

UNIVERSIDADE DA CORUÑA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA E SISTEMAS  
PROGRAMA DE DOUTORAMENTO, TRANSPORTE MARÍTIMO:  
UNHA ACTIVIDADE INTERDISCIPLINAR

Tesis Doctoral

EL EQUILIBRADO DE LOS  
MOTORES DE COMBUSTIÓN  
INTERNA ALTERNATIVOS

presentada por

Antonio Paz Bernárdez

Profesor Numerario

*Departamento de Ciencias Materiais, Náuticas, Máquinas e  
Motores Térmicos*

para la obtención del grado de

DOCTOR EN MARINA CIVIL

Director de la Tesis: Prof. Dr. Ramón Ferreiro García

*La Coruña, Febrero de 1996*

**UNIVERSIDADE DA CORUÑA**

**DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA E SISTEMAS**

**PROGRAMA DE DOUTORAMENTO, TRANSPORTE MARÍTIMO:  
UNHA ACTIVIDADE INTERDISCIPLINAR**

**Tesis Doctoral**

**EL EQUILIBRADO DE LOS MOTORES DE  
COMBUSTIÓN INTERNA ALTERNATIVOS**

presentada por

**Antonio Paz Bernárdez**

**Profesor Numerario**

*Departamento de Ciencia de Materiais, Náuticas, Máquinas e Motores Térmicos*

para la obtención del grado de

**DOCTOR EN MARINA CIVIL**

Director de la Tesis: Prof.Dr. Ramón Ferreiro García

*La Coruña, febrero de 1996*

COMPOSICION DEL TRIBUNAL PARA JUZGAR LA TESIS DOCTORAL

EL EQUILIBRADO DE LOS MOTORES DE  
COMBUSTION INTERNA ALTERNATIVOS

- PRESIDENTE: D. Jesús Andrés Toribio Quevedo  
Catedrático de Ciencia de Materiais e Enxeñería  
Metalúrxica.  
Director del departamento de Ciencia de Materiais,  
Náuticas, Máquinas e Motores Térmicos.  
Universidade da Coruña.
- SECRETARIO: D. Julio Terrón Pernia  
Profesor Titular de Ingeniería de Sistemas y  
Automática.  
Departamento de Ingeniería de Sistema y Automática  
Electrónica, Ingeniería Electrónica.  
Universidad de Cádiz.
- VOCAL 1: D. Joseba Quevedo Casin  
Catedrático de Ingeniería de Sistemas y Automática  
Departamento de Ingeniería de Sistemas, Automática  
Informática Industrial.  
Universidad Politécnica de Cataluña.
- VOCAL 2: D. Eulogio Jiménez Cuesta  
Catedrático de Física Aplicada  
Director del Departamento de Física  
Universidade da Coruña.
- ↙ VOCAL 3: D. Victor S. Kharin  
Profesor Visitante de Ciencia de Materiais e  
Enxeñería Metalúrxica  
Departamento de Ciencia de Materiais, Náuticas,  
Máquinas e Motores Térmicos  
Universidade da Coruña.

COMPOSICION DEL TRIBUNAL PARA JUZGAR LA TESIS DOCTORAL

EL EQUILIBRADO DE LOS MOTORES DE  
COMBUSTION INTERNA ALTERNATIVOS

PRESIDENTE:

SECRETARIO:

VOCAL:

VOCAL:

VOCAL:

## AGRADECIMIENTO

El trabajo expuesto en esta tesis ha sido desarrollado en el marco de la conducción y el mantenimiento de los motores de combustión interna. Por ello, deseo expresar mi mas profundo agradecimiento a todas las personas que han colaborado conmigo en su realización, y en particular

Al Dr. Ramón Ferreiro García, Profesor Titular en la Universidade da Coruña, que ha dirigido esta tesis con admirable dedicación. Así, durante el curso de su preparación me ha proporcionado las directrices mas adecuadas, prestándome en todo momento su inestimable apoyo y colaboración,

Al Dr. José Pérez del Rio, por la ayuda técnica y referencia bibliográfica que me ha prestado,

A New Sulzer Diesel y

A MAN Burmeister & Wain

por la información técnica actualizada que me han proporcionado

## RESUMEN DE LA TESIS DOCTORAL:

### EL EQUILIBRADO DE LOS MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA ALTERNATIVOS

realizada por: Antonio Paz Bernárdez  
y dirigida por el profesor titular: Dr. Ramón Ferreiro García

Las fuerzas de inercia no equilibradas, los momentos de las fuerzas de inercia no equilibrados y la irregularidad del par motor y del par escorante producen en los órganos que constituyen el motor, vibraciones, o sea, movimientos periódicos de vaiven, generalmente de pequeña amplitud, en consecuencia a las cuales pueden aparecer grandes fatigas de materiales y fenómenos tan graves como son las grietas y las roturas, constituyen el objetivo fundamental de esta tesis, por causa de las mayores exigencias en la economía de la industria a la técnica de estas máquinas, tanto en el rendimiento, la potencia y la relación peso potencia, como en la ubicación.

El tema propuesto, equilibrado de motores alternativos, cumpliendo las exigencias de utilización en todo campo de aplicación de potencias y velocidades es un problema complejo, en especial, por causa de las velocidades críticas propias o inducidas cuyo tratamiento se sustenta en el establecimiento de mecanismos de control capaces de resolver el problema de las vibraciones, aniquilándolas o reduciéndolas a valores admisibles

Entonces, como en el trabajo se demostrará, el motor en función constituye un sistema vibratorio complejo, y como tal, posee fuerzas de excitación que tienden a producir y mantener las vibraciones, masas vibrantes y fuerzas de amortiguación que tienden a reducir y, aún, a anular las vibraciones. De lo que se deduce la necesidad de búsqueda de nuevas soluciones que, confrontadas con otros estudios y experiencias, contribuyan a reducir el número de mecanismos en la utilización mas favorable del motor.

La contribución realizada en la segunda parte de la tesis se centra en el diseño y la instalación de dispositivos de

control conducentes a la optimación del funcionamiento ordenado del motor, contrarrestando aquellos efectos dinámicos. No obstante, antes de este análisis de resultados, se consideró, mejor partir de unas bases fundamentales sobre la dinámica y la resistencia de materiales que, aparte de contener unas definiciones y estructura matemática que facilitan la visión del conjunto, son necesarios para la mejor comprensión del mismo

Así, en el Capítulo 1 se hace un estudio detallado de las causas que producen o pueden producir vibraciones.

En el Capítulo 2 se clasifican las fuerzas de inercia que producen las masas en movimiento.

En el Capítulo 3 se estudian las vibraciones de flexión y de torsión a que se hallan sometidos los ejes de cigüeñales por causa de las fuerzas de inercia y de la fuerza de los gases aplicando aquellas teorías y cálculo de la resistencia de materiales, obteniendo las ecuaciones que resulten de mayor utilidad práctica.

En el Capítulo 4 se hace un estudio del equilibrado de los motores y las formas de construcción de los mecanismos capaces de verificar el equilibrado.

En el Capítulo 5 se presenta un análisis de resultados de los estudios e investigaciones llevados a cabo por el autor sobre dos motores de características diferentes, para

En el Capítulo 6 exponer las conclusiones mas importantes obtenidas en la tesis y, por último, cerrando la misma con la nomenclatura básica y la referencia bibliográfica.

**EL EQUILIBRADO DE LOS MOTORES DE  
COMBUSTION INTERNA ALTERNATIVOS**

I N D I C E

CAPITULO 1.- INTRODUCCIÓN AL EQUILIBRADO DE LOS MOTORES

1.1.- Introducción .....	1
1.2.- La fuerza del agente evolutivo .....	2
1.3.- Las fuerzas de inercia .....	6
1.4.- Las fuerzas resultantes .....	33

CAPITULO 2.- CLASIFICACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA

2.1.- Introducción .....	40
2.2.- Clasificación de las fuerzas de inercia.....	40

CAPITULO 3.- LAS VIBRACIONES DE LOS EJES DE CIGÜEÑALES

3.1.- Vibraciones de flexión.....	45
3.1A.- La influencia de la forma y del número de apoyos del eje .....	46
3.1B.- La forma y el número de vibraciones propio ....	47
3.Ba.- El eje equivalente .....	47
3.Bb.- Las masas equivalentes .....	48
3.a1.- El eje uniforme .....	48
3.b1.- Las masas equivalentes .....	64
3.B1.- La disposición de las masas en el cigüeñal ....	68

3.B2.- Las fuerzas excitatrices .....	80
3.B3.- El número de revoluciones crítico de los ejes .	83
B3.1.- Las masas excitatrices .....	83
B3.2.- Las masas con efecto giroscópico .....	85
3.2.- Vibraciones de torsión .....	91
3.2A.- El sistema vibratorio .....	92
3.2B.- El sistema equivalente .....	93
B.b1.- Las masas de sustitución .....	93
B.b2.- Las longitudes equivalentes .....	100
b2.1.- El eje uniforme .....	100
b2.2.- Forma y núm. de vibraciones propio del sistema	108
b2.3.- Procedimiento para determinar la forma de las vibraciones de torsión .....	109
3B.B.- El motor de varios cilindros .....	116
B2.4.- Las fuerzas tangenciales excitatrices .....	122
B4.a.- Los armónicos excitatrices .....	123
B4.b.- Representación de los armónicos .....	123
B4.c.- Armónicos de las fuerzas tangenciales de gases	126
B4.d.- Armónicos de fuerzas tangenciales de inercia .	128
B4.e.- Armónicos de fuerzas tangenciales resultantes	130
B2.5.- Las deformaciones en la resonancia .....	132
B5.a.- La acción de las fuerzas tangenciales .....	132
B5.b.- El número de revoluciones crítico .....	134
B5.c.- El trabajo de la vibración y la amortiguación	147
B5.B.- Las fuerzas de inercia en los motores e varios cilindros .....	153

## VIICAPITULO 4.- EL EQUILIBRADO DE LOS MOTORES

4.A .- Introducción .....	175
4.1 .- Formas de construcción de los amortiguadores dinámicos .....	193

## CAPITULO 5.- ANALISIS DE RESULTADOS

5.1 .- De las fuerzas de inercia .....	198
5.2 .- De las vibraciones de torsión .....	206

## CAPITULO 6.- CONCLUSIONES

### La presente tesis doctoral

Explica .....	243
Expone .....	244
Propone .....	245
Nomenclatura básica .....	248
Referencia bibliográfica .....	251

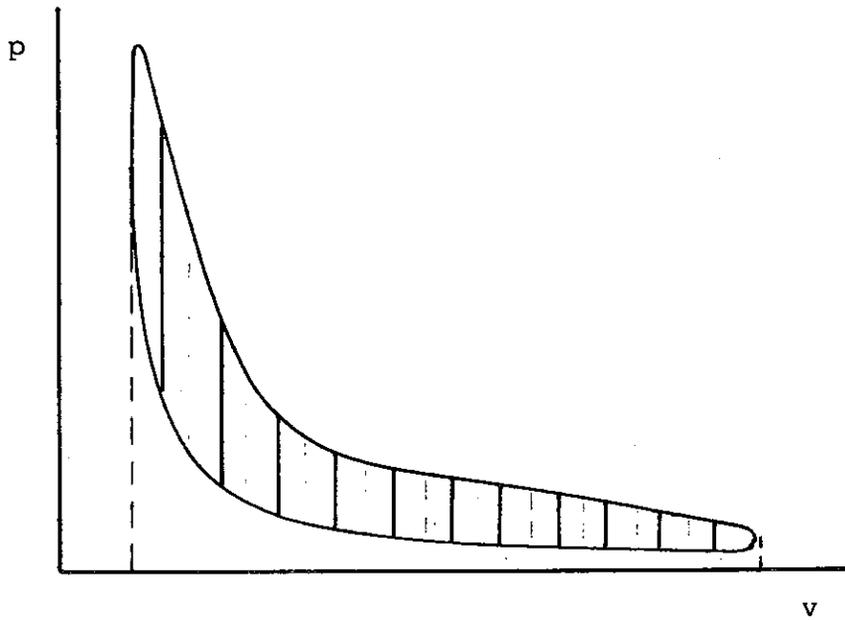
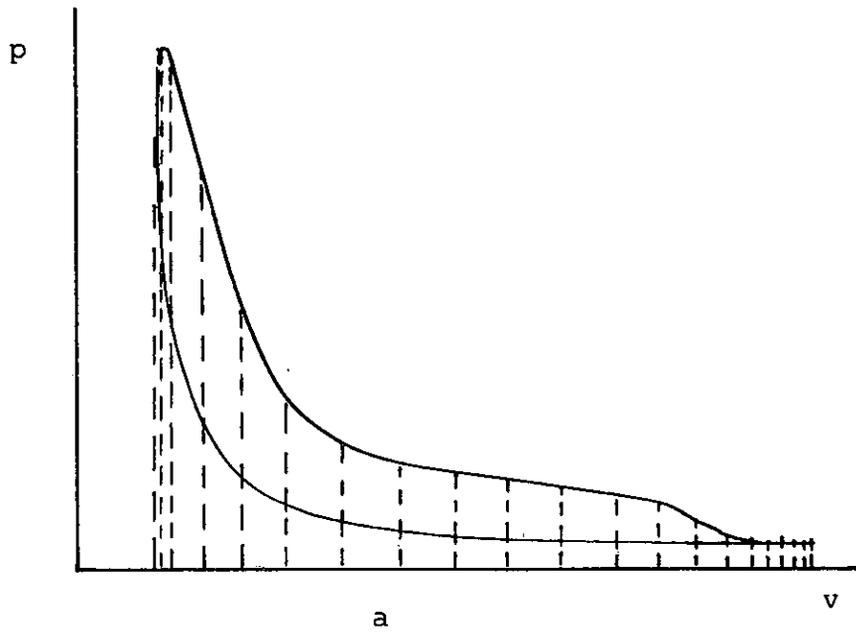
## CAPITULO 1.- INTRODUCCION AL EQUILIBRADO DE MOTORES

### 1.1.- Introducción

Se dice que un motor de combustión interna alternativo está equilibrado, cuando la resultante de todas las fuerzas que sobre él actúan es igual a su peso, si se exceptúa el par escorante. En consecuencia, el motor en movimiento se comporta, respecto a su apoyo o fundación, como un cuerpo muerto y no produce sobre él variaciones de carga ni tampoco movimientos.

En general, de por sí, los motores alternativos no están equilibrados, y la causa de ello reside, como se verá mas adelante, exclusivamente en las fuerzas de inercia. En efecto, descontada la fuerza de gravedad por la misma definición de motor equilibrado, quedan únicamente como posibles causas de desequilibrio la fuerza del agente evolutivo y la fuerza de inercia: la primera por el propio objeto del motor, y la segunda porque la velocidad de sus piezas en movimiento no es constante o, si se quiere, su movimiento no es uniforme.

Estas dos fuerzas actúan simultáneamente sobre el motor, y así se establece a todos los efectos en el estudio de la mecánica de estas máquinas. No obstante, por todo lo propuesto en el punto anterior y el objeto de la tesis, se hace el estudio por separado de cada una de ellas.



$$x = R (1 - \cos \alpha) \pm L [1 - \sqrt{1 - (Y \cdot \sin \alpha)^2}] \quad v = \frac{x}{e_v}; \quad p_i = \frac{y}{e_p}$$

Fg. 1

## 1.2.- La fuerza del agente evolutivo.

Los motores de combustión interna alternativos son máquinas térmicas capaces de transformar en trabajo mecánico una parte del calor, producido en su interior, por reacción química, exotérmica, de la sustancia combustible con la sustancia comburente aportado a un fluido. Este calor que se aporta produce variación en los valores determinantes presión, volumen y temperatura del evolucionante fluido; entonces, como el agente evolutivo sufre expansión y realiza desplazamiento del émbolo; o, si se quiere, aquella fuerza ejercida por el fluido sobre el émbolo es capaz de producir movimiento, resulta que la fuerza instantánea del agente evolutivo sobre el émbolo vale:

$$F_a = S_e \cdot p_i \quad (1)$$

siendo  $S_e$  el área del émbolo y  $p_i$  la presión instantánea del fluido, la cual se mide en el ciclo real o diagrama de indicador representado en la Fg. 1, en el que, como se sabe, todos sus puntos tienen la propiedad de que su ordenada es proporcional a la presión que reina en el cilindro, y que su abscisa es proporcional al volumen que tiene el fluido en el mismo instante en que se registra la presión, siendo cada proporcionalidad constante, de forma que si se divide la ordenada por la presión, se obtiene la escala de presiones y viene establecida por la tara de un resorte instalado a tal fin en el aparato indicador; si se divide la abscisa, que viene a ser el desplazamiento del cuadro registrador del indicador, por el volumen se obtiene la escala de volúmenes. El desplazamiento del cuadro registrador es proporcional al desplazamiento del émbolo, siéndole de aplicación la misma ley de movimiento, que como mas adelante se demostrará para el recorrido del émbolo,

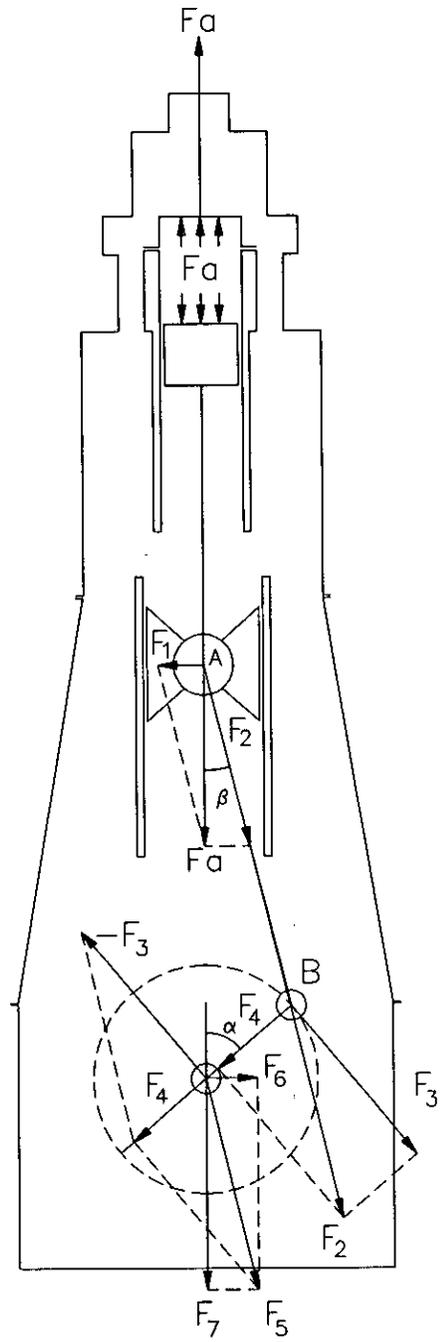


Fig. 2

viene dado por la fórmula

$$C=R(1-\cos\alpha)\pm L(1-\sqrt{1-Y^2\sin^2\alpha})$$

Por tanto, la presión instantánea se obtiene directamente al dividir la ordenada de cada punto por la escala de presiones

En la Fg. 2 se observa que el esfuerzo  $F_a$  se ejerce también sobre la culata hacia arriba. Pero el esfuerzo sobre el émbolo es objeto de estudio especial, por descomposición de fuerzas, de manera que la fuerza  $F_a$  orientada sobre el eje geométrico del cilindro se descompone en dos: la  $F_1$  en dirección perpendicular a  $F_a$ , y la  $F_2$  en la dirección de la biela; de esta descomposición resulta que

$$F_1 = F_a \cdot \text{tang } \beta \quad (2)$$

y que

$$F_2 = \frac{F_a}{\cos \beta} \quad (3)$$

La fuerza  $F_2$ , después de trasladada al extremo B del cigüeñal, se descompone en dos: la  $F_4$  en la dirección del brazo de cigüeñal, y la  $F_3$  perpendicular a él, produciendo el par motor.

Se observa que las fuerzas  $F_2$  y  $F_4$  forman el ángulo exterior del triángulo O A B y que, por tanto, vale la suma de los interiores no adyacentes, o sea  $\alpha+\beta$ , siendo así que

$$F_4 = F_2 \cdot \cos (\alpha+\beta)$$

y en virtud de la igualdad (3)

$$F_4 = F_a \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta} \quad (4)$$

De acuerdo con la Fg. 2 y de los valores de los ángulos ángulos allí indicados, es también

$$F_3 = F_2 \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

y en virtud de la igualdad (3)

$$F_3 = F_a \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \beta} \quad (5)$$

La fuerza F4 después de trasladarla al eje O del cigüeñal, se descompone en dos: la -F3 igual y contraria a la F3, y la F5 que resulta ser paralela a la dirección de la biela; de esta descomposición se tiene que

$$-F_3 = F_4 \cdot \text{tang}(\alpha+\beta) \quad (6)$$

y que

$$F_5 = \frac{F_4}{\cos(\alpha+\beta)}$$

y en virtud de la igualdad (4)

$$F_5 = F_a \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \beta \cdot \cos(\alpha+\beta)}$$

y finalmente

$$F_5 = \frac{F_a}{\cos \beta} \quad (7)$$

La fuerza  $F_5$  se descompone en dos: la  $F_7$  en la dirección del eje del cilindro, y la  $F_6$  normal a él, resultando de esta descomposición que

$$F_6 = F_5 \cdot \text{sen } \beta$$

y en virtud de la igualdad (7)

$$F_6 = F_a \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}$$

$$F_6 = F_a \cdot \text{tang } \beta \quad (8)$$

y que

$$F_7 = F_5 \cdot \cos \beta$$

y en virtud de la igualdad (7)

$$F_7 = F_a \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta}$$

y que

$$F_7 = F_a \quad (9)$$

Pero la fuerza del agente evolutivo  $F_7$  actúa sobre la bancada, con la misma intensidad y en sentido opuesto, sobre la culata y, en consecuencia, no produce resultante ni perturbación alguna.

A la fuerza  $F_1$  obtenida en la ecuación (2), se la denomina fuerza escorante, y no está equilibrada, tiene el mismo valor que la  $F_6$  dada en la ecuación (8), y por ser de sentido contrario a aquella forman un par que recibe la denominación de par escorante.

Este par, de intensidad variable, tiende a hacer girar el motor en el plano vertical transversal y produce vibraciones de rotación en el referido plano, de frecuencia doble de la velocidad angular del motor medida en revoluciones por segundo, en cada cilindro.

### 1.3.- Las fuerzas de inercia

La dinámica es aquella parte de la mecánica que estudia simultáneamente los movimientos y sus causas, las fuerzas; pero también, las fuerzas son las únicas causas capaces de producir aceleraciones. La dinámica se fundamenta en un principio de Galileo y en dos leyes o principios de Newton.

El principio de Galileo conocido por principio de la independencia dice: La aceleración producida por una fuerza sobre un cuerpo es independiente del estado de reposo o de movimiento del cuerpo y de la acción simultánea de otras fuerzas.

El primer principio de Newton o principio de inercia se puede enunciar diciendo: Si la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre un punto material es nula, el punto material, abandonado a su propia inercia, se encuentra indefinidamente en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme; siendo así, en ambos casos no existe aceleración ni fuerza efectiva. Pero, si se admite que las fuerzas son las únicas causas capaces de producir aceleraciones, también hay que admitir que si la resultante es nula, la aceleración lo ha

de ser igualmente, y solo puede tratarse de un reposo o de un movimiento rectilíneo uniforme.

El segundo principio de Newton o principio de la proporcionalidad puede enunciarse diciendo:

Las aceleraciones sufridas por un punto material son proporcionales a las fuerzas que las produjeron.

Entonces, si a un cuerpo C se le aplica una fuerza f, se producirá una aceleración "a"; pero si al referido cuerpo se le aplican sucesivamente fuerzas únicas, se producirán sucesivamente aceleraciones, y en virtud del principio de la proporcionalidad, resulta que:

$$\frac{f}{a} = \text{constante}$$

Este cociente es la medida de la inercia y recibe el nombre de masa inerte o simplemente de masa del cuerpo, por tanto:

$$\frac{f}{a} = m$$

de donde

$$f = m \cdot a$$

Que es la fórmula fundamental de la dinámica y dice: La fuerza aplicada a un cuerpo libre es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración producida.

Por tanto, la fórmula fundamental de la dinámica se ha de aplicar, sin tener, ni poder tener en cuenta el

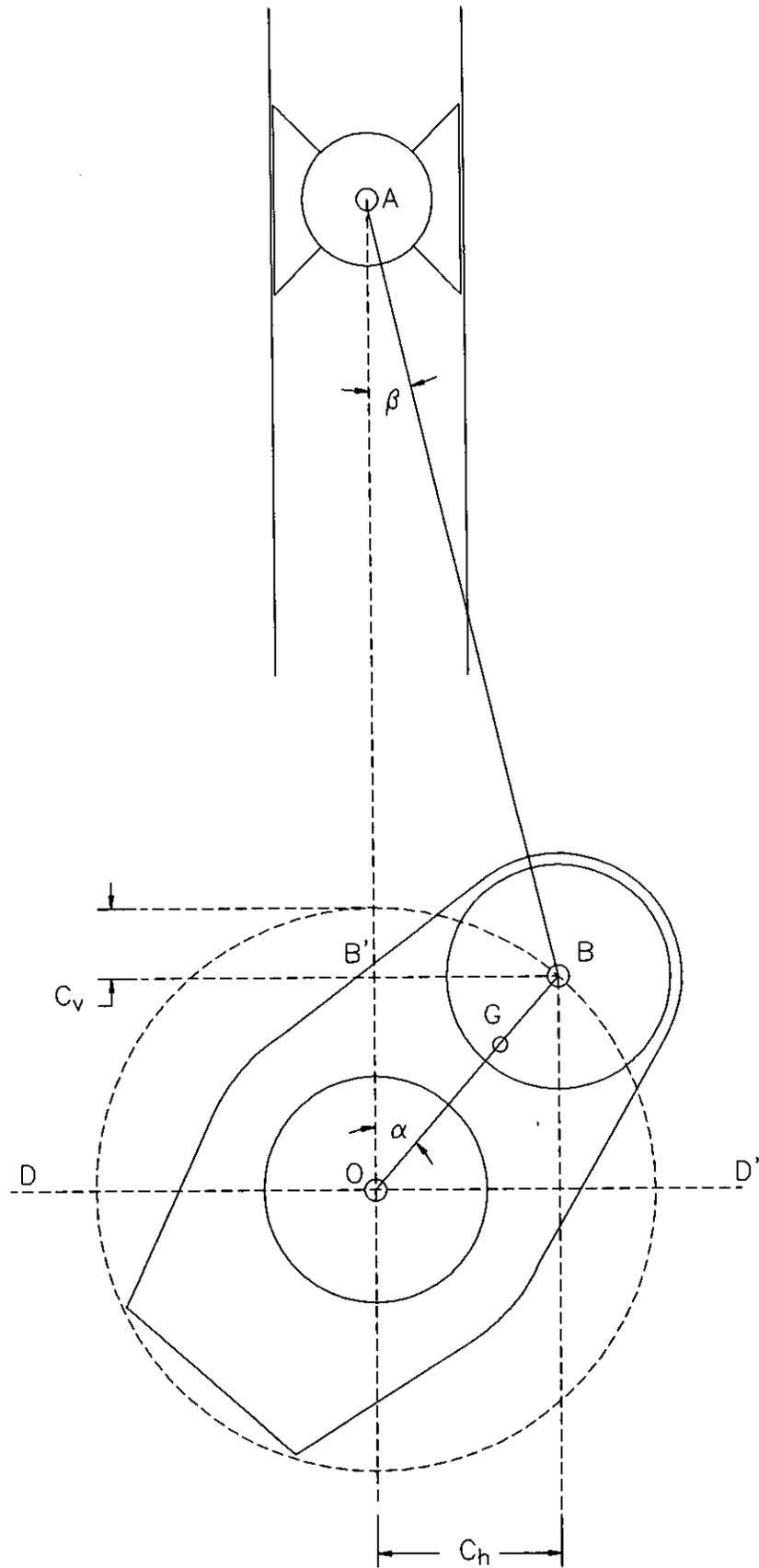


Fig. 3

movimiento del cuerpo y la acción de las demás fuerzas.

De lo expuesto se infiere que: Las fuerzas de inercia no tienen oponente y dan lugar a cargas y movimientos que trascienden mas allá de la bancada hasta límites indefinidos y que valen el producto de las masas en movimiento por su aceleración instantánea

$$F_i = (\sum m) \cdot a_i$$

Para bien comprender en que forma actúan las fuerzas de inercia, es preciso realizar un estudio cinemático y dinámico del motor, a fin de hacer una clasificación de las mismas, en que dirección y plano accionan y a cuanto alcanza su intensidad.

En el estudio de la mecánica de estos motores se admite que los ejes de cigüeñal giran con velocidad angular uniforme, el cual es suficientemente próximo al movimiento real para que así pueda hacerse en todo campo de aplicación.

Este movimiento, referido al extremo del cigüeñal que enlaza con la biela, se estudia en la forma particular de un movimiento circular uniforme de radio R, que, por razones de claridad, en cuanto va a seguir, se descompone en dos movimientos: uno en la dirección del eje geométrico del cilindro, y el otro perpendicular a él, es decir, que se considera, no el movimiento propiamente dicho, sino una proyección ortogonal de él sobre el referido eje geométrico del cilindro AA' Fg. 3 y otra proyección sobre la recta DD' perpendicular a la anterior en su punto de intercepción con el eje del motor, o sea, el punto de unión con el cigüeñal.

De la figura se desprende directamente que la carrera

vertical  $C_v$  correspondiente al ángulo descrito " $\alpha$ " vale

$$C_v = R - y$$

y siendo

$$y = R \cdot \cos \alpha$$

resulta que

$$C_v = R \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (10)$$

Derivando esta igualdad respecto al tiempo se obtiene la velocidad instantánea vertical

$$V_v = R \cdot \omega \cdot \sin \alpha \quad (11)$$

siendo  $\omega$  la velocidad angular del eje de cigüeñales.

Derivando otra vez respecto del tiempo, se obtiene ahora la aceleración instantánea vertical

$$a_v = R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha \quad (12)$$

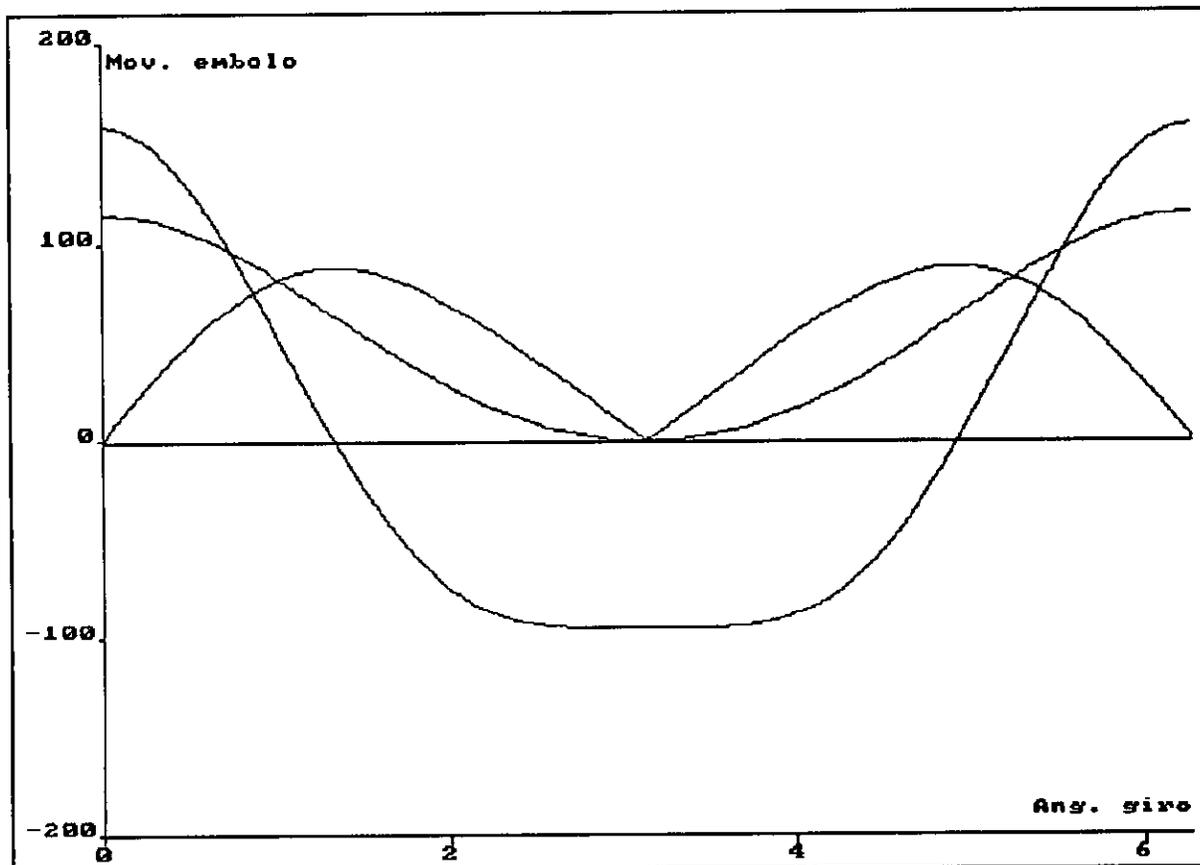
Partiendo nuevamente de la figura, se halla que la carrera horizontal  $C_h$  correspondiente al descrito ángulo " $\alpha$ " viene dada por

$$C_h = R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha \quad (13)$$

Derivando esta igualdad respecto al tiempo se obtiene la velocidad instantánea horizontal

$$V_h = R \cdot \omega \cdot \cos \alpha \quad (14)$$

Y derivando otra vez respecto al tiempo se obtiene la



CINEMATICA DE UN MOTOR LENTO  
 Carrera del émbolo: 1150 mm.  
 Velocidad angular: 14.87 rd/s

Fig. 4

aceleración instantánea horizontal

$$a_h = R \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \alpha \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que

$$-\text{sen } \alpha = \text{cos } (90 - \alpha)$$

la ecuación (15) puede transformarse en

$$a_h = R \cdot \omega^2 \cdot \text{cos } (90 + \alpha) \quad (15')$$

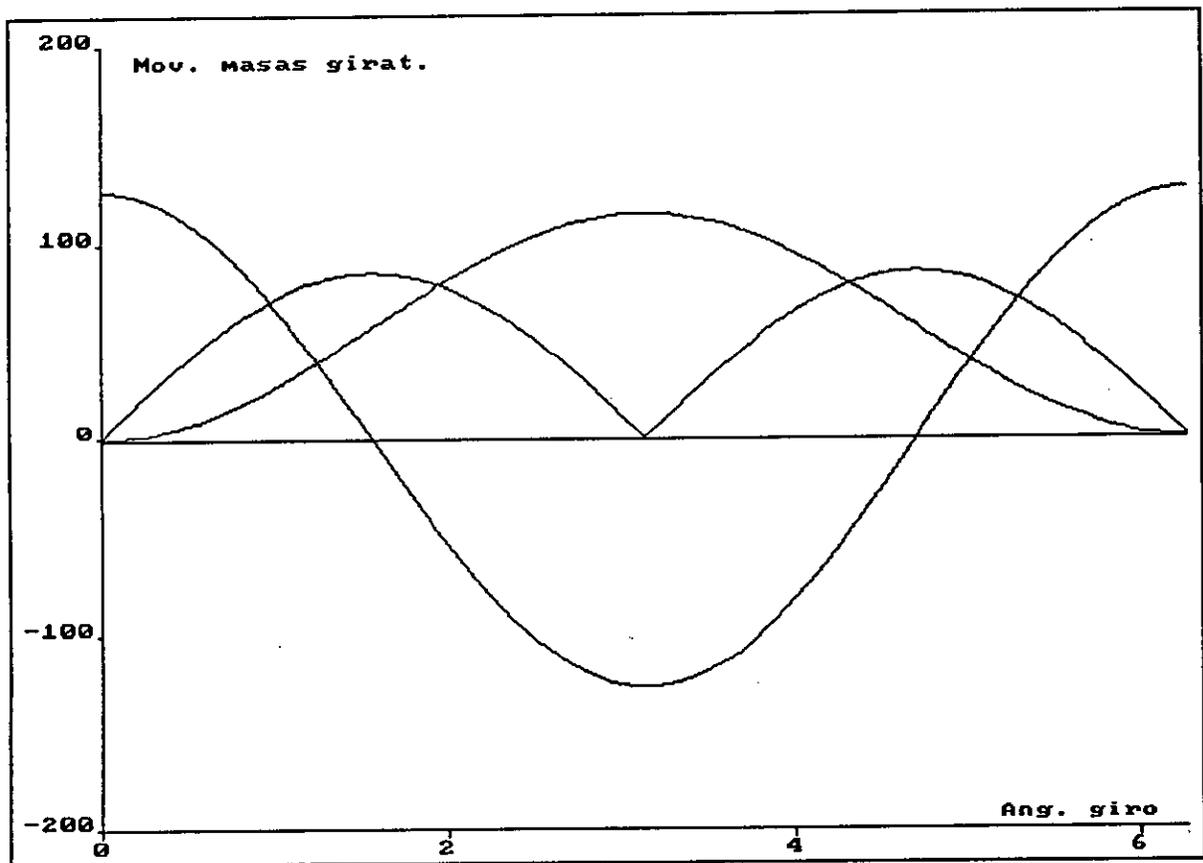
Pero, en las aplicaciones, aun es mas corriente prescindir del signo y transformarla en

$$a_h = R \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \alpha \quad (15'')$$

Estas aceleraciones instantáneas, como mas adelante se verá, determinan la dirección e intensidad de las fuerzas de inercia cuando las masas giratorias no están equilibradas.

Teniendo en cuenta que R es constante y  $\omega$  variable, pero que se toma siempre en su máximo valor, los caminos, velocidades y aceleraciones son función de la variable  $\theta$  o, mejor, de su cos. y de su sen.. Los caminos, velocidades y aceleraciones instantáneas, según las fórmulas (10), (11) y (12) para la carrera vertical, aplicadas a un motor de 1150 mm. de carrera del émbolo y velocidad angular de 14,87 rad/seg. (142 r.p.m) se representan en la Fg. 4, para la carrera horizontal, de fórmulas (13), (14) y (15'') en la Fg. 5.

Los órganos dotados de movimiento alternativo, como los émbolos, vástagos, crucetas y patines, sometidos a movimiento rectilíneo alternativo, poseen un movimiento vibratorio armónico simple modificado por la oblicuidad de biela.



CINEMATICA DE UN MOTOR LENTO  
 Carrera del émbolo: 1150 mm.  
 Velocidad angular: 14.87 rd/s

Fig. 5

El estudio de este movimiento se realiza partiendo de la cinemática del sistema biela-cigüeñal. Para lo cual, Fg. 6, sea O el eje del cigüeñal y A la cruceta, o punto de articulación de la biela con el vástago o con el émbolo, L la longitud de la biela y R, como se dijo, la del radio del cigüeñal.

Partiendo de una posición extrema del émbolo, que puede ser el punto muerto alto, o sea, cuando la biela y el cigüeñal se hallan una en la prolongación del otro; o el punto muerto bajo, cuando el cigüeñal está contenido en la biela. En el primer caso, el émbolo se encuentra a la mayor distancia posible del eje y en el segundo, a la menor.

Resultando de ello, que el paso del uno al otro, es la carrera del émbolo, e igual a dos veces la longitud R del radio del cigüeñal. Y esta especificación es, como se puede observar, independiente de la posición vertical, horizontal, inclinada y aún invertida del motor.

En consecuencia, cuando el émbolo se encuentra en el punto muerto alto, la distancia entre la cruceta A y el eje O vale

$$O A = L + R$$

y cuando el émbolo se encuentra en el punto muerto bajo, vale

$$O A = L - R$$

resultando que la diferencia o carrera del émbolo será:

$$L + R - (L - R) = 2R$$

Considerando ahora, Fg. 7, uno de estos sistemas en el que el eje de cigüeñal ha girado un ángulo  $\theta$  a partir del punto muerto alto; la cruceta A, deslizándose sobre el eje OA, se ha

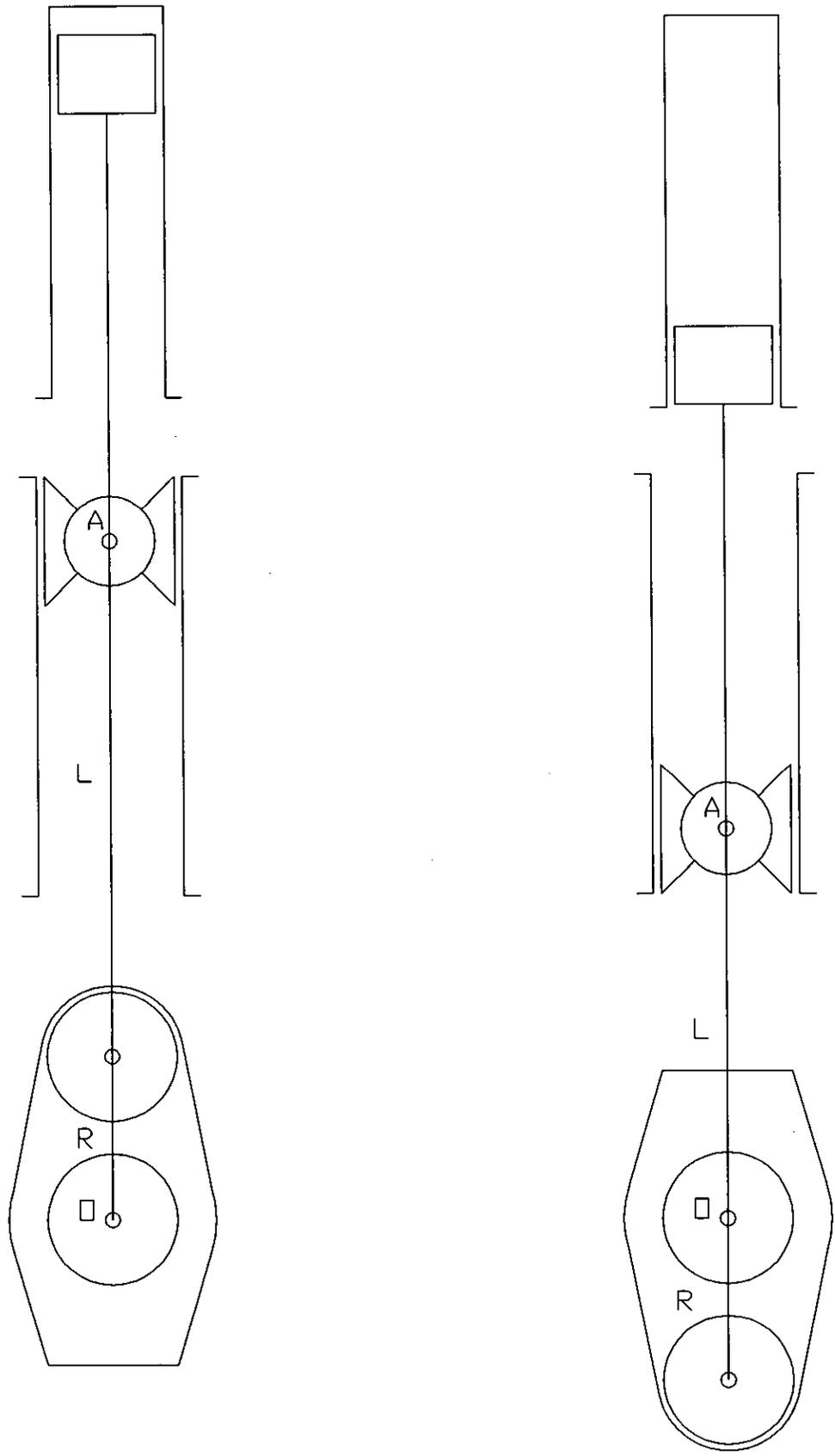


Fig. 6

acercado al eje O por las dos siguientes razones: 1ª, porque el muñón B del cigüeñal ha descendido; 2ª, porque la biela ha pasado a formar con el eje O A un ángulo  $\beta$ , es decir, a ponerse oblicua y, por lo tanto, comportándose como si fuera mas corta y tuviera solo la longitud A B'; a esta segunda razón se la llama efecto de oblicuidad de la biela.

Para el cálculo del recorrido C del émbolo, que es igualal de la cruceta A, se empieza por contar los ángulos "Ó" y " $\beta$ " a partir del eje O A, siempre en el sentido que se indica en la figura, y teniendo en cuenta que

$$AA' = OA - OA'$$

que

$$OA' = OB' + B'A'$$

y que

$$OB' = R \cdot \cos \alpha$$

y

$$B'A' = L \cos \beta$$

resulta que

$$AA' = L + R - L \cdot \cos \beta - R \cdot \cos \alpha$$

o sea

$$C = R \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot (1 - \cos \beta) \quad (16)$$

De la igualdad anterior se desprende que el movimiento

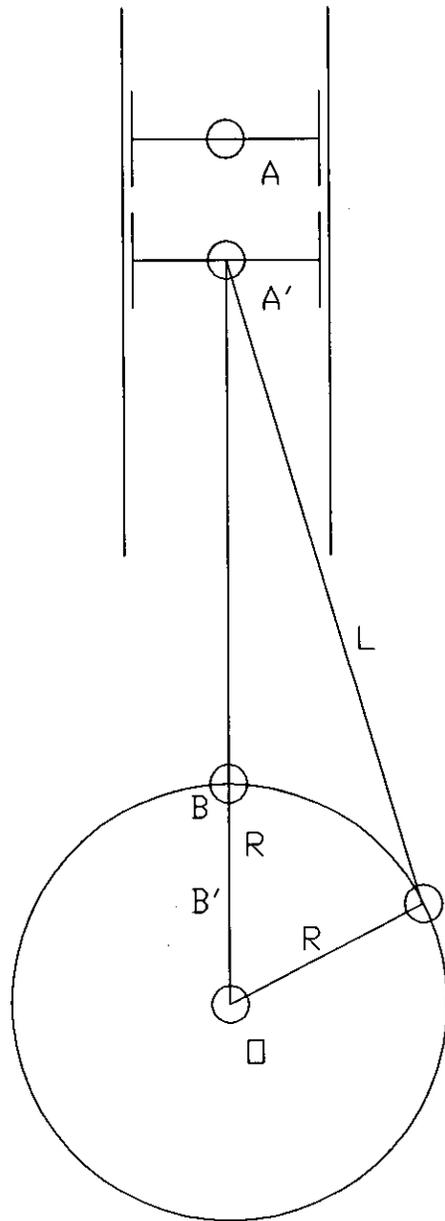


Fig. 7

del émbolo se compone de un movimiento vibratorio armónico simple de fórmula  $R \cdot (1 - \cos \alpha)$  y de un efecto de oblicuidad de biela que vale  $L(1 - \cos \beta)$ .

Conviene en el estudio que se está realizando eliminar  $\beta$  de la fórmula (16), para lo cual, aplicando la fórmula del seno al triángulo OA'B resulta que

$$\frac{L}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta}$$

de donde

$$\sin \beta = \frac{R \cdot \sin \alpha}{L} \quad (17)$$

y que de

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

se deduce que

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

y sustituyendo según la (17), resulta

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2 \alpha}$$

Llevando este valor a la ecuación (16), se tiene la

$$C = R(1 - \cos \alpha) + L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2 \alpha}\right) \quad (18)$$

Pero, siendo R y L constantes, la relación entre ellas lo será

igualmente, y si esta relación es Y, también:

$$C=R(1-\cos\alpha)+L(1-\sqrt{1-Y^2\sin^2\alpha}) \quad (18')$$

que permite calcular la carrera en función de los datos ordinarios L, R y Ó; pero que, también, mas corrientemente, suele ponerse en la forma

$$C=R(1-\cos\alpha)+L-\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha} \quad (19)$$

Si se admite, como antes se dijo, que el cigüeñal gira con movimiento circular uniforme, la velocidad angular w, en el tiempo t describirá un ángulo Ó, de forma que:

$$\alpha=w.t$$

valor que sustituido en la ecuación (19) da:

$$C=R(1-\cos wt)+L-\sqrt{L^2-R^2\sin^2 wt} \quad (19')$$

Pero, si esta igualdad da el camino recorrido en función exclusiva del tiempo t y de los parámetros R, L y w; luego, la derivada de esta función con relación al tiempo, dará la velocidad instantánea.

Se tendrá, entoces:

$$v=\frac{dC}{dt}$$

y, por tanto

$$V=R.\sin\alpha.\frac{d\alpha}{dt}+\frac{R^2.2\sin\alpha.\cos\alpha}{2\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha}}.\frac{d\alpha}{dt}$$

y teniendo en cuenta que

$$w=\frac{d\alpha}{dt}$$

y que

$$2.\sin\alpha.\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

resulta que

$$V=R.w\left(\sin\alpha+\frac{R\sin 2\alpha}{2\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha}}\right) \quad (20)$$

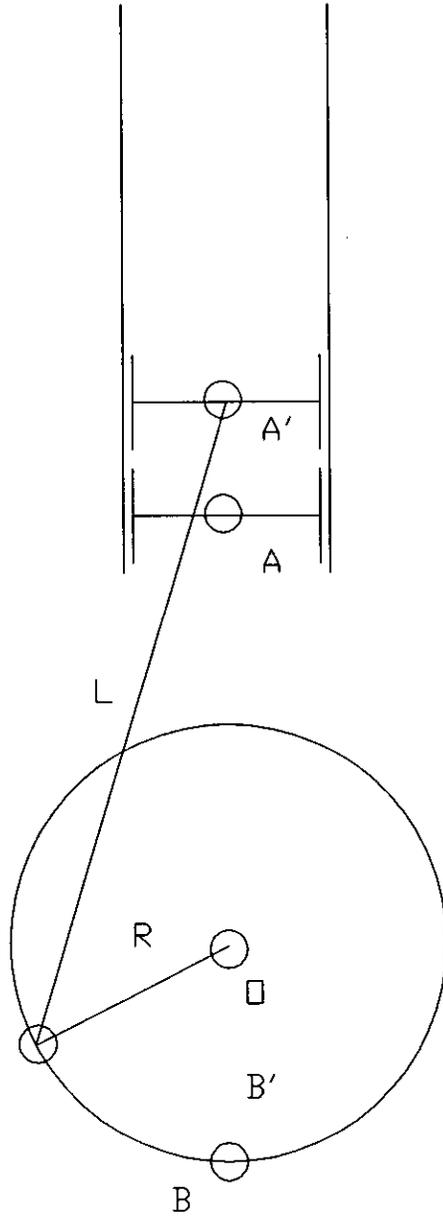
Siendo la aceleración instantánea  $a_i$  igual a la derivada de la velocidad respecto del tiempo, se tendrá

$$\frac{dv}{dt}=Rw\left(\cos\alpha.\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha}.2R\cos 2\alpha-R\sin 2\alpha}{(\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha})^2}.\frac{-R.2\sin\alpha.\cos\alpha}{2\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha}}\right).$$

$$\cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Multiplicando dividendo y divisor de la expresión anterior por la raíz

$$\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha}$$



Fg. 8

resulta

$$a_i = R \cdot \omega^2 \left( \cos \alpha + \frac{R \cdot \cos 2\alpha (L^2 - R^2 \sin^2 \alpha) + \frac{1}{4} \cdot R^3 \sin^2 2\alpha}{(L^2 - R^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (21)$$

Las anteriores fórmulas (19), (20) y (21) dan en valor absoluto y en signo, caminos, velocidades y aceleraciones en la carrera descendente, o sea, en el paso de la cruceta del punto muerto alto al punto muerto bajo, y solamente en tal caso son aplicables.

Considerando, Fg. 8, el sistema en el que el eje de cigüeñal ha girado un ángulo "Ó" a partir del punto muerto bajo; la cruceta A, deslizándose sobre el eje OA, se ha alejado del eje O por las dos siguientes razones: 1ª, porque el muñón B del cigüeñal ha ascendido; 2ª, porque la biela ha pasado a formar con el eje OA el ángulo ß, comportándose, por causa de esta oblicuidad, como si fuera mas corta y tuviera solo la longitud A'B' que, como se dijo, es el llamado efecto de oblicuidad.

Para el cálculo del recorrido del émbolo, que es igual al de la cruceta A, contando los ángulos "Ó" y "ß" en la forma ya explicada y en el sentido que se indica en la figura, se obtiene que

$$OA = L - R$$

que

$$OA' = L \cdot \cos \beta - R \cdot \cos \alpha$$

y que

$$AA' = OA' - OA$$

resultando que

$$AA' = L \cdot \cos\beta - R \cdot \cos\alpha - (L - R)$$

y también

$$AA' = R \cdot (1 - \cos\alpha) - L \cdot (1 - \cos\beta) \dots (22)$$

Se observa que ahora el desplazamiento del émbolo viene dado por un movimiento vibratorio armónico simple, de la forma,  $R(1 - \cos\alpha)$  menos un efecto de oblicuidad que vale  $L(1 - \cos\beta)$

Resulta, pues, que de la ecuación (16), en la carrera descendente la oblicuidad de biela se suma al movimiento vibratorio armónico simple que da el descenso producido por el cigüeñal, y en el ascendente resta al ascenso producido por el cigüeñal; en resumen, el efecto de oblicuidad produce siempre un acercamiento del émbolo al eje.

Si se elimina  $\beta$  en la ecuación (22) de la misma forma que en la ecuación (16), resulta que

$$C = R(1 - \cos\alpha) - L(1 - \sqrt{1 - Y^2 \sin^2\alpha}) \quad (22')$$

que permite calcular la carrera en función de los datos ordinarios  $L$ ,  $R$  y  $a$ ; pero que, mas corrientemente, suele ponerse en la forma

$$C = R(1 - \cos\alpha) - L + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2\alpha} \quad (23)$$

Pero, si esta igualdad da el camino recorrido en función exclusiva del tiempo y de los parámetros L, R y Ó, como se razonó anteriormente para llegar a la ecuación (20); la derivada de esta función con relación al tiempo, dará la velocidad instantánea

$$V=R.w\left(\sin\alpha-\frac{R\sin\alpha}{2\sqrt{L^2-R^2\sin^2\alpha}}\right) \quad (24)$$

Volviendo a derivar respecto al tiempo, se obtiene la aceleración instantánea que, como en la ecuación (21), vale

$$a_i=R.w^2\left(\cos\alpha-\frac{R\cos 2\alpha(L^2-R^2\sin^2\alpha)+\frac{1}{4}.R^3\sin^2 2\alpha}{(L^2-R^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (25)$$

Las anteriores fórmulas (23), (24) y (25) dan en valor y en signo, caminos, velocidades y aceleraciones en la carrera ascendente del émbolo o, si se quiere, en el paso de la cruceta del punto muerto bajo al alto, y solamente en tal caso son aplicables.

Volviendo a la fórmula (18') y tomando de ella la parte

$$\sqrt{1-Y^2\sin^2\alpha}$$

que también se puede escribir de la forma

$$(1-Y^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

Desarrollando en serie el radical que figura en la

anterior ecuación, se obtiene

$$(1 - Y^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot Y^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{8} \cdot Y^4 \sin^4 \alpha - \frac{1}{16} Y^6 \sin^6 \alpha + \frac{5}{128} \cdot Y^8 \sin^8 \alpha + \dots$$

y que representa el valor de  $\cos \beta$ , valor que llevado a la ecuación (22), se tiene, que

$$c = R (1 - \cos \alpha) + R (Y \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{1}{8} Y^3 \operatorname{sen}^4 \alpha + \frac{1}{16} Y^5 \operatorname{sen}^6 \alpha - \frac{5}{128} Y^7 \operatorname{sen}^8 \alpha \pm \dots)$$

que derivando dos veces respecto del tiempo, se obtiene la aceleración instantánea:

$$a_i = R \cdot \omega^2 (\cos \alpha + Y \cos 2\alpha - \frac{1}{2} Y^3 (3 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha) + \frac{3}{8} Y^5 (5 \cdot \operatorname{sen}^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^6 \alpha) - \frac{5}{16} Y^7 (7 \cdot \operatorname{sen}^6 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^8 \alpha) \pm \dots)$$

que transformada y separando constantes, puede representarse de la forma

$$a_i = R \cdot \omega^2 (\cos \alpha + A_2 \cos 2\alpha + A_4 \cos 4\alpha + A_6 \cos 6\alpha + A_8 \cos 8\alpha + A_{10} \cos 10\alpha + \dots)$$

Teniendo en cuenta que en los motores se toma

$$\frac{1}{4,5} < Y < \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{4,5}\right)^4 < Y^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

vale

$$\frac{1}{410,0625} < Y^4 < \frac{1}{81}$$

y que

$$\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4,5}\right)^4 < \frac{1}{8} \cdot Y^4 < \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

o bien

$$\frac{1}{3280,5} < \frac{1}{8} \cdot Y^4 < \frac{1}{648}$$

y teniendo en cuenta que

$$\sin \alpha \leq 1$$

también

$$\sin^4 \alpha \leq 1$$

resulta que en las aplicaciones el término

$$\frac{1}{8} \cdot Y^4 \sin^4 \alpha$$

y con mayor razón todos los que le siguen, son despreciables  
Resultando que

$$\sqrt{1 - Y^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot Y^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha$$

con lo que, la ecuación (18') se transforma en

$$C=R(1-\text{cose}\alpha)+L[1-(1-\frac{1}{2}\cdot Y^2\sin^2\alpha)]$$

y simplificando

$$C=R(1-\text{cos}\alpha)+\frac{1}{2}\cdot L\cdot Y^2\sin^2\alpha \quad (28)$$

Derivando la función C respecto al tiempo t se obtiene

$$\frac{dC}{dt}=R\sin\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}\cdot L\cdot Y^2\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\text{cos}\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

Siendo el primer miembro de esta igualdad la velocidad instantánea, que  $d\alpha/dt$  es la velocidad angular w y que  $2\cdot\text{sen}\alpha\cdot\text{cos}\alpha = \text{sen}2\alpha$ ; sacando factor común R w y simplificando L Y<sup>2</sup> resulta que

$$V=R\cdot w(\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot Y\cdot\sin2\alpha) \quad (29)$$

Derivando la función V respecto al tiempo t se obtiene

$$\frac{dV}{dt}=R\cdot w(\text{cos}\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{2}\cdot Y\cdot 2\cdot\text{cos}2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt})$$

y puesto que el primer miembro de esta igualdad es la aceleración instantánea

$$a=R\cdot w^2\cdot(\text{cos}\alpha+Y\cdot\text{cos}2\alpha)\dots\dots(30)$$

Si se trata del movimiento ascendente del émbolo la (22') se transforma en

$$C=R(1-\cos\alpha)-L\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot Y^2\sin^2\alpha\right)\right]$$

y simplificando

$$C=R(1-\cos\alpha)-\frac{1}{2}\cdot L\cdot Y^2\sin^2\alpha(31)$$

que es una ecuación análoga a la (28), pero con el signo cambiado en el primer término del segundo miembro, o sea en el término de la oblicuidad.

Entonces, si a partir de la ecuación (31) se sigue el mismo proceso que el aplicado en las ecuaciones (29) y (30) se obtienen las ecuaciones de la velocidad instantánea

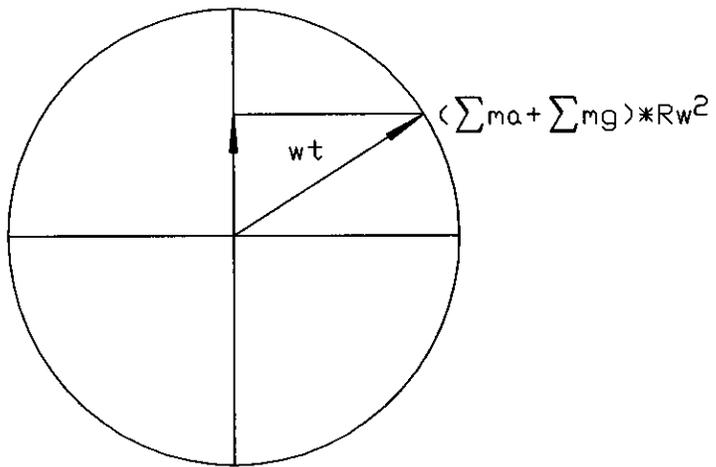
$$V=R\cdot w(\sin\alpha-\frac{1}{2}\cdot Y\cdot \sin 2\alpha)(32)$$

y la aceleración instantánea

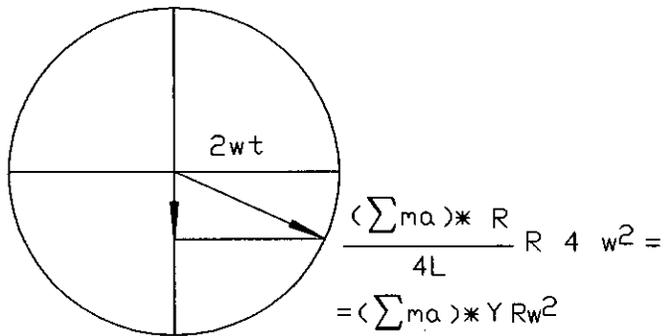
$$a=R\cdot w^2\cdot (\cos\alpha-Y\cdot \cos 2\alpha)\dots\dots(33)$$

correspondientes al movimiento ascendente del émbolo.

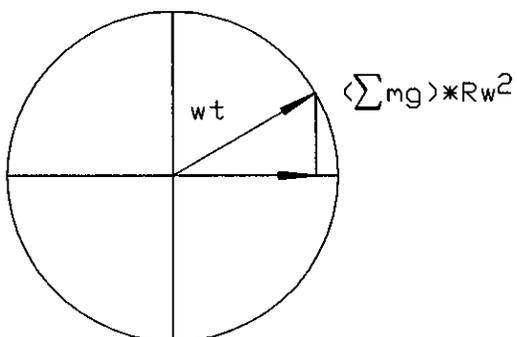
En resumen, las ecuaciones (23), (24) y (25), son las denominadas ecuaciones exactas a las cuales debe acudir para mayores aproximaciones, o en caso de duda sobre el error cometido; las ecuaciones (31), (32) y (33) son las aproximadas



16 a



16 b



16 c

Fg. 9

aunque suficientemente en general, y que son las mas empleadas en los estudios de aplicación como el que nos ocupa.

Como se ha establecido anteriormente, el esfuerzo sobre el émbolo se transmite al cigüeñal a través de la biela, según la fuerza  $F_2$ . Entonces, la biela en su pie posee el movimiento rectilíneo alternativo y en su cabeza el movimiento circular uniforme ya estudiados anteriormente. Pero siendo así, los restantes puntos de su cuerpo poseen un movimiento elíptico complicado, que a efecto del estudio mecánico que se pretende, la biela se descompone en dos masas en la forma que mas adelante se verá.

Después de cuanto antecede y mediante los procedimientos ananíticos establecidos, se puede conocer en cada instante los caminos recorridos, las velocidades y las aceleraciones de todas las masas dotadas de movimiento rectilíneo alternativo o circular continuo uniforme.

Teniendo en cuenta lo establecido para el movimiento circular uniforme del cigüeñal en que  $R$  es constante y  $w$  se toma para su máximo valor, los caminos, velocidades y aceleraciones instantáneas son función de la variable  $\theta$  o, mejor, del  $\sin \theta$ , del  $\cos \theta$  y del efecto de oblicuidad de biela. Los caminos, velocidades y aceleraciones instantáneas correspondientes al movimiento rectilíneo alternativo, para el mismo motor de carrera 1150 mm. y velocidad angular de 14,87 rad/seg., según las fórmulas (23), (24) y (25) y, muy aproximadamente, para las (31), (32) y (33) están representadas en la gráfica de la Fg. 9.

Queda por resolver el caso de la biela, cuyo movimiento, ya establecido, no puede asimilarse a ninguno de los dos estudiados. Pero, como ya se dijo, el problema se resuelve descomponiendo la masa de la biela en dos, para lo cual se razona y procede en la forma siguiente:

Según se observa en la Fg.10, todo movimiento de la biela

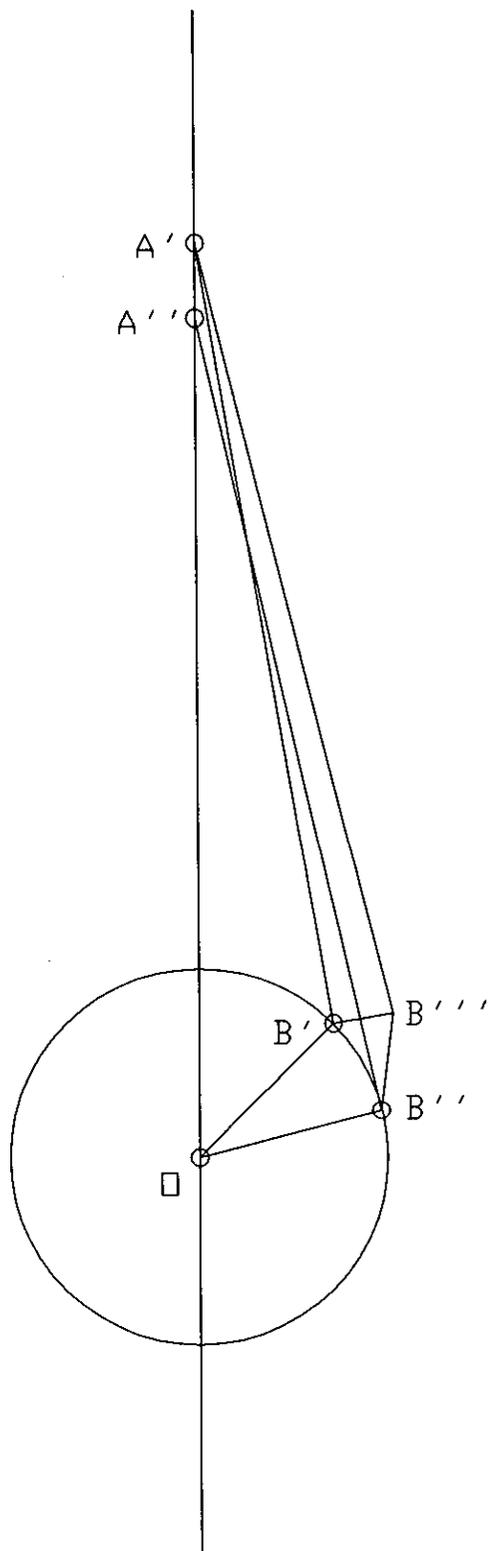


Fig. 10

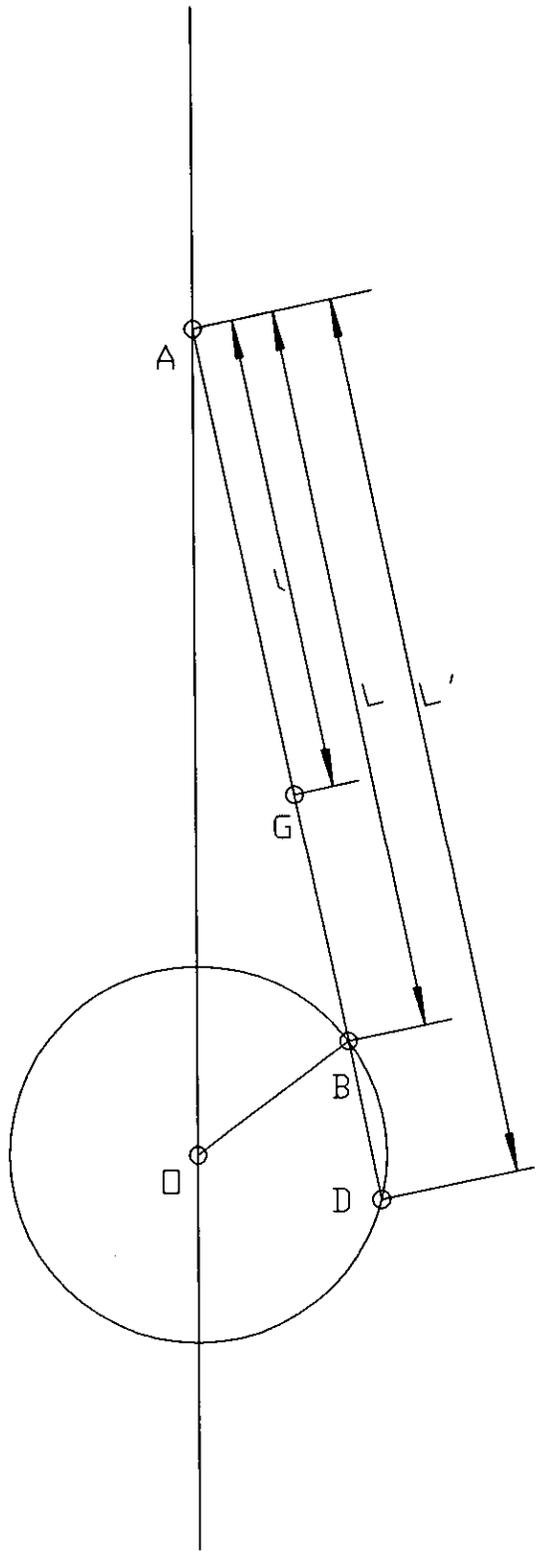


Fig. 11

se compone de una rotación sobre la cruceta y de una traslación simultánea, siendo esta doble propiedad el fundamento de todo el teorema de descomposición que se desarrolla.

Considérese para ello la biela en la posición A'B', si el cigüeñal gira en la dirección de la flecha, la biela pasa a la posición A"B" y el cambio ocurrido puede descomponerse en las dos partes siguientes:

1ª.- Giro alrededor de A' desde la posición A'B' hasta la posición A'B'''.

2ª.- Traslación desde A'B''' hasta A"B".

Si ahora se intenta calcular dos masas tales que puedan sustituir a la masa total M de la biela, aplicadas, una, que se denominará Ma, en la cruceta, y otra Md, en un punto, que se determinará, del cuerpo de biela o de su prolongación pero que verifiquen las condiciones equivalentes de inercia en la rotación y en la traslación citadas.

Para que las masas Ma y Md sean equivalentes a la masa M de la biela, en primer lugar han de cumplir con la igualdad

$$Ma + Md = M \quad (34)$$

En segundo lugar, el centro de gravedad de las dos masas ha de coincidir con el centro de gravedad G, Fg. 11 de la masa total M de la biela, lo cual equivale a suponer todas las citadas masas sometidas a la acción de un campo gravitatorio uniforme y, en consecuencia, produciendo fuerzas paralelas, una en A y otra en D, cuya resultante estará en G. se verificará

$$\frac{Fa}{GD} = \frac{Fd}{GA} \quad (35)$$

Si la aceleración del campo gravitatorio referido se representa por  $g$ , resulta que:

$$M_a \cdot g = F_a \quad ; \quad M_d \cdot g = F_d$$

y que

$$\frac{M_a}{L'-l} = \frac{M_d}{l}$$

y, también,

$$M_a \cdot l = M_d \cdot (L'-l) \quad (36)$$

Las ecuaciones (34) y (36) constituyen las condiciones necesarias y suficientes para que en toda traslación de la biela las fuerzas de inercia actuando sobre las masas  $M_a$  y  $M_d$  equivalgan, o si se prefiere, tengan por resultante la fuerza de inercia actuando sobre la masa total  $M$ .

Pero, como condición de la equivalencia que se está intentando establecer, los momentos de inercia de las masas  $M_a$  y  $M_d$  han de sumar una cantidad igual al momento de inercia  $I_a$  de la masa  $M$  de la biela; tomando estos tres momentos respecto al punto  $A$ , alrededor del cual se producen las rotaciones.

Teniendo en cuenta que las masas  $M_a$  y  $M_d$  son puntuales, ha de verificarse, entonces,

$$I_a = (\sum m) \cdot r^2$$

y

$$I_a = M_a \cdot 0 + M_d \cdot L'^2$$

o sea, que

$$I_a = M_d \cdot L'^2 \quad (37)$$

La ecuación (37) constituye la condición necesaria y suficiente para que toda rotación de la biela, que, como se ha dicho, tiene lugar alrededor de la cruceta, el par de inercia actuando sobre la masa  $M_d$  equivalga, o tenga por resultante el par de inercia actuando sobre la biela de masa  $M$ .

En consecuencia, las ecuaciones (34), (36) y (37) constituyen un sistema compatible y determinado, cuya resolución conduce al conocimiento de las incógnitas  $M_a$ ,  $M_d$  y  $L'$ , en el supuesto en que la biela esté determinada y con ella su centro de gravedad  $G$  y su momento de inercia  $I_a$ .

Bajo estas condiciones, y partiendo del sistema

$$\begin{aligned} M_a + M_d &= M \\ M_a \cdot l &= M_d (L' - l) \\ I_a &= M_d \cdot L'^2 \end{aligned} \quad (38)$$

y como

$$M_a = M - M_d$$

Eliminando  $M_a$  en las dos primeras ecuaciones, despejándolo de la primera e introduciendo su resultado en la segunda, se obtiene sucesivamente

$$\begin{aligned} (M - M_d) l &= M_d (L' - l) \\ M \cdot l - M_d \cdot l &= M_d \cdot L' - M_d \cdot l \\ M \cdot l &= M_d \cdot L' - M_d \cdot l + M_d \cdot l \end{aligned}$$

Y que,

$$M \cdot l = Md \cdot L'$$

y finalmente

$$Md = M \cdot \frac{l}{L'}$$

con lo que el sistema queda reducido a las ecuaciones

$$Ia = Md \cdot L'^2$$

$$M = Md \cdot \frac{L'}{l}$$

que, dividiendo una por la otra, dan

$$\frac{M}{Ia} = \frac{L'}{l \cdot L'^2} = \frac{1}{l \cdot L'}$$

y finalmente

$$L' = \frac{Ia}{M \cdot l} \quad (39)$$

Introduciendo este resultado en la tercera ecuación del sistema (38) se obtiene

$$Ia = Md \cdot \frac{Ia^2}{M^2 \cdot l^2}$$

Que simplificando y despejando

$$Md = \frac{M^2 \cdot l^2}{Ia} \quad (40)$$

Llevando este valor a la primera ecuación del sistema (38) resulta

$$Ma + \frac{M^2 \cdot l^2}{Ia} = M$$

y despejando

$$Ma = M - \frac{M^2 \cdot l^2}{Ia} \quad (41)$$

Respecto a las ecuaciones (40) y (41) que dan los valores de las dos masas que sustituyen a la masa M, nada mas se debe añadir; pero no ocurre así con el de la (39), ya que, si se sustituye en él el valor del momento de inercia Ia, considerando la biela como un péndulo físico que oscila sobre el punto A, por el producto de la masa M de la biela por el cuadrado de su radio de giro K respecto de la cruceta A, se tiene

$$L' = \frac{M \cdot K^2}{M \cdot l}$$

y finalmente

$$L' = \frac{K^2}{l} \quad (42)$$

Pero como el período de oscilación de un péndulo físico cuyo radio de giro respecto al eje de oscilación valga  $K$  y la distancia de dicho eje al centro de gravedad valga  $l$ , es

$$T=2.\pi.\frac{\sqrt{K^2}}{\sqrt{g.l}} \quad (43)$$

que elevada al cuadrado y despejando, se obtiene

$$\frac{K^2}{l} = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} \quad (44)$$

De este resultado y del obtenido en la ecuación (42) se desprende que

$$L' = \frac{K^2}{l} = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2} \quad (45)$$

La triple igualdad (45) dice que la distancia  $L'$  de la cruceta a la segunda masa de descomposición  $M_d$  puede obtenerse dividiendo el cuadrado del radio de giro  $K$  de la biela respecto a la cruceta por la distancia  $l$  de su centro de gravedad a la referida cruceta, o bien dividiendo el cuadrado del tiempo de oscilación pendular  $T$  de la biela alrededor del punto  $A$  multiplicado por la aceleración de la gravedad por el cuádruplo del cuadrado de  $\alpha$ .

En resumen a cuanto antecede, resulta, que la una descomposición rigurosa de la biela obliga al conocimiento previo de la misma, puesto que hay que aplicar su radio de giro  $K$  y la distancia  $l$  de su centro de gravedad a la cruceta, o la posesión misma de la biela, ya que hay que hacerla

oscilar para medir el período T. Pero, por otra parte, la distancia L' de la segunda masa de descomposición no suele coincidir con la longitud L de la biela, resultando

$$L' \neq L \quad (46)$$

según las formas y dimensiones de la biela en cuestión, y solo en el caso de verificarse, exacta o aproximadamente, que

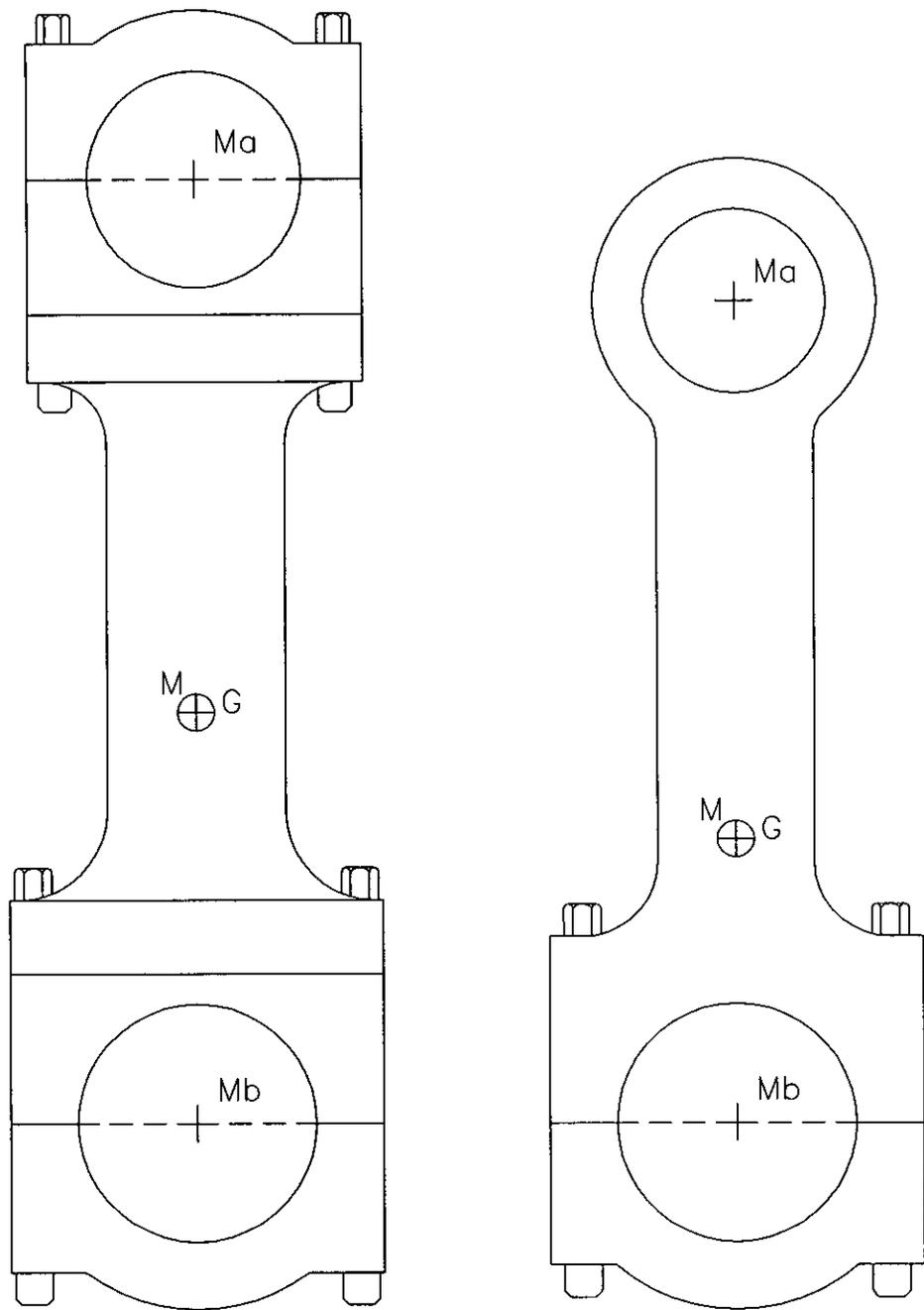
$$L' = L$$

la masa Md puede considerarse situada en el eje geométrico de la cabeza de biela o extremo del radio de cigüeñal; pues, de lo contrario, la dicha masa habrá que considerarla en el cuerpo de la biela o en su prolongación y, entonces, posee un movimiento elíptico complicado que dificulta todos los razonamientos y cálculos subsiguientes.

Por ello, en las aplicaciones suele recurrirse a la condición de que  $L' = L$ , y se la denomina biela condicionada porque se la somete a la condición previa de que la segunda masa de descomposición estará aplicada en el eje geométrico de la cabeza de la biela.

Entonces, según se establece en la Fg. 12, se tiene una biela de longitud L y masa M, cuyo centro de gravedad G se encuentra a la distancia l de la cruceta A y que se la descompone en dos masas, la Ma aplicada en la cruceta y la Mb aplicada en el extremo del radio de cigüeñal. Se observa que las dos bielas son de geometría diferente, en la que la de la izquierda corresponde a un motor de cruceta, y la de la derecha a un motor de tronco. Esta diferente geometría hace variar el valor de las masas Ma y Mb respecto de la masa total M.

En virtud de las expuestas condiciones de inercia en la rotación y en la traslación, deberán verificarse las tres ecuaciones del sistema (38), y que aplicadas al caso actual,



Fg. 12

toman la forma

$$M_a + M_b = M$$

y que

$$M_a \cdot l = M_b (L - l) \quad (47)$$

$$I_a = M_b \cdot L^2$$

Y, normalmente, se establece el mismo proceso de estudio. No obstante, este proceso, son datos del grupo las masas  $M_a$  y  $M_b$  y la longitud de la biela; por consiguiente, son incógnitas la masa total  $M$ , que viene dada directamente por la primera de las ecuaciones; la distancia  $l$  de la cruceta al centro de gravedad, que viene dada por la segunda ecuación, y el momento de inercia  $I_a$  de la biela respecto a la cruceta, que viene dado por la tercera de las ecuaciones.

En consecuencia, una biela proyectada en esta forma posee una descomposición exacta en dos masas aplicadas una en la cruceta y otra en el extremo del cigüeñal.

No obstante, lo que mas corrientemente suele hacerse es dar de la biela ya construida o proyectada, con independencia de la teoría de descomposición, la masa total  $M$ , la longitud de la biela  $L$  y la distancia  $l$  de la cruceta al centro de gravedad; ocurre entonces que, como el momento de inercia  $I_a$ , conocido o desconocido, es una cantidad independiente y fija, el grupo (47) pasa a ser un sistema y tiene solo dos incógnitas, que son las masas  $M_a$  y  $M_b$ , y tres ecuaciones, y es, por lo tanto, incompatible. Por lo que, a fin de resolver, aunque imperfectamente, se suprime la tercera condición, y el sistema queda reducido a

$$M_a + M_b = M \quad (48)$$

$$M_a \cdot l = M_b (L - l)$$

Resolviendo por sustitución de la primera ecuación en la segunda se halla que

$$\begin{aligned} M_a \cdot l &= (M - M_a) (L - l) \\ M (L - l) &= M_a \cdot l + M_a (L - l) \end{aligned}$$

y que

$$M_a = M \cdot \frac{L - l}{L} \quad (49)$$

Y análogamente se halla que

$$\begin{aligned} (M - M_b) l &= M_b (L - l) \\ M \cdot l - M_b \cdot l &= M_b \cdot L - M_b \cdot l \end{aligned}$$

y que

$$M_b = M \cdot \frac{l}{L} \quad (50)$$

Situando en la cruceta y en el extremo del cigüeñal las masas  $M_a$  y  $M_b$  respectivamente, se resuelve con exactitud la cuestión de inercia en la traslación; pero si el producto

$$M_b \cdot L^2$$

no es igual a  $I_a$ , y se cometerá error en toda cuestión relativa a la rotación.

Lograda la descomposición de la biela, se observa que los órganos móviles del motor se dividen en los dos grupos a saber:

- a) los dotados de movimiento rectilíneo alternativo, como émbolos, vástagos, crucetas y la parte de la biela correspondiente;

b) los dotados de movimiento circular continuo, como el cigüeñal y la parte correspondiente de la biela.

De esta forma se simplifica el complicado estudio del movimiento elíptico de la biela, que obliga, según el giro alrededor de A', a) al cálculo de la fuerza centrífuga debida al movimiento circular de la biela sobre el referido punto A'; b) al cálculo de la fuerza de inercia tangencial debida a las aceleraciones angulares en el establecido movimiento circular de la biela alrededor del mismo punto A' al no producirse con velocidad angular constante, por una parte, y por otra, porque se realiza en forma pendular; y según la traslación, al cálculo de la fuerza de inercia de arrastre debida a la aceleración vertical instantánea de la biela.

#### **1.4.- Las fuerzas resultantes.**

Las fuerzas que actúan en la máquina se clasifican en motorices y resistentes; son fuerzas motrices aquellas que producen par motor durante una parte cualquiera, no nula, del ciclo; se llaman fuerzas resistentes a aquellas que se oponen al par motor durante todo el ciclo.

Las fuerzas motrices son la del fluido, la de inercia y la de gravedad; las fuerzas resistentes son la resistencia útil, que es la que constituye el propio objeto del motor, y la resistencia pasiva, que es la constituida principalmente por los rozamientos y por el accionamiento de válvulas y bombas.

Se observa que todas fuerzas motrices son a intervalos positivas y negativas; así, la del fluido es positiva en el período de expansión y en el de admisión en los motores que son sobrecargados, y negativa en los demás períodos; la de inercia, como es el producto de la masa por la aceleración, cambia de sentido con esta última; la de la gravedad, si el motor está vertical, es positiva durante el descenso del

centro de gravedad de todo órgano móvil y es negativa en el ascenso; en cambio, las fuerzas resistentes son siempre negativas.

A fin de poder trazar la curva par motor-ángulos, o curva de esfuerzos tangenciales, es preciso conocer en cada instante los valores de las fuerzas motrices sobre las masas alternativas y sobre las masas giratorias.

Sobre las masas alternativas actúa la fuerza del fluido  $F_a$ , tomada del diagrama de indicador y calculada en la forma que se establece en el apartado (1.2.), que vale

$$F_a = S_e \cdot p_i$$

la fuerza de inercia  $F_i$ , tomada de la fórmula fundamental de la dinámica, que vale

$$F_i = (\sum m_a) \cdot a_i$$

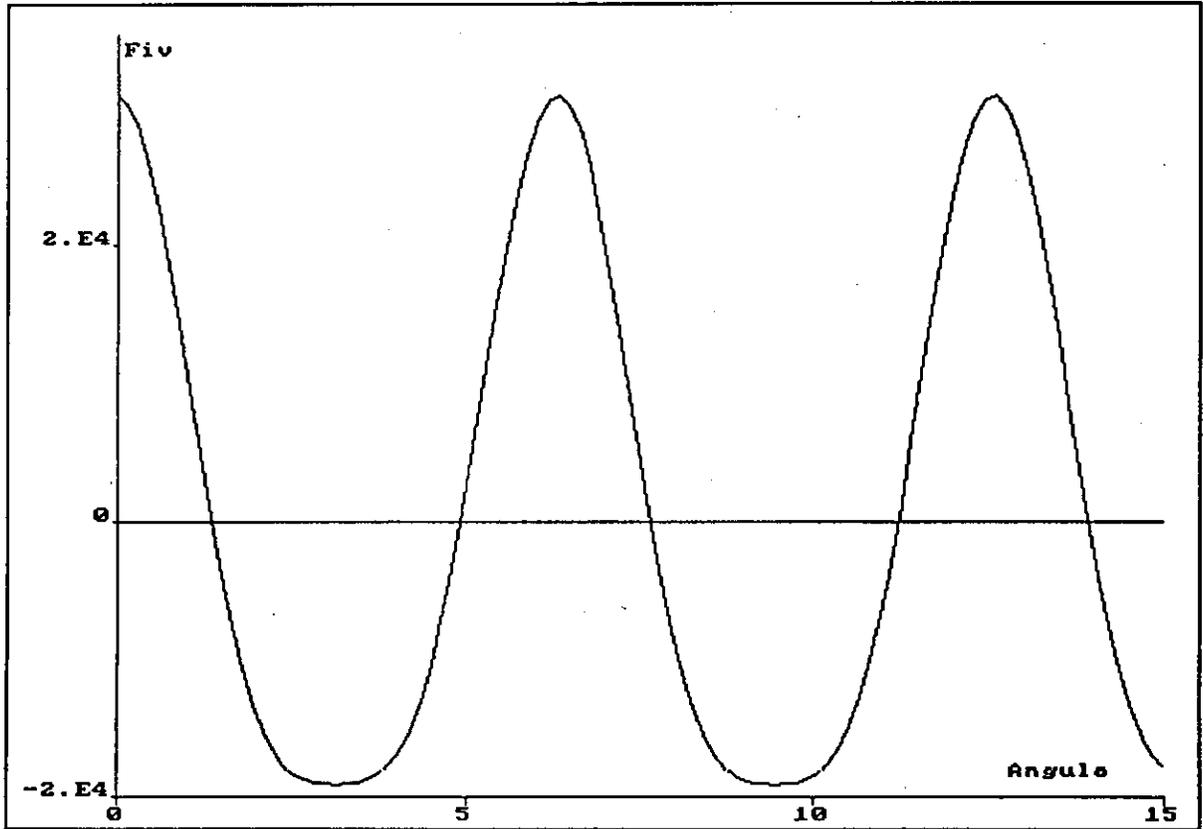
siendo  $a_i$  la aceleración instantánea dada por las ecuaciones (21) o (30) cuando se trata de una posición de la carrera descendente, o de las (25) o (33) si se trata de un punto en la carrera ascendente, resultando que la fuerza de inercia es de la forma

$$F_{iv} = (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (\cos\alpha \pm \gamma \cos 2\alpha) \dots (51)$$

y la fuerza de la gravedad  $F_g$ , que viene dada por la fórmula

$$F_g = (\sum m_a) \cdot g$$

siendo  $g$  la aceleración de la gravedad en el lugar de que se



Fuerzas de inercia primarias y secundarias de las masas en movimiento alternativo de un motor lento.

Fig. 13

trate.

Estas fuerzas del fluido, de inercia y de la gravedad, se representan en la ( Fg. 13 ), tomando en ordenadas los correspondientes valores y en abscisas los ángulos girados por el eje de cigüeñal a partir del punto muerto alto; así como, la resultante obtenida por la suma algebraica a fin de obtener la fuerza total disponible.

Estas fuerzas, como mas adelante se verá, producen vibraciones de flexión en el eje de cigüeñales, cuando el eje elástico es sacudido perpendicularmente a su longitud.

Cada una de las tres fuerzas aplicadas a las masas alternativas sufre, en la forma que se estableció en la Fg. 2, una sucesión de descomposiciones que dan lugar en cada instante a cargas sobre los diferentes órganos del motor y también a un par motor.

Para el cálculo del par motor puede partirse de la suma algebraica de las tres referidas fuerzas y hallar su par único, o bien, partir separadamente de cada una de las tres fuerzas, determinar su par y después, algebraicamente sumar los pares. De esta forma se concluirá que el par motor útil de la fuerza de inercia y de la fuerza de la gravedad es nulo, pero que alteran la regularidad natural del motor. De la misma figura 2, se desprende que el par motor vale

$$F_3 \cdot R$$

pero por la referida descomposición, se halló la fuerza  $F_3$  a partir de la fuerza del fluido sobre las masas alternativas, según se establece en la ecuación (5). Pero, por causa de la particularidad que presenta la variación del ángulo beta con la rotación del eje motor, conviene eliminar beta de aquella ecuación procediendo en la forma

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\sin\beta.\cos\alpha$$

y como

$$\sin\beta = Y \cdot \sin\alpha$$

y

$$\cos\beta = \sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2\alpha}$$

resulta que de

$$F_3 = F_a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$$

simplificando y sustituyendo, resulta

$$F_3 = F_a \cdot \left( \sin\alpha + \frac{Y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2\alpha}} \right)$$

y siendo

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

se tiene finalmente que

$$F_3 = F_a \cdot \left( \sin\alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2\alpha}} \right) \dots (52)$$

Y el par motor producido por esta fuerza vale

$$F_3 \cdot R = F_a \cdot R \cdot \left( \sin\alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2\alpha}} \right) \dots (52')$$

Procediendo de igual forma para la fuerza de inercia, porque está aplicada también sobre las masas alternativas, resulta que

$$F_{3i} = (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (\cos\alpha + Y \cdot \cos 2\alpha) \cdot \left( \sin\alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) \dots (53)$$

Y el par motor producido por esta fuerza de inercia vale

$$T_{3i} \cdot R = (\sum m_a) \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot (\cos\alpha + Y \cdot \cos 2\alpha) \cdot \left( \sin\alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) \dots (53')$$

De igual forma, para la fuerza de la gravedad de las masas alternativas, también

$$F_{3g} = (\sum m_a) \cdot g \cdot \left( \sin\alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) \dots \dots \dots (54)$$

Y el par motor producido por esta fuerza vale

$$T_{3g} = (\sum m_a) \cdot g \cdot R \cdot \left( \sin\alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) \dots \dots \dots (54')$$

Cada par motor así obtenido se representa en la figura tomando en ordenadas, a la escala establecida, los valores hallados por las ecuaciones (52), (53) y (54) y en abscisas los ángulos girados por el eje motor contados a partir del punto muerto alto; también se representa la resultante obtenida por la suma algebraica de ambos, a fin de obtener el par motor

total disponible.

Estos pares motores someten al eje de cigüeñales a torsión y, como mas adelante se verá, producen sobre él unas vibraciones torsionales que, aun cuando de estas vibraciones torsionales no se deriva fuerza alguna hacia el exterior, puede hacerse notar indirectamente variando el calaje entre las cigüeñas; dando lugar a perturbación en la compensación de masas y a producir variaciones en la distribución del motor y, al mismo tiempo, las fuerzas de inercia de las masas vibrantes determinan una carga suplementaria sobre el eje motor.

Sobre las masas giratorias no hay fuerza del fluido, porque ésta no actúa sobre ellas, ni fuerza de inercia, ya que su movimiento es uniforme y, por tanto, su aceleración es nula; pero, en cambio, si las masas giratorias no son equilibradas existe fuerza de gravedad que ha de tomarse en cuenta; para ello es necesario considerar una por una todas aquellas masas giratorias que su centro de gravedad no coincida con el eje geométrico de giro del eje cigüeñal y referirlas, en la forma clásica que se va a proceder, al extremo B del cigüeñal, o sea al centro del muñón.

El peso de cada una de estas masas crea en todas las posiciones, excepto en los puntos muertos, un par positivo o negativo; así, de la cigüeña de la Fg. 3b, las partes que no tienen su centro de gravedad ni en O ni en B, sino en G; el peso de estas masas  $m$  que vale  $m.g$ , crea, respecto a O, un par que para cada posición angular  $wt$  vale

$$m.g.R'. \text{ sen } wt$$

Pero, si se imagina otra masa  $m'$  con centro de gravedad en B y que dé un par igual al que da la masa  $m$ , se tendrá

$$m'.g.R. \text{ sen } wt = m.g.R'. \text{ sen } wt$$

De esta igualdad se deduce que habrá de ser

$$m' . R = m . R'$$

y que

$$m' = m . \frac{R'}{R}$$

La cual permite calcular para toda masa giratoria dada otra masa equivalente aplicada en el extremo del cigüeñal geométrico; la suma de todas las masas multiplicada por la aceleración de la gravedad  $g$  dará la fuerza  $F'$  representada por el vector  $O'C$ , que, multiplicada por el radio cigüeñal  $R$  y por el  $\text{sen } \omega t$ , da el valor del par total instantáneo, de manera que

$$M_g = (\sum m_1) g . R . \text{sen } \omega t \quad (51)$$

que da el par total producido por las masas geométricas reducidas al brazo  $R$ ; en el bien entendido que sobre este punto se hallan aplicadas la masa del muñón de cigüeñal y la segunda masa de descomposición de la biela  $M_b$  en el caso de considerar la biela condicionada y debe tenerse presente que en los motores verticales este par es positivo mientras el centro de gravedad de las referidas masas giratorias baje, y es negativo mientras suba y, como de la ecuación se deduce, es de forma sinusoidal.

## **CAPITULO 2.- CLASIFICACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA**

### **2.1.- Introducción**

Partiendo del principio de Galileo y de los principios de Newton se ha establecido la fórmula fundamental de la dinámica y que dice: La fuerza aplicada a un cuerpo libre es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración producida. Entonces, también puede establecerse, que: Para imprimir a una masa una aceleración dada es preciso aplicar una fuerza igual al producto de la masa por la aceleración, y que esta fuerza venza a la de inercia, que es igual y contraria a ella.

Aplicando este principio a las masas en movimiento en los motores de combustión interna alternativos, situando el émbolo en el punto muerto alto, donde su velocidad es nula, la fuerza del fluido sobre el émbolo produce movimiento y, por ser la velocidad nula, la aceleración es máxima; pero, si en el punto muerto bajo la velocidad vuelve a ser nula, en este punto la aceleración es mínima, negativa; así pues, las masas habrán alcanzado una velocidad máxima y, en consecuencia, aceleración nula.

Al realizar el estudio de la mecánica de estos motores se han establecido y razonado tres movimientos distintos: El movimiento circular continuo del eje de cigüeñal, tratado en su forma particular; el movimiento rectilíneo alternativo del émbolo y el movimiento elíptico complicado de la biela, que por razones de aplicación se simplifica reduciéndolo a un movimiento circular continuo, con el eje de cigüeñal y a otro movimiento rectilíneo alternativo, con el émbolo.

### **2.2.- Clasificación de las fuerzas de inercia.**

Según lo establecido en los puntos anteriores, las masas

giratorias no equilibradas, producen fuerzas de inercia que actúan, unas, en la dirección del eje del cilindro, las componentes verticales de las masas giratorias; otras, que actúan en dirección perpendicular al eje del cilindro y son las de las componentes horizontales de las masa giratorias. Las masas alternativas producen fuerzas de inercia que actúan según el eje del cilindro.

Por lo tanto, consecuentemente a la fórmula fundamental de la dinámica y las ecuaciones (12) y (15), que determinan las aceleraciones en el movimiento circular uniforme, la fuerza vertical de las masas giratorias valdrá

$$F_{iv} = (\sum m_a) \cdot R \cdot w^2 \cdot \cos\alpha \dots \dots (51)$$

Se la denomina fuerza de inercia vertical de las masas giratorias, de frecuencia igual a la velocidad angular del motor medida en revoluciones por segundo.

Y la fuerza de inercia horizontal es

$$F_{ih} = -(\sum mg) \cdot R \cdot w^2 \cdot \sin\alpha \dots \dots (52)$$

o también, prescindiendo del signo

$$F_{ih} = (\sum m_g) \cdot R \cdot w^2 \cdot \sin\alpha \dots \dots (52')$$

Se la denomina fuerza de inercia horizontal, de las masas giratorias, de frecuencia igual a la velocidad angular del motor medida en revoluciones por segundo.

En consecuencia a las ecuaciones (30) y (33), que determinan las aceleraciones en el movimiento rectilíneo alternativo, la fuerza de inercia vertical en la carrera

descendente valdrá

$$F_{iv} = (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (\cos\alpha + Y \cdot \cos 2\alpha) \dots \dots (53)$$

y para la carrera ascendente

$$F_{iv} = (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot (\cos\alpha - Y \cdot \cos 2\alpha) \dots \dots (54)$$

Pero, por causa de  $\cos \alpha$  o  $\cos \omega t$  y de  $\cos 2\alpha$  o  $\cos 2\omega t$ , las ecuaciones (53) y (54) pueden escribirse en la forma

$$F_{iv} = (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos\alpha + (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot Y \cdot \cos 2\alpha \dots \dots (55)$$

y también

$$F_{iv} = (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos\alpha - (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot Y \cdot \cos 2\alpha \dots \dots (56)$$

Si se advierte la ecuación (51) y los primeros términos de los segundos miembros de las ecuaciones (55) y (56), se observa que son de la misma forma, la una referida a las masas giratorias, y las otras referidas a las masas alternativas. Entoces, es norma tratarlas juntamente, resultando que

$$F_{ivp} = [(\sum m_a) + (\sum m_g)] \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos\alpha \dots \dots (57)$$

Y se la llama "fuerza de inercia vertical primaria", y es de frecuencia igual a la velocidad angular del motor medida en revoluciones por segundo.

Los segundos términos de los segundos miembros de las referidas ecuaciones son de la forma

$$F_{ivs} = (\sum m_a) \cdot R \cdot w^2 \cdot Y \cdot \cos 2\alpha \dots \dots (58)$$

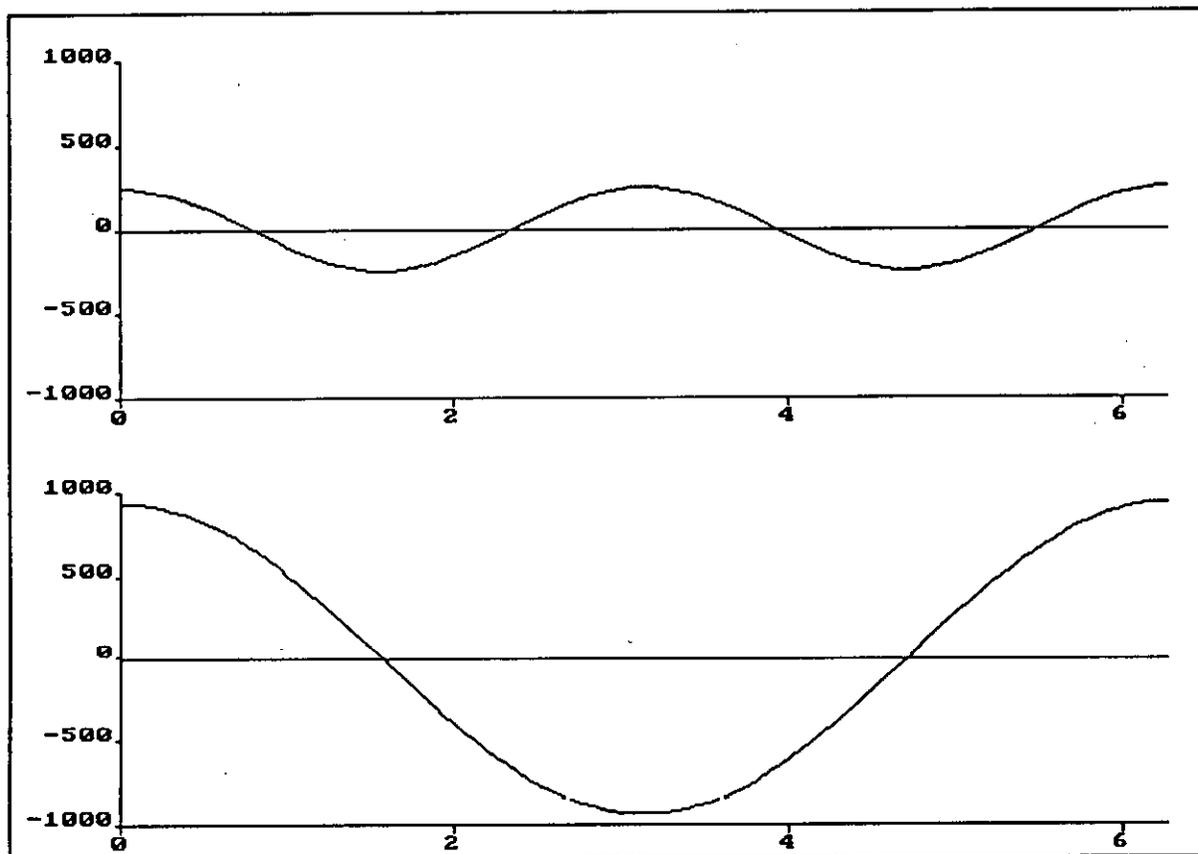
Se la llama "fuerza de inercia vertical secundaria", y es de frecuencia doble de la velocidad angular del motor medida en revoluciones por segundo, por causa del ángulo  $2\alpha$  o si se quiere,  $2wt$ . Y es frecuente representarla en la forma

$$F_{ivs} = \frac{(\sum m_a) \cdot R}{4 \cdot L} \cdot R \cdot 4 \cdot w^2 \cos 2\alpha (58')$$

Analizadas las ecuaciones (52), (57) y (58) se clasifican las fuerzas de inercia; tanto, en cuanto a la intensidad de la vibración que produce, como a la dirección y la frecuencia con que se realiza. Pero también se observa que todos sus términos tienen forma de fuerza centrífuga, es decir, se componen, en cuanto a factores, de una masa ( $\sum m_a$ ), de un radio  $R$  y de un cuadrado de velocidad angular  $w$ , multiplicado después por el coseno de un ángulo; lo cual significa que se trata no de aquella fuerza centrífuga, sino de su proyección sobre el eje a partir del cual se mide o cuentan los ángulos

En consecuencia, cada una de las fuerzas instantáneas de inercia podrá obtenerse o representarse por medio de un vector giratorio, como se representa en la Fg. 13; así, en la figura 13a se hace referencia al vector giratorio, de módulo  $[(\sum m_a) + (\sum m_g)] R \cdot \omega^2$  y de velocidad  $w$ , y su proyección, que es la fuerza de inercia vertical primaria instantánea para una posición angular  $wt$  después del punto muerto alto.

En la figura 13b se representa el vector giratorio, de módulo  $\frac{1}{4} (\sum m_a) \cdot Y \cdot R \cdot (2\omega)^2$  y velocidad  $2w$ , y su proyección, que es la fuerza de inercia vertical secundaria instantánea



DINAMICA DE LAS MASAS ALTERNATIVAS EN UN MOTOR LENTO

Fg. 14

correspondiente a una posición angular  $\omega t$  después del punto muerto alto del cigüeñal motor y, en consecuencia, al ángulo  $2\omega t$  del vector en cuestión.

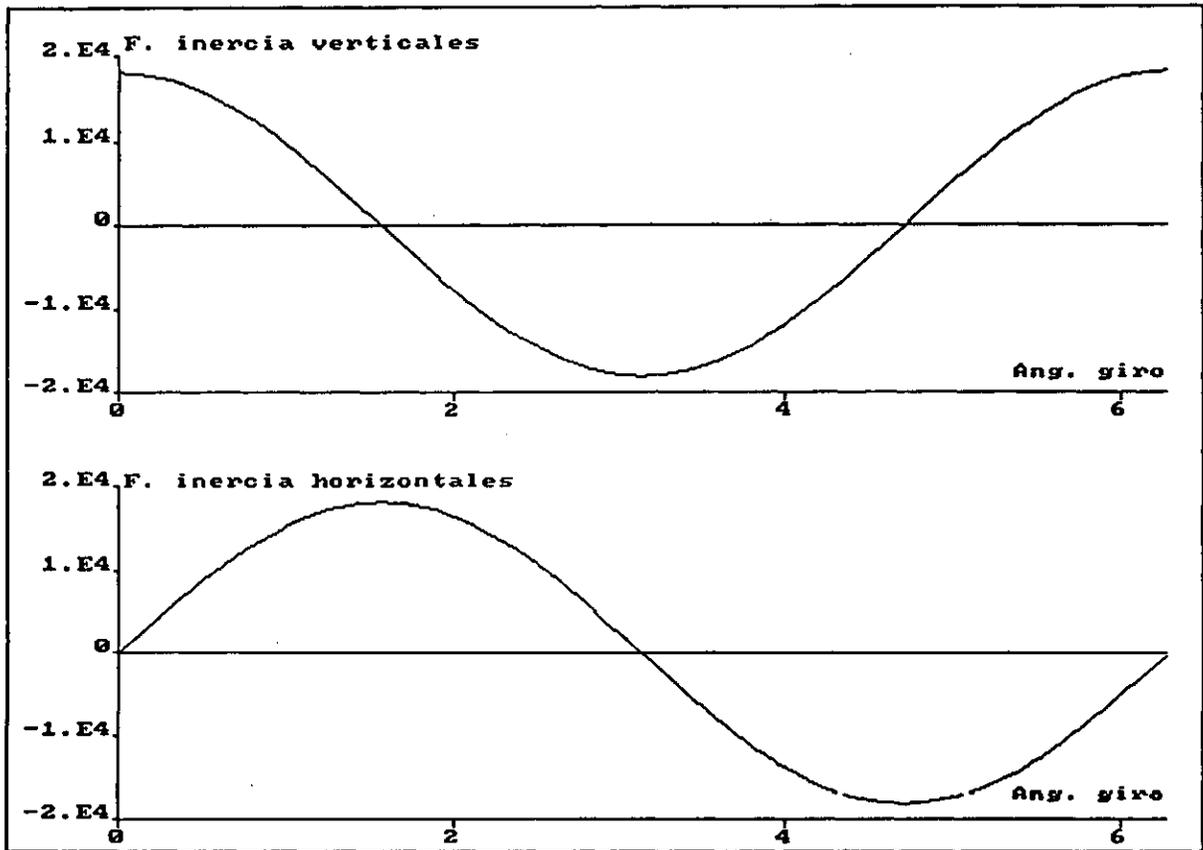
En la figura 13c, de acuerdo con la ecuación (52'), se representa el vector giratorio, de módulo  $(\sum m_g) \cdot R \cdot \omega^2$  y de velocidad  $\omega$ , y su proyección, que es la fuerza de inercia horizontal instantánea para la posición angular  $\omega t$  después del punto muerto alto del cigüeñal motor.

De las tres figuras anteriores se deduce que en el instante considerado la fuerza de inercia vertical primaria está dirigida hacia arriba, mientras que la fuerza de inercia vertical secundaria, que es mucho menor, según se desprende de los módulos y de la figura 14, está dirigida hacia abajo, de manera que en total se tiene un esfuerzo resultante en la dirección de la mayor y que, por tanto, vale la diferencia entre ambas.

La fuerza de inercia horizontal está dirigida hacia la derecha, y no se observa ninguna otra fuerza que le pueda causar interferencia.

No obstante, por razones de claridad y criterios en el equilibrado, es costumbre realizar por separado el estudio y representación de todas las fuerzas de inercia de las masas con movimiento rectilíneo alternativo obtenidas por las ecuaciones (55) y (56), representadas en la figura 14; así como, del estudio y representación de las fuerzas de inercia de las masas giratorias obtenidas por las ecuaciones (51) y (52), representadas en la figura 15.

Como se enunció en la introducción y se detallará mas adelante, estas fuerzas producirán los consiguientes movimientos del motor y deformaciones elásticas de las fundaciones. En el transcurrir del tiempo  $t$ , los ángulos  $\omega t$  y  $2\omega t$  varían, y las referidas fuerzas cambian de intensidad y de sentido; en consecuencia, con ellos cambian, también, los movimientos y las mencionadas deformaciones elásticas.



DINAMICA DE LAS MASAS GIRATORIAS EN UN MOTOR LENTO

Fig. 15

De cuanto antecede se infiere que los motores de un solo cilindro no están equilibrados; pero de la observación de las figuras estudiadas parece desprenderse la posibilidad de obtener un equilibrio con masas opuestas de igual radio y velocidad que puedan crear fuerzas centrífugas contrarias.

### **CAPITULO 3.- Las vibraciones de los ejes cigüeñales.**

Como se dijo anteriormente, la fuerza de los gases, la fuerza de inercia y la gravedad someten al eje cigüeñal a vibraciones de flexión en los puntos muertos alto y bajo; y, simultáneamente, a vibraciones de flexión y a vibraciones de torsión en todas las demás posiciones angulares de cada una de las cigüeñas respecto del eje geométrico del cilindro que contiene a los referidos puntos muertos.

Según se obtiene de la descomposición de fuerzas en la figura 2, la fuerza F2 se descompone en la forma que allí se establece y da: la fuerza F3, que es la productora del par motor y como tal somete al eje motor a vibraciones de torsión, y la fuerza F4, que tiende a comprimir la cigüeña contra los cojinetes de bancada, somete al eje motor a vibraciones de flexión.

#### **3.1. Vibraciones de flexión.**

Las vibraciones de flexión se producen cuando el eje cigüeñal elástico es sacudido perpendicularmente a su eje longitudinalmente; entonces, el cigüeñal vibra dentro de sus segmentos entre apoyos. Pero cuando el número de vibraciones propio del cigüeñal coincide con el número de tiempos de las fuerzas excitatrices debidas al fluido y a la inercia de las

masas, se presenta una resonancia; esta manifestación ocurre para una particular velocidad angular del eje, que se la denomina velocidad angular crítica o, también, número de revoluciones crítico. Estas vibraciones de flexión se hacen peligrosas cuando con el mantenimiento del estado de vibración propio y la excitación va ligada una flexión del eje que lo somete a una exagerada fatiga.

También, las fuerzas centrífugas producidas por los ejes cigüeñales no equilibrados totalmente, originan un número de revoluciones crítico del eje, que hay que distinguir de lo anteriormente expuesto.

No obstante, aun en los casos en que no se alcance un estado peligroso del eje, las vibraciones producen cambios de cargas muy intensos sobre los cojinetes que determinan efectos de fuerzas libres hacia el exterior, que siempre resultan perturbadoras. Por ello, tanto en uno como en otro caso, debe de estudiarse el problema considerando:

#### **A) La influencia de la forma y del número de apoyos del eje.**

La longitud libre del eje cigüeñal entre dos apoyos que concurre en la determinación de su número de vibraciones propio y que está sometida a la acción de las fuerzas excitatrices, en los ejes de varias cigüeñas, depende del número total de apoyos.

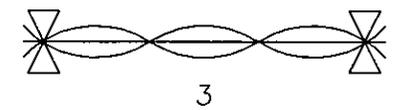
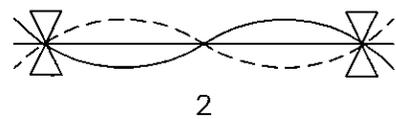
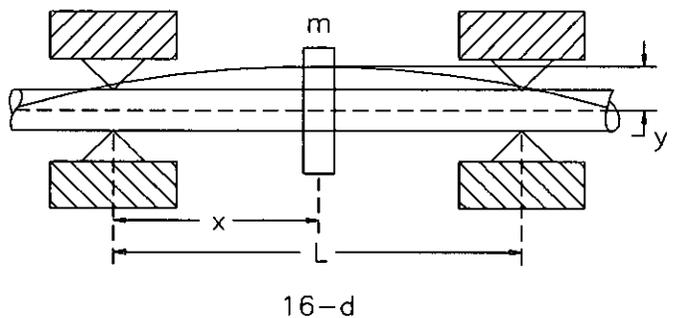
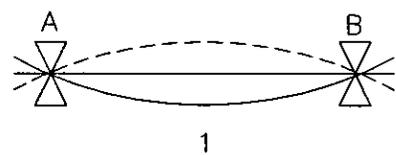
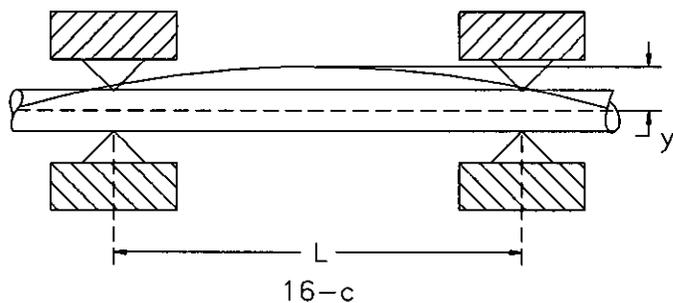
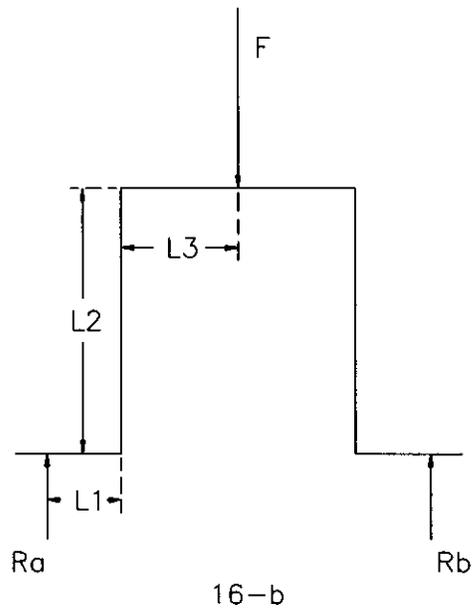
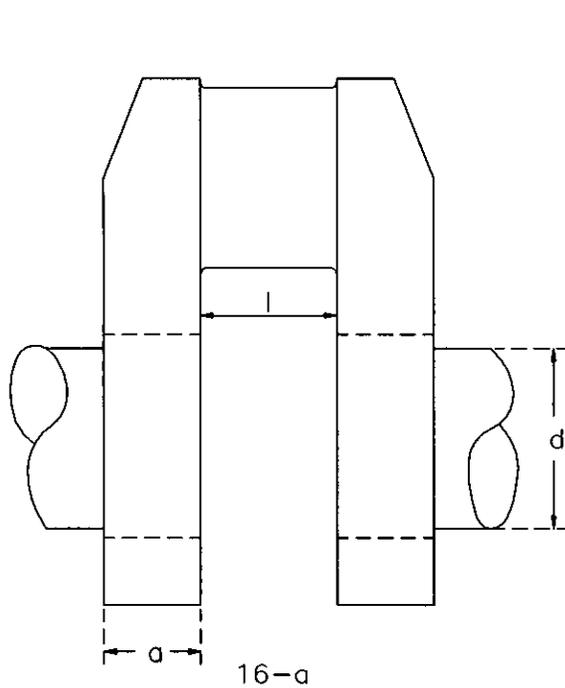
Se establece que los ejes cigüeñales se encuentran completamente apoyados, cuando se cumple la condición de que el número de apoyos o cojinetes de bancada es igual al número de cilindros mas uno, ( $N_a = N_c + 1$ ); en cuyo caso, cada cigüeña está apoyada sobre dos cojinetes; la luz entre apoyos es pequeña y, si los cojinetes son suficientemente rígidos, están bien alineados y correctamente ajustados, no se producen vibraciones de flexión peligrosas; ya que la manera de moverse el eje dentro de sus apoyos tiene una influencia esencial sobre

el número de vibraciones propio, estableciendo casos límites de tal influencia el apoyo libre, el apoyo esférico y el empotramiento del eje en sus apoyos; de forma que, un huelgo exagerado del eje sobre el cojinete tiene por consecuencia el que la forma de la vibración ya no está ligada con el número de apoyos; por lo que, en algunos casos, se presentan cargas de flexión excesivas que producen la rotura de ejes completamente apoyados que, en manera alguna, puede atribuirse a efectos de resonancia, sinó mas bien, a la carencia de puntos de apoyo aislados, al desigual desgaste de cojinetes y a una grande flecha producida por las fuerzas motrices que, combinadas con la elevada frecuencia de los cambios de acción de las fuerzas motrices determinan la fatiga del material en el tiempo.

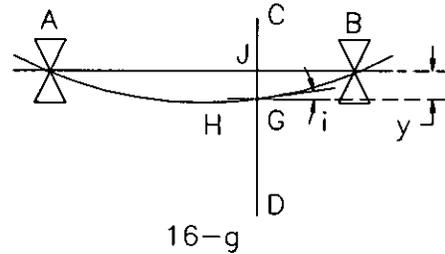
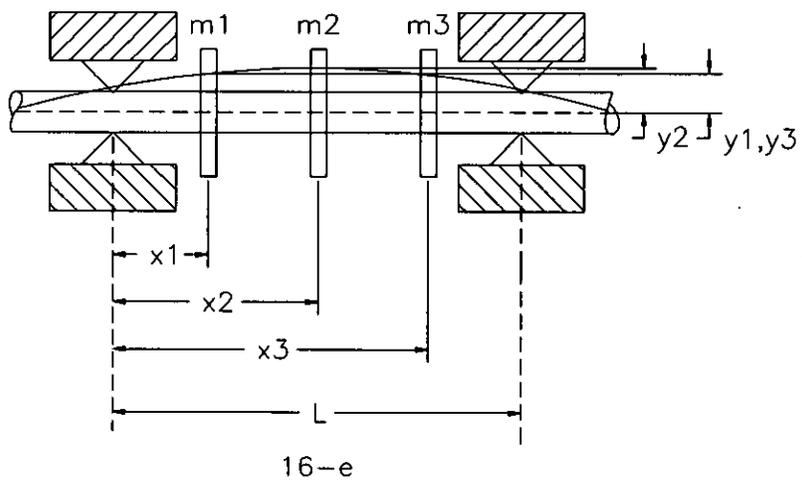
**B) La forma y número de vibraciones propias del eje.**

Por la geometría que presenta el eje cigüeñal, para emprender el estudio de los procesos dinámicos por medio del cálculo, es necesario partir de hipótesis fundamentales simplificadas que permiten referirse a los casos conocidos de la mecánica para el caso de los ejes uniformes y los ejes de sección transversal variable, estableciéndose:

**a) El eje equivalente.** En el cual, la referencia de un eje cigüeñal al caso mas simple de un eje uniforme desde el punto de vista de la flexión elástica, solo puede hacerse en forma aproximada, aplicándole las ecuaciones ordinarias de la resistencia de materiales correspondientes a las vigas sometidas a flexión; considerando la cigüeña, Fig. 16a, la cigüeña idealizada como una pieza de flechas comunes de igual elasticidad a la flexión y a la torsión. Propiedad física lícita, aunque resulte sumamente difícil el problema de calcular su flexibilidad.



16-f



**b) Las masas equivalentes.** En el que las masas giratorias de cada mecanismo compuesto por cada cigüeña, los contrapesos de equilibrado y la segunda masa de descomposición de la biela, así como las masas sometidas a movimiento rectilíneo alternativo, deben llevarse al eje equivalente, Fig. 16d, como masas de poca deformación, de forma tal que las masas equivalentes provoquen en el eje fenómenos de vibración iguales a los que producen las propias masas. En cuanto al volante y a otras masas volantes de otra clase, a fin de evitar consideraciones complicadas, se consideran como variaciones de sección transversal del eje, como poleas, pero que su centro de gravedad cae siempre sobre la línea elástica del eje.

En consecuencia, un eje provisto de  $N$  masas posee  $N$  diversas líneas de desviación, o grados de libertad, y tiene  $N$  número de vibraciones propio. Mientras las masas se agrupan sobre el eje, estos números se identifican con el número de revoluciones crítico del eje; puesto que, masas como el volante, hacen intervenir su inercia de torsión.

Teniendo en cuenta que la vibración básica o de primer orden tiene un vientre y ningún nodo entre los puntos de apoyo, todas las masas se desvían hacia el mismo lado al mismo tiempo; que la vibración de segundo orden tiene dos vientres y un nodo entre apoyos; que la vibración de tercer orden tiene tres vientres y dos nodos entre apoyos; y así sucesivamente, Fig. 16e. Entre las muchas posibilidades de las vibraciones de los ejes cigüeñales, hay que prestar especial atención a las vibraciones que se presentan en los planos principales, por causa de que para las vibraciones de primer orden, la carga da la flexión máxima y el número de revoluciones propio menor.

#### **a.1) El eje uniforme.**

En este caso se trata de una viga apoyada en sus extremos, bien con una carga uniformemente repartida, o bien con una carga concentrada en su punto medio. En ambos casos,

el estudio se realiza a partir de las ecuaciones generales de las vigas sometidas a flexión, en las que se denomina "línea elástica" de una viga a la línea determinada por la intersección de la superficie neutra y el plano de los pares flectores. Siendo en la viga rectilínea no cargada una línea recta; en la viga rectilínea cargada, es una curva cuya forma depende de la manera de ser de la viga, de sus apoyos o empotramientos y de la naturaleza y número de las cargas.

Recibe el nombre de "inclinación", para una sección dada, el ángulo que forma la línea elástica de la viga sin cargar y la de la viga cargada. En la sección considerada, a la distancia entre ambas líneas se la denomina "flecha". En la (Fig. 16-g) se observa que en la viga sin cargas la línea elástica es la recta AB, y después de cargada la viga es la curva AHB; trazando por G una paralela a AB y una tangente a HB, se forma el ángulo de inclinación  $i$ ; mientras que la distancia GJ entre ambas líneas elásticas dentro de la misma sección CD es la flecha  $y$ .

Cuando en una viga cualquiera se considera una carga "dQ" repartida sobre una longitud "dx", a la relación entre ambas se la denomina "carga puntual"  $W_0$ , de forma que:

$$W_0 = \frac{dQ}{dx}$$

Considerando ahora una sección cualquiera "S" situada a la distancia "dx" del origen arbitrario y cuyo esfuerzo cortante sea "dF", resulta que, tratándose de cargas repartidas, la relación entre "dF" y "dx" es, también, la carga puntual

$$W_0 = \frac{dF}{dx} \dots \dots \dots (59)$$

y que

$$dF = F \cdot dx$$

e integrando,

$$F = \int W_0 \cdot dx \dots \dots \dots (60)$$

Esta igualdad dice que el esfuerzo cortante en una sección dada vale la integral indefinida del producto de su carga puntual por la diferencial de la distancia de la sección considerada al origen.

Pero resulta que la referida sección "S" no solo se halla sometida al esfuerzo cortante "F", sino también a un par "M", de forma que este par viene dado por el producto del esfuerzo cortante por la distancia de la considerada sección al origen arbitrario, siendo:

$$dM = F \cdot dx \quad (61)$$

integrando

$$M = \int F \cdot dx \dots \dots \dots (62)$$

En la que sustituyendo F por su valor hallado en la (60), se tiene

$$M = \int (\int W_0 \cdot dx) \cdot dx$$

y que

$$M = \int \int W_0 \cdot dx^2 \dots \dots \dots (62)$$

Por otra parte, el radio de curvatura "R'" en un punto de una curva es el límite a que tiende la razón del incremento de longitud del arco al del ángulo, cuando este incremento tiende a cero. En resistencia de materiales es norma establecer que:

$$\frac{1}{R'} = \frac{di}{dx} \dots\dots(63)$$

Pero, también, de la (Fig. 16-g) se desprende que la inclinación, tratándose de pequeños ángulos, se admite que vale:

$$i = \text{tang. } i = \frac{dy}{dx} \dots\dots(64)$$

Resultando que:

$$\frac{1}{R'} = \frac{di}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

Pero siendo la diferencial de una función la derivada de esta función por la diferencial de la variable, y como la derivada de la derivada es la derivada segunda, resulta que:

$$\frac{1}{R'} = \frac{di}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots(65)$$

Por otra parte, considerando que dentro del límite elástico las deformaciones son proporcionales a las cargas, resulta que el módulo de elasticidad "E" o módulo de Young es capaz de producir en la viga una deformación "R'", la fatiga "q" considerada produce una deformación igual a la distancia "r" entre la fibra neutra y la mas alejada, se establece la

igualdad:

$$\frac{E}{q} = \frac{R'}{r}, \text{ o, } \frac{E}{R'} = \frac{q}{r}$$

Pero de acuerdo con la teoría de la flexión simple,

$$\frac{E}{R'} = \frac{M}{I}$$

Y también:

$$\frac{E}{R'} = \frac{M}{I} = \frac{q}{r}$$

Siendo "I" el momento de inercia de la sección recta de la viga sometida a flexión respecto del eje comprendido en la superficie neutra y "M" el momento flector; de cuya igualdad se obtiene:

$$\frac{1}{R'} = \frac{M}{E \cdot I}$$

Cuyo primer miembro de la igualdad, es el también primero de la ecuación (65), siendo, entonces:

$$\frac{1}{R'} = \frac{M}{I} = \frac{di}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots (66)$$

por lo que

$$M = E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \quad (67)$$

De los miembros de esta igualdad se deduce que

$$di = \frac{1}{R'} \cdot dx = \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx$$

integrando,

$$i = \int \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx \quad (68)$$

Que es la fórmula general de la inclinación; pero que, también, sustituyendo "M" por su valor hallado en la (62); resulta que

$$i = \int \frac{1}{E \cdot I} \iint W_0 dx^2 \cdot dx$$

y también

$$i = \int \frac{1}{E \cdot I} \iiint W_0 \cdot dx^3 \dots \dots (69)$$

De la ecuación (61) se obtiene que el esfuerzo cortante vale:

$$F = \frac{dM}{dx}$$

Sustituyendo dM por su valor hallado en la ecuación (68) se tiene:

$$F = \frac{d(E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2})}{dx}$$

Resolviendo,

$$F = E \cdot I \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} \dots \dots (70)$$

Que es la fórmula general del esfuerzo cortante.

Sustituyendo de acuerdo con la ecuación (70) en la (59) resulta:

$$W_0 = \frac{d(E.I. \frac{d^3y}{dx^3})}{dx}$$

Y resolviendo,

$$W_0 = E.I. \frac{d^4y}{dx^4} \dots \dots \dots (71)$$

Que es la ecuación general de la carga puntual, y en vigas con carga uniformemente repartida se la denomina carga por unidad de longitud.

De la ecuación (64) se obtiene que:

$$dy = i dx$$

integrando

$$y = \int i . dx \dots \dots \dots (72)$$

Esta igualdad dice que la flecha en una sección dada tiene por valor la integral indefinida del producto de su inclinación por la distancia de la sección considerada al origen.

Sustituyendo de acuerdo con la ecuación (69) en la (72) se obtiene:

$$y = \int \frac{1}{EI} \int \int W_0 . dx^3 . dx$$

y también

$$y = \int \int \int \frac{1}{EI} \int W_0 . dx^4 \dots \dots \dots (73)$$

Las ecuaciones (a) carga puntual; (60), esfuerzo cortante;

(62) y (68), momento flector; (69), inclinación; (73), flecha, son las ecuaciones generales de las vigas sometidas a flexión, aplicables a todos los casos particulares de las mismas.

También es norma usual expresar gráficamente los resultados obtenidos mediante los diagramas representados en la (fig. 17).

Partiendo de estas ecuaciones generales se obtienen las ecuaciones del eje uniforme con carga uniformemente repartida, que puede ser la de su propio peso, donde para el esfuerzo cortante, ecuación (60), se tiene:

$$F = \int W_0 \cdot dx$$

integrando

$$F = W_0 \cdot x + A \quad (74)$$

siendo A la constante de integración.

Para el momento flector, ecuación (62), se tiene:

$$\begin{aligned} M &= \int F \cdot dx \\ M &= \int (W_0 \cdot x + A) dx \\ M &= W_0 \cdot \frac{x^2}{2} + Ax + B \dots (75) \end{aligned}$$

En la figura se observa que "x" se extiende desde (x=0) y (x=l). Pero que, en ambos casos, el momento flector es nulo; en el primer caso porque a la izquierda del apoyo izquierdo no hay fuerzas, y en el segundo caso porque a la derecha del apoyo derecho no hay fuerzas, resultando que la constante de integración "B=0; por lo que, la ecuación (75) para (B=0), da:

$$\begin{aligned} 0 &= W_0 \cdot \frac{l^2}{2} + Al + 0 \\ A &= -\frac{W_0 l}{2} \end{aligned}$$

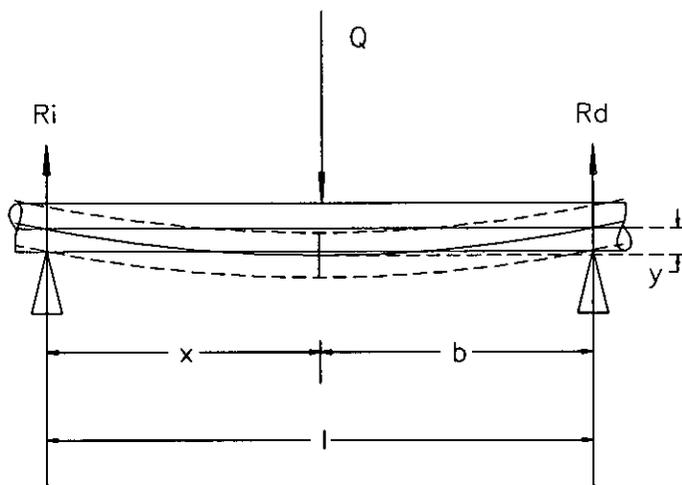
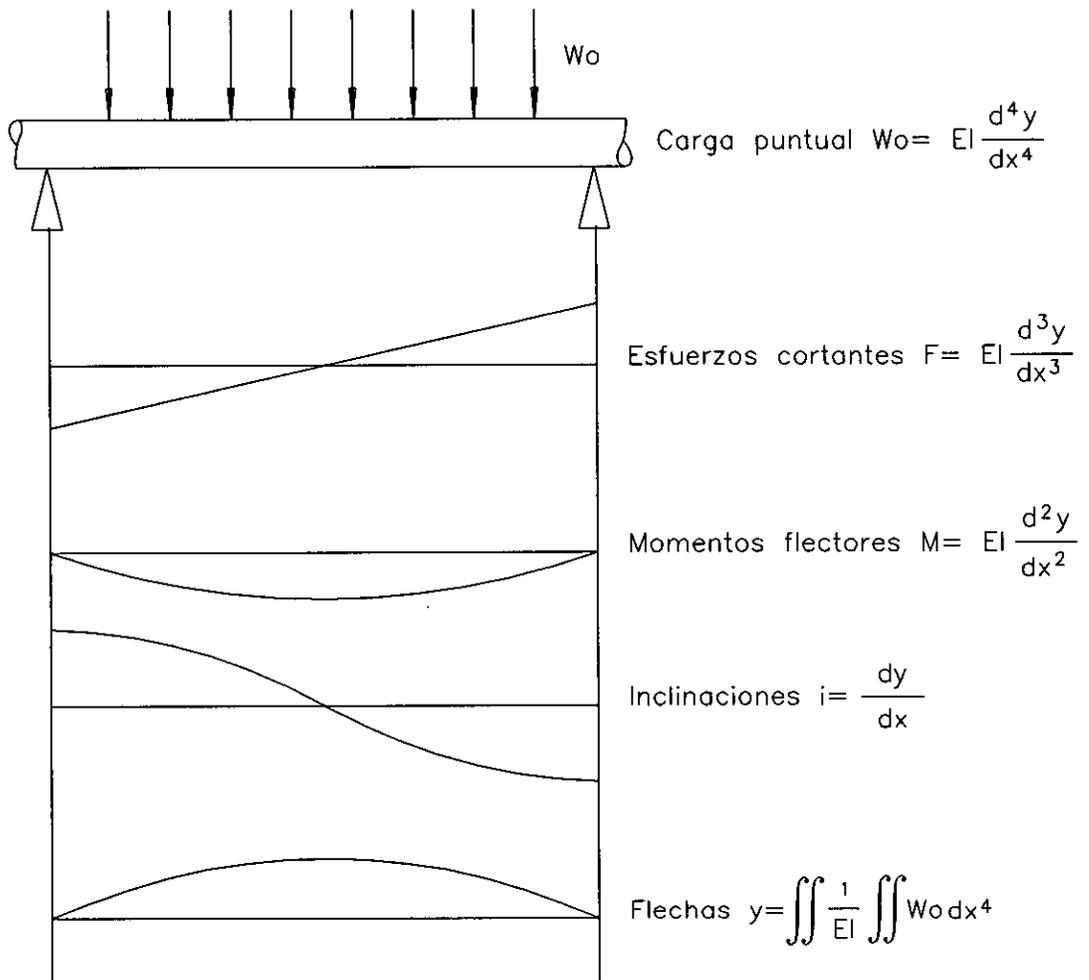


Fig. 17

Entonces, los valores obtenidos para "A" y "B" dan a las ecuaciones (74) y (75) la forma:

$$F=W_0(x-\frac{l}{2}).(76)$$

$$M=\frac{W_0}{2}(x^2-lx).(77)$$

De la ecuación (67) que da que la inclinación es:

$$i=\frac{1}{E.I}\int M.dx$$

Sustituyendo M por su valor dado en la ecuación (77) se tiene:

$$i=\frac{1}{EI}\int\frac{W_0}{2}(x^2-lx)dx$$

$$i=\frac{1}{EI}\cdot\frac{W_0}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{lx^2}{2}+G\right)\dots(78)$$

Y para la flecha, sustituyendo en la ecuación (72) haciendo:

$$y=\int i.dx$$

$$y=\int\frac{W_0}{2EI}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{lx^2}{2}+G\right)dx$$

$$y=\frac{W_0}{2EI}\left(\frac{x^4}{12}-\frac{lx^3}{6}+Gx\right)+D\dots(79)$$

Resultando que para  $(x=0)$ , la flecha es nula, puesto que la sección considerada está sobre el apoyo de la izquierda y la constante de integración  $(D=0)$ ; pero también para  $(x=l)$ , la flecha es nula, por encontrarse la sección considerada sobre el apoyo de la derecha, por lo que:

$$0=\frac{W_0}{2EI}\left(\frac{l^4}{12}-\frac{l^4}{6}+Gl\right)$$

de donde

$$GI = \frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12}$$
$$G = \frac{l^3}{12}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (78) y (79) se obtienen:

$$i = \frac{W_0}{2EI} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} + \frac{l^3}{12} \right) \dots (80)$$

$$y = \frac{W_0}{12EI} \left( \frac{x^4}{2} - lx^3 + \frac{l^3x}{2} \right) \dots (81)$$

De las ecuaciones (76), (77), (80) y (81) se obtienen los diagramas representados en la (Fig. 17)

En las aplicaciones es norma usual tomar los valores máximos alcanzados por las ecuaciones (76), (77), (80) y (81)

De la ecuación (76), siendo la carga puntual ( $W_0$ ) constante, el esfuerzo cortante sigue las variaciones del paréntesis que en ella figura; por tanto, será nulo para ( $x=l/2$ ) y máximo para cuando ( $x=l$ ), resultando que:

$$F_{m\acute{a}x} = \pm W_0 \frac{l}{2}$$

De la ecuación (77) también se deduce que el momento flector sigue las variaciones del paréntesis que en ella figura; a fin de dilucidar cual es su valor máximo, se calculan las derivadas primera y segunda, y se obtiene de la función:

$$Z = x^2 - lx$$
$$Z' = 2x - l$$
$$Z'' = 2$$

Puesto que la segunda derivada da un valor positivo y que la primera se anula para cuando  $(2x=1)$ , el valor mínimo se obtendrá cuando

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Y el momento flector vale:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{W_0}{2} \left( \frac{1^2}{4} - \frac{1^2}{2} \right)$$

$$M_{m\acute{a}x} = -\frac{W_0 \cdot 1^2}{8}$$

De la ecuación (80), siendo el módulo de elasticidad (E) constante y el momento de inercia (I) también constante; la inclinación (i) varía con arreglo a la variación del paréntesis que en ella figura, su valor máximo se obtiene calculando las derivadas primera y segunda de la función

$$Z = \frac{x^3}{3} - \frac{1x^2}{2} + \frac{1^3}{12}$$

$$Z' = \frac{3x^2}{3} - \frac{21x}{2}$$

$$Z' = x^2 - 1x$$

$$Z' = x(x-1)$$

$$Z'' = 2x - 1$$

La primera derivada se anula para cuando

$$x(x-1) = 0$$

Como solo puede tomar valores comprendidos entre  $(x=0)$  y  $(x=1)$ , existirán dos raíces, una raíz que vale  $(x=0)$  y la otra que vale  $(x=1)$ , donde para  $(x=0)$  la derivada segunda es negativa, por lo que la inclinación es máxima; para  $(x=1)$  la

derivada segunda es positiva y la inclinación es máxima, resultando que:

$$i_{m\acute{a}x} = \frac{W_0}{2EI} \left( \frac{x_3}{3} - \frac{lx^2}{2} + \frac{l^3}{12} \right)$$

$$i_{m\acute{a}x} = \frac{W_0}{2EI} \cdot \frac{l^3}{12} = \frac{W_0 l^3}{24EI}$$

$$i_{m\grave{i}n} = \frac{W_0}{2EI} \left( \frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{2} + \frac{l^3}{12} \right)$$

$$i_{m\grave{i}n} = \frac{W_0}{2EI} \left( -\frac{l^3}{12} \right) = -\frac{W_0 l^3}{24EI}$$

y la inclinación se anula para cuando  $(x=l/2)$ .

De la ecuación (81) se deduce que la flecha sigue las variaciones del paréntesis que en ella figura, y su valor máximo se obtendrá calculando las derivadas primera y segunda de la función

$$Z = \frac{1}{2} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

$$Z' = \frac{1}{2} (4x^3 - 6lx^2 + l^3)$$

$$Z'' = \frac{1}{2} (12x^2 - 12lx)$$

La función  $Z'$  se anula para

$$4x^3 - 6lx^2 + l^3 = 0$$

Por causa de los apoyos se puede determinar que la ecuación correspondiente tiene las raíces  $(x=0)$  y  $(x=l)$ ; no obstante, el único valor que debe tomarse en cuenta es  $(x=l/2)$ , que llevado a la segunda derivada, la hace negativa; se trata, pues, de un máximo que se obtiene introduciendo este valor de

(x) en la ecuación (81), y se obtiene:

$$Y_{m\acute{a}x} = \frac{W_0}{24EI} \left( \frac{l^4}{16} - \frac{2l^4}{8} + \frac{l^4}{2} \right)$$
$$Y_{m\acute{a}x} = \frac{W_0}{24EI} \left( \frac{l^4}{16} - \frac{4l^4}{16} + \frac{8l^4}{16} \right)$$
$$Y_{m\acute{a}x} = \frac{5 \cdot W_0 \cdot l^4}{384EI}$$

Para el caso de la viga apoyada en sus extremos y una carga (Q) concentrada en su punto medio (Fg. 17), cada apoyo está soportando la carga (Q/2) y, en consecuencia, en cada uno de los apoyos se establece la reacción correspondiente, de forma que el momento flector de la carga (Q) aplicada en la sección (S) a la distancia (x) del apoyo tomado como origen, el cual tiende a hacer girar la viga en el sentido de la carga, se halla equilibrado por el momento que produce la reacción del apoyo, por la distancia (l) al otro apoyo, de forma que:

$$Q \cdot x = R_d \cdot l$$

y también

$$Q ( l - x ) = R_i \cdot l$$

de donde

$$R_d = \frac{Q \cdot x}{l}$$
$$R_i = \frac{Q(l-x)}{l}$$

Y haciendo ( l - x = b ), también:

$$R_i = \frac{Q \cdot b}{l}$$

Respecto al esfuerzo cortante, se observa que toda sección comprendida entre G y B tiene a su derecha la única fuerza  $R_i$ , siendo así, el esfuerzo cortante de todas estas secciones; a partir de G, hacia A, toda sección tiene a su derecha la fuerza  $R_i$  hacia arriba y la  $Q$  hacia abajo, en consecuencia, el esfuerzo cortante vale,

$$F = Q - R_i$$

o sea, una fuerza hacia abajo, por consiguiente, el esfuerzo cortante cambia de signo en G, donde el momento flector es máximo. Haciendo ( $x = l/2$ ), el esfuerzo cortante vale:

$$F = Q - \frac{Q}{l} \left( l - \frac{l}{2} \right) \dots\dots (83)$$

$$F = \frac{Q}{2}$$

De todo lo expuesto, se infiere que el esfuerzo cortante es, en valor absoluto, constante a lo largo de toda la viga, vale la mitad de la carga ( $Q$ ) y cambia de signo en el punto de aplicación de la referida carga.

El momento flector vale:

$$M = \int F \cdot dx$$

$$M = \int \frac{Q}{2} \cdot dx$$

$$M = \frac{Q}{2} \cdot x + A$$

Para ( $x=0$ ) el momento flector es nulo, puesto que a la izquierda del apoyo de la izquierda no hay fuerzas, y para ( $x=l$ ) también lo es, puesto que a la derecha del apoyo de la derecha tampoco hay fuerzas; de esta consideración y por lo

expuesto anteriormente, se infiere que el momento flector máximo se alcanza para cuando  $(x = l/2)$ , siendo:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{Q \cdot l}{4} \dots\dots\dots(84)$$

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{Q \cdot b}{l} \cdot x$$

Pero este momento es igual y contrario al deducido en la ecuación (68), siendo:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q \cdot b}{l} \cdot x$$

Integrando esta igualdad se obtiene:

$$EI \int \frac{d^2y}{dx^2} = -\int \frac{Q \cdot b}{l} \cdot x \cdot dx$$

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{Q \cdot b}{2l} \cdot x^2 + C$$

De esta expresión se obtiene la inclinación (i), ya que:

$$i = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{Q \cdot b}{2l} \cdot x^2 + C \right)$$

Integrando por segunda vez la expresión anterior, se tiene:

$$EI \int \frac{dy}{dx} = -\int \left( \frac{Q}{2l} \cdot b \cdot x^2 + C \right) \cdot dx$$

$$EI \cdot y = -\frac{Q}{6l} \cdot b \cdot x^3 + Cx + C'$$

De la que se obtiene que la flecha (y) vale:

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{Q}{6} l \cdot b \cdot x^3 + Cx + C' \right)$$

Pero para (x = 0), la flecha es nula, puesto que la sección considerada está sobre el apoyo de la izquierda, y para (x = l), la flecha es también nula, porque la sección considerada se halla sobre el apoyo de la derecha; si se introducen estos valores de (x = 0), (x = l) y (y = 0) en la ecuación anterior, resulta que (C' = 0), y da:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{Q}{6l} \cdot b \cdot x^3 + Cx \right) \\ 0 &= -\frac{Q}{6l} \cdot b \cdot x^3 + Cx \\ C &= \frac{Q}{6l} \cdot b \cdot x^2 \\ 0 &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{Q}{6l} \cdot b \cdot x^3 + \frac{Q}{6l} \cdot b \cdot x^3 \right) \\ 0 &= \frac{Q}{6lEI} \cdot 2b \cdot x^3 \end{aligned}$$

Haciendo (b = x) y (x = l/2), resulta que:

$$\begin{aligned} y &= \frac{Q}{6l \cdot EI} \cdot \left( \frac{l^4}{16} + \frac{l^4}{16} \right) \\ y &= \frac{Q \cdot l^3}{48EI} \dots \dots \dots (85) \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de (C) en la ecuación de la inclinación, se tiene:

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{Q}{2l} \cdot b \cdot x^2 + \frac{Q}{6l} \cdot b \cdot x^2 \right) \\ i &= \frac{Q \cdot l^2}{12EI} \dots \dots \dots (86) \end{aligned}$$

Se considera la carga (Q) concentrada en el plano vertical transversal que contiene al eje geométrico del cilindro.

Por todo lo hasta aquí expuesto, considerando, por una parte, que el eje tiene su propio peso y, por otra, que se encuentra sometido a la acción de la carga (Q), la flecha o deformación elástica experimentada por el eje vale la suma de las obtenidas por las ecuaciones (81) y (85), siendo:

$$y_t = \frac{5 \cdot W_0 \cdot l^4}{384 \cdot EI} + \frac{Q \cdot l^3}{48 \cdot EI} \dots (87)$$

#### **b.1) Las masas equivalentes.**

Teniendo en cuenta la geometría de la cigüeña, según se representa en la Fg. 16-a, ésta se compone de dos brazos, de un muñón entre ambos, que recibe a la biela, y de los dos gorriones que saliendo de ambos brazos, se apoyan en los dos cojinetes correspondientes, formando el conjunto un sistema rígido.

Se puede considerar, entonces, una barra sin peso apoyada en dos soportes rígidos que soportan tres masas, la  $m_1$ , del brazo de la izquierda, la  $m_2$  del muñón y la  $m_3$  del brazo de la derecha, como se representa en la Fg. 16-e. Designando por  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  las deformaciones elásticas de estas masas; la reducción se hace en el centro de la extensión del eje, para lo cual se halla la distancia del centro de gravedad de cada masa aislada referida al centro del apoyo tomado como referencia, y se reduce de manera que haciéndola oscilar se mantenga la energía cinética de las masas; admitiendo para la línea elástica del eje, como es norma en resistencia de materiales, la forma de una parábola de grado elevado.

Resultando que para la masa  $m_1$  con la desviación  $y_1$ , la energía cinética vale:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m_1 \left( \frac{dy_1}{dt} \right)^2$$

Que igualándola con la fuerza elástica de esta masa, se obtiene la primera de las ecuaciones del movimiento objeto de estudio; pero esta fuerza es la resultante de la diferencia entre los esfuerzos cortantes laterales en el eje de la izquierda y a la derecha de la masa  $m_1$ ; magnitud que depende de las tres deformaciones  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ; pero esta interacción presenta dificultades en cuanto a cálculo, por ello se puede recurrir a tratar su elasticidad con los números de influencia, entendiéndolo como tal a la deformación de una masa originada por la fuerza aplicada sobre otra masa; resultando en este caso que, por tratarse de tres masas sobre un eje, hay tres números de influencia directos  $z_{11}$ ,  $z_{22}$ ,  $z_{33}$ , donde la fuerza unitaria y la de deformación se miden en la misma posición  $y$ , por lo que ya se dijo, hay seis números de influencia cruzados,  $z_{11}$ ,  $z_{21}$ ,  $z_{13}$ ,  $z_{31}$ ,  $z_{23}$ ,  $z_{32}$ , donde las posiciones son diferentes. Pero si hay reciprocidad, según el teorema de Maxwell al respecto, resulta que:

$$z_{12} = z_{21}$$

Es norma usual en estos casos referir los estudios a una fuerza unitaria; entonces, la interpretación del número de influencia es: la deformación en un punto originada por una fuerza unitaria en otro punto es igual a la deformación en el segundo punto originada por la carga unitaria en el primero. El cálculo de estos números de influencia puede realizarse por medio de los principios de resistencia de materiales ya expuestos. Considerando en la posición  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , la

deformación máxima del eje; con aquellos números de influencia, y teniendo en cuenta que las masas poseen aceleraciones dadas por la derivada segunda de  $y$ , que por la fórmula fundamental de la dinámica experimentan las fuerzas

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2}$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2}$$

$$m_3 \cdot \frac{d^2 y_3}{dt^2}$$

Pero si estas fuerzas son ejercidas por el eje sobre las masas; las masas ejercen sobre el eje las fuerzas de inercia

$$-m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2}$$

$$-m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2}$$

$$-m_3 \cdot \frac{d^2 y_3}{dt^2}$$

Que son las ecuaciones correspondientes al movimiento; por lo que, la deformación en cada una de las masas originada por estas tres fuerzas es:

$$Y_1 = Z_{11} \cdot m_1 \cdot a_1 - z_{12} \cdot m_2 \cdot a_2 - z_{13} \cdot m_3 \cdot a_3$$

$$Y_2 = z_{21} \cdot m_1 \cdot a_1 - z_{22} \cdot m_2 \cdot a_2 - z_{23} \cdot m_3 \cdot a_3 \quad (88)$$

$$Y_3 = z_{31} \cdot m_1 \cdot a_1 - z_{32} \cdot m_2 \cdot a_2 - z_{33} \cdot m_3 \cdot a_3$$

Las tres ecuaciones del sistema (88) determinan los tres movimientos desconocidos  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ .

Pero estas deformaciones elásticas implican un movimiento de rotación sobre el apoyo tomado como origen; y si el radio de giro de cada masa es  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ , y se toma como el coeficiente de Fourier de  $(\text{sen } \omega t)$ , resulta que:

$$y_1 = r_1 \cdot \text{sen } \omega t$$

$$y_2 = r_2 \cdot \text{sen } \omega t$$

$$y_3 = r_3 \cdot \text{sen } \omega t$$

Y siendo la aceleración centrífuga el producto del cuadrado de la velocidad angular por el radio, también:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \omega^2 \cdot r_1$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \omega^2 \cdot r_2$$

$$\frac{d^2 y_3}{dt^2} = \omega^2 \cdot r_3$$

Que substituyéndolas en el sistema (88), se obtiene:

$$r_1 = z_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 + z_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2 + z_{13} \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3$$

$$r_2 = z_{21} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 + z_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2 + z_{23} \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3$$

$$r_3 = z_{31} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 + z_{32} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2 + z_{33} \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot r_3$$

Si ambas igualdades se dividen por el cuadrado de la velocidad angular y se ordenan, se observa que son homogéneas

en  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ , resultando

$$\begin{aligned}
 0 &= (z_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{w^2}) \cdot r_1 + z_{12} \cdot m_2 \cdot r_2 + z_{13} \cdot m_3 \cdot r_3 \\
 0 &= z_{21} \cdot m_1 \cdot r_1 + (z_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{w^2}) \cdot r_2 + z_{23} \cdot m_3 \cdot r_3 \quad (89) \\
 0 &= z_{31} \cdot m_1 \cdot r_1 + z_{32} \cdot m_2 \cdot r_2 + (z_{33} \cdot m_3 - \frac{1}{w^2}) \cdot r_3
 \end{aligned}$$

**B-1 ) La disposición de las masas en la cigüeña.**

Establecidas las hipótesis fundamentales simplificadas referidas al eje equivalente de sección constante y a las masas equivalentes que provoquen en el eje fenómenos de vibración iguales a los que producen las propias masas, se procede al estudio de la flecha que la carga  $F$  produce por flexión en el plano del codo en cada una de las partes componentes los gorriones, los brazos de cigüeñal y el muñón como se representa en la Fg. 16-a y su elástica Fg. 16-b.

En cuanto a la deformación de los gorriones y del muñón nada hay que objetar respecto de su deformación por flexión que no se haya tratado anteriormente. Queda por tratar ahora la deformación experimentada por los brazos de cigüeñal. En principio, la carga  $F$  los somete a compresión, y si los gorriones no sufren desplazamiento axial, pueden sufrir flexión y quedar cargados como si fuera una viga; los brazos se curvan tendiendo a convergir o divergir sus elásticas en el centro, entre muñón y gorriones, produciendo el flameo de los mismos, acortando el radio de cigüeñal, sin incrementar la flecha total, suma de gorriones y muñón. Pero por causa de la flexión de aquellos y del desplazamiento axial de los gorriones, los brazos sufren flexión y sus elásticas tienden a convergir o

divergir respecto del muñón, y la flecha que experimentan incrementa la de los gorriones y la del muñón, siendo la flecha total

$$Y_t = Y_g + Y_b + Y_m \quad (90)$$

No obstante a cuanto antecede, las dificultades que presentan las teorías expuestas para el sistema de sustitución al eje uniforme y a las masas equivalentes; ambas son de gran utilidad al estudio que en este caso se pretende.

Para una mejor comprensión de las deformaciones que experimenta el eje como consecuencia de la fuerza  $F$  y las reacciones  $R_a$  y  $R_b$  de los cojinetes, el doctorando fundamenta el estudio, según su criterio, en secuencias, a la ocurrencia de las causas y sus efectos. Para ello, considérese, en primer lugar, el muñón empotrado o apoyado en las secciones  $S'$  de los brazos de cigüeñal y que tanto estos como los gorriones forman un sistema rígido e indeformable, pero que son susceptibles de variar su orientación por las deformaciones de aquel. En este caso, solo el muñón experimenta deformación por flexión, y la fuerza  $F$  puede considerarse como una fuerza puntual aplicada en el punto medio de la longitud del muñón, o como una carga uniformemente repartida sobre todo el muñón, por estar éste abrazado por el cojinete de cabeza de biela. Parece entonces mas razonable realizar el estudio, por una parte, conforme a una viga con carga uniformemente repartida y, por otra parte si el considerado sistema rígido le permite deformarse a su albedrío, como una viga apoyada en sus extremos; en cuyo caso, le es de aplicación la ecuación (73)

$$y_m = \iiint \frac{1}{EI} \iiint W_0 \cdot dx^4 \quad (91)$$

Establecida como ecuación general de la flecha para vigas sometidas a flexión; si bien, teniendo en cuenta que  $W_0$  viene dada por la relación

$$\frac{F}{l} = \frac{2 Q}{l}$$

también

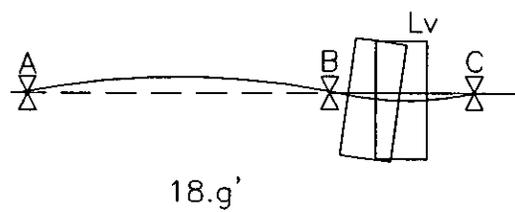
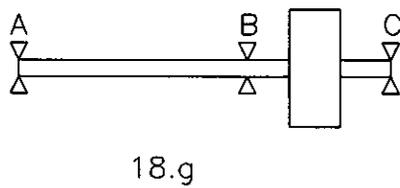
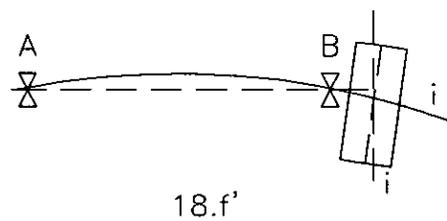
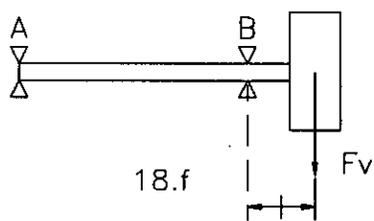
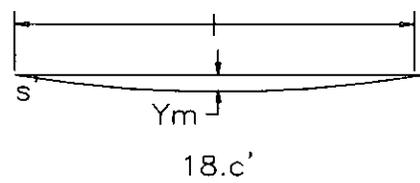
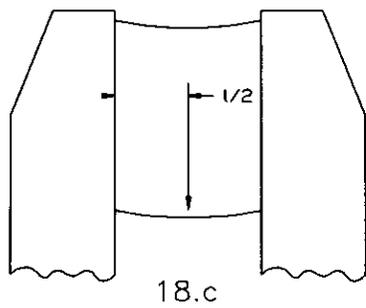
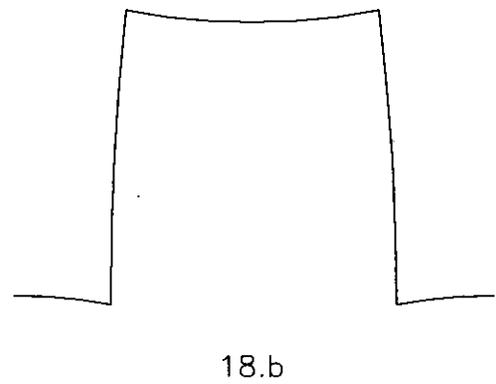
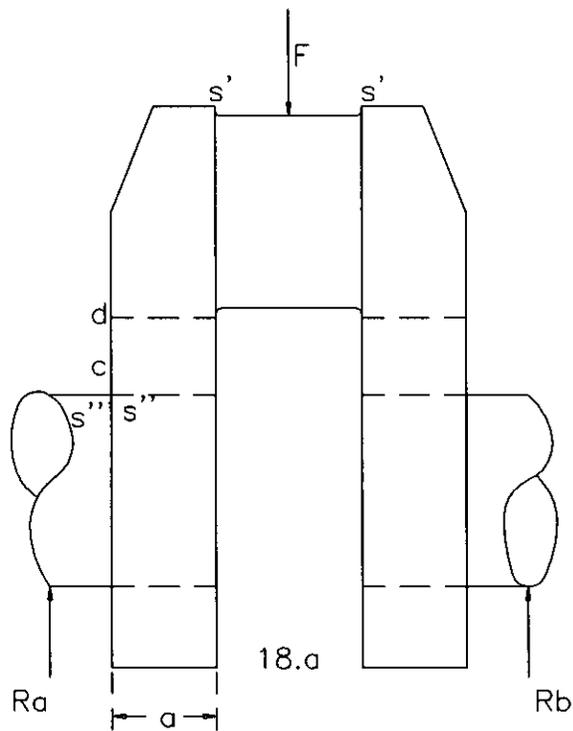
$$y_m = \iint \frac{1}{EI} \iint \frac{2Q}{l} dx^4 \quad (91')$$

Pero resolviendo a partir de la ecuación (81) se obtuvo que la flecha máxima vale,

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{5 \cdot W_0 \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} \\ y_m &= \frac{2 \cdot Q}{l} \frac{5 \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} \\ y_m &= \frac{10 \cdot Q \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I} \quad (91'') \end{aligned}$$

Para determinar la flecha producida en cada brazo de cigüeñal, se considera que la fuerza  $F$  es puntual en  $l/2$  y actúa sobre los dos brazos con igual intensidad  $Q = F/2$ . Entonces, considerando rígidos e indeformables los gorriones y el muñón, solamente sufre deformación por flexión la zona de brazos comprendida entre los límites  $c-d$ ; se trata, por tanto, de una viga en voladizo, empotrada por  $c-c'$  y libre por  $d-d'$ , con la carga  $Q$  concentrada en  $G$ , a la distancia  $l/2$  de la elástica del brazo, Fg. 18d, alcanzando la inclinación  $i$ , Fg. 18d', verificándose, ecuación (67), que

$$i = \int \frac{M}{E I} dx$$



y como de la ecuación (83) se infiere que el momento flector vale,

$$M = \int Q dx'$$

Según se indica en la Fg. 18d,  $x'$  se extiende desde la elástica hasta G, por lo que, el momento flector vale

$$M = Q l_2$$

La ecuación (72) da el valor de la flecha, estableciéndose sucesivamente

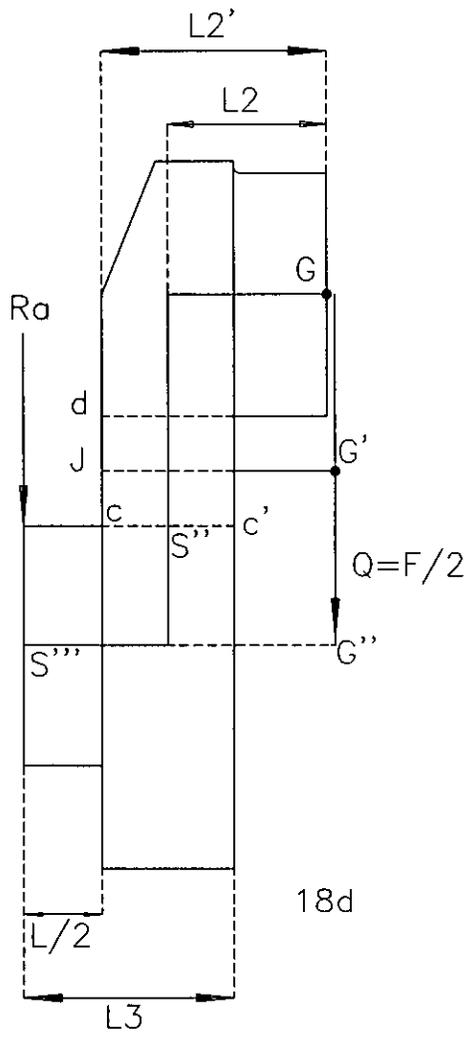
$$\begin{aligned} y &= \int i dx \\ y_b &= \int \frac{Q l_2}{E I} x dx \quad (92) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $x$  se extiende desde  $c$  hasta  $d$ , según se desprende de la figura, alcanza la dimensión  $(R-d)$ , siendo  $R$  el radio del cigüeñal y  $d$  el diámetro del muñón, que lo es también del gorrón, que resolviendo se tiene

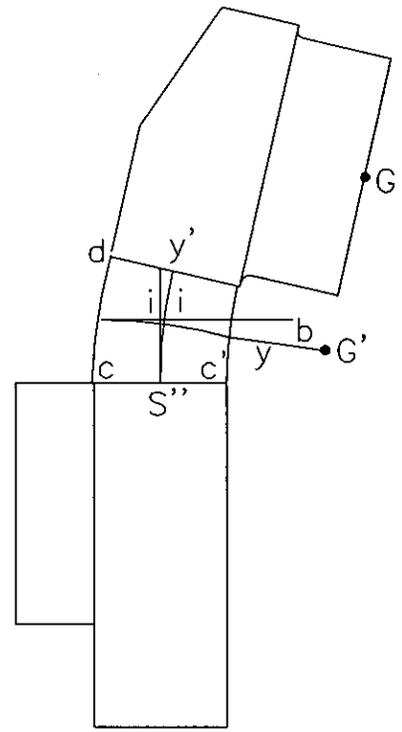
$$y_b = \frac{Q l_2}{2 E I} (R - d)^2$$

Pero, también de la Fg. 18d, se observa que la fibra J-J', situada en  $cd/2$ , al sufrir deformación la zona de brazo entre las secciones  $c-d$ , alcanza, salvo el efecto de oblicuidad, la misma inclinación "i", como si el brazo estuviera empotrado por la sección  $c-d$ , siendo

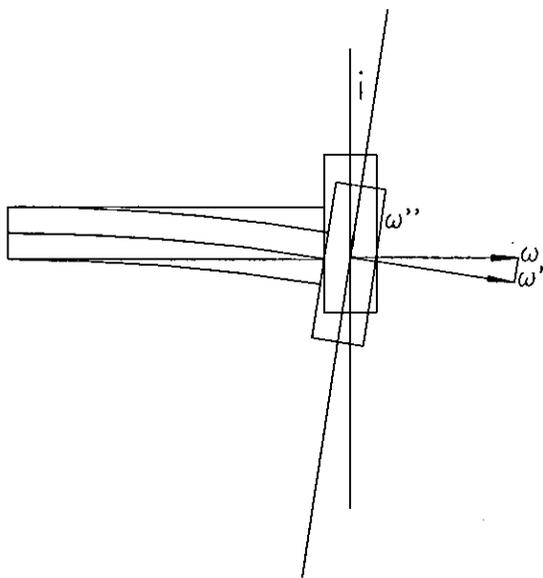
$$i = \int \frac{M}{E I} dx''$$



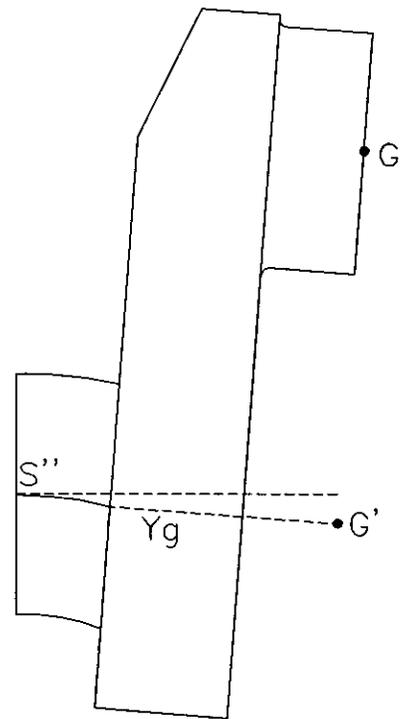
18d



18d'



18h



18e

y como  $x$  se extiende desde c-d hasta G, el momento flector vale

$$M = Q l_2'$$

De la misma ecuación (72) se establece que la flecha vale

$$y_b = \int \frac{Q l_2'}{E I} x dx \quad (92')$$

y como  $x$  se extiende desde c hasta c', que es la dimensión "a" del brazo, resolviendo se tiene

$$y_b = \frac{Q l_2'}{2 E I} a^2$$

Para determinar la flecha producida en el gorrón del eje, se considera que los brazos y el muñón son rígidos e indeformables, pero que son susceptibles de variar su orientación por las deformaciones experimentadas por el gorrón, que se considera empotrado en el centro del cojinete por la sección S''; en cuyo caso, el gorrón se comporta como una viga en voladizo y una carga Q concentrada en G, a la distancia  $l_3$  de S'', como se representa en la Fg. 18e, por lo que le son de aplicación los mismos razonamientos propuestos para los brazos, siendo la inclinación

$$i = \int \frac{Q l_3}{E I} dx$$

Y para la flecha, se tiene que

$$y_g = \int \frac{Q l_3}{E I} x dx \quad (93)$$

Teniendo en cuenta que en este caso "x" se extiende desde S'' hasta c, y que vale l/2, resolviendo

$$y_g = \frac{Q l_3}{8 E I} l^2$$

La ecuación (90), resulta de la forma

$$y_t = \iiint \frac{1}{E I} \iiint \frac{2 Q}{I} dx^4 + \int \frac{Q l_2'}{E I} x dx + \int \frac{Q l_3}{E I} x dx \quad (94)$$

Que resolviendo y teniendo en cuenta que Q es F/2, y que se trata de partes que componen la cigüeña de geometría diferente; si bien el módulo de elasticidad E depende de la naturaleza del material y no de la geometría de las piezas, el momento de inercia "I" depende exclusivamente de la geometría de las partes componentes; por ello, siendo el muñón y los gorriones de geometría cilíndrica, su sección, según el plano vertical transversal, normal al plano longitudinal vertical en que se ha considerado la cigüeña para su estudio, es una sección circular, y su momento de inercia viene dado por la dimensión transversal de la fibra normal al plano de estudio que contenga a la elástica, que viene a ser el diámetro del círculo, y vale

$$I = \frac{1}{2} \int r^2 ds$$

y por ser "ds" la superficie del círculo

$$I_m = I_g = \frac{\pi d^4}{64}$$

Mientras que para los brazos de cigüeña, su sección, según el plano longitudinal transversal, normal al plano de estudio, es una sección rectangular cuya dimensión longitudinal es "a" y la dimensión transversal es "b", y el momento de inercia viene dado respecto del eje transversal de la fibra que contenga a la elástica y vale

$$I = 2 \int r^2 ds$$

y por ser "ds" la superficie de un rectángulo

$$I_b = \frac{b a^3}{12}$$

resultando

$$y_t = \frac{5 F}{384 E I_m} l^3 + \frac{F l^2}{4 E I_b} a^2 + \frac{F l_3}{16 E I_g} l^2 \quad (95)$$

Establecida la deformación de la cigüeña por la flecha producida, se puede aplicar cualesquiera de los sistemas simplificados ya estudiados, **el eje uniforme, o las masas equivalentes.**

Pero si existe deformación de la cigüeña, hay trabajo producido por el momento flector, proporcional a la flecha alcanzada, dado por la ecuación

$$\tau_p = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 f}{E I} dx \quad (96)$$

y una energía potencial acumulada en el eje elástico por este

trabajo de flexión. En consecuencia [H.S.] y [D.H.] establecen la proposición:

Si una viga se halla bajo un régimen de vibración contínuo, a una cierta frecuencia natural, la carga que sobre ella actúa, es una carga de inercia alterna.

Entonces, adviértase que donde la deformación es máxima, ecuación (95), cada partícula de la viga experimentará una aceleración máxima contraria a la deformación, que, multiplicada por la masa de la partícula, proporciona la fuerza de inercia que la viga deberá ejercer sobre la partícula en oposición a la carga que produjo aquella deformación. Por tanto, según el principio de acción y reacción, la suma de todas las fuerzas de cada una de las partículas que constituyen la viga originan la carga  $W_0$  que produce la deformación, que es la carga puntual obtenida por la ecuación (71). En consecuencia, mientras la viga pasa al través de su posición de equilibrio, las cargas resultantes son nulas, y nulas son las aceleraciones; por tanto, nulas serán también las deformaciones; consecuencia ya propuesta en ( 1.3.- las fuerzas de inercia)

$$F_i = (\sum m_p) a_i$$

y como la aceleración instantánea es la derivada segunda del espacio respecto de la del cuadrado del tiempo, resulta que

$$F_i = (\sum m_p) \frac{d^2e}{dt^2}$$

Pero, si  $W_0$  se refiere a la carga por unidad de longitud y si sumatorio de masas de las partículas se toma igualmente a dicha unidad, por la referida acción y reacción, resulta que de la

ecuación diferencial de la viga en vibración en el eje uniforme, se tiene

$$E I \frac{d^4 y}{dx^4} = - m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (97)$$

Y considerando una vibración libre sostenida de frecuencia  $\omega$  y si se supone que

$$f(x, t) = f(x) \text{ sen } \omega t$$

la (97) toma la forma

$$E I \frac{d^4 y}{dx^4} = m \omega^2 y \quad (98)$$

donde el primer miembro de la igualdad es la carga por unidad de longitud  $y$ , por tanto, la expresión elástica de la carga; mientras que el segundo miembro es el valor máximo de la carga de inercia. Resultando que la característica física de la **curva elástica normal de la viga** es que el diagrama de carga  $W_0$  o la de la carga  $Q$  deberá de tener la misma configuración que el diagrama de la deformación, como se representa en la Fg. 17. Entonces, cualquier carga capaz de originar una curva de deformación análoga a la curva de carga, podrá considerarse como la carga de inercia durante la vibración. La frecuencia natural de la vibración depende de la velocidad angular de la misma. Como la carga  $W_0$  o la carga  $Q$  producen la flecha  $y$  que, considerada como una desviación periódicamente variable de valor máximo  $(+y)$  y de valor mínimo  $(-y)$  respecto a la posición media de la elástica, puede tomarse como la proyección de un vector giratorio de longitud  $y$ , cuya velocidad angular es  $\omega$

; se trata, entonces, de un movimiento vibratorio armónico simple del cual se deduce la frecuencia, puesto que cada período o revolución de  $y$ , corresponde una oscilación completa del eje resultando que

$$f = \frac{\omega}{2 \pi}$$

Si cuanto se ha propuesto se aplica al un sistema vibratorio simplificado como el **eje uniforme** con carga uniformemente repartida, la forma de vibraciones de primer orden puede establecerse a partir de las ecuaciones (82) o (91") de la flecha; de las cuales se determina que la carga  $W_0$  o la  $F$ , valen:

$$W_0 = \frac{384 E.I}{5 l^4} y$$

$$F = \frac{384 E.I}{5 l^3} y$$

considerando que la fatiga  $q$  es la carga que produce la unidad de deformación por flexión de la viga, la carga que produjo la flecha  $y$  viene dada por el producto de la fatiga por la flecha, la fatiga vale

$$q = \frac{384 E.I}{5 l^4}$$

$$q = \frac{384 E.I}{5 l^3}$$

Teniendo en cuenta que se está tratando un eje de masa  $m$ ,

cuyo peso es  $G$ , equivalente a la carga  $F$ , o a la puntual  $W_0$ , la referida masa vale el cociente que resulta de dividir su peso por la aceleración de la gravedad  $g$ ; considerando la fatiga  $q$  la carga referida a la unidad de longitud, resulta que

$$g = \frac{F}{m} ; l = \frac{F}{q} ; \frac{l}{g} = \frac{m}{q} \quad (100)$$

Pero al considerar la flecha como una desviación periódicamente variable entre  $(+y)$  y  $(-y)$  respecto a la posición media de la elástica, hay que admitir en ella un movimiento pendular, similar al propuesto en el estudio de la biela, ecuación (43), que representa el periodo de oscilación del péndulo físico

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{k^2}{g \cdot l}}$$

y si se hace el radio de giro  $k$  igual a la distancia  $l$  entre la flecha y el cojinete, considerado como eje de oscilación, se tiene el péndulo equivalente o péndulo matemático

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

y sustituyendo por lo hallado en la ecuación (100)

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{q}}$$

Siendo la frecuencia la recíproca del período

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \pi}{\omega}$$

De la cual se obtien que

$$\omega = \frac{2 \pi}{T}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{q}{m}}$$

Sustituyendo  $q$  por su valor hallado en la (99),

$$\omega = \sqrt{\frac{384 E \cdot I}{5 m \cdot l^3}} \quad (101)$$

Para un eje con una sola masa, o con una carga concentrada en su punto medio, el procedimiento de cálculo es similar, siendo la velocidad angular propia de la vibración

$$\omega = \sqrt{\frac{48 E \cdot I}{m \cdot l^3}} \quad (101')$$

En el caso en que se trate de un eje apoyado en sus extremos con varias masas, propuesto como **masas equivalentes** Dunkerley [D] estableció un procedimiento de cálculo de la forma del sistema (89), determinando para cada masa  $m$  por separado la velocidad angular propia, y luego calcula la velocidad angular propia de vibración del eje y obtiene,

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_e^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots \quad (102)$$

Que no difiere del cálculo aproximado del número de vibraciones propio de primer orden propuesto por Kull [K], y que da para

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum m \cdot y}{\sum m \cdot y^2} \cdot g} \quad (103)$$

y las denominan ecuaciones de la rapidez de giro críticas.

Queda por hacer referencia al desplazamiento axial del eje, ya propuesto, que produce alargamiento y acortamiento axial de la cigüeña y, por tanto, unas vibraciones propias de frecuencia

$$f = \frac{\omega}{2 \pi} = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{q'}{m'}} \quad (104)$$

siendo  $m'$  la masa del eje y  $q'$  la fatiga para la deformación elástica longitudinal sin masa propia; se halla suponiendo el eje empotrado por un extremo y libre por el otro, como la unidad de fuerza de reacción que produce un alargamiento del eje elástico respecto de su unidad de longitud. [H.S.] halló que este desplazamiento del eje en los cojinetes está en resonancia con las fuerzas excitatrices y que, a veces, se añade a él una vibración longitudinal que es consecuencia de las vibraciones torsionales.

## B-2) Las fuerzas excitatrices.

De cuanto se lleva expuesto, se infiere que son varias las fuerzas capaces de producir vibraciones de flexión en los ejes cigüeñales. En primer lugar figuran la fuerza de los gases  $F_a$

dada por la ecuación (1), con intensidad máxima en las proximidades del punto muerto alto en el periodo de combustión, y consecutivamente la  $F_4$  dada en la ecuación (4) Fg. 2; la frecuencia de esta fuerza variable es igual a la mitad del número de revoluciones por segundo a que gira el eje motor, en el motor de cuatro tiempos, e igual al número de revoluciones en los motores de dos tiempos y referidas a la velocidad angular del eje

$$f_4 = \frac{\omega}{4 \pi} ; \quad f_2 = \frac{\omega}{2 \pi}$$

En segundo lugar figuran las fuerzas de inercia de las masas alternativas y las debidas a la oscilación de las bielas, las cuales se dan con intensidad variable según se desprende de la ecuación (51); pero, también su frecuencia es variable como lo demuestra el desarrollo en serie de la ecuación (26) siendo la de primer orden impar, todas las demás se dan en orden par creciente, y actúan sobre el eje en la misma forma que el fluido motor. En tercer lugar figuran las fuerzas centrífugas de las masas giratorias no equilibradas, las del propio eje en estudio, con intensidad constante para cada velocidad del eje, y con su propia frecuencia. No obstante, estas fuerzas centrífugas fueron estudiadas en forma particular, obteniéndose las ecuaciones (51) y (52), para su equilibrado con contrapesos.

Tanto las fuerzas radiales tratadas como las tangenciales se reducen a su vez a sus componentes armónicos, a fin de poder juzgar si la velocidad angular de cada vector para un determinado número de revoluciones del eje coincide con la velocidad angular de la propia vibración. [H.S.] establece que en las fuerzas de los gases los términos de primero y segundo orden son de valor elevado; mientras que en las fuerzas de

inercia de las masas, las mas importantes son las de segundo orden. Que a plena carga y reducido número de revoluciones, predominan las fuerzas de los gases; para la marcha en vacío y número de revoluciones elevado, predominan las fuerzas de inercia. A la relación entre la frecuencia de la excitatriz y la velocidad angular del motor  $\omega$  se la denomina número de orden del armónico, de forma que

$$\Omega = \omega \cdot k \quad (105)$$

No obstante, a fin de simplificar el estudio, cuando la distancia entre las fuerzas y los cojinetes no son iguales, se consideran coplanarias y se halla su resultante, con lo cual algunos de los armónicos se compensan unos con otros.

De la ecuación (105) que establece la relación entre la frecuencia de la excitatriz y la velocidad angular del motor se deduce el **estado crítico**,

$$\Omega_k = k \cdot \omega_{kr} = \omega_e \quad (105')$$

y que

$$\omega_{kr} = \frac{\omega_e}{k} \quad (106)$$

Pero siendo la velocidad angular proporcional al número de revoluciones, también el **número de revoluciones crítico** es

$$n_{kr} = \frac{n_e}{k} \quad (106')$$

para los motores de dos tiempos; para los motores de cuatro

tiempos es

$$n_{kr} = \frac{n_e}{\frac{k}{2}} \quad (106'')$$

Para motores con  $N$  numero de cilindros, el armónico principal corresponde a  $k = N$  y con los múltiplos de  $N$  para los motores de dos tiempos; y la mitad con sus múltiplos, para los motores de cuatro tiempos.

Las ecuaciones (106) orientan sobre el número de revoluciones del motor que se debe evitar, cuando se conoce el **número de revoluciones crítico**, o sobre la manera de como puede evitarse éste por medio de las dimensiones del eje, a fin de no temer el tal número de revoluciones dado.

### **B-3) El número de revoluciones crítico de los ejes cigüeñal por causa de las masas giratorias.**

Aún en el caso en que no se presenten las vibraciones de flexión hasta ahora consideradas, puede presentarse un fenómeno de esta clase con cierta intensidad en consecuencia a las masas giratorias, por causa de la forma de las masas y de su posición respecto de los apoyos del eje, presentando diferente aspecto la manifestación final, según los casos:

#### **B-3.1) Las masas excéntricas.**

Por cuanto se ha expuesto en el apartado (1.4.) del capítulo (1) **las fuerzas resultantes** y en el estudio de la biela, se observó que el centro de gravedad de estas masas no se encuentra sobre al eje de giro y se refirieron en la forma clásica al extremo **B** del radio **R** del cigüeñal; por tanto, cuando no se ha previsto un equilibrado de las mismas o cuando

este equilibrado es deficiente, presentan una excentricidad  $e$ . La fuerza centrífuga que se desarrolla al girar el eje, lo carga y tiende a deformarlo alcanzando una determinada flecha. El eje deformado gira en estado de equilibrio, pero al alcanzar la velocidad crítica flexa, alejándose cada vez mas de su primitiva posición de reposo. Este proceso es de forma diferente al de las vibraciones de flexión hasta aquí estudiadas, de forma que no provoca una fatiga de vibración del material por cambio frecuente de carga, sino un trabajo de flexión.

La desviación  $f$  de las masas  $m$  no equilibradas, Fig.18f viene determinada en un sistema de amortiguación por la condición de igualdad entre la fuerza centrífuga por ellas creada y la fuerza de reacción elástica del material. de forma que

$$m \cdot \omega^2 (f + e) = q \cdot f$$

de la que se obtiene, sucesivamente

$$f \frac{q}{m} = \omega^2 \cdot f + \omega^2 \cdot e$$

$$f \left( \frac{q}{m} - \omega^2 \right) = \omega^2 \cdot e$$

$$f = \frac{\omega^2 \cdot e}{\frac{q}{m} - \omega^2} \quad (107)$$

este valor se hace inmensamente grande cuando alcanza la **velocidad crítica**

$$\omega^2 = \omega_{kr}^2 = \frac{q}{m}$$

Resultando que

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{q}{m}}$$

Que es de la forma de la dada en la ecuación (100) por la que se obtuvo la velocidad angular de la vibración de flexión del eje, de manera que el número de revoluciones crítico coincide con número de vibraciones de flexión.

La misma ecuación (100) dice que la velocidad crítica crece con el módulo de elasticidad y con las dimensiones del eje, y que disminuye con la distancia entre apoyos y con la masa total del eje.

Entonces, a cualquier flecha  $y$  producida por vibración, acción de gravedad u otra causa cualquiera, corresponderá una fuerza elástica  $q \cdot y$  igual a la centrífuga, la flecha podrá permanecer y el eje quedará en equilibrio indiferente con posibilidad de, por pequeñas causas, llegar a flechas enormes que llevan al eje a sufrir colapso.

Desde el punto de vista de la velocidad crítica, los ejes se clasifican en rígidos y flexibles, considerando un eje rígido cuando trabaja a velocidad inferior a la crítica, y que es flexible cuando trabaja a velocidad superior a la crítica.

Para poner los ejes flexibles a la velocidad de trabajo, han de pasar por la crítica, a la que, como se sabe, corresponden grandes flechas indeterminadas; por lo que, el tiempo que esta situación dure ha de ser lo mas breve posible, a fin de evitar el peligro de colapso del mismo.

### **B-3.2) Las masas con efecto giroscópico.**

En los estudios hasta aquí realizados se supuso al eje apoyado en sus dos extremos. Pero los ejes de cigñal llevan después del último apoyo una masa en forma de disco, de momento

de inercia considerable, esto es, el volante.

En el apartado (1-4) del capítulo (1) se estudiaron las fuerzas que producen un par motor, que dan origen a la fuerza **F3** de la Fig. 2. El momento de este par motor es variable, siendo unas veces superior al par resistente, y produce aceleración positiva de todo el sistema móvil, aumentando su energía cinética; otras veces es inferior al par resistente, nula, y aún negativa, disminuyendo la energía cinética del sistema móvil. Resultando que el eje gira con movimiento no uniforme, perjudicial no solo para el motor en sí, sino por los efectos que provoca sobre las máquinas receptoras. A fin de salvar estas irregularidades se incorpora al motor, haciéndolo solidario al eje el volante. Se admite, en virtud del teorema de las fuerzas vivas,

$$\Delta \left( m \cdot \frac{V^2}{2} \right) = \tau_{ex}$$

que el volante, durante el periodo de aceleración, acumula en forma de energía cinética el trabajo motor en exceso que devolverá para subvenir al defecto de trabajo motor. La masa del volante se deduce del trabajo en exceso, de forma que

$$m = \frac{2 \tau_{ex}}{\Delta V^2}$$

Esta masa puede ser libre, después de un apoyo, y el eje se comporta como una viga apoyada con una carga en voladizo, a la distancia desde el apoyo hasta el plano transversal vertical que contiene el centro de gravedad de la masa del volante.

La flecha producida por el volante se determina por una

ecuación de la forma de la (93), siendo

$$y_v = \int \frac{Q_v \cdot l_v}{E \cdot I} x \, dx$$

$$Y_v = - \frac{Q_v \cdot l_v^3}{3 E \cdot I} \quad (107)$$

Esta flecha interfiere sobre el eje en la forma que se especifica en la Fig. 18f y, por tanto, modifica la flecha obtenida en la ecuación (95). El mismo efecto lo causaría una hélice que estuviera montada en igual forma.

No obstante, el volante puede tener en la continuación de la guía del eje otro apoyo; entonces, para determinar la flecha producida le son de aplicación los razonamientos expuestos para una viga apoyada en sus extremos y una carga concentrada en un punto, ecuación (85), siendo

$$Y_v = \frac{Q_v \cdot l_v^3}{48 E \cdot I}$$

Pero como en el caso anterior, esta flecha interfiere sobre el eje, y modifica la flecha obtenida en la ecuación (95), como se representa en la Fig. 18g.

Si el volante está en voladizo o fuera del punto medio entre los apoyos, la tangente a la línea elástica ya no es paralela a la recta que une los puntos de apoyo **A-B-C** sino que forma con ella el ángulo de inclinación **i**. Entonces, al girar el eje, la elástica engendra una superficie lateral cónica, y el volante se comporta como un giróscopo, de forma que, a la vez que gira sobre el eje con la velocidad propia **w**, realiza un movimiento de precesión con la velocidad **w'**. Pérez del Rio [P.R] establece que este efecto giroscópico es secundario en los propios ejes, cuando giran a velocidad no crítica, pero que hay que

considerarlos cuando la velocidad es superior a la crítica.

En efecto, considerando (Fig. 18h) el eje flexado elásticamente por causa del peso del volante y en rotación, el volante es un disco que gira alrededor del eje  $BC'$ , oblicuo respecto a él, con su velocidad angular  $w$ , y si se descompone esta velocidad en dirección del eje del volante y perpendicular a ella, se obtienen las  $w'$  y  $w''$ .

Por consiguiente, en el instante considerado en que se hace la descomposición de vectores, el volante posee las velocidades  $w'$  y  $w''$ , y en sus mismas direcciones y sentidos actúan los vectores de los pares de fuerzas correspondientes que son el par  $M'$  motor y  $M''$  perturbador. Pero resulta que también existe un par giroscópico  $M^{\wedge}$  de sentido retrógrado. Puede observarse que cada uno de estos pares actuando sobre el apoyo  $B$ , tiende a enderezar el eje.

De acuerdo con lo estudiado en mecánica sobre el momento de la cantidad de movimiento, que vale el producto de la velocidad angular por el momento de inercia

$$M = w \cdot I$$

y que, siéndo de aplicación en el estudio del giróscopo, este momento vale

$$\frac{dM}{dt} = \omega \cdot I \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_i$$

$$M = I \cdot \omega \cdot \omega_i$$

Por tanto, cada uno de estos pares elementales valdrá

$$M = I' \cdot w' \cdot w'' \quad (110)$$

siendo  $I'$  el momento de inercia del volante respecto del eje de giro  $w'$  situado en  $O$ , puesto que el vector  $w$  debe estar sobre la elástica, y los vectores  $w'$  y  $w''$  dispuestos en consecuencia. El cual momento de inercia respecto al eje  $BC'$  vale

$$I = m_v (y \pm e)^2 \quad (111)$$

Que es el producto de la masa del volante por el cuadrado de la distancia sobre el eje  $HD$  entre el punto  $O$  y el eje  $BC'$ , sobre el cual gira, cuya distancia es la suma de la flecha  $y$  producida por el volante mas o menos la excentricidad  $e$  del centro de gravedad por causa de la fuerza centrífuga de la masa del volante al girar con radio la flecha  $y$ .

Para proceder al cálculo del par giroscópico, se empieza por descomponer, a partir de  $O$ , la velocidad  $w$  en las  $w'$  y  $w''$ , resultando que el movimiento del volante en cuestión equivale a otro mas complicado, de giro alrededor de un eje en la dirección de la nueva elástica con la velocidad  $w'$  y alrededor del eje  $HD$  con la velocidad  $w''$ ; en este nuevo estado de cosas, el radio de giro de la masa del volante se cambia de la orientación  $HD$  en  $JK$ , paso que, como se deduce de la (Fig. 18h), se obtiene multiplicando por  $\cos i$ , y como en los momentos de inercia los radios de giro figuran al cuadrado, se pasa del momento de inercia respecto a  $w$  al momento de inercia respecto a  $w'$  multiplicando el primero por coseno al cuadrado de  $i$ , y se tendrá que el momento de inercia  $I^{\wedge}$  es

$$I' = m_v \cdot (y \pm e) \cdot \cos^2 i \quad (112)$$

De la ecuación (110) se obtiene que el par giroscópico es

$$M' = I' \cdot \omega' \cdot \omega''$$

y como

$$\omega' = \omega \cdot \cos i$$

$$\omega'' = \omega \cdot \text{sen } i$$

resulta que

$$M' = m_v \cdot \omega^2 \cdot (y \pm e)^2 \cdot \cos^2 i \cdot \cos i \cdot \text{sen } i$$

$$M' = m_v \cdot \omega^2 \cdot (y \pm e)^2 \cdot \cos^3 i \cdot \text{sen } i$$

según se desprende de la figura se admite que

$$\text{sen } i = \frac{y \pm e}{l}$$

se tiene que

$$M' = m_v \cdot \omega^2 (y \pm e)^3 \cos^3 i$$

Pero este momento vale

$$M' = F' \cdot l \cdot \cos i$$

resultando que,

$$F' \cdot l \cos i = \frac{m_v \cdot \omega^2}{l} (y \pm e)^3 \cos^3 i$$

y si no se considera la inclinación  $i$  por su bajo valor,

$$F' = \frac{m_v \cdot \omega^2}{l^2} \cdot (y \pm e)^3$$

Resulta, pues, que en todo instante para cada velocidad  $w$  y para cada flecha  $y$ , actuando las fuerzas elástica y giroscópica de un lado y la centrífuga del otro, se ha de establecer un equilibrio cuya ecuación es

$$q \cdot y + \frac{m_v \cdot \omega^2}{l^2} \cdot (y \pm e)^3 = m_v \cdot \omega^2 \cdot (y \pm e) \quad (113)$$

### 3.2.- Vibraciones de torsión

Las vibraciones de torsión se producen cuando el eje cigüeñal elástico es sacudido en el plano transversal vertical produciendo oscilaciones de torsión; esto es, un movimiento pendular del eje cigüeñal con todas las masas móviles a él anejas alrededor de su eje longitudinal; este movimiento se superpone a la torsión estática.

La excitación de las vibraciones de torsión, la mayor parte de las veces, se produce por el propio motor como consecuencia de las fuerzas del fluido motor y a las de inercia de las masas en movimiento de cada uno de los cilindros aislados. Estas vibraciones se superponen a las variaciones de velocidad del eje como consecuencia de su irregularidad en la rotación y de la torsión estática del mismo por causa de las fuerzas tangenciales variables.

Estas vibraciones se hacen muy violentas cuando haya resonancia; es decir, cuando la frecuencia de la vibración propia del eje y la forzada coinciden; las deformaciones producidas por estas causas fatigan tanto al eje que puede llegar al colapso. Por tanto, debe evitarse el número de revoluciones crítico del eje; en caso contrario, es

necesario amortiguar tales vibraciones.

Si bien de las vibraciones de torsión no se derivan fuerzas al exterior, pueden hacerse notar indirectamente variaciones en el ángulo de calaje entre las cigüeñas; dando lugar a perturbaciones en la compensación de masas, y en la distribución del motor, en el caso en que no se transmita al eje de camones, perjudicando el funcionamiento normal del motor. Al mismo tiempo, las fuerzas de inercia de las masas vibrantes realizan una carga suplementaria sobre el eje. Por ello, la principal consideración sobre las vibraciones de torsión se refiere al peligro de la resonancia.

El estudio se lleva a cabo con la determinación del sistema vibratorio, de la forma de vibración propia y del número de vibraciones propio, de las fuerzas excitatrices, de las deformaciones de resonancia relativas, de las curvas de resonancia y de los números de revoluciones críticos, de la fatiga de torsión del eje en la resonancia y de los medios para convativir las vibraciones.

#### **A) El sistema vibratorio.**

Cada eje cigüeñal forma con los émbolos, las bielas y las masas giratorias, entre las que se encuentran el volante hasta la hélice u otra utilización, un complicado sistema elástico giratorio. Por ello, en primer lugar, se empieza por calcular el número de vibraciones propio del sistema del eje.

Teniendo en cuenta que las propiedades de la vibración propia del eje durante la rotación son las mismas que con el eje en reposo, el estudio puede limitarse a la determinación de la rapidez propia de las vibraciones de torsión del sistema en reposo. El cual sistema vibratorio se caracteriza por las masas que lleva el eje y las porciones de eje entre las masas. De esta forma presenta una estructura sumamente complicada para pretender la determinación exacta de su frecuencia natural

torsional.

## **B) El sistema equivalente**

A fin de simplificar el complicado estudio que presenta el mecanismo motor, se reduce a un sistema equivalente que posea las mismas propiedades vibratorias que el sistema real, de forma que ambos sistemas deben coincidir en los efectos de inercia de las masas vibratorias y en la energía de deformación; por lo que, el estudio queda resuelto en forma aproximada.

### **b.1) Las masas de sustitución.**

El sistema idealizado propuesto por [H.S] y otros para sus estudios consiste en la determinación de unas masas de sustitución. Estas masas, individuales para cada movimiento, se sustituyen por cuerpos equivalentes de momento de inercia invariable, y se llevan sobre el eje en forma de discos.

Para el cálculo de la masa de sustitución del movimiento rectilíneo alternativo que comprende el émbolo, el vastago y la cruceta; así como, la segunda masa de descomposición de la biela, si se admite en rigor el estudio de la biela como se realizó en la página 25 y siguientes, la ecuación (41) determina aquella parte de masa de biela que se asimila al movimiento en estudio. Pero estas masas poseen un movimiento vibratorio armónico simple modificado por el efecto de oblicuidad de la biela, y su velocidad instantánea viene dada por la ecuación (20). La energía cinética que poseen vale la mitad de las masas por el cuadrado de la velocidad

$$E_c = (\sum m_a) \cdot \frac{V^2}{2}$$

Sustituyendo la velocidad por la hallada en la ecuación (20) se tiene

$$E_c = \frac{(\sum m_a)}{2} R^2 \cdot \omega^2 \left( \text{sen } \alpha \pm \frac{R \cdot \text{sen } 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{L^2 \cdot R^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}} \right)^2 \quad (114)$$

Pero, si como ya se dijo anteriormente, el producto de la masa por el cuadrado del radio de giro es el momento de inercia  $I$ , también

$$E_c = I_a \cdot \frac{\omega^2}{2} \left( \text{sen } \alpha \pm \frac{R \cdot \text{sen } 2\alpha}{2 \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}} \right)^2 \quad (114')$$

De la cual se obtiene que el momento de inercia de estas masas y el del disco equivalente, vale

$$I_a = \frac{2 \cdot E_c}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\left( \text{sen } \alpha \pm \frac{R \cdot \text{sen } 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}} \right)^2} \quad (115)$$

Pero si el eje sobre el cual se monta el disco gira con velocidad angular constante y la velocidad de las masas es variable, a cada velocidad de las masas le corresponderá un disco y nada mas que uno. Pero como la energía cinética es función de la variable que presenta el valor del paréntesis se tomará para el valor intermedio del ángulo que se estime mas conveniente.

Queda, ahora, por determinar el disco de sustitución, del que se conoce solamente su momento de inercia polar que, como

se sabe, vale

$$I_0 = \int_{r_i}^{r_e} r^2 dm$$

pero que, es cilíndrico y homogéneo, por lo que su masa es

$$\pi \cdot r^2 \cdot l_a \cdot m_e$$

y el problema se resuelve estableciendo una relación entre las dimensiones axial y radial, o bien, prefijando una calcular la otra.

Para el disco de sustitución de la primera masa de descomposición de biela puede partirse de la ecuación (37) que da el momento de inercia de la dicha masa respecto de la cruceta. La masa se toma de la ecuación (40), y la distancia de su centro de gravedad a la cruceta de la ecuación (45), siendo

$$\begin{aligned} I_d &= M \cdot d \cdot L^2 \\ L^2 &= \left( T^2 \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \right)^2 = \frac{1}{f^4} \cdot \left( \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \right)^2 \\ L^2 &= \frac{(2 \cdot \pi)^4}{\omega^4} \cdot \frac{g^2}{(2 \cdot \pi)^4} \\ I_d &= M_d \cdot \frac{g^2}{\omega^4} \end{aligned} \tag{116}$$

El disco de sustitución cumplirá con la condición de que

su momento de inercia ha de valer

$$m_d \cdot r^2 = M_d \frac{g^2}{\omega^4} \quad (116')$$

Procediendo para su determinación, según lo propuesto en el apartado anterior.

En el caso en que esta primera masa de descomposición tuviera su centro de gravedad en el extremo del radio de cigüeñal, se procederá en la forma que se dirá para el disco de sustitución del muñón.

Para resolver el problema de sustitución de las masas giratorias que componen la cigüeña, se procede de la forma siguiente: Se descompone la cigüeña en sus elementos, y se determina el momento de inercia de cada una de las masas respecto del eje longitudinal que pasa por su centro de gravedad y es paralelo al eje de giro al que se refiere el momento de inercia de cada una de las masas y que, ambos ejes pertenecen al mismo plano, como se representa en la Fig. (19). Siéndole de aplicación el teorema del eje paralelo que da para el momento de inercia respecto del eje **AB**, la suma del momento de inercia polar para la referida masa y el cuadrado de la distancia entre los ejes por la dicha masa.

$$I_{AB} = I_0 + h^2 \cdot m_b$$

Así, para los brazos de cigüeñal, dada la geometría que presentan en el plano vertical transversal, se determina su centro de gravedad **Og**, según las coordenadas **x**, **y**, por la ecuación general

$$C_g = \frac{\int_A^B x \, dS}{S}$$

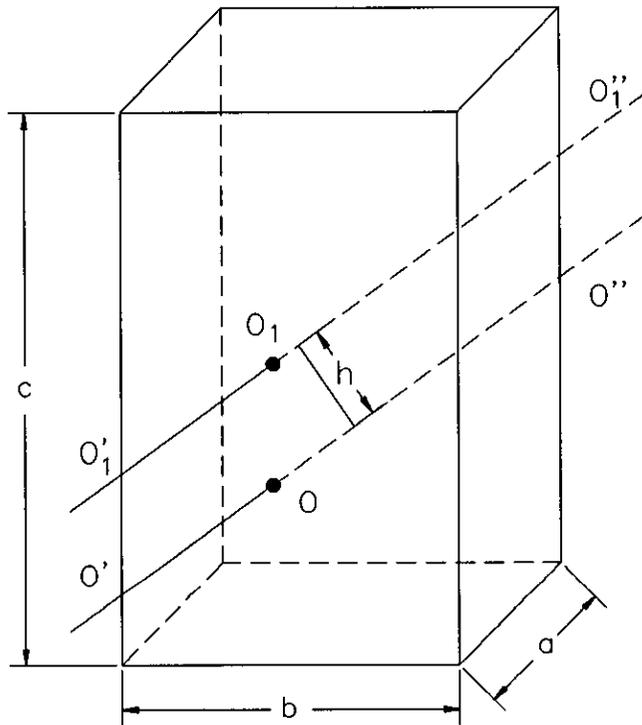
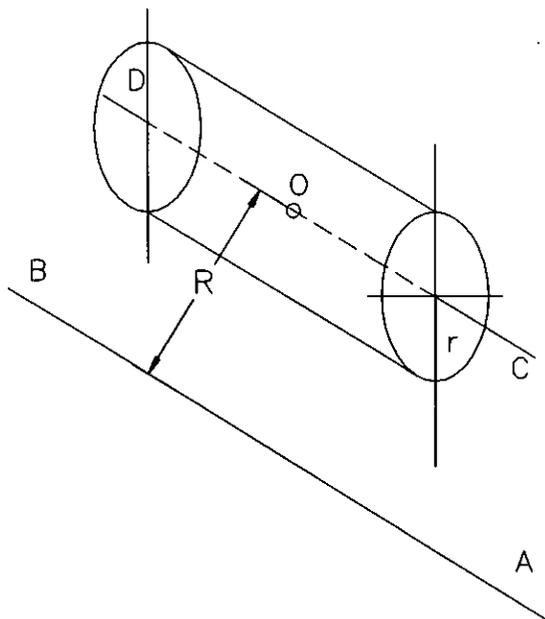


Fig. 19



$$I_L = I_{AB} + I_{CD}$$

$$I_{AB} = R^2 ds + r^2 ds$$

Se determina el momento de inercia polar de dicha superficie y se refiere a la masa, la cual se obtiene al multiplicar la superficie por la dimensión  $l$  axial del brazo por la masa específica. El centro de gravedad de la masa cae en el eje que contiene al centro de gravedad de la referida superficie, resultando que

$$I_{OB} = \int l_B \cdot m_e \cdot r^2 dS$$

Que obliga al conocimiento de la geometría de la superficie y a su área. No obstante, a fin de simplificar el cálculo, es norma reducir aquella superficie a la de un rectángulo de igual área; entonces, como el momento de inercia de un rectángulo respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad y es normal a ella vale

$$I_0 = \frac{b \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_0 = \frac{a \cdot b}{12} (a^2 + b^2)$$

que al multiplicarlo por la masa específica y por  $l$ , da

$$I_{mB} = m_B \frac{a^2 + b^2}{12}$$

Resultando que el momento de inercia respecto del eje **AB** vale

$$I_{AB} = h^2 \cdot m_B + m_B \frac{a^2 + b^2}{12}$$

$$I_{AB} = m_B \left( h^2 + \frac{a^2 + b^2}{12} \right)$$

El disco que sustituya a los dos brazos ha de poseer el momento de inercia que valga

$$m \cdot r^2 = 2m_B \left( h^2 + \frac{a^2 + b^2}{12} \right) \quad (117)$$

Para el muñón, cilíndrico, se procede de igual forma, sabiendo que la masa del cilindro de revolución respecto a su eje, que se encuentra a la distancia radio de cigüeñal  $R$  con el eje  $AB$

$$I_m = m_m \cdot R^2 + \frac{1}{2} m_m \cdot r_m^2$$

$$I_m = m_m \left( R^2 + \frac{1}{2} r_m^2 \right)$$

Y el disco que sustituya al muñón de cigüeñal ha de poseer el momento de inercia que valga

$$m \cdot r^2 = m_m \left( R^2 + \frac{1}{2} r_m^2 \right) \quad (117)$$

Queda, ahora, por resolver el disco de sustitución de los gorriones, cuyo momento de inercia ya se conoce y vale

$$I_g = \frac{1}{2} m_g \cdot r_g^2$$

Y el disco que lo sustituya ha de poseer el momento de inercia que valga

$$m \cdot r^2 = \frac{1}{2} m_g \cdot r_g^2 \quad (118)$$

Todos estos discos de sustitución, sumados, pueden reducirse a uno solo; con lo cual, si el motor es de varios cilindros, como todos ellos son iguales, cada mecanismo es representando en el estudio por un disco.

Al sistema así formado, hay que incorporarle el volante que, como se ha determinado, su momento de inercia vale

$$I_v = \frac{\pi \cdot l_v \cdot m_e}{2} (r_e^4 - r_i^4)$$

Y el disco de sustitución ha de poseer el momento de inercia que valga

$$m \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot l_v \cdot m_e}{2} (r_e^4 - r_i^4) \quad (119)$$

En un sistema vibratorio extendido, con acoplamiento rígido, cual es el caso de las hélices marinas y las aéreas, así como de generadores eléctricos, bombas y compresores centrífugos y otras máquinas rotativas, [H.S], [B.G], [L.K] y otros, establecen en sus estudios el factor de inercia que, cuando no lo dan las casas constructoras de hélices, proponen fórmulas de la forma

$$\text{factor de inercia} = K \cdot D^5 \quad \text{kg.m}^2$$

en la cual **D** es el diámetro de la hélice en metros y **K** un coeficiente que depende del número de palas y de su forma, que para hélices marinas pueden tomarse los valores

- K** = 14 para hélices de 3 palas estrechas
- K** = 16 para hélices de 5 palas estrechas
- K** = 16 para hélices de 3 palas anchas
- K** = 18 para hélices de 4 palas anchas

No obstante, por causa del agua que arrastran en la rotación, aquel factor de inercia debe de incrementarse en  
10 a 12 % para hélices de pequeñas y medianas dimensiones  
15 a 25 % para hélices de grandes dimensiones

## **b.2) Las longitudes equivalentes.**

En el sistema idealizado propuesto por Hans Schrön [H.S] a partir de estudios realizados por Grammel y otros, se considera que el eje cigüeñal debería ser sustituido por un eje uniforme que sea equivalente en cuanto a las deformaciones elásticas por torsión, de forma que la torsión del eje dado y la torsión del eje sustituto sean iguales para el mismo momento torsor aplicado.

### **b.2.1.) El eje uniforme.**

En este caso se trata de un eje de geometría cilíndrica que puede terminar en un volante en cada extremo, cargado en con unas fuerzas que lo someten a torsión.

Admitidas las hipótesis de la torsión, sea el eje de la Fig. 20, y en él la generatriz **AB**, de longitud **l**; el eje es de radio **r** y los volantes de radio **Rv**, en el extremo de los cuales se aplican las cargas **Q**. Bajo la acción de los pares, la fibra **AB** se halla sometida a las cargas **Q**, que, por cizalla, le producen una fatiga **q** y una deformación angular **i**, con lo cual, el punto **B**, al producirse la torsión, gira alrededor del **A** sobre la superficie cilíndrica pasando a la posición **B'** forma el arco de hélice **AB'**, y si se rectifica la superficie cilíndrica aparece el sector circular **ABB'**, en el cual el ángulo de inclinación vale

$$i = \frac{BB'}{AB}$$

Siendo  $K$  el módulo de rigidez por cizalla y  $q$  la fatiga, si se verifica la ley de Hooke, en que las deformaciones son proporcionales a las cargas, resulta

$$\frac{K}{q} = \frac{AB}{BB'} = \frac{1}{i}$$

Pero si el punto  $B$  ha descrito sobre la superficie cilíndrica el arco  $BB'$ , también, sobre la sección recta ha descrito simultáneamente el  $BD$ , de manera que el punto  $D$  coincide con el  $B'$ , los arcos  $BB'$  y  $BD$  son iguales y como consecuencia de la torsión, el eje sufre acortamiento y la deformación angular  $\theta$  sobre la referida sección recta, siendo

$$BD = r \cdot \theta$$

$$AB = l$$

Resulta que

$$q = K \frac{r \cdot \theta}{l} \quad (120)$$

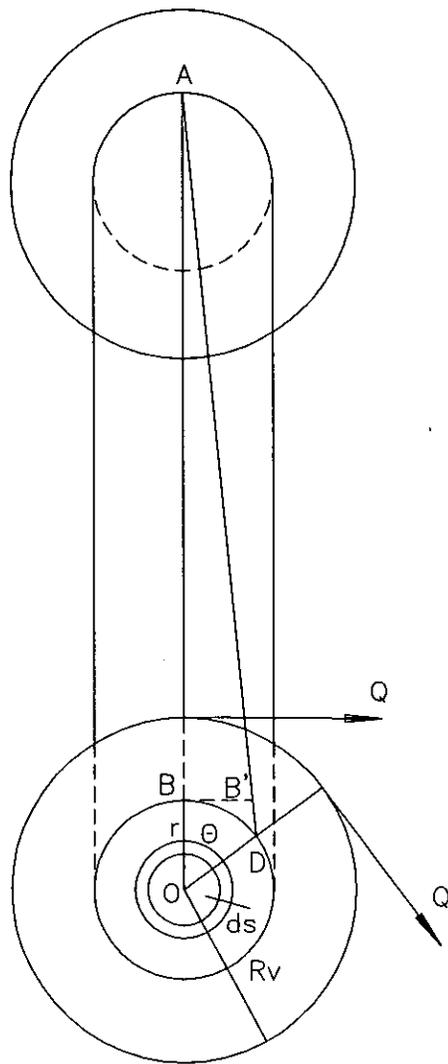
Si en una sección cualquiera del eje, la  $a$ , por ejemplo de la Fig. (20), se considera una fibra de sección anular  $dS$  sometida a la fatiga  $q$ , la carga que soporta vale

$$q \, dS$$

y el momento elemental correspondiente

$$dM = q \cdot r \, dS$$

Sustituyendo la fatiga por su valor hallado en la (120)



FG. 20

e integrando, se obtiene

$$\int dM = \int \frac{K \cdot \theta}{l} r^2 dS$$
$$M = \frac{K \cdot \theta}{l} \int r^2 dS$$

que es el valor del momento torsor total.

Pero, teniendo en cuenta que la integral

$$\int r^2 dS$$

es el momento de inercia de la sección considerada respecto a su centro, resulta que el momento torsor a que se halla sometido el eje es

$$M = \frac{K \cdot I}{l} \theta$$

de cuya igualdad se deduce que el ángulo de torsión vale

$$\theta = \frac{M \cdot l}{K \cdot I} \quad (121)$$

Que es la ecuación de la deformación.

De lo razonado anteriormente, se desprende que

$$\frac{q}{r} = \frac{K \cdot \theta}{l}$$

De la ecuación (121), se deduce que hay una deformación del eje y, por tanto, un trabajo producido por el momento torsor, y una energía potencial acumulada en el eje elástico por este trabajo de torsión, resultando que

$$\frac{q}{r} = \frac{K \cdot \theta}{l} = \frac{M}{I} \quad (122)$$

Que es la ecuación de la resistencia

De esta triple igualdad se deduce que la fatiga  $q$  que produce la deformación **BD**, vale

$$q = \frac{M}{I} r = \frac{Q \cdot r}{I} r = \frac{Q}{I} r^2$$

De la expresión

$$\int r^2 \cdot dS$$

se determina el momento de inercia polar de un círculo respecto a su centro, descompuesto éste en fajas elementales en forma de corona circular de radio medio  $r$  y de dimensión radial  $dr$ , que su área vale el producto de la circunferencia media por el ancho de la corona, resulta que

$$I_0 = \int r^2 \cdot 2 \pi \cdot r \cdot dr$$

$$I_0 = 2 \pi \int r^3 \cdot dr \quad (123)$$

$$I_0 = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

siendo  $d$  el diámetro del eje al que corresponde esta superficie frontal.

Establecido el estudio por torsión del eje uniforme, aplicado a los gorriones y al muñón del eje, considerando el material de igual elasticidad, de la ecuación (121) se desprende que la deformación experimentada por el eje es proporcional al producto del momento torsor por la longitud del eje, e inversamente proporcional al momento de inercia polar,

siendo

$$\frac{M \cdot l_e}{K \cdot I_{oe}} = \frac{M \cdot l_r}{K \cdot I_{0r}}$$

Y para igual momento torsor, se tiene

$$l_r = l_e \frac{I_{0r}}{I_{oe}} \quad (124)$$
$$l_r = l_e \frac{d_r^4}{d_e^4}$$

que es la ecuación de la longitud reducida.

Para la deformación experimentada por los brazos de cigüeñal por causa de la fuerza tangencial o, si se quiere, por el mismo momento torsor que produjo la deformación en el muñón y los gorriones; puede considerarse a éstos como una viga en voladizo, con una carga concentrada en el extremo libre. Entonces, la flecha producida por la carga aplicada en el extremo del radio del cigüeñal es de la forma del arco **BD**, ya que el momento que produce la torsión del muñón y de los gorriones, es el mismo momento que produce la flexión de los brazos, actuando por mitad en cada uno de ellos. Siendo de aplicación la ecuación (107), la flecha producida vale

$$Y_b = \frac{Q \cdot R^3}{2.3 E \cdot I}$$

y el momento de inercia, por tratarse de una superficie rectangular respecto a un eje que pasa por su centro y es

paralelo a uno de sus lados, tomado de la Fig. 19, como se halló anteriormente, vale

$$I = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

La sustitución de la cigüeña por un eje uniforme se realiza por medio de fórmulas de reducción, de forma que la longitud por ellas calculada dé un coeficiente elástico que coincida con el obtenido experimentalmente; presentando la mayor dificultad la geometría de los brazos de cigüeña.

A este respecto, Geiger [G.] ha establecido la longitud equivalente para grandes motores diesel lentos y semilentos, para la longitud equivalente o reducida de los gorriones

$$l_1 = (l_g + 0,4 a) \frac{I_r}{I_g}$$

Para la longitud reducida de los brazos de cigüeña

$$l_2 = 0,773 (R - z \cdot d_g) \frac{I_r}{I_b}$$

siendo

$$z = 0 \text{ para cuando } 1,6 < \frac{b}{d_g} < 1,63 \text{ y } 0,92 < \frac{R}{d_g} < 1,2$$

$$z = 0,3 \text{ para cuando } \frac{b}{d_g} = 1,33 \text{ y } \frac{R}{d_g} = 1,07$$

$$z = 0,4 \text{ para cuando } \frac{b}{d_g} = 1,49 \text{ y } \frac{R}{d_g} = 0,84$$

Para la longitud reducida del muñón

$$l_3 = (l_m + 0,4 a) \frac{I_r}{I_m}$$

Siendo para la longitud reducida de la cigüeña

$$l_r = (l_g + 0,4a) \frac{I_r}{I_g} + 0,773(R - z \cdot d_g) \frac{I_r}{I_a} + (l_m + 0,4a) \frac{I_r}{I_m} \quad (125)$$

De igual forma, Carter [C.] establece una fórmula de aplicación general, particularmente aplicable a los motores ligeros, siendo

$$l_r = l_g \cdot \frac{I_r}{I_g} + 2 \cdot (0,4a \cdot \frac{I_r}{I_g} + 0,637R \cdot \frac{I_r}{I_a}) + \frac{3}{4} \cdot l_m \cdot \frac{I_r}{I_m} \text{ cm.} \quad (126)$$

Aun cuando la fórmula de Carter es aplicable a ejes de cigüeñales de diferente geometría constructiva, no determina valores exactos en los casos límites, por ejemplo, para ejes uniformes.

Cuando en el sistema vibratorio extendido se instalan acoplamientos elásticos, también se sustituyen estos por ejes elásticos equivalentes, pero de longitud reducida, de forma que le son de aplicación ecuaciones de la forma de la (124), resultando que

$$l_r = l_e \frac{K \cdot I_e}{M \cdot r} \quad (127)$$

Si en el sistema vibratorio se contemplan variaciones de velocidad angular de ejes por medio de ruedas dentadas, se reduce la longitud del eje reducido de la rueda conducida a la de la rueda conductora, contemplando el cuadrado de la relación de los diámetros de las ruedas dentadas; siéndole de aplicación, también, ecuaciones de la forma de la (124), por

lo que

$$I_r = I_c \frac{I_{0r}}{I_{0c}} \cdot \frac{d_c^2}{d_r^2} \quad (128)$$

En el caso en que el eje equivalente sea idéntico al del motor, el momento de inercia polar también lo es.

Cuando en el sistema vibratorio extendido se montan grandes rotores, y no se conoce el factor de inercia, se considera que el rotor va montado sobre el eje formando con él un sistema rígido en la parte de su longitud  $l'$ . En este caso, la longitud reducida es la correspondiente al eje hasta el rotor, mas la del propio rotor referida a  $l'$ .

$$I_r = I_e \frac{I_{0r}}{I_{0e}} + l' \frac{I_{0r}}{I_{0r0}} \quad (129)$$

Es norma usual en este estudio, a fin de simplificar los cálculos, tomar el radio reducido  $r$  al valor del radio  $R$  del cigüeñal como se ha considerado con los volantes en la Fig. 20.

El estudio así realizado establece que para cada cigüeña son necesarios cinco volantes en la forma que se representa en la Fig. 21. No obstante, a los fines de estudio reducido, en un motor de varios cilindros, cada cigüeña se sustituye por un volante equivalente.

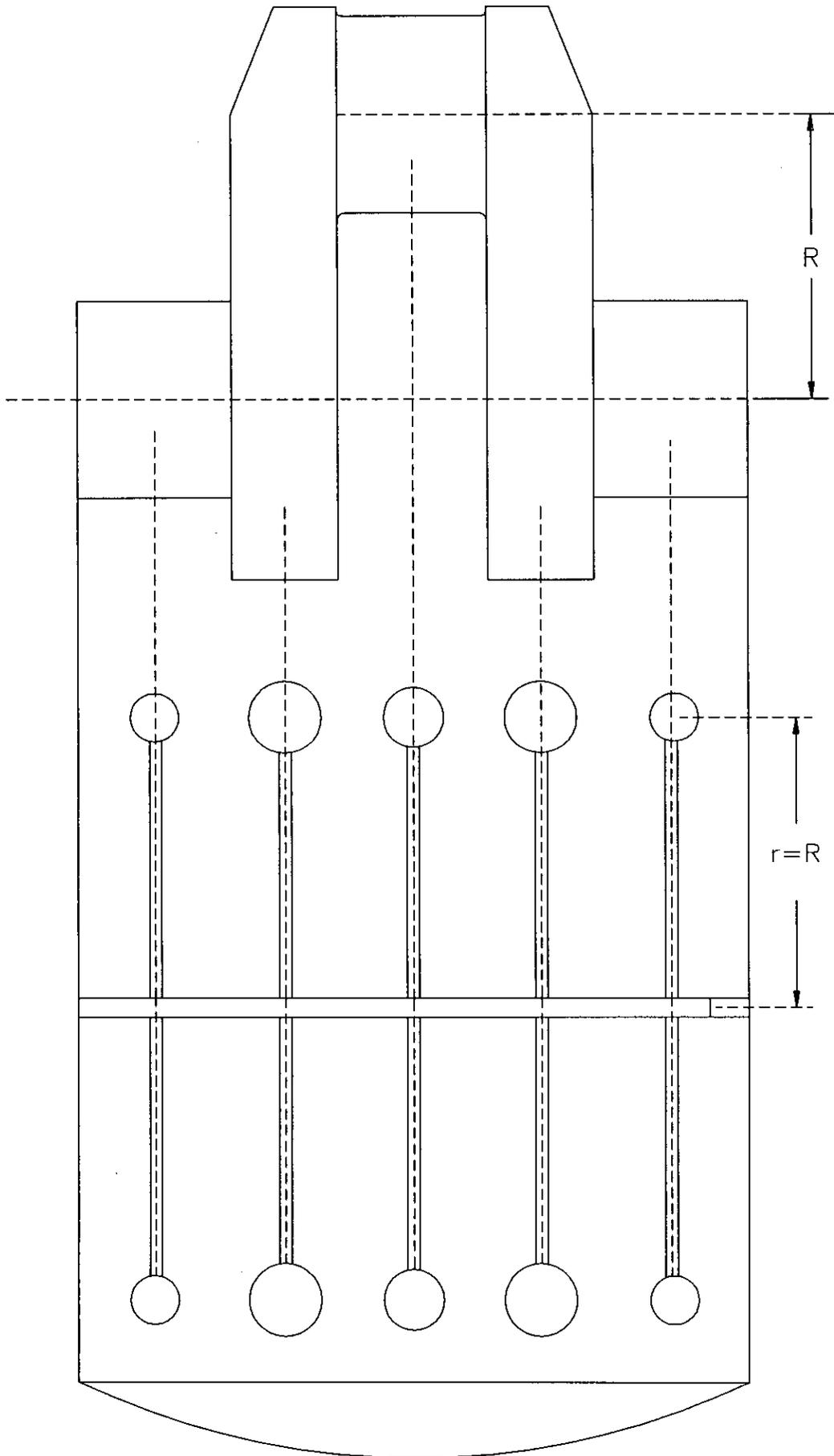


Fig. 21

**b.2.2.) Formas de vibraciones y números de vibraciones propios del sistema.**

Se entiende como vibración propia a aquel estado de vibración que puede persistir por sí solo, después de una excitación eficaz, sin participación posterior de fuerzas exteriores ni resistencias amortiguadoras.

El sistema giratorio elástico presenta disposiciones muy varias, por causa del número de cilindros y la disposición de los mismos en el plano y en el espacio, que da lugar a formas propias de vibrar diferentes, según la disposición de los cilindros y las masas existentes en cada uno de ellos; aunque el propio eje reducido se considere sin masa, porque su momento de inercia propio es despreciable en comparación con los momentos de inercia de las restantes masas.

Referido al eje de cigüeñales de varios cilindros, el sistema vibrante presenta muchos términos, por lo que, tiene varios números de vibraciones propios. El número mas bajo de todos ellos se realiza con una forma de vibración de primer grado, que es la vibración principal y presenta un solo nodo. El número de vibraciones inmediatamente superior pertenece a la forma de vibración de segundo grado y presenta dos nodos. La siguiente vibración es de tercer grado y presenta tres nodos. En consecuencia, cada grado de vibración presenta un nodo mas sobre el grado anterior; el número de nodos varía entre (1) y ( $n - 1$ ). Pero si el sistema vibrante posee ( $n$ ) masas dispuestas sobre el eje a la distancia intermedia ( $n - 1$ ); son posibles ( $n - 1$ ) números de vibraciones propios cuya frecuencia o número de nodos varía entre (1) y ( $n - 1$ ), tantos como elementos elásticos intermedios posea.

Cuando el sistema vibratorio extendido corresponde a un acoplamiento rígido, la vibración principal o de primer grado es la predominante, porque queda dentro del campo de aplicación del motor. Pero cuando el sistema corresponde a un acoplamiento

elástico, la vibración predominante es la de segundo grado, porque puede ocasionar una resonancia; mientras que la de primer grado, generalmente, cae por debajo del campo de aplicación del motor.

Las formas de vibración de tercer grado y las de grados superiores, prácticamente tienen poca importancia porque los correspondientes números de vibraciones propios son muy elevados.

### **b.2.3) Procedimiento para determinar la forma de las vibraciones de torsión.**

Por cuanto se lleva estudiado, se observa que las magnitudes mas importantes para un sistema que vibra por torsión, son los momentos de las fuerzas tangenciales, el módulo de rigidez y la fatiga elásticas, los momentos de inercia de las masas y los ángulos de torsión experimentados en la deformación.

Pero cuando esta solución presenta dificultades de cálculo, se procede al cálculo de masas reducidas referidas al radio de cigüeñal, con fuerzas elásticas y excitatrices, como se ha venido estudiando para determinar el sistema equivalente. Entonces, si se refiere el estudio a una cigüeña, representada por un solo disco de sustitución de masa  $m$ , sobre un eje empotrado por un extremo, como en la Fg. 22; la frecuencia circular  $\omega$  puede expresarse como la velocidad angular  $\omega$  de un vector  $\mathbf{V}_e$  de longitud  $a$ , como la amplitud de la deformación  $BB'$ ; siendo el número de revoluciones  $n$  igual al número de revoluciones  $n_e$  propio del eje.

Si la deformación  $a$  representa la proyección del vector  $\mathbf{V}_e$  sobre el diámetro del volante, a causa de su reducido valor la dicha proyección se considera igual al arco de radio  $r$ .



De este modo, las deformaciones, referidas al tiempo, dan una oscilación senoidal.

Pero si en un determinado momento, el par motor se anula, se produce un movimiento inverso, y en el momento de la inversión, a la deformación  $a$  le corresponde una fuerza de inercia o de aceleración que vale:

$$F_i = m \cdot a \cdot \omega_e^2$$

y debido a la elasticidad del eje, se crea la fuerza de reacción que vale:

$$R = q \cdot a$$

Entonces, si la vibración se verifica sin un sistema amortiguador, como se supone en el caso de la vibración propia, la condición de equilibrio acción-reacción es

$$m \cdot a \cdot \omega_e^2 = q \cdot a$$

que simplificando y despejando, se obtiene la velocidad angular de la vibración, que vale

$$\omega_e = \sqrt{\frac{q}{m}}$$

de la cual se infiere que si la fatiga elástica aumenta, la velocidad angular de la vibración aumenta; y si la masa disminuye, la velocidad angular de la vibración aumenta también.

Si se incorpora a la ecuación de la velocidad angular de la vibración la longitud reducida  $l$  del eje, resulta que

$$\omega_e = \sqrt{\frac{l^2 \cdot q}{l^2 \cdot m}}$$

Al numerador suele denominársele coeficiente de torsión elástica, o también, momento de dirección de la longitud reducida; y el denominador, es el momento de inercia de la masa reducida  $m$ .

De aquí se establecen las fórmulas esenciales de estas vibraciones, y son:

Para la velocidad angular de la vibración,

$$\omega_e = \sqrt{\frac{q'}{I_m}} \quad (130)$$

Para el número de vibraciones por segundo,

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_e \\ n_e &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q'}{I_m}} \end{aligned} \quad (131)$$

Para el período de la vibración, en segundos,

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega_e} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{I_m}{q'}} \end{aligned} \quad (132)$$

Para la frecuencia propia de la vibración, en Hz

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega_e}{2\pi} \\ f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q'}{I_m}} \end{aligned} \quad (133)$$

Pero, si para mantener la velocidad angular constante, con la cigüeña se instala un volante de masa  $m_2$ ; siendo  $m_1$  la masa reducida de la cigüeña y  $l$  la longitud reducida del eje. Teniendo en cuenta que las masas se desvían en sentidos opuestos, la amplitud de la deformación es la dada por los vectores  $V_1$  y  $V_2$ , de forma que la masa reducida  $m_1$  produce la deformación  $a_1$ ; y la masa  $m_2$  produce la deformación  $a_2$ , como se representa en la Fg. 23.

Las deformaciones, referidas al tiempo, dan una oscilación senoidal para cada deformación. Por lo que, como a cada masa le corresponde su propia velocidad angular de vibración, la velocidad angular de la vibración del conjunto es la suma vectorial de las referidas velocidades, resultando que,

$$\omega_e = \sqrt{\frac{q_1}{m_1}} + \sqrt{\frac{q_2}{m_2}}$$

y que

$$\omega_e = \sqrt{q \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$$

y también, de

$$\omega_e = \sqrt{\frac{l^2 \cdot q}{l^2 \cdot m_1}} + \sqrt{\frac{l^2 \cdot q}{l^2 \cdot m_2}}$$

resulta, que

$$\omega_e = \sqrt{q \cdot \frac{I_{m_1} + I_{m_2}}{m_1 \cdot m_2}} \quad (134)$$

El número de vibraciones por segundo del sistema, o frecuencia del mismo, es:

$$n_e = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_e$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g \cdot \frac{I_{m_1} + I_{m_2}}{I_{m_1} \cdot I_{m_2}}} \quad (135)$$

y la relación de la desviación, es:

$$a_2 = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{m_1}{m_2} = -\frac{I_1}{I_2} \quad (136)$$

De este modo, se observa que cuando no existen fuerzas excitatrices ni amortiguadoras, la frecuencia propia de oscilación es fácilmente obtenible. Dante Giacosa [D.G.] propone en estos estudios procedimientos de cálculo a partir de las aceleraciones angulares instantáneas tomadas de los ángulos de torsión; de forma que, referidos a los volantes de masa  $m_1$  y ángulo de torsión  $\theta_1$ , de masa  $m_2$  y ángulo de torsión  $\theta_2$ , que

$$a_{c_1} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_{c_2} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

siendo el par de inercia en cada uno de los volantes

$$-I_{m_1} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-I_{m_2} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Según la condición propuesta de acción-reacción, el sistema está en equilibrado dinámico, cuando el par de inercia originado por cada volante que actúa en cada extremo del eje es igual a la reacción elástica que se genera como consecuencia de la deformación del elemento de torsión; en cuyo caso, se establece el sistema

$$\begin{aligned}
 I_{m_1} \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - R_1(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\
 I_{m_2} \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - R_2(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \quad (137) \\
 I_{m_1} \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - I_{m_2} \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Y si la oscilación propia de cada uno de los volantes es conforme a un movimiento vibratorio armónico, el sistema de ecuaciones admite soluciones del tipo

$$\theta = A \cos \omega_e \cdot t + B \operatorname{sen} \omega_e \cdot t$$

De la cual se infiere que cada uno de los volantes oscila con movimiento vibratorio armónico, cuya amplitud en radianes vale

$$\theta = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Y mientras la amplitud de la oscilación es diversa, la frecuencia es la misma para ambos volantes, y constituye la frecuencia propia de oscilación del eje.

Y para la aceleración, es de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 (A \cos \omega \cdot t + B \operatorname{sen} \omega \cdot t)$$

Entonces, el sistema (137), simplificado y sustituido, resulta de la forma:

$$\begin{aligned} I_{m_1} \omega_e^2 \theta_1 - R_1 (\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ I_{m_1} \theta_1 + I_{m_2} \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (138)$$

Si en la primera de las ecuaciones del sistema (138) se sustituye el valor de  $\theta_2$ , deducido de la segunda, se obtiene la expresión de la frecuencia de oscilación propia del sistema reducido

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{R_1 \frac{I_{m_1} + I_{m_2}}{I_{m_1} \cdot I_{m_2}}}$$

que es idéntica a la ecuación (135).

Conviene observar, según se representa en la Fg. 22, que en la sección **S** del eje, durante el movimiento oscilatorio, no verifica rotación. A esta sección se la denomina **nodo** y divide al eje en dos troncos; de forma que, las secciones pertenecientes a un tronco efectúan oscilación en fase con el respectivo volante; y, en oposición de fase, con las secciones correspondientes al otro tronco. Resultando fácilmente determinable la posición del nodo.

También, de la segunda ecuación del sistema (138) de equilibrio, se obtiene el valor de la relación entre las amplitudes de oscilación de los volantes,

$$-\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

Y como las amplitudes son proporcionales a las distancias al

nodo, también,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Y, por tanto, la posición del nodo queda definida por la relación

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

resultando relación de igualdades de forma idéntica a la expresión (136). No obstante, conviene observar que por medio del sistema de ecuaciones de equilibrio del eje, se determinan tan solo relaciones de amplitudes; de forma que solo se podrán obtener unos valores, cuando se prefijen arbitrariamente otros.

#### EL MOTOR DE VARIOS CILINDROS

De un modo general, se puede proceder al estudio de un motor de  $N$  cilindros, reduciendo el sistema equivalente a  $n$  volantes y, como se dijo en (b.2.2), son posibles  $(n-1)$  número de vibraciones propios, cuya frecuencia varía entre  $(1)$  y  $(n-1)$ , tantos como elementos elásticos intermedios o troncos posea, y que representan todas las posibles **oscilaciones propias del eje**.

Las ecuaciones propuestas por [H.S.], [D.H.], [D.G.] y otros, se fundan en el método de cálculo debido a Holzer [H] que simplifica el sistema de  $(n)$  volantes. Así, [H.S.] establece que para un sistema de  $(n)$  masas volantes a lo largo

del eje, que puede equivaler a  $(n-2)$  número de cilindros, mas el volante de acumulación del trabajo en exceso del período motor y el volante equivalente de la máquina de utilización (hélice, rotor, etc.); la representación por fórmulas de las  $(n-1)$  raíces, da una ecuación de grado  $(n-1)$ , de muy laboriosa resolución, que para el cálculo de las raíces se necesita proceder por tanteos. Entonces, se recurre a otros procedimientos de cálculo; como puede ser el procedimiento de aproximación gradual, en el cual, se parte de la frecuencia propia de un sistema de solas dos masas.

En el caso de un motor de  $N$  cilindros, consta de una masa ( $m'$ ) equivalente a la de los  $N$  cilindros, situada aproximadamente a la mitad del eje reducido, y la masa  $M$  invariable del volante de gran magnitud. Si, además, se le encuentra acoplado un rotor, el sistema queda formado por la masa ( $m'$ ) y otra masa ( $M'$ ), suma de las dos masas, la del volante y la del rotor; situada, aproximadamente, en el punto medio de la distancia entre ambas, como se representa en la Fg. 24.

En el caso mas complejo de ser este motor utilizado en la propulsión de un buque, con volante junto con un acoplamiento, elástico o rígido, y la hélice; para la vibración principal o de primer grado, la masa ( $m'$ ) equivalente es la del número de cilindros mas la del volante con acoplamiento, situada sobre el volante; y la segunda masa  $M$  de la hélice situada sobre ésta, F.g. 25. Para la vibración de segundo grado, la masa ( $m'$ ) equivalente a los  $N$  cilindros, se sitúa en la mitad del eje reducido; la masa  $M$  del volante, con el acoplamiento, sobre el propio volante. Fg. 26.

El número de vibraciones propio del sistema de dos masas se determina por las ecuaciones del grupo (134), sustituyendo  $l$  por  $l'$ . De esta forma se obtiene la velocidad angular  $w_e$  aplicable a las vibraciones de primer grado.

Como es norma usual en estos casos, se numeran los

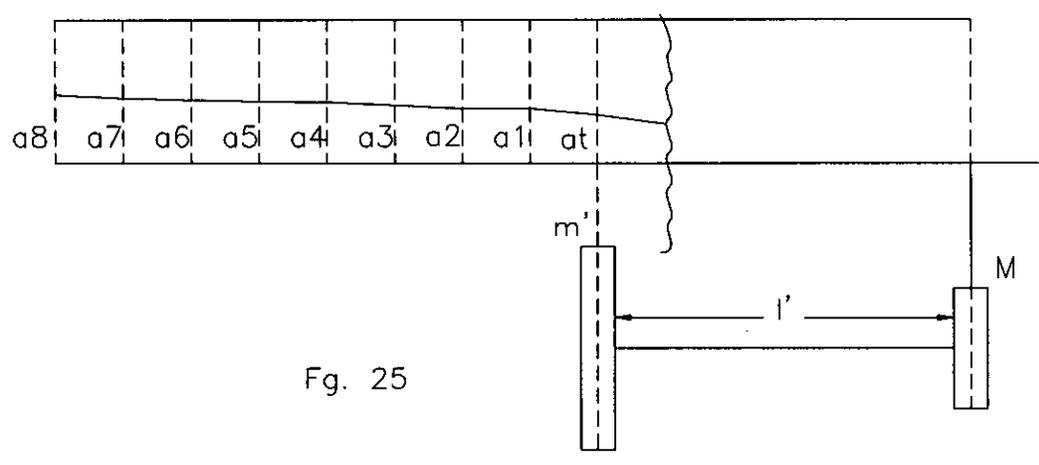
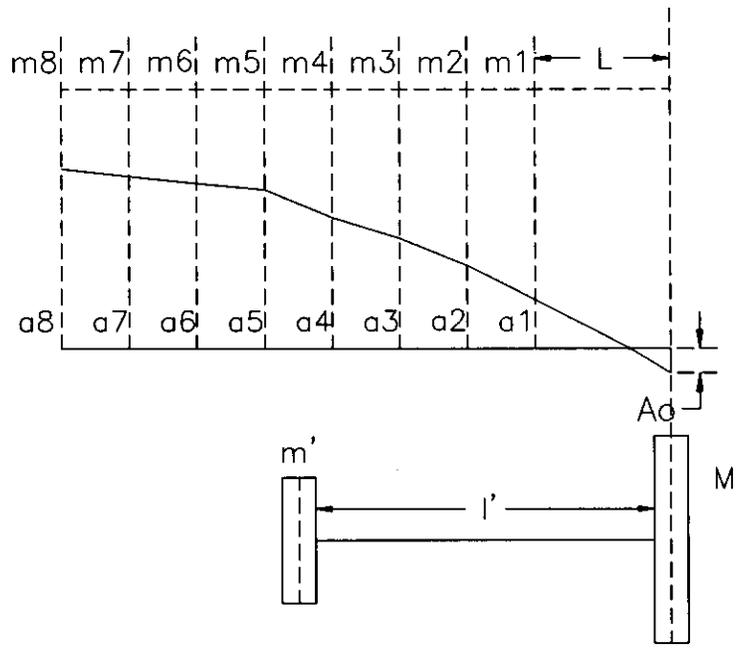


Fig. 25

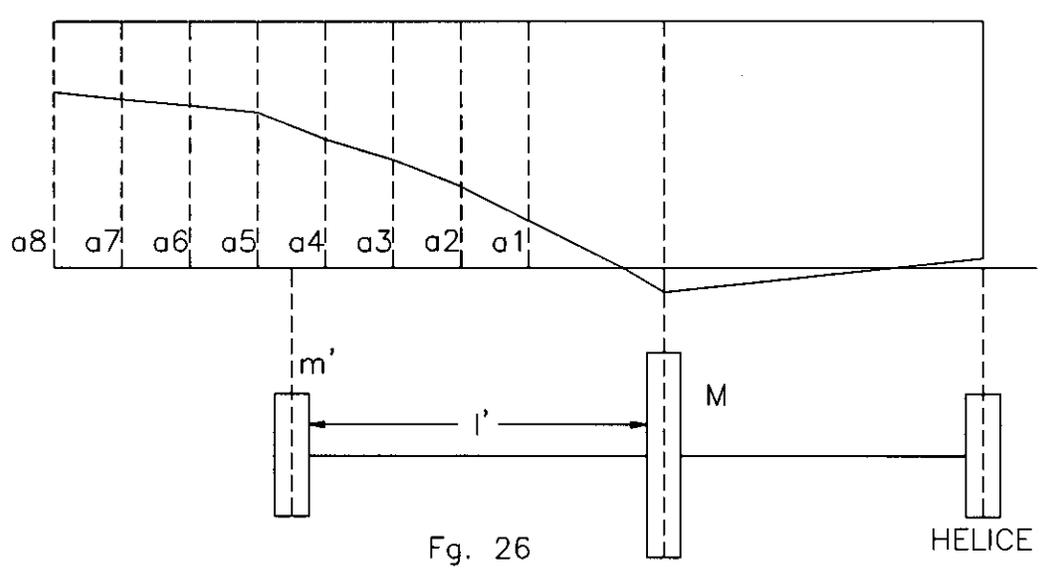


Fig. 26

cilindros a partir del volante, representando el sistema, siempre, por las masa y las longitudes reducidas.

Para plantear el sistema de ecuaciones que establezca las deformaciones de la vibración, se empieza por la deformación  $a_N$  del cilindro mas alejado del volante, asignándosele el valor (1), puesto que la escala de valores de  $a$  carece de importancia. A continuación, se determina la deformación para el cilindro (N-1) que viene a ser ( $a_{N-1}$ ), por deducción de la deformación parcial ( $a_N, N-1$ ) de la deformación del eje ( $l_N, N-1$ ). Esta deformación se deduce de la igualdad de la acción-reacción, o fuerza de inercia-fuerza de reacción,

$$F_N = R_{N, (N-1)}$$

$$m \cdot a \cdot \omega_e^2 = q \cdot a$$

o bien

$$m_N \cdot a_N \cdot \omega_e^2 = \frac{q'}{l_{N, (N-1)}} \cdot a_{N, (N-1)}$$

de la que se obtiene

$$a_{N, (N-1)} = a_N \cdot \frac{m_N \cdot \omega_e^2}{q'} l_{N, (N-1)}$$

Si este planteamiento se aplica a la Fg. 24, se tiene como forma general

$$a_{8,7} = a_8 \frac{m_8 \cdot \omega_e^2}{q'} l_{8,7}$$

De esta igualdad se infiere que la deformación del eje, desde el nodo hasta la masa  $m_7$ , vale

$$a_7 = a_8 - a_{8,7}$$

y que

$$a_7 = a_8 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{8,7} \cdot m_8 \cdot a_8$$

Para determinar las deformaciones de los elementos **N-2**, **N-3**, etc., se procede de igual forma; planteándose el sistema de ecuaciones, referido a la Fg. 24, incluyendo la masa principal **M**.

y de forma general

$$\begin{aligned}
 a_8 &= 1,00 \\
 a_7 &= a_8 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{8,7} \cdot m_8 \cdot a_8 \\
 a_6 &= a_7 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{7,6} (m_8 \cdot a_8 + m_7 \cdot a_7) \\
 a_5 &= a_6 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{6,5} (m_8 \cdot a_8 + m_7 \cdot a_7 + m_6 \cdot a_6) \\
 a_4 &= a_5 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{5,4} (m_8 \cdot a_8 + \dots + m_6 \cdot a_6 + m_5 \cdot a_5) \\
 a_3 &= a_4 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{4,3} (m_8 \cdot a_8 + m_7 \cdot a_7 + \dots + m_5 \cdot a_5 + m_4 \cdot a_4) \\
 a_2 &= a_3 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{3,2} (m_8 \cdot a_8 + m_7 \cdot a_7 + \dots + m_4 \cdot a_4 + m_3 \cdot a_3) \\
 a_1 &= a_2 - \frac{\omega_e^2}{q} l_{2,1} (m_8 \cdot a_8 + m_7 \cdot a_7 + \dots + m_3 \cdot a_3 + m_2 \cdot a_2) \\
 a_0 &= a_1 - \frac{\omega_e^2}{q} L (m_8 \cdot a_8 + m_7 \cdot a_7 + \dots + m_2 \cdot a_2 + m_1 \cdot a_1)
 \end{aligned} \tag{139}$$

Pero, si se tiene en cuenta que los mecanismos de cada cilindro

son de igual masa, y están a igual distancia entre ellos, los planteamientos del sistema (139) se simplifican por la incorporación del valor constante en cada expresión,

$$\frac{\omega_e^2}{q'} l_r \cdot m_r$$

Y de un modo general, se tien,

$$a_{n-1} = a_n - \frac{\omega_e^2}{q'} l_{n,n-1} \cdot \sum_{n=N}^{n=0} m_n \cdot a_n \quad (139')$$

Como la masa **M** oscila al contrario de las otras masas **m**, la deformación **a0** es, también, de signo contrario.

El cálculo de las deformaciones **a** viene establecido por el valor de **we** obtenido por medio del sistema de dos masas, en la forma de la ecuación (134). Si el valor de **we** coincide con la frecuencia propia, como consecuencia del equilibrio de las fuerzas de inercia que actúan, su suma es igual a cero, o sea,

$$\omega_e^2 \cdot \sum_{n=N}^{n=0} m_n \cdot a_n = \omega_e^2 (m_N \cdot a_N + m_{N-1} \cdot a_{N-1} + \dots + M \cdot a_0) = 0 \quad (140)$$

En el caso en que no se cumpla esta condición, la diferencia obtenida indica el valor de **we** sustituido cuando se aleja del valor verdadero **w**. Entonces, debe de repetirse el cálculo hasta encontrar el valor correcto de **we**, o, en su defecto, que la diferencia obtenida sea despreciable.

Si se trata el sistema por masas y longitudes reducidas iguales de los mecanismos motores, la (140) se convierte en,

$$\omega_e^2 \cdot \sum_{n=N}^{n=0} m_n \cdot a_n = \omega_e^2 (m_r \cdot \sum_{n=N}^{n=0} a_n + M \cdot a_0) = 0 \quad (140')$$

De la misma forma, en lugar de las deformaciones reales se pueden introducir las deformaciones relativas referidas a la deformación  $a_N$  de la cigüeña de orden  $N$ , de forma que para la cigüeña de orden  $N$ , se tiene,

$$a_N = \frac{a_N}{a_N} = 1$$

y, en general, para el orden  $i$

$$a_i = \frac{a_i}{a_N}$$

con lo cual, se pueden establecer así transformadas las fórmulas (139) y (140)

Una vez hallado el valor de  $we$ , se determina la frecuencia, o número de vibraciones propio; bien por el grupo (133) o por el (131); si bien, referido al grupo (131) suele darse en el tiempo de por minuto.

Para las formas de vibración de segundo grado y grados mas elevados, el número de vibraciones propio se obtiene introduciendo el valor de  $we$  hallado para el sistema de dos masas, como se representa en la Fg. 26; por las fórmulas (139) y (140), corrigiendo después paso a paso  $we$ .

En cuanto se lleva propuesto, se halla referido a motores denominados de cilindros en línea; pero son aplicables a los motores de dos líneas de cilindros formando una  $V$ , o motores en  $uve$ . Teniendo en cuenta que sus mecanismos accionan sobre un único eje cigüeñal; por tanto, sus mecanismos se pueden referir a un eje equivalente, semejante al de un motor en línea.

Cuando los cilindros se disponen en uno o mas planos,

formando estrella, el sistema consta de los  $N$  mecanismos del tren alternativo reunidos en el muñón del eje cigüeñal y de la masa reducida de la utilización; el número de vibraciones propio se puede calcular por la ecuación (134)

#### **b.2.4) Las fuerzas tangenciales excitatrices.**

En cuanto se lleva tratado referente a las vibraciones torsionales de los ejes cigüeñales, se ha puesto de manifiesto que son provocadas por las irregularidades del par motor, procedentes de la fuerza de los gases sobre el émbolo, determinadas en el apartado (1-2), y las fuerzas de inercia creadas por las masas alternativas al moverse con velocidad variable, estudiadas en el apartado (1-3), también aplicadas sobre el émbolo.

En el apartado (1-4), que trata de las fuerzas resultantes, se estudiaron estas fuerzas y representaron en la Fg. 13, así como su consecuencia sobre el motor; produciendo, por una parte, cargas no deseables causantes de vibraciones, y, por otra, el par motor objeto del mismo, como consecuencia de la fuerza tangencial  $F_3$ , actuando en el extremo del eje cigüeñal; que a la vez, por causa de su irregularidad, produce las vibraciones de torsión del eje.

Aunque las masas giratorias, que fueron estudiadas en su forma particular en el apartado (1-3), producen fuerzas centrífugas, no ejercen influencia alguna sobre las vibraciones de torsión; y cuando proceden de aceleraciones tangenciales, no pueden considerarse como fuerzas excitatrices, ya que, como se demostró en la acción-reacción, pertenecen al proceso de vibración.

De cuanto antecede, referido a cada cilindro, se observa que en un motor de cuatro tiempos, la fuerza excitatriz de los gases se repite cada **dos por dos  $\pi$  radianes**; mientras que la la fuerza excitatriz procedente de las fuerzas de inercia se

repite cada **dos pi radianes**. En los motores de dos tiempos, las fuerzas excitatrices de los gases y de inercia se repiten con igual frecuencia, o sea, cada **dos pi radianes**.

En los motores de varios cilindros en línea, la curva de fuerzas tangenciales resultante carece de interés, puesto que, como se demostró anteriormente, el estudio se fundamenta en la forma de las vibraciones propias, sobre las fuerzas tangenciales de cada cilindro y sobre las longitudes elásticas del eje. Por ello, el diagrama de fuerzas tangenciales de los motores de varios cilindros permite reconocer en base al número de vibraciones principales que el armónico principal se presenta intensamente cuando el orden de la vibración es igual al número de cilindros. No obstante, a pesar de ello, aparecen varias fuerzas tangenciales armónicas que resultan activas como excitatrices para cada cigüeña.

En consecuencia, la fuerza tangencial variable de cada mecanismo de cigüeñal, no puede ser considerada en su forma estricta, sino que se debe de descomponer en sus componentes armónicos, para poder apreciar con mas rigurosidad la acción de las fuerzas excitatrices aisladas sobre el eje cigüeñal.

#### **a) los armónicos excitadores**

Como se viene observando, el número de orden de los armónicos designa el número de las ondas de oscilación completas por cada revolución del eje motor. Por ello, si se toma como período básico el de una revolución del eje, en los motores de cuatro tiempos se tiene que el armónico primero tiene como número de período  $1/2$ , ya que el ciclo de cuatro tiempos se realiza en dos revoluciones del eje; y la vibración principal tiene la velocidad angular de giro, o excitación, que vale

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \omega$$

En los motores de dos tiempos , con una revolución por ciclo motor, el primer armónico tiene como número de período 1, por lo que, la vibración principal tiene la velocidad angular de giro o excitación que vale

$$\Omega_1 = \omega$$

Según esto, en los motores de cuatro tiempos al lado de órdenes de números enteros aparecen otros de números fraccionarios; de manera que si  $k$  representa la cifra del armónico, el orden es  $k/2$ , y la velocidad angular de giro es

$$\Omega_k = k \cdot \frac{\omega}{2}$$

Y en los motores de dos tiempos, como  $k$  representa a la vez la cifra y el número de orden del armónico, resulta que

$$\Omega_k = k \cdot \omega$$

que es la velocidad angular de la fuerza excitatriz tangencial armónica de orden  $k$ , siempre de números enteros.

#### b) representación de los armónicos.

La representación de las fuerzas tangenciales armónicas aisladas  $F_k$  puede realizarse con la ayuda de un diagrama circular como el de Fg. 27b, en el que el vector  $V_k$  de la fuerza gira con la velocidad angular de la fuerza excitatriz tangencial armónica de orden  $k$  del movimiento circular que corresponde a  $nk$  oscilaciones por segundo.

La Fg. 27a, representa una posición alfa de la fuerza tangencial  $F_t$ , y en la Fg. 27b, la fuerza tangencial armónica de orden  $k$ , en la que, la amplitud temporal  $F^k$  es la

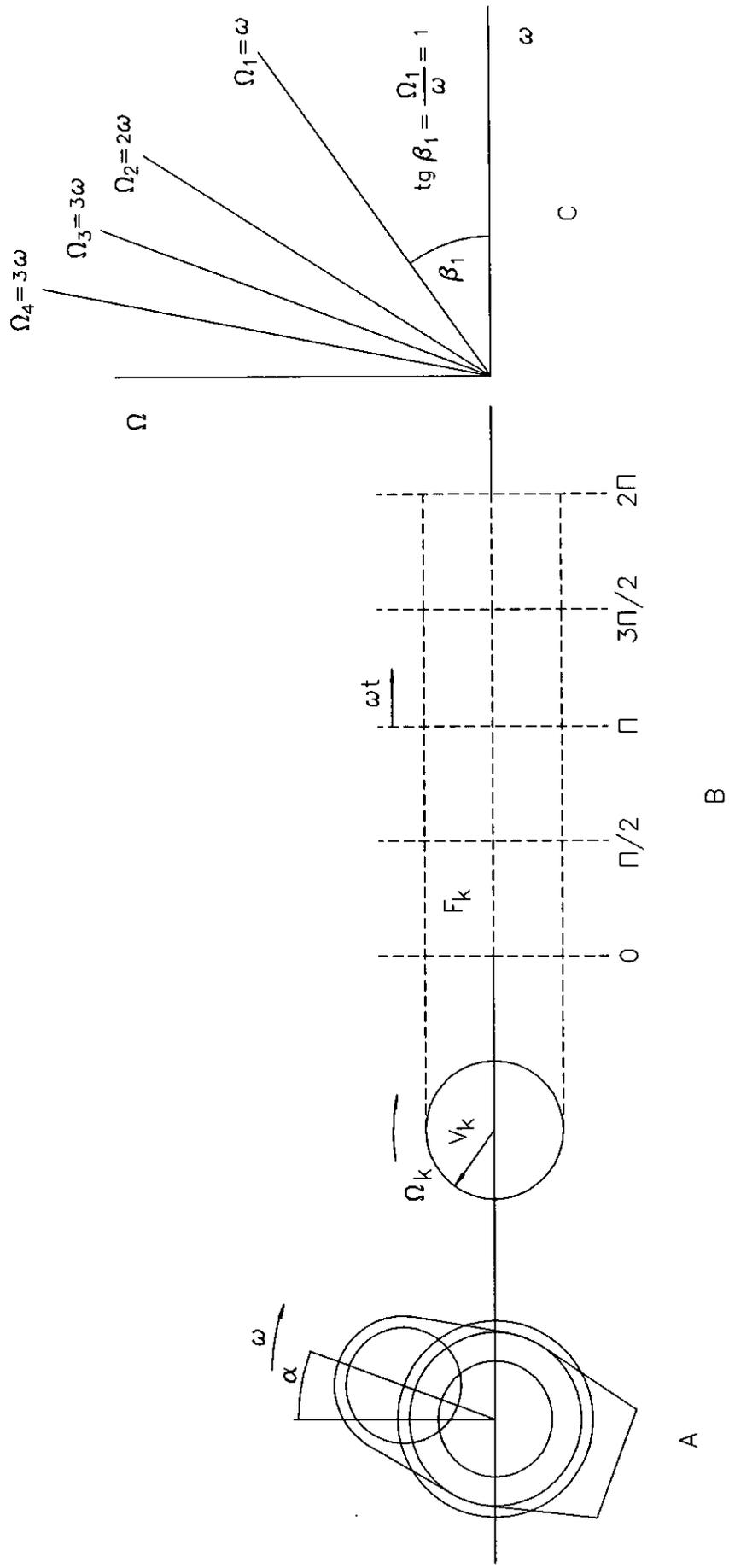


Fig. 27

componente senoidal de la fuerza tangencial armónica  $F_k$ , midiendo el ángulo de giro a partir del eje horizontal. Por lo que, la variación total de las fuerzas sobre el ángulo girado por la manivela es una línea senoidal.

En la Fg. 27c, se representa la velocidad angular de la excitación para diferentes valores del armónico  $k$ , que vienen dados por la relación de las velocidades angulares de cada excitatriz y la velocidad angular del eje.

La frecuencia de la excitatriz viene dada, en oscilaciones completas por segundo o Hz., por la ecuación,

$$f = \frac{\Omega}{2 \cdot \pi} \quad (141)$$

Las velocidades angulares de los armónicos son entre (1) y ( $k$ ). Pero si hay una fuerza  $F_k$  como excitatriz, de orden  $k$ , la velocidad angular es

$$\Omega_k = k \cdot \omega \quad (142)$$

o bien

$$\Omega_k = k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \quad (142')$$

si se toma la velocidad angular en función del número de revoluciones por minuto del eje, Fg. 27a, como es corriente considerarla en cierta aplicaciones. Y, según se desprende de la representación de la Fg. 27c, la variación de la velocidad angular de los armónicos en función de la velocidad angular del eje es una función lineal rectilínea, puesto que

$$\text{tang.} \beta = \frac{\Omega_k}{\omega}$$

Correspondiendo a cada armónico una pendiente determinada, y solamente una.

**c.) Armónicos de las fuerzas tangenciales de los gases.**

Las fuerzas tangenciales de los gases, que ya fueron tratadas en el apartado (1.4.- Las fuerzas resultantes), a partir de los estudios realizados en el apartado (1.2.- La fuerza del agente evolutivo), tomadas del ciclo dinámico y de la descomposición de fuerzas, para las que se obtuvo la fórmula (52), y su representación en la Fg. 14; pueden ser descompuestas en sus armónicos, conforme a su examen a partir de los diferentes procesos de trabajo: a cuatro tiempos, en el que el ciclo se realiza en dos revoluciones del eje cigüeñal; a dos tiempos, en el que el ciclo se realiza en una revolución.

Del análisis de la ecuación (52), se observa que la fuerza tangencial varía en forma periódica, por causa de las variables: fuerza instantánea de los gases; ángulo ( $\omega t$ ) engendrado por el radio de cigüeñal en su rotación; Entonces, es posible desarrollar la ecuación (52) en serie de Fourier, en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot A_0 + A_1 \cdot \cos x + A_2 \cdot \cos 2x + A_3 \cdot \cos 3x + \dots \\ + B_1 \cdot \text{sen } x + B_2 \cdot \text{sen } 2x + B_3 \cdot \text{sen } 3x + \dots$$

y también representar la función de la fuerza tangencial

$$F_t = f(\omega t)$$

indica en la Fg. 14, como una suma de oscilaciones simples, en intervalos que pueden ser desde ( $\omega t=0$ ) hasta ( $\omega t=2\pi$ ). Siendo

el análisis armónico la determinación de los cocientes

$$\frac{1}{2} \cdot A_0 ; A_1 ; A_2 ; \dots B_1 ; B_2 ; B_3 ; \dots$$

Por la aproximación de funciones continuas en  $[0, 2\pi]$ , por polinomios trigonométricos, se tiene que

$$f_n(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} [A_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + B_k \cdot \text{sen}(k \cdot \omega t)] \quad (144)$$

donde

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \text{sen} kx \, dx$$

No obstante, [H.S.] simplifica el cálculo, juntando los términos del mismo subíndice, y obtiene para

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} F_k \cdot \text{sen}(k \cdot \omega t + \phi_k) \quad (145)$$

donde

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \text{tang } \phi_k = \frac{A_k}{B_k} \phi_k$$

cuando se mide desde la horizontal, se le denomina defasado;  $1/2 \cdot A_0$  es el término de oscilación libre como altura media  $F_m$  de la curva de fuerzas tangenciales. Como se expresó anteriormente, en los motores de cuatro tiempos es  $k/2$ , y para los motores de dos tiempos es  $k$ .

De todo lo expuesto se establece, que cada armónico de orden  $k$  de la fuerza tangencial  $F_g$  del gas se compone de una componente  $A_k$  y de una  $B_k$ .

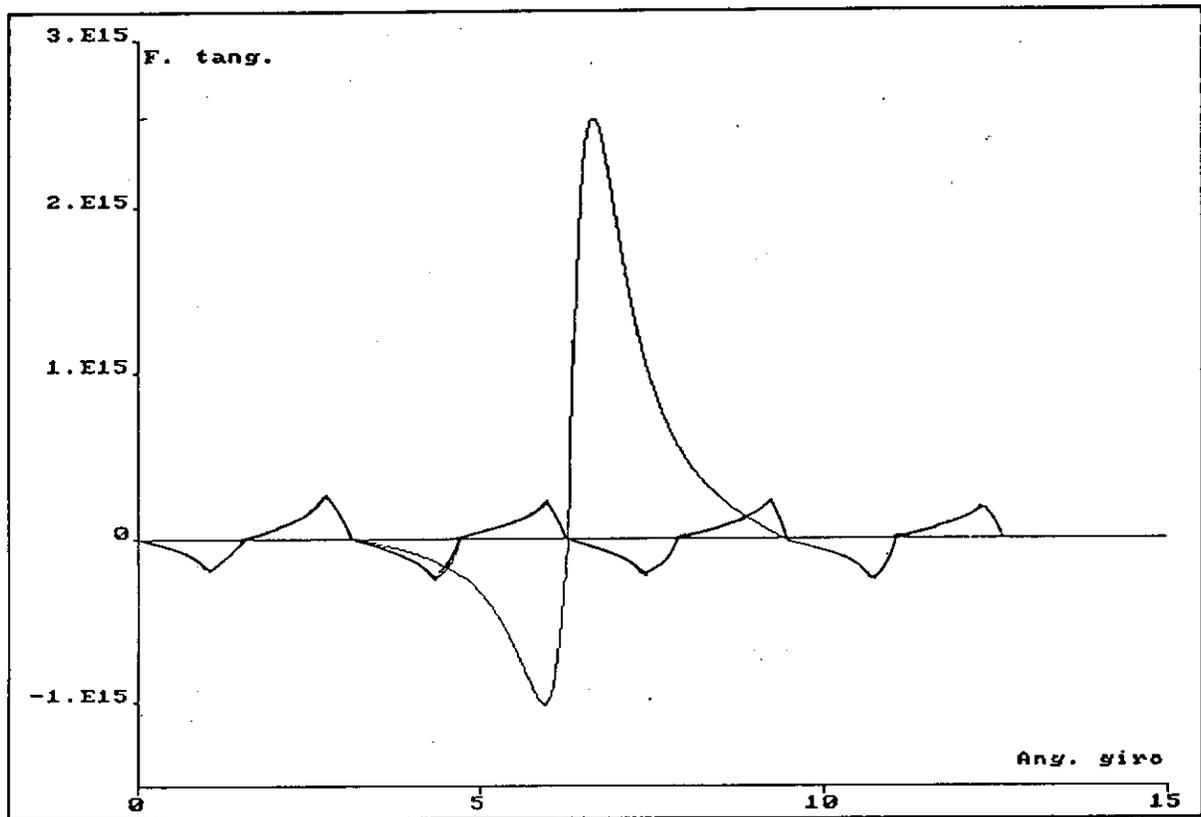
En la Fg. 28a se representa la variación de la fuerza tangencial de los gases de un motor diesel de dos tiempos, desarrollando la potencia máxima, y en la Fg. 28b el análisis de los armónicos correspondientes a las fuerzas tangenciales de los gases a aquella potencia, calculados por el doctorando, tomados del diagrama dinámico de la Fg. 1, que corresponden a un cilindro del motor a que se hace referencia en la Fg. 4, página 11, en cuanto a las fuerzas de inercia.

En la Fg. 29a, se hace un estudio de la misma forma, para el caso en que el referido motor fuera transformado en un motor de cuatro tiempos, al que se le considera el ciclo dinámico de la misma Fg. 1, conservando la mismas dimensiones del motor referido; en la Fg. 29b, por descomposición de las fuerzas tangenciales, se hace el estudio del análisis de los armónicos correspondiente, considerando la fuerza tangencial variable una componente senoidal dada por la fórmula

$$F_t = F_g \left( \text{sen}\alpha + \frac{\text{sen}2\alpha}{2 \sqrt{3,8^2 - \text{sen}^2\alpha}} \right)$$

#### d.) armónicos de las fuerzas tangenciales de inercia

En el apartado (1.3.-) se ha realizado el estudio de las fuerzas de inercia creadas por las masas sometidas a movimiento rectilíneo alternativo y por las masas sometidas a movimiento circular uniforme. Pero, como ya se dijo antes, las fuerzas de inercia de las masas giratorias no ejercen influencia sobre las vibraciones de torsión, porque pertenecen al proceso de



Fuerza tangencial de los gases y fuerza tangencial de fuerzas de inercia.

Fg. 29

vibración. Por tanto, son solo las fuerzas de inercia de las masas alternativas, en la misma forma que la fuerza de los gases, las causantes de estas vibraciones.

La descomposición en elementos armónicos para estas fuerzas tangenciales de inercia se establece a partir del desarrollo en serie del coseno del ángulo beta, en la forma en que se ha procedido en la página 20, del cual se obtiene que la aceleración instantánea, en forma general, vale,

$$a_i = R \cdot \omega^2 \left( \cos \alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} \cdot \cos 2n\alpha \right)$$

Siendo la fuerza de inercia de la forma

$$F_i = \sum (m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \left( \cos \alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} \cdot \cos 2n\alpha \right) \quad (145)$$

la fuerza tangencial excitatriz es de la forma de la fuerza de los gases, pero tiene el mismo valor tanto para los motores de dos tiempos como para los motores de cuatro tiempos, y es,

$$F_{ti} = F_i \left( \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2 \sqrt{3,8^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$

De la ecuación de la aceleración, se desprende que aparece una excitación de frecuencia igual a la de la velocidad angular del motor; después aparecen armónicos pares de segundo, cuarto, sexto, octavo, etc. orden; aunque por encima de estos valores, carecen de importancia, por cuanto se alejan bastante de la frecuencia natural del motor.

A este respecto, [H.S.] establece criterios para descomponer las fuerzas de inercia en sus componentes

armónicos, obteniendo ecuaciones aproximadas para las fuerzas de inercia tangenciales, resultando de la forma:

$$F_{it} = \sum (m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \left( \frac{1}{4} Y \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{3}{4} Y \operatorname{sen} 3\alpha - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} Y^2 \operatorname{sen} 4\alpha + \frac{5}{32} Y^3 \operatorname{sen} 5\alpha + \frac{3}{32} Y^4 \operatorname{sen} 6\alpha + \dots \right)$$

Y las amplitudes de los armónicos de inercia de orden  $k$  son

$$\begin{array}{ll} \text{Armónico } 2^\circ & m_a \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot Y & \text{Armónico } 4^\circ & - m_a \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \\ \text{Armónico } 6^\circ & - m_a \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot Y & \text{Armónico } 8^\circ & - m_a \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot Y^2 \end{array}$$

Que son de la misma forma que los obtenidos por el doctorando en la página 20.

Por otra parte, el armónico  $4^\circ$ , o de segundo orden, es el que por su gran valor actúa con mayor intensidad.

#### e) Armónicos de las fuerzas tangenciales resultantes.

En consecuencia a lo que se viene estudiando, se observa que en los motores de cuatro tiempos las fuerzas tangenciales de los gases se producen con frecuencia mitad de la velocidad angular del eje cigüeñal; mientras que en los motores de dos tiempos estas fuerzas tangenciales se realizan con frecuencia igual a la velocidad angular.

Pero las fuerzas de inercia producen fuerzas tangenciales con igual frecuencia en los motores de cuatro tiempos que en los motores de dos tiempos, que coinciden con la velocidad angular del eje motor. Por ello, en los motores de cuatro

tiempos, la fuerza de inercia tangencial resultante es la suma de la correspondiente a la de los gases y a la de inercia, y en otras, es únicamente debida a la inercia; de esta forma, los armónicos, referidos a una revolución del eje, se producen en el orden  $(n)$  y  $(n/2)$ , y con arreglo al número de cilindros en  $(n/2 + n)$ .

Es norma usual, por parte de algunas escuelas, referir estas fuerzas tangenciales a la procedencia de presión sobre el émbolo; pero, en ambos casos, la amplitud de los armónicos resultan de la misma forma, Fig. ( a) para los motores de cuatro tiempos y Fig.( b) para los motores de dos tiempos.

Teniendo en cuenta que los valores hallados para las fuerzas tangenciales son aplicables a cada caso; de formas que, si el motor gira con velocidad angular constante, a pesar de las variaciones de carga, la fuerza tangencial de inercia y sus armónicos son constantes; pero la fuerza tangencial de los gases y sus armónicos son variable según las variaciones de carga. En este caso, el estudio debe de hacerse para la potencia máxima desarrollada por el motor.

Pero cuando el motor ha de trabajar con potencia y velocidad angular variables, la amplitud de la carga y los armónicos son diferentes; de este modo, puede ocurrir que algunos armónicos resulten peligrosos. Entonces, conviene hacer un estudio de ciertos armónicos de cada carga.

HANS SCHRÖN [H.S.] se refiere a publicaciones de GEIGER, WYDLER, DEN HARTOG, STIEGLITZ, KIMMEL, HAZEN y MONTIETH referentes a la determinación de ciertos armónicos en función de la presión media desarrollada por el motor. No obstante, el análisis mas completo y utilizado es, aún, el establecido por F. P. PORTER, titulado "Coeficientes Armónicos de las Curvas del par torsor de los motores", en el cual hace un amplio análisis de ocho diferentes tipos de motores, de dos y de cuatro tiempos, diesel y de explosión, lentos y rápidos, con número de cilindros variable en uno o mas planos; de forma que,

uno de estos ocho motores prototipo de PORTER, a todo fin práctico, siempre será suficientemente parecido a cualquier motor que se presente.

En relación con lo que en este apartado se trata, se refiere y determina para cada presión media indicada producida por el motor, así como para las fuerzas de inercia, para los (10) primeros armónicos los valores de la amplitud tomada del desarrollo en serie de Fourier

$$D_k = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

#### **B.2.5) Las deformaciones en la resonancia**

En cuanto se viene tratando sobre las vibraciones de torsión, se han estudiado por separado la forma propia de vibrar de un sistema vibrante, y las fuerzas excitatrices capaces de producir vibraciones en el tal sistema vibrante. Pero también se ha puesto de manifiesto que cuando la frecuencia de la vibración propia del sistema vibrante coincide con la frecuencia de las fuerzas excitatrices producen resonancia; estas vibraciones se hacen muy violentas, y las deformaciones producidas fatigan tanto al eje que puede llegar al colapso. Por ello, debe de tomarse en consideración:

##### **a) La acción de las fuerzas tangenciales**

Cuando existe resonancia entre las fuerzas tangenciales y el sistema vibrante eje de cigüeñal, las vibraciones se hacen peligrosas, porque las fuerzas periódicas provocan las deformaciones angulares de las masas en forma de balanceo por la ya tratada acción-reacción. En este caso, conviene que la intensidad de los armónicos mas altos disminuya y se haga tan

pequeña que las oscilaciones provocadas no sean peligrosas. La magnitud real de las deformaciones por vibración y la carga adicional que la resonancia produce en el eje depende de la amortiguación que simultáneamente actúe. La acción de las fuerzas tangenciales en el campo que abarca la resonancia resalta de forma clara en el análisis de vibraciones por gráficas de coordenadas amplitud temporal o frecuencial, como mas adelante se tratará, al poder medir la amplitud o deformación  $a$ , en función de la velocidad o de la frecuencia de la excitación  $\Omega$ ; porque, en los puntos en que exista resonancia, donde  $\Omega = \omega_e$ , la amplitud se hace muy grande.

La deformación de la oscilación forzada para una masa  $m$  situada en el extremo de un eje, como en la Fg. 22, con fatiga elástica  $q$  para el caso límite, bajo la acción de una fuerza tangencial armónica  $F_k$ , en el que no hay amortiguación alguna, viene determinada por la fórmula:

$$a = \frac{F_k}{q - m \cdot \Omega^2} \quad (146)$$

y si se cumple la condición de que

$$\Omega^2 = \frac{q}{m} = \omega_e^2$$

hay resonancia, y la deformación resulta infinita, por lo que, la curva representativa de esta resonancia es de la forma de la tangente del ángulo correspondiente como se ha puesto de manifiesto en la Fg. 27 en la forma dada por la ecuación (142).

Pero si al sistema se incorpora una amortiguación, con coeficiente de amortiguación  $q''$ , la amplitud viene modificada en función del coeficiente de amortiguación y de la velocidad

de la excitación, dada por la fórmula:

$$a_m = \frac{F_k}{\sqrt{(q - m \cdot \Omega^2)^2 + q^2 \cdot \Omega^2}} \quad (147)$$

En cuyo caso, si hay resonancia, la amplitud se mantiene finita.

Por otra parte, hay que considerar que en su campo de utilización los motores pueden trabajar dentro de una amplia gama de velocidades angulares; resultando que, conforme a la fórmula (142), la frecuencia de la excitación varía para un armónico determinado, y con ella la deformación  $a$ , de manera que la amplitud se presenta en forma dependiente de la frecuencia. Por ello, como las deformaciones carecen de importancia, por ser muy pequeñas fuera del estrecho campo crítico, se pueden considerar las amplitudes como una asociación de las deformaciones en el número de revoluciones crítico.

#### b) El número de revoluciones crítico.

Como se viene exponiendo, el número de orden de los armónicos, si se toma si se toma como periodo básico el de una revolución del eje, la cifra representativa de los armónicos viene establecida por el orden del mismo, de forma que como el motor de cuatro tiempos realiza un periodo motor cada dos revoluciones, el número de periodo es  $1/2$ . Entonces, en estado crítico, con referencia a la fórmula (142), se tiene que,

$$\frac{1}{2} k \cdot \omega_{kr} = \Omega_k = \frac{1}{2} \omega_e$$

siendo

$$\omega_{kr} = \frac{\omega_e}{\frac{k}{2}} \quad (148)$$

y el número de revoluciones crítico es

$$n_{kr} = \frac{n_e}{\frac{k}{2}} \quad (148')$$

En los motores de dos tiempos, con referencia a la fórmula (142), se tiene que el estado crítico es

$$k \cdot \omega_{kr} = \Omega_k = \omega_e$$

y que

$$\omega_{kr} = \frac{\omega_e}{k} \quad (149)$$

siendo el número de revoluciones crítico

$$n_{kr} = \frac{n_e}{k} \quad (149')$$

Por tanto, si el número de revoluciones crítico se refiere a la fuerza debida a los gases, se presentan particularmente violentas las vibraciones de un orden que sean multiples del número de encendidos por cada revolución del eje de cigüeñal, que corresponde a la mitad del número de cilindros  $N$  del motor; por lo tanto, hay que considerar los múltiplos de  $N/2$ . En los motores de dos tiempos, el número de encendidos por revolución es igual al número de cilindros; por lo tanto, hay que

considerar los múltiplos de  $N$ . Sucede, entonces, que con estos órdenes, las excitaciones de todos los cilindros actúan simultáneamente en la misma dirección. Es por ello que se les denomina **armónicos principales** y el número de revoluciones correspondiente es el **número crítico principal**. También, en los motores de cuatro tiempos al número  $ne/N/2$  y en los motores de dos tiempos al número  $ne/N$  se les llama **número crítico de tiempos de encendido**, porque el diagrama de fuerzas tangenciales se establece conforme al número de cilindros.

Teniendo en cuenta que, a tenor de lo que se viene estudiando, la velocidad angular  $\omega_e$  de la vibración propia y el número de oscilaciones  $ne$  son independientes de la velocidad angular  $\omega$  del eje y del número de revoluciones  $n$ , al representarlos gráficamente sobre ejes de coordenadas, como es norma usual, las frecuencias  $ne$  resultan paralelas al eje en que se represente la velocidad angular del eje cigüeñal; estas consideraciones llevadas a la Fg.27c da las velocidades angulares del eje cigüeñal para las cuales hay resonancia.

En todo el estudio de las vibraciones de flexión y de torsión de los ejes cigüeñales, se vienen introduciendo conceptos referentes a la influencia del número de apoyos y al número de cilindros; consideraciones que no se han tomado en cuenta en el estudio de las fuerzas de inercia creadas por las masas en movimiento; porque al ser los cilindros idénticos, las fuerzas de inercia resultan iguales. Pero ya en el proxecto de tese doutoral, en obxetivos e memoria explicativa do traballo, se hace referencia al número de cilindros y sus consideraciones.

No obstante, antes de proceder al estudio de estas consideraciones, conviene tratar otras cuestiones relativas a la construcción de los motores, especialmente, en relación al campo de aplicación y a la potencia requerida.

La potencia producida por un motor es proporcional a los parámetros: Presión media, volumen de cilindrada, número de

cilindros y velocidad angular del eje.

La presión media es función del calor producido en la combustión, e influye muy poco en la fuerzas de inercia.

El volumen de cilindrada de cada cilindro y el número de cilindros están relacionados y, como mas adelante se verá influye sobre las fuerzas de inercia; por tanto, conviene tener las ideas muy claras sobre el número de cilindros mas conveniente, teniendo en cuenta las propiedades esenciales propias de los diferentes números de cilindros y de la de su agrupación, así como del volumen de los cilindros; prestando especial atención al comportamiento térmico con la variación del volumen del cilindro, y al comportamiento dinámico según el número de cilindros y su volumen, a fin de alcanzar las condiciones mas satisfactorias en cuanto a funcionamiento.

Teniendo en cuenta que las exigencias mas importantes se refieren a la construcción fácil y adecuada, a la rápida puesta en marcha, al funcionamiento ordenado y tranquilo del motor, con una sencilla conducción y costo reducido en el mantenimiento. La construcción de motores de uno o pocos cilindros ofrece la ventaja de una gran sencillez; pero los motores de varios cilindros ofrecen otras ventajas y pueden satisfacer al mismo tiempo las mas rígidas exigencias sobre la seguridad de construcción. No obstante, el aumento del número de cilindros tiene su limitación natural por razones de funcionamiento, de construcción y de caracter comercial; aunque la relación peso potencia desciende con el aumento del número de cilindros, según estudios realizados por Kamm, Bensinger y Kutzbach, dificulta el proceso de construcción, el de mantenimiento del motor y multiplica las posibilidades de perturbaciones; por lo que, en determinadas aplicaciones de los motores, hay un tamaño de cilindros que oscila entre estrechos límites, el mas económico y el mas seguro.

En las aplicaciones, es de rigor, en lo que a volumen de la cilindrada se refiere, establecer una relación entre la

carrera del émbolo y el diámetro, relación que en sus límites da lugar a los motores de carrera corta y de carrera larga y que además influye en sentidos diferentes.

Mientras se mantenga la velocidad angular constante, la velocidad media del émbolo es proporcional a la carrera, siendo  $V_{me}$  la velocidad media del émbolo,  $C$  la carrera del mismo y  $2n/60$  el número de veces que por segundo el émbolo recorre su carrera.

El volumen de la cilindrada viene dado por la fórmula

$$v_c = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot C}{4}$$

y, también

$$v_c = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{C^2}{z^2} \cdot C = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{C^3}{z^2}$$

siendo  $D$  el diámetro del émbolo y  $z$  la relación entre la carrera y el diámetro. Pero si el volumen de cilindrada se va a mantener constante y  $z$  variable, resulta que

$$v_c = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{C^3}{z^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{C^{-3}}{z^{-2}}$$

y que, simplificando

$$\frac{C^3}{z^2} = \frac{C^{-3}}{z^{-2}}$$

resultando que

$$\frac{C^3}{C^{-3}} = \frac{z^2}{z^{-2}}$$

y extrayendo la raíz cúbica

$$\frac{\sqrt[3]{C^3}}{\sqrt[3]{C^{-3}}} = \frac{\sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[3]{z^{-2}}}$$

resultando que

$$\frac{C}{C^{-3}} = \frac{z^{\frac{2}{3}}}{z^{-\frac{2}{3}}}$$

Por la que se obtiene que la carrera del émbolo está en razón directa del exponente  $2/3$  de la relación carrera diámetro. Pero, si como quedó establecido, la velocidad media del émbolo, para una velocidad angular constante, es proporcional a la carrera, en igual forma lo será para la razón  $z$  elevada a  $2/3$

$$V = \frac{2 \cdot C \cdot n}{60}; \dots V^{-} = \frac{2 \cdot C^{-} \cdot n}{60}$$

dividiendo la una por la otra, resulta

$$\frac{V}{V^{-}} = \frac{\frac{2 \cdot C \cdot n}{60}}{\frac{2 \cdot C^{-} \cdot n}{60}}$$

y simplificando

$$\frac{V}{V^{-}} = \frac{C}{C^{-}} = \frac{z^{\frac{2}{3}}}{z^{-\frac{2}{3}}}$$

De este razonamiento se infiere que la carrera corta para una

potencia dada, manteniendo constante la velocidad media admisible del émbolo, da lugar a mayores diámetros del cilindro e incrementos en el coeficiente de admisión; pero, en cambio, ocasiona grandes cargas térmicas y mecánicas para el émbolo, mecanismo motor mas concentrado, reduciendo la altura del motor; la velocidad angular del eje aumenta y la velocidad angular crítica del eje cigüeñal aumenta también.

La carrera larga para la misma potencia dada, manteniendo constante la velocidad media admisible del émbolo, da lugar a menores diámetros del cilindro, menores cargas térmicas y mecánicas sobre el émbolo; pero, en cambio, el mecanismo motor es mas grande, la altura del motor se hace mayor, la velocidad angular del eje desciende y la velocidad angular crítica del eje cigüeñal desciende también.

La velocidad media del émbolo y la velocidad angular se mantienen dentro de límites establecidos, dependientes de las condiciones particulares de cada motor. Partiendo de la velocidad del émbolo, que actualmente es mas aceptable que del número de revoluciones, se clasifican los motores en los tres grupos: Motores lentos, motores semilentos, o también semirápidos, y motores rápidos. No obstante, existe otra serie de motores denominados extrarrápidos utilizados en fines no industriales. Pero en los proyectos es norma tener en cuenta resultados anteriores; hoy en dia, y solo a modo de orientación, puede establecerse que la velocidad del émbolo oscila entre los 6 y los 15 metros por segundo, a fin de alcanzar la máxima seguridad de funcionamiento posible.

Entonces, todos aquellos motores que sus émbolos alcancen velocidades medias superiores a los 15 metros por segundo se denominan motores extrarrápidos.

Los motores lentos, de elevada potencia por cilindro, capaces de admitir ciertas perturbaciones, con mantenimiento reducido, tienen su campo de aplicación en instalaciones terrestres fijas, en las que su peso y el espacio ocupado no

son condiciones preferentes. Con los motores marinos, que son reversibles, se es mas exigente, requiriendo de ellos gran seguridad en el trabajo, que pesen poco y que ocupen poco espacio. Están directamente acoplados a la hélice y la velocidad angular queda condicionada al rendimiento de ésta; son motores de carrera larga, de cruceta, y la velocidad del émbolo no supera los 8 metros por segundo.

Los motores semirrápidos, son de potencia media por cilindro, tienen su campo de aplicación en las instalaciones terrestres fijas y móviles, generalmente de tronco a cuatro tiempos, con poco peso, ocupan poco espacio, pero requieren mayor entretenimiento. Sus cilindros pueden estar dispuestos en línea en un solo plano, en número no superior a doce, por causa de las vibraciones torsionales del eje de cigueñales, o en línea y en dos planos, formando un ángulo variable que, dependiendo del número de cilindros por plano, oscila entre los 45 y 90 grados; pero en un caso especial, se amplía a 180 grados. Con los motores marinos, que no son reversibles, ni van directamente acoplados a la hélice, si se instalan para la propulsión, se es menos exigente en cuanto a peso y volumen, pero entonces se requiere de ellos mayor seguridad en el funcionamiento. La velocidad media del émbolo suele ser en orden a los 9 metros por segundo.

Los motores rápidos, que son de reducida potencia por cilindro, de tronco a cuatro tiempos, con alta potencia específica, tienen su campo de aplicación preferentemente en automóviles ligeros, en la aviación y en las embarcaciones rápidas; pero requieren elevados costos de mantenimiento. En la industria marítima y en la terrestre pueden emplearse como motores auxiliares. La velocidad media del émbolo puede alcanzar los 15 metros por segundo.

Los números de cilindros usuales, su disposición característica y su campo de aplicación, conforme a su norma de funcionamiento, pueden reunirse según los siguientes

critérios:

Motores de explosión, que son rápidos y extrarrápidos, generalmente a cuatro tiempos, pues los de dos tiempos, por elevado consumo, tienen el campo de aplicación muy limitado.

Disposición característica:

a) Cilindros verticales en una sola fila.

Número de cilindros, 2, 4, 6, 8,

Campo de aplicación:

Automóviles ligeros, pequeñas instalaciones fijas, aviación y embarcaciones ligeras.

b) Cilindros en dos filas, verticales con un solo eje en "V", y horizontales en un plano con un solo eje

Número de cilindros, 2 x 1 a 2 x 8

Campo de aplicación:

Automóviles ligeros, pequeñas instalaciones fijas, aviación y embarcaciones ligeras.

c) Cilindros en estrella con un solo eje

Número de cilindros en el plano, 3, 5, 7, 9

Número de cilindros en dos planos, 2x5, 2x7, 2x9

Campo de aplicación:

Aviación.

Motores diesel, que pueden ser lentos, semilentos y rápidos, de dos y de cuatro tiempos.

Disposición característica:

a) Cilindros verticales en una sola fila, motores lentos, de cruceta, de dos tiempos.

Número de cilindros, de 4 a 12,

Campo de aplicación:

Instalaciones terrestres fijas, de gran potencia, instalaciones marinas de media y gran potencia

b) Cilindros verticales en una sola fila, motores de dos tiempos, lentos, de cruceta, de émbolos opuestos, con un solo eje de cigüeñal.

Número de cilindros, de 4 a 9,

Campo de aplicación:

Instalaciones marinas de media y gran potencia.

c) Cilindros verticales en una sola fila, motores de tronco, semirrápidos, de cuatro tiempos, Número de cilindros, de 6 a 12,

Campo de aplicación:

Instalaciones terrestres fijas de potencia media y automotores, instalaciones marinas de potencia media.

d) Cilindros verticales en dos filas con un solo eje en "V", y de cilindros horizontales en un plano, motores semirrápidos, de tronco, a cuatro tiempos Número de cilindros, de 2 x 5 a 2 x 10,

Campo de aplicación:

Instalaciones terrestres fijas de media y elevada potencia y automotores, instalaciones marinas de media y gran potencia

e) Cilindros verticales en dos filas con un solo eje, en "V", y de cilindros horizontales en un plano, motores rápidos, de tronco, a cuatro tiempos.

Número de cilindros: 2 x 2 a 2 x 10,

Campo de aplicación:

Instalaciones terrestres fijas de baja y media potencia, automotores y automóviles, como auxiliares en instalaciones marinas y propulsión de embarcaciones ligeras.

f) Cilindros verticales y horizontales en una sola fila, de émbolos opuestos, con dos ejes, motores rápidos y semirrápidos, de tronco a dos tiempos.

Número de cilindros: 2 x 4 a 2 x 8

Campo de aplicación:

Instalaciones marinas de baja y media potencia, automotores, aviación.

Por cuanto se ha propuesto, es de rigor establecer las cuestiones relativas a los métodos operativos del motor y al calaje o distancia angular de los periodos motores.

De cuanto se lleva expuesto, se desprende que las dimensiones principales de los ejes de cigüeñal no se fijan solamente por motivos de resistencia, sino también prestando atención a las vibraciones de torsión, como mas adelante se verá, al tratar el modo de combatir las vibraciones. A este respecto, [H.S.] da unos valores que, aunque no constituyan magnitudes permanentes, son de gran utilidad, estableciendo para

Motores diesel fijos de cuatro tiempos y simple efecto

$1200 < neI < 2500$  vibraciones/minuto

Motores diesel fijos de dos tiempos y simple efecto

$1000 < neI < 1500$  vibraciones/minuto

Motores diesel y otto para automóviles

$7000 < neI < 15000$  vibraciones/minuto

Motores diesel marinos de dos tiempos, reversibles, directamente acoplados a la hélice

$300 < neI < 1000$  vibraciones/minuto

$1500 < neII < 3500$  vibraciones/minuto

Motores diesel marinos de cuatro tiempos, directamente acoplados a la hélice

$500 < neI < 1200$  vibraciones/minuto

1500 < **neII** < 3000 vibraciones/minuto

Motores diesel semilentos sin acoplamiento transmisor,

6000 < **neI** < 12000 vibraciones/minuto

con acoplamiento transmisor

4500 < **neI** < 7000 revoluciones/minuto

Motores en fila con acoplamiento elástico intermedio

1300 < **neI** < 1600 revoluciones/minuto

15000 < **neII** < 25000 revoluciones/minuto

Motores en 1700 < **neI** < 3000

revoluciones/minuto

7000 < **neII** < 15000 revoluciones/minuto

Motores en estrella con transmisión

7000 < **neI** < 10500 revoluciones/minuto

sin transmisión

10000 < **neI** < 12500 revoluciones/minuto

Siendo **neI** el número de vibraciones propio de primer grado por minuto y **neII** el número de vibraciones propio de segundo grado por minuto.

La relación entre la frecuencia **ne** y el número de cilindros **N** es directa cuando se aumenta el número de cilindros sin variar sus dimensiones. Pero **ne** disminuye lentamente con **N** cuando la rigidez del eje cigüeñal no es la adecuada conforme a las vibraciones de torsión.

También ha establecido cifras y orden de las fuerzas excitatrices críticas de las diversas disposiciones de los cilindros en la forma que se representa. Las cifras en negrilla son los armónicos principales; los armónicos secundarios intervienen con mayor o menor intensidad, y en algunos casos pueden ser peligrosos, según la forma del sistema vibratorio y la sucesión de combustiones de los cilindros

Fuerzas tangenciales armónicas excitatrices de la velocidad crítica para diferentes números de cilindros con encendidos a intervalos iguales.

N.C.	Número de orden de los armónicos para motores	
	de dos tiempos	de cuatro tiempo
disposición de los cilindros en línea		
3	3 6 9 12 15	1,5 3 4,5 6 7,5
4	4 6 8 10 12	2 3 4 5 6
5	2 3 5 7 8 10 12 13	1 1,5 2,5 3,5 4 5 6 6,5 7,5
6	3 6 9 12 15 18	1,5 3 4,5 6 7,5 9
7	2 5 7 9 12 14 16 19	1 2,5 3,5 4,5 6 7 8 9,5
8	4 5 8 9 11 12 13 15 16 17	2 2,5 3,5 4 4,5 5,5 6 6,5 7,5 8 8,5
disposición de los cilindros en V con el eje simétrico		
2x4	3 5 7 8 9 11 13 15 16	1,5 2,5 4 5,5 6,5 7,5 8
2x6	2 3 5 7 9 11 12 13 15 17	1,5 2,5 3,5 4,5 5,5 6 6,5 7,5 8,5
2x8	7 9 14 16 18 23 25	3,5 4,5 7 8 9 11,5 12,5
con el eje en cruz		
2x4	2 3 5 6 8 10 11 13 14	1 1,5 2,5 3 4 5 5,5 6,5 7
disposición de los cilindros en estrella		
5	2 5 10 15 20	1 2,5 5 7,5 10
7	2 7 14 21	1 3,5 7 10,5
9	2 9 18 27	1 4,5 9 13,5
11	2 11 22 33	1 5,5 11 16,5
2x7	2 14 28 42	1 7 14 21
2x9	2 18 36 54	1 9 18 27

Cuando las bielas secundarias están articuladas, se presentan solamente armónicos principales, a excepción del segundo armónico, de primer orden.

Por otra parte, SCHEUERMEYER [M.S.] y BAUER [G.B.] se refieren al orden de las fuerzas armónicas con relación a la unidad de superficie del émbolo en kg/cm<sup>2</sup> y a una revolución del eje motor, para motores de dos y de cuatro tiempos según

Fuerzas tangenciales armónicas F<sub>k</sub>G de los gases de motores diesel de simple efecto en kg/cm<sup>2</sup>

O.F.A	M.4.T	M.2.T	O.F.A	M.4.T	M.2.T
1/2	2,42	0,00	6	0,43	1,12
1	2,76	4,43	6 1/2	0,34	0,00
1 1/2	2,73	0,00	7	0,27	0,56
2	2,31	4,31	7 1/2	0,22	0,00
2 1/2	1,91	0,00	8	0,17	0,44
3	1,61	2,86	8 1/2	0,14	0,00
3 1/2	1,31	0,00	9	0,12	0,27
4	1,04	2,22	10	0,10	0,24
4 1/2	0,81	0,00	11	0,08	0,00
5	0,66	1,51	12	0,06	0,07
5 1/2	0,54	0,00			

c) El trabajo de la vibración y la amortiguación.

Quando entre las fuerzas excitatrices y las resistencias amortiguadoras existe una condición de equilibrio, acción-reacción, se alcanzan las deformaciones de resonancia en una vibración forzada. En este caso, las deformaciones se balancean tanto tiempo como sea necesario para que la propia amortiguación del sistema iguale al valor de la energía aportada.

Entonces, si una fuerza que varía periódicamente actúa sobre un sistema capaz de vibrar, en su estudio debe de considerarse una vibración atenuada por amortiguación; pero esta vibración amortiguada, en el caso de resonancia tiene particular importancia.

El trabajo realizado por el armónico de orden  $k$  con una amplitud o intensidad  $F_k$  dentro de una oscilación, en el cilindro  $N_i$ , cuando se alcanza la deformación máxima  $a_i$ , viene dado por la fórmula

$$\tau_i = \pi \cdot a_i \cdot F_k \cdot \text{sen } \beta_i$$

ya que, como se establece en la Fg. 27, la fuerza  $F_k$  forma con la deformación  $a$  el ángulo  $\beta$ .

Como todos los cilindros del motor son idénticos y el trabajo se reparte por partes iguales entre ellos, los armónicos tangenciales  $F_k$  de cada cilindro tienen el mismo valor; pero los ángulos de fase son distintos, porque el trabajo lo realizan en tiempos diferentes y, por tanto, los armónicos están unidos entre sí por la sucesión de encendidos y cigüeñas o codos. Si bien la deformación  $a_i$  es diferente para cada cilindro, siempre tiene la misma posición de fase, porque todas las masas alcanzan su máxima oscilación al mismo tiempo.

También el ángulo de fase  $\beta$  entre el vector  $V_k$  y el vector de la deformación  $a$  varía de un cilindro a otro; de forma que, siendo los vectores  $V_k$  de valor  $F_k$  y el vector de la deformación  $a$ , las componentes horizontales de estos últimos son, en cada caso, las deformaciones de las masas oscilantes del sistema, como se desprende del estudio de la Fg. 22. La velocidad angular de los vectores para los armónicos de orden  $k$  es  $\Omega_k = k \cdot \omega$ , siendo  $\omega$  la velocidad angular del eje de cigüeñal. Y el trabajo de la fuerza excitatriz es

$$\tau = \pi \cdot F_k (a_i \cdot \text{sen } \beta_i)$$

de esta forma se representan los vectores  $V_k$  de los armónicos de las fuerzas tangenciales  $F_k$  de los diferentes cilindros con el mismo ángulo de fase, pero las oscilaciones están desfasadas en el valor del ángulo  $\beta$ ; consideración que permite componer los trabajos de la oscilación de manera sencilla y, por tanto, obtener el trabajo correspondiente al número de cilindros considerados, por la fórmula

$$\tau = \pi \cdot F_k \sum_{i=1}^{i=N} a_i \cdot \text{sen } \beta_i \quad (150)$$

En el que la resultante

$$\sum_{i=1}^{i=N} a_i \cdot \text{sen } \beta_i$$

tiene un ángulo de fase  $\phi$  de magnitud desconocida; pero que en el caso importante de la resonancia, este ángulo alcanza una posición tal en la que se producen las deformaciones de oscilación máximas y el trabajo cedido alcanza su máximo valor, todo lo cual corresponde a  $\phi=90^\circ$ , de forma que la resultante vale

$$\sum a_i$$

Pero si las resistencias amortiguadoras han de estar en relación con las fuerzas excitatrices, teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento  $k'$  es proporcional a la velocidad, la fuerza total de rozamiento  $F_r$  oscila en fase con la velocidad y está defasada en  $90^\circ$  con respecto a la de deformación, el trabajo consumido por amortiguación durante una oscilación en el cilindro de orden  $i$ , vale

$$\tau = -\pi \cdot a_i (k' \cdot a_i \cdot \Omega)$$

en la que, el valor máximo de la fuerza amortiguadora es

$$(k' \cdot a_i \cdot \Omega)$$

y

para los  $N$  cilindros

$$\tau_{k'} = -\pi \cdot k' \cdot \Omega \sum_{i=1}^{i=N} a_i^2 \quad (151)$$

La amortiguación que resulta de los rozamientos en las diversas zonas del motor depende de la viscosidad del aceite de lubricación y del ajuste en los cojinetes. En cuanto a la amortiguación de los materiales, HOLZER [H.H.] establece que es independiente de la frecuencia de oscilación, pero que resulta ser proporcional a una potencia de la deformación de la oscilación, GEIGER y FÖPPL consideran que para grandes deformaciones del eje cigüeñal esta amortiguación interna es una parte importante de la amortiguación total y que depende de la elasticidad del material de forma inversa. Pero que también existen otras amortiguaciones, externas al motor, como el efecto del agua sobre las hélices en los motores marinos, el fluido en los acoplamientos hidráulicos, así como la amortiguación electromagnética en los generadores, si bien deben de ser considerados por separado.

En consecuencia a ello, en una vibración forzada con amortiguación, los trabajos de las fuerzas  $F_k$  y  $K$  se compensan dando una resultante nula. Entonces, para la cigüeña de orden  $i$  y para el armónico de orden  $k$ , se tiene

$$\pi \cdot F_k \cdot a_i \cdot \text{sen } \beta_i - \pi \cdot k' \cdot a_i^2 \cdot \Omega = 0$$

y para las cigüeñas los  $N$  cilindros

$$F_k \cdot \sum_{i=1}^{i=N} a_i \cdot \text{sen } \beta_i - k' \cdot \Omega \cdot \sum_{i=1}^{i=N} a_i^2 = 0 \quad (152)$$

De esta forma, HANS SCHRÖN establece que para las **deformaciones de resonancia**, partiendo de la hipótesis admisible de resonancia la forma de la vibración provocada coincide con la forma de la vibración propia y, por tanto,  $\Omega = \omega_e$ , de la cual pueden obtenerse las deformaciones en el extremo libre del eje cigüeñal, así como las deformaciones

correspondientes a diferentes armónicos. Si se introducen las deformaciones  $a_i$  determinadas a partir de la fórmula (140), la ecuación del trabajo da

$$F_k \cdot \sum_{i=1}^{i=N} a_i \cdot \text{sen} \beta_i \cdot a_N = k' \cdot \omega_e \cdot \sum_{i=1}^{i=N} (a_i \cdot a_N)^2 \quad (152')$$

resultando que

$$a_N = \frac{F_k \cdot \sum_{i=1}^{i=N} a_i \cdot \text{sen} \beta_i}{k' \cdot \omega_e \cdot \sum_{i=1}^{i=N} a_i^2} \quad (153)$$

También considera la expresión de la resultante

$$R = \sum_{i=1}^{i=N} a_i \cdot \text{sen} \beta_i \quad (154)$$

que determina el trabajo específico de excitación de un armónico para  $N$  cilindros y para  $Fk=1$  que, en el caso en que exista resonancia, se le denomina deformación de resonancia relativa, tiene gran influencia en la magnitud de las deformaciones reales y precisa consideración especial.

En cuanto a la dirección de los armónicos, se empieza por trazar la estrella que los represente, con independencia de la longitud de los vectores; pero, teniendo en cuenta las consideraciones ya establecidas para los motores de dos y de cuatro tiempos, donde, para los primeros, el calaje y ángulo de distancia entre encendidos vale  $360/N$  y el vector que representa al primer armónico gira a la misma velocidad que el eje motor; mientras que en los segundos, la distancia entre encendidos vale  $720/N$  y el vector del primer armónico de orden

1/2, gira a mitad de velocidad que el eje motor; por lo que, entre dos encendidos el vector ha girado un ángulo de  $720/2N$ . Y de un modo general, para el armónico  $k$  y para las cigüeñas  $a, b$  se tiene, para los motores de dos tiempos

$$\beta_a - \beta_b = k \cdot \frac{360}{N} \quad (155)$$

y para los motores de cuatro tiempos

$$\beta_a - \beta_b = \frac{k}{2} \cdot \frac{720}{N} \quad (155')$$

Para los motores en  $V$  se procede de igual forma. Se determinan los vectores  $V_e$  de cada fila y se suman; teniendo en cuenta que la distancia de encendidos en las dos filas vale, para los motores de dos tiempos  $360/N$ ; y para los motores de cuatro tiempos  $720/N$ ; pero como los encendidos se alternan entre filas, el ángulo entre vectores de cada fila depende del procedimiento de trabajo y de la sucesión de encendidos adoptada.

De manera que, para el armónico de orden  $k$ , en un motor de dos tiempos el ángulo entre vectores vale

$$\alpha_k = k \cdot \alpha_c \quad (156)$$

siendo  $\alpha_c$  el ángulo engendrado por el cigüeñal entre dos encendidos en una línea de la  $V$ ; y para un motor de cuatro tiempos

$$\alpha_k = \frac{k}{2} \cdot \alpha_c \quad (156')$$

De forma que el vector de una fila y el vector siguiente de la otra, que forman el ángulo  $\alpha_k$ , dan por suma el vector

resultante  $V_r$  como medida de la deformación total del eje cigüeñal.

En los motores en estrella, en los que el número de armónicos excitadores es relativamente corto, como se ve en el cuadro de "fuerzas tangenciales armónicas excitatrices", la deformación por resonancia, tomando  $\omega_e$  de la fórmula (130)

$$\begin{aligned} \omega_e &= \sqrt{\frac{q}{I}} \\ a &= \frac{F_k}{k \cdot \omega_e} \end{aligned} \quad (157)$$

#### **b.2.5) Las fuerzas de inercia en los motores de varios cilindros**

Como se viene estableciendo, los cilindros de los motores son idénticos, por lo que, la geometría y el peso de las masas en movimiento son iguales. En consecuencia, las fuerzas de inercia producidas por las masas en movimiento son del mismo valor para cada posición angular de cada cigüeña.

En el capítulo 2, se ha concluido que las fuerzas de inercia pueden obtenerse o representarse por medio de un vector giratorio en un plano vertical transversal que contenga al eje geométrico del cilindro; pero, también en las cuestiones relativas a la construcción de los motores en línea y en uve van sobre un plano longitudinal vertical que contenga al mismo eje geométrico del cilindro. Entonces, las fuerzas de inercia de un motor de varios cilindros quedan representadas por medio de los vectores que giran sobre el eje, en cada plano, y orientados en la dirección de las respectivas cigüeñas que, como se expuso, se hallan caladas en los motores de dos tiempos a  $360/Nc$  y en los motores de cuatro tiempos a  $720/Nc$ . No obstante, analizada la fórmula (58), los vectores giratorios

que representan las fuerzas de inercia secundarias, están calados: para los motores de dos tiempos a  $2 \times 360/Nc$ , para los motores de cuatro tiempos a  $2 \times 720/Nc$  grados.

Por razones de claridad y comprensión de las vibraciones producidas por estas fuerzas de inercia y de su equilibrado, es norma referir todas las fuerzas individuales al centro de gravedad del motor, sumarlas vectorialmente y determinar su resultante; de forma que, para las masas giratorias, según la fórmula (51), la resultante vale

$$F_{rv} = \sum_1^{Nc} mg \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha \quad (158)$$

y según la fórmula (52'), vale

$$F_{rh} = \sum_1^{Nc} mg \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sen \alpha \quad (159)$$

Para las masas sometidas a movimiento alternativo, del primer sumando de la fórmula (55), para las fuerzas de inercia vertical primarias, vale

$$F_{rp} = \sum_1^{Nc} ma \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha \quad (160)$$

Y por la fórmula (58), para las fuerzas de inercia vertical secundarias, vale

$$F_{rs} = \sum_1^{Nc} ma \cdot Y \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha \quad (161)$$

Y de un modo general, de la fórmula (145), resulta que,

$$F_{rv} = \sum_1^{Nc} (ma \cdot R \cdot \omega^2 (\cos \alpha + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{2n} \cdot \cos 2n\alpha)) \quad (162)$$

También se observa que estas fuerzas de inercia tienen la forma de fuerza centrífuga, que es el vector giratorio, tomado como módulo, de velocidad  $n\omega$  y argumento igual a  $n\omega t$ .

Estas ecuaciones son generales, aplicables a todos los tipos de motores, haciendo las consideraciones que le son propias por causa de la disposición de los cilindros en planos y la forma de articular las bielas al eje cigüeñal.

Cuando el resultado obtenido de cada una de las fórmulas es cero, la fuerza de inercia resultante de ese orden es nula; se dice que se equilibran entre ellas, y no producen vibraciones o sacudidas del motor por esta causa.

Bajo las condiciones que anteceden consideremos dos motores de seis cilindros en línea, uno a dos tiempos y otro a cuatro tiempos.

Para el motor de dos tiempos el calaje o distancia angular entre encendidos vale

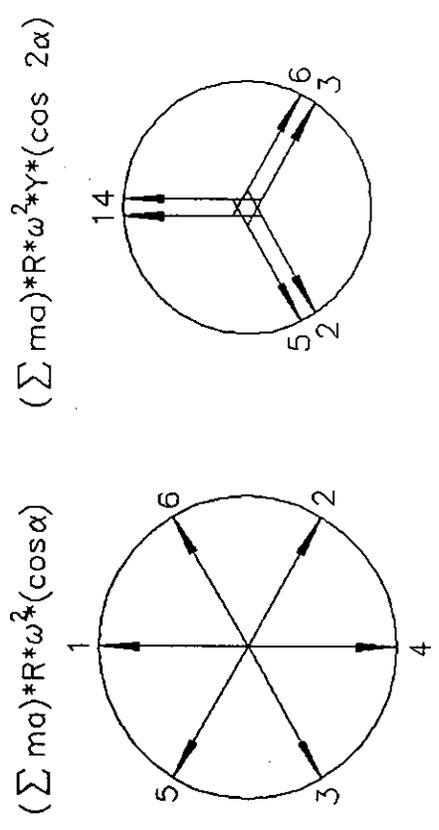
$$\frac{360}{N_c} = \frac{360}{6} = 60^\circ$$

Los cigüeñales están calados a  $60^\circ$ , pendiente de fijar el orden de encendido, sobre el que influyen las fuerzas de inercia y el par motor; que fijaremos en 1, 5, 3, 4, 2, 6, como se indica en la Fg. 30a.

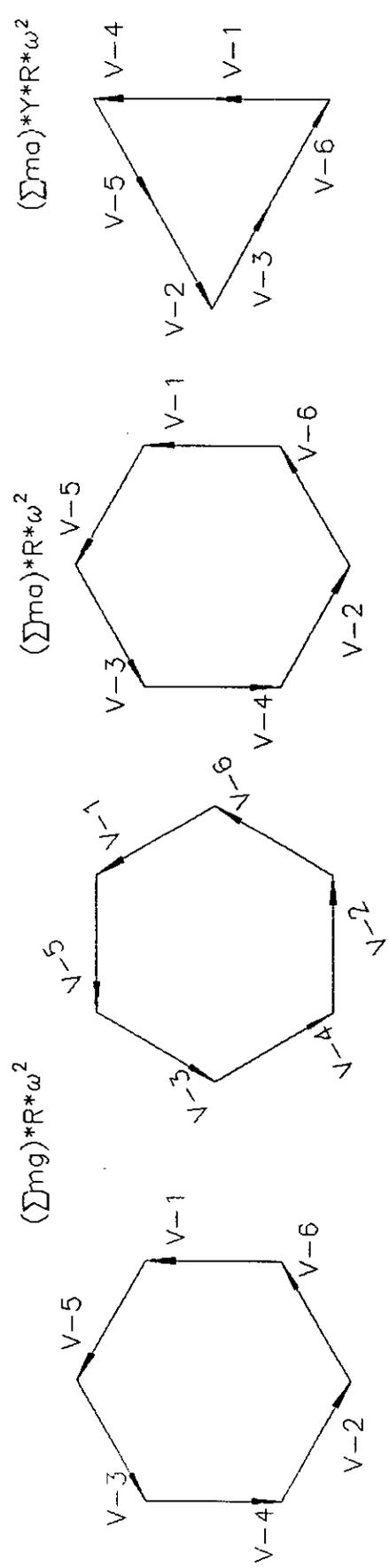
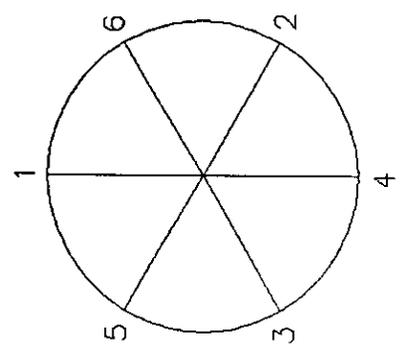
Aplicando las fórmulas (158) y (159) particulares de las masas giratorias, y teniendo en cuenta que en ellas aparece la expresión  $(\sum m_g) \cdot R \cdot \omega^2$ , tomada como módulo del vector giratorio, que se representará por  $F_{cg}$ ; resulta que,

CALAJE:  $360/6=60$   
 ORDEN: 1,5,3,4,2,6

$(\sum mg) * R * \omega^2 * (\cos \alpha)$   
 $(\sum mg) * R * \omega^2 * (\sen \alpha)$



Fg 30a



Fg. 30b

para el movimiento vertical      para el movimiento horizontal

$$\sum_1^6 (\sum mg) R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = \sum_1^6 Fcg \cdot \cos \alpha \quad \sum_1^5 (\sum mg) R \cdot \omega^2 \cdot \sen \alpha = \sum_1^6 Fcg \cdot \sen \alpha$$

CN1- Fcg.cos 0,0 = 1,0 Fcg	CN1- Fcg.sen 0,0= 0,000000 Fcg
CN2- Fcg.cos 240 =-0,5 Fcg	CN2- Fcg.sen 240=-0,866025 Fcg
CN3- Fcg.cos 120 =-0,5 Fcg	CN3- Fcg.sen 120= 0,866025 Fcg
CN4- Fcg.cos 180 =-1,0 Fcg	CN4- Fcg.sen 180= 0,000000 Fcg
CN5- Fcg.cos 60 = 0,5 Fcg	CN5- Fcg.sen 60= 0,866025 Fcg
CN6- Fcg.cos 300 = 0,5 Fcg	CN6- Fcg.sen 300=-0,866025 Fcg
$F_{Rv} = 0,0 Fcg$	$F_{Rh} = 0,0 Fcg$

Se observa que en ambos casos la fuerza resultante es cero; por lo que, conforme a ellas, el motor está equilibrado.

Aplicando las fórmulas (160) y (161), particulares de las masas alternativas, teniendo en cuenta que en ellas aparecen para las fuerzas de inercia primarias la expresión  $(\sum ma) \cdot R \cdot \omega^2$ , tomada como módulo del vector giratorio, que se representa por Fca; y para las fuerzas de inercia secundarias la expresión  $(\sum ma) \cdot Y \cdot R \cdot \omega^2$ , tomada como módulo del vector giratorio, que se representa por F'ca, resulta que para las fuerzas de inercia vertical primarias

$$\sum_1^6 (\sum ma) R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = \sum_1^6 Fca \cdot \cos \alpha$$

Y para las fuerzas de inercia vertical secundarias

$$\sum_1^6 (\sum ma) \cdot Y \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha = \sum_1^6 F'ca \cdot \cos 2\alpha$$

Resulta

CN1- $Fca.\cos 0,0 = 1,0 Fca$		CN1- $F'ca.\cos 2x0,0 = 1,0 F'ca$
CN2- $Fca.\cos 240 = -0,5 Fca$		CN2- $F'ca.\cos 2x240 = -0,5 F'ca$
CN3- $Fca.\cos 120 = -0,5 Fca$		CN3- $F'ca.\cos 2x120 = -0,5 F'ca$
CN4- $Fca.\cos 180 = -1,0 Fca$		CN4- $F'ca.\cos 2x180 = 1,0 F'ca$
CN5- $Fca.\cos 60 = 0,5 Fca$		CN5- $F'ca.\cos 2x 60 = -0,5 F'ca$
CN6- $Fca.\cos 300 = 0,5 Fca$		CN6- $F'ca.\cos 2x300 = -0,5 F'ca$
$F_{Rv} = 0,0 Fca$		$F'_{Rv} = 0,0 F'ca$

Se observa que en ambos casos la fuerza resultante es cero, por lo que, conforme a ellas, el motor está equilibrado y trabaja libre de vibraciones.

Para el motor de cuatro tiempos el calaje o distancia angular entre encendidos vale  $720/N_c = 720:6 = 120^\circ$

Los cigüeñales están calados a  $120^\circ$ , pendiente de fijar el orden de encendido, sobre el que influyen, entre otras, las fuerzas de inercia y el par motor, que tomaremos el del motor sobre el que fundamentamos la tesis, 1, 5, 3, 6, 2, 4, como se indica en la Fg. (31a).

Aplicando las mismas fórmulas (158) y (159), para las masas giratorias, haciendo las mismas consideraciones cuanto a vectores, que las establecidas para los motores de dos tiempos, en estos motores resulta que

$$\sum_1^6 (mg)R.\omega^2.\cos \alpha = \sum_1^6 Fcg.\cos \alpha \quad \sum_1^6 (mg)R.\omega^2\sen \alpha = \sum_1^6 Fcg.\sen \alpha$$

CN1- $Fcg.\cos 0,0 = 1,0 Fcg$		CN1- $Fcg.\sen 0,0 = 0,000000 Fcg$
CN2- $Fcg.\cos 480 = -0,5 Fcg$		CN2- $Fcg.\sen 480 = 0,866025 Fcg$
CN3- $Fcg.\cos 240 = -0,5 Fcg$		CN3- $Fcg.\sen 240 = -0,866025 Fcg$
CN4- $Fcg.\cos 600 = -0,5 Fcg$		CN4- $Fcg.\sen 600 = -0,866025 Fcg$
CN5- $Fcg.\cos 120 = -0,5 Fcg$		CN5- $Fcg.\sen 120 = 0,866025 Fcg$
CN6- $Fcg.\cos 360 = 1,0 Fcg$		CN6- $Fcg.\sen 360 = 0,000000 Fcg$
$F_{Rv} = 0,0 Fcg$		$F_{Rh} = 0,0 Fcg$

CALAJE: 720/6=120

ORDEN: 1,5,3,6,2,4

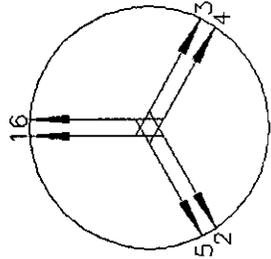
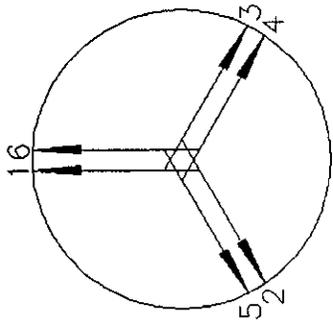
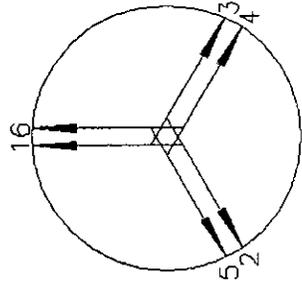
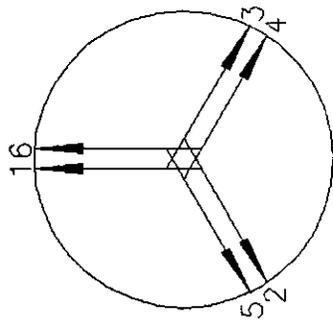


Fig. 31a

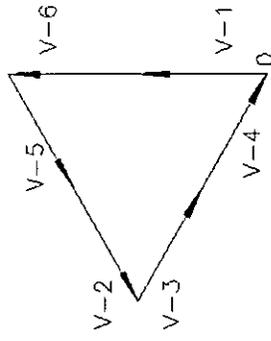
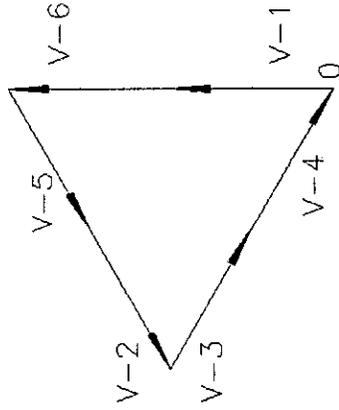
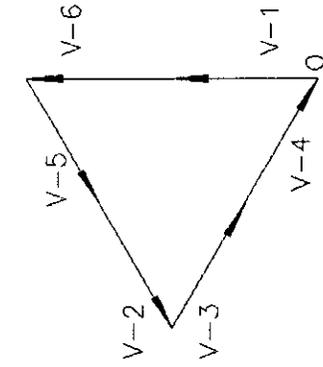
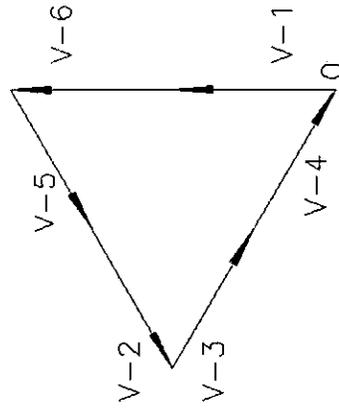


Fig. 31b

Se observa que en ambos casos la fuerza resultante es cero; por lo que, en lo que a ellas se refiere, el motor está equilibrado.

Aplicando las mismas fórmulas (160) y (161), haciendo las mismas consideraciones que para los motores de dos tiempos, resulta que para las fuerzas de inercia vertical primarias

$$\sum_1^6 (\sum ma) R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = \sum_1^6 Fca \cdot \cos \alpha$$

Y para las fuerzas de inercia vertical secundarias

$$\sum_1^6 (\sum ma) Y \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha = \sum_1^6 F'ca \cdot \cos 2\alpha$$

CN1- Fca.cos 0,0 = 1,0 Fca		CN1- F'ca.cos 2x0,0 = 1,0 F'ca
CN2- Fca.cos 480 = -0,5 Fca		CN2- F'ca.cos 2x480 = -0,5 F'ca
CN3- Fca.cos 240 = -0,5 Fca		CN3- F'ca.cos 2x240 = -0,5 F'ca
CN4- Fca.cos 600 = -0,5 Fca		CN4- F'ca.cos 2x600 = -0,5 F'ca
CN5- Fca.cos 120 = -0,5 Fca		CN5- F'ca.cos 2x120 = -0,5 F'ca
CN6- Fca.cos 360 = 1,0 Fca		CN6- F'ca.cos 2x360 = 1,0 F'ca
$F_{RV} = 0,0 Fca$		$F'_{RV} = 0,0 F'ca$

Se observa que en ambos casos la fuerza resultante es cero; por lo que, en lo que a ellas se refiere, el motor está equilibrado.

También a estos motores le es de aplicación el principio: No existen en general resultantes de las fuerzas de inercia tratadas.

Aplicando la fórmula (162), se obtiene que la resultante de las fuerzas de inercia de 4°, 8° y 10° orden son cero; y para las de 6° orden es 6 Fi, tanto en los motores de dos tiempos como en los de cuatro tiempos. Entonces, De una manera general, rige el principio: Da fuerzas de inercia libres aquel

orden para el cual la estrella de manivelas derivada da un diagrama de fuerzas de inercia de igual dirección.

b) Disposición de los cilindros en dos filas, en V

Esta disposición suele utilizarse cuando el número de cilindros del motor es elevado, por causa de los esfuerzos de torsión a que se somete el eje cigüeñal, con el elevado número de cilindros en una sola fila, o cuando, para un número de cilindros dado se precisa un motor mas corto.

El ángulo formado por los dos planos de la V, en general se determina por la condición de una distancia de encendidos regular, como ya se expuso anteriormente, siendo para motores de dos tiempos

$$\alpha_p = \frac{360}{N_c}$$

y para motores de cuatro tiempos

$$\alpha_p = \frac{720}{N_c}$$

No obstante, HANS SCHRÖN [H.S] establece criterios diferentes, partiendo del criterio de que cada una de las filas entre sí tiene compensación de fuerzas , en la forma en que se ha establecido para los motores de una sola fila. Por lo que, el ángulo formado por los dos planos de la V influye en la dirección y en la magnitud de la fuerza de inercia resultante. Entonces, en el caso en que en una fila exista una resultante no nula, el vector que la representa puede describir una línea recta, una circunferencia o una elipse, con la frecuencia que corresponda al orden  $n$  de la fuerza de inercia libre. La resultante de los dos planos resultará orientada en la bisectriz del ángulo de la V. Tanto el ángulo de la V, como la forma de articular la biela a la cigüeña son variables.

La disposición mas favorable para la compensación de fuerzas es la del ángulo de la V en 90° y las dos bielas articuladas al muñón.

De esta forma, se puede referir el estudio al caso de un motor de 2x6 cilindros, a cuatro tiempos, al que se refiere la Fg. 32a; para el cual, el ángulo de los planos de la V vale

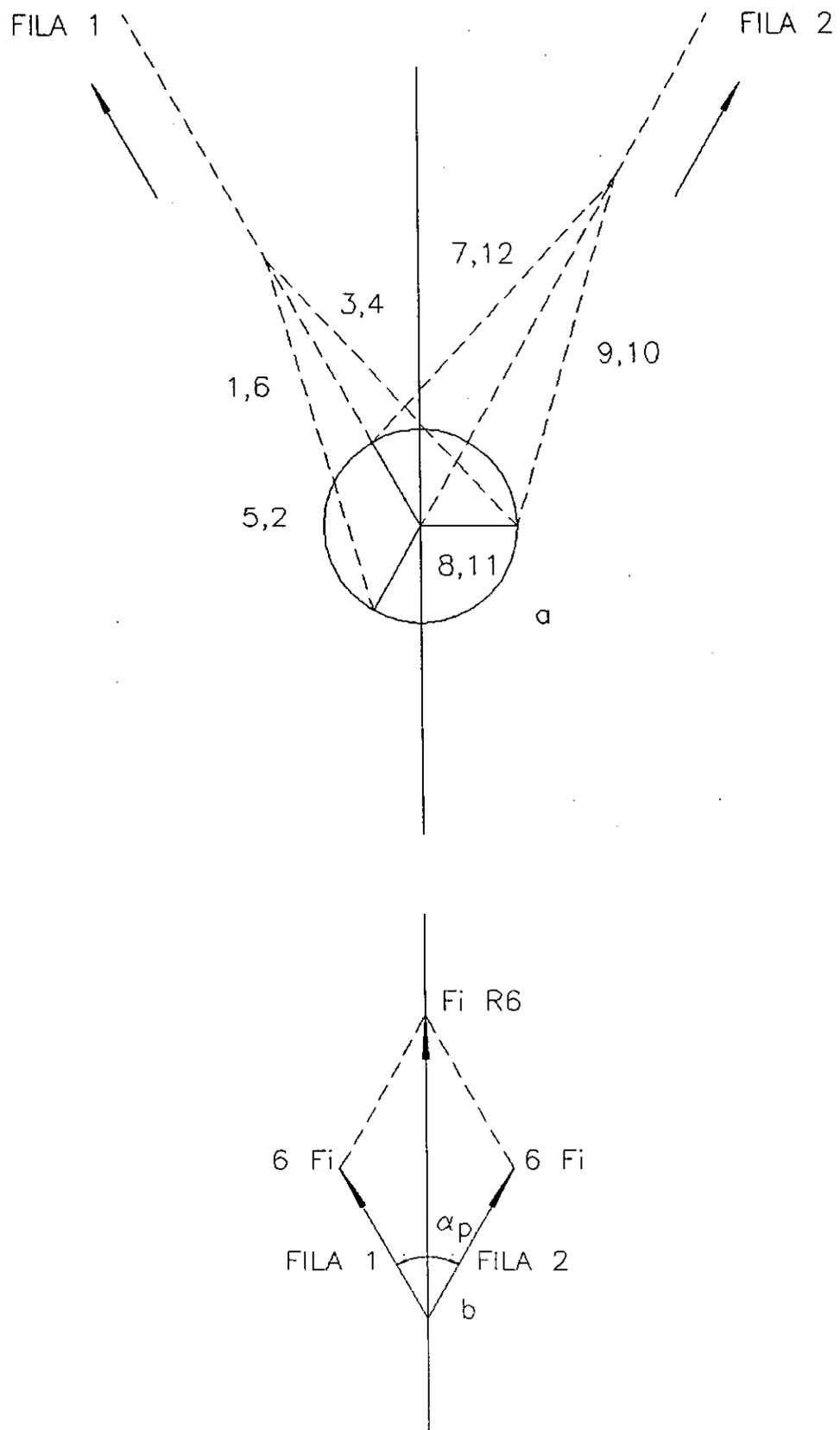
$$\alpha_p = \frac{720}{2 \times 6} = 60^\circ$$

Cada muñón recibe al par de bielas 1-7; 2-8; 3-9; 4-10; 5-11; 6-12. Se puede fijar para la fila 1 de cilindros el orden de encendidos 1, 5, 3, 6, 2, 4; y para la fila 2, entre otros, fijar el orden 12, 8, 10, 7, 11, 9; de forma que, el orden de encendidos para el motor resulta ser: 1, 12, 5, 8, 3, 10, 6, 7, 2, 11, 4, 9; por lo que, a este motor le corresponde la distancia angular, regular, de encendidos  $720:12=60^\circ$ , y en cada fila  $720:6=120^\circ$ . Entonces, a cada fila le corresponde una estrella de vectores giratorios como los de la Fg. 31a y 31b. Pero si en aquel caso, aplicando la ecuación (162), hasta el orden 10, se determinó que para una fila no están compensadas las fuerzas de inercia del orden 6; también, en estos motores resultan no compensadas las fuerzas de inercia del orden 6 en cada plano, que como se sabe valen

$$F_{i6} = \sum_1^6 (m_a) b_6 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$$

en cada plano de las filas; concurrentes en el eje de giro del cigüeñal. La resultante de estas dos fuerzas de inercia es la diagonal del paralelogramo que determinan, y en este caso, sobre la bisectriz del ángulo de la V, Fg. 32b, y tiene por valor

$$F_{Ri6} = 2 \cdot F_{i6} \cdot \cos \frac{\alpha_p}{2} \quad (163)$$



Fg. 32

Un caso particular de estos motores es cuando la Valcanza el valor de  $180^\circ$  y da el motor de cilindros opuestos o motor Boxer, haciendo variar esencialmente la compensación c) Moes de émbolos opuestos.

Esta disposición suele utilizarse por las mismas razones expuestas para los motores en V. Por ello, cuando se construyen de un solo eje cigüeñal presentan características de los motores Boxer. Pero, cuando estos motores son de dos tiempos y existe decalaje entre las cigüeñas, presentan características de un motor en V.

Cuando estos motores se construyen con dos ejes de cigüeñales, sus características son las de dos motores en línea. d) Los motores en estrella.

Estos motores, muy poco utilizados en la actualidad, llevan sus cilindros montados en un plano transversal para cada estrella, y el número de cilindros en cada plano varía entre 3 y 9; generalmente son motores de cuatro tiempos. Todas las bielas van articuladas a un mismo muñón, en la forma que se denomina **ataque centrado**, para que las masas de las bielas sean iguales; o bien, llevan una biela principal y todas las otras bielas van articuladas a ella. Los ejes de los cilindros forman ángulos iguales de valor

$$\frac{360}{N_c}$$

Cuando los motores de cuatro tiempos se construyen con un número impar de cilindros, como se representa en la Fg. 33a, para un motor de cinco cilindros; de esta forma se consigue una distancia angular de encendidos igual. Pero cuando el motor se construye con número par de cilindros, no le es de aplicación aquella división y presenta particularidades al respecto; una de ellas puede ser la de calajes alternos; por ejemplo, para un motor de seis cilindros con calajes alternos de  $90^\circ$  y  $30^\circ$ , resultando los dos primeros períodos motores a

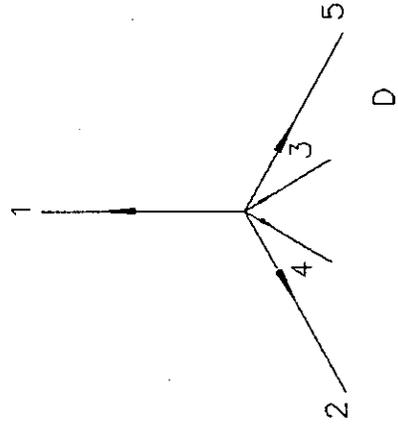
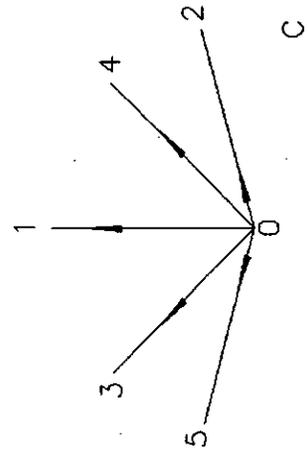
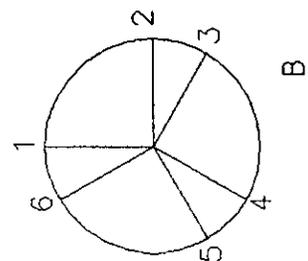
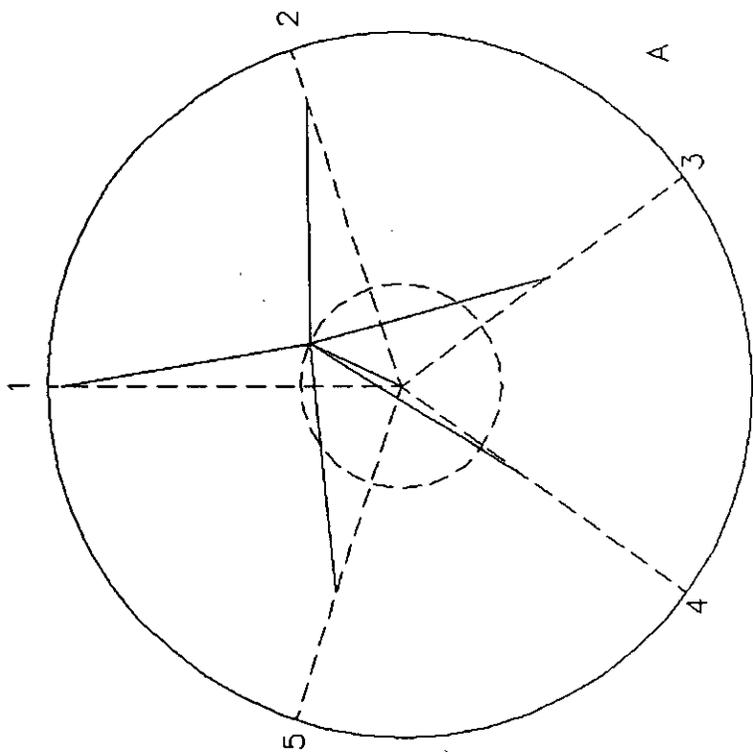


Fig. 33

120°, el tercero a 90° ó 150°, los cuarto y quinto a 120° y el sexto a 150° ó 90°, representado en la Fg. 33b. Cuando el motor es de dos tiempos, el calaje es regular, tanto si se trata de un número par o impar de cilindros.

Establecidas las consideraciones para este tipo de motores, consideremos un motor de cinco cilindros a cuatro tiempos, de ataque centrado, Fg. 33a. Los ejes de los cilindros forman una estrella en ángulos de  $360:5=72^\circ$ ; el eje de cigüeñal es de un eje para cada estrella. La fórmula (158) da para la fuerza de inercia vertical de las masas giratorias

$$F_{Rgv} = (m_g)R.\omega^2.\cos \alpha$$

única, por tener el caracter de fuerza centrífuga, que es el vector giratorio o módulo de valor

$$(m_g)R.\omega^2$$

y consta de la suma de las masas de la cigüeña y de la segunda masa de descomposición de las biela, aplicadas en el extremo del radio de cogüeñal, en la forma que ya se ha estudiado. Esta fuerza de inercia única, por ser única la fuerza centrífuga, puede aplicarse a cualquiera de los cinco cilindros, tomando como origen su eje geométrico para medir el argumento  $\omega t$ .

Para la fuerza de inercia horizontal de estas masas la fórmula (159) da

$$F_{Rgh} = (m_g)R.\omega^2.\sen \alpha$$

también única, por las razones ya expuestas, pero aplicable simultaneamente con la fuerza de inercia vertical al mismo cilindro. En cuanto a las masas alternativas, también le son de aplicación las fórmulas generales (160), (161) y (162),. Si se toma el eje geométrico del cilindro número 1 como origen,

a partir del cual se miden los ángulos, la fórmula (160) da para las fuerzas de inercia vertical primarias

$$F_{RP} = \sum_1^5 (m_a) R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = \sum_1^5 F_{ca} \cdot \cos \alpha$$

- CN1-  $F_{ca} \cdot \cos 0,0 = 1,000000 F_{ca}$
- CN2-  $F_{ca} \cdot \cos 288 = 0,309017 F_{ca}$
- CN3-  $F_{ca} \cdot \cos 216 = -0,809017 F_{ca}$
- CN4-  $F_{ca} \cdot \cos 144 = -0,809017 F_{ca}$
- CN5-  $F_{ca} \cdot \cos 72 = 0,309017 F_{ca}$

Estas fuerzas de inercia están orientadas sobre el eje de su cilindro, como se representa en la Fg. 33c, siendo la resultante la suma de los referidos vectores. La fuerza de inercia resultante queda determinada por la suma vectorial de todas ellas; de manera que referidas al eje del cilindro N° 1,

- CN1-  $1,000000 F_{ca} \cdot \cos 0,0 = 1,000000 F_{ca}$
- CN2-  $0,309017 F_{ca} \cdot \cos 72 = 0,095492 F_{ca}$
- CN3-  $0,809017 F_{ca} \cdot \cos 324 = 0,654508 F_{ca}$
- CN4-  $0,809017 F_{ca} \cdot \cos 396 = 0,654508 F_{ca}$
- CN5-  $0,309017 F_{ca} \cdot \cos 288 = 0,045492 F_{ca}$

$$F_{SR} = 2,5 F_{ca} \quad (164)$$

La fuerza de inercia libre para compensar o equilibrar resulta ser 2,5 veces el módulo o vector que gira.

Para las fuerzas de inercia vertical secundarias, por la fórmula (161)

$$F_{RS} = \sum_1^5 (m_a) Y \cdot R \cdot \cos 2\alpha = \sum_1^5 F'_{ca} \cdot \cos 2\alpha$$

CN1- F'ca.cos 2x0,0 = 1,000000 F'ca  
 CN2- F'ca.cos 2x288 = -0,809017 F'ca  
 CN3- F'ca.cos 2x216 = 0,309017 F'ca  
 CN4- F'ca.cos 2x144 = 0,309017 F'ca  
 CN5- F'ca.cos 2x 72 = -0,809017 F'ca

Cada una de estas fuerzas de inercia está orientada sobre el eje de su cilindro, como se indica en la Fg. 33d. La fuerza de inercia resultante queda determinada por la suma vectorial de todas ellas; de manera que, referidas al eje del cilindro N° 1, vale:

CN1- 1,000000 F'ca.cos 0,0 = 1,00 F'ca  
 CN2- 0,809017 F'ca.cos 252 = -0,25 F'ca  
 CN3- 0,309017 F'ca.cos 144 = -0,25 F'ca  
 Cn4- 0,309017 F'ca.cos 216 = -0,25 F'ca  
 CN5- 0,809017 F'ca.cos 468 = -0,25 F'ca  

$$F'_{5R} = 0,00 F'ca$$

Se observa en este caso que la fuerza de inercia es cero; por lo que, en lo que a ellas se refiere, el motor está compensado.

Aplicando la fórmula (162), se observa que las fuerzas de inercia de 4°, 6° y 8° orden no están compensadas; mientras que las de 10° orden son cero.

También es norma usual utilizar el procedimiento gráfico para determinar la resultante, con tratamiento vectorial de los módulos de las fuerzas, como se indica en las figuras (30b) y (31b) para los dos motores de seis cilindros, el uno de dos tiempos y el otro de cuatro tiempos ya estudiados. De manera que, cuando la gráfica resulta una poligonal cerrada, se deduce que las fuerzas de inercia de ese orden están equilibradas y no producen vibraciones del motor y, en general, se establece

el principio: El efecto dinámico de las masas está compensado cuando el centro de gravedad del conjunto coincide con el eje de giro.

Hasta aquí se han referido todas las fuerzas de inercia al centro de gravedad del motor y, por tanto, consideradas en un mismo plano. Pero, también, se ha puesto de manifiesto que para los diferentes cilindros en línea, estas fuerzas no se hallan en un mismo plano. Entonces, las fuerzas de inercia pueden estar total o parcialmente compensadas; sin embargo, en estos motores puede aparecer un nuevo tipo de perturbación producida por pares de fuerzas de inercia cuyo brazo es coincidente con el eje motor, y su causa radica en el hecho de que las diferentes fuerzas de inercia no están en el mismo plano considerado, perpendicular al eje. Pero, también se ha puesto de manifiesto que para los diferentes cilindros, estas fuerzas no se hallan en el mismo plano y que, además, no son concurrentes, y solo en algunos casos, algunas son paralelas; son, mas bien, fuerzas cruzadas; las cuales, al componerlas, resultan en general una fuerza y un par de fuerzas, que por excepción pueden ambas, o una a una, ser nulas.

Entonces, la composición de fuerzas de inercia en un motor de varios cilindros podrá dar lugar a una fuerza y un par nulos, a una fuerza no nula y un par nulo, a una fuerza nula y un par no nulo y a una fuerza y un par nulos.

A fin de determinar la acción de las fuerzas de inercia sobre un motor, volvamos al caso de los motores de seis cilindros en línea ya estudiados. Para el motor de dos tiempos de la Fg. 30, el eje de cigüeñales está dispuesto en la forma que se indica en la Fg. 34a, y en lo que a las fuerzas de inercia verticales y horizontales de las masas giratorias se refiere tomaremos sus vectores, que también son sus valores máximos, orientados en el sentido de sus respectivas cigüeñas; de forma que se tienen las fuerzas  $F_{g1}$ ,  $F_{g2}$ ,  $F_{g3}$ ,  $F_{g4}$ ,  $F_{g5}$  y  $F_{g6}$  en

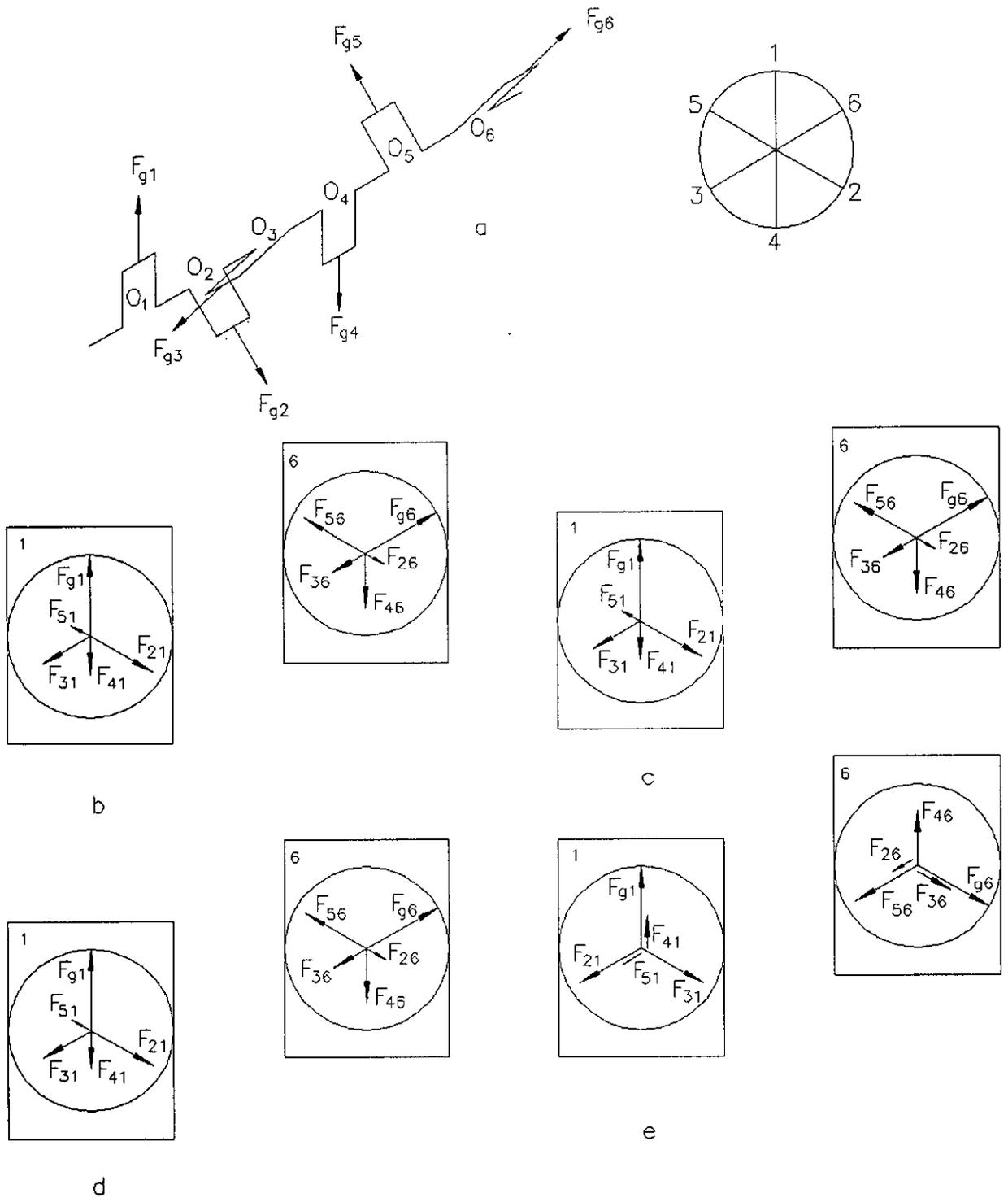


Fig 34

los planos que contienen los ejes de los cilindros perpendiculares al eje motor y a las distancias  $O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, O_1O_5, O_1O_6$ .

Entonces el sistema de fuerzas en cuestión está constituido por las referidas fuerzas que no son ni concurrentes ni paralelas; para componer estas fuerzas cruzadas, elegimos el punto  $O_1$  y aplicamos en él dos fuerzas iguales y paralelas a la  $F_{g2}$  y contrarias entre sí, o sea, la  $F_{g2}$  y su reacción  $-F_{g2}$ ; repetimos la operación con las demás fuerzas y se obtienen las fuerzas y sus reacciones  $F_{g3}$  y  $-F_{g3}$ ,  $F_{g4}$  y  $-F_{g4}$ ,  $F_{g5}$  y  $-F_{g5}$ ,  $F_{g6}$  y  $-F_{g6}$ ; de este modo se tienen seis fuerzas  $F_{g1}, F_{g2}, F_{g3}, F_{g4}, F_{g5}$  y  $F_{g6}$ , que por ser iguales y estar caladas a  $60^\circ$  se hallan en equilibrio, como ya de demostró, y cinco pares que son

$$\begin{aligned} -F_{g2} - O_1O_2 - F_{g2}; & \quad -F_{g3} - O_1O_3 - F_{g3}; & \quad -F_{g4} - O_1O_4 - F_{g4} \\ & \quad -F_{g5} - O_1O_5 - F_{g5}; & \quad -F_{g6} - O_1O_6 - F_{g6} \end{aligned}$$

A fin de poder componer estos pares de fuerzas, procedamos de acuerdo con la ley de fuerzas paralelas, descomponiendo las fuerzas  $F_{g2}, F_{g3}, F_{g4}$  y  $F_{g5}$  en dos componentes, aplicando una en  $O_1$  y otra en  $O_6$ ; deberá también verificarse la proporcionalidad

$$\frac{F_{g2}}{O_1O_6} = \frac{F_{g21}}{O_6O_2} = \frac{F_{g26}}{O_1O_2} \quad (165)$$

y que

$$F_{g2} = F_{g21} + F_{g26}$$

En consecuencia, es

$$\begin{aligned} F_{g2} \cdot O_6 O_2 &= F_{g21} \cdot O_1 O_6 \\ F_{g2} \cdot O_1 O_2 &= F_{g26} \cdot O_1 O_6 \end{aligned} \quad (165')$$

y también

$$\begin{aligned} F_{g21} &= \frac{O_6 O_2}{O_1 O_6} \cdot F_{g2} = \frac{4}{5} \cdot F_{g2} = 0,8 F_{g2} \\ F_{g26} &= \frac{O_1 O_2}{O_1 O_6} \cdot F_{g2} = \frac{1}{5} \cdot F_{g2} = 0,2 F_{g2} \end{aligned} \quad (166)$$

Procediendo de la misma forma con las fuerzas  $F_{g3}$ ,  $F_{g4}$  y  $F_{g5}$ , resulta que

$$\begin{aligned} F_{g31} &= \frac{O_6 O_3}{O_1 O_6} \cdot F_{g3} = \frac{3}{5} \cdot F_{g3} = 0,6 F_{g3} \\ F_{g36} &= \frac{O_1 O_3}{O_1 O_6} \cdot F_{g3} = \frac{2}{5} \cdot F_{g3} = 0,4 F_{g3} \\ F_{g41} &= \frac{O_6 O_4}{O_1 O_6} \cdot F_{g4} = \frac{2}{5} \cdot F_{g4} = 0,4 F_{g4} \\ F_{g46} &= \frac{O_1 O_4}{O_1 O_6} \cdot F_{g4} = \frac{3}{5} \cdot F_{g4} = 0,6 F_{g4} \\ F_{g51} &= \frac{O_6 O_5}{O_1 O_6} \cdot F_{g5} = \frac{1}{5} \cdot F_{g5} = 0,2 F_{g5} \\ F_{g56} &= \frac{O_1 O_5}{O_1 O_6} \cdot F_{g5} = \frac{4}{5} \cdot F_{g5} = 0,8 F_{g5} \end{aligned} \quad (166)$$

Se tiene ahora un sistema (figuras 34b y 34c) constituido por las fuerzas  $F_1$ ,  $F_{21}$ ,  $F_{31}$ ,  $F_{41}$ ,  $F_{51}$  aplicadas en  $O_1$  y por las fuerzas  $F_6$ ,  $F_{26}$ ,  $F_{36}$ ,  $F_{46}$ ,  $F_{56}$  aplicadas en  $O_6$ . Para su composición se puede emplear el principio de fuerzas cruzadas, y ver que sucede con fuerzas y pares; pero es más corriente proceder a la composición por el principio de fuerzas concurrentes coplanarias, procedimiento ya estudiado en la (figura 30).

La fuerza de inercia vertical resultante en los planos de

los cilindros 1 y 6 vale

Plano del cilindro N° 1,

$$\begin{aligned}F_{g1} \cdot \cos 0,0 &= 1,0 \times 1,0 F_g = 1,0 F_g \\F_{21} \cdot \cos 240 &= -0,5 \times 0,8 F_g = -0,4 F_g \\F_{31} \cdot \cos 120 &= -0,5 \times 0,6 F_g = -0,3 F_g \\F_{41} \cdot \cos 180 &= -1,0 \times 0,4 F_g = -0,4 F_g \\F_{51} \cdot \cos 60 &= 0,5 \times 0,2 F_g = 0,1 F_g \\F_{iR6} &= 0,0 F_g\end{aligned}$$

Plano del cilindro N° 6

$$\begin{aligned}F_{g6} \cdot \cos 300 &= 0,5 \times 1,00 F_g = 0,5 F_g \\F_{26} \cdot \cos 240 &= -0,5 \times 0,2 F_g = -0,1 F_g \\F_{36} \cdot \cos 120 &= -0,5 \times 0,4 F_g = -0,2 F_g \\F_{46} \cdot \cos 180 &= -1,0 \times 0,6 F_g = -0,6 F_g \\F_{56} \cdot \cos 60 &= 0,5 \times 0,8 F_g = 0,4 F_g \\F_{iR6} &= 0,0 F_g\end{aligned}$$

Pero si la suma de todas las fuerzas en cada plano es cero, la resultante es nula, y nulo es el par.

La fuerza de inercia horizontal resultante en los planos

de los cilindros 1 y 6 vale

Plano del cilindro N° 1

$$\begin{aligned}F_{g1} \cdot \sin 0,0 &= 0,000000 \times 1,0 F_g = 0,00000 F_g \\F_{21} \cdot \sin 240 &= -0,866025 \times 0,8 F_g = -0,69282 F_g \\F_{31} \cdot \sin 120 &= 0,866025 \times 0,6 F_g = 0,51961 F_g \\F_{41} \cdot \sin 180 &= 0,000000 \times 0,4 F_g = 0,00000 F_g \\F_{51} \cdot \sin 60 &= 0,866025 \times 0,2 F_g = 0,17321 F_g \\F_{iR1} &= 0,0 F_g\end{aligned}$$

Plano del cilindro N° 6

$$\begin{aligned}
 F_{g6} \cdot \text{sen } 300 &= -0,866025 \times 1,0 \quad F_g = -0,866025 \quad F_g \\
 F_{26} \cdot \text{sen } 240 &= -0,866025 \times 0,2 \quad F_g = -0,173205 \quad F_g \\
 F_{36} \cdot \text{sen } 120 &= 0,866025 \times 0,4 \quad F_g = 0,346410 \quad F_g \\
 F_{46} \cdot \text{sen } 180 &= 0,000000 \times 0,6 \quad F_g = 0,000000 \quad F_g \\
 F_{56} \cdot \text{sen } 60 &= 0,866025 \times 0,8 \quad F_g = 0,692820 \quad F_g \\
 F_{iR6} &= 0,0 \quad F_g
 \end{aligned}$$

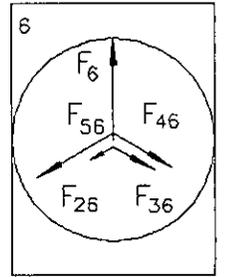
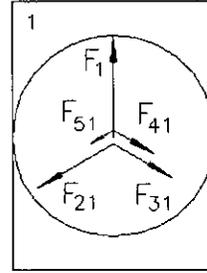
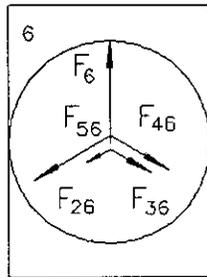
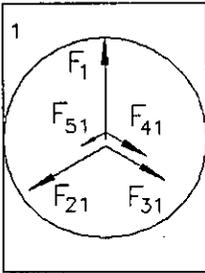
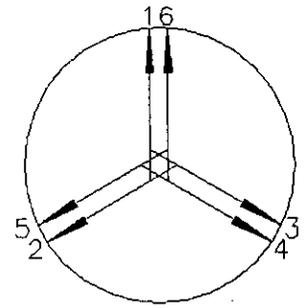
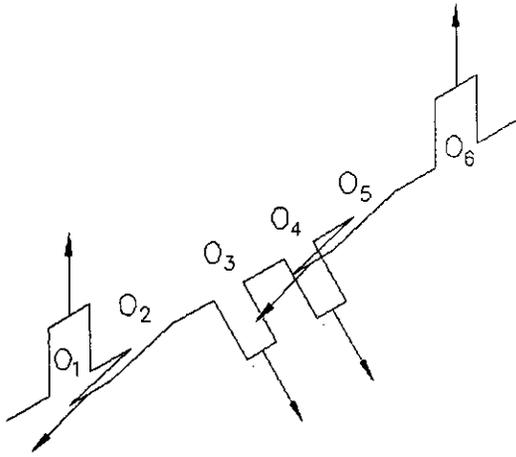
Pero si la suma de todas las fuerzas en cada plano es cero, la resultante es nula, y nulo es el par.

Para el estudio de las fuerzas de inercia de las masas sometidas a movimiento alternativo se procede de igual forma situando el vector conforme a su argumento *nwt*. Aunque en este estudio, trataremos solo las fuerzas de inercia de primer orden y las de segundo orden.

En cuanto a las fuerzas de inercia primarias, ya hemos determinado que son de la misma forma que las de las masas giratorias, Fg. 34d, y hasta las hemos sumado, fórmula (57). Admitimos, entonces, que la suma de estas fuerzas es cero, que la resultante es nula, y nulo es el par.

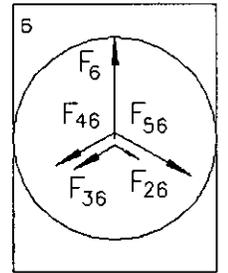
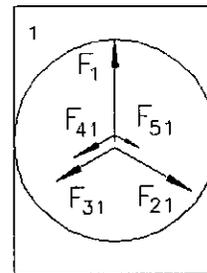
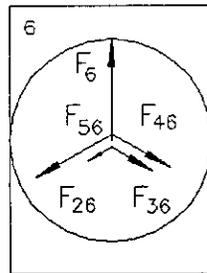
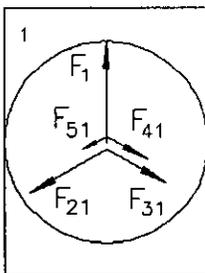
Para las fuerzas de inercia vertical secundarias rigen los mismos principios, y le son de aplicación todos los razonamientos expuestos para componer fuerzas y pares. Se presenta el cuadro de fuerzas de la Fg. 34e, que da como resultante en el plano del cilindro N° 1

$$\begin{aligned}
 F_{a1} \cdot \cos 2 \times 0,0 &= 1,0 \times 1,0 \quad F_a = 1,0 \quad F_a \\
 F_{21} \cdot \cos 2 \times 240 &= -0,5 \times 0,8 \quad F_a = -0,4 \quad F_a \\
 F_{31} \cdot \cos 2 \times 120 &= -0,5 \times 0,6 \quad F_a = -0,3 \quad F_a \\
 F_{41} \cdot \cos 2 \times 180 &= 1,0 \times 0,4 \quad F_a = 0,4 \quad F_a \\
 F_{51} \cdot \cos 2 \times 60 &= -0,5 \times 0,2 \quad F_a = -0,1 \quad F_a \\
 F_{iR1} &= 0,6 \quad F_a
 \end{aligned}$$



b

c



d

e

Fig. 35

En el plano del cilindro N° 6

$$\begin{aligned}
 F_{a6} \cdot \cos 2 \times 300 &= -0,5 \times 1,0 F_a = -0,5 F_a \\
 F_{26} \cdot \cos 2 \times 120 &= -0,5 \times 0,2 F_a = -0,1 F_a \\
 F_{36} \cdot \cos 2 \times 120 &= -0,5 \times 0,4 F_a = -0,2 F_a \\
 F_{46} \cdot \cos 2 \times 180 &= 1,0 \times 0,6 F_a = 0,6 F_a \\
 F_{56} \cdot \cos 2 \times 60 &= -0,5 \times 0,8 F_a = -0,4 F_a \\
 F_{ar6} &= -0,6 F_a
 \end{aligned}$$

La fuerza de inercia resultante en cada uno de los planos no es nula, tienen el mismo valor, están en la misma dirección, pero en sentido contrario y dan lugar a un par de inercia que produce vibraciones de torsión en el plano longitudinal vertical, con frecuencia doble de la velocidad angular del motor en revoluciones por segundo.

Para los motores de seis cilindros a cuatro tiempos, por ser conceptos generales, emplearemos los mismos razonamientos propuestos para los motores de dos tiempos. En los motores de cuatro tiempos las cigüeñas están caladas a  $720/6 = 120^\circ$ ; tomando el orden de encendido de la figura 31, resulta se 1, 5, 3, 6, 2, 4, y el eje de cigüeñas queda dispuesto como se representa en la Fg. 35a.

Entonces para las masas giratorias la fuerza de inercia vertical resultante, como se indica en las figuras 35b vale

En el plano del cilindro N° 1

$$\begin{aligned}
 F_{g1} \cdot \cos 0,0 &= 1,0 \times 1,0 F_g = 1,0 F_g \\
 F_{21} \cdot \cos 480 &= -0,5 \times 0,8 F_g = -0,4 F_g \\
 F_{31} \cdot \cos 240 &= -0,5 \times 0,6 F_g = -0,3 F_g \\
 F_{41} \cdot \cos 600 &= -0,5 \times 0,4 F_g = -0,2 F_g \\
 F_{51} \cdot \cos 120 &= -0,5 \times 0,2 F_g = -0,1 F_g \\
 F_{iR1} &= 0,0 F_g
 \end{aligned}$$

En el plano del cilindro N° 6

$$\begin{aligned}
 F_{g1} \cdot \cos 360 &= 1,0 \times 1,0 F_g = 1,0 F_g \\
 F_{26} \cdot \cos 480 &= -0,5 \times 0,2 F_g = -0,1 F_g \\
 F_{36} \cdot \cos 240 &= -0,5 \times 0,4 F_g = -0,2 F_g \\
 F_{46} \cdot \cos 600 &= -0,5 \times 0,6 F_g = -0,3 F_g \\
 F_{56} \cdot \cos 120 &= -0,5 \times 0,8 F_g = -0,4 F_g \\
 F_{iR1} &= 0,0 F_g
 \end{aligned}$$

Pero si la suma de todas las fuerzas en cada plano es cero, la resultante es nula, y nulo es el par.

La fuerza de inercia horizontal resultante, Fg.35c vale  
En el plano del cilindro N° 1

$$\begin{aligned}
 F_{g1} \cdot \sin 0,0 &= 0,000000 \times 1,0 F_g = 0,000000 F_g \\
 F_{21} \cdot \sin 480 &= 0,866025 \times 0,8 F_g = 0,692820 F_g \\
 F_{31} \cdot \sin 240 &= -0,866025 \times 0,6 F_g = -0,519615 F_g \\
 F_{41} \cdot \sin 600 &= -0,866025 \times 0,4 F_g = -0,346410 F_g \\
 F_{51} \cdot \sin 120 &= 0,866025 \times 0,2 F_g = 0,692820 F_g \\
 F_{iR1} &= 0,0 F_g
 \end{aligned}$$

En el plano del cilindro N°6

$$\begin{aligned}
 F_{g6} \cdot \sin 360 &= 0,000000 \times 1,0 F_g = 0,000000 F_g \\
 F_{26} \cdot \sin 480 &= 0,866025 \times 0,2 F_g = 0,173202 F_g \\
 F_{36} \cdot \sin 240 &= -0,866025 \times 0,4 F_g = -0,346410 F_g \\
 F_{46} \cdot \sin 600 &= -0,866025 \times 0,6 F_g = -0,519615 F_g \\
 F_{56} \cdot \sin 120 &= 0,866025 \times 0,8 F_g = 0,692820 F_g \\
 F_{iR6} &= 0,0 F_g
 \end{aligned}$$

Pero si la suma de todas las fuerdas en cada plano es cero, la resultante es nula, y nulo es el par.

Para las masas sometidas a movimiento rectilíneo alternativo trataremos, igualmente, las fuerzas de inercia de primer orden y las fuerzas de inercia de segundo orden.

También para las fuerzas de inercia vertical primarias Fg. 35d, admitimos que son de la misma forma que las de las masas giratorias; que la suma de estas fuerzas en cada plano es cero, que la resultante es nula, y que nulo es el par.

La fuerza de inercia secundaria resultante, vale

Para el plano del cilindro N° 1

$$\begin{aligned}
 F_{a1} \cdot \cos 2 \times 0,0 &= 1,0 \times 1,0 \quad F_a = 1,0 \quad F_a \\
 F_{21} \cdot \cos 2 \times 480 &= -0,5 \times 0,8 \quad F_a = -0,4 \quad F_a \\
 F_{31} \cdot \cos 2 \times 240 &= -0,5 \times 0,6 \quad F_a = -0,3 \quad F_a \\
 F_{41} \cdot \cos 2 \times 600 &= -0,5 \times 0,4 \quad F_a = -0,2 \quad F_a \\
 F_{51} \cdot \cos 2 \times 120 &= -0,5 \times 0,2 \quad F_a = -0,1 \quad F_a \\
 F_{iR1} &= 0,0 \quad F_a
 \end{aligned}$$

Para el plano del cilindro N° 6

$$\begin{aligned}
 F_{a6} \cdot \cos 2 \times 360 &= 1,0 \times 1,0 \quad F_a = 1,0 \quad F_a \\
 F_{26} \cdot \cos 2 \times 480 &= -0,5 \times 0,2 \quad F_a = -0,1 \quad F_a \\
 F_{36} \cdot \cos 2 \times 240 &= -0,5 \times 0,4 \quad F_a = -0,2 \quad F_a \\
 F_{46} \cdot \cos 2 \times 600 &= -0,5 \times 0,6 \quad F_a = -0,3 \quad F_a \\
 F_{56} \cdot \cos 2 \times 120 &= -0,5 \times 0,8 \quad F_a = -0,4 \quad F_a \\
 F_{iR6} &= 0,0 \quad F_a
 \end{aligned}$$

Pero si la suma de todas las fuerzas en cada plano es cero, la resultante es nula, y nulo es el par.

Se dice que estos motores tienen las fuerzas de inercia y los pares de inercia tratados, compensados, y, por tanto el motor trabaja libre de vibraciones.

De cuanto antecede se deduce el principio: Las fuerzas de inercia no equilibradas y los pares de inercia no equilibrados, producen vibraciones en los órganos que constituyen el motor; estos movimientos periódicos, en general de pequeña amplitud, pueden producir grandes fatigas en los materiales y fenómenos

tan graves como son las grietas y las roturas.

Las fuerzas de inercia horizontales no equilibradas producen vibraciones horizontales, de frecuencia igual a la velocidad angular medida en revoluciones por segundo; Las fuerzas de inercia vertical primarias producen vibraciones verticales, de frecuencia igual a la velocidad angular del motor medida en revoluciones por segundo; Las fuerzas de inercia vertical secundarias producen vibraciones verticales de frecuencia igual al doble de dicha velocidad angular; en general, las fuerzas de inercia verticales de orden  $n$  producen vibraciones verticales, de frecuencia  $n$  veces la referida velocidad angular. Los pares de inercia horizontales no equilibrados producen vibraciones de rotación en un plano longitudinal horizontal, de frecuencia igual a la referida velocidad angular; los pares de inercia vertical primarios no equilibrados producen vibraciones de rotación en un plano longitudinal vertical, de frecuencia igual a dicha velocidad angular; los pares de inercia vertical secundarios no equilibrados, producen vibraciones de rotación en un plano longitudinal vertical, de frecuencia doble de la velocidad angular en revoluciones por segundo. El par escorante produce vibraciones de rotación en un plano vertical transversal, de frecuencia doble de la velocidad angular tomada en revoluciones por segundo.

Por cuanto se lleva estudiado vemos que en un motor alternativo las vibraciones son de dos clases, unas que afectan al eje, cuales son las vibraciones de flexión y las vibraciones de torsión, y otras que afectan a la fundación.

En consecuencia, un motor alternativo en función constituye un sistema vibratorio complejo, pues, como tal, posee fuerzas de excitación que tienden a producir y mantener las vibraciones; pero también, masas vibrantes y fuerzas de amortiguación que tienden a reducir y, aún, anular las vibraciones.

En cuanto a las fuerzas de excitación, se han estudiado en rigor, aplicándolas en cada caso.

Las masas vibrantes son todas las que constituyen el motor y la fundación que lo soporta, el casco y el agua que lo rodea, hasta límites indefinidos, en los motores marinos; en los motores terrestres, fijos, vibra también el edificio y la tierra que lo rodea hasta límites indefinidos, y en los móviles el vehículo con sus derivaciones.

Son fuerzas de amortiguación las imperfecciones elásticas de los materiales por los que se transforma en calor una parte de la energía de deformación, los rozamientos, la acción de masas amortiguadoras que absorben trabajo y la acción de otras masas pendulares u oscilantes, los llamados extintores de vibraciones, que dan fuerzas defasadas.

#### CAPITULO 4.) El equilibrado de los motores

Estudiadas todas las causas que son capaces de producir vibraciones en los motores y expuestos los efectos que de ellas dimanen, es preciso conocer los procedimientos adecuados para alcanzar una compensación de los efectos dinámicos. Pero si hemos visto que las vibraciones que afectan al motor son de dos clases, de dos clases tendrán que ser los procedimientos de compensación; uno para compensar las vibraciones producidas por las fuerzas de inercia, y otros para compensar las vibraciones de torsión de los ejes.

Conocida la causa productora de las fuerzas de inercia, se intuye que su compensación o equilibrado se conseguirá con un dispositivo que sea capaz de producir en cada momento una fuerza de inercia igual y contraria a la productora.

En efecto, considerando las fórmulas (51) y (52), relativas a las fuerzas de inercia creadas por las masas que giran, se ve que todos sus términos tienen forma de fuerza centrífuga, como ya se dijo anteriormente, la cual se toma como argumento y queda representada por un vector que gira. Entonces, si coplanario con este vector se consigue otro de igual magnitud, de sentido contrario, se compensa, y la resultante es nula, y nulo es el efecto dinámico. Por tanto, si en cada brazo del cigüeñal se monta una masa coplanaria y que su centro de gravedad coincida con la dirección del radio de cigüeñal y esté a la distancia  $R_e$  del eje de giro; que el centro de gravedad de ambas masas lo contenga el plano vertical transversal del eje geométrico del cilindro. Estas masas al girar crean una fuerza centrífuga que vale

$$F_{CM} = M_e \cdot R_e \cdot \omega^2$$

y si se cumple que

$$M_{CM} \cdot R_e \cdot \omega^2 = (\sum m_g) \cdot R \cdot \omega^2$$

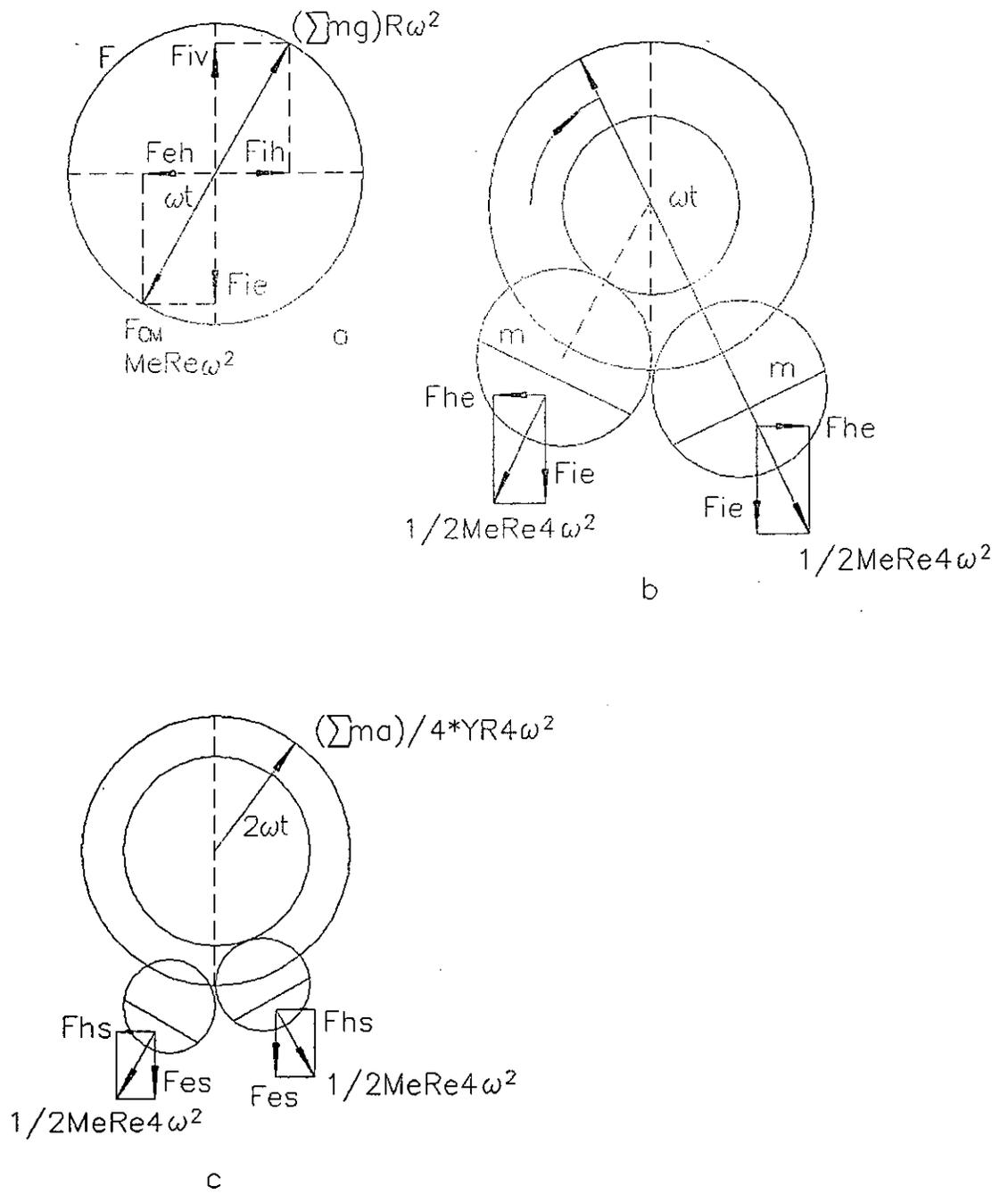
Resulta que las fuerzas de inercia de las masas giratorias quedan equilibradas porque ambos vectores giran con la misma velocidad  $w$ , y su proyección, que es la fuerza de inercia primaria instantánea, vertical y horizontal, que corresponde al ángulo  $w t$ , contado a partir del eje del cilindro, Fg.36a. y el motor no vibra por esta causa.

Considerando el primer término del segundo miembro de la fórmula (55) se observa que es de la misma forma que la (51), pero relativa a las masas en movimiento alternativo. Entonces, si coplanario a este vector  $(\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2$ , se consigue otro igual en magnitud, pero de sentido contrario, se compensará, y la resultante será nula, y nulo será el efecto dinámico. Pero ya no podrá conseguirse de la misma forma que para las masas giratorias, porque ya hemos visto que estos contrapesos crean una fuerza de inercia horizontal que no la crean las masas alternativas, y el equilibrado se reduciría a un reparto en fuerzas de inercia vertical y horizontal como se demuestra haciendo

$$[(\sum m_a) + (\sum m_g)] \cdot R \cdot \omega^2 = M_e \cdot R_e \cdot \omega^2$$

En este caso, las fuerzas de inercia vertical primarias se equilibran, pero se crea una fuerza de inercia horizontal de igual magnitud que la fuerza de inercia de las masas alternativas. No obstante, cabe un equilibrado parcial con este procedimiento de contrapesos, y es, haciendo

$$(\sum m_g) \cdot R < M_e \cdot R_e < (\sum m_a + \sum m_g) \cdot R$$



Fg 36

Resultando un equilibrado parcial con una masa, de la forma

Con ello, la fuerza de inercia vertical de las masas giratorias queda equilibrada, se ha reducido a la mitad la fuerza de inercia de las masas alternativas y se crea una

$$M_e = \frac{R}{R_e} \left[ (\sum m_g) + \frac{(\sum m_a)}{2} \right]$$

fuerza de inercia horizontal equivalente a la otra mitad, pero invertida.

Si uno de los extremos se hace respecto de las masas alternativas, resulta que el equilibrado parcial se hace de según

$$M_e = \frac{R}{R_e} \left[ (\sum m_a) + \frac{(\sum m_g)}{2} \right]$$

De esta forma, la fuerza de inercia de las masas alternativas queda equilibrada, la fuerza de inercia vertical de las masas giratorias queda reducida a la mitad y la fuerza de inercia horizontal queda invertida y tiene por valor la creada por la equivalente vertical menos la mitad de su fuerza de inercia.

Para el equilibrado de las fuerzas de inercia vertical primarias hay que recurrir a otros procedimientos; uno de ellos es el de montar dos ejes auxiliares, simétricos respecto del eje del cilindro, portando cada uno de ellos una masa de equilibrado, opuestas entre sí. Los ejes giran a la misma velocidad  $w$  que el eje de cigüeñales, del que uno de ellos recibe el movimiento y éste arrastra al otro. Las masas al girar crean una fuerza centrífuga, que verificarán la condición

$$\frac{1}{2} \cdot M_e \cdot R_e \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot M_e \cdot R_e \cdot \omega^2 = (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2$$

Y como se pretende un equilibrio, su suma será cero.

Por otra parte, cuando se estudió en forma particular el movimiento circular uniforme, de aquella fuerza centrífuga referida al eje del cilindro, dimanaba una fuerza de inercia vertical, y referida a otro eje normal a él, dimanaba una fuerza de inercia horizontal. Pues bien, si estas masas se disponen como se indica en la Fg. 35b, de forma tal que sus vectores que giran formen con el eje del cilindro el mismo ángulo  $\omega t$  que el vector módulo de la fuerza de inercia, en lo que concierne al movimiento vertical se cumplirá la condición,

$$\frac{1}{2} \cdot M_e \cdot R_e \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t + \frac{1}{2} \cdot M_e \cdot R_e \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t = - (\sum m_a) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t$$

Y en lo que corresponde al movimiento horizontal, se tiene

$$F_{ih} = \frac{1}{2} \cdot M_e \cdot R_e \cdot \omega^2 \cdot \sen \omega t$$

por cada una de las dos masas, pero como son opuestas se equilibran, y el motor trabaja libre de estas vibraciones.

También podría incluirse en este equilibrado la fuerza de inercia vertical de las masas giratorias, pero así queda libre, no equilibrada, la fuerza de inercia horizontal.

Para equilibrar la fuerza de inercia vertical secundaria se procede de la misma forma que para la fuerza de inercia primaria, como se representa en la Fg. 36c. En este caso, las masas de equilibrado giran con velocidad  $2\omega$  y en su instalación se montan en oposición al eje de cigüeñal cuando el émbolo esté en su punto muerto alto y en conjunción cuando esté en el punto muerto bajo, para que se cumpla en toda posición la condición de equilibrado

$$\frac{(\sum m_a) \cdot Y \cdot R}{4} \cdot R \cdot 4\omega^2 \cdot \cos 2\omega t = - 2 \left( \frac{1}{2} \cdot M_e \cdot R_e \cdot 4\omega^2 \cdot \cos 2\omega t \right)$$

También aquí dimanar fuerzas de inercia horizontales, que se equilibran por ser opuestas y del mismo valor.

Ya hemos visto que cuando los motores son de mas de dos cilindros, en calaje regular, las fuerzas de inercia están equilibradas. Pero como consecuencia de que las fuerzas de inercia no están en el mismo plano puede aparecer un nuevo tipo de perturbación producida por pares de fuerzas de inercia cuyo brazo es coincidente con el eje motor, el cual puede ser necesario equilibrar.

Para el equilibrado de los motores de varios cilindros no se actúa sobre cada cigüeñal, aunque se evitarían ciertos pares de inercia, pero aumentaría el número de piezas y el peso del motor; mas bien se utilizan las buenas condiciones del propio motor procediendo sobre el número de cilindros, calajes relativos de los cigüeñales, orden de encendido, peso de las masas que puedan producir fuerzas de inercia, e introducción de contrapesos en los cigüeñales extremos.

Por todo ello, se comprende que el equilibrado es en gran manera complejo, hasta tal punto que, aun en motores especiales, el equilibrado se refiere solo a una parte del problema, o sea, a los primeros términos de aquel desarrollo en serie de la ecuación (26). Aquí estamos tratando hasta el segundo término.

Cuando la reducción del efecto dinámico por contrapesos en los cigüeñales extremos no es suficiente, se debe de recurrir al equilibrado por el sistema de masas tratado para las fuerzas de inercia, montados en los extremos del motor; pero orientando las masas conforme a las fuerzas resultantes

Para atenuar las vibraciones de torsión de los ejes se procede de muy diferente forma que para compensar las de las fuerzas de inercia; pues, como se ha visto, las fuerzas de inercia son solo una pequeña causa de estas vibraciones de torsión que, como se ha puesto de manifiesto, no solo afectan

al eje, sino a todo el conjunto que forme el sistema vibratorio cerrado.

Los procedimientos para atenuar las vibraciones de torsión deben de ser capaces de actuar sobre todas aquellas causas que dan origen a lo propuesto en la fórmula (153), de la cual se desprende que la amplitud de las vibraciones se reduce disminuyendo las deformaciones relativas  $a_i$  o las fuerzas  $F_k$ , o variando  $\omega_e$ , o elevando el coeficiente de amortiguación  $K'$ . Entonces, variando todos o cada uno de los parámetros, se consigue disminuir las vibraciones ya existentes, o se previene contra vibraciones perjudiciales del eje de cigüeñales. Por ello, con los razonamientos propuestos se pretende:

A) Disminuir el peligro de resonancia, haciendo que se distancien suficientemente la velocidad de excitación  $\Omega$  y la velocidad propia  $\omega_e$ , lo cual se consigue:

a) Variando la velocidad angular  $\omega$  del eje motor, o lo que es lo mismo, el número de revoluciones.

b) Alterando el sistema vibratorio, o sea, engendrando otro número de vibraciones propio por transformación de las propiedades elásticas, desplazando la frecuencia propia en la zona de las frecuencias bajas y altas; lo cual se consigue trasladando la posición de las masas, en especial el volante; variando el diámetro del eje de cigüeñales, en general reforzándolo, y disminuyendo las masas giratorias, con lo cual se eleva el número de vibraciones propio. Cuando el aumento de  $\omega_{eI}$

se halla limitado, se procede de forma diferente; unas veces introduciendo contrapesos y, otras, montando un elemento intermedio elástico entre el eje de cigüeñales y la utilización, con el fin de reducir el número de vibraciones básico. De esta forma se puede salir de los estrechos límites que impone una transmisión rígida; porque, aunque resulte mas compleja, el número de vibraciones de segundo orden  $n_{eII}$  aumenta considerablemente.

También contribuyen a proteger de las vibraciones los

acoplamientos elásticos y los acoplamientos hidráulicos, que defienden los ejes contra las perjudiciales vibraciones de resonancia, bien sea aumentando la elasticidad del eje, o bien sea por una línea característica elástica que actúa contra el vaivén de la resonancia, y finalmente por amortiguación debida al rozamiento.

B) La disminución de las fuerzas tangenciales armónicas es siempre mas complejo, por causa de las debidas al fluido motor, pues al trabajar el motor en condiciones económicas, no puede ser objeto de variación; las debidas a las fuerzas de inercia son, como se ha demostrado ya, compensables.

C) La variación de la resultante de las deformaciones de resonancia relativas puede reducirse con disposición adecuada de las manivelas y por sucesión de encendidos, pues como hemos tratado ya, se puede variar el orden de encendido sin variar la posición de las cigüeñas; por tanto, tanto en los motores con una sola fila de cilindros como con dos filas, es posible disminuir en todos los cilindros los armónicos intermedios y hacerlos inofensivos.

D) La influencia de la amortiguación propia del sistema ya se ha tratado anteriormente y se ha puesto de manifiesto que la parte que interviene como consecuencia del movimiento del mecanismo de manivela no produce mejora mas que cuando es compatible con un buen rendimiento mecánico; es de menor importancia la amortiguación interna del material del eje.

E) Los aparatos salvavibraciones son medios adicionales que disminuyen las deformaciones de oscilación y se recurre a ellos cuando presenta serias dificultades conseguirlo por los procedimientos hasta aquí expuestos; estos aparatos son:

a) Amortiguadores de vibraciones, que se fundan en una acción pretendida de combinar las masas del amortiguador con las masas del sistema vibrante y, fijando una amortiguación, reducir artificialmente energía de la vibración para limitar las deformaciones. En estos aparatos la energía de la

deformación se reduce o anula por rozamiento mecánico o por agitación turbulenta de un líquido, que se transforma en calor; en otros casos, se hace intervenir la resonancia del amortiguador para impedir que sobrevengan vibraciones.

b) Extintores de vibraciones, que consumiendo muy poca energía son capaces de reducir las deformaciones críticas del sistema vibrante por procedimientos muy sencillos como masas pendulares.

El amortiguador de vibraciones solo debería utilizarse siempre que con los medios propuestos deducidos de la fórmula (153) no se consiga la amortiguación deseada, porque ocasiona un incremento en el peso del motor y una reducción de potencia producida por el motor.

No obstante, los amortiguadores y los extintores de vibraciones son indispensables en aquellos motores que trabajan con número de revoluciones variable, por causa de su elevada potencia específica y por los fuertes armónicos de torsión que de ellas dimanar; a no ser que se prevean ciertas limitaciones de la velocidad angular del motor en régimen de funcionamiento prolongado; dificultad que no siempre puede compensarse, aun, en instalaciones con acoplamiento hidráulico.

El amortiguador de vibraciones dinámico, es un medio eficaz contra las vibraciones de los ejes, pues mas que aplicar resistencias que consumen energía, retienen las vibraciones y las compensan. Pueden ser de diversas formas; unas veces se acopla al eje de cigüeñales como sistema vibrante una masa giratoria que produce rozamiento, o lleva un elemento elástico y otras veces, se montan en el eje de cigüeñales unas masas suspendidas a modo de péndulo, sin apenas rozamiento.

Al primer caso pertenecen los amortiguadores de resonancia y los amortiguadores de fricción, en los cuales la deformación de la vibración del eje queda limitada por causa de la acción amortiguadora del rozamiento mecánico o la del propio material al segundo caso pertenecen los extintores de vibraciones, en

los cuales se impide la producción de una vibración peligrosa de un amortiguador dinámico no amortiguado

En cuanto a los amortiguadores de resonancia, en la forma que suele aplicarse a los ejes de cigüeñales, la teoría del vibrador mecánico establece una relación entre las fuerzas antagonistas elásticas y la resonancia; de manera que, conocidas las fuerzas excitatrices, las fuerzas de aceleración o inercia y la fuerza de reacción de las masas, permite deducir las relaciones fundamentales para obtener la función de resonancia. Siendo  $m_1$  la masa del sistema principal que se amortigua,  $m_2$  la masa del amortiguador que se monta,  $q_1$  la fatiga elástica del sistema,  $q_2$  la del amortiguador,  $x_1$  la amplitud de deformación del sistema,  $x_2$  la de la masa del amortiguador,  $F_e$  la amplitud de la fuerza excitatriz y  $\Omega$  la velocidad angular de la fuerza excitatriz; despreciando la amortiguación propia del sistema y del amortiguador, las

ecuaciones del movimiento son de la forma

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + (q_1 + q_2) \cdot x_1 - q_2 \cdot x_2 &= F_e \cdot \text{sen } \Omega t \\ m_2 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + q_2 \cdot (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (167)$$

HANS SCHRÓN [H.S] establece consideraciones al respecto haciendo

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} \cdot \text{sen } \Omega t \\ x_2 &= x_{20} \cdot \text{sen } \Omega t \end{aligned}$$

y otras transformaciones relativas a la velocidad angular del sistema y de la masa del amortiguador, a la relación entre la

velocidad angular de la fuerza excitatriz y la velocidad angular del sistema, y a la deformación estática del sistema determina que la función de resonancia para el sistema principal es

$$R_1 = \frac{x_{10} \cdot q_1}{F_e} = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{q_2}{q_1} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{q_2}{q_1}}$$

y que la función de resonancia para el amortiguador es

$$R_2 = \frac{x_{20} \cdot q_2}{F_e} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{q_2}{q_1} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{q_2}{q_1}}$$

De las cuales se infiere que cuando la frecuencia propia del amortiguador se hace igual a la frecuencia de la fuerza excitatriz, o sea, cuando  $\omega_2^2 = \Omega^2$ , la función de resonancia del sistema principal es nula, porque nulo es el valor del numerador de la expresión; el movimiento  $x_{10}$  de la masa principal  $m_1$  desaparece y la masa permanece en reposo. También la función de resonancia del amortiguador se simplifica y el movimiento  $x_{20}$  de la masa del amortiguador vale

$$R_2 = \frac{x_{20} \cdot q_2}{F_e} = - \frac{q_1}{q_2}$$

$$x_{20} = -F_e \cdot \frac{q_1}{q_2^2}$$

La fuerza del amortiguador varía conforme a la fuerza excitatriz y actúa contra ella. Cuando exista resonancia del sistema principal, la cual debe de ser equilibrada por el

vibrador amortiguador, se cumple que  $\omega_1 = \Omega$ , de manera que con las deducciones anteriores, se cumple

$$\omega_2 = \omega_1 = \Omega$$

pero como se ha establecido en el apartado (b.2.3) y en los antecedentes de la fórmula (130)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{q_1}{m_1}} ; \omega_2 = \sqrt{\frac{q_2}{m_2}}$$

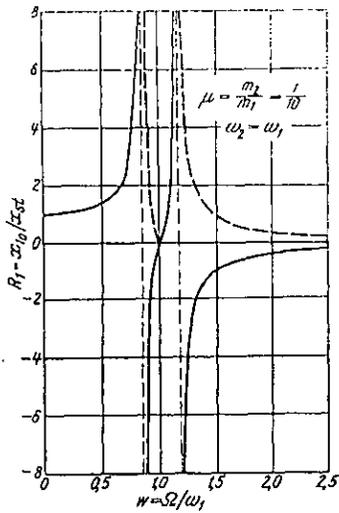
de las cuales se obtiene que la relación de velocidades angulares del sistema amortiguador y el sistema principal vale

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{m_1}{m_2}} ; \text{ y } \frac{q_2}{q_1} = \frac{m_2}{m_1}$$

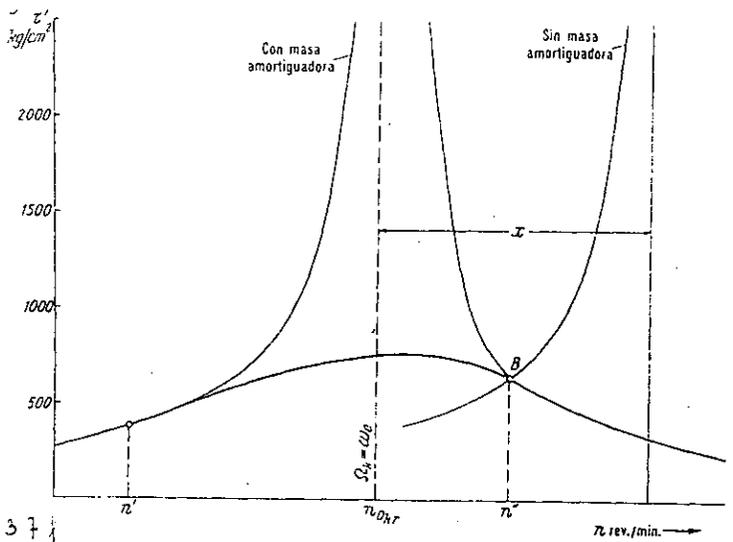
que es la magnitud relativa del amortiguador, y la relación de las constantes elásticas del sistema amortiguador y el sistema principal, que pueden substituir en la fórmula (168)

En la Fg.37a, se presenta la gráfica de un caso aislado obtenida por [H.S.] para una variación de la función de resonancia de la masa principal de un sistema con amortiguador dinámico en la que cuando  $\Omega = 0$ , se hace  $R_1 = 1$ ; cuando el denominador es igual a cero,  $R_1 = \infty$ .

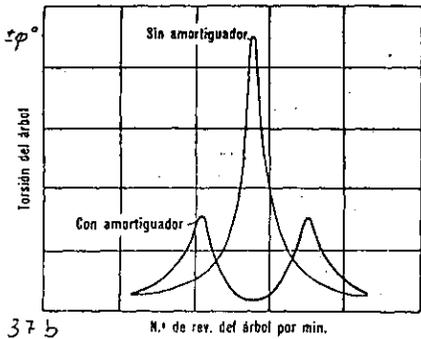
El sistema principal-amortiguador puede ser el de la Fg.37b, en la cual, el eje de cigüeñales está representado por la masa  $m_1$  de fatiga  $q_1$  y el vibrador adicional amortiguador de masa  $m_2$  y de fatiga  $q_2$ , y que entre los dos existe un eje elástico. En el tiempo  $t$  el conjunto está girando a una velocidad angular dada, sin que exista fuerza excitatriz alguna, en consecuencia la vibración es nula, y como nada hay que amortiguar, no existe ángulo de desfase entre la masa del



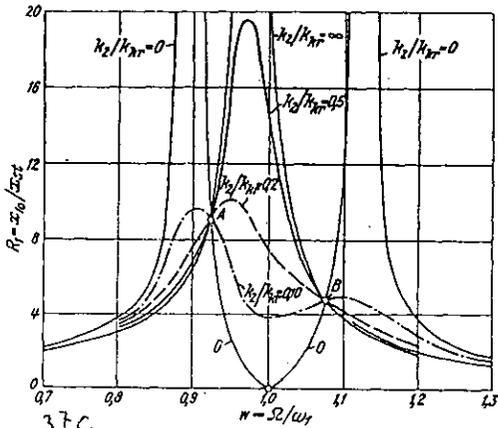
37a  
 FIG. 160. Variación de la función de resonancia de la masa principal de un sistema con amortiguador dinámico. Magnitud de amortiguación relativa  $\mu = \frac{1}{10}$



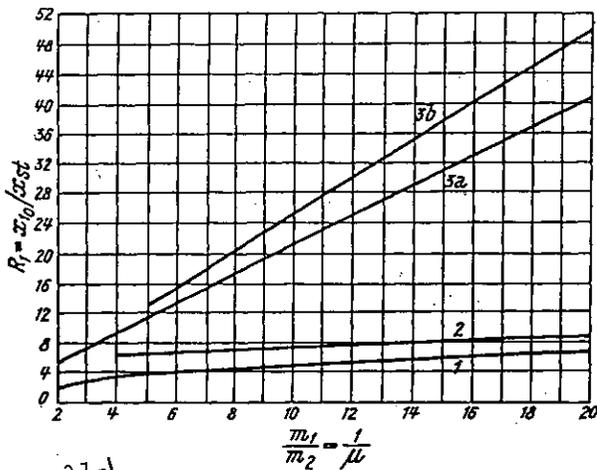
37f  
 FIG. 176. Trabajo de torsión del cigüeñal en el lado del volante, con amortiguador



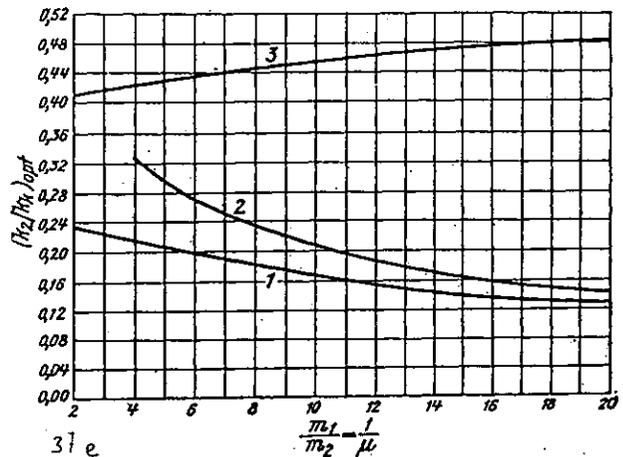
37b  
 FIG. 163. Efecto del amortiguador de resonancia



37c  
 FIG. 164. Variación de la función de resonancia del sistema principal para diferentes coeficientes de amortiguación en un amortiguador dinámico. Magnitud de amortiguación relativa  $\mu = \frac{1}{20}$ ;  $v = 1$



37d  
 FIG. 165. Variación de la función de resonancia, en función de  $\frac{m_1}{m_2} = 1$ , con la mejor atenuación y amortiguación del vibrador adicional ( $v = \frac{1}{1 + \mu}$ ); 2, con una atenuación fija y la mejor amortiguación [ $v = 1$ , ecuación (102)]; 3a, con un vibrador adicional inelástico y con el mejor rozamiento líquido viscoso [ $v = 0$ , ecuación (105)]; 3b, con un vibrador adicional inelástico y el mejor rozamiento en seco [ $v = 0$ , ecuación (106)]. Según DEN HARTOG



37e  
 FIG. 166. Coeficiente de amortiguación más favorable, según DEN HARTOG: 1, con la atenuación más favorable ( $v = \frac{1}{1 + \mu}$ ); 2, con atenuación fija ( $v = 1$ ); 3, con amortiguador inelástico ( $v = 0$ )

amortiguador y la masa principal. En el instante  $t'$  se aplica una fuerza excitatriz  $F_e$  que acelera el sistema principal y produce la vibración correspondiente, la cual produce la amplitud  $F_e \cdot \text{sen } \Omega t$  y la masa del amortiguador queda desfasada en retraso el ángulo  $\alpha_{m_2}$ . Entonces, el sistema amortiguador de la masa  $m_2$  con radio  $r_2$  y con el tramo de eje elástico de fatiga o constante elástica  $q_2$ , que se aplica al sistema principal de masa  $m_1$  y fatiga elástica  $q_1$  sobre cuyo eje se aplica la fuerza, o se considera empotrado, no permite que se produzcan vibraciones de velocidad angular  $\Omega_k$  de la fuerza excitatriz para unas dimensiones adecuadas mientras la masa acoplada  $m_2$  produzca vibraciones de torsión. De este modo, la vibración se desvía hacia otra zona de velocidad angular del eje que pueda ser menos empleada; pero no se extingue. Si la masa  $m_2$  no se mantiene muy pequeña hace variar el número de vibraciones propio del motor. Cuando el amortiguador es un sistema con amortiguación, la masa  $m_2$  está provista de una disposición amortiguadora con un coeficiente de amortiguación  $k_2$  en la que las fuerzas amortiguadoras son proporcionales a velocidades angulares. Esta incorporación al sistema altera sus propiedades haciéndolo más eficaz, pues, al presentar puntas de resonancia, limita la amplitud de las deformaciones habidas, pero se debe procurar que las deformaciones ocasionadas sean de igual magnitud, como se representa en la gráfica de [H.S.] de la Fg.37c, en las que se aprecia la diferencia de la amplitud sin amortiguador a como con amortiguador da dos ondas de menor amplitud.

No obstante, puede presentarse el caso en que el coeficiente de amortiguación  $k_1$  sea nulo, para el cual [H.S.] establece que la expresión general de la función de resonancia como deformación vibratoria sin dimensión, dando por conocida la deducción de las ecuaciones del movimiento ya expuestas en la (167), que conforma con las obtenidas por DEN HARTOG [D.H], HAHNKAMM [L.H] y GEISLINGER [L.G], obtiene para la función de

resonancia

$$R_1 = \frac{x_{10} \cdot q_1}{F_e} =$$

$$\sqrt{\frac{(2 \cdot \frac{k_2}{k_{kr}} \frac{\Omega}{\omega_1})^2 + (\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2})^2}{(2 \frac{k_2}{k_{kr}} \frac{\Omega}{\omega_1})^2 (\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - 1 + \frac{m_2}{m_1} \frac{\Omega^2}{\omega_1^2})^2 + [\frac{m_2}{m_1} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - (\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - 1) (\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2})]^2}} \quad (169)$$

En la que la amortiguación crítica vale

$$k_{kr} = 2 \cdot m_2 \cdot \omega_2 = \frac{2 \cdot q_2}{\omega_1}$$

Analizada la fórmula (169), se observa la variación por la influencia de la relación de la velocidad angular forzada  $\Omega/\omega_1$  para un determinado sistema, para valores variables, de la relación de las velocidades angulares del amortiguador y del sistema principal  $\omega_2/\omega_1$ , o frecuencia del amortiguador frecuencia del sistema principal, que pueden llegar a ser iguales, en cuyo caso la fórmula y el cálculo se simplifican considerablemente. La magnitud relativa del amortiguador  $m_2/m_1$  es variable, pero siempre con valores reducidos. La amortiguación  $k_2/k_{kr}$  varía entre 0 e  $\infty$ , que como ya se dijo, cuando  $m_2$  está unida rígidamente a  $m_1$  toma el valor  $\infty$ , Fg.37a; la velocidad angular crítica de  $m_1$  con amortiguador es siempre algo mas baja que la de  $m_1$  sola. En otro caso límite corresponde a la amortiguación nula, cuando el coeficiente de amortiguación del amortiguador  $k_2$  es nulo, que da varias posiciones de resonancia con valores infinitamente grandes de  $R_1$ , y valor nulo para cuando la velocidad de la excitación es igual a la velocidad del sistema principal, también

representado en la figura 37a.

En la gráfica de la Fg.37d, [H.S] toma valores diferentes para la amortiguación  $k_2/k_{kr}$  y todas las curvas pasan por dos puntos independientes de la amortiguación llamados puntos fijos A y B; en general, el punto A suele estar mas alto que el B. Los puntos A y B pueden desplazarse hacia arriba o hacia abajo sobre la curva

$$\frac{k_2}{k_{kr}} = \infty$$

variando la relación de velocidades  $\omega_2/\omega_1$  del amortiguador respecto del sistema principal; cuando se toma un valor conveniente de ésta, los puntos A y B están a la misma altura, por lo que, dando un valor adecuado a  $k_2/k_{kr}$  la curva tiene una tangente horizontal en A o en B.

Cuando el sistema principal tiene amortiguación propia,  $k_1 > 0$ , los resultados obtenidos dan valores diferentes, y la fórmula (169) de la función de resonancia se complica, pero GEINLINGER [L.G] establece que no es necesario que sea deducida, es suficiente con hacer resaltar las diferencias con la amortiguación libre. Por otra parte, DEN HARTOG [D.H] partiendo de estos mismos razonamientos obtiene las gráficas e y f de la figura 37. con sus respectivos valores.

Otro caso particular de amortiguador dinámico es el de fricción con rozamiento hidráulico, que le son de aplicación los mismos razonamientos dimanados de la fórmula (169), que resultan ser de la forma

$$\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{2 + \frac{m_2}{m_1}} = 0$$

Los extintores de vibraciones son vibradores sin amortiguación, en los cuales las magnitudes que en otros

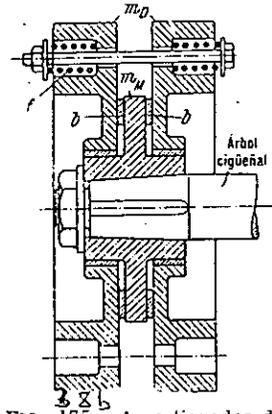


FIG. 175. Amortiguador de vibraciones de torsión de Lancheater con tensión de los resortes graduable  
*b*, material de fricción; *f*, resortes de presión; *m<sub>M</sub>*, disco fijo al cigüeñal; *m<sub>D</sub>*, discos amortiguadores con gran inercia

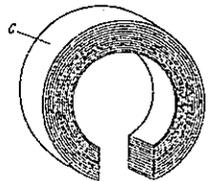
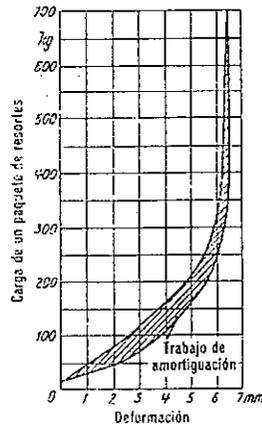
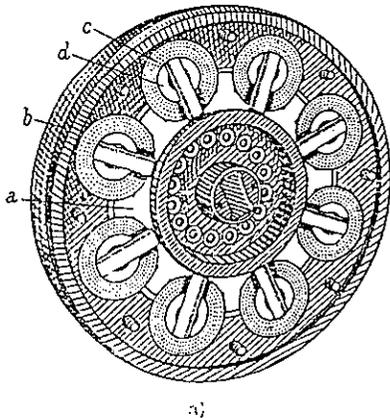


FIG. 173. Amortiguador de vibraciones de casquillos elásticos de la Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg.  
*a*) amortiguador con casquillos elásticos; *b*) casquillo elástico con hojas de diferente espesor; *c*) curvas características de un casquillo

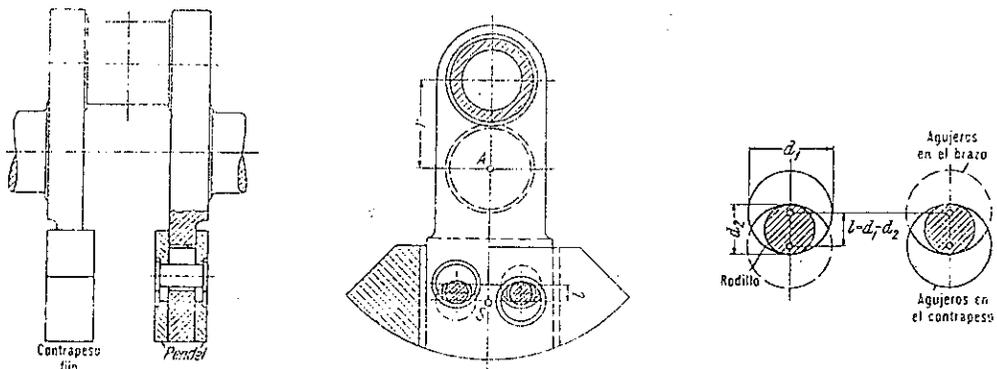


FIG. 186. Contrapeso empleado como péndulo de fuerza centrífuga suspendido de gorriones rodantes.  
 El codo del árbol puede tener una o dos partes

mecanismos representan la constante elástica, y no son afectadas por la velocidad del motor, pero dependientes de la velocidad angular del eje con el cual gira el vibrador, da un compensador de vibraciones suficientemente eficaz. Dispuesto un brazo rígido de longitud  $L$  que va fijo al eje de giro sobre el plano de la masa  $m_1$ , Fg.39a, y en su extremo lleva un bulón sobre el que puede oscilar una masa  $m_2$  con centro de gravedad a la distancia  $l$  del bulón, posee las propiedades de un péndulo con su velocidad angular propia  $\omega_2$  guarda cierta relación con la fuerza centrífuga, como se ha tratado en el estudio de labiela; siendo  $q_e$  la constante elástica del movimiento y  $\omega$  la velocidad angular del eje motor, resulta que

$$\omega_e = \sqrt{\frac{q_e}{m_2}} = \sqrt{\frac{c \cdot \omega^2}{m_2}} = \omega \sqrt{\frac{c}{m_2}} \quad (170)$$

La frecuencia del péndulo varía en función lineal con la velocidad angular.

El péndulo que trabaja sin amortiguación salva el sistema principal de vibraciones de torsión peligrosas para un determinado orden de armónicos excitadores sobre toda la gama de velocidades angulares. El acoplamiento de esta masa pendular no aumenta las posibilidades de resonancia.

La utilización de este extintor de vibraciones se funda en un trabajo de TAYLOR [E.T], basado en el péndulo matemático en el cual se tiene, Fg.39a, el brazo  $L$  que gira sobre el eje  $O$  con velocidad angular  $\omega$ ; el extremo  $B$  del brazo  $L$  es el eje de suspensión alrededor del cual oscila la masa  $m_2$  que tiene su centro de gravedad a la distancia  $l$  de  $B$ . En la rotación, si la velocidad angular del eje es constante, y no existen otras perturbaciones, el plano que pasa por  $OB$  contiene el centro de gravedad de la masa  $m_2$ . Pero si en un momento determinado se crea una perturbación, una vibración de torsión,

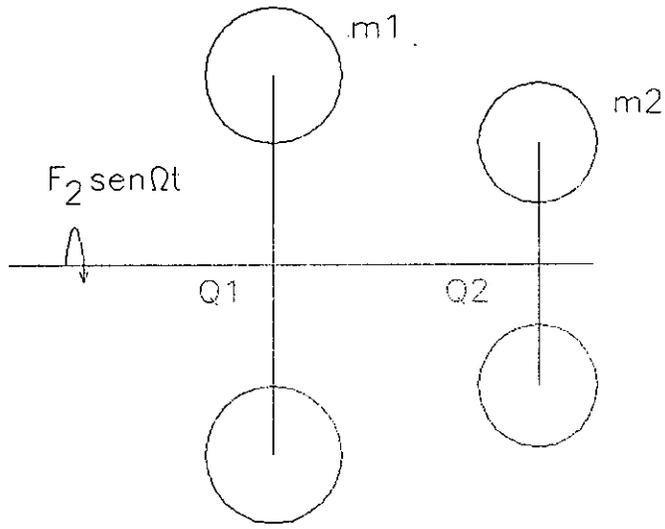


Fig. 38a

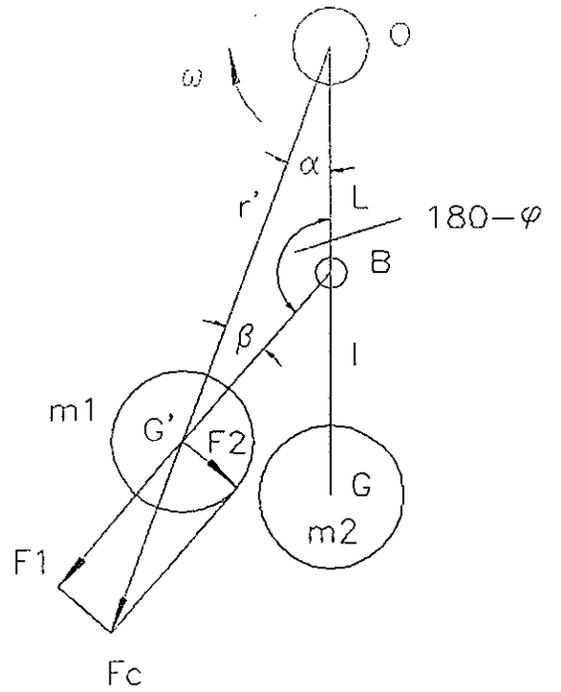


Fig. 39a

por causa de esta vibración la masa  $m_2$  se desvía de su posición anterior y su centro de gravedad pasa a  $G'$  que dista de  $O$  el radio  $r'$ ; pero también el brazo del péndulo  $l$  forma con el eje anterior el ángulo  $\varphi$ . Ahora, la fuerza centrífuga creada por la masa  $m_2$  vale

$$F_c = m_2 \cdot r' \cdot \omega^2$$

Para una velocidad angular elevada del eje, la acción del campo gravitatorio puede despreciarse en relación con la fuerza centrífuga; a la vez que son despreciables las fuerzas de Coriolis que se presentan en pequeñas deformaciones por la torsión del sistema y el movimiento y el movimiento simultáneo de oscilación de la masa  $m_2$  sobre  $B$ .

Como ya sabemos del movimiento circular uniforme del eje de cigüeñales, la fuerza centrífuga se descompone en dos, de manera que da una fuerza  $F_1$  en la dirección de  $BG'$  que vale

$$F_1 = F_c \cdot \cos \beta = m_2 \cdot r' \cdot \omega^2 \cdot \cos \beta$$

y otra  $F_2$  normal a ella que vale

$$F_2 = F_c \cdot \sen \beta = m_2 \cdot r' \cdot \omega^2 \cdot \sen \beta$$

la cual produce un momento respecto a  $B$  que vale

$$M = F_2 \cdot l = l \cdot m_2 \cdot r' \cdot \omega^2 \cdot \sen \beta$$

Del triángulo  $OBG'$  se tiene que

$$\begin{aligned} r' \cdot \sen \beta &= L \cdot \sen (180 - \varphi) \\ r' &= L \cdot \frac{\sen (180 - \varphi)}{\sen \beta} \end{aligned}$$

y que

$$M = m_2 \cdot l \cdot L \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \varphi$$

Pero ya hemos visto que  $l \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \varphi$  es una aceleración angular instantánea, y que la velocidad tangencial instantánea vale en este caso

$$l \cdot a_a = l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = l \cdot l \cdot \omega_2^2 \cdot \text{sen } \varphi$$

Por otra parte, como consecuencia de la aceleración de  $m_2$  se crea una fuerza de inercia tangencial que vale

$$F_t = m_e \cdot l \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = m_e \cdot l^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \varphi$$

actuando contra la fuerza  $F_2$ , por lo que la condición de equilibrio es

$$-m_2 \cdot l^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \text{sen } \varphi + m_2 \cdot l \cdot L \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \varphi = 0$$

y simplificando

$$l \cdot \omega_2^2 = L \cdot \omega^2$$
$$\omega_2 = \omega \sqrt{\frac{L}{l}}$$

Que es la velocidad angular de la oscilación propia del péndulo. Entonces, si el péndulo debe actuar para el armónico de orden  $k$ , a fin de mantener el sistema principal en reposo mientras toda la excitación va al péndulo, habrá de ser

$$\Omega_k = \omega_2 = k \cdot \omega$$

o bien

$$k \cdot \omega = \omega \sqrt{\frac{L}{l}}$$
$$k = \sqrt{\frac{L}{l}}$$

Y para un orden dado del armónico, se tiene:

$$\frac{L}{l} = k^2 \quad (171)$$

Entonces el sistema principal con un péndulo de este género queda libre de la acción del armónico de orden  $k$  en toda la zona del número de revoluciones; pero la incorporación del péndulo no produce nuevas formas de vibración ni de resonancia del sistema del eje de cigüeñales. Cuando en la zona donde va montado el péndulo existe un nodo de la vibración, el vibrador no es activo.

El péndulo matemático que se viene considerando, con la masa concentrada en  $G$  con longitud del péndulo  $l$ , queda sustituido por un punto material con una masa de cierta extensión. Por causa de esta extensión del péndulo debe tenerse en cuenta el momento de inercia polar de su masa  $m_2$  alrededor de su centro de gravedad, y el valor mínimo de la longitud del péndulo es:

$$l_{\min} = 2 \sqrt{\frac{I_0}{m_2}}$$

A fin de reducir la longitud del péndulo debido al espacio reducido del cárter se monta la masa con doble suspensión.

#### 4.1) Forma de construcción de amortiguadores dinámicos

Por cuanto se ha tratado sobre la amortiguación de vibraciones, se comprende que estos aparatos pueden ser contruidos de diversas formas, empleando siempre materiales elásticos y amortiguadores. Por ello se hará una descripción y funcionamiento de dos tipos.

En la figura 38a, se representa un amortiguador dinámico de casquillos elásticos de la MAN, que se fundan en los principios ya expuestos para ejes elásticos y resortes, en los que las deformaciones elásticas experimentadas son proporcionales a las cargas recibidas; en consecuencia, las propiedades de un amortiguador dinámico pueden obtenerse con resortes de forma especial. En base a las propuestas de PIELSTICK [G.P] y de GEISLINGER [L.G] está construido este amortiguador, el cual consta, Fg.38a, de un núcleo **a** formado por un disco que se monta sobre el eje motor en la zona en que la deformación de torsión es máxima; este disco de forma especial, con unos vaciados para recibir la mitad de cada casquillo elástico o resorte **c**, en número variable; recibe también unos bulones **d** que reciben los casquillos **c**. Sobre este núcleo, ajustada, pero libre en cuanto a movimiento, se monta la llanta **b**, en la que se labraron los otros medios vaciados para recibir a la otra mitad de cada casquillo. La masa de la llanta se calcula conforme a lo tratado sobre la masa  $m_2$ .

Al girar el motor arrastra al amortiguador, y los casquillos elásticos, aplicados sobre los bulones, se hallan sometidos a flexión, de manera que cuando aumenta la flexión del resorte se acorta su longitud eficaz.

Con las vibraciones de torsión del extremo del eje se producen movimientos relativos entre el eje y la masa de llanta amortiguadora, someten los resortes a flexión y el rozamiento entre las láminas de diferente espesor que forman el casquillo

elástico presentan una superficie amortiguadora consumen trabajo. A medida que aumenta la flexión el resorte experimenta un acortamiento en su longitud libre, por lo que variando la rigidez del resorte, varía la frecuencia propia del sistema, impidiendo que se produzcan deformaciones peligrosas.

Se acompaña la curva característica del resorte, que obedece a una ley exponencial, de utilidad para la elección de los resortes.

Otro tipo de amortiguador es el denominado de fricción, el representado en la Fg.38b, es el debido a LANCHESTER, el cual consta de un disco de masa  $m_M$  empernado al extremo del eje de cigüeñal donde se producen las deformaciones de torsión máximas, portador de los dos discos de fricción  $b$ , sobre este disco se montan las dos masas de amortiguación  $m_D$  en forma de anillos ajustadas sobre un casquillo pero libres en cuanto a movimiento; las dos masas de amortiguación van accionadas por unos resortes  $f$  que aprietan las dos masas contra los discos de fricción con intensidad variable. Por la acción de los resortes, entre las masas de amortiguación y los discos de fricción se crea una fuerza de rozamiento  $F_R$ . Con pequeñas deformaciones en el extremo del eje motor la masa  $m_D$  permanece unida a la  $m_M$  al modo de embrague de fricción; de este modo, el sistema principal de masas del motor se incrementa con la masa del amortiguador, y la frecuencia propia se hace mas baja. Pero si en estas condiciones, por efecto de una excitación crítica principal el motor entra en una zona de resonancia, las deformaciones aumentan y la fuerza centrífuga o de inercia también aumenta venciendo la fuerza de rozamiento, o sea,

$$m_D \cdot a_D \cdot \omega_{ed}^2 > F_R$$

Ocurriendo que la masa  $m_M$  se desliza sobre las masas  $m_D$ , que se quedan retrasadas porque la tensión del resorte no es suficiente para mantener el embrague. Hay una energía de

vibración consumida por el rozamiento que se transforma en calor; al mismo tiempo que se produce el deslizamiento, el sistema tiene otra frecuencia propia. La velocidad crítica primitiva ya no es la misma, porque las deformaciones producidas ya no son peligrosamente grandes. De lo cual se desprende que la acción amortiguadora queda fijada por las dos variables: por las masas  $m_D$  y por la fuerza de rozamiento  $F_R$ , la cual puede regularse de la forma mas conveniente.

Para el cálculo de las masas  $m_D$  se empieza por admitir un valor dado para la velocidad angular  $\omega_{eD}$  del conjunto sistema principal amortiguador, en vez de la velocidad angular  $\omega_e$  del sistema principal, de manera que  $\omega_{eD} < \omega_e$  y la diferencia entre ambas es la corrección, y se toma

$$0,75\omega_e < \omega_{eD} < 0,85\omega_e$$

La importancia de la corrección viene expresada en la gráfica **c** de la figura 38 por la distancia **x** de las amplitudes de las deformaciones a la vez que por el trabajo de torsión del eje en función del número de revoluciones **n** del sistema principal con masa amortiguadora y sin ella; también el número de revoluciones de resonancia mas bajo corresponde al sistema principal con las masas embragadas y el mas alto a con las masas libres. Por ello, si en la zona perturbada del valor crítico  $n_e/k$  debe mantenerse un trabajo admisible del motor, marcando este trabajo se tiene el punto **B**, por el cual debe pasar la nueva curva de resonancia. La amplitud de esta curva, en unión con la curva primera, señala la mínima corrección por  $x_{\min}$ .

Para mayor seguridad se debe evitar una intersección demasiado alta de las dos ramas de la curva por un aumento de la corrección.

Para un primer valor de las masas  $m_D$  se calcula el sistema ampliado por medio de  $\omega_{eD}$ , partiendo de la gran masa del volante o de la hélice, hacia el amortiguador, como ya se ha

expuesto al tratar las masas reducidas, y de la condición de que la suma de las fuerzas de inercia debe de ser cero, se deduce la ecuación

$$m_D \cdot a_D \cdot \omega_{eD}^2 = \sum_M^{m_N} m_n \cdot a_n \cdot \omega_{eD}^2$$

Como hasta las masas del amortiguador se conocen todos los valores, puede deducirse  $m_D$  referida al radio  $r$ .

Por la magnitud adecuada de la fuerza de rozamiento  $F_R$  entre la parte fija  $m_M$  y la parte giratoria  $m_D$  del amortiguador se tiene un medio de evitar que el trabajo de torsión sea demasiado elevado, por cuanto que al crecer peligrosamente la deformación del eje se hace posible que se afloje la masa  $m_D$  y a partir de aquí ya no es válida la curva de resonancia.

El deslizamiento se realiza cuando la fuerza de inercia de  $m_D$  excede a la fuerza de rozamiento, de manera que para la desviación  $a$  resulta

$$m_D \cdot \frac{d^2 a}{dt^2} \geq F_R$$

El valor máximo de esta expresión para la amplitud  $a_D$  es

$$m_D \cdot a_D \cdot \Omega_k^2 = F_R$$

siendo la velocidad angular  $\Omega_k$ , la excitatriz de orden  $k$

$$\Omega_k = k \cdot \omega = k \cdot \frac{\pi \cdot n'}{30}$$

Los extintores de vibraciones, son siempre de construcción muy simple y no existen diferencias substanciales entre ellos se montan siempre en los brazos de cigüeñal, pendulantes por dos estobos; pero mas corrientemente se montan en la forma que se indica en la Fg.38c, que es el amortiguador de CHILTON; en los brazos de cigüeñal, opuestos al muñón, se montan dos

bulones de diámetro  $d_2$  que reciben a la masa pendular vibradora, en la cual se labran unos orificios de diámetro  $d_1$  superior al de los bulones y de holgura diametral  $l = d_2 - d_1$ ; por tanto, para la realización de este péndulo hay dos condicionantes: la magnitud de la masa y la reducida longitud del péndulo; por lo que, la velocidad angular conveniente  $\omega_2$  no es la única condición para el péndulo extintor satisfactorio. Las oscilaciones creadas por la masa del péndulo están en razón inversa a su magnitud, por este motivo hay que procurar disponer de grandes masas con pequeñas oscilaciones y con una frecuencia propia elevada; de forma que la oscilación para un armónico  $F_k$  del orden  $k$  es:

$$a_2 = \frac{F_k}{m_2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{l}} \quad (172)$$

Otro extintor utilizado es el que se representa en la Fig.38d, debido a STIEGLITZ y SALOMON, en el que la masa pendular es un rodillo montado en una fogonadura labrada en el propio brazo de cigüeñal con holgura diametral adecuada.

## CAPÍTULO 5.- ANALISIS DE RESULTADOS

En la presente tesis doctoral, estudiada la complejidad que presenta el comportamiento dinámico de estas máquinas en funcionamiento; se comprende que cada tipo de motor precisa de un análisis particular de resultados conforme al número de cilindros y a la disposición geométrica de ellos; así como, al calaje del eje de cigüeñales por causa del orden de encendidos.

Como unas veces, por causa de la regularidad natural del motor, conviene un determinado orden de encendido, que puede incidir sobre el comportamiento dinámico del mismo. Este doble desiderátum obliga, unas veces, a proceder al equilibrado del efecto dinámico, y, otras, a tomar una resolución intermedia que sea admisible en todo campo de aplicación del motor.

En consecuencia, en este capítulo se estudiará, en primer lugar, el comportamiento dinámico de un motor diesel de dos tiempos, por causa de las fuerzas de inercia de las masas en movimiento; en base a la experiencia que el doctorando posee sobre él; de las características que se especifican en el texto

El otro motor diesel que se estudia es de características diferentes, pero conocido, del que se trata el efecto dinámico de las vibraciones torsionales del eje.

Motor diesel de dos tiempos, de seis cilindros, de 1,15 m de carrera y 0,6 m de diámetro del émbolo, sobrecargado, que a la velocidad angular de 14,87 rad/s (142 r.p.m.) produce la potencia de 5500 C.V.I., 4045 K.W.I., con orden de encendido 1, 5, 3, 4, 2, 6, a distancia angular de 60°. El émbolo con todos sus accesorios pesa 565 Kg., el vástago de émbolo pesa 475 kg., la cruceta completa pesa 530 kg., la biela de longitud 2,5 m. pesa con sus cojinetes 1050 kg., de los que, por la descomposición según las fórmulas (49) y (50) corresponden al movimiento alternativo 350 kg. y al movimiento circular uniforme 700 kg.. El cigüeñal de cada cilindro pesa 2585 kg.

que por su geometría, figura 12a, las masas cuyo centro de gravedad no está sobre el eje de giro O, reducidas al eje del muñón pesan los brazos 403 kg. y para el muñón 297 kg.

Con estos datos reales, tomados de las características del motor, se determinan las fuerzas de inercia correspondientes a cada movimiento.

El doctorando ya ha demostrado que no podrá alcanzarse un equilibrado total de las fuerzas de inercia primarias, en un motor monocilíndrico, si no se equilibran por separado primero las fuerzas de inercia creadas por las masas giratorias, a diferencia del proceder mas corrientemente utilizado, del equilibrado parcial también expuesto.

Las fórmula (58) da para la fuerza de inercia vertical secundaria

$$F_{ivs} = (\sum m_a) \cdot Y \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha$$

y que

$$(\sum m_a) = \frac{565 + 475 + 530 + 350}{9,80665} = 195,8 \text{ u.t.m.}$$

El vector giratorio o fuerza centrífuga para ambas fórmulas vale

$$F_c = (\sum m_a) \cdot Y \cdot R \cdot \omega = 195,8 \times \frac{1,15}{5} \times \frac{1,15}{2} \times 14,87^2 = 5725,7 \text{ kp.}$$

$$F_c = 56150,2 \text{ N.}$$

La fuerza de inercia vertical de estas masas vale

$$F_{ivs} = F_c \cdot \cos 2\alpha = 5725,7 \cdot \cos 2\alpha \text{ kp.}$$

$$F_{ivs} = 56150,2 \cdot \cos 2\alpha \text{ N.}$$

Esta fuerza de inercia está representada en la figura 13a, teniendo en cuenta que es  $\cos (0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ .

La disposición del eje de cigüeñales es la de la Fg.34a, y ya se ha demostrado que las fuerzas de inercia tratadas están equilibradas por su forma natural; que también están equilibrados los pares de inercia de las masas giratorias y los pares de inercia vertical primarios de las masas sometidas a movimiento rectilíneo alternativo; pero quedan libres los pares de inercia de segundo orden, que el doctorando determinó valen la fuerza resultante en el cilindro N° 1  $F_{ir1} = 0,6 F_a$ , y para el cilindro N° 6  $F_{ir6} = -0,6 F_a$ .

En consecuencia a ello, este motor estaba sometido a vibraciones de rotación en el plano longitudinal vertical, sobre el eje AA', entre los cilindros 3 y 4, con la intensidad

$$0,6 F_a \cdot \frac{O_1 O_6}{2} \cdot (-0,6 F_a)$$

y también

$$0,6x5725,7 \cdot \frac{O_1 O_6}{2} \cdot (-0,6x5725,7) \text{ m.kp}$$

$$0,6x56150,2 \cdot \frac{O_1 O_6}{2} \cdot (-0,6x56150,2) \text{ m.N}$$

y con frecuencia doble de la velocidad angular del eje en revoluciones por segundo.

Esta vibración, junto con otras causas, como pueden ser la montura del motor cerca del nodo de las vibraciones del buque, ha comprobado el doctorando que la fatiga producía la rotura por tracción de los pernos de sujeción de la bancada del motor a los polines del buque en los extremos del motor. Esta rotación del motor es visible y medible a la altura de las

culatas.

Por ello considera y estudia:

Que este motor debiera ser equilibrado respecto de estos pares de inercia, en la forma que se establece en la Fg.36e. Siendo necesario establecer la posición de las masas de equilibrado en los cilindros N° 1 y N° 6. Para lo cual se procede en la forma siguiente:

Realizada la descomposición de fuerzas conforme a lo establecido en la fórmula (166), resulta que sobre el cilindro N° 1 se tienen las fuerzas centrífugas o vectores que giran, para

$$\begin{aligned}\alpha = 000^\circ & \text{ -- } F_{46} & = (0,0+0,6) F_a \\ \alpha = 120^\circ & \text{ -- } F_{26}+F_{56} & = (0,2+0,8) F_a \\ \alpha = 240^\circ & \text{ -- } F_6 +F_{36} & = (1,0+0,4) F_a\end{aligned}$$

En el cilindro N° 6, para

$$\begin{aligned}\alpha = 000^\circ & \text{ -- } F_{46} & = (0,0+0,6) F_a \\ \alpha = 120^\circ & \text{ -- } F_{26}+F_{56} & = (0,2+0,8) F_a \\ \alpha = 240^\circ & \text{ -- } F_6 +F_{36} & = (1,0+0,4) F_a\end{aligned}$$

Por lo que se presentan las estrellas de vectores que giran según la Fg. 36d, para el cilindro N° 1 y 36e, para el cilindro N° 6.

Para determinar la fuerza libre resultante, empecemos por componer las fuerzas de 120° con las de 240°; se demuestra en mecánica que la resultante de esta composición viene dada por la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de ambas fuerzas, mas el doble del producto de las mismas, por el coseno del ángulo

que forman, siendo

$$F'_r = \sqrt{F_a^2 + (0,6F_a)^2 + 2 \cdot F_a \cdot 0,6 \cdot F_a \cdot \cos \alpha}$$

$$F'_R = \sqrt{(1 + 0,6^2 + 2 \times 1 \times 0,6 \times \cos 120) F_a}$$

$$F'_r = \sqrt{1,36 + 1,2 (-0,5) \cdot F_a}$$

$$F'_r = -0,8717798 F_a$$

El ángulo que esta resultante forma con las fuerzas de  $120^\circ$  lo determinamos por las fórmulas de la resolución de los triángulos rectilíneos oblicuángulos, por ser conocidos los lados del triángulo, que son los tres vectores  $F_a$ ,  $0,6F_a$  y el  $0,8717798F_a$ ; siendo el coseno del ángulo referido la suma de los cuadrados de los lados que forman el ángulo, menos el cuadrado del lado opuesto al ángulo y todo ello dividido por el doble del producto de los lados que forman el ángulo, o sea

$$\cos \alpha_i = \frac{(1 \cdot F_a)^2 + (0,8717798 \cdot F_a)^2 - (0,6 \cdot F_a)^2}{2 \cdot F_a \times 0,8717798 \cdot F_a}$$

Que simplificando y dando valores, resulta

$$\cos \alpha_i = \frac{1 + 0,8717798^2 - 0,6^2}{2 \times 1 \times 0,8717798} = 0,802955$$

y como el ángulo es el arco cuyo coseno vale lo calculado, el ángulo resulta valer

$$\alpha_i = 36,586755^\circ = 36^\circ 35' 12''$$

El ángulo que forma esta resultante con el vector giratorio de los cilindros 1 y 4 vale

$$\alpha_a = 120 + 36,586755 = 156,586755^\circ = 156^\circ 35' 12''$$

La fuerza de inercia libre viene dada por el vector que gira, resultante de la composición de los vectores de los cilindros 1 y 4 con la resultante hallada anteriormente, que aplicando el mismo razonamiento anterior, viene a valer :

$$F_r = \sqrt{0,8717798^2 + 1,4^2 + 2 \times 0,8717798 \times 1,4 \cdot \cos 156,586755} F_a$$

$$F_r = \sqrt{0,48000125} F_a$$

$$F_r = 0,692820 F_a$$

Procediendo de igual forma en el cilindro N° 6, se obtiene una resultante que vale

$$F_r = - 0,692820 F_a$$

Y se obtendrá el par

$$F_r \cdot O_1 O_6 - (-F_r)$$

Si se hace  $O_1 O_6 = 5 \text{ l}$ , resulta que este par vale

$$0,692820 F_r \cdot 5 \cdot l = 3,464 \text{ l} \cdot F_r$$

$$M = 3,464 \cdot l \cdot (\sum m_a) \cdot Y \cdot R \cdot \omega^2$$

Es preciso determinar el ángulo que forma la resultante  $F_r$  con el eje del cilindro a fin de determinar el par torsor de inercia y la posición de las masas de equilibrado de este par de torsión; procediendo en igual forma que para el caso anterior resulta que

$$\cos \alpha_r = \frac{(1,4 F_a)^2 + (0,692820 F_a)^2 - (0,8717798 F_a)^2}{2 \times 1,4 F_a \times 0,692820 F_a}$$

sacando factor común, simplificando y dando valores, resulta

que este ángulo vale

$$\cos \alpha_r = \frac{1,4^2 + 0,692820^2 - 0,8717798^2}{2 \times 1,4 \times 0,692820} = 0,866025$$

como el ángulo es el de un arco cuyo coseno vale lo hallado, resulta que el ángulo vale  $30^\circ$  y la fuerza de inercia libre en cada uno de los cilindros extremos es: para el cilindro N° 1

$$F_i = 0,692820 F_a \cdot \cos 30^\circ = 0,6 F_a$$

y para el cilindro N° 6

$$F_i = 0,692820 F_a \cdot \cos 150^\circ = -0,6 F_a$$

El motor se halla sometido a una vibración de rotación que tiene la intensidad de

$$0,6 \times 5725,7 \cdot \frac{5 \text{ l}}{2} \cdot (-0,6 \times 5725,7) \text{ m.kp.}$$
$$0,6 \times 56150,2 \cdot \frac{5 \text{ l}}{2} \cdot (-0,6 \times 56150,2) \text{ m.N}$$

La distancia entre ejes de cilindros 51 es de 5,95 metros por lo que estaba sometido intensidad de vibración de

$$0,6 \times 5725,7 \times 5,95 = 20440,75 \text{ m.kp}$$
$$0,6 \times 56150,2 \times 5,95 = 200455,27 \text{ m.N}$$

Una vez determinada la intensidad de la resultante y el ángulo formado con el eje geométrico del cilindro, queda por determinar el valor de las masas de equilibrado  $m'$  y la posición angular de las mismas; puesto que en todo momento del movimiento, han de crear una fuerza de inercia igual y contraria a la del vector estudiado, con la misma frecuencia.

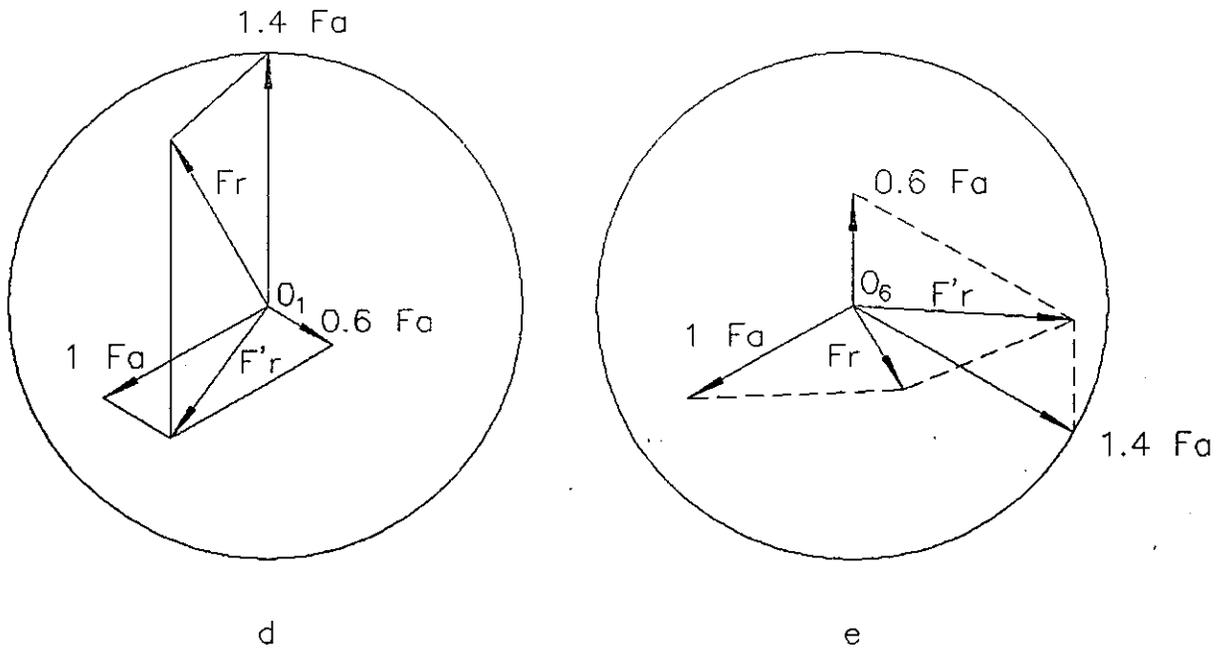
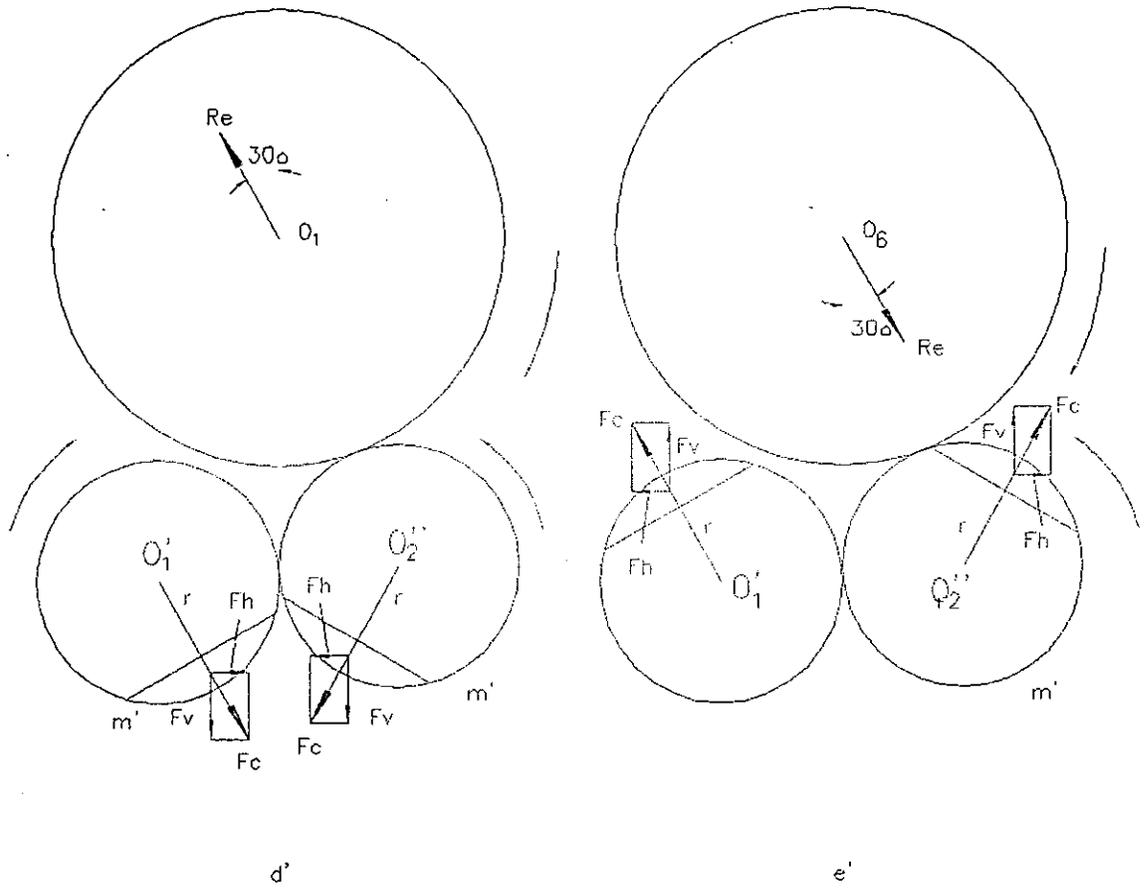


Fig. 40

El vector giratorio resultante vale

$$0,692820 F_a = 0,692820 \frac{(\sum m_a) \cdot Y}{4} \cdot R \cdot \omega^2$$

Y el equilibrado de esta fuerza se realiza cuando se cumple la condición

$$0,692820 \cdot \frac{(\sum m_a) \cdot Y}{4} \cdot R \cdot 4 \omega^2 = 2 \cdot m' \cdot r \cdot 4 \omega^2$$

que simplificando, resulta

$$0,0866 \cdot (\sum m_a) \cdot Y \cdot R = -m' \cdot r \quad (173)$$

siendo  $m'$  cada una de las dos masas de equilibrado sobre cada cilindro extremo, y  $r$  la distancia del eje de giro al centro de gravedad de la referida masa.

Se observa, entonces, que la condición de equilibrio es para el producto  $m' \cdot r$ ; pero  $m'$  es el producto del volumen por la masa específica, y si esta masa es la giratoria de equilibrado es necesario fijar su geometría a fin de simplificar el cálculo. Se propone la solución de fijar el diámetro  $d$  de la rueda y tomar como masa de equilibrado la que corresponde a la mitad del círculo, porque así ya queda determinado  $r$ , por la fórmula propuesta al tratar el centro de gravedad de una masa de esta geometría, que vale para la superficie

$$r = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{d}{2}$$

y como el volumen de la masa vale

$$v = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot e$$

de esta forma, siendo  $d$  prefijado y  $r$  determinado, la única incógnita es  $e$  como espesor de las ruedas.

Como las ruedas de equilibrado giran a la misma velocidad angular que el vector de fuerza libra; el vector que representa la fuerza centrífuga de las masas de equilibrado, en todo momento de la rotación, forma con el eje a partir del cual se miden los ángulos un ángulo de igual valor que el vector que gira, resultante de las fuerzas de inercia.

En la Fg.36d' y 36e', se representa la disposición de las masas de equilibrado.

b) Con esta propuesta de equilibrado, desde el eje de cada par de ruedas engranadas, se puede tomar un compresor rotativo del tipo Root, por ejemplo, para sobrecargar el motor. De manera que las ruedas dentadas para el accionamiento de los émbolos rotativos del compresor equilibran los pares de inercia vertical secundarios sin aumento alguno del peso del motor.

Que cumple el resumen propuesto en el proyecto de tesis doctoral.

Pero el trabajo quedaría inconcluso conforme a lo que se ha estudiado respecto de las vibraciones torsionales. No obstante no puedo concluirlo en el motor tratado para las fuerzas de inercia por carecer de datos suficientes para determinar la fuerza instantánea de los gases y las fuerzas excitatrices que de ella dimanen.

Por ello, voy a referirme a un motor de seis cilindros a cuatro tiempos, instalado en la Escola Superior da Mariña Civil donde soy profesor numerario e imparto docencia en la materia Motores de combustión interna y turbinas de gas.

De este motor dispongo de los datos: Potencia indicada 160 KW., presión de sobrecarga 1,3 bar, presión máxima de combustión 105 bar; diámetro del cilindro 120 mm., carrera del émbolo 154 mm.; grado de compresión 16; velocidad angular 1500 revoluciones por minuto ó 157,08 radianes por segundo. Pero, a fin de obtener los restantes datos necesarios para concluir

la tesis, desmonté el motor para medir y pesar las distintas piezas móviles y fijas; obteniendo que el émbolo con bulón y segmentos pesa 3,5 kg.; la biela con los cojinetes pesa 4,05 kg., tiene la longitud de 294 mm. y determinado su centro de gravedad queda a 196 mm. del eje del pie, hallando que la parte de masa en movimiento rectilíneo alternativo pesa 1,3 kg. y que la parte sometida a movimiento circular uniforme pesa 2,75 kg.. Por su geometría se determinó que cada brazo de cigüeñal pesa 5,2 kg., siendo su espesor axial 23 mm., determinando que su centro de gravedad queda sobre el eje de rotación; el muñón tiene la longitud de 49 mm. y de diámetro 82 mm.; calculado su peso es de 2,034 kg.; los gorriones tienen la longitud de 65 y 45 mm. con diámetro de 94 mm. y su peso calculado es 3,546 kg. y 2,455 kg..

Con estas características el doctorando empieza por estudiar y trazar el ciclo dinámico para determinar las fuerzas excitatrices de torsión; para ello, retira la válvula de inyección del cilindro N° 4, y con el indicador de presiones mide la presión de compresión máxima, la cual es de 50,5 bar. De esta forma se dispone de datos suficientes para calcular el ciclo dinámico, empezando por el periodo de compresión teniendo en cuenta que es una evolución politrópica y que se rige por la ley de Poisson-Laplace que establece que el producto de la presión por el volumen elevado a un exponente  $n$  es constante teniendo en cuenta que

$$p \cdot v^n = K ; \quad p_i \cdot v_i^n = p_f \cdot v_f^n$$

Como se conocen las dimensiones del cilindro, se halla que su volumen de cilindrada vale

$$v = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot C}{4} = \frac{3,1416 \times 0,12^2 \times 0,154}{4} = 1,741698 \times 10^{-3} m^3$$

El volumen de combustión se determina del grado de compresión y del volumen de la cilindrada

$$G = \frac{v + v_c}{v}; \quad v = \frac{v_c}{G-1} = \frac{1,741698}{16 - 1} = 0,116113 \times 10^{-3} \text{m}^3$$

El exponente politrópico de la compresión se obtien por

$$n = \frac{\log \frac{p_f}{p_i}}{\log \frac{v_i}{v_f}} = \frac{\log \frac{50,5}{1,3}}{\log 16} = 1,3199 = 1,32$$

Partiendo de la condición lógica en que la franca combustión se inicia 15° antes del punto muerto alto y finalice otros 15° después del mismo, que por la ecuación (31) se calcula el espacio recorrido por el émbolo en función del ángulo girado, para estos 15°, vale

$$C' = R[(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2} \cdot Y \cdot \text{sen}^2 \alpha]$$

$$C' = 0,77[(1 - \cos 15^\circ) + \frac{1}{2} \cdot 0,2619 \cdot \text{sen}^2 15^\circ] = 0,3299 \times 10^{-3} \text{m}.$$

En este instante el volumen del fluido vale

$$v' = 0,1161132 \times 10^{-3} + \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 0,3299 = 0,153426 \times 10^{-3} \text{m}^3$$

Por tratarse de una compresión politrópica, se halla que la presión en el momento en que se inicia la combustión vale

$$p' = p_i \left( \frac{v_i}{v'} \right)^n = 1,3 \cdot \left( \frac{1,857812}{0,153426} \right)^{1,32} = 34,96533$$

Si se considera que el incremento de presión desde este punto hasta la presión máxima se realiza por mitades, antes y después del punto muerto alto, resulta que la presión de

combustión en el dicho punto muerto alto tiene que ser en bar

$$p_a = p' + \frac{\Delta p}{2} = 34,96533 + \frac{105 - 34,96533}{2} = 69,98266$$

El exponente politrópico para esta parte de la combustión, vale

$$n = \frac{\log \frac{p_a}{p'}}{\log \frac{v'}{v_a}} = \frac{\log \frac{69,98266}{34,96533}}{\log \frac{0,153426}{0,116113}} = 2,490146$$

Y para la segunda parte de la combustión, también se halla que el exponente politrópico vale

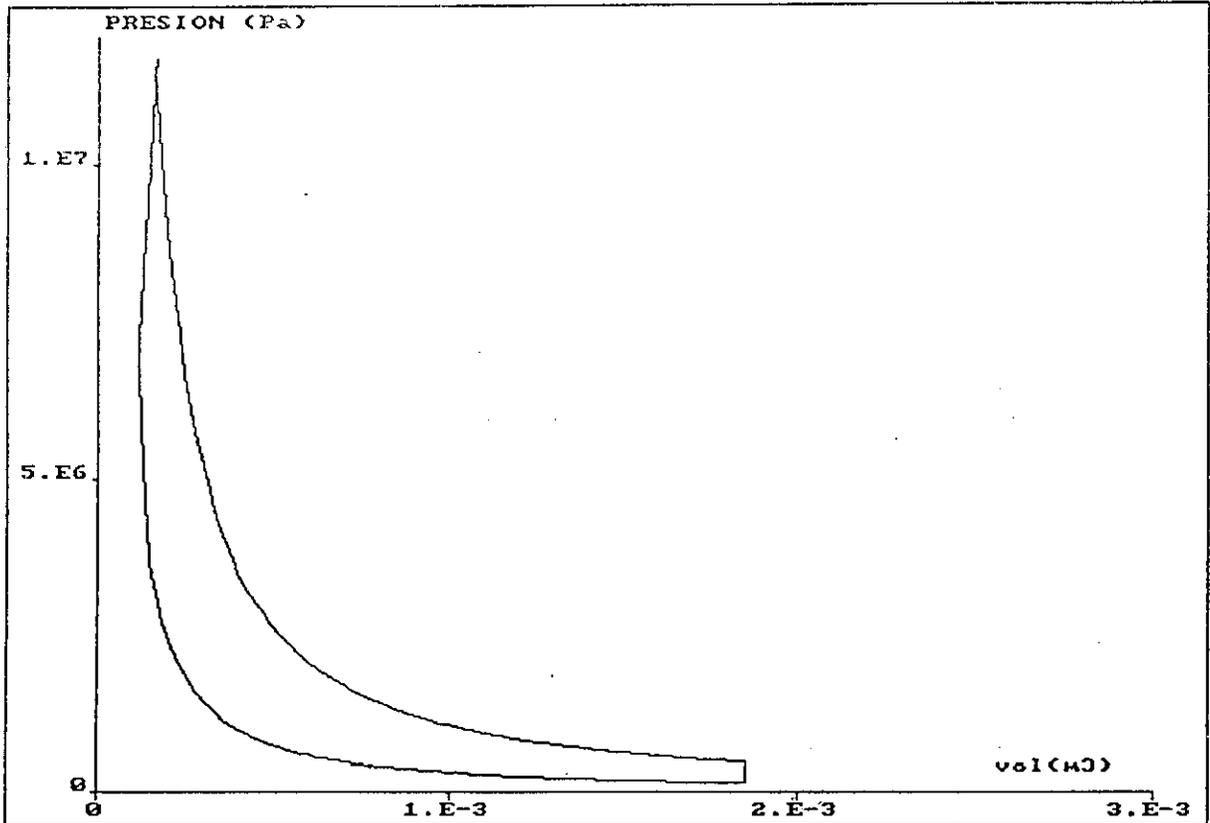
$$n = \frac{\log \frac{p_m}{p_a}}{\log \frac{v'}{v_a}} = \frac{\log \frac{105}{69,98266}}{\log \frac{0,116113}{0,153426}} = -1,4559699$$

Para el periodo de expansión se estima que el exponente politrópico vala 1,3, resultando que la presión final de esta expansión vale, en bar.

$$p_f = p_m \left( \frac{v'}{v_i} \right)^n = 105 \left( \frac{0,152426}{1,857812} \right)^{1,3} = 4,068776$$

Con los valores hallados por estas ecuaciones se trazó el ciclo dinámico de la Fg. (39); y para su comprobación, se determina a partir de él y de los valores obtenidos por cálculo la potencia que desarrolla el motor.

Teniendo en cuenta que el trabajo de la compresión viene dado por la fórmula de la politrópica, y que se puede considerar por partes, una anterior a la combustión y cuyo trabajo viene



CICLO DINAMICO CORRESPONDIENTE AL MOTOR DE CUATRO TIEMPOS  
OBJETO DE ESTUDIO

Fg. 41

dato por

$$\tau = \frac{P_i \cdot V_i}{n-1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{V_i}{V'} \right)^{n-1} \right]$$

$$\tau = \frac{1,3 \times 10^5 \times 1,857832 \times 10^{-3}}{1,32-1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{1,857832}{0,153432} \right)^{0,32} \right] = -921,7 \text{ J}$$

Y para la primera parte de la combustión es

$$\tau = \frac{P' \cdot V'}{n-1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{V'}{V_a} \right)^{n-1} \right]$$

$$\tau = \frac{34,965332 \times 10^5 \times 0,153426 \times 10^{-3}}{2,490146-1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{0,153426}{0,116113} \right)^{1,49} \right] = -185 \text{ J}$$

Para la segunda parte de la combustión, donde se inicia la expansión, vale

$$\tau_e = \frac{P_a \cdot V_a}{1-(-n)} \cdot \left[ \left( \frac{V'}{V_a} \right)^{1-n} - 1 \right]$$

$$\tau_e = \frac{69,98266 \times 10^5 \times 0,116113 \times 10^{-3}}{1-(-1,45596)} \cdot \left[ \left( \frac{0,153426}{0,116113} \right)^{2,45596} - 1 \right] = 325 \text{ J}$$

Y para la expansión, tomando 1,3 el exponente politrópico, vale

$$\tau_e = \frac{P_m \cdot V'}{n-1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{V'}{V_i} \right)^{n-1} \right]$$

$$\tau_e = \frac{105 \times 10^5 \times 0,153432 \times 10^{-3}}{1,3-1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{0,153432}{1,857832} \right)^{1,3-1} \right] = 2828,8 \text{ J}$$

El trabajo útil por ciclo y cilindro, vale

$$T_u = (-921,7 - 185 + 325 + 2828,8) = 2047,1 \text{ J}$$

Teniendo en cuenta que la potencia es el trabajo en la unidad de tiempo, resulta que la potencia indicada, siendo  $n_c$  el número de ciclos por minuto, y  $N_c$  el número de cilindros,

vale

$$P_i = \frac{T_u \cdot n_c \cdot N_c}{60 \times 1000} \text{ KW.}$$

Y dando valores

$$P_i = \frac{2047,1 \times 1500 \times 6}{60 \times 2 \times 1000} = 153,53 \text{ KWI}$$

Que es un valor próximo al dado en las características del motor.

Por otra parte, también se puede determinar la presión ficticia o media indicada, deducida del trabajo útil y del volumen de cilindrada, y vale

$$P_{mi} = \frac{T_u}{2 v_c} = \frac{2047,1}{2 \times 1,741698 \times 10^{-3}} = 587673 \text{ N/m}^2 = 5,88 \text{ bars}$$

De esta forma se dispone de los datos necesarios y suficientes para trazar la curva de esfuerzos tangenciales, o fuerzas tangenciales excitatrices de los gases y sus armónicos. Pero de la (figura 2) ya se había determinado, ecuación (52), que la fuerza tangencial, variable en cada instante, vale

$$F_t = F_g \cdot \left( \text{sen } \alpha + \frac{Y \cdot \text{sen } 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2} \cdot \text{sen}^2 \alpha} \right)$$

La fuerza instantánea  $F_g$  de los gases se determina a partir del diagrama, pero en este caso se determina mejor a partir de las ecuaciones que se han propuesto para la compresión, combustión y expansión; pero es siempre el producto de la presión instantánea por la sección del émbolo. Por otra parte, ya se ha medido y calculado la politrópica de compresión

y su constante vale

$$p \cdot v^n = C = 1,3 \times 10^5 \times (1,857812 \times 10^{-3})^{1,32} = 32,28685 \text{ N.m}^3$$

de la que se obtiene que la presión instantánea vale

$$p = \frac{C}{v^n}$$

Pero  $v$  vale en cada instante, el volumen de combustión hallado  $v = 0,116113 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , mas el volumen engendrado por el émbolo en el instante, o sea, la sección del émbolo por su parte de carrera recorrida, que como se halló en la ecuación (28) es

$$C' = R \left[ (1 - \cos \alpha) \pm \frac{1}{2} Y \cdot \text{sen}^2 \alpha \right]$$

La fuerza instantánea vale entonces para la compresión

$$F_g = \frac{32,28685 \times 11,3098 \times 10^{-3}}{(S_e \cdot R \left[ (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} Y \cdot \text{sen}^2 \alpha \right] + v)^n}$$

Por lo que, la fuerza tangencial instantánea para la compresión, vale

$$F_t = \frac{0,365158}{(S_e \cdot R \left[ (1 - \cos \alpha) - \frac{Y}{2} \cdot \text{sen}^2 \alpha \right] + v_a)^{2,49}} \left( \text{sen} \alpha + \frac{Y \cdot \text{sen} 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - Y^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}} \right)$$

En la cual debe tomarse ( $180^\circ < \alpha < 345^\circ$ )

Para la primera parte de la combustión, el cálculo no varía en cuanto a forma; varían solamente el ángulo que en este caso se toma ( $345^\circ < \alpha < 360^\circ$ ), y la constante politrópica que vale

$$p' \cdot v^n = C' = 34,96533 \times 10^5 \times (0,153426 \times 10^{-3})^{2,49} = 1,11308 \times 10^{-3} \text{ N.m}^3$$

Y la fuerza tangencial viene dada por

$$F_t = \frac{1,11308 \times 10^{-3} \times 11,3098 \times 10^{-3}}{(S_e \cdot R[(1 - \cos \alpha) - \frac{Y}{2} \sin^2 \alpha] + v_a)^{2,49}} \left( \sin \alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2\sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right)$$

Para la segunda parte de la combustión, que continúa hasta 15° después del punto muerto alto, se tiene (0° < α < 15°) y la constante politrópica es

$$p_a \cdot v_a^n = C'' = 69,982666 \times 10^5 \times (0,116113 \times 10^{-3})^{-1,456} = 3,75 \times 10^{12} \text{ N.m}^3$$

Y la fuerza tangencial vale

$$F_t = \frac{3,75 \times 10^{12} \times 11,3098 \times 10^{-3}}{(S_e \cdot R[(1 - \cos \alpha) + \frac{Y}{2} \sin^2 \alpha] + v_a)^{-1,456}} \left( \sin \alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2\sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right)$$

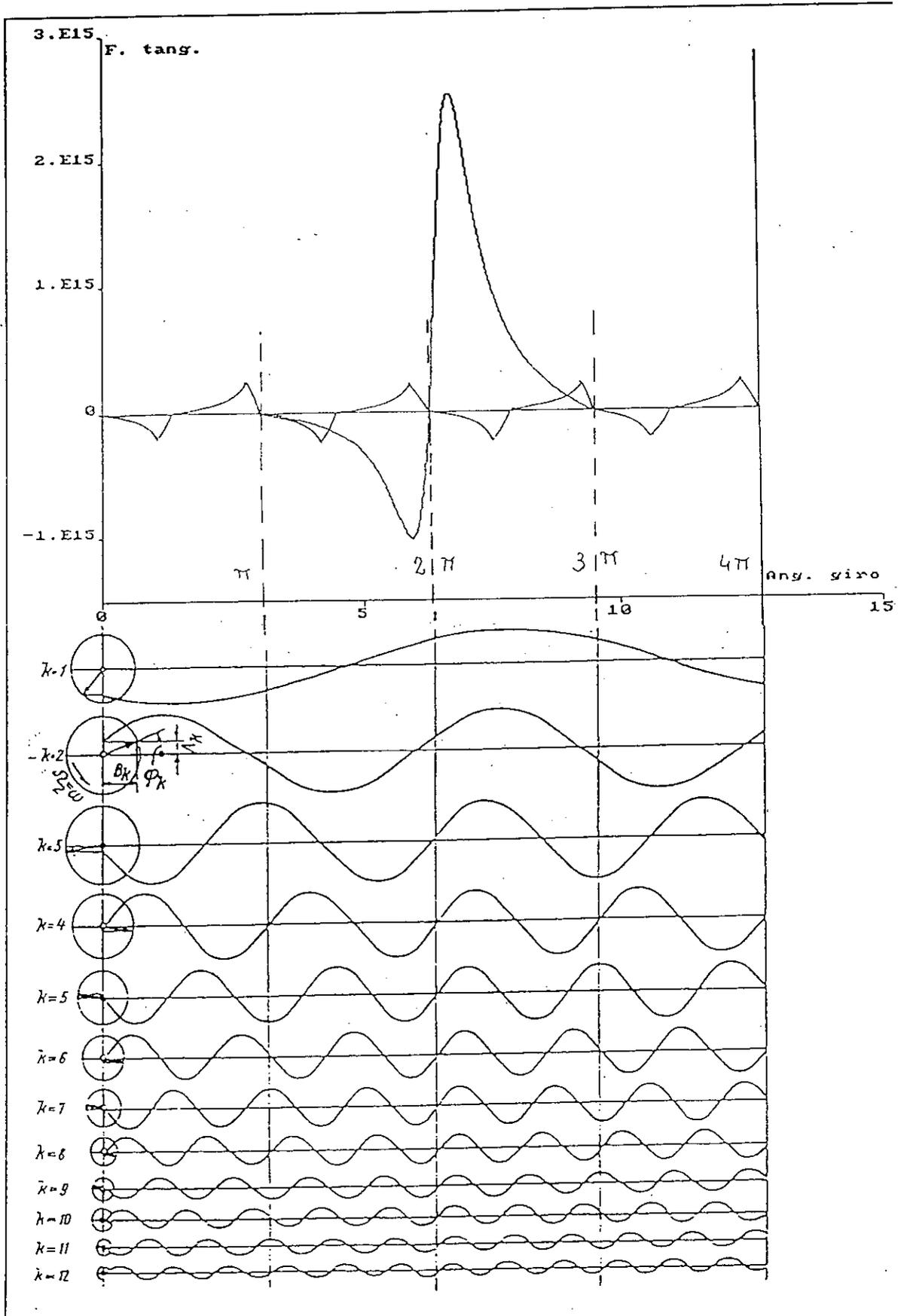
Para la expansión, que se extiende hasta al punto muerto bajo, se tiene (15° < α < 180°), y la constante politrópica vale

$$p_m \cdot v^n = C^* = 105 \times 10^5 \cdot (0,153426 \times 10^{-3})^{1,3} = 115,5734 \text{ N.m}^3$$

Y la fuerza tangencial importa

$$F_t^* = \frac{115,5734 \times 11,3098 \times 10^{-3}}{(S_e \cdot R[(1 - \cos \alpha) + \frac{Y}{2} \sin^2 \alpha] + v)^{1,3}} \left( \sin \alpha + \frac{Y \cdot \sin 2\alpha}{2\sqrt{1 - Y^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right)$$

Con este procedimiento de cálculo y las correspondientes ecuaciones de las fuerzas tangenciales se trazó la curva de la Fig.42, en la cual se incluyen los cálculos establecidos para la representación de los armónicos (página 124 y siguientes) y su representación en la Fig. 27.



Fg. 42

## Forma de vibraciones propia y número de vibraciones del eje

Para proceder a la obtención de un valor aproximado de la velocidad angular propia  $\omega_e$ , es necesario conocer el sistema vibratorio, como se ha establecido en el apartado (2.2.3) y, entonces, proceder a la determinación del sistema equivalente, y a las masas de sustitución.

Como todos los cilindros son idénticos, las masas móviles y fijas son iguales; por lo que, calculando las masas, la masa de sustitución y la longitud equivalente para un cilindro, satisface el cálculo para todos los cilindros. Para ello, empiezo por calcular las masas de cada cigüeñal, midiendo sus dimensiones y determinando su peso; cada brazo de cigüeñal mide la superficie de  $325 \text{ cm}^2$ , y espesor de 2,3 cm.; reducida su geometría a un rectángulo tiene la dimensión en la dirección del radio  $b = 26 \text{ cm.}$  y en el plano transversal  $a = 12,5 \text{ cm.}$ , y pesa 5,2 kg.; el centro de gravedad coincide con el eje de giro, por lo que aplicada la ecuación (117) es  $h = 0$ . El momento de inercia polar de estas masas vale

$$I_{0b} = 2 \cdot m_b \frac{a^2 + b^2}{12}$$

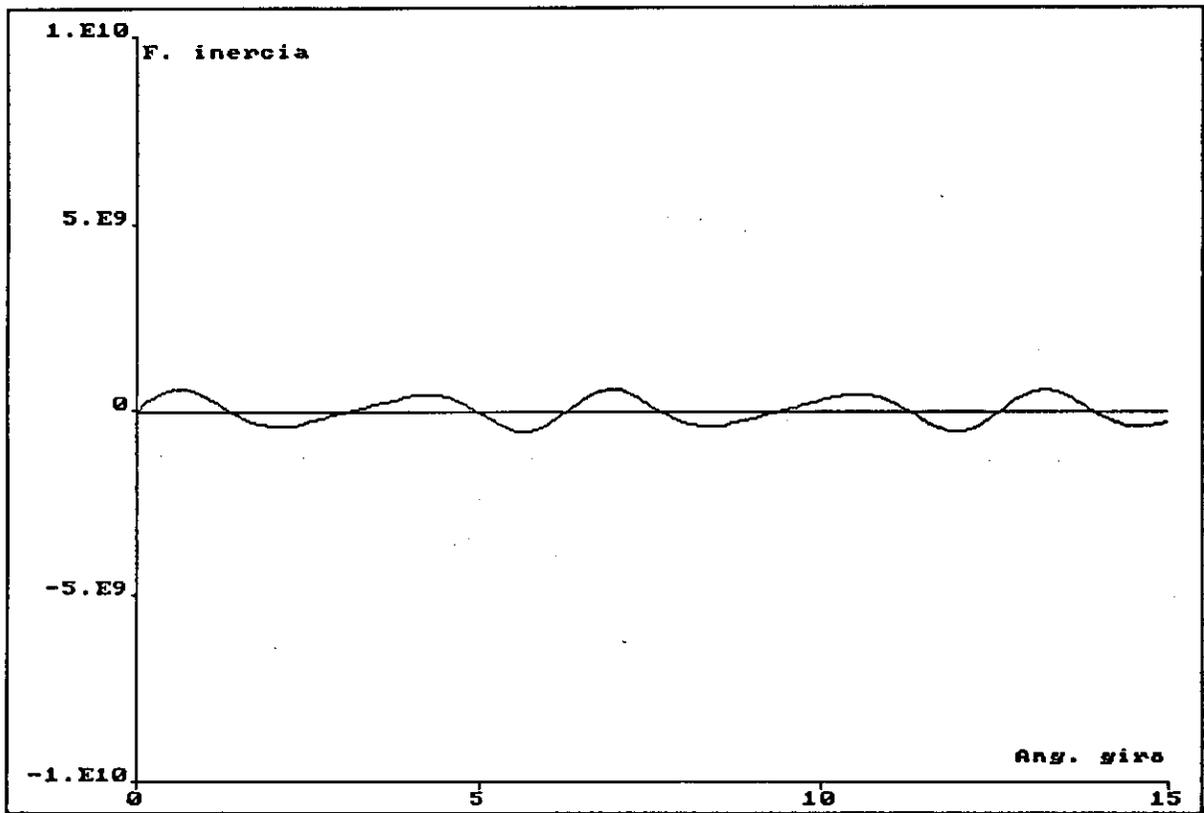
Siendo la masa la relación entre el peso y la aceleración de la gravedad.

Por la ecuación (117) se obtiene la masa equivalente que vale

$$M_1 \cdot R^2 = 2 m_b \left( h^2 + \frac{a^2 + b^2}{12} \right)$$
$$m_1 = \frac{2 m_b}{R^2} \left( h^2 + \frac{a^2 + b^2}{12} \right)$$

Dando los valores ya determinados, resulta que

$$m_1 = \frac{2 \times 5,2}{9,81 \times 0,077^2} \left( 0 + \frac{12,5^2 + 26^2}{12} \right) = 1,24 \text{ k/m.s}^2 \text{ (u.t.m.)}$$



Fuerza tangencial de inercia primarias y secundarias de las masas alternativas productoras de vibraciones de torsión en un motor semmilento.

Fig. 43

La masa del muñón y la segunda masa de descomposición de la biela tienen su centro de gravedad en el extremo del radio de cigüeñal; se ha determinado que esta parte de masa de la biela pesa 2,75 kg. y que el muñón pesa 2,034 kg.. La fórmula (117') determina la masa equivalente de estas dos, y vale

$$m_2 \cdot R^2 = (\sum m) \cdot (R^2 + \frac{1}{2} r^2)$$

$$m_2 = \frac{1}{R^2} \cdot (\sum m) \cdot (R^2 + \frac{1}{2} r^2)$$

dando los valores ya propuestos y determinados, resulta

$$m_2 = \frac{1}{0,077^2} \cdot \frac{2,75+2,034}{9,81} (0,077^2 + \frac{1}{2} 0,041^2) = 0,5568 \text{ k/m.s}^2$$

La masa equivalente que sustituye a los gorriones del cigüeñal se determina por la ecuación (118), teniendo por medido que tres de los gorriones pesan 3,546 kg. y los otros cuatro pesan 2,455 kg., resultando que

$$m_3 \cdot R^2 = \frac{1}{2} m_g \cdot r_g^2$$

$$m_3 = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{2} m_g \cdot r_g^2$$

$$m_3 = \frac{1}{0,077^2} \times \frac{3,546}{9,81} \cdot \frac{1}{2} \times 0,047^2 = 0,0673 \text{ k/m.s}^2$$

Y también

$$m_3' = \frac{1}{0,077^2} \times \frac{2,455}{9,81} \times \frac{1}{2} \times 0,047^2 = 0,0466 \text{ k/m.s}^2$$

Por la distribución de los gorriones en el eje de cigüeñales, a los cigüeñales de los cilindros números 2 y 5 les corresponde la masa de 0,0466 kg. ; mientras que a los cigüeñales de los cilindros números 1, 3, 4 y 6 le corresponde una masa de 0,0673 kg. y otra masa de 0,0466 kg., resultando una masa media de 0,05695 kg.; de esta forma, la masa de

sustitución para los cilindros números 1, 3, 4, 6, vale

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1,24 + 0,5568 + 0,05695 = 1,8435 \text{ kg/m.s}^2$$

$$(\sum m) = 1,8435 \times 4 = 7,4152 \text{ kg/m.s}^2$$

Y para los cilindros números 2 y 5, vale

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1,24 + 0,5568 + 0,0466 = 1,8435$$

$$(\sum m) = 1,8435 \times 2 = 3,6870 \text{ kg/m.s}^2$$

En cuanto a la sustitución del cigüeñal por una parte del eje uniforme que sea equivalente conforme a las deformaciones elásticas por torsión. Esta longitud reducida o equivalente, puede determinarse por las fórmulas (125) de GEIGER, o por la (126) de CARTER; tomando las de Carter, que dan

$$l_r = l_g \cdot \frac{I_r}{I_g} + 2 \left( 0,4b \cdot \frac{I_r}{I_g} + 0,637R \cdot \frac{I_r}{I_a} \right) + \frac{3}{4} \cdot l_m \cdot \frac{I_r}{I_m}$$

Dando los valores medidos, y los valores hallados para el momento de inercia de las superficies de las diferentes piezas; considerando que el eje equivalente tiene el igual diámetro que el gorrón, resultando que los momentos de inercia polares son para el gorrón:

$$I_0 = \frac{\pi}{32} \cdot d_g^4 = \frac{3,1416}{32} \cdot 0,094^4 = 7,665 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_0 = 766,5 \text{ cm}^4$$

Para los brazos del cigüeñal

$$I_a = \frac{a \cdot b}{12} \cdot (a^2 + b^2) = \frac{0,125 \times 0,023}{12} \cdot (0,125^2 + 0,023^2) = 3,8702 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_a = 387,02 \text{ cm}^4$$

Para el muñón del cigüeñal

$$I_0 = \frac{\pi}{32} \cdot d_m^4 = \frac{3,1416}{32} \cdot 0,082^4 = 4,4387 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_0 = 443,87 \text{ cm}^4$$

Llevando estos valores a la fórmula de Carter, en el sistema c.g.s. que utiliza, se determina que referida a los gorriones de 6,5 cm de longitud vale

$$l_r = 6,5 \times \frac{766,5}{766,5} + 2 \cdot \left( 0,4 \times 3,2 \times \frac{766,5}{766,5} + 0,637 \times 7,7 \times \frac{766,5}{387,02} \right) +$$

$$+ \frac{3}{4} \times 4,9 \times \frac{766,5}{443,87} = 33,56 \text{ cm ;}$$

$$l_r = 0,3356 \text{ m.}$$

y referida a los gorriones de 4,5 cm. de longitud, la longitud reducida vale 31,56 cm. ó 0,3156 m.

Quedan por resolver la masa equivalente del volante y la masa equivalente del generador trifásico al que suministra potencia.

El motor instala un volante con las dimensiones siguientes medidas de la llanta: diámetro exterior 0,42 m., diámetro interior 0,18 m., longitud axial 0,12 m.; el momento de inercia de este volante vale

$$I_v = \frac{\pi \cdot l \cdot m_e}{2} \cdot (r_e^4 - r_i^4)$$

$$I_v = \frac{3,1416 \times 0,12 \times 7860}{2 \times 9,81} \cdot (0,21^4 - 0,09^4) = 0,2838 \text{ k.m}^4$$

En consecuencia a la fórmula (119), la masa equivalente vale

$$m_{ev} \cdot R^2 = I_v$$

$$m_{ev} = \frac{I_v}{R^2} = \frac{0,2838}{0,077^2} = 47,8682 \text{ kg/m.s}^2$$

Para el generador trifásico, a falta de los datos

correspondientes al factor de inercia, lo considero como un volante, de la forma en que ya se ha propuesto en el apartado (b.2.3) y en la figura 24. Entonces, el sistema queda reducido a una masa equivalente a los seis cilindros, y otra gran masa, suma de las masa del volante y la masa del generador, situada en un punto aproximadamente intermedio entre ambas masas; como se desprende de la figura 26. El rotor del alternador tiene la longitud de 0,5 m. y el diámetro de 0,36 m.. La distancia entre los planos vertical-transversal que contienen el centro de gravedad de cada una de las masas es de 0,46 m.. De esta forma se mide que la distancia entre el eje geométrico del cilindro mas próximo al volante y el plano que se considera contiene la gran masa volante-generador vale 0,52 m. El momento de inercia de la masa del rotor, conforme a las dimensiones medidas, vale

$$I_{ro} = \frac{\pi \cdot l \cdot m_e}{2} \cdot r_{ro}^4$$

$$I_{ro} = \frac{3,1416 \times 0,5}{2} \times \frac{7860}{9,81} \times 0,18^4 = 0,6606 \text{ kg/m.s}^2$$

Aplicando la misma fórmula (119), se determina que la masa equivalente del inductor, vale

$$m_{er} \cdot R^2 = I_{ro}$$

$$m_{er} = \frac{I_{ro}}{R^2} = \frac{0,6606}{0,077^2} = 111,13 \text{ kg/m.s}^2$$

La masa equivalente del grupo volante-inductor vale

$$m_{ev} + m_{er} = 47,8682 + 111,13 = 159 \text{ kg/m.s}^2$$

El gorrón del cigüeñal que se apoya en el cojinete de

bancada mas próximo al volante, se prolonga con igual diámetro de 0,094 m. en longitud de 0,16 m. y termina en un plato de unión que recibe al volante.

El inductor del generador va montado en un eje empernado al volante con longitud de 0,15 m. en diámetro de 0,14 m.; para recibir al inductor reduce su diámetro a 0,12 m., en la longitud de 0,5 m..

A fin de determinar la longitud reducida de estos ejes, determino la influencia del volante sobre el tramo de su eje según lo establecido en la fórmula (124), considerando que el eje equivalente es del mismo diámetro que el gorrón del eje, vale

$$l_r = l_e \cdot \frac{I_{0r}}{I_{oe}}$$

$$l_{rv} = 0,16 \times \frac{\frac{\pi}{32} \times 0,094^4}{\frac{\pi}{32} \times 0,094^4} = 0,16 \text{ m.}$$

Y para la influencia del inductor sobre todo el tramo de eje, tomo en consideración la propuesta de HANS SCHRÖN para la longitud reducida de estos generadores, que vale

$$l_r = l_1 \cdot \frac{I_{0r}}{I_{o1}} + \frac{l_e}{3} \cdot \frac{I_{0r}}{I_{oe}} + l_e \cdot \frac{I_{0r}}{I_{oe}}$$

siendo  $l_1$ , la longitud de eje de 0,14 m. de diámetro,  $l_e$  es la longitud del eje de diámetro 0,12 m. que recibe al inductor e  $I_{oe}$  es el momento de inercia polar de la sección de este eje. Dando valores a la fórmula anterior, y teniendo en cuenta que el inductor del generador influye sobre el tramo de eje entre el volante y el cojinete de bancada mas próximo a él resulta que al tomar el diámetro del eje equivalente del mismo valor

de 0,094 m., se determina que esta longitud vale

$$l_r = 0,15x \frac{\frac{\pi}{32}x0,094^4}{\frac{\pi}{32}x0,14^4} + \frac{0,5}{3}x \frac{\frac{\pi}{32}x0,094^4}{\frac{\pi}{32}x0,12^4} + 0,16x \frac{\frac{\pi}{32}x0,094^4}{\frac{\pi}{32}x0,094^4}$$

$$l_r = 0,2533 \text{ m.}$$

La longitud reducida del conjunto volante-inductor, vale

$$L = l_{rv} + l_{rr}$$

$$L = 0,16 + 0,2533 = 0,41333 \text{ m.}$$

Como es norma expresar el módulo de elasticidad y la resistencia o fatiga de los materiales en Newtons centímetro cuadrado o milímetro cuadrado, o bien en kilopondios centímetro cuadrado o milímetro cuadrado, tomaré las masas reducidas en  $kg/mm.s^2$  y las longitudes reducidas en mm.. Tomando el módulo de elasticidad del acero empleado en la construcción de los ejes  $E = 21000kp/mm^2$  y que el módulo de rigidez, se toma  $K = 2/5 E$ , el momento de inercia polar es el de la superficie transversal del eje reducido, que se tomó en 94 mm. de diámetro; resultando que la constante del sistema  $q'$  vale, según la fórmula (134), para el eje reducido

$$q' = \frac{I_r \cdot K}{R^2}$$

$$q' = \frac{3, \frac{1416}{32} x 94^4 x 21000 x \frac{2}{5}}{77^2} = 10859508 \text{ kp.}$$

Por la fórmula de CARTER (126), ya quedó determinada la longitud aparente del eje de cigüeñal de cada cilindro, que son 341,1 mm. y 321,1 mm., tomando el valor medio de 331,1 mm.. Estos valores, llevados a la Fg. 44a, determinan que la masa

de sustitución del eje de cigüeñales de los seis cilindros se encuentra situado entre los cilindros números 3 y 4 y tiene por valor

$$l = 341,1 + 321,1 = 662,2 \text{ mm.}$$

También se determinó que la masa de sustitución del eje de cigüeñales vale

$$m' = 0,0074152 + 0,003687 = 0,0111022 \text{ kg/mm..s}^2$$

De igual forma se determinó que la masa de sustitución del grupo volante-inductor vale

$$M = 0,0478682 + 0,11113 = 0,159 \text{ kg/mm..s}^2$$

Y la distancia entre las masas  $m'$  y  $M$ , vale

$$l + L = 662,2 + 413,3 = 1075,5 \text{ mm.}$$

Con estos valores llevados a las fórmulas (134), se determina la forma de vibración propia y el número de vibraciones propio del motor; siendo la velocidad angular de la vibración del conjunto

$$\omega_e = \sqrt{\frac{g' \cdot \frac{m'+M}{m' \cdot M}}{l+L}} = \sqrt{\frac{10859508}{1075,5} \times \frac{0,0111 + 0,159}{0,0111 \times 0,159}}$$

$$\omega_e = \sqrt{973165} = 986,5 \text{ rad/s}$$

La constante de las fórmulas (139) para las masas de

sustitución del eje de cigüeñales es

$$\frac{\omega^2}{q'} \cdot I_{5-6} \cdot m = \frac{973165}{10859508} \times 331,1 \times 0,00184965 = 0,053553$$

y para el grupo volante-inductor

$$\frac{\omega^2}{q'} \cdot L \cdot m = \frac{973165}{10859508} \times 413,3 \times 0,00184965 = 0,070149$$

Con estos valores se obtiene las deformaciones relativas de las fórmulas (139)

$$a_6 = 1,00; a_5 = 0,946447; a_4 = 0,842209; a_3 = 0,692868 \\ a_2 = 0,506422; a_1 = 0,292856; a_0 = -0,007438$$

Con estos valores, la fórmula (140) da la resultante

$$R = w^2 \cdot \sum m_n \cdot a_n = \\ 973165 [0,00184965 \times 4,280802 + 0,159 \times (-0,007438)] = 6554,6 \text{ kp.}$$

Como R tiene un importante valor positivo, indica que la velocidad angular de 986,5 radianes es demasiado baja; por tanto, es necesario llevar a cabo un cálculo con mas favorable valor para esta velocidad, que tomaré  $\omega_e = 1008,5 \text{ rad.}$  de la que se obtiene los siguientes valores:

$$\frac{\omega_e^2}{q'} \cdot I_{5-6} \cdot m = \frac{1017072}{10859508} \times 331,1 \times 0,00184865 = 0,057326499$$

y que

$$\frac{\omega_e^2}{q'} \cdot L \cdot m = \frac{1017072}{10859508} \times 413,3 \times 0,00184865 = 0,0071558569$$

Con estos valores, llevados a la fórmula del grupo (139)

se obtienen las deformaciones relativas que valen

$$\begin{aligned}
 a_6 &= 1,000000 \\
 a_5 &= 1,000000 - 0,0573265 = 0,942674 \\
 a_4 &= 0,942674 - 0,0573265(a_6+a_5) = 0,831307 \\
 a_3 &= 0,831307 - 0,0573265(a_6+a_5+a_4) = 0,672190 \\
 a_2 &= 0,672190 - 0,0573265(a_6+a_5+a_4+a_3) = 0,474633 \\
 a_1 &= 0,474633 - 0,0573265(a_6+a_5+a_4+a_3+a_2) = 0,248147 \\
 a_0 &= 0,248147 - 0,0715586(a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1) = -0,0501769
 \end{aligned}$$

Con estos valores llevados a la fórmula (140) da la resultante

$$\begin{aligned}
 R &= \omega_e^2 \cdot \sum m_n \cdot a_n = \\
 &= 1017072 [0,00184865 \times 4,168951 + 0,159 \times (-0,0501769)] = -2,7 \text{ kp.}
 \end{aligned}$$

Este valor de  $\omega_e$  es satisfactorio, pues si se trazara en un diagrama los valores de R en función de  $\omega_e$ , el último valor de R difiere muy poco de cero. Tomamos, pues,  $\omega_e = 1008,5 \text{ rad/s}$ .

El número de vibraciones propio y la frecuencia se toman de las fórmulas (135) y valen

$$\begin{aligned}
 n_e = f &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_e = \\
 &= \frac{1}{2 \times 3,1416} \times 1008,5 = 160,589 \text{ oscilaciones/s}
 \end{aligned}$$

La representación gráfica de las deformaciones relativas calculadas, determina la forma de vibración propia de primer grado, que se representa en la Fg.44c.

### **Deformaciones de resonancia según la sucesión de encendidos**

En el apartado (B,2,5) se ha estudiado las deformaciones en la resonancia, y se ha obtenido la fórmula (154) de la resultante que determina el trabajo de excitación en la

resonancia.

$$R = \sum_{i=1}^{i=6} a_i$$

A fin de determinar los valores de las resultantes, se procede a la determinación de los armónicos a lo ya expuesto en la fórmula (155), referido al motor en estudio en el que el calaje es, según la Fg.44b, 1, 5, 3, 6, 2, 4, y la distancia angular entre encendidos es  $720/6 = 120^\circ$ . Resultando que de la estrella de direcciones del armónico excitador se trazan las poligonales de las deformaciones de resonancia relativas como se representa en la Fg.44 armónicos. Teniendo en cuenta que la fórmula (155') da para los armónicos de orden  $k$ ,

$$\beta_a - \beta_b = \frac{k}{2} \cdot \frac{720}{6}$$

de la cual se infiere que para este motor, según la estrella de la Fg.44b de armónicos, resultan las siguientes estrellas de direcciones:

Para el armónico  $k = 1$ , o armónico de orden  $1/2$ , el ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{720}{6} = 60^\circ$$

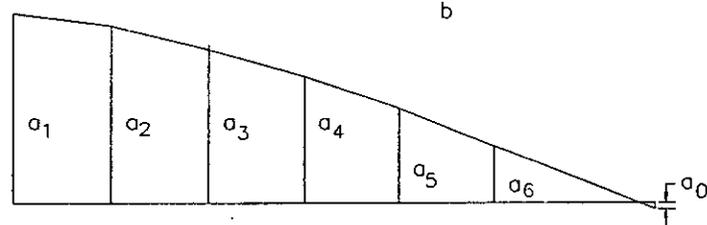
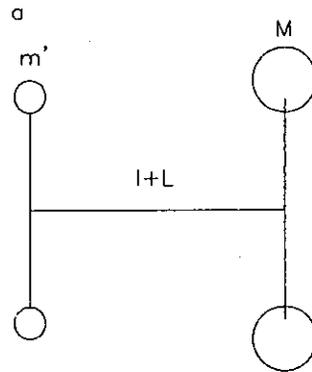
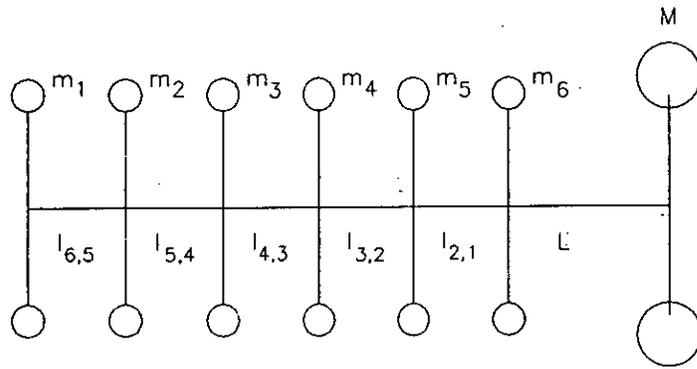
presenta la estrella de la figura (44b).

Para el armónico  $k = 2$ , o armónico de orden 1, el ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{2}{2} \cdot \frac{720}{6} = 120^\circ$$

presenta la estrella de la figura (44d), que coincide con la estrella del calaje de cigüeñales

Para el armónico  $k = 3$ , o armónico de orden  $1\ 1/2$ , el



ARMONICOS

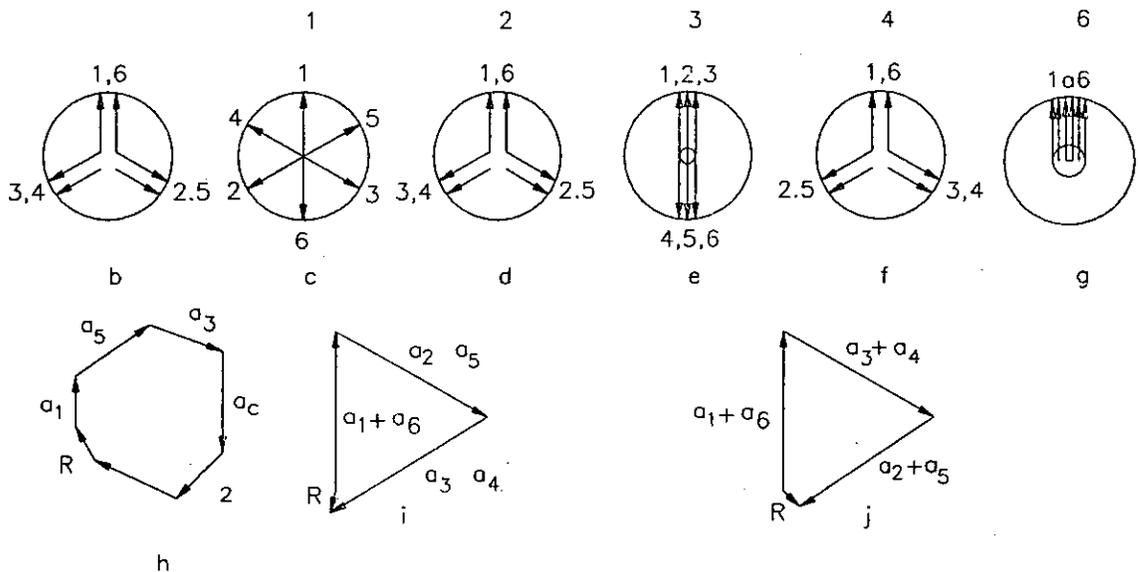


Fig. 44

ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{3}{2} \cdot \frac{720}{6} = 180^\circ$$

Presenta la estrella de la figura (44e)

Para el armónico  $k = 4$ , o armónico de segundo orden, el ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{4}{2} \cdot \frac{720}{6} = 240^\circ$$

Presenta la estrella de la figura (44f)

Para el armónico  $k = 5$ , o armónico de orden  $2 \frac{1}{2}$ , el ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{5}{2} \cdot \frac{720}{6} = 300^\circ$$

Presenta la estrella simétrica a la de la figura (44c)

Para el armónico  $k = 6$ , o armónico de tercer orden, el ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{6}{2} \cdot \frac{720}{6} = 360^\circ$$

Presenta la estrella de la figura (44g).

Para el armónico  $k = 7$ , o armónico de orden  $3 \frac{1}{2}$ , el ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{7}{2} \cdot \frac{720}{6} = 420^\circ$$

Presenta la estrella de la figura (44c).

Para el armónico  $k = 8$ , o armónico de cuarto orden, el ángulo

$$\beta_a - \beta_b = \frac{8}{2} \cdot \frac{720}{6} = 480^\circ$$

Presenta la estrella de la figura (44d).

Siguiendo en este mismo orden, se observa que las estrellas de direcciones se repiten con las mismas cifras, o con las mismas cifras distribuidas en forma simétrica; de manera

que se cumple para los armónicos  $k = 1, 5, 7$  y  $11$ ; para los armónicos  $k = 2, 4, 8$  y  $10$ ; para los armónicos  $k = 3, 9$  y  $15$ ; para los armónicos  $k = 6, 12$  y  $18$ . Y de un modo general, para los armónicos principales los radios de la estrella tiene la misma dirección.

La resultante de las deformaciones relativas viene representada por la poligonal de las deformaciones determinadas en el apartado anterior, figura (44c). Por todo lo expuesto anteriormente, en la figura (44h) se representa la poligonal para los armónicos  $k = 1, 5, 7, 11, 13$  y  $17$  que no es cerrada, y la resultante vale la suma vectorial de todas ellas, que se determina por la composición de fuerzas, para lo cual utilizaré el mismo procedimiento que para la resultante de las fuerzas de inercia; empiezo por determinar la resultante de  $a_1$  y  $a_5$  por la fórmula general

$$R_1 = \sqrt{a_1^2 + a_5^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_5 \cdot \cos 60}$$

Dando los valores correspondientes, resulta

$$R_1 = \sqrt{1,184133} = 1,088179$$

Determino que el ángulo que forma esta resultante con  $a_5$  vale

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{a_5^2 + R_1^2 - a_1^2}{2 \cdot a_5 \cdot R_1} = 0,980305 \\ \cos \alpha_1 &= 11,3902^\circ \end{aligned}$$

El ángulo que forman  $R_1$  con  $a_3$ , vale

$$\alpha_2 = 60^\circ + 11,3902 = 71,3902^\circ = 71^\circ 23' 25''$$

Procediendo de igual forma para  $R_1$  con  $a_3$ , se obtiene

$$R_2 = \sqrt{a_3^2 + R_1^2 + 2 \cdot a_3 \cdot R_1 \cdot \cos 71,3902}$$

Dando valores

$$R_2 = \sqrt{2,102823} = 1,450111$$

El ángulo que forman  $R_2$  con  $a_3$ , vale

$$\cos \alpha'_2 = \frac{a_3^2 + R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot a_3 \cdot R_2} = 0,703529$$

$$\alpha'_2 = 45,2892^\circ = 45^\circ 17' 21''$$

Y el ángulo que forman la resultante  $R_2$  con  $a_6$  vale

$$\alpha_3 = 60^\circ + 45,2892^\circ = 105,2892^\circ = 105^\circ 17' 21''$$

La resultante de estas dos vale

$$R_3 = \sqrt{a_6^2 + R_2^2 + 2 \cdot a_6 \cdot R_2 \cdot \cos 105,2892}$$

$$R_3 = \sqrt{2,338059} = 1,529072$$

El ángulo que forma  $R_3$  con  $a_6$  vale

$$\cos \alpha'_3 = \frac{a_6^2 + R_3^2 - R_2^2}{2 \cdot a_6 \cdot R_3} = 0,403917$$

$$\alpha_3 = 66,1767^\circ = 66^\circ 10' 36''$$

Y el ángulo que forma la resultante  $R_3$  con  $a_2$  vale

$$\alpha_4 = 60^\circ + 66,1767^\circ = 126,1767^\circ = 126^\circ 10' 36''$$

La resultante de la deformación  $a_2$  con  $R_3$  vale

$$R_4 = \sqrt{a_2^2 + R_3^2 + 2 \cdot a_2 \cdot R_3 \cdot \cos 126,1767}$$

$$R_4 = \sqrt{1,706550} = 1,30635$$

El ángulo que forman la deformación  $a_2$  con  $R_4$  vale

$$\cos \alpha'_4 = \frac{a_2^2 + R_4^2 - R_3^2}{2 \cdot a_2 \cdot R_4} = -0,327587^\circ; \alpha'_4 = 109,1224^\circ$$

El ángulo que forma la resultante  $R_4$  con  $a_4$  vale

$$\alpha_5 = 60^\circ + 109,1224 = 169,1224 = 169^\circ 7' 21''$$

La resultante de la deformación  $R_4$  con la  $a_4$  vale

$$R = \sqrt{a_4^2 + R_4^2 + 2 \cdot a_4 \cdot R_4 \cdot \cos 169,1224}$$

$$R = \sqrt{0,264633} = 0,514425$$

El ángulo que forma la resultante  $R$  con la  $R_4$  vale

$$\cos \alpha_R = \frac{R^2 + R_4^2 - a_4^2}{2 \cdot R \cdot R_4} = 0,952359$$

$$\alpha_R = 17,7569 = 17^\circ 45' 25''$$

El ángulo que forma  $R$  con  $a_6$  vale

$$\alpha_{R-6} = \alpha'_4 + 60^\circ - \alpha_R = 109,1224^\circ - 60^\circ - 17,7569^\circ = 31^\circ 21' 56''$$

En las figuras (44i) y (44j) se representan las poligonales de los armónicos  $k = 2, 4, 8, 10, 14$  y  $16$  las resultantes valen: Para las deformaciones  $(a_3 + a_4)$  y  $(a_2 + a_5)$

$$R_1 = \sqrt{(a_3 + a_4)^2 + (a_2 + a_5)^2 + 2 \cdot (a_3 + a_4) \cdot (a_2 + a_5) \cdot \cos 120^\circ}$$

$$R_1 = \sqrt{2,138346} = 1,462308$$

El ángulo que forma la resultante  $R$  con  $(a_3 + a_4)$  vale

$$\cos \alpha_1 = \frac{(a_3 + a_4)^2 + R_1^2 - (a_2 + a_5)^2}{2 \cdot (a_3 + a_4) \cdot R_1} = 0,543554^\circ$$

$$\alpha_1 = 57,0741^\circ = 57^\circ 4' 27''$$

Esta resultante forma con la deformación  $(a_1 + a_6)$  el ángulo

$$57,0741^\circ - 60^\circ = -2,9259^\circ = -2^\circ 55' 33''$$

y en sentido directo

$$360^\circ - 2,9259 = 357,0741 = 357^\circ 4' 27''$$

La resultante de la deformación  $(a_1 + a_6)$  con  $R_1$

$$R = \sqrt{(a_1+a_6)^2 + R_1^2 - 2 \cdot (a_1+a_6) \cdot R_1 \cdot \cos 357,0741^\circ}$$
$$R = \sqrt{0,0506236} = 0,224997$$

El ángulo que forma la resultante  $R$  con  $(a_1 + a_6)$  vale

$$\cos \alpha'' = \frac{(a_1+a_6)^2 + R^2 - R_1^2}{2 \cdot (a_1+a_6) \cdot R} = -0,943359$$
$$\alpha'' = 160,6237 = 160^\circ 27' 35''$$

Como se puede observar, la figura (44j) es simétrica a la figura (44i); por tanto, sus resultantes tienen igual valor y son simétricas en cuanto a ángulos formados.

En la figura (44e) se representa la poligonal de los armónicos  $k = 3, 9$  y  $15$ , y vale:

$$R = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5 + a_6)$$
$$R = 1,394971 - 2,773981 = -1,379011$$

En la figura (44g) se representa la poligonal de los armónicos  $k = 6, 12$  y  $18$ , y vale:

$$R = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$
$$R = 4,168951$$

Resumiendo, las resultantes valen

$$R_1; R_5; R_7; R_{11}; R_{13}; R_{17} = 0,514425$$
$$R_2; R_4; R_8; R_{10}; R_{14}; R_{16} = 0,224997$$
$$R_3; R_9; R_{15} = -1,379011$$
$$R_6; R_{12}; R_{18} = 4,168951$$

La resultante  $R$  toma el valor máximo para los armónicos

principales 6, 12 y 18, siendo igual a la suma algebraica de las deformaciones individuales de  $a_1$  hasta  $a_6$

### Velocidad angular crítica

En el apartado (B.2.5.b) en el que se estudió el número de revoluciones crítico y se obtuvieron las fórmulas (148) y (148') que da para

$$\omega_k = \frac{\omega_e}{\frac{k}{2}}; \quad n_k = \frac{n_e}{\frac{k}{2}}$$

Y como se ha hallado que  $\omega_e = 1008,5 \text{ rad/s}$ , la resonancia se presenta para la velocidad angular de

$$\omega_k = \frac{1008,5}{\frac{k}{2}}$$

y para el número de revoluciones

$$n_k = \frac{\frac{60}{2} \cdot \pi \cdot \omega_e}{\frac{k}{2}} = \frac{2 \times 9631,2}{k}$$

Considerando que la velocidad angular del motor en régimen de funcionamiento normal es de **1500 revoluciones por minuto, o 157 rad/s**; tomando la velocidad angular variable entre 770 y 1751 r.p.m., pueden entrar en resonancia con la frecuencia propia del eje los siguientes armónicos:

$$\frac{2 \times 9631,2}{1751} < k < \frac{2 \times 9631,2}{770}$$

$$11 < k < 25$$

Por tanto, corresponden a los de orden 5 1/2 y 12 1/2, entre los que se encuentran los órdenes principales 6, 9 y 12, así como, los intermedios 7 1/2 y 10 1/2. No obstante, puede realizarse una comprobación de resultados a partir de la tabla de valores de la página (147), llevándolos a la fórmula (153).

### Trabajo de torsión adicional del eje

Al trabajo producido por los momentos de torsión útil ya determinado

$$\tau' = a_g \cdot (a_1 + a_0) \cdot \frac{k}{L}$$

al que se le había determinado que el ángulo de torsión en grados, vale

$$\theta^0 = \pm \frac{a_i}{r_g} \cdot \frac{180}{\pi} = 57,3 \cdot \frac{a_i}{r_g}$$

se añade el trabajo que producen las vibraciones de torsión. Para el armónico principal de orden 6, que vale

$$n = \frac{9631,2}{6} = 1605,2 \text{ r.p.m.}$$

se calcula por la fórmula (153) la deformación  $a_6$  del cigüeñal sexto en el extremo libre del eje con la fuerza tangencial de sexto orden dado en la tabla de la página (147), donde se da que  $F_6 = 0,43 \text{ kp/cm}^2 = 0,0043 \text{ kp/mm}^2$ , con  $\sum a_i \cdot \text{sen } \beta_i = 4,168951$ , con el coeficiente de amortiguación, según BRANDT, siendo  $0,0008 < k < 0,001 \text{ kp.s/cm}^3$ , con  $\omega_e = 1008,5$ , y con la fórmula

$$\begin{aligned} \sum a_i^2 &= a_6^2 + a_5^2 + a_4^2 + a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 = \\ &= 11,00^2 + 0,942674^2 + 0,831307^2 + 0,672190^2 + 0,474633^2 + 0,248147^2 \\ \sum a_i^2 &= 3,318397 \end{aligned}$$

de manera que esta deformación vale

$$a_6 = \frac{F_6 \cdot R_6}{k' \cdot \omega_e \sum a_i^2}$$

$$a_6 = \frac{0,43 \times 4,168951}{0,001 \times 1008,5 \times 3,318397}$$

$$a_6 = 0,5753 \text{ cm} = 5,357 \text{ mm.}$$

referida al radio de cigüeñal de  $R = 77 \text{ mm}$ .

El ángulo de torsión vale, según se halló,

$$\theta = \pm 57,3 \times \frac{a_6}{R} = \frac{57,3 \times 5,357}{77}$$

$$\theta_6 = \pm 3,9861^\circ = 3^\circ 59' 10''$$

De la misma forma se ha obtenido para cada uno de los demás armónicos, con el valor correspondiente de  $F_k$  y  $\sum a_i \cdot \text{sen} \beta_i$  la deformación en el mismo cigüeñal, dando menor deformación. Referida esta deformación al radio del gorrón, la deformación vale:

$$a_g = a_6 \cdot \frac{r_g}{R} = 5,357 \times \frac{47}{77}$$

$$a_g = 3,26 \text{ mm.}$$

El trabajo máximo del eje se presenta en la proximidad del nodo de la vibración, y vale

$$\tau' = a_g \cdot (a_1 + a_0) \cdot \frac{k}{L}$$

$$\tau' = 3,26 \cdot [0,248147 + (-0,0501769)] \cdot \frac{8400}{41,33}$$

$$\tau' = 131,18 \text{ kp/mm}^2$$

Teniendo en cuenta que la resistencia del acero aleado que se utiliza en la construcción de los ejes de cigüeñales es de  $80 < q < 170 \text{ kp/mm}^2$ , esta carga es absolutamente admisible para el

eje, haciendo dispensable la instalación de un amortiguador de vibraciones en esta velocidad.

También, a mayor abundamiento para sacar conclusiones al respecto, antes de analizar las gráficas de amplitud-frecuencia tomadas a este motor, considero conveniente determinar la amplitud de la máxima deformación producida por las fuerzas tangenciales básicas debidas a los gases y a la inercia de las masas alternativas a partir de la fórmula (122), en la que se ha establecido la ecuación general de la resistencia, que relaciona el momento torsor y el momento de inercia polar, así como el ángulo de torsión

$$\frac{M_t}{I_0} = \frac{q}{r} = \frac{K \cdot \theta}{l} ; \quad \theta = \frac{M_t \cdot l'}{K \cdot I_0}$$

Para determinar el momento torsor, en este capítulo de examen de resultados, determiné el ciclo dinámico de la Fg.41 para de allí hallar el valor de la fuerza tangencial instantánea de los gases, representada en la Fg.42. También se le determinó a este motor el valor de las fuerzas de inercia de las masas alternativas para hallar la fuerza tangencial que se representa en la Fg.43. De la figura 42 se mide que la fuerza tangencial tiene el valor máximo de 40621,5 N. a los 19° de giro del eje de cigüeñal, y de la gráfica 43 se obtiene que para este ángulo la fuerza tangencial de inercia vale 4258,5 Newtons; y la fuerza tangencial instantánea vale 44880 N. Como el momento torsor vale el producto de la dicha fuerza por el radio de cigüeñal y  $l'$  es la hallada longitud equivalente entre las masas de sustitución del eje de cigüeñales y la del grupo volante-inductor el ángulo de torsión vale

$$\theta = \frac{F_t \cdot R \cdot l'}{K \cdot I_0} = \frac{44880 \times 77 \times 1075,5}{82375,9 \times \frac{3,14159 \times 94^4}{32}} = 5,889 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

Pero como el ángulo de torsión vale arco dividido por el radio del eje, la deformación que la fuerza tangencial le infiere al eje, vale

$$\theta = \frac{a}{r} ; \quad a = \theta \cdot r = 5,889 \times 10^{-3} \times 47 = 0,276656 \text{ mm.}$$

Llevado este valor a la fórmula del grupo (139) se tiene

$$\begin{aligned} a_6 &= 0,276656 \\ a_5 &= 0,276656 - 0,055003 = 0,221653 \\ a_4 &= 0,221653 - 0,055003(a_6+a_5) = 0,194244 \\ a_3 &= 0,194244 - 0,055003(a_6+a_5+a_4) = 0,156152 \\ a_2 &= 0,156152 - 0,055003(a_6+a_5+a_4+a_3) = 0,109471 \\ a_1 &= 0,109471 - 0,055003(a_6+a_5+a_4+a_3+a_2) = 0,056768 \\ a_0 &= 0,056768 - 0,068656(a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1) = -0,012914 \end{aligned}$$

Con estos valores llevados a la fórmula (140) da la resultante

$$\begin{aligned} R &= \omega^2 \cdot \sum m_n \cdot a_n \\ R &= 973165 [0,0018537 \times 1,014944 + 0,159 \times (-0,012914)] = -167,26 \text{ kp} \end{aligned}$$

El número de vibraciones propio y la frecuencia según las fórmulas (135) valen

$$\begin{aligned} n_e = f &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_e = \\ &= \frac{1}{2 \times 3,141592} \times 986,5 = 157 \text{ oscilaciones/s} \end{aligned}$$

Procediendo de igual forma en las deformaciones por resonancia, dan las resultantes

$$\begin{aligned} R_1; R_5; R_7; R_{11}; R_{13}; R_{17} &= 0,160512 \\ R_2; R_4; R_8; R_{10}; R_{14}; R_{16} &= 0,018482 \\ R_3; R_9; R_{15} &= -0,370162 \\ R_6; R_{12}; R_{18} &= 1,014944 \end{aligned}$$

Con estos valores se ha trazado la gráfica de armónicos de la Fg.46, que como se observa, no varía con la gráfica de armónicos de la fg.45, en cuanto a forma; pero si, en cuanto a deformaciones.

También aquí se presenta la resonancia para la velocidad angular

$$\omega_k = \frac{986,5}{\frac{k}{2}}$$

y para el número de oscilaciones por minuto

$$n_k = \frac{\frac{60}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_e}{\frac{k}{2}} = \frac{2 \times 9420,3}{k}$$

Si se toman velocidades angulares variables entre 753 y 1712 r.p.m., pueden entrar en resonancia con la frecuencia propia del eje los siguientes armónicos

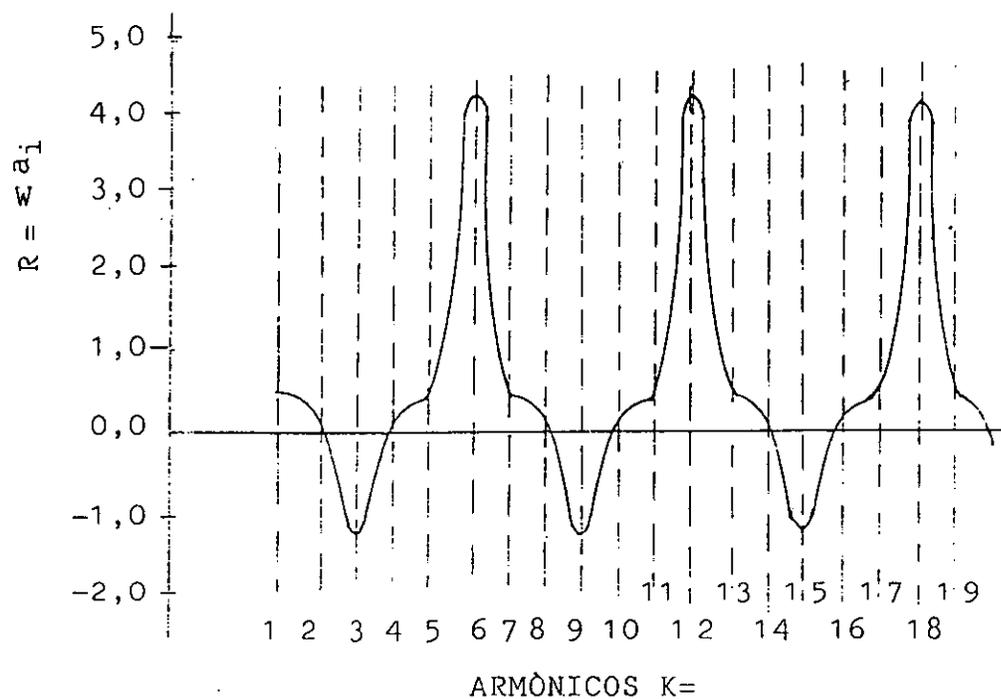
$$\frac{2 \times 9420,3}{1712} < k < \frac{2 \times 9420,3}{753}$$

$$11 < k < 25$$

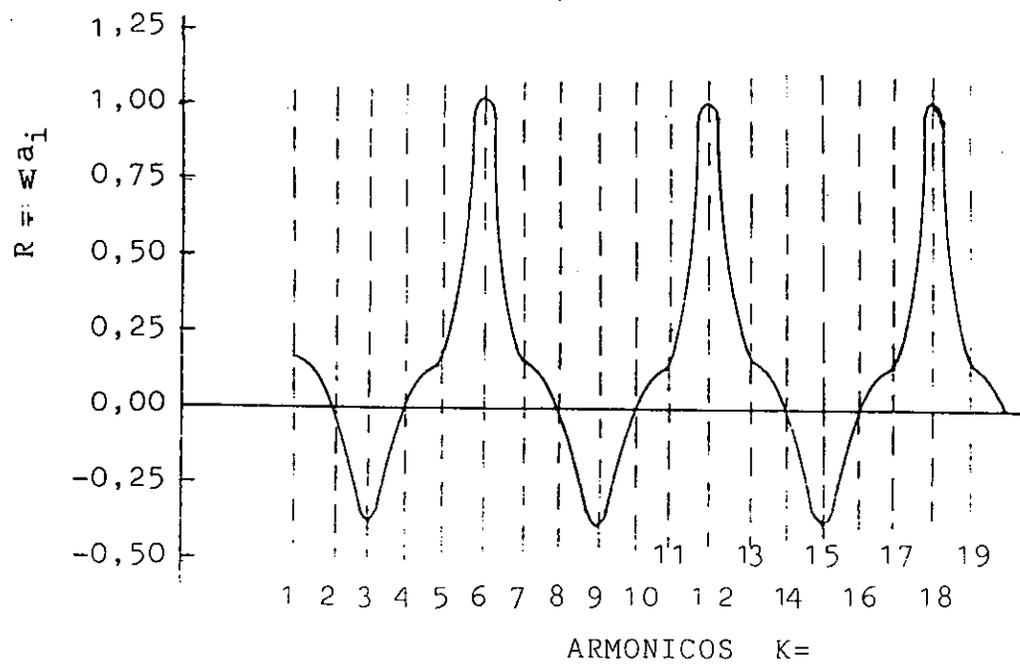
entre los que se encuentran los órdenes principales 6, 9 y 12. Entonces, para el armónico de orden 6 se tiene que vale

$$n = \frac{9420,2}{6} = 1570 \text{ r.p.m.}$$

Aplicando la fórmula (153) se calcula que la deformación  $a_6$  del cigüeñal sexto en el extremo libre del eje, con la fuerza tangencial de sexto orden tomada de la tabla de la página (147) que da para  $F_6 = 0,0043 \text{ kp/mm}^2$ ; y  $\sum a_i \cdot \text{sen}\beta = 1,014944 \text{ mm}$ . se calculó con el mismo coeficiente de amortiguación de BRANDT,



Fg. 45



Fg. 46

siendo

$$\begin{aligned}\sum a_i^2 &= a_6^2 + a_5^2 + a_4^2 + a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 = \\ &0,276665^2 + 0,221653^2 + 0,194244^2 + 0,156152^2 + 0,109471^2 + 0,056768^2 \\ \sum a_i^2 &= 0,206986 \text{ mm.}\end{aligned}$$

La amplitud o deformación  $a_6$  referida al radio de cigüeñal de 77 mm., vale

$$\begin{aligned}a_6 &= \frac{F_6 \cdot R_6}{k' \cdot \omega_e \cdot \sum a_i^2} \\ a_6 &= \frac{0,0043 \times 1,014944}{0,001 \times 986,5 \times 0,206986} \\ a_6 &= 2,1058 \text{ mm.}\end{aligned}$$

La cual le infiere el ángulo de torsión que vale

$$\begin{aligned}\theta &= \pm 57,3 \times \frac{a_6}{R} = \frac{57,3 \times 2,1058}{77} \\ \theta &= \pm 1,5671^\circ = 1^\circ 34' 02''\end{aligned}$$

Esta deformación referida al radio del gorrón vale

$$\begin{aligned}a_g &= 6_6 \times \frac{r_g}{R} = 2,1058 \times \frac{47}{77} \\ a_g &= 1,7364 \text{ mm.}\end{aligned}$$

El trabajo máximo del eje se presenta en las proximidades del nodo de la vibración y vale

$$\begin{aligned}\tau' &= a_g \cdot (a_1 + a_0) \cdot \frac{8400}{41,33} \\ \tau' &= 1,7364 \cdot [0,056768 + (-0,012914)] \cdot \frac{8400}{41,33} = 15,48 \text{ kp/mm}^2\end{aligned}$$

Esta carga es consecuencia únicamente de la deformación

producida por las fuerzas tangenciales básicas, a las cuales hay que sumarles, en la forma que resulte, las fuerzas del análisis armónico.

La frecuencia propia del motor en estudio, determinada de la fórmula general, es

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \omega$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = 25 \text{ Hz}$$

Que es, también, la frecuencia de las fuerzas de inercia primarias. Pero como se trata de un motor de cuatro tiempos, la fuerza tangencia de los gases se da con la frecuencia

$$f_g = \frac{f}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ Hz}$$

Por tanto, el armónico **k** se da con la frecuencia **12,5 k** y cada oscilación se produce en el tiempo **1/12,5 k**.

A fin de fijar conceptos para sacar conclusiones al respecto, partiendo de los valores obtenidos para las resultantes y sus frecuencias, determino el tiempo en que se produce la oscilación según el armónico, y amplitud de la deformación referida al gorrón del cigüeñal; valores con los que construyo la siguiente tabla:

Armónico	Frecuencia	tiempo	amplitud
k = 1	12,5	0,080	1,051
k = 2	25,	0,040	0,101
k = 3	37,5	0,026	-1,414
k = 4	50,	0,020	0,045
k = 5	62,5	0,016	0,259
k = 6	75,	0,013	1,035
k = 7	87,5	0,011	0,103
k = 8	100,	0,010	0,007
k = 9	112,5	0,009	-0,105
k = 10	125,	0,008	0,011
k = 11	137,5	0,007	0,031
k = 12	150,	0,006	0,105

Se observa que a medida que el orden del armónico se

va haciendo mayor, la amplitud se va haciendo menor, y los riesgos de resonancia van descendiendo porque las velocidades a que puedan producirse se alejan de la velocidad angular del motor.

De la fórmula de la frecuencia se desprende que el diagrama de dominio temporal viene dado por una onda senoidal, como ya se ha estudiado y representando en la figura 27, como un vector  $V_k$  que gira a la velocidad del armónico que representa. Si estos vectores son las resultantes halladas, y sus valores son los que se dan en la página 235; los ángulos que forman con la fuerza principal se determinaron en las páginas 226 a la 229, representadas en la figura 44. Tomando como origen de la deformación  $a_1$ , a partir de la cual se miden los ángulos, se halló que la resultante  $R_1$  del armónico  $k=1$  vale  $0,160512$  mm., y va en retraso, según la rotación, en el ángulo  $\omega t = 31,3655^\circ + 180^\circ = 211,3655^\circ$ , que es el ángulo común a los armónicos  $k$  calculados en la página 226. De la misma forma se pueden hallar y representar las senoides de los vectores  $k=2$  y los de su serie, que el ángulo en retraso vale  $160,6237^\circ$ ; para  $k=3$  y los de su serie, el ángulo vale  $180^\circ$  ó  $360^\circ$ ; para  $k=4$  y los de su serie, el ángulo vale  $180^\circ - 31,3655 = 148,5445^\circ$ ; para  $k=6$  y los de su serie, el ángulo vale  $0.000^\circ$ .

En general, puede decirse que para el ángulo  $4\pi$ , que es el ángulo en que se realiza el ciclo en los motores de cuatro tiempos, se producen tantas frecuencias como cifras indique  $k$ , iniciadas a partir del origen común.

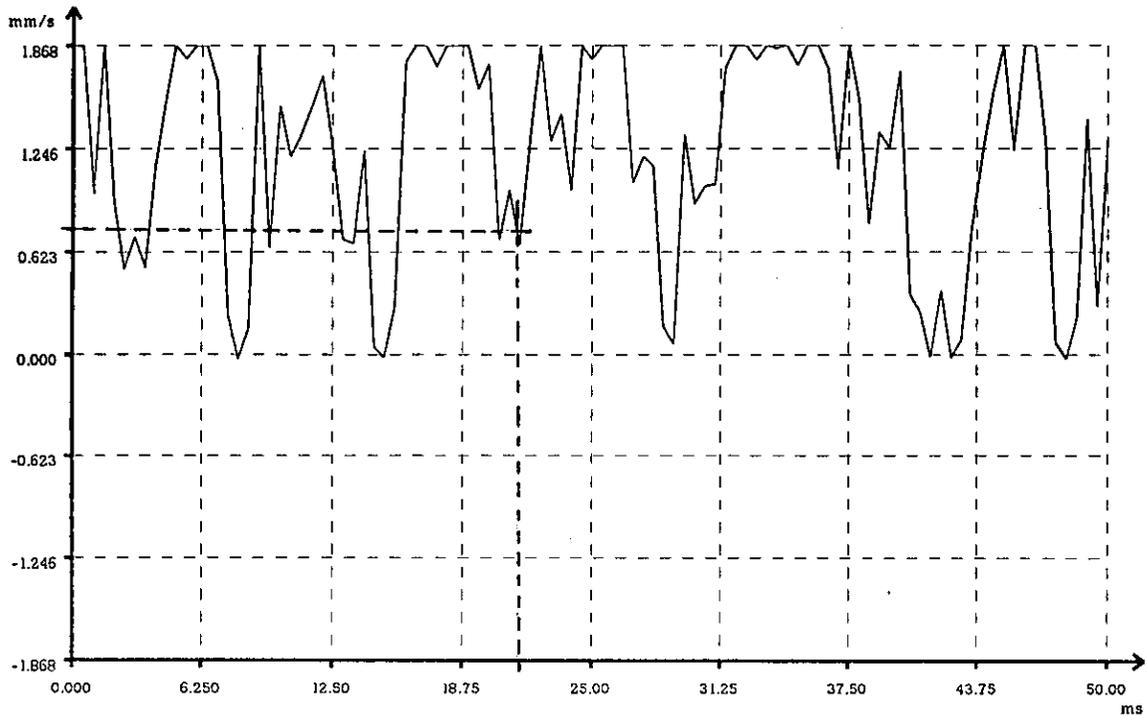
En cada instante, la amplitud total es la suma vectorial de las amplitudes senoidales parciales. Estas senoides pueden representarse bajo la gráfica de la figura 42, en la forma que se obtienen de la figura 27.

Las gráficas de las figuras 47 y 48 representan un análisis temporal de las amplitudes, tomadas por el director de la tesis y el doctorando, con el analizador que se especifica, en el motor de seis cilindros a cuatro tiempos con

METRITEX-DIV. MANTENIMIENTO

Machine : MACHINEPEGASO(A)  
Date & Time : 15.05.95 17:26:07  
Operator : MANFERPAZ  
Comment :

Envelope : Filtered Envelope  
Average : 1 linear averages



Análisis temporal de amplitudes tomado en el cojinete extremo del lado del grupo volante-inductor, en el motor estudiado, con el acelerómetro Tandem-Piezo VIB 8510

Fg. 47

orden de encendido 1, 5, 3, 6, 2, 4, a que se refiere la tesis.

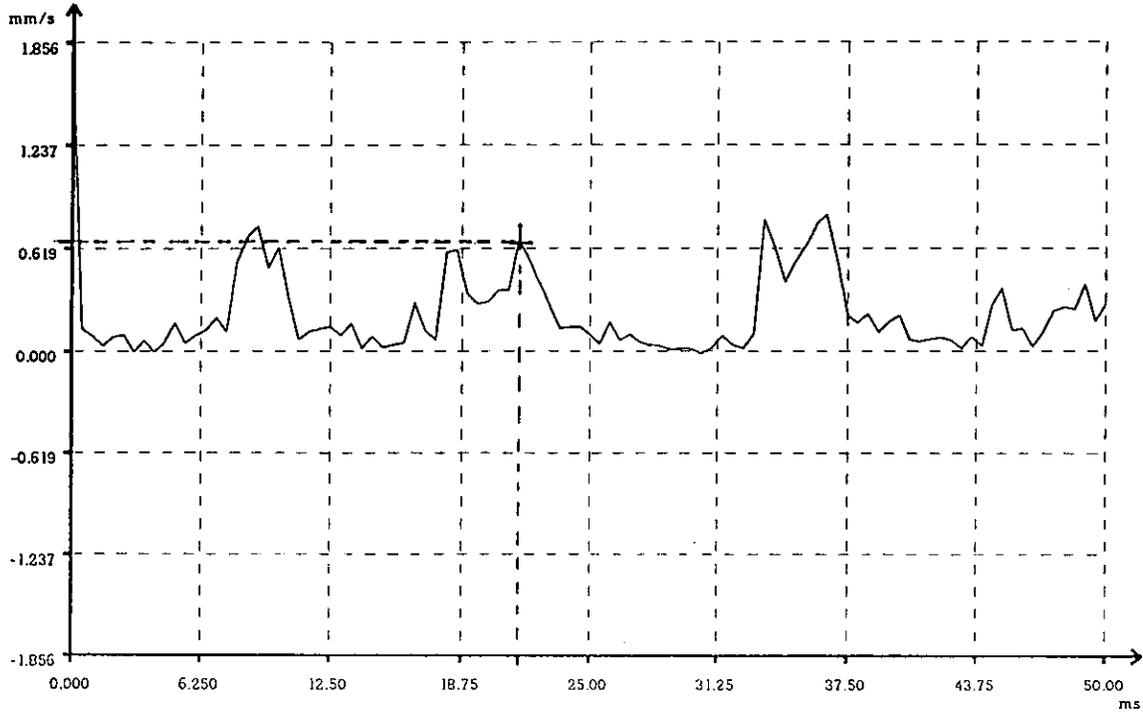
El transductor (A) es un acelerómetro Tandem-piezo tipo VIB 8510, se instaló sobre el travesaño que contiene al cojinete de bancada mas próximo al volante, y el transductor acelerómetro (B) tipo VIB 8515, se instaló sobre el travesaño extremo que aloja al cojinete de bancada mas alejado del volante.

De un análisis de las gráficas se deduce que las amplitudes máximas apenas varían en cuanto a intensidad, y solo varían ligeramente en cuanto al tiempo. Las amplitudes son mucho mas oscilantes en el cojinete del lado del volante; por una parte, por la acción de los armónicos y, por otra, por la acción del grupo volante-inductor, con forma propia de vibrar diferente cada uno de ellos y por su influencia sobre los referidos armónicos; pudiendo suceder, que al mantener el volante la velocidad angular mas constante varíe la componente senoidal de los armónicos acercándose mas a la resonancia; en el bien entendido de que los cojinetes de bancada están en perfectas condiciones y que el eje de cigüeñales está correctamente alineado. Si se cumplen estas condiciones, en este caso, el comportamiento del volante es contrario al de los amortiguadores y extintores de vibraciones; cuando se admite que el volante, en virtud del teorema de las fuerzas vivas, acumulará en forma de energía cinética, el trabajo motor en exceso, para subvenir al defecto del trabajo motor, llevando la fuerza tangencial y el par motor a un valor mas constante, que es el fundamento de los amortiguadores y extintores de vibraciones.

También se han tomado gráficas para hacer el análisis frecuencial de las amplitudes, y los resultados obtenidos dan valores parejos en las amplitudes máximas.

A mayor abundamiento para las conclusiones, el doctorando ha determinado la amplitud resultante de las componentes senoidales para el instante **21,50 ms.** en las gráficas de las

METRITEX-DIV. MANTENIMIENTO  
Machine : MACHINEPEGASO(B)  
Date & Time : 15.05.95 17:26:07  
Operator : MANFERPAZ  
Comment :  
  
Envelope : Filtered Envelope  
Average : 1 linear averages



Análisis temporal de amplitudes tomado en el cojinete extremo alejado del grupo volante-inductor, en el motor estudiado, con el acelerómetro Tandem-Piezo Tipo VIB 8515

Fg. 48

figuras 47 y 48, tomando la amplitud de cada armónico  $k$  de la tabla de la página 237, empezando por situarlo en su posición angular inicial respecto del eje geométrico del cilindro, fijar su posición angular respecto del eje normal al anterior y determinar la componente senoidal de cada armónico.

Considerando que en el instante  $t=0$ , las amplitudes dadas en la tabla de la página 237, reducidas de las resultantes halladas de la página 234, y representadas en la figura 44, en el tiempo  $t$  cada una de ellas engendra el ángulo que vale  $\omega_k \cdot t$  radianes, y en grados

$$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t = 2 \times 180 \times 0,0215 f = 7,74 f$$

Por esta fórmula determino el valor de la amplitud de cada armónico en el tiempo  $t=21,5$  milisegundos y el ángulo girado por el vector.

Armónico	Ángulo	Amplitud
=====	=====	=====
k = 1	7,74x12,5	sen 38,11x1,051 = 0,6486
k = 2	7,74x25	sen 37,22x0,101 = 0,0611
k = 3	7,74x37,5	sen 20,25x-1,414 = 0,4894
K = 4	7,74x50	sen 3,28x0,045 = 0,0026
k = 5	7,74x62,5	sen 65,11x0,259 = 0,2349
k = 6	7,74x75	sen 49,50x1,035 = -0,7870
k = 7	7,74x87,5	sen 78,60x0,103 = -0,1010
k = 8	7,74x100	sen 77,72x0,007 = -0,0068
k = 9	7,74x112,5	sen 60,75x-0,105 = 0,0916
k = 10	7,74x125	sen 43,78x0,0101 = -0,0069
k = 11	7,74x137,5	sen 74,39x0,0304 = -0,0293
k = 12	7,74x150	sen 9,00x0,105 = 0,0164
		-----
		mm. = 0,6136

Que es la amplitud resultante de los armónicos en el expresado instante.

Comparando estos resultados con los obtenidos en las gráficas 47 y 48 del propio motor en funcionamiento, se observan pequeñas variaciones en las amplitudes; diferencias admisibles, que se deben a diversas causas, unas veces por la variabilidad del par motor máximo y su acción dinámica, otras por la resistencia del material utilizado y, en general, porque

no es posible incorporar al cálculo comportamientos dinámicos no previstos. Es por ello que las amplitudes calculadas dan valores inferiores a las obtenidas del motor.

Las referidas gráficas fueron tomadas cuando el eje motor giraba a la velocidad de régimen de 1500 r.p.m. y la potencia producida era del 50 % de la máxima. Del análisis temporal de las mismas se desprende que las amplitudes son menos variables en el lado del acelerómetro (B), aunque bien diferenciados los períodos, donde la amplitud calculada toma valores próximos a las medidas.

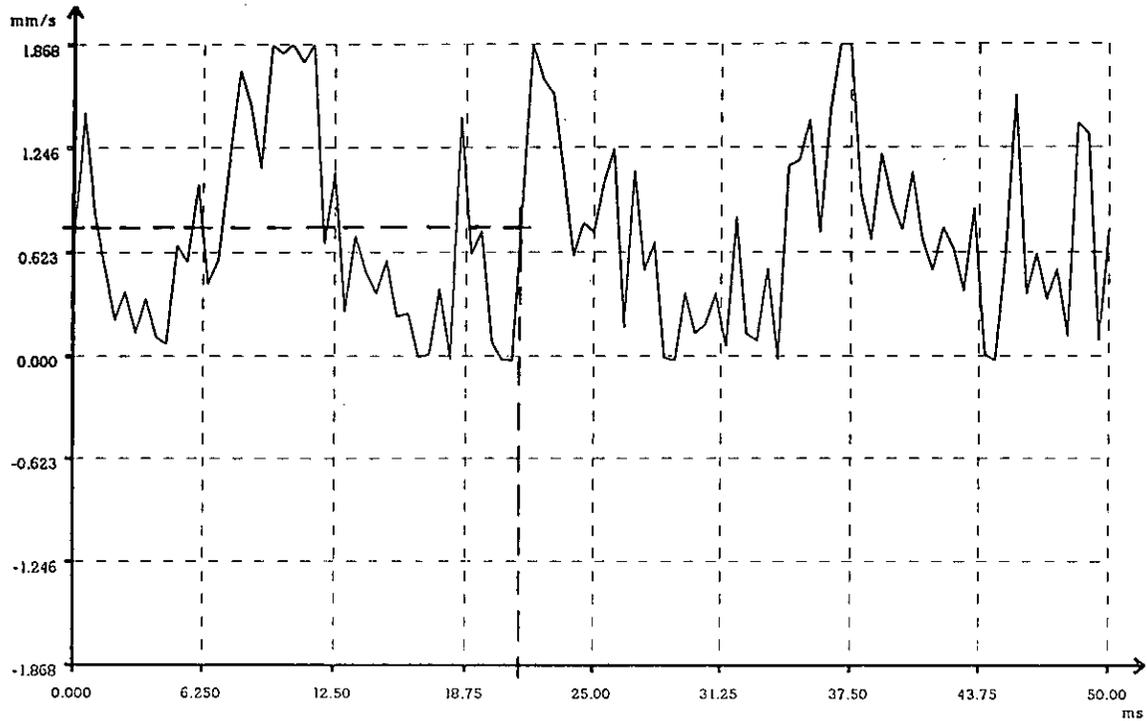
Por el contrario, las amplitudes medidas por el acelerómetro (A) sufren mayores variaciones en el tiempo a la vez que alcanzan valores muy superiores; los períodos están en correspondencia, aunque ligeramente desfasados en el tiempo. Como se dijo anteriormente, estas diferencias son debidas a la acción del grupo volante-inductor en la torsión, a las masas con efecto giroscópico (B-3,2) y a las vibraciones axiales del eje, las cuales no hemos podido captar porque el aparato de que disponemos (SISTEM-2), no permite disgregar las vibraciones hasta su procedencia. No obstante, en la página 236, calculo que la máxima deformación o amplitud referida al radio del gorrón vale  $a_g = 1,7364 \text{ mm/s}$ , que se aproxima suficientemente a la obtenida con el transductor que, como se observa en la gráfica, vale  $a_g = 1,868 \text{ mm/s}$ .

A fin de comparar los resultados obtenidos en los calculos con el comportamiento del motor, se elevó la potencia desarrollada por el motor, con igual número de r.p.m., hasta la calculada en la página 211, que importa 153 KWI.. Entonces, se obtuvieron las gráficas de las figuras 49 y 50, con la misma escala en los ejes de coordenadas amplitud tiempo.

En el análisis temporal del lado del acelerómetro (B), se observa, ahora, que las amplitudes son mas irregulares, son menos sostenidas y los períodos están ligeramente desfasados; pero lo mas resaltante es el valor que toma la deformación o

METRITEX-DIV. MANTENIMIENTO  
Machine : MACHINEPEGASO(A)  
Date & Time : 15.05.95 17:29:10  
Operator : MANFERPAZ  
Comment :

Envelope : Filtered Envelope  
Average : 1 linear averages

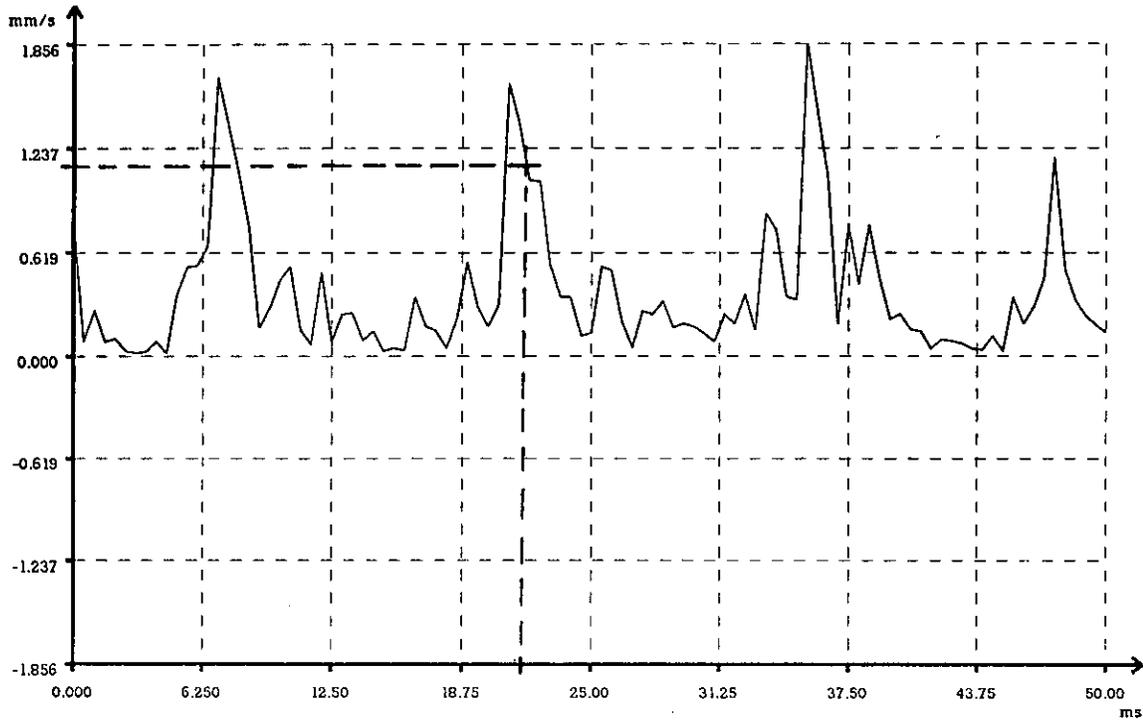


Análisis temporal de amplitudes tomado en el cojinete extremo del lado del grupo volante-inductor, en el motor estudiado, con el acelerómetro Tandem-Piezo VIB 8510

Fg. 46

METRITEX-DIV. MANTENIMIENTO  
Machine : MACHINEPEGASO(B)  
Date & Time : 15.05.95 17:29:10  
Operator : MANFERPAZ  
Comment :

Envelope : Filtered Envelope  
Average : 1 linear averages



Análisis temporal de amplitudes tomado en el cojinete extremo alejado del grupo volante-inductor, en el motor estudiado, con el acelerómetro Tandem-Piezo VIB 8515

Fg. 50

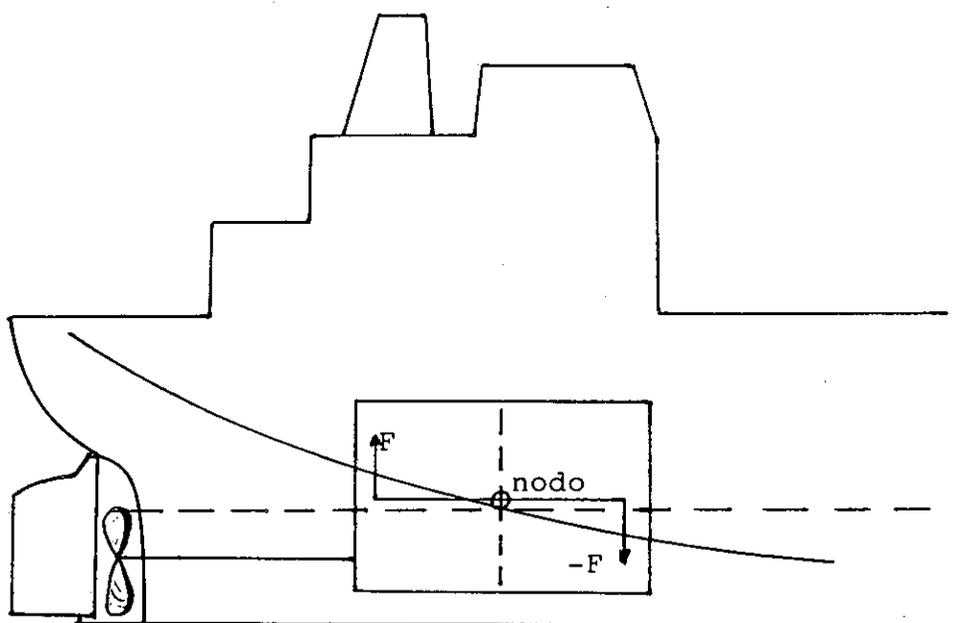
amplitud máxima, que se acerca al valor calculado en la página 236 para la máxima deformación.

Sin embargo, el análisis temporal del lado del acelerómetro (A), presenta un comportamiento mas regular, con deformaciones máximas menos sostenidas, con lo cual se reduce, en parte, el efecto dinámico; a pesar de que la amplitud máxima alcanza valores iguales.

Teniendo en cuenta que el trabajo de torsión adicional del eje, determinado para estas condiciones en la página 236, es muy pequeño, el motor presenta un comportamiento mas regular en esta potencia.

Procediendo de la misma forma, se puede determinar la amplitud en el tiempo y en la frecuencia que se considere mas desfavorable en el funcionamiento del motor. Entonces, los resultados obtenidos por cálculo pueden confrontarse con el análisis temporal o frecuencial por las gráficas del motor en aquellas condiciones de funcionamiento fijadas para el cálculo.

En este estudio, el doctorando no ha considerado necesario realizar otros cálculos para confrontación, porque los valores de amplitud máxima calculados son aproximadamente del mismo valor que los medidos, que son admisibles en todo el tiempo de funcionamiento del motor.



Efectos de la instalación desacertada de un motor con pares de inercia libres en el nodo de la vibraciones del buque.

Fg. 51

## CAPITULO 6.- CONCLUSIONES.

La presente tesis doctoral

### **Explica:**

a) Como es el comportamiento dinámico de un motor de combustión interna alternativo por causa de la variable fuerza de los gases en el ciclo en consecuencia a la rápida combustión gradual, a modo de explosión, pero sin violencia, a fin de que pueda alcanzar el rendimiento máximo; así como, por causa de la aceleración de sus masas en movimiento.

b) Como se debe de proceder para conocer y determinar el efecto dinámico de las vibraciones producidas por las fuerzas de inercia cuando la velocidad de las masas no es constante y como un movimiento circular uniforme, con velocidad angular constante, produce fuerzas de inercia

c) Como se debe de proceder para conocer y determinar el efecto dinámico de las vibraciones de torsión producidas por las fuerzas tangenciales de los gases y las fuerzas de inercia; así como de las vibraciones axiales de los ejes de cigüeñales

Vemos, pues, que en los motores de combustión interna alternativos las vibraciones son de dos clases, a saber: las que afectan a los órganos fijos y por lo tanto a la fundación, y las que afectan al eje de cigüeñales.

Por ello, en el ánimo de contribuir a la aplicación de las técnicas del equilibrado para mejorar el comportamiento del motor en todo régimen de funcionamiento, y para que constituya una intención de utilidad en el área de la conducción y del mantenimiento, se presenta esta tesis realizada en base a los estudios e investigaciones de autores anteriormente citados, y de otras publicaciones y trabajos que se hace referencia en la bibliografía.

**Expone:**

a) Como debe ser el motor de combustión interna alternativo conforme a la relación peso potencia, según el campo de aplicación.

b) Un criterio para la limitación del número de cilindros por causa de las vibraciones producidas por las fuerzas de inercia de las masas giratorias y de las fuerzas de inercia de las masas en movimiento alternativo.

c) Un estudio aclaratorio sobre el equilibrado disgregado de las fuerzas de inercia de las masas giratorias y de las fuerzas de inercia de las masas en movimiento alternativo.

d) Como en los motores de combustión interna alternativos existe una velocidad de rotación crítica en la cual entran en resonancia los órganos fijos del motor y la fundación, que, si de un buque se trata, el casco es parte de la fundación, y vibra todo él con el agua que lo rodea, hasta límites indefinidos; pero como la forma de vibrar del casco depende del estado de carga del buque, resulta que la velocidad crítica no es un valor fijo, sino variable entre un máximo y un mínimo definidos y dependiente del calado del buque; entonces existirán tantas zonas de velocidades críticas, como maneras de vibrar tenga el casco. Y como existe también una velocidad torsional crítica, que es aquella en la que coinciden o entran en resonancia, la frecuencia del par motor y/o sus armónicos y la frecuencia de torsión propia del eje.

e) Como se puede proceder para combatir aquel efecto dinámico, equilibrándolo unas veces, y reduciéndolo a efectos admisibles otras. Si bien, todo equilibrado conlleva un aumento en el número de mecanismos y en el peso del motor; pero, por otra parte, con el equilibrado, no es necesario dimensionar tanto las piezas móviles y fijas por causa del trabajo adicional que producen las vibraciones.

**Propone:**

a) En relación a las vibraciones producidas por las fuerzas de inercia, tomando como referencia el motor marino estudiado en el Capítulo 5. Un equilibrado de las vibraciones de rotación en el plano longitudinal-vertical producidas por los pares de inercia vertical secundarios; toda vez que calculado el par de rotación, (página 204), la intensidad de estas vibraciones resulta ser de valor suficiente para producir considerables movimientos del motor. De tal forma, que el doctorando llegó a medir en el plano longitudinal vertical, en la culata, a 5,25 metros de la bancada, por los medios de que a bordo disponía, movimientos de 10 a 15 milímetros de amplitud. Estos movimientos producían frecuentes roturas de los pernos de anclaje de la bancada del motor a los polines, en el extremo del motor hacia proa. Examinada la rotura se percibía producida por tracción, y en algunos casos combinada con cizalla.

Por tanto, este motor, necesariamente, tenía que ser equilibrado respecto a estos pares de inercia; sino en su totalidad por las únicas razones de coste y peso, sí, en cuanto a reducir el efecto dinámico, a fin de evitar aquellas roturas, reduciendo el coste de mantenimiento y el riesgo de averías, ya que no por montar estos mecanismos se reduce el rendimiento del motor, sino que, mas bien, se incrementa la regularidad natural del motor.

Pero tampoco puedo atribuir estos efectos únicamente a las vibraciones propias del motor, pues, como se dijo anteriormente el casco tiene su forma propia de vibrar; y sería perjudicial, por desacertado, si el motor estuviera instalado en el nodo de las vibraciones del casco del buque, porque sus vibraciones son fuertemente excitadas por los pares de inercia libres del motor. En este caso está todavía mas justificada la necesidad del equilibrado propuesto, como se demuestra en la Fg. 51.

Entonces, si fuera necesario montar el motor en una zona de nodos de las vibraciones del buque, el equilibrado del motor

tenía que ser impuesto.

El equilibrado se lleva a cabo por medio de las masas calculadas y montadas en la forma propuesta; de manera que estas masas pueden constituir una transmisión de movimiento a otros mecanismos, a saber: la instalación de unos compresores rotativos que suministren aire para la sobrecarga del motor, coadyuvando a la reducción relación peso/potencia del motor, y/o la montura de un generador eléctrico para el suministro de energía eléctrica a los servicios del buque, con costo mas reducido, porque el rendimiento de estos motores es mas elevado que el de cualquier otro; sistema muy utilizado actualmente.

Pero también propone una alternativa estudiada para este motor de seis cilindros a dos tiempos; consiste en adoptar un calaje especial, de manera que los cilindros números 1 y 6 estén calados a  $0^\circ$ , que los cilindros números 3 y 4 también estén calados a  $0^\circ$  y de la misma forma estén calados los cilindros números 2 y 5. Como en los  $360^\circ$  todos los cilindros tienen que pasar por el periodo motor, los grupos de cilindros, en calaje regular tienen que estar calados a  $360:3=120^\circ$ . De esta forma, el motor presenta un equilibrado natural perfecto de las fuerzas de inercia y de los pares de inercia de primero y de segundo orden, los momentos internos son menores que en el motor estudiado, y su instalación es posible en una zona cualquiera de las vibraciones del cuerpo del buque. Pero presenta el inconveniente de poseer grandes oscilaciones del par motor, que afectan desfavorablemente a las oscilaciones de torsión del eje de cigüeñales.

**b)** En relación a las vibraciones de torsión producidas sobre el eje de cigüeñales, excitadas por la variación del par motor total y sus armónicos, tomando como referencia el motor de seis cilindros y cuatro tiempos, estudiado en el mismo Capítulo 5. La instalación de un cojinete de apoyo entre el volante y el generador eléctrico, por las razones siguientes:

1) Al analizar las gráficas tomadas del motor por el

Sistem-2, figuras 47, 48, 49 y 50; en las figuras 47 y 49, que corresponden al acelerómetro (A) del lado del volante, se observan fuertes y frecuentes oscilaciones irregulares, que son resistidas con desahogo según se ha calculado; pero si se comparan con las amplitudes medidas con el acelerómetro (B) se aprecia una notable diferencia entre ellas, y si consideramos las deformaciones relativas calculadas en la página (234), las mayores amplitudes se alcanzan del lado del acelerómetro (B) como se representa en la figura 44. No obstante, como se ha calculado en la página (236), el trabajo máximo del eje se presenta en la proximidad del nodo de la vibración; entonces, como parece desprenderse del cálculo y de la figura 44, este nodo se presenta del lado del grupo volante-inductor; por tanto al incorporar al sistema el referido cojinete de apoyo, la longitud equivalente  $L$  referida a la masa  $M$ , varía, haciendo variar la posición del nodo, reduciendo el trabajo máximo del eje y repartiendo la carga entre los dos cojinetes. Pero, además, las vibraciones de flexión y el efecto giroscópico del grupo volante-inductor se reducen, haciendo menos intensas las referidas oscilaciones en esta zona.

2) Que no se alcance en ningún momento la velocidad angular crítica de 168 radianes o 1605 r.p.m., que corresponde al armónico principal de orden 6, porque el trabajo máximo del eje que se presenta en la proximidad del nodo de la vibración según se calculó vale  $\tau = 131,18 \text{ kp/mm}^2$ , y la deformación en el extremo libre del eje  $a_6 = 5,357 \text{ mm.}$ , que es solo admisible durante un tiempo muy corto de marcha del motor. Como los restantes armónicos dan trabajos máximos menores, pueden ser admitidos durante mayores tiempos de funcionamiento del motor sin que precisen de una amortiguación.

Finalmente, de la geometría del eje de cigüeñales y de las dimensiones medidas, se desprende que este motor ha sido estudiado tanto en las vibraciones ocasionadas por las fuerzas de inercia, cuanto mas en las vibraciones torsionales del eje.

NOMENCLATURA BASICA EMPLEADA Y UNIDADES

Símbolo	Concepto	Unidades
A	..... coeficiente.	
a	..... aceleración con subíndice de velocidad.	$m/s^2$
a	..... amplitud de la deformación de ejes.	$mm/s$
a	..... dimensión lineal en momentos de inercia.	$cm$
B	..... coeficiente.	
b	..... dimensión lineal en momentos de inercia.	$cm$
C	..... carrera del émbolo.	$m$
c	..... dimensión lineal en momentos de inercia.	$cm$
D	..... diámetro del émbolo.	$m$
d	..... diámetro de ejes.	$cm$
E	..... módulo de Elasticidad.	$kp/mm^2$
Ec	.... energía cinética.	$kp/m, N/m$
e	..... dimensión lineal.	$cm$
e	..... excentricidad de un eje al girar.	$mm$
e	..... espesor.	$cm$
F	..... fuerza, en general.	$kp, N$
Fi	.... fuerza de inercia.	$kp, N$
f	..... frecuencia, en general.	$Hz$
f	..... desviación.	$mm$
g	..... aceleración de la gravedad.	$m/s^2$
h	..... dimensión lineal.	$cm$
I	..... momento de inercia ecuatorial.	$cm^4$
Io	.... momento de inercia polar.	$cm^4$
i	..... ángulo de inclinación.	$rad$
K	..... módulo de rigidez.	$kp/mm^2$
K'	.... radio de giro del péndulo.	$m$
Kr	.... fuerza de rozamiento.	$kp, N$
k	..... número de orden de los armónicos.	
L	..... longitud de vigas, biela,	
l	..... distancia a centros de gravedad.	$m, mm$
le	.... longitud equivalente de ejes.	$mm$
lg	.... longitud del gorrón.	$mm$

lm	.... longitud del muñón.	mm
M	..... masa.	kg, u.t.m.
M'	.... momento de una fuerza, par motor.	kpm, Nm
m	..... masa.	kg, u.t.m.
mr	.... masa reducida, masa equivalente.	kg, u.t.m
Nc	.... número de cilindros.	
Nk	.... número del armónico.	
n	..... número de revoluciones por minuto,segundo.	
ne	.... número de vibraciones propio del orden.	
nk	.... número de revoluciones crítico.	
p	..... presión.	N/m <sup>2</sup>
Q	..... carga o fuerza sobre ejes.	kp, N
q	..... carga, fatiga elástica, Q/S.	kp/mm <sup>2</sup>
q'	.... coeficiente de torsión elástica.	kp/mm <sup>2</sup>
q"	.... coeficiente de amortiguación.	kp/mm <sup>2</sup>
R	..... radio del cigüeñal.	m
R'	.... radio de giro en deformación de ejes.	m
Ra	.... reacción en apoyos de vigas.	kp, N
S	..... superficie.	m <sup>2</sup> , mm <sup>2</sup>
T	..... período del péndulo.	
t	..... tiempo.	s
V	..... velocidad.	m/s
Ve	.... vector.	
v	..... volumen.	m <sup>3</sup>
Wo	.... carga en un punto.	kp, N
x	..... longitud en cálculo diferencial.	
Y	..... relación entre biela y radio cigüeñal.	
y	..... flecha.	mm
rad, .0°	ángulo girado por el eje cigüeñales.	α
rad, .0°	ángulo de inclinación.	α <sub>i</sub>
rad, .0°	ángulo de calaje.	α'
rad, .0°	ángulo de oblicuidad de biela.	β
rad....	ángulo del armónico.	β <sub>i</sub>
rad....	ángulo del armónico de orden k	φ

<i>r.p.m.</i> .. número de vibraciones propio del orden.	$n_e$
<i>r.p.s.</i> .. número de revoluciones crítico.	$n_{kr}$
<i>rad</i> .... ángulo de torsión.	$\theta$
<i>rad/s</i> .. velocidad angular del eje.	$\omega$
<i>rad/s</i> .. velocidad angular de la vibración.	$\omega_e$
<i>rad/s</i> .. velocidad angular crítica.	$\omega_{kr}$
<i>rad/s</i> .. velocidad angular de la excitatriz.	$\Omega$
<i>rad/s</i> .. velocidad angular crítica de excitatriz.	$\Omega_k$

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- [H.S] HANS SCHRÖN (bajo la dirección de Hans List): Dinámica de los motores de combustión interna. Editorial Labor S. A., 1945
- [D.H] DEN HARTOG, P: Vibraciones mecánicas, Julius Springer 1936.
- [H.H] HOLZER, HANS: El cálculo de las vibraciones de torsión. Julius Springer. 1921
- [P.P] PORTER, F.P: Coeficientes armónicos de las curvas del par torsional de los motores, Transactions of the A.S.M. 1943.
- [J.G] GEIGER, J: Vibraciones mecánicas y su medida, Julius Springer, 1927.
- [H.W] HANS WYDLER: Vibraciones de torsión en las instalaciones de máquinas de émbolo y ley de compensación, Julius Springer 1922.
- [S.A] STIEGLITZ, A: Vibraciones de torsión en los motores en línea, Luftf. Forschung. 1929.
- [A.K] KIMMEL, A: Investigación sobre la excitación de las vibraciones de flexión y torsión de motores, Luftf. Forschung, 1941.
- [H.M] HAZER, M y MONTIETH, V: Vibraciones de torsión de motores de aviación con cilindros en fila, J.Soc. Automotive, 1938.
- [G.B] BAUER, G: Progresos de la propulsión de buques por medio de motores diesel con reductor y acoplamiento hidráulico Schiffbau. 1938.
- [F.M] MAYR, F: Condiciones especiales que debe satisfacer el motor diesel marino, Publicaciones VDI. 1937.
- [H.S] HANS SCHRÖNS, la sucesión de encendidos en los motores de varios cilindros en fila, R. Oldenbourg. 1938.
- [P.R] PEREZ DEL RIO, JOSE: Tratado general de máquinas marinas Editorial Planeta. 1969.

- [H.D] DUBBEL, H.: Manual del constructor de máquinas, Editorial Labor, S.A. 1944.
- [E.T] TAYLOR, E: Eliminación de las vibraciones de torsión de los cigüeñales en los motores de aviación en estrella por medio del péndulo de Taylor, J. Soc. Automotive. 1936.
- [F.M] MAYR, F, (bajo la dirección de Hans List): Motores diesel fijos y marinos, Editorial Labor, S.A., 1953.
- [D.G] DANTE GIACOSA, : Motores endotérmicos, Editorial Dossat 1986
- [D.H] DEN HARTOG, J.P, : Mecánica de las vibraciones, C.E.C.S.A 1980
- [M.P] M. MUÑOZ y F. PAYRI: Motores de combustión interna alternativos, Servicio de publicaciones, Universidad Politecnica de Valencia. 1984.
- [G.G] GIANCARLO GENTA, Vibración of Structures and Machines Practical aspects, Springer-Verlag. 1992
- MC CLACHLAN, N.W.: Theory of Vibrations, Dover Publications. 1956.
- BISHOP, R.E.D.: The Mechanics of Vibrations, Cambridge University, 1960.
- COLLACOTT, R.: Mechanical Fault Diagnosis and condition monitoring, Chapman and Hall, 1989.
- HARRY N. NORTON: Colección Electrónica/Informática, Editorial Gustavo Gili, S.A., 1989.
- F. KUNZ: Vibration Isolation; Calculation of Crankshaft Stress and Service Measurements, Lloyd's Register Technical Association, 1990-91.
- J. JENZER y H. FROSSARD DE SAUGY: On the dynamics of diesel power plant, New Sulzer Diesel, 1991
- KRAMER, E: Dynamics of rotors and foundations, Diaz de Santos, S.A., 1993.
- MAN B&W DIESEL: Vibration Characteristics; Vibration Aspects of Tow-Stroke Engines in Ships, Proj.G. 1994.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA  
Servicio de Bibliotecas



1700759502