



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Escuela Politécnica Superior

Laboratorio de Dinámica de Vehículos

Desarrollo de una metodología experimental para el estudio de estrategias de control en vehículos automóviles.

Memoria

que, para optar al grado de Doctor Ingeniero Industrial, presenta

Álvaro Deibe Díaz

Director: D. Jesús Cardenal Carro

Tutor: D. Javier Cuadrado Aranda

Ferrol, febrero de 2010

*En binario hay 10 tipos de personas,
las que lo entienden y las que no.*

Agradecimientos

El desarrollo de un trabajo como el que se presenta en esta Tesis, que se ha prolongado en el tiempo de forma notable debido a factores externos a la investigación, tiene por lo general un fuerte impacto en la persona que lo realiza. En este caso ha sido así, y ha afectado profundamente a la vida familiar del que escribe. Por tanto, y de forma fundamental, mi más sincero agradecimiento a mi familia, y especialmente a Geles, David y Carmen, que han sabido comprender mi mal humor, mis ausencias y mis esfuerzos, y me han correspondido con comprensión y paciencia.

Mi agradecimiento, también, a mi director de Tesis, Jesús Cardenal Carro. La idea original que subyace en el trabajo que aquí se presenta es suya, y su apoyo y amistad han sido los que me han dado ánimo para seguir adelante y terminarlo. Las innumerables ocasiones en las que debatimos a cerca de los contenidos de esta tesis —y de otras cosas— consiguieron enfocar mi atención en lo fundamental, y llevar a término el trabajo.

También quisiera agradecer especialmente a Fernando López Peña y Richard Duro Fernández su apoyo y sus consejos, sobre todo en las últimas y más duras etapas de este trabajo. Con su ayuda conseguí centrar algunas ideas, recopilar y ordenar la información más importante, y dar la forma final a este documento.

En cuanto a mis compañeros de trabajo, he de agradecer su apoyo al Departamento de Métodos Matemáticos e de Representación, al que pertenezco, y especialmente a los miembros del Grupo de Dinámica de Vehículos, Ana Díaz Díaz, Fernando Cobeño Arlegui y José Augusto Antón Nacimientto. También al Departamento de Ingeniería Industrial II, que me acogió y ayudó a realizar este trabajo, y en él a Javier Cuadrado Aranda, mi Tutor en esta Tesis, por su confianza y apoyo durante estos años de trabajo.

Por último, a mis compañeros de la EUDI, y en especial al *núcleo duro*, por riguroso orden alfabético ;o) Edu, Jon, José Ramón (ambos), Manuel (también los dos), Nieves, Pablo,... me olvidaré de alguno, seguro, pero espero que me sepan disculpar.

Resumen

La interacción entre las ruedas de un vehículo en movimiento y el suelo es un fenómeno complejo. Se conoce con bastante aproximación su funcionamiento, y se dispone de modelos de sus características fundamentales. Sin embargo la zona de contacto entre el neumático y el suelo está en movimiento continuo, cambia de forma, de condiciones de trabajo, y su estado es incierto y muy difícil de medir, de forma que muchos de los parámetros que influyen directamente en esta interacción han de ser estimados a partir de otros que sí pueden ser obtenidos mediante sensores.

Sobre el vehículo en movimiento actúan fuerzas de diversa índole, pero la que en mayor medida condiciona su comportamiento en la carretera es la interacción rueda-suelo. De ella recibe la mayor parte de las fuerzas que mantienen al vehículo en la trayectoria. Si falla esta interacción el control del vehículo se verá comprometido, dando lugar a una situación potencialmente peligrosa. Es por esta razón que es importante conocer con exactitud lo que sucede entre el neumático y el suelo.

A medida que se aumentan las sollicitaciones sobre el neumático, su comportamiento cambia, aumentando el *deslizamiento* y el *ángulo de deriva*. Pero a partir de cierto umbral, en la frontera del *círculo de fricción* el neumático no es capaz de obtener del suelo las reacciones solicitadas; el comportamiento del neumático cambia drásticamente, y aunque todavía es posible controlar el vehículo, las técnicas de control para hacerlo son diferentes a las de la conducción en circunstancias normales. Si las sollicitaciones siguen aumentando llegará un momento en el que el control del vehículo será imposible. Por tanto existe una franja, en las cercanías del círculo de fricción, en la que el neumático se comporta de forma diferente, ha perdido la adherencia con el suelo, pero aún así es posible controlar el vehículo.

Teóricamente sería posible extender la controlabilidad del vehículo hasta esta franja, utilizando nuevos sistemas de seguridad activa expertos, pero para ello será necesario conocer con detalle el estado del neumático y su interacción con el suelo. Habrá que disponer, por tanto, de un *estimador* que permita conocer con suficiente aproximación el valor de los parámetros que indican el estado a partir de variables que puedan ser medidas directamente mediante sensores, y del conocimiento del comportamiento cinemático y dinámico del vehículo y sus neumáticos.

La estimación ha de partir del estado cinemático y dinámico del chasis del vehículo. Esto permitirá, mediante el conocimiento del comportamiento de las suspensiones y dirección del vehículo, estimar el estado y las solicitaciones a las que se encuentra sometida cada rueda, y con ello y el modelo del neumático, el estado de la interacción rueda-suelo.

Existen diferentes técnicas para estimar el estado cinemático y dinámico del chasis de forma autónoma e independiente del resto del vehículo. Desde la formulación del *Problema de Wahba* se han desarrollado algoritmos para estimar la orientación y el estado de sólidos rígidos, con diferentes planteamientos y resultados. De todos ellos, tal vez, el más conocido es el *Filtro de Kalman* y sus variantes. El éxito de esta aproximación reside en que tiene en cuenta, desde el inicio, la naturaleza estocástica de los ruidos que contaminan a las señales de los sensores, y las deficiencias de los algoritmos que describen los modelos matemáticos del comportamiento del sistema físico al que se refieren. El Filtro de Kalman, además, es el estimador óptimo de cualquier sistema lineal.

Pero la estimación de sistemas no lineales añade nuevas dificultades a estos algoritmos. Los estimadores existentes, basados en el Filtro de Kalman, intentan mantener sus bondades; pero incluso los mejores dejan de ser óptimos, y presentan problemas de convergencia y falta de precisión en determinadas circunstancias.

En este trabajo se propone el desarrollo de un nuevo estimador del estado cinemático y dinámico del chasis del vehículo, basado en el Filtro de Kalman original, y formulado en base a cuaternas para poder mantener la linealidad del modelo matemático, y con ello la del estimador. El estimador está íntimamente relacionado con los sensores que utiliza, y con las ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema que se pretende estimar; por tanto, en este trabajo se presenta también el desarrollo de un nuevo sistema de sensorización, actuadores, sistema de control, estructura mecánica y modelo matemático que forman una plataforma experimental basada en un vehículo, con la que se podrá, en el futuro, verificar el comportamiento del estimador propuesto, contrastarlo con otros estimadores existentes y ensayar nuevas estrategias de control.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
1. Introducción	1
2. Ámbito de trabajo	7
2.1. Seguridad activa en vehículos automóviles	7
2.2. Estado actual de la seguridad activa	9
2.3. Situaciones de emergencia	11
2.3.1. Interacción rueda-suelo	13
2.3.2. Pérdida de adherencia y pérdida de control	21
2.3.3. Predicción de situaciones de emergencia	24
3. Objetivos y metodología	27
3.1. Objetivos	27
3.2. Metodología	28
4. Sensorización de posición y movimiento	31
4.1. Introducción	31
4.2. Tecnologías de adquisición de movimiento	32
4.2.1. Marco de adecuación del sistema de seguimiento	33
4.2.2. Especificaciones del sistema de seguimiento	35
4.2.3. Seguidores mecánicos	36
4.2.4. Seguidores magnéticos	38
4.2.5. Detección óptica	41
4.2.6. Seguidores acústicos	46
4.2.7. Seguidores magnéticos e inerciales	47
4.2.8. Posicionamiento por Radio Frecuencia	49
4.2.9. Sistemas de seguimiento híbridos	51
4.2.10. Otras tecnologías	52
4.3. Solución adoptada	53

5. Plataforma experimental	55
5.1. Vehículo	56
5.2. Modificaciones introducidas en el vehículo	59
5.2.1. Frenos	60
5.2.2. Bujes traseros	61
5.2.3. Ejes traseros	62
5.2.4. Bandeja de servomotores	62
5.3. Adquisición y control	63
5.3.1. Adquisición de datos	66
5.3.2. Transmisión de los datos	78
5.4. Control del vehículo	84
5.4.1. Generación de las señales para los servos	85
5.5. Caracterización de los sensores	88
5.5.1. Diseño del banco de caracterización	89
5.5.2. Control del banco de caracterización	91
5.5.3. Resultados de la caracterización	93
6. Estimación de la orientación	95
6.1. Introducción	95
6.2. Representación de la orientación	96
6.2.1. Notación	97
6.2.2. Ángulos de Euler	97
6.2.3. Cuaternas	102
6.2.4. Solución adoptada	108
6.3. El problema de Wahba	109
6.4. El Filtro Complementario	117
6.5. El Filtro de Wiener	120
6.6. El Filtro de Kalman y sus derivados	122
6.6.1. El Filtro de Kalman original	122
6.6.2. El Filtro de Kalman Extendido	128
6.6.3. La familia de Filtros de Kalman <i>Single Point</i>	129
6.7. Desarrollo del estimador propuesto	133
6.7.1. Descripción del Estimador	134
6.7.2. Ventajas del nuevo estimador	142
7. Conclusiones	143
7.1. Conclusiones	143
7.2. Futuras líneas de investigación	145
A. Características del vehículo	147
A.0.1. Motor	147
A.0.2. Chasis y carrocería	147
A.0.3. Suspensión y dirección	148
A.0.4. Ruedas	149

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
B. Codificación Pseudo–Manchester	151
C. Esquema Eléctrico	159
D. Caracterización de los sensores	163
E. Cambio de base con cuaternas	171
I Bibliografía	175
Glossary	194

Índice de figuras

2.1.	Fuerzas de interacción neumático-suelo.	15
2.2.	Sistema de referencia del neumático	16
2.3.	Sistema de coordenadas solidario al vehículo, según la norma SAE J670 [75].	17
2.4.	Variación del <i>esfuerzo de frenada</i> con el deslizamiento de un neumático de estructura diagonal 7.75-14, en varias superficies (SAE [35]).	18
2.5.	Variación de la fuerza lateral con el ángulo de deriva en un neumático sometido a diferentes cargas [58].	20
2.6.	Círculo de Fricción. (Basado en datos experimentales de Sakai [58], para un neumático con una carga de 3,93 kN, presión de inflado de 207 kPa y rodando a 5,54 m/s).	22
2.7.	Umbrales de fricción y de control.	23
4.1.	Seguidores mecánicos no inerciales.	37
4.2.	Sistema de seguimiento Hiball.	42
5.1.	Modelado en CAD del vehículo.	57
5.2.	Alzado, planta y perfil del modelo en CAD del vehículo.	58
5.3.	Disco de freno ranurado y sensor inductivo para obtener la posición relativa y velocidad angulares de cada rueda.	59
5.4.	Nuevo disco de freno.	60
5.5.	Rediseño del buje trasero.	61
5.6.	Rediseño del eje trasero.	62
5.7.	Rediseño de la bandeja de servomotores.	64
5.8.	Arquitectura del sistema de adquisición de datos y control del vehículo.	65
5.9.	Mediciones obtenidas del sensor inductivo y el disco de freno, para la estimación de la velocidad y posición angulares de las ruedas.	68
5.10.	Bits de codificación y error en la reconstrucción de la velocidad a partir del número de pulsos y el tiempo medidos.	69
5.11.	Sensor de posición LM10 y su ubicación en el eje trasero.	71

5.12. Acelerómetro triaxial <i>Crossbow CXL02LF3</i> y colocación en el vehículo.	73
5.13. Giróscopos piezoeléctricos <i>Tokin CG-16D</i> y posicionamiento ortogonal.	75
5.14. Magnetómetro triaxial <i>HMC2003</i>	76
5.15. servomotores colocados en la bandeja.	84
5.16. Diagrama de tiempos de la generación de las señales PWM para el control de los servomotores.	87
5.17. Esquema del circuito para la generación de las señales PWM para el control de los servomotores.	88
5.18. Banco de caracterización de los sensores	90
5.19. Constitución mecánica de la plataforma giratoria.	91
5.20. Programa de automatización para el banco de ensayos.	92
5.21. Resultados de calibración del eje y	94
6.1. Sistema de referencia inercial en la superficie de la Tierra.	97
6.2. Representación del sistema de coordenadas inercial y los vectores de gravedad e intensidad del campo magnético en la superficie de la tierra.	110
6.3. Filtrado complementario de dos señales.	118
6.4. Filtro complementario para estimación de orientación	119
6.5. Diagrama de bloques de un sistema dinámico continuo.	123
6.6. Diagrama de bloques de un sistema dinámico discreto.	124
6.7. Algoritmo del Filtro de Kalman [89].	127
6.8. Algoritmo del Filtro Extendido de Kalman [89].	129
6.9. Ejemplo bidimensional de una transformación de la media y la covarianza (representada mediante <i>elipses de error estándar</i>) a través de un sistema no lineal [85].	131
C.1. Esquema eléctrico principal del control del vehículo.	160
C.2. Esquema eléctrico del eje delantero del vehículo.	161
C.3. Esquema eléctrico del eje trasero del vehículo.	162
D.1. Datos de caracterización del giróscopo del eje x.	164
D.2. Datos de caracterización del giróscopo del eje y.	165
D.3. Datos de caracterización del giróscopo del eje z.	166
D.4. Datos de caracterización del acelerómetro del eje x.	167
D.5. Datos de caracterización del acelerómetro del eje y.	168
D.6. Datos de caracterización del acelerómetro del eje z.	169
D.7. Datos de caracterización del magnetómetro x.	170
D.8. Datos de caracterización del magnetómetro y.	170
D.9. Datos de caracterización del magnetómetro z.	170

Índice de cuadros

2.1. Eficacia de los sistemas de seguridad activa en vehículos automóviles [24].	8
2.2. Listado no exhaustivo de algunos acrónimos de sistemas de seguridad activa.	12
5.1. Características principales del vehículo	56
5.2. Especificaciones del sensor de posición lineal	70
5.3. Especificaciones del acelerómetro triaxial	72
5.4. Especificaciones del giróscopo cerámico	74
5.5. Especificaciones del magnetómetro triaxial	77
5.6. Tabla parcial pseudo-Manchester	81
A.1. Características principales del motor del vehículo	148

Capítulo 1

Introducción

Desde su nacimiento el automóvil ha demostrado su valor para la sociedad. Su uso para el transporte de mercancías o de pasajeros, o para el ocio, ha crecido constantemente hasta nuestros días. El número de vehículos ha aumentado al mismo tiempo que las infraestructuras que se necesitan para su uso. El desarrollo del automóvil ha traído consigo muchas ventajas, pero también inconvenientes; de entre ellos los más importantes son, tal vez, la siniestralidad y los daños personales ocasionados en los accidentes.

Por esta razón los fabricantes de automóviles diseñan sistemas de seguridad destinados a minimizar estos daños. Estos sistemas se denominan *primarios (seguridad activa)*, *secundarios (seguridad pasiva)* o *terciarios* en función de si actúan inmediatamente antes, durante o después de un accidente. De éstos sistemas sólo los primeros son preventivos, de forma que los secundarios o terciarios actúan cuando ya se ha producido el daño, e intentan minimizarlo. Desde este punto de vista, es más interesante estudiar los sistemas de seguridad primarios, por cuanto su mejora implicaría minimizar los accidentes, y con ello los daños materiales y personales.

Sistemas de seguridad primarios. Los sistemas primarios, o de seguridad activa, actúan antes de que se produzca un accidente, en cuanto se detecta que se está produciendo una circunstancia potencialmente peligrosa. Un ejemplo típico es el antibloqueo de frenos (*ABS*): este sistema está monitorizando permanentemente el estado de la interacción rueda-suelo, y detecta el instante en el que se produce un deslizamiento en alguna de ellas, debido a un exceso de esfuerzo de frenada. El sistema, entonces, responde relajando la presión del freno sobre la rueda que desliza, disminuyendo el esfuerzo de frenada, y permitiendo que recupere su adherencia con el suelo. Este esquema de detección–corrección es de uso generalizado en los sistemas de seguridad activa. En todo caso, las detecciones se producen siempre *a posteriori*, es decir, se detecta el potencial peligro cuando éste está ya produciéndose. Las acciones de control tomadas inmediatamente, basadas en

esta detección, intentarán situar al vehículo en condiciones de conducción más favorables.

En este sentido, sería deseable adelantarse a la detección y encontrar la forma de predecir situaciones potencialmente peligrosas. La predicción permitiría a los sistemas de control actuar antes y con ello, previsiblemente, obtener mejores resultados. Las dificultades de la predicción son dobles: por una parte, predecir el futuro tiene siempre un alto grado de incertidumbre; por otra, las interacciones entre las ruedas y el suelo, o el comportamiento dinámico del automóvil son altamente no lineales y difíciles de analizar y modelar, y la predicción que se pretende tendrá que tenerlos en cuenta.

Control. Uno de los objetivos en el diseño de un vehículo es que sea fácilmente controlable por el conductor. Aunque diversos en su nacimiento, a lo largo de la historia del automóvil se han estandarizado los elementos con los que el conductor puede controlar el vehículo, y la conducción se efectúa de forma intuitiva: el giro del volante hacia un lado supone que el vehículo girará en el mismo sentido; la presión sobre el pedal del acelerador indicará al motor que aumente su potencia, y sobre el pedal de freno reducirá la velocidad del vehículo.

Este modo intuitivo de controlar el vehículo sucede durante las circunstancias habituales de circulación. Pero cuando el vehículo es forzado fuera de estas condiciones, y las ruedas pierden adherencia con el suelo, el control del vehículo cambia. Si la pérdida de adherencia es excesiva el vehículo no será controlable, pero en las inmediaciones de la pérdida de adherencia es posible guiar el vehículo, y esto es precisamente lo que se hace en la conducción en competición: se apura el vehículo al máximo, obligándolo en ocasiones a perder adherencia, porque con ello se consigue recorrer el trazado previsto en menor tiempo. Durante estas situaciones límite, y aún cuando las ruedas hayan perdido parte de su adherencia, se pueden realizar maniobras que serían imposibles en circunstancias habituales. Controlar el vehículo en estas circunstancias límite supondría más oportunidades para evitar accidentes en situaciones de emergencia.

Pero controlar el vehículo en estas condiciones no está al alcance del conductor habitual. Las técnicas de control en estas circunstancias no son intuitivas y son, en algunos casos, contrarias a lo acostumbrado. Sólo un conductor entrenado en estas técnicas será capaz de efectuarlas llegado el caso. El paso de una estrategia de control a la otra es gradual, y se produce en el entorno las condiciones de pérdida de adherencia de las ruedas.

Sensorización. Para poder aprovechar las ventajas que proporciona el control en circunstancias con pérdida de adherencia es necesario anticiparse a las reacciones del vehículo, y a las situaciones a las que será sometido en el futuro inmediato. El conductor dispone de un importante conjunto

de sensores que le permiten obtener la información que necesita para ello. Es capaz de medir las fuerzas de inercia que actúan sobre el vehículo a través de las reacciones que nota en la banqueta y el respaldo del asiento. Puede estimar las condiciones de adherencia del tren delantero a través de la reacción que nota en el volante. Los *conductos semicirculares* del oído medio le informan de la velocidad de rotación –en los tres ejes– que está experimentando junto con el vehículo. El sonido que percibe le informa del estado del motor y del firme, y la vista le permite obtener información de los instrumentos del cuadro, y conocer las condiciones del trazado, el tráfico que le rodea y, de alguna manera, el futuro inmediato.

Con toda esta información el cerebro es capaz de *estimar* el estado del vehículo y *prever* las solicitaciones a las que será sometido inmediatamente. Esta previsión es fundamental para el control con pérdida de adherencia, porque es necesario preparar al vehículo para que cuando ésta se produzca, se encuentre en circunstancias adecuadas para su control. En competición los pilotos “colocan” al vehículo de forma apropiada para que pueda tomar una curva, “derrapando”, a una velocidad superior a la que sería posible en circunstancias habituales. Sin la predicción, el control en situaciones con pérdida de adherencia pierde parte de su efectividad.

Estimación. Como se ha dicho ya, la pérdida de adherencia en las ruedas se produce de forma gradual. A medida que aumenta ésta, se hace más probable el riesgo de accidente. Llegado un punto, habrá de cambiarse la estrategia de control, como se ha mencionado, para poder extender el margen de controlabilidad del vehículo más allá del que proporciona el control ordinario.

No se sabe aún cómo caracterizar el punto en el que se ha de pasar de una estrategia a la otra. Además, es de esperar que este punto dependa de las circunstancias en las que se encuentra el vehículo. Para determinar este punto de cambio será necesario, por tanto, obtener del vehículo y su entorno aquellos parámetros que caracterizan su estado. Algunos de estos parámetros podrán ser medidos directamente mediante sensores, pero otros habrán de ser *estimados* a partir de los medidos, y de la situación cinemática y dinámica del vehículo.

Uno de los aspectos más difíciles en la estimación del estado cinemático y dinámico del vehículo es la interacción rueda-suelo. Esta interacción es no lineal, y depende de un número de factores muy elevado. Algunos de ellos, como el estado del firme, no pueden ser medidos en tiempo real. El modelado del comportamiento del neumático también es complejo, como se expondrá más adelante. Aún así es necesario estudiar lo que sucede entre las ruedas y el suelo en las inmediaciones de la pérdida de adherencia para comprender cómo caracterizarla y preverla.

Aún contando con el modelo del terreno y del neumático, es necesario

conocer las cargas dinámicas a las que está sometido para estimar su estado. Estas cargas sólo podrán ser obtenidas si se tiene en cuenta la cadena cinemática que une cada rueda al chasis, y la transferencia de cargas que sucede, de forma dinámica, a través de ellas. Para esto, por fin, es necesario conocer la orientación, velocidad y aceleración del chasis, y las posiciones y velocidades relativas de los elementos móviles de las suspensiones y la dirección.

La obtención de esta información se hará de forma indirecta, a partir de los datos de los sensores que se puedan disponer. Pero la información que se obtenga de los sensores estará contaminada por ruidos, y los modelos dinámicos de los que se dispone son inexactos o simplificados, de forma que el conocimiento que se puede obtener del estado del vehículo no será más que una *estimación*.

Existen numerosos algoritmos para estimar la orientación de un sólido en el espacio en base a determinados parámetros que se pueden medir, y del modelo dinámico de su comportamiento. Desde el *Problema de Wahba*, como se expondrá en detalle, se han desarrollado diferentes familias de estimadores de los que tal vez el más conocido sea el *Filtro de Kalman*. Este filtro es óptimo desde prácticamente cualquier aspecto que se pueda considerar para la estimación: la media, la mediana o la moda de la función de densidad de probabilidad condicionada del sistema que se analiza, por ejemplo [85], [89]. En su formulación Kalman tuvo en cuenta desde el inicio la naturaleza estocástica de las señales obtenidas de los sensores, y la incertidumbre de los resultados obtenidos de los modelos dinámicos, incompletos e inexactos. La extensión de este filtro a problemas no lineales, no obstante, es difícil, y en ocasiones el algoritmo resultante puede tener singularidades o incluso no converger en determinadas circunstancias.

La optimalidad del Filtro de Kalman lo hace el candidato ideal para la estimación, aunque su formulación hace que sea difícil utilizarlo en sistemas altamente no lineales, como el que se propone en este trabajo. Se han desarrollado diferentes familias de algoritmos, basados en el de Kalman, para adaptarlo a problemas no lineales, y se sigue haciendo en la actualidad. Desde el *EKF* (Filtro de Kalman Extendido) hasta la actual familia de *SPKF* (Filtros de Kalman “Sigma Point”), todos ellos asumen ciertas simplificaciones en el planteamiento del filtro original, de forma que se pierde su optimalidad.

En este trabajo se propone el desarrollo de una nueva estrategia, utilizando una formulación con cuaternas y matrices de estado variables en el tiempo, que permite modelar el estado cinemático del vehículo de forma que se puede plantear un Filtro de Kalman lineal, que mantiene su optimalidad, y no tiene singularidades. Para desarrollar en el futuro nuevas estrategias de control del vehículo en condiciones de pérdida de adherencia, ensayar criterios para evaluar la interacción rueda-suelo y probar la bondad del algoritmo propuesto, se desarrollará una plataforma experimental con los sensores y

mecanismos de control necesarios.

Estructura del documento Se detalla a continuación, para facilitar su lectura, la estructura de las partes en las que se ha fraccionado este documento.

En el capítulo 2 se acota el marco en el que se desarrolla este trabajo. En él se hace una revisión del estado actual de las técnicas de seguridad activa en automóviles, y se introducen las dificultades inherentes a la estimación en sistemas no lineales, y a la predicción. Esta revisión servirá para valorar las dificultades que habrán de afrontarse, y para definir los objetivos del presente trabajo. Revisiones más detalladas del estado del arte de cada uno de los ámbitos de conocimiento en los que se desarrolla este trabajo se abordarán en sus capítulos correspondientes.

En el capítulo 3 se presenta en detalle la metodología que se desarrollará a lo largo del trabajo, y los resultados que se pretenden obtener con esta metodología.

En el capítulo 4 se revisan las diferentes opciones disponibles para capturar el estado cinemático y dinámico de sólidos en movimiento, destacando sus virtudes y defectos desde el punto de vista de los objetivos que se persiguen en este trabajo, y observándolos desde la perspectiva de su validez para seguir el comportamiento de un vehículo. Finalmente se selecciona de entre ellas la opción de seguimiento más adecuada para este trabajo.

En el capítulo 5 se aborda la determinación de los parámetros y variables necesarias, y se expone el diseño y el desarrollo de la plataforma base para la realización de los ensayos.

En el capítulo 6 se hace una revisión de los algoritmos que pueden ser de aplicación al problema de estimar los parámetros necesarios, los que pueden medirse directamente mediante sensores, y los que necesitan ser obtenidos indirectamente a partir de otros, y teniendo en cuenta la naturaleza estocástica de los datos obtenidos por los sensores, y las imperfecciones de los modelos que se utilicen. Una vez analizadas sus ventajas e inconvenientes, se expone el desarrollo de una nueva propuesta de estimador, basada en el Filtro de Kalman original, y que mejora las prestaciones de los estimadores actuales.

Por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones finales.

Capítulo 2

Ámbito de trabajo

Los sistemas de seguridad en los automóviles incrementan la seguridad de sus usuarios, y aportan un alto valor añadido. Son percibidas de esta manera por el cliente, y por tanto se incorporan inicialmente en los vehículos de las gamas superiores, donde el poder adquisitivo del cliente lo permite. A medida que las políticas de escala consiguen abaratar sus costes, se extienden también a los vehículos de gamas medias y bajas.

Constituyen, por tanto, factores de innovación, y por ello son guardados con celo, y esto hace que los mismos objetivos sean alcanzados por diferentes fabricantes de formas diversas. De este modo, los sistemas no son iguales entre fabricantes, y existe una gran diversidad que dificulta el seguimiento de su evolución [42].

Como se ha mencionado en el capítulo 1, una predicción fiable permitiría dar un paso más en los sistemas de seguridad del vehículo, anticipándose a las situaciones de riesgo, y permitiendo a los sistemas de seguridad tomar el control antes, y por ello con más probabilidad de éxito. En este capítulo se hace una breve revisión del estado actual de la seguridad en vehículos, y su relación con la estimación del estado del vehículo (y de la interacción rueda-suelo) y la predicción de situaciones de riesgo.

2.1. Seguridad activa en vehículos automóviles

Los sistemas destinados a incrementar la seguridad en el automóvil pueden clasificarse de forma inicial en tres grandes grupos, atendiendo al instante en el que actúan:

Seguridad primaria o activa Comprende las características del vehículo que ayudan a *prevenir* accidentes. Los nuevos sistemas inteligentes de control de frenado y el ABS, el control de estabilidad, o los sistemas de suspensión controlada, por ejemplo, son sistemas básicos de seguridad activa.

Zona	Fuente	Concepto	Cambio	
Australia	Universidad de Monash (10/2007)	Accidentes de un solo vehículo	Turismos	-25 %
			SUV's	-51 %
			Total vehículos	-28 %
EEUU	IIHS (10/2004, 06/2006)	Totalidad de accidentes mortales	-43 %	
		Accidentes mortales de un solo vehículo	-56 %	
		Accidentes de un solo vehículo	-41 %	
	NHTSA (2006)	Totalidad de accidentes de un solo vehículo	Turismos	-34 %
			SUV's	-59 %
		Accidentes con vuelco	Turismos	-71 %
		SUV's	-84 %	
Europa	Daimler Chrysler (05/2004)	Accidentes de conducción	-42 %	
	Volkswagen (02/2004)	Fallecidos	-35 %	
		Accidentes por derrape	-80 %	
	DGT de Suecia (2002-2005)	Totalidad de accidentes	-22 %	
Accidentes graves y mortales de un solo vehículo		-44 %		
Japón	Toyota (05/2003)	Accidentes de un solo vehículo	-35 %	
		Accidentes de un solo vehículo graves	-50 %	
	NASVA (02/2005)	Accidentes de un solo vehículo	-44 %	
		Accidentes graves	-62 %	

Cuadro 2.1: Eficacia de los sistemas de seguridad activa en vehículos auto-móviles [24].

Seguridad secundaria o pasiva Es la capacidad del vehículo de proteger a sus ocupantes en caso de choque o vuelco. Ejemplos de seguridad pasiva son un habitáculo de pasajeros indeformable o las zonas de deformación programada.

seguridad terciaria Son los elementos que contribuyen a minimizar las consecuencias finales de las lesiones. El sistema de llamada de emergencia, el interruptor eléctrico que desconecta la batería en caso de colisión o el desbloqueo automático de las puertas son algunos ejemplos.

Los sistemas de seguridad terciaria actúan después de haberse producido un accidente, y palián los efectos del mismo. Los sistemas de seguridad secundaria actúan durante el instante del accidente y evitan, en la medida de lo posible, que los daños a los usuarios sean grandes. Los sistemas de seguridad primaria por último, son los que primero entran en acción, en el instante en el que se detecta que va a tener lugar un accidente, y pueden ayudar a prevenir que éste suceda. Los instantes anteriores a éste son los que interesan para el estudio que se pretende en este trabajo, de manera que se abordarán en éste, fundamentalmente, los sistemas de seguridad primaria o activa, y lo que sucede instantes antes de que se activen.

2.2. Estado actual de la seguridad activa

Los sistemas de seguridad activa aportan un alto valor añadido a los vehículos que los incorporan, de forma que los fabricantes utilizan estos sistemas como elementos diferenciadores, y reclamos de venta. Sin embargo, cabe plantearse si estos sistemas repercuten efectivamente en la mejora de la seguridad de los vehículos. Para evaluar la eficacia de estos sistemas, se dispone de los datos estadísticos de diferentes parámetros que numerosas instituciones gubernamentales, universidades y fabricantes han confeccionado a partir de datos de siniestralidad reales recabados en todo el mundo en los últimos años. En la tabla 2.1 en la página anterior se pueden comprobar los valores de algunos de estos parámetros. A la vista de estos valores, se considera suficientemente probada la eficacia de los sistemas de seguridad activa, y justificadas las inversiones en investigación en estos campos de conocimiento.

Debido a esto, desde instituciones gubernamentales de ámbito internacional se están redactando normas y reglamentos para exigir la incorporación de sistemas de seguridad activa en vehículos nuevos. Un ejemplo de este tipo de actuaciones es el reciente “Reglamento del Parlamento Europeo y del Consejo relativo a los requisitos de homologación de tipo referentes a la seguridad general de los vehículos de motor” [25]. La finalidad de este reglamento es

...aumentar la seguridad de los vehículos exigiendo la instalación obligatoria de algunas funciones de seguridad avanzadas. También se propone mejorar la eficacia medioambiental de los vehículos reduciendo el volumen de ruido de rodadura y de emisiones de CO_2 de los vehículos originado por los neumáticos.

En concreto, la Comisión Europea propone que, a partir de 2012, todos los vehículos nuevos vayan equipados con sistemas de control electrónico de la estabilidad (ESC), a fin de “mejorar drásticamente la seguridad”. Además, a partir de 2013, los camiones y otros vehículos pesados deberán dotarse de sistemas avanzados de frenado de emergencia (AEBS) y sistemas de advertencia de abandono del carril (LDW). En 2009 la Comisión ya propuso el equipamiento obligatorio de los turismos con sistemas de asistencia a la frenada (BAS) para proteger a los peatones. Se estima que estas medidas reducirán el número de víctimas mortales de tráfico en unas cinco mil al año [94].

Al mismo tiempo, la Comisión propone la introducción obligatoria en 2012 de neumáticos de baja resistencia a la rodadura, que ofrecen un ahorro considerable en el consumo de combustible y las emisiones de CO_2 y podrían, incluso, disminuir el ruido, al tiempo que mantienen un elevado nivel de seguridad. Se estima que estos neumáticos de baja resistencia a la rodadura reducirán hasta 7 gramos de CO_2 por kilómetro, contribuyendo así en gran medida a la estrategia de reducción de las emisiones de CO_2 de los vehículos, adoptada en febrero de 2007.

Otro ejemplo, desde el continente americano, es la normativa reciente de la NHTSA¹. Allí, los sistemas de Control de Estabilidad (ESC en su siglas en inglés) serán obligatorios en todos los vehículos que se fabriquen a partir de 2012. La medida, dada a conocer por la NHTSA, se aplicará a todos los vehículos de menos de 4.535 kilos (10.000 libras). Siendo los SUV² los vehículos con más probabilidades de volcar, en Estados Unidos un 90% de ellos ya incluyen el ESC, mientras que sólo el 40% de los automóviles modelo de 2007 vendidos en dicho país lo tienen incorporado. Aunque la incidencia de vuelcos es sólo de un 2% del total de accidentes, esta cifra representa el 40% de las víctimas fatales; por ello, se espera que equipar con sistemas de control de estabilidad a todos los vehículos permitiría reducir los vuelcos en un 84%, salvando con esto entre 5.300 y 10.300 vidas y previniendo entre 168.000 y 238.000 heridos graves por año. En cuanto a los vehículos, los vuelcos de SUVs bajarían en un 59% y los automóviles de pasajeros convencionales verían caer su tasa de accidentes en un 34% [2].

Los sistemas de seguridad activa, en fin, constituyen herramientas estratégicas de innovación y competitividad para sus fabricantes, y los avances conseguidos por sus equipos de investigación son tratados con celo y man-

¹NHTSA: “National Highway Traffic Safety Administration”.

²SUV: “Sport Utility Vehicle”.

tenidos en secreto. Esta es una de las razones por las que las publicaciones científicas que explican en detalle el funcionamiento de cada uno de estos sistemas comerciales son escasas, y también de que los fabricantes diseñan y evolucionan sus propios sistemas de forma independiente, de manera que la variedad actual es elevada, y el posible comprador se enfrenta a una difícil elección. En la tabla 2.2 en la página siguiente se expone un listado de los nombres que algunas instituciones y fabricantes dan a sus sistemas de seguridad activa, en la fecha actual. Ha de entenderse que este listado no es exhaustivo, y que cambia (se incrementa) continuamente.

En esta tabla se puede comprobar que prácticamente todos los fabricantes incorporan en sus vehículos el sistema de antibloqueo de frenos, y que lo denominan de la misma manera: ABS ³ (este sistema alivia la presión del freno sobre la rueda que se ha bloqueado, para desbloquearla⁴). Esto es así porque este sistema es el más antiguo de todos, el primero en aparecer en el mundo del automóvil, y del que se conoce su funcionamiento de forma más precisa. Pero es el único. Como se puede apreciar en la tabla, no existe ningún otro en el que todos los fabricantes se hayan puesto de acuerdo. Ni en el nombre que utilizan, ni en sus características. Esto podría indicar tres cosas: que son soluciones distintas, a las que se ha llegado a través de caminos e investigaciones independientes, que a los fabricantes les interesa diferenciar-se de sus competidores, o que el ámbito de los sistemas de seguridad activa está todavía en una fase de desarrollo y evolución.

En resumen, se puede decir que las soluciones alcanzadas en la actualidad no son las definitivas, que la investigación en estas materias es rentable porque supone una diferenciación de producto y un aporte de valor añadido al vehículo, y que es importante porque supone un incremento notable en el descenso de siniestralidad, y de pérdida de vidas humanas.

2.3. Situaciones de emergencia

Se ha señalado ya en el punto anterior que los sistemas de seguridad activa o primarios comienzan a actuar en el instante en el que se detecta que se va a producir un accidente. Las situaciones en las que se llega a estos instantes son las *situaciones de emergencia* a las que se enfrentan un conductor y su vehículo ante estímulos externos (obstáculos en la calzada, o cambio de la situación del tráfico o del firme) o internos (despistes, errores en la conducción, averías mecánicas, entre otros).

³El ABS (*Anti-lock Braking System*) fue desarrollado inicialmente para los aviones, en 1929, por el pionero de la aviación francesa *Gabriel Voisin*.

⁴El ABS comenzó siendo mecánico (Lincoln Continental MKIV *Cartier*, de 1974, Fiat Uno Turbo i.e. *Antiskid*, patente de 1985, o Ford Escort RS Turbo S2 de 1986, por nombrar algunos ejemplos), y controlando únicamente dos ruedas. Posteriormente evolucionó hacia la electrónica analógica, y finalmente a la digital, controlando las cuatro ruedas.

		Subsistema			
		Freno	Tracción	Estabilidad	Otros
Marcas	Alfa Romeo	ABS, HBA	ASR, MSR	VDC	
	Audi	ABS, EBV	EDS, ASR	YMC	
	BMW	ABS, CBC	ASC+T		
	Bosch	ABS	ASR	ESP	
	Cadillac	ABS			ICCS
	Citroën	ABS, REF, AFU	ASR	ESP	
	Fiat	ABS, EBD, HBA	ASR, MSR	ESP	
	Ferrari	ABS, EBD	ASR	CST	
	Ford	ABS, EBA, EBD		ESP	
	GM	ABS		Stabilitrak	
	Honda	ABS	SH-AWD		CMBS, ACC, AFS
	Mercedes	ABS, BAS	ASR, DTS	ESP	APS
	Mitsubishi	ABS	TCL	ASTC	
	Opel	ABS, DEFF		ESP	AFL, CDC, TPMS
	Peugeot	ABS, REF, AFU	ASR	ESP, CDC	AMVAR
	Porsche	ABS, ABD	ASR, PTM	PSM	APS
	Renault	ABS, SAFE		ESP	
	SAE	ABS, ACBS	ACTS		ACAS
	SEAT	ABS, EBA, EBD		ESP	EPS, DSR, AFS
	Toyota	ABS		VSC	ASV
Volvo	ABS	TRACS, DSA	STC		
VW	ABS	ASR, ETC, MSR	ESP, EDS	ACC, DCC	
Otras	HBA, Pre Safe, Distronic	TCS, ESC, DSC			

Cuadro 2.2: Listado no exhaustivo de algunos acrónimos de sistemas de seguridad activa.

Si no se actúa correctamente a los mandos del vehículo en estos instantes decisivos, es posible que estas situaciones de emergencia terminen en accidente. Es necesario actuar sobre el vehículo cuanto antes, y guiarlo de manera que sobre él actúen fuerzas que lo dirijan de nuevo a una situación segura. Estas fuerzas pueden actuar sobre el vehículo a través de su carrocería –fuerzas aerodinámicas– o desde el suelo, y a través de las ruedas –las reacciones del suelo–. De ambas, sólo las de interacción rueda-suelo son en cierta medida controlables por el usuario, y son por tanto las únicas de las que el conductor se puede valer para salir de la situación de emergencia.

Pero las fuerzas de interacción rueda-suelo están limitadas. Una situación de emergencia desembocará en un accidente cuando el vehículo no sea capaz de trazar la trayectoria que le exige el conductor. En esta situación las reacciones del suelo sobre las ruedas no serán suficientes para conseguir mantener al vehículo en la trayectoria deseada. Las interacciones rueda-suelo sólo se producen a través del contacto físico entre ambos. Si este contacto físico se degrada, las reacciones en el mismo serán menores de las esperadas, y el vehículo *derrapará*. Si el contacto físico entre dos o más ruedas del vehículo se degrada hasta el punto de desaparecer, debido tal vez a cargas dinámicas excesivas, es posible que el vehículo vuelque.

Es necesario, pues, conocer con precisión las variables que influyen en la interacción rueda-suelo. Y es fundamental conocerlas con precisión y en *tiempo real*. Ejemplos notables de estas variables son la carga vertical que soporta el neumático, las cargas laterales, el tipo de neumático, el estado de desgaste en el que se encuentra, su presión de inflado, el tipo de calzada, y el estado de la misma. El tipo y el estado del suelo y de desgaste de los neumáticos han de ser estimados en base a otros parámetros que puedan ser medidos más fácilmente. Las cargas que sufre el neumático, aunque de difícil lectura directa, pueden ser estimadas a partir de parámetros medibles a bordo del vehículo.

2.3.1. Interacción rueda-suelo

La rueda es el único elemento que une el vehículo al suelo, y que permite transmitir a éste las fuerzas que lo mueven y lo mantienen en la trayectoria deseada. Es fundamental conocer la interacción entre la rueda y el suelo para controlar adecuadamente el vehículo, pero esta interacción es extremadamente no lineal, y depende de un gran número de parámetros. Se han hecho diferentes aproximaciones para la obtención de un modelo de neumático aceptable. Son de destacar, entre otros:

- Modelo de *Fiala* (1964). Es un modelo sencillo. Supone una huella de contacto entre el neumático y el suelo de forma rectangular, y modela el neumático como un elemento rígido sobre un apoyo elástico [29].
- Modelo de *Dugoff* (1970). Se basa en el análisis de neumáticos en

rodadura libre. Contempla el comportamiento frente a esfuerzos longitudinales y transversales del neumático de manera simultánea [21].

- Modelo de Calspan (1976). Basado en la representación mediante expresiones polinómicas de curvas de datos obtenidas experimentalmente. Utiliza un total de 29 parámetros, además de una tabla de valores de fuerzas laterales frente a deslizamiento [19].
- Modelo de *Bakker, Nybor y Pacejka* (1989). Se basa en la descripción de los parámetros característicos de los neumáticos mediante el uso de funciones matemáticas. Aunque inicialmente se planteó el uso de series polinómicas y de Fourier, Bakker, Nybor y Pacejka optaron finalmente por el uso de funciones especiales, ajustadas a los datos obtenidos experimentalmente, y caracterizadas mediante constantes que representan valores característicos de los neumáticos [10].
- Modelo de la “Fórmula Mágica” de *Pacejka* (1994). Es, posiblemente, el modelo que más se aproxima a la realidad. Se trata de una evolución del anterior [67], [12] y [11].
- Modelo UA-Tire (Universidad de Arizona) (1988). Desarrollado por Nikravesh y Gim, incluye los efectos de la relajación longitudinal y lateral del neumático. Describe la interacción entre el suelo y el neumático en función de los estados cinemáticos de éste [34].
- Modelo “MF-Tire” (2001), desarrollado por la “Netherlands Organization for Applied Scientific Research (TNO Automotive)”. Es el principal modelo del programa ADAMS/Tire. Se basa en el utilizar la “Fórmula Mágica” de Pacejka para calcular el comportamiento cuasiestático del neumático. El neumático es considerado como un elemento visco elástico uniforme que se mueve sobre una superficie plana de la carretera.

Aunque es posible que existan modelos más elaborados, los que aquí se han expuesto son aptos para su tratamiento en tiempo real. Esta condición es necesaria cuando el modelo del neumático forma parte de un sistema de control. Los modelos más completos, por lo general, son demasiado complejos para ser resueltos en tiempo real, y esto da una idea de la complejidad de la interacción rueda-suelo. Sin embargo, no ha de olvidarse que es a través de esta interacción como el vehículo consigue mantenerse en la trayectoria correcta. Las fuerzas que controlan al vehículo llegan a éste a través de esta interacción, que se produce en la zona de contacto entre la rueda y el suelo. Debido a la condición viscoelástica del neumático, y a las cargas que soporta –fundamentalmente a la vertical–, el neumático se deforma en la zona de contacto con el suelo. La superficie de contacto entre la rueda y el suelo, que resulta de esta deformación, se denomina *huella de contacto*. Es en la superficie de la huella donde las características del compuesto elástico de

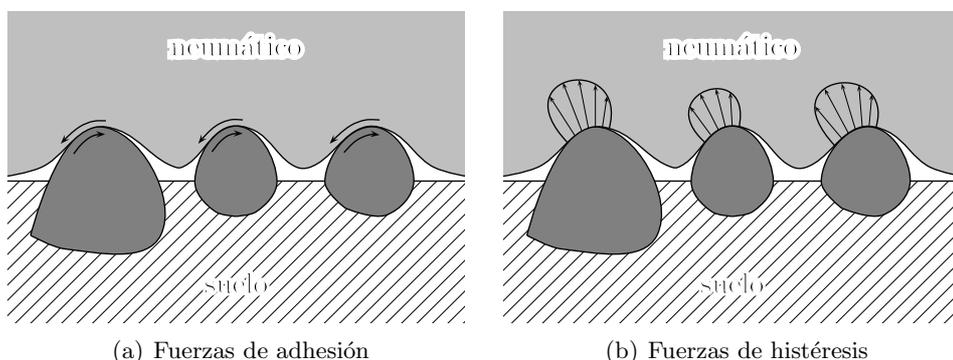


Figura 2.1: Fuerzas de interacción neumático-suelo.

la *banda de rodadura* del neumático interactúan con las irregularidades del suelo que pisan, y generan las fuerzas de reacción que mantienen al vehículo en su trayectoria.

En general, es habitual separar estas fuerzas en dos grupos. En la figura 2.1 se puede ver una representación esquemática de esta división.

Por una parte están las fuerzas que se originan debido al rozamiento entre ambas superficies. Este rozamiento depende, en gran medida, de la carga vertical sobre la superficie de contacto, y del estado de ambas superficies. Además, si ambas superficies se mueven o *deslizan* entre sí este rozamiento será de menor magnitud que si no hay deslizamiento. Este comportamiento de interacción basado en el rozamiento se suele modelar matemáticamente mediante los coeficientes de rozamiento estático y dinámico. Son las *fuerzas de adhesión*.

Por otra parte, las *fuerzas de histéresis* se generan debido al comportamiento del compuesto elástico de la banda de rodadura del neumático. Debido a las cargas verticales, las irregularidades del suelo deforman la banda de rodadura del neumático. Esta deformación absorbe energía, y aunque el comportamiento elástico del neumático recuperará su forma al desaparecer las cargas, esta recuperación no será inmediata. La superficie del neumático en la huella mantiene, durante unos instantes, un *efecto memoria* que permite a las irregularidades del suelo interactuar más directamente con el neumático, generándose así reacciones que se suman a las de adhesión.

No corresponde al alcance de este trabajo una descripción detallada de los modelos de neumáticos, ni de su interacción con el suelo; pero es preciso apuntar aquellos aspectos más importantes que influyen en el desarrollo posterior del mismo. Para ello, es habitual analizar las fuerzas que surgen en la interacción rueda-suelo separándolas en cada uno de los tres ejes x , y y z . Se han utilizado diferentes nomenclaturas y referencias para describir esta interacción. En la figura 2.2 se representa el sistema de referencia y la notación según la norma SAE J670e [75], que son de uso común en el estudio

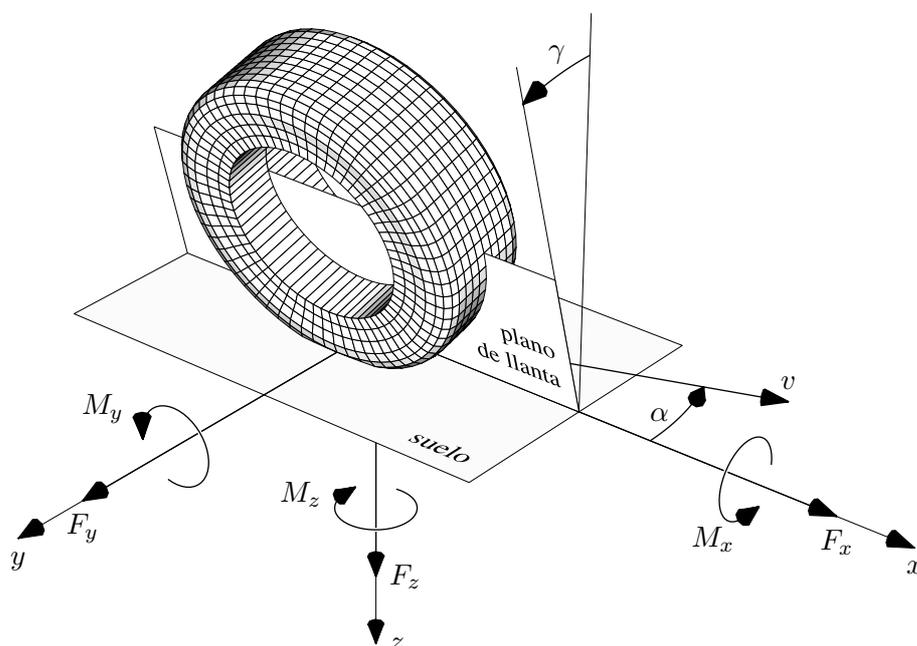


Figura 2.2: Sistema de referencia del neumático, según la norma SAE J670.

del neumático. En esta figura, v representa el vector de velocidad con el que la rueda se mueve realmente en el plano del suelo, y que en general no es paralelo a la llanta. El ángulo α que forma v con el eje x se llama *ángulo de deriva*. El ángulo γ , que forma el plano de la llanta con el eje z se llama *ángulo de caída* de la rueda. Además, en la figura se pueden apreciar las orientaciones y los sentidos de los momentos M_x , M_y y M_z , así como las fuerzas F_x , F_y y F_z según los tres ejes x , y y z .

Por coherencia con esta elección, también se ha utilizado la nomenclatura de la norma SAE J670 para la orientación de los ejes del sistema inercial solidario al chasis del vehículo. Este sistema se representa en la figura 2.3.

En lo que sigue se expone una breve descripción de los principales mecanismos de interacción entre la rueda y el suelo.

Fuerzas longitudinales

Por lo general, la rueda está sometida a cargas en la dirección del eje x , o cargas longitudinales. Estas cargas son consecuencia del par que se aplica a la rueda mediante los frenos o el motor, en aceleración o tracción, y deceleración o frenado. El neumático no es un elemento rígido, por lo que estas cargas lo deforman. Esta deformación, junto a la interacción tribológica entre la superficie del neumático y el suelo, hacen que la velocidad de avance del neumático en el eje x no se corresponda con la velocidad teórica que habría

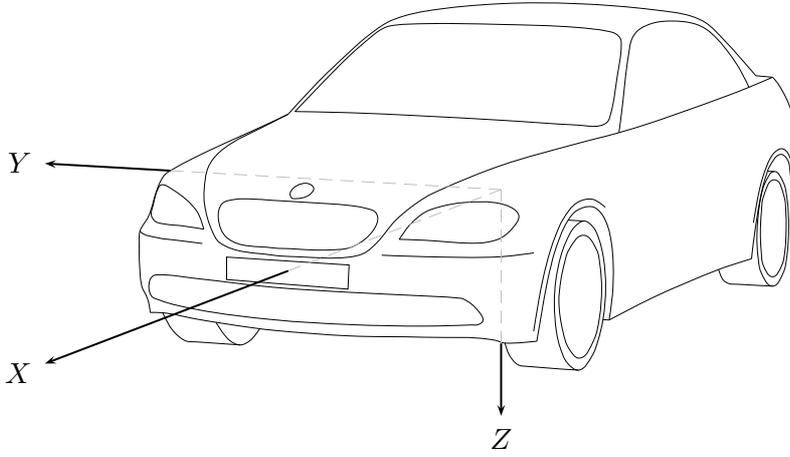


Figura 2.3: Sistema de coordenadas solidario al vehículo, según la norma SAE J670 [75].

de tener debido a su radio y a su velocidad de rotación. Así, se define la *relación de deslizamiento longitudinal* en tracción, S , como la relación entre la velocidad angular de la rueda en tracción, y la que tendría si no hubiese deslizamiento⁵:

$$S = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1 = \frac{\omega}{\frac{V}{R_l}} - 1 = \frac{\omega R_l}{V} - 1$$

donde:

- ω es la velocidad angular de la rueda traccionada,
- ω_0 es la velocidad angular de la rueda girando libremente,
- V es la velocidad de desplazamiento longitudinal del eje de la rueda, y
- R_l es el radio de la rueda bajo carga vertical (altura del eje respecto al suelo), en condiciones de rodadura libre.

⁵Nuevamente, según la SAE J670. Otros autores, como Wong [93], definen el valor del deslizamiento en tracción como la relación entre la velocidad de desplazamiento del eje de la rueda, V , y la velocidad teórica $r\omega$:

$$S_{tracción} = \frac{R_l\omega - V}{R_l\omega} = 1 - \frac{V}{R_l\omega} = 1 - \frac{R_e}{R_l}$$

siendo R_l el radio del neumático en condiciones de rodadura libre; R_e es el *radio efectivo* de la rueda en tracción: $R_e = V/\omega$.

Diferentes autores utilizan definiciones distintas para el deslizamiento longitudinal, todas ellas equivalentes en cuanto a su utilidad para describir el estado de esfuerzo longitudinal del neumático; SAE J670 [75], Calspan TIRF [19], Goodyear, Pacejka [66], Sakai [77] o Dugoff, Fancher y Segel [21] son algunos ejemplos típicos.

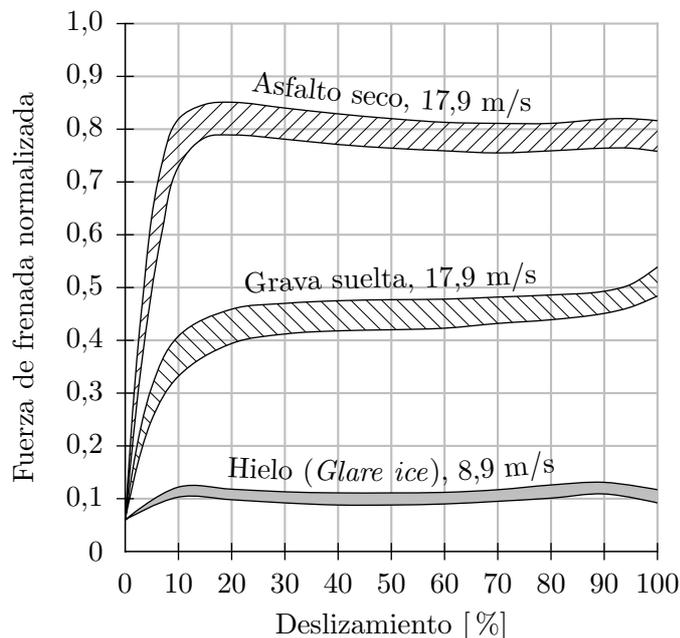


Figura 2.4: Variación del *esfuerzo de frenada* con el deslizamiento de un neumático de estructura diagonal 7.75-14, en varias superficies (SAE [35]).

El deslizamiento es un parámetro adimensional útil para indicar la cantidad de esfuerzo longitudinal que está sufriendo la rueda. Es habitual utilizar el deslizamiento como referencia para medir el esfuerzo longitudinal, de frenada o de tracción, al que se encuentra sometida la rueda. Un ejemplo se puede apreciar en la figura 2.4 (SAE [35]): en el eje de abscisas se presenta el deslizamiento, y en de ordenadas la fuerza de frenado normalizada, en tres estados diferentes del firme. La fuerza de frenado normalizada es la fuerza de frenado que soporta la rueda dividida por su valor de pico.

Aunque la interacción rueda-suelo depende de un gran número de factores, en este gráfico puede apreciarse que el estado del suelo es uno de los más importantes. Además se aprecia el cambio de comportamiento cuando el deslizamiento se acerca y sobrepasa el 10%. Inicialmente las tres presentan un comportamiento sensiblemente lineal. En esta fase el neumático rueda sin deslizar (tal vez sería más acertado decir que rueda sin *resbalar*), y la pendiente de cada una de las tres curvas está relacionada directamente con el coeficiente de rozamiento estático correspondiente. En torno al 12% se produce un *codo* en la curva, una zona de transición en la que el comportamiento del sistema rueda-suelo cambia progresivamente, para pasar, por lo general, a una zona con pendiente ligeramente negativa (en el caso de grava suelta, en la figura 2.4, esto no sucede). En esta situación toda la huella de contacto de la rueda *resbala* respecto al suelo, y el coeficiente de rozamiento predominante es el dinámico: el esfuerzo de frenada ya no aumenta aunque

lo haga el deslizamiento.

Es posible estimar en qué punto de la curva se encuentran las ruedas de un vehículo, y actuar sobre ellas en función de su estado. Esto, precisamente, es lo que hacen los sistemas ABS : cuando detectan que el deslizamiento crece en exceso, y se aproxima al codo de la curva, se libera presión sobre el sistema de frenos para permitir que el deslizamiento descienda. De esta manera se consigue mantener el deslizamiento en la zona en la que el esfuerzo de frenada es máximo, y con esto detener el vehículo en la menor distancia posible. Una situación similar pero en sentido inverso sucede con los sistemas de control de tracción. Las curvas en ese caso serían muy semejantes, aunque invertidas.

El comportamiento longitudinal del neumático, en resumen, es altamente no lineal, depende de las condiciones de un gran número de factores externos, y se comporta de dos maneras claramente diferenciadas a partir de un umbral que se encuentra alrededor del 12 % de deslizamiento. Como se verá a continuación, algo similar sucede con el comportamiento transversal.

Fuerzas transversales

De la misma forma que el *deslizamiento* caracteriza el estado de carga longitudinal en el que se encuentra el neumático, para los esfuerzos transversales se utiliza el *ángulo de deriva*.

Sobre el neumático pueden actuar fuerzas transversales, según el eje y , debidas a la fuerza centrífuga durante el trazado de una curva o a un firme inclinado, por ejemplo. En estos casos el neumático se deformará transversalmente debido a estas cargas y , si rueda, lo hará desplazándose respecto al suelo siguiendo una trayectoria que no es paralela a la llanta (normal al eje de la rueda), sino formando un ángulo α con ella, tal y como se muestra en la figura 2.2. Este es el *ángulo de deriva*.

Este comportamiento, debido a las características elásticas del neumático, no implica que el neumático resbale respecto al suelo. De hecho, para ángulos de deriva moderados, no habrá apenas deslizamiento entre las superficies de la rueda y el suelo en toda la huella de contacto. Si aumenta α , aparecerá deslizamiento en la parte trasera de la huella; si α sigue aumentando, el deslizamiento avanzará hacia la parte delantera de la huella, hasta que toda la huella deslice. A partir de ese punto el incremento de α no supondrá grandes diferencias en los esfuerzos transversales.

De forma similar a como se explicó en el punto anterior, es habitual representar gráficamente el esfuerzo transversal en el neumático frente al ángulo de deriva. En la figura 2.5 se puede ver una de estas representaciones a modo de ejemplo, para un neumático concreto. Este tipo de curvas depende, de la misma forma que en el caso longitudinal, de un gran número de parámetros que caracterizan la interacción rueda-suelo: estado del firme, estado del neumático, presión de inflado, tipo de neumático, carga vertical,

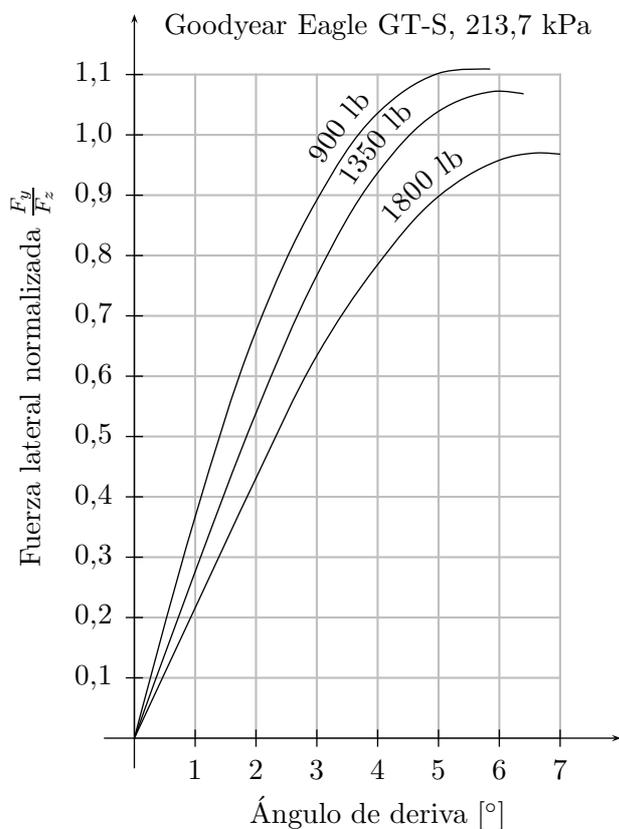


Figura 2.5: Variación de la fuerza lateral con el ángulo de deriva en un neumático sometido a diferentes cargas [58].

etcétera.

Pero, al igual que en el caso longitudinal, se puede apreciar un comportamiento por fases: una inicial de pendiente sensiblemente constante, en la que el esfuerzo transversal crece con el ángulo de deriva de forma predecible y constante, un codo en el que la pendiente disminuye rápidamente, y finalmente otra en la que el esfuerzo transversal ya no aumenta con el ángulo de deriva (no se muestra en la figura, pero se intuye como prolongación de las curvas).

En resumen, de nuevo, el comportamiento transversal del neumático es altamente no lineal, depende de un gran número de factores, y se comporta de diferente manera a partir de un umbral determinado del ángulo de deriva.

Comportamiento global del neumático

En general, será difícil que se produzcan solicitaciones longitudinales o transversales de forma aislada sobre la rueda; habitualmente se producirán ambas simultáneamente. La capacidad de responder a solicitaciones

longitudinales se verá mermada si al mismo tiempo aparecen solicitaciones transversales, y viceversa. Este hecho se comprende fácilmente si se tiene en cuenta que las cargas totales (longitudinales y transversales) soportadas por el neumático están limitadas por el producto del coeficiente de rozamiento estático y la carga vertical que soporta.

En la figura 2.6 se muestran representados, simultáneamente, los efectos de las fuerzas transversales y longitudinales combinadas (sólo en los cuadrantes 1 y 4; los otros dos serían simétricos). Esta figura pone de manifiesto que existe una zona circular dentro de la que se desarrollan los esfuerzos de rozamiento del neumático, limitada por el coeficiente de rozamiento estático en las condiciones del ensayo. Esta figura se conoce como *círculo de tracción*. En realidad, si se tiene en cuenta que el comportamiento del neumático no es idéntico en ambos ejes, este círculo se deforma en la *elipse de tracción*.

En la figura se muestran las líneas de esfuerzo longitudinal y transversal combinadas, para valores constantes de deriva y deslizamiento constantes. Está realizada tomando como base los resultados de los ensayos realizados por Sakai [77], y sólo sirve para el neumático utilizado en ese ensayo, y en las condiciones en las que fue realizado. Sin embargo, aunque los valores cambien de una situación a otra, las formas de las curvas son razonablemente similares. La idea que subyace, al fin, es la misma: existe una zona –el interior del círculo de tracción– en la que el neumático responde de forma predecible: la reacción es casi igual a la solicitación. Si se mantiene en esta zona, el conductor no tendrá dificultades en el guiado del vehículo. Fuera de esta zona las reacciones del par neumático-suelo ya no están relacionadas con las solicitaciones de una manera tan directa, y el control del vehículo cambia. Los codos de las curvas de las figuras 2.4 y 2.5 estarían en el interior, muy próximas al círculo.

2.3.2. Pérdida de adherencia y pérdida de control

A medida que aumentan las solicitaciones sobre el neumático, éste se deforma, y aumenta el ángulo de deriva y el deslizamiento; al mismo tiempo, debido a su interacción con el suelo, recibe de éste una fuerza de reacción que crece con las solicitaciones. El máximo valor de la fuerza de reacción se alcanza en las inmediaciones de la elipse de tracción. Cuando se sobrepasa ésta, el neumático pierde por completo la adherencia con el suelo, y *resbala* respecto a él. La fuerza de reacción que obtiene de éste disminuye, y permanece sensiblemente constante a partir de ese punto, de forma que aunque las solicitaciones sigan aumentando, la reacción no lo hará.

Paradójicamente, aunque esta reacción sea inferior al máximo posible, puede ser suficiente para mantener al vehículo en su trayectoria. Este hecho depende de multitud de factores externos, y es el que hace posible que el vehículo pueda mantenerse en la trayectoria prevista aún cuando sus cuatro ruedas estén fuera de sus correspondientes elipses de tracción. Esta circuns-

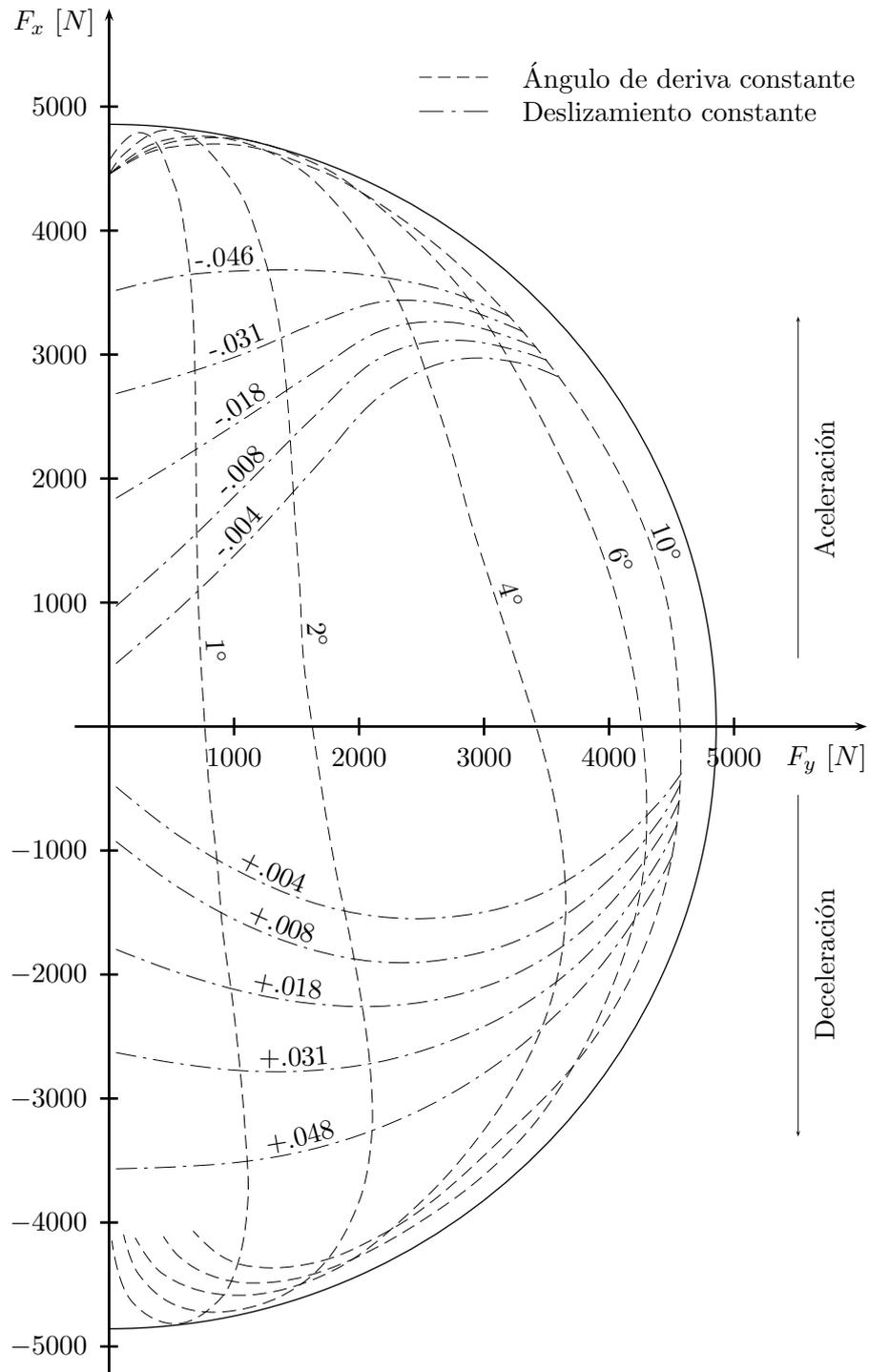


Figura 2.6: Círculo de Fricción. (Basado en datos experimentales de Sakai [58], para un neumático con una carga de 3,93 kN, presión de inflado de 207 kPa y rodando a 5,54 m/s).

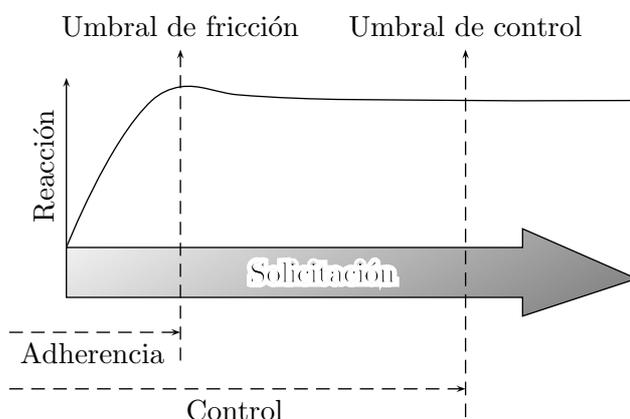


Figura 2.7: Umbrales de fricción y de control.

tancia se aprovecha en los vehículos de competición, y permite trazar las curvas a mayor velocidad.

Rebasar la elipse de fricción, desde el punto de vista del control del vehículo, conduce a un escenario completamente diferente. Mientras sollicitaciones y reacciones se encuentran en el interior de la elipse, la interacción neumático-suelo es tal que permite obtener del suelo una reacción igual y contraria a las sollicitaciones que el vehículo ejerce sobre la rueda. Esto significa, como se ha visto, que se obtendrá una fuerza longitudinal que será sensiblemente proporcional al deslizamiento del neumático, y otra transversal proporcional al ángulo de deriva. Pero una vez que se rebasa la elipse de fricción la reacción del suelo ya depende tan linealmente del ángulo de deriva ni del deslizamiento. La reacción tendrá la dirección de la sollicitación global sobre el neumático, módulo constante (independiente del de la sollicitación) y será función de las características –en ese instante– del suelo, el neumático y la carga vertical que soporta.

El hecho de que la reacción obtenida fuera de la elipse no sea proporcional al ángulo de deriva ni al deslizamiento del neumático hacen que la dirección y los frenos (o el motor) del vehículo dejen de ser útiles, al menos de la forma en la que se utilizan durante la conducción normal. Si la fuerza de reacción fuera de la elipse de fricción es de suficiente magnitud, es posible que todavía se pueda controlar el vehículo en esas circunstancias, pero para efectuar este control será necesario utilizar técnicas de conducción especiales, y diferentes a las habituales.

Si se aumentan aún más las sollicitaciones sobre el neumático, llegará un instante en el que ya no será posible controlar el vehículo, y guiarlo por la trayectoria deseada. Por tanto, se pueden distinguir tres estados de la interacción rueda-suelo, en función de las sollicitaciones a las que se le somete, y de las características de la rueda y el suelo. Estos tres estados están separados entre sí por dos *umbrales*: el *umbral de fricción* (en las

inmediaciones de la elipse de fricción) y el *umbral de control*, tal y como se muestra en la figura 2.7.

Un conductor experimentado será capaz de controlar el vehículo en la zona intermedia, una vez rebasada la elipse de fricción, pero con reacciones rueda-suelo todavía suficientes; un conductor medio probablemente no. La diferencia entre ambos está en sus habilidades y experiencia. Es posible formular algunas de estas habilidades y experiencias, e implementarlas en algoritmos de control. Algoritmos de este tipo se encuentran en los actuales sistemas de seguridad activa. Sin embargo, hay determinadas habilidades que no son tan sencillas de emular, como por ejemplo el hecho de que un piloto experto es capaz de *prever* lo que sucederá a continuación, basándose en la información que recibe a través de sus sentidos (lo que ve por sus ojos, las aceleraciones que siente, la fuerza que nota en el volante o los sonidos que percibe del motor y las ruedas, entre otros). Esta predicción es fundamental para colocar al vehículo de forma ventajosa para poder controlarlo en el futuro inmediato. Sin esta predicción no será posible avanzar en la emulación de las habilidades del conductor experto, y por tanto en el control del vehículo.

2.3.3. Predicción de situaciones de emergencia

En efecto, el conductor utiliza eficazmente sus sentidos para percibir el entorno. La vista es el sentido que más información aporta. Con ella se puede obtener información del estado del firme, el tráfico circundante, los peatones o las señales de tráfico. También se obtiene información del estado del propio vehículo a través de la lectura de los instrumentos de su salpicadero. Del oído se puede obtener información valiosa a cerca de las revoluciones del motor, el viento en la carrocería o las aceleraciones y velocidades de rotación del vehículo⁶. En fin, se sienten las aceleraciones que sufre el vehículo, y la reacción del sistema de la dirección a través de la fuerza necesaria para accionar el volante.

Algunas de estas habilidades de nuestros sentidos pueden ser emuladas mediante sensores, y se hace así en buena parte de los sistemas de seguridad activa: sensores inductivos en las ruedas y el motor para medir las revoluciones y la velocidad, *rate-gyros* que emulan el comportamiento de los conductos semicirculares del oído interno y devuelven información a cerca de la velocidad de rotación en cada eje, o acelerómetros que miden la aceleración longitudinal en cada eje, por citar algún ejemplo típico. Otros sensores

⁶El sentido del equilibrio se localiza en los tres *canales semicirculares*, situados en el *oído interno* y formando entre sí aproximadamente 90°. En su interior se encuentra un líquido (*endolinfa*) que se mueve al girar la cabeza, y que permite captar este movimiento mediante unas inervaciones con forma de proyecciones finas (*células pilosas*) y transformarlo en información útil, y transmitirlo al cerebro a través del nervio auditivo para su posterior procesado en el cerebro.

efectúan tareas para las que nuestros sentidos no están capacitados: el GPS, el radar o los sensores de ultrasonidos, por ejemplo. Por último, hay información que no puede ser medida directamente, ni mediante los sentidos, ni utilizando sensores artificiales. En el caso del conductor esta información es obtenida en el cerebro, mediante la adecuada combinación de todas las demás. Esta forma de proceder se puede obtener artificialmente mediante *algoritmos* en el interior de computadores específicamente diseñados y programados para estas tareas.

El conductor es capaz de obtener información esencial a cerca del futuro inmediato: la próxima curva en la carretera, la aparición inesperada de un animal en la calzada o la maniobra que está a punto de realizar el conductor que le precede, y que estima mediante sus luces traseras. Esta predicción supone un procesado complejo de las múltiples señales que percibe a través de sus sentidos, y sucede en tiempo real. El hecho de tener una estimación fiable del futuro inmediato le pone en condiciones óptimas para preparar el vehículo, y controlarlo con éxito⁷.

De las informaciones recibidas a través de los sentidos, la de la vista requiere un tratamiento especial, mediante cámaras y técnicas de análisis de imágenes y de visión artificial, que escapan al ámbito de éste trabajo, y que no serán tenidas en cuenta. Aún así, la información de las restantes señales es suficiente para hacer una predicción más limitada. Su tratamiento, con la intención de obtener de ellas la situación dinámica actual del vehículo, así como una estimación a corto plazo de la misma, se abordará en los capítulos sucesivos.

Si se conociese de antemano que se va a producir una situación de riesgo, sería posible aprovechar esta predicción para adoptar la estrategia de control más conveniente y evitar el accidente en lo posible, o minimizar los daños en su defecto.

En el apartado anterior se ha puesto de manifiesto la complejidad de la interacción rueda-suelo, y también se ha realizado una breve revisión de la evolución de los modelos de neumático, dejando entrever que no se dispone de uno lo suficientemente completo y preciso para ser utilizado en tiempo real en el seno de un sistema de control del vehículo. Este hecho está determinado por el gran número de parámetros que influyen en el comportamiento del neumático y su interacción con el suelo, y también por su comportamiento altamente no lineal.

Pero este mismo problema aparece cuando se intenta modelar con precisión el comportamiento cinemático y dinámico del resto del vehículo. Los

⁷Un caso extremo de este hecho se produce en las competiciones de velocidad en las que el copiloto informa al piloto de las condiciones que se encontrará más adelante, que sus sentidos no pueden percibir todavía, y que han sido anotadas previamente; junto con estas predicciones, el copiloto también indica algunos parámetros para llegar de forma óptima a estas situaciones. Esta estrategia permite al equipo coche-piloto-copiloto recorrer el trazado a una velocidad muy superior a la habitual.

“bushings”, la flexibilidad de los componentes de los mecanismos, las holguras o los topes mecánicos, entre otros, hacen que sea difícil realizar un modelo matemático suficientemente extenso y preciso, y que al mismo tiempo pueda ser resuelto en tiempo real en el seno de un algoritmo de control. Cuanta más estabilidad, precisión, exactitud, repetibilidad o resolución se persigan, más complejo y lento será, por lo general, un algoritmo de este tipo.

Por otra parte, aún cuando se consigan modelos suficientemente precisos y rápidos, estarán contaminados por las simplificaciones que se hayan asumido en su realización, o por los errores numéricos que se puedan cometer en su resolución. Estos modelos realizan sus estimaciones en base a los datos obtenidos de los sensores y estos están, también, contaminados por ruidos de diversa procedencia. Ambos factores —errores en los datos de los sensores y en el modelo— hacen de la estimación una tarea complicada.

Capítulo 3

Objetivos y metodología

Como se ha razonado ya en el capítulo 1, el objetivo principal de este trabajo es desarrollar un método para estimar el estado del vehículo con precisión suficiente, de manera que pueda ser empleado en algoritmos de control que lo utilicen en su lógica de actuación, para la predicción de las condiciones de pérdida de control.

El método que se seguirá para alcanzar este objetivo comprenderá el desarrollo de una plataforma adecuada, basada en un vehículo, la determinación del tipo de sensores adecuados para captar su estado cinemático y dinámico en tiempo real, la creación de algoritmos adecuados para tratar los datos obtenidos de estos sensores y estimar el estado del vehículo, y la elección y ejecución de los mecanismos necesarios para controlar el vehículo durante las maniobras, y permitir que éstas puedan ser ejecutadas de forma controlada y repetible.

Se exponen a continuación estos objetivos con más detalle, y la metodología que se seguirá para alcanzarlos.

3.1. Objetivos

En este trabajo se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

1. Desarrollar nuevos métodos de estimación del estado del vehículo a partir de los datos obtenidos, que mejoren a los actuales en la estimación en sistemas altamente no lineales.

Para alcanzar este objetivo principal serán necesarios, también, los siguientes:

2. Definir y probar una plataforma experimental basada en un vehículo, con la que se puedan ejecutar de forma repetida determinadas maniobras, en diversas condiciones, de modo que permita estudiar las diferentes reacciones del vehículo en las circunstancias que rodean la pérdida de adherencia y de control,

3. establecer sobre esta plataforma los sistemas de sensorización y adquisición de datos, con las características de velocidad, resolución y sensibilidad adecuados, de forma que permitan adquirir un conjunto de datos representativo del estado cinemático y dinámico del vehículo, en tiempo real y en las condiciones en las que se realizarán las maniobras,
4. establecer y desarrollar los mecanismos y estrategias de control necesarias que permitan ejecutar maniobras concretas de forma repetible y precisa, con la finalidad de ejecutar estas maniobras en diferentes circunstancias, y obtener de ellas datos que permitan caracterizar las condiciones en las que se produce pérdida de adherencia o de control,
5. realizar un sistema de trasvase de información que permita recibir los datos capturados en las maniobras, y enviar los comandos para controlar el vehículo, en tiempo real y con la precisión y velocidad necesarias, entre una estación remota y el vehículo,
6. calibrar y validar la estructura sensorial para verificar que se adapta a los requerimientos fijados.

3.2. Metodología

Para conseguir estos objetivos se proponen los siguientes pasos metodológicos:

1. Es necesario establecer cuáles son las variables y los parámetros que deben ser conocidos, y por tanto han de ser medidos, para poder estudiar lo que sucede en las fronteras de pérdida de control y adherencia.
2. Conociendo qué parámetros se precisan, será necesario establecer las condiciones en las que serán efectuadas las maniobras por el vehículo, y sus limitaciones y exigencias.
3. A continuación se diseñará y desarrollará un sistema completo que permita controlar el vehículo para realizar las maniobras, y obtener las lecturas de las variables, y que cumpla las condiciones exigidas. Este sistema permitirá ejecutar de forma automática diferentes tipos de maniobras, actuando posiblemente sobre todos los subsistemas del automóvil. Un control de este tipo permitirá, en el futuro, el ensayo de nuevas estrategias de control.

Como se ha mencionado ya, sólo son directamente medibles mediante el uso directo de *sensores* algunas variables del vehículo. Es probable que se necesite obtener el valor de algunas variables o algún parámetro para los que no sea posible utilizar un método de medida directo. Habrá, pues, que

desarrollar algoritmos numéricos que permitan *estimar* estos valores a partir de los que sí se pueden adquirir directamente. Por tanto, continuando con la secuencia metodológica:

4. Los datos obtenidos serán objeto de un tratamiento numérico que permita obtener las magnitudes representativas del problema, eliminando los ruidos que contaminan a las medidas y estimando aquellos valores que no son necesarios, pero que no se pueden medir directamente.

Capítulo 4

Sensorización de posición y movimiento: estado del arte

4.1. Introducción

En capítulos anteriores se ha establecido la necesidad de obtener la situación cinemática y dinámica del vehículo, con la intención de alcanzar una posición de ventaja a la hora de controlarlo con mayor eficiencia. A la captura del movimiento de un objeto en el espacio se le denomina habitualmente *Motion capture*, *motion tracking*, o *MoCap*. A los sistemas que realizan este seguimiento se les conoce como *trackers*. En este trabajo este tipo de sistemas se van a denominar “seguidores”, y la acción de la captura del movimiento “seguimiento”.

En este capítulo se presentan algunas de las tecnologías utilizadas para el seguimiento de la orientación y posición en diferentes ámbitos, publicadas hasta la fecha. Aunque esta descripción no pretende ser exhaustiva, sí persigue mostrar las ventajas de cada uno de estos sistemas, y exponer sus inconvenientes para poder abordar adecuadamente la elección del más adecuado para el propósito que se persigue en este trabajo. Diferentes autores abordan el estudio de los sistemas de seguimiento, clasificándolos en base a criterios distintos. Como ejemplo significativo, Priyantha [71] aborda la clasificación en función de si están dirigidos para exterior (habitualmente para navegación: *SONAR*, *VOR*, *LORAN*, *RADAR*, *GPS*, etc.), para interior (habitualmente para registrar movimientos y posiciones de humanos: *RADAR*, *Active Bat*, *Active Badge*, *HiBall*, etc.) o para localización de nodos. En este trabajo, sin embargo, se ha optado por una clasificación basada en los principios físicos que se utilizan en cada caso.

El objetivo de este capítulo será, por tanto, hacer una revisión de las tecnologías disponibles con la intención de establecer los criterios que permitirán elegir y diseñar el *sistema de seguimiento* más apropiado. La estimación de los datos cinemáticos y dinámicos del vehículo, obtenidos de este

sistema de seguimiento en tiempo real, podrán ser utilizados posteriormente para controlar el vehículo.

4.2. Tecnologías de adquisición de movimiento

Si se ojean las diferentes revisiones de sistemas de captura de movimiento (en la bibliografía de este trabajo se presentan, a modo de ejemplo, algunas de las que han sido consultadas: [57] (1992), [73] (1998), [13] (2001), [31] (2002), [90] (2002), [71] (2005), [95] (2006)) llama la atención inmediatamente el elevado número de tecnologías diversas, basadas en un gran número de propiedades físicas diferentes, y utilizadas con criterios y soluciones distintos. Cada una de las soluciones presenta características diferentes, con distintas ventajas e inconvenientes. Cada una de ellas ha sido diseñada para una aplicación diferente. Así que la pregunta que surge lógicamente es ¿por qué son necesarios tantos productos diferentes para seguimiento, para hacer esencialmente la misma cosa? La respuesta más probable es que ninguna de las tecnologías de las que se dispone actualmente resuelve todos los problemas en todas las situaciones, así que cada una de las tecnologías será apta solamente para alguna aplicación concreta.

Los sistemas comerciales actuales están basados en fuentes ópticas, magnéticas o acústicas. Los sensores inerciales han sido utilizados para el seguimiento de la posición en diferentes aplicaciones¹. El posicionado mediante señales de radiofrecuencia promete, pero no existen sistemas comerciales en gran escala para aplicaciones de interior o de alcance medio-corto².

Pero, incluso más allá de las diferentes propiedades físicas que se utilicen, o de los sensores escogidos y su disposición (el *hardware* del sistema de seguimiento), existen diferentes aproximaciones a los algoritmos con los que se procesan los datos de los sensores y se obtiene la estimación del movimiento pretendida (el *software*). A modo de ejemplo puede tomarse la prospección de métodos de seguimiento que hacen Yilmaz et al. [95]. En su trabajo, dirigido al ámbito de la captura de movimiento de seres humanos mediante imágenes adquiridas con cámaras, las soluciones presentadas son diferentes sólo por el tratamiento que se hace en ellas con las señales de los sensores (las cámaras). El *hardware* es esencialmente el mismo en todas ellas.

¹En su afán por demostrar la velocidad de rotación de la tierra, *León Foucault* diseñó y fabricó el péndulo que lleva su nombre, y posteriormente, en 1852, el *giróscopo* o *giroscopio*. Desde entonces este dispositivo ha sido utilizado en *girocompases* y *giropilotos*, para la ayuda a la navegación en navíos, aeronaves o misiles, para disminuir el balanceo de navíos, para estabilizar plataformas de tiro o plataformas inerciales sobre las que se fijan sensores de aceleración lineal, entre otras.

²Recientemente han aparecido algunos sistemas como el *cricket*, un sistema con tecnología híbrida radiofrecuencia-ultrasonidos destinado al seguimiento de objetos en interior [71]. Todavía no está adaptado al uso en exteriores. Este tipo de sistemas híbridos serán tratados más adelante con algo más de detalle.

Aunque podría pensarse que los sistemas de captura de movimiento están orientados fundamentalmente al ámbito de la navegación y los vehículos en general, la realidad es que los esfuerzos en investigación en este campo están dirigidos mayoritariamente al ámbito de la captura del movimiento de humanos. Se utiliza, por ejemplo, para capturar el movimiento de la mano del cirujano, y guiar robots que asisten en operaciones, para capturar el movimiento de la cabeza de un usuario y en base a ello presentarle información visual en “realidad aumentada” (*augmented reality*), para capturar el movimiento de actores, y con ellos generar personajes virtuales creíbles (las películas de animación actuales utilizan esta tecnología), o capturar el movimiento de deportistas de élite para su análisis posterior, con el afán de conseguir mejores marcas, o para la inmersión de soldados en entornos virtuales, con realidad aumentada, de forma que dispongan de información visual sintética, añadida a la real, a cerca de su entorno y su evolución o, en fin, para la inmersión del usuario en los nuevos juegos de realidad virtual en ordenadores. Las aplicaciones útiles de la captura de movimientos del ser humano son tantas, que muchas de las referencias que se mencionarán en este capítulo provienen de este ámbito.

Antes de afrontar el análisis de estas tecnologías de seguimiento, es necesario establecer dos ámbitos de criterios que ha de verificar la solución adoptada finalmente. Primero, de modo cualitativo, es necesario establecer la adecuación de cada una de estas tecnologías para el propósito que se persigue en este trabajo, en base a unas características concretas; estas características se recogen en el “marco de adecuación”. Segundo, es necesario determinar, cuantitativamente, las características técnicas mínimas que debería tener el sistema de seguimiento buscado, basadas en la dinámica del movimiento del vehículo que se vaya a utilizar, y en las condiciones específicas de las maniobras a las que será sometido. Estos valores límite se analizarán en las “especificaciones del sistema de seguimiento”.

4.2.1. Marco de adecuación del sistema de seguimiento

Para clasificar y categorizar las fortalezas y debilidades de las diferentes tecnologías disponibles para realizar el seguimiento de sistemas dinámicos (en este caso, el vehículo), se han propuesto diferentes estándares ([57], [22], [3]). En este caso se utilizará el conjunto de parámetros, basados en los trabajos mencionados, que se describen a continuación:

- RESOLUCIÓN (*resolution*). Es el cambio más pequeño que un sistema puede detectar en un parámetro. Una resolución pobre permitirá que la posición y orientación del vehículo cambien sin que este cambio sea detectado. Es necesario que la resolución del sistema de adquisición utilizado sea suficientemente *fina* para garantizar que los movimientos del vehículo serán detectados con suficiente detalle.

- EXACTITUD (*accuracy*) Se refiere a la proximidad del valor medido respecto al real. En términos estadísticos, la exactitud está relacionada con el sesgo de la estimación hecha a partir de varias mediciones. Cuanto menor es el sesgo más exacta es una estimación.
- PRECISIÓN (*precision*) Se refiere a la dispersión del conjunto de valores obtenidos de mediciones repetidas de una magnitud. Cuanto menor es la dispersión mayor es la precisión. Precisión y exactitud están relacionados, pero son diferentes. Un sistema de medida puede ser exacto pero poco preciso, o poco preciso pero exacto, por ejemplo.
- REPETIBILIDAD (*repeatability*) Es la habilidad de un sistema de medida de obtener la misma lectura independientemente de las condiciones en las que el sistema físico ha llegado a ese estado. En el caso de la lectura de la posición de un vehículo, por ejemplo, la repetibilidad se refiere a la capacidad del sistema de seguimiento de devolver la misma lectura para una posición dada, sin importar cómo ha llegado el vehículo a esa posición. Habitualmente la repetibilidad en el posicionado en sistemas mecánicos está íntimamente relacionada con la histéresis y con las holguras.
- LINEALIDAD (*registration*). Es una medida de la correspondencia entre la posición y orientación (del vehículo, en este caso) obtenida mediante el sistema de seguimiento, y la posición y orientación reales. La falta de linealidad en el sistema de seguimiento, o factores de escalado incorrectos dificultarán una correcta estimación.
- VELOCIDAD DE RESPUESTA (*responsiveness*). Está determinada por factores tales como el período de muestreo de las magnitudes físicas que se miden, la velocidad y frecuencia con la que se envían estos datos adquiridos a la central de procesado, y la velocidad con la que estos datos se procesan en cada iteración. Está intrínsecamente relacionada con el retardo del sistema de adquisición, que se puede definir como el retraso entre el movimiento del objeto que se pretende seguir (el vehículo, en este caso) y la correspondiente actualización de los valores de las variables que señalan ese movimiento en el sistema de procesado de los datos. Un retardo apenas imperceptible para un usuario humano puede, aún así, degradar la correlación entre el modelo y la realidad.
- ROBUSTEZ (*robustness*). Mide la susceptibilidad del sistema de seguimiento ante ruidos externos del entorno. En un sistema con baja tolerancia a ruidos del entorno, se pueden presentar errores extremos en el seguimiento de la posición y orientación. La inconsistencia en estos errores puede hacer muy difícil, sino imposible, su corrección mediante filtros, tanto en el *hardware* de adquisición de datos como en el *software* de procesado posterior.

- **VOLUMEN DE TRABAJO.** En función del tamaño final del vehículo, de las velocidades y del tipo de maniobras que se desarrollarán en los ensayos, será necesario seguir el movimiento del vehículo en volúmenes de diferente tamaño. Este es un parámetro fundamental en la selección de la tecnología adecuada para el seguimiento, porque algunos de los principios físicos que se utilizan para seguimiento dependen en gran medida de la distancia.

Otros parámetros que influyen en la selección final del sistema de seguimiento no aparecen en este listado porque no son parámetros técnicos, sino que provienen de condicionantes tales como el tamaño final del *hardware* del sistema desarrollado, su peso (para que pueda ser utilizado en un vehículo de pequeño tamaño), su coste, su facilidad de desarrollo, el tipo de ensayos que se realizarán, etc.

4.2.2. Especificaciones del sistema de seguimiento

Para determinar los requisitos mínimos para realizar un seguimiento adecuado del estado cinemático y dinámico del vehículo será necesario analizar las velocidades, fuerzas y aceleraciones que pueden alcanzar las diferentes partes del vehículo, durante las maniobras a las que será sometido.

Hay que tener en cuenta que se parte de una situación inicial en la que no existen ni el sistema de seguimiento ni el vehículo en sí, ni los algoritmos de estimación. Todas estas partes serán diseñadas simultáneamente, puesto que están íntimamente relacionadas entre sí, y variaciones en una afectan fuertemente a las demás. Por lo tanto, en esta sección sólo se podrán hacer estimaciones a cerca del alcance de cada uno de los parámetros que necesita verificar el sistema de seguimiento.

En cuanto a los desplazamientos verticales del chasis del vehículo, se puede asumir que la aceleración vertical del chasis no superará 1 g, independientemente del tipo de vehículo automóvil que se utilice, a lo que habrá que sumar la aceleración, medida en los sensores, debida a la gravedad. Las aceleraciones horizontales, en los ejes X e Y, tampoco serán muy superiores a ± 1 g, ya que estas aceleraciones se obtienen como consecuencia de las fuerzas de histéresis y fricción sobre los neumáticos, a través de la interacción rueda-suelo; estas fuerzas están limitadas, como se ha visto en el capítulo 2, a los valores en la frontera del *círculo de fricción*, y son consecuencia del producto de la carga vertical que soporta el neumático por el coeficiente de rozamiento estático, y por tanto no podrán ser muy superiores a 1 g. En definitiva, será suficiente garantizar que el sistema de seguimiento recoja las aceleraciones del vehículo en el intervalo ± 2 g. Las velocidades lineales, en todo caso, estarán por debajo de $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (algo más de $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$).

En cuanto a las velocidades angulares, no se espera que sean superiores en módulo a $5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, algo menos que una revolución por segundo.

Es posible que en determinadas circunstancias se alcancen valores de velocidad o aceleración puntuales, lineales o angulares, muy superiores a los aquí señalados. Un ejemplo podría ser el caso en el que el vehículo vuelca a gran velocidad. Los impactos del mismo contra el suelo producirán velocidades y aceleraciones superiores a las aquí mencionadas. Pero en este tipo de situaciones ya no es necesario, para los ensayos que se pretende realizar, un seguimiento de la situación dinámica y cinemática del vehículo: ya es demasiado tarde. No hay que olvidar que el propósito de este sistema es observar lo que sucede en las inmediaciones de la pérdida de adherencia y de control.

Por todo ello, no se esperan frecuencias en los cambios en la velocidad o la posición, lineales o angulares, en cualquiera de los tres ejes del chasis, que excedan los 5 Hz. Una frecuencia de muestreo de los sensores de 10 Hz sería suficiente para satisfacer los mínimos que se requieren según el *Teorema de Nyquist*³. Sin embargo, en aplicaciones como ésta en la que se utilizan sensores que son susceptibles al ruido (con componentes de frecuencias superiores), una norma general indica que se debe muestrear con una frecuencia 20 veces superior. Esta información suplementaria será utilizada con provecho por los algoritmos de estimación. Por tanto, suponiendo como se ha dicho un ancho de banda de 5 Hz, se requerirá una frecuencia de muestreo de 100 Hz.

En lo que respecta al retraso que se producirá entre la realidad y la estimación tras las diferentes fases por las que pasará el proceso, es difícil estimar a priori cuáles serán las partes del mismo que influirán más notablemente en el total del retraso, pero es de esperar que la transmisión en el tiempo de cada muestra ocupe menos que el período de muestreo, $\frac{1}{100 \text{ Hz}} = 10 \text{ ms}$, y que los algoritmos numéricos que se utilicen posteriormente para estimar los datos deseados a partir de los transmitidos, puedan llegar a funcionar en tiempo real (aunque este no es un objetivo de este trabajo), es decir, que sean más rápidos que 10 ms por muestra. En definitiva, se puede esperar que el retraso total del sistema adquisición-transmisión-estimación sea inferior a 20 ms.

4.2.3. Seguidores mecánicos

Los sistemas de seguimiento mecánicos son, quizás, la tecnología más antigua de seguimiento del movimiento [82]. Proporcionan el mejor medio de suministrar realimentación háptica a un posible usuario, y por eso han sido utilizadas con profusión en la creación de entornos virtuales con los que

³El teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, también conocido como teorema de muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, criterio de Nyquist o teorema de Nyquist, es un teorema fundamental de la teoría de la información, de especial interés en las telecomunicaciones. Establece que para poder reconstruir una señal (periódica, continua y con ancho de banda limitado) sin pérdida de información es necesario que el muestreo de la misma se efectúe al menos al doble de su frecuencia superior.



(a) Exoesqueleto parcial de una mano

(b) Exoesqueleto de cuerpo entero *Animazoo-6*.

Figura 4.1: Seguidores mecánicos no inerciales.

el usuario puede interactuar. Son sistemas de seguimiento de posición y orientación bastante precisos, y tienen poca latencia (retraso). Actualmente se utilizan para medir la bondad y para calibrar otros sistemas de seguimiento [51]. Los seguidores mecánicos pueden ser divididos en dos categorías, que en este trabajo se denominarán *inerciales* y *no inerciales*.

Los seguidores no inerciales utilizan un *exoesqueleto* adaptado al objeto del que se pretende obtener su posición y velocidad. Sensores de la posición de cada una de las articulaciones de este exoesqueleto proporcionan una forma de averiguar, con un tratamiento numérico posterior, la información que se pretende. Este tipo de seguidores necesitan un equipamiento de apoyo externo, con el que se complementa y que, habitualmente, es el que recibe toda la información de los sensores y hace el pertinente tratamiento numérico. En la figura 4.1 se muestran un par de ejemplos de este tipo de seguidores, uno parcial, para seguir el movimiento de una mano, y el otro total.

Las articulaciones de este tipo de exoesqueletos están próximas pero no coinciden espacialmente con aquellas del sistema al que están midiendo. Además, las articulaciones del sistema que se pretende medir no tienen, a veces, un comportamiento perfectamente definido (sirva como ejemplo las juntas elásticas o *bushings* que unen entre sí y al chasis los diferentes elementos de la suspensión de un vehículo). Por tanto, este tipo de seguidores mecánicos adolece de una excesiva complejidad en el modelado de su comportamiento, si se pretende obtener datos con suficiente precisión. Por último, estos exoesqueletos son habitualmente pesados, complicados mecánicamente y en general farragosos, de modo que en ocasiones pueden incluso entorpecer aquellos movimientos que pretenden ser medidos.

Los seguidores inerciales tienen típicamente seis grados de libertad, y obtienen la posición y la orientación de un sólido rígido en el espacio. Típi-

camente, un brazo articulado, unido a tierra por un extremo, tiene el otro unido rígidamente al objeto del que se desea obtener la información. En cada uno de los extremos se encuentra una unión de tres grados de libertad, con sus correspondientes sensores. El brazo articulado dispone, en uno o más de sus segmentos, de mecanismos que le permiten variar su longitud. A medida que el objeto que está siendo seguido se mueve, el brazo articulado sigue y captura su movimiento. Este tipo de seguidores está limitado a un rango de actuación determinado (habitualmente no superior a dos metros, debido a las inercias del brazo articulado), y afectan al comportamiento dinámico del objeto que se desea seguir. Brazos más largos son excesivamente intrusivos [22].

Un ejemplo notable de este tipo de sistemas es el “BOOM” (*Binocular Omni-Orientation Monitor*); fabricado por *FakeSpace Inc.*, consiste en un eje con seis grados de libertad contrapesado y un sistema de visualización estereoscópica inmersivo. Las posiciones de sus articulaciones son medidas mediante encoders, y consigue precisiones en traslación y orientación de 4 mm y $0,1^\circ$ respectivamente. Los retardos son del orden de 200 ns, y el radio de operación en torno a 1 m en horizontal y 0,8 m en vertical [37].

Los sistemas de seguimiento mecánicos son, en general, bastante precisos y rápidos, y resultan razonablemente económicos. Pero las limitaciones que se han mencionado hacen que presenten escasa utilidad para este trabajo.

4.2.4. Seguidores magnéticos

Los sistemas de seguimiento magnéticos, que utilizan campos generados de forma artificial, son probablemente los más utilizados en la actualidad con aplicaciones de seguimiento del movimiento. Para un coste relativamente bajo, proporcionan precisiones modestas pero razonables, sin problemas serios de obstrucciones o sombras. Estos sistemas determinan la posición y la orientación utilizando pequeños sensores montados en el cuerpo que se desea observar, y un conjunto de campos magnéticos generados externamente. Los sensores contienen tres bobinas perpendiculares entre sí. A medida que las bobinas se mueven en el seno de los campos magnéticos, la corriente inducida en cada una de ellas cambia. Estos cambios son proporcionales a la distancia desde cada bobina a los generadores externos de los campos magnéticos.

Estos generadores están contruidos asimismo mediante tres bobinas perpendiculares entre sí, que emiten un campo magnético cuando se hace circular por ellas una corriente. Esta corriente se hace pasar por las tres bobinas de forma secuencial, de forma que se generan tres campos, mutuamente perpendiculares, en cada ciclo de medida. Cada uno de los tres campos emitidos genera una corriente inducida en cada una de las tres bobinas del sensor, permitiendo así la lectura de nueve valores con los que se forma una matriz de rotación asociada a cada sensor, y que permiten estimar la posición y la orientación del sólido al que están unidos [72].

La diferencia fundamental entre los sistemas de seguimiento magnéticos comerciales es el tipo de corriente aplicada a las bobinas generadoras. *Polhemus, Inc.* utiliza corriente alterna para generar el campo [38] en sus sistemas “Star Track” (obsoleto) o “Fastrack”, entre otros. *Ascension, Inc.* utiliza corriente continua en “trackStar” o “Flock of Birds”, entre otros. La corriente alterna genera campos magnéticos alternantes, pero el sistema de *Ascension* utiliza corriente continua pulsada, que genera campos magnéticos pulsantes, y espera a que estos campos alcancen el régimen permanente antes de tomar las mediciones en cada pulsación. Esta técnica requiere (y permite) la medida de los campos magnéticos que existen en el entorno, generados por fuentes externas al sistema. Así, además de las nueve medidas comentadas más arriba, se adquieren también tres medidas más que representan las tres componentes espaciales del campo magnético existente en el entorno del sensor, creado por fuentes externas (como el campo magnético terrestre, por ejemplo) [18]. Otros sistemas, dedicados al seguimiento de catéteres y otro instrumental médico en el interior del cuerpo de pacientes, son “Aurora”, fabricado por *NDI*, y los diferentes productos del catálogo de *Biosense*.

Las deficiencias de los seguidores magnéticos están directamente relacionadas con las características físicas de los campos magnéticos; su potencia es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la fuente generadora y el receptor. Esta relación limita el uso práctico de estos seguidores a un rango no superior al tamaño de una pequeña habitación. Por esta razón, este tipo de sistemas es muy común en la captura de movimientos de humanos, destinada a su teleinmersión en entornos virtuales. Para simular un volumen de trabajo superior, los movimientos del objeto que se desea seguir tendrían que ser escalados o modificados de alguna otra manera [59]. A medida que la distancia se incrementa, los errores de estimación de posición y orientación, debidos a distorsiones del campo magnético generado, se incrementan con la cuarta potencia [62]. Por este motivo la precisión de los seguidores magnéticos varía a lo largo del volumen de trabajo. Las distorsiones del campo magnético provienen de numerosas y diferentes fuentes externas. Campos magnéticos variables producen corrientes de *Foucault* (*eddy currents*) en los objetos metálicos del entorno, y estas corrientes producen alteraciones en la medida que son inversamente proporcionales al cubo de las distancias entre la fuente y el objeto metálico, y entre éste y el sensor [62]. El uso de la corriente continua en los seguidores magnéticos es un intento de aliviar los efectos de las corrientes de *Foucault* inducidas por las corrientes alternas de los otros sistemas. Los materiales ferromagnéticos también producen campos de magnetización debidos a su alta permeabilidad. Estos efectos deben ser añadidos a las distorsiones debidas a las corrientes de *Foucault*. Además, los sensores recogerán también otras fuentes de campos magnéticos generadas en el entorno debidas fundamentalmente a aparatos eléctricos. Tales fuentes de ruido pueden incluir monitores de ordenadores, alumbrado fluorescente y cualquier cableado que transporte potencia eléc-

trica y se encuentre en las inmediaciones. Incluso los cables conectados a los propios receptores y transmisores producen ruido que puede ser significativo [62].

Se han utilizado numerosas técnicas, además del filtrado en *software*, con el propósito de aliviar los problemas de errores asociados con los seguidores magnéticos. La mayor parte se basan en el supuesto de que las características magnéticas del entorno no cambian. De esta forma, se han intentado técnicas de ajustado de funciones (a los campos magnéticos tridimensionales del entorno), pero su implementación requiere un sacrificio de precisión local para mejorar la precisión media en todo el volumen de trabajo [51]. Más aún, una representación funcional del campo magnético puede no capturar todos los detalles de las diversas distorsiones que se pueden presentar, o puede introducir variaciones en su frecuencia superiores a las de los errores. Se han utilizado valores tabulados para mediciones puntuales del volumen de trabajo, pero con éxito limitado. Livingston y State han sido capaces de reducir los errores de posición en un 79 % en una esfera de dos metros de diámetro que rodea al emisor. La construcción de la tabla de valores requirió un total de 12.801 muestras para obtener 720 valores válidos [51]. La misma investigación determinó que los errores de orientación no dependían únicamente de la posición del sensor, sino que además dependían de su orientación. Como la tabla de valores estaba basada únicamente en posiciones, las correcciones de orientación no fueron posibles. La creación de una tabla dependiente de la posición y la orientación, aunque grosera, habría requerido 332.826 muestras para la misma esfera de dos metros [51].

Se han conseguido mejoras en la precisión de estos seguidores variando la frecuencia de muestreo del sistema de seguimiento en función a las frecuencias de las fuentes de ruido del entorno. Nixon *et al.* consiguieron una reducción importante de los errores muestreando al doble de la frecuencia de la portadora de la tensión de red eléctrica de potencia local, y promediando las muestras adyacentes [62]. Pero cuando se presentan varias fuentes de ruido operando a diferentes frecuencias, no es posible sincronizarse con todas ellas simultáneamente.

Los seguidores magnéticos son afectados por muchos factores. La bondad de los datos obtenidos es difícil de cuantificar, y es dependiente de la aplicación. Se ha demostrado que puede variar ampliamente más allá de las especificaciones del fabricante. Mientras éstos anuncian latencias en torno a 4 ms, se han llegado a observar retrasos de 30 ms, y éstos se pueden ver incrementados aún más dependiendo del número de sensores utilizados y de la calidad del filtrado de las señales [1]. La velocidad de actualización también decrece con el número de sensores debido al *multiplexado*. Mientras los fabricantes prometen rangos de operación de hasta 5 metros, en la mayor parte de los casos los rangos utilizables son significativamente más cortos [62]. Se anuncian precisiones de orientación entre 0,5 y 3,0 grados, y de posición entre 7,5 y 75 mm. En ambos casos los valores pueden variar

ampliamente en función de la distancia desde el transmisor y de las fuentes de ruido presentes [62].

Skopowski ha realizado un extenso trabajo en el seguimiento por medio de sensores electromagnéticos. Las dificultades con las que se encontró sugieren que los sensores electromagnéticos utilizados no alcanzaban la suficiente precisión [80].

En resumen, la sensibilidad de los seguidores magnéticos a las interferencias los hace poco adecuados para la captura de la posición y la orientación del chasis del vehículo, con la suficiente velocidad de actualización y precisión que requieren los objetivos que se persiguen en este trabajo. Tal vez sea incluso más crítica su falta de alcance suficiente: aunque todavía está por determinar la escala del vehículo final, y por tanto el volumen de trabajo en el que se desarrollarán los ensayos, un radio de 2 m parece insuficiente. En la práctica, este tipo de sensores queda reducido al uso en volúmenes equivalentes al de una pequeña habitación, con un entorno electromagnético controlado.

4.2.5. Detección óptica

Bajo el epígrafe de seguidores ópticos se engloba una amplia colección de tecnologías. Éste es el área en el que se está investigando con mayor intensidad en la actualidad. El coste y las características de las diferentes tecnologías son muy variables. La mayoría no son capaces de capturar los datos que describen el movimiento, y procesarlos en tiempo real. Lo más común es que dependan de la medición de algún tipo de luz. La luz utilizada puede o no ser visible al ojo humano. También puede tratarse de luz enfocada mediante procesos ópticos, o de luz coherente (láser) . Puede ser generada mediante una fuente controlada por el propio sistema de seguimiento, o puede ser pasiva. Los detectores varían desde cámaras de vídeo ordinarias hasta *fordiodos de efecto lateral*⁴ . En cualquier caso, los sistemas ópticos sufren problemas de oclusión siempre que la ruta de la luz es bloqueada. Las interferencias de otras fuentes de luz también pueden suponer un problema. Las condiciones de iluminación deben estar controladas, para permitir el correcto seguimiento de los objetos en el entorno. Dependiendo del tipo de luz que se utilice, puede haber serias limitaciones de alcance.

Para su estudio, se separarán los seguidores ópticos en tres categorías básicas. Los sistemas de reconocimiento de patrones leen un patrón artificial de luces, y utilizan esta información para determinar la posición y/o la

⁴Aunque el *efecto fotolateral* fue descubierto por *Schottky* en 1930, los dispositivos que utilizan este principio han comenzado a utilizarse a mediados de la última década. Los *fordiodos de efecto lateral* son unos dispositivos electrónicos, basados en la distribución de las corrientes generadas por la luz sobre un *fordiodo*, que permiten obtener medidas directas del desplazamiento de una luz puntual a través de su superficie activa. Con la ayuda de sistemas ópticos y electrónicos, pueden ser utilizados para medir ángulos y distancias [65].



(a) Sensor: receptores y unidad de proceso.



(b) Colocación de los emisores del HiBall en el techo.

Figura 4.2: Sistema de seguimiento Hiball.

orientación. Los sistemas basados en imágenes determinan la posición utilizando múltiples cámaras para seguir puntos predeterminados en objetos en movimiento, dentro de un volumen de trabajo. Los sistemas basados en luz estructurada y láser tienen un futuro prometedor, pero todavía no existen sistemas comerciales que hagan de ésta una tecnología práctica.

Sistemas de reconocimiento de patrones

Los seguidores basados en el reconocimiento de patrones pueden funcionar de dos maneras opuestas. En los sistemas *outside-in* los sensores (cámaras) están fijos, y los emisores (fuentes de luz) se mueven con el objeto que se pretende seguir. Los sensores “miran” hacia el volumen de trabajo. En los sistemas *inside-out*, los sensores se montan en los objetos móviles, y los emisores están fijos en el entorno. Estos sistemas requieren una preparación minuciosa del volumen de trabajo. En ambos casos se calcula la posición y la orientación utilizando la vista de determinados puntos con una intensidad y una posición conocidos. Los sistemas *inside-out* tienen una ligera ventaja en precisión, ya que un pequeño movimiento del sensor causará un desplazamiento relativamente grande en las posiciones aparentes de los emisores a la vista. Los emisores en sí suelen ser LEDs infrarrojos.

El *HiBall tracker*, desarrollado en la *University of North Carolina at Chapel Hill*, es un sistema clásico *inside-out* diseñado para el seguimiento de la cabeza humana. Utiliza un gran número de LEDs infrarrojos montados en el techo como emisores (figura 4.2(b)). El sensor es ligeramente más grande que una pelota de golf. Contiene seis lentes y seis fotodiodos distribuidos de forma que cada fotodiodo puede ver LEDs a través de varias de las lentes (figura 4.2(a)). La orientación y la posición se determinan encendiendo y apagando secuencialmente los LEDs del techo, uno a uno, hasta que se determina cuáles de ellos están a la vista de cada fotodiodo. Refinamientos

a lo largo de los últimos años, y la complementación con sensores inerciales han producido rendimientos extraordinarios. Las posiciones se determinan con precisiones en torno a los 0,5 mm, y la orientación se resuelve hasta una resolución de $0,02^\circ$. La velocidad de captura anunciada es mayor que 2.000 Hz, con una latencia aproximada de 1 s [88].

Los principales inconvenientes de esta implementación son su dependencia de un techo especialmente preparado, y por tanto su dificultad de operar en exteriores, y su inhabilidad para seguir todas las orientaciones posibles.

El casco de matrices de LED, de *Honeywell*, es un sistema seguidor *outside-in* diseñado para su uso dentro de cabinas. Utiliza una matriz de cuatro LEDs montados en un casco. Los LEDs son iluminados secuencialmente, y seguidos mediante una cámara infrarroja. El vector hacia cada emisor se calcula utilizando parámetros ópticos de la cámara, y la imagen conocida de la fuente. A partir de los cuatro vectores se puede determinar la orientación del casco [28].

Sistemas de reconocimiento de imagen

Los seguidores basados en el reconocimiento de imagen determinan la posición y orientación utilizando múltiples imágenes bidimensionales del volumen de trabajo. Técnicas estereométricas correlacionan puntos concretos de los objetos (marcadores) que se desea seguir, en cada instante. Esta información, junto con el conocimiento de la relación entre cada una de las imágenes y las características de la cámara, permiten calcular la posición y la orientación de los objetos. En algunos casos se puede utilizar una sola cámara, y procesar las imágenes basadas en una secuencia de imágenes tomadas en diferentes instantes de tiempo. Para calcular la orientación deben ser seguidos tres marcadores no colineales de cada objeto. Este proceso es dado a errores debidos a posiciones inexactas de los marcadores en los objetos, problemas de repetibilidad y mediciones no simultáneas [60].

Los marcadores pueden ser pasivos (retroreflectivos) o activos (LEDs). Un importante esfuerzo de investigación se está llevando a cabo para conseguir que puedan ser seguidos objetos naturales en tiempo real sin la necesidad de añadirles marcadores.

Todos estos sistemas varían en el número de objetos que pueden seguir al mismo tiempo, así como el número de cámaras que se deben utilizar. Para muchos de estos sistemas, el coste es bastante alto. En todos los casos ha de alcanzarse un compromiso entre las distancias focales de las lentes. Una distancia focal larga hace posible mayores resoluciones en volúmenes de trabajo más pequeños. Con distancias focales cortas sucede lo contrario. De todas formas, una distancia focal larga tiene un área de visión menor, con lo que se reduce el tamaño del volumen de trabajo, a no ser que se utilicen cámaras adicionales. Todos estos sistemas pueden ser categorizados como *inside-out*.



(a) Captura del movimiento y los gestos del actor Tom Hanks para la película *Polar Express*.



(b) captura del movimiento de un deportista.

Los seguidores basados en marcadores pasivos, tales como *Vicon* [52], *HiRES 3D* [20] y *Peak Motus* [69] utilizan fuentes de luz situadas muy cerca de cada cámara. La luz generada es devuelta por unos seguidores altamente reflectivos (ver figura 4.2.5). Durante el procesado posterior de los datos de captura de movimiento, un operador del sistema debe asistir con la identificación de los marcadores. El *Peak Motus* ha sido utilizado también sin marcadores, para un análisis del movimiento de atletas en un modo de adquisición de vídeo manual. Se requieren frecuencias de cuadro de hasta 60 Hz. Incluso para volúmenes de trabajo pequeños es posible que se requieran hasta siete cámaras para hacer una adecuada triangulación de los seguidores.

Aunque la investigación con marcadores reflectivos continúa [74], en general sólo los seguidores con marcadores activos son capaces de producir la información necesaria para seguir correctamente un objeto en tiempo real. La ventaja de la aproximación con marcadores activos es que la identificación de cada marcador, y por tanto la correspondiente localización en el objeto a seguir, es conocida inmediatamente por el sistema, porque los marcadores son pulsados secuencialmente por el *hardware* de adquisición y control. El procesado de los datos, por tanto, es mucho más rápido y autónomo, y la correspondencia entre múltiples imágenes se puede calcular rápida y automáticamente. Pueden aparecer problemas de aparición de imágenes con

marcadores “fantasma”, debidos a la reflexión de los LEDs. El rango desde el que pueden ser detectados correctamente los marcadores está limitado, habitualmente, a menos de 8 m.

Existen sistemas comerciales basados en marcadores activos, como *Selspot II* (*Selspot Systems Ltd., Southfield, Michigan*), *OPTOTRACK* (*Northern Digital Inc., Waterloo, Ontario, Canada*) o *CODA* (*Charmwood Dynamics Ltd., Leicestershire, England*). El *Selspot II* permite capturar en tiempo real las coordenadas tridimensionales de hasta 36 LEDs infrarrojos sujetos al objeto móvil. También calcula ángulos, aceleraciones y momentos. La actualización de estos datos es extremadamente rápida.

Reality fusion comercializa el *GameCam*, que es el primer sistema de seguimiento de movimiento basado en captura de imágenes y dirigido al público en general. En este sistema el usuario debe seguir su propia posición y orientación (postura, en este caso, ya que se sigue la orientación y posición de los diversos miembros del cuerpo) por medio de su reflexión en un espejo. Este sistema de bajo coste utiliza una única cámara de PC estándar para capturar el movimiento del usuario [39]. Está destinado a la inmersión del usuario en los entornos virtuales de juegos tridimensionales.

El seguimiento mediante cámaras de objetos naturales sin la ayuda de marcadores es considerada por muchos investigadores como la solución final para la mayor parte de problemas de seguimiento. Está basada en técnicas de visión artificial. Eliminar la necesidad de marcadores permitiría aumentar la movilidad del objeto. Para hacer posible esta aproximación seguiría siendo necesario utilizar numerosas y costosas cámaras a lo largo del volumen de trabajo.

Sistemas basados en luz estructurada y Láser

Los seguidores basados en luz estructurada utilizan láser o un haz de luz para crear un plano de luz que es barrido a través de la imagen (el volumen de trabajo). Algunos sistemas utilizan un láser para buscar puntos concretos, la escena completa, o para determinar la posición aleatoriamente [57]. Estos sistemas detectan el objeto, y no solamente sus puntos, por lo que el objeto puede ser un icono dentro de un entorno virtual, en lugar de ser creado artificialmente a partir de información limitada. Esta es una técnica demasiado lenta para el seguimiento de la posición.

El radar láser, o *ladar*, mide el tiempo de vuelo de ida y vuelta de la luz láser entre el emisor y el objeto. Con tres datos de tiempo como éste se puede triangular la posición del objeto en el volumen de trabajo. Si el ángulo del haz láser es conocido, entonces sólo será necesario el uso de uno de ellos. Estos sistemas de seguimiento son capaces de proporcionar informaciones de distancia muy precisas, pero la resolución puede ser baja. El *ladar* es más apropiado para distancias largas, aunque las reflexiones difusas han de ser inferiores a un sexto de la potencia del haz original [57].

Los sistemas de seguimiento basados en interferómetros láser requieren espejos fijos en el objeto. La luz láser se dirige al espejo, y se compara la fase de la luz reflejada con la de la luz original. Con ello se genera un patrón de interferencia que permite calcular la distancia deseada. Con esta técnica sólo se pueden medir distancias incrementales, y no distancias absolutas, de forma que ha de añadirse a cada medida una corrección de posición. Esta corrección puede ser medida mediante ladar. La orientación del objeto que se sigue está limitada, ya que el espejo ha de ser visible para el haz láser. Este método es muy preciso y exacto, pero no parece apropiado para los objetivos de este trabajo. Todos los sistemas de seguimiento basados en láser o luz estructurada son sensibles a problemas causados por sombras y oclusiones. En general, son caros y complejos. La medida de la orientación del objeto incrementa la complejidad todavía más.

4.2.6. Seguidores acústicos

Los seguidores que utilizan sonido (o ultrasonido) son alternativas económicas a los seguidores magnéticos. Proporcionan precisiones y velocidades de refresco modestas. Permiten implementaciones *inside-out* y *outside-in*. Estas últimas han de dividir la velocidad de refresco total entre el número de emisores seguidos. En los sistemas *inside-out* el número de objetos que se siguen no está limitado.

La física de la propagación del sonido limita la precisión, la velocidad de refresco y el rango de este tipo de seguidores. Los rangos son más largos que los de los seguidores magnéticos, y las interferencias magnéticas no suponen un problema. Pero ha de mantenerse una línea libre de obstáculos entre los emisores y los receptores. Por tanto, las sombras y las obstrucciones sí pueden suponer un problema [22]. La latencia varía con la distancia, debido a la relativamente lenta velocidad del sonido (en el aire). La mayoría de los sistemas actuales utilizan tonos de pulsos en torno a los 40 Hz. En esta banda de frecuencia, el sonido puede ser afectado severamente por ruidos procedentes de la colisión de objetos metálicos. Longitudes de onda más cortas permitirían resolver las distancias con más precisión, pero se atenuarían rápidamente. Además, el uso de radiadores omnidireccionales de altas frecuencias es caro y requiere más potencia.

El seguimiento mediante sistemas que utilizan ultrasonidos puede determinar la posición mediante tiempo de vuelo y triangulación, o por coherencia de fase. Los seguidores por coherencia de fase determinan la distancia midiendo la diferencia de fase entre una señal de referencia y la señal detectada por los sensores. Esta diferencia se utiliza para calcular cambios en la posición. Debido a que esta técnica calcula valores incrementales, la posición inicial ha de ser determinada mediante algún otro medio, y las derivas a lo largo del tiempo pueden ser un problema. Una de las mayores ventajas de los sistemas por coherencia de fase es la alta velocidad de flujo de datos, que

permite un adecuado filtrado. Ambos tipos de sistemas pueden ser afectados negativamente por ecos y reflexiones de las ondas sonoras.

4.2.7. Seguidores magnéticos e inerciales

Aunque este tipo de seguidores está basado en algoritmos matemáticos conocidos hace tiempo, el seguimiento mediante sensores inerciales y magnéticos (sensores *MARG*⁵) es relativamente reciente, y todavía no se ha introducido por completo en las aplicaciones de seguimiento de posición y orientación, aunque sí ha sido utilizado con éxito en otros campos (entornos virtuales, por ejemplo). Este tipo de seguidores también está abriéndose camino como una forma de mejorar o apoyar alguna de las otras tecnologías que se han mencionado. El seguimiento mediante sensores inerciales y magnéticos se ha hecho posible recientemente gracias a los avances en las tecnologías de miniaturización y sensores micro mecanizados (*MEMS*⁶), y principalmente de los acelerómetros y sensores de velocidad de rotación (*rate-gyros*) de silicio. Estos avances han sido incentivados por el rápido desarrollo del mercado de sistemas de control y navegación de automóviles, y por el de los sensores para estabilización de cámaras de vídeo y fotografía. Al contrario que con los demás sistemas de seguimiento, no hay una latencia inherente asociada con este tipo de sensores. Su respuesta es instantánea, y los retrasos son debidos únicamente a la transmisión de los datos (si la hay), y a su posterior procesado.

Una aproximación inicial al seguimiento mediante sensores inerciales y magnéticos consistiría simplemente en la integración de la velocidad de rotación para determinar la orientación. Sin embargo, esta solución usando un único tipo de sensor, es proclive a derivas con el tiempo, debidas a la acumulación de pequeños errores de sesgo y deriva en los sensores. Para evitar esta deriva se hace uso de otros sensores complementarios, que continuamente corrigen estos errores. Habitualmente estos sensores incluyen inclinómetros o acelerómetros, para medir la posición del eje *Z* (la vertical), y un conjunto de magnetómetros para medir la dirección del campo magnético local. Para poder seguir todas las orientaciones correctamente, debe haber un acelerómetro, un *rate-gyro* y un magnetómetro para cada uno de los tres ejes coordenados del cuerpo que se desea seguir.

Teóricamente es posible determinar la posición y la orientación utilizando sensores inerciales. Esto se hace diariamente en los sistemas de navegación inercial de aviones y submarinos, y otras plataformas que han de navegar sin la ayuda de referencias externas. Este cálculo basado en inferencias (*dead*

⁵*MARG* es un acrónimo de *Magnetic, Angular Rate, Gravity* [6].

⁶*MEMS* es un acrónimo de *Micro Electro Mechanical Systems*, y se refiere a sistemas integrados que combinan componentes eléctricos y mecánicos al mismo tiempo, habitualmente miniaturizados y encapsulados en un único circuito integrado.

*reckoning*⁷) se hace posible utilizando sensores que, por grandes y costosos, probablemente no sean adecuados para los intereses de este trabajo. Este tipo de seguimiento no es posible con sensores inerciales de bajo coste y reducido tamaño, a no ser que se desee realizar el seguimiento en intervalos de tiempo muy cortos [7], [32]. Sin referencias externas, la estimación de la posición basada en sensores económicos adolecerá de los mismos defectos de deriva que la orientación.

Si se pretende seguir el movimiento de varios objetos, unidos entre sí por medio de algún enlace mecánico del que se conocen sus características cinemáticas y dinámicas, es posible utilizar este conocimiento para realizar el seguimiento utilizando únicamente acelerómetros y giróscopos. Tal aproximación ha sido probada con éxito en modelos bidimensionales por Sakaguchi *et al.* [76]. Sin utilizar filtros complementarios o integración de Euler de las velocidades angulares, las aceleraciones angulares y centrífugas se calculan a partir de las relaciones cinemáticas entre los sensores y los enlaces que los unen. El modelo es bidimensional, y no se hacen esfuerzos por contrarrestar la deriva en la rotación alrededor del eje Z. Con esta aproximación se alcanzan precisiones de 0,061 mm.

Fuchs presentó el primer sistema inercial para aplicaciones de seguimiento postural de la cabeza humana [33]. Este sistema utiliza un péndulo fluido y tres sensores de velocidad angular piezoeléctricos, de estado sólido. El sistema inicial no incluía una brújula ni magnetómetros, por lo que sufría de deriva alrededor del eje vertical. Los sistemas posteriores incluían tres *rate-gyros* de estado sólido ortogonales, un inclinómetro fluido de dos ejes y un sensor de flujo magnético biaxial [30]. La empresa *Intersense Inc.* comenzó como resultado de esta investigación, y continúa produciendo dispositivos de seguimiento inerciales diseñados para aplicaciones de seguimiento de la cabeza humana. La mayor parte de los sistemas que comercializa actualmente son híbridos, y combinan los sensores inerciales con ultrasonidos. Alcanzan (según sus especificaciones) precisiones angulares de orientación de $0,25^\circ$, precisiones lineales de posición de 6,35 mm y una frecuencia de refresco de datos de hasta 150 Hz. Aunque estas características son excelentes, el uso de *ángulos de Euler*⁸ para representar internamente la orientación hace que puedan producirse singularidades en algunas orientaciones particulares [30]. Los datos recogidos de los sensores son procesados mediante un algoritmo

⁷ *Dead reckoning* significa en castellano algo así como “cálculo a ojo”. Es una expresión derivada del término náutico *deduced reckoning* (cálculo basado en inferencia), y era un procedimiento matemático simple para inferir la ubicación actual de un navío haciendo cálculos basados en el rumbo y la velocidad de navegación a lo largo de un período de tiempo, sin usar el cielo y los astros como referencia.

⁸ Los *ángulos de Euler* constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, normalmente móvil, respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijo. Se utilizan habitualmente para describir la orientación de un sistema de referencia solidario a un sólido rígido en movimiento, respecto a otro sistema de referencia fijo.

de filtrado especial que requiere períodos sin movimiento del objeto para corregir las derivas de los sensores angulares.

Henault [36] ha investigado el *software* necesario para soportar los sensores capaces de seguir todas las orientaciones de un objeto, sin singularidades. Su trabajo incluye el desarrollo de un filtro de orientación basado en *cuaternas*⁹. Este filtro ha sido probado con seguidores inerciales simulados en ordenador. El uso de 28 cuaternas en el filtro permitió seguir objetos en todas las orientaciones posibles, evitando las singularidades asociadas con los filtros basados en ángulos de Euler. Otra característica importante del filtro es su sencillez computacional, ya que el uso de cuaternas ha evitado relaciones trigonométricas.

4.2.8. Posicionamiento por Radio Frecuencia

Los sistemas de posicionamiento por radiofrecuencia son muy rápidos y de largo alcance, y han sido desarrollados para barcos, aviones, misiles y varias aplicaciones civiles tales como el VOR¹⁰, el LORAN¹¹ y el GPS¹². Todos estos sistemas están diseñados para ser utilizados para distancias extremas. En el pasado sólo podían ser utilizadas en estas aplicaciones de gran escala, debido a errores en la transmisión y procesado de las señales [15]. Recientes avances en la tecnología de radiofrecuencia han hecho posible alcanzar precisiones en la estimación de la posición tridimensional de unos pocos milímetros, en rangos de hasta 100 m.

En estos sistemas es esencial una medida muy precisa del tiempo, ya que se utiliza para calcular la distancia al emisor mediante el retardo en la señal

⁹Al igual que la adición de los números imaginarios a los números reales genera los números complejos, y éstos se pueden utilizar con provecho para describir rotaciones en el plano, la adición de dos cantidades imaginarias más, hasta obtener una *cuaterna* de un número real y tres imaginarios, permite describir con facilidad y sin singularidades las orientaciones y rotaciones de un cuerpo en el espacio tridimensional. De la misma forma que los complejos son útiles para resolver ecuaciones diferenciales, porque transforman las diferenciaciones en operaciones algebraicas, las cuaternas simplifican las rotaciones en el espacio, transformando las operaciones de trigonometría esférica en operaciones algebraicas.

¹⁰El VOR es un acrónimo para *VHF Omnidirectional Range*, o “Radiofaro Omnidireccional de VHF”. Se utiliza en aeronáutica para navegar en condiciones de vuelo instrumental (IFR).

¹¹LORAN es un acrónimo de *LOng RAnge Navigation*. Se trata de un sistema electrónico de ayuda a la navegación que utiliza el intervalo transcurrido entre la recepción de señales de radio, transmitidas desde tres o más transmisores, para triangular la posición del receptor. Como indica su nombre, se utiliza fundamentalmente para navegación, aunque está siendo desplazado por el GPS.

¹²GPS es un acrónimo para *Global Positioning System*. Es un sistema de navegación que permite calcular la posición de un objeto en cualquier lugar del mundo; para ello, utilizando una medida del tiempo muy precisa, y mediante las señales de radiofrecuencia que recibe de tres o más satélites en una órbita conocida, calcula la distancia a estos satélites, y con ella estima su posición.

de radiofrecuencia recibida, y la velocidad de transmisión de estas señales es extremadamente alta, por lo que ligeras desviaciones en los cronómetros causarían errores sustanciales en la estimación.

De la misma forma que en los seguidores ópticos, con la radiofrecuencia también se pueden construir sistemas que funcionen en el sentido inverso, es decir, se equipa al objeto que se desea seguir con un emisor, y se recibe la señal desde varios receptores cuya localización, fija, se conoce. Los desfases entre los tiempos de recepción permiten estimar las distancias emisor-receptor para cada uno de ellos, y con ellas triangular la posición del objeto. Este método no requiere sincronizaciones tan exactas entre el emisor y los receptores.

Las señales de radiofrecuencia pueden, hasta cierto punto, atravesar objetos no metálicos, tales como muros o paredes, de forma que son menos sensibles a problemas de sombras u oclusiones. Los sistemas basados en radiofrecuencia son fáciles de construir, y son escalables a áreas pequeñas o grandes. Sin embargo, en entornos cerrados las cualidades de estos sistemas se deterioran debido a reflexiones de las ondas de radiofrecuencia en las superficies de las paredes, metálicas o no metálicas, y también debido a la atenuación que sufren en las reflexiones y al atravesar objetos que se encuentren en su camino.

Si se utilizan señales de radiofrecuencia de espectro ensanchado (*spread-spectrum*) se puede medir, además, el desfase entre señales, utilizando para ello un ruido pseudoaleatorio introducido en la señal. Esta medida del desfase sirve para incrementar notablemente la precisión en la estimación de la posición del objeto. Además, utilizando *CDM*¹³ se puede conseguir que funcionen al unísono, y en el mismo lugar, varios pares transmisor receptor [15].

Los sistemas de seguimiento por radiofrecuencia, por tanto, pueden ser escalados a volúmenes de trabajo de cualquier tamaño. La precisión del sistema será dependiente de la frecuencia, de la codificación o de la implementación del procesado posterior de las señales recibidas, pero no del tamaño del volumen de trabajo. Un sistema mínimo para seguimiento de tres grados de libertad requeriría cuatro estaciones situadas en posiciones fijas conocidas en el área de trabajo, y una unidad solidaria al objeto que se desea seguir. Las estaciones pueden ser transmisoras, y el objeto receptor, como en el *GPS*, en una configuración *inside-out*, o los roles pueden ser invertidos, como se ha descrito ya. En la primera configuración el procesado

¹³*CDM* es un acrónimo de *Code Division Multiplexing*. Se trata de una técnica en la que cada canal transmite sus bits de información como una secuencia de pulsos codificada y específica de cada canal. Todos los canales, cada uno con un código diferente, pueden ser transmitidos por el mismo canal y demultiplexados asincrónicamente. Un ejemplo de uso común es el *Code Division Multiple Access (CDMA)*, utilizado en el sistema de telecomunicaciones móviles universal (*UMTS*), estándar de la telefonía móvil de tercera generación (3G). Otra aplicación importante del *CDM* es el propio *GPS*.

de las señales recibidas se hará en el propio objeto, que de esta forma obtendrá su propia estimación. En la segunda configuración las señales se reciben en las estaciones fijas en tierra, y se utilizan para realizar la estimación en un procesador central. Cualquiera de las dos opciones es capaz de producir estimaciones de posición muy precisas.

4.2.9. Sistemas de seguimiento híbridos

Cada tecnología de seguidores tiene sus propias fortalezas y debilidades. Por esa razón es muy probable que en el futuro se utilicen más sistemas híbridos, en los que se mezclan tecnologías para conseguir sumar sus fortalezas. Algunos sistemas híbridos actuales utilizan un tipo de tecnología para estimar la orientación, y otro para la posición. Otros utilizan dos tecnologías independientemente, y eligen la mejor de ellas en cada instante. Los mejores sistemas toman datos de múltiples tipos de sensores, y utilizan algoritmos de filtrado para combinarlos y llegar a una estimación mejor. El hecho de que los *MEMS* inerciales no sean capaces, por sí mismos, de hacer estimaciones durante períodos extensos de tiempo debido a las derivas de los sensores, hace que sea natural mirar hacia soluciones híbridas.

Azuma [4] demuestra que la predicción de la localización utilizando tres *rate-gyros* y tres acelerómetros lineales es una aproximación efectiva para reducir significativamente errores dinámicos. En su estudio, la predicción incrementa la precisión dinámica en un factor entre 5 y 10. Utiliza filtros de Kalman lineales para estimar y predecir los términos de traslación, y un filtro de Kalman extendido (*EKF*) para estimar y predecir los términos de orientación. Welch [91] continúa su trabajo utilizando un filtro de Kalman *SCAAT*, o “*Single-Constraint-at-a-time*”. Aunque en ambos trabajos se utiliza una representación de la orientación mediante cuaternas, ésta es convertida posteriormente a ángulos de Euler. En capítulos sucesivos se entrará en detalle explicando las singularidades de estos algoritmos de filtrado.

Foxlin *et al.* [32] describen un seguidor híbrido inercial/acústico *outside-in* denominado *Constellation*. Utiliza un sistema de navegación inercial ayudado por medidas de distancia obtenidas mediante el tiempo de vuelo de señales ultrasónicas. El subsistema inercial determina la posición mediante integración doble de los datos de un acelerómetro lineal triaxial. El subsistema ultrasónico utiliza una “constelación” de balizas montadas en el techo, de una forma similar a la utilizada por el sistema óptico del HiBall ya comentado, aunque en este caso el subsistema ultrasónico sólo determina la posición, y no la orientación. Las razones argumentadas en este caso para el uso de tecnología acústica en lugar de óptica son el coste, el peso y la complejidad. Al igual que los sistemas de la UNC, utiliza un filtro de Kalman extendido para combinar todos los datos de los sensores y calcular la estimación óptima de la posición y orientación del objeto. Además, las medidas de distancias mediante los sensores acústicos son procesadas independientemente

utilizando un filtro de Kalman *SCAAT* .

4.2.10. Otras tecnologías

Aunque en los puntos anteriores se han comentado todos los principios físicos que se utilizan actualmente para el seguimiento y la captura de posición y movimiento, existen otros procedimientos que están siendo evaluados e investigados, y que tienen visos de mejorar en prestaciones a los existentes en la actualidad.

Uno de ellos está pensado para la captura del movimiento de objetos en un entorno cercano. En concreto, el objetivo es capturar el movimiento de uno o más dedos índices de usuarios que, de esta forma, pueden interactuar con diferentes programas de ordenador sin la necesidad de usar *hardware* intermedio (*interfaces*). Utiliza un haz láser o de luz focalizada, visible o no, que describe una circunferencia sobre la superficie del objeto a seguir (la huella del índice, en este caso). Un sensor detecta parte de la reflexión difusa de esta luz sobre el objeto. Si el objeto se mueve, parte del círculo ya no se reflejará en él, y por tanto su reflejo no llegará al receptor. En función del tramo de circunferencia que falta, el *software* estima la dirección en la que se ha movido el objeto, y desvía el espejo hasta que se vuelva a percibir la circunferencia completa [17]. Este sistema, aunque muy rápido y preciso, es apto sólo para entornos cercanos, y necesita que exista una línea de visión libre de obstáculos entre el emisor y el objeto, y entre éste y el receptor. No parece, por tanto, adecuado al propósito que aquí se persigue.

Las necesidades en telecomunicaciones que surgieron en la última mitad de la Segunda Guerra Mundial (inmunidad a interferencias –casuales o provocadas por el enemigo–, gran alcance, encriptación) hicieron posible el nacimiento del *CDM* , que como se ha comentado ya, hace que una información emitida por radiofrecuencia ocupe un ancho de banda grande (*spread spectrum*), muy superior al necesario, mezclándola con un código pseudoaleatorio. El resultado es un sistema extremadamente eficaz para la localización y el seguimiento de objetos, como lo demuestra su uso en el *GPS* . Investigaciones recientes están intentando obtener un sistema de seguimiento basado en el mismo concepto del *GPS* , pero en frecuencias distintas, y utilizando cuatro estaciones emisoras, que hacen las funciones de los satélites en el *GPS* , y que se sitúan en el volumen de trabajo. El hecho de que se pueda utilizar el mismo ancho de banda para transmitir varias señales, hace que sea posible que las cuatro estaciones compartan el mismo canal, así como los emisores que irían situados en cada objeto en seguimiento, y que se utilizarían para transmitir la posición del objeto, ya estimada, a una central para su procesado. Este sistema de seguimiento parece el candidato perfecto para el propósito que se persigue en este trabajo: inmune (relativamente) a interferencias y a oclusiones, sencillo, rápido, extremadamente preciso (se especula con resoluciones sub-milimétricas), válido para volúmenes de tra-

bajo grandes o pequeños, y razonablemente asequible [15]. No se conoce, sin embargo, un producto comercial que utilice esta tecnología.

Vallidis [84] utiliza las ventajas del *spread spectrum*, y las aplica a la transmisión de sonido para generar el “*Whisper*”, que es un sistema acústico para seguimiento que utiliza una señal de banda ancha para sacar partido de la habilidad de las frecuencias bajas del sonido para rodear (por difracción) objetos. Esto permite al *Whisper* continuar siguiendo objetos aún cuando se produzcan oclusiones. Este trabajo, también prometedor, todavía no ha dado sus frutos en forma de un producto utilizable, y accesible al gran público.

Recientemente ([14] (2006), [87] (2006), [63] (2007), [40] (2009)) se está trabajando en la integración del *GPS* con diferentes tipos de sensores, generalmente inerciales, para estimar diversos parámetros del estado de un vehículo. La intención es sumar las ventajas de ambos sistemas: la rapidez, inmunidad ante interferencias de cualquier tipo y libertad que dan los sensores inerciales, y la precisión y falta de deriva del *GPS*. Además de diferentes algoritmos basados en alguno de los tipos del filtro de Kalman, se están probando también técnicas de inteligencia artificial y redes neuronales artificiales aplicadas a la fusión de la información de todos los sensores. Estas investigaciones están dando resultados razonables para la estimación de estos parámetros del vehículo, y es probable que en un futuro cercano permitan obtener toda la información precisa de su estado cinemático y dinámico, aunque de momento no es el caso.

4.3. Solución adoptada

En este capítulo se ha presentado una breve visión de las diferentes tecnologías que están siendo investigadas actualmente, o que están comercialmente disponibles. Se han examinado las limitaciones generales y las capacidades de las diferentes tecnologías de captura de movimiento. Ninguna es capaz de adaptarse completamente al problema que se presenta en este trabajo, bien sea por el rango de alcance, la resolución, la velocidad de refresco de los datos, su latencia, las singularidades, la deriva, los ecos, las sombras, el tamaño o incluso el precio. En general, un rango limitado, problemas de sombras o de susceptibilidad a interferencias hacen que los sistemas actualmente disponibles no se ajusten al seguimiento de un vehículo tal como se pretende en el marco de este trabajo.

El sistema ideal debería ser capaz de seguir al vehículo en un volumen de trabajo razonablemente grande (del orden de varios cientos de metros de lado), dadas las velocidades que previsiblemente se alcanzarán en los ensayos, debería tener un retraso mínimo en la adquisición y procesado de los datos, ya que se pretende que pueda servir para un futuro desarrollo de algoritmos de control del vehículo, debería ser robusto frente a problemas de ruidos e interferencias generadas dentro del volumen de trabajo, inmune

a sombras y reflejos de las señales que utilice, el flujo de datos debería ser suficientemente rápido, teniendo en cuenta que se pretende seguir en detalle lo que sucede en las inmediaciones de las situaciones de emergencia, y es necesario capturar el valor de las magnitudes cinemáticas y dinámicas del vehículo que, como se ha explicado, cambiarán rápidamente. Por último, debería ser inalámbrico, para evitar los problemas de ataduras y cableados al vehículo, e insensible a oclusiones u obstrucciones.

Como se ha apuntado brevemente al hablar de los sistemas híbridos, reunir todas las virtudes de cada uno de los sistemas no será posible, probablemente, utilizando una sola tecnología. Teniendo esto en cuenta, y analizando las ventajas e inconvenientes de las diversas tecnologías presentadas, se ha optado por seleccionar un conjunto de tres sensores triaxiales: acelerómetros, magnetómetros y *rate-gyros* para estimar la posición y orientación del chasis del vehículo y otros sensores más relacionados con la cinemática y la dinámica del vehículo, que se podrán utilizar posteriormente para relacionar la información obtenida del chasis con cada uno de los subsistemas de suspensión, dirección y los propios neumáticos: un sensor inductivo en cada rueda para capturar su posición y velocidad, un sensor angular en cada subsistema de suspensión, para medir su posición instantánea respecto al chasis, un sensor angular para medir la posición instantánea del mecanismo de dirección, y un sensor de temperatura para ayudar a minimizar los errores producidos por derivas térmicas en los demás sensores.

Capítulo 5

Plataforma experimental

De lo expuesto hasta ahora se desprende que es necesario, para los fines de este trabajo, el desarrollo de una plataforma experimental equipada con los sistemas necesarios para estudiar con detalle lo que sucede en el entorno de la pérdida de adherencia y de control, con la finalidad de caracterizar sus síntomas para así poder predecirla y que permita, asimismo, el posterior ensayo de nuevos algoritmos de control para mejorar la seguridad activa del vehículo.

Para este fin se marcaron en el capítulo 3, entre otros, los siguientes objetivos:

- definir y probar una plataforma experimental basada en un vehículo, con la que se puedan ejecutar de forma repetida determinadas maniobras, en diversas condiciones, de modo que permita estudiar las diferentes reacciones del vehículo en las circunstancias que rodean la pérdida de adherencia y de control,
- establecer sobre esta plataforma los sistemas de sensorización y adquisición de datos, con las características de velocidad, resolución y sensibilidad adecuados, de forma que permitan adquirir un conjunto de datos representativo del estado cinemático y dinámico del vehículo, en tiempo real y en las condiciones en las que se realizarán las maniobras,
- realizar un sistema de trasvase de información que permita recibir los datos capturados en las maniobras, y enviar los comandos para controlar el vehículo, en tiempo real y con la precisión y velocidad necesarias, entre una estación remota y el vehículo,

La naturaleza estocástica de las señales que han de ser medidas en los ensayos, y los ruidos que las acompañan, hacen necesario repetir cada tipo de maniobra un número de veces razonablemente alto de manera que se disponga, por cada maniobra, de una muestra de datos suficiente para un posterior

Característica	Dimensión
Longitud	764 mm
Ancho	300 mm
Alto	210 mm
Ancho de vía delantero	300 mm
Ancho de vía trasero	276 mm
Batalla	506 mm
Masa	10,28 kg
Transmisión	Cadena
Embrague	Centrífugo
Tracción	Trasera
Frenos	Disco
Suspensión delantera	Doble trapecio con amortiguador y barra de torsión
Suspensión trasera	Doble trapecio con amortiguador

Cuadro 5.1: Características principales del vehículo

análisis estadístico, que permitirá extraer de estos datos la información que se busca, y descartar los ruidos que la contaminan.

La plataforma experimental que se necesita ha de garantizar, por tanto, que cada una de las maniobras que se ensayan se pueda repetir *con precisión* cada vez, de modo que se pueda asegurar que las circunstancias en las que se obtienen los datos en cada repetición son consistentes.

Por otra parte, las maniobras que se ensayarán están orientadas a estudiar lo que sucede en las inmediaciones de la pérdida de adherencia y de control. Se entiende que es posible que el vehículo sufra en estas maniobras límite accidentes en los que puede peligrar su integridad. Este problema desaconseja, por razones económicas y de seguridad, el uso de un vehículo convencional tripulado.

5.1. Vehículo

Para garantizar la repetibilidad de las maniobras que se realizarán durante los ensayos, es necesario automatizar el control del vehículo. Este hecho, unido a los dos que se han mencionado en el punto anterior –coste y peligro inherente en este tipo de maniobras– desaconsejan el uso de un vehículo convencional. Por tanto, se ha optado por utilizar un vehículo a escala, no tripulado, con condiciones dinámicas razonablemente extrapolables (aunque no semejantes) a las de sus semejantes a escala real, que permita realizar los ensayos con un coste inferior, y sin que peligre la integridad física del piloto.

Se ha elegido como plataforma inicial un vehículo comercial a escala re-

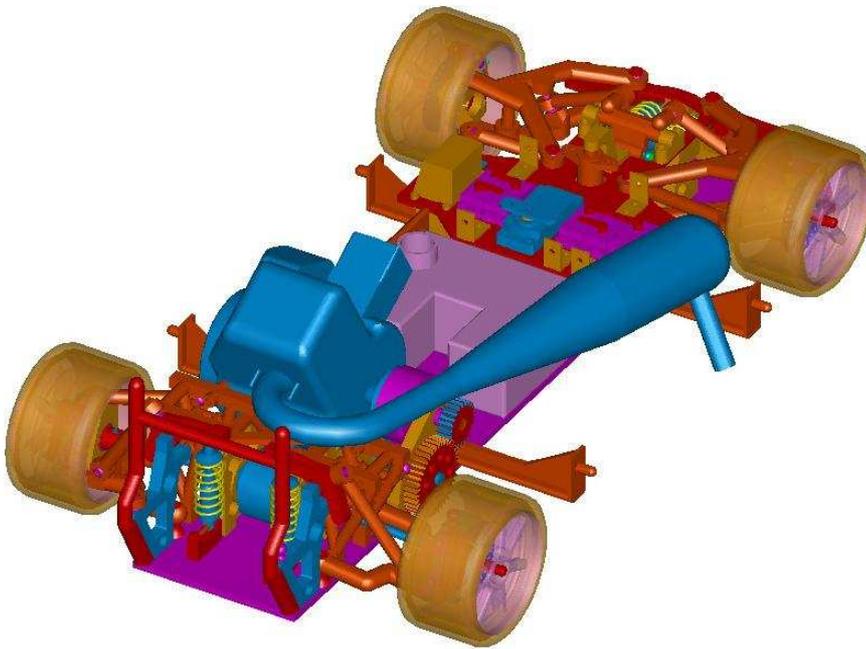


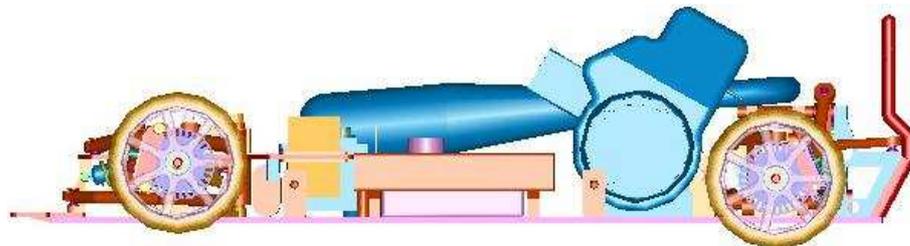
Figura 5.1: Modelado en CAD del vehículo.

ducida, de manera que las partes que se dañen en los ensayos sean fácilmente reemplazables, y que permita modificar sus características dinámicas para realizar ensayos en diferentes condiciones. Este vehículo está destinado originalmente a la competición en carreras de Radio Control, por lo que en su concepción se han previsto los mecanismos de control necesarios (servos), y se ha diseñado de forma que permite el ajuste de múltiples parámetros que afectan a su comportamiento cinemático y dinámico. Aún así, el vehículo ha de ser modificado adecuadamente para posibilitar su sensorización y control, como se explicará más adelante.

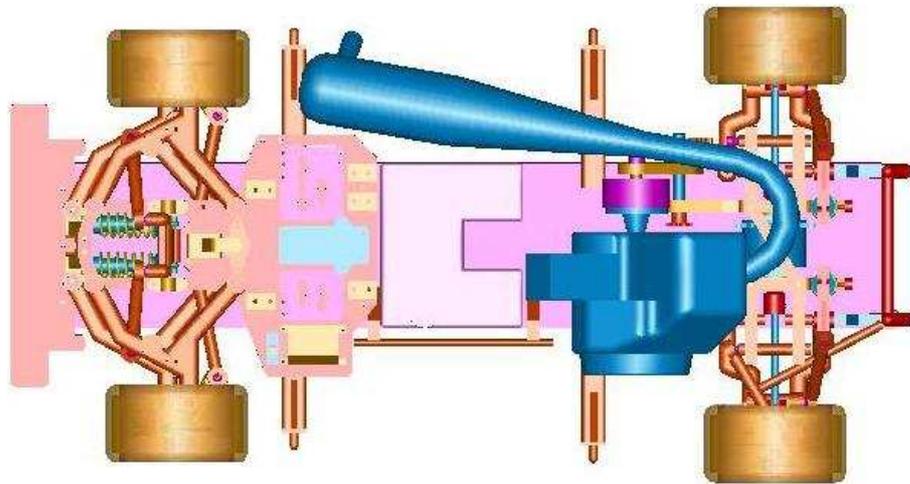
Se trata de un vehículo a escala 1:5, cuyas características principales se muestran en la tabla 5.1. Está diseñado para alcanzar velocidades elevadas para su tamaño (alrededor de los 100 km/h) en pistas todo-terreno, por lo que sus sistemas están pensados para soportar la suciedad y golpes, condición que lo hace adecuado al entorno en el que será utilizado en este trabajo.

La configuración general del vehículo, atendiendo a su reparto de masas, geometría de las suspensiones y dimensiones generales, son propias de un monoplaza, de forma que los datos obtenidos en este trabajo no serán directamente extrapolables a vehículos convencionales. Sin embargo, la misma metodología podría utilizarse posteriormente con vehículos de diferentes tipos y tamaños.

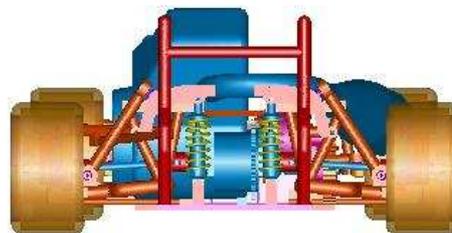
En el apéndice A se detallan las características concretas del vehículo y las partes que lo componen.



(a) Alzado.



(b) Planta.



(c) Perfil.

Figura 5.2: Alzado, planta y perfil del modelo en CAD del vehículo.

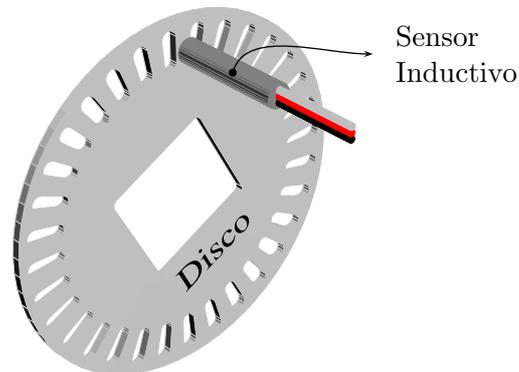


Figura 5.3: Disco de freno ranurado y sensor inductivo para obtener la posición relativa y velocidad angulares de cada rueda.

5.2. Modificaciones introducidas en el vehículo

La versión comercial del modelo escogido no sirve directamente para el propósito de este trabajo. Ha sido necesario efectuar sobre él ciertas modificaciones para permitir el control independiente sobre los cuatro frenos o la sensorización, por ejemplo. En esta sección se expondrán las modificaciones efectuadas. En concreto, las principales modificaciones que se introdujeron en el vehículo son las siguientes:

- El vehículo original estaba equipado con un sólo disco de freno, que operaba sobre el diferencial. Se ha eliminado éste, y se han incorporado discos de freno independientes en cada rueda.
- Se han modificado los bujes para alojar los nuevos frenos de disco, y para incorporar el mecanismo inductivo de adquisición de velocidad y posición de cada rueda.
- Se han modificado algunos de los ejes de las ruedas, por la misma razón del punto anterior.
- Se ha rediseñado la bandeja en la que se alojan los servomecanismos de control, para albergar a los nuevos que controlan los discos de freno independientes, y para permitir la sujeción del sistema de adquisición y control que se ha diseñado y construido específicamente para este vehículo, y que se expondrá en el punto 5.3.

Para determinar qué partes del vehículo podían mantenerse, y cuáles habrían de ser sustituidas, y para diseñar las piezas nuevas de acuerdo a la geometría del vehículo, éste fue modelizado pieza a pieza en un programa de CAD vectorial (*I-DEAS Master Series*). De esta forma fue posible diseñar las nuevas piezas y comprobar posibles problemas de interferencias antes de

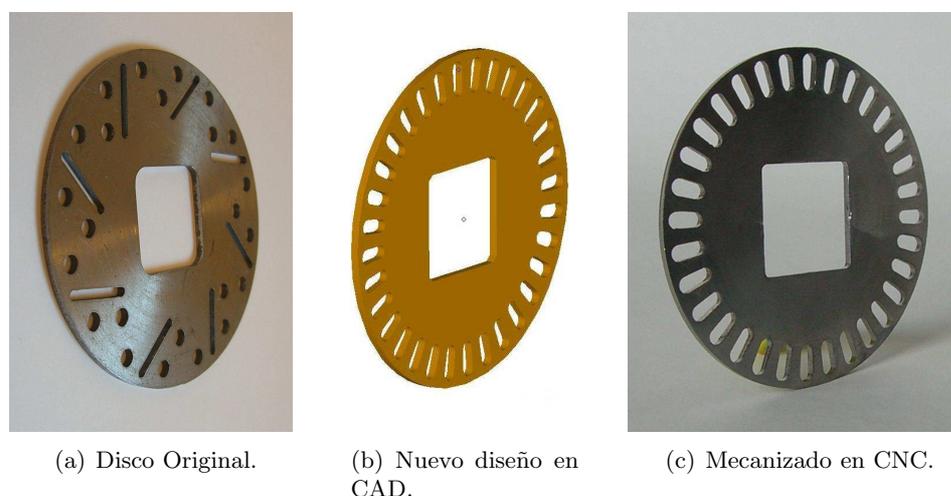


Figura 5.4: Nuevo disco de freno.

su fabricación, o calcular datos como momentos de inercia o distribución de masas de piezas complejas para incorporarlos en los modelos dinámicos del vehículo. En la figura 5.1 se muestra una imagen del modelo 3D obtenido, y en la 5.2 el alzado, la planta y el perfil.

5.2.1. Frenos

Como se pretende que el vehículo pueda realizar maniobras en las que se prueben diferentes condiciones, es necesario que cada una de las cuatro ruedas pueda ser frenada de forma controlada e independiente; también se necesita equipar cada rueda con un sensor que permita conocer su posición y velocidad angulares. Debido a ello se ha rediseñado el sistema de frenos del vehículo, de forma que sirva para estos dos cometidos.

Se ha optado por mantener las pinzas de freno de las que se disponía como equipamiento opcional del vehículo en las ruedas delanteras, que comprimen dos zapatas sobre cada uno de los discos de freno mediante un mecanismo de leva y reenvío desde su servomotor correspondiente.

En las ruedas traseras, como se ha explicado ya, existía un único freno que actuaba sobre el diferencial. Por esta razón no había accesorios para frenar independientemente las ruedas. La solución adoptada en este caso fue utilizar las pinzas de freno traseras de un vehículo de características similares. Para poder adaptarlas al sistema de eje, transmisión y suspensión traseros del vehículo fue necesario diseñar y construir un nuevo buje, como se expandrá con detalle más adelante.

Para hacer posible la medida de posición y velocidad angular de cada rueda ha tenido que ser modificado el diseño de los discos de freno originales,

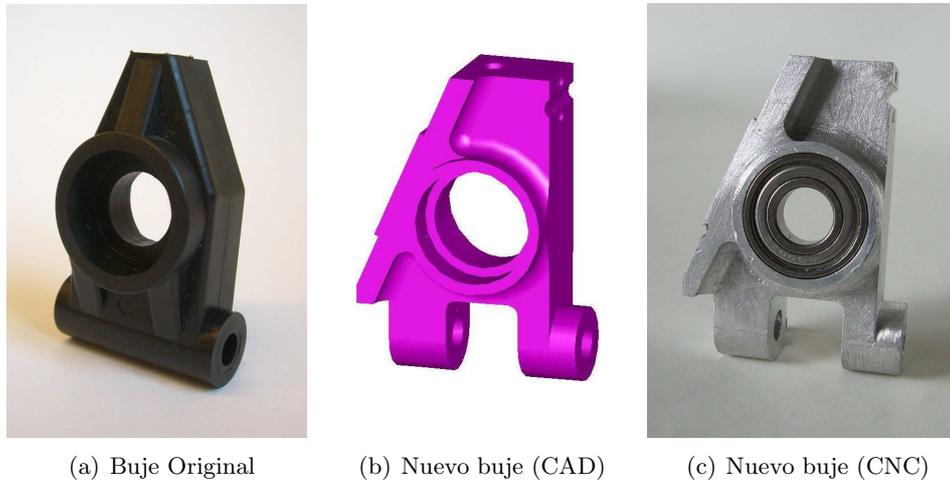


Figura 5.5: Rediseño del buje trasero.

incorporando en éstos 32 ranuras radiales, como se indica en la figura 5.3. Debido a que la precisión en el mecanizado de estas ranuras incide directamente sobre la precisión en la medida de la posición y la velocidad de las ruedas, las ranuras han sido cortadas mediante láser, en una máquina de control numérico. En la figura 5.4 se muestra el diseño del nuevo disco en el programa de CAD, y el disco resultante, cortado por láser y CNC.

Enfrentado al paso de estas ranuras, se ha colocado un sensor inductivo que detecta el paso de las mismas en cada rueda. Del sensor inductivo se obtiene una señal binaria de tensión: cuando el sensor inductivo está enfrenteado a la parte metálica del disco (espacio entre dos ranuras), devuelve una tensión positiva igual a la de alimentación. Cuando está enfrenteado al hueco de una ranura su salida es de 0 V.

Midiendo el tiempo entre pulsos y el número de éstos se puede determinar la velocidad angular de cada rueda (este cálculo, y su precisión máxima, se expondrá con detalle en el punto 5.3.1):

$$\omega_{rueda} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot n_{pulsos}}{32 \cdot 16 \cdot t_{medido}} = \frac{10^6 \cdot \pi \cdot n_{pulsos}}{256 \cdot t_{medido}} \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (5.1)$$

5.2.2. Bujes traseros

Para acomodar las pinzas y los nuevos discos de freno ranurados, el sensor inductivo, los rodamientos y el eje de la rueda, ha sido necesario sustituir los bujes originales del eje trasero. Para ello, utilizando el modelo en CAD del vehículo, se ha partido de las dimensiones de los bujes originales, y se han rediseñado las partes necesarias para soportar las nuevas funcionalidades de freno y sensorización.



Figura 5.6: Rediseño del eje trasero.

El material de los bujes originales, poliamida, también ha sido reemplazado por una aleación de aluminio, de forma que ha sido posible mecanizar los nuevos bujes mediante herramientas de control numérico. En la figura 5.5 se puede ver el aspecto de los bujes originales y el de los nuevos.

Para el nuevo diseño se han tenido en cuenta las cargas mecánicas, la masa —se trata de masas suspendidas—, y la posibilidad de recibir todos los componentes mencionados. Se han comprobado las interacciones del nuevo buje en el modelo 3-D del vehículo, y a continuación se han fresado en una aleación de aluminio especial por su ligereza y resistencia.

5.2.3. Ejes traseros

Debido a que incorpora más elementos que el original, el nuevo buje para los ejes traseros ocupa más espacio en el eje de la rueda. Por tanto, para albergar las pinzas de freno es necesario incrementar la longitud de los ejes, y con ello el ancho de vía trasero.

Para esto se han alargado los ejes de ambas ruedas, partiendo de los originales modelados en CAD, y mecanizando los nuevos en acero inoxidable mediante herramientas de control numérico. En la figura 5.6 se puede observar el aspecto de los ejes originales y los alargados.

El eje gira en dos rodamientos alojados en el buje, y tiene mecanizado un chavetero en el que encaja la ranura que tiene la rueda. Por el extremo de ésta está rematado en una rosca M8 en la que se aloja la única tuerca que mantiene la rueda solidaria con el eje. El otro extremo tiene forma de vaso ranurado, y sirve para recoger las esferas con cruceta en las que terminan los palieres; este conjunto forma parte de la junta homocinética de cada rueda.

5.2.4. Bandeja de servomotores

El vehículo disponía, en su configuración original, de un servomotor para la dirección y otro para gobernar el acelerador del motor y el único freno al diferencial trasero. El diseño original para el alojamiento de estos dos servomotores consistía en una bandeja con los espacios adecuados, mecanizada en *ERGAL*. La nueva estrategia de control del vehículo supone equipar el

freno de cada rueda con su propio servomotor, para asegurar un control independiente en cada rueda, y separar las funciones de freno y acelerador. Por tanto, en la nueva bandeja ha de asegurarse el alojamiento de un servomotor de gran tamaño para la dirección, y cinco de tamaño estándar para el acelerador y los cuatro frenos. Además, en la bandeja se alojarán el receptor de Radio Control y el interruptor principal, y los soportes para los alojamientos de los sistemas de adquisición, control y transmisión-recepción de datos.

Como en los elementos anteriores, se ha partido del modelo en CAD del diseño original, y se han llevado a cabo las modificaciones necesarias para adaptarlo a las nuevas necesidades. La nueva bandeja ha sido mecanizada a partir de una chapa de aleación de aluminio mediante herramientas de control numérico.

En la figura 5.7 se pueden ver las bandejas original y definitiva.

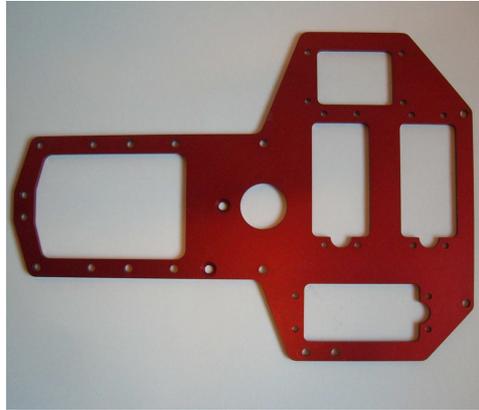
5.3. Sistema de adquisición de datos y control del vehículo

Como se ha explicado en los capítulos anteriores, es necesario adquirir en tiempo real el valor de determinadas variables del vehículo que permitirán, tras su tratamiento mediante el nuevo algoritmo propuesto en el capítulo 6, estimar el estado cinemático y dinámico del vehículo. Estas variables son las aceleraciones lineales, el campo magnético local y las velocidades angulares del chasis según los tres ejes del sistema local. Además, en previsión del posible incremento del estado del estimador, y con ello de su precisión de estimación, se adquirirán también la posición y velocidad angular de cada una de las ruedas del vehículo, la posición del sistema de dirección del vehículo y la posición de cada una de las suspensiones. Por último, y para mejorar la estimación, se caracterizarán los sensores en función de su comportamiento frente a cambios de temperatura, por lo que también será necesario adquirir la temperatura en el interior del vehículo.

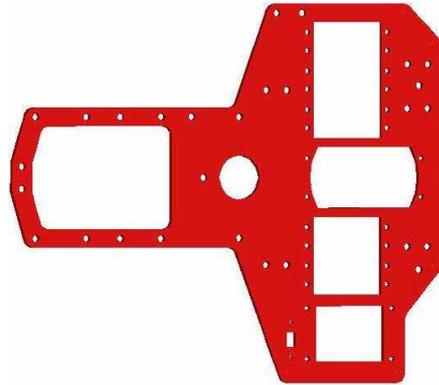
Además será necesario instalar en el vehículo los servomotores que permitan controlarlo, también en tiempo real, de forma que sea posible realizar y repetir de forma precisa y controlada las maniobras de los ensayos.

El estado del arte en la simulación cinemática y dinámica permitiría realizar la simulación en tiempo real con una potencia de cálculo moderada. Con ello sería posible efectuar la estimación del estado del vehículo y, a partir de ésta, el control del mismo en menos tiempo que un intervalo de muestreo. Sin embargo, el *hardware* necesario para esto es demasiado grande y pesado, por el momento, para ser situado a bordo de un vehículo a escala reducida.

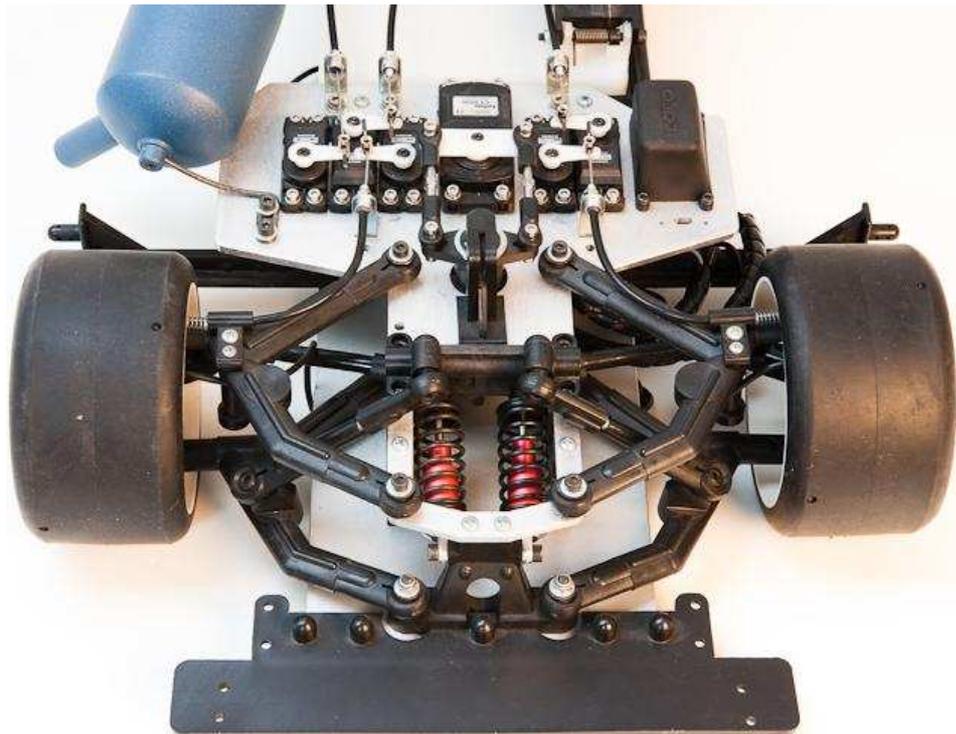
Debido a esto, el procesado de la estimación en tiempo real, así como los algoritmos de control del vehículo serán efectuados en una máquina in-



(a) Original.



(b) Nueva bandeja en CAD.



(c) Nueva bandeja mecanizada en CNC, montada en su alojamiento definitivo, y con los servos en sus lugares correspondientes.

Figura 5.7: Rediseño de la bandeja de servomotores.

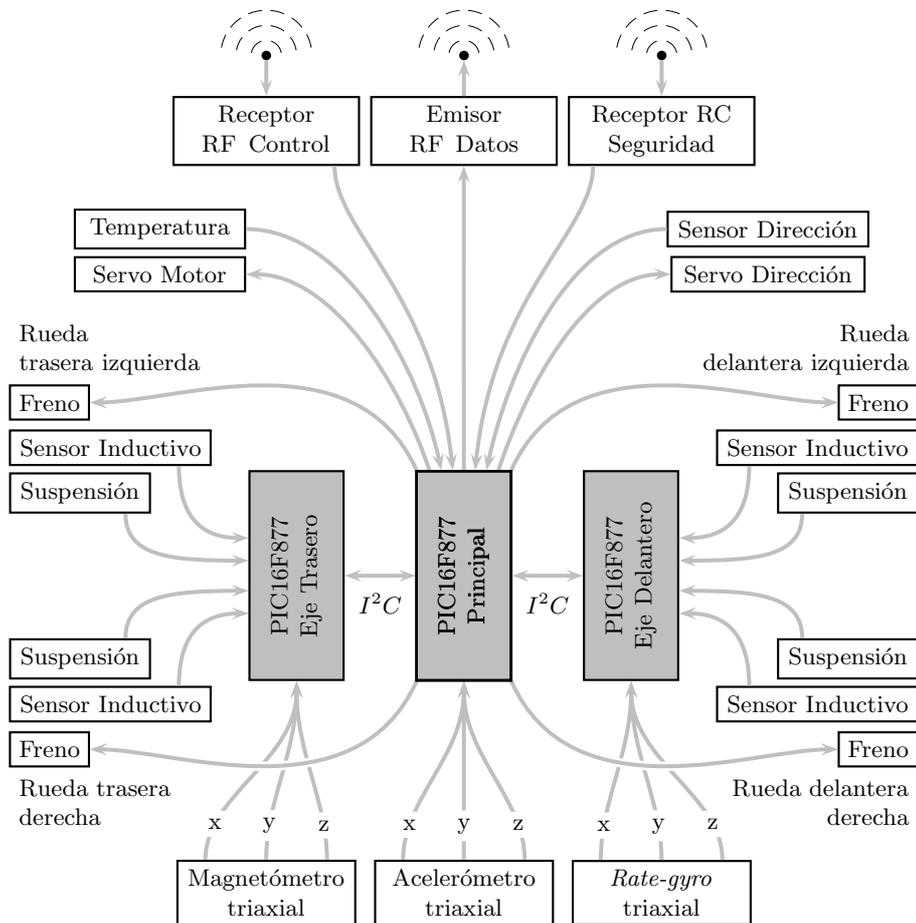


Figura 5.8: Arquitectura del sistema de adquisición de datos y control del vehículo.

dependiente, situada fuera del vehículo. Por tanto será preciso establecer un medio de comunicación inalámbrica bidireccional entre ambos.

Finalmente, será necesario mantener un canal de comunicaciones independiente, también inalámbrico, que permita tomar el control del vehículo y manejarlo de forma manual en caso de fallo o averías en su sistema de control.

Para el procesado de la información y el control del vehículo a bordo se ha desarrollado un sistema basado en un microcontrolador PIC16F877, de *Arizona Microchip*. Este microcontrolador dispone de 10 entradas analógicas, y un convertidor analógico-digital de aproximaciones sucesivas y 10 bits de resolución, así como el *hardware* específico para las comunicaciones, la generación de las señales PWM para los servomotores, la cuenta de los pulsos de los sensores inductivos de cada rueda, y la lectura de los tiempos entre los pulsos de estos sensores. También dispone de *hardware* capaz de

leer las señales digitales de control para el canal auxiliar de seguridad.

El número de entradas analógicas no es suficiente para todos los sensores con los que se equipará el vehículo, por lo que será necesario añadir *hardware* externo para expandir estas entradas. Aunque se podrían añadir más convertidores analógico–digitales, se ha optado por utilizar dos microcontroladores más, idénticos al principal, al que suman sus entradas analógicas y el resto de *hardware* interno, de modo que es posible repartir las tareas de adquisición y control entre los tres, y con ello minimizar el retraso que supondría ejecutarlas en secuencia una tras otra. El esquema de este sistema de adquisición y control que se ha desarrollado se muestra en la figura 5.8. En el apéndice C en la página 159 se muestra el esquema eléctrico completo del sistema de adquisición de datos y control, en las figuras C.1, C.2 y C.3.

Por otra parte, esta solución añade más memoria, capacidad de procesamiento y señales entrada/salida, con lo que se incrementan las posibilidades de expansión para futuros desarrollos. La sincronización y comunicación entre los tres microcontroladores se realiza mediante un bus de comunicaciones serie I²C . Para asegurar que la base de tiempos utilizada en todas las señales digitales es coherente para los tres microcontroladores, se utiliza un único cristal de cuarzo, con una precisión de 16 ppm y una deriva térmica despreciable para las precisiones que se manejan en este sistema.

5.3.1. Adquisición de datos

En esta sección se describirán los sensores utilizados para adquirir cada una de las magnitudes que se han mencionado. Como se ha expuesto en secciones anteriores, se han tenido en cuenta factores como la resolución, la precisión, la deriva térmica, la inmunidad a ruidos y ambientes hostiles, el tamaño, el peso o, incluso, la disponibilidad a la hora de adquirirlos.

Posición y velocidad angulares de las ruedas

Es preciso que se pueda adquirir la velocidad de angular de cada rueda, y también su posición, aunque sea de forma relativa. El sensor inductivo y el disco de freno ranurado, tal y como se han expuesto, son aptos para este propósito, aunque su uso no es trivial. En principio, se pueden utilizar dos técnicas para obtener la velocidad y la posición angulares de cada rueda utilizando la información que se obtiene de los sensores inductivos y los discos de freno ranurados:

- Medir el tiempo que transcurre entre dos flancos (positivos, negativos o ambos) de la señal del sensor inductivo. Con este tiempo, t_i , y sabiendo que cada disco de freno tiene 32 ranuras, es posible estimar la velocidad angular haciendo

$$\omega_i = \frac{2\pi}{32 \cdot t_i} [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (5.2)$$

En realidad t_i será una representación digital del tiempo real entre flancos, y en el proceso de digitalización sufrirá errores de truncamiento y/o redondeo, en función del proceso digital que se utilice para su obtención. Por esta razón, la precisión de esta estimación será mejor cuanto menor sea la velocidad angular que se mida. A medida que la velocidad aumenta, el error lo hace también. En velocidades altas este estimador no es válido.

- Contar el número de flancos (positivos, negativos, o ambos) que suceden durante un intervalo de tiempo determinado. Si el número de flancos es n_i y el intervalo de tiempo t , entonces la velocidad se podrá estimar mediante

$$\omega_i = \frac{2\pi \cdot n_i}{32 \cdot t} [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (5.3)$$

En este caso, el número de flancos detectados por intervalo es una estimación del ángulo rotado por la rueda en ese tiempo, truncada debido al número finito de ranuras en el disco de freno. Por esta razón esta estimación será válida cuando la velocidad que se intenta medir es alta, con lo que se producirá un número elevado de flancos, de forma que el error debido al truncamiento será suficientemente bajo. Este método no sirve para medir velocidades bajas.

Cada uno de estos métodos es válido solamente en un rango de velocidades, y ninguno sirve para capturar la velocidad y posición angulares de la rueda en todo el margen de velocidades que se pretende medir. Además, en el caso del primer método, las medidas se obtienen cada vez que se detecta un flanco en el sensor inductivo; teniendo en cuenta que las medidas tomadas a bordo del vehículo serán transmitidas a un ordenador remoto, es necesario que éstas se obtengan con una cadencia determinada. Por esto se ha decidido utilizar un nuevo método de adquisición y codificación para la medida de la velocidad y posición angulares, que consiste básicamente en una mezcla de los dos expuestos: durante un tiempo prefijado, que coincide con el período de muestreo de las demás señales (se ha adoptado $T = 10$ ms) se cuentan el número de flancos detectados (n_i) y el tiempo transcurrido entre el primero y el último (t_i). Sustituyendo t por t_i en la ecuación 5.3 se obtiene la estimación de la velocidad angular.

En la figura 5.9(a) se muestran las gráficas de las lecturas de la cuenta de pulsos detectados en un período de muestreo, en naranja, y el tiempo medido entre el primero y el último de esos pulsos, en azul. En el eje horizontal está la velocidad del vehículo, desde 0 hasta $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (108 km/h). La cuenta de pulsos será siempre un número natural, que no sobrepasa los 25 pulsos (para un tiempo máximo de muestreo de 10 ms, una rueda de 124 mm de diámetro, un disco de freno con 32 ranuras y una velocidad máxima de $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). El número de pulsos medidos fluctúa entre dos números naturales consecutivos para cada velocidad, como se observa en la figura.

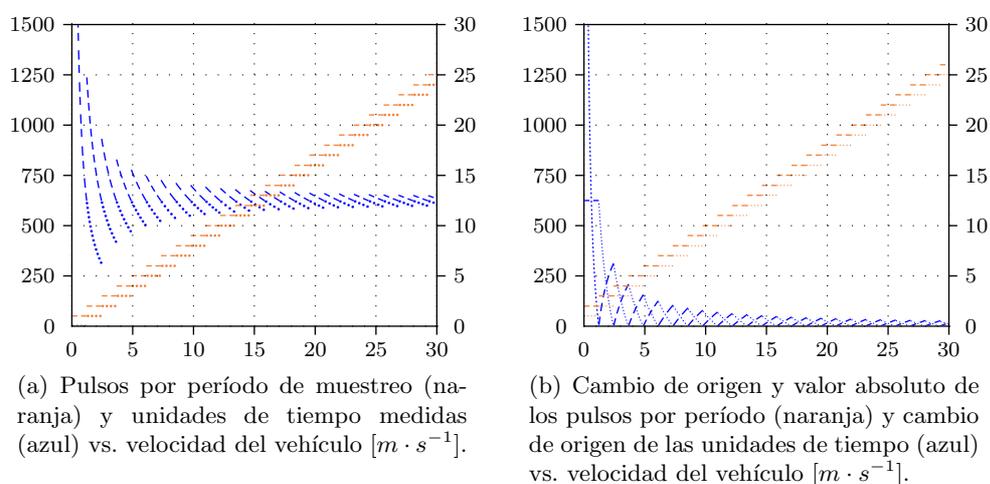


Figura 5.9: Mediciones obtenidas del sensor inductivo y el disco de freno, para la estimación de la velocidad y posición angulares de las ruedas.

El tiempo entre el primero y el último de estos pulsos se mide utilizando el *hardware* del microcontrolador a bordo del vehículo, y para ello se utiliza una base de tiempos de $16 \mu s$. De la misma forma que con la cuenta de pulsos, esta cuenta será un número natural, y podrá fluctuar entre dos cantidades para cada velocidad. La precisión de esta medida depende únicamente de la estabilidad y precisión del oscilador de cuarzo que genera la base de tiempos del microcontrolador.

El número de pulsos aumenta con la velocidad, pero el tiempo medido disminuye (cada uno de los tramos azules en 5.9(a)). Cuanto más alta es la velocidad, más pequeño es el margen de variación posible para la medida del tiempo. Cuando la velocidad tiende a infinito el tiempo tiende a 625 (para el diámetro de rueda, el número de ranuras y la base de tiempos utilizados). De forma que es posible realizar un cambio de origen en el tiempo, como se muestra en la figura 5.9(b), en la que se puede ver la medida del tiempo disminuida en 625 unidades (para el propósito de determinar el número de bits necesarios para codificar esta información, también se ha representado la parte negativa resultante de este desplazamiento, pero después de haber eliminado el signo). Asimismo, en esta figura se ha desplazado 1 unidad hacia arriba la cuenta de pulsos, con el propósito de que éste valor no sea nulo nunca.

El número de bits necesarios para representar en binario cada una de estas dos magnitudes, una vez manipuladas como se ha expuesto, se muestra en la figura 5.10(a) en la página siguiente (nuevamente, azul para el tiempo y naranja para el número de pulsos). Ambas gráficas son complementarias, como se observa en la figura. La gráfica verde muestra la suma de ambas, y es casi constante e inferior a 12 bits salvo para las velocidades por debajo

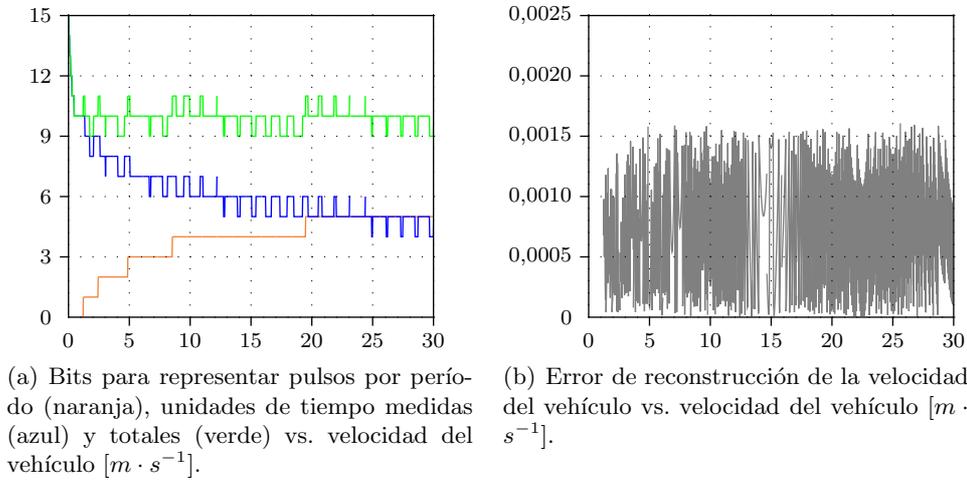


Figura 5.10: Bits de codificación y error en la reconstrucción de la velocidad a partir del número de pulsos y el tiempo medidos.

de $0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Por ello es posible unir los bits necesarios para representar ambas magnitudes en una sola cantidad binaria, de 11 bits de longitud. A esta cantidad se le añadirán 3 bits más para indicar la longitud binaria del número de pulsos. Teniendo en cuenta que el número de pulsos es siempre no nulo, su bit más significativo será siempre “1”, y se podrá prescindir de él.

En resumen, se compacta la información obtenida del sensor inductivo de cada rueda en una cadena binaria de 13 bits de longitud que contiene el número de pulsos por período de muestreo y el tiempo entre pulsos.

La distancia lineal recorrida por la rueda entre dos flancos positivos (o negativos) obtenidos en el sensor inductivo es, teniendo en cuenta su diámetro (0,124 m) y el número de ranuras del disco (32):

$$d_{flancos} = \frac{\pi \cdot 0,124}{32} \simeq 0,012 \text{ m} \quad (5.4)$$

y esta es, también, la resolución máxima de posición lineal de la rueda que se puede obtener de este sistema de medición. El producto de esta distancia por el número de ranuras contenido en la palabra de 13 bits permite, por tanto, obtener la posición relativa avanzada por la rueda desde la anterior medición. En esta medida no hay errores de redondeo ni numéricos. La velocidad angular de la rueda puede obtenerse de forma similar, utilizando las dos componentes de la palabra binaria de 13 bits.

En la figura 5.10(b) se muestra una representación de los errores obtenidos al estimar la velocidad mediante el método combinado velocidad-posición que aquí se ha propuesto. Se puede apreciar que los errores son inferiores a 0,16%, para cualquier velocidad. Para alcanzar esta resolución con un sis-

Característica	Valor	Condiciones
Resistencia ($k\Omega$)	5	Lineal
Tolerancia (%FS)	± 20	
Linealidad (%FS)	± 2	
Coefficiente de temperatura (ppm/ $^{\circ}C$)	0 a 200	Máximo
Regularidad a la salida (%FS)	0,5	
Temperatura de funcionamiento ($^{\circ}C$)	-40 a +130	
Recorrido eléctrico (mm)	10	
Recorrido mecánico (mm)	12,5	
Fuerza de funcionamiento (N)	2 a 7,5	
Vida útil mecánica (ciclos)	5×10^6	

Cuadro 5.2: Especificaciones del sensor de posición lineal *LM10*.

tema que sólo considerase la velocidad serían necesarios al menos 10 bits, tres menos que los 13 que aquí se proponen. Sin embargo, con el incremento de estos tres bits que este sistema implica (y el aumento de complejidad), se consigue enviar simultáneamente la información de posición y velocidad angulares para todo el rango de velocidades útil del vehículo. Este hecho es importante ya que, como se verá en la sección 5.3.2, el ancho de banda para enviar la información al equipo que la procesará es limitado.

Finalmente, si en lugar de adoptarse la solución propuesta se hubiese optado por calcular la velocidad a bordo del vehículo y codificarla con 10 bits, entonces, aunque la resolución sería la misma, esta operación introduciría errores numéricos y de redondeo y truncamiento. A su vez, la obtención de la posición se haría integrando esta velocidad, de forma que los errores en el cálculo de la posición se verían amplificados por la integración. La solución aquí propuesta no tiene estos inconvenientes.

Posición de las suspensiones y la dirección

Para medir la posición de cada suspensión se ha utilizado un transductor potenciométrico, con émbolo de reposición por resorte, modelo *LM10*, diseñado específicamente para la adquisición de posiciones lineales en aplicaciones de automoción, y por tanto para soportar condiciones de elevada vibración y continuos cambios de posición y temperatura, así como para funcionar en ambientes hostiles (suciedad, cambios de temperatura, etc.). El transductor en sí es un potenciómetro lineal en el que el elemento resistivo es de un polímero especial, de resistencia controlada, en lugar de la habitual película de carbón depositada sobre un sustrato. Por esta razón puede soportar las exigentes condiciones de trabajo a las que será sometido. En la figura 5.11(a) se muestra una imagen de este sensor, y en la tabla 5.2 sus principales especificaciones técnicas. Es de destacar la vida mecánica útil

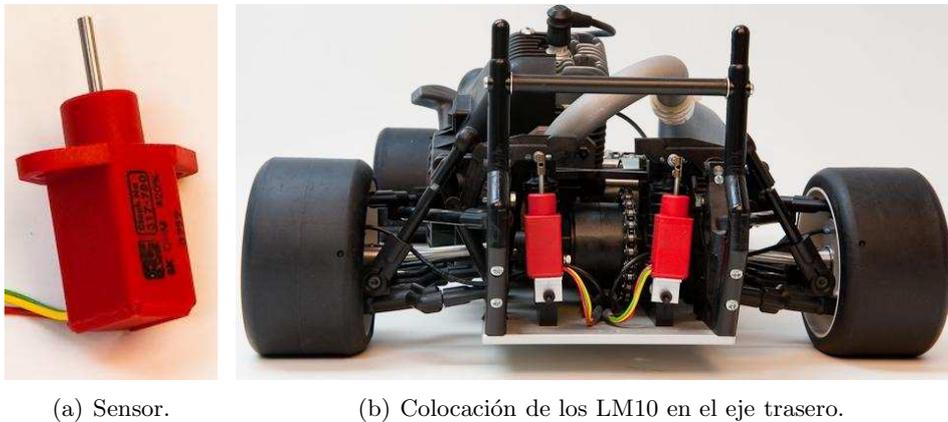


Figura 5.11: Sensor de posición LM10 y su ubicación en el eje trasero.

que, según las especificaciones del fabricante, es de $5 \cdot 10^6$ ciclos.

Cada uno de los sensores han sido situados en la suspensión correspondiente, de manera que miden directamente las elongaciones del muelle y el amortiguador de esa suspensión. En la figura 5.11(b) se puede comprobar la posición de estos sensores en la suspensiones traseras.

Medida de aceleraciones del chasis

Según se ha expuesto en la sección 4.2.2, será necesario obtener medidas de las aceleraciones en los tres ejes del sistema de referencia del vehículo, con una magnitud máxima de ± 2 , y con frecuencias desde 0 Hz. Por tanto, de las diferentes tecnologías de acelerómetros disponibles, sólo serán válidas aquellas que puedan registrar aceleraciones constantes, incluyendo la de la gravedad. Esto descarta gran parte de los acelerómetros destinados a medir cambios en la aceleración (para pruebas de choque, por ejemplo), ya que no son capaces de registrar aceleraciones constantes o que cambian lentamente. Por otra parte, el tamaño y el rango necesarios limitan la selección a unos pocos acelerómetros.

En este trabajo se ha optado por un acelerómetro triaxial *CXL02LF3*. Forma parte de una ampliación de la gama de acelerómetros de *Analog Devices* ofrecida por *Crossbow*. El rango es ± 2 g. El principio físico del sensor es una masa que oscila, en función de la aceleración a la que se le somete, en el extremo de una viga en voladizo. La flexión de la viga es detectada y amplificada mediante electrónica analógica [23]. Todo ello se encuentra integrado en un solo chip de silicio utilizando tecnología *MEMS*. A continuación, se encapsulan tres sensores así constituidos, alineados según tres ejes ortogonales, en un único módulo. En la figura 5.12(a) se puede ver una imagen del módulo, y en la tabla 5.3 sus características más importantes.

Característica	Cantidad	Observaciones
Comportamiento		
Rango (g)	± 2	$\pm 5\%$
Deriva a 0 g (mV)	± 30	0 °C a +70 °C
Sensibilidad (V/g)	1	$\pm 5\%$
Sensibilidad transversal (%FS)	± 5	Máximo
No-Linealidad (%FS)	± 2	Típico
Error de alineamiento (°)	± 2	Típico
Densidad de ruido ($\mu\text{g}/\text{Hz}^{\frac{1}{2}}$)	130	Típico
Ruido (mg rms)	1,5	Típico
Ancho de Banda (Hz)	0 – 125	$\pm 5\%$
Entorno		
Rango de temperatura (°C)	-40 a +85	
Choque (g)	2000	
Eléctricas		
Tensión de alimentación (V)	$+5 \pm 0,25$	
Salida a 0 g (V)	$+2,5 \pm 0,15$	@+25 °C
Consumo (mA)	4/eje	Típico
Salida (V)	$\pm 2,0 \pm 0,1$	@+25 °C
Impedancia de salida	$>20 \text{ k}\Omega, <30 \text{ nF}$	
Físicas		
Tamaño (mm)	$19 \times 47,6 \times 25,4$	
Peso (g)	46	

Cuadro 5.3: Especificaciones del acelerómetro triaxial *Crossbow CXL02LF3*.

Medida de velocidades angulares del chasis

De entre las alternativas de posibles transductores para medir la velocidad angular en los tres ejes del vehículo, se ha optado por tres giróscopos cerámicos *MEMS*, porque son los únicos que se adaptan a las restricciones de peso y espacio a las que serán destinadas en este trabajo.

El principio físico del transductor se basa en un pequeño cilindro de material cerámico con características piezoeléctricas, sobre el que se depositan seis láminas de material conductor. Tres de ellas se utilizan para inyectar unas tensiones alternas en el cilindro que, aprovechando las características piezoeléctricas del material cerámico, hacen oscilar al cilindro de una manera determinada. Las rotaciones de este cilindro según su eje, debidas a las velocidades angulares que se quieren detectar, hacen que la oscilación se desvíe de la inducida, de igual manera que sucede en un *péndulo de Foucault*. Esta desviación es medida mediante técnicas capacitivas utilizando las otras tres láminas, y amplificada utilizando electrónica analógica. Todo ello es fabricado utilizando tecnologías *MEMS*, y encapsulado en una caja metálica



(a) Sensor triaxial.

(b) Colocación del sensor en el centro de gravedad del vehículo.

Figura 5.12: Acelerómetro triaxial *Crossbow CXL02LF3* y colocación en el vehículo.

que lo aísla de perturbaciones externas debidas a campos magnéticos.

En las figuras 5.13(a) se puede ver una imagen de este sensor. En el encapsulado se encuentra un único giróscopo, por lo que será necesario colocar tres, según las tres direcciones ortogonales en las que se desea medir la velocidad angular; esta colocación puede observarse en la figura 5.13(b). En la tabla 5.4 se muestran sus características fundamentales.

Como se puede comprobar en esta tabla, la variación de las características del sensor frente a cambios de temperatura no es despreciable. Aunque probablemente esto sea admisible en el entorno para el que fueron diseñados estos sensores (estabilización de imagen en cámaras de fotografía y vídeo), en el trabajo que aquí se propone es necesario modelar y parametrizar esta variabilidad en función de la temperatura, de forma que se pueda establecer un modelo dinámico más preciso del funcionamiento del sensor [45].

Como se ha expuesto en el capítulo 6, el estimador que se propone en este trabajo utiliza la medida de la temperatura y un modelo matemático del comportamiento dinámico de los sensores, para obtener una estimación mejor. Aunque el modelo matemático utilizado no es muy preciso, se ha calibrado particularmente para cada uno de los sensores, como se muestra en el capítulo 5, con lo que se espera que la mejora en la estimación sea importante.

Medida del campo magnético de la Tierra

El campo magnético terrestre es variable en dirección e intensidad en toda la superficie del planeta. También varía con la altitud y con el tiempo.

Característica	Valor	Cond.
Tensión de alimentación (V)	+5	
Tensión de Salida de referencia (V)	+2,4	
Consumo (mA)	7	Máx.
Máxima velocidad angular detectable ($^{\circ}/s$)	± 90	25 $^{\circ}C$
Sensibilidad (mV/ $^{\circ}/s$)	$1,1 \pm 20\%$	25 $^{\circ}C$
Tensión de salida com velocidad angular nula (mV) máximo	± 300	25 $^{\circ}C$
	± 500	
Caract. de temperatura de la sensibilidad (%)	± 15	
Respuesta en frecuencia (Hz) mínimo	100	-90 $^{\circ}$
Rango de temperatura de operación ($^{\circ}C$)	-5 ~ 75	
Rango de temperatura de almacenamiento ($^{\circ}C$)	-40 ~ 80	
Dimensiones (mm)	8 \times 20 \times 8	

Cuadro 5.4: Especificaciones del gir6scopo cer6mico *Tokin CG-16D*.

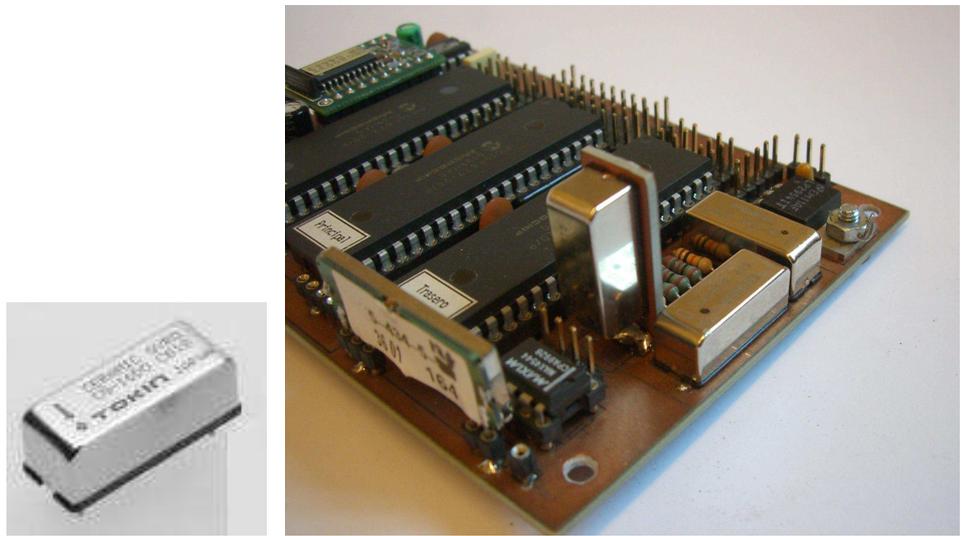
Sin embargo, teniendo en cuenta que los experimentos se realizar6n en una zona peque1a respecto a la variabilidad del campo, y que la duraci6n de cada experimento ser6 corta, puede suponerse que el campo se mantiene constante durante el tiempo del experimento, y en toda la superficie en la que se efect6a el mismo.

Pero el campo magn6tico terrestre se puede ver perturbado por la presencia de materiales met6licos, ferromagn6ticos o no, e incluso de materiales no met6licos con una permeabilidad magn6tica relativamente alta. Por otra parte, las corrientes el6ctricas alternas y continuas generan a su vez campos que se suman al terrestre local y aparecen en la medida de los sensores.

Respecto a las perturbaciones producidas por grandes masas met6licas en el entorno del experimento (monta1as, por ejemplo) puede suponerse que su influencia es constante en toda la superficie de pruebas, y por lo tanto que no afectar6 a la estimaci6n de la orientaci6n para la que se utilizar6n los datos del campo magn6tico. Esta cuesti6n se analizar6 detalladamente en el cap6tulo 6. Las perturbaciones producidas por peque1os objetos, que estar6n localizadas y ser6n de 6mbito local (dependen del cubo de la distancia al objeto) se pueden obviar realizando las pruebas en espacios abiertos alejados¹.

Respecto a las perturbaciones producidas por materiales met6licos o no met6licos con alta permeabilidad magn6tica a bordo del veh6culo, que son cercanos y se mueven con el mismo, su efecto puede ser calibrado tenien-

¹Esta limitaci6n, no obstante, es necesaria de todas formas: en las pruebas que se realizar6n es de esperar que el veh6culo alcance velocidades elevadas, y sobrepase frecuentemente las condiciones de p6rdida de adherencia. Por tanto, las pruebas se han de realizar necesariamente en grandes espacios abiertos, en los que no se espera que se produzcan perturbaciones locales del campo magn6tico terrestre.



(a) Sensor.

(b) Posicionado ortogonal de los tres giróscopos en la placa base del sistema de adquisición y control.

Figura 5.13: Giróscopos piezoeléctricos *Tokin CG-16D* y posicionamiento ortogonal.

do en cuenta que las posiciones relativas de estos materiales y del sensor magnético permanecen constantes durante todas las pruebas. Por otra parte, no se encuentran a bordo del vehículo masas de metal ferromagnético lo suficientemente grandes como para perturbar de forma apreciable el campo magnético. El chasis, la bandeja portaservos y el motor están realizados en aleaciones de aluminio (el cigüeñal del motor es la única pieza de acero de cierta masa, pero está lo suficientemente lejos del sensor magnético como para generar una distorsión apreciable).

Por último, las corrientes eléctricas a bordo del vehículo son todas (salvo una, que se expondrá en detalle a continuación) de intensidad muy baja, o de frecuencia muy alta, o se producen en el interior de objetos *apantallados* mediante una *jaula de Faraday* (el sistema de encendido electrónico del motor, por ejemplo). Los campos magnéticos generados por las corrientes de baja intensidad son de poca entidad, y no alteran el campo magnético de forma apreciable para el sensor. Las corrientes de alta frecuencia que se producen en las inmediaciones del cristal de cuarzo que genera la frecuencia de reloj digital (de 16 MHz) para los tres microcontroladores, además de ser de poca intensidad, generan unos campos alternos que son eliminados por la alta impedancia de entrada que el sensor magnético presenta a los campos alternos de frecuencias elevadas.

Estos razonamientos son expuestos con más detalle en [8] o [18]. Además, en [70] y [83] se pueden consultar estudios detallados de la influencia de



Figura 5.14: Magnetómetro triaxial *HMC2003*.

diferentes campos magnéticos y electromagnéticos, naturales y artificiales, sobre sistemas de sensorización similares al aquí propuesto.

El sensor utilizado en este trabajo para medir el campo magnético terrestre es el magnetómetro triaxial *HMC2003*, de *Honeywell*. Se trata en realidad de un sensor biaxial (*HMC1002*) y un monoaxial (*HMC1001*) del mismo fabricante, situados de modo que miden las tres componentes ortogonales del campo magnético.

El transductor en sí, en ambos casos, consiste en una película de material magneto-resistivo conocida como *permalloy*. Ambos sensores están situados en una placa de circuito impreso de pequeño tamaño junto con la electrónica analógica necesaria para amplificar y realizar la adaptación de impedancias necesaria para entregar una señal en tensión adecuada para la conversión analógico-digital posterior. Esta etapa analógica, además, constituye un filtro paso-bajo con una frecuencia de corte de 1 kHz. Las características técnicas más importantes de este dispositivo pueden consultarse en la tabla 5.5.

Este módulo contiene, además, tres bobinas ortogonales que pueden utilizarse, inyectando en ellas las corrientes adecuadas, para cancelar desviaciones de la medida del campo magnético producidas por objetos magnéticos externos. Además de las posibles perturbaciones del campo magnético que se han mencionado ya, este tipo de sensores es susceptible de sufrir otros dos inconvenientes que pueden afectar a la medida del campo magnético: la posible magnetización de los transductores y la histéresis. Para evitarlas, se han incorporado en el módulo otras bobinas que aceptan corrientes relativamente altas y que generan un campo magnético momentáneo de elevada intensidad; este campo es capaz de eliminar la posible magnetización remanente que podría acumularse en los transductores.

El circuito que se ha diseñado en el trabajo que aquí se propone aprovecha esta característica del sensor, y genera la tensión necesaria para conseguir picos de 20 A de corriente en estas bobinas, de $2 \mu\text{s}$ de duración. Estos pulsos se generan inmediatamente después de finalizar la adquisición de datos de

Característica	Mín.	Típ.	Máx.	Condiciones
Tensión de alimentación (V)	6		15	
Consumo (mA)			20	
Rango del campo (gauss)	-2		2	
Tensión de Salida (V)	0,5		4,5	
Resolución (μ gauss)		40		
Ancho de banda (kHz)		1		
Sensibilidad de campo (V/gauss)	0,98	1	1,02	
Salida con campo nulo (V)	2,3	2,5	2,7	
Error de linealidad (%FS)		0,5	2	± 1 gauss
Error de linealidad (%FS)		1	2	± 2 gauss
Error de histéresis (%FS)		0,05	0,1	± 2 gauss
Error de repetibilidad (% FS)		0,05	0,1	± 2 gauss
Tempco de sensibilidad (ppm/ $^{\circ}$ C)		-600		
Tempco de campo nulo (ppm/ $^{\circ}$ C)		± 400		Sin reset
Tempco de campo nulo (ppm/ $^{\circ}$ C)		± 100		Con reset
Temperatura de funcionamiento ($^{\circ}$ C)	-40		85	
Temperatura de almacenamiento ($^{\circ}$ C)	-55		125	
Choque (g)		100		
Vibración (g rms)		2,2		
Influencia de la alimentación (%FS)			0,1	6 a 15 V

Cuadro 5.5: Especificaciones del magnetómetro *Honeywell HMC2003*.

todos los sensores analógicos del vehículo, cada 10 ms, de forma que los posibles efectos que podría ocasionar este pulso sobre el resto de los sensores no afectan a las medidas obtenidas.

Para generar estos pulsos de tan corta duración y alta intensidad es necesario disponer de una tensión elevada. No es posible utilizar para ello bobinas en topologías de convertidores DC-DC típicos (*step-up converters*), debido a los efectos sobre la medida del campo magnético que podrían ocasionar, por tanto en este trabajo se ha optado por diseñar un circuito basado en una *bomba de carga* de condensadores.

Este circuito se muestra en el recuadro de la esquina superior derecha de la figura C.1 en la página 160, con el nombre de *Convertidor 5-12-20 V*. Está basado en un MAX662A, de *Maxim*, y unos diodos *Schottky* especiales (D1 y D2), de muy baja caída de tensión. Ésta es almacenada en un par de condensadores con *ESR* muy baja (C21 y C22), y dispuestos en paralelo para conseguir los picos de corriente tan elevados que se necesitan. Los condensadores flotantes C10 y C11 constituyen, junto al MAX662A, la bomba de carga de tensión. Los terminales C1- y C2- de C21 y C22 se conectan, alternativamente, a masa y a la alimentación del MAX662A, y con la misma secuencia, los terminales C1+ y C2+ se conectan a la alimentación

y a C9. Esta conmutación requiere 8 transistores *CMOS* específicos, de alta velocidad y bajas pérdidas en conmutación, que se encuentran dentro del MAX662A, junto con la electrónica de control necesaria.

Otros datos

Los sensores que se han expuesto son sensibles a las variaciones de temperatura (los giróscopos cerámicos son especialmente sensibles). Por eso se ha añadido un sensor que mide la temperatura local, en las inmediaciones de estos magnetómetros y los giróscopos. Este sensor es un circuito integrado *LM335*, de *National Semiconductors*. La medida que se obtiene con él se utiliza en el modelo matemático de los sensores inerciales y magnéticos que representa su dependencia con la temperatura.

Por último, para medir la posición del mecanismo de la dirección, y por restricciones de espacio, se utiliza el propio potenciómetro interno del lazo de realimentación para el control de posición del servomotor de la dirección.

5.3.2. Transmisión de los datos

Se ha explicado ya que los datos obtenidos por el conjunto de sensores del vehículo no son procesados a bordo del mismo, sino que son enviados en tiempo real a un ordenador remoto. El enlace de radiofrecuencia utilizado para esta misión ha de cumplir algunas especificaciones fundamentales:

- el retraso que introduzca en la transmisión de los datos debe ser muy pequeño, en comparación al período de muestreo (10 ms),
- el retraso, además, debe ser constante para todas las transmisiones,
- el ancho de banda debe ser suficiente, teniendo en cuenta el tamaño y cantidad de los datos, y la frecuencia con la que serán transmitidos
- el alcance debe ser suficiente para seguir al vehículo en las maniobras que requieran mayor distancia.

Las dos últimas restricciones son relativamente fáciles de cumplir con muchos tipos de enlaces de radiofrecuencia. Algunos incluso permiten alcances extremadamente lejanos (por ejemplo, tecnologías basadas en *UMTS* o *3G*). En última instancia, es posible encontrar una banda de radiofrecuencia en la que se pueda utilizar un transmisor con la potencia y ancho de banda que se necesitan.

La dificultad principal estriba, sin embargo, en las dos primeras restricciones. La primera es consecuencia de que se pretende ejecutar en tiempo real, y de forma remota, la estimación de posición y los algoritmos de control a partir de los datos adquiridos. Esto implica que los datos han de “subir” desde el vehículo hasta el ordenador en el que se hace este procesado; a

continuación éste ejecutará la estimación de la orientación y, a partir de sus resultados, decidirá los comandos a enviar al vehículo para controlarlo, ejecutando así las maniobras previstas. Estos comandos “bajarán” de vuelta al vehículo, donde serán enviados a los actuadores. Esta ejecución del control en cuatro fases ha de realizarse en menos tiempo que un período de muestreo, esto es, 10 ms.

La segunda restricción es necesaria para descartar aquellos sistemas de transmisión de datos que imponen retrasos variables en la transmisión de los datos, por las mismas razones que se han expuesto en el párrafo anterior.

La mayor parte de los sistemas de transmisión orientados a compartir la misma banda de radiofrecuencia entre todos sus usuarios falla en estas dos primeras restricciones. Los retrasos son excesivos y/o impredecibles, y en última instancia, variables en función de la ocupación de la banda, del número de usuarios que la utilizan en cada instante, o de las restricciones impuestas por el propio sistema (los operadores de telefonía móvil, por ejemplo). Por tanto, y desafortunadamente, no es posible utilizar para este trabajo los sistemas habituales de *Spread Spectrum*² (*UMTS*³, *CDMA*⁴, *HSDPA*⁵, *BlueTooth*⁶, *Wi-Fi*⁷, *MiWi*⁸, *ZigBee*⁹, etc.). Es necesario utilizar un sistema en el que se pueda disponer de una banda de radiofrecuencia para uso

²El espectro ensanchado (del inglés *Spread Spectrum*, o SS) es una técnica de modulación empleada en telecomunicaciones para la transmisión de datos, por lo común digitales y por radiofrecuencia.

³Sistema Universal de Telecomunicaciones Móviles (del inglés *Universal Mobile Telecommunications System*) es una de las tecnologías usadas por los móviles de tercera generación (3G, también llamado W-CDMA), sucesora de GSM.

⁴La multiplexación por división de código, acceso múltiple por división de código o CDMA (del inglés *Code Division Multiple Access*) es un término genérico para varios métodos de multiplexación o control de acceso al medio basados en la tecnología de espectro expandido.

⁵*HSDPA* (del inglés *High Speed Downlink Packet Access*) es la optimización de la tecnología espectral UMTS/WCDMA, incluida en las especificaciones de *3GPP release 5* y mejora significativamente la capacidad máxima de transferencia de información. Es la evolución de la tercera generación (3G) de tecnología móvil, llamada 3.5G, y se considera el paso previo antes de la cuarta generación (4G). Actualmente se está desarrollando la especificación 3.9G antes del lanzamiento de 4G.

⁶*Bluetooth* es una especificación industrial para Redes Inalámbricas de Área Personal (WPANs) que posibilita la transmisión de voz y datos entre diferentes dispositivos mediante un enlace por radiofrecuencia en la banda *ISM* de los 2,4 GHz.

⁷*Wi-Fi* es una marca de la *Wi-Fi Alliance*, la organización comercial que adopta, prueba y certifica que los equipos cumplen los estándares 802.11 relacionados con redes inalámbricas de área local.

⁸*Miwi*TM es un protocolo inalámbrico para redes de área personal basado en el estándar IEEE 802.15.4 que engloba las redes de área personal con tasas bajas de transmisión de datos.

⁹*ZigBee* Es el nombre de la especificación de un conjunto de protocolos de alto nivel, de comunicación inalámbrica, para su utilización con radios digitales de bajo consumo, basada en el estándar IEEE 802.15.4 de redes inalámbricas de área personal (*Wireless Personal Area Network*, WPAN). Está orientada a la domótica.

exclusivo de la transmisión de estos datos, y que permita el ancho de banda y el alcance necesarios.

En este caso se ha optado por desarrollar íntegramente un sistema de codificación de la información, utilizando para la etapa de radiofrecuencia una pareja de transmisor y receptor genéricos (*QFMT5* y *QFMR5*, respectivamente) de *R. F. Solutions*. Esta pareja opera en la frecuencia de 868 MHz, apta para su uso en Europa en aplicaciones como la que aquí se propone. Es capaz de transmitir datos binarios de hasta 128 Kbit por segundo a una distancia de hasta 500 m en espacios abiertos.

Estos módulos codifican la información modulando la frecuencia portadora. Si la señal que se envía es analógica, esta modulación se conoce como *FM*, o *frecuencia modulada*. En este caso se transmitirán la información una vez digitalizada, por lo que se modulará información binaria en la frecuencia de una portadora analógica; el nombre que se da a esta modulación es *PSK*, de *Phase Shift Keyed* (modulación por desplazamiento de fase).

Para recuperar la información enviada mediante esta modulación el receptor tendrá que reconstruir la señal digital a partir de la señal de radiofrecuencia que recibe. Aunque no es del ámbito de este trabajo una descripción detallada del funcionamiento interno del demodulador, baste decir que existe una etapa en éste, denominada *data slicer*, que se ocupa de decidir la frecuencia de corte que separa los “1” binarios de los “0”. Esto es necesario porque, a pesar de que las frecuencias de emisor y receptor están fijadas en un margen muy estrecho, fenómenos como reflexiones, difracciones o *efecto Doppler* hacen que estas frecuencias puedan variar.

Lo importante en este caso es que no es posible transmitir una serie prolongada de “1”s o de “0”s, porque el *data slicer* se desviaría y dejaría de detectar el umbral de corte correcto. Existen varios algoritmos para resolver esta dificultad. De ellos, el más utilizado es el *código Manchester*, que consiste en duplicar el número de bits necesarios para transmitir la información: para enviar un “1” se transmite en realidad un “01”, y para enviar un “0” se transmite en realidad un “10”. De esta forma los valores binarios se alternan, y nunca se transmiten más de dos valores iguales consecutivos. El número de 1’s transmitidos es igual al de 0’s. En este caso se dice que *se mantiene el nivel de continua* de la señal.

El *código Manchester* es robusto y sencillo, pero transmite el doble de bits, y por tanto necesita el doble de ancho de banda. Además, necesita el doble de tiempo para transmitir la misma cantidad de información binaria, por lo que el retraso que se genera en la transmisión de la información se duplica. Para los efectos de este trabajo, el ancho de banda de la etapa de radiofrecuencia seleccionada es suficiente, y podría transmitir el doble de información. Pero duplicar la frecuencia de la señal transmitida degrada el alcance. Por otra parte, duplicar el retraso, como se ha explicado ya, es desaconsejable para los objetivos que se pretenden alcanzar. Por tanto se ha diseñado una estrategia nueva de codificación de la información binaria.

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
0	0	00000000	1	4	9	1	170	0	10101010	1	0	1	9
1	0	00000001	1	3	8	1	85	0	01010101	1	0	2	7
2	0	00000010	1	3	7	3	86	0	01010110	1	0	2	7
3	0	00000011	1	2	7	1	90	0	01011010	1	0	2	7
4	0	00000100	1	3	6	3	106	0	01101010	1	0	2	7
5	0	00000101	1	2	6	3	149	0	10010101	1	0	2	7
6	0	00000110	1	2	6	3	150	0	10010110	1	0	2	7
7	0	00000111	1	1	6	1	154	0	10011010	1	0	2	7
8	0	00001000	1	3	5	3	165	0	10100101	1	0	2	7
9	0	00001001	1	2	5	3	166	0	10100110	1	0	2	7
10	0	00001010	1	2	5	5	169	0	10101001	1	0	2	7
⋮						⋮	⋮						⋮
54	0	00110110	1	0	3	5	57	0	00111001	1	0	3	3
55	0	00110111	1	1	4	3	99	0	01100011	1	0	3	3
56	0	00111000	1	1	3	3	113	0	01110001	1	0	3	3
57	0	00111001	1	0	3	3	23	0	00010111	1	0	4	3
58	0	00111010	1	0	3	5	27	0	00011011	1	0	4	3
59	0	00111011	1	1	3	3	29	0	00011101	1	0	4	3
60	0	00111100	1	0	4	3	30	0	00011110	1	0	4	3
61	0	00111101	1	1	4	3	39	0	00100111	1	0	4	3
62	0	00111110	1	1	5	3	60	0	00111100	1	0	4	3
63	0	00111111	1	2	7	1	71	0	01000111	1	0	4	3
64	0	01000000	1	3	6	3	120	0	01111000	1	0	4	3
65	0	01000001	1	2	5	3	135	0	10000111	1	0	4	3
66	0	01000010	1	2	4	5	195	0	11000011	1	0	4	3
67	0	01000011	1	1	4	3	225	0	11100001	1	0	4	3
68	0	01000100	1	2	3	5	240	0	11110000	1	0	4	3
69	0	01000101	1	1	3	5	15	0	00001111	1	0	5	1
70	0	01000110	1	1	3	5	74	0	01001010	1	1	2	7
⋮						⋮	⋮						⋮
249	0	11111001	1	2	5	3	128	0	10000000	1	3	7	3
250	0	11111010	1	2	5	5	191	0	10111111	1	3	7	3
251	0	11111011	1	3	5	3	254	0	11111110	1	3	7	3
252	0	11111100	1	2	6	3	1	0	00000001	1	3	8	1
253	0	11111101	1	3	6	3	127	0	01111111	1	3	8	1
254	0	11111110	1	3	7	3	0	0	00000000	1	4	9	1
255	0	11111111	1	4	9	1	255	0	11111111	1	4	9	1

Cuadro 5.6: Tabla parcial de valores para la codificación Pseudo-Manchester.

Primero se han realizado experimentos que han permitido determinar que se pueden transmitir hasta tres bits consecutivos del mismo valor (0 ó 1), o cuatro si se producen de forma aislada, sin que se degrade la recepción. Teniendo en cuenta esto, se ha realizado un análisis numérico de la forma en la que la codificación binaria habitual sitúa bits iguales de forma consecutiva, para comprobar qué bytes de los 256 posibles serían aptos para su transmisión sin modificación.

En la tabla 5.6 en la página anterior se recoge esta información, que por cuestiones de espacio está resumida, y muestra solamente algunos de los 256 valores posibles (en el apéndice B en la página 151 se encuentra la tabla completa). Las primeras columnas muestran los valores binarios de un byte, en notación decimal, en notación binaria, el *nivel de continua*, la cuenta de bits iguales consecutivos y el número de flancos (cambios de valor binario) que se producirían al transmitir el byte. A los 8 bits de la notación binaria se le han añadido los de *start* y *stop* que la *UART* del microcontrolador transmitirá junto con los de datos. Estos dos bits también se han tenido en cuenta a la hora de computar el número de flancos y el número de bits iguales consecutivos. En esta parte de la tabla las filas están ordenadas atendiendo al valor decimal. En el segundo grupo de columnas se muestra la misma información, pero en este caso las filas se han ordenado atendiendo al nivel de continua, el número de bits iguales consecutivos y el número de flancos, en este orden.

Como se puede observar en la tabla, hay 70 valores (del 0 al 69) que tienen un nivel de continua 0. De estos 70 valores se han escogido los primeros 64 (del 0 al 63), que se pueden representar mediante 6 bits, que tienen el número más bajo de bits iguales consecutivos; en concreto, salvo los 7 últimos valores todos tienen a los sumo 3 bits iguales consecutivos. Se ha comprobado que estos 64 valores se transmiten sin problemas utilizando el emisor y receptor seleccionados. Por ello, para transmitir los datos adquiridos en el vehículo, se agrupa toda la información en palabras de 6 bits, se utiliza una tabla para consultar el valor al que corresponden esos 6 bits, y se transmite este valor. En el receptor sucede el proceso inverso. Con este esquema el resultado es intermedio entre transmitir la información sin modificar (con problemas de reconstrucción de los bits en el *data slicer*, como se ha explicado) y utilizar el *Código Manchester* (que se transmite correctamente, pero necesita el doble de recursos y duplica el retraso). Los datos son transmitidos correctamente y se utilizan de forma efectiva 6 de cada 8 bits transmitidos.

Para asegurar la correcta recepción de los datos transmitidos, éstos son agrupados en “paquetes” que contienen los datos adquiridos en cada intervalo de muestreo, y a los que se une un byte de marca de tiempo (*time stamp*), que permite detectar la pérdida de paquetes durante la transmisión y un byte de comprobación de errores (*checksum*, en este caso). El paquete así formado se trocea en unidades de 6 bits, se codifica mediante el *pseudo-Manchester* expuesto, y se transmite por el enlace de radiofrecuencia.

Como el ancho de banda es más que suficiente para transmitir la información, la transmisión de un paquete ocupa menos que un período de muestreo. Concretamente, un paquete contiene 30 bytes, incluyendo un byte de inicio, los datos, el *time stamp* y el *checksum*, y se transmite por la *UART* del microcontrolador a 57600 baudios. Estos 30 bytes son 240 bits, que tras pasar por la codificación *pseudo-Manchester* aumentan hasta 40 bytes. Junto con los bits de start y stop que se añaden a cada uno de ellos en la transmisión, son en total 400 bits para transmitir cada paquete. La transmisión tarda 6,94 ms.

Durante el tiempo restante hasta los 20 ms del período de muestreo ha de seguir transmitiéndose información sin *nivel de continua*, para mantener sintonizado el *data slicer*. Entre cada paquete, en lugar de apagar la emisión de radio, se emiten bytes con un valor constante y especial que permite la sincronización inmediata en la recepción de cada nuevo paquete.

La recepción en sí es complicada, y se efectúa en varias fases. Del torrente ininterrumpido de bits que se obtienen del receptor, hay que decidir en primer lugar dónde comienza y termina cada byte. Para ello sirven, precisamente, los bytes de relleno que se envían entre paquetes. Tienen un valor que no puede ser transmitido con los datos, y además permiten la sincronización de la *UART* a nivel de bytes. Una vez hecho esto, es necesario saber en qué byte comienza cada uno de los paquetes. Para ello se utilizan nuevamente los bytes de sincronismo, el de inicio de paquete, el *time-stamp* y el *checksum*; esta parte es la sincronización a nivel de paquetes. Una vez obtenido el paquete, se procederá a decodificar el *pseudo-Manchester*, y se obtendrán las unidades de 6 bits correspondientes. Estas unidades, concatenadas, permitirán obtener, partiéndolas de nuevo de 8 en 8 bits, los bytes originales. De ellos, finalmente, se obtienen los datos transmitidos.

Aunque este esquema de codificación y decodificación es complicado y necesita ciertos recursos computacionales, permite cumplir con los objetivos prefijados para esta tarea. De no ser por las latencias largas y/o imprevisibles de los sistemas comerciales de radiofrecuencia *Spread Spectrum*, habría sido más sencillo utilizar para esta tarea módulos comerciales específicos.

El módulo diseñado, además de cumplir con los objetivos necesarios, destaca por las siguientes cualidades:

- pequeño tamaño y bajo coste, ya que la mayor parte de las operaciones se efectúan en el microcontrolador principal, y en el ordenador remoto,
- de alcance y ancho de banda suficiente, en espacios abiertos y sin obstrucciones para las señales de radio frecuencia,
- robusto y poco sensible a perturbaciones debido a la codificación *pseudo-Manchester*, que garantiza un *nivel de continua* nulo de la señal de radiofrecuencia y una duración corta de los “1” y “0” de la señal,

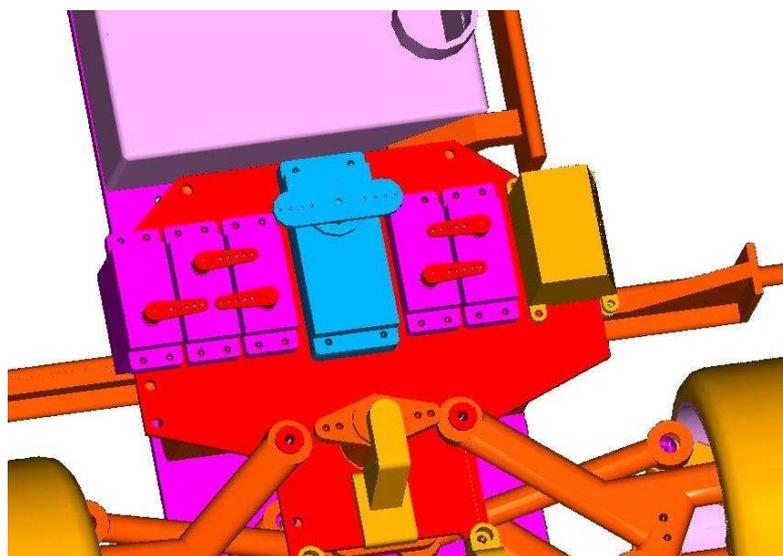


Figura 5.15: servomotores colocados en la bandeja.

- permite detectar errores en la transmisión, debido a los diferentes niveles de sincronización (de byte y de paquete) en la recepción, y al byte de comprobación o *checksum*,
- permite la correcta ubicación de cada paquete de información en el tiempo, en caso de la pérdida de alguno de ellos, gracias al byte de índice o *time stamp*,
- poco retardo en la transmisión de la información, y
- retardo en la transmisión conocido, constante e igual para todos los paquetes.

5.4. Control del vehículo

Tal como se ha dicho, el vehículo disponía en su configuración original de dos servos para su control. Uno de ellos controlaba la dirección y el otro el acelerador y el único freno, que actuaba sobre el diferencial. Para la aplicación que aquí se expone ha tenido que ser modificada la estructura de control: se mantiene el servo de dirección, y se añaden otros cuatro para gobernar independientemente cada uno de los frenos de las ruedas. Además, otro servo independiente controla el acelerador. Por tanto, y como se ha expuesto en la sección 5.2.4, la bandeja que aloja los servos ha tenido que ser modificada para dar cabida a los seis servos.

Los nuevos servos de frenos actúan sobre cada pinza mediante una transmisión flexible; lo mismo sucede con el servo del acelerador. El servo de

dirección ha de manejar potencias más elevadas, porque necesita mover el mecanismo de dirección con suficiente autoridad. En este caso el servo actúa directamente mediante dos bielas sobre un mecanismo *salvaservos* que transmite el movimiento a la dirección, pero cede cuando se producen golpes en las ruedas, de forma que estos golpes no deterioran el servo. En la figura 5.15 se puede observar la disposición final proyectada de los servos en la bandeja original (en rojo). En ella se puede observar la falta de espacio para albergar todos los servos y el compartimento para albergar el receptor de Radio Control (a la derecha de la bandeja, en naranja), motivo por el que fue necesario modificarla. El servo de dirección (en azul) se situó en el centro de la bandeja, de forma que pudiese actuar directamente sobre el *salvaservos*. Los cuatro servos de freno (en malva) se situaron a ambos lados del de dirección, dispuestos simétricamente, de forma que la actuación sobre los frenos del lado izquierdo y derecho es similar.

El control de los servos se genera en el microcontrolador principal, en base a las órdenes recibidas desde el ordenador remoto, como se explicará detalladamente en la sección 5.4.1. Las señales de control para los servos son digitales, pero contienen una información analógica; se trata de un pulso de tensión de ancho variable, desde 1 ms hasta 2 ms, que se repite típicamente con una frecuencia de 50 Hz. Este tipo de codificación analógica sobre una señal digital se conoce como “PWM” (*Pulse Width Modulation*). Es necesario generar estas señales con suficiente precisión, para obtener una respuesta adecuada de los servos. Los servos utilizados en este trabajo son capaces de discernir diferencias de ancho de pulso de hasta 2 μ s, aunque su zona muerta típica es de alrededor de 4 μ s. Utilizando el *hardware* interno de que dispone el microcontrolador es posible generar las señales de control de los servos con resoluciones de 1 μ s o mejores. La técnica utilizada para generar las señales de todos los servos a partir de un único módulo CCP del microcontrolador, y con la resolución mencionada, es nueva y ha sido diseñada específicamente para este trabajo, como se explica en la siguiente sección.

5.4.1. Generación de las señales para los servos

Los microcontroladores utilizados en este trabajo contienen dos módulos “CCP” (*Capture, Compare, PWM*) que contienen la electrónica digital necesaria para manejar alguno de los temporizadores internos y capturar el número de pulsos por unidad de tiempo de alguna señal externa, medir el ancho de esos pulsos, o generar señales de pulsos PWM, con un ancho proporcional a una cantidad binaria. Para este trabajo se utiliza uno de los módulos CCP del microcontrolador principal para leer la información de la señal de control procedente del ordenador remoto. El otro módulo se utiliza para generar todas las señales PWM de los servos a bordo del vehículo.

El módulo CCP está formado únicamente por electrónica digital, de forma que la precisión de la señal PWM que genera está condicionada única-

mente por la del cristal de cuarzo que genera el reloj interno del microcontrolador. En este caso, se ha escogido un cristal con una variabilidad con la temperatura de sólo algunas partes por millón, más que suficiente para los propósitos que aquí se persiguen.

El ancho de pulso de las señales que se han de generar para los servos es de entre 1 y 2 milisegundos, correspondiendo 1,5 ms a la posición central de cada servo. La frecuencia con la que se ha de repetir cada uno de estos pulsos es de 50 Hz, con lo que su período será de 20 ms, y para generar cada una de estas señales con una resolución de 1 μ s sería necesario discernir entre 20000 anchos de pulso diferentes, con lo que se precisaría una cantidad binaria de, al menos, 15 bits. Esto es excesivo para la resolución que se necesita —ya se ha mencionado que los servos sólo son capaces de discernir 2 μ s de entre los 1000 de excursión que van desde el extremo izquierdo (1 ms) al derecho (2 ms)— de forma que sería suficiente representar su posición mediante una cantidad de 9 bits.

Por otra parte la electrónica de control interna de cada servo hace llegar a su motor la tensión necesaria para llevarlo a la posición deseada sólo durante los primeros microsegundos que siguen a su señal PWM. Por tanto, el consumo de energía de la batería que alimenta la parte eléctrica del vehículo se produce, por parte del motor de cada servo, en picos de intensidad elevada y muy corta duración, que siguen al final de cada pulso PWM que reciben. Teniendo en cuenta que hay 6 servos a bordo del vehículo, es necesario escalonar la generación de cada uno de sus pulsos PWM, con la finalidad de separar en el tiempo los picos de consumo de cada servo, y de esta forma evitar los posibles problemas que un consumo puntual excesivo podría ocasionar en el resto de los circuitos, que se alimentan de la misma batería.

Por último, cada módulo CCP está diseñado para generar una única señal PWM, y en este caso se necesitan seis, una para cada servo. Para resolver estos tres problemas se ha diseñado una nueva estrategia de control del módulo PWM que permite utilizarlo para generar las seis señales PWM de cada servo, escalonadas en el tiempo, utilizando el *hardware* del módulo CCP de forma que se consigue la precisión del cristal de cuarzo, y utilizando para ello únicamente la información binaria necesaria. Como se verá a continuación, aunque esta estrategia de control complica ligeramente la programación del microcontrolador, utiliza muy poco *hardware* externo: únicamente seis resistencias.

En la figura 5.16 en la página siguiente se muestra el esquema general del funcionamiento de esta estrategia de control. Básicamente consiste en programar un “ciclo falso” en el módulo CCP (en este caso se utiliza el CCP2), y esperar a que el comienzo de este módulo genere la interrupción *hardware* pertinente (INT 1). En la rutina de atención de la interrupción se programa de nuevo el módulo CCP para que genere un ciclo fijo, de duración 1ms, y se preparan los pines de salida de los servos para dirigir el

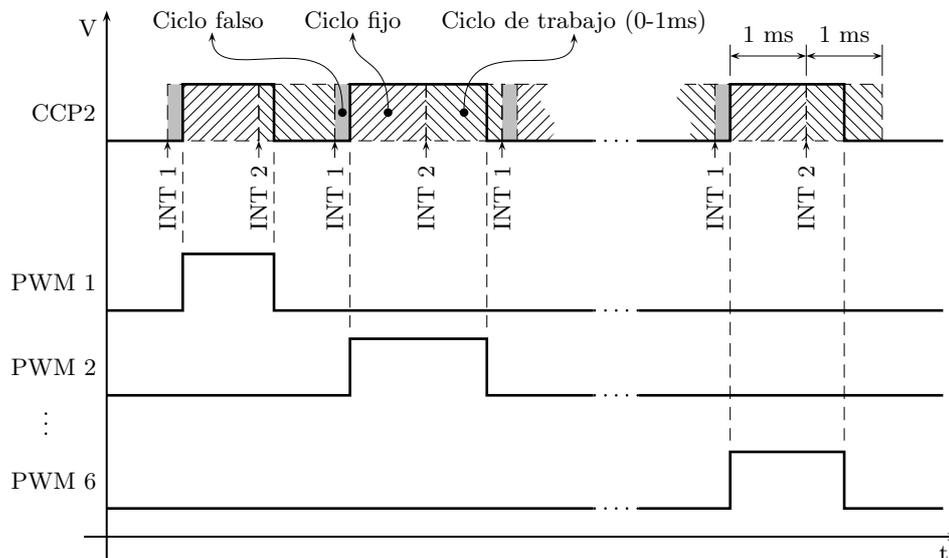


Figura 5.16: Diagrama de tiempos de la generación de las señales PWM para el control de los servomotores.

próximo pulso al servo adecuado. Esta es la única finalidad del ciclo falso, que además no genera ninguna salida de tensión en su puerto correspondiente (RC1 en la figura 5.17 en la página siguiente). A continuación se fuerza un fin prematuro del ciclo falso, que de esta forma dura solamente unos microsegundos, y comienza inmediatamente el ciclo fijo, de 1 ms de duración. Durante este pulso la salida del módulo CCP está a 1, y por medio del puente de resistencias de la figura 5.17, esta salida de tensión se dirige al servo adecuado. Tras haber configurado el *hardware* CCP para el siguiente ciclo, se abandona la rutina de interrupción. El circuito de la figura 5.17 es una parte del mostrado en el apéndice C, en la figura C.1 en la página 160.

Al finalizar el ciclo fijo, el hardware del CCP genera una nueva interrupción. En ese instante comienza el ciclo de trabajo, en el que la salida del CCP está a 1 solamente durante un tiempo programado, que es función del estado en el que se desea posicionar el servo correspondiente (entre 1 y 2 ms). En la rutina de atención de interrupciones se prepara el *hardware* del CCP para el próximo ciclo falso.

El proceso se repite hasta haber generado los pulsos de todos los servos, y el ciclo completo comienza de nuevo transcurridos 20 ms (50 Hz de período)¹⁰. Las acciones realizadas por la rutina de control, tal y como se ha descrito, son únicamente de configuración del módulo CCP y las salidas de los servos (RB0 a RB5), de forma que la medida del ancho de cada uno de

¹⁰En realidad, en este trabajo se ha incrementado la frecuencia de las señales PWM a los servos, para incrementar su velocidad de respuesta su par, de forma que el período se ha reducido desde 20 hasta 15 ms.

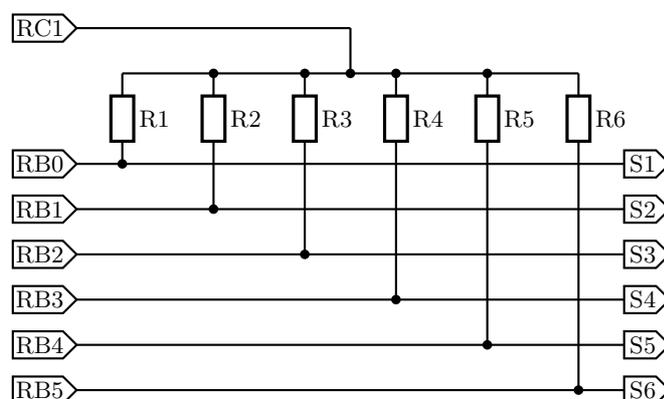


Figura 5.17: Esquema del circuito para la generación de las señales PWM para el control de los servomotores.

los pulsos generados se realiza exclusivamente por el *hardware* del módulo CCP. Esto trae consigo las siguientes ventajas:

- Máxima precisión y resolución posible: sólo dependen de las del oscilador que mueve el PIC,
- muy poca carga del procesador: solamente unas pocas instrucciones para configurar el CCP y las salidas del PIC en cada una de las interrupciones,
- escalonamiento de la generación de los pulsos para cada uno de los servos, de forma que la distribución del consumo de los mismos es más homogénea, y
- *hardware* externo mínimo: solamente es necesaria una resistencia por cada servo que se utilice, como se ve en la figura 5.17).

Otros métodos de control, incluso comerciales, ofrecen resultados con éxito desigual, sobre todo si se los enfrenta a servos digitales, mucho más exigentes en la precisión de la temporización de su señal PWM de control. El nuevo algoritmo de control aquí descrito ha sido contrastado generando la señal para 8 servos diferentes, analógicos y digitales, con un comportamiento óptimo y sin incidencias.

5.5. Caracterización de los sensores

En las especificaciones técnicas expuestas en las tablas de la sección 5.3.1 se pone de manifiesto que el comportamiento de los sensores cambia con su temperatura. Este hecho es especialmente crítico en los sensores inerciales y magnéticos, porque de ellos se obtendrá la estimación de orientación y

posición. En la obtención de esta estimación los datos sufrirán los errores numéricos y las no linealidades del modelo y el estimador y esto hará, probablemente, que los errores de los sensores se vean incrementados. Por otra parte, la deriva térmica varía en función del sensor, y unos son más inmunes que otros a las variaciones con la temperatura. En concreto, los giróscopos cerámicos son los más sensibles a la temperatura, y presentan fuertes derivas con ésta.

En el capítulo 6 se explicará (en la sección 6.7) que el estimador propuesto en este trabajo tiene en cuenta la variación de comportamiento de los sensores con la temperatura, de forma que ésta se añade como una variable más del vector de estado del nuevo filtro de Kalman. Se utiliza un modelo matemático sencillo del comportamiento de los sensores con la temperatura para eliminar, en la medida de lo posible, las perturbaciones que ésta origina.

Para el uso de esta información es necesario conocer el comportamiento de los sensores con la temperatura. Para ello se han diseñado un banco de ensayos y un experimento que permiten estudiar el comportamiento de los sensores inerciales y magnéticos frente a la variación de ésta. En esta sección se describe el experimento y el banco de calibración desarrollados.

5.5.1. Diseño del banco de caracterización

Los sensores que se pretende analizar son los inerciales y magnéticos incorporados en el vehículo. Las magnitudes que miden son aceleración lineal, velocidad angular e intensidad de campo magnético.

Se ha optado por construir una plataforma giratoria, con velocidad angular controlada de forma precisa, que gira alrededor de un eje vertical y se encuentra en el interior de una cámara con temperatura controlada. Los sensores que se pretende caracterizar giran solidarios con la plataforma, y envían sus lecturas al mismo sistema de adquisición y control del vehículo explicado en la sección anterior, que gira en la misma plataforma y recoge y transmite por radiofrecuencia los datos de los sensores a un ordenador remoto, como se ha expuesto en la sección anterior. En la imagen 5.18 se puede ver la composición del banco de caracterización.

Esta disposición permite comprobar la influencia de la temperatura sobre los sensores, y también otros factores como el posible acoplamiento entre los diferentes ejes de los sensores triaxiales, debidos tal vez a pequeñas desviaciones de orientación en su manufactura. También permite conocer la posible influencia de la velocidad angular sobre la medida de la aceleración o el campo magnético, o de la aceleración sobre la velocidad angular o el campo magnético.

Los giróscopos cerámicos miden directamente la velocidad angular del disco sobre el que están colocados, si se orientan correctamente con el eje de su elemento sensible paralelo al de rotación de la plataforma. Variando

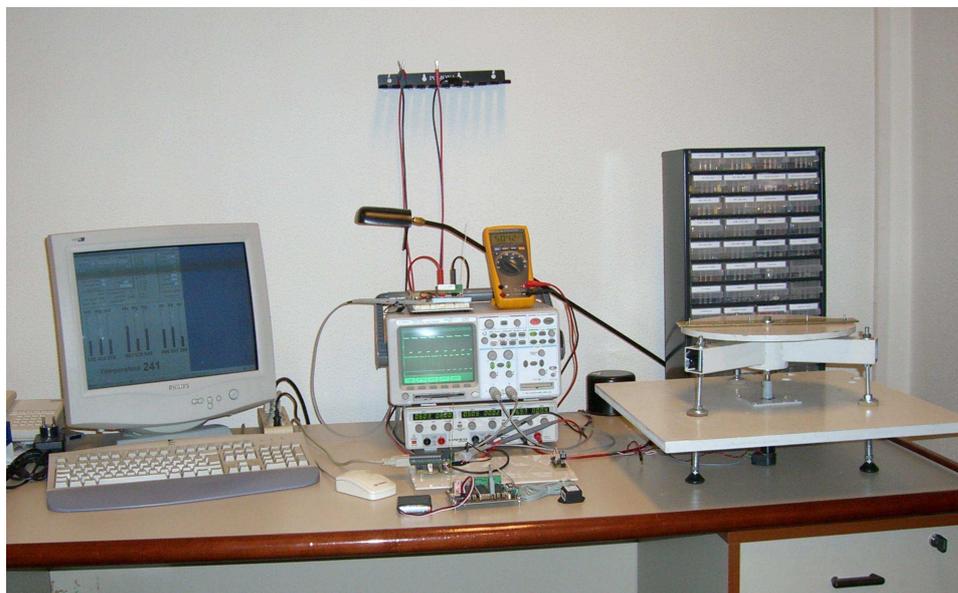


Figura 5.18: Banco de caracterización de los sensores inerciales y magnéticos

la velocidad angular de ésta se pueden probar los giróscopos cerámicos en diferentes condiciones.

Los acelerómetros miden la suma de la aceleración de la gravedad, conocida, y la centrífuga producida por la rotación de la plataforma. Esta última es función de la velocidad angular de la plataforma y de la distancia del sensor al centro de giro, de forma que es posible elegir la aceleración a la que se somete el sensor para su caracterización.

La plataforma giratoria está controlada por una Unidad de Control Electrónica (UCE) basada en un microcontrolador, que mantiene la consigna de revoluciones que recibe del ordenador al que está conectada. Las comunicaciones con este ordenador son bidireccionales, mediante una comunicación serie RS232, y permiten que la UCE envíe de vuelta a éste las revoluciones reales de la plataforma, en tiempo real.

La constitución mecánica de la plataforma es sencilla, y consiste en un conjunto formado por un plato, un eje, un bastidor, un motorreductor, un tacómetro y dos rodamientos (uno de empuje combinado y otro axial simple). En la figura 5.19 se puede ver un esquema de la constitución mecánica de la plataforma.

El plato es un disco metálico de grandes dimensiones (comparadas con los tamaños de los sensores que se pretende ensayar). Estas dimensiones hacen que su momento de inercia sea elevado, y esto facilita mantener las revoluciones de forma precisa, y minimiza los posibles efectos sobre éstas de los rozamientos o las imperfecciones en el accionamiento o en la transmisión del par desde el motor. Para garantizar la simetría y el equilibrado correcto

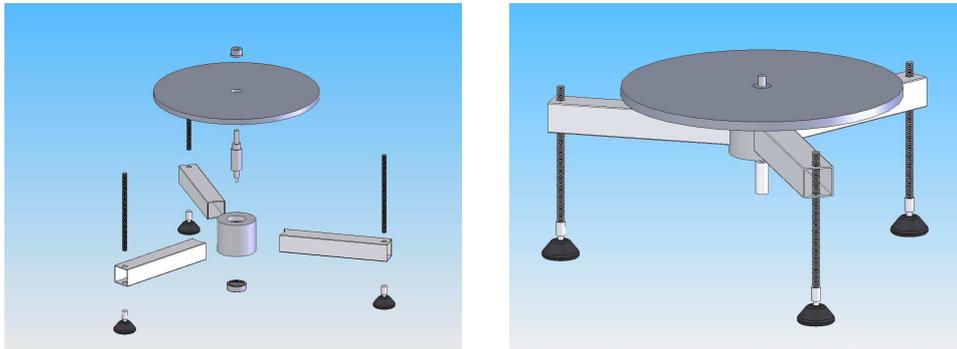


Figura 5.19: Constitución mecánica de la plataforma giratoria.

del plato, éste ha sido obtenido por corte con plasma, mediante CNC, y posteriormente rectificado en fresadora.

La estructura que soporta la plataforma se compone de un cuerpo central de acero inoxidable, donde se alojan los rodamientos en los que gira el eje, y tres tubos de perfil rectangular del mismo material, soldados al cuerpo central. Al extremo de cada uno de estos tubos se sitúan tres patas regulables, que permiten un nivelado preciso de la plataforma. El rodamiento superior es de empuje combinado, para soportar el peso de la plataforma y lo que gira solidario con ella, y el inferior es radial simple.

Para impulsar el plato se ha escogido un conjunto formado por un motor *Maxon RE-26-118769*, de 24V CC y 18 W y un reductor planetario *Maxon GP26*. A este conjunto se le ha acoplado un encoder digital *Agilent HEDS 5544*, con dos salidas en cuadratura generadas por dos sensores ópticos internos (dos parejas de fotodiodo y fototransistor), 500 líneas de resolución, y un canal índice. La salida de este sensor es en *código Gray*.

5.5.2. Control del banco de caracterización

Para el control del banco y la captura de datos durante la realización de los experimentos, se ha diseñado un sistema electrónico específico. Este sistema se conecta al PC mediante una comunicación serie estándar, de forma que éste controla los parámetros de cada experimento, y adquiere los datos obtenidos en los mismos, durante su ejecución, para su posterior procesado.

Este sistema electrónico de control y adquisición de datos se puede dividir, genéricamente, en los tres bloques siguientes:

- *Unidad Central de Procesado (UC)*. Basada en un microcontrolador PIC16F876A, realiza las funciones de comunicación con el PC mediante un puerto serie RS232, controla la velocidad del plato del banco mediante la tensión aplicada a su motor, mide la velocidad angular del

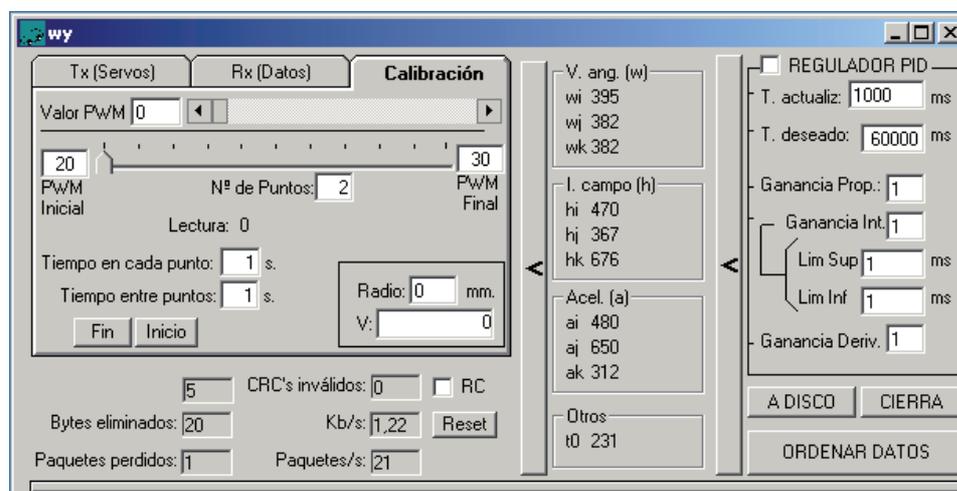


Figura 5.20: Programa de automatización para el banco de ensayos.

plato y recibe los datos de los sensores inerciales que se están analizando, mediante el método de comunicación por radiofrecuencia explicado en la sección anterior. También recibe la medida de la temperatura a la que se encuentra el banco de pruebas, desde la unidad de control de temperatura.

- *Unidad de Control de Temperatura (UT)*. Contiene el sensor de temperatura –en este caso un LM35, de *National Semiconductors*–, y la electrónica analógica para amplificar su salida y adaptarla para la adquisición en la UC. También contiene la electrónica de potencia para gobernar una resistencia formada por espiras de NiCrom¹¹ que permite mantener la cámara del banco de ensayos en la temperatura programada para cada fase del experimento.
- *Unidad de Control de Potencia (UP)*. Contiene la electrónica de potencia para gobernar el motor que mueve el disco del banco. Recibe la consigna de velocidad desde la UC.

Un programa en el PC envía a la UC, por el canal de comunicación serie, los comandos necesarios para establecer la velocidad del plato y la temperatura de cada fase del experimento, y recibe de la UC los datos de los sensores inerciales y de la temperatura y velocidad del banco. Estos datos son guardados en archivos, para su posterior análisis. Este programa permite la definición de perfiles de temperaturas, velocidades y tiempos de espera

¹¹ *NiCrom* es el nombre comercial de una aleación de Níquel y Cromo (por lo general 80% y 20% en peso, respectivamente). Habitualmente en forma de hilo, esta aleación posee una resistividad eléctrica elevada y gran resistencia a la corrosión, por lo que es especialmente apta para transformar energía eléctrica en térmica.

por fases en cada experimento, de forma que todas estas acciones se realizan de forma automática. Esto es necesario, puesto que los tiempos de espera para estabilización de temperaturas, y para el desarrollo de las pruebas en sí, hacen que cada uno de los experimentos se extienda en el tiempo considerablemente. En la imagen 5.20 en la página anterior se puede ver una captura de la pantalla principal del programa de control de la plataforma durante el desarrollo de un experimento.

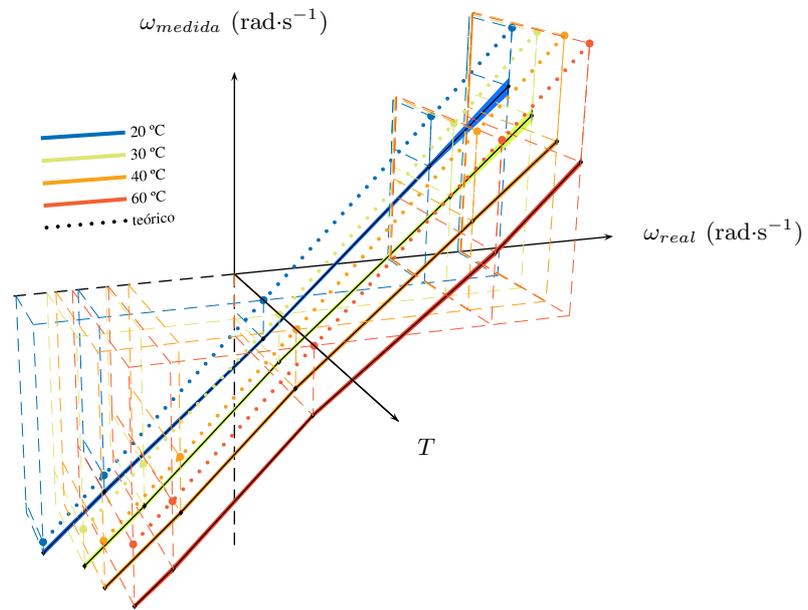
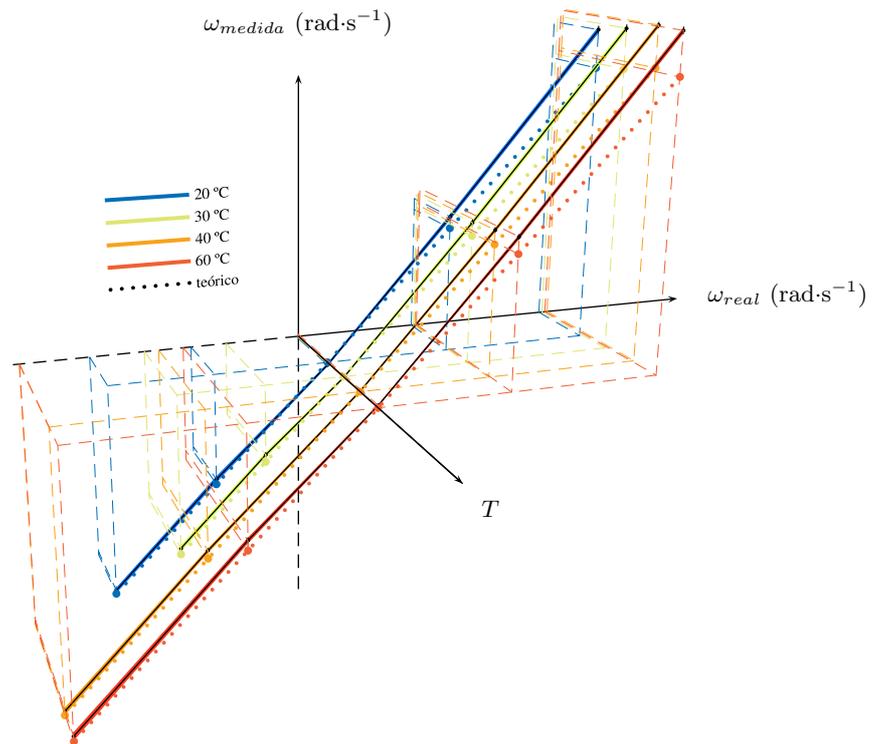
5.5.3. Resultados de la caracterización

Tras el análisis de los datos recogidos de los experimentos se ha podido caracterizar el comportamiento de los sensores inerciales. En el apéndice D se pueden ver las gráficas compuestas a partir de los datos, en las que se muestra el comportamiento real de los sensores respecto al ideal. En el caso de los giróscopos y acelerómetros, los datos se muestran para las diferentes temperaturas y velocidades del plato, con las que fueron realizados los ensayos —las velocidades angulares han sido transformadas a aceleraciones en el caso de los acelerómetros—. En el caso de los magnetómetros, no tiene sentido contrastar su dependencia respecto a la velocidad angular o la aceleración, así que sólo se muestra su variabilidad con la temperatura. A modo de ejemplo, en la figura 5.21 en la página siguiente se muestran las gráficas correspondientes al giróscopo y el acelerómetro del eje y .

En todos los casos se muestran los valores medios de los datos obtenidos, mediante líneas negras para los acelerómetros y giróscopos, y mediante puntos negros para los magnetómetros. Además, se muestran también los valores de ± 1 desviación típica respecto a los valores medios, mediante bandas de colores para acelerómetros y giróscopos, y mediante líneas horizontales para los magnetómetros.

En las gráficas se puede apreciar que, como era de esperar a partir de las especificaciones de los propios fabricantes, la desviación del comportamiento teórico es bastante mayor en los giróscopos que en los demás sensores. También la desviación típica es mayor. Además, y debido a la mayor variabilidad en los procesos de fabricación, el comportamiento de los tres giróscopos difiere más que en los otros dos tipos de sensores. La variabilidad con la temperatura es, también, más elevada en el caso de los giróscopos.

A partir de estos datos se ha realizado un modelo matemático que contiene una aproximación de primer orden al comportamiento dinámico de cada uno de los nueve sensores, respecto a la velocidad angular, el campo magnético o la aceleración según el tipo de sensor, y a la temperatura en todos ellos, siendo la variación con esta última la más importante. Este modelo ha pasado a formar parte del estimador que se expone en detalle en el capítulo siguiente.

(a) Datos de caracterización del gir6scopo del eje y .(b) Datos de caracterizaci6n del aceler6metro del eje y .Figura 5.21: Resultados de calibraci6n del gir6scopo y el aceler6metro del eje y .

Capítulo 6

Estimación de la orientación

6.1. Introducción

Como se ha explicado ya, la obtención del estado cinemático del vehículo en tiempo real (y a partir de ella la inferencia del estado dinámico), estará compuesta de dos partes bien diferenciadas. Por una parte, el *hardware* utilizado para el seguimiento, con sus sensores y electrónica de acondicionamiento asociados. Por otra parte, los algoritmos que procesarán los datos obtenidos de los sensores, en tiempo real, para obtener las estimaciones de posición y orientación del vehículo (y sus velocidades y aceleraciones). Para la primera parte se han descrito en el capítulos 4 diversas tecnologías disponibles, analizando sus cualidades y defectos desde la perspectiva de los objetivos de este trabajo. En base a este análisis se seleccionó la solución más adecuada para el *hardware* de adquisición, y en el capítulo 5 se presentó la implementación de esta solución en la plataforma.

En el presente capítulo se presenta una revisión de los diferentes algoritmos utilizados para estimar orientación y posición de objetos en el espacio. En esta revisión se procurará destacar los inconvenientes y las ventajas de cada uno de los estimadores estudiados. El objetivo de esta revisión es buscar el estimador óptimo para los objetivos que se pretenden en este trabajo. Sin embargo, es necesario establecer previamente la formulación matemática utilizada para representar la posición, orientación y movimientos del vehículo en el espacio tridimensional. Cada una de las posibles opciones tiene, también, sus ventajas e inconvenientes, con lo que conviene que sean revisadas para poder elegir la solución ideal con unos criterios claros. De una elección acertada dependerán factores tales como la ausencia de singularidades espaciales, la eficiencia numérica en los cálculos, requerimientos de almacenamiento, el ancho de banda de transmisión de los resultados o, incluso, peligrará la convergencia numérica de los integradores utilizados, si es el caso.

Comenzará este capítulo, por tanto, con el estudio de las diferentes po-

sibilidades de representación de posición, movimiento y orientación de un sólido en el espacio, detallando sus ventajas e inconvenientes desde la perspectiva de los objetivos de este trabajo.

6.2. Representación de la orientación

Un sólido rígido es una idealización de un cuerpo indeformable, en el que las posiciones relativas de las partículas que lo constituyen se mantienen invariables. Habitualmente se describe el movimiento del sólido rígido como la composición de dos tipos de movimiento: traslación de su centro de masas y rotación en torno a un eje.

Hay numerosos métodos para expresar la posición y orientación de un sólido rígido. Dos de los más habituales son los *ángulos de Euler* y las *cuaternas*. Otros métodos incluyen *cosenos directores*, *Parámetros de Rodrigues* y *pares vector-ángulo*. Los cosenos directores representan una orientación utilizando los cosenos de los ángulos que un vector apropiadamente escogido, unido al sólido, forma con los tres ejes del sistema de coordenadas ortonormal fijo. Los tres vectores unitarios de un sistema ortonormal unido al sólido forman nueve ángulos con los tres vectores del sistema fijo. Los cosenos de estos nueve ángulos forman una *matriz de rotación*. Los pares vector-ángulo especifican un vector y un ángulo de rotación alrededor de ese vector; son similares a las cuaternas unitarias, como se verá. Cada uno de estos sistemas tiene sus propias ventajas e inconvenientes, y algunos de ellos son muy similares entre sí. En este capítulo se comparan más en detalle únicamente los ángulos de Euler y las cuaternas. Para una descripción más extensa de los demás, se puede consultar la abundante bibliografía al respecto.

Para representar la orientación de un sólido rígido es habitual tomar un sistema de coordenadas unido a un marco inercial adecuado, y expresar todos los vectores en forma de componentes relativas a ese sistema de coordenadas. A este sistema de coordenadas se le denomina *sistema inercial*. Para la descripción de movimientos de automóviles, el sistema inercial habitual está situado en la superficie de la tierra, con el origen en un punto arbitrario de la misma, el eje x apuntando al Norte, el y al Este y el z hacia el centro de la tierra. En la figura 6.1 en la página siguiente se ilustra este concepto.

Para especificar la orientación del sólido rígido también es necesario especificar un sistema de referencia unido al sólido, y que lo sigue en sus movimientos. Este será el *sistema no inercial*. Se han propuesto varios sistemas inerciales para describir el movimiento y la orientación de un vehículo automóvil. El que se utiliza en este trabajo, como se ha explicado ya, es el *SAE J670e* [75]. Se trata de un triedro ortonormal con los ejes x , y y z apuntando hacia adelante, hacia la derecha y hacia abajo del vehículo, respectivamente.

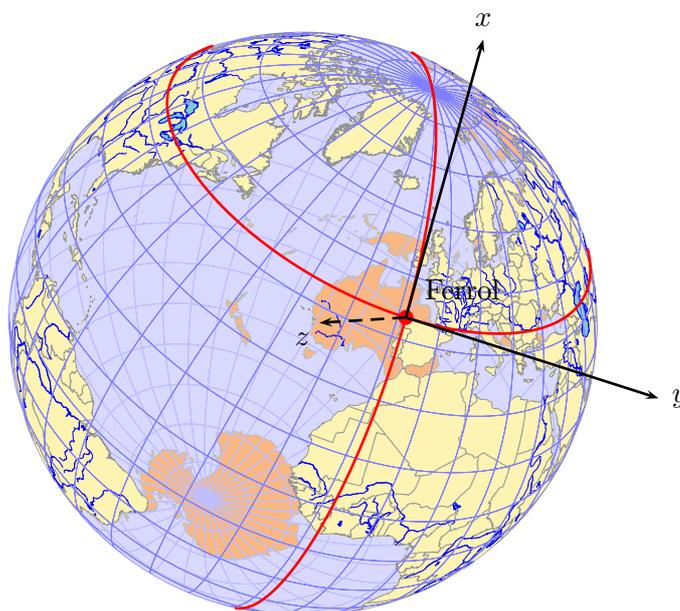


Figura 6.1: Sistema de referencia inercial en la superficie de la Tierra.

6.2.1. Notación

La orientación de un sólido que se mueve en el espacio se representa en un sistema de referencia inercial fijo. El movimiento del sólido se analiza de forma incremental, y se evalúa su cambio de orientación y posición de un instante de tiempo al siguiente. Por ello, los vectores, las matrices y las cuaternas que se utilicen para describir posiciones y orientaciones estarán referidas a uno de tres sistemas de referencia: el inercial (fijo), o el no inercial (solidario al objeto) en el instante de tiempo anterior o en el actual.

Es necesario establecer una notación que permita, de manera sencilla, establecer cual es el sistema de referencia utilizado en cada caso, y que no interfiera con los demás indicadores que serán necesarios para expresar cada uno de los algoritmos que se expondrán en este capítulo.

Por ello, y en lo sucesivo, se denotará con superíndices a la izquierda el sistema de referencia utilizado en cada caso. Así, ${}^e\mathbf{v}$ se refiere al vector \mathbf{v} expresado en el sistema de referencia inercial fijo en la tierra (*earth*), mientras que ${}^b\mathbf{v}$ es \mathbf{v} expresado en el sistema de referencia no inercial solidario al cuerpo en movimiento (*body*). Asimismo, se resaltarán en *negrilla* las letras que representan a matrices, vectores o cuaternas.

6.2.2. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler han venido utilizándose habitualmente para representar la orientación y las rotaciones de un cuerpo en el espacio. Los

ángulos de Euler son números reales, y su manejo no presenta dificultad. Sin embargo, su forma de comportarse, y la interrelación entre ellos, provocan ciertos inconvenientes: obligan a utilizar operaciones trigonométricas –computacionalmente caras–, y son sensibles a determinadas orientaciones del cuerpo en las que se presentan singularidades que dificultan su uso.

Los ángulos de Euler representan la orientación de un cuerpo utilizando tres rotaciones alrededor de unos ejes concretos. Los ejes pueden ser ortogonales y solidarios con el objeto, ortogonales y fijos en tierra, o cardan (*gimbal axes*). Por tanto, es necesario establecer de antemano qué tipo de ejes se utilizarán, y su orden.

Si utilizan como ejes de rotación los del sistema inercial, y se rota primero alrededor del eje x (orientado al Norte), después alrededor del y (orientado al Este) y finalmente alrededor del eje z (hacia abajo); los ángulos asociados con estas rotaciones se conocen como “alabeo” (*roll, bank*), “elevación” (*pitch, elevation*) y “azimut” (*yaw, azimuth*)¹, respectivamente. Si se invierte el orden temporal de estas rotaciones, pero se aplican sobre los ejes del sistema no inercial ligado al objeto (esto es, se rota alrededor del eje de guiñada, el de cabeceo, y el de balanceo, en ese orden) la orientación final del objeto será la misma que la obtenida con el proceso anterior.

Los *gimbal axes* proporcionan otro modo de definir los ángulos de Euler, que ayuda a resolver este aparente conflicto de orden de rotaciones. se puede entender fácilmente, por ejemplo, con el dispositivo utilizado para apuntar un telescopio a un punto determinado: primero, habrá que elevarlo, rotándolo alrededor del ángulo de elevación, a continuación habrá que girar el telescopio alrededor del eje vertical, para centrar el punto en la zona de visión; finalmente, y si es necesario, se puede rotar la imagen obtenida alrededor del eje visual del telescopio. En este caso, en el que los tres ejes de rotación se cortan en el mismo punto, las tres rotaciones se pueden hacer en cualquier orden, sin afectar al resultado final.

Rotaciones de ángulos de Euler

La posición de un punto en el espacio puede ser descrita utilizando un vector tridimensional. Este vector va desde el origen de coordenadas del sistema inercial hasta el punto. Si se trata de describir la orientación de un sólido rígido, se puede posicionar cada uno de sus puntos (o solamente algunos puntos notables que lo representen) utilizando vectores. Estos vectores pueden ser rotados individualmente mediante una matriz de rotación. Las

¹En función de la perspectiva desde la que se aprecian estos ángulos, reciben diferentes nombres. Así, por ejemplo, los pilotos de aeronaves hablan de *roll, pitch* y *yaw*, porque perciben estos ángulos desde dentro del avión, es decir, desde el sistema local de referencia ligado al objeto en movimiento. En artillería, en donde se perciben los ángulos rotados por una pieza desde el exterior (sistema de referencia fijo en tierra) se habla de *bank, elevation* y *azimuth*. En el ámbito de los automóviles estos ángulos se denominan “balanceo”, “cabeceo” y “guiñada”, respectivamente.

coordenadas rotadas $v_r = (x_r, y_r, z_r)^T$, de un vector $v = (x, y, z)^T$ mediante un ángulo ϕ alrededor del eje x se puede describir mediante la expresión:

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{rot}(x, \phi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

De la misma forma, las rotaciones alrededor de los otros dos ejes se describirían mediante las expresiones:

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{rot}(y, \theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{rot}(z, \psi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Por tanto, la relación entre el sistema de referencia inercial y el no inercial puede ser expresada mediante una única matriz de rotación:

$${}^e\mathbf{v} = \text{rot}(z, \psi) \cdot \text{rot}(y, \theta) \cdot \text{rot}(x, \phi) \cdot {}^b\mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot {}^b\mathbf{v} \quad (6.4)$$

En esta expresión, como se ha explicado, se denota con superíndices a la izquierda el sistema de referencia utilizado en cada caso, de manera que ${}^e\mathbf{v}$ se refiere al vector \mathbf{v} expresado en el sistema de referencia inercial (*earth*), y ${}^b\mathbf{v}$ es \mathbf{v} expresado en el sistema de referencia no inercial (*body*). Además la matriz \mathbf{R} es:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Esta expresión, que caracteriza la orientación del objeto respecto al sistema de referencia inercial, necesita para su cómputo nueve productos, seis sumas y calcular seis funciones trigonométricas.

Transformación de velocidad angular en ángulos de Euler

Si finalmente se escogiesen los ángulos de Euler como sistema de representación de la orientación, todas las magnitudes medidas tendrían que ser expresadas de forma compatible con ese sistema. En el caso concreto de la velocidad angular, $\boldsymbol{\omega}$, sería necesario expresarla directamente mediante

ángulos de Euler. Para ello sería posible descomponer $\boldsymbol{\omega}$ en sus tres componentes, expresadas en cualquiera de los dos sistemas de referencia (inercial o local). Las tres componentes expresadas en el sistema de referencia local ligado al cuerpo se denotan p , q y r :

$${}^b\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T = (p, q, r)^T \quad (6.6)$$

Pero al contrario que con la velocidad lineal, que puede ser integrada para obtener la posición, de la integración de las componentes de la velocidad angular no se obtienen los ángulos de Euler, esto es:

$$(\phi, \theta, \psi)^T \neq \int (p, q, r)^T dt \quad (6.7)$$

como se verá a continuación. Teniendo en cuenta el orden en las rotaciones, la velocidad angular de un sólido rígido en el sistema de referencia inercial viene dada por

$${}^e\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \text{rot}(z, \psi) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{rot}(y, \theta) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (6.8)$$

donde $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ son las velocidades de rotación de Euler, medidas alrededor de los ejes de balanceo, elevación y azimut, respectivamente. La velocidad de rotación alrededor de los ejes de alabeo, cabeceo y guiñada (solidarios al cuerpo), ${}^b\boldsymbol{\omega}$, puede expresarse respecto al sistema fijo en tierra de la forma:

$${}^b\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \cdot {}^e\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^T \cdot {}^e\boldsymbol{\omega} \quad (6.9)$$

Sustituyendo 6.8 en 6.9:

$$\begin{aligned} {}^b\boldsymbol{\omega} &= \text{rot}(x, \phi)^T \cdot \text{rot}(y, \theta)^T \cdot \text{rot}(z, \psi)^T \cdot {}^e\boldsymbol{\omega} = \\ &= \text{rot}(x, \phi)^T \cdot \text{rot}(y, \theta)^T \cdot \text{rot}(z, \psi)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \\ &+ \text{rot}(x, \phi)^T \cdot \text{rot}(y, \theta)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \text{rot}(x, \phi)^T \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.10)$$

De esta expresión se pueden extraer los tres términos de velocidad de rotación alrededor de los ejes del sistema inercial (fijo en tierra):

$$\begin{aligned} {}^b\dot{\psi} &= \text{rot}(x, \phi)^T \cdot \text{rot}(y, \theta)^T \cdot \text{rot}(z, \psi)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \dot{\psi} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \\ {}^b\dot{\theta} &= \text{rot}(x, \phi)^T \cdot \text{rot}(y, \theta)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \\ {}^b\dot{\phi} &= \text{rot}(x, \phi)^T \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.11)$$

De 6.9, 6.10 y 6.11 se obtienen, finalmente, las expresiones de p , q y r :

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ r &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (6.12)$$

que constituyen un sistema no lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas, que puede resolverse para $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ (en este caso basta tener en cuenta que las dos últimas no dependen de $\dot{\phi}$, de modo que de ambas se puede despejar $\dot{\theta}$, y con ello los otros dos valores):

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + q \tan \theta \sin \phi + r \tan \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= q \sec \theta \sin \phi + r \sec \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (6.13)$$

que, en forma matricial, queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sec \theta \sin \phi & \sec \theta \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Singularidades de los ángulos de Euler

Teniendo en cuenta que en la ecuación 6.14 es $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, la matriz \mathbf{T} será singular para $\theta = \pm 90^\circ$. Esta situación se verifica cuando el objeto se ha orientado de forma que su eje x (del sistema de referencia no inercial) se encuentra “vertical”, esto es, es paralelo al eje y del sistema inercial. Esto implica que los ángulos de alabeo y azimut no están unívocamente definidos. Sólo su diferencia puede conocerse de forma unívoca. Este problema se manifiesta igualmente respecto a las velocidades de rotación de Euler, ya que la matriz de transformación \mathbf{T} es singular en estas situaciones, como se ha razonado.

6.2.3. Cuaternas

Las *cuaternas* o *cuaterniones* son una extensión de los números complejos. De la misma forma que los números complejos extienden la recta real a un plano bidimensional (el plano complejo), las cuaternas lo extienden a un volumen cuatridimensional, con una parte real y cuatro imaginarias. Las tres partes imaginarias suelen representarse mediante \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} . A la porción imaginaria de una cuaterna se le denomina habitualmente “vector” de la cuaterna, y a la parte real “escalar”. De la misma forma que los complejos admiten varias notaciones, con las cuaternas se suelen utilizar tres [5]:

- Como combinación lineal de cuatro componentes: $\mathbf{q} = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- Como un vector de cuatro dimensiones: $\mathbf{q} = (w, x, y, z)^T$
- Como un escalar w y un vector \mathbf{v} : $\mathbf{q} = (w, \mathbf{v})$

De forma análoga a lo que ocurre con los complejos, que se pueden descomponer en parte real e imaginaria, en una cuaterna es posible calcular su parte real y su parte vectorial:

$$\mathbf{q} = \text{Re}(\mathbf{q}) + \text{Ve}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

De forma intuitiva, las tres componentes imaginarias de la cuaterna, x , y y z forman la parte vectorial, y representan un vector en el espacio. La parte real, w , representa un ángulo de rotación alrededor de ese vector. De esta forma, una cuaterna puede utilizarse para caracterizar completamente la orientación de un sólido rígido en el espacio.

Las tres unidades imaginarias se comportan de forma similar a como lo hace la parte imaginaria de un complejo:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i}^2 = -1 \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j}^2 = -1 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}^2 = -1 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \quad (6.18)$$

Operaciones con cuaternas

El producto de números complejos dota a este conjunto de la capacidad de representar rotaciones, y con ello los hace ideales para trabajar con señales periódicas en general. Al mismo tiempo, consigue transformar, en algunos casos, la complejidad de la diferenciación en cuentas algebraicas más sencillas.

De la misma forma, ligeras diferencias entre las operaciones habituales definidas en vectores reales de cuatro dimensiones y en cuaternas dotan

a éstas de las características que las hacen interesantes para representar orientaciones en el espacio. Es por esto que se exponen a continuación las operaciones habituales definidas en las cuaternas.

Si tomamos la cuaterna $\mathbf{q} = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (w, \mathbf{v})$, se definen las siguientes operaciones unarias:

- Conjugación. Se denota mediante $\bar{\mathbf{q}}$, y de la misma manera que en los complejos, consiste en cambiar el signo de la parte imaginaria:

$$\bar{\mathbf{q}} = (w, -\mathbf{v}) \quad (6.19)$$

Lo mismo que sucede con la conjugación compleja, se verifica que

$$\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \|\mathbf{q}\|^2 \quad (6.20)$$

- Norma: La norma de una cuaterna², por analogía con la de vectores, se denomina también “longitud” o “magnitud” de la cuaterna. Aunque no se corresponde con la longitud de su parte vectorial, sino que se calcula de la forma habitual:

$$\|\mathbf{q}\| = +\sqrt{\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}} = +\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.21)$$

- Normalización. Es una operación semejante a la normalización de vectores:

$$\mathbf{q}_{normalizada} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \quad (6.22)$$

La norma de la cuaterna resultante de la normalización vale 1. A una cuaterna de norma unitaria se le denomina *cuaterna unitaria*.

- Inversión:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} \quad (6.23)$$

Si se trata de una cuaterna unitaria será $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{1} = \bar{\mathbf{q}}$.

Si tomamos dos cuaternas $\mathbf{q}_1 = w_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{q}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, se definen las siguientes relaciones y operaciones binarias:

- Igualdad: dos cuaternas son iguales sí y sólo si lo son término a término, esto es:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 \Leftrightarrow \{w_1 = w_2, x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2\} \quad (6.24)$$

²Se llama norma por analogía con las definiciones de las aplicaciones de $\mathbb{R}^{m \times n}$ ó \mathbb{R}^n de vectores y matrices, aunque no se discute aquí si realmente lo es.

- Suma: La suma de dos cuaternas se hace término a término, de la misma manera que con vectores de números reales:

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = (w_1 + w_2) + (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k} \quad (6.25)$$

Esta operación verifica (entre otras) la propiedad conmutativa. De esta operación se obtiene la inversa de la suma, o cuaterna opuesta $(-\mathbf{q})$, en la que cada uno de sus componentes son los mismos que los de \mathbf{q} , pero con el signo contrario.

- Producto por un escalar: también se define de la misma forma que el producto escalar-vector. Igualmente, verifica la propiedad conmutativa:

$$\lambda \cdot \mathbf{q} = \lambda \cdot (w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \lambda w + \lambda x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j} + \lambda z\mathbf{k} \quad (6.26)$$

- Producto de cuaternas: se trata de una operación interna en el conjunto de las cuaternas, y se define de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = & (w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + \\ & + (x_1 w_2 + w_1 x_2 - z_1 y_2 + y_1 z_2) \mathbf{i} + \\ & + (y_1 w_2 + z_1 x_2 + w_1 y_2 - x_1 z_2) \mathbf{j} + \\ & + (z_1 w_2 - y_1 x_2 + x_1 y_2 + w_1 z_2) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Este mismo resultado se puede alcanzar también utilizando el producto vectorial y el escalar de las partes vectoriales de ambas cuaternas:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = (w_1, \mathbf{v}_1) (w_2, \mathbf{v}_2) = (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \quad (6.28)$$

En esta expresión, y debido al uso del producto vectorial, se comprende que el producto de cuaternas no es conmutativo, aunque sí es asociativo. El producto de dos cuaternas unitarias es otra cuaterna unitaria:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2\| &= +\sqrt{(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) (\overline{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2})} = +\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \bar{\mathbf{q}}_2 \bar{\mathbf{q}}_1} = \\ &= +\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^{-1} \mathbf{q}_1^{-1}} = 1, \quad \text{si } \|\mathbf{q}_1\| = \|\mathbf{q}_2\| = 1 \end{aligned} \quad (6.29)$$

En cuanto a la carga computacional asociada al producto de cuaternas, se requieren 28 operaciones escalares (16 multiplicaciones y 12 sumas), y ninguna trigonométrica. A continuación se verá que el producto de cuaternas sirve para expresar la orientación de un sólido rígido en el espacio.

Cambio de base mediante cuaternas

La orientación de un sólido rígido en el espacio puede representarse mediante una rotación ϕ alrededor de un eje inclinado descrito mediante un vector unitario \mathbf{v} expresado en el sistema de referencia inercial. Para realizar esta operación se puede utilizar una cuaterna de la forma $\mathbf{q}_r = (\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \cdot \mathbf{v})$. Esta cuaterna es unitaria, como se puede ver utilizando la expresión 6.28:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_r\| &= +\sqrt{\mathbf{q}_r \bar{\mathbf{q}}_r} = +\sqrt{\left(\cos \frac{\phi}{2}, \mathbf{v} \sin \frac{\phi}{2}\right) \left(\cos \frac{\phi}{2}, -\mathbf{v} \sin \frac{\phi}{2}\right)} = \\ &= +\sqrt{\cos^2 \frac{\phi}{2} + 1 \cdot \sin^2 \frac{\phi}{2}} = 1 \quad (6.30) \end{aligned}$$

Un punto cualquiera del sólido rígido puede representarse mediante un vector $\mathbf{u} = (x, y, z)^T$, que va desde el origen del sistema de referencia hasta el propio punto. Este vector podrá escribirse como una cuaterna sin parte real: $\mathbf{p} = (0, \mathbf{u}^T)^T = (0, x, y, z)^T$. Se puede utilizar la cuaterna \mathbf{q}_r para rotar \mathbf{u} :

$$\mathbf{Protado} = \mathbf{q}_r \mathbf{p} \mathbf{q}_r^{-1} = \mathbf{q}_r \mathbf{p} \bar{\mathbf{q}}_r \quad (6.31)$$

Con esta operación, el vector \mathbf{u} es rotado alrededor de \mathbf{v} un ángulo ϕ (el sentido del vector \mathbf{v} indica el sentido del ángulo ϕ). Esta operación no tiene ninguna singularidad, y sólo requiere el cómputo de dos funciones trigonométricas, aunque necesita 56 operaciones escalares entre sumas y productos.

La cuaterna $\mathbf{q}_r = (\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \cdot \mathbf{v})$, por tanto, representa la rotación de un ángulo ϕ alrededor de \mathbf{v} . Pero esta misma rotación se podría conseguir igualmente con la cuaterna $-\mathbf{q}_r = (-\cos \frac{\phi}{2}, -\sin \frac{\phi}{2} \cdot \mathbf{v})$. Ambas cuaternas representan la misma rotación. Para resolver esta ambigüedad, y asegurar una única solución para cada orientación, se restringe el ángulo de rotación ϕ de la forma $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Así, la parte real de \mathbf{q}_r será siempre positiva. Teniendo esto en cuenta, y que \mathbf{q}_r es unitaria, la parte real vale:

$$\|\mathbf{q}_r\| = 1 = +\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow w = +\sqrt{1 - x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.32)$$

por tanto, en una cuaterna unitaria los cuatro valores numéricos no son independientes entre sí.

La cuaterna \mathbf{q}_r rota cualquier vector del objeto, y en concreto también podría utilizarse para rotar los ejes del sistema de referencia inercial respecto al que está referida, y conseguir así un sistema de referencia que se orienta igual que el objeto, y que se mueve con él (local, no inercial). Como la parte vectorial de la cuaterna depende del sistema de coordenadas respecto al que se expresa, se denota ${}^e\mathbf{q}_r$. De esta manera, se puede considerar igualmente que esta cuaterna sirve para hacer un cambio de base entre ambos sistemas de referencia: si ${}^e\mathbf{u}$ y ${}^b\mathbf{u}$ representan un vector expresado en los sistemas de

referencia inercial y no inercial, respectivamente, los cambios de base directo e inverso entre ambos sistemas serán:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_r \begin{pmatrix} 0 \\ b_{\mathbf{u}} \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ b_{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = {}^e\bar{\mathbf{q}}_r \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{u}} \end{pmatrix} {}^e\mathbf{q}_r \quad (6.33)$$

Representación de la orientación mediante cuaternas

Puede utilizarse una cuaterna \mathbf{q}_k para rotar cualquier vector de un sólido rígido desde una teórica orientación inicial ${}^e\mathbf{u}_0$ hasta la posición actual ${}^e\mathbf{u}_k$, en el instante k , aplicando la ecuación 6.31:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{u}_k} \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_k \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{u}_0} \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_k \quad (6.34)$$

y de esta forma se puede decir que la cuaterna ${}^e\mathbf{q}_k$ representa la orientación del objeto, ya que cualquiera de sus puntos, en la orientación del instante k , puede obtenerse rotando su correspondiente vector mediante ${}^e\mathbf{q}_k$. Si la orientación del objeto en el instante $k+1$ es diferente de la del instante k , éste cambio de orientación podrá expresarse, nuevamente, mediante una cuaterna de rotación ${}^b\mathbf{q}_{k,k+1}$, en este caso expresada en el sistema de referencia local. Para obtener la orientación en $k+1$ a partir de la inicial, será necesario componer ambas rotaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{u}_{k+1}} \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_k {}^b\mathbf{q}_{k,k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{u}_0} \end{pmatrix} {}^b\bar{\mathbf{q}}_{k,k+1} {}^e\bar{\mathbf{q}}_k = {}^e\mathbf{q}_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{u}_0} \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_{k+1} \quad (6.35)$$

con

$${}^e\mathbf{q}_{k+1} = {}^e\mathbf{q}_k {}^b\mathbf{q}_{k,k+1} \quad (6.36)$$

La cuaterna ${}^e\bar{\mathbf{q}}_{k+1}$ representa la orientación del objeto en el instante $k+1$. Este procedimiento se puede repetir recursivamente para cada instante de tiempo. Por tanto, una cuaterna es adecuada para representar la orientación de un sólido en el espacio a lo largo del tiempo, y lo hace sin singularidades. Además, el paso de una orientación a la siguiente se consigue con un único producto de cuaternas que, como se ha mencionado ya, implica únicamente 12 sumas y 16 productos, y ninguna operación trigonométrica, y por tanto es computacionalmente poco exigente.

Relación entre velocidad angular y cuaternas

Si una cuaterna de rotación ${}^b\mathbf{q}_2$ define la orientación de un objeto respecto al sistema de referencia no inercial, se puede utilizar su derivada ${}^b\dot{\mathbf{q}}_2$ para expresar la velocidad angular en el mismo sistema de referencia, como se expondrá a continuación.

En el instante inicial, el objeto que se pretende seguir se encuentra en una orientación conocida, de forma que un punto cualquiera del objeto puede ser

situado en el sistema de referencia inercial mediante un vector ${}^e\mathbf{u}$. Si el objeto se mueve, al cabo de un tiempo su nueva orientación puede representarse mediante una cuaterna de rotación ${}^e\mathbf{q}_1$, tal y como se ha descrito en la expresión 6.31. Su nueva posición viene descrita por la parte vectorial de ${}^e\mathbf{q}_1(0, {}^e\mathbf{u})^T {}^e\bar{\mathbf{q}}_1$.

El sistema de referencia no inercial, solidario con el objeto en movimiento, también ha cambiado su orientación respecto al inercial, de la misma manera que el objeto.

Un nuevo cambio de orientación, esta vez medido con sensores inerciales ubicados en el propio objeto, y por tanto referidos al sistema de referencia no inercial, vendrá determinado por una nueva cuaterna de rotación ${}^b\mathbf{q}_2$. Esta cuaterna rota al vector ${}^b\mathbf{u}$ según el nuevo cambio de orientación:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{u}' \end{pmatrix} = {}^b\mathbf{q}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{u} \end{pmatrix} {}^b\bar{\mathbf{q}}_2 \quad (6.37)$$

Como este nuevo vector ${}^b\mathbf{u}'$ está expresado en el sistema de referencia local, se utiliza ${}^e\mathbf{q}_1$ para referirlo al inercial:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ {}^e\mathbf{u}' \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_1 {}^b\mathbf{q}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{u} \end{pmatrix} {}^b\bar{\mathbf{q}}_2 {}^e\bar{\mathbf{q}}_1 = {}^e\mathbf{q}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{u} \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_3 \quad (6.38)$$

donde

$${}^e\mathbf{q}_3 = {}^e\mathbf{q}_1 {}^b\mathbf{q}_2 \quad (6.39)$$

es la cuaterna que combina ambas rotaciones. Este razonamiento es similar al que se ha expuesto en el punto anterior.

La cuaterna ${}^b\mathbf{q}_2$ puede obtenerse directamente a partir de sensores que miden la velocidad de rotación local, como los giróscopos o los *rate-gyros*. Si estos sensores miden las velocidades de rotación p , q y r en cada uno de los tres ejes del sistema de referencia local, el vector $(p, q, r)^T$ representa la composición de las tres velocidades, y por tanto, la velocidad de rotación del sólido ${}^b\boldsymbol{\omega}$ respecto al sistema de referencia local. Esta velocidad de rotación se produce alrededor de un vector unitario ${}^b\mathbf{v}$. Ambos pueden obtenerse de la siguiente manera:

$$\|{}^b\boldsymbol{\omega}\| = \dot{\theta} = +\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}, \quad {}^b\mathbf{v} = \frac{(p, q, r)^T}{\|{}^b\boldsymbol{\omega}\|}, \quad \|{}^b\mathbf{v}\| = 1 \quad (6.40)$$

Si el intervalo Δt que transcurre entre cada muestra que se toma del sensor es suficientemente corto, puede aproximarse el ángulo girado durante Δt mediante una integración elemental de la velocidad: $\theta \simeq \dot{\theta}\Delta t$. Una vez conocido el vector respecto al que se produce la rotación, y el ángulo de ésta, se puede componer la cuaterna de rotación:

$${}^b\mathbf{q}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\dot{\theta}t}{2} \\ {}^b\mathbf{v} \sin \frac{\dot{\theta}t}{2} \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

Nuevamente, si Δt es suficientemente pequeño, se puede aproximar $\cos \frac{\dot{\theta}t}{2} \simeq 1$ y $\sin \frac{\dot{\theta}t}{2} \simeq \frac{\dot{\theta}t}{2}$. De esta forma, queda

$${}^b\mathbf{q}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} {}^b\mathbf{v} \dot{\theta} t \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Pero de 6.40 se sigue que ${}^b\mathbf{v}\dot{\theta} = (p, q, r)^T$, con lo que definitivamente:

$${}^b\mathbf{q}_2(t) = \left(1, \frac{1}{2} (p, q, r)^T t \right)^T = \left(1, \frac{1}{2}pt, \frac{1}{2}qt, \frac{1}{2}rt \right)^T \quad (6.43)$$

derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} {}^b\mathbf{q}_2(t) = {}^b\dot{\mathbf{q}}_2 = \left(0, \frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q, \frac{1}{2}r \right)^T = \frac{1}{2} (0, p, q, r)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

Por fin, derivando respecto al tiempo la expresión 6.39, y sustituyendo en ella 6.44:

$${}^e\dot{\mathbf{q}}_3 = {}^e\dot{\mathbf{q}}_1 {}^b\mathbf{q}_2 + {}^e\mathbf{q}_1 {}^b\dot{\mathbf{q}}_2 = {}^e\mathbf{q}_1 {}^b\dot{\mathbf{q}}_2 = \frac{1}{2} {}^e\mathbf{q}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

que relaciona la velocidad angular leída por los sensores, con la derivada de la cuaterna de orientación, ${}^e\dot{\mathbf{q}}_3$. Esta operación permite actualizar la cuaterna de orientación del sólido rígido a partir de las lecturas de un giróscopo mediante una operación sencilla de producto de cuaternas en la que sólo intervienen operaciones de suma y producto, y ninguna trigonométrica. Además, en esta operación no existen singularidades.

6.2.4. Solución adoptada

Aunque hay otros modelos matemáticos para representar la orientación de un sólido en el espacio, y su movimiento, no se diferencian en lo esencial de los dos revisados aquí. Tres ventajas fundamentales destacan en el modelo de cuaternas respecto al de ángulos de Euler:

- No tienen singularidades,
- Los errores numéricos son homogéneos, y no dependen de la orientación del objeto,
- El coste computacional, en general, es inferior y
- Permiten capturar y utilizar la información de los sensores, incluso de los giróscopos, de una forma casi directa.

Por tanto, el uso de cuaternas se adapta mejor al seguimiento de la posición y orientación que se pretenden en este trabajo, y se prefiere a otras técnicas. En particular, se ha mostrado que ofrece determinadas ventajas respecto a los ángulos de Euler.

6.3. El problema de Wahba

Se ha explicado ya en el capítulo 1 que es necesario obtener el estado cinemático y dinámico del vehículo para poder observar lo que sucede en las inmediaciones de las situaciones de pérdida de adherencia y de control. En el capítulo 4 se ha razonado la elección de un sistema de sensores para capturar la orientación y posición del chasis, así como otros sensores que en el futuro podrían utilizarse para relacionar la situación cinemática y dinámica de cada rueda respecto al chasis del vehículo.

La finalidad última es conocer lo que sucede en las inmediaciones de la pérdida de adherencia y de control, y esto pasa —como se ha expuesto en capítulo 2— por conocer con detalle la interacción rueda-suelo. Para ello será necesario obtener una estimación lo más aproximada posible del estado cinemático y dinámico del chasis del vehículo, utilizando para ello la información de los sensores inerciales y magnéticos montados en el mismo. Conociendo el estado del chasis, se podrá estimar el estado de cada una de las ruedas, utilizando para ello el resto de sensores con los que se equipa el vehículo: posición de cada suspensión, posición de la dirección, velocidad y posición de cada rueda.

Los sensores inerciales y magnéticos obtendrán los valores instantáneos de las magnitudes que observan, en tiempo real. Algunos de estos valores serán directamente magnitudes que interesa conocer del vehículo, como la velocidad de rotación instantánea del chasis. Pero otras magnitudes deseadas no podrán ser obtenidas directamente de los sensores, y tendrán que ser *estimadas* a partir de sus datos. Incluso aquellas variables que son directamente medibles mediante los sensores habrán de ser tratadas numéricamente —filtradas—, porque estarán contaminadas por errores y ruidos.

De esta forma, la información que se obtiene de los sensores está cargada de *incertidumbre*, y el algoritmo que obtenga la estimación a partir de esos datos habrá de tenerlo en cuenta, o dicho de otro modo, habrá de basarse en la *inferencia estadística*.

En resumen, se persigue el desarrollo de un algoritmo que, procesando los datos de los sensores inerciales y magnéticos montados en el chasis, y teniendo en cuenta la naturaleza estocástica de los ruidos que los contaminan, obtenga una estimación de la posición y orientación del mismo. Esta estimación habrá de basarse inicialmente en los sensores inerciales (acelerómetros y *rate-gyros*) y magnetómetros, de forma que el seguimiento del chasis se obtendrá independientemente de las interacciones rueda-suelo, que son las que finalmente se pretende estudiar. Posteriormente podrá utilizarse la posición y orientación del chasis, junto con los restantes sensores del vehículo, y su modelo cinemático y dinámico, para estimar magnitudes tales como las sollicitaciones sobre cada neumático, por ejemplo.

El magnetómetro triaxial devuelve un vector, referido al sistema no inercial ligado al chasis, que representa la intensidad del campo magnético local.

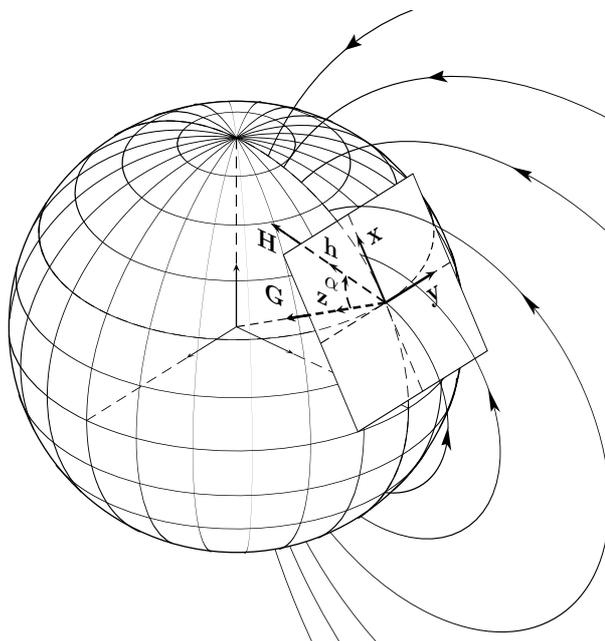


Figura 6.2: Representación del sistema de coordenadas inercial y los vectores de gravedad e intensidad del campo magnético en la superficie de la tierra.

Del mismo modo, el acelerómetro triaxial mide un vector que representa la intensidad del campo gravitacional local (en realidad, mide la aceleración global del chasis, en la que se encuentra la debida al movimiento, y la debida a la gravedad, pero en determinadas circunstancias es posible aislar la componente gravitatoria). Por tanto, del vector de intensidad de campo magnético se obtiene una medida del campo terrestre local, \mathbf{H} , y del vector de aceleración se obtiene la gravedad local, \mathbf{G} , como se muestra en la figura 6.2. Los vectores \mathbf{h} y \mathbf{g} son el resultado de normalizar \mathbf{H} y \mathbf{G} respectivamente. Estos dos vectores forman un ángulo α que es invariante en un entorno del punto de trabajo, y depende únicamente de la latitud y longitud donde se realiza el ensayo³.

Conociendo estos dos vectores es posible obtener la orientación del chasis respecto al sistema de referencia inercial. La integración doble de las aceleraciones obtenidas del acelerómetro triaxial (una vez eliminada la componente de la gravedad), permitirían obtener la velocidad y la posición.

Este problema es común en navegación de barcos o satélites, por ejemplo, en los que se precisa estimar la orientación del vehículo observando los vectores que apuntan a algunas estrellas conocidas. Este problema fue planteado, de forma general, en 1965 por *Grace Wahba*, y se conoce como *Problema*

³En realidad las medidas del magnetómetro recogen el campo magnético local, y en él se incluye la parte debida al campo magnético terrestre, y otros campos generados en las inmediaciones. Este punto se discutirá más adelante.

de Wahba. Consiste en estimar la orientación de un objeto a partir de la observación, en el sistema de referencia local, de dos o más vectores no nulos y no colineales, que son conocidos en otro sistema de referencia (habitualmente el sistema inercial fijo en tierra). En el problema de estimación de la orientación de este trabajo, estos vectores son H y G . En resumen, se trata de encontrar la matriz ortogonal \mathbf{A} , con determinante $+1$, que minimiza la función de coste [86]:

$$L(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \left\| {}^b\mathbf{r}_i - \mathbf{A} {}^e\mathbf{r}_i \right\|^2 \quad (6.46)$$

donde ${}^b\mathbf{r}_i$ son los n vectores medidos en el sistema de referencia local (la gravedad y el campo magnético, en este caso), ${}^e\mathbf{r}_i$ son los correspondientes vectores unitarios en el sistema de referencia fijo en tierra y a_i son pesos no negativos tales que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Esta función de pérdidas se puede entender geoméricamente si se piensa en \mathbf{A} como la matriz ortonormal que define el cambio de base entre ambos sistemas de referencia. De esta forma, cada ${}^b\mathbf{r}_i - \mathbf{A} {}^e\mathbf{r}_i$ es el error cometido en la estimación de orientación representada por \mathbf{A} , correspondiente a ${}^b\mathbf{r}_i$. Minimizar $L(\mathbf{A})$ puede entenderse, entonces, como un problema de mínimos cuadrados. Esta función de coste puede reescribirse de la forma:

$$L(\mathbf{A}) = \lambda_0 - \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) \quad (6.47)$$

donde $\lambda_0 = \sum_i a_i$ y $\mathbf{B} = \sum_i a_i {}^b\mathbf{r}_i {}^e\mathbf{r}_i^T$. De esta forma, se entiende que maximizando la traza $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ se minimiza $L(\mathbf{A})$.

Se han propuesto numerosas soluciones al problema de Wahba (una recopilación detallada se puede consultar en [54], por ejemplo). A continuación se exponen, de forma cronológica, las más habituales.

Farrel, Stuelpnagel *et al.*

La primera en 1966 por Farrel *et al.* [27], seguida en los años sucesivos por otras de diferentes autores, incluida Wahba, pero todas ellas imponían restricciones debidas al propio método de resolución, por lo que no resultaban totalmente satisfactorias.

SVD

El progreso del *álgebra matricial*, propició otra solución al problema de Wahba que, aún siendo computacionalmente cara, es robusta. Consiste básicamente en utilizar la descomposición en valor singular de la matriz \mathbf{B} para maximizar la traza $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} \Sigma^T \mathbf{V}^T = \mathbf{U} \cdot (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33})^T \cdot \mathbf{V}^T \quad (6.48)$$

donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son ortogonales, y σ_{ii} los valores singulares de \mathbf{B} , de forma que $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33} \geq 0$. Como se utiliza la descomposición en valor singular de \mathbf{B} a este método se le conoce como *SVD* (*Single Value Decomposition*).

Davenport (*q-METHOD*)

Davenport [47], [50] proporcionó la primera solución realmente útil al problema de Wahba, dirigida a la estimación de orientación de naves espaciales. El método, que se conoce como *q-Method*, se basa en definir la orientación mediante una cuaterna unitaria:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \mathbf{v} \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \mathbf{q}_v \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

La cuaterna \mathbf{q} representa la misma rotación que la matriz \mathbf{A} , de forma que se puede escribir \mathbf{A} en función de \mathbf{q} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \left(q_1^2 - |\mathbf{q}_v|^2 \right) \mathbf{I} + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T - 2q_1 [\mathbf{q}_v \times] \quad (6.50)$$

y se podrá encontrar una matriz \mathbf{K} tal que

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (6.51)$$

con \mathbf{K} simétrica y con traza nula [54]. Para maximizar la $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ y resolver el problema de Wahba, bastará tomar para \mathbf{q} el autovector de \mathbf{K} correspondiente a su autovalor más alto, esto es, resolver la ecuación

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{opt} = \lambda_{max}\mathbf{q}_{opt} \quad (6.52)$$

con lo que se obtendría la cuaterna óptima para resolver el problema de orientación, \mathbf{q}_{opt} . Esto no plantea excesiva dificultad, ya que existen algoritmos robustos para resolver el problema de cálculo de autovalores y autovectores de matrices simétricas, aunque no son eficientes desde el punto de vista del coste computacional.

Lerner (*TRIAD*)

En 1978 Lerner [50] propuso una solución basada en buscar la matriz de orientación \mathbf{A} calculada a partir de la observación de dos vectores únicamente. Este sistema, conocido como *TRIAD*, sólo utiliza dos observaciones y descarta las demás (si las hay) para hacer que el problema no sea sobredeterminado, y así calcular una solución analítica. para ello genera dos bases ortonormales en ambos sistemas de referencia, a partir de los dos vectores

observados y otro normal a ambos:

$${}^e\mathbf{e}_1 = {}^e\mathbf{r}_1 \qquad {}^b\mathbf{e}_1 = {}^b\mathbf{r}_1 \qquad (6.53)$$

$${}^e\mathbf{e}_2 = \frac{{}^e\mathbf{r}_1 \times {}^e\mathbf{r}_2}{\|{}^e\mathbf{r}_1 \times {}^e\mathbf{r}_2\|} \qquad {}^b\mathbf{e}_2 = \frac{{}^b\mathbf{r}_1 \times {}^b\mathbf{r}_2}{\|{}^b\mathbf{r}_1 \times {}^b\mathbf{r}_2\|} \qquad (6.54)$$

$${}^e\mathbf{e}_3 = \frac{{}^e\mathbf{r}_1 \times ({}^e\mathbf{r}_1 \times {}^e\mathbf{r}_2)}{\|{}^e\mathbf{r}_1 \times {}^e\mathbf{r}_2\|} \qquad {}^b\mathbf{e}_3 = \frac{{}^b\mathbf{r}_1 \times ({}^b\mathbf{r}_1 \times {}^b\mathbf{r}_2)}{\|{}^b\mathbf{r}_1 \times {}^b\mathbf{r}_2\|} \qquad (6.55)$$

de forma que se obtienen las bases $\{{}^e\mathbf{e}_1, {}^e\mathbf{e}_2, {}^e\mathbf{e}_3\}$ y $\{{}^b\mathbf{e}_1, {}^b\mathbf{e}_2, {}^b\mathbf{e}_3\}$. Solo resta ahora encontrar la matriz \mathbf{A} que realiza el cambio de base entre ambas:

$$\mathbf{A}^e\mathbf{e}_i = {}^b\mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 {}^b\mathbf{e}_i {}^e\mathbf{e}_i^T \qquad (6.56)$$

Esta ecuación se puede escribir, también, de forma que exprese \mathbf{A} como el producto de dos matrices de cambio de base ${}^e\mathbf{E}$ y ${}^b\mathbf{E}$, que se forman orlando los vectores ${}^e\mathbf{e}_i$ y ${}^b\mathbf{e}_i$ respectivamente:

$$\mathbf{A} = {}^b\mathbf{E} \cdot {}^e\mathbf{E}^T, \text{ donde } \begin{cases} {}^e\mathbf{E} = ({}^e\mathbf{e}_1 : {}^e\mathbf{e}_2 : {}^e\mathbf{e}_3) \\ {}^b\mathbf{E} = ({}^b\mathbf{e}_1 : {}^b\mathbf{e}_2 : {}^b\mathbf{e}_3) \end{cases} \qquad (6.57)$$

Schuster (QUEST)

Poco tiempo después (en el mismo año, 1978) Schuster [79] propuso una nueva solución al problema de Wahba, que se aplicó por primera vez en la misión *MAGSAT*⁴, en 1979, y ha venido utilizándose desde entonces. Se basa en usar métodos iterativos para estimar la cuaterna \mathbf{q} de la ecuación 6.51. Para ello propuso utilizar el método de Newton-Raphson para resolver una forma de la ecuación característica de \mathbf{K} , que es un polinomio de orden 4, tomando como valor inicial $\lambda = \lambda_0$ (de la ecuación 6.47). Schuster observó que λ_{max} ha de estar muy próximo a λ_0 , de forma que una sola iteración suele ser suficiente. Como en este método se trata de estimar la cuaterna \mathbf{q} , se conoce como *QUEST* (*Quaternion Estimator*). Aunque la iteración de Newton-Raphson suele ser muy rápida en este caso, hay circunstancias en las que este método iterativo resulta menos robusto que el de Davenport. Además, el uso de la iteración de Newton-Raphson para el cálculo de λ_{max} supone un tratamiento numérico diferente para cada uno de los cuatro escalares de \mathbf{q} . Esto provoca singularidades en determinadas orientaciones.

⁴El Magsat (*Magnetic Field Satellite*) fue un satélite artificial de la NASA lanzado en 1979 y que reentró en la atmósfera el 11 de junio de 1980. Magsat estaba dedicado a tomar datos del campo magnético terrestre en zonas cerca de la superficie y a estudiar anomalías magnéticas de la corteza. Se orientaba espacialmente utilizando dos cámaras seguidoras de estrellas.

Markley (FOAM)

El método *FOAM* (*Fast Optimal Attitude Matrix*) retoma el cálculo de la orientación mediante matrices, y disminuye los errores numéricos del proceso, mejorando la precisión obtenida en la estimación.

A partir de la matriz de orientación óptima calculada, \mathbf{A}_{opt} , se puede extraer la cuaterna que representa la misma orientación con un coste computacional de 13 *MATLAB flops*. La cuaterna tiene solamente 4 escalares, en lugar de los 9 de la matriz, es más fácil de interpolar, y de normalizar si la matriz no es exactamente ortogonal debido a errores numéricos.

Davenport (ESOQ)

De la ecuación 6.51, para el cálculo de autovalores de Davenport, se sigue que la cuaterna óptima \mathbf{q}_{opt} es ortogonal a todas las columnas de la matriz

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} - \lambda_{max}\mathbf{I} \quad (6.58)$$

lo que significa que debe ser ortogonal al subespacio tridimensional generado por las columnas de \mathbf{H} . De esta forma, la cuaterna óptima se puede calcular a partir del producto vectorial cuatridimensional de tres columnas cualquiera de \mathbf{H} . Este método se conoce como *ESOQ* [61] (*Estimator of the Optimal Quaternion*), y ha sido mejorado en versiones posteriores (*ESOQ-1*, *ESOQ-1.1*, *ESOQ-2* y *ESOQ-2.1*).

Yun et al. (FQA)

Por último, en 2008 Yun *et al.* [96] propusieron un nuevo algoritmo para resolver el problema de Wahba, aunque esta vez sin tener en cuenta la parte aleatoria de las señales. Se trata de un método determinista que resuelve algebraicamente los tres ángulos de rotación (cabeceo, guiñada y balanceo) de forma secuencial e independiente, de manera que permite separar la contribución de cada sensor inercial (acelerómetros, giróscopos y magnetómetros), y hacer que el magnetómetro influya solamente en la estimación de la guiñada. Esto es especialmente importante en la estimación de orientación de sólidos en el interior de edificios, en los que es probable que se produzcan perturbaciones apreciables del campo magnético debidas a aparatos eléctricos, o a la presencia en el entorno de materiales ferromagnéticos. Con este algoritmo, los errores causados por las perturbaciones del campo magnético afectan solamente a la estimación de la guiñada, y no a la de cabeceo o balanceo.

Este método, llamado *FQA* (*Factored Quaternion Algorithm*), parte de la idea de que cualquier orientación del sólido puede alcanzarse desde la posición inicial rotándolo primero un ángulo ψ alrededor del eje z (azimut), después un ángulo θ alrededor del eje y (cabeceo) y finalmente un ángulo ϕ

alrededor del eje x (balanceo). El método obtiene una cuaterna para cada una de estas rotaciones, a partir de las medidas de los sensores, y después las compone en una única cuaterna que describe la orientación del sólido [96].

Para obtener la cuaterna de la rotación de cabeceo es interesante observar que, si el sólido se encuentra en reposo, o se mueve con velocidad constante, las lecturas del acelerómetro triaxial son debidas únicamente a la gravedad. Si las lecturas del acelerómetro son el vector ${}^b\mathbf{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$, entonces la componente a_x tendrá componentes debidas únicamente a la gravedad:

$${}^b\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin \theta \\ -g \cos \theta \sin \phi \\ -g \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

Por tanto, si se normaliza ${}^b\mathbf{a}$, la componente a_x será únicamente función del ángulo θ :

$$\frac{{}^b\mathbf{a}}{\|{}^b\mathbf{a}\|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_x \\ \bar{a}_y \\ \bar{a}_z \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

Por tanto, de \bar{a}_x se obtienen las relaciones trigonométricas de la rotación de cabeceo:

$$\sin \theta = \bar{a}_x \quad \cos \theta = +\sqrt{1 - \bar{a}_x^2} \quad (6.61)$$

Para generar la cuaterna de rotación de cabeceo son necesarios el seno y el coseno del ángulo mitad, por lo que:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \text{sign}(\sin \theta) \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (6.62)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la rotación se produce exclusivamente alrededor del eje y , la cuaterna de rotación de cabeceo será:

$${}^e\mathbf{q}_c = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

Para obtener la cuaterna de rotación de balanceo (alrededor del eje x) se tendrá en cuenta que a_y y a_z contienen las lecturas de la proyección de la gravedad en los ejes y y z locales, y estas lecturas contienen la composición de la rotación de cabeceo y la de balanceo:

$$\bar{a}_y = -\cos \theta \sin \phi \quad \bar{a}_z = -\cos \theta \cos \phi \quad (6.64)$$

El valor del $\cos \theta$ se conoce de 6.61, de forma que

$$\sin \phi = -\frac{\bar{a}_y}{\cos \theta} \quad \cos \phi = -\frac{\bar{a}_z}{\cos \theta} \quad (6.65)$$

Cuando $\cos \theta = 0$ se produce una singularidad. Esta singularidad es tratada en detalle por el método FQA, y se proponen dos soluciones viables para evitarla [96].

La cuaterna de balanceo se obtiene por un procedimiento análogo al descrito para la de cabeceo:

$${}^e\mathbf{q}_b = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

Es interesante destacar que para la obtención de ${}^e\mathbf{q}_c$ y ${}^e\mathbf{q}_b$ no se ha utilizado la medida del campo magnético. Para obtener la cuaterna de rotación de guiñada, respecto al eje z , primero se procede a rotar la lectura del magnetómetro ${}^b\mathbf{m} = ({}^bm_x \ {}^bm_y \ {}^bm_z)^T$ para referirlo al sistema inercial:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ {}^e\mathbf{m} \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_c {}^e\mathbf{q}_b \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{m} \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_b {}^e\bar{\mathbf{q}}_c \quad (6.67)$$

A partir de ${}^e\mathbf{m}$ se puede obtener el ángulo ψ resolviendo el sistema [96]:

$$\begin{pmatrix} {}^en_x \\ {}^en_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^em_x \\ {}^em_y \end{pmatrix} \quad (6.68)$$

en el que en_x y en_y son las proyecciones del campo magnético en los ejes x y y del sistema inercial. Antes de resolver este sistema es necesario normalizar los vectores $({}^en_x \ {}^en_y)^T$ y $({}^em_x \ {}^em_y)^T$, para evitar errores debidos a distorsiones locales del campo magnético. La cuaterna de rotación de guiñada será:

$${}^e\mathbf{q}_g = \cos \frac{\psi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \frac{\psi}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.69)$$

Una vez obtenidas las tres cuaternas, la cuaterna de estimación de la orientación del objeto será su composición:

$$\hat{\mathbf{q}} = {}^e\mathbf{q}_g {}^e\mathbf{q}_c {}^e\mathbf{q}_b \quad (6.70)$$

A pesar de las relaciones trigonométricas que aparecen en todas estas expresiones del método FQA, no es necesario realizar ninguna operación trigonométrica para obtener la estimación final. Se utilizan exclusivamente sumas y productos de escalares, y raíces cuadradas. Las singularidades del método se resuelven sin dificultad. Sin embargo, este método no contempla la parte probabilística de la estimación, de modo que es necesario hacer un tratamiento posterior de la estimación de la orientación obtenida, para eliminar los efectos causados por los ruidos que contaminan las lecturas de los sensores, y por el hecho de que se considera la aceleración debida a cambios de velocidad como un ruido superpuesto a la gravedad.

6.4. El Filtro Complementario

En todas las aproximaciones a la estimación de la orientación examinadas en el apartado anterior se supone que se puede obtener el vector de la gravedad en el sistema de referencia local a partir de las lecturas del acelerómetro triaxial. Pero esto sólo es cierto si el objeto que se sigue está en reposo, o se mueve sin aceleración ni rotaciones. Aunque esta limitación parece muy restrictiva, es posible sortearla en determinadas circunstancias. De hecho, los algoritmos expuestos en el capítulo anterior han venido utilizándose con éxito para el seguimiento de satélites, robots, bisturís o extremidades del cuerpo humano en las últimas décadas, como queda reflejado en la bibliografía mencionada.

Algunas formas habituales de evitar esta restricción son suponer que las aceleraciones del objeto se cancelan a medio o largo plazo, y por tanto pueden ser eliminadas mediante algún tipo de promedio, o aumentar el sistema de sensores incorporando otros que complementen la falta de información de los acelerómetros y los magnetómetros, y permitan separar la gravedad del resto de aceleraciones.

Un ejemplo típico de ambas estrategias, que se utiliza para el seguimiento del movimiento de humanos para su inserción en entornos virtuales, es la propuesta por Bachmann [5]. Consiste en añadir un sensor de velocidad de rotación triaxial⁵ al sistema de sensores, y utilizar un *Filtro Complementario* (*CF*, *Complimentary Filter*) para separar las lecturas de aceleración y gravedad. Bachmann denominó *MARG* (*Magnetic, Angular Rate, and Gravity*) a la combinación de los nueve sensores *MEMS*: tres acelerómetros ortonormales, tres magnetómetros ortonormales y tres *rate-gyros* ortonormales.

Las características espectrales de las señales utilizadas en el filtro han de ser complementarias. Para minimizar el error de estimación se escogerán funciones de transferencia complementarias para cada una de ellas:

$$H_1(s) + H_2(s) + \dots + H_n(s) = 1 \quad (6.71)$$

donde $H_i(s)$ es la función de transferencia para la señal i -ésima. Para comprender el funcionamiento del filtro, supóngase que se dispone de dos señales $X(s) + N_1(s)$ y $X(s) + N_2(s)$ que miden la misma magnitud física $X(s)$, pero con ruidos $N_1(s)$ y $N_2(s)$ con características espectrales complementarias. Por ejemplo, supóngase que $N_1(s)$ tiene componentes de ruido predominantemente de baja frecuencia, y $N_2(s)$ de alta. Se pueden filtrar ambas señales con dos filtros complementarios, uno con función de transferencia $H_1(s) = 1 - H_2(s)$ y el otro con $H_2(s)$, tal y como se muestra en la figura 6.3. La función $H_2(s)$ será un filtro paso bajo, y se escogerá para que filtre adecuadamente $N_2(s)$, de forma que $H_1(s)$ filtrará adecuadamente $N_1(s)$, al ser ambos complementarios. La salida del filtro será

⁵En este caso, se trata de *rate-gyros* de bajo coste, destinados originalmente a la estabilización de imágenes en cámaras de vídeo.

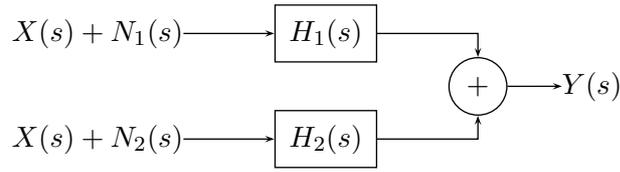


Figura 6.3: Filtrado complementario de dos señales.

$$Y(s) = (X(s) + N_1(s))H_1(s) + (X(s) + N_2(s))H_2(s) \quad (6.72)$$

de donde

$$Y(s) = X(s) + N_1(s)H_1(s) + N_2(s)H_2(s) \quad (6.73)$$

Si las funciones de transferencia $H_1(s) = 1 - H_2(s)$ y $H_2(s)$ se han escogido adecuadamente, filtrarán y cancelarán los ruidos $N_1(s)$ y $N_2(s)$, quedando finalmente

$$Y(s) = X(s) \quad (6.74)$$

Es interesante destacar que las componentes de alta frecuencia de la señal original $X(s)$ se obtienen a través de $H_1(s)$ sin modificación, y las de baja frecuencia a través de $H_2(s)$. Este planteamiento permite obtener la señal original íntegra, a partir de la contribución de ambas medidas, y *sin retrasos* debidos al filtrado.

El acelerómetro triaxial devuelve una medida local de la aceleración debida a cambios en la velocidad lineal, y la gravedad. Se puede considerar que, si el objeto no acelera indefinidamente, un promedio a largo plazo de esta señal –esto es, tras ser sometida a un filtro paso-bajo– entregaría únicamente el vector de la gravedad. Del vector de la gravedad, y el del campo magnético se puede obtener la orientación del objeto, y de la diferencia entre dos instantes de tiempo sucesivos, una estimación del cambio de orientación (velocidad de rotación).

Por otro lado, de los *rate-gyros* se obtiene directamente una medida, en coordenadas locales, de la velocidad de rotación. La deriva típica de este tipo de sensores se puede considerar como un ruido de baja frecuencia que puede ser filtrado mediante un filtro paso-alto para obtener las componentes de alta frecuencia de la velocidad de rotación.

Ambas medidas de la velocidad de rotación del sólido pueden considerarse complementarias, en cuanto a sus componentes de ruido, y así es posible plantear un filtro complementario para obtener una estimación óptima de la velocidad de rotación del sólido y, tras su integración, de la orientación.

La exigencia de que el promediado de las aceleraciones lineales haya de anularse supone limitar en cierta medida los movimientos permitidos al objeto en seguimiento; aún así los filtros complementarios han venido utilizándose con éxito incluso en objetos en los que el movimiento es complejo

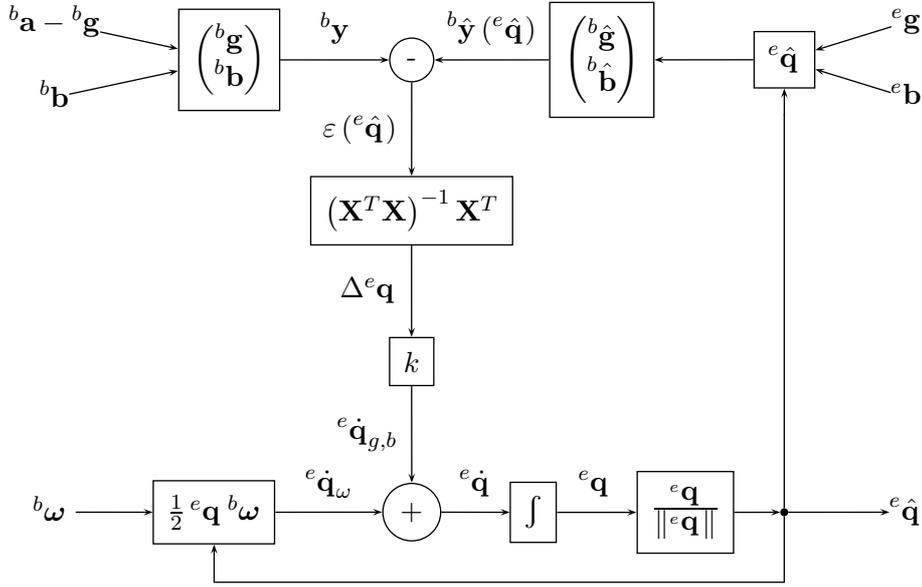


Figura 6.4: Filtro complementario para estimación de orientación con sensores MARG y cuaternas [5].

(como muestra, pueden comprobarse las aplicaciones de diferentes filtros complementarios en aeronaves en [16], [78], [68], [26] ó [9]).

En la figura 6.4 se muestra la estructura del filtro complementario completo, propuesto por McGhee *et al.* [56] para el seguimiento de extremidades del cuerpo humano, incluyendo la integración de las velocidades de rotación.

El funcionamiento de este filtro es como sigue: a partir de los vectores normalizados que representan, en el sistema de referencia inercial, la gravedad ${}^e\mathbf{g} = (0 \ 0 \ 1)^T$ y el campo magnético local ${}^e\mathbf{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$, se utiliza la estimación de la orientación ${}^e\hat{\mathbf{q}}$ para expresarlas en el sistema de referencia local:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b\mathbf{g} \end{pmatrix} = {}^e\hat{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} 0 \\ e\mathbf{g} \end{pmatrix} {}^e\hat{\mathbf{q}}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ b\mathbf{b} \end{pmatrix} = {}^e\hat{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} 0 \\ e\mathbf{b} \end{pmatrix} {}^e\hat{\mathbf{q}} \quad (6.75)$$

A continuación se unen ambos vectores en un vector columna, de dimensión 6×1 , y que es función de la estimación actual de la orientación:

$$b\hat{\mathbf{y}}({}^e\hat{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} b\hat{\mathbf{g}} \\ b\hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

Por otro lado, las lecturas del acelerómetro y el magnetómetro se utilizan para obtener, referidas al sistema local, los vectores que representan al campo magnético ($b\mathbf{b}$) y a la gravedad mezclada con la aceleración ($b\mathbf{a} - b\mathbf{g}$). Esta aceleración, como se ha explicado ya, se considera para los efectos de

este filtro como un ruido de alta frecuencia que “ensucia” la medida de la gravedad, y que será eliminada en el proceso de filtrado. Con ambos vectores se forma, también, un vector columna ${}^b\mathbf{y} = ({}^b\mathbf{g} \ {}^b\mathbf{b})^T$, de dimensión 6×1 .

La diferencia de estos dos vectores es un error de estimación de la gravedad y el campo magnético:

$$\varepsilon({}^e\hat{\mathbf{q}}) = {}^b\hat{\mathbf{y}}({}^e\hat{\mathbf{q}}) - {}^b\mathbf{y} = \begin{pmatrix} {}^b\hat{\mathbf{g}} - {}^b\mathbf{g} \\ {}^b\hat{\mathbf{b}} - {}^b\mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

La minimización de la norma euclídea de este vector conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas, que se resuelve mediante un método iterativo. En la figura 6.4 se muestra la matriz utilizada en la iteración de Newton utilizada por McGhee *et al.* [56]:

$$\Delta\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \varepsilon({}^e\hat{\mathbf{q}}) \quad (6.78)$$

El producto de $\Delta\hat{\mathbf{q}}$ por la constante k constituye la cuaterna de cambio de orientación debida a los acelerómetros y magnetómetros, ${}^e\hat{\mathbf{q}}_{g,b}$.

Por último, de los *rate-gyros* se obtiene directamente el vector de velocidad de rotación en coordenadas locales, ${}^b\omega$. Con este vector, y mediante la expresión 6.45, se obtiene la cuaterna de cambio de orientación debida a los *rate-gyros*, ${}^e\hat{\mathbf{q}}_\omega$.

Las cuaternas de cambio de orientación ${}^e\hat{\mathbf{q}}_{g,b}$ y ${}^e\hat{\mathbf{q}}_\omega$, junto con el bloque de la constante k , la suma, y el bloque de integración posterior, constituyen en sí mismos el filtro complementario propiamente dicho. La constante k es la que se utiliza para ajustar la frecuencia de corte de modo que el filtro paso bajo aplicado a los acelerómetros y magnetómetros cancele adecuadamente sus ruidos de alta frecuencia –incluyendo las aceleraciones lineales–, y el paso alto cancele adecuadamente las componentes de baja frecuencia (derivadas o *bias*) de los *rate-gyros*. La suma e integración de ambas componentes entrega, finalmente, la cuaterna de estimación de la orientación, ${}^e\hat{\mathbf{q}}$. Para asegurar la norma unitaria de esta cuaterna, se incorpora al final del filtro una división por su módulo.

Posteriores mejoras del filtro consisten en asignar diferentes pesos a los acelerómetros y a los magnetómetros. En concreto, Bachmann [5] propone utilizar un escalar $0 < \rho < 1$ que multiplica a cada uno de los tres términos de campo magnético de la norma euclídea de $\varepsilon({}^e\hat{\mathbf{q}})$ en la expresión 6.77.

6.5. El Filtro de Wiener

A pesar de que, como se ha razonado en la sección anterior, el filtro complementario ha venido utilizándose con éxito para el seguimiento de la orientación de determinados objetos, hay dos circunstancias que hacen desaconsejable su uso para el propósito de este trabajo.

La primera es que algunas de las maniobras que, previsiblemente, habrán de realizarse con el vehículo no se adaptan a la exigencia de aceleración lineal promedio nula. Por ejemplo, maniobras orientadas a comprobar la interacción neumático-suelo bajo cargas laterales pueden llevar a trazar curvas que se extienden en el tiempo, y que sumarían una componente lateral de aceleración (fuerza centrífuga), medida por los acelerómetros, que no desaparecería con la integración, y sería interpretada erróneamente como gravedad. Al eliminar esta aceleración erróneamente de la medida de los acelerómetros, por considerarla gravedad, la estimación de la orientación del chasis sería errónea, y las integraciones posteriores para obtener la posición, velocidad y aceleraciones lineales amplificarían este error.

Por otra parte el filtro complementario resuelve un problema de mínimos cuadrados, y con ello tiene en cuenta, en cierta medida, la naturaleza aleatoria del ruido de los sensores. Pero no permite hacer un modelado más detallado de la naturaleza estocástica de estos ruidos, ni de otros errores introducidos por el propio filtro (los errores numéricos que se cometen en cada iteración, por ejemplo).

El filtro de Wiener [92] fue diseñado para tratar directamente con la naturaleza estocástica de señales, y los ruidos que las acompañan. Para ello se asume que se conocen por completo las características espectrales de las señales y sus ruidos. Aunque fue formulado inicialmente para señales continuas, con el advenimiento de la electrónica digital es más habitual la aplicación de su formulación discreta. El filtro de Wiener para señales discretas se basa en una función de peso que utiliza todos los datos de los que se dispone hasta el tiempo actual para producir una estimación óptima de la señal filtrada (sin el ruido). Dadas n medidas con ruido, en los instantes de tiempo t_1 a t_n , la estimación es:

$$\hat{y} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_ix_i \quad (6.79)$$

donde $x_i = x(t_i)$ son las medidas de la señal x , con su ruido, tomadas en el instante t_i , e \hat{y} es la estimación de la medida.

De la minimización del error cuadrático medio de estimación de \hat{y} se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. El tamaño del sistema es n , y por tanto crece con cada muestra que se toma de la señal de entrada. Este hecho, entre otros, hace que la aplicación del filtro de Wiener no sea adecuada a problemas como el que se plantea en este trabajo, porque el tiempo de muestreo de las señales es suficientemente grande como para hacer intratable la resolución de este sistema de ecuaciones. Además, esta aproximación obliga a almacenar en memoria todos los datos muestreados hasta el instante de tiempo actual.

Por otra parte, para el uso de este filtro se hace necesario el conocimiento de las características espectrales de las señales que se desean “limpiar” y de

los ruidos que las contaminan, y esto no es posible en el problema que se plantea en este trabajo.

Por último, la naturaleza escalar de la formulación de este filtro hace difícil aplicarlo a problemas en los que existen varias entradas y salidas.

6.6. El Filtro de Kalman y sus derivados

De las herramientas matemáticas para estimación estocástica de medidas de sensores con ruido, una de las más conocidas y utilizadas es el Filtro de Kalman (KF). Recibe el nombre de su autor, Rudolph E. Kalman, que publicó en 1960 su conocido *paper* [46] en el que describe una solución recursiva al problema de filtrado lineal de datos discretos. El filtro de Kalman es en esencia un conjunto de ecuaciones matemáticas que implementan un tipo de estimador predictor–corrector que es óptimo en el sentido de que minimiza la covarianza del error de estimación, si se verifican unas condiciones sencillas.

Desde el momento de su publicación, este filtro ha sido el objeto de abundantes investigaciones y aplicaciones, particularmente en el área de navegación autónoma o asistida [89]. Posiblemente esto sea debido en parte a los avances en computación, que han hecho práctico el uso de este filtro, pero también a su relativa simplicidad y robustez. Difícilmente se encuentran sistemas en los que se verifiquen estrictamente las condiciones teóricas para las que este filtro es óptimo. Aún así su funcionamiento es aceptable en muchas aplicaciones a pesar de esta limitación.

6.6.1. El Filtro de Kalman original

Se abordará en este apartado el algoritmo del Filtro de Kalman original, para sistemas lineales. Se expondrán sus conceptos fundamentales con cierto detalle, porque será necesario retomar estos conceptos en la explicación, en secciones posteriores, del nuevo modelo de filtro propuesto en este trabajo.

La teoría del filtro de Kalman se basa en asumir que las características espectrales del proceso que se filtra son conocidas. Se asume que todas las fuentes de ruido son *ruido blanco* y *Gausiano* [55]. Suponer que los ruidos sean blancos implica exigir que sean incorrelados en el tiempo, y que tengan igual potencia en todas las frecuencias⁶. Admitir que sean gaussianos implica presuponer que su función de densidad tiene la forma de una *Campana de*

⁶Igual potencia (no nula) en todas las frecuencias implicaría potencia infinita. Aunque esto no es posible, se puede asumir que en realidad se trata de *ruido gaussiano coloreado*, que tiene igual potencia en un rango de frecuencias finito. Teniendo en cuenta que cualquier sistema por el que se haga pasar una señal tendrá una respuesta en frecuencia limitada, que se puede representar mediante un *filtro paso banda*, considerar que se trata de ruido gaussiano coloreado, o de ruido blanco que ha atravesado un sistema con una respuesta en frecuencia limitada, son conceptos equivalentes.

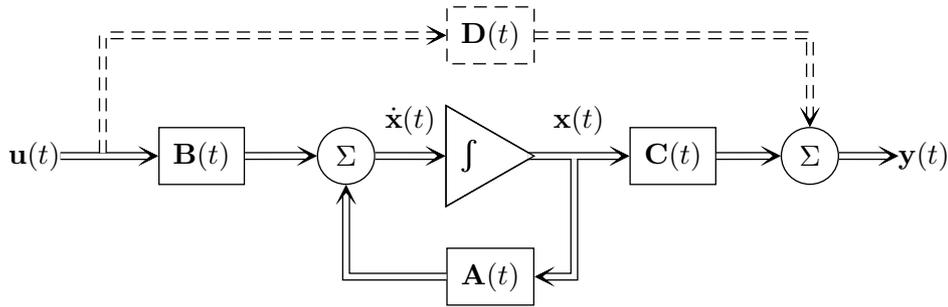


Figura 6.5: Diagrama de bloques de un sistema dinámico continuo.

Gauss, y su función de distribución es una Normal⁷, que estará perfectamente definida si se conocen la media y la desviación típica.

En resumen, es necesario admitir que todos los ruidos involucrados son blancos, gaussianos, de media nula y desviación típica conocida. El comportamiento del sistema que se pretende filtrar tiene que responder a un modelo lineal, en el sentido de que puede ser modelado mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, y se acomoda a la forma genérica de un sistema lineal, como el que se presenta en la figura 6.5. En estas condiciones, el filtro de Kalman produce una estimación óptima del estado del sistema. Esta optimalidad está basada en el *Teorema de Bayes*, y en el uso de funciones de densidades de probabilidad condicionadas. Las ecuaciones que modelan este tipo de sistemas son de la forma [46]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{6.80}$$

donde $\mathbf{A}(t)$ es la matriz que representa las *ecuaciones diferenciales* que modelan el comportamiento dinámico del sistema, y ligan el *vector de estado* $\mathbf{x}(t)$ con su derivada $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ describe la relación entre la derivada del vector de estado y la entrada $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ permite obtener el vector de salidas del sistema (las variables que pueden ser directamente medibles mediante sensores) a partir del vector de estado y $\mathbf{D}(t)$ establece una relación directa entre la salida y la entrada. Por lo general, $\mathbf{D}(t)$ no suele tenerse en cuenta, ya que sus efectos pueden considerarse externamente.

Los filtros de Kalman continuos no tienen interés práctico, y son pocas las aplicaciones reales que las emplean. El advenimiento de los computadores ha

⁷Tampoco esto supone una limitación fuerte a la aplicación de los Filtros de Kalman a problemas reales. La distribución Normal es la que se produce con más frecuencia (de ahí su nombre); este hecho queda patente en el *Teorema del Límite Central*. Por otra parte, aún cuando desconociésemos la naturaleza de los ruidos, o no fuésemos capaces de caracterizarlos, la Normal es siempre la mejor opción ya que permite modelar la señal conociendo únicamente su media y desviación típica —esto es, los estadísticos de primer y segundo orden—. En la mayoría de los casos, estos datos son los únicos que se pueden obtener empíricamente.

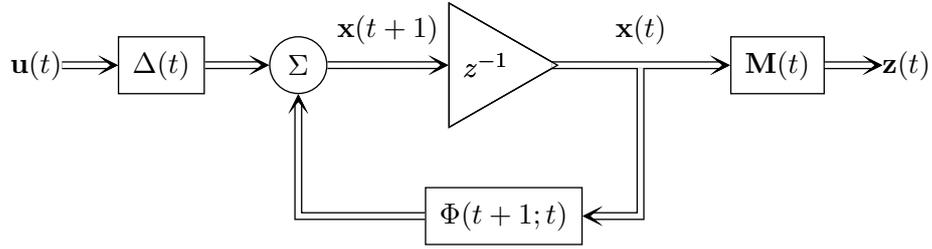


Figura 6.6: Diagrama de bloques de un sistema dinámico discreto.

hecho posible la discretización del filtro y su aplicación mediante diferentes algoritmos, como se describirá en la presente sección.

La discretización del sistema da como resultado el diagrama de bloques que se muestra en la figura 6.6. Las ecuaciones que modelan este sistema discreto constituyen un sistema de *ecuaciones en diferencias* [46]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \Phi(t+1;t)\mathbf{x}(t) + \Delta(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6.81)$$

donde las matrices⁸ $\Phi(t+1;t)$, $\Delta(t)$ y $\mathbf{M}(t)$ son las equivalentes a $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ en 6.80. El tiempo ha sido discretizado y reescalado, de forma que $t = 0, 1, \dots$ son los sucesivos instantes de tiempo que se consideran, y $t \in \mathbb{N}$.

En general, se suele considerar que el comportamiento del sistema no varía con el tiempo, de forma que las matrices que lo representan son constantes ($\mathbf{A} = \Phi(t+1;t)$, $\mathbf{B} = \Delta(t)$ y $\mathbf{H} = \mathbf{M}(t)$); para simplificar la notación, el instante de tiempo se indica mediante subíndices, con lo que 6.81 se podría reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (6.82)$$

En este punto se considera la naturaleza estocástica de las señales involucradas en el sistema. El vector \mathbf{x} o *vector de estado* contiene un conjunto mínimo de valores suficiente para describir completamente el estado actual del sistema. Las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} representan el comportamiento dinámico del sistema; esta representación se entiende que no es completa: se modela el sistema hasta un punto que lo representa con suficiente precisión pero, en general, se dejan sin modelar aspectos del sistema que se consideran despreciables. Por otra parte, es posible que el modelo del sistema, representado

⁸ $\Phi(t+1;t)$ es la *matriz de transición* del sistema 6.81. La notación $\Phi(t_1;t_2)$, con $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ indica la transición del instante t_1 al t_2 . Por tanto, $\Phi(t;t) = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} es la matriz unitaria de la dimensión adecuada). Si el sistema es estacionario entonces $\Phi(t+1;t)$ será constante. Nótese, además, que $\Phi(t;s)\Phi(s;r) = \Phi(t;r)$ y $\Phi^{-1}(t;s) = \Phi(s;t)$, con $t, s, r \in \mathbb{Z}$ [46]. Para simplificar la notación, se prescindirá en este trabajo del segundo parámetro, salvo cuando sea imprescindible, y se denotará únicamente como $\Phi(t)$.

por \mathbf{A} y \mathbf{B} no sea correcto, bien por error, bien por desconocimiento. Por último, el hecho de discretizar los valores del vector de estado y las matrices del sistema —tanto en el tiempo como en el módulo— supone admitir que se cometerán errores numéricos en la resolución de las ecuaciones 6.82. Todos estos errores se modelan mediante \mathbf{w}_k , con la forma de un ruido blanco y gaussiano.

Del mismo modo, se entiende que los sensores utilizados para obtener los valores de \mathbf{z}_k en cada instante de tiempo no son perfectos; esto es, que las lecturas que se obtienen de ellos serán inexactas. Asimismo, se cometerán errores en la discretización, y aparecerán errores numéricos en los algoritmos necesarios para resolver la segunda ecuación de 6.82. Estos errores se engloban nuevamente en el ruido blanco y gaussiano \mathbf{v}_k .

En resumen, se supone que \mathbf{w}_k y \mathbf{v}_k son variables aleatorias que representan, respectivamente, el *ruido del proceso* y el *ruido de la medida*. Se supone que ambos son independientes entre sí, y con distribuciones normales:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{w}) &\sim N(0, \mathbf{Q}) \\ p(\mathbf{v}) &\sim N(0, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (6.83)$$

Las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} son las matrices de covarianza del proceso y de la medida, respectivamente, y se asume generalmente que son constantes. Nótese que este mismo razonamiento podría haberse hecho directamente en 6.81, y se habría llegado a unas matrices $\mathbf{Q}(t)$ y $\mathbf{R}(t)$ variables en el tiempo.

El propósito del filtro de Kalman es encontrar una estimación óptima para el estado del sistema, representada por $\hat{\mathbf{x}}_k$, a partir de las medidas tomadas de los sensores, \mathbf{z}_k , y del conocimiento que se tiene del comportamiento del sistema, representado mediante las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} . Para ello se procede de forma recursiva y en dos etapas. En la primera etapa se calcula una estimación *a priori* del estado del sistema en el instante k , basada en el conocimiento del sistema en los instantes anteriores. Esta estimación se denota por $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ (el superíndice “-” denota *a priori*, y el símbolo “^” denota *estimación*⁹). Esta etapa se denomina *predicción*, y se efectúa utilizando únicamente el conocimiento del comportamiento dinámico del sistema contenido en la primera ecuación de 6.82:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (6.84)$$

Esta estimación no tiene en cuenta la información procedente de los sensores, y se basa únicamente en el conocimiento —generalmente parcial e

⁹En realidad, y atendiendo a la notación habitual en los filtros de Kalman, se debería denotar mediante $\hat{\mathbf{x}}(t_1|t)$ la *predicción* de $\mathbf{x}(t_1)$, dados $\mathbf{z}(t_0), \dots, \mathbf{z}(t)$. Para simplificar la notación, se prescindirá del segundo parámetro, salvo que sea imprescindible, y se denotará simplemente $\hat{\mathbf{x}}(t)$, entendiéndose que se refiere a la predicción en el instante t . En tiempo discreto $\mathbf{x}(t)$ se denotará \mathbf{x}_k .

inexacto— del proceso a través de \mathbf{A} y \mathbf{B} . Por tanto, es de esperar que en esta estimación se produzca un *error de estimación a priori*:

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (6.85)$$

donde \mathbf{x}_k representa el estado real (y desconocido) del sistema en el instante k . Con la estimación a priori del estado se podría inferir el valor que debería tener el vector de lecturas de los sensores, suponiendo que la estimación fuese exacta:

$$\hat{\mathbf{z}}_k^- = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (6.86)$$

Al ser inexacto $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ también lo será $\hat{\mathbf{z}}_k^-$, de forma que el error de estimación de las lecturas de los sensores se puede calcular restando a la lectura real de los sensores la teórica: $\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$. A esta diferencia se la conoce como *innovación* o *residuo* de la medida. Un residuo nulo significaría una estimación a priori y una matriz \mathbf{H} perfectas.

La segunda etapa de la iteración consiste en calcular la *estimación a posteriori* del estado, $\hat{\mathbf{x}}_k$, utilizando la estimación a priori, la lectura de los sensores en el instante k y una *matriz de ganancia* \mathbf{K} :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (6.87)$$

Esta matriz \mathbf{K}_k (de *Kalman*) decide, en cada instante de tiempo, cuánto peso tiene el conocimiento del comportamiento dinámico del sistema, contenido en $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, y cuánto tienen las medidas de los sensores, contenidas en \mathbf{z}_k . Si $\mathbf{K}_k = 0$ entonces no se concede ninguna confianza a la información de los sensores, y es $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-$. Si $\mathbf{K}_k = \mathbf{H}^{-1}$ entonces no se concede confianza alguna al conocimiento del comportamiento del sistema, y sólo se tiene en cuenta la medida de los sensores: $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{z}_k$.

Se toma como estimación del estado del sistema, en el instante k , esta estimación a posteriori obtenida en la segunda etapa. Es de esperar que se cometerá un error en esta estimación, que denominaremos *error a posteriori*, y que será

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (6.88)$$

Las covarianzas de los errores a priori y a posteriori serán:

$$\mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] \quad (6.89)$$

$$\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \quad (6.90)$$

Para encontrar la matriz \mathbf{K}_k que minimiza el error a posteriori, o error de estimación, se sustituye 6.87 en 6.88, y ésta en 6.90, de forma que se obtiene \mathbf{P}_k . Derivando la traza de esta matriz¹⁰ respecto a \mathbf{K}_k e igualando a cero se

¹⁰Es interesante notar que los elementos de la diagonal de \mathbf{P}_k son los cuadrados de cada componente de \mathbf{e}_k . Así, la traza de \mathbf{P}_k es la suma de los cuadrados de los errores de estimación a posteriori contenidos en \mathbf{e}_k , de manera que el filtro de Kalman consiste, en esencia, en una estimación basada en *mínimos cuadrados* [81].

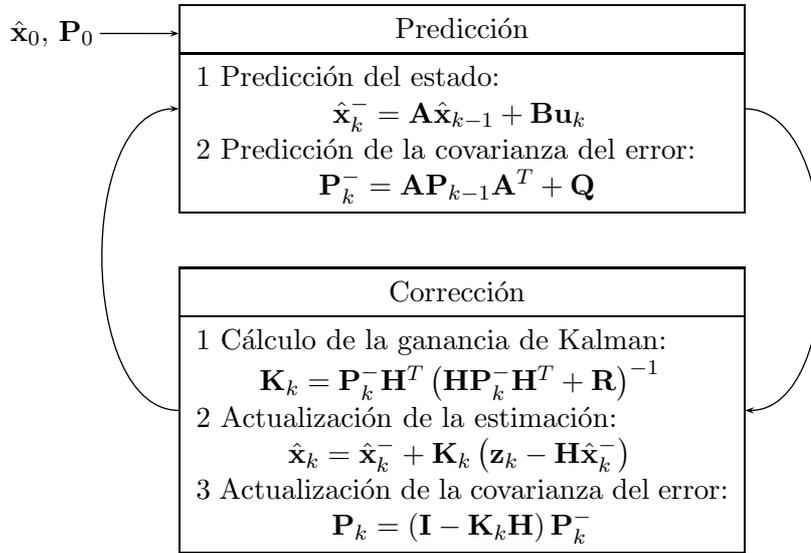


Figura 6.7: Algoritmo del Filtro de Kalman [89].

obtiene finalmente la matriz \mathbf{K}_k que optimiza la estimación [46]:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (6.91)$$

En la figura 6.7 se pone de manifiesto la naturaleza recursiva del algoritmo del filtro, tal y como se ha expuesto. Tras una inicialización del algoritmo mediante una estimación inicial de $\hat{\mathbf{x}}_0$ y \mathbf{P}_0 , se alternan sucesivamente en el tiempo la primera etapa (predicción, o *time update*) y la segunda (corrección, o *measurement update*). Además de actualizar los valores de la predicción del estado a priori y posteriori, se actualizan también las covarianzas de ambos errores. De esta forma, el filtro de Kalman obtiene, además de la estimación óptima del estado del sistema, una medida de la confianza que se puede depositar en esa estimación.

Por último, es importante señalar que el filtro de Kalman es *el* estimador lineal óptimo. Un aspecto de esta optimalidad es que es capaz (a diferencia de otros algoritmos) de incorporar toda la información que se le pueda proporcionar [55]. Procesa todas las mediciones disponibles, independientemente de su precisión o forma de muestreo, para estimar el valor actual de las variables de interés, empleando la información que procede de:

- el conocimiento del sistema y la dinámica de los dispositivos de medida (sensores),
- la descripción estadística de los ruidos del sistema, de los errores de las medidas y de las incertezas del modelo dinámico del sistema, y
- cualquier información disponible a cerca de las condiciones iniciales de las variables de interés.

La recursividad del filtro hace que, a diferencia de lo que sucede con otros filtros (el de Weiner es un ejemplo claro), no necesite almacenar los datos de la historia anterior de la evolución del sistema, ni procesarlos todos ellos en cada instante de tiempo.

Si se cumplen las hipótesis teóricas de partida, el filtro de Kalman proporciona una estimación que es óptima atendiendo a prácticamente cualquier criterio razonable (por ejemplo, es óptima respecto a la media, a la moda o a la mediana de \mathbf{x}) [55]. Esta es la razón de su rápida y extensa difusión en aplicaciones de lo más variadas, y de que se haya investigado para dar origen a derivados que amplían su rango de aplicación.

6.6.2. El Filtro de Kalman Extendido

Las hipótesis teóricas necesarias para aplicar el filtro de Kalman no son extremadamente exigentes. Sin embargo, el hecho de requerir que el comportamiento del sistema se escriba mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales (en realidad un sistema de ecuaciones en diferencias lineales) plantea dificultades con frecuencia, porque muchos (quizá la mayoría) fenómenos reales se modelan con sistemas no lineales. El comportamiento no lineal de los sistemas reales impide aplicar el filtro de Kalman y obtener provecho de su optimalidad. Esta es la razón por la que se propuso una extensión del filtro a sistemas no lineales. Esta extensión se conoce como *Filtro de Kalman Extendido*, o *EKF*.

En esencia, este nuevo planteamiento consiste en linealizar el sistema alrededor de la estimación actual del vector de estado, \mathbf{x}_k . Esta linealización permite reescribir las ecuaciones 6.82, que no pueden utilizarse en su estado original debido a la no linealidad del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1}) \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \end{array} \right. \quad (6.92)$$

La función vectorial no lineal \mathbf{f} relaciona el estado en el instante k con el $k-1$, y desempeña, de modo no lineal, el mismo cometido que las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de 6.82. La función vectorial no lineal \mathbf{h} permite obtener el vector de medidas a partir del de estado, de la misma forma que la matriz \mathbf{H} en 6.82. Para utilizar \mathbf{f} y \mathbf{h} sería necesario conocer el valor de los ruidos \mathbf{w}_{k-1} y \mathbf{v}_k , cosa que no es posible. En su lugar, y puesto que se supone que ambos tienen media nula, se aproximan \mathbf{x} y \mathbf{z} como:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k, 0) \\ \tilde{\mathbf{z}}_k &= \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_k, 0) \end{aligned} \quad (6.93)$$

Se utiliza diferente notación para distinguir entre $\hat{\mathbf{x}}_k$, que es la *estimación* a posteriori del vector de estado en el instante k , y $\tilde{\mathbf{x}}_k$, que es una *aproximación* del vector de estado en el instante k , basada en $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. Sin embargo, por

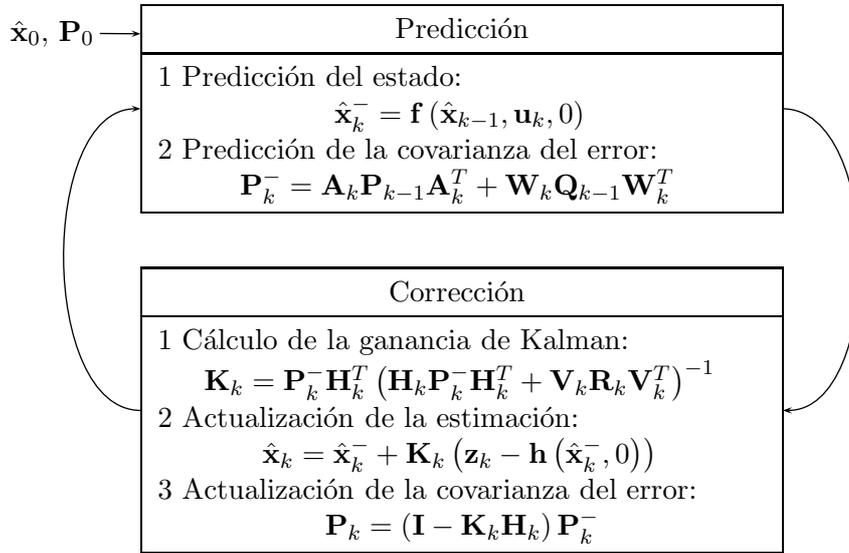


Figura 6.8: Algoritmo del Filtro Extendido de Kalman [89].

mantener la consistencia de la notación con la utilizada en la sección anterior, se utilizará $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ para referirse a $\tilde{\mathbf{x}}_k$.

En la figura 6.8 se puede comprobar el nuevo algoritmo, recursivo y en dos fases, del EKF. Las matrices \mathbf{A}_k , \mathbf{W}_k , \mathbf{H}_k y \mathbf{V}_k son matrices Jacobianas:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k,(i,j)} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_{(i)}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k, 0) & \mathbf{W}_{k,(i,j)} &= \frac{\partial}{\partial w_j} \mathbf{f}_{(i)}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k, 0) \\ \mathbf{H}_{k,(i,j)} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{h}_{(i)}(\tilde{\mathbf{x}}_k, 0) & \mathbf{V}_{k,(i,j)} &= \frac{\partial}{\partial v_j} \mathbf{h}_{(i)}(\tilde{\mathbf{x}}_k, 0) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Estas cuatro matrices constituyen el paso de linealización del sistema, y han de ser recalculadas en cada iteración del algoritmo. Su coste computacional no es despreciable, y además es posible que no sea fácil encontrar una forma de expresar el modelo matemático del sistema que a la vez sea compatible con esta formulación matricial. Ambas son limitaciones importantes del EKF; pero además, las variables aleatorias implicadas en el filtro ya no pueden suponerse con distribución normal, porque pierden esa condición al sufrir las modificaciones no lineales que suponen las funciones \mathbf{f} y \mathbf{h} . De este modo, el EKF ya no es, en general, un estimador óptimo [55].

6.6.3. La familia de Filtros de Kalman *Single Point*

Como se ha explicado en la sección anterior, la operación fundamental, base de los filtros EKF, consiste en la propagación de una *variable aleatoria gaussiana* (*Gaussian Random Variable* ó GRV) a través de las ecuaciones 6.92 que modelan el comportamiento no lineal del sistema. En el filtro EKF el vector de estado y todas las densidades de ruidos relevantes se aproximan

mediante GRVs, que son propagados analíticamente a través de las linealizaciones de primer orden de las ecuaciones del sistema no lineal. Esto puede introducir errores grandes en la estimación de la media y la covarianza de las GRVs transformadas y llevar a condiciones subóptimas, y en determinadas circunstancias, a la divergencia del filtro [43].

Los filtros de Kalman *Sigma-Point* (SPKF) abordan este problema utilizando una aproximación basada en un muestreo determinista. La idea central se basa en que *es más fácil aproximar una distribución Gaussiana que aproximar una función no lineal arbitraria*. De esta forma, en lugar de intentar aproximar el comportamiento del sistema no lineal mediante soluciones como la linealización del EKF, en los filtros SPKF se selecciona un conjunto mínimo de puntos (*Sigma-Points*), que representan la GRV que se supone que es el vector de estado. Estos puntos capturan completamente la verdadera media y covarianza de la GRV, y cuando son propagados a través de las verdaderas ecuaciones no lineales 6.92, que representan el comportamiento del sistema, permiten estimar la media y covarianza posteriores con una aproximación de tercer orden¹¹ (en un desarrollo en series de Taylor). El EKF, por su parte, sólo es capaz de alcanzar precisiones hasta el primer orden. La complejidad computacional de los SPKF es del mismo orden que la del EKF, y su implementación suele ser sustancialmente más sencilla, ya que no requiere derivaciones analíticas de los Jacobianos de 6.94 del EKF. Los filtros SPKF han mostrado ser superiores en un amplio espectro de aplicaciones [85].

En la figura 6.9 en la página siguiente se muestra un ejemplo de la propagación de una GRV (representada por una nube aleatoria de 500 puntos azules), su media y su covarianza (representada por la elipse de error estándar) a través de un sistema no lineal. En la figura 6.9(a) se muestra la propagación a través de las ecuaciones no lineales que describen el comportamiento del sistema; en la figura 6.9(b) se muestra la propagación del mismo sistema a través del resultado de la linealización llevada a cabo en el seno de un filtro EKF; en la figura 6.9(c) se muestran los *sigma-points*, y el resultado de su propagación a través de las ecuaciones originales, en un filtro SPKF. La diferencia entre éste y el EKF se pone en evidencia en este ejemplo bidimensional [85].

Para implementar el algoritmo SPKF se comienza aumentando el vector de estado en el instante k , $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L$, *orlando* sus componentes con los de los ruidos del sistema:

$$\mathbf{x}_k^a = (\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{v}_k^T \quad \mathbf{n}_k^T)^T \quad (6.95)$$

(el superíndice “*a*” denota *ampliado*). El esquema de selección de los *sigma-*

¹¹En realidad, los SPKF capturan la media y la covarianza posteriores con una precisión de segundo orden para cualquier tipo de no linealidad. Si la GRV tiene una distribución simétrica, la precisión alcanza el tercer orden. También se puede elevar la precisión, si se desea, aumentando el número de *sigma-points* utilizados [85].

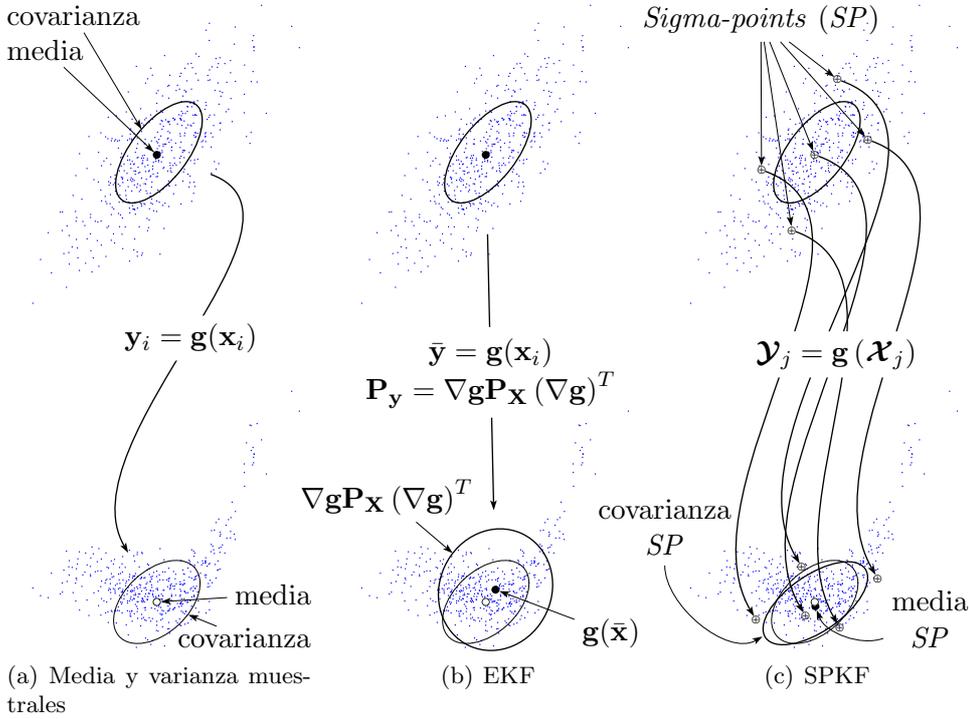


Figura 6.9: Ejemplo bidimensional de una transformación de la media y la covarianza (representada mediante *elipses de error estándar*) a través de un sistema no lineal [85].

points de cada iteración se aplicará a este \mathbf{x}_k^a para formar el conjunto de $2L + 1$ *Sigma-Points* (que se denotarán con letra caligráfica, como en \mathcal{X}):

$$\{\mathcal{X}_{k,i}^a, i = 0, \dots, 2L\}, \text{ con } \mathcal{X}_{k,i}^a \in \mathbb{R}^{L_x + L_v + L_n} \quad (6.96)$$

El algoritmo en sí comienza con la fase de inicialización:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0 &= E[\mathbf{x}_0], \quad \mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \\ \hat{\mathbf{x}}_0^a &= E[\mathbf{x}_0^a] = (\hat{\mathbf{x}}_0^T \quad \bar{\mathbf{v}}_0^T \quad \bar{\mathbf{n}}_0^T)^T \\ \mathbf{P}_0^a &= E[(\mathbf{x}_0^a - \hat{\mathbf{x}}_0^a)(\mathbf{x}_0^a - \hat{\mathbf{x}}_0^a)^T] = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.97)$$

Como en las secciones anteriores, se utiliza “ $\hat{\cdot}$ ” para denotar estimación (numérica). Además, $\bar{\mathbf{v}}_0^T$ y $\bar{\mathbf{n}}_0^T$ son estimaciones iniciales de los ruidos. \mathbf{P}_0^a es la matriz de covarianza del vector de estado aumentado, en el instante inicial, y sus submatrices $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0}$, \mathbf{R}_v y \mathbf{R}_n son las matrices de covarianza del vector de estado en el instante inicial, del ruido del proceso y del de la

medida, respectivamente. A continuación, se ejecutan en cada iteración los siguientes pasos:

- Se calculan los $2L + 1$ *sigma-points*, haciendo $t = k - 1$:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_t^a = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_t^a & \hat{\mathbf{x}}_t^a + \zeta \sqrt{\mathbf{P}_t^a} & \hat{\mathbf{x}}_t^a - \zeta \sqrt{\mathbf{P}_t^a} \end{pmatrix} \quad (6.98)$$

nótese que $\hat{\mathbf{x}}_t^a$ es un vector columna y $\hat{\mathbf{x}}_t^a + \zeta \sqrt{\mathbf{P}_t^a}$ y $\hat{\mathbf{x}}_t^a - \zeta \sqrt{\mathbf{P}_t^a}$ son matrices con L columnas, de forma que $\boldsymbol{\mathcal{X}}_t^a$ tiene, efectivamente, $2L + 1$ columnas, que son los *sigma-points*. El parámetro ζ es un escalar que se utiliza para determinar la dispersión de los *sigma-points* alrededor de la media (ver figura 6.9(c)).

- Se efectúa la predicción (*time-update equations*):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k|t}^x &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_t^x, \boldsymbol{\mathcal{X}}_t^v, \mathbf{u}_t) \\ \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \sum_{i=0}^{2L} w_i^m \boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k|t}^x \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- &= \sum_{i=0}^{2L} \sum_{j=0}^{2L} w_{ij}^c \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k|t}^x \right) \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{j,k|t}^x \right)^T \end{aligned} \quad (6.99)$$

Como en las secciones anteriores, el superíndice “-” indica *predicción*, de forma que $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ es la predicción de $\hat{\mathbf{x}}$ en el instante k . La notación de subíndices como el de $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k|t}^a$ hace referencia a una *probabilidad condicionada*, que en este caso significa la predicción de los *sigma-points* en el instante k basada en el conocimiento de todos los datos del sistema hasta el instante anterior, $t = k - 1$.

- Se efectúa la corrección (*measurement-update equations*), utilizando la matriz de ganancia de Kalman:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{k|t} &= \mathbf{h} \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k|t}^x, \boldsymbol{\mathcal{X}}_t^n \right) \\ \hat{\mathbf{y}}_k^- &= \sum_{i=0}^{2L} w_i^m \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{i,k|t} \\ \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{y}}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} \sum_{j=0}^{2L} w_{ij}^c \left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{i,k|t} \right) \left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{j,k|t} \right)^T \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \bar{\mathbf{y}}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} \sum_{j=0}^{2L} w_{ij}^c \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k|t}^x \right) \left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{j,k|t} \right)^T \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \bar{\mathbf{y}}_k} \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{y}}_k}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^- \right) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} &= \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{y}}_k} \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (6.100)$$

Los escalares w_i^m y w_{ij}^c son pesos que deciden la forma en la que se reconstruyen la media y la covarianza a partir de los *sigma-points*. Los valores específicos de estos pesos, así como del escalar ζ de la ecuación 6.98, determinan el modelo específico de filtro SPKF, de entre los diversos tipos que forman su familia. Los más notables son el *Unscented Kalman Filter* (UKF) [43], [44], el *Central Difference Filter* (CDF ó CDKF) [41] y el *Divided Difference Filter* (DDF ó DDKF) [64].

6.7. Desarrollo del estimador propuesto

En las secciones anteriores se han expuesto con cierto detalle los filtros KF, EKF y la familia SPKF. De todos ellos, el ideal es el KF (Filtro de Kalman lineal), por ser el único estimador óptimo. El EKF ha sido la modificación estándar del filtro KF para sistemas no lineales hasta fechas recientes, en las que la aparición de los filtros basados en *sigma-points* ha hecho posible mejorar su rendimiento, siendo éstos últimos los más utilizados en la actualidad debido a su coste computacional semejante al del EKF, a la ausencia del cálculo de Jacobianos (a veces complicado o imposible en los EKF) y a su mayor precisión en la estimación.

No se han expuesto más variedades de estimadores, aunque hay otros muchos¹², porque no es el propósito de este trabajo hacer una comparación entre todos ellos¹³. Los tres que se han abordado con cierto detalle recogen, sin embargo, los rasgos característicos de las técnicas de estimación más habituales. En ellos subyace un factor común: el único estimador óptimo es el KF, o Filtro de Kalman para sistemas lineales. Todos los demás se aproximan a él, pero son subóptimos.

Sería deseable encontrar un estimador óptimo para la orientación del chasis del vehículo, y eso es precisamente lo que se propone en esta sección. Para ello se aborda el problema con un nuevo enfoque: las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{H} que describen el comportamiento del sistema lineal en el filtro KF (ecuaciones 6.82), y las funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} que modelan el comportamiento no lineal del sistema en el filtro EKF (ecuaciones 6.92) y en el SPKF (ecuaciones 6.99 y 6.100), y por tanto realizan la misma función que las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{H} , se suponen constantes con el tiempo, y por tanto invariables en cada iteración. Pero en realidad esta no es una condición impuesta en el filtro de Kalman original. El propio Kalman, al explicar el significado de las matrices $\Phi(t+1; t)$ y $\mathbf{M}(t)$ en la ecuación 6.81 en la página 124 dice:

... $\Phi(t+1; t)$, $\mathbf{M}(t)$ son matrices de $n \times n$ y $p \times n$, respectiva-

¹²Otros filtros de Kalman, no mencionados en este texto, pero utilizados con cierta frecuencia son, por ejemplo: SR-UKF, SR-CDKF, IEKF, LRKF, UPF, DD1, MEKF, AEKF, BSEKF, IKF o SCAAT.

¹³Se pueden analizar comparaciones entre diversas variedades de filtros de Kalman en [48] ó [49], por ejemplo.

mente, cuyos elementos son funciones no aleatorias del tiempo. . .

En las ecuaciones 6.80 en la página 123, que modelan el sistema lineal original, o incluso en las 6.81, que son el resultado de la discretización de las anteriores, se permite que estas matrices cambien con el tiempo, o en cada iteración. De hecho, esto mismo se hace de forma inadvertida en los filtros EKF. Debido al recálculo de las matrices Jacobianas en 6.94, las linealizaciones de \mathbf{f} y \mathbf{g} alrededor de la media cambian en cada iteración. Lo mismo sucede en los filtros SPKF (ecuaciones 6.99 y 6.100). Por otra parte, la propia naturaleza de los sensores hace que su comportamiento pueda variar con parámetros como la temperatura, las vibraciones o la aceleración, por lo que sería deseable poder escribir la matriz \mathbf{H} que describe su comportamiento en función de estos parámetros, y por lo tanto con diferentes valores numéricos en cada iteración.

Utilizando cuaternas para representar orientaciones, giros y cambios de base, y reorganizando los miembros que forman cada uno de los términos de los productos de cuaternas, es posible escribir las ecuaciones de un filtro de Kalman lineal para estimar la orientación del chasis del vehículo, si se permite que sus matrices varíen con el tiempo. Esto se muestra en detalle en la siguiente sección.

6.7.1. Descripción del Estimador

Se utilizarán, por tanto, las ecuaciones del filtro de Kalman para un sistema lineal expuestas en 6.82. El sistema es, en este caso, el chasis y los sensores del vehículo. El vector ${}^e\mathbf{x}_k$ es el vector de estado en el instante k , y describe el estado del proceso, en este caso la orientación del chasis, y será:

$$\mathbf{x}_k = ({}^e\mathbf{a}_k \quad {}^e\mathbf{q}_{1,k} \quad {}^b\mathbf{v}_{2,k} \quad T_k)^T \quad (6.101)$$

donde

- ${}^e\mathbf{a}_k = (\mathbf{a}_{x,k}, \mathbf{a}_{y,k}, \mathbf{a}_{z,k})^T$ es el vector de aceleración lineal del centro de gravedad, referido al sistema de referencia inercial (fijo en tierra), en el instante k . La integración doble de este vector, realizada en cada iteración fuera del filtro de Kalman, proporciona la velocidad y la posición del centro de gravedad del chasis del vehículo.
- ${}^e\mathbf{q}_{1,k} = (q_{1w,k}, q_{1x,k}, q_{1y,k}, q_{1z,k})^T$ es la cuaterna unitaria de orientación del chasis del vehículo: representa la rotación necesaria para llevar cualquier vector del sistema de referencia local desde la orientación que ocupaba en el instante inicial hasta la que ocupa en el instante k , expresados ambos en el sistema de referencia inercial. La diferenciación doble de esta cuaterna proporciona la velocidad y la aceleración angulares del chasis.

${}^e\mathbf{q}_{1,k}$ también representa una rotación. Si suponemos que el sistema de referencia inercial está formado por los vectores $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, y el sistema de referencia local por $\{\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z\}$, y que ambos coinciden en el instante inicial, entonces el vector ${}^e\mathbf{b}_{x,k}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ {}^e\mathbf{b}_{x,k} \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_{1,k} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_x \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_{1,k} \quad (6.102)$$

es el primer vector del sistema de referencia local en el instante k , expresado en la base inercial. Lo mismo sucedería con los dos restantes. Como se ha mostrado en 6.33 en la página 106, ${}^e\mathbf{q}_{1,k}$ también representa un cambio de base. El producto

$$\begin{pmatrix} 0 \\ {}^e\mathbf{m}_k \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_{1,k} \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{m}_k \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_{1,k} \quad (6.103)$$

expresa el vector ${}^b\mathbf{m}_k$ del sistema de referencia local en el inercial.

- ${}^b\mathbf{v}_{2,k} = (q_{2x,k}, q_{2y,k}, q_{2z,k})^T$ es el vector (la parte imaginaria) de la cuaterna unitaria de rotación ${}^b\mathbf{q}_{2,k} = (q_{2w,k}, q_{2x,k}, q_{2y,k}, q_{2z,k})^T$, que representa la rotación incremental del chasis del vehículo en cada instante. Describe el cambio de orientación que se produce en el chasis desde el instante k hasta el $k+1$, referidos ambos al sistema de referencia local en el instante k :¹⁴

$$\begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{m}_{k+1} \end{pmatrix} = {}^b\mathbf{q}_{2,k} \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{m}_k \end{pmatrix} {}^b\bar{\mathbf{q}}_{2,k} \quad (6.104)$$

Como se ha expuesto en la ecuación 6.36 en la página 106, las cuaternas ${}^e\mathbf{q}_{1,k}$ y ${}^b\mathbf{q}_{2,k}$ pueden concatenarse para hacer el cambio de base de la local a la inercial en el instante $k+1$ de forma directa:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ {}^e\mathbf{m}_{k+1} \end{pmatrix} = {}^e\mathbf{q}_{1,k} {}^b\mathbf{q}_{2,k} \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{m}_k \end{pmatrix} {}^b\bar{\mathbf{q}}_{2,k} {}^e\bar{\mathbf{q}}_{1,k} = {}^e\mathbf{q}_{3,k} \begin{pmatrix} 0 \\ {}^b\mathbf{m}_k \end{pmatrix} {}^e\bar{\mathbf{q}}_{3,k} \quad (6.105)$$

La cuaterna ${}^e\mathbf{q}_{3,k}$ así obtenida representa, en fin, la rotación necesaria para llevar cualquier vector del chasis desde el instante inicial hasta el instante $k+1$. Este hecho se utilizará en la fase de predicción del filtro de Kalman propuesto.

${}^b\mathbf{q}_{2,k}$ es una cuaterna de rotación, por lo que su norma es unitaria. Por tanto, se puede prescindir de su parte real $q_{2w,k}$ en el vector de estado,

¹⁴En realidad, el sistema de referencia local cambia en cada instante, pues se mueve solidariamente con el chasis. Para ser más exactos, se debería utilizar la notación ${}^{b,k}\mathbf{q}_{--}$ para enfatizar el hecho de que la cuaterna está referida al sistema local en el instante k . Pero esto haría la notación todavía más compleja.

y calcularla cuando sea necesario a partir del módulo de ${}^b\mathbf{q}_{2,k}$:

$$\begin{aligned} \|{}^b\mathbf{q}_{2,k}\|^2 &= q_{2w,k}^2 + q_{2x,k}^2 + q_{2y,k}^2 + q_{2z,k}^2 = 1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad q_{2w,k} &= +\sqrt{1 - q_{2x,k}^2 - q_{2y,k}^2 - q_{2z,k}^2} = +\sqrt{1 - \|{}^b\mathbf{v}_{2,k}\|^2} \end{aligned} \quad (6.106)$$

De la misma forma, podría prescindirse de la parte real de ${}^e\mathbf{q}_{1,k}$, pero ${}^e q_{1w,k}$ se utiliza en el cálculo de la matriz \mathbf{H} , como se verá, por lo que es necesario mantenerla en el vector de estado para utilizar la formulación del filtro de Kalman KF.

- T_k es la temperatura del interior del vehículo. Con suficiente aproximación, representa la temperatura a la que se encuentran los sensores inerciales instalados a bordo, y se utilizará para modelar con más precisión su comportamiento dinámico.

El vector ${}^b\mathbf{z}_k$ es el *vector de medidas*, y contiene la información obtenida de la lectura de los sensores en el instante k , expresadas en el sistema de referencia local:

$${}^b\mathbf{z}_k = ({}^b\mathbf{a}_k \ {}^b\mathbf{m}_k \ {}^b\boldsymbol{\omega}_k \ T_k)^T \quad (6.107)$$

Los vectores que componen el vector de medidas son:

- ${}^b\mathbf{a}_k = (a_{x,k}, a_{y,k}, a_{z,k})^T$ Contiene las medidas de las tres aceleraciones lineales del centro de gravedad del vehículo, obtenidas de los tres acelerómetros.
- ${}^b\mathbf{m}_k = (m_{x,k}, m_{y,k}, m_{z,k})^T$ Contiene las medidas del campo magnético terrestre en los tres ejes ortogonales de la base del sistema local. Se obtienen de los tres sensores de campo magnético.
- ${}^b\boldsymbol{\omega}_k = (w_{x,k}, w_{y,k}, w_{z,k})^T$ Contiene las medidas de las tres velocidades de rotación, obtenidas de los tres *rate-gyros*.
- T_k Contiene la medida de la temperatura local.

Las matrices del filtro se presentan a continuación, de modo esquemático, mediante bloques. La matriz \mathbf{A}_k describe la respuesta del sistema a las fuerzas exteriores. Como en este caso sólo se consideran las fuerzas inerciales, esta matriz será una matriz diagonal por bloques:

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11,k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22,k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33,k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{44,k} \end{pmatrix} \quad (6.108)$$

De forma que, teniendo en cuenta 6.81 en la página 124, será

$${}^b\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k {}^b\mathbf{x}_k \rightarrow \begin{pmatrix} {}^e\hat{\mathbf{a}}_{k+1} \\ {}^e\hat{\mathbf{q}}_{1,k+1} \\ {}^b\hat{\mathbf{v}}_{2,k+1} \\ \hat{T}_k \end{pmatrix} = \mathbf{A}_k \begin{pmatrix} {}^e\mathbf{a}_k \\ {}^e\mathbf{q}_{1,k} \\ {}^b\mathbf{v}_{2,k} \\ T_k \end{pmatrix} \quad (6.109)$$

Se asume que los bloques denotados por $\mathbf{0}$ corresponden a matrices nulas, de la dimensión adecuada en cada caso. Los bloques no nulos son de la forma:

- $\mathbf{A}_{11,k}$ efectúa la estimación de la aceleración lineal ${}^e\hat{\mathbf{a}}_{k+1}$ en función de la del instante anterior. Como sólo se consideran fuerzas inerciales sobre el chasis, se supone que esta aceleración es constante:

$$\mathbf{A}_{11,k} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \Rightarrow {}^e\hat{\mathbf{a}}_{k+1} = \mathbf{A}_{11,k} {}^e\mathbf{a}_k = \mathbf{I}_{3 \times 3} {}^e\mathbf{a}_k = {}^e\mathbf{a}_k \quad (6.110)$$

- $\mathbf{A}_{22,k}$ realiza la predicción ${}^e\mathbf{q}_{1,k+1}^-$ en función de la orientación del chasis y de su velocidad angular:

$${}^e\mathbf{q}_{1,k+1}^- = \mathbf{A}_{22,k} \cdot {}^e\mathbf{q}_{1,k} = {}^e\mathbf{q}_{1,k} \cdot {}^b\mathbf{q}_{2,k} \quad (6.111)$$

por lo que es necesario escribir el bloque \mathbf{A}_{22} de forma que su producto por ${}^e\mathbf{q}_{1,k}$ realice la predicción. De las relaciones 6.27, 6.28 y 6.30 en la página 105, se desprende que el producto de cuaternas unitarias es no lineal. La no linealidad puede producirse en forma de productos cruzados o de funciones trigonométricas, como en las expresiones citadas, o en forma de cuadrados si se expresa utilizando productos escalares y vectoriales de sus partes imaginarias. Sería deseable que se pudiese encontrar una expresión del producto de cuaternas tal que permitiese escribir estas ecuaciones no lineales en \mathbb{R} en forma de producto matriz-vector en las expresiones de Kalman, y por tanto, en un filtro de Kalman lineal. Esto es posible, como se muestra a continuación.

Para simplificar la notación, sean

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{q}_{1,k} &= (\mathbf{q}_{1w,k}, \mathbf{q}_{1x,k}, \mathbf{q}_{1y,k}, \mathbf{q}_{1z,k})^T = (a, b, c, d)^T \\ {}^b\mathbf{q}_{2,k} &= (\mathbf{q}_{2w,k}, \mathbf{q}_{2x,k}, \mathbf{q}_{2y,k}, \mathbf{q}_{2z,k})^T = (w, x, y, z)^T \end{aligned} \quad (6.112)$$

Con esta notación, y considerando las cuaternas como vectores de \mathbb{R}^4 , el producto de ambas cuaternas se puede escribir:

$$\begin{aligned} {}^e\mathbf{q}_{1,k} \cdot {}^b\mathbf{q}_{2,k} &= (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= aw - bx - cy - dz + \\ &+ (ax + bw + cz - dy)\mathbf{i} + \\ &+ (ay - bz + cw + dx)\mathbf{j} + \\ &+ (az + by - cx + dw)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.113)$$

de forma que se puede escribir:

$${}^e\mathbf{q}_{1,k+1}^- = {}^e\mathbf{q}_{1,k} \cdot {}^b\mathbf{q}_{2,k} = \begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & z & -y \\ y & -z & w & x \\ z & y & -x & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{22,k} \cdot {}^e\mathbf{q}_{1,k} \quad (6.114)$$

- El bloque \mathbf{A}_{33} efectúa la predicción ${}^b\mathbf{v}_{2,k}^-$ en función de la información del instante anterior. ${}^b\mathbf{v}_{2,k}$ contiene la información de la velocidad de rotación del chasis, y para su predicción se desconocen los momentos externos aplicados al chasis del vehículo, por lo que se supone que su velocidad de rotación será constante, y con ella ${}^b\mathbf{v}_{2,k}$. Por tanto:

$${}^b\mathbf{v}_{2,k}^- = \mathbf{A}_{33} \cdot {}^b\mathbf{v}_{2,k} = {}^b\mathbf{v}_{2,k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_{33} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (6.115)$$

- \mathbf{A}_{44} realiza la estimación de la temperatura en función de su valor actual. No hay información externa que se pueda utilizar en esta predicción, por lo que nuevamente se supondrá constante:

$$T_k^- = \mathbf{A}_{44} \cdot T_k = T_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_{44} = 1 \quad (6.116)$$

Como se ha explicado ya en la sección 6.6.1, la matriz \mathbf{H} permite calcular el vector de medidas de los sensores en función del vector de estado mediante el producto $\mathbf{z} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$. Se puede escribir esta ecuación en bloques:

$$\begin{pmatrix} {}^b\mathbf{a} \\ {}^b\mathbf{m} \\ {}^b\mathbf{w} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{33} & \mathbf{H}_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^e\mathbf{a} \\ {}^e\mathbf{q}_1 \\ {}^b\mathbf{v}_2 \\ T \end{pmatrix} \quad (6.117)$$

Esta ecuación se utiliza, en la forma $\hat{\mathbf{z}}_k^- = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$ (ec. 6.85 en la página 126), para hacer la estimación a priori de las lecturas $\hat{\mathbf{z}}_k^-$ que serían de esperar en los sensores, en función de la estimación a priori del estado $\hat{\mathbf{x}}_k^-$. Esta estimación de la lectura de los sensores será utilizada, una vez que se compare con las lecturas reales de los sensores, para corregir la predicción y obtener, así, la estimación del vector de estado en el instante actual.

En la confección de la matriz \mathbf{H} , así como en la de \mathbf{A} , se ha tenido en cuenta que la obtención del estado del sistema se basa, fundamentalmente, en los sensores de aceleración y campo magnético, y se utilizan los demás sensores para ayudar a eliminar los errores y los ruidos introducidos en el sistema.

Por otra parte, y a diferencia del planteamiento habitual en los filtros KF y derivados, se entiende en este caso que las desviaciones en las medidas de los sensores debidas a fluctuaciones en la temperatura no son parte de

los ruidos del sensor, sino que pueden ser modelados mediante ecuaciones embebidas en los bloques de la matriz \mathbf{H} , y por tanto pertenecen en cierto modo al modelo matemático del sistema.

Los bloques no nulos de la matriz \mathbf{H} son los siguientes:

- \mathbf{H}_{11} y \mathbf{H}_{12} permiten obtener las medidas del acelerómetro triaxial en función de la orientación actual del chasis, que se encuentra en ${}^e\mathbf{q}_1$. Ha de tenerse en cuenta que el acelerómetro mide no sólo la aceleración debida a cambios en las velocidades lineales, sino también la debida a la gravedad. El vector de la gravedad es colineal con el eje z del sistema de referencia inercial. Este vector, junto con la aceleración ${}^e\mathbf{a}$, están expresados en el sistema de referencia inercial. Es necesario hacer un cambio de base con ambos, utilizando para ello ${}^e\mathbf{q}_1$. La suma de ambos vectores, aceleración y gravedad, en el sistema de referencia local, componen el vector de medidas del acelerómetro:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = {}^e\bar{\mathbf{q}}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} {}^e\mathbf{q}_1 + g \cdot {}^e\bar{\mathbf{q}}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} {}^e\mathbf{q}_1 \quad (6.118)$$

donde \mathbf{e}_z es el vector z en el sistema de referencia inercial, esto es, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^T$, y g es la aceleración de la gravedad, que se supone conocida y razonablemente constante en el entorno de trabajo.

Nuevamente, sería deseable encontrar una manera de escribir esta suma de dobles productos de cuaternas en forma de suma de productos matriz-vector, y así mantener esta ecuación en la formulación del filtro de Kalman lineal. Es posible hacerlo. La deducción algebraica de las expresiones resultantes no entraña una complejidad especial, aunque sí es extensa. Por eso se ha preferido trasladar este desarrollo al apéndice E. De la ecuación E.8 en la página 173:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = {}^e\bar{\mathbf{q}}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} {}^e\mathbf{q}_1 = \mathbf{R}^e\mathbf{q}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \quad (6.119)$$

Teniendo en cuenta que la parte real de los vectores de esta expresión es nula, se puede despreciar la primera fila en ambos lados de la expresión, y la primera columna de $\mathbf{R}^e\mathbf{q}_1$ con lo que, finalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2(q_{1y}^2 + q_{1z}^2) & 2(q_{1w}q_{1z} + q_{1x}q_{1y}) & 2(q_{1x}q_{1z} - q_{1w}q_{1y}) \\ 2(q_{1x}q_{1y} - q_{1w}q_{1z}) & 1 - 2(q_{1x}^2 + q_{1z}^2) & 2(q_{1w}q_{1x} + q_{1y}q_{1z}) \\ 2(q_{1w}q_{1y} + q_{1x}q_{1z}) & 2(q_{1y}q_{1z} - q_{1w}q_{1x}) & 1 - 2(q_{1x}^2 + q_{1y}^2) \end{pmatrix} {}^e\mathbf{a} = \\ = \mathbf{H}_{11} {}^e\mathbf{a} \quad (6.120)$$

Para calcular \mathbf{H}_{12} se tendrá en cuenta que \mathbf{e}_z sólo tiene un elemento

no nulo, de forma que:

$$\begin{aligned}
& g \begin{pmatrix} 1 - 2(q_{1y}^2 + q_{1z}^2) & 2(q_{1w}q_{1z} + q_{1x}q_{1y}) & 2(q_{1x}q_{1z} - q_{1w}q_{1y}) \\ 2(q_{1x}q_{1y} - q_{1w}q_{1z}) & 1 - 2(q_{1x}^2 + q_{1z}^2) & 2(q_{1w}q_{1x} + q_{1y}q_{1z}) \\ 2(q_{1w}q_{1y} + q_{1x}q_{1z}) & 2(q_{1y}q_{1z} - q_{1w}q_{1x}) & 1 - 2(q_{1x}^2 + q_{1y}^2) \end{pmatrix} \mathbf{e}_z = \\
& = g \begin{pmatrix} 2(q_{1x}q_{1z} - q_{1w}q_{1y}) \\ 2(q_{1w}q_{1x} + q_{1y}q_{1z}) \\ q_{1w}^2 - q_{1x}^2 - q_{1y}^2 + q_{1z}^2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} -q_{1y} & q_{1z} & -q_{1w} & q_{1x} \\ q_{1x} & q_{1w} & q_{1z} & q_{1y} \\ q_{1w} & -q_{1x} & -q_{1y} & q_{1z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1w} \\ q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \end{pmatrix} = \\
& g \begin{pmatrix} -q_{1y} & q_{1z} & -q_{1w} & q_{1x} \\ q_{1x} & q_{1w} & q_{1z} & q_{1y} \\ q_{1w} & -q_{1x} & -q_{1y} & q_{1z} \end{pmatrix} \mathbf{e}_{\mathbf{q}_1} = \mathbf{H}_{12} \mathbf{e}_{\mathbf{q}_1} \quad (6.121)
\end{aligned}$$

- \mathbf{H}_{22} proporciona una predicción de las medidas del magnetómetro a partir del estado actual. Para esta predicción se supone que la orientación del campo magnético terrestre permanece constante en el entorno en el que se mueve el sistema (hipótesis que, como se ha dicho con anterioridad, es perfectamente válida). De acuerdo con la notación representada en la figura 6.2 en la página 110 la orientación del campo magnético viene dada por el ángulo α (el sistema de referencia inercial utilizado se basa en el norte magnético, y no en el geográfico):

$${}^b \mathbf{m} = h \cdot \mathbf{e}_{\bar{\mathbf{q}}_1} (\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_{\mathbf{q}_1} \quad (6.122)$$

De la misma forma que con g , se supone que α es conocido y constante en el entorno de trabajo. Separando los productos de cuaternas según ambos ejes:

$${}^b \mathbf{m} = h \sin \alpha \mathbf{e}_{\bar{\mathbf{q}}_1} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_{\mathbf{q}_1} + h \cos \alpha \mathbf{e}_{\bar{\mathbf{q}}_1} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_{\mathbf{q}_1} \quad (6.123)$$

La matriz que representa el doble producto de cuaternas de la segunda parte de esta expresión, $\mathbf{e}_{\bar{\mathbf{q}}_1} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_{\mathbf{q}_1}$, se ha calculado ya en 6.121. Para la primera parte se seguirán pasos similares:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 - 2(q_{1y}^2 + q_{1z}^2) & 2(q_{1w}q_{1z} + q_{1x}q_{1y}) & 2(q_{1x}q_{1z} - q_{1w}q_{1y}) \\ 2(q_{1x}q_{1y} - q_{1w}q_{1z}) & 1 - 2(q_{1x}^2 + q_{1z}^2) & 2(q_{1w}q_{1x} + q_{1y}q_{1z}) \\ 2(q_{1w}q_{1y} + q_{1x}q_{1z}) & 2(q_{1y}q_{1z} - q_{1w}q_{1x}) & 1 - 2(q_{1x}^2 + q_{1y}^2) \end{pmatrix} \mathbf{e}_x = \\
& = \begin{pmatrix} q_{1w}^2 + q_{1x}^2 - q_{1y}^2 - q_{1z}^2 \\ 2(q_{1x}q_{1y} - q_{1w}q_{1z}) \\ 2(q_{1w}q_{1y} + q_{1x}q_{1z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1w} & q_{1x} & -q_{1y} & -q_{1z} \\ -q_{1z} & q_{1y} & q_{1x} & -q_{1w} \\ q_{1y} & q_{1z} & q_{1w} & q_{1x} \end{pmatrix} \mathbf{e}_{\mathbf{q}_1} \quad (6.124)
\end{aligned}$$

por tanto, será finalmente:

$${}^b\mathbf{m} = h \left\{ \sin \alpha \begin{pmatrix} q_{1w} & q_{1x} & -q_{1y} & -q_{1z} \\ -q_{1z} & q_{1y} & q_{1x} & -q_{1w} \\ q_{1y} & q_{1z} & q_{1w} & q_{1x} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \cos \alpha \begin{pmatrix} -q_{1y} & q_{1z} & -q_{1w} & q_{1x} \\ q_{1x} & q_{1w} & q_{1z} & q_{1y} \\ q_{1w} & -q_{1x} & -q_{1y} & q_{1z} \end{pmatrix} \right\} {}^e\mathbf{q}_1 = \mathbf{H}_{22} {}^e\mathbf{q}_1 \quad (6.125)$$

- \mathbf{H}_{33} realiza la predicción de la lectura de los giróscopos en función de la velocidad de rotación actual mediante la expresión ${}^b\mathbf{w} = \mathbf{H}_{33} {}^b\mathbf{v}_2$. En este caso, ${}^b\mathbf{w}$ y ${}^b\mathbf{v}_2$ están expresadas ambas en el sistema de referencia local, por lo que no es necesario utilizar ${}^e\mathbf{q}_1$. Los giróscopos obtienen, como se ha explicado ya, una medida de la velocidad de rotación del chasis en ${}^b\mathbf{w}$, y la cuaterna ${}^b\mathbf{q}_2$ contiene una medida de la orientación —la posición angular—. La matriz \mathbf{H}_{33} efectúa la integración para pasar de una a la otra, según se ha expuesto en 6.43:

$$\mathbf{H}_{33} = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (6.126)$$

- \mathbf{H}_{44} predice la temperatura obtenida en el sensor instalado en el sistema en función de la temperatura del vector de estado. Se supone que la temperatura se mantiene constante, por lo que:

$$\mathbf{H}_{44} = 1 \quad (6.127)$$

- Las matrices \mathbf{H}_{14} , \mathbf{H}_{24} y \mathbf{H}_{34} relacionan la medida de los tres tipos de sensores con la temperatura. El comportamiento de los sensores que se utilizan para la obtención de datos ha sido caracterizado mediante un ensayo diseñado específicamente para este cometido, tal como se ha descrito en el capítulo 5, de manera que se puede describir este comportamiento mediante estas tres matrices. Inicialmente, el comportamiento de cada uno de los nueve sensores ha sido linealizado alrededor de 25°C, y el resultado es de la forma:

$$\mathbf{H}_{n4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} a_{nx} + b_{nx} \\ \frac{1}{T} a_{ny} + b_{ny} \\ \frac{1}{T} a_{nz} + b_{nz} \end{pmatrix} \quad (6.128)$$

Una vez calculadas las matrices \mathbf{A} y \mathbf{H} , y teniendo en cuenta que se trata de un filtro de Kalman lineal, se utilizará el algoritmo estándar. Debido a los errores numéricos que suceden en el cálculo de cada iteración, será necesario obligar a que se mantenga el módulo unitario de ${}^e\mathbf{q}_1$. Esto se puede hacer al final de cada iteración o, si la velocidad de cálculo es prioritaria, con una frecuencia menor.

6.7.2. Ventajas del nuevo estimador

El nuevo estimador que se ha propuesto en este capítulo no es más que una nueva forma de escribir las ecuaciones del filtro de Kalman, aplicadas al problema del estimador de Wahba. Sin embargo, los beneficios obtenidos por esta nueva formulación son importantes:

- Se mantiene la formulación básica del filtro de Kalman lineal, por lo que está garantizada la convergencia del filtro y, lo que es más importante, su optimalidad: ningún otro filtro, partiendo de los mismos datos y el mismo modelo matemático del sistema, puede obtener mejores resultados promedio.
- Debido a la formulación en base a cuaternas, no existen singularidades en la estimación de la orientación del chasis, y además los errores numéricos –y con ellos la precisión– son homogéneos, y no dependen de la orientación.
- Las operaciones necesarias para calcular los componentes de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{H} , como se ha expuesto, se basan únicamente en productos y sumas (el ángulo α en 6.122 es constante, por lo que su seno y coseno también lo son). Por otra parte, la formulación matricial del algoritmo del filtro de Kalman hace que todas las demás operaciones sean, igualmente, productos y sumas de escalares. Esto hace que este nuevo estimador sea apto para su implantación en microprocesadores y microcontroladores dedicados al procesamiento de señales (DSP o *Digital Signal Processors*), y esto extiende el posible campo de aplicación de este estimador.
- El coste computacional del algoritmo es bajo, comparado con cualquiera de los filtros derivados del EKF, porque evita el cálculo de Jacobianos en cada iteración, o la evaluación múltiple de las funciones no lineales para todos los *Sigma-Points* en cada iteración.

Capítulo 7

Conclusiones y futuras líneas de trabajo

7.1. Conclusiones

El trabajo cuya memoria se presenta en este documento comprende varios aspectos que se han ido describiendo en las páginas precedentes. En este último capítulo se van a compendiar de manera resumida las aportaciones más relevantes de la investigación desarrollada y se relacionarán también las líneas que quedan abiertas para futuras investigaciones.

El objetivo primario del trabajo se alcanza en la medida en que se ha desarrollado un algoritmo original para la estimación de la orientación del vehículo en el espacio. Las cualidades esenciales del filtro son:

- Se encuadra dentro de la familia de los filtros de Kalman (KF) para sistemas lineales a pesar de la aparente no linealidad del sistema que se ha estudiado,
- el sistema de orientación está basado en cuaternas. Este enfoque innovador en el ámbito de la dinámica de vehículos, conduce a una formulación compacta, eficiente desde el punto de vista computacional y robusta en la medida en que no presenta las singularidades típicas de los esquemas tradicionales basados en ángulos de Euler, cosenos directores, etc,
- la estimación de la orientación se obtiene por la integración en el filtro de información relativa que proporciona resultados incrementales y otra absoluta que permite corregir las desviaciones en el tiempo,
- la exactitud del método es superior a la que proporcionarían otros sistemas de seguimiento de la orientación basados en sistemas comerciales no constreñidos en el espacio.

Para conseguir este objetivo, además de los ya indicados, han sido precisos una serie de desarrollos originales tanto en el ámbito de la formulación como en el de la instrumentación y adquisición de datos. En concreto, en lo que se refiere a formulación las principales aportaciones de este trabajo son:

- desarrollo de la cinemática del sólido en cuaternas,
- desarrollo del álgebra de cuaternas para adaptar el modelo matemático del problema de Wahba y su solución a los requerimientos del filtro de Kalman *simple* (KF),
- programación de los microcontroladores que efectúan el control de los sensores de lectura de datos y la ejecución de las órdenes del control en los actuadores a bordo del vehículo,
- programación de la lectura de datos, filtro de estimación de la posición y de los sensores en la *estación de tierra*,
- desarrollo de un método original de transmisión de información digital en RF con nivel de continua cero, ancho de banda mínimo y retardo óptimo,

En el terreno de la instrumentación las aportaciones son:

- elección de una plataforma a escala, de bajo coste, que permite la repetitividad automática y clónica de maniobras sin los inconvenientes que se derivan de usar un vehículo convencional (accidentes, seguridad del piloto, etc),
- instrumentación de la plataforma para la captura de datos (elección de sensores y ubicación),
- instalación de actuadores en disposición tal que es posible el *brake by wire* independiente de cada rueda y el *drive by wire*,
- desarrollo y fabricación a partir de componentes básicos del computador dedicado y específico para esta aplicación que efectúa la lectura, procesado y transmisión de datos y de la recepción de comandos, procesado y control de los actuadores,
- desarrollo de un algoritmo original para codificar, con ancho de banda mínimo, simultáneamente la velocidad de giro y posición de un disco en base a la lectura de un sólo sensor que devuelve información binaria.

7.2. Futuras líneas de investigación

Los desarrollos llevados a cabo en el marco de este trabajo abren nuevas líneas de investigación, algunas exploradas en parte pero no concluidas y otras sólo apuntadas. Entre las primeras se podrían destacar las siguientes:

- efectuar el cálculo de la precisión y exactitud máximas que se pueden obtener del estimador propuesto en base a los datos proporcionados por el hardware escogido,
- caracterizar la pérdida de control: cuantificar el estado o sucesión de estados que, en las condiciones actuales, indican la inmediatez de una situación de pérdida de control con una probabilidad determinada y la anticipación suficiente,
- complementar el modelo de predicción del estimador introduciendo las ecuaciones de la dinámica del vehículo,
- caracterizar parámetros desconocidos (p. ej. del neumático) a partir del vector de estado,
- contrastar la efectividad y precisión del estimador propuesto, comparándolo con las alternativas que se describen en el capítulo 6,
- desarrollar estrategias de control para evitar o superar maniobras de emergencia,
- ensayar algoritmos de control y el comportamiento del vehículo cuando se eliminan las transmisiones directas a la dirección o los frenos (entorno *by wire*),
- escribir el filtro para que la parte de estimación de la orientación, la caracterización de la pérdida de control y la estrategia de control para superarla, se pueda efectuar a bordo en una plataforma de bajo coste (microcontrolador o DSP).

Apéndice A

Características del vehículo

A.0.1. Motor

Es un motor de combustión interna, de encendido provocado, de dos tiempos, alimentado mediante una mezcla de gasolina y aceite (2.5%). El encendido es electrónico, mediante chispa. La posición en el vehículo es transversal, monocilíndrica con el cilindro inclinado 20° . La situación en el chasis es central, próxima al centro de gravedad del vehículo, entre el eje anterior y el posterior. Sus características más relevantes se muestran en la tabla A.1. La refrigeración es mediante convección forzada de aire, en torno a las aletas que recubren la culata y parte del cilindro. La mezcla se realiza mediante un carburador, que controla la carga del motor mediante la rotación de una mariposa que regula el paso del aire. Esta mariposa es controlada mediante un servomotor.

Teniendo en cuenta que la masa total del vehículo es de 10,28 kg, la relación potencia/peso es de 203,11 W/kg. Esta relación es bastante elevada, en comparación con la de un vehículo convencional, y permite aceleraciones que rebasan con facilidad el límite de adherencia de los neumáticos. Este hecho dificulta el control del motor, pero permite efectuar ensayos en los que el vehículo pierda adherencia por exceso de tracción.

A.0.2. Chasis y carrocería

El chasis está formado por una estructura de aleación de aluminio (*ER-GAL*) a la que se unen los componentes fundamentales del vehículo (ejes delantero y trasero, y conjunto de motor y transmisión). Otra estructura de aluminio, superpuesta a la anterior, sirve para aumentar la rigidez del chasis a la flexión y a la torsión, y para albergar los sistemas de control y sensorización.

Esta estructura confiere al vehículo elevada resistencia a las sollicitaciones mecánicas, de forma que la geometría del vehículo permanece sensiblemente invariable a lo largo de los ensayos. De esta forma será más sencillo mo-

Característica	Dimensión
Tipo	2 tiempos
Encendido	provocado por chispa
Desplazamiento	23 cm ³
Carrera	28
Diámetro	32
Potencia	2,06 kW

Cuadro A.1: Características principales del motor del vehículo

delar el comportamiento dinámico del vehículo. Un chasis que se deforma apreciablemente exigiría un modelo dinámico más complicado.

A esta estructura del chasis se sujetan las demás partes del vehículo: depósito, electrónica de control, sensores, actuadores, transmisores y receptores de radio y baterías. La carrocería es una lámina de plástico (*ABS*) termoconformada que recubre el vehículo, y sirve únicamente para proteger a los componentes internos de la suciedad y el agua. No cumple funciones mecánicas.

A.0.3. Suspensión y dirección

El eje anterior es de suspensión independiente, con trapecios superiores e inferiores, muelles helicoidales, amortiguadores de aceite, y una estructura que realiza las funciones de barra de torsión. Los bujes que soportan ambas ruedas terminan en sus extremos superior e inferior en esferas que se recogen en los trapecios, de manera que permiten al buje efectuar los movimientos de suspensión y dirección. Para la dirección, los bujes son girados mediante bielas que transmiten el movimiento de rotación de un mecanismo (*salvaservos*), que evita que el servomotor de la dirección sufra los esfuerzos mecánicos ocasionados por golpes o irregularidades del terreno. Los trapecios y las bielas de la dirección son regulables, de forma que es posible ajustar la convergencia, la caída y el avance de las ruedas.

El eje posterior también es de suspensión independiente, con dobles trapecios, muelles helicoidales y amortiguadores de aceite. En este caso, los bujes de las ruedas se articulan con el trapecio superior mediante una rótula, pero con el inferior mediante un eje longitudinal, de forma que la alineación de las ruedas traseras es fija. La transmisión del par motor a las ruedas se efectúa mediante un diferencial de bolas, tarable, y dos palieres con juntas homocinéticas. Al igual que en el eje anterior, los trapecios son regulables, de forma que se puede ajustar la caída.

Los cuatro muelles helicoidales son regulables. Los amortiguadores, de aceite y de doble efecto, también pueden regularse seleccionando la densidad del aceite apropiada. Para ello se dispone de aceites de diferentes densidades.

Los piezas que componen los puentes, y los trapecios, están fabricados en *poliamida* inyectada con fibra de vidrio. Los palieres y bielas son de aluminio y acero. Los bujes son, también, de *poliamida* inyectada con fibra, y son piezas clave en el sistema de suspensión. Transmiten todas las solicitaciones mecánicas de las ruedas al chasis. Han de permitir el funcionamiento de los palieres para la tracción, y de las bielas para la dirección. Soportan los rodamientos que sujetan los ejes de las ruedas, y también han de soportar las piezas que formarán los frenos de cada rueda, y sus fuertes solicitaciones. Además, en este caso, se han añadido sensores que miden la posición y velocidad de cada rueda, y estos sensores también se sujetan a los bujes.

A.0.4. Ruedas

Las ruedas del vehículo constan de una llanta, en *poliamida*, y una cubierta de goma. La llanta tiene un orificio ranurado en su centro, que recibe al eje; éste está roscado, de manera que una única tuerca autoblocante sujeta la llanta en el eje. La cubierta se une herméticamente a la llanta, y en la cámara que forma en su interior hay aire y una espuma de material elástico. El aire puede entrar y salir de la cámara a través de unos orificios practicados en la llanta. Variando los diámetros de estos orificios, y utilizando diferentes compuestos de la espuma elástica es posible variar el comportamiento del neumático. Además es posible elegir el compuesto del mismo, y la forma y profundidad del dibujo.

Apéndice B

Codificación Pseudo-Manchester

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
0	0	00000000	1	4	9	1	170	0	10101010	1	0	1	9
1	0	00000001	1	3	8	1	85	0	01010101	1	0	2	7
2	0	00000010	1	3	7	3	86	0	01010110	1	0	2	7
3	0	00000011	1	2	7	1	90	0	01011010	1	0	2	7
4	0	00000100	1	3	6	3	106	0	01101010	1	0	2	7
5	0	00000101	1	2	6	3	149	0	10010101	1	0	2	7
6	0	00000110	1	2	6	3	150	0	10010110	1	0	2	7
7	0	00000111	1	1	6	1	154	0	10011010	1	0	2	7
8	0	00001000	1	3	5	3	165	0	10100101	1	0	2	7
9	0	00001001	1	2	5	3	166	0	10100110	1	0	2	7
10	0	00001010	1	2	5	5	169	0	10101001	1	0	2	7
11	0	00001011	1	1	5	3	172	0	10101100	1	0	2	7
12	0	00001100	1	2	5	3	178	0	10110010	1	0	2	7
13	0	00001101	1	1	5	3	180	0	10110100	1	0	2	7
14	0	00001110	1	1	5	3	202	0	11001010	1	0	2	7
15	0	00001111	1	0	5	1	210	0	11010010	1	0	2	7
16	0	00010000	1	3	4	3	212	0	11010100	1	0	2	7
17	0	00010001	1	2	4	3	77	0	01001101	1	0	2	5
18	0	00010010	1	2	4	5	89	0	01011001	1	0	2	5
19	0	00010011	1	1	4	3	101	0	01100101	1	0	2	5
20	0	00010100	1	2	4	5	102	0	01100110	1	0	2	5
21	0	00010101	1	1	4	5	105	0	01101001	1	0	2	5
22	0	00010110	1	1	4	5	108	0	01101100	1	0	2	5
23	0	00010111	1	0	4	3	153	0	10011001	1	0	2	5
24	0	00011000	1	2	4	3	201	0	11001001	1	0	2	5

Continúa en la página siguiente...

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
25	0	00011001	1	1	4	3	204	0	11001100	1	0	2	5
26	0	00011010	1	1	4	5	43	0	00101011	1	0	3	5
27	0	00011011	1	0	4	3	45	0	00101101	1	0	3	5
28	0	00011100	1	1	4	3	46	0	00101110	1	0	3	5
29	0	00011101	1	0	4	3	53	0	00110101	1	0	3	5
30	0	00011110	1	0	4	3	54	0	00110110	1	0	3	5
31	0	00011111	1	1	6	1	58	0	00111010	1	0	3	5
32	0	00100000	1	3	5	3	75	0	01001011	1	0	3	5
33	0	00100001	1	2	4	3	78	0	01001110	1	0	3	5
34	0	00100010	1	2	3	5	83	0	01010011	1	0	3	5
35	0	00100011	1	1	3	3	92	0	01011100	1	0	3	5
36	0	00100100	1	2	3	5	114	0	01110010	1	0	3	5
37	0	00100101	1	1	3	5	116	0	01110100	1	0	3	5
38	0	00100110	1	1	3	5	139	0	10001011	1	0	3	5
39	0	00100111	1	0	4	3	141	0	10001101	1	0	3	5
40	0	00101000	1	2	3	5	142	0	10001110	1	0	3	5
41	0	00101001	1	1	3	5	147	0	10010011	1	0	3	5
42	0	00101010	1	1	3	7	156	0	10011100	1	0	3	5
43	0	00101011	1	0	3	5	163	0	10100011	1	0	3	5
44	0	00101100	1	1	3	5	177	0	10110001	1	0	3	5
45	0	00101101	1	0	3	5	184	0	10111000	1	0	3	5
46	0	00101110	1	0	3	5	197	0	11000101	1	0	3	5
47	0	00101111	1	1	5	3	198	0	11000110	1	0	3	5
48	0	00110000	1	2	4	3	209	0	11010001	1	0	3	5
49	0	00110001	1	1	3	3	216	0	11011000	1	0	3	5
50	0	00110010	1	1	3	5	226	0	11100010	1	0	3	5
51	0	00110011	1	0	3	3	228	0	11100100	1	0	3	5
52	0	00110100	1	1	3	5	232	0	11101000	1	0	3	5
53	0	00110101	1	0	3	5	51	0	00110011	1	0	3	3
54	0	00110110	1	0	3	5	57	0	00111001	1	0	3	3
55	0	00110111	1	1	4	3	99	0	01100011	1	0	3	3
56	0	00111000	1	1	3	3	113	0	01110001	1	0	3	3
57	0	00111001	1	0	3	3	23	0	00010111	1	0	4	3
58	0	00111010	1	0	3	5	27	0	00011011	1	0	4	3
59	0	00111011	1	1	3	3	29	0	00011101	1	0	4	3
60	0	00111100	1	0	4	3	30	0	00011110	1	0	4	3
61	0	00111101	1	1	4	3	39	0	00100111	1	0	4	3
62	0	00111110	1	1	5	3	60	0	00111100	1	0	4	3
63	0	00111111	1	2	7	1	71	0	01000111	1	0	4	3
64	0	01000000	1	3	6	3	120	0	01111000	1	0	4	3
65	0	01000001	1	2	5	3	135	0	10000111	1	0	4	3
66	0	01000010	1	2	4	5	195	0	11000011	1	0	4	3
67	0	01000011	1	1	4	3	225	0	11100001	1	0	4	3
68	0	01000100	1	2	3	5	240	0	11110000	1	0	4	3
69	0	01000101	1	1	3	5	15	0	00001111	1	0	5	1

Continúa en la página siguiente...

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
70	0	01000110	1	1	3	5	74	0	01001010	1	1	2	7
71	0	01000111	1	0	4	3	82	0	01010010	1	1	2	7
72	0	01001000	1	2	3	5	84	0	01010100	1	1	2	7
73	0	01001001	1	1	2	5	146	0	10010010	1	1	2	7
74	0	01001010	1	1	2	7	148	0	10010100	1	1	2	7
75	0	01001011	1	0	3	5	164	0	10100100	1	1	2	7
76	0	01001100	1	1	2	5	173	0	10101101	1	1	2	7
77	0	01001101	1	0	2	5	181	0	10110101	1	1	2	7
78	0	01001110	1	0	3	5	182	0	10110110	1	1	2	7
79	0	01001111	1	1	5	3	213	0	11010101	1	1	2	7
80	0	01010000	1	2	4	5	214	0	11010110	1	1	2	7
81	0	01010001	1	1	3	5	218	0	11011010	1	1	2	7
82	0	01010010	1	1	2	7	73	0	01001001	1	1	2	5
83	0	01010011	1	0	3	5	76	0	01001100	1	1	2	5
84	0	01010100	1	1	2	7	100	0	01100100	1	1	2	5
85	0	01010101	1	0	2	7	109	0	01101101	1	1	2	5
86	0	01010110	1	0	2	7	205	0	11001101	1	1	2	5
87	0	01010111	1	1	4	5	217	0	11011001	1	1	2	5
88	0	01011000	1	1	3	5	42	0	00101010	1	1	3	7
89	0	01011001	1	0	2	5	138	0	10001010	1	1	3	7
90	0	01011010	1	0	2	7	162	0	10100010	1	1	3	7
91	0	01011011	1	1	3	5	168	0	10101000	1	1	3	7
92	0	01011100	1	0	3	5	171	0	10101011	1	1	3	7
93	0	01011101	1	1	3	5	174	0	10101110	1	1	3	7
94	0	01011110	1	1	4	5	186	0	10111010	1	1	3	7
95	0	01011111	1	2	6	3	234	0	11101010	1	1	3	7
96	0	01100000	1	2	5	3	37	0	00100101	1	1	3	5
97	0	01100001	1	1	4	3	38	0	00100110	1	1	3	5
98	0	01100010	1	1	3	5	41	0	00101001	1	1	3	5
99	0	01100011	1	0	3	3	44	0	00101100	1	1	3	5
100	0	01100100	1	1	2	5	50	0	00110010	1	1	3	5
101	0	01100101	1	0	2	5	52	0	00110100	1	1	3	5
102	0	01100110	1	0	2	5	69	0	01000101	1	1	3	5
103	0	01100111	1	1	4	3	70	0	01000110	1	1	3	5
104	0	01101000	1	1	3	5	81	0	01010001	1	1	3	5
105	0	01101001	1	0	2	5	88	0	01011000	1	1	3	5
106	0	01101010	1	0	2	7	91	0	01011011	1	1	3	5
107	0	01101011	1	1	3	5	93	0	01011101	1	1	3	5
108	0	01101100	1	0	2	5	98	0	01100010	1	1	3	5
109	0	01101101	1	1	2	5	104	0	01101000	1	1	3	5
110	0	01101110	1	1	3	5	107	0	01101011	1	1	3	5
111	0	01101111	1	2	5	3	110	0	01101110	1	1	3	5
112	0	01110000	1	1	4	3	117	0	01110101	1	1	3	5
113	0	01110001	1	0	3	3	118	0	01110110	1	1	3	5
114	0	01110010	1	0	3	5	137	0	10001001	1	1	3	5

Continúa en la página siguiente...

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
115	0	01110011	1	1	3	3	140	0	10001100	1	1	3	5
116	0	01110100	1	0	3	5	145	0	10010001	1	1	3	5
117	0	01110101	1	1	3	5	152	0	10011000	1	1	3	5
118	0	01110110	1	1	3	5	155	0	10011011	1	1	3	5
119	0	01110111	1	2	4	3	157	0	10011101	1	1	3	5
120	0	01111000	1	0	4	3	179	0	10110011	1	1	3	5
121	0	01111001	1	1	4	3	185	0	10111001	1	1	3	5
122	0	01111010	1	1	4	5	196	0	11000100	1	1	3	5
123	0	01111011	1	2	4	3	200	0	11001000	1	1	3	5
124	0	01111100	1	1	5	3	203	0	11001011	1	1	3	5
125	0	01111101	1	2	5	3	206	0	11001110	1	1	3	5
126	0	01111110	1	2	6	3	211	0	11010011	1	1	3	5
127	0	01111111	1	3	8	1	220	0	11011100	1	1	3	5
128	0	10000000	1	3	7	3	229	0	11100101	1	1	3	5
129	0	10000001	1	2	6	3	230	0	11100110	1	1	3	5
130	0	10000010	1	2	5	5	233	0	11101001	1	1	3	5
131	0	10000011	1	1	5	3	236	0	11101100	1	1	3	5
132	0	10000100	1	2	4	5	35	0	00100011	1	1	3	3
133	0	10000101	1	1	4	5	49	0	00110001	1	1	3	3
134	0	10000110	1	1	4	5	56	0	00111000	1	1	3	3
135	0	10000111	1	0	4	3	59	0	00111011	1	1	3	3
136	0	10001000	1	2	3	5	115	0	01110011	1	1	3	3
137	0	10001001	1	1	3	5	227	0	11100011	1	1	3	3
138	0	10001010	1	1	3	7	21	0	00010101	1	1	4	5
139	0	10001011	1	0	3	5	22	0	00010110	1	1	4	5
140	0	10001100	1	1	3	5	26	0	00011010	1	1	4	5
141	0	10001101	1	0	3	5	87	0	01010111	1	1	4	5
142	0	10001110	1	0	3	5	94	0	01011110	1	1	4	5
143	0	10001111	1	1	5	3	122	0	01111010	1	1	4	5
144	0	10010000	1	2	4	5	133	0	10000101	1	1	4	5
145	0	10010001	1	1	3	5	134	0	10000110	1	1	4	5
146	0	10010010	1	1	2	7	151	0	10010111	1	1	4	5
147	0	10010011	1	0	3	5	158	0	10011110	1	1	4	5
148	0	10010100	1	1	2	7	161	0	10100001	1	1	4	5
149	0	10010101	1	0	2	7	167	0	10100111	1	1	4	5
150	0	10010110	1	0	2	7	176	0	10110000	1	1	4	5
151	0	10010111	1	1	4	5	188	0	10111100	1	1	4	5
152	0	10011000	1	1	3	5	194	0	11000010	1	1	4	5
153	0	10011001	1	0	2	5	208	0	11010000	1	1	4	5
154	0	10011010	1	0	2	7	242	0	11110010	1	1	4	5
155	0	10011011	1	1	3	5	244	0	11110100	1	1	4	5
156	0	10011100	1	0	3	5	19	0	00010011	1	1	4	3
157	0	10011101	1	1	3	5	25	0	00011001	1	1	4	3
158	0	10011110	1	1	4	5	28	0	00011100	1	1	4	3
159	0	10011111	1	2	6	3	55	0	00110111	1	1	4	3

Continúa en la página siguiente...

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
160	0	10100000	1	2	5	5	61	0	00111101	1	1	4	3
161	0	10100001	1	1	4	5	67	0	01000011	1	1	4	3
162	0	10100010	1	1	3	7	97	0	01100001	1	1	4	3
163	0	10100011	1	0	3	5	103	0	01100111	1	1	4	3
164	0	10100100	1	1	2	7	112	0	01110000	1	1	4	3
165	0	10100101	1	0	2	7	121	0	01111001	1	1	4	3
166	0	10100110	1	0	2	7	199	0	11000111	1	1	4	3
167	0	10100111	1	1	4	5	241	0	11110001	1	1	4	3
168	0	10101000	1	1	3	7	11	0	00001011	1	1	5	3
169	0	10101001	1	0	2	7	13	0	00001101	1	1	5	3
170	0	10101010	1	0	1	9	14	0	00001110	1	1	5	3
171	0	10101011	1	1	3	7	47	0	00101111	1	1	5	3
172	0	10101100	1	0	2	7	62	0	00111110	1	1	5	3
173	0	10101101	1	1	2	7	79	0	01001111	1	1	5	3
174	0	10101110	1	1	3	7	124	0	01111100	1	1	5	3
175	0	10101111	1	2	5	5	131	0	10000011	1	1	5	3
176	0	10110000	1	1	4	5	143	0	10001111	1	1	5	3
177	0	10110001	1	0	3	5	193	0	11000001	1	1	5	3
178	0	10110010	1	0	2	7	224	0	11100000	1	1	5	3
179	0	10110011	1	1	3	5	248	0	11111000	1	1	5	3
180	0	10110100	1	0	2	7	7	0	00000111	1	1	6	1
181	0	10110101	1	1	2	7	31	0	00011111	1	1	6	1
182	0	10110110	1	1	2	7	34	0	00100010	1	2	3	5
183	0	10110111	1	2	4	5	36	0	00100100	1	2	3	5
184	0	10111000	1	0	3	5	40	0	00101000	1	2	3	5
185	0	10111001	1	1	3	5	68	0	01000100	1	2	3	5
186	0	10111010	1	1	3	7	72	0	01001000	1	2	3	5
187	0	10111011	1	2	3	5	136	0	10001000	1	2	3	5
188	0	10111100	1	1	4	5	187	0	10111011	1	2	3	5
189	0	10111101	1	2	4	5	219	0	11011011	1	2	3	5
190	0	10111110	1	2	5	5	221	0	11011101	1	2	3	5
191	0	10111111	1	3	7	3	235	0	11101011	1	2	3	5
192	0	11000000	1	2	6	3	237	0	11101101	1	2	3	5
193	0	11000001	1	1	5	3	238	0	11101110	1	2	3	5
194	0	11000010	1	1	4	5	18	0	00010010	1	2	4	5
195	0	11000011	1	0	4	3	20	0	00010100	1	2	4	5
196	0	11000100	1	1	3	5	66	0	01000010	1	2	4	5
197	0	11000101	1	0	3	5	80	0	01010000	1	2	4	5
198	0	11000110	1	0	3	5	132	0	10000100	1	2	4	5
199	0	11000111	1	1	4	3	144	0	10010000	1	2	4	5
200	0	11001000	1	1	3	5	183	0	10110111	1	2	4	5
201	0	11001001	1	0	2	5	189	0	10111101	1	2	4	5
202	0	11001010	1	0	2	7	215	0	11010111	1	2	4	5
203	0	11001011	1	1	3	5	222	0	11011110	1	2	4	5
204	0	11001100	1	0	2	5	245	0	11110101	1	2	4	5

Continúa en la página siguiente...

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
205	0	11001101	1	1	2	5	246	0	11110110	1	2	4	5
206	0	11001110	1	1	3	5	17	0	00010001	1	2	4	3
207	0	11001111	1	2	5	3	24	0	00011000	1	2	4	3
208	0	11010000	1	1	4	5	33	0	00100001	1	2	4	3
209	0	11010001	1	0	3	5	48	0	00110000	1	2	4	3
210	0	11010010	1	0	2	7	119	0	01110111	1	2	4	3
211	0	11010011	1	1	3	5	123	0	01111011	1	2	4	3
212	0	11010100	1	0	2	7	231	0	11100111	1	2	4	3
213	0	11010101	1	1	2	7	243	0	11110011	1	2	4	3
214	0	11010110	1	1	2	7	10	0	00001010	1	2	5	5
215	0	11010111	1	2	4	5	130	0	10000010	1	2	5	5
216	0	11011000	1	0	3	5	160	0	10100000	1	2	5	5
217	0	11011001	1	1	2	5	175	0	10101111	1	2	5	5
218	0	11011010	1	1	2	7	190	0	10111110	1	2	5	5
219	0	11011011	1	2	3	5	250	0	11111010	1	2	5	5
220	0	11011100	1	1	3	5	9	0	00001001	1	2	5	3
221	0	11011101	1	2	3	5	12	0	00001100	1	2	5	3
222	0	11011110	1	2	4	5	65	0	01000001	1	2	5	3
223	0	11011111	1	3	6	3	96	0	01100000	1	2	5	3
224	0	11100000	1	1	5	3	111	0	01101111	1	2	5	3
225	0	11100001	1	0	4	3	125	0	01111101	1	2	5	3
226	0	11100010	1	0	3	5	207	0	11001111	1	2	5	3
227	0	11100011	1	1	3	3	249	0	11111001	1	2	5	3
228	0	11100100	1	0	3	5	5	0	00000101	1	2	6	3
229	0	11100101	1	1	3	5	6	0	00000110	1	2	6	3
230	0	11100110	1	1	3	5	95	0	01011111	1	2	6	3
231	0	11100111	1	2	4	3	126	0	01111110	1	2	6	3
232	0	11101000	1	0	3	5	129	0	10000001	1	2	6	3
233	0	11101001	1	1	3	5	159	0	10011111	1	2	6	3
234	0	11101010	1	1	3	7	192	0	11000000	1	2	6	3
235	0	11101011	1	2	3	5	252	0	11111100	1	2	6	3
236	0	11101100	1	1	3	5	3	0	00000011	1	2	7	1
237	0	11101101	1	2	3	5	63	0	00111111	1	2	7	1
238	0	11101110	1	2	3	5	16	0	00010000	1	3	4	3
239	0	11101111	1	3	5	3	247	0	11110111	1	3	4	3
240	0	11110000	1	0	4	3	8	0	00001000	1	3	5	3
241	0	11110001	1	1	4	3	32	0	00100000	1	3	5	3
242	0	11110010	1	1	4	5	239	0	11101111	1	3	5	3
243	0	11110011	1	2	4	3	251	0	11111011	1	3	5	3
244	0	11110100	1	1	4	5	4	0	00000100	1	3	6	3
245	0	11110101	1	2	4	5	64	0	01000000	1	3	6	3
246	0	11110110	1	2	4	5	223	0	11011111	1	3	6	3
247	0	11110111	1	3	4	3	253	0	11111101	1	3	6	3
248	0	11111000	1	1	5	3	2	0	00000010	1	3	7	3
249	0	11111001	1	2	5	3	128	0	10000000	1	3	7	3

Continúa en la página siguiente...

Bytes originales							Ordenamiento final						
X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº bits consec.	Nº de flancos	X	Start	Binario	Stop	Nivel de DC	Nº de bits iguales	Nº de flancos
250	0	11111010	1	2	5	5	191	0	10111111	1	3	7	3
251	0	11111011	1	3	5	3	254	0	11111110	1	3	7	3
252	0	11111100	1	2	6	3	1	0	00000001	1	3	8	1
253	0	11111101	1	3	6	3	127	0	01111111	1	3	8	1
254	0	11111110	1	3	7	3	0	0	00000000	1	4	9	1
255	0	11111111	1	4	9	1	255	0	11111111	1	4	9	1

Apéndice C

Esquema Eléctrico del Control del vehículo

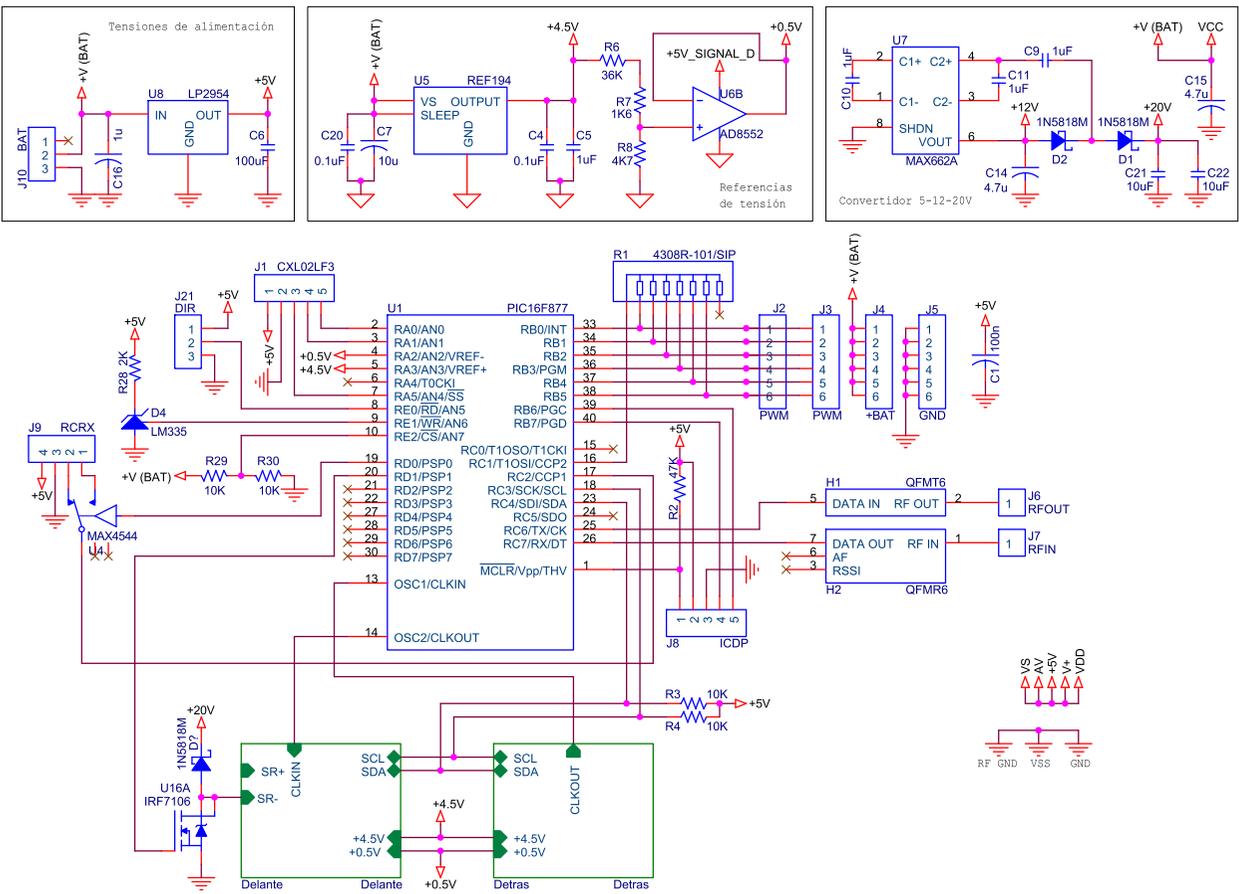


Figura C.1: Esquema eléctrico principal del control del vehículo.

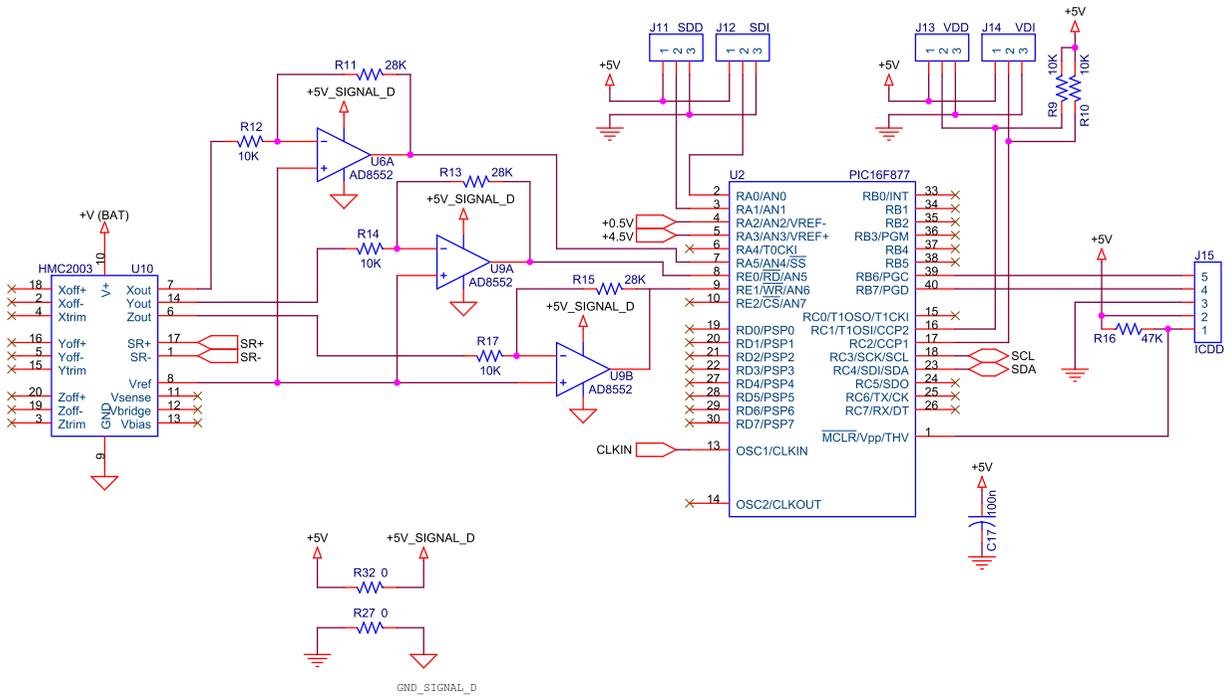


Figura C.2: Esquema electrico del eje delantero del vehiculo.

Apéndice D

Datos de caracterización de los sensores

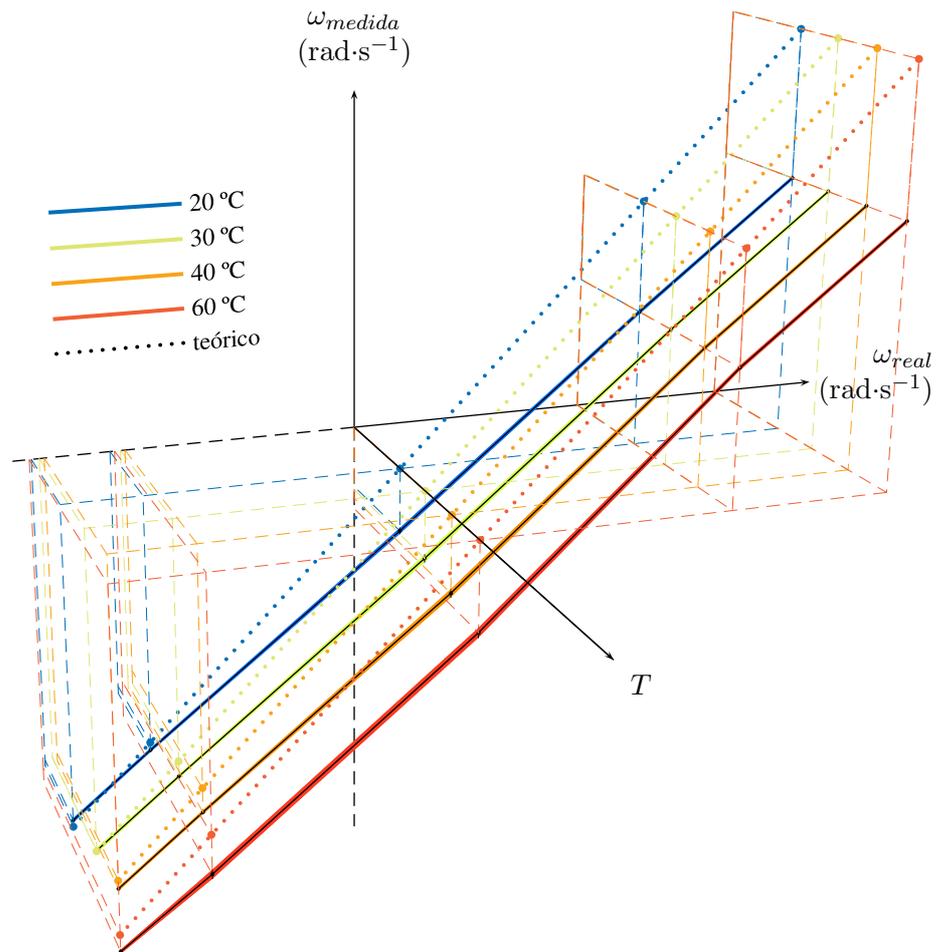


Figura D.1: Datos de caracterización del giróscopo del eje x.

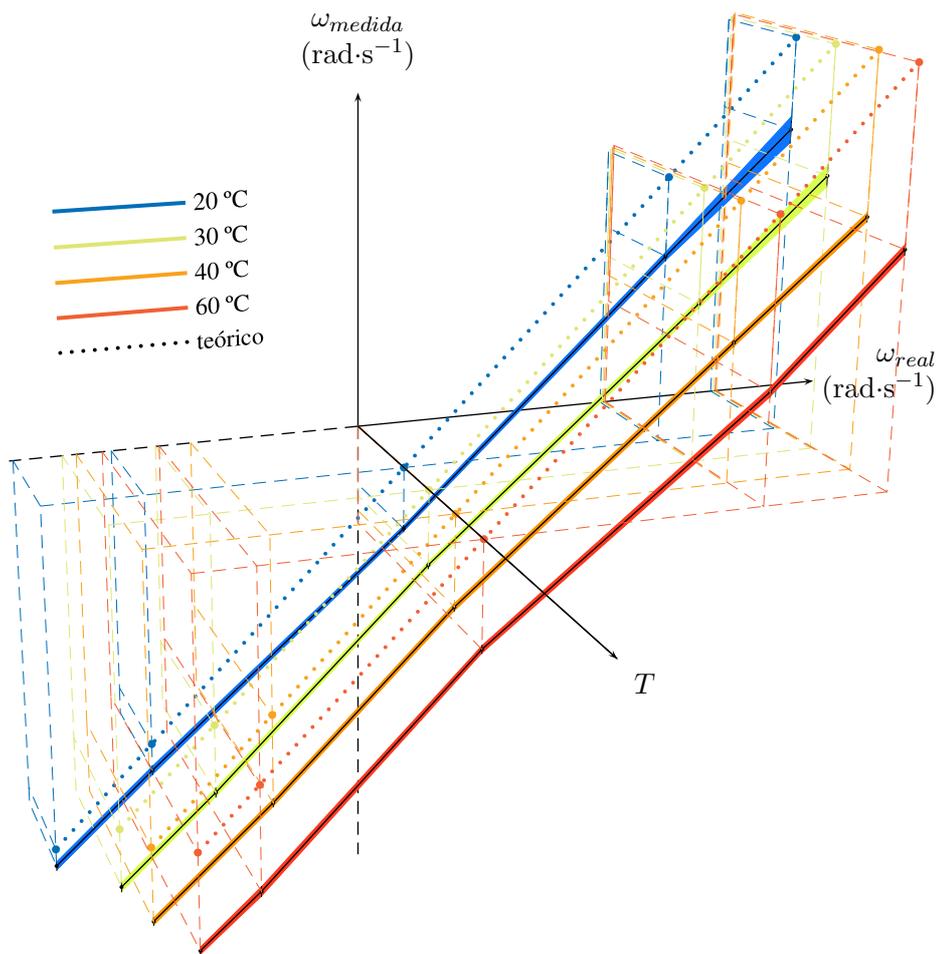


Figura D.2: Datos de caracterización del gir6scopo del eje y.

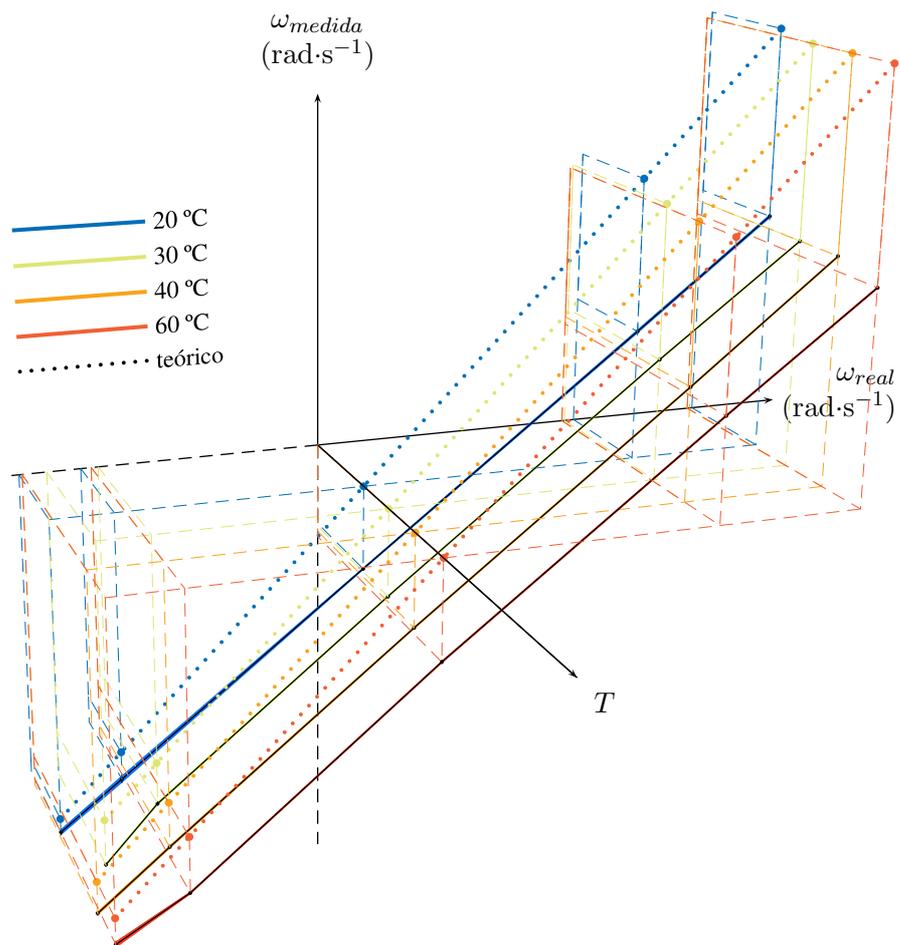


Figura D.3: Datos de caracterización del giróscopo del eje z.

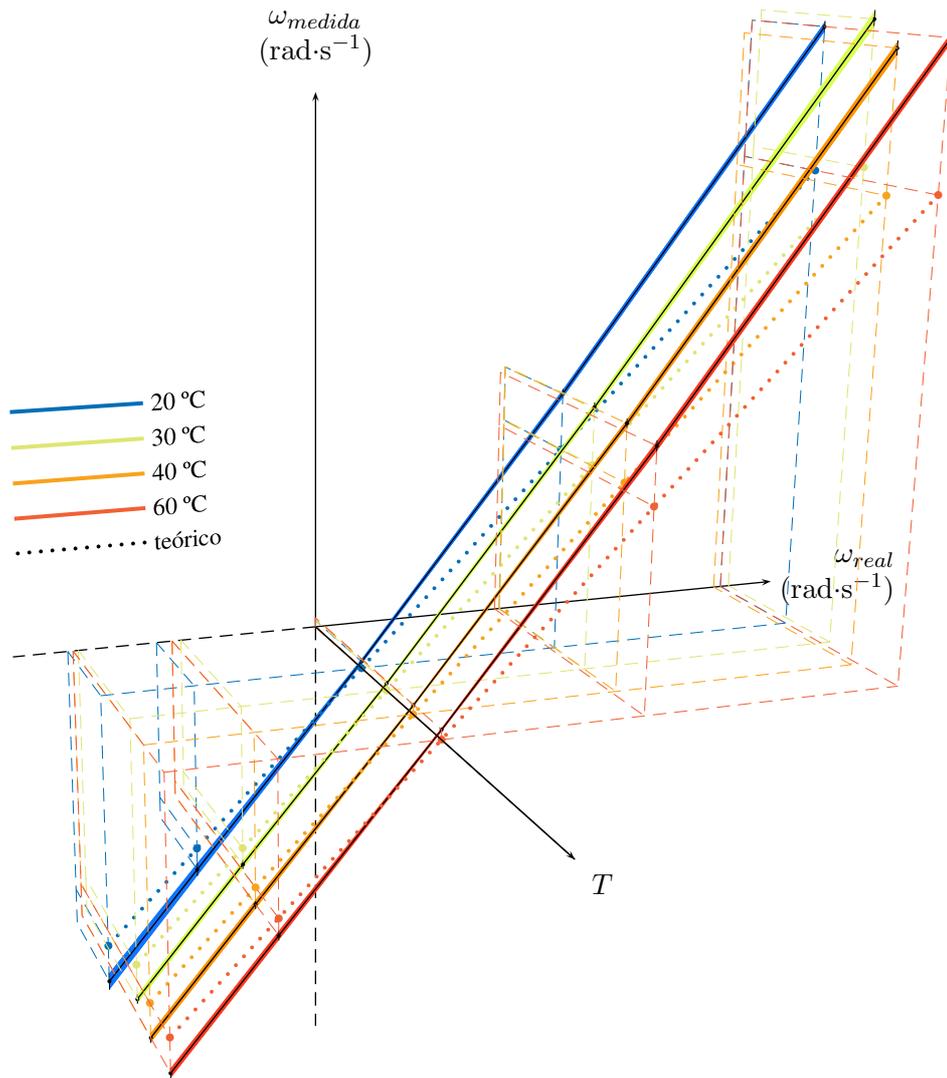


Figura D.4: Datos de caracterización del acelerómetro del eje x.

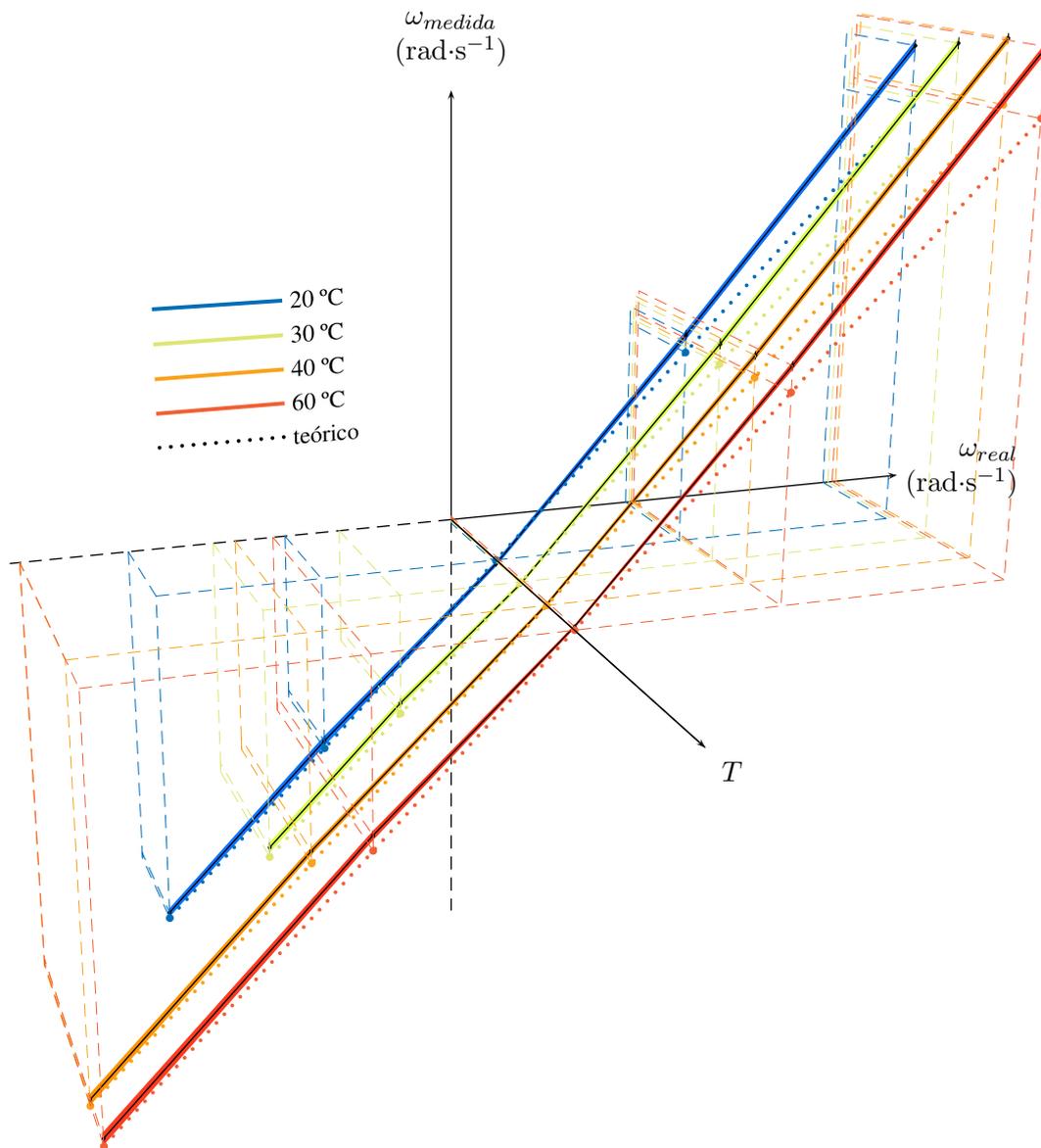


Figura D.5: Datos de caracterización del acelerómetro del eje y.

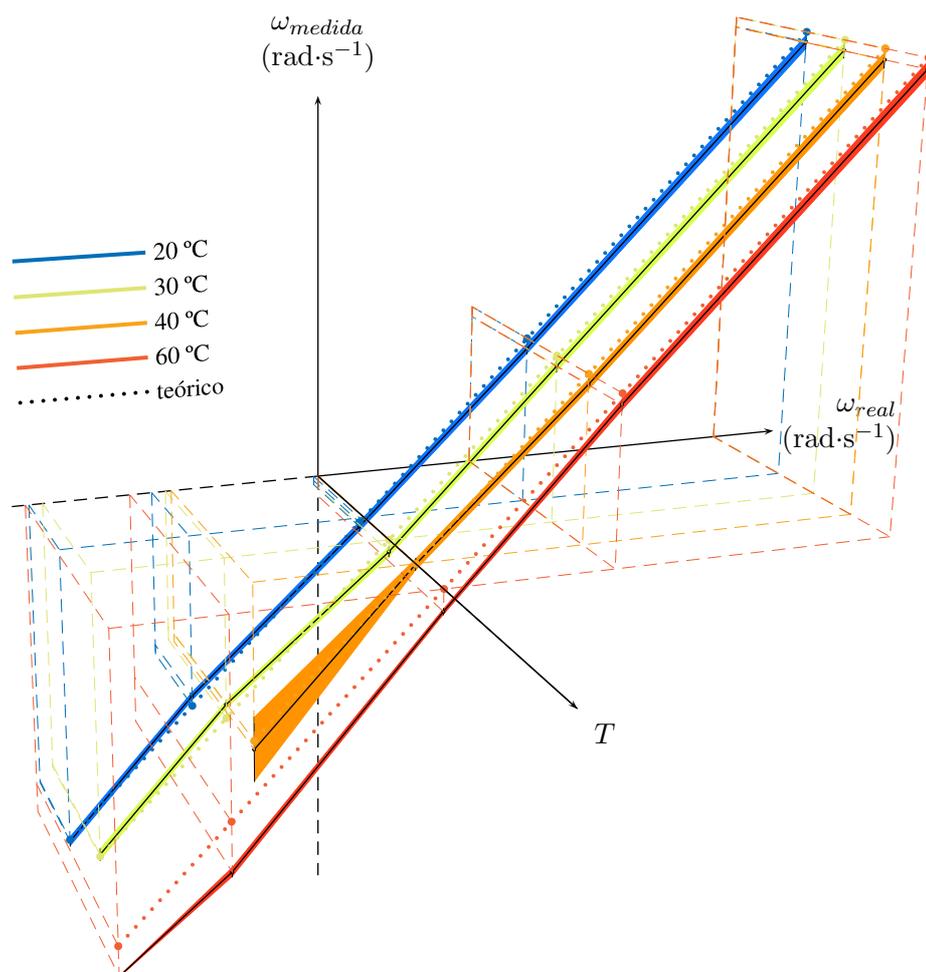


Figura D.6: Datos de caracterización del acelerómetro del eje z.

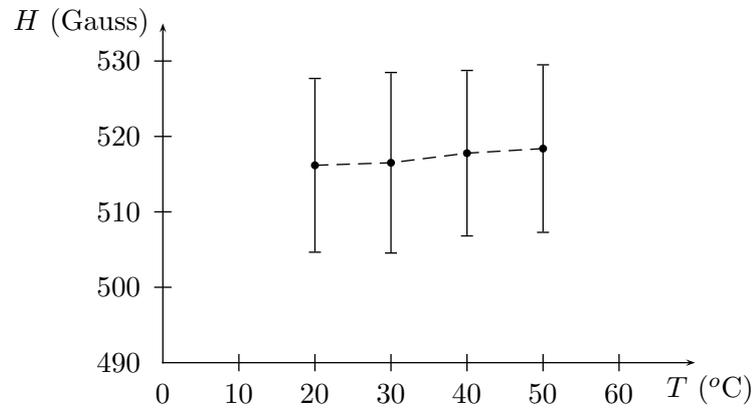


Figura D.7: Datos de caracterización del magnetómetro x.

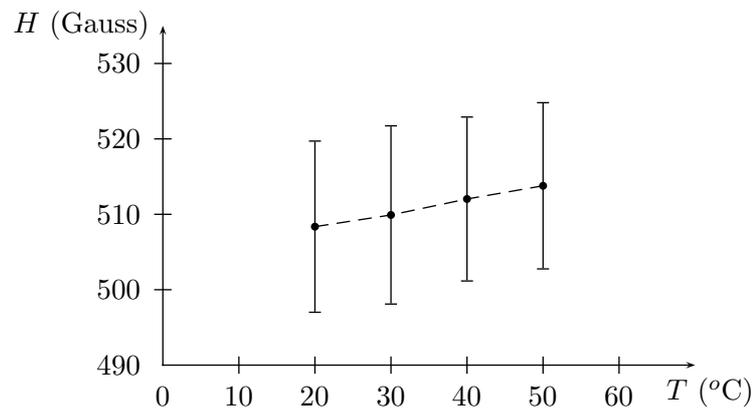


Figura D.8: Datos de caracterización del magnetómetro y.

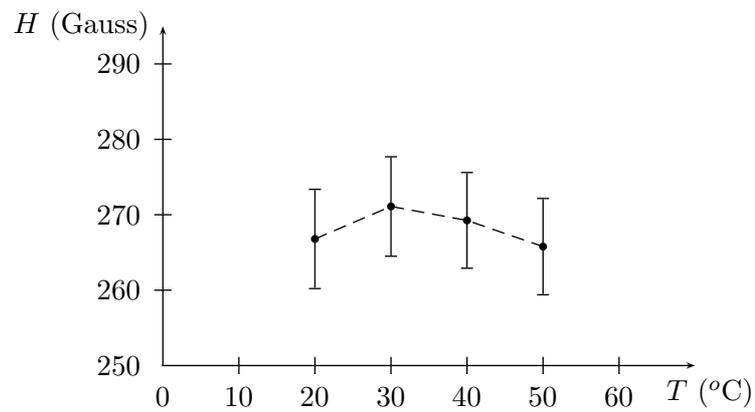


Figura D.9: Datos de caracterización del magnetómetro z.

Apéndice E

Expresión matricial del cambio de base con cuaternas

La operación de cambio de base, o de cambio de la orientación que representa una cuaterna \mathbf{q} , mediante una cuaterna de cambio de base \mathbf{q}_1 , de la forma $\mathbf{q}_1^{-1} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_1$, o su complementaria $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_1^{-1}$, no son más que un doble producto de cuaternas, con la particularidad de que la primera y la última cuaterna involucradas en el producto son inversas entre sí, y de módulo unitario.

En estas condiciones concretas, es posible formular las operaciones necesarias para realizar este doble producto de forma matricial. Este paso es necesario para poder escribir las matrices \mathbf{A} y \mathbf{H} del filtro de Kalman del capítulo 6, y permite expresar matemáticamente el comportamiento del sistema mecánico de forma que pueda utilizarse el Filtro de Kalman lineal.

Para abordar este cambio de expresión, y simplificar la notación, los componentes de las cuaternas \mathbf{q}_1 y \mathbf{q} se denominarán:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Utilizando la notación de parte real e imaginaria de las cuaternas, el producto triple que buscamos se puede expresar:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q} \mathbf{q}_1 &= \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q} \mathbf{q}_1 = \\ &= \bar{\mathbf{q}}_1 (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \mathbf{q}_1 = \\ &= \bar{\mathbf{q}}_1 (a \mathbf{q}_1 + b\mathbf{i} \mathbf{q}_1 + c\mathbf{j} \mathbf{q}_1 + d\mathbf{k} \mathbf{q}_1) = \\ &= a \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q}_1 + b \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{i} \mathbf{q}_1 + c \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{j} \mathbf{q}_1 + d \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{k} \mathbf{q}_1 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Teniendo en cuenta que \mathbf{q}_1 es una cuaterna unitaria, será $\bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q}_1 = \|\mathbf{q}_1\|^2 = 1$,

con lo que:

$$\mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q} \mathbf{q}_1 = \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q} \mathbf{q}_1 = a + b \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{i} \mathbf{q}_1 + c \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{j} \mathbf{q}_1 + d \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{k} \mathbf{q}_1 \quad (\text{E.3})$$

En esta expresión se aprecia que la rotación o el cambio de base realizado mediante un producto de cuaternas como el aquí expuesto, utilizando una cuaterna de rotación o de cambio de base con norma unitaria, consiste en rotar o cambiar de base los vectores de la base original, \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , y componer el vector resultante utilizando sus componentes b , c y d . La parte real a de la cuaterna no se modifica.

Para llegar a la expresión matricial que se busca, es necesario realizar los dobles productos de E.3 y expresarlos en función de las cuaternas \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} . Realizando por separado las operaciones de cada uno de los dobles productos:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{i} \mathbf{q}_1 &= (w - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}) \mathbf{i} \mathbf{q}_1 = (x + w\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \mathbf{q}_1 = \\ &= (x + w\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}) (w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= + wx + x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k} + \\ &\quad + w^2\mathbf{i} - wx + wy\mathbf{k} - wz\mathbf{j} - \\ &\quad - wz\mathbf{j} + xz\mathbf{k} + yz - z^2\mathbf{i} + \\ &\quad + wy\mathbf{k} + xy\mathbf{j} - y^2\mathbf{i} - yz = \\ &= (w^2 + x^2 - y^2 - z^2) \mathbf{i} + 2(-wz + xy) \mathbf{j} + 2(wy + xz) \mathbf{k} = \\ &= (1 - 2(y^2 + z^2)) \mathbf{i} + 2(-wz + xy) \mathbf{j} + 2(wy + xz) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{j} \mathbf{q}_1 &= (w - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}) \mathbf{j} \mathbf{q}_1 = (y + z\mathbf{i} + w\mathbf{j} - x\mathbf{k}) \mathbf{q}_1 \\ &= (y + z\mathbf{i} + w\mathbf{j} - x\mathbf{k}) (w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= + yw + xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k} - \\ &\quad + wz\mathbf{i} - xz + yz\mathbf{k} - z^2\mathbf{j} + \\ &\quad + w^2\mathbf{j} - wx\mathbf{k} - wy + wz\mathbf{i} + \\ &\quad - wx\mathbf{k} - x^2\mathbf{j} + xy\mathbf{i} + xz = \\ &= 2(wz + xy) \mathbf{i} + (w^2 - x^2 + y^2 - z^2) \mathbf{j} + 2(-wx + yz) \mathbf{k} = \\ &= 2(wz + xy) \mathbf{i} + (1 - 2(x^2 + z^2)) \mathbf{j} + 2(-wx + yz) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{k} \mathbf{q}_1 &= (w - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}) \mathbf{k} \mathbf{q}_1 = (z - y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \mathbf{q}_1 = \\ &= (z - y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + w\mathbf{k}) (w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= + wz + xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} - \\ &\quad - wy\mathbf{i} + xy - y^2\mathbf{k} + yz\mathbf{j} + \\ &\quad + wx\mathbf{j} - x^2\mathbf{k} - xy + xz\mathbf{i} + \\ &\quad + w^2\mathbf{k} + wx\mathbf{j} - wy\mathbf{i} - wz = \\ &= 2(-wy + xz) \mathbf{i} + 2(wx + yz) \mathbf{j} + (w^2 - x^2 - y^2 + z^2) \mathbf{k} = \\ &= 2(-wy + xz) \mathbf{i} + 2(wx + yz) \mathbf{j} + (1 - 2(x^2 + y^2)) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

La ecuación E.3 puede, por tanto, escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q} \mathbf{q}_1 &= \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q} \mathbf{q}_1 = a + b \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{i} \mathbf{q}_1 + c \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{j} \mathbf{q}_1 + d \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{k} \mathbf{q}_1 = \\
 &= a + \\
 &+ b \{ (1 - 2(y^2 + z^2)) \mathbf{i} + 2(-wz + xy) \mathbf{j} + 2(wy + xz) \mathbf{k} \} + \\
 &+ c \{ 2(wz + xy) \mathbf{i} + (1 - 2(x^2 + z^2)) \mathbf{j} + 2(-wx + yz) \mathbf{k} \} + \\
 &+ d \{ 2(-wy + xz) \mathbf{i} + 2(wx + yz) \mathbf{j} + (1 - 2(x^2 + y^2)) \mathbf{k} \}
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

que se puede expresar matricialmente como $\mathbf{q}_1^{-1} \mathbf{q} \mathbf{q}_1 = \bar{\mathbf{q}}_1 \mathbf{q} \mathbf{q}_1 = \mathbf{R}_{\mathbf{q}_1} \mathbf{q}$, donde $\mathbf{R}_{\mathbf{q}_1}$ es la matriz que efectúa sobre \mathbf{q} la rotación que representa \mathbf{q}_1 :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{q}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2(y^2 + z^2) & 2(wz + xy) & 2(-wy + xz) \\ 0 & 2(-wz + xy) & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2(wx + yz) \\ 0 & 2(wy + xz) & 2(-wx + yz) & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \tag{E.8}$$

Parte I
Bibliografía

Bibliografía

- [1] B. Adelstein, E. Johnston, and Ellis S. Dynamic response of electromagnetic spatial displacement trackers. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 5(3):302–318, 1996. ISSN 1054-7460, E-ISSN 1531-3263.
- [2] National Highway Traffic Safety Administration. Federal motor vehicle safety standard (fmvss) no. 126. http://www.nhtsa.dot.gov/static/files/DOT/NHTSA/Rulemaking/Rules/AssociatedFiles/ESC_FR_03_2007.pdf, 2009.
- [3] B. Danette Allen and Greg Welch. A general method for comparing the expected performance of tracking and motion capture systems. In *VRST '05: Proceedings of the ACM symposium on Virtual reality software and technology*, pages 201–210, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [4] R. Azuma. *Predictive Tracking for Augmented Reality*. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC, febrero 1995.
- [5] Bachmann. *Inertial and Magnetic Tracking of Limb Segment Orientation for Inserting Humans into Synthetic Environments*. PhD thesis, Naval Postgraduate School, 2000.
- [6] E. Bachmann, Duman I., U. Usta, McGhee R., X. Yun, and M. Zyda. Orientation tracking for humans and robots using inertial sensors. In *International Symposium on Computational Intelligence in Robotics & Automation*, pages 187–194, 1999.
- [7] E. Bachmann, R. McGhee, R. Whalen, R. Steven, R. Walker, J. Clynch, A. Healey, , and X. Yun. Evaluation of an integrated gps/ins system for shallow-water auv navigation (sans). In *Proceedings of the IEEE Symposium on Autonomous Underwater Vehicle Technology*, pages 268–275, 1996.
- [8] Eric R. Bachmann, Xiaoping Yun, and Anne Brumfield. Limitations of attitude estimation algorithms for inertial/magnetic sensor modules. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 14(3):76–87, 2007.

- [9] A.-J. Baerveldt and R. Klang. A low-cost and low-weight attitude estimation system for an autonomous helicopter. In *Intelligent Engineering Systems, 1997. INES '97. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, pages 391–395, september 1997.
- [10] E. Bakker, L. Nyborg, and Hans B. Pacejka. Tyre modeling for use in vehicle dynamics studies. *SAE 870421*, pages 2190–2198, 1987. International Congress and Exposition.
- [11] E. Bakker and Hans B. Pacejka. The magic formula tyre model. *Proceedings of the 1st International Colloquium on Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis*, 1993.
- [12] E. Bakker, Hans B. Pacejka, and L. Linder. A new tire model with an application in vehicle dynamics studies. *SAE 890087*, pages 83–94, 1989. Fourth Autotechnologies Conference.
- [13] Allen B.D., G. Bishop, and G. Welch. Tracking: Beyond 15 minutes of thought. SIGGRAPH 2001 Course 11: Course Notes, Ann. Conf. Computer Graphics and Interactive Techniques, 2001.
- [14] D.M. Bevly, J. Ryu, and J.C. Gerdes. Integrating ins sensors with gps measurements for continuous estimation of vehicle sideslip, roll, and tire cornering stiffness. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, diciembre 2006.
- [15] S. Bible, M. Zyda, and D. Brutzman. Using spread-spectrum ranging techniques for position tracking in a virtual environment. In *Proceedings of the 1995 Workshop on Networked Realities*, pages 26–28, 1995.
- [16] G. D. Buskey, J. Roberts, P. I. Corke, and G. F. Wyeth. Helicopter automation using a low-cost sensing system. *Computing and Control Engineering*, 15(2):8–9, 2004.
- [17] Álvaro Cassinelli, Stéphane Perrin, and Masatoshi Ishikawa. Smart laser-scanner for 3d human-machine interface. In *CHI '05: CHI '05 Extended Abstracts on Human Factors in Computing Systems*, pages 1138–1139, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [18] Ascension Technology Corporation. Overcoming metal problems: The advantage of dc magnetic tracking. <http://www.ascension-tech.com/docs/ASCWhitePaperDCvAC.pdf>, 2009.
- [19] Calspan Corporation. *Research on the Influence of Tire Properties on Vehicle Handling*. Calspan Corporation, 1976.
- [20] Motion Analysis Corporation. Hires 3d motion capture system. <http://www.motionanalysis.com/index.html>, 2009.

- [21] H. Dugoff, P.S. Fancher, and L. Segel. An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance. *SAE 700377*, pages 1219–1243, 1970.
- [22] Nathaniel I. Durlach and Anne S. Mavor. *Virtual Reality: Scientific and Technological Challenges*. National Academy Press, Washington, DC, 1995.
- [23] Mohamed Gad el Hak. *The MEMS Handbook*, chapter 24. The Mechanical Engineering Handbook Series. CRC Press LLC, 2002.
- [24] Robert Bosch GmbH ESP. Los estudios demuestran la efectividad del esp. http://www.bosch-esperience.com.es/studien/studien_es.pdf.
- [25] Comisión Europea. Reglamento del parlamento europeo y del consejo relativo a los requisitos de homologación de tipo referentes a la seguridad general de los vehículos de motor. <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=COM:2008:0316:FIN:ES:PDF>, 2009.
- [26] M. Euston, P. Coote, R. Mahony, Jonghyuk Kim, and T. Hamel. A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing uav. In *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 340–345, septiembre 2008.
- [27] J. A. Farrell, J. C. Stuelpnagel, R. H. Wessner, J. R. Velman, and J. E. Brock. A least squares estimate of spacecraft attitude. *SIAM Review*, 8(3):384–386, 1966.
- [28] F. Ferrin. Survey of helmet tracking technologies. In *SPIE Proceedings. Large-Screen-Projection, Avionic, and Helmet-Mounted Displays*, pages 86–94. SPIE, 1991.
- [29] E. Fiala. Seitenkrafte am rollenden luftreifen. *VDI-Zeitschrift 96*, page 973, 1964.
- [30] E. Foxlin. Inertial head-tracker sensor fusion by a complementary separate-bias kalman filter. In *Virtual Reality Annual International Symposium, 1996., Proceedings of the IEEE 1996*, pages 185–194, 267, 1996.
- [31] E. Foxlin. *Motion Tracking Technologies and Requirements*, chapter 8, pages 163–210. Lawrence Erlbaum Publishers, Hillsdale, N.J., 2002.
- [32] Eric Foxlin, Michael Harrington, and George Pfeifer. Constellation: a wide-range wireless motion-tracking system for augmented reality and virtual set applications. In *SIGGRAPH '98: Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 371–378, New York, NY, USA, 1998. ACM.

- [33] E. Fuchs. Inertial head-tracking. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1993.
- [34] G. Gim. *Vehicle Dynamics Simulation with a comprehensive Model for Pneumatic Tires*. PhD thesis, University of Arizona, U.S.A., 1988.
- [35] J.L. Harned, L.E. Johnston, and G. Sharpf. Measurement of tire brake force characteristics as related to wheel slip (antilock) control system design. *Transactions*, 78, 1969.
- [36] G. Henault. A computer simulation study and component evaluation for a quaternion filter for sourceless tracking of human limb segment motion. Master's thesis, Naval Postgraduate School, 1997.
- [37] FakeSpace Inc. Boom 3c. <http://www.fakespace.com/products/boom3c.html>, 2009.
- [38] Polhemus Inc. Fastrak. the fast and easy digital tracker. http://www.polhemus.com/polhemus_editor/assets/FASTRAKbrochure.pdf, 2009.
- [39] Reality Fusion Inc. Gamecam. <http://www.realityfusion.com/>, 2009.
- [40] U. Iqbal, T. B. Karamat, A. F. Okou, and A. Noureldin. Experimental results on an integrated GPS and multisensor system for land vehicle positioning. In *International Journal of Navigation and Observation*, volume 2009, 2009.
- [41] Kazufumi Ito and Kaiqi Xiong. Gaussian filter for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):910–927, mayo 2000.
- [42] Willie D. Jones. Keeping cars from crashing. *IEEE Spectrum*, 38(9):40–45, Enero 2001.
- [43] S. Julier and J. Uhlmann. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. In *Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simul. and Controls, Orlando, FL*, 1997.
- [44] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A new approach for filtering nonlinear systems. *American Control Conference, 1995. Proceedings of the*, 3:1628–1632 vol.3, 1995.
- [45] Ronald K Jurgen. *Sensors and transducers*. Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 2nd ed edition, 2003.
- [46] Rudolph Emil Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45, marzo 1960.

- [47] J. Keat. *Analysis of Least-Squares Attitude Determination Routine DOAOP*. Computer Sciences Corp., febrero 1977.
- [48] Joseph J. Jr Laviola. A comparison of unscented and extended kalman filtering for estimating quaternion motion. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.7.2389>, 2003.
- [49] Tine Lefebvre, Herman Bruyninckx, and Joris De Schutter. Kalman filters for nonlinear systems: a comparison of performance. Technical report, International Journal of Control, 2001.
- [50] G. M. Lerner. Three-axis attitude determination. In James R. Wertz, editor, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, pages 420–428. D. Reidel, Dordrecht, Holanda, 1978.
- [51] M. A. Livingston and A. State. Magnetic tracker calibration for improved augmented reality registration. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 6(5):532–546, 1997. ISSN 1054-7460, E-ISSN 1531-3263, 2008 ISI Impact Factor: 0.750.
- [52] Oxford Metric Ltd. Vicon motion systems. <http://www.metrics.co.uk/>, 2009.
- [53] F. Landis Markley. Attitude determination using vector observations: a fast optimal matrix algorithm. *Journal of the Astronautical Sciences*, 41(2):261–280, abril-junio 1993.
- [54] F. Landis Markley and Daniele Mortari. Quaternion attitude estimation using vector observations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 48(2):359–380, junio 2001.
- [55] Peter S. Maybeck. *Stochastic Models, Estimation and Control*, volume 1, chapter Chapter 1: Introduction. Academic Press, 1979.
- [56] Robert B. McGhee, Xiaoping P. Bachmann, Eric R. Yun, and Michael J. Zyda. Real-time tracking and display of human limb segment motions using sourceless sensors and a quaternion-based filtering algorithm – part i: Theory. Technical Report, Naval Postgraduate School, noviembre 2000.
- [57] Kenneth Meyer, Hugh L. Applewhite, and Frank A. Biocca. A survey of position trackers. *Presence: Teleoper. Virtual Environ.*, 1(2):173–200, 1992.
- [58] William F. Milliken and Douglas L. Milliken. *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, Inc, 400 Commonwealth Drive Warrendale, PA 15096-001, 1995. ISBN: 1-56091-526-9.

- [59] T. Molet, A. Aubel, C. Tolga, S. Carion, E. Lee, N. Naagnenat-Thalman, H. Hoser, I. Pandzic, G. Sannier, and D. Thalman. Anyone for tennis. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 8(2):140–156, 1999. ISSN 1054-7460, E-ISSN 1531-3263, 2008 ISI Impact Factor: 0.750.
- [60] T. Morris and Donath M. Using a maximum error statistic to evaluate measurement errors in 3d position and orientation tracking systems. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 2(4):314–343, 1993. ISSN 1054-7460, E-ISSN 1531-3263.
- [61] Daniele Mortari. Esoq: A closed-form solution to the wahba problem. *The journal of the Astronautical Sciences*, 45(2):195–204, junio 1997.
- [62] Mark A. Nixon, Bruce C. McCallum, W. Richard Fright, and N. Brent Price. The effects of metals and interfering fields on electromagnetic trackers. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 7(2):204–218, 1998.
- [63] Aboelmagd Noureldin, Ahmed El-Shafie, and Mahmoud Reda Taha. Optimizing neuro-fuzzy modules for data fusion of vehicular navigation systems using temporal cross-validation. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 20(1):49–61, febrero 2007.
- [64] Magnus Nørgaard, Niels K. Poulsen, and Ole Ravn. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems. Technical report, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby, 2000. Revised edition, Oct 2004.
- [65] OSI Optoelectronics. Non-contact. optical position sensing using silicon photodetectors. <http://www.osioptoelectronics.com/application-notes/AN-13-Non-Contact-Optical-Position-Sensing.pdf>, 2009.
- [66] Hans B. Pacejka. *Tire Characteristics and Vehicle Dynamics*, volume 1. Technische Hogeschool, Delft, 1988.
- [67] Hans B. Pacejka. *Tyre and Vehicle Dynamics*, volume 1. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford, 2006. ISBN-13: 978-0-7506-6918-4.
- [68] A. Pascoal, I. Kaminer, and P. Oliveira. Navigation system design using time-varying complementary filters. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 36(4):1099–1114, Oct 2000.
- [69] Inc. Peak Performance Technologies. Peak motus motion measurement system. <http://www.peakperform.com/>, 2009.

- [70] Christopher W Peterson. An investigation of the effects of magnetic variations on inertial/magnetic orientation sensors. Master's thesis, Miami University / OhioLINK, 2003.
- [71] Nissanka Bodhi Priyantha. *The cricket indoor location system*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, junio 2005. Adviser-Balakrishnan, Hari.
- [72] F. Raab, E. Blood, O. Steiner, and H. Jones. Magnetic position and orientation tracking system. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, pages 709–717, 1979. AES-15, No. 5.
- [73] J. Richards. The measurement of human motion: A comparison of commercially available systems. *Proceedings of the Fifth International Symposium in 3D Analysis of Human Movement*, 18(5):589–602, 1998.
- [74] J. C. Sabel. Optical 3d motion measurement. In *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, volume 1, pages 367–370. IEEE, 1996.
- [75] SAE. *SAE Recommended Practice J670e, Vehicle Dynamics Terminology*. SAE, Inc., 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA 15096-, 1976.
- [76] T. Sakaguchi, T. Kanamori, H. Katayose, K. Sato, and S. Inokuchi. Human motion capture by integrating gyroscopes and accelerometers. In *International Conference on Multisensor fusion and Integration for Intelligent Systems*, pages 470–475. ACM, 1996.
- [77] H. Sakai. The dynamic properties of tires. *International Journal of Vehicle Design*, 1981.
- [78] S. Saripalli, J.M. Roberts, P.I. Corke, G. Buskey, and G.S. Sukhatme. A tale of two helicopters. In *Intelligent Robots and Systems, 2003. (IROS 2003). Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 805–810, octubre 2003.
- [79] M. D. Shuster. Approximate algorithms for fast optimal attitude computation. In N. A. Osborne, editor, *Guidance and Control Conference*, pages 88–95. American Institute of Aeronautics and Astronautics, marzo 1978.
- [80] P. Skopowski. Immersive articulation of the human upper body in a virtual environment. Master's thesis, Naval Postgraduate School, 1996.
- [81] H. W. Sorenson. Least-squares estimation: from gauss to kalman. *IEEE Spectrum*, 7:63–68, julio 1970.

- [82] I. Sutherland. A head-mounted three-dimensional display. In *AFIPS Conference Proceedings*, pages 757–764. Fall Joint Computer Conference, 1968.
- [83] T. S. Tenforde. *Spectrum and Intensity of Environmental Electromagnetic Fields from Natural and Man-Made Sources*, volume 250, chapter 2. American Chemical Society, mayo 1995.
- [84] Nicholas Michael Vallidis. *Whisper: a spread spectrum approach to occlusion in acoustic tracking*. PhD thesis, The University of North Carolina at Chapel Hill, 2002. Director-Bishop, Gary.
- [85] Rudolph Van Der Merwe and Eric Wan. Sigma-point kalman filters for integrated navigation, 2004.
- [86] Grace Wahba. A least squares estimate of spacecraft attitude. *SIAM Review*, 7(3):409, julio 1965.
- [87] J-H. Wang and Y. Gao. The aiding of mems ins/gps integration using artificial intelligence for land vehicle navigation. In *IMECS 2006: International MultiConference of Engineers and Computer Scientists (IMECS) Conference*, junio 2006.
- [88] G. Welch, G. Bishop, L. Vicci, S. Brumback, L. Keller, and D. Colucci. The hiball tracker: High-performance wide-area tracking for virtual and augmented environments. In *Proceedings of the ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology*, pages 1–11. University College London, 1999.
- [89] Greg Welch and Gary Bishop. An introduction to the kalman filter. SIGGRAPH, Course 8, 2001.
- [90] Greg Welch and Eric Foxlin. Motion tracking: No silver bullet, but a respectable arsenal. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 22(6):24–38, Nov 2002.
- [91] Gregory Francis Welch. *SCAAT: Incremental Tracking with Incomplete Information*. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC, octubre 1996.
- [92] Norbert Wiener. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. The MIT Press, 1964.
- [93] J.Y. Wong. *Theory of Ground Vehicles*. John Wiley and Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY, 1993. ISBN-10: 0-471-52496-4.

- [94] Parlamento Europeo y Consejo Europeo. Reglamento (CE) no 78/2009, relativo a la homologación de vehículos en lo que se refiere a la protección de los peatones y otros usuarios vulnerables de la vía pública. Diario Oficial de la Unión Europea, 2009.
- [95] Alper Yilmaz, Omar Javed, and Mubarak Shah. Object tracking: A survey. *ACM Comput. Surv.*, 38(4):13, 2006.
- [96] Xiaoping Yun, Eric B. Bachmann, and Robert B. McGhee. A simplified quaternion-based algorithm for orientation estimation from earth gravity and magnetic field measurements. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(3):638–650, marzo 2008.

Glosario

- 3G La IMT-2000 (del inglés *International Mobile Telecommunications-2000*), mejor conocida como 3G o 3^a Generación, es una familia de estándares para comunicaciones por telefonía móvil, 78
- ABS El ABS o SAB (del alemán *Antiblockiersystem*, sistema de antibloqueo) es un dispositivo utilizado en aviones y en automóviles para evitar que los neumáticos pierdan la adherencia con el suelo durante el proceso de frenado, 1, 7, 11, 19
- AEBS El Frenado Avanzado de Emergencia (*Advanced Emergency Braking System*) es un sistema de seguridad activa que complementa al ACC, y utiliza sensores basados en radar y visión artificial para detectar riesgo de colisión con los vehículos —u otros objetos— precedentes, y frenar automáticamente, 10, 11
- BAS El sistema de asistencia al frenado de emergencia (*Brake Assist System*) interpreta cuándo se produce una frenada de emergencia, y en tal caso, frena con la máxima potencia aunque el conductor no lo esté haciendo. Habitualmente, funciona combinado con el ABS, 10, 11

CCP	Del inglés <i>Capture/Compare/PWM</i> , el <i>CCP</i> es la parte del <i>hardware</i> de un microcontrolador que se encarga de las interrupciones y temporizaciones para generar y capturar señales digitales con información temporal, 85–88
CDF, CDKF	Del inglés <i>Central Difference Kalman Filter</i> , se trata de una variedad del filtro SPKF para sistemas no lineales [41], 132
CDM, CDMA	La multiplexación por división de código, acceso múltiple por división de código o CDMA (del inglés <i>Code Division Multiple Access</i>) es un término genérico para varios métodos de multiplexación o control de acceso al medio basados en la tecnología de espectro expandido, 50, 52, 79
CF	Del inglés <i>Complimentary Filter</i> , es un algoritmo para fusionar varias señales que contienen la medida de la misma señal, pero contaminadas con ruidos de diferente –aunque complementaria– naturaleza espectral; cada una de ellas se filtra (limpia) con los parámetros más adecuados a la naturaleza de su ruido, y se fusionan para obtener un resultado óptimo [5], 116–121
CMOS	Son estructuras semiconductor-óxido-metal complementarias (del inglés <i>Complementary Metal-Oxide-Semiconductor</i>), y constituyen una de las familias lógicas empleadas en la fabricación de circuitos integrados (chips). Su principal característica consiste en la utilización conjunta de transistores de tipo pMOS nMOS de tal forma que, en estado de reposo, el consumo de energía es únicamente el debido a las corrientes parásitas, 77
DDF, DDKF	Del inglés <i>Divided Difference Kalman Filter</i> , se trata de una variedad del filtro SPKF para sistemas no lineales [64], 132

- EKF El Filtro de Kalman Extendido (*Extended Kalman Filter*) es una herramienta matemática, derivada del Filtro de Kalman (KF), para la estimación estocástica del estado de un sistema no lineal, que aproxima la optimalidad de la *Regla de Bayes* mediante linealización de las ecuaciones que describen su comportamiento, 4, 51, 128–130, 133, 134, 142
- ESC El control de estabilidad electrónico *Electronic Stability Control* es un elemento de seguridad activa del automóvil que frena una de las cuatro ruedas en situaciones de riesgo para evitar sobrevirajes y subvirajes, 10, 11
- ESQ Del inglés *EStimator of the Optimal Quaternion*, es un algoritmo que se utiliza para obtener la cuaterna de orientación que resuelve el *Problema de Wahba* [61]. Ha sido mejorado en sucesivas versiones: *ESQ-1*, *ESQ-1.1*, *ESQ-2* y *ESQ-2.1*, 114
- ESR Resistencia serie equivalente de un condensador (del inglés *Equivalent Series Resistance*), 77
- Exactitud Proximidad del valor medido respecto al real. En términos estadísticos, la exactitud está relacionada con el sesgo de la estimación hecha a partir de varias mediciones. Cuanto menor es el sesgo más exacta es una estimación, 33
- FOAM Del inglés *Fast Optimal Attitude Matrix*, es un método para obtener la matriz de rotación que resuelve el *Problema de Wahba* [53], 113
- FQA Del inglés *Factored Quaternion Algorithm*, es un algoritmo para resolver, de forma secuencial y algebraica, el problema de Wahba partiendo de la lectura de un acelerómetro y un magnetómetro triaxiales. Permite aislar la contribución de cada sensor, y evita que posibles perturbaciones en el campo magnético local influyan en la estimación del cabeceo y el alabeo [96], 114

- GPS El Sistema de posicionamiento global (*Global Positioning System*) permite calcular la latitud, longitud y altitud —entre otros— a partir de las señales de radiofrecuencia que recibe de satélites específicos para esta tarea, 24, 31, 49, 50, 52, 53
- GRV Del inglés *Gaussian Random Variable*, o variable aleatoria gaussiana, 129, 130
- HSDPA La tecnología HSDPA (del inglés *High Speed Downlink Packet Access*) es la optimización de la tecnología espectral UMTS/WCDMA, incluida en las especificaciones de *3GPP release 5* y mejora significativamente la capacidad máxima de transferencia de información. Es la evolución de la tercera generación (3G) de tecnología móvil, llamada 3.5G, y se considera el paso previo antes de la cuarta generación (4G). Actualmente se está desarrollando la especificación 3.9G antes del lanzamiento de 4G, 79
- I²C Del inglés *Inter-Integrated Circuit* (Circuitos Inter-Integrados), el I²C es un bus de comunicaciones serie diseñado por *Philips* en 1992. Usa únicamente dos hilos (reloj y datos) para transmitir la información, y es muy utilizado en la industria, principalmente para comunicar microcontroladores y sus periféricos en sistemas integrados, 65, 66
- KF El Filtro de Kalman, formulado en 1960 por *Rudolph E. Kalman* [46] es una herramienta matemática para la estimación estocástica de señales contaminadas por ruidos que interactúan en el seno de un sistema, 4, 5, 89, 122, 123, 125–128, 133, 134, 136, 138, 139, 141–144, 171

LASER	Amplificación de luz mediante emisión inducida de radiación (<i>Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation</i>). Se trata de un dispositivo electrónico que, basado en la emisión inducida, amplifica un haz de luz monocromático y coherente, 41, 45, 60
LDW,LDWS	Un sistema de aviso de abandono de carril (<i>Lane Departure Warning System</i>) es un mecanismo diseñado para advertir al conductor cuando el vehículo comienza a abandonar su carril (salvo que se haya encendido el indicador intermitente de ese lado), en autopistas, autovías y avenidas multi-carril, 10, 11
LIDAR, LADAR	Del inglés <i>Laser Imaging Detection and Ranging</i> , es una tecnología que permite determinar la distancia a un objeto utilizando un haz láser pulsado. El principio se asemeja al de un RADAR, por lo que también se denomina LADAR (LAsEr raDAR), 45
LORAN	El sistema de navegación de largo alcance (<i>LOng RAnge Navigation</i>) es una ayuda electrónica a la navegación que utiliza el intervalo transcurrido entre la recepción de señales de radio transmitidas desde tres o más transmisores para determinar la posición del receptor, 31, 49
MARG	Acrónimo de <i>Magnetic, Angular Rate, and Gravity</i> , es un sensor híbrido compuesto por nueve sensores MEMS: tres acelerómetros ortonormales, tres magnetómetros ortonormales y tres <i>rate-gyros</i> ortonormales, y está destinado al seguimiento de la orientación y posición de objetos [5], 47, 117, 119
MEMS	Del inglés <i>Micro Electro-Mechanical Sensor</i> , es un sensor que utiliza un mecanismo con determinadas propiedades físicas para medir una magnitud. El sensor está construido de forma que el mecanismo y la electrónica que necesita para su funcionamiento se generan durante el proceso de fabricación del chip, de forma que el resultado es un sensor compacto y de muy pequeño tamaño, 47, 51, 71, 72, 117

NHTSA	La <i>National Highway Traffic Safety Administration</i> es una agencia dependiente del gobierno de los Estados Unidos de América, y forma parte del Departamento de Transporte. Su misión es “Salvar vidas, prevenir heridas y reducir los accidentes de vehículos”, 10
PIC	Los PIC son una familia de microcontroladores tipo RISC fabricados por <i>Microchip Technology Inc.</i> y derivados del PIC1650, originalmente desarrollado por la división de microelectrónica de General Instrument, 88, 91
Precisión	Dispersión del conjunto de valores obtenidos a partir de varias mediciones repetidas de una magnitud. Cuanto menor es la dispersión mayor es la precisión. Precisión y exactitud están relacionados, pero son diferentes. Un sistema de medida puede ser exacto pero poco preciso, o preciso pero inexacto, 34
Problema de Wahba	Planteado en 1965 por <i>Grace Wahba</i> [86], consiste en estimar la orientación de un objeto a partir de la observación de dos o más vectores conocidos, 4, 108, 110–114
PSK	La modulación por desplazamiento de fase o PSK (del inglés <i>Phase Shift Keying</i>) es una forma de modulación angular que consiste en hacer variar la fase de la portadora entre un número de valores discretos, 80
PWM	La Modulación por Ancho de Pulso (MAP, o PWM del inglés <i>Pulse-Width Modulation</i>) de una señal o fuente de energía es una técnica en la que se modifica el ciclo de trabajo de una señal periódica —típicamente cuadrada— para transmitir información o para controlar la cantidad de energía que se envía a una carga, 65, 85–88
q-Method	El “Método-q” es uno de los más utilizados para obtener la cuaterna que resuelve el <i>Problema de Wahba</i> . Fue propuesto en 1977 por Davenport [47], 112

QEST	Del inglés <i>Quaternion ESTimator</i> . Es un algoritmo para estimar la cuaterna que resuelve el <i>Problema de Wahba</i> mediante iteraciones de <i>Newton-Raphson</i> [79], 113
RADAR	Del inglés <i>RADio Detection And Ranging</i> , es un sistema que usa microondas o radiofrecuencia para medir distancias, altitudes, direcciones y velocidades de objetos estáticos o móviles, 31
Rate-gyro	Es un tipo especial de giróscopo que mide velocidad angular alrededor de un eje, 24, 47, 48, 51, 54, 109, 117, 118, 120, 136
Repetibilidad	Es la capacidad de un sistema de medida de devolver el mismo resultado para una condición concreta del sistema, independientemente de las condiciones en las que se ha alcanzado ese estado. Habitualmente relacionada con la histéresis y las holguras mecánicas, 34
Resolución	Es el mínimo cambio en una medida (por ejemplo la posición de un vehículo) que un sistema es capaz de detectar, 33
SCAAT	Del inglés <i>Single-Constraint-At-A-Time</i> , este algoritmo se basa en un filtro de Kalman para estimar el estado de un sistema globalmente observable utilizando solamente medidas de un sistema localmente no observable. Fue introducido en 1997 por Welch y Bishop [91], 51
SONAR	Del inglés <i>Sound Navigation And Ranging</i> , es una técnica que usa la propagación del sonido bajo el agua (principalmente) para navegar, comunicarse o detectar otros buques, 31
SPKF	Los SPKF (<i>Sigma-Point Kalman Filters</i>) son una familia de Filtros de Kalman para sistemas no lineales, que consiguen capturar la media y la covarianza posteriores con una precisión de tercer orden (en series de Taylor), y con la misma o menor complejidad que un EKF [85], 4, 129, 130, 132–134, 142

SUV	Todocamino o vehículo todoterreno ligero son términos que se han aplicado recientemente a los modelos de automóviles que combinan elementos de automóviles todoterreno y de automóviles de turismo (del inglés <i>Sport Utility Vehicle</i>), 10
SVD	Descomposición en valor singular (<i>Single Value Decomposition</i>) de una matriz. Se utiliza, entre otras cosas, para resolver el <i>Problema de Wahba</i> , 111
TRIAD	Algoritmo para encontrar la matriz de orientación que resuelve el <i>Problema de Wahba</i> [50], 112
UART	Son las siglas de <i>Universal Asynchronous Receiver-Transmitter</i> (Transmisor-Receptor Asíncrono Universal), que controla los puertos y dispositivos de comunicaciones serie estándar, 82, 83
UKF	Del inglés <i>Unscented Kalman Filter</i> , se trata de una variedad del filtro SPKF, para sistemas no lineales [43], 132
UMTS	Sistema Universal de Telecomunicaciones Móviles (del inglés <i>Universal Mobile Telecommunications System</i>) es una de las tecnologías usadas por los móviles de tercera generación (3G, también llamado W-CDMA), sucesora de GSM, 50, 78, 79
VOR	Radiofaro Omnidireccional de VHF (<i>VHF Omnidirectional Range</i>). Se trata de una radioayuda a la navegación para aeronaves, 31, 49