionales \hat{p} y \hat{q} , es decir,

$$\hat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) = \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \left(\hat{n}_{0j} + \hat{n}_{1j}\chi + \hat{n}_{2j}\chi^2 \right)$$

$$\left\{ \left(\hat{n}_{0i} + \hat{n}_{1i}\hat{q} + \hat{n}_{2i}(\hat{q}^2 - (\hat{p}^2/2)) \right) \left[\text{ArgSh} \left(\frac{t}{\hat{p}} \right) \right]_{t=-1-\hat{q}}^{t=1-\hat{q}} \right.$$

$$\left. + (\hat{n}_{1i} + 2\hat{q}\hat{n}_{2i}) \left[\sqrt{t^2 + \hat{p}^2} \right]_{t=-1-\hat{q}}^{t=1-\hat{q}} + \frac{\hat{n}_{2i}}{2} \left[t \sqrt{t^2 + \hat{p}^2} \right]_{t=-1-\hat{q}}^{t=1-\hat{q}} \right\} d\chi. \quad (\text{eV.58})$$

Si en este punto se sustituyen las expresiones obtenidas en el apartado 6.2. para las distancias adimensionales, se reordenan los términos y se definen unos coeficientes que permitan separar los parámetros geométricos de las funciones de forma y de las integrales, (eV.58) se reescribe como

$$\hat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) = \sum_{u=0}^{u=2} \sum_{w=0}^{w=4} \mathcal{K}_w^{(u)} \varphi_w^{(u)} \quad (\text{eV.59})$$

donde los coeficientes $\mathcal{K}_w^{(u)}$ se calculan como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_0^{(0)} \\ \mathcal{K}_1^{(0)} \\ \mathcal{K}_2^{(0)} \\ \mathcal{K}_3^{(0)} \\ \mathcal{K}_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{n}_{0j} & 0 & 0 \\ \hat{n}_{1j} & \hat{n}_{0j} & 0 \\ \hat{n}_{2j} & \hat{n}_{1j} & \hat{n}_{0j} \\ 0 & \hat{n}_{2j} & \hat{n}_{1j} \\ 0 & 0 & \hat{n}_{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda\mathcal{A} & \lambda^2(\mathcal{A}^2 - \mathcal{C}^2/2) \\ 0 & \lambda\mathcal{B} & \lambda^2(2\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{D}) \\ 0 & 0 & \lambda^2(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n}_{0i} \\ \hat{n}_{1i} \\ \hat{n}_{2i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_0^{(1)} \\ \mathcal{K}_1^{(1)} \\ \mathcal{K}_2^{(1)} \\ \mathcal{K}_3^{(1)} \\ \mathcal{K}_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{n}_{0j} & 0 \\ \hat{n}_{1j} & \hat{n}_{0j} \\ \hat{n}_{2j} & \hat{n}_{1j} \\ 0 & \hat{n}_{2j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda\mathcal{A} \\ 0 & 2\lambda\mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{n}_{1i} \\ \hat{n}_{2i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{K}_0^{(2)} \\ \mathcal{K}_1^{(2)} \\ \mathcal{K}_2^{(2)} \\ \mathcal{K}_3^{(2)} \\ \mathcal{K}_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{n}_{0j} \\ \hat{n}_{1j} \\ \hat{n}_{2j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \hat{n}_{2i}$$

(eV.60)

Como puede observarse, los coeficientes $\mathcal{K}_w^{(u)}$ se expresan como el producto de tres matrices (o vectores) que contienen de forma separada las funciones de forma del nodo j ($\hat{n}_{0j}, \hat{n}_{1j}, \hat{n}_{2j}$), las propiedades geométricas de las dos rectas ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}^2, \mathcal{D}, \mathcal{E}^2, \lambda$) y las funciones de forma del nodo i ($\hat{n}_{0i}, \hat{n}_{1i}, \hat{n}_{2i}$).

Los términos $\varphi_w^{(u)}$ son los coeficientes integrales, y que en su forma más general se pueden escribir como las funciones w -ésimas siguientes

$$\varphi_w^{(0)} = \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \chi^w \left[\text{ArgSh} \left(\frac{t}{\hat{p}} \right) \right]_{t=-1-\hat{q}}^{t=1-\hat{q}} d\chi; \quad w = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\varphi_w^{(1)} = \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \chi^w \left[\sqrt{t^2 + \hat{p}^2} \right]_{t=-1-\hat{q}}^{t=1-\hat{q}} d\chi; \quad w = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (\text{eV.61})$$

$$\varphi_w^{(2)} = \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \chi^w \left[t \sqrt{t^2 + \hat{p}^2} \right]_{t=-1-\hat{q}}^{t=1-\hat{q}} d\chi; \quad w = 0, 1, 2, 3, 4$$

Si se denominan $\mathcal{I}\{m\}[a, b, c, d]$ y $\mathcal{J}\{m\}[a, b, c, d]$ a las integrales

$$\mathcal{I}\{m\}[a, b, c, d] = \int_{x=-1}^{x=1} x^m \ln \left(a + bx + \sqrt{x^2 + 2dx + c^2} \right) dx \quad (\text{eV.62})$$

$$\mathcal{J}\{m\}[a, b, c, d] = \int_{x=-1}^{x=1} x^m \sqrt{x^2 + 2dx + c^2} dx$$

para valores dados de los parámetros geométricos a, b, c, d y del exponente $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, entonces los coeficientes integrales (eV.61) pueden expresarse en la forma

$$\begin{aligned} \varphi_w^{(0)} &= \varphi_w^{(0)A} - \varphi_w^{(0)B} \\ \varphi_w^{(1)} &= \varphi_w^{(1)A} - \varphi_w^{(1)B} \end{aligned} \quad (\text{eV.63})$$

$$\varphi_w^{(2)} = (1 - \lambda \mathcal{A}) \varphi_w^{(1)A} - \lambda \mathcal{B} \varphi_{w+1}^{(1)A} + (1 + \lambda \mathcal{A}) \varphi_w^{(1)B} + \lambda \mathcal{B} \varphi_{w+1}^{(1)B}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_w^{(0)A} = \mathcal{I}\{w\}[a, b, c, d] \\ \varphi_w^{(1)A} = \lambda \mathcal{J}\{w\}[a, b, c, d] \end{array} \right\} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{1}{\lambda} - \mathcal{A} \right) \\ b = -\mathcal{B} \\ c^2 = \mathcal{C}^2 + \left(\frac{1}{\lambda} - \mathcal{A} \right)^2 \\ d = \mathcal{D} - \left(\frac{1}{\lambda} - \mathcal{A} \right) \mathcal{B} \end{array} \right. \quad (\text{eV.64})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_w^{(0)B} = \mathcal{I}\{w\}[a, b, c, d] \\ \varphi_w^{(1)B} = \lambda \mathcal{J}\{w\}[a, b, c, d] \end{array} \right\} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} a = -\left(\frac{1}{\lambda} + \mathcal{A} \right) \\ b = -\mathcal{B} \\ c^2 = \mathcal{C}^2 + \left(\frac{1}{\lambda} + \mathcal{A} \right)^2 \\ d = \mathcal{D} + \left(\frac{1}{\lambda} + \mathcal{A} \right) \mathcal{B} \end{array} \right.$$

El objetivo es la obtención de expresiones analíticas a las integrales $\mathcal{I}\{m\}[a, b, c, d]$ y $\mathcal{J}\{m\}[a, b, c, d]$ para los distintos valores del exponente $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Las fórmulas resultantes serán, a su vez, dependientes de los parámetros $[a, b, c, d]$ que contienen la información de las propiedades geométricas de las dos rectas y su disposición espacial.

6.4. Cálculo de las Integrales Genéricas $\mathcal{I}\{m\}$ y $\mathcal{J}\{m\}$

En un principio, las integrales $\mathcal{I}\{m\}[a, b, c, d]$ y $\mathcal{J}\{m\}[a, b, c, d]$ se desarrollaron distinguiendo las disposiciones espaciales relativas más usuales entre los electrodos que forman la malla de conductores de una instalación de toma de tierra (barras perpendiculares o barras paralelas) [Colominas et al.¹⁹⁹³]. Estos dos casos particulares dan lugar a integrales más simplificadas, ya que se corresponden con valores singulares de los parámetros geométricos b y d (su demostración se encuentra en el anexo 1 a este capítulo).

El desarrollo analítico de estas integrales para los casos más frecuentes de disposición de los electrodos supuso un importante avance en el cálculo de grandes mallas de tomas de tierra por la drástica reducción de los tiempos de computación. No obstante, se requería completar el análisis de las integrales $\mathcal{I}\{m\}$ y $\mathcal{J}\{m\}$ con independencia de los parámetros geométricos de modo que su evaluación fuese completamente analítica, sin necesidad de calcularlas numéricamente en algunos casos particulares.

En el Anexo 1 a este capítulo se presenta el desarrollo completo de la integración analítica junto con los parámetros e integrales auxiliares que se requieren. Estas expresiones han sido desarrolladas pensando en facilitar la posterior implementación de las fórmulas por lo que se han derivado de forma recurrente, y en la medida de lo posible, efectuando las menores operaciones que involucren funciones logarítmicas y trigonométricas.

El Anexo 2 contiene el resumen de la integración analítica del anexo 1, sin ninguna demostración y con las expresiones más compactadas para facilitar una visión global del esquema de la formulación desarrollada.

Este modelo numérico unidimensional simplificado, basado en el método de elementos de contorno con la integración analítica de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales que se ha presentado (anexos 1 y 2), es muy estructurado y está desarrollado de forma que es posible incorporarlo en un sistema de diseño asistido por ordenador. Sin embargo, la programación de esta formulación no es nada fácil habida cuenta la gran complejidad de las expresiones que intervienen en el cálculo de coeficientes matriciales, su casuística y en algunos casos su mal condicionamiento.