

LA COMPARTIMENTACION DEL ESPACIO
TOMO II

TESIS DOCTORAL DE
JUAN JOSE GUIRADO FERNANDEZ
DIRIGIDA POR
D. JOSE ANTONIO FRANCO TABOADA

DEPARTAMENTO DE REPRESENTACION
Y TEORIA ARQUITECTONICA
DE LA UNIVERSIDAD DE A CORUÑA
1991

LA COMPARTIMENTACION DEL ESPACIO

TOMO II

TESIS DOCTORAL DE
JUAN JOSE GUIRADO FERNANDEZ

DIRIGIDA POR EL DOCTOR
D. JOSE ANTONIO FRANCO TABOADA

DEPARTAMENTO DE REPRESENTACION
Y TEORIA ARQUITECTONICA
DE LA UNIVERSIDAD DE A CORUÑA

1991

INDICE DEL TOMO II

7. Compartimentación simétrica del espacio	237
7.1. Compartimentación no isótropa	237
7.2. Compartimentación isótropa	238
7.2.1. Sistema del cubo	238
7.2.1.1. Redes duales	238
7.2.1.2. Redes con tres tipos de poliedros	241
7.2.1.3. Redes romboédricas	251
7.2.2. Sistema del tetraedro	255
7.2.3. Sistema del dodecaedro	272
7.3. Compartimentaciones regulares y semirregulares	291
8. Módulos mínimos en el espacio	292
8.1. Sistema del tetraedro	292
8.1.1. Poliedros derivados de los tetraedros básico y dual	298
8.1.1.1. Tetraedro básico truncado	301
8.1.1.2. Octaedro	305
8.1.1.3. Tetraedro dual truncado	305
8.1.1.4. Tetraedro dual	312
8.1.2. Rombitetratetraedros	312
8.1.2.1. Cuboctaedro	312
8.1.2.2. Octaedro truncado	318
8.1.3. Resumen	325
8.1.4. Tetraedros duales e inversión	334
8.2. Sistema del cubo	340
8.2.1. Poliedros derivados del cubo y el octaedro	340
8.2.1.1. Cubo truncado	340
8.2.1.2. Cuboctaedro	347

8.2.1.3. Octaedro truncado	349
8.2.1.4. Octaedro con cuboctaedro como complementario	349
8.2.1.5. Octaedro con cubo truncado como complementario	352
8.2.2. Rombicuboctaedros	352
8.2.2.1. Rombicuboctaedro	352
8.2.2.2. Gran rombicuboctaedro	359
8.2.3. Resumen	362
8.2.4. Dualidad e inversión	363
8.3. Sistema del dodecaedro	372
8.3.1. Poliedros derivados del dodecaedro y el icosaedro	377
8.3.2. Rombicosidodecaedros	377
8.3.3. Resumen	377
9. División pentagonal del plano	390
9.1. Rombos de Penrose	394
9.2. Mosaicos de Penrose	398
9.3. Clases de vértices del mosaico	402
10. División pentagonal del espacio	414
10.1. Romboedros de Penrose	414
10.2. Compartimentación tridimensional de Penrose	444
10.3. Clases de aristas del mosaico	451
Conclusiones	552
Bibliografía	571

7. COMPARTIMENTACION SIMETRICA DEL ESPACIO

Los sistemas de simetría, que ya nos han servido en el capítulo 4 para compartimentar totalmente superficies (el plano y la esfera), van a ser utilizados aquí para un estudio semejante referido al espacio tridimensional. Sobre el plano las fronteras entre las distintas regiones fueron los lados de los polígonos de los correspondientes mosaicos, segmentos rectilíneos que, sobre la superficie esférica, fueron sustituidos por sus equivalentes, arcos geodésicos resultantes de la proyección central de aquéllos. Y si entonces las regiones obtenidas fueron polígonos regulares, planos o esféricos, ahora el objetivo es que las regiones espaciales sean poliedros regulares o semirregulares, siendo la frontera entre cada dos de ellas un polígono regular, con aristas compartidas por tres o más regiones y vértices que lo sean de todos los poliedros sobre cuya superficie se hallen.

En el plano, cada cara pertenece a un polígono, cada arista a dos y cada vértice a tres o más. En el espacio, cada cara pertenece a dos poliedros, cada arista a tres o más, y cada vértice a cuatro o más.

Aunque acabamos de limitar la compartimentación a los poliedros regulares y semirregulares, en algún caso consideraremos también otros poliedros pertenecientes a los sistemas de simetría, como los romboedros.

Llamaremos regular a la compartimentación que requiera un solo tipo de poliedro, y semirregular a la que tenga regiones de dos o más tipos.

En otro sentido, será isótropa la compartimentación que mantiene para el centro de cada poliedro los elementos de simetría propios de los sistemas isótropos, y anisótropa la que lo hace con los elementos de sistemas anisótropos.

7.1. COMPARTIMENTACION NO ISOTROPA

Puede considerarse como tal la obvia división del espacio en dos semiespacios que establecen los sistemas planos, aún los que son en el plano sistemas isótropos; pero vamos a ver ahora la que se basa en la utilización de sistemas anisótropos, correspondientes a prismas y antiprismas.

Los antiprismas, con la excepción de AP₃, que es el octaedro, y que es isótropo, entran en esta categoría; no tienen diedros que llenen exactamente el espacio alrededor de una arista, por lo que no permiten la compartimentación. Los prismas, en cambio, sí permiten su acoplamiento alrededor de las aristas de sus bases, pues los diedros sobre éstas miden 90°, y siempre pueden acoplarse cuatro prismas en torno a una de ellas; en consecuencia, los prismas pueden apilarse indefinidamente sobre sus bases en la dirección del eje normal a las mismas (eje no binario), y también adosarse dos de ellos compartiendo una cara lateral y con las bases en un mismo plano. Siempre que dichas ba-

ses formen un mosaico que compacte el plano pueden apilarse indefinidamente prismas cuyas bases coincidan con los polígonos del mosaico. De este modo pueden utilizarse en estas divisiones anisótropas prismáticas del espacio únicamente los prismas con 3, 4, 6, 8 y 12 caras laterales dispuestos de modo que sus bases formen alguno de los tres mosaicos regulares o de los ocho semirregulares (figura 7.1.), o combinaciones de los mismos. Y en sentido estricto hay que excluir el mosaico plano cuadrado, porque sobre él encaja el prisma P4, que es el cubo, y que es isótropo.

En el apartado 7.2.2. veremos otra compartimentación anisótropa relacionada con la ahora excluida.

7.2. COMPARTIMENTACION ISOTROPA

Vamos a explorar las posibilidades de compartimentación que ofrecen los sistemas isótropos no planos de simetría. Comenzaremos con el elemento excluido como isótropo en el apartado anterior: el cubo.

7.2.1. SISTEMA DEL CUBO

Como vimos en 7.1., las aristas de la base de los prismas permiten el acoplamiento de cuatro prismas en torno a cada una de ellas. En el caso del cubo, prisma P4, todas sus aristas son equivalentes, y los cuatro cubos agrupados comparten los planos normales en los extremos de la arista, lo que permite añadir otros cuatro cubos en uno de ellos, que queda como centro del conjunto de ocho cubos resultante.

Analicemos los elementos de simetría que posee el conjunto de estos ocho cubos: las seis aristas concurrentes en el vértice central definen tres ejes cuaternarios del conjunto. Ocho diagonales, una por cada cubo, marcan cuatro ejes ternarios, y doce diagonales de caras señalan seis ejes binarios. En cuanto a planos de simetría, las caras concurrentes definen tres, y las diagonales con las aristas otros seis. Vemos pues, que los elementos de simetría del conjunto son los mismos que tendría un solo cubo.

Como el apilamiento puede continuarse indefinidamente en todas direcciones, y todos los vértices y centros de cubos pueden considerarse centros del sistema, tendremos un conjunto infinito de centros, ejes y planos de simetría que definen una malla espacial con dos tipos de nudos: unos son centros de cubos, otros vértices.

7.2.1.1. REDES DUALES

Si en el lugar de cada cubo colocamos otro de los poliedros del sistema, por ejemplo un cubo truncado, manteniéndolo en contacto con los demás por las caras correspondientes a las del cubo, quedará en el lugar de los vértices un espacio, en este caso octaédrico, y habremos obtenido una red semirregular.

Esto es precisamente lo que hemos representado en las figuras 7.2. En la

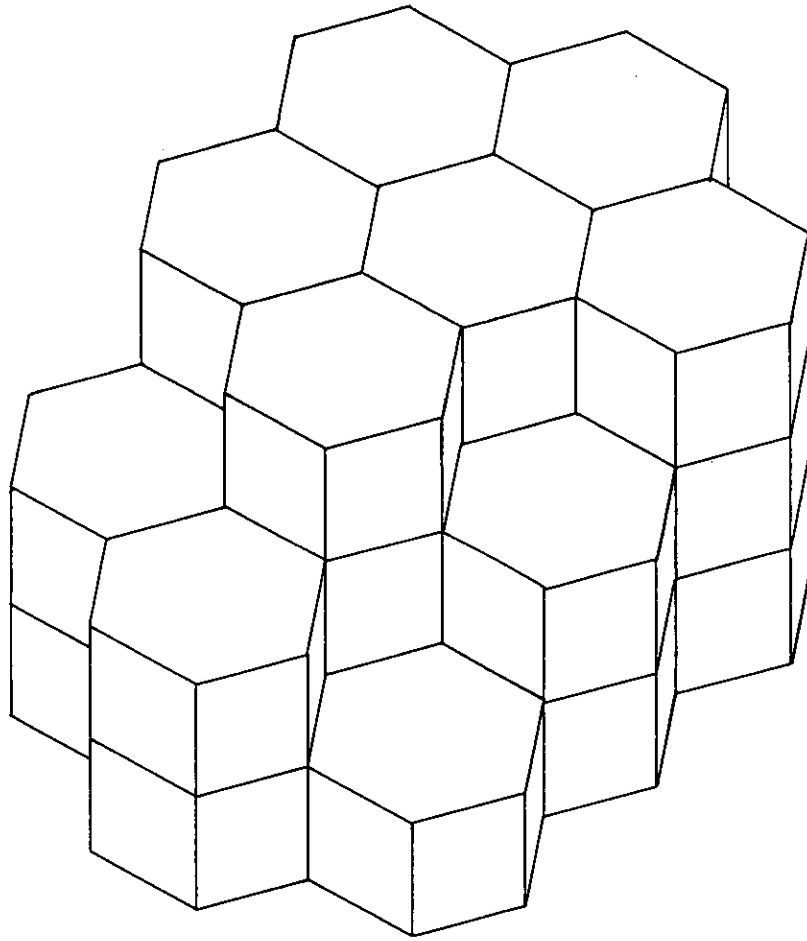


FIG 7.1.a COMPARTIMENTACION ANISOTROPA REGULAR

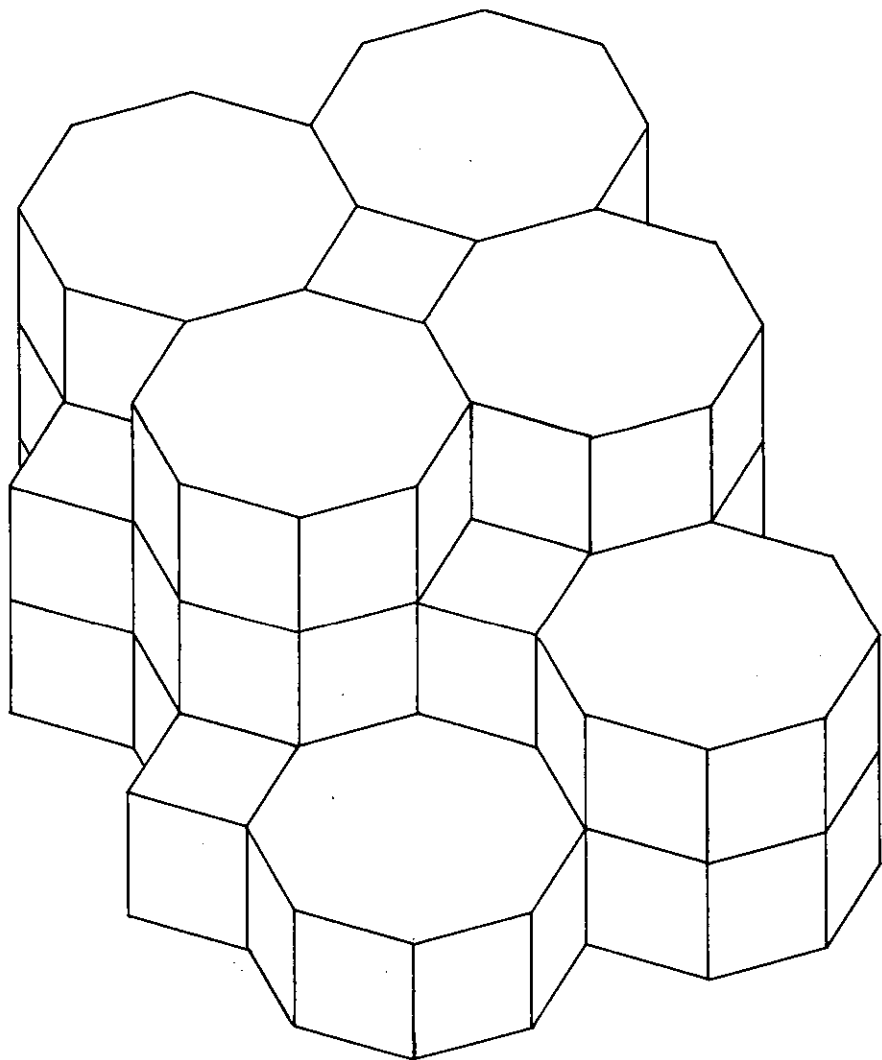


FIG 7.1.b COMPARTIMENTACION ANISOTROPA SEMIRREGULAR

figura 7.2.a los centros de los cubos son centros de simetría del primer tipo y sus vértices son centros del segundo tipo. En la 7.2.b los centros del primer tipo coinciden con los de los cubos truncados, y los del segundo tipo con los de los octaedros. En 7.2.c ambos centros coinciden respectivamente con los de cuboctaedros y octaedros. La primera red era regular, y las otras dos semirregulares.

Fijémos ahora en la figura 7.2.d: tanto los centros del primer tipo como los del segundo coinciden con centros de octaedros truncados. Todas las regiones del espacio son idénticas y por consiguiente se trata de una división regular del mismo. Pero aquí, a diferencia de la red cúbica, todos los centros de simetría coinciden con centros de poliedros iguales: se trata de una red autodual.

En la figura 7.2.e aparece una división del espacio igual a la de 7.2.c, pero ahora los centros del primer tipo son centros de octaedros, y los del segundo son centros de cuboctaedros, ocupando por lo tanto lugares intercambiables. Esta red es, así, dual de aquella.

Lo mismo ocurre con la red de la figura 7.2.f, dual de la 7.2.b, y finalmente con 7.2.g, red de cubos dual de la 7.2.a, intercambiándose entre ambas figuras centros y vértices de cubos, pero conservándose todos los elementos de simetría comunes.

La figura 7.3. representa conjuntamente las dos redes duales, de modo que se haga evidente cómo los cubos de una red tienen como vértices los centros de los de la otra, y viceversa.

Los centros de ambas redes, junto con los ejes de simetría ternarios y cuaternarios (los binarios no se han representado para no hacer la figura más confusa), aparecen en la figura 7.4. Sobre los ejes binarios, obsérvese que a los que tenía el cubo hay que añadir ahora las paralelas medias de sus caras.

De este modo hemos hecho intervenir en las redes cúbicas vistas hasta ahora a los poliedros básicos (cubo y octaedro) y a sus intersecciones (cubo truncado, octaedro truncado y cuboctaedro). Vamos a ver a continuación otras redes espaciales, con intervención de rombicuboctaedros.

7.2.1.2. REDES CON TRES TIPOS DE POLIEDROS

Si en el lugar ocupado por los cubos de la red básica colocamos rombicuboctaedros, el resto del espacio no ocupado por ellos formará un continuo; podremos dividirlo en regiones colocando cuboctaedros con sus caras triangulares en contacto con las caras triangulares de los rombicuboctaedros, y sus centros en coincidencia con los centros de la red cúbica dual. Pero estos poliedros aun no ocuparán todo el espacio restante: aparece un tercer conjunto de regiones constituido por cubos, cuyos centros coinciden con las intersec-

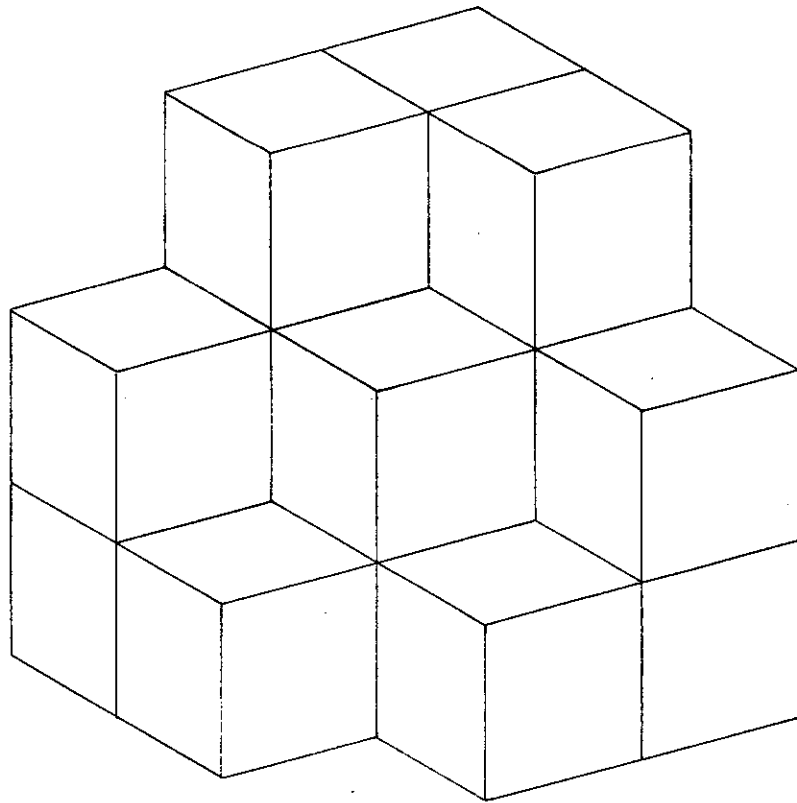


FIG 7.2.a RED CUBICA BASICA

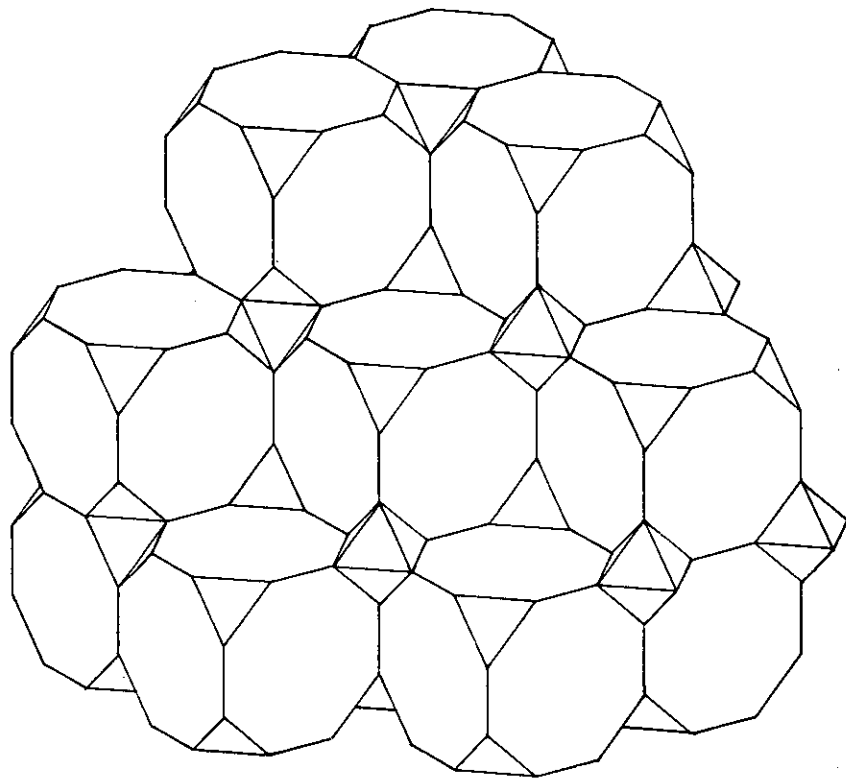


FIG 7.2.b CUBOS TRUNCADOS Y OCTAEDROS

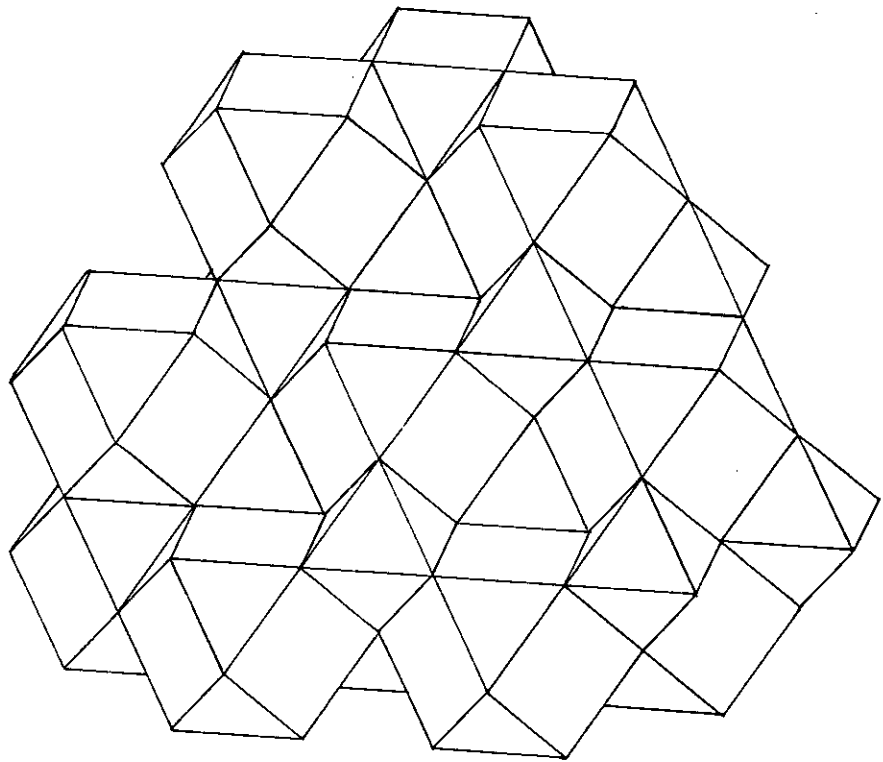


FIG 7.2.c CUBOCTAEDROS Y OCTAEDROS

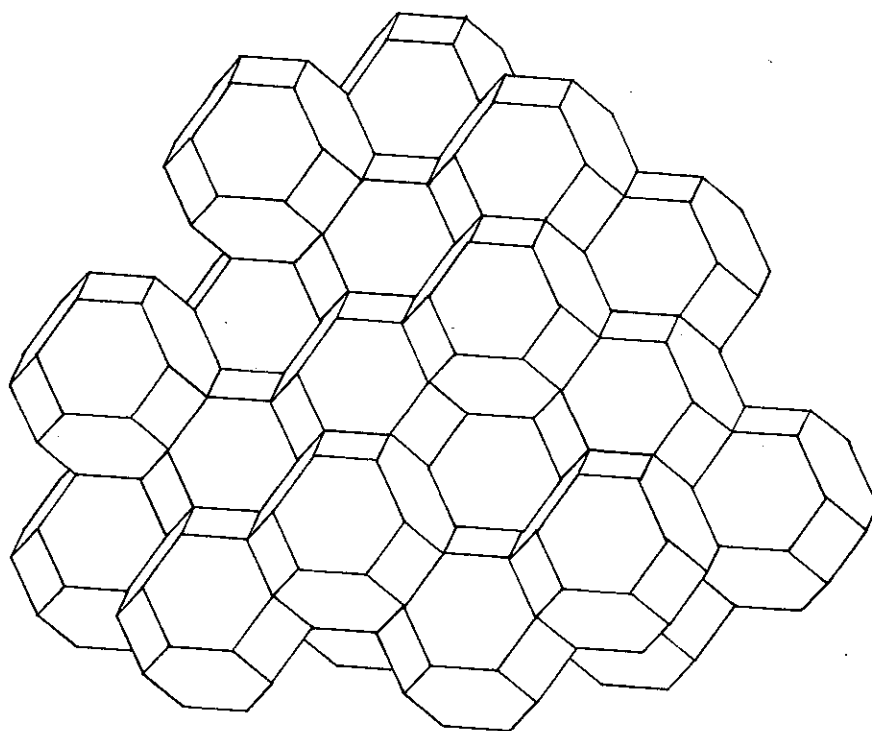


FIG 7.2.d OCTAEDROS TRUNCADOS

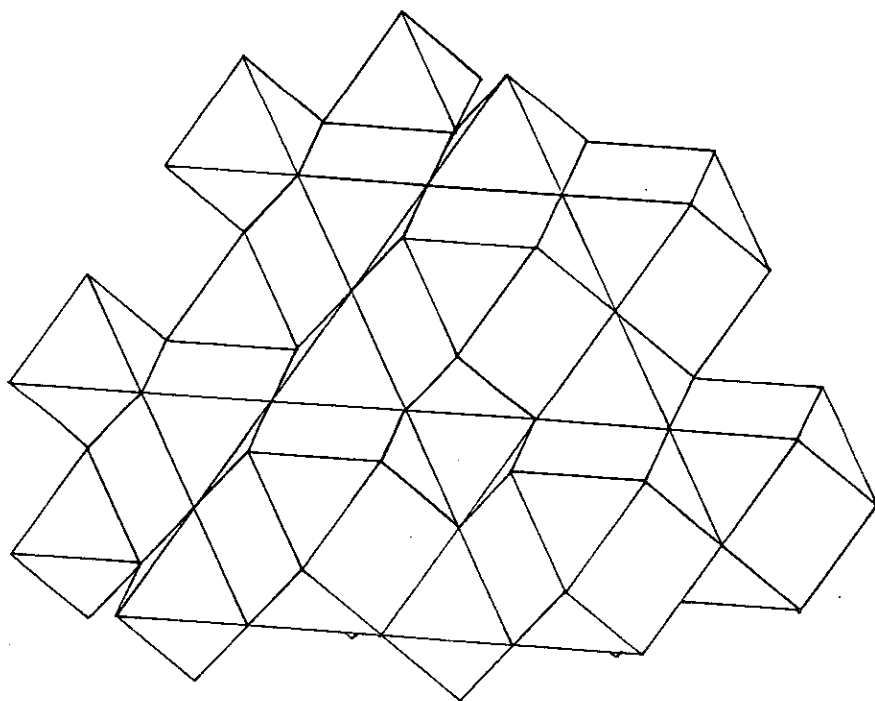


FIG .7.2.e OCTAEDROS Y CUBOCTAEDROS

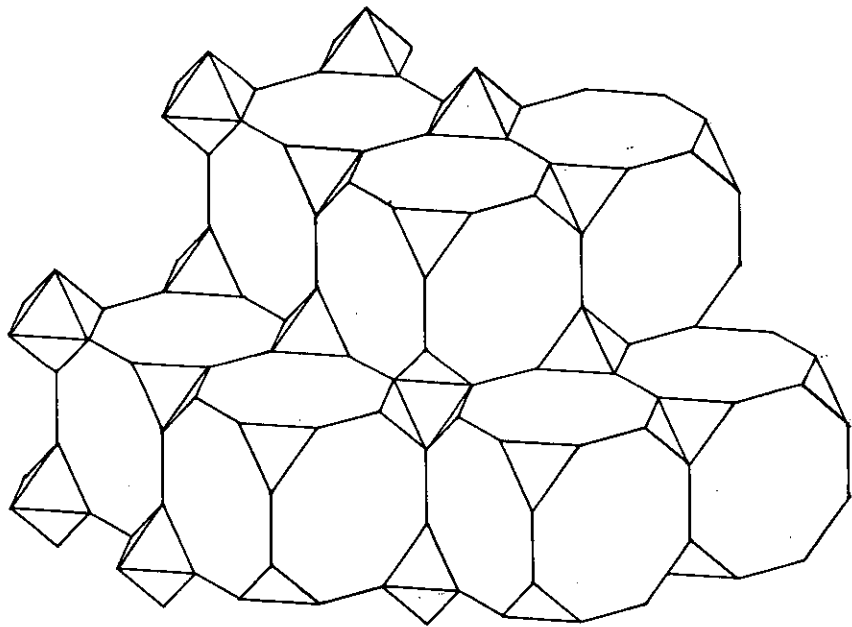


FIG 7.2.f OCTAEDROS Y CUBOS TRUNCADOS

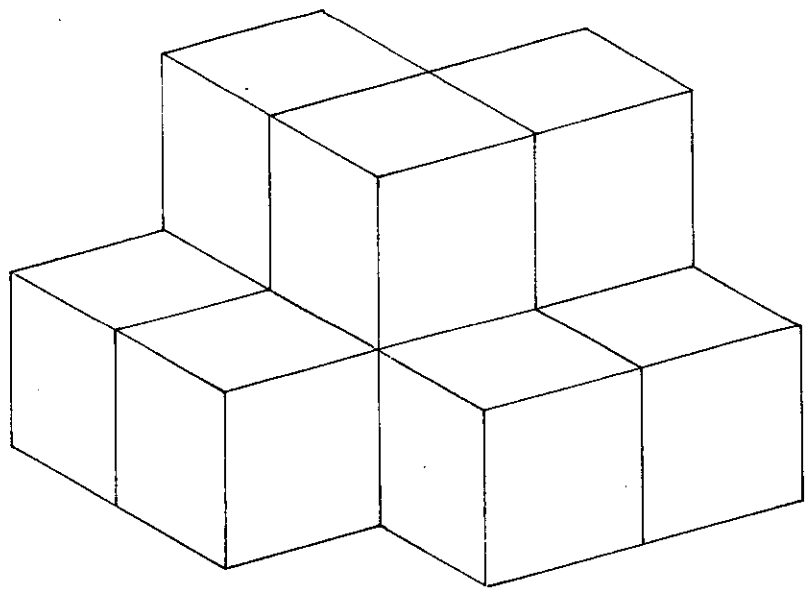


FIG 7.2.g RED CUBICA DUAL

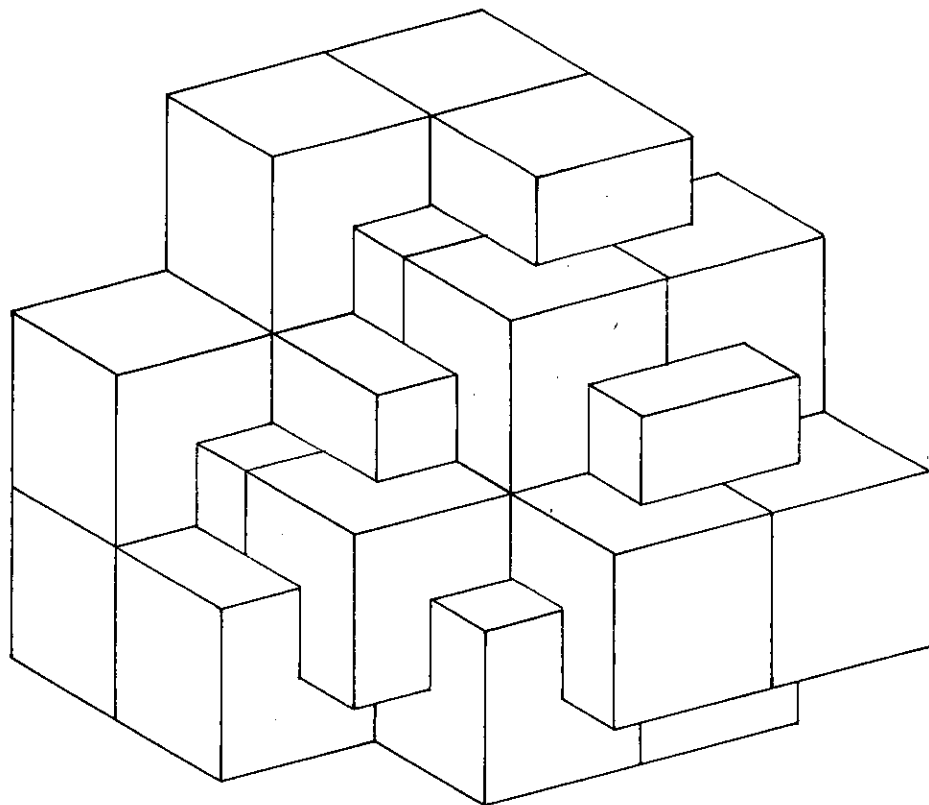


FIG 7.3. REDES CUBICAS DUALES

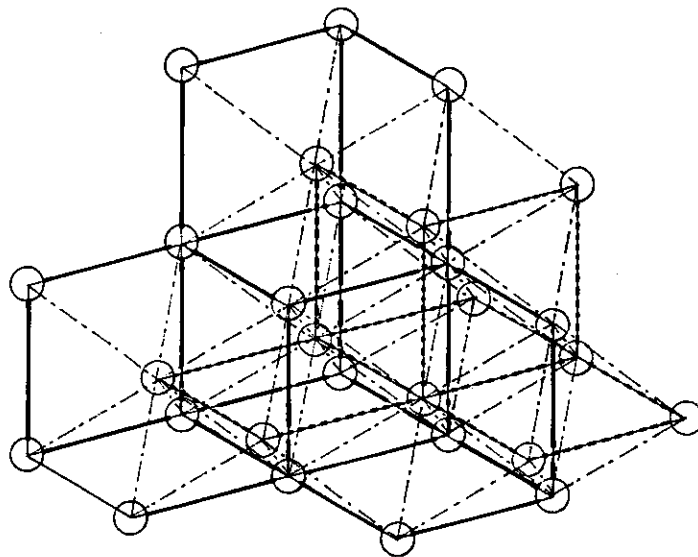


FIG 7.4. CENTROS DE LAS REDES CUBICAS

EJES TERNARIOS COMUNES - - - - -
 EJES CUATERNARIOS DE AMBOS TIPOS ————
 EJES BINARIOS NO REPRESENTADOS

ciones de los ejes binarios (centros de aristas de la red cúbica básica) no representados hasta ahora. Véase dicha red en la figura 7.5.a.

De modo análogo, en la figura 7.5.b se obtiene una red semejante, con el gran rombicuboctaedro en posición básica y el octaedro truncado en posición dual, y con cubos asimismo en los centros de las aristas de la red básica. En la figura 7.6. aparece la red cúbica, con los centros y ejes binarios, aunque se han omitido algunos de éstos, los que son bisectrices de los ángulos que forman los representados, es decir, los paralelos a los ejes cuaternarios.

Así, todos los poliedros semirregulares del sistema, además del básico y su dual, han aparecido en divisiones del espacio con simetría cúbica, a excepción del cubo achatado, que produce un espacio residual continuo no divisible en partes regulares ni semirregulares.

7.2.1.3. REDES ROMBOEDRICAS

Acabamos de ver cómo dada una red cúbica existe una red dual de la misma. Vamos ahora a establecer, sin salir de la red básica, otro tipo de dualidad entre sus regiones.

Consideraremos que dos regiones cúbicas que comparten una cara son de distinta clase, mientras que dos regiones que comparten caras con una misma son de la misma clase. De este modo, regiones opuestas por la arista son de la misma clase, mientras que las opuestas por el vértice o por la cara son de distinta clase (para poner de manifiesto una vez más la ley de dualidad llamamos a las regiones que comparten una cara "opuestas por la cara").

De esta manera queda dividido el espacio en dos mitades, cada una compuesta por cubos conectados entre sí únicamente por las aristas, formando una suerte de ajedrezado tridimensional. Podemos observar que en torno a un vértice hay cuatro cubos de cada clase, cuyos centros son los vértices de un tetraedro, mientras que los centros de los cubos de la otra clase definen un tetraedro dual del primero. Los vértices de ambos tetraedros son centros de la red básica de cubos, mientras que su centro común pertenece a la red dual de cubos; de modo que dos redes duales de cubos han dado lugar a cuatro clases de ellos, cada una ligada a una red de tetraedros, mostrando de nuevo la íntima conexión entre los sistemas del cubo y del tetraedro.

En la figura 7.7.a se han representado los cubos de la primera clase de una porción de espacio.

El centro de un cubo determina con cada par de aristas opuestas un plano de simetría. La porción de uno de estos planos comprendida entre una arista y dos ejes ternarios es un triángulo isósceles, cara lateral común de dos pirámides de base cuadrada que comparten dicha arista (las bases son caras contiguas de un cubo). Podemos descomponer así el cubo en seis pirámides,

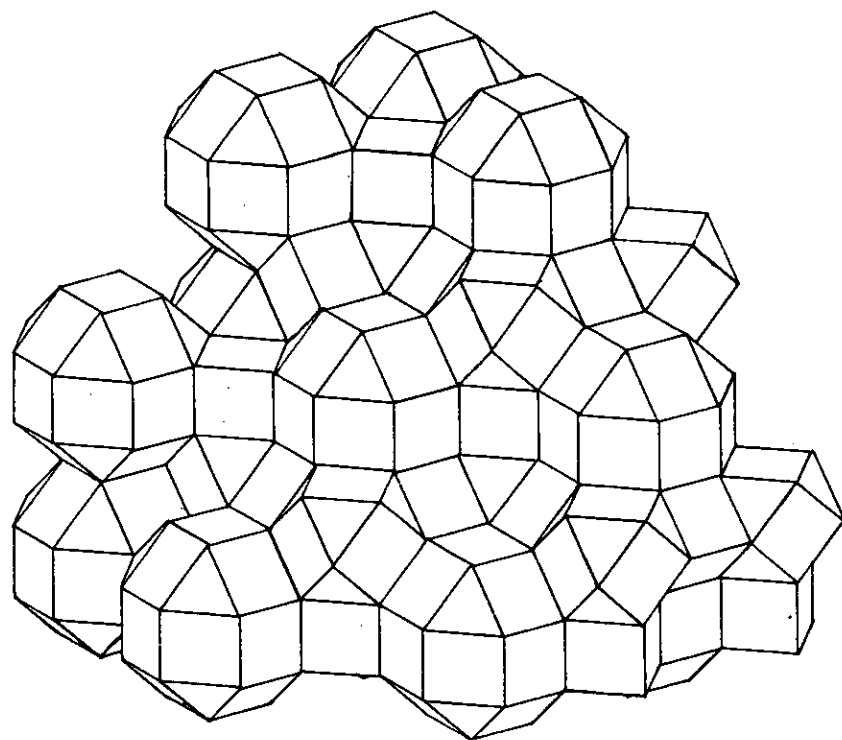


FIG 7.5.a ROMBICUBOCTAEDROS, CUBOCTAEDROS Y CUBOS

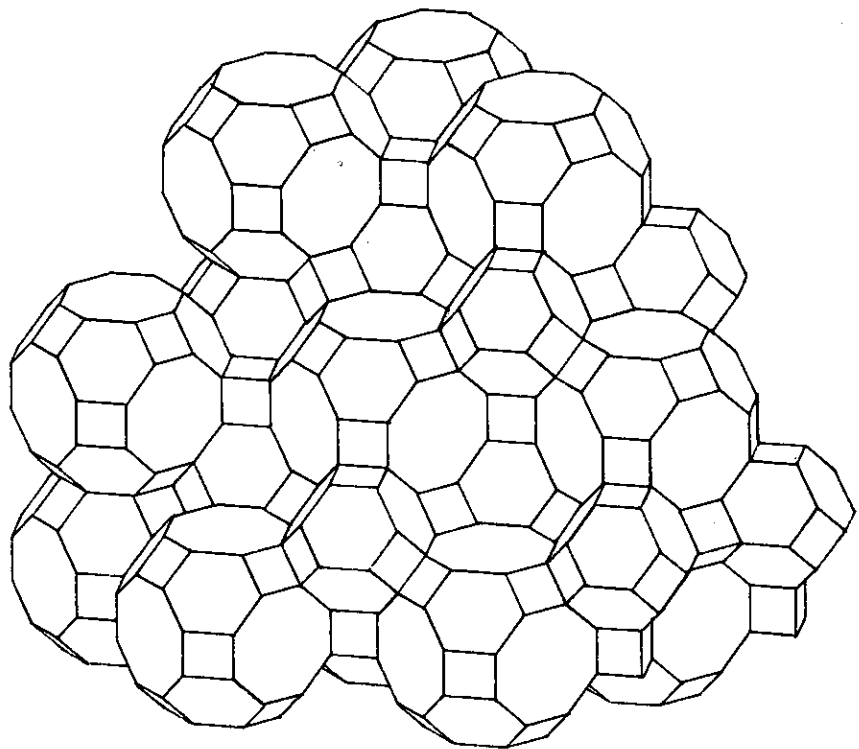


FIG 7.5. b GRANDES ROMBICUBOCTAEDROS, OCTAEDROS
TRUNCADOS Y CUBOS

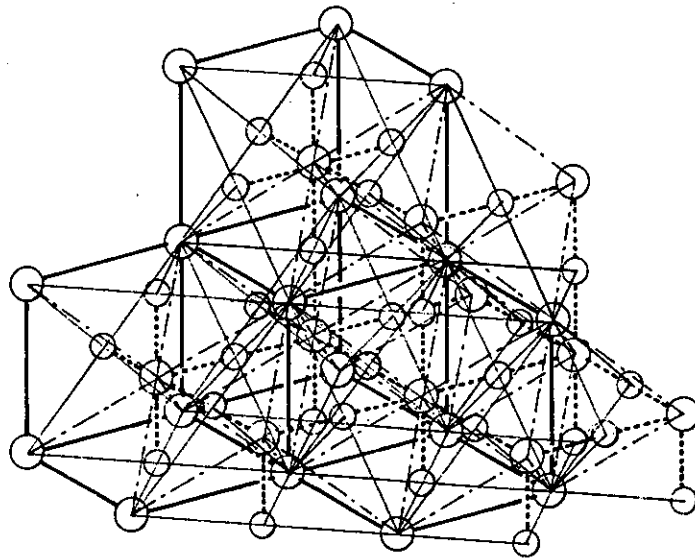


FIG 7.6. CENTROS DE LA RED CUBICA COMPLETA

EJES CUATERNARIOS	—————
EJES TERNARIOS	- - - - -
EJES BINARIOS	—————
(NO REPRESENTADOS LOS PARALELOS A LOS CUATERNARIOS)	

cuyas bases son las seis caras, y sus vértices coinciden en el centro. Si dividimos de este modo los cubos de la segunda clase, y añadimos cada pirámide al cubo contiguo de la primera clase, cada uno de éstos se incrementa en seis pirámides, una en cada cara, convirtiéndose en un cubo apiramidado; pero las caras triangulares que concurren en una misma arista son coplanarias, formando un rombo, de modo que las 6x4 caras triangulares se convierten en doce caras rómbicas, una por cada arista, y hemos dividido el espacio en regiones idénticas que son rombododecaedros. Hemos obtenido así una nueva división regular del espacio, coincidiendo los centros de los rombododecaedros con los centros de los cubos de una misma clase (figura 7.7.b). En la figura 7.8.a hemos representado los cubos de la clase segunda, y en la 7.8.b los romboedros derivados de ellos. Estos romboedros tienen en común con los de la clase primera los vértices ternarios, por coincidir con los vértices comunes a los cubos de ambas clases, mientras que los vértices cuaternarios de una clase son centros de la otra. Las caras de ambas redes romboédricas se cortan perpendicularmente, compartiendo las diagonales menores, que son las aristas de la red de cubos.

En la figura 7.9. vemos ambas redes conjuntamente, y en la 7.10. la red de centros y ejes ternarios y cuaternarios que comparten. No figuran los ejes binarios.

7.2.2. SISTEMA DEL TETRAEDRO

Como sabemos, algunos de los poliedros del sistema del cubo pertenecen de igual modo al sistema del tetraedro. Esto ocurría con el octaedro, que es el tetratetraedro; el cuboctaedro, rombitetratetraedro, y el octaedro truncado, gran rombitetratetraedro. Aquellas divisiones del espacio del sistema cúbico, ya vistas en 7.2.1.1., que incluyen exclusivamente poliedros de estos tipos, esto es, octaedros y cuboctaedros (figuras 7.2.c,e) y octaedros truncados (figura 7.2.d), pueden considerarse también pertenecientes a este sistema.

Pero para que una compartimentación pueda ser incluida solamente en el sistema del tetraedro ha de contener algún poliedro que pertenezca solamente a él. Esto puede conseguirse a partir de la red cúbica básica: en los cubos de la clase I inscribimos tetraedros en la posición básica (aprovechando que el cubo es el romboedro del sistema del tetraedro), haciendo coincidir cada arista de un tetraedro inscrito con una de las diagonales de la cara del cubo; en los cubos de la clase II los inscribimos en la posición dual, de modo que las aristas de estos tetraedros coincidan con las otras diagonales de las caras correspondientes de sus cubos. Los tetraedros de ambas clases tienen en común sus aristas, y el espacio no ocupado por tetraedros queda dividido en regiones octaédricas que comparten sus aristas también entre

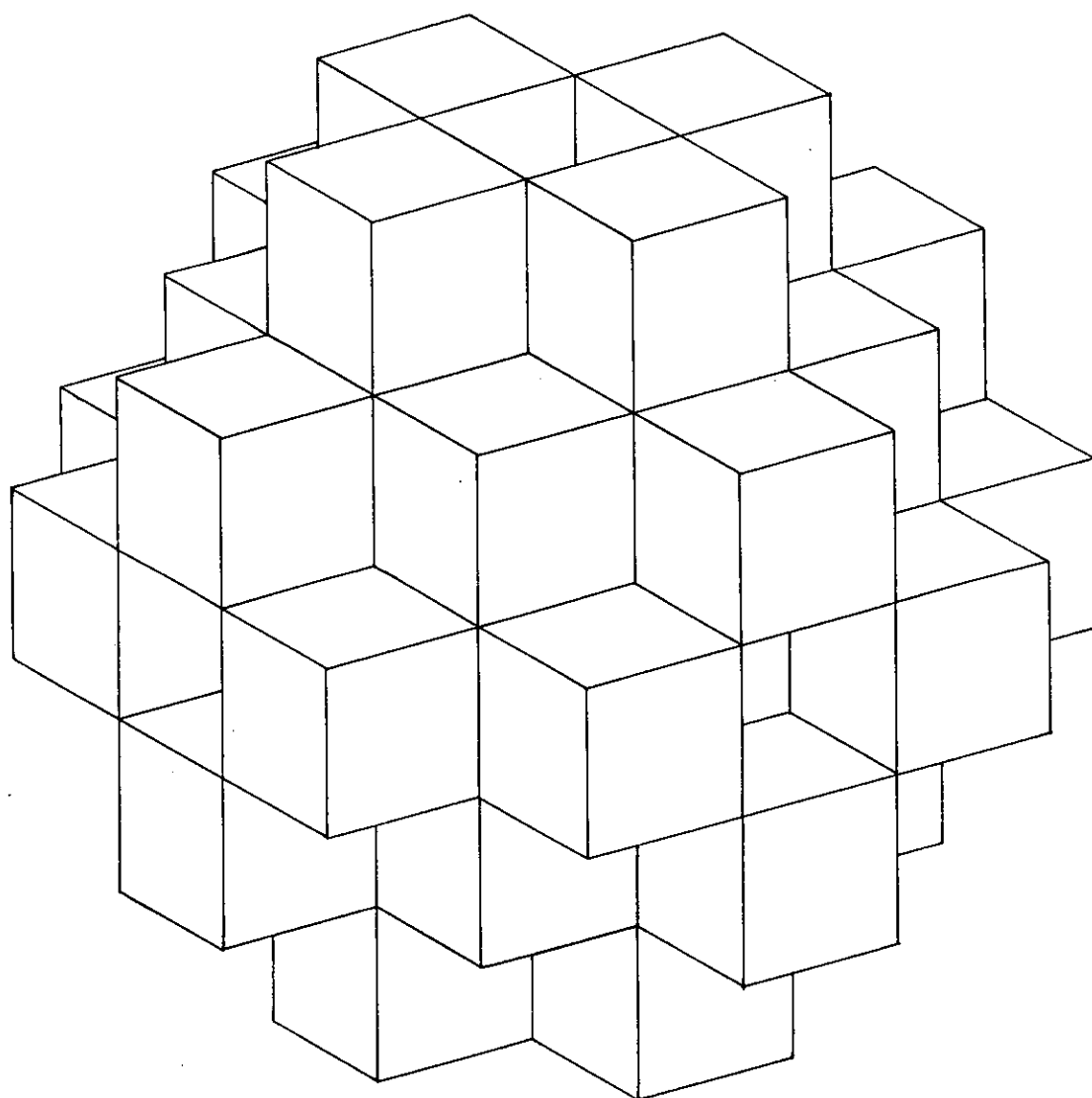


FIG 7.7.a CUBOS DE LA CLASE I

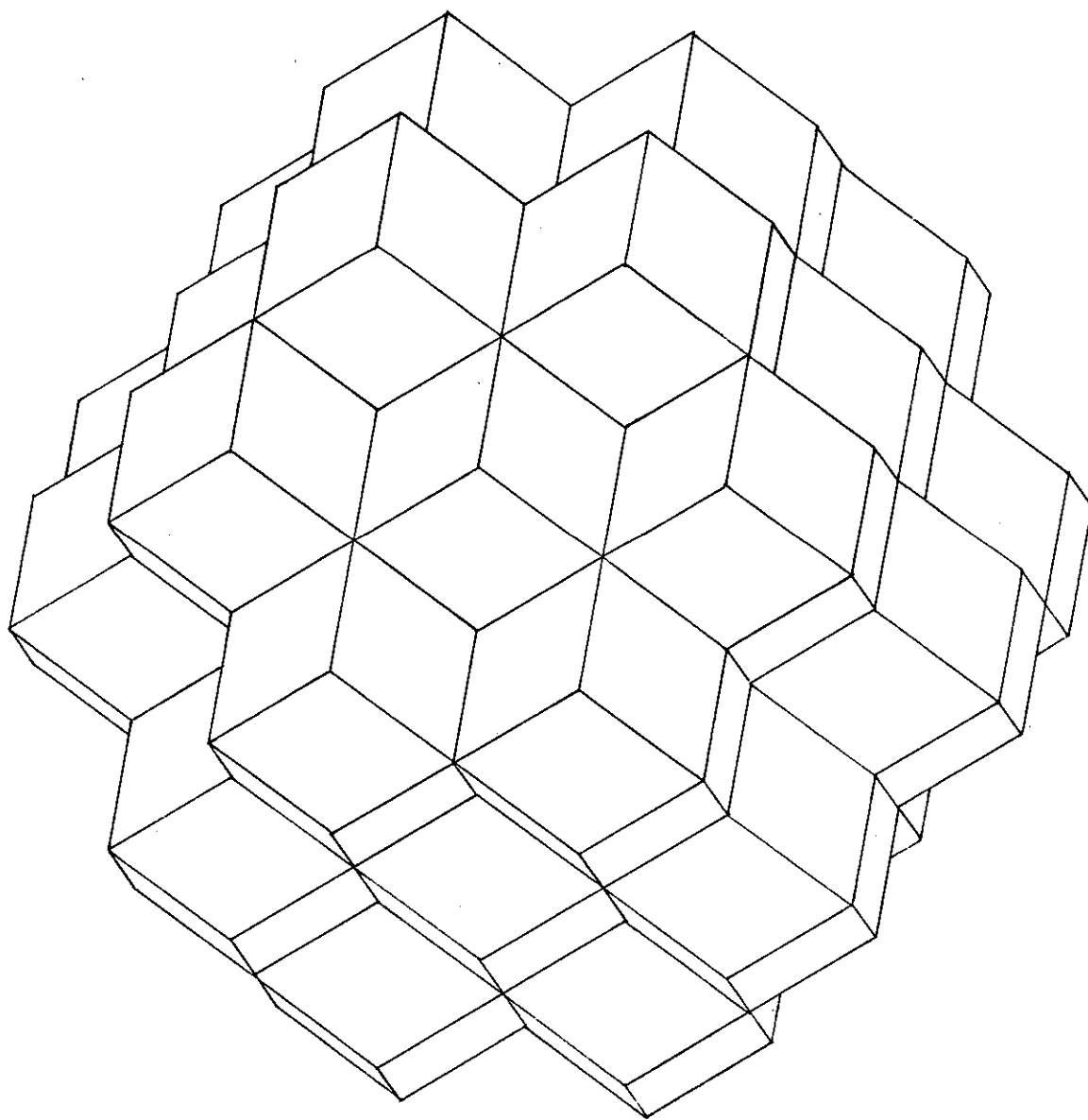


FIG 7.7. b ROMBODODECAEDROS DE LA CLASE I

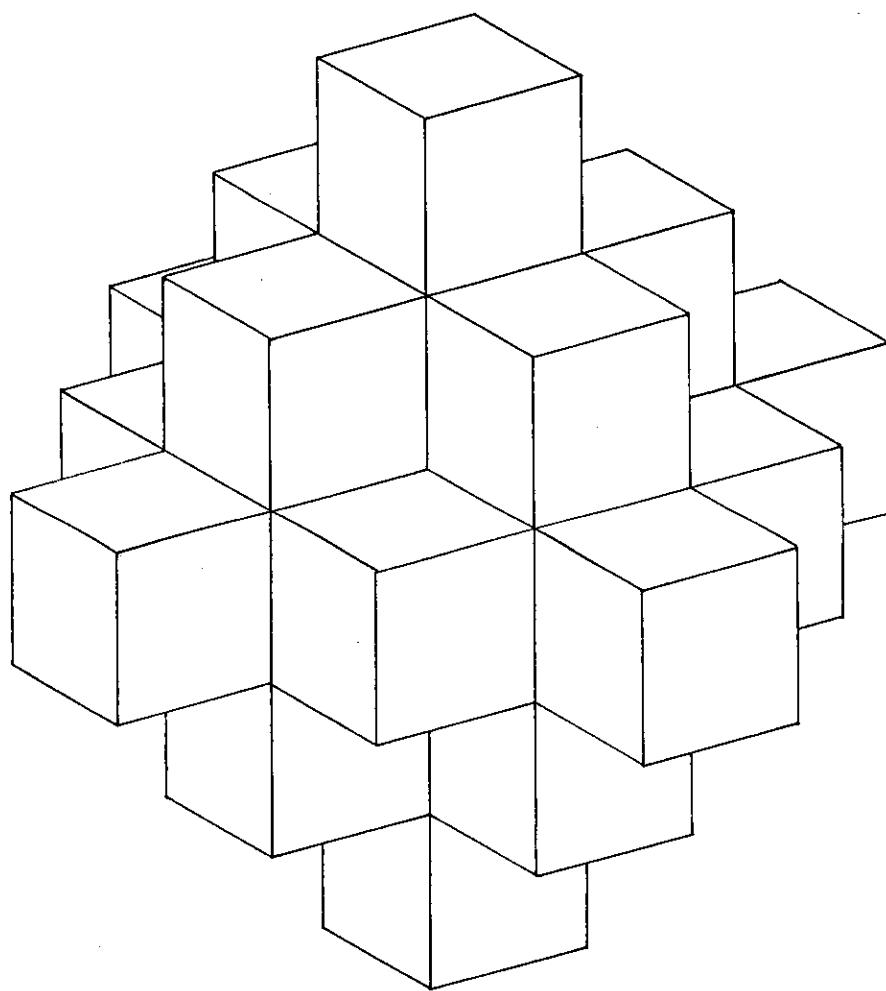


FIG 7.8.a CUBOS DE LA CLASE II

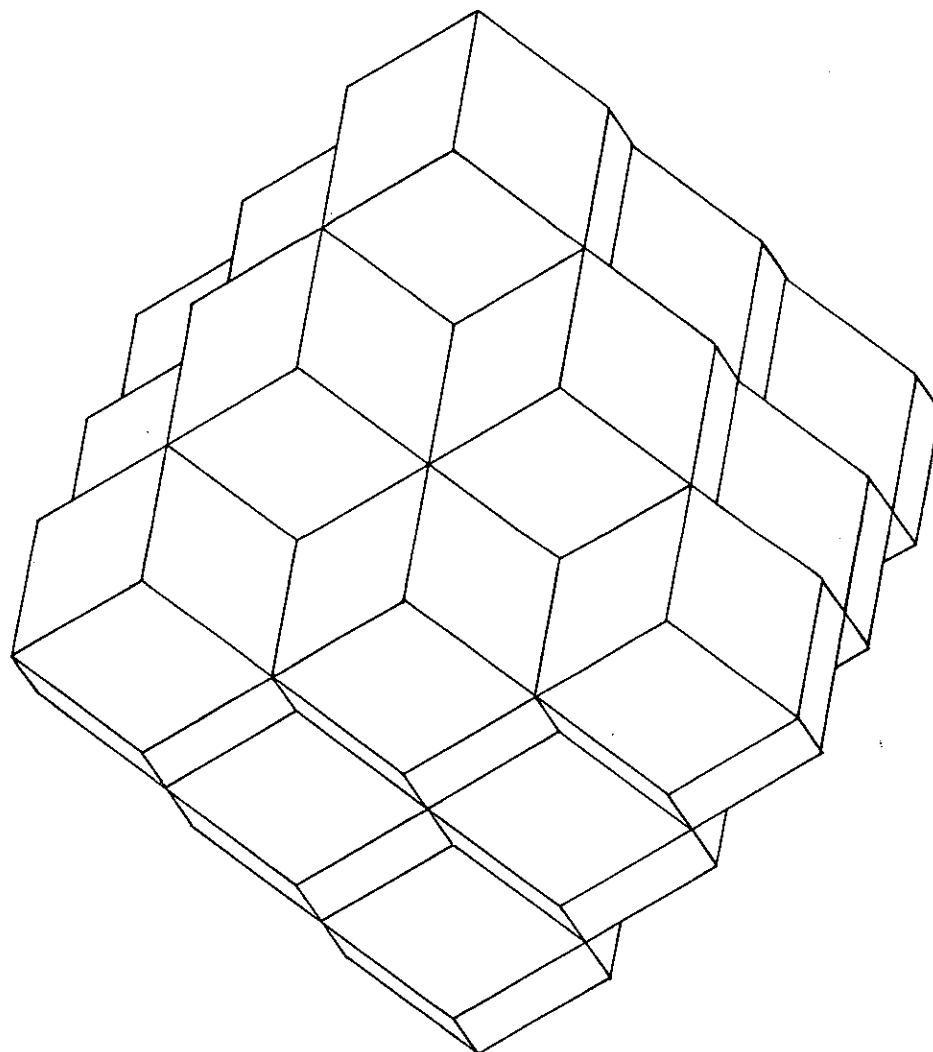


FIG 7.8.b ROMBODODECAEDROS DE LA CLASE II

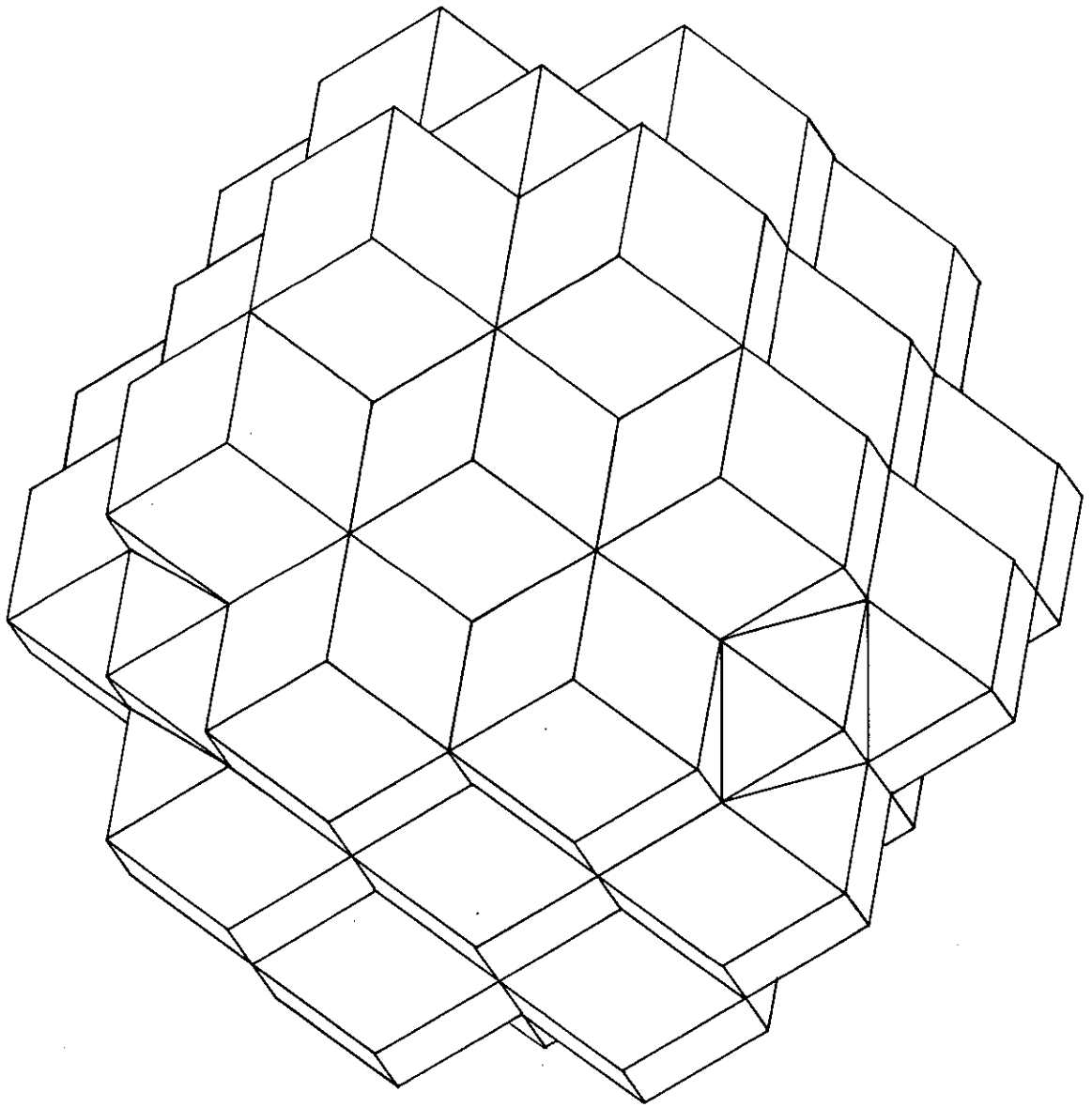


FIG 7.9. ROMBODODECAEDROS DE LAS CLASES I Y II

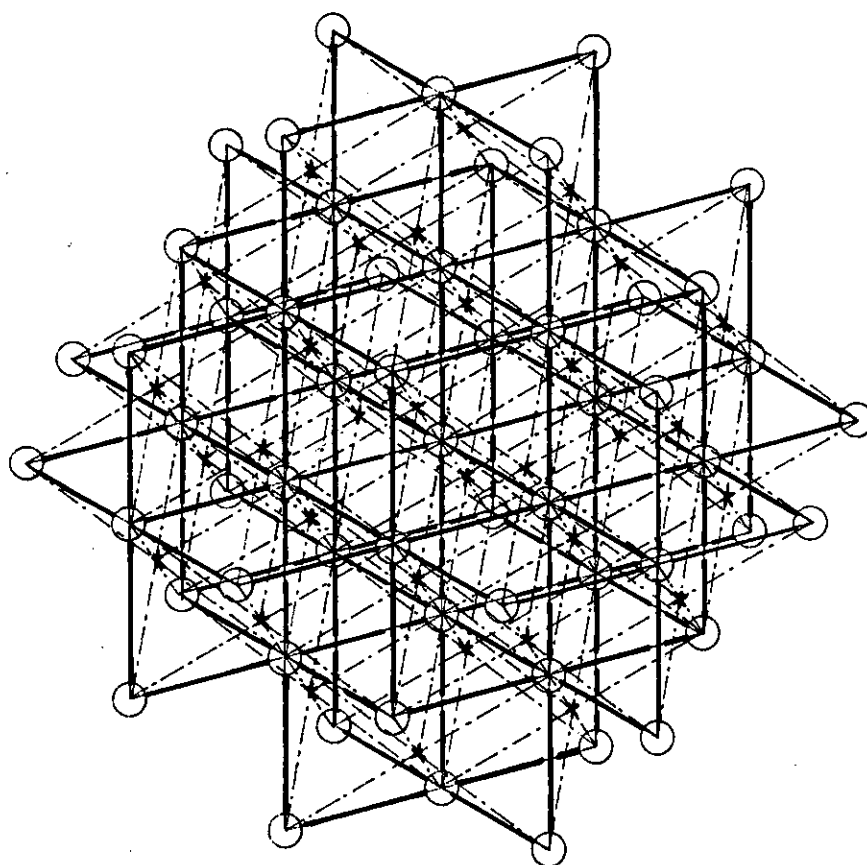


FIG 7.10. CENTROS DE LA RED ROMBODOECAEDRICA

EJES CUATERNARIOS —————
 EJES TERNARIOS - - - - -
 EJES BINARIOS NO REPRESENTADOS

sí y con los tetraedros vecinos. De este modo cada octaedro está rodeado por ocho tetraedros, y cada tetraedro por cuatro octaedros. Cada cara es común a un tetraedro y un octaedro; cada arista es compartida por dos tetraedros (uno de cada clase) y dos octaedros; y en cada vértice concurren ocho tetraedros y seis octaedros.

Esta compartimentación se refleja en la figura 7.11., representándose la red de centros y ejes en la figura 7.12. Como los centros de los tetraedros coinciden con los de la red básica de cubos y los centros de los octaedros con los vértices de dicha red, que son los centros de la red dual, esta red coincide con la red cúbica completa de la figura 7.6., con sus ejes binarios, ternarios y cuaternarios.

En las figuras siguientes se representan por separado los octaedros (figura 7.13.a), los tetraedros de la clase I (figura 7.13.b) y los de la clase II (figura 7.13.c).

La figura 7.14.a representa un octaedro con los ocho tetraedros que lo rodean. Cada par de tetraedros opuestos forman con el octaedro un romboexaedro anisótropo con un eje diedral ternario y tres binarios cíclicos perpendiculares a él. Se trata de una compartimentación anisótropa regular que podemos añadir a las prismáticas consideradas en 7.1.

En 7.14.b vemos como puede obtenerse este romboexaedro anisótropo a partir del isótropo, que es el cubo, mediante una transformación afín que duplique la dimensión de una de sus diagonales permaneciendo inmutables los planos perpendiculares a ella (afinidad ortogonal). Las pirámides triangulares de vértices ADEG y BCFH se convierten en tetraedros, mientras que el antiprisma situado entre ellas pasa a ser un octaedro.

Es obvio que si la red de cubos es una división regular del espacio, también lo es la red de romboedros anisótropos, mientras que la subdivisión de éstos en octaedros y tetraedros produce una división semirregular, que vemos en la figura 7.15. Queda claro que en esta red existe el mismo número de octaedros y de tetraedros de cada clase, coincidiendo en todo con la de la figura 7.11.

En la figura 7.14.c se advierte que la descomposición efectuada antes no es la única semirregular posible: si en lugar de cortar el romboedro por los planos ortogonales al eje ternario que pasan por los vértices lo hacemos por los paralelos equidistantes de ellos, que pasan por los puntos medios de las aristas, queda aquél descompuesto en dos tetraedros truncados y dos tetraedros menores en sus vértices extremos; puede apreciarse mejor en la figura 7.14.d.

Con ello hemos encontrado una nueva compartimentación del espacio, la de las figuras 7.16., cuyas regiones son, en igual número, tetraedros básicos,

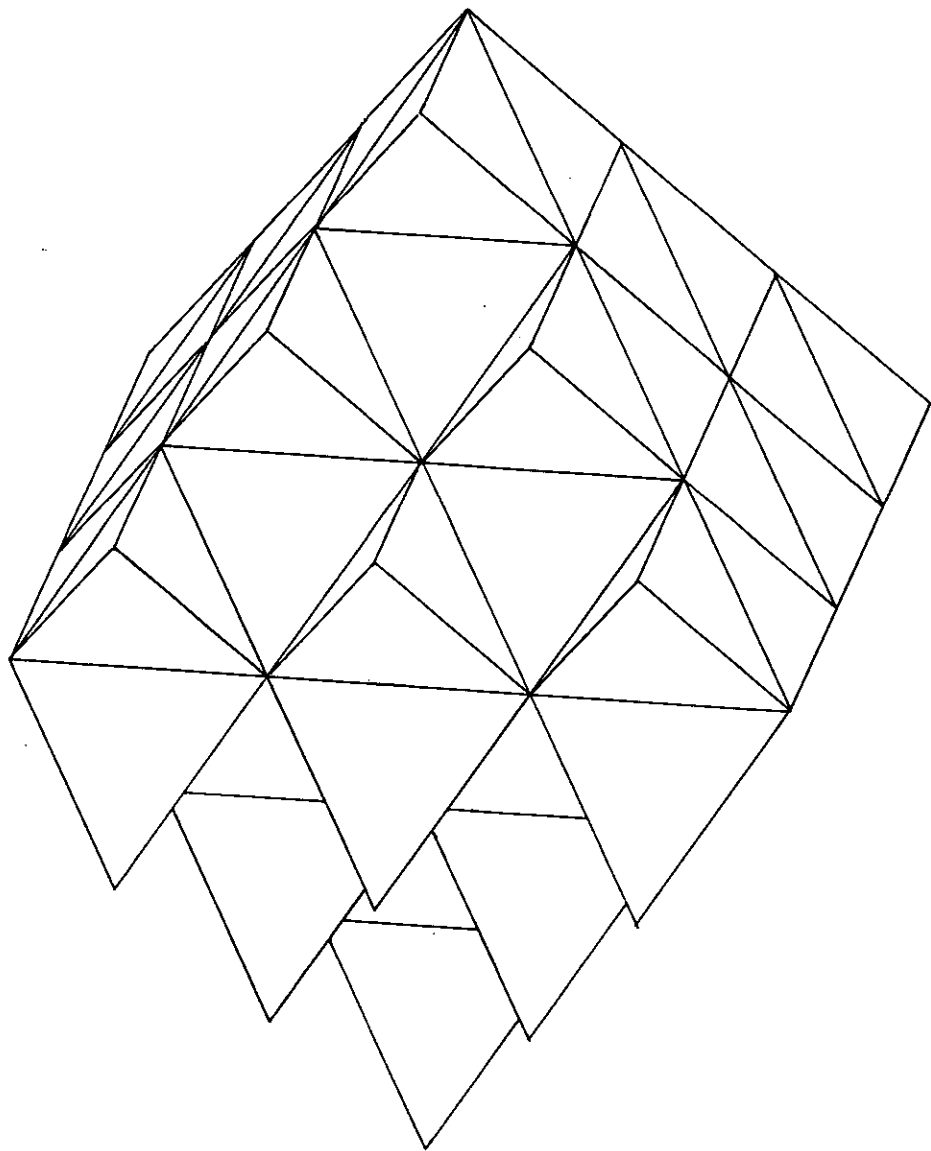


FIG 7.11. TETRAEDROS Y OCTAEDROS

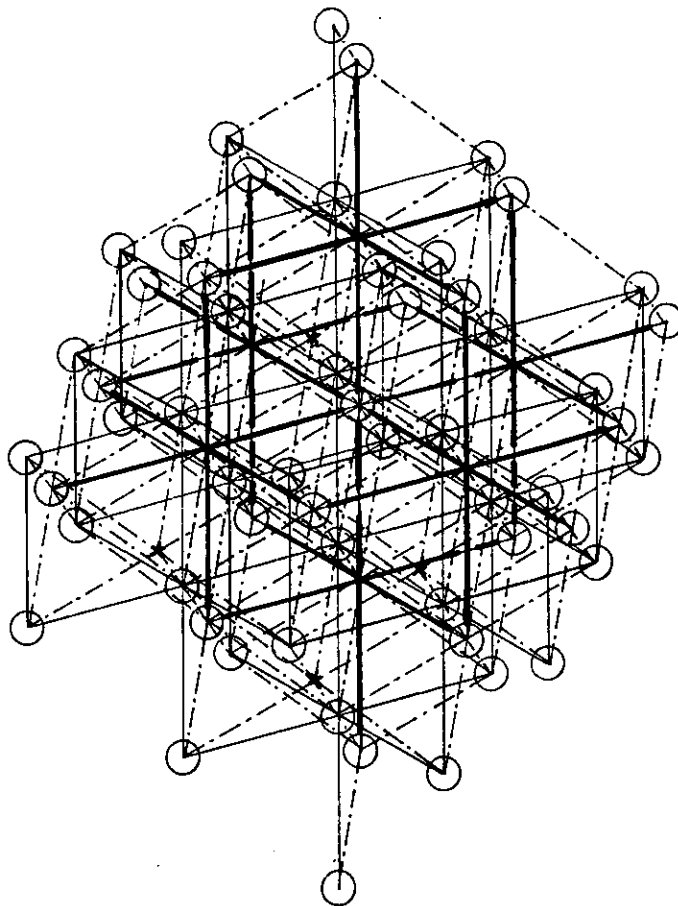


FIG 7.12. CENTROS DE LA RED TETRAOCTAEDRICA

EJES CUATERNARIOS	—————
EJES TERNARIOS	- - - - -
EJES BINARIOS DE LOS TETRAEDROS	—————
(NO REPRESENTADOS LOS DE LOS OCTAEDROS)	

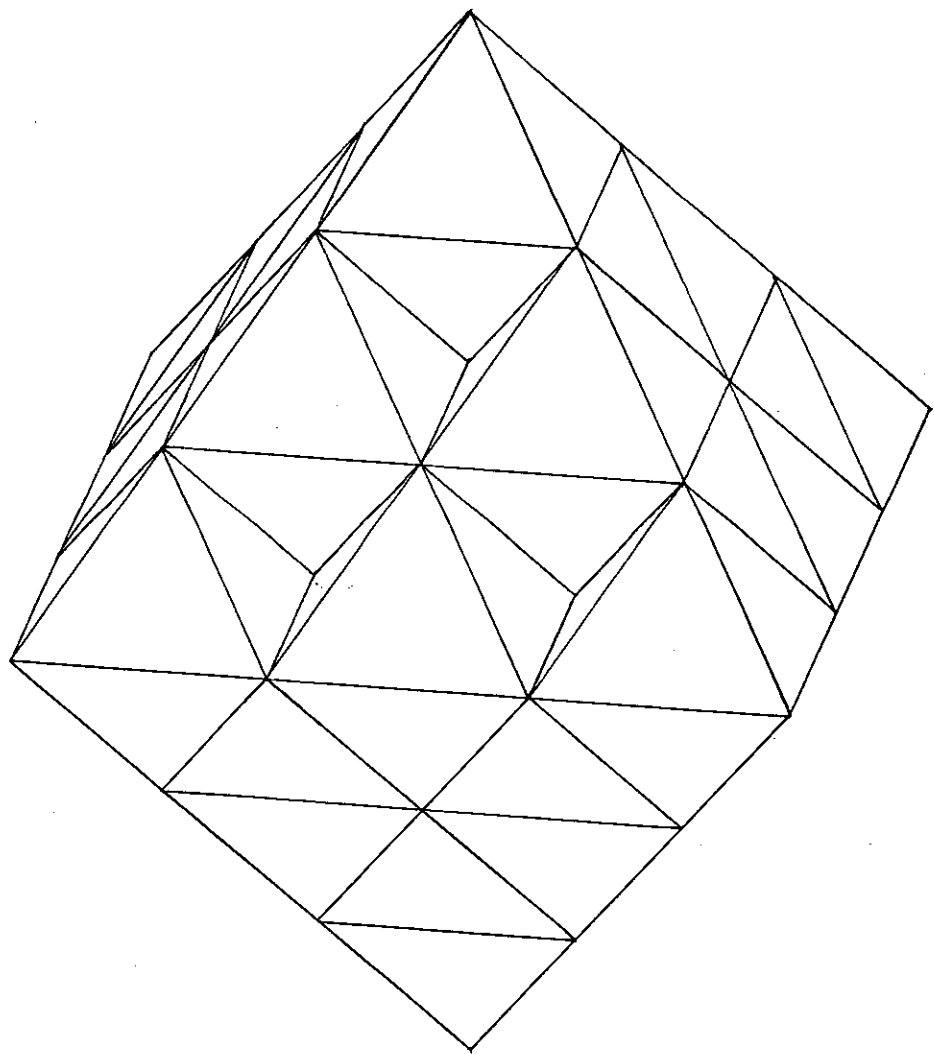


FIG 7.13.a OCTAEDROS DE LA RED

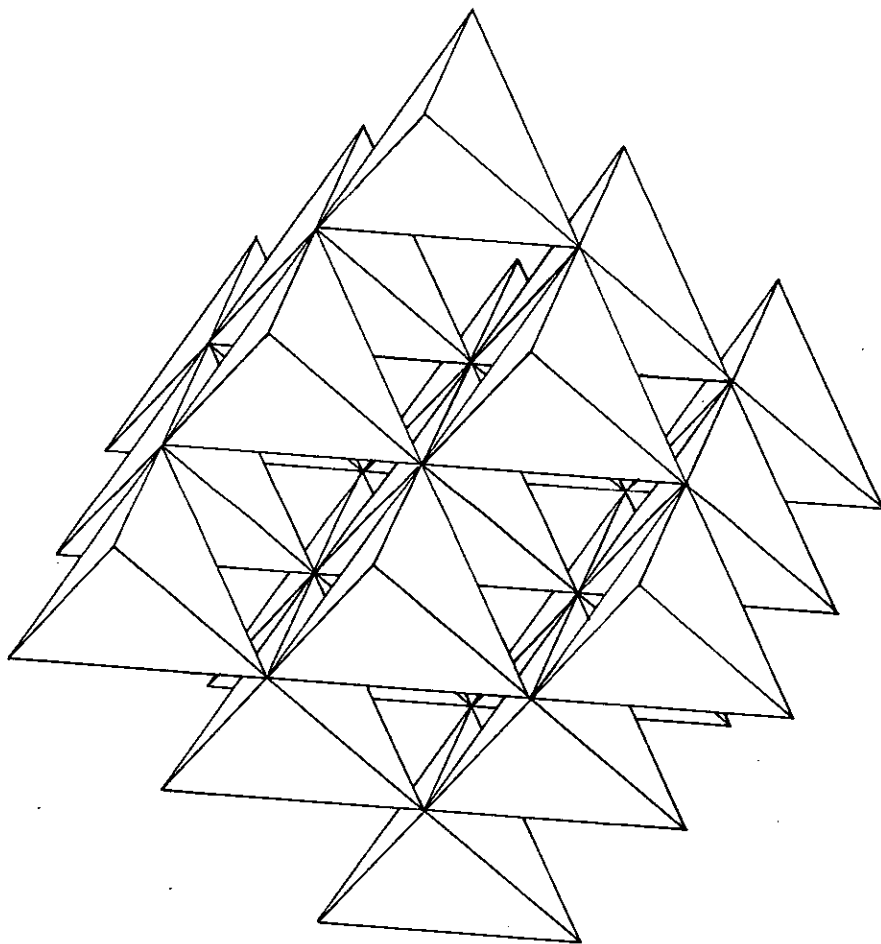


FIG 7.13. b TETRAEDROS DE LA CLASE I
(POSICION BASICA)

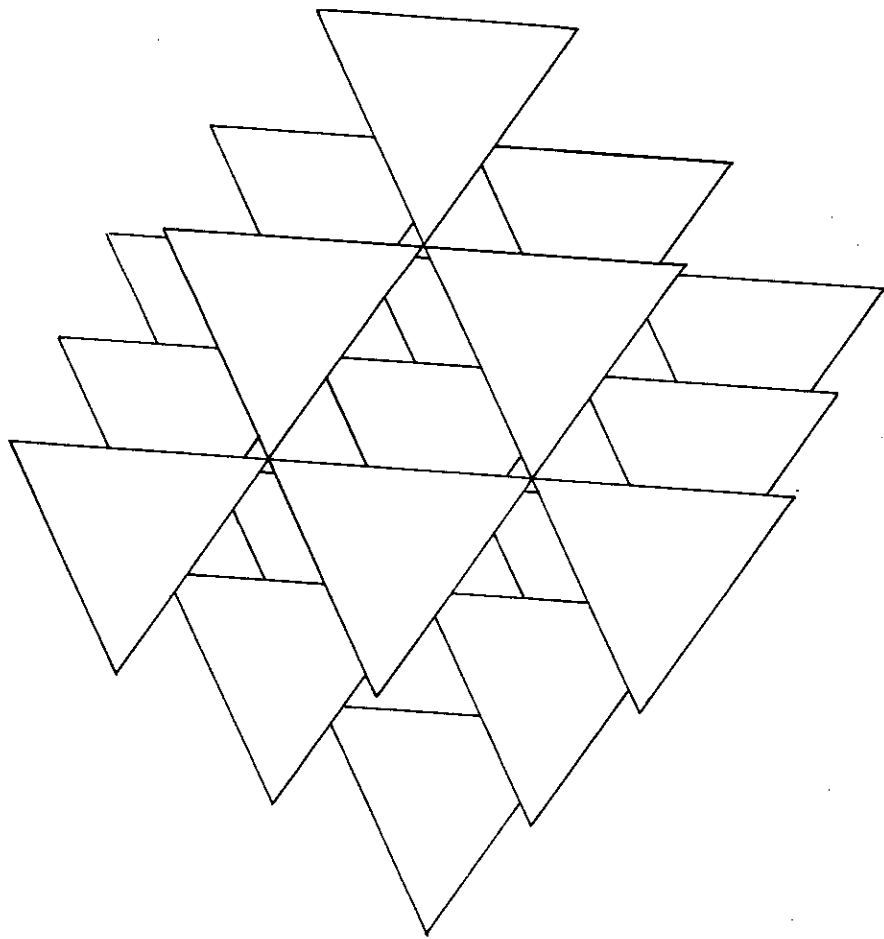


FIG 7.13.c TETRAEDROS DE LA CLASE II
(POSICION DUAL)

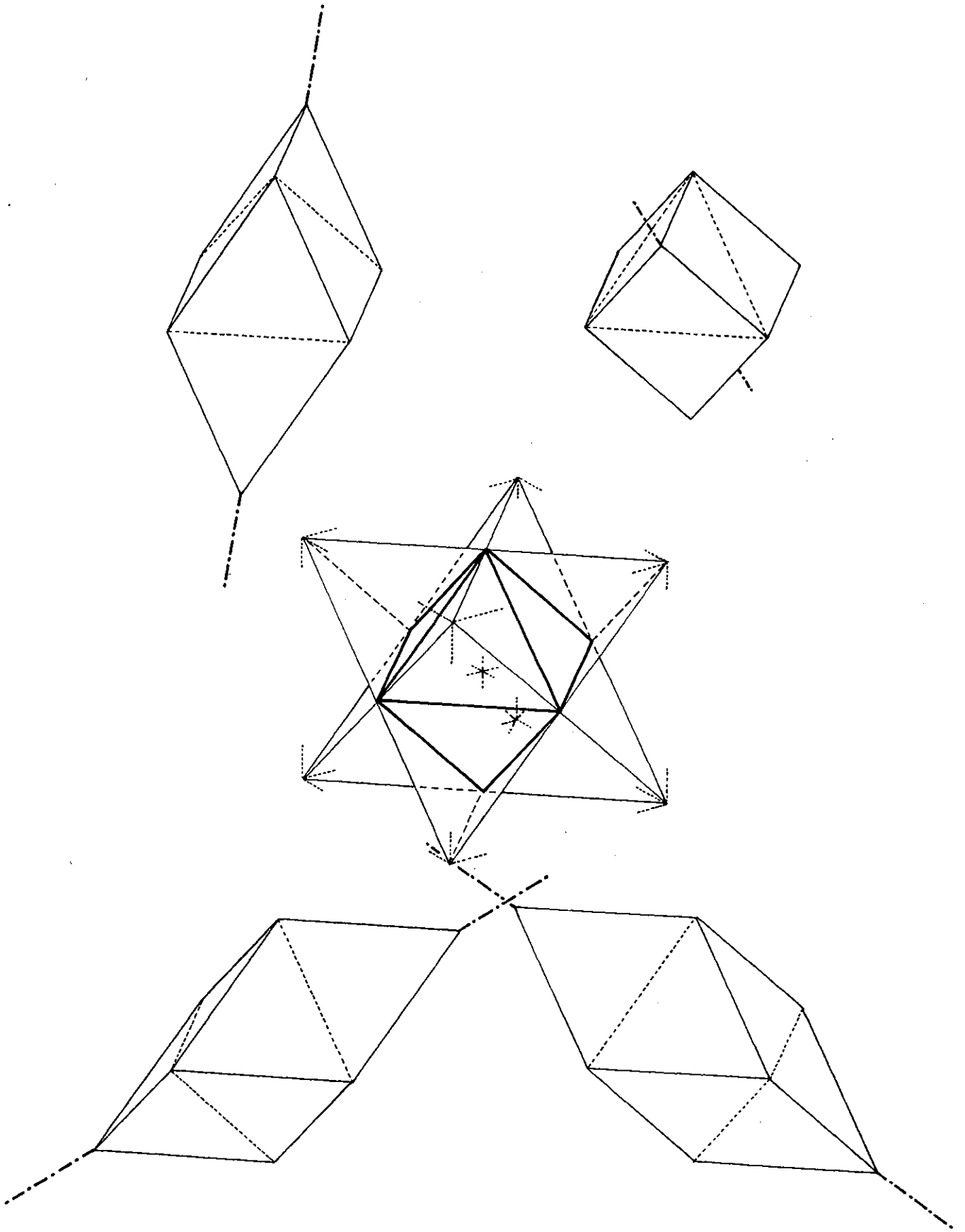


FIG 7.14.a EL OCTAEDRO Y LOS ROMBOEDROS
DERIVADOS DE EL

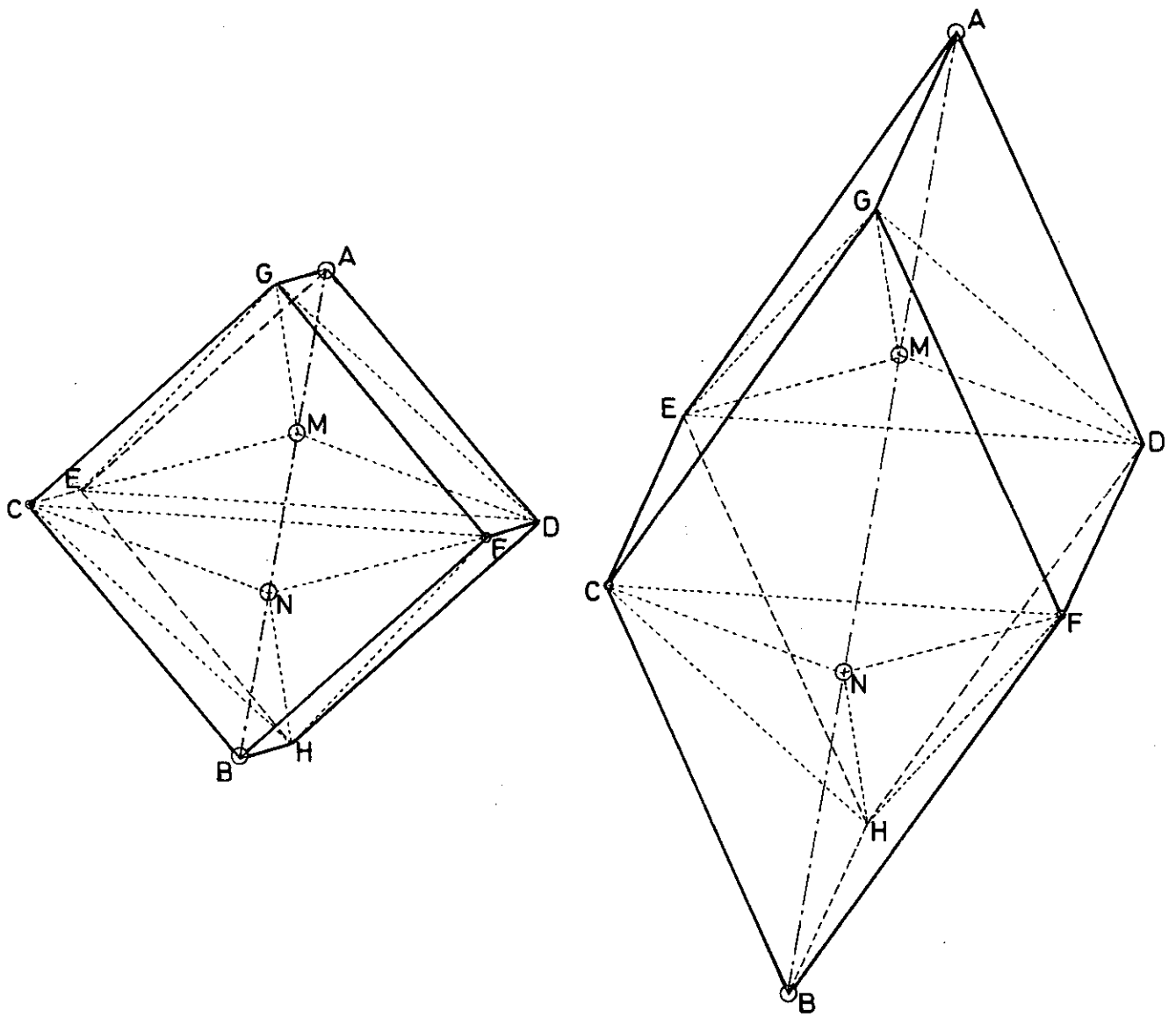


FIG 7.14.b ROMBOEXAEDROS ISOTROPO Y ANISOTROPO

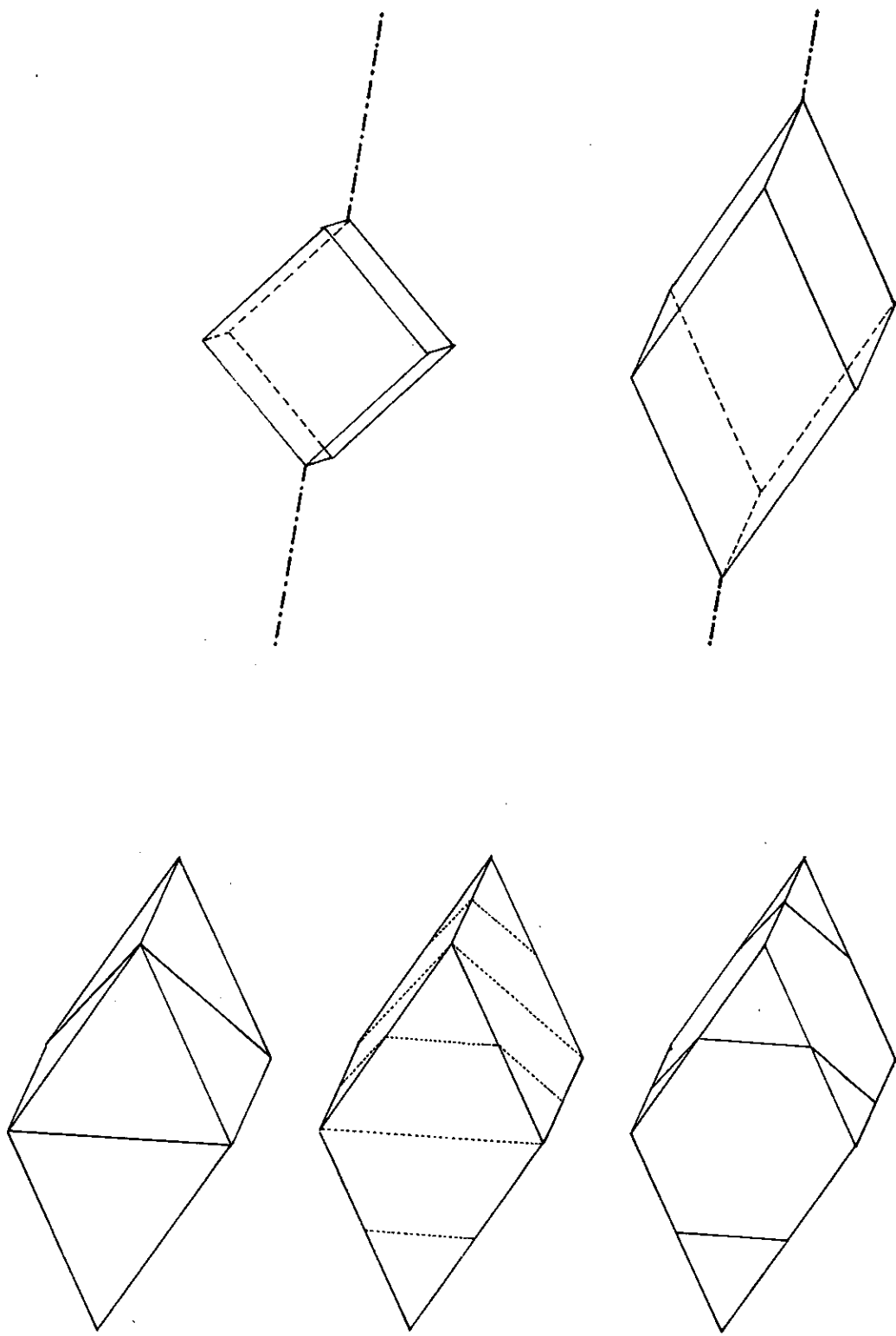


FIG 7.14.c DESCOMPOSICIONES SEMIRREGULARES DEL ROMBOEXAEDRO

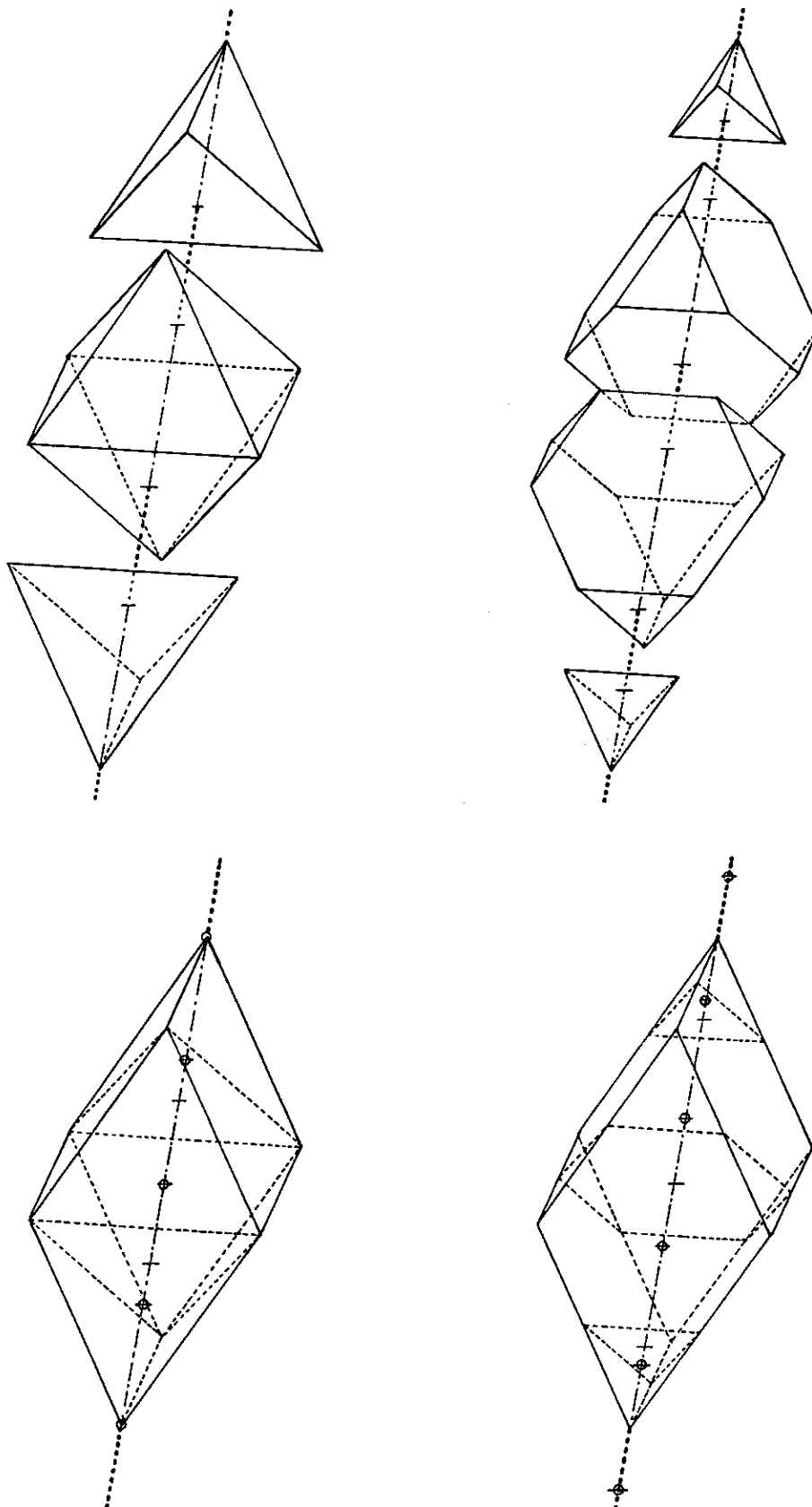


FIG 7.14.d DESPIECES SEMIRREGULARES DEL ROMBOEDRO

tetraedros truncados básicos, tetraedros truncados duales y tetraedros duales. Las caras exagonales de un tetraedro truncado limitan con las de otro de diferente clase, mientras que las triangulares limitan con tetraedros, todos ellos de la misma clase. Las caras de un tetraedro limitan con tetraedros truncados, todos de la misma clase. Como todos estos poliedros son exclusivos del sistema, esta división es más característica del mismo que la de las figuras 7.11. y 7.15. Aquélla, además, tenía ejes binarios diedrales, como el sistema del cubo, mientras que los ejes binarios de antes son ahora cíclicos, careciendo de ejes cuaternarios, sustituidos por ejes binarios diedrales. Los ejes ternarios se han indicado en la figura 7.17. con cuatro direcciones a partir de cada centro, que lo es de un poliedro.

Aparece así el sistema del tetraedro, en su forma más pura, como una versión "menor" del sistema del cubo, conservando sus ejes con una capacidad reducida. Sólo los ternarios se mantienen, pasando los cuaternarios a binarios y pasando los binarios de diedrales a cíclicos. Ni siquiera puede obtenerse una red regular exclusiva, pues la de octaedros truncados tiene todas las simetrías del cubo. Aunque la propia red cúbica no es más que la red de romboedros del sistema.

En la figura 7.18. aparecen separadamente los componentes de la red tetraédrica: en 7.18.a los tetraedros truncados, que en 7.18.b,c se representan independientemente según su clase; en 7.18.d hemos dibujado sólo los tetraedros, manteniendo estas regiones la conexión entre ellas en su mínima expresión, pues sólo los vértices son compartidos, y eso entre tetraedros de distinta clase, pues cada básico los comparte con cuatro duales, y viceversa.

La figura 7.19. representa la red constituida por estos tetraedros. Compárese con la figura 7.17.

Como una muestra más de la intrínseca debilidad y limitada existencia independiente del sistema del tetraedro, la compartimentación en tetraedros y tetraedros truncados admite una subdivisión en unidades menores, que nuevamente es la descomposición en tetraedros y octaedros, recuperándose en ella todos los ejes cuaternarios y binarios diedrales del sistema del cubo (figura 7.20.).

7.2.3.SISTEMA DEL DODECAEDRO

Si observamos los sistemas de simetría que nos han permitido hasta ahora compartimentar el espacio, vemos que en todos ellos, isótropos o anisótropos, hay ejes binarios, ternarios y/o cuaternarios. Los sistemas anisótropos permitían la compartimentación sólo en la medida en que los planos normales al eje no binario se relacionaran con los sistemas planos de simetría. En el

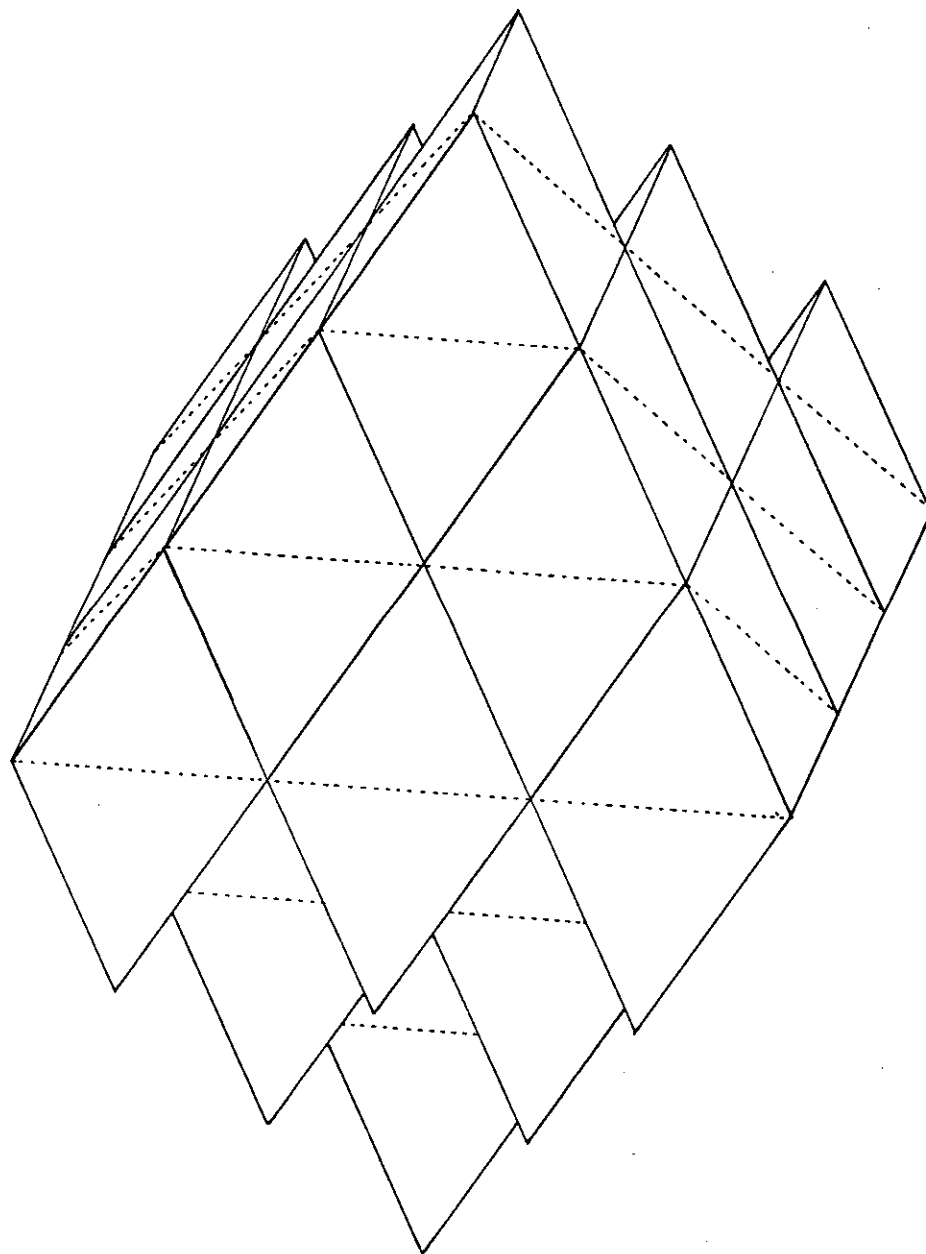


FIG 7.15. ROMBOEDROS: AGRUPACIONES $T_1 + O + T_2$

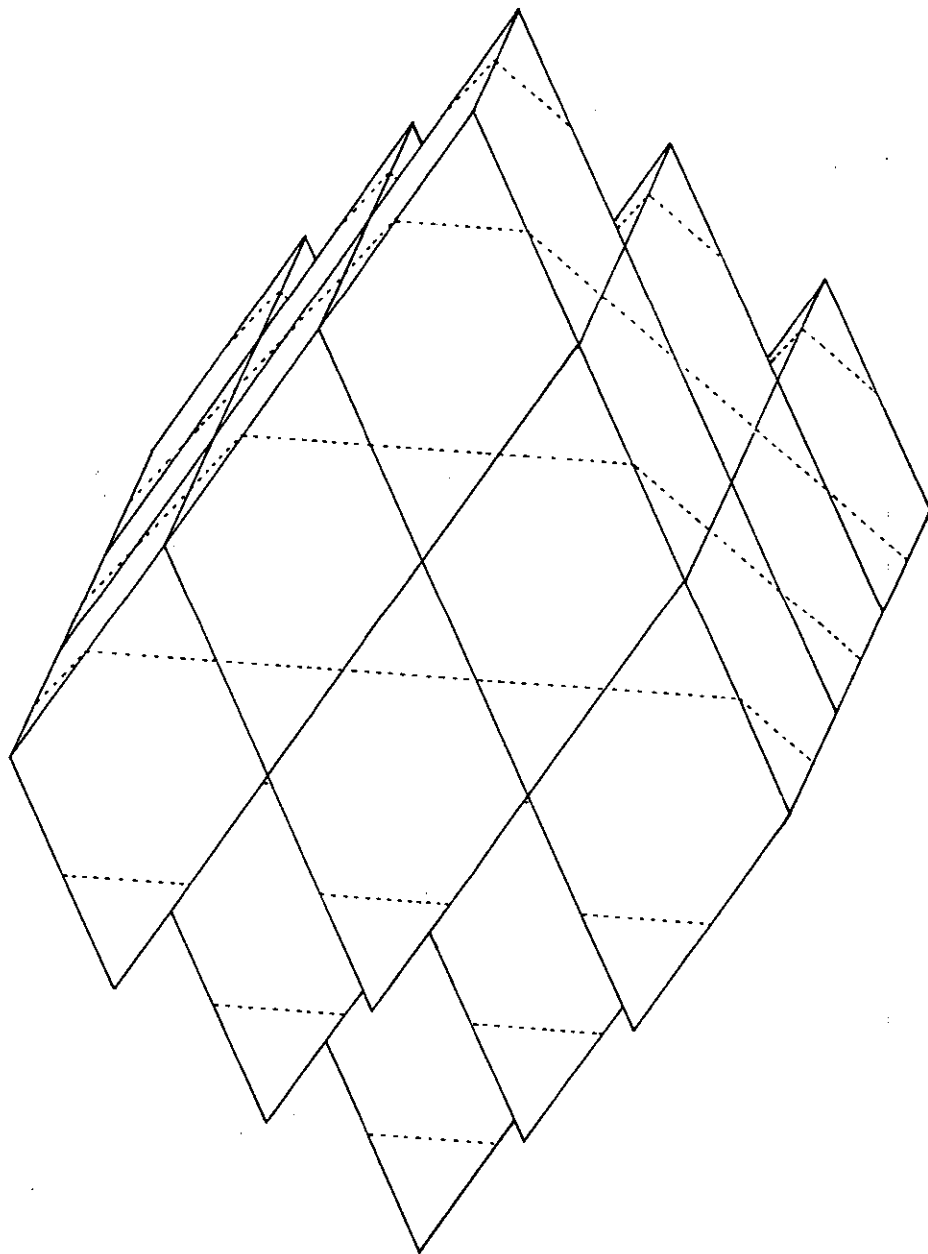


FIG 7.16.a ROMBOEDROS: AGRUPACIONES $T_1 + T_1T + T_2T + T_2$

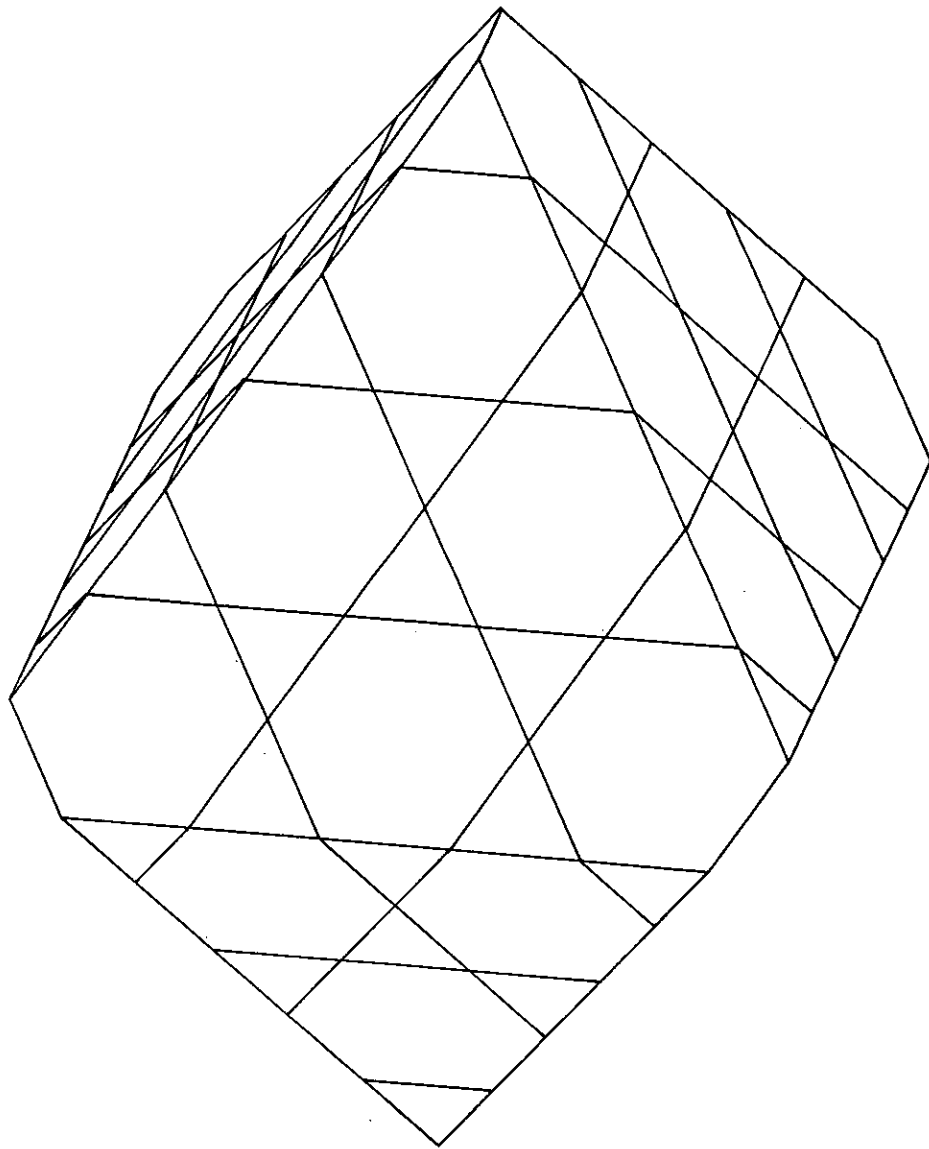


FIG 7.16.b TETRAEDROS Y TETRAEDROS TRUNCADOS

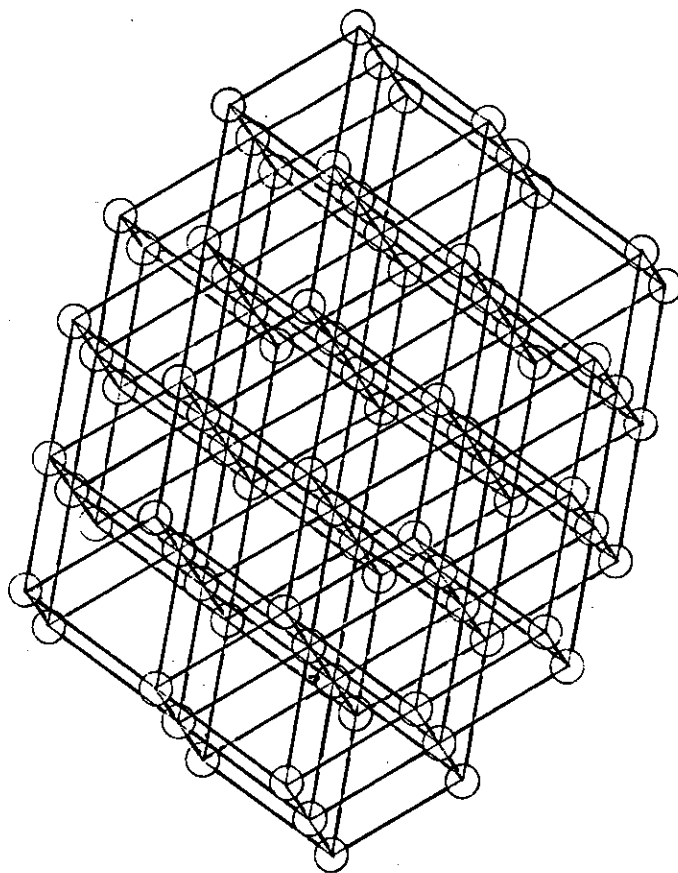


FIG 7.17. CENTROS DE LA RED TETRAEDRICA

EJES TERNARIOS —————

EJES BINARIOS NO REPRESENTADOS

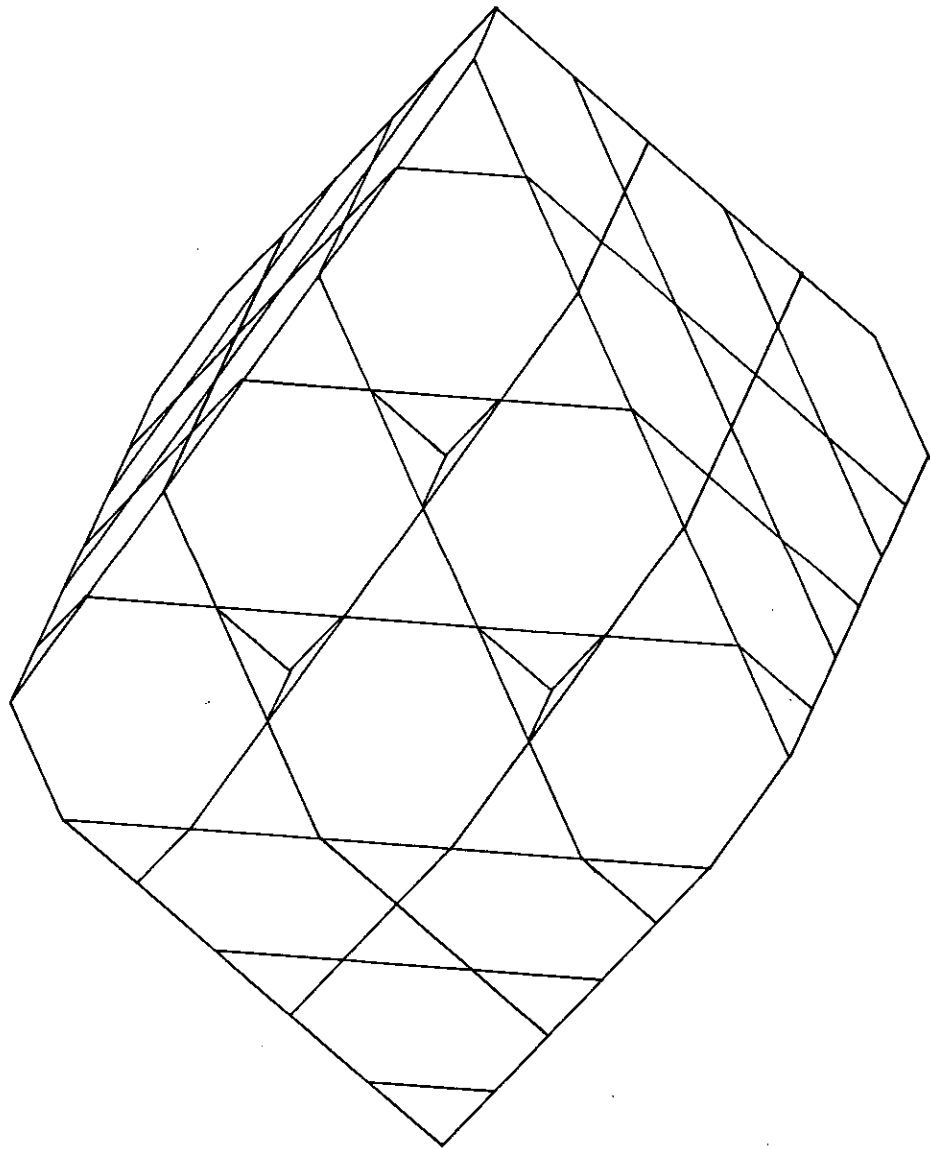


FIG 7.18.a TETRAEDROS TRUNCADOS DE LA RED

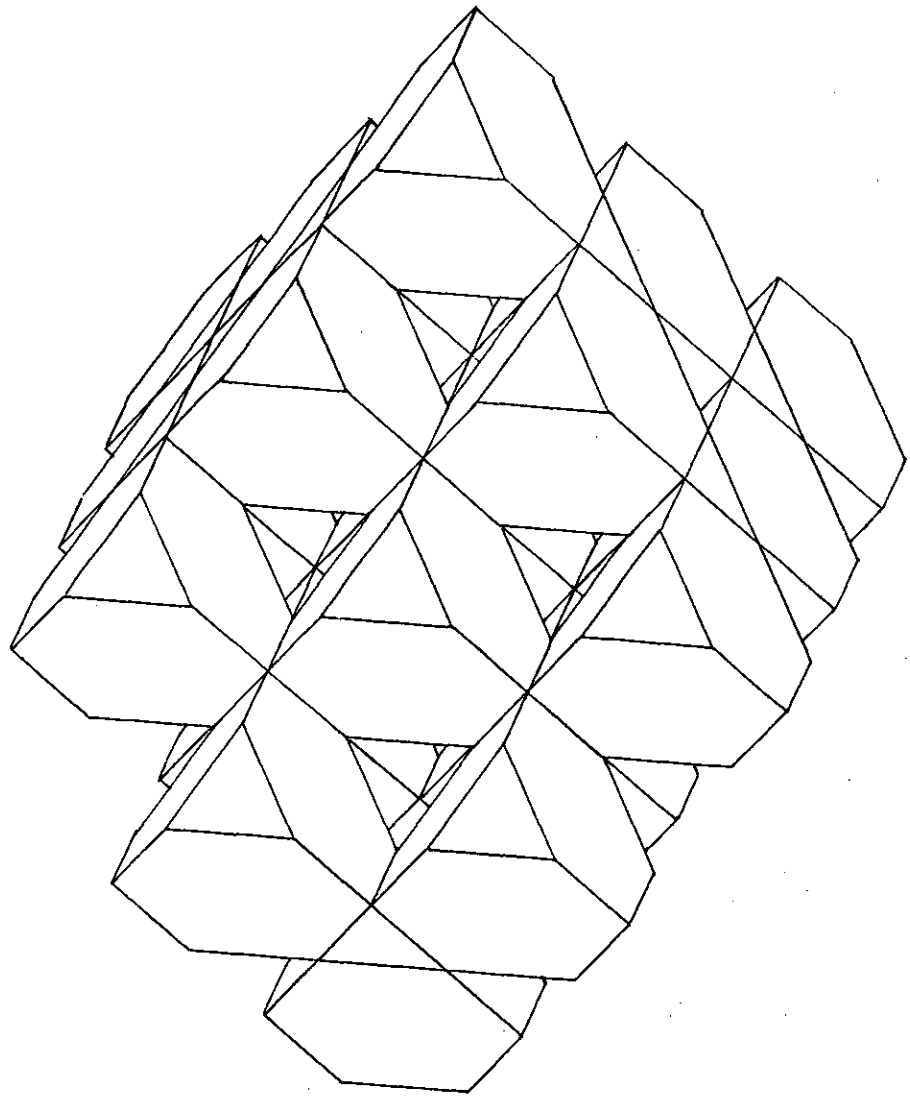


FIG 7.18.b TETRAEDROS TRUNCADOS DE LA CLASE I
(POSICION BASICA)

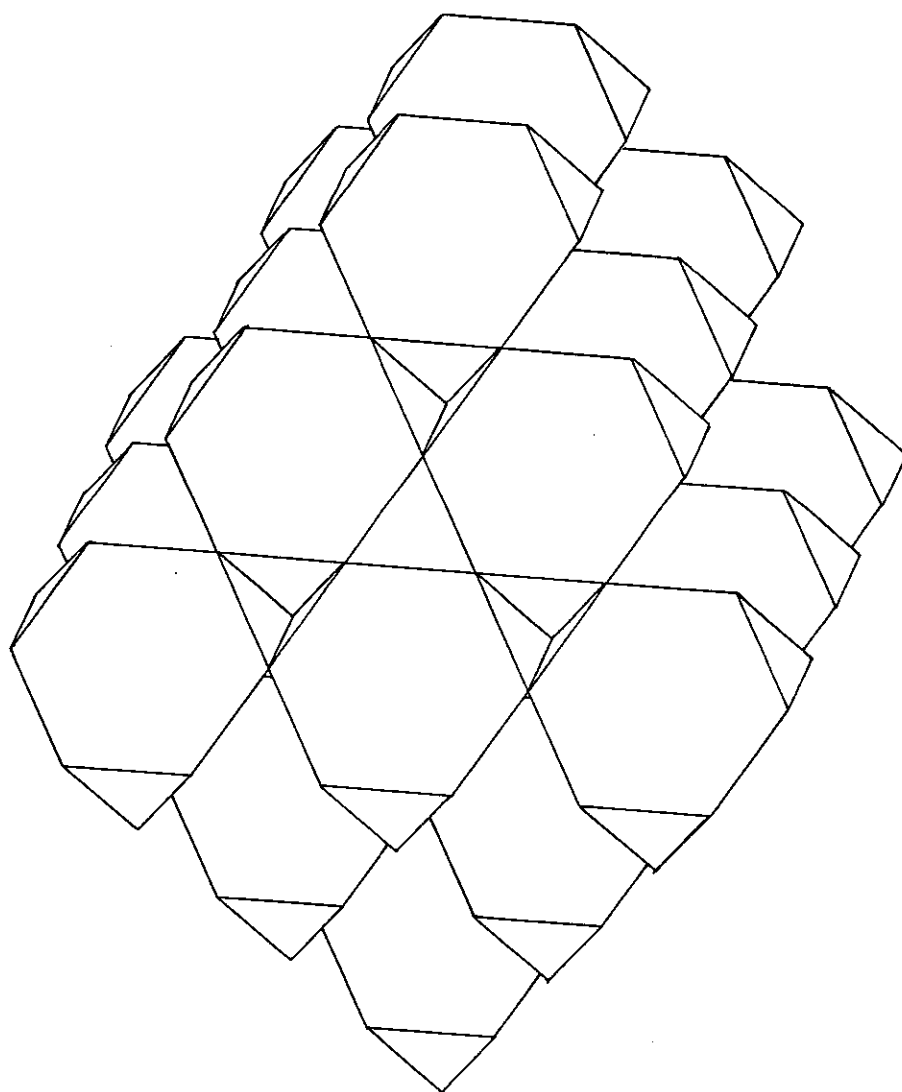


FIG 7.18.c TETRAEDROS TRUNCADOS DE LA CLASE II
(POSICION DUAL)

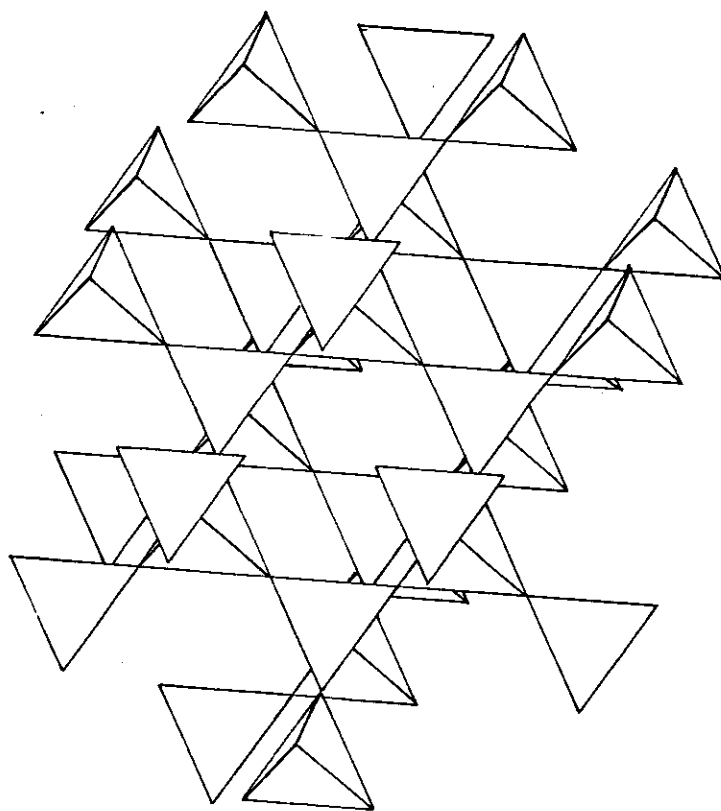


FIG 7.18.d TETRAEDROS DE LA RED

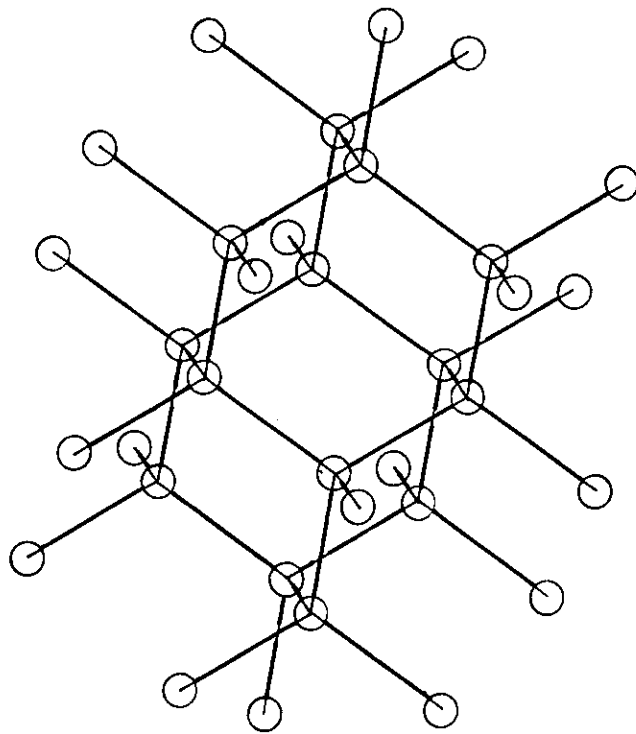


FIG 7. 19. CENTROS DE LOS TETRAEDROS
UNIDOS POR SUS EJES TERNARIOS

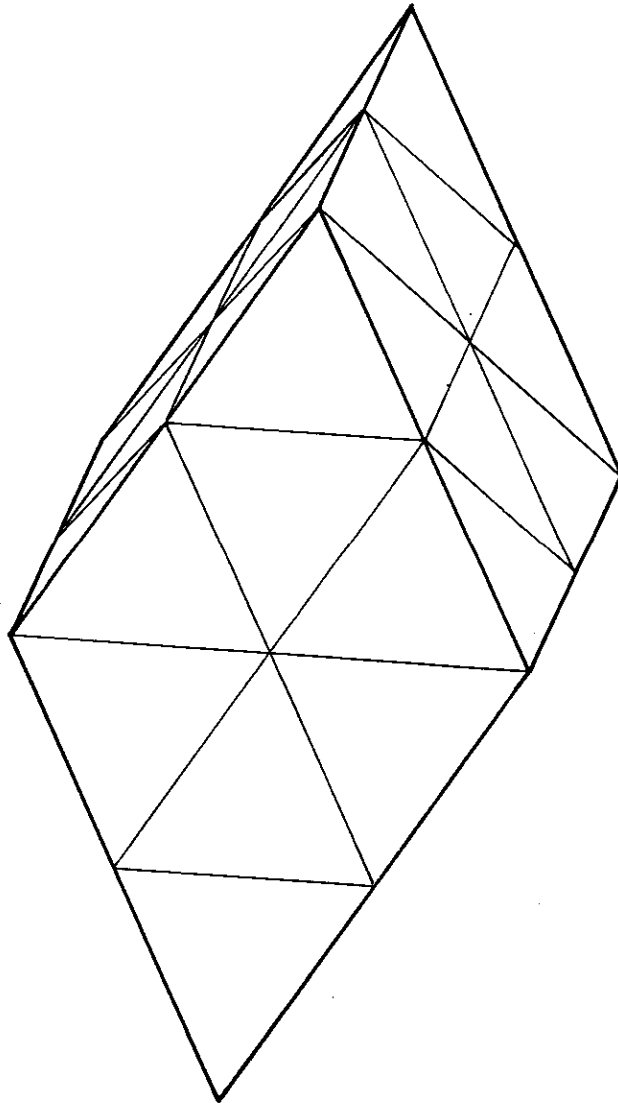


FIG 7.20.a EL ROMBOEDRO Y SUS PARTES ELEMENTALES

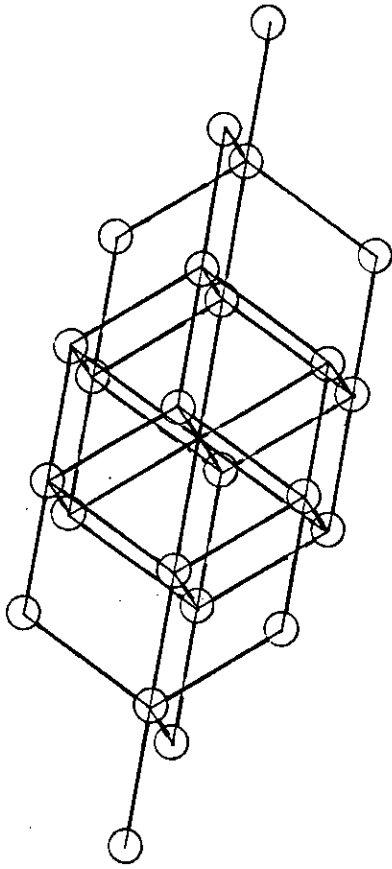


FIG 7. 20. b RED DE CENTROS DEL ROMBOEDRO

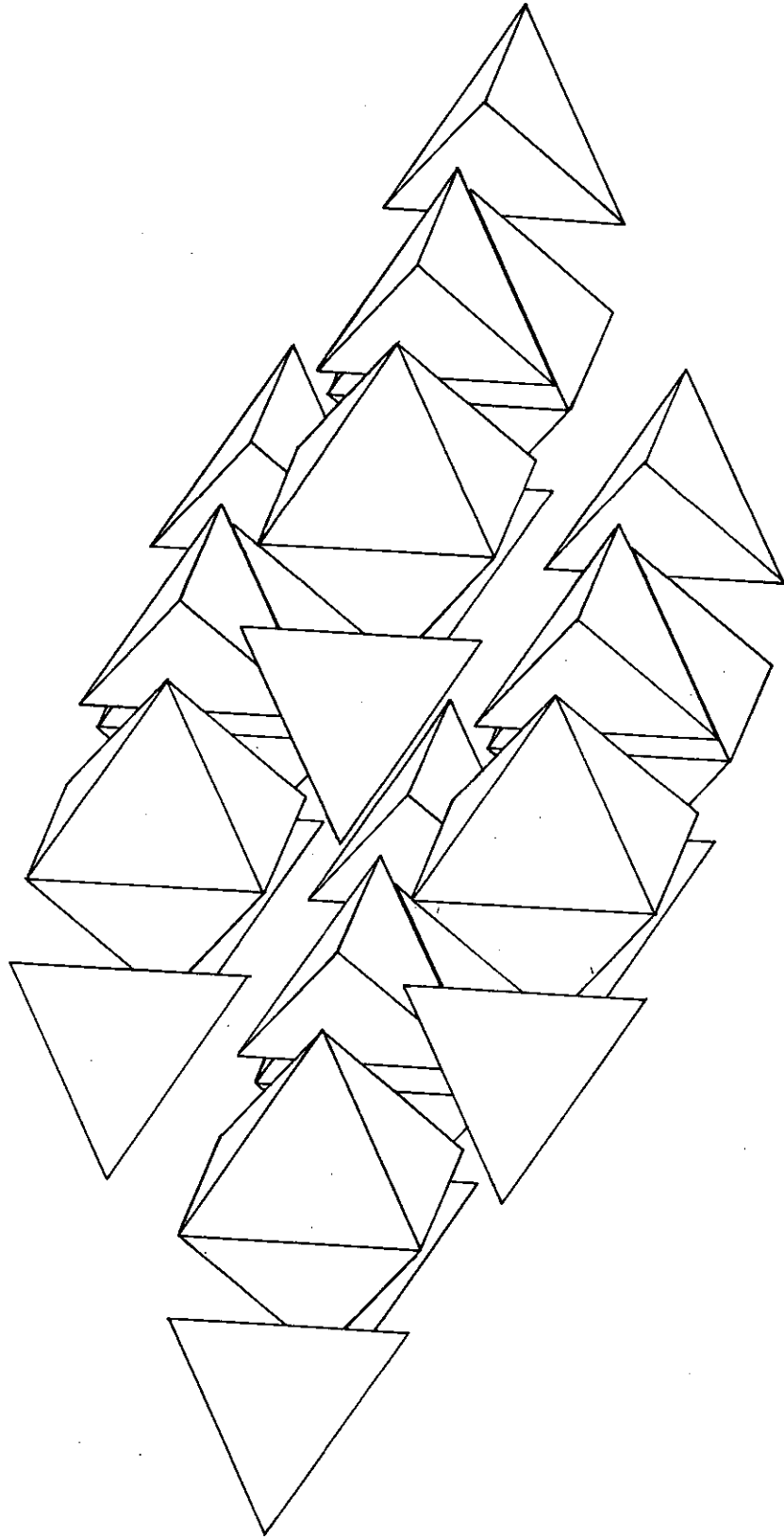


FIG 7.20.c DESPIECE DEL ROMBOEDRO EN TETRAEDROS Y OCTAEDROS

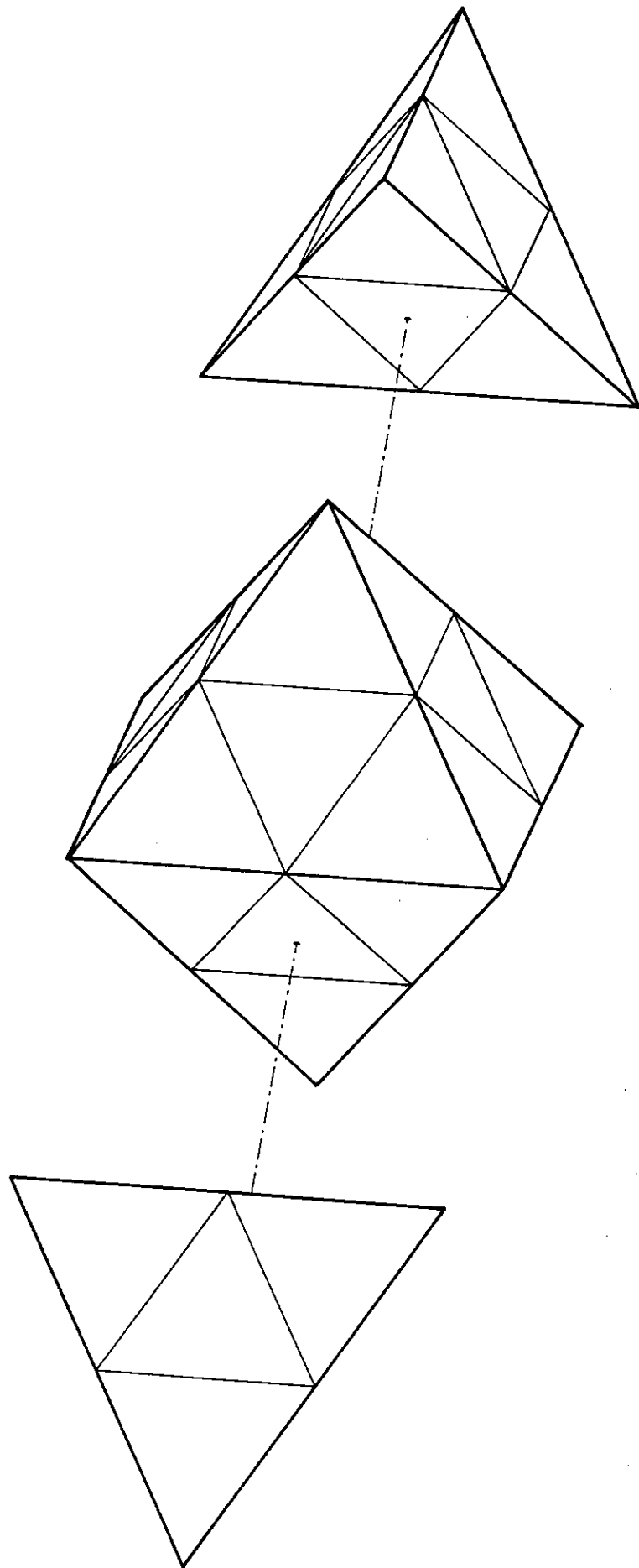


FIG 7.20.d REAGRUPAMIENTO EN TETRAEDROS Y OCTAEDROS

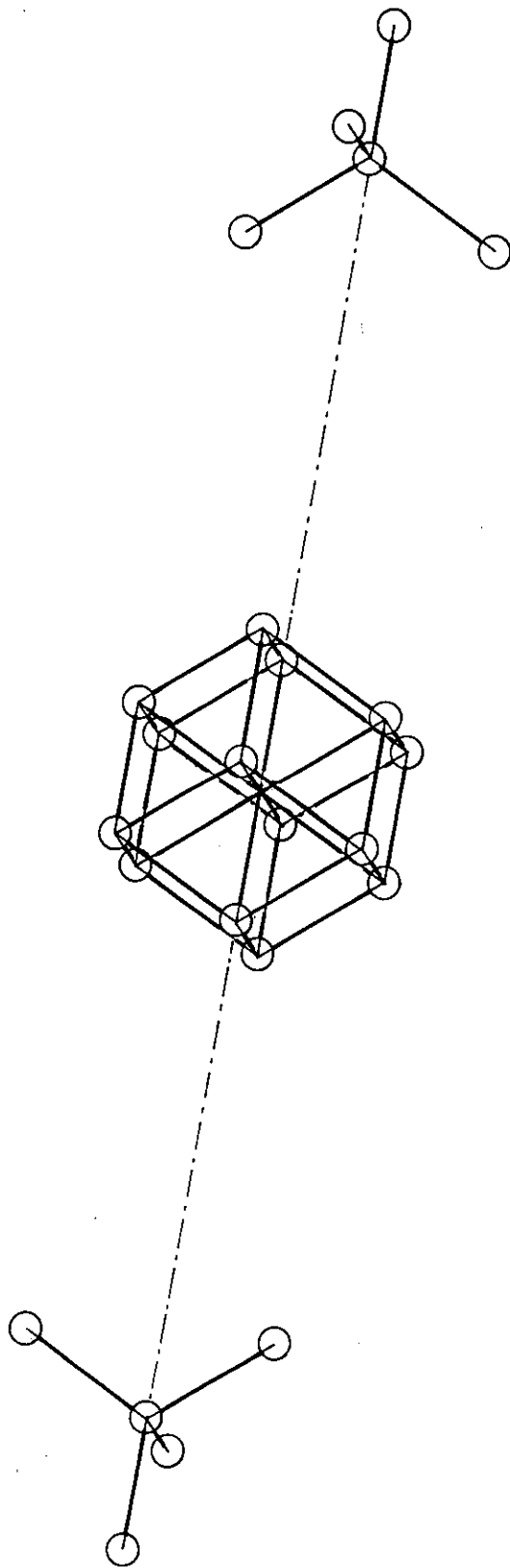


FIG 7.20.e RED DE CENTROS DE TETRAEDROS Y OCTAEDROS

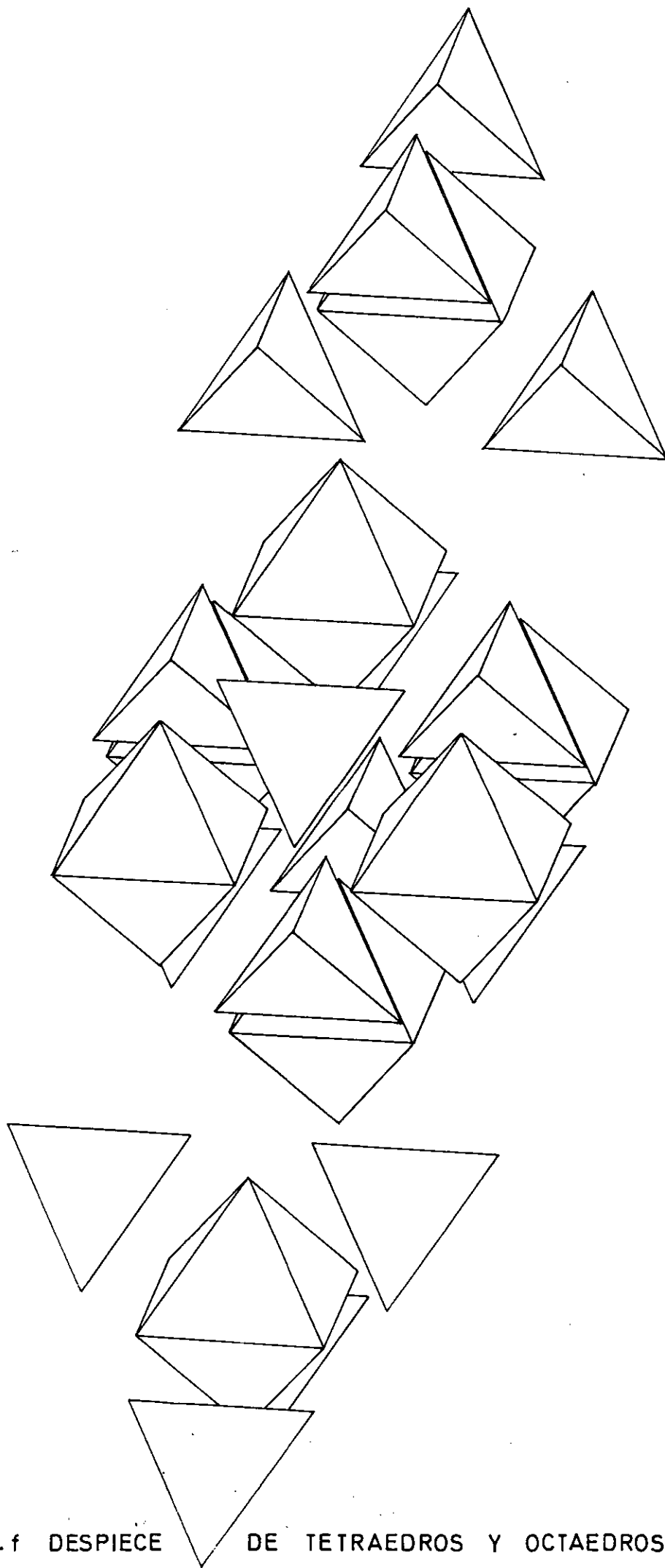


FIG 7.20.f DESPIECE DE TETRAEDROS Y OCTAEDROS

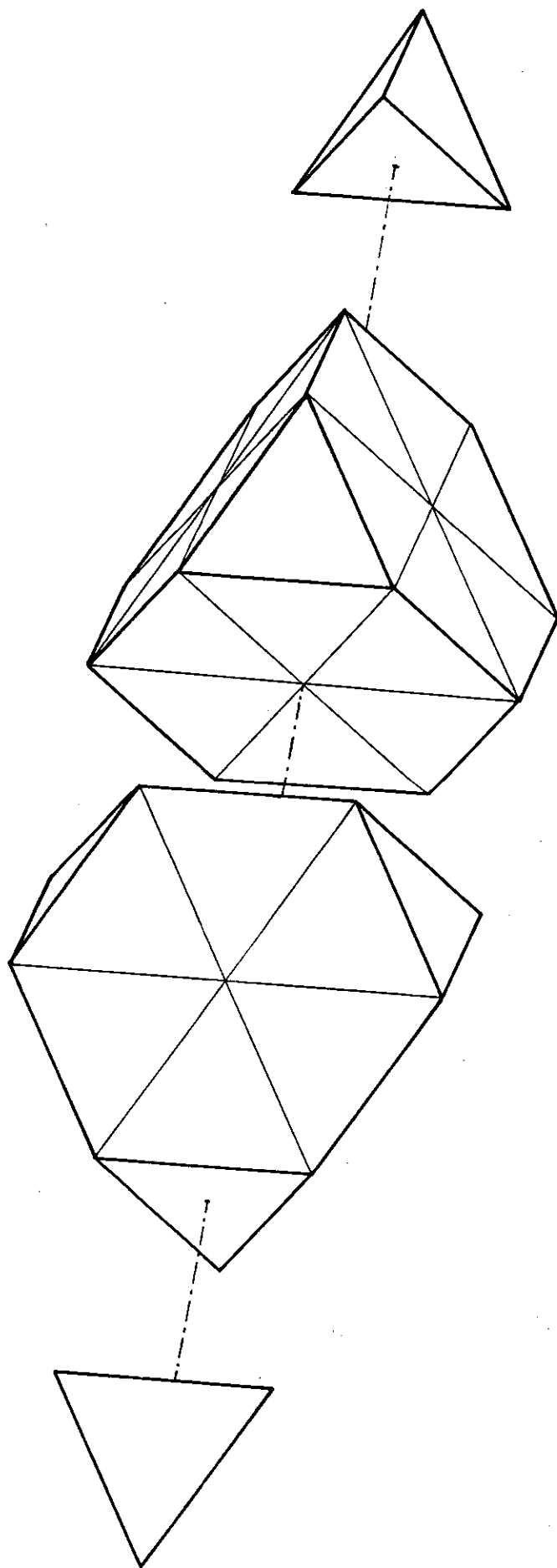


FIG 7.20.g REAGRUPAMIENTO EN TETRAEDROS Y TETRAEDROS TRUNCADOS

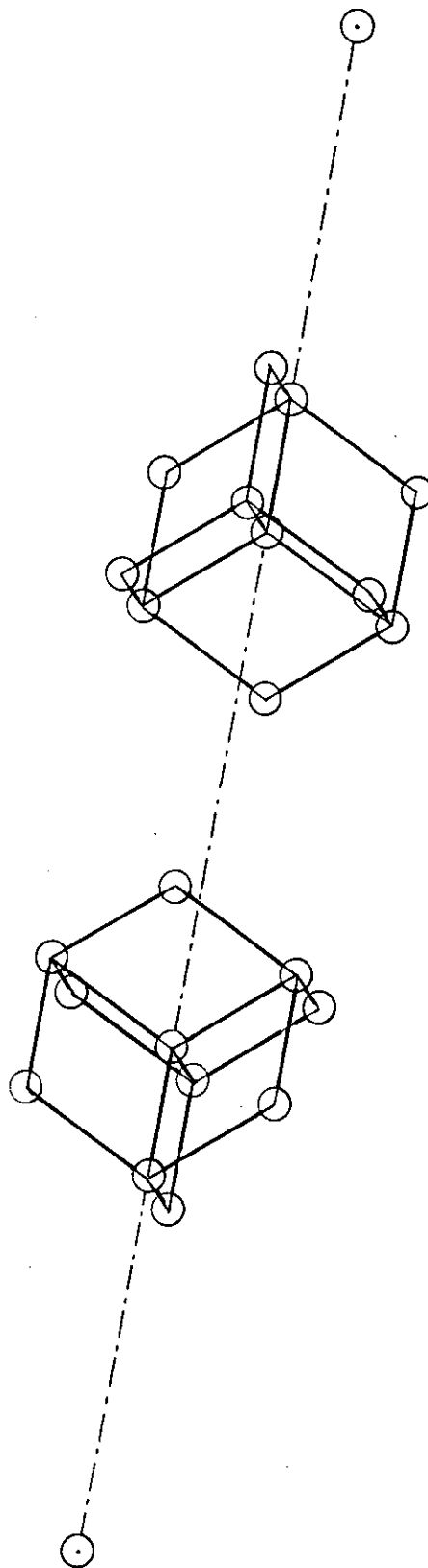


FIG 7.20.h RED DE CENTROS DE TETRAEDROS Y TETRAEDROS TRUNCADOS

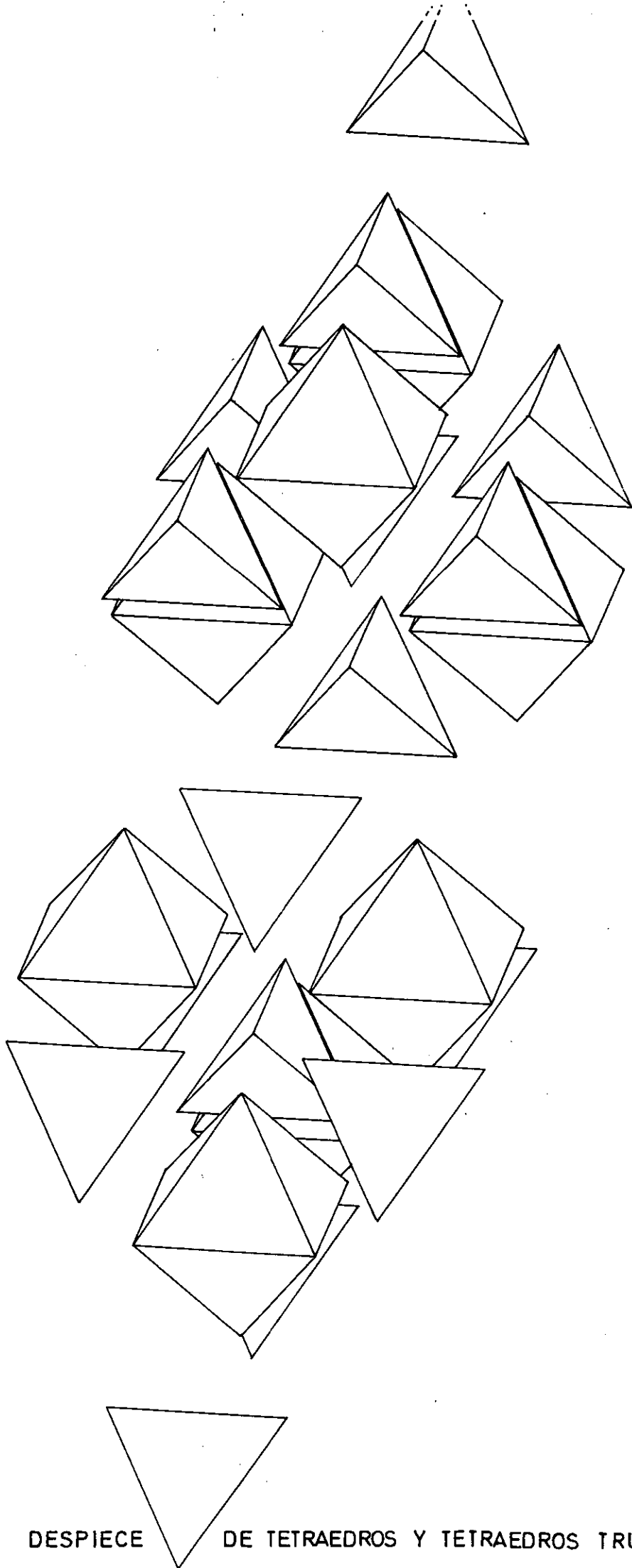


FIG 7.20. i DESPIECE DE TETRAEDROS Y TETRAEDROS TRUNCADOS

caso de que el sistema plano fuera el triangular equilátero (llamémoslo desde ahora exagonal), aparecían también ejes senarios (en los sistemas isótopos no los hay).

Los sistemas del cubo y del tetraedro permiten la extensión de las redes poliédricas en direcciones normales a sus ejes binarios, ternarios y cuaternarios, de modo que la proyección ortogonal sobre planos normales a dichos ejes de simetría produce figuras asimilables a los sistemas planos: al sistema cuadrado si el eje era binario o cuaternario y al exagonal si era ternario.

El sistema del dodecaedro es el único sistema de simetría que tiene ejes quinarios. No existe ningún sistema plano con simetría quinaria, y este sistema no permite la adición indefinida de regiones regulares en direcciones normales a un eje quinario. Por ello no puede llenarse el espacio con poliedros del sistema, aunque sí permite extensiones lineales obtenidas relacionando regiones de este sistema cara a cara, arista a arista o vértice a vértice, divisiones en las que nunca pueden utilizarse todos los elementos, sino sólo los comunes con otros sistemas, apareciendo siempre espacios residuales (esto, de hecho, ya ocurría con el cubo achatado, y ocurre también con el tetraedro achatado, que es precisamente el icosaedro).

7.3. COMPARTIMENTACIONES REGULARES Y SEMIRREGULARES

A modo de resumen exponemos las agrupaciones de poliedros que hemos visto hasta ahora:

Compartimentaciones			
	Tipos de poliedros	Isótropas	Anisótropas
Regulares	1	C Rombododecaedros OT	Romboexaedros P3 P6
Semirregulares	2	T + TT T + O CT + O CO + O	C + P8 C + P3 (2 formas) P3 + P6 (2 formas) P3 + P12
	3	C + CO + RCO C + OT + GRCO TT + CO + OT (*)	C + P3 + P6 C + P6 + P12

(*) Esta última configuración, no estudiada antes, es muy semejante a las dos que la preceden, pero sus poliedros son del sistema del tetraedro (CO = RT_1T_2 , OT = GRT_1T_2); en relación con la red cúbica, el OT ocupa el cubo de clase I, el CO el de clase II y los tetraedros truncados, dobles en número, los cubos de la red dual de ambas clases, correspondiendo cada una de las posiciones posibles a una clase. La red es tetraoctaédrica (fig 7.12.) y la compartimentación aparece en la página siguiente.

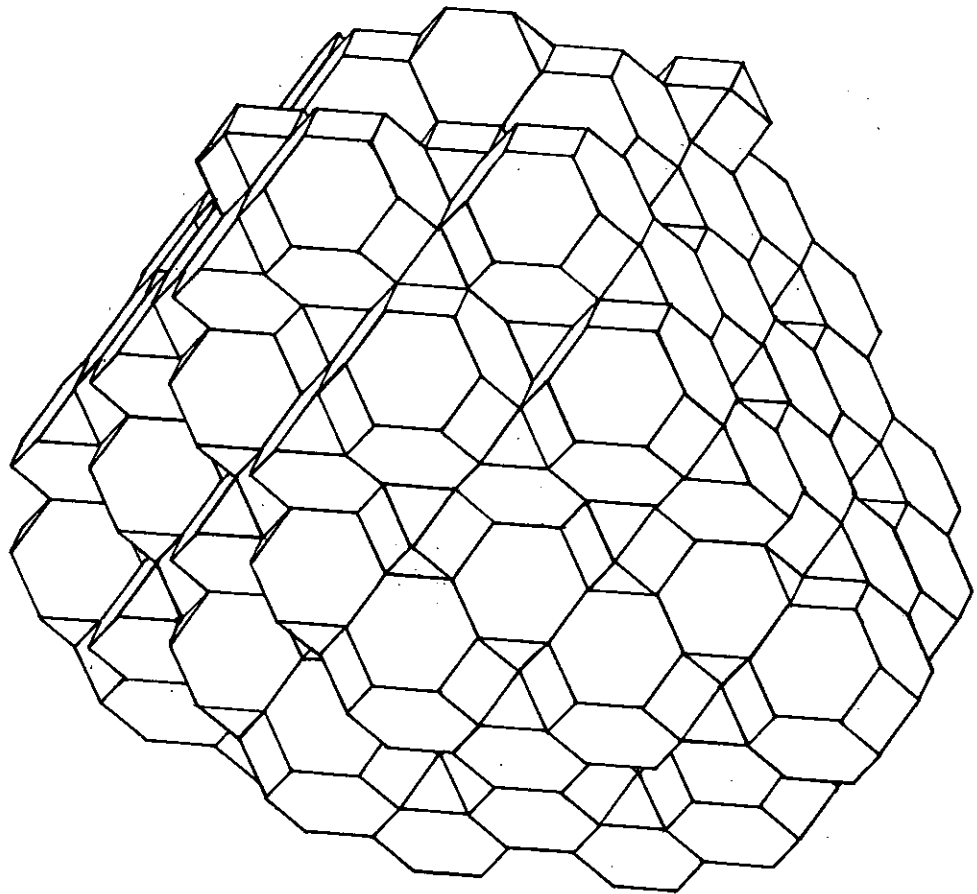


FIG 7.21. TETRAEDROS TRUNCADOS, CUBOCTAEDROS Y
OCTAEDROS TRUNCADOS

8. MODULOS MINIMOS EN EL ESPACIO

En los capítulos 4 y 6 (figuras 4.3., 4.5., 4.6., 6.3.) analizamos cómo la compartimentación total del plano y de la superficie esférica en forma regular y semirregular puede conseguirse a partir de la compartimentación de unos módulos triangulares pertenecientes a unos pocos sistemas de simetría. Siguiendo una línea de pensamiento analógica, cabe pensar que la compartimentación total del espacio de modo regular y semirregular estudiada en el capítulo anterior puede obtenerse de manera semejante subdividiendo módulos tetraédricos, cada uno de los cuales contenga porciones alícuotas de los poliedros participantes en aquella compartimentación.

Como pretendemos que estos módulos espaciales sean cerrados y finitos, nos limitaremos a los sistemas abovedados, cuyos poliedros son cerrados y encierran un volumen finito, y dentro de ellos a los isótropos, porque la división anisótropa del espacio en prismas poco añade a la del plano en polígonos.

8.1. SISTEMA DEL TETRAEDRO

Los planos de simetría del tetraedro permiten dividirlo en veinticuatro partes iguales, en realidad doce pares de enantiomorfos. Cada una de estas partes es un tetraedro no regular, cuyas cuatro caras son triángulos rectángulos, y sus seis aristas, llamando una vez más O al centro del poliedro, V al vértice, L al centro de la arista y P al de la cara, son: la semiarista del tetraedro \overline{LV} , que podemos tomar como unidad, 1; la semidistancia entre aristas opuestas \overline{OL} , con valor $\sqrt{2}/2 = 0,707106781$; la tercera parte de la altura de la cara \overline{LP} , esto es $\sqrt{3}/3 = 0,577350269$; la cuarta parte de la altura del tetraedro regular \overline{OP} , de valor $\sqrt{6}/6 = 0,40824829$; dos tercios de la altura de la cara, $\overline{PV} = 2\sqrt{3}/3 = 1,154700538$, y tres cuartos de la altura del tetraedro regular, $\overline{OV} = \sqrt{6}/2 = 1,224744871$.

Hay que dejar claro que este módulo no permite por sí mismo ocupar el espacio. Veremos como algunas de sus subdivisiones sí lo permiten.

El tetraedro de la figura 8.1.1. aparece en 8.1.2. dividido en estas veinticuatro partes. 8.1.3. destaca los ejes binarios y ternarios, y 8.1.4. los planos de simetría que aquéllos forman con las aristas. En la 8.1.5. vemos el módulo en relación con el conjunto del tetraedro, comprobando que \overline{VL} es la semiarista, \overline{OL} es un semieje binario, $\overline{LP} + \overline{PV}$ la altura de la cara y $\overline{OP} + \overline{OV}$ la altura del tetraedro (eje ternario). Los triángulos \overline{OPV} y \overline{OPL} son rectángulos en P , mientras que \overline{OLV} y \overline{PLV} son rectángulos en L .

El volumen de este módulo, en función de la semiarista del tetraedro, es $\frac{1}{3} \cdot \overline{OP} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{PL} \cdot \overline{LV} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot 1^3 = \frac{3\sqrt{2}}{36 \cdot 3} 1^3 = \frac{\sqrt{2}}{36} 1^3 = 0,03928371 1^3$ (24 veces mayor, $2\sqrt{2}/3$ semiaristas = $0,942809041 1^3$, es el tetraedro).

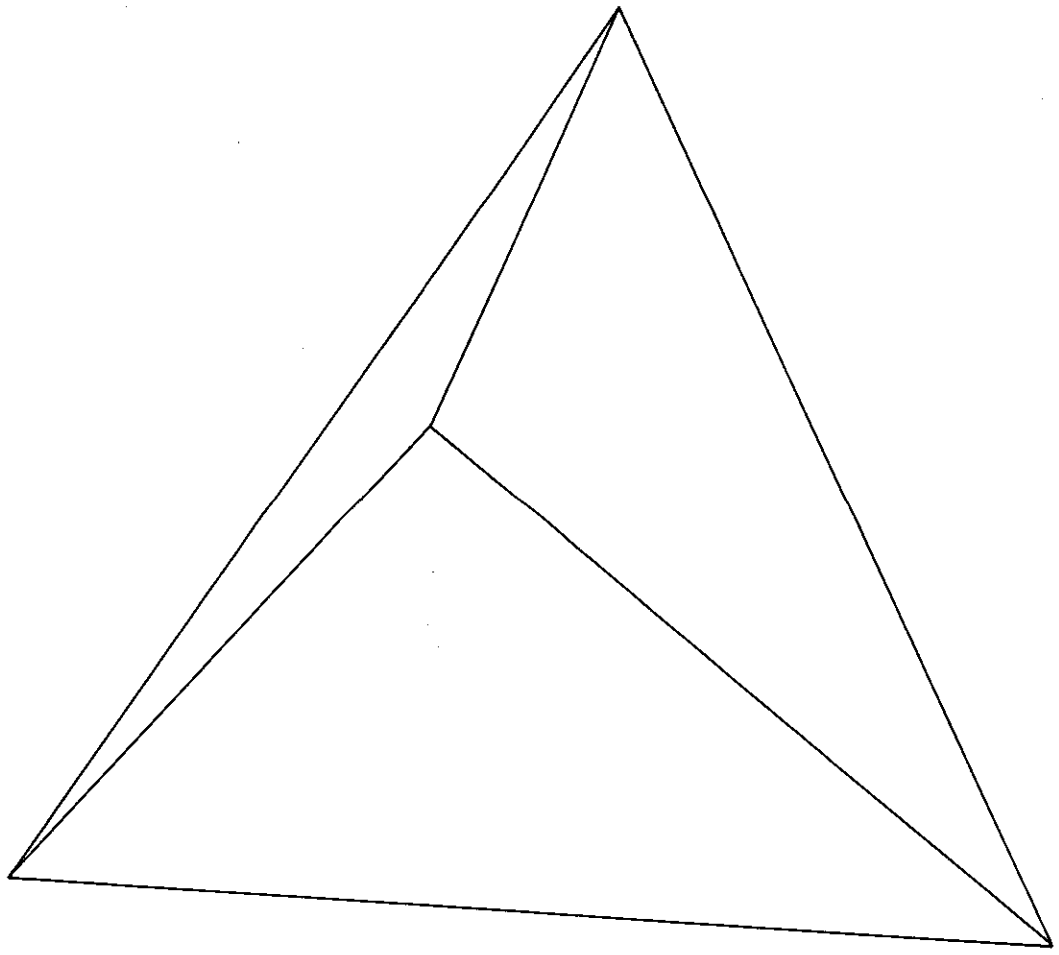


FIG 8.1.1. TETRAEDRO

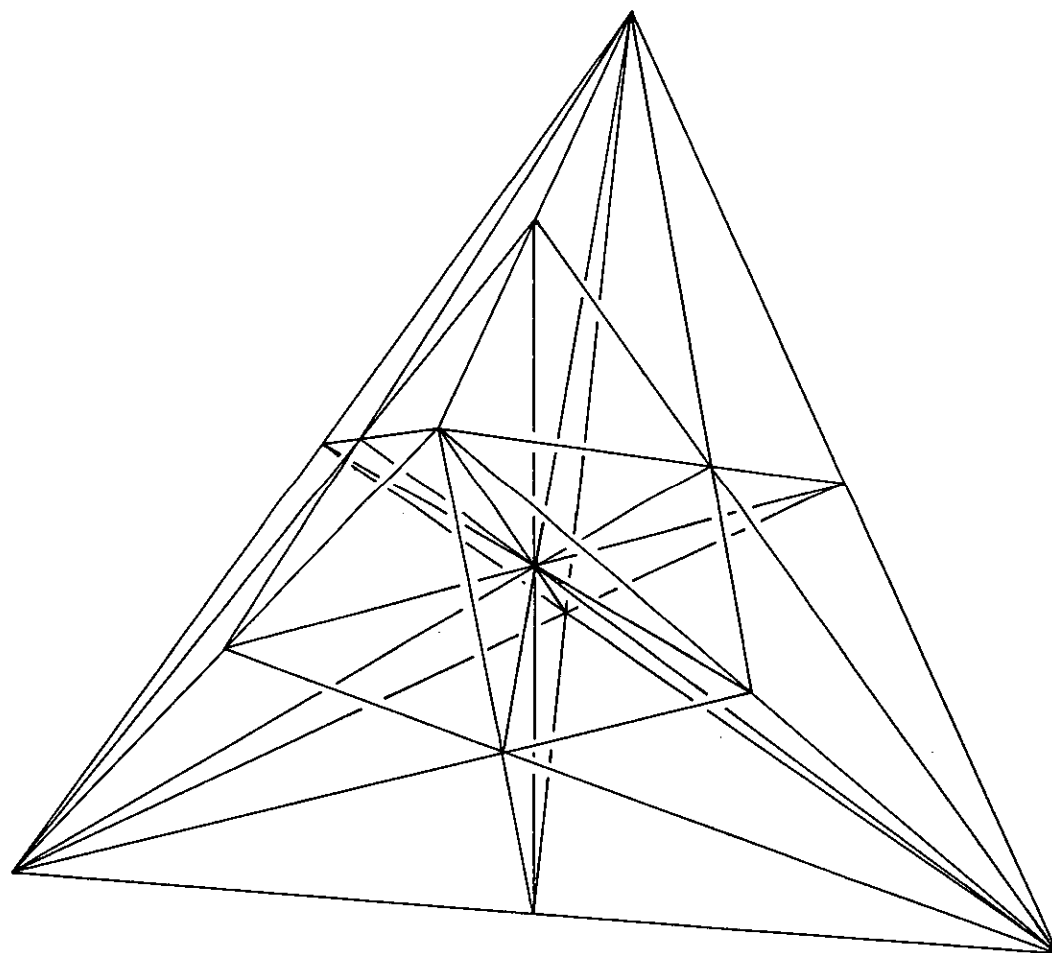


FIG 8.1.2. DESCOMPOSICIÓN EN MODULOS

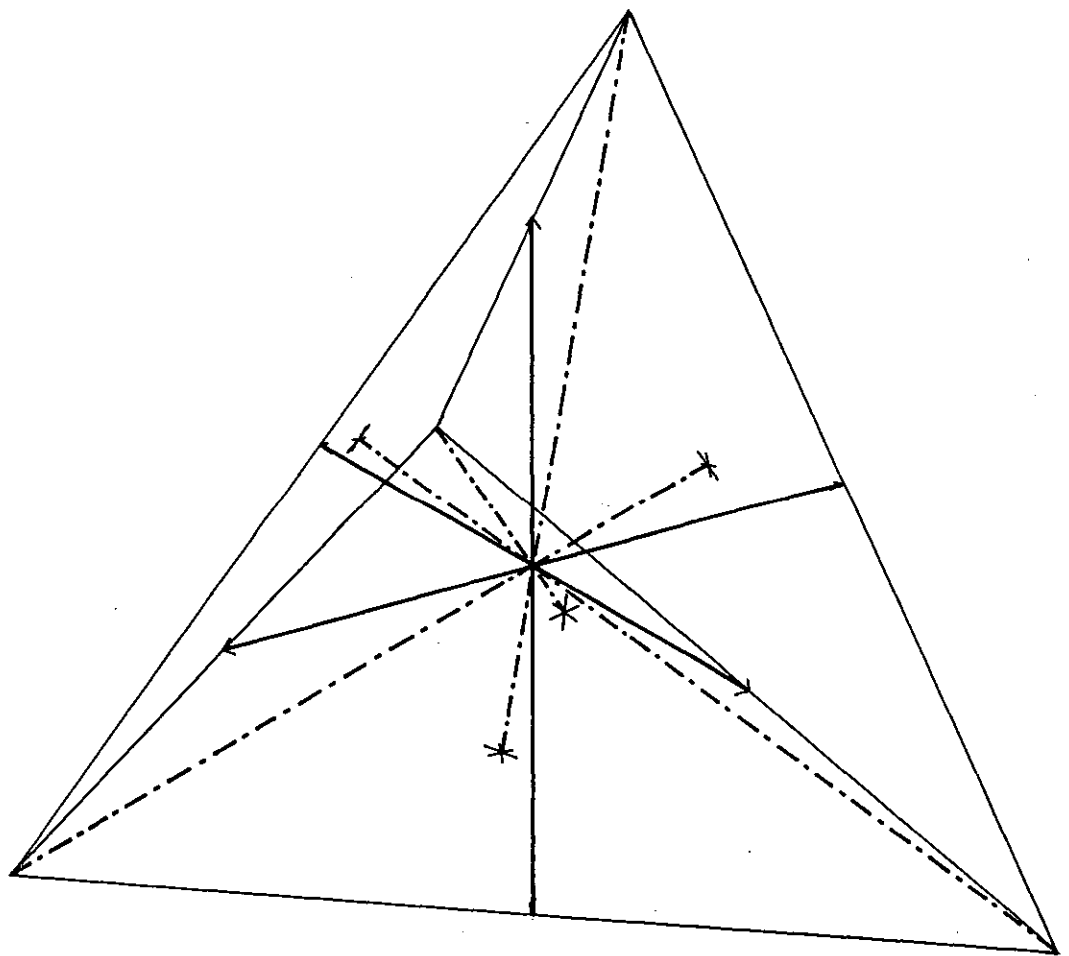


FIG 8.1.3. EJES DE SIMETRIA

BINARIOS ———
TERNARIOS - - - - -

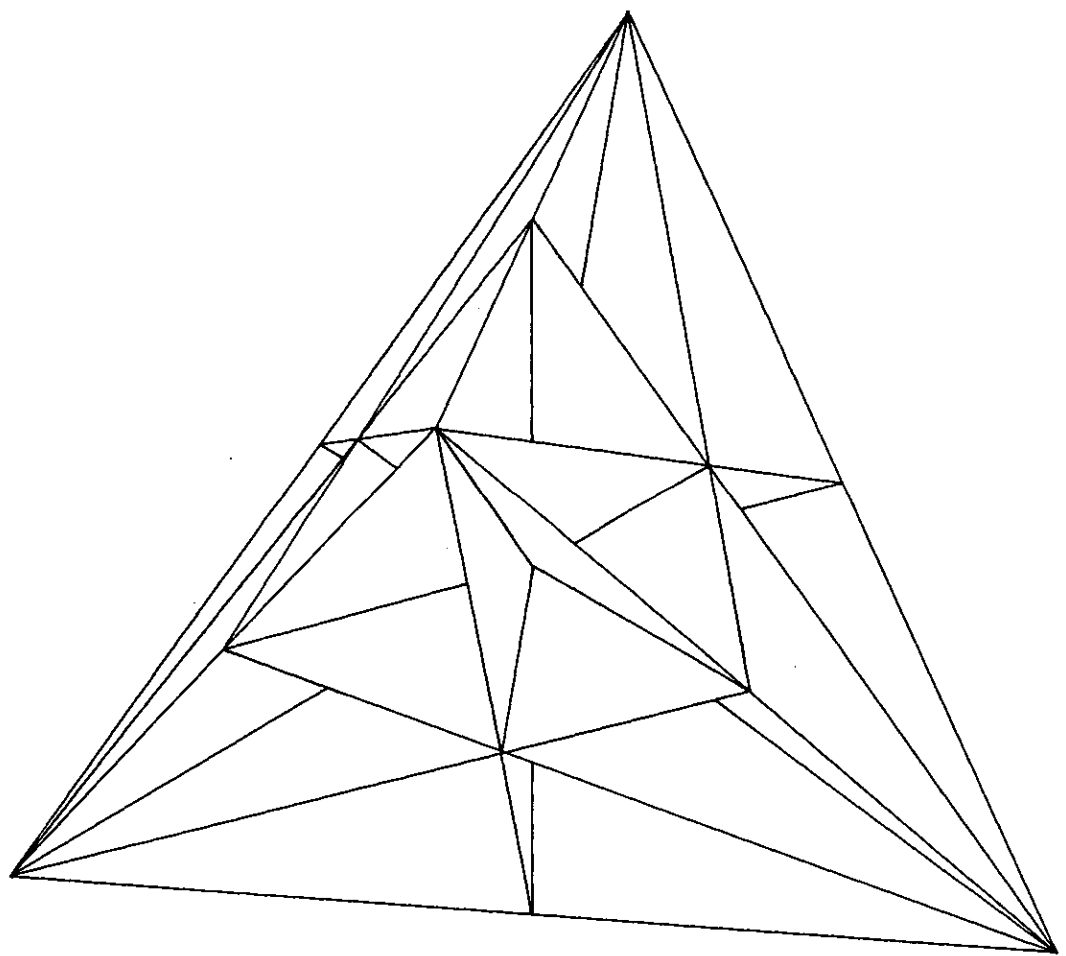


FIG 8.1.4. PLANOS DE SIMETRIA

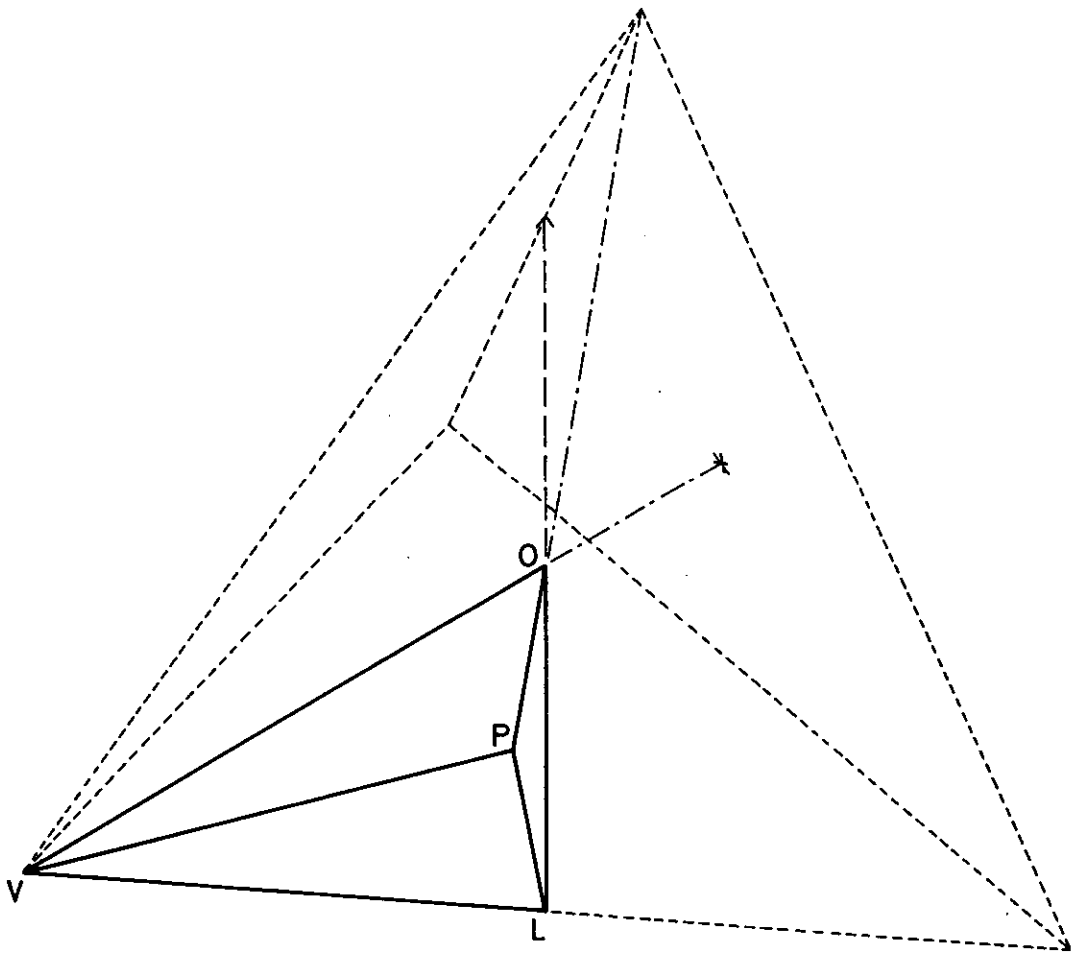


FIG 8.1.5. MODULO ELEMENTAL DEL TETRAEDRO BASICO

8.1.1. POLIEDROS DERIVADOS DE LOS TETRAEDROS BASICO Y DUAL

Vamos a estudiar ahora las diversas figuras del sistema del tetraedro, inscribiéndolas en el tetraedro básico, para ver cómo la división de éste en módulos elementales es aplicable a las mismas. Como todos los poliedros del sistema, con la excepción ya vista del tetraedro achatado (icosaedro), pueden participar en divisiones regulares o semirregulares del espacio, estos módulos serán partícipes de dichas divisiones. Comenzaremos por los poliedros resultantes de la intersección de un tetraedro básico con uno dual, estableciendo, de mayor a menor, la secuencia: tetraedro básico (ya analizado), tetraedro truncado básico, tetratetraedro (octaedro), tetraedro truncado dual y finalmente tetraedro dual, definido por tener sus vértices en el centro de las caras del básico.

Como hemos visto en el capítulo 7 (figura 7.20.), todas estas piezas pueden descomponerse en tetraedros y octaedros. Allí han aparecido el tetraedro truncado (figura 7.20.g,h,i) descompuesto en siete tetraedros y cuatro octaedros; el octaedro (figura 7.20.d,e,f), en ocho tetraedros y seis octaedros, y en las mismas figuras el propio tetraedro, dividido en cuatro tetraedros menores y un octaedro. Todas estas figuras, al ser incluidas en el tetraedro básico, excluyen partes de éste, que, o bien son tetraedros, o bien pueden ser descompuestos a su vez en tetraedros y octaedros; estos tetraedros y octaedros, todos de la misma arista, pueden obtenerse dividiendo la arista del básico que los incluye en dos, tres, cuatro, etc. partes iguales. Estudiemos en una tabla el número de tetraedros y octaedros menores en que puede dividirse el tetraedro básico:

División de la arista en partes	Tetraedros	Octaedros
1	1	0
2	4	1
3	11	4
4	24	10
5	45	20
6	76	35
7	119	56
8	176	84

Como puede observarse facilmente, los números sucesivos de cada columna forman una progresión aritmética de tercer orden; llamando a_n (b_n) al término general y sucesivamente Δa_n (Δb_n), $\Delta^2 a_n$ ($\Delta^2 b_n$), $\Delta^3 a_n$ ($\Delta^3 b_n$), a los incrementos de órdenes sucesivos podemos hacer la siguiente doble tabla:

				T	0				
$\Delta^4 a_n$	$\Delta^3 a_n$	$\Delta^2 a_n$	Δa_n	a_n	b_n	Δb_n	$\Delta^2 b_n$	$\Delta^3 b_n$	$\Delta^4 b_n$
			3	1	0				
		4	7	4	1	1			
0	2	6	13	11	4	3	2	1	0
0	2	8	21	24	10	6	4	1	0
0	2	10	31	45	20	10	5	1	0
0	2	12	43	76	35	15	6	1	0
		14	57	119	56	21	7	1	
				176	84	28			

La expresión del término general es, para ambos casos:

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 a_1$$

$$b_n = b_1 + \binom{n-1}{1} \Delta b_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 b_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 b_1$$

Lo que da, sustituidos valores:

$$a_n = \frac{1}{3}n(n^2+2) \quad b_n = \frac{1}{6}n(n^2-1) \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$$

De modo análogo, la división del octaedro en tetraedros y octaedros menores, en función del número de aristas de éstos que resulten de dividir la de aquél en partes iguales, permite obtener la siguiente tabla:

				T	0				
$\Delta^4 c_n$	$\Delta^3 c_n$	$\Delta^2 c_n$	Δc_n	c_n	d_n	Δd_n	$\Delta^2 d_n$	$\Delta^3 d_n$	$\Delta^4 d_n$
			8	0	1				
		16	24	8	6	5	8		
0	8	24	48	32	19	13	12	4	0
0	8	32	80	80	44	25	16	4	0
0	8	40	120	160	85	41	20	4	0
0	8	48	168	280	146	61	24	4	0
		56	224	448	231	85	28	4	
				672	344	113			

Términos generales:

$$c_n = \frac{4}{3}n(n^2-1) \quad " \quad d_n = \frac{1}{3}n(2n^2+1) \quad " \quad \frac{c_n}{d_n} < 2 \quad " \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} = 2$$

Consideremos ahora una figura cuya repetición llena por completo el espacio: el rombohexaedro constituido por un octaedro y dos tetraedros adosados a caras opuestas. Si se subdividen estos poliedros en tetraedros y octaedros menores, el número de éstos puede obtenerse sumando a los valores de la segunda tabla el doble de los de la primera:

$\Delta^4 e_n$	$\Delta^3 e_n$	$\Delta^2 e_n$	Δe_n	T e_n	O f_n	Δf_n	$\Delta^2 f_n$	$\Delta^3 f_n$	$\Delta^4 f_n$
			14	2	1				
		24	38	16	8	7	12		
0	12	36	74	54	27	19	18	6	0
0	12	48	122	128	64	37	24	6	0
0	12	60	182	250	125	61	30	6	0
0	12	72	254	432	216	91	36	6	0
		84	338	686	343	127	42	6	
				1024	512	169			

Términos generales:

$$e_n = 2a_n + c_n = 2n^3 \quad " \quad f_n = 2b_n + d_n = n^3 \quad " \quad \frac{e_n}{f_n} = 2 \quad " \quad e_n = 2f_n$$

Conclusiones:

- Todas las subdivisiones contienen doble número de tetraedros que de octaedros, es decir, un número exacto de rombohexaedros.
 - Este número es el cubo del número de divisiones de la arista, lo que resulta evidente, por tratarse de una transformación afín de la red de cubos.
- Comparando los tres casos anteriores se ve, que por agregación de tetraedros y octaedros se pueden obtener poliedros mayores. Si el poliedro obtenido no permite a su vez por repetición llenar el espacio, la proporción de ambos poliedros elementales no llega nunca a ser 2:1, pero tiende a dicho límite al aumentar el volumen del agregado; en cambio cuando el poliedro mayor llena el espacio, independientemente de su volumen en relación con los poliedros elementales, el número de éstos está siempre en la proporción de 2:1. En todo caso concluimos que, si dividimos el espacio en regiones tetraédricas y octaédricas, el número de tetraedros es doble que el de octaedros.

Vimos ya que, en función de la arista, el volumen del tetraedro era :

$$V_T = 2\sqrt{2}/3 \cdot l^3 = 0,942809041 l^3$$

El del octaedro será:

$$V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (21)^2 \cdot \sqrt{21} = \frac{2}{3} \cdot 41^2 \cdot \sqrt{21} = \frac{8\sqrt{21}}{3} 1^3 = 3,771236166 1^3$$

Es decir, cuatro veces mayor.

El del rombohexaedro:

$$V_R = 2V_T + V_0 = 4\sqrt{21}^3 = 5,656854249 1^3$$

Como este último, contiene siempre la misma proporción de tetraedros y octaedros, podemos tomar su caso como representativo de todo el espacio, y afirmar que éste puede descomponerse a partes iguales en octaedros, tetraedros en posición básica y tetraedros en posición dual, ocupando los primeros los dos tercios del volumen, y repartiéndose los tetraedros básico y dual el tercio restante, a partes iguales, por lo que corresponde un sexto a cada clase de tetraedro.

8.1.1.1. TETRAEDRO BASICO TRUNCADO

Se obtiene dividiendo la arista del tetraedro mayor en tres, lo que nos lleva a descomponerlo en once tetraedros y cuatro octaedros. Si eliminamos los cuatro tetraedros que ocupan los vértices, se obtiene el tetraedro truncado (figura 8.1.6.a), que queda así formado por siete tetraedros y cuatro octaedros (figura 7.20.g,h,i). A los tetraedros pertenecen, a uno el centro, y a seis las aristas que limitan exágonos, y a los octaedros las caras triangulares. La proporción entre regiones elementales tetraédricas y octaédricas, $7/4=1,75$, mejora respecto al tetraedro de partida, $11/4=2,75$, lo que indica que el tetraedro truncado no llena el espacio, pero lo ocupa mejor que el tetraedro. Si dividimos el tetraedro mayor en módulos elementales (figura 8.1.6.b) uno de estos contiene $1/6$ de tetraedro menor y $1/24$ de tetraedro truncado, es decir, $7/24$ de tetraedro y $4/24=1/6$ de octaedro, ambos menores. en cuanto a volumen, si lo medimos en tetraedros elementales, el tetraedro mayor ocupaba tanto como $11 + 4 \cdot 4 = 27$ tetraedros menores, y al eliminar cuatro de éstos queda el tetraedro truncado con 23, ocupando $23/27$ del tetraedro original, $0,851$ del mismo, proporción que se mantiene para el módulo elemental.

Como vimos en las figuras 7.16., 7.17., 7.18., cada tetraedro menor limita con cuatro tetraedros truncados. Si lo repartimos entre cada uno de ellos, la figura resultante, tetraedro truncado apiramidado (figura 8.1.6.c), permitirá ella sola la ocupación total del espacio. El poliedro ocupa $4 \cdot 1/4 = 1$ tetraedro más que el tetraedro truncado, es decir, ocho tetraedros y cuatro octaedros, lo que cumple la proporción $8/4=2$ que consideramos más arriba necesaria para que la figura llene el espacio.

El volumen ocupado por esta figura es $1/27$ del tetraedro mayor más que el tetraedro truncado, es decir, $24/27=0,8$ de aquél, proporción que mantiene su mó-

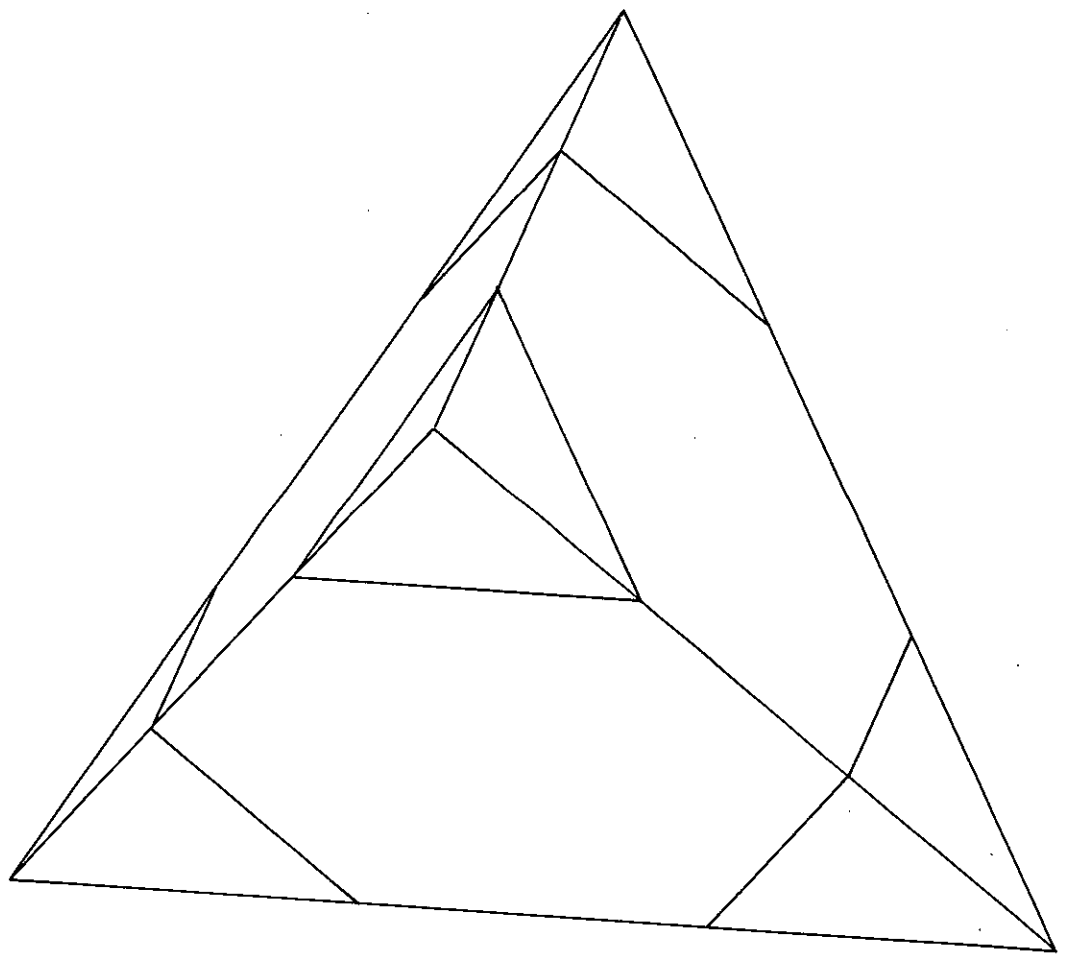


FIG 8.1.6.a TETRAEDRO TRUNCADO INSCRITO EN EL BASICO
RED DE TETRAEDROS Y TETRAEDROS TRUNCADOS

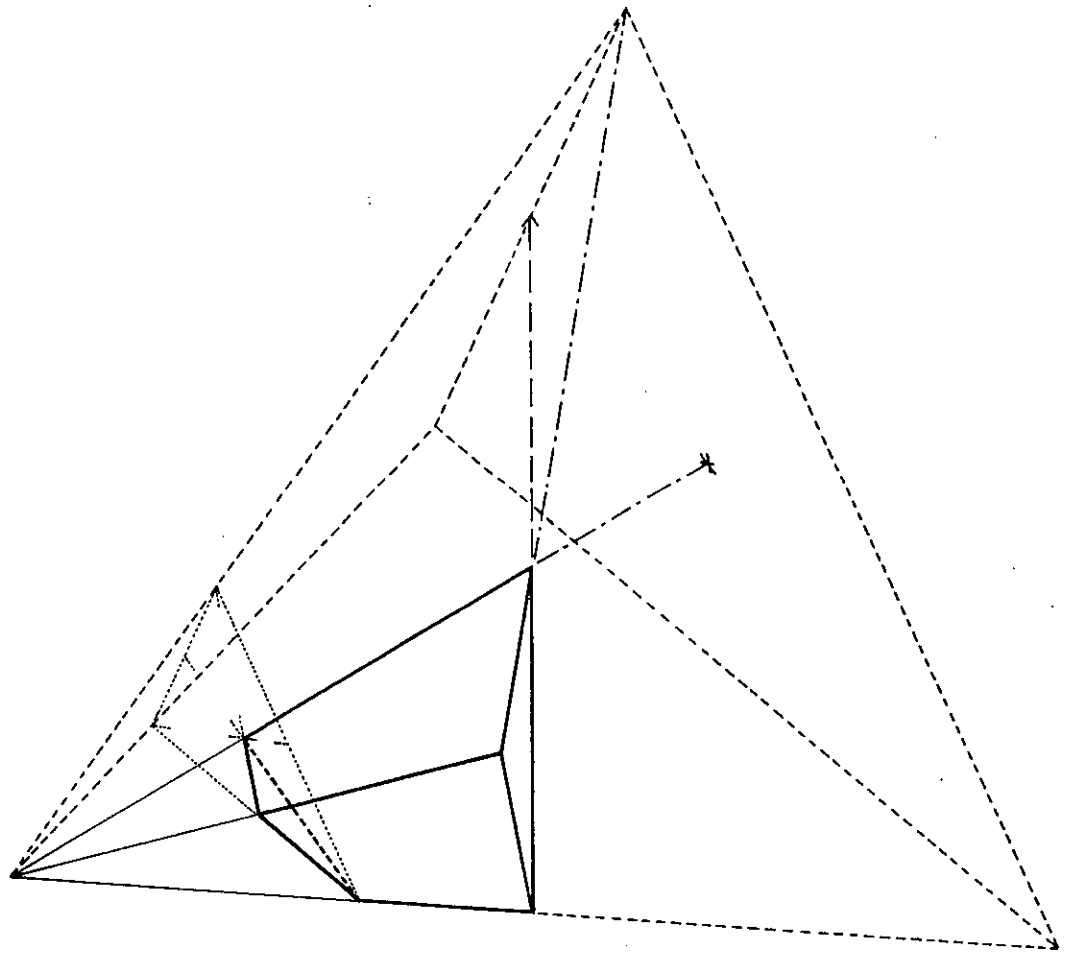


FIG 8.1.6.b MODULO DEL TETRAEDRO TRUNCADO

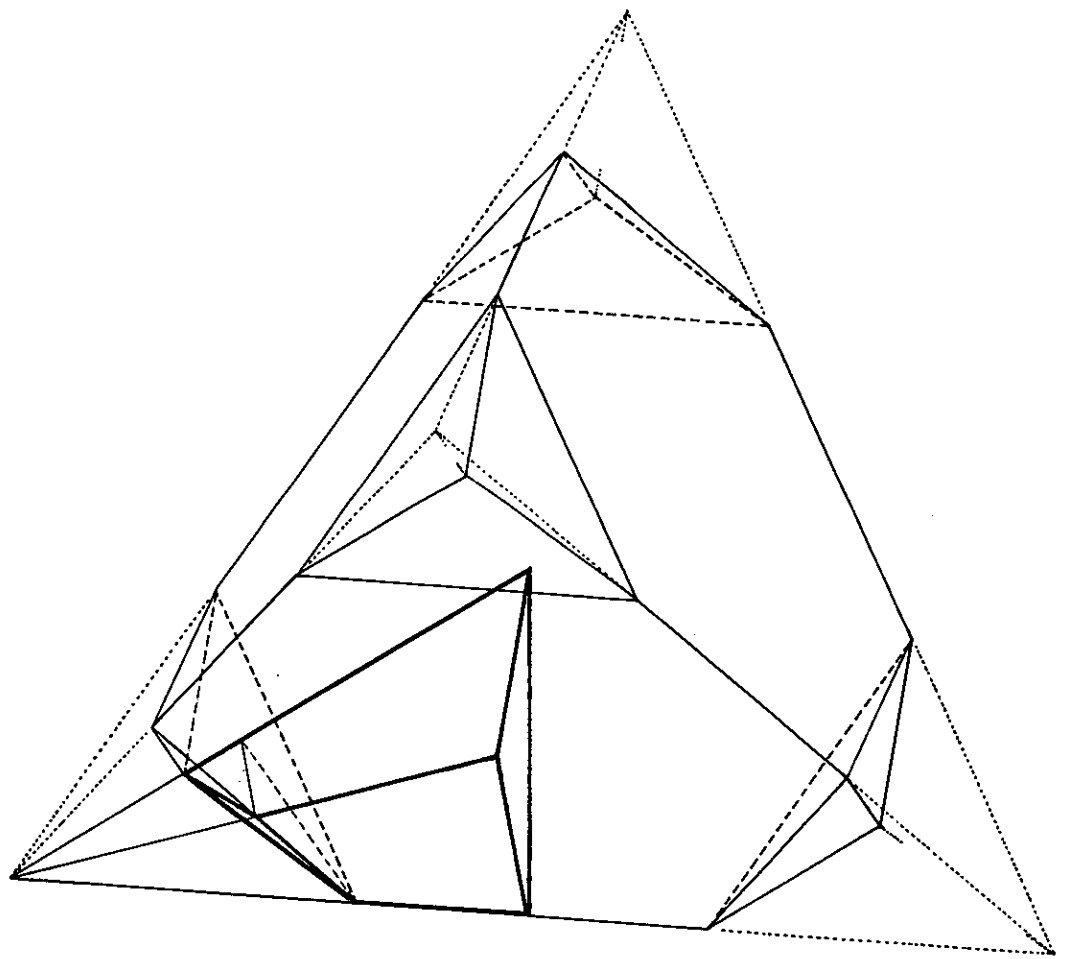


FIG 8.1.6.c TETRAEDRO TRUNCADO APIRAMIDADO

dulo elemental del tetraedro básico; en relación con éste, es $\frac{1}{24} \cdot \frac{24}{27} = \frac{1}{27} = 0,037$ tetraedros básicos.

El par enantiomorfo de módulos del tetraedro truncado apiramidado, pirámide triangular truncada con dos caras triangulares y tres trapezoidales, todas ellas diferentes, llena el espacio.

8.1.1.2. OCTAEDRO

Si la arista del tetraedro mayor se divide en dos, queda descompuesto en un octaedro y cuatro tetraedros (figura 8.1.7.a). Este octaedro ocupa la mitad del volumen del tetraedro básico, que medido ahora en tetraedros menores sería $4 + 1.4 = 8$. Naturalmente, su módulo elemental tiene también la mitad del volumen del módulo elemental del tetraedro, $\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48} = 0,0208\bar{3}$ (figura 8.1.7.b). Si añadimos al octaedro, como en el caso anterior, $1/4$ de cada uno de los cuatro tetraedros menores, el octaedro con cuatro caras apiramidadas resultante (figura 8.1.7.c), compuesto de un octaedro y $4 \cdot 1/4 = 1$ tetraedro menor, es decir, en proporción $1/1 = 1$, no cumple la proporción 2 necesaria para llenar el espacio. Este poliedro ocupa, del volumen de $4 + 4 \cdot 1 = 8$ tetraedros menores, $4 + 1 = 5$, este es, $5/8 = 0,625$ tetraedros básicos. Su módulo ocupa $\frac{1}{24} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{192} = 0,026041\bar{6}$ tetraedros.

Si apiramidamos las otras cuatro caras del tetraedro, la figura que se obtiene, octaedro apiramidado en sus ocho caras (figura 8.1.7.d), ya no está inscrita en el tetraedro básico. Se compone de un octaedro y $8 \cdot 1/4 = 2$ tetraedros, y cumple la relación necesaria entre tetraedros y octaedros para llenar el espacio. El octaedro apiramidado es simplemente el rombododecaedro. Si el tetraedro básico tiene un volumen de $4 + 1.4 = 8$ tetraedros menores, y este rombododecaedro $8 \cdot 1/4 + 4 = 6$, la relación de volúmenes es $6/8 = 0,75$ tetraedros básicos, e igual relación entre sus módulos elementales. El rombododecaedro tiene un módulo de $\frac{1}{24} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{32} = 0,03125$ tetraedros básicos; es una pirámide triangular compuesta de $1/24$ de octaedro y $2/24$ de tetraedro.

8.1.1.3. TETRAEDRO DUAL TRUNCADO

Si tomamos como arista del tetraedro y octaedro menores $1/5$ de la arista del básico, queda descompuesto éste en 45 tetraedros y 20 octaedros menores, que pueden reagruparse en 5 tetraedros truncados (cuatro de ellos básicos y uno, el que ocupa el centro, dual), y 10 tetraedros más, cuatro en los vértices y seis en el centro de las aristas (figura 8.1.8.a). el tetraedro truncado dual tiene sus caras triangulares sobre las del tetraedro básico. Si el volumen total del tetraedro mayor es de $45 + 20 \cdot 4 = 125$ tetraedros menores, y el del truncado dual es de $7 + 4 \cdot 4 = 23$ tetraedros menores, el tetraedro truncado dual es una fracción $23/125 = 0,184$ de tetraedro básico, relación que mantienen sus módulos. El módulo de tetraedro dual truncado (figura 8.1.8.b), supone $\frac{1}{24} \cdot \frac{23}{125} =$

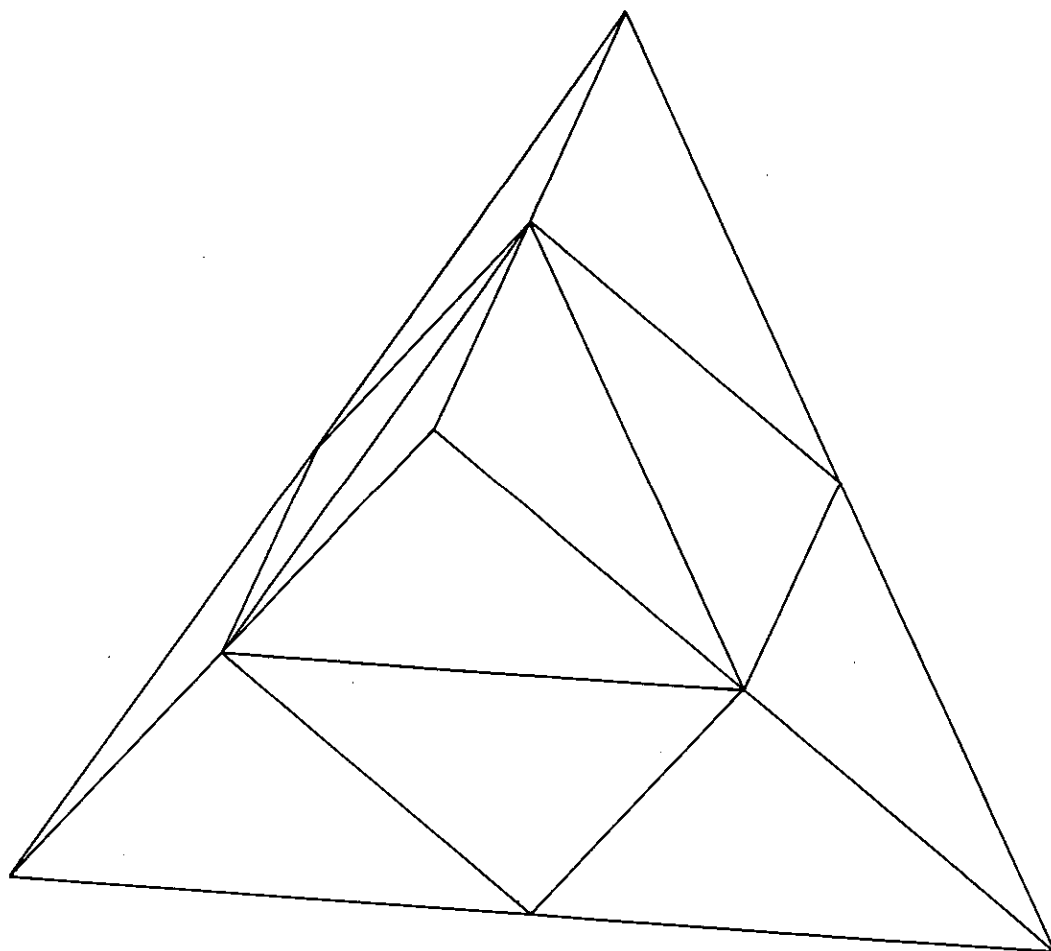


FIG 8.1.7.a OCTAEDRO INSCRITO EN EL TETRAEDRO
RED DE TETRAEDROS Y OCTAEDROS

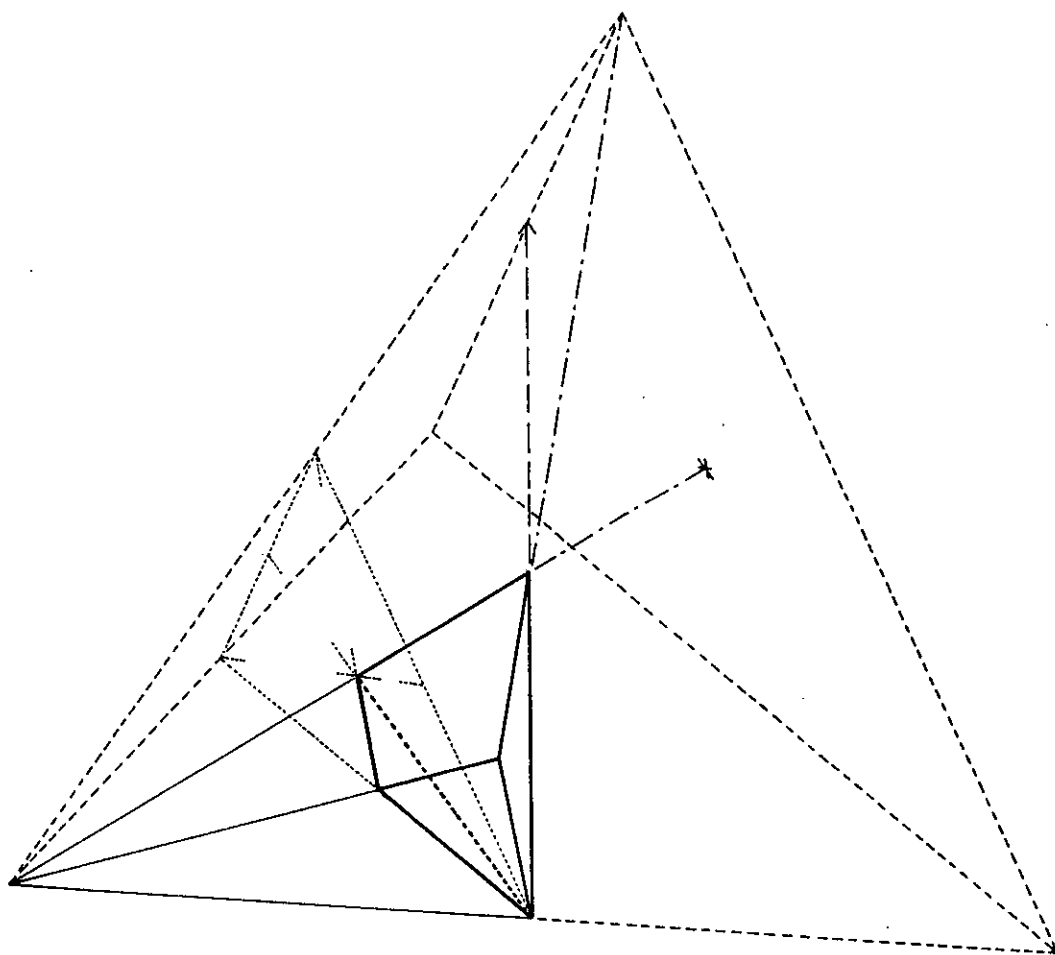


FIG 8.1.7.b MODULO DEL OCTAEDRO

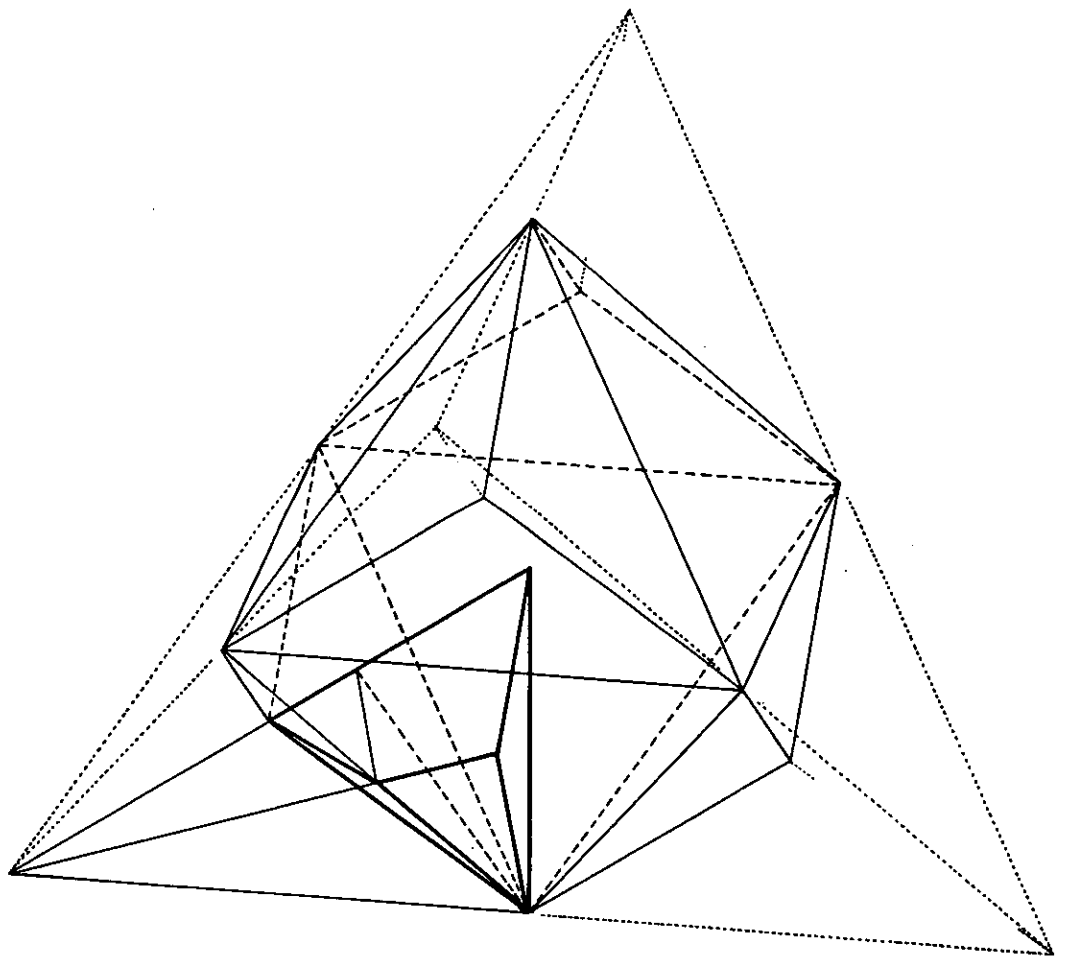


FIG 8.1.7.c OCTAEDRO APIRAMIDADO EN CUATRO CARAS

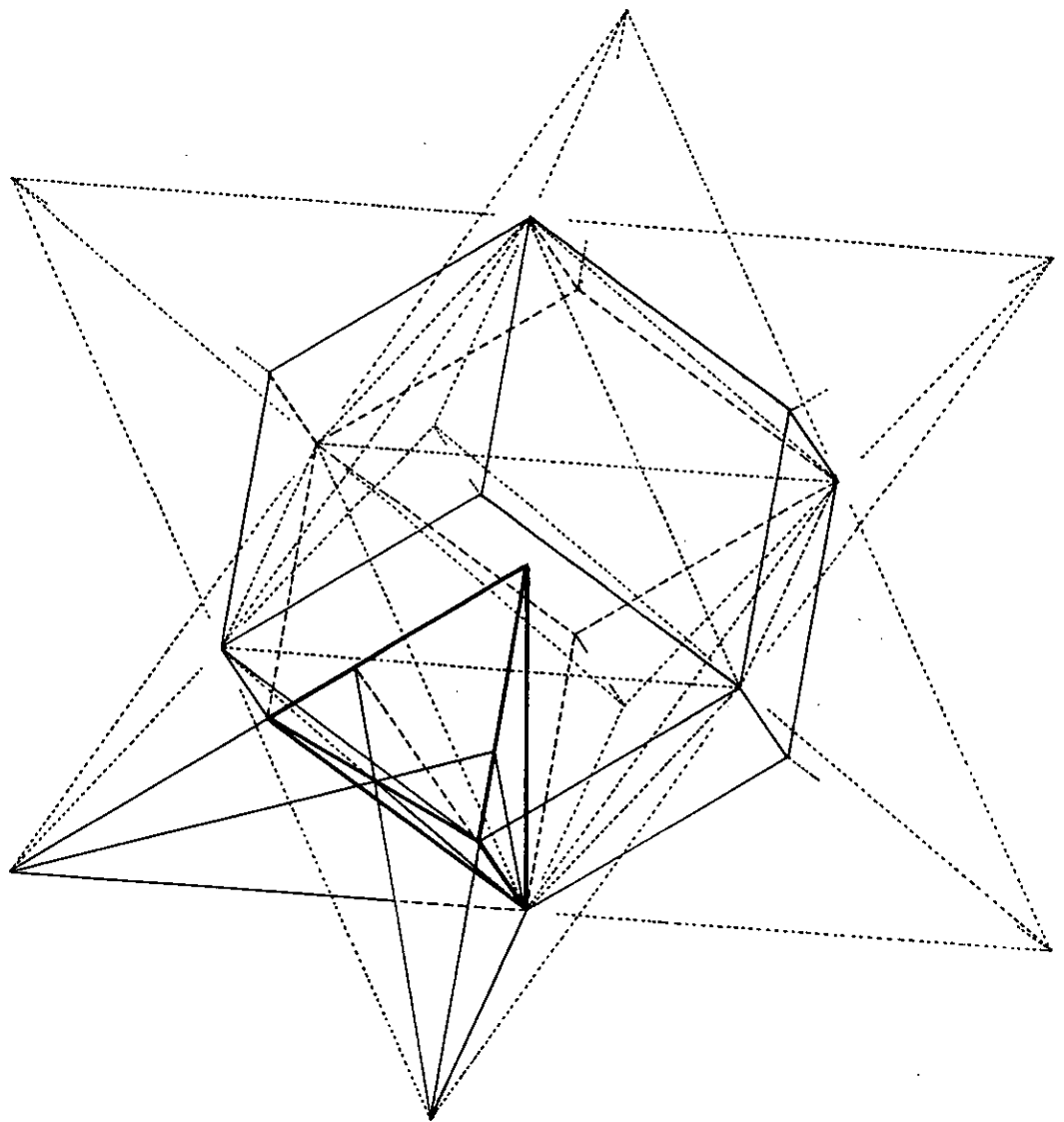


FIG 8.1.7.d OCTAEDRO APIRAMIDADO
(ROMBODODECAEDRO)

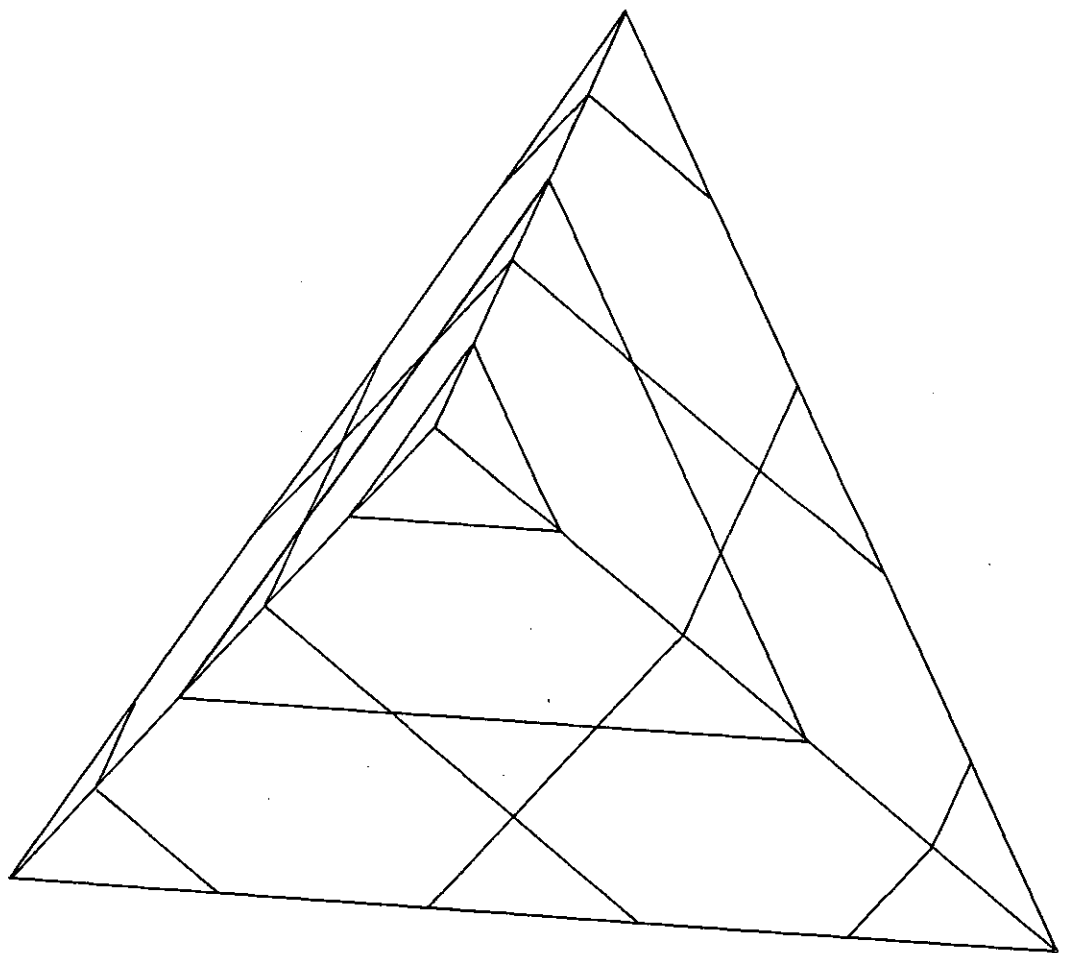


FIG 8.1.8.α TETRAEDRO DUAL TRUNCADO INSCRITO EN EL BASICO
RED DE TETRAEDROS Y TETRAEDROS TRUNCADOS

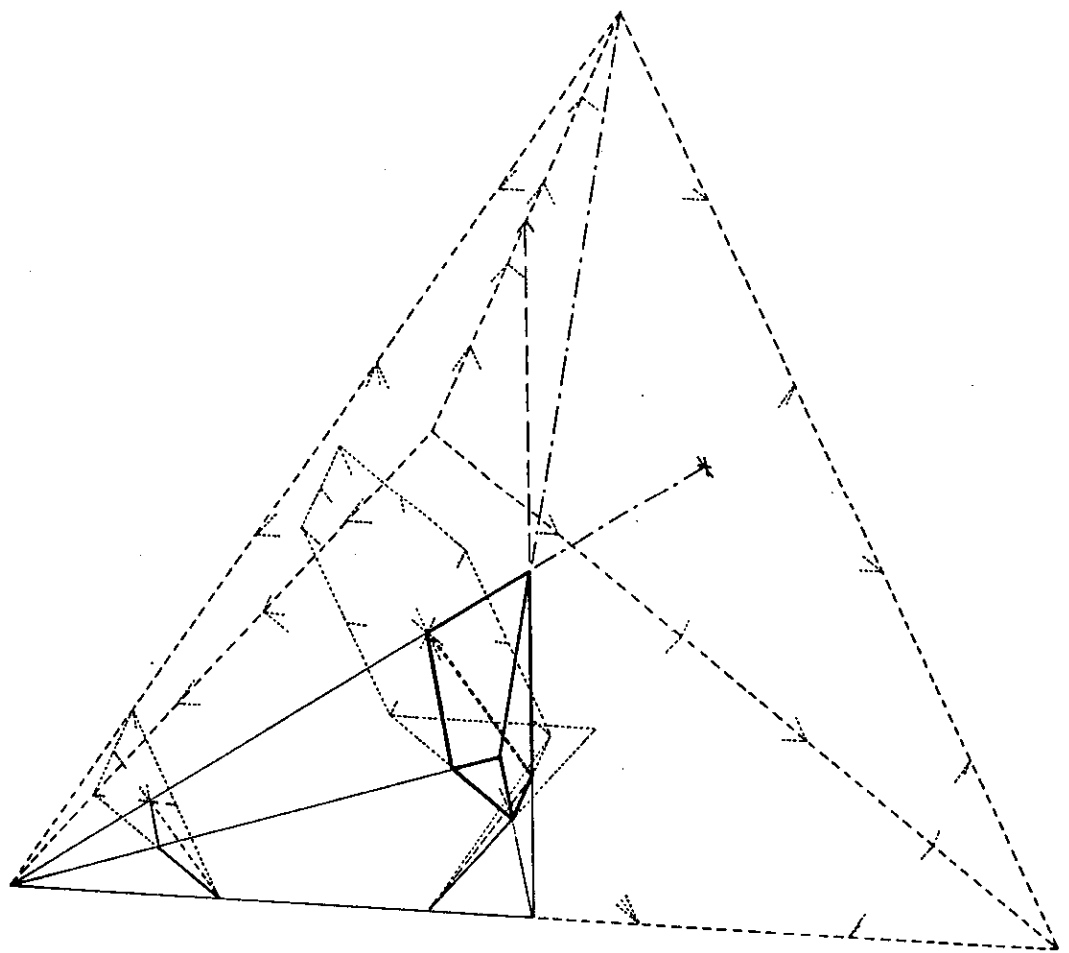


FIG 8.1.8.b MODULO DEL TETRAEDRO DUAL TRUNCADO

$= \frac{23}{3000} = 0,007\overline{6}$ tetraedros básicos. En esta red el módulo elemental del tetraedro básico queda descompuesto en $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ de tetraedro menor, y $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$ de tetraedro truncado.

8.1.1.4. TETRAEDRO DUAL

Aparece ocupando el centro de la figura en la división del apartado 8.1.1.1. (figura 8.1.9.a). En ella el tetraedro básico queda descompuesto en once tetraedros (uno en el centro, seis en las aristas, cuatro en los vértices) y cuatro octaedros. Uno sólo de los once es de la clase dual. Sus vértices son los centros de la cara del básico. Como el volumen de éste es de $11 + 4 \cdot 4 = 27$ tetraedros menores, la relación de volúmenes es $1/27 = 0,0\overline{37}$; es también la relación entre sus módulos elementales. El módulo del dual supone $\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{648} = 0,001\overline{543209876}$ del tetraedro básico. En esta red, el módulo elemental del tetraedro básico queda descompuesto en $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{11}{24}$ de tetraedro menor y $\frac{1}{6}$ de octaedro (figura 8.1.9.b).

Como cada tetraedro está rodeado de cuatro octaedros y cada octaedro de ocho tetraedros, podemos repartir cada octaedro entre los ocho tetraedros que lo rodean, quedando el tetraedro apiramidado en sus cuatro caras; esta figura queda compuesta de un tetraedro y $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ octaedro, manteniendo la proporción de dos tetraedros por octaedro necesaria para que la figura por sí sola permita la ocupación total del espacio. Este tetraedro apiramidado es el cubo (figura 8.1.9.c). El volumen de este cubo es de $1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3$ tetraedros menores; como el tetraedro básico tiene un volumen de 27, la relación volumétrica entre ambos es $\frac{3}{27} = \frac{1}{9} = 0,1\overline{1}$, que es naturalmente la relación entre sus módulos elementales; el del cubo es 1/24 del mismo, componiéndose de 1/24 de tetraedro y 1/48 de octaedro, es decir: es la mitad del módulo del rombododecaedro de 8.1.1.2.

En la figura 8.1.10. se han representado sucesivamente inscritos en el tetraedro básico, el básico truncado, el octaedro, dual truncado y dual, señalando sus módulos elementales.

8.1.2. ROMBITETRATETRAEDROS

Si en la génesis del poliedro interviene, además del tetraedro básico y el dual, el romboedro del sistema, que es el cubo, los poliedros resultantes, que como sabemos son el cuboctaedro y el octaedro truncado, también forman redes incluidas en el sistema del tetraedro (figuras 7.2.c,d,e). Vamos a estudiar la relación entre estos rombotetratetraedros y el tetraedro básico, como paso para obtener la relación entre sus módulos elementales (figura 8.1.11.).

8.1.2.1. CUBOCTAEDRO

Con anterioridad hemos dividido la arista del tetraedro en dos, tres y cinco partes. Dividámosla ahora en cuatro partes y observemos la figura 8.1.12.a. Se descompone el tetraedro básico ahora en veinticuatro tetraedros y diez octaedros menores.

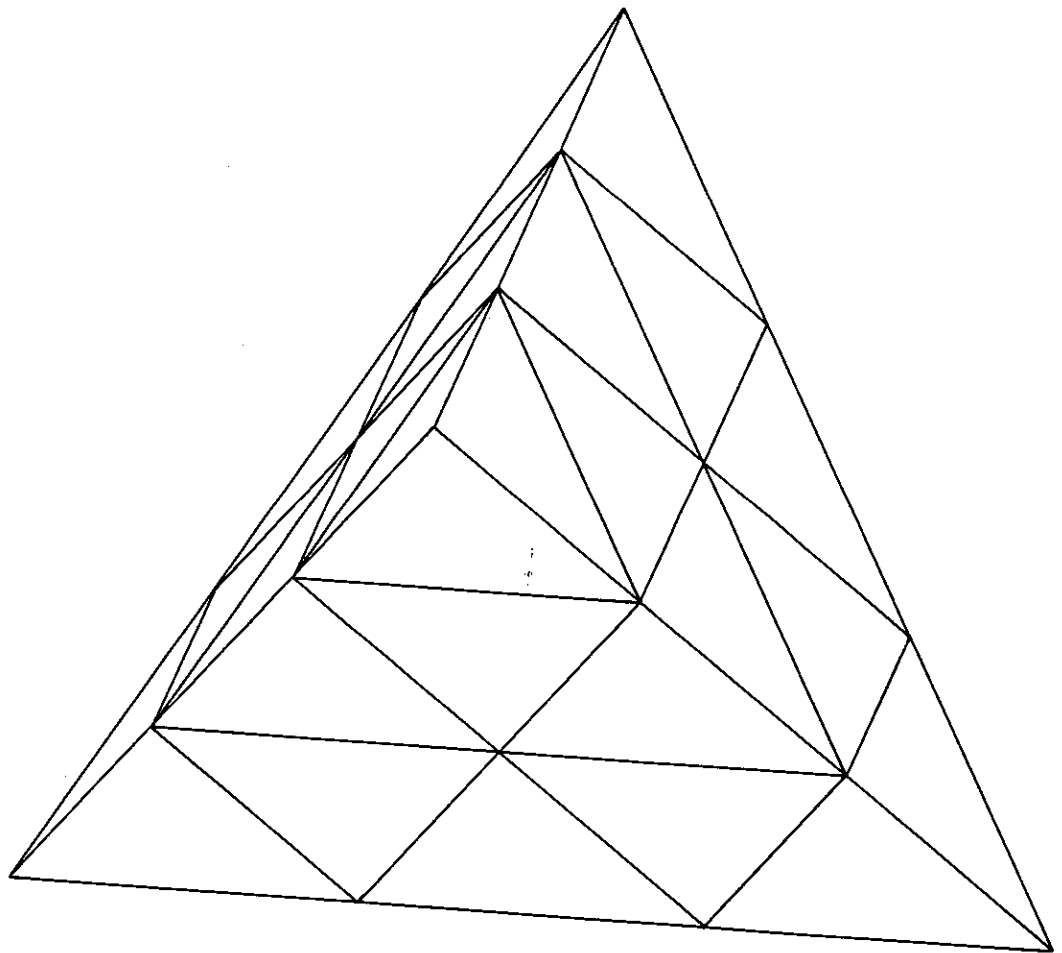


FIG 8.1.9.a TETRAEDRO DUAL INSCRITO EN EL BASICO
RED DE TETRAEDROS Y OCTAEDROS

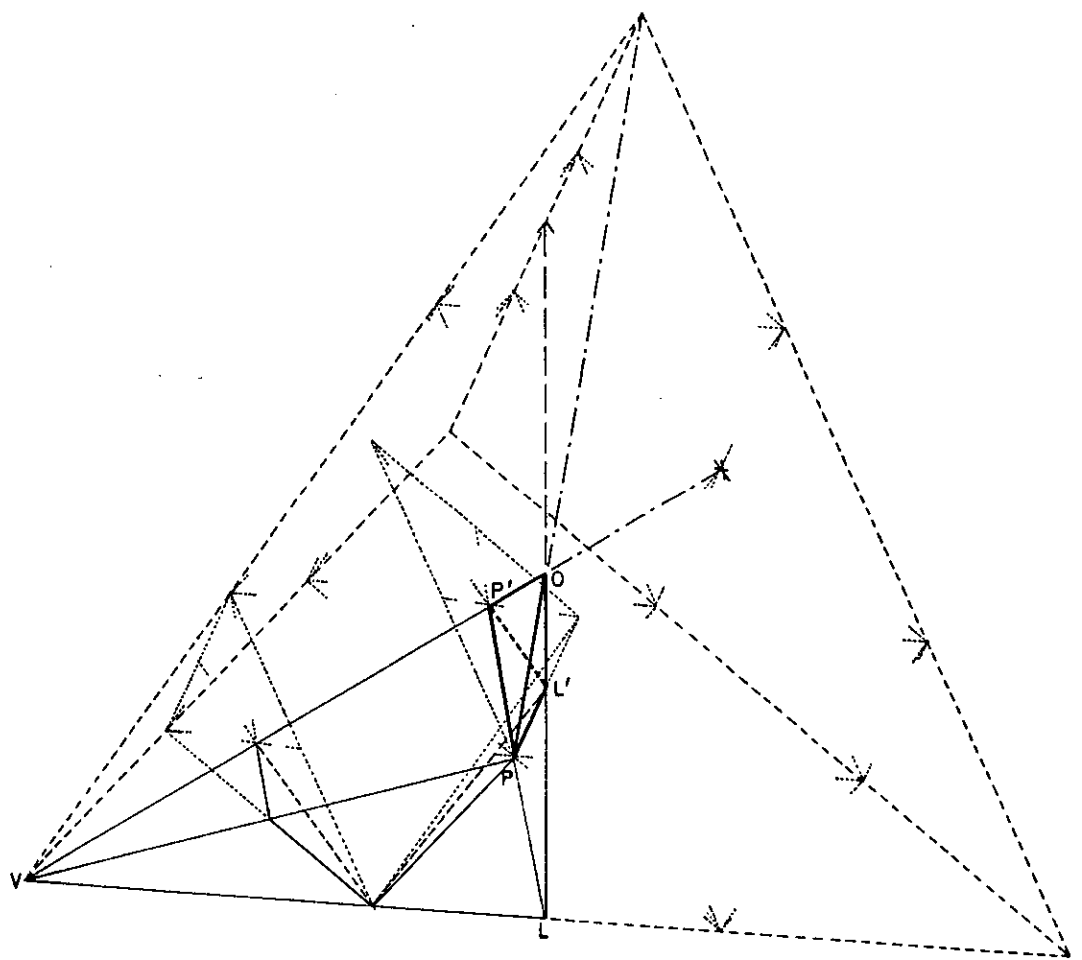


FIG 8.1.9.b MODULO DEL TETRAEDRO DUAL

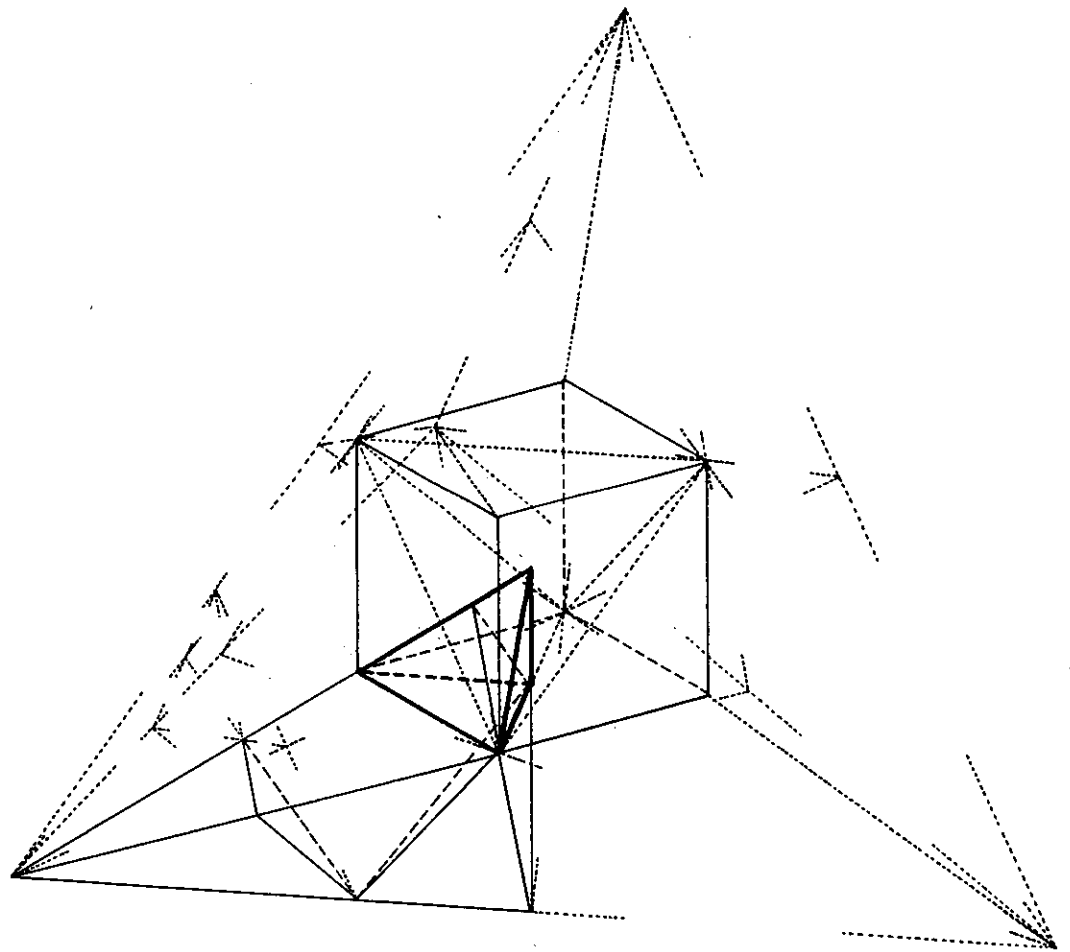


FIG 8.1.9.c TETRAEDRO APIRAMIDADO
(CUBO)

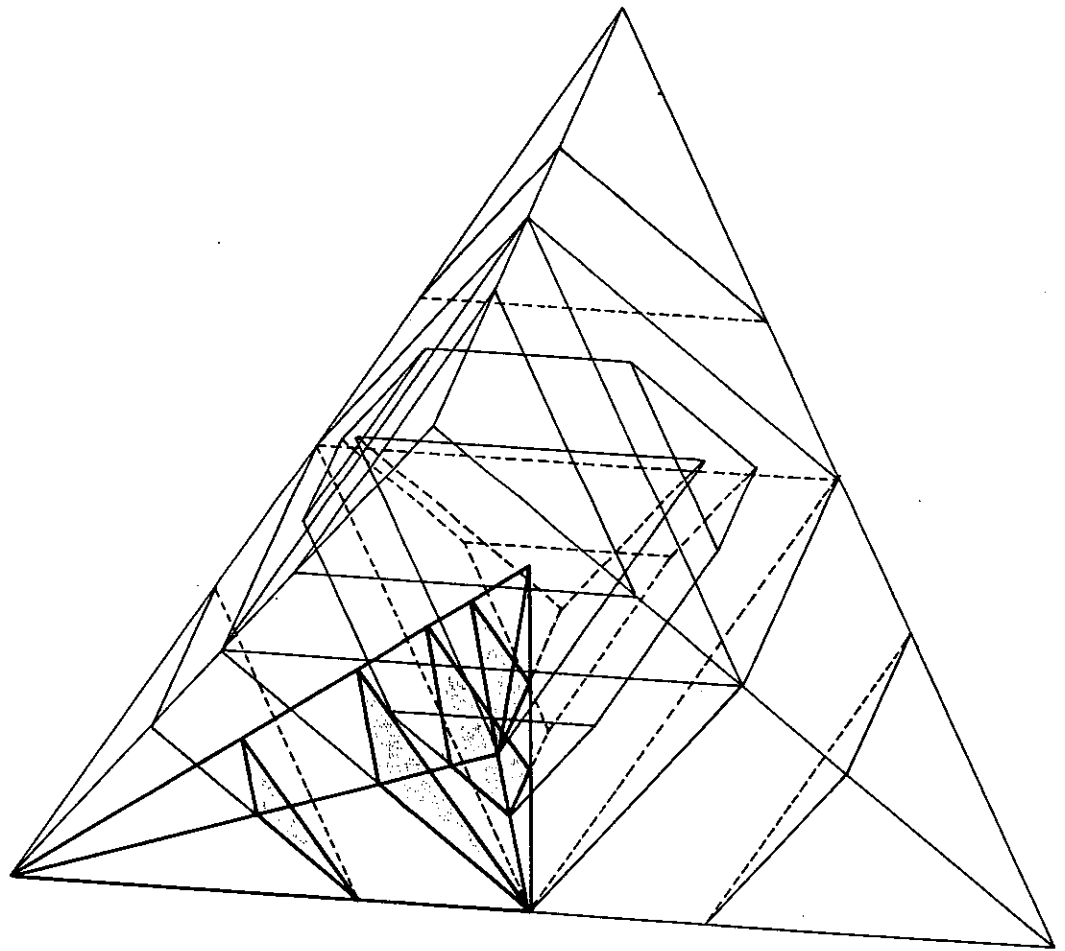


FIG 8.1.10. POLIEDROS OBTENIDOS POR INTERSECCION DE TETRAEDROS DUALES Y SUS MODULOS

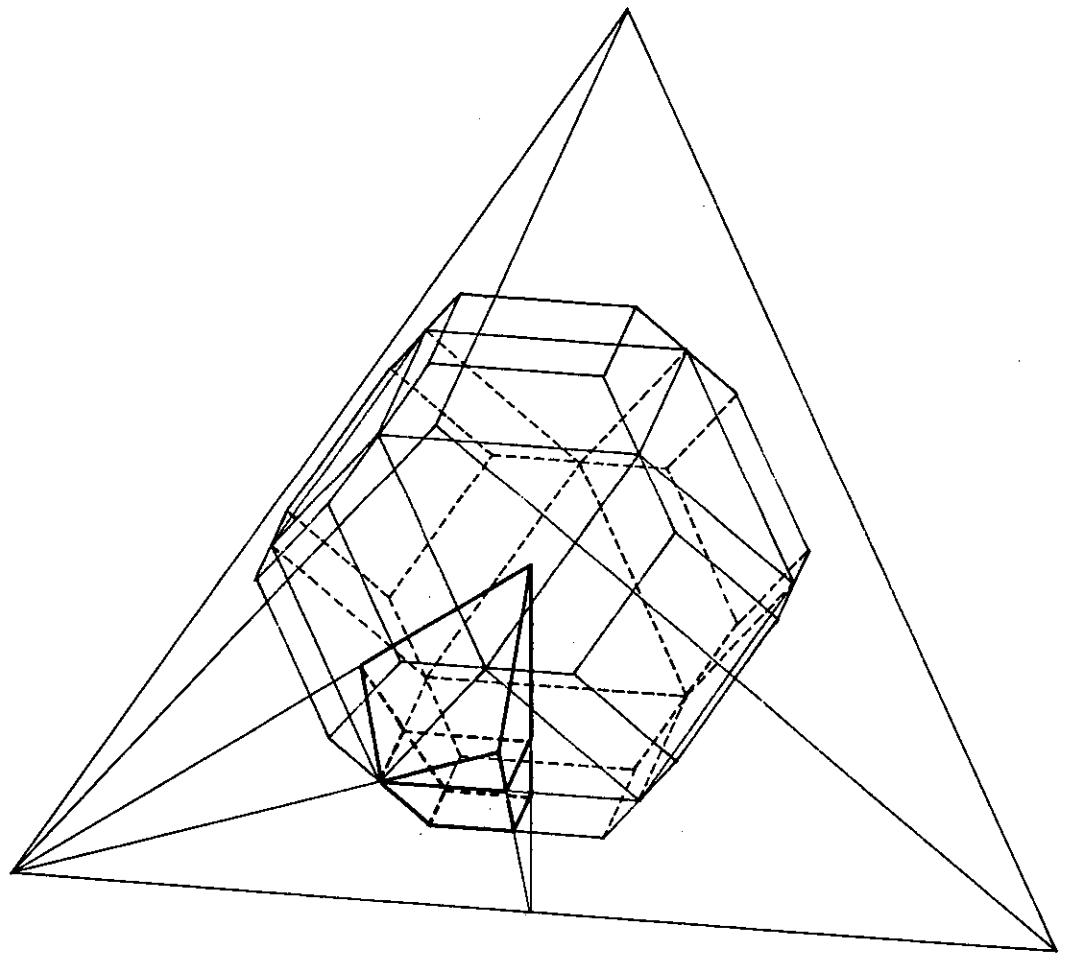


FIG 8.1.11. ROMBITETRAEDROS INSCRITOS
EN EL TETRAEDRO BASICO

Comparando esta figura con la 8.1.7.a, vemos que los tetraedros medianos de aquélla se componen cada uno de un octaedro y cuatro tetraedros menores. Si eliminamos los cuatro octaedros y dieciseis tetraedros menores que forman estos cuatro tetraedros medianos queda en el centro un octaedro constituido por ocho tetraedros y seis octaedros menores; si dividimos por la mitad los seis octaedros en dos pirámides cada uno y prescindimos de las pirámides externas (figura 8.1.12.b), la figura que queda es un cuboctaedro, que aparece descompuesto en ocho tetraedros menores, cuatro de cada clase, y seis pirámides cuadrangulares, que son medios octaedros menores. Los otros seis medios octaedros quedan aglutinados con otros tetraedros formando más cuboctaedros, de modo que cada cuboctaedro limita por sus caras cuadradas con otros seis cuboctaedros. La red de centros de los cuboctaedros se ve en la figura 8.1.12.c. Los centros de los octaedros son comunes a dos cuboctaedros. Puede verse que se trata de la red tetraoctaédrica que tantas veces ha aparecido ya (figuras 7.12. y 7.20.b,e,h). Por sus caras triangulares los cuboctaedros limitan con octaedros menores, cada uno de los cuales limita con ocho cuboctaedros. Si repartiéramos los octaedros entre los cuboctaedros limítrofes la red se convertiría en una malla cúbica.

En la figura 8.1.12.d hemos suprimido los cuboctaedros no completos, conservando cuatro octaedros y el cuboctaedro central, inscritos totalmente en el tetraedro básico. En 8.1.12.e aparece solamente el cuboctaedro inscrito en el tetraedro básico y en 8.1.12.f la relación entre los módulos de ambos poliedros.

En cuanto a relaciones volumétricas, el cuboctaedro ocupa un volumen de $8 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 20$ tetraedros menores, de los $24 + 10 \cdot 4 = 64$ que componen en tetraedro básico, lo que significa $\frac{20}{64} = 0,3125$ tetraedros básicos, y su módulo es $\frac{1}{24} \cdot \frac{20}{64} = \frac{5}{384} = 0,0130208\overline{3}$ tetraedros básicos.

El tetraedro básico contiene además cuatro octaedros menores, que suponen en total $4 \cdot \frac{4}{64} = \frac{1}{4}$ del mismo; en sus cuatro vértices aparecen fragmentos de $\frac{1}{20} = 0,05$ cuboctaedros en cada uno y en sus seis aristas fragmentos de

$\frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2$ cuboctaedros sobre cada una; en total $4 \cdot \frac{1}{20} + 6 \cdot \frac{4}{20} = \frac{7}{5} = 1,4$ cuboctaedros más. De este modo, el tetraedro básico contiene 2,4 cuboctaedros, que ocupan $\frac{3}{4}$ partes de su volumen, y cuatro octaedros, que ocupan el $\frac{1}{4}$ restante.

El módulo elemental del tetraedro básico contiene a su vez $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{24} = \frac{1}{120} + \frac{1}{20} + \frac{1}{24} = \frac{1}{10}$ de cuboctaedro, y $\frac{1}{6}$ de octaedro.

8.1.2.2. OCTAEDRO TRUNCADO

Si dividimos la arista del tetraedro básico en seis partes (figura 8.1.13.a), el poliedro queda fragmentado en 76 tetraedros y 35 octaedros menores. Podemos agrupar éstos en un octaedro y cuatro tetraedros medianos, como los de la figura 8.1.7.a, conteniendo cada tetraedro mediano once tetraedros y cuatro oc-

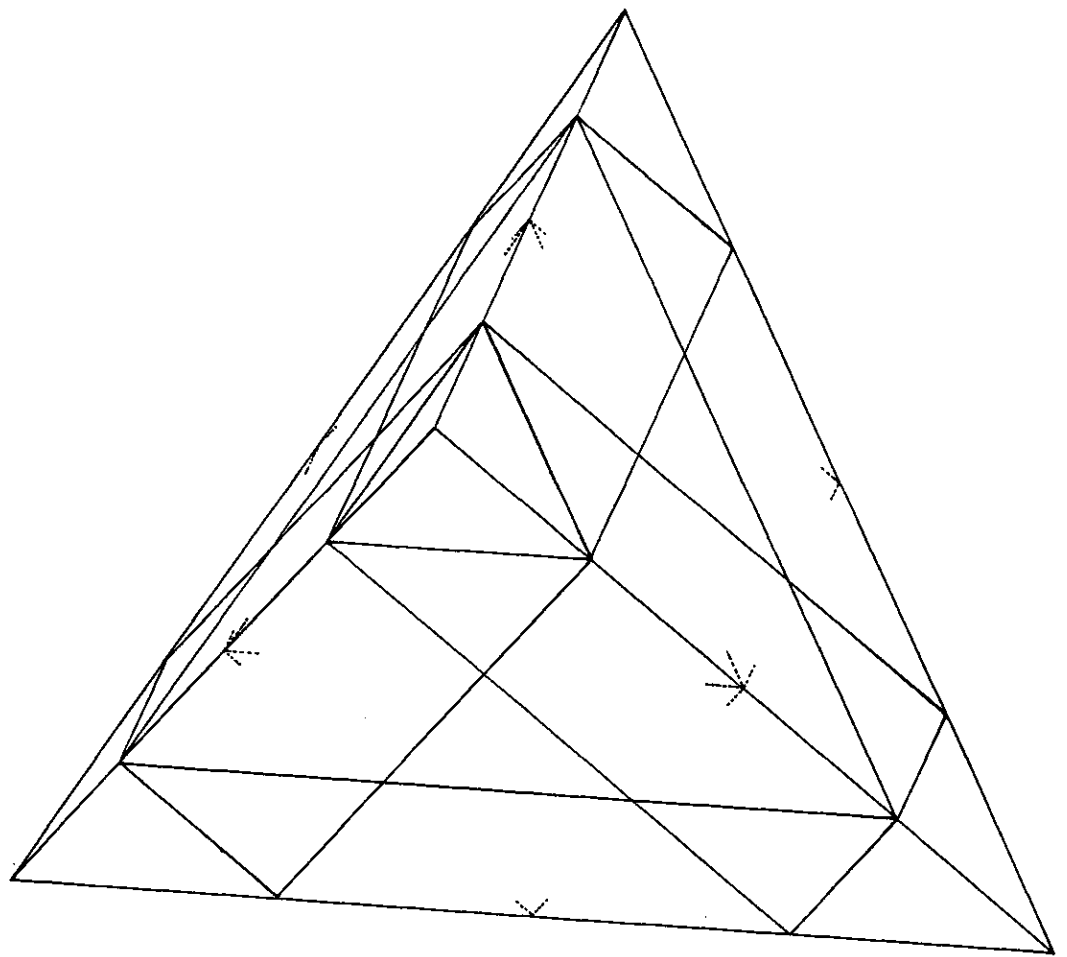


FIG 8.1.12.a CUBOCTAEDRO INSCRITO EN EL TETRAEDRO
RED DE OCTAEDROS Y CUBOCTAEDROS

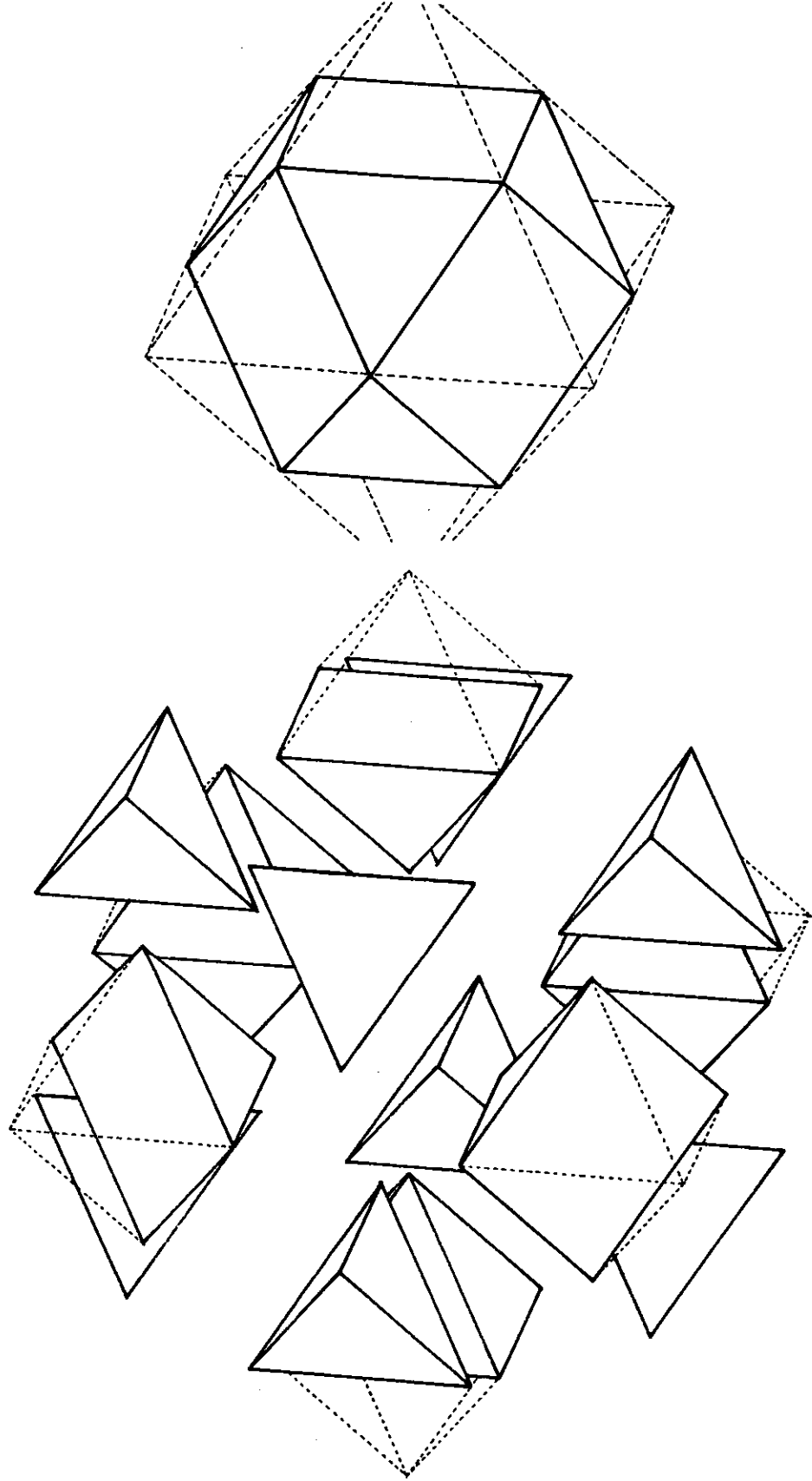


FIG 8.1.12.b DESCOMPOSICION DEL CUBOCTAEDRO
TETRAEDROS Y MEDIOS OCTAEDROS

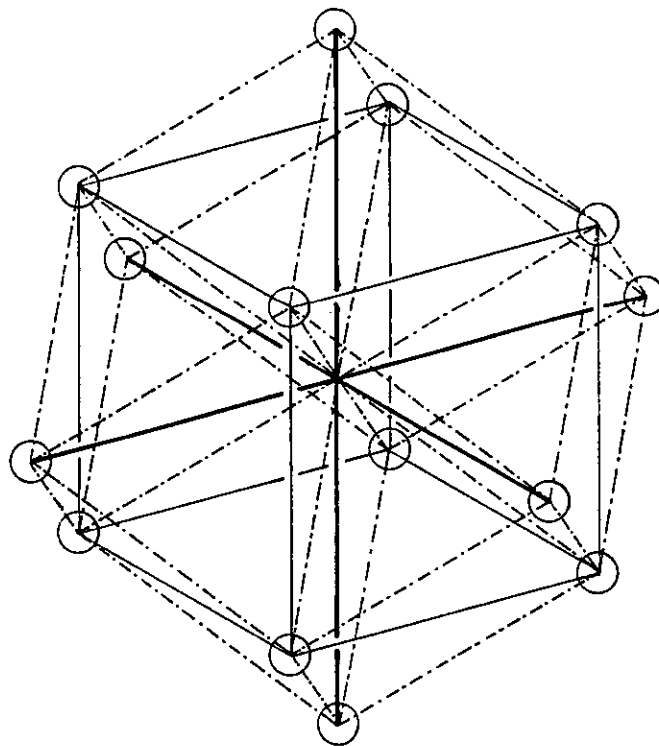


FIG 8.1.12.c RED DE CENTROS DEL CUBOCTAEDRO

EJES CUATERNARIOS —————

EJES TERNARIOS - - - - -

EJES BINARIOS DE LOS TETRAEDROS —————
 (NO REPRESENTADOS LOS DE LOS OCTAEDROS)

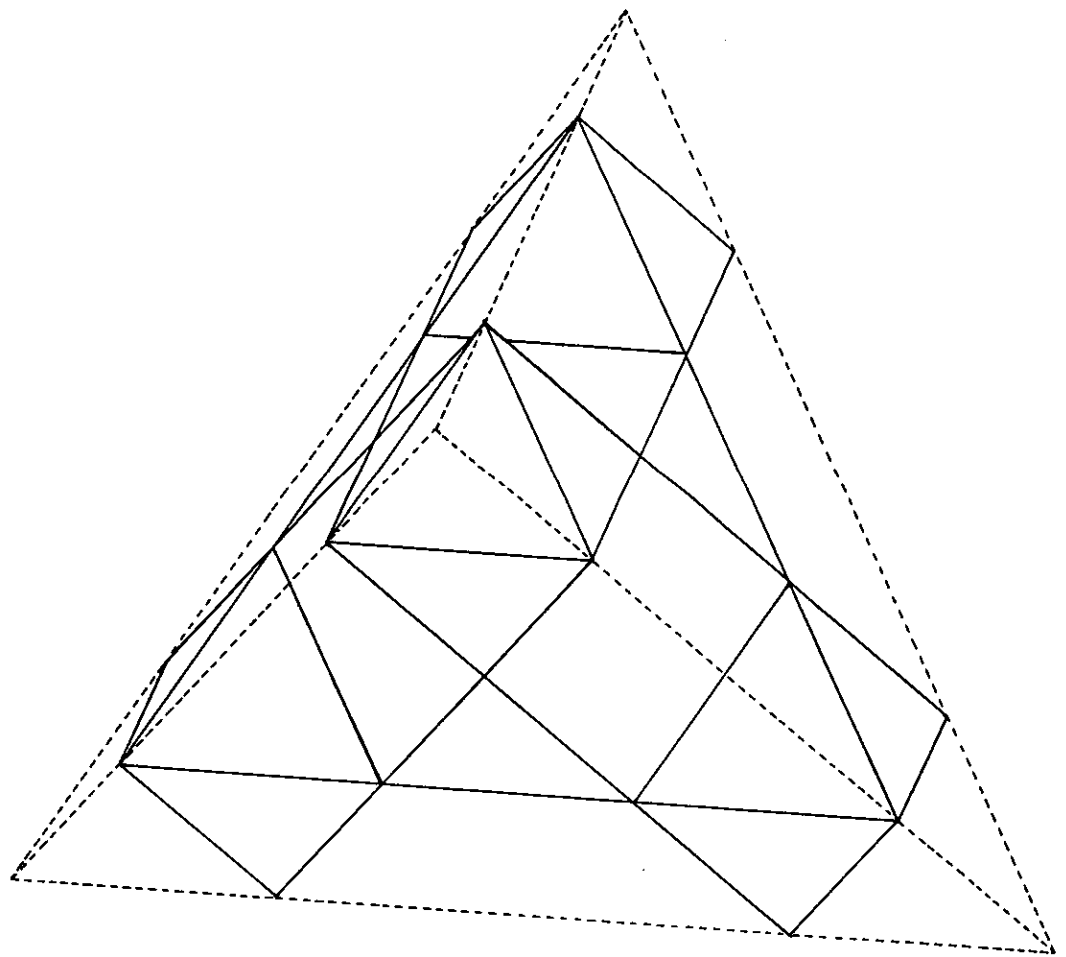


FIG 8.1.12.d CUBOCTAEDRO Y OCTAEDROS
INSCRITOS EN EL TETRAEDRO

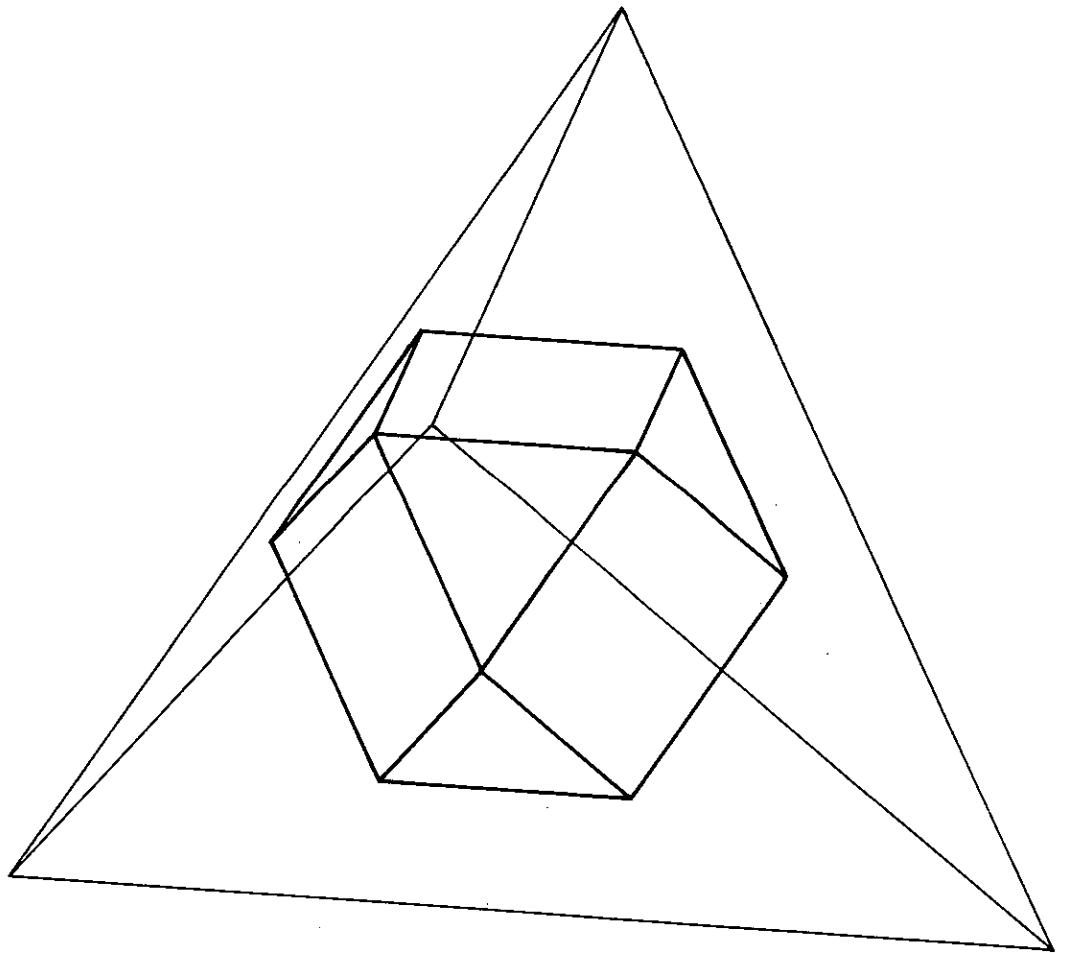


FIG 8.1.12.e CUBOCTAEDRO INSCRITO EN EL TETRAEDRO

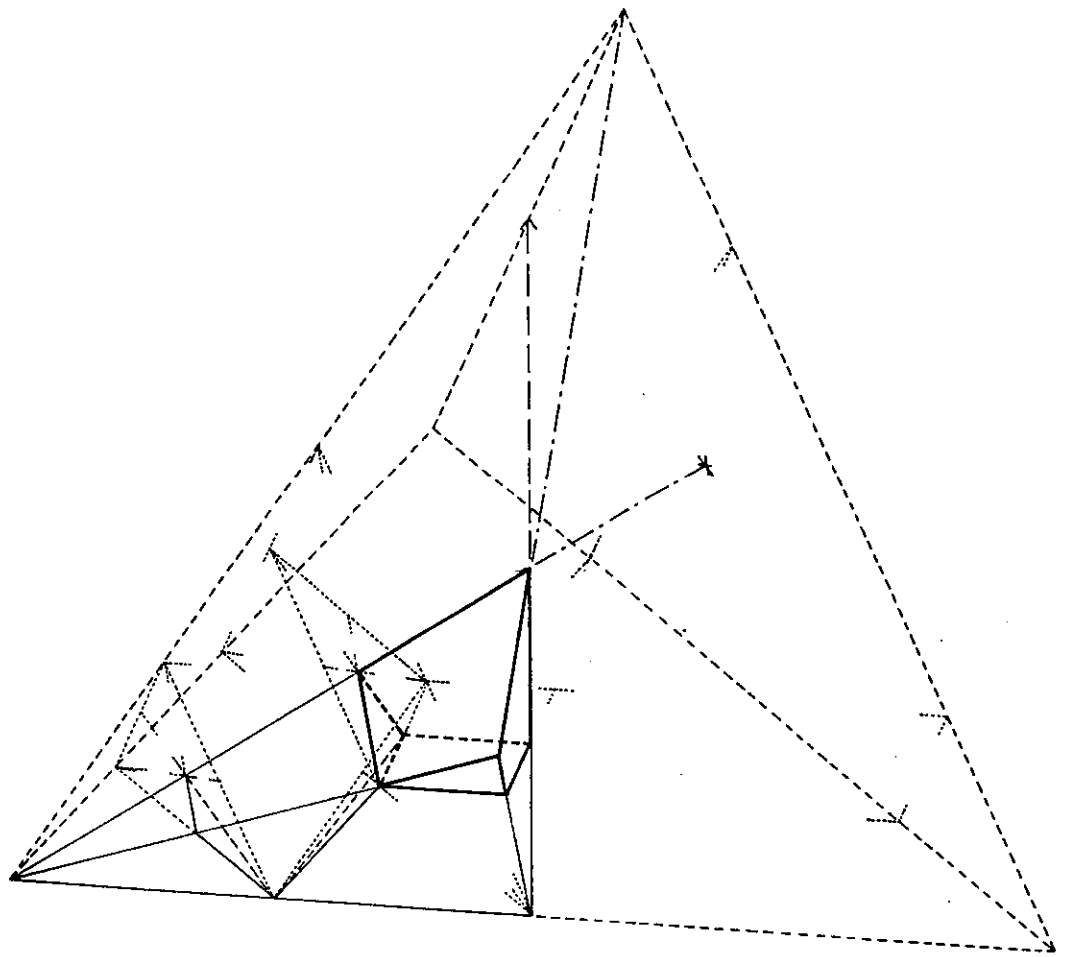


FIG 8.1.12.f MODULO DEL CUBOCTAEDRO

taedros menores, y el octaedro mediano central 32 tetraedros y 19 octaedros. Un octaedro menor ocupa el centro, 12 las aristas y 6 los vértices del octaedro mediano. En la figura 8.1.13.b vemos esta descomposición; si se suprime la mitad de cada uno de los octaedros de los vértices, la figura resultante es un octaedro truncado. El número de octaedros menores que contiene es $13 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 16$, la mitad del de tetraedros. Cumple, por consiguiente, la condición necesaria para dividir por sí misma el espacio, cosa ya vista en la figura 7.2.d. Vemos en 8.1.13.c la red de centros, siendo los seis más alejados del central compartidos con los octaedros truncados limítrofes.

En 8.1.13.d se ve la relación entre el octaedro truncado y el tetraedro básico en que se inscribe, y en 8.1.13.e la relación entre sus módulos elementales respectivos.

Volviendo a la figura 8.1.13.a, aparecen rodeando el octaedro truncado diez fragmentos de otros octaedros truncados, seis menores en las aristas y cuatro más completos en los vértices. Veamos la relación volumétrica entre todos estos fragmentos.

De un volumen total de $76 + 35.4 = 216$ tetraedros menores, ocupa el octaedro truncado completo (central) $32 + 16.4 = 96$, lo que supone $\frac{96}{216} = \frac{4}{9} = 0,4\overline{4}$ tetraedros básicos. Los fragmentos de las aristas tienen un volumen de $2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 4$ tetraedros menores cada uno, es decir $\frac{4}{96} = \frac{1}{24} = 0,041\overline{6}$ octaedros truncados, y entre los seis ocupan $\frac{1}{4} = 0,25$ octaedros truncados. En relación con el tetraedro básico estas cifras suponen respectivamente $\frac{1}{54} = 0,018\overline{5}$ tetraedros básicos, y $\frac{1}{9} = 0,1\overline{1}$ tetraedros básicos. El resto del volumen del tetraedro básico, $\frac{4}{9} = 0,4\overline{4}$ tetraedros básicos, se reparte entre los cuatro fragmentos de los vértices, a $\frac{1}{9} = 0,1\overline{1}$ tetraedros básicos cada uno, ello supone 24 tetraedros menores por fragmento, correspondientes a 8 tetraedros y 4 octaedros ($8 + 4 \cdot 4 = 24$).

Estas proporciones son válidas para los módulos elementales, componiéndose el módulo básico de $\frac{24}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{216} \cdot \frac{1}{4} + \frac{96}{216} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{54} + \frac{1}{216} + \frac{1}{54} = \frac{1}{24}$ tetraedros básicos, y, como ya sabemos el módulo (1/24) del octaedro truncado completo es 4/9 del módulo elemental del tetraedro básico. Este es el módulo elemental, con seis caras cuadrangulares de la que una es cuadrada, que llena el espacio por sí solo.

8.1.3. RESUMEN

TETRAEDRO TRUNCADO BASICO (fig. 8.1.6.a)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	tetr. básico trunc.	tetr. básico
1	I tetr.básico trunc.	23	1	$0,85\overline{1} = 23/27$
4	II tetr. menor	1	$0,04347826 = 1/23$	$0,03\overline{7} = 1/27$
total	tetr. básico	27	$1,173913043 = 27/23$	1

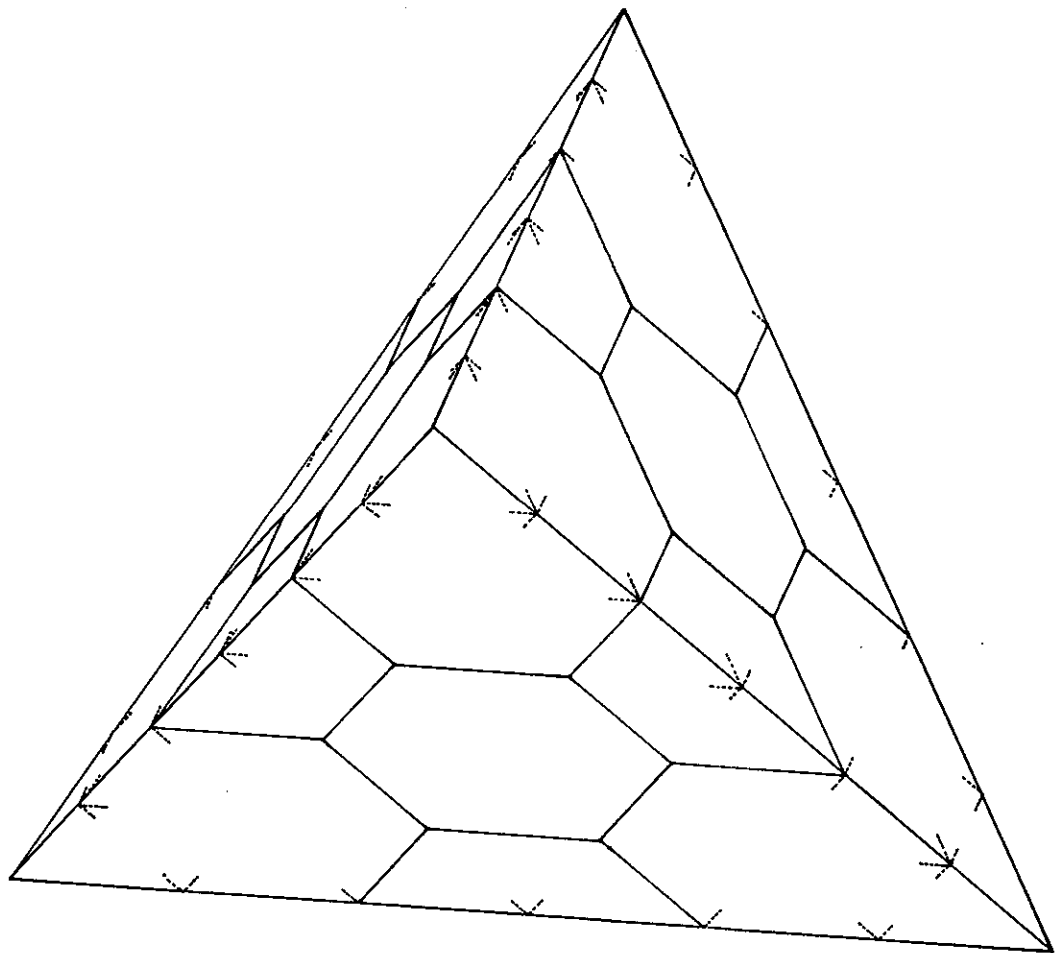


FIG 8.1.13.a OCTAEDRO TRUNCADO INSCRITO EN EL TETRAEDRO
RED DE OCTAEDROS TRUNCADOS

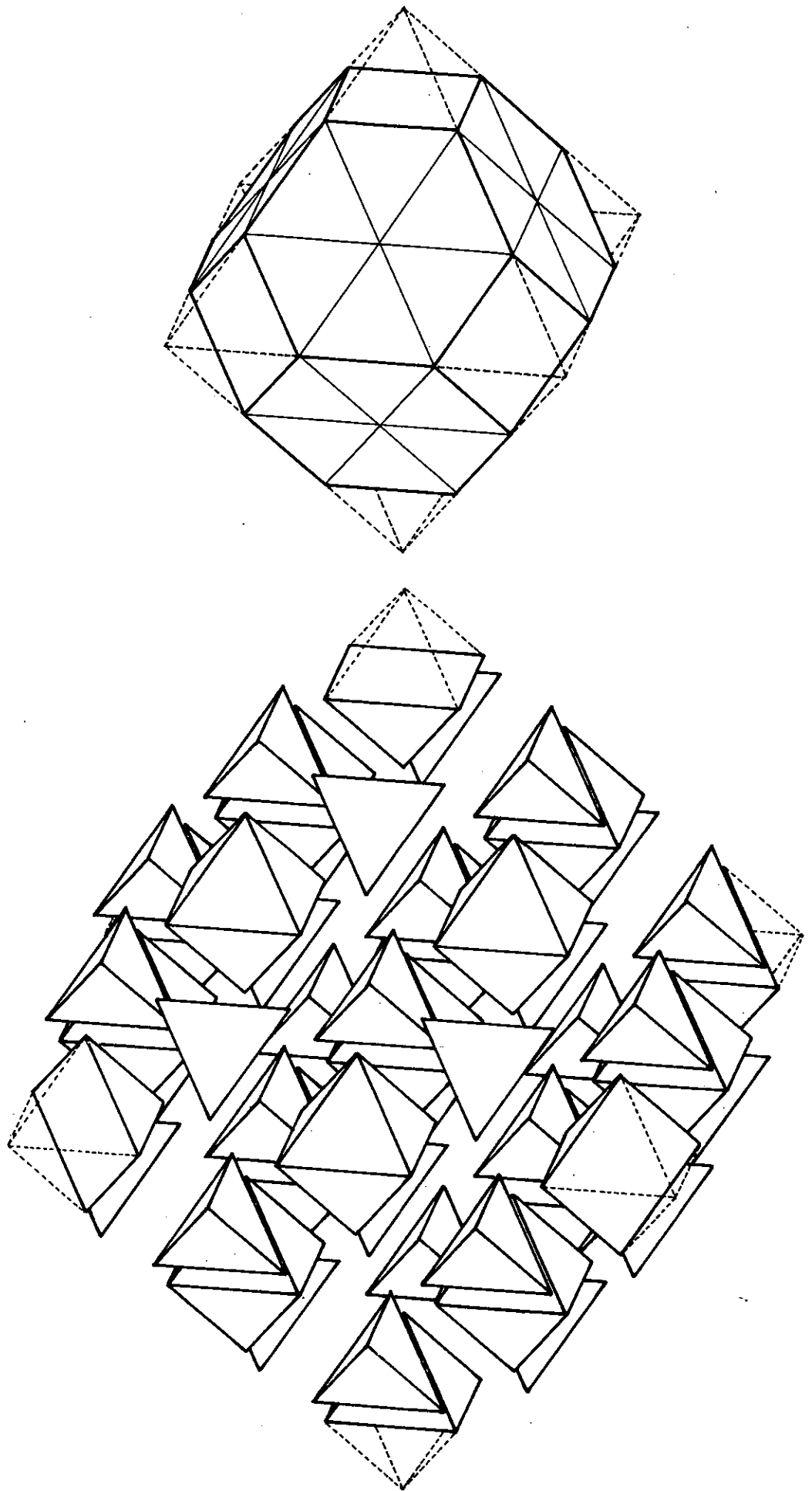


FIG 8.1.13. b DESCOMPOSICION DEL OCTAEDRO TRUNCADO
TETRAEDROS, OCTAEDROS Y MEDIOS OCTAEDROS

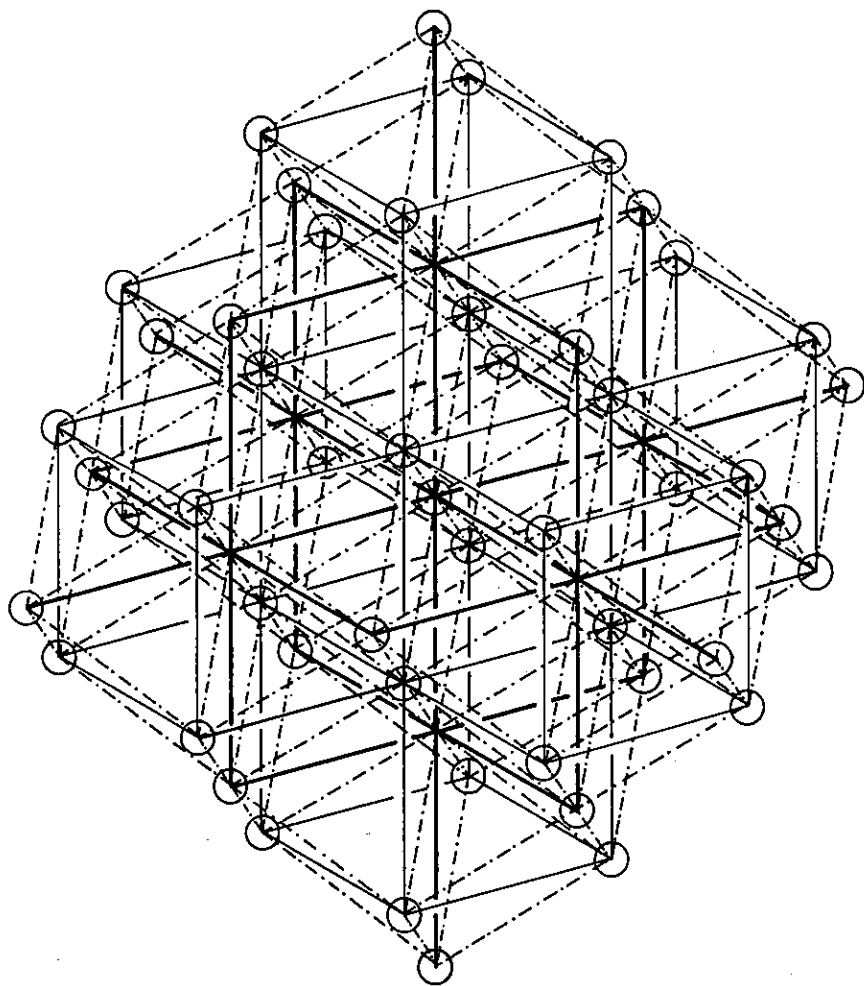


FIG 8.1.13.c RED DE CENTROS DEL OCTAEDRO TRUNCADO

EJES CUATERNARIOS —————

EJES TERNARIOS - - - - -

EJES BINARIOS DE LOS TETRAEDROS —————
 (NO REPRESENTADOS LOS DE LOS OCTAEDROS)

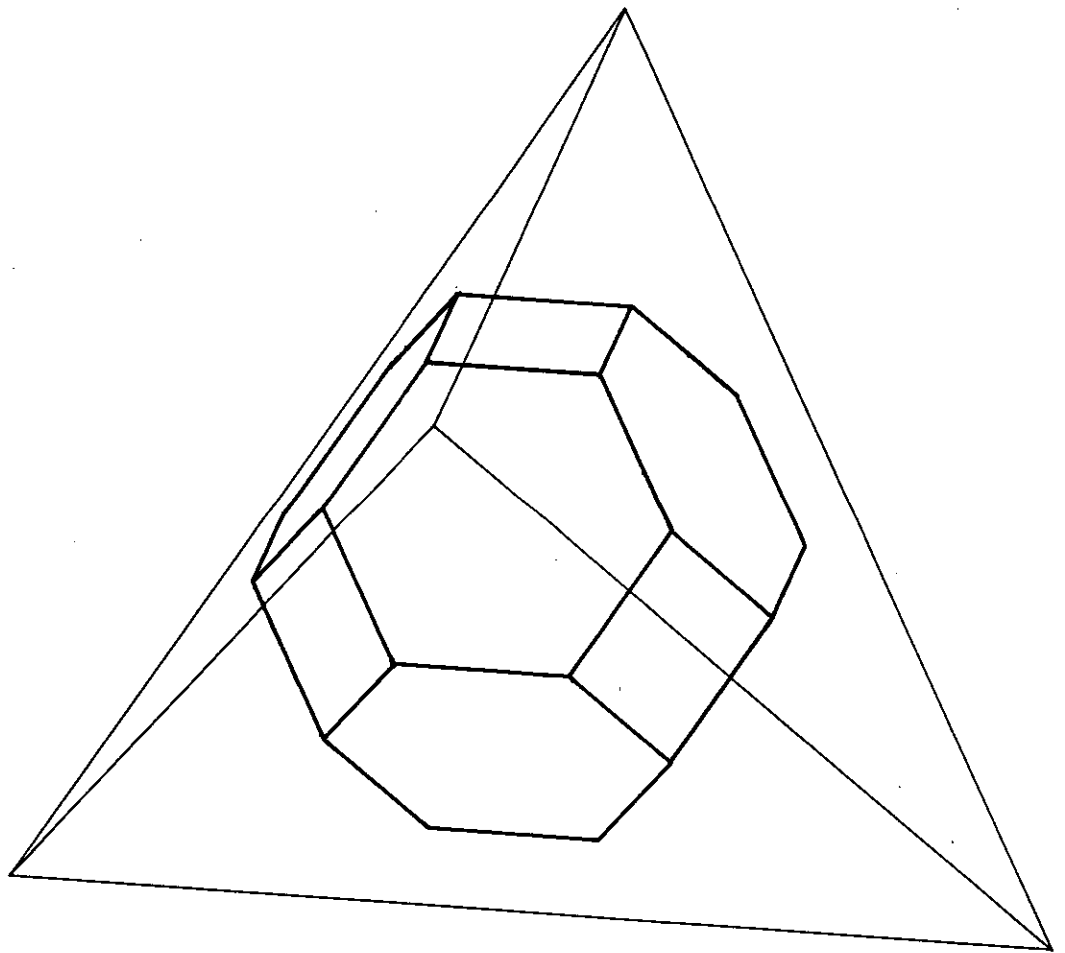


FIG 8.1.13.d OCTAEDRO TRUNCADO INSCRITO EN EL TETRAEDRO

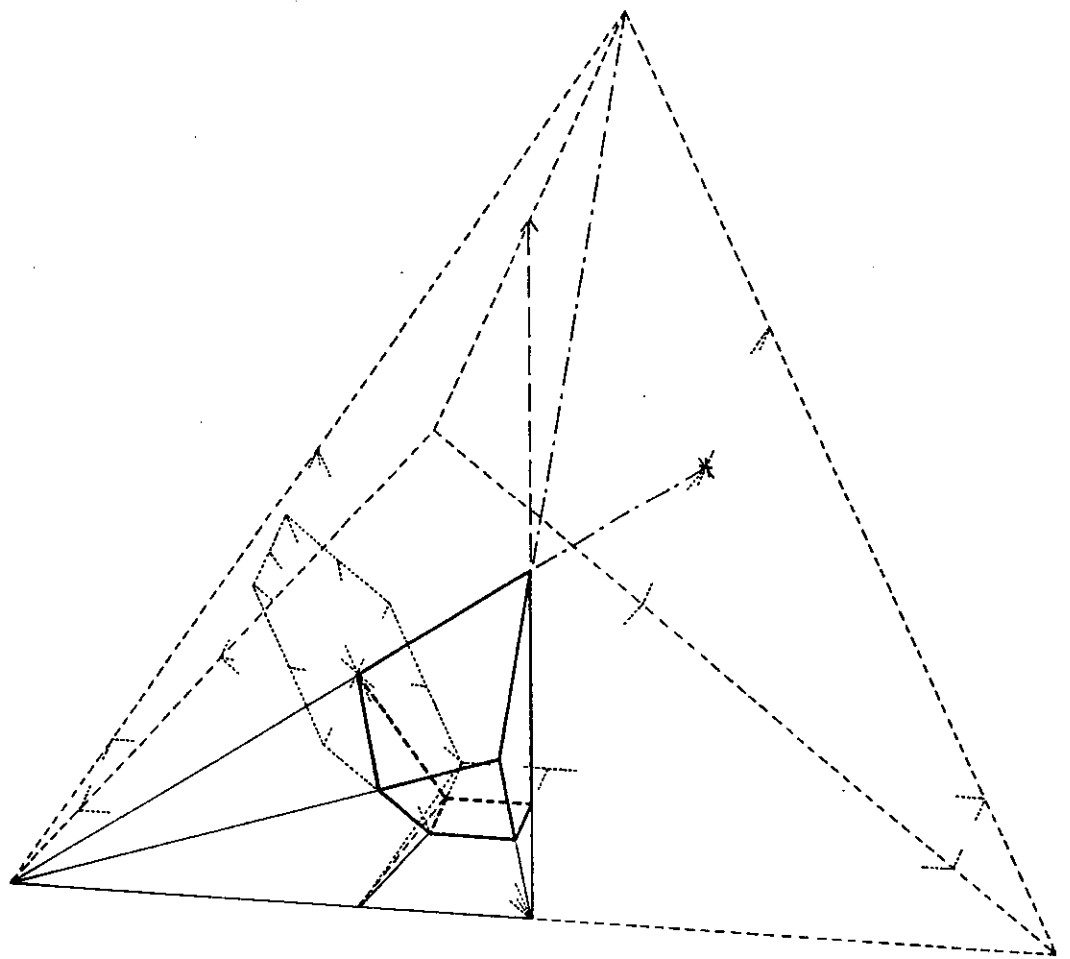


FIG 8.1.13.e MODULO DEL OCTAEDRO TRUNCADO

Regiones del módulo elemental (fig. 8.1.6.b)				
		Unidades		
Regiones		tetr. menor	mod. elem.T. básico	tetr. básico
I		$0,958\widehat{3} = 23/24$	$0,85\widehat{1} = 23/27$	$0,035493826 = 23/648$
II		$0,1\widehat{6} = 1/6$	$0,14\widehat{8} = 4/27$	$0,006172839401 = 1/162$
total		$1,125 = 9/8$	1	$0,041\widehat{6} = 1/24$

TETRAEDRO TRUNCADO APIRAMIDADO (fig. 8.1.6.c)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	tetr. trunc.apiram.	tetr. básico
1	I tetr.trunc.ap.	24	1	$0,8 = 8/9$
4	II 3/4 de tetr.m.	$0,75 = 3/4$	$0,03125 = 1/32$	$0,02\widehat{7} = 1/36$
total	T. básico	27	$1,125 = 9/8$	1

Regiones del módulo elemental

		Unidades		
Regiones		tetr. menor	mod. elem. T. básico	tetr. básico
I		1	$0,8 = 8/9$	$0,03\widehat{7} = 1/27$
II		$0,125 = 1/8$	$0,1 = 1/9$	$0,0046\widehat{29} = 1/216$
total		$1,125 = 9/8$	1	$0,041\widehat{6} = 1/24$

OCTAEDRO (fig. 8.1.7.a)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	octaedro	tetr. básico
1	I octaedro	4	1	$0,5 = 1/2$
4	II tetr.menor	1	$0,25 = 1/4$	$0,125 = 1/8$
total	T. básico	8	2	1

Regiones del módulo elemental (fig. 8.1.7.b)

		Unidades		
Regiones		tetr. menor	mod. elem. T. básico	tetr. básico
I		$0,1\widehat{6} = 1/6$	$0,5 = 1/2$	$0,0208\widehat{3} = 1/48$
II		$0,1\widehat{6} = 1/6$	$0,5 = 1/2$	$0,0208\widehat{3} = 1/48$
total		$0,3 = 1/3$	1	$0,041\widehat{6} = 1/24$

OCTAEDRO APIRAMIDADO EN CUATRO CARAS (fig. 8.1.7.c)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	octaedro apiram.	tetr. básico
1	I octaedro apir.	5	1	$0,625 = 5/8$
4	II 3/4 de T.menor	$0,75 = 3/4$	$0,15 = 3/20$	$0,09375 = 3/32$
total	T. básico	8	$1,6 = 8/5$	1

Regiones del módulo elemental				
		Unidades		
Regiones		tetr. menor	mód. elem. T. básico	tetr. básico
I		$0,208\overline{3} = 5/24$	$0,625 = 5/8$	$0,026041\overline{6} = 5/192$
II		$0,125 = 1/8$	$0,375 = 3/8$	$0,015625 = 1/64$
total		$0,\overline{3} = 1/3$	1	$0,041\overline{6} = 1/24$

OCTAEDRO APIRAMIDADO EN OCHO CARAS (= ROMBODODECAEDRO) (fig. 8.1.7.d)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	rombododecaedro	tetr. básico
1	I rombododecaed.	6	1	$0,75 = 3/4$
4	II 3/4 de T. menor	$0,75 = 3/4$	$0,125 = 1/8$	$0,09375 = 3/32$
total	T. básico + 4 pirám.	9	$1,5 = 3/2$	$1,125 = 9/8$

Regiones del módulo elemental

		Unidades		
Regiones		tetr. menor	mód. elem. T. básico	tetr. básico
I		$0,25 = 1/4$	$0,75 = 3/4$	$0,03125 = 1/32$
II		$0,125 = 1/8$	$0,375 = 3/8$	$0,015625 = 1/64$
total		$0,375 = 3/8$	$1,125 = 9/8$	$0,046875 = 3/64$

TETRAEDRO DUAL TRUNCADO (fig. 8.1.8.a)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	T. dual truncado	tetr. básico
5	I tetr. truncado	23	1	$0,184 = 23/125$
10	II tetr. menor	1	$0,04347826 = 1/23$	$0,008 = 1/125$
total	T. básico	125	$5,434782609 = 125/23$	1

Regiones del módulo elemental (fig. 8.1.8.b)

		Unidades		
Regiones		tetr. menor	mód. elem. T. básico	tetr. básico
I		$0,958\overline{3} = 23/24$	$0,184 = 23/125$	$0,007\overline{6} = 23/3000$
II		$3,8\overline{3} = 23/6$	$0,736 = 92/125$	$0,030\overline{6} = 23/750$
III		$0,1\overline{6} = 1/6$	$0,032 = 4/125$	$0,001\overline{3} = 1/750$
IV		$0,25 = 1/4$	$0,048 = 6/125$	$0,002 = 1/500$
total		$5,208\overline{3} = 125/24$	1	$0,041\overline{6} = 1/24$

TETRAEDRO DUAL (fig. 8.1.9.a)

Regiones		Unidades de volumen	
nº	tipo	tetr. menor	tetr. básico
11	I tetr. menor	1	$0,037\overline{7} = 1/27$
4	II oct. menor	4	$0,148\overline{8} = 4/27$
total	T. básico	27	1

Regiones del módulo elemental (fig. 8.1.9.b)			
		Unidades	
Regiones	tetr. menor	mód. elem. T. básico	tetr. básico
I	$0,041\overline{6} = 1/24$	$0,03\overline{7} = 1/27$	$0,00154320987\overline{6} = 1/648$
II	$0,\overline{6} = 2/3$	$0,59\overline{2} = 16/27$	$0,024691358\overline{8} = 2/81$
III	$0,1\overline{6} = 1/6$	$0,148\overline{8} = 4/27$	$0,006172839\overline{5} = 1/162$
IV	$0,25 = 1/4$	$0,\overline{2} = 2/9$	$0,009\overline{25} = 1/108$
total	$1,125 = 9/8$	1	$0,041\overline{6} = 1/24$

TETRAEDRO APIRAMIDADO (= CUBO) (fig. 8.1.9.c)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	cubo	tetr. básico
1	I cubo	3	1	$0,\overline{1} = 1/9$
4	II 7/8 de oct.	$3,5 = 7/2$	$1,1\overline{6} = 7/6$	$0,129\overline{6} = 7/54$
10	III tetr. menor	1	$0,\overline{3} = 1/3$	$0,03\overline{7} = 1/27$
total	tetr. básico	27	9	1

Regiones del módulo elemental			
		Unidades	
Regiones	tetr. menor	mód. elem. T. básico	tetr. básico
I	$0,125 = 1/8$	$0,\overline{1} = 1/9$	$0,00462\overline{9} = 1/216$
II	$0,58\overline{3} = 7/12$	$0,518\overline{8} = 14/27$	$0,0216049382\overline{7} = 7/324$
III	$0,1\overline{6} = 1/6$	$0,148\overline{8} = 4/27$	$0,006172839\overline{5} = 1/162$
IV	$0,25 = 1/4$	$0,\overline{2} = 2/9$	$0,009\overline{25} = 1/108$
total	$1,125 = 9/8$	1	$0,041\overline{6} = 1/24$

CUBOCTAEDRO (fig. 8.1.12.a)

Regiones		Unidades de volumen		
nº	tipo	tetr. menor	cuboctaedro	tetraedro básico
1	I cuboctaedro	20	1	$0,3125 = 5/16$
4	II octaedro	4	$0,2 = 1/5$	$0,0625 = 1/16$
4	III 1/20 cuboct.	1	$0,05 = 1/20$	$0,015625 = 1/64$
6	IV 1/5 cuboct.	4	$0,2 = 1/5$	$0,0625 = 1/16$
total	tetr. básico	64	$3,2 = 16/5$	1

Regiones del módulo elemental (fig. 8.1.12.f)

Regiones del módulo elemental (fig. 8.1.12.f)			
		Unidades	
Regiones	tetr. menor	mód. elem. T. básico	tetraedro básico
I	$0,8\overline{3} = 5/6$	$0,3125 = 5/16$	$0,0130208\overline{3} = 5/384$
II	$0,\overline{6} = 2/3$	$0,25 = 1/4$	$0,01041\overline{6} = 1/96$
III	$0,1\overline{6} = 1/6$	$0,0625 = 1/16$	$0,0026041\overline{6} = 1/384$
IV	1	$0,375 = 3/8$	$0,015625 = 1/64$
total	$2,\overline{6} = 8/3$	1	$0,041\overline{6} = 1/24$

OCTAEDRO TRUNCADO (fig. 8.1.13.a)

Regiones			Unidades de volumen		
nº	tipo		tetr. menor	octaedro truncado	tetraedro básico
1	I	oct. trunc.	96	1	$0,4 = 4/9$
4	II	1/4 oct. tr.	24	$0,25 = 1/4$	$0,1 = 1/9$
6	III	1/24 oct. t.	4	$0,041\overline{6} = 1/24$	$0,01\overline{85} = 1/54$
total		tet. básico	216	$2,25 = 9/4$	1

Regiones del módulo elemental (fig. 8.1.13.e)

Regiones		Unidades		
	tetr. menor	mód. elem. T. básico	tetraedro básico	
I	4	$0,4 = 4/9$	$0,01\overline{85} = 1/54$	
II	4	$0,4 = 4/9$	$0,01\overline{85} = 1/54$	
III	1	$0,1 = 1/9$	$0,004\overline{629} = 1/216$	
total	9	1	$0,041\overline{6} = 1/24$	

Para completar la visión de los rombotetratetraedros, exponemos en la figura 8.1.14 su relación con el romboedro del sistema (cubo), como antes lo hemos hecho con el tetraedro básico.

En la figura 8.1.15. se resumen las descomposiciones del módulo elemental básico de los seis modos estudiados en los apartados anteriores, mientras que la 8.1.16. visualiza la obtención de módulos elementales de los poliedros del sistema como intersección de módulos de poliedros duales (figura 8.1.16.a), o de éstos y el módulo del romboedro del sistema (figura 8.1.16.b).

Por último, en la figura 8.1.17. aparecen los módulos elementales de los poliedros ligados al tetraedro que llenan el espacio: tetraedro truncado apiramidado, tetraedro apiramidado (cubo) y octaedro apiramidado (rombododecaedro).

8.1.4. TETRAEDROS DUALES E INVERSION

Nótese que los tetraedros básico y dual de la figura 8.1.9.b, donde los vértices del segundo coinciden con los centros de las caras del primero, tienen módulos totalmente semejantes, verificándose la proporción

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OL}{OL'} = \frac{OV}{OP} = \frac{LP}{L'P'} = \frac{LV}{L'P} = \frac{PV}{P'P} \quad \text{y} \quad \overline{OP}^2 = \overline{OV} \cdot \overline{OP'}$$

y siendo semejantes los triángulos \overline{OPL} y $\overline{OL'P}$ (ambos rectángulos en P y L', respectivamente, y con el ángulo $\overline{POL} = \overline{L'OP}$ coincidentes) se verifica

$$\frac{OP}{OL} = \frac{OL'}{OP} \quad \text{y} \quad \overline{OP}^2 = \overline{OL} \cdot \overline{OL'}$$

Resulta entonces que los puntos V y P', L y L' están relacionados por una inversión, siendo P punto doble en la misma, por lo que la esfera autoinversora está inscrita en el poliedro básico y circunscrita al dual. Los planos de las caras de cada poliedro son inversos de la esfera circunscrita al módulo del otro, que contiene al centro O y a los puntos P, V, L (ó P', P, L') correspondientes.

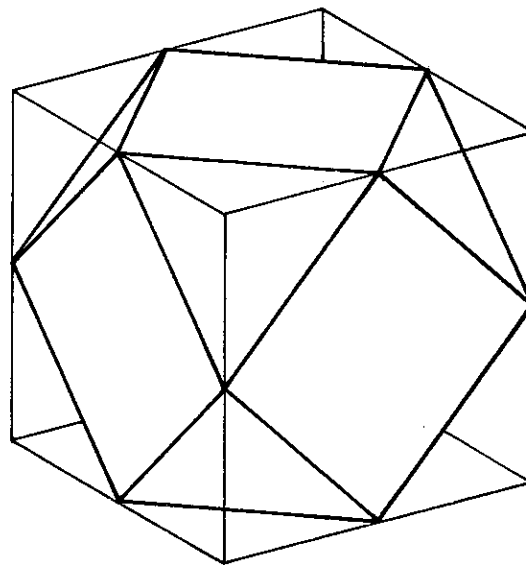
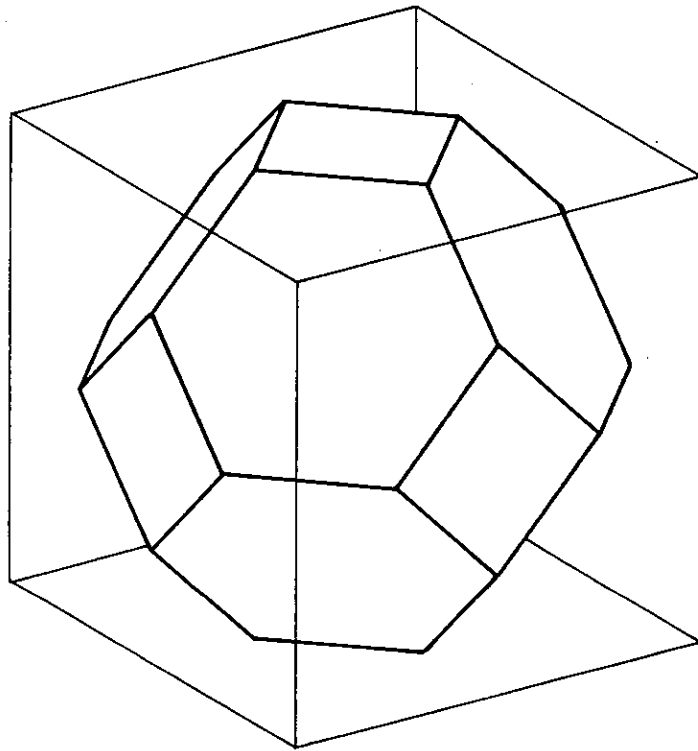


FIG 8.1.14. LOS ROMBITETRATETRAEDROS INSCRITOS
EN EL ROMBOEXAEDRO

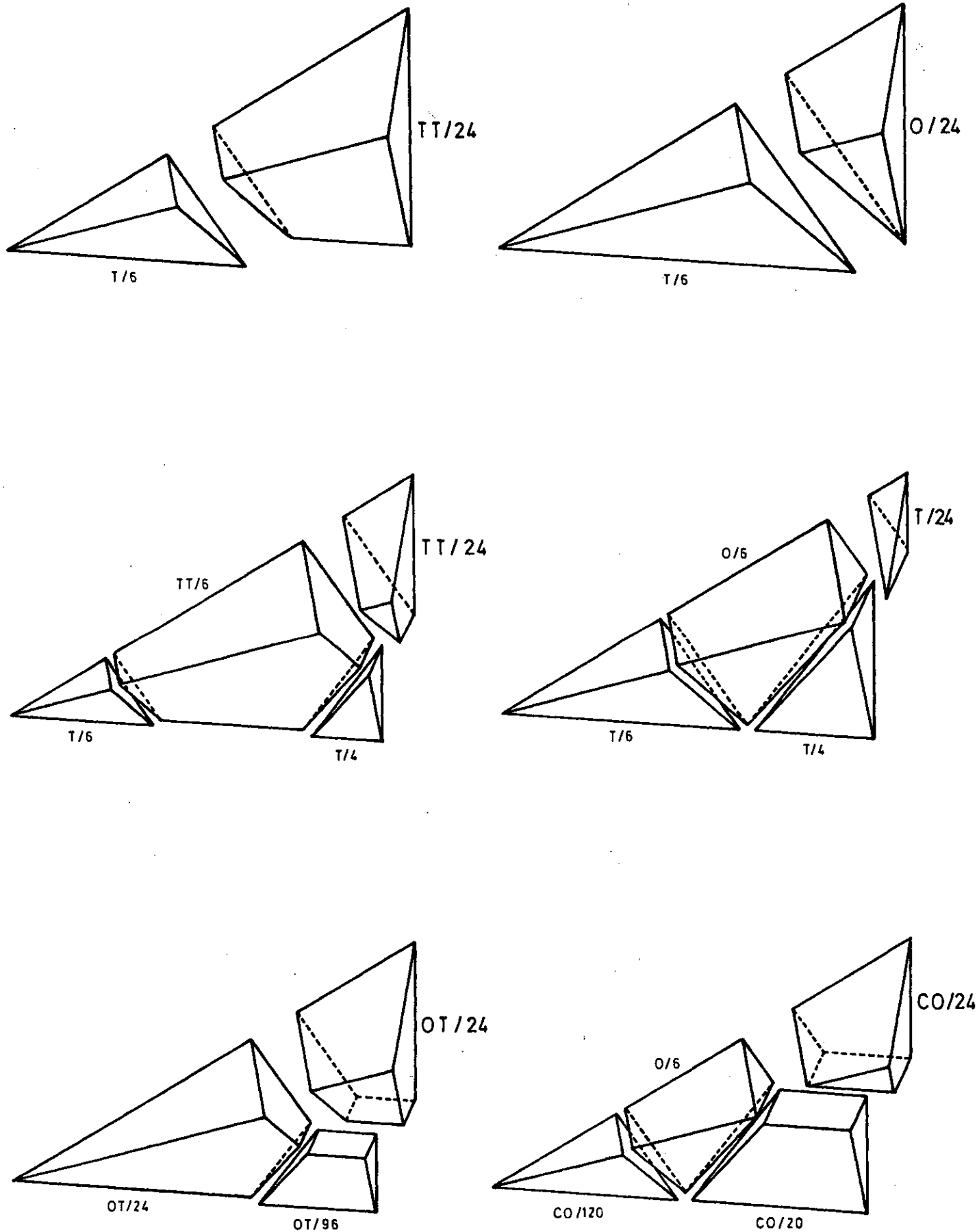


FIG 8.1.15. DESCOMPOSICIONES DEL MODULO DEL TETRAEDRO BASICO

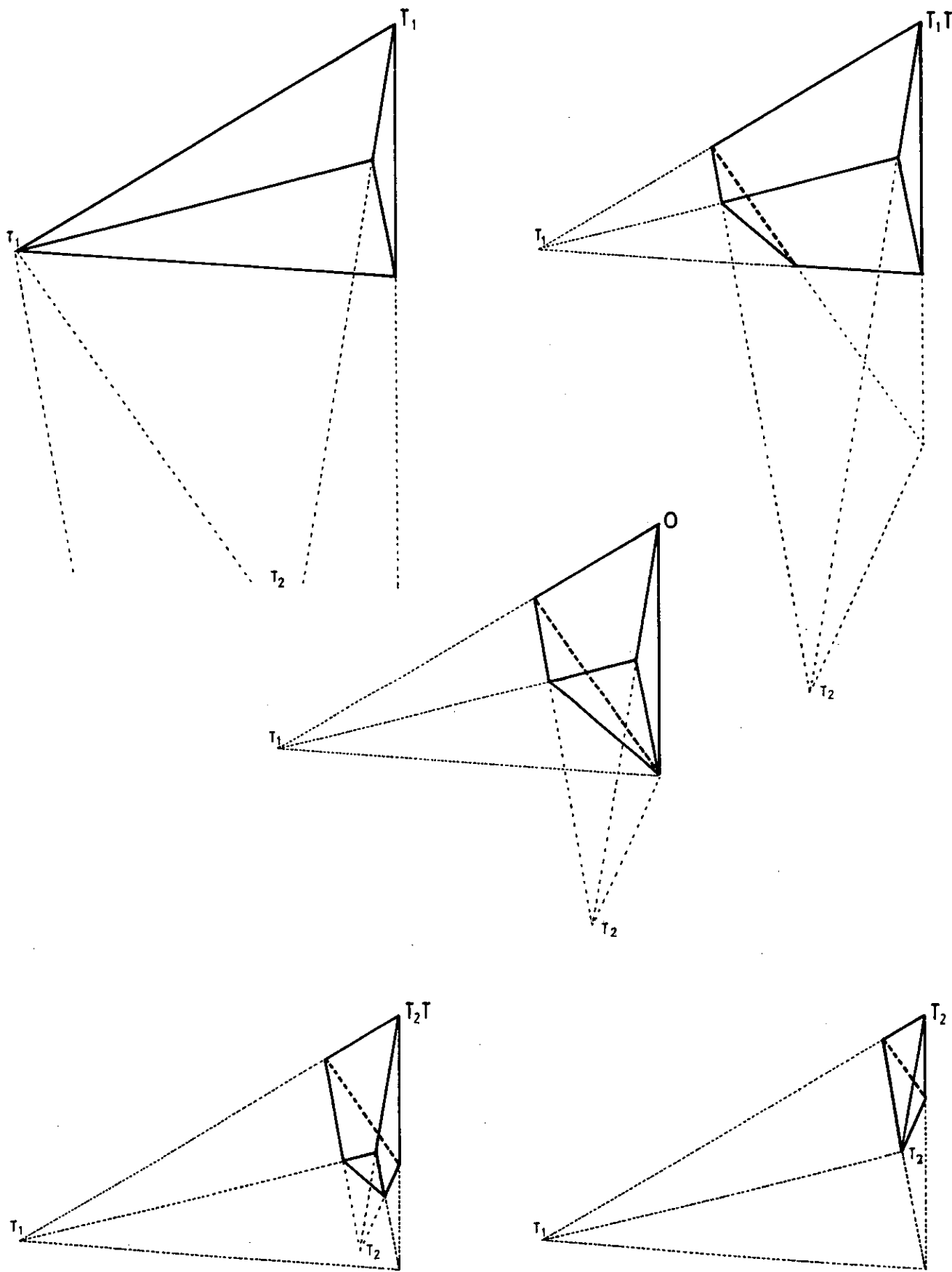


FIG 8.1.16.a MODULOS OBTENIDOS COMO INTERSECCION DE
 LOS MODULOS DE DOS TETRAEDROS DUALES

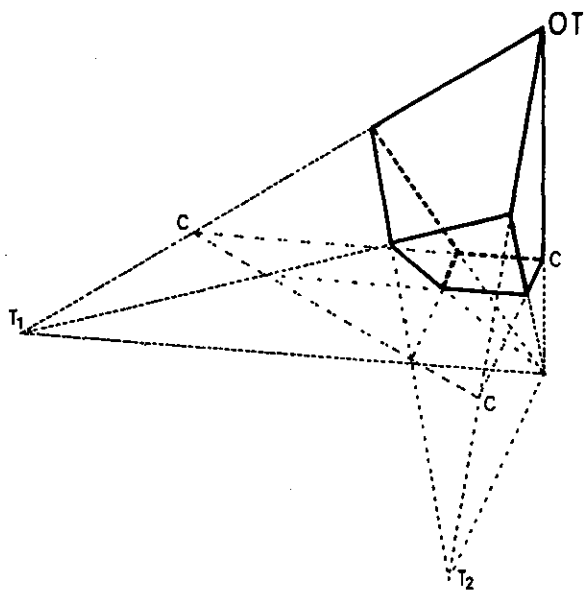
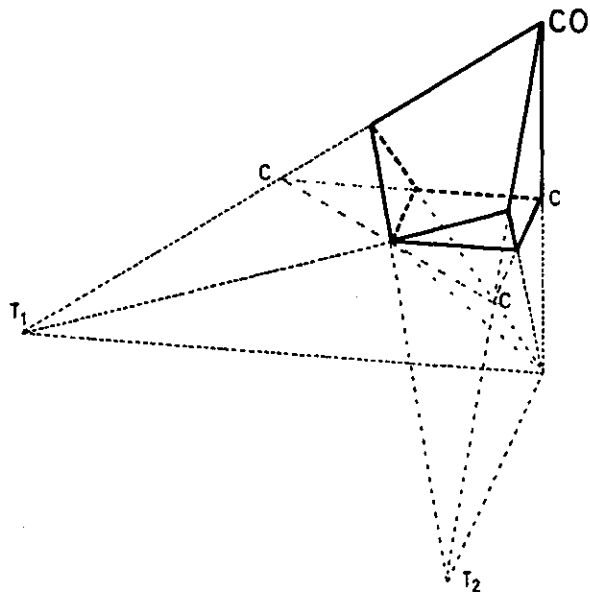
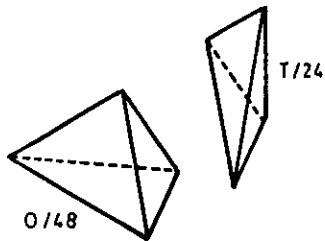
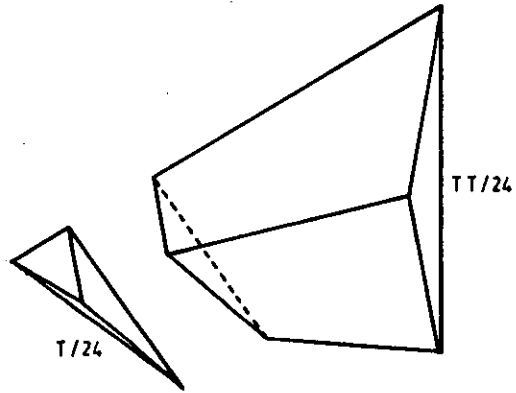


FIG 8.1.16.b MODULOS OBTENIDOS COMO INTERSECCION DE LOS DE DOS TETRAEDROS DUALES Y UN ROMBOEXAEDRO

TETRAEDRO
TRUNCADO
APIRAMIDADO
TTA/24



ROMBOEXAEDRO (CUBO)
C/24

ROMBODODECAEDRO
RD/24

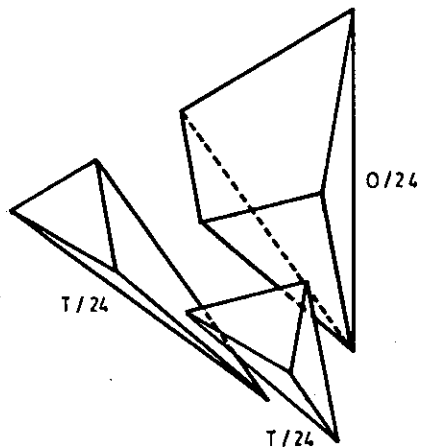


FIG 8.1.17. MODULOS DEL SISTEMA DEL TETRAEDRO QUE LLENAN EL ESPACIO, DESCOMPUESTOS EN SUS ELEMENTOS

Si los tetraedros duales comparten los puntos L (como los tetraedros de la figura 8.1.7.d) estos puntos son los dobles en la inversión, y la esfera autoinversora será la esfera de las aristas de ambos poliedros, esfera inscrita en el rombohexaedro (cubo) que contiene a dichas aristas.

Los módulos de los poliedros del sistema vistos hasta ahora, incluido el romboedro, se obtienen cortando el triedro elemental (1/24 de espacio a partir de 0) por planos normales a sus tres aristas.

8.2. SISTEMA DEL CUBO

El poliedro básico es dividido por sus planos de simetría en 48 módulos (figura 8.2.1.). Los ejes y planos de simetría que dan lugar a esta división se muestran en las figuras 8.2.2. y 8.2.3., y en la 8.2.4. un módulo elemental en relación con el conjunto del poliedro (este módulo llena el espacio y es la mitad del que ya apareció en las figuras 8.1.9.c y 8.1.17, pues allí era 1/24 del cubo).

Se trata de una pirámide triangular, cuyas caras son triángulos rectángulos iguales dos a dos (un par es isósceles) y cuyas aristas son: tres del mismo valor, la longitud de la semiarista l , que podemos tomar como unidad, que son \overline{OP} , \overline{PL} y \overline{LV} ; dos, también iguales entre sí, $\overline{OL} = \overline{PV} = \sqrt{2}$ y la sexta, $\overline{OV} = \sqrt{3}$. Las caras son $\overline{OPL} = \overline{VPL}$, isósceles, rectangulares en P y L, respectivamente, y $\overline{OPV} = \overline{VLO}$, de nuevo rectangulares en P y L, respectivamente.

El volumen de este módulo es $V_{MC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OP} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{PL} \cdot \overline{LV} = \frac{1}{6} \cdot 1^3 = 0,1\overline{6}$, siendo el del cubo, 48 veces mayor, $V_c = (2 \cdot 1)^3 = 8 \cdot 1^3$.

8.2.1. POLIEDROS DERIVADOS DEL CUBO Y EL OCTAEDRO

Como se vio en las figuras 7.2., seccionando el cubo por planos normales a los ejes ternarios, pertenecientes a octaedros, puede obtenerse una sucesión de poliedros semirregulares que permiten la ocupación completa del espacio. Vamos a ver ahora los módulos elementales de estos poliedros, en relación con el módulo del cubo.

8.2.1.1. CUBO TRUNCADO

Vemos su módulo en la figura 8.2.5. completando el del cubo con el de un pequeño octaedro dual. Llamaremos a a la semiarista de este pequeño octaedro, que será también semiarista del cubo truncado.

La relación entre a y l viene dada por:

$$\overline{LV} = \overline{LV'} + \overline{VV'} \quad \text{,,} \quad l = a + \sqrt{2}a = a(1 + \sqrt{2}) \quad \text{,,} \quad a = \frac{l}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}l = (\sqrt{2}-1)l$$

Ya sabemos que $\overline{L'V} = \overline{L'V'} = a$, y que $\overline{VV'} = \sqrt{2}a$; Veamos los valores del resto de las aristas de los módulos del octaedro y del cubo truncado:

$$\overline{L'P'} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \quad \text{,,} \quad \overline{P'V'} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}a \quad (\text{por ser } \sqrt{3}a \text{ la altura del triángulo equilátero que forman las } V')$$

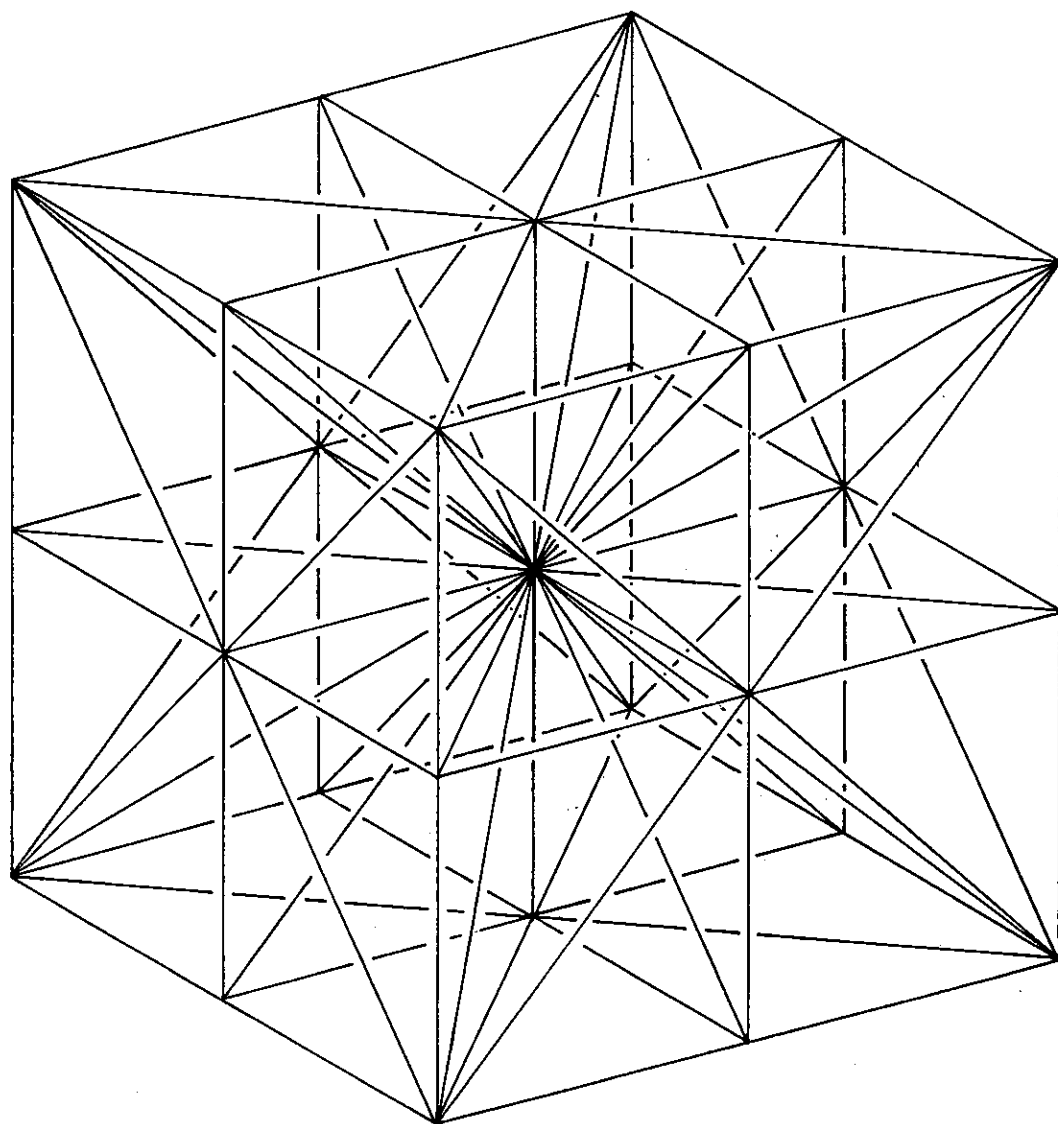


FIG 8.2.1. DESCOMPOSICION DEL CUBO EN MODULOS

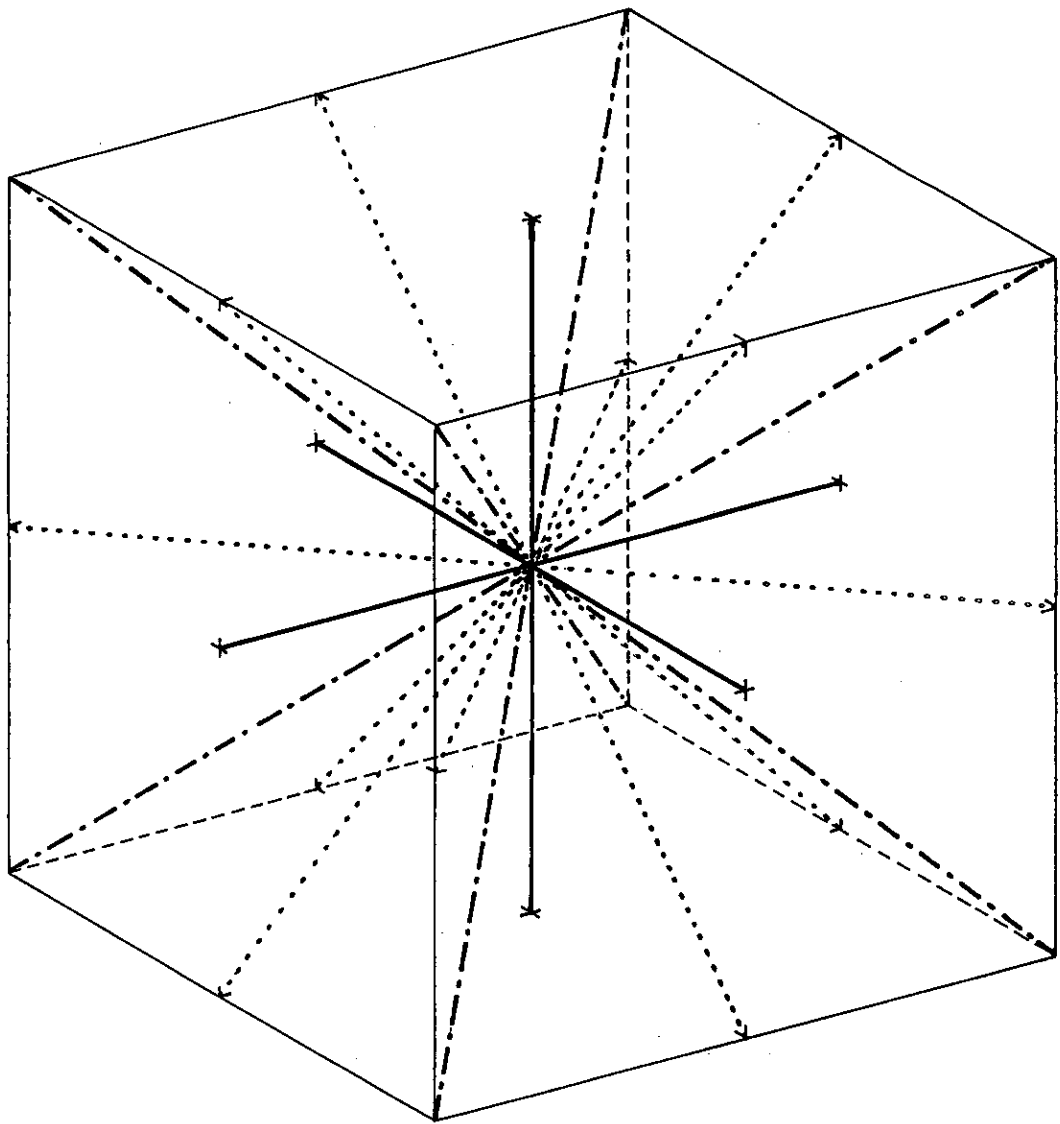


FIG 8.2.2. EJES DE SIMETRIA

BINARIOS
TERNARIOS - · - · - ·
CUATERNARIOS ———

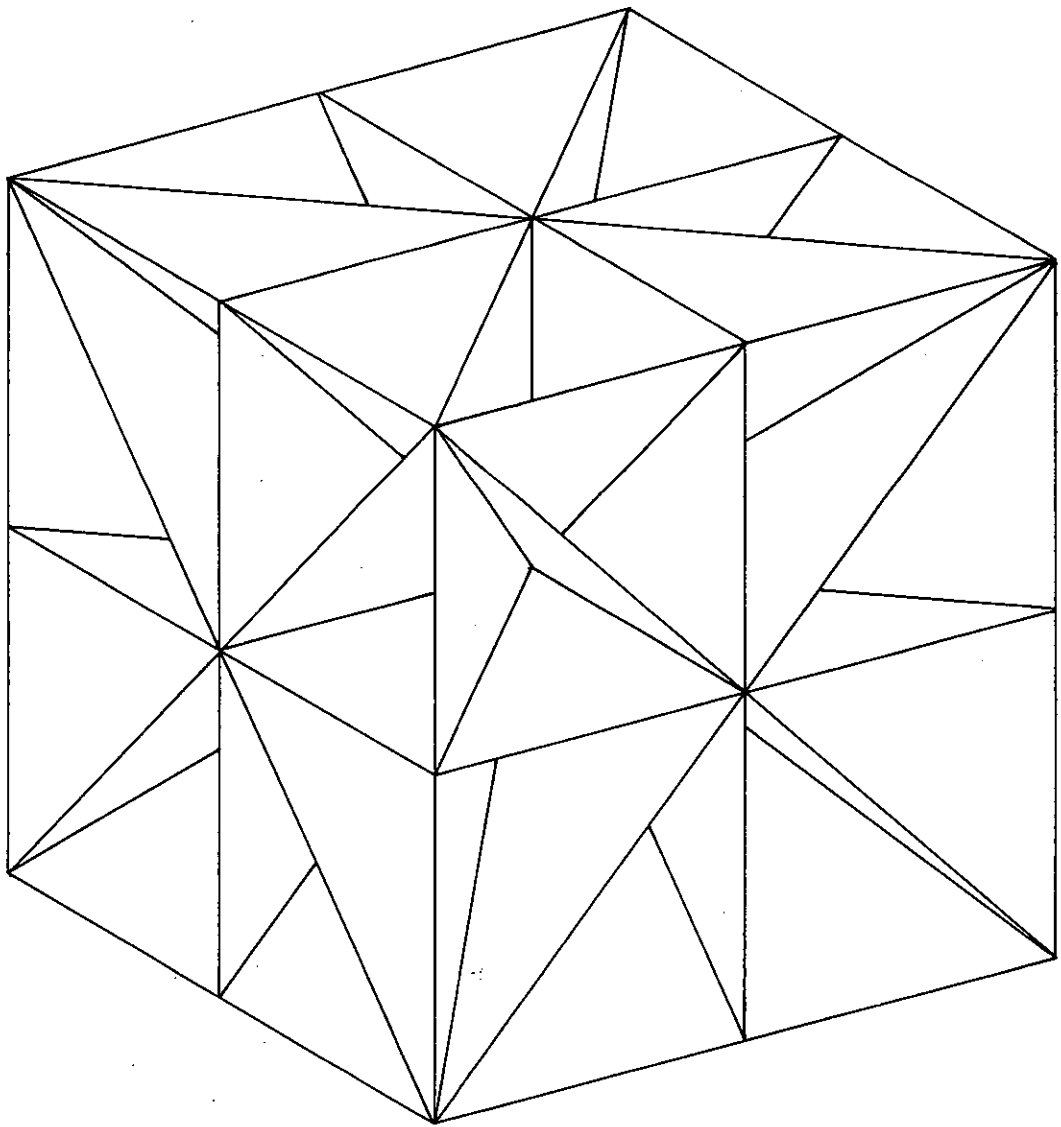


FIG 8.2.3. PLANOS DE SIMETRIA

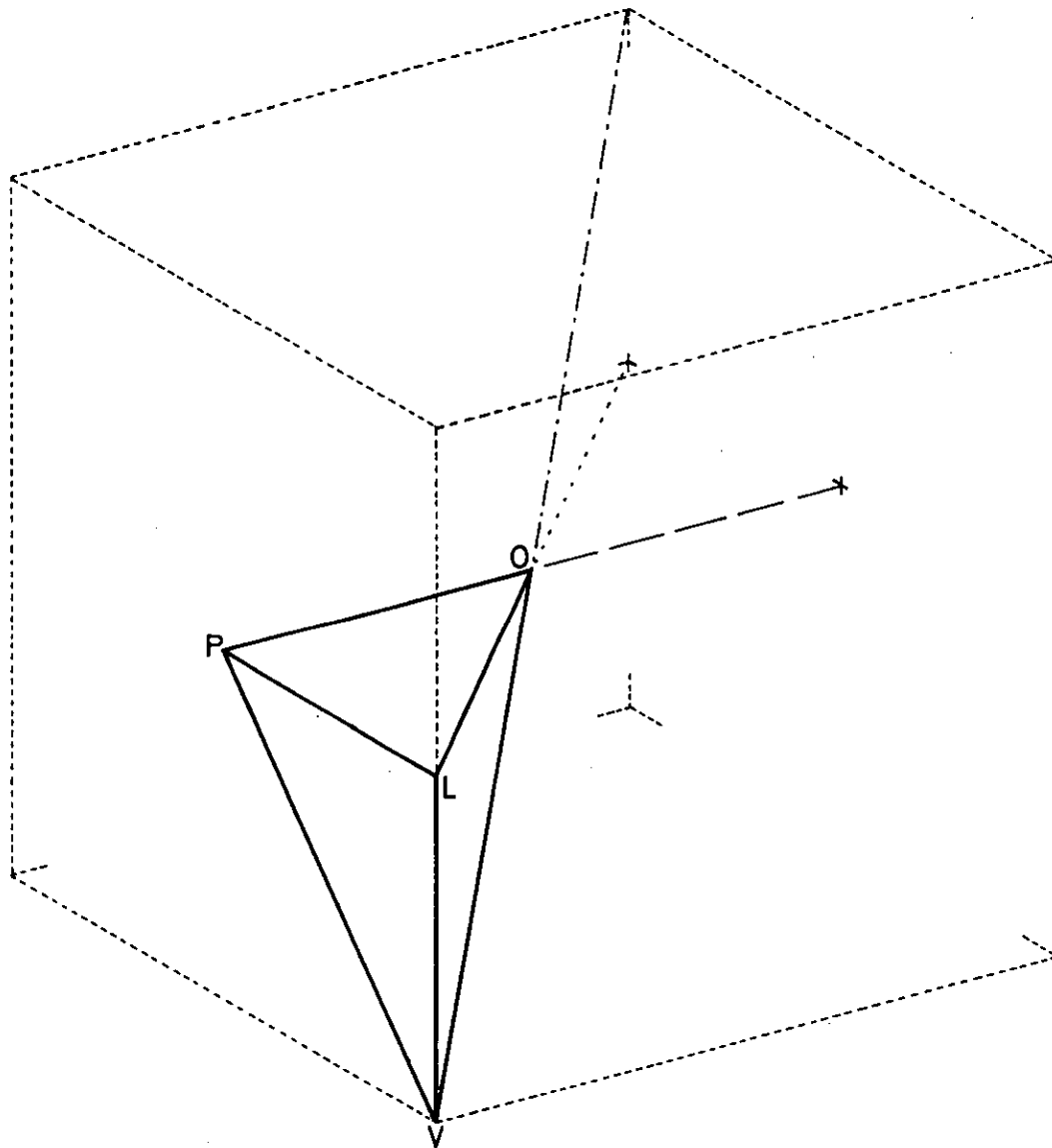


FIG 8.2.4. MODULO ELEMENTAL DEL CUBO

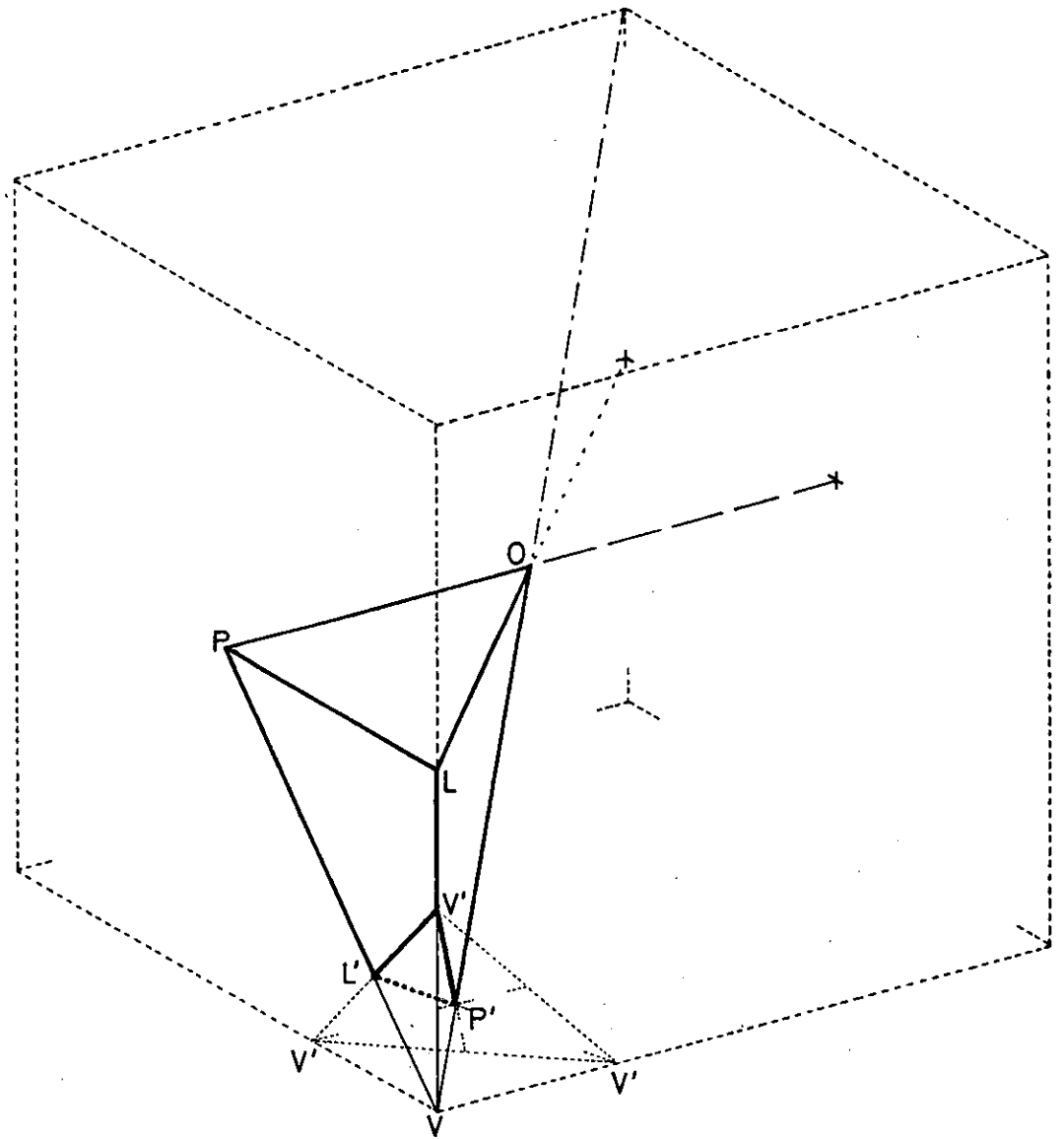


FIG 8.2.5. MODULO DEL CUBO TRUNCADO

$$\overline{VP}^2 = \overline{VV}^2 - \overline{P'V}^2 = 2a^2 - \frac{2^2}{3^2} \cdot 3a^2 = a^2 \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}a^2 \quad \text{,,} \quad \overline{VP} = \sqrt{\frac{2}{3}} a$$

Y en función de la semiarista del cubo tomada como unidad:

$$\overline{L'V} = \overline{L'V'} = (\sqrt{2}-1)1 = 0,4142135623$$

$$\overline{VV'} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)1 = (2-\sqrt{2})1 = 0,5857864377$$

$$\overline{L'P'} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}-1)1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} 1 = 0,2391463117$$

$$\overline{P'V'} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}-1) 1 = \frac{2}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3}) 1 = 0,4782926235$$

$$\overline{VP'} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}-1) 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} 1 = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3} 1 = 0,3382039574$$

El volumen del módulo en función del lado es:

$$\begin{aligned} V_{MO} &= \frac{1}{3}\overline{VP'} \cdot \frac{1}{2} \overline{L'V'} \cdot \overline{L'P'} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3} \cdot (\sqrt{2}-1) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{54}(2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = \\ &= \frac{1}{54}(3\sqrt{6}-4\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = \frac{1}{54}(3 \cdot 6 - 3\sqrt{18} - 4\sqrt{18} + 4 \cdot 3) = \frac{1}{54}(30 - 7 \cdot 3\sqrt{2}) = \frac{30}{54} - \frac{21}{54}\sqrt{2} = \\ &= \frac{5}{9} - \frac{7}{18}\sqrt{2} = 0,005583614633 \end{aligned}$$

Para todo el octaedro, el volumen es:

$$V_0 = 48 \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{7}{18}\sqrt{2}\right)1^3 = \frac{80}{3} - \frac{56}{3}\sqrt{2} = 0,2680135026$$

En cuanto al módulo del cubo truncado, pirámide triangular truncada con 9 aristas, tales aristas miden:

$$\overline{OP} = \overline{PL} = \overline{PL'} = 1 \quad \text{,,} \quad \overline{OL} = \sqrt{2}1 \quad \text{,,} \quad \overline{LV'} = \overline{L'V'} = a = (\sqrt{2}-1)1$$

$$\overline{P'V'} = \frac{2}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})1 \quad \text{,,} \quad \overline{L'P'} = \frac{1}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})1$$

Valores ya conocidos, quedando por calcular:

$$\overline{OP'} = \overline{OV} - \overline{VP'} = \sqrt{3}1 - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3} 1 = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3} 1 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3} 1 = 1,39384685$$

El volumen del módulo es:

$$\begin{aligned} V_{MCT} &= V_{MC} - V_{MO} = \frac{1}{6}1^3 - \left(\frac{5}{9} - \frac{7}{18}\sqrt{2}\right)1^3 = \left(\frac{3}{18} - \frac{10}{18} + \frac{7}{18}\sqrt{2}\right)1^3 = \frac{7}{18}(\sqrt{2}-1)1^3 = \\ &= 0,161083052 \end{aligned}$$

Y el del cubo truncado:

$$V_{CT} = 48V_{MCT} = 48 \cdot \frac{7}{18}(\sqrt{2}-1)1^3 = \frac{56}{3}(\sqrt{2}-1)1^3 = 7,731986497$$

Y si ponemos en relación los módulos del cubo truncado y del octaedro con el del cubo básico, tendremos los índices respectivos de ocupación del espacio correspondientes en la red al cubo truncado y al octaedro:

$$\frac{V_{MCT}}{V_{MC}} = \frac{7/18(\sqrt{2}-1)}{1/6} = \frac{7}{3}(\sqrt{2}-1) = 0,9664983122$$

$$\frac{V_{MO}}{V_{MC}} = \frac{5/9 - 7\sqrt{2}/18}{1/6} = \frac{10}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{2} = 0,0335016878$$

La relación entre ambos índices es:

$$\frac{V_{MCT}}{V_{MO}} = \frac{7(\sqrt{2}-1)}{10-7\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{2}-1)(10+7\sqrt{2})}{100-98} = \frac{7(10\sqrt{2}+7\cdot 2-10-7\sqrt{2})}{2} = \frac{7(4+3\sqrt{2})}{2} = 14 + \frac{21}{2}\sqrt{2} = 28,8492424$$

Es decir: los cubos truncados ocupan casi 29 veces el espacio ocupado por los octaedros, que ocupan poco más del 3%, 1/30 del total.

8.2.1.2. CUBOCTAEDRO

Vemos el módulo de este poliedro, y el del octaedro que, junto con él, forma la red, en la figura 8.2.6. Llamaremos, como en el caso anterior, a a la semiarista de ambos poliedros ($a = \frac{\sqrt{2}}{2}1$).

El módulo del octaedro es, como antes, una pirámide triangular, semejante a la de 8.2.1.1., pero mayor, siendo los valores de sus aristas:

$$\overline{LL'} = \overline{L'V} = a \quad \text{,,} \quad \overline{LV} = \sqrt{2}a \quad \text{,,} \quad \overline{L'P'} = \frac{1}{3}\sqrt{3}a \quad \text{,,} \quad \overline{P'L} = \frac{2}{3}\sqrt{3}a \quad \text{,,} \quad \overline{VP'} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

En función de la semiarista del cubo:

$$\overline{LL'} = \overline{L'V} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = 0,7071067812$$

$$\overline{LV} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} 1 = 1 = 1$$

$$\overline{L'P'} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} 1 = \frac{\sqrt{6}}{6} 1 = 0,4082482904$$

$$\overline{P'L} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} 1 = \frac{\sqrt{6}}{3} 1 = 0,8164965809$$

$$\overline{VP'} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} 1 = \frac{2}{2\sqrt{3}} 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} 1 = 0,5773502692$$

El volumen del módulo es:

$$V_{MO} = \frac{1}{3}\overline{VP'} \cdot \frac{1}{2}\overline{LL'} \cdot \overline{L'P'} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{6}{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{1}{36} = 0,027$$

Y el del octaedro completo:

$$V_0 = 48 \cdot \frac{1^3}{36} = \frac{4}{3} = 1,3$$

Este volumen es, en relación con el del octaedro del apartado anterior:

$$\frac{1/36}{5/9-7\sqrt{2}/18} = \frac{1}{20-14\sqrt{2}} = \frac{20+14\sqrt{2}}{400-392} = \frac{20}{8} + \frac{14\sqrt{2}}{8} = \frac{5}{2} + \frac{7}{4}\sqrt{2} = 4,974873734$$

esto es, casi cinco veces mayor.

El módulo del cuboctaedro es una pirámide cuadrangular de base trapezoidal, con las siguientes aristas:

$$\overline{OP} = \overline{PL} = 1 = 1 \quad \text{,,} \quad \overline{OL} = \sqrt{2}1 = 1,4142135623 \quad \text{,,} \quad \overline{LL'} = \overline{PL'} = \frac{\sqrt{2}}{2} 1 = 0,7071067812$$

$$\overline{L'P'} = \frac{\sqrt{6}}{6} 1 = 0,40824829045 \quad \text{,,} \quad \overline{P'L} = \frac{\sqrt{6}}{3} 1 = 0,8164965809$$

estos valores ya estaban calculados, y sólo falta:

$$\overline{OP'} = \overline{OV} - \overline{VP'} = \sqrt{3}1 - \frac{\sqrt{3}}{3} 1 = \frac{2}{3}\sqrt{3} 1 = 1,1547005383$$

El volumen del módulo es:

$$V_{MCO} = V_{MC} - V_{MO} = \frac{1}{6} 1^3 - \frac{1}{36} 1^3 = \frac{6-1}{36} 1^3 = \frac{5}{36} 1^3 = 0,138$$

Y el del cuboctaedro:

$$V_{CO} = 48 \cdot V_{MCO} = 48 \cdot \frac{5}{36} 1^3 = \frac{20}{3} 1^3 = 6,6$$

Los índices de ocupación del espacio son:

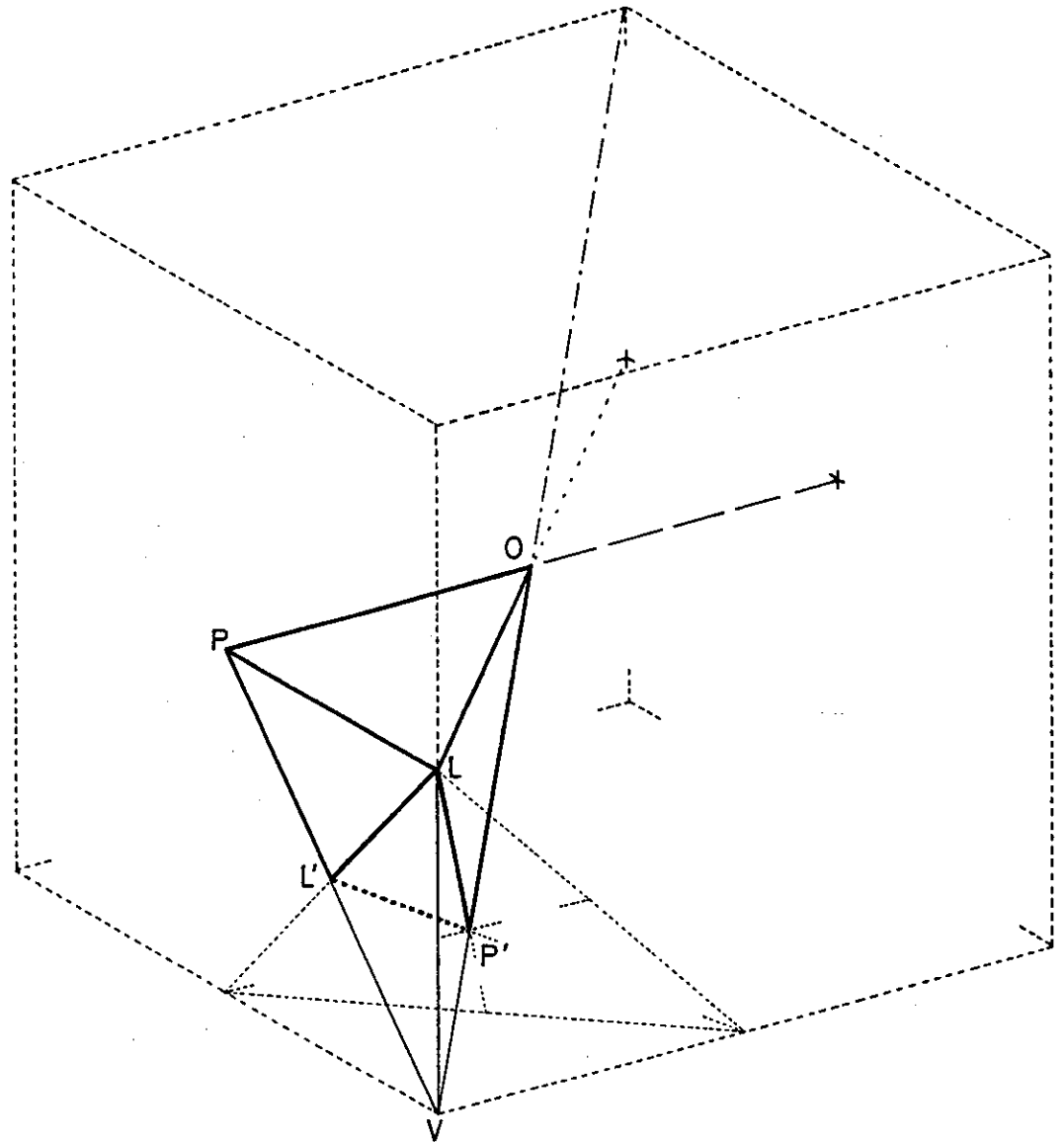


FIG 8.2.6. MODULO DEL CUBOCTAEDRO

$$\frac{V_{MCO}}{V_{MC}} = \frac{5/36}{1/6} = \frac{5}{6} = 0,8\overline{3} \quad \text{y} \quad \frac{V_{MO}}{V_{MC}} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$$

La relación entre ambos índices es:

$$\frac{V_{MCO}}{V_{MO}} = \frac{5/36}{1/36} = 5$$

Los cuboctaedros ocupan, pues, cinco veces más espacio que los octaedros, resultado que ya se había obtenido en la tabla correspondiente al cuboctaedro del apartado 8.1.3., donde el cuboctaedro tenía un volumen de 20 tetraedros menores, por sólo 4 del octaedro.

8.2.1.3. OCTAEDRO TRUNCADO

En esta red los poliedros con centro en O y en V son, como sabemos, idénticos. El módulo del cubo queda en consecuencia dividido en dos partes iguales, pirámides triangulares truncadas (figura 8.2.7.), que son los módulos de ambos octaedros truncados. La igualdad entre estos dos módulos es directa, pudiendo obtenerse uno del otro mediante un giro de 180° de eje V'P'. Llamando como en los demás casos \underline{l} a la semiarista del cubo y \underline{a} a la del octaedro truncado:

$$\overline{PL} = \overline{PV'} + \overline{LV'} \quad \text{y} \quad l = \sqrt{2}a + \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}.a \quad \text{y} \quad a = \frac{1}{2\sqrt{2}} l = \frac{\sqrt{2}}{4} l$$

$$\overline{OP} = \overline{VL} = l = l \quad \text{y} \quad \overline{PV'} = \overline{LV'} = \sqrt{2}.a = \sqrt{2}. \frac{\sqrt{2}}{4} l = \frac{1}{2} l = 0,5$$

$$\overline{PL'} = \overline{L'V'} = \overline{LL''} = \overline{L''V'} = a = \frac{\sqrt{2}}{4} l = 0,3535533906$$

$$\overline{OL''} = \overline{VL'} = \overline{OL} - \overline{LL''} = \overline{VP} - \overline{PL'} = \overline{VP} - \overline{PL'} = \sqrt{2}l - \frac{\sqrt{2}}{4} l = \frac{3}{4}\sqrt{2}l = 1,060660172$$

$$\overline{L'P'} = \overline{L''P'} = \sqrt{3}.a = \sqrt{3}. \frac{\sqrt{2}}{4} l = \frac{\sqrt{6}}{4} l = 0,6123724357$$

$$\overline{OP'} = \overline{P'V} = \frac{1}{2} . \overline{OV} = \frac{\sqrt{3}}{2} l = 0,8660254037$$

El volumen de este módulo es, naturalmente, la mitad del volumen del módulo del cubo básico:

$$V_{MOT} = \frac{1}{2} V_{MC} = \frac{1}{12} l^3 = 0,08\overline{3}$$

El volumen del octaedro truncado es, pues:

$$V_{OT} = 48.V_{MOT} = 48. \frac{1}{12} l^3 = 4l^3$$

Es desde luego la mitad del volumen del cubo.

Las regiones obtenidas en esta división regular del espacio tienen así la mitad del volumen que tenían los cubos de los que proceden.

8.2.1.4. OCTAEDRO CON CUBOCTAEDRO COMO ESPACIO COMPLEMENTARIO

Los octaedros están en contacto por sus vértices.

El octaedro dual del cubo básico, cuyos vértices coinciden con los centros de las caras de aquél (figura 8.2.8.), tiene un módulo que ya ha sido obtenido en 8.2.1.2. (figura 8.2.6.). Basta sustituir entre sí O y V, P y L, manteniendo L' y P', para que sean aquí válidos los resultados de entonces. Se trata de la misma compartimentación del espacio, variando únicamente el punto de referencia,

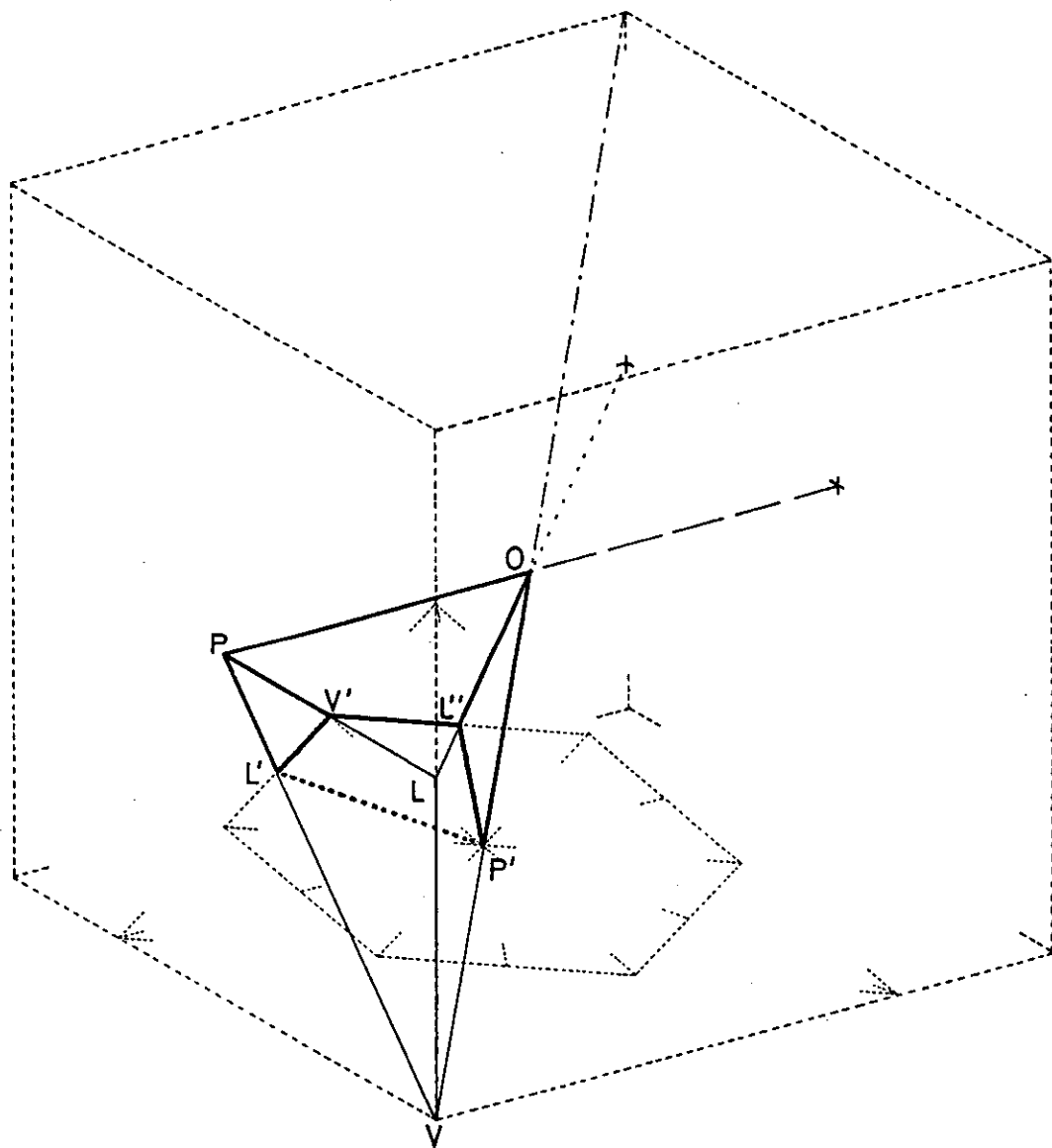


FIG 8.2.7. MODULO DEL OCTAEDRO TRUNCADO

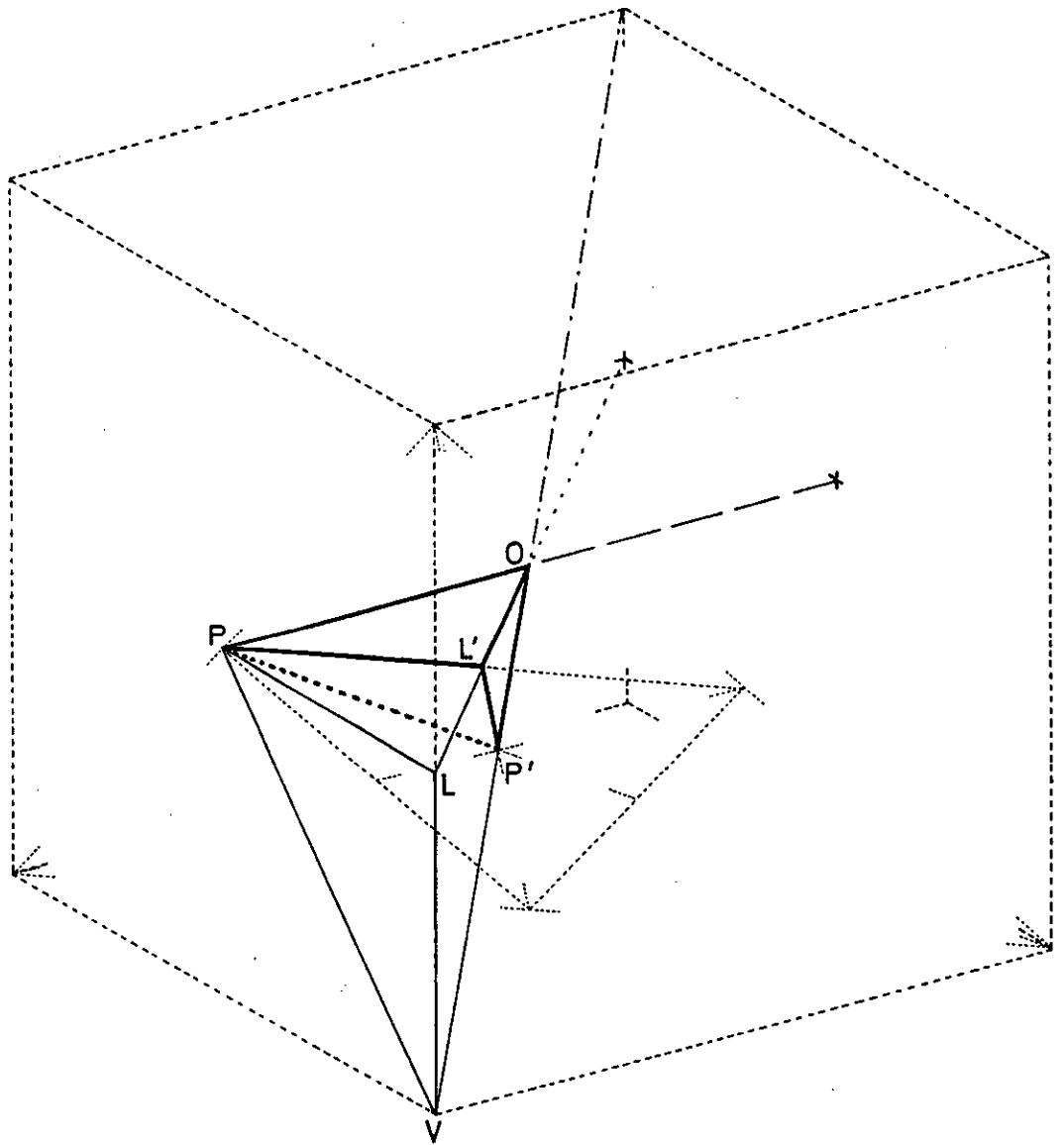


FIG 8.2.8. MODULO DEL OCTAEDRO

pues el centro del cubo es ahora el vértice de entonces (red dual de cubos).

8.2.1.5. OCTAEDRO CON CUBO TRUNCADO COMO ESPACIO COMPLEMENTARIO

Las regiones octaédricas están aisladas entre sí, en medio de un continuo constituido por cubos truncados.

El estudio de este módulo (figura 8.2.9.) ya ha sido hecho en 8.2.1.1. (figura 8.2.5.). De modo muy similar al caso anterior hay que sustituir entre sí O y V , P y L , manteniendo L' , P' y V' .

En la figura 8.2.10. se han inscrito sucesivamente cada uno en el anterior el cubo, cubo truncado, cuboctaedro, octaedro truncado, octaedro y, dentro de éste, el otro octaedro menor, complemento del cubo truncado en la red dual de cubos, señalando sus módulos elementales. Obsérvese el parecido con la figura 8.1.10.

8.2.2. ROMBICUBOCTAEDROS

Abordaremos ahora el caso de los poliedros del sistema cúbico en cuya formación interviene el romboedro del sistema.

Estos poliedros intervienen en redes espaciales (figuras 7.5.) que, a diferencia de lo ocurrido en el sistema del tetraedro, tienen tres tipos de regiones, como consecuencia de la mayor variedad del sistema del cubo, no autodual como aquél.

Vemos en la figura 8.2.11. estos poliedros, inscritos en el cubo, y sus módulos elementales, como partes del módulo elemental del cubo.

8.2.2.1. ROMBICUBOCTAEDRO

Nos guiaremos en su estudio por la figura 8.2.12., en la que O , V , L son centros respectivos del rombicuboctaedro, el cuboctaedro y el cubo menor, siendo P , P' , P'' , P''' centros de los cuatro tipos de cara que se presentan, fronteras respectivas entre dos rombicuboctaedros, un rombicuboctaedro con un cuboctaedro y con un cubo menor sucesivamente, y estos dos últimos poliedros entre sí; L' , L'' son centros de los dos tipos de aristas (la común a dos rombicuboctaedros y un cubo menor y la compartida por los tres tipos de poliedro); finalmente, V' es el único tipo de vértice, compartido por dos rombicuboctaedros, un cuboctaedro y dos cubos menores.

El módulo elemental del cubo básico queda descompuesto en tres, que son partes de los tres poliedros que intervienen, pero mientras los módulos de los poliedros mayores equivalen a $1/48$ de los mismos, como ocurría en las compartimentaciones estudiadas en 8.2.1., el módulo del cubo menor es $1/16$ de éste, resultado de unir tres de sus módulos elementales (puede verse, si se examina con atención la figura 8.2.3., cómo se obtiene este prisma triangular uniendo tres celdillas).

El módulo del rombicuboctaedro es una cuasi pirámide cuadrangular de base trape

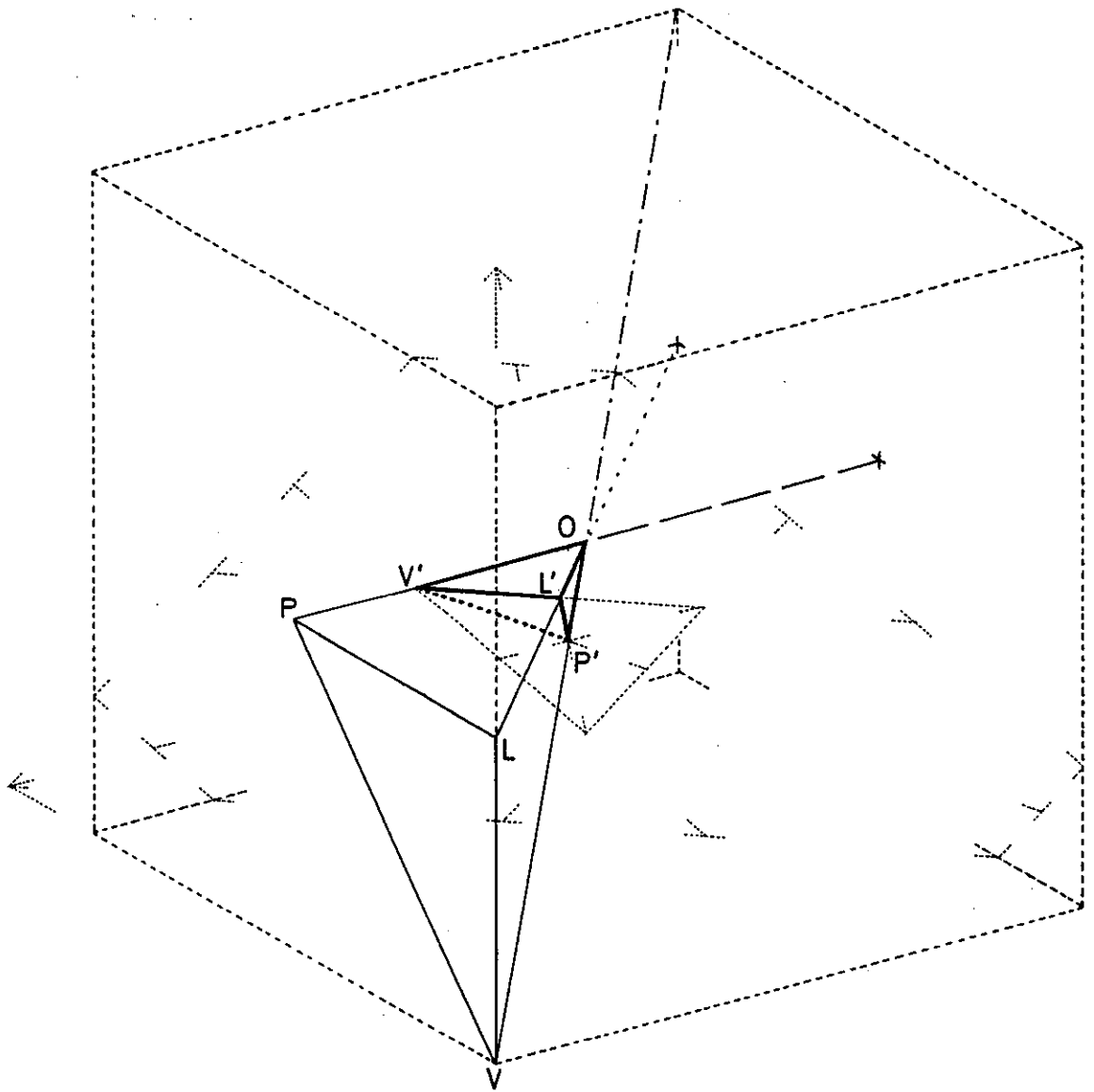


FIG 8.2.9. MODULO DEL OCTAEDRO
 COMPLEMENTARIO DEL CUBO TRUNCADO

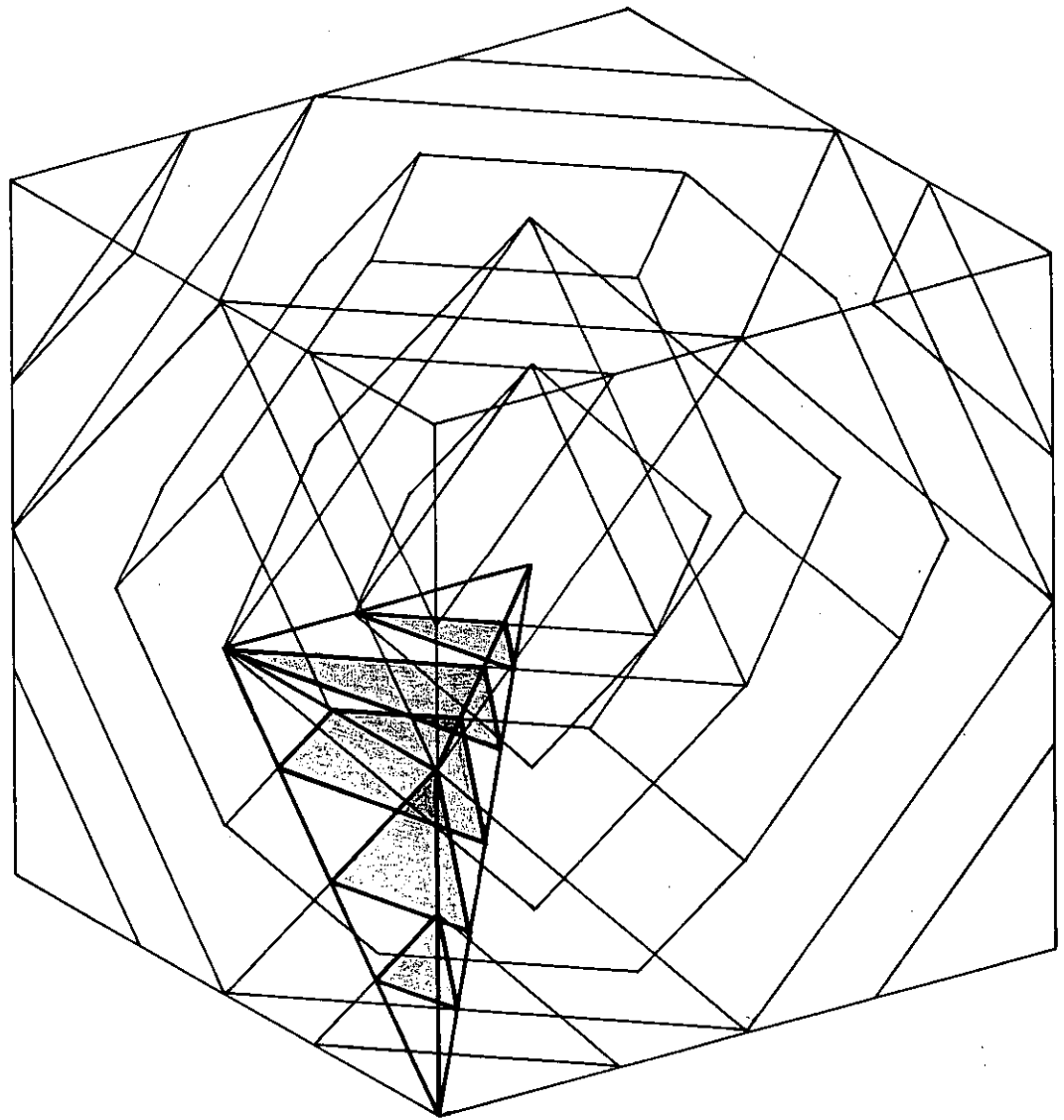


FIG 8.2.10. POLIEDROS OBTENIDOS POR INTERSECCION DE CUBOS Y OCTAEDROS, Y SUS MODULOS

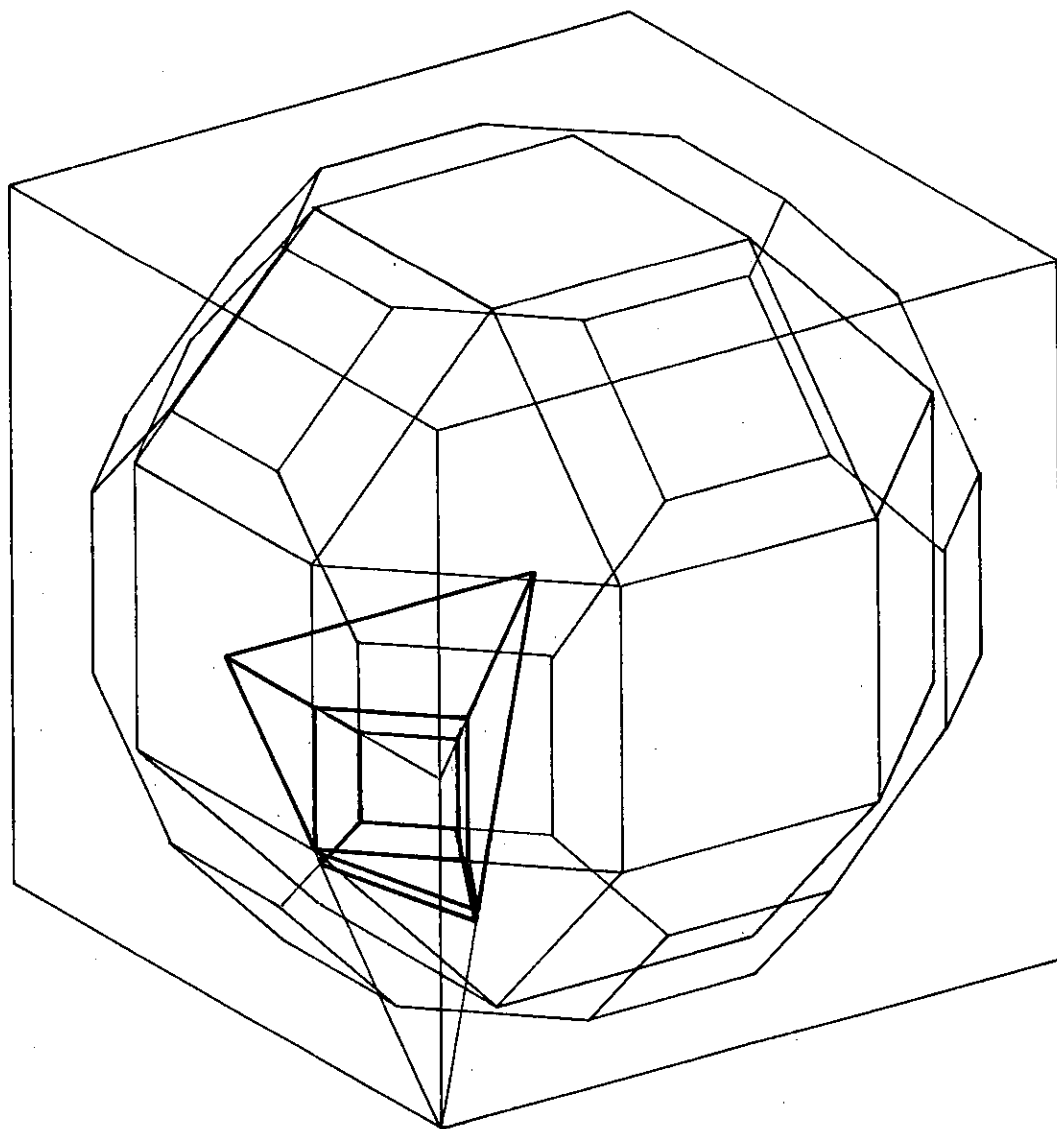


FIG 8.2.11. ROMBICUBOCTAEDROS INSCRITOS EN EL CUBO

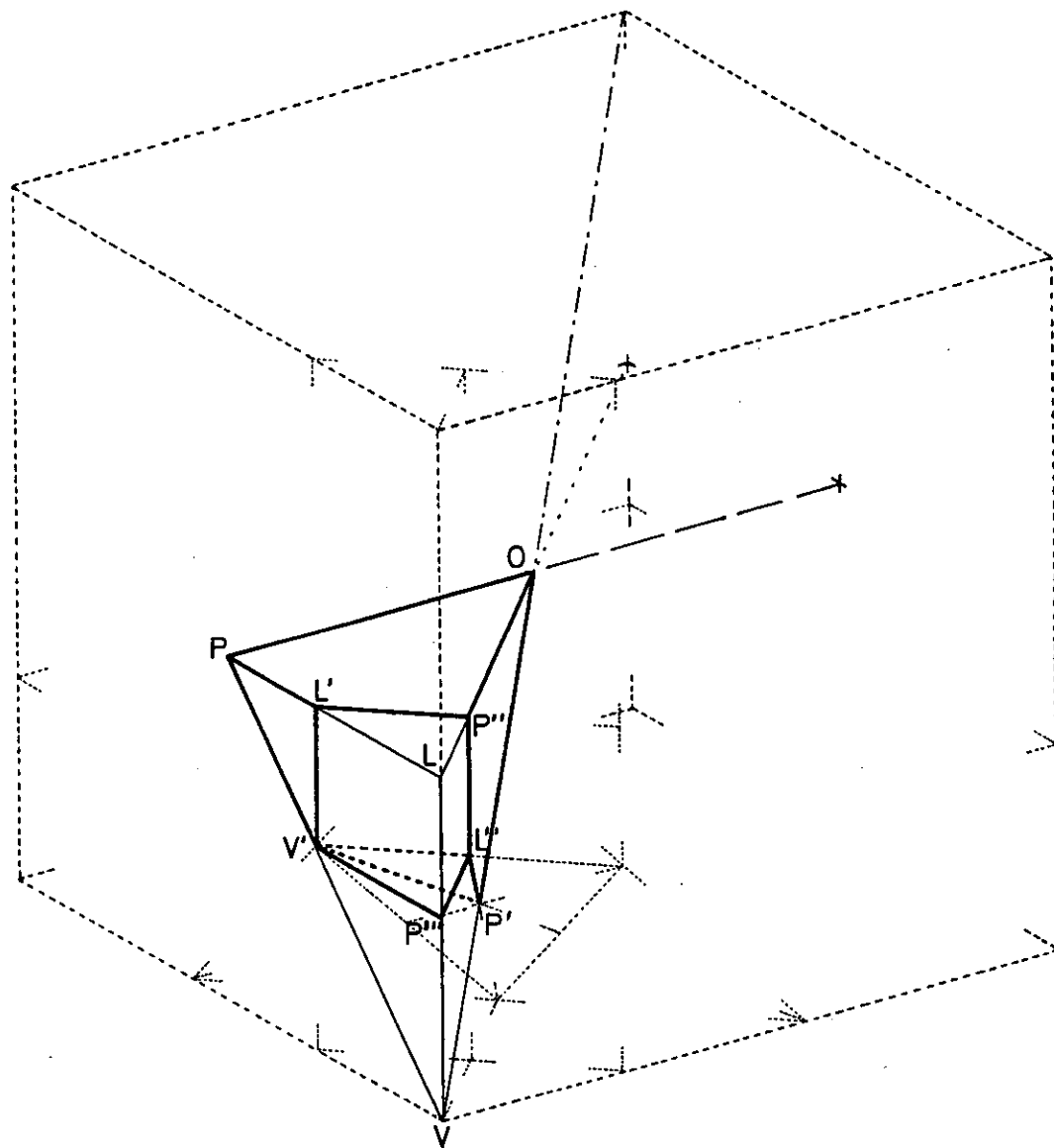


FIG 8.2.12. MODULO DEL ROMBICUBOCTAEDRO

zoidal $\overline{OPV'P'}$ truncada en uno de sus vértices V' ; sus caras son tres trapezoides, un cuadrado y dos triángulos. El módulo del cuboctaedro es una pirámide cuadrangular de base trapezoidal $\overline{VP'L''P''}$ y vértice V' . Finalmente, el módulo (triple) del cubo menor es un prisma triangular, como queda dicho arriba. El conjunto de los tres módulos tiene en total 19 aristas distintas, de las que 8 son compartidas, 5 pertenecen sólo al rombicuboctaedro, y 3 a cada uno de los otros dos poliedros. Una arista, $V'L''$, es común a los tres. Llamaremos, como en los casos anteriores, a a la semiarista de los poliedros, siendo $l=1$ la del cubo básico.

Obsérvese que \overline{OPL} es el módulo de la red plana (4,8,8)MS (figura 4.3.e), mientras \overline{OPV} , \overline{VLP} y \overline{OLV} se asemanan a los de las figuras 4.3.f, 4.3.g y 4.3.h, respectivamente. Todas las aristas compartidas por dos módulos se hallan sobre estas caras.

Veamos primeramente la relación entre l y a :

$$\overline{PL} = \overline{PL'} + \overline{L'L} \quad \text{,,} \quad l = a + a\sqrt{2} \quad \text{,,} \quad l = a(1 + \sqrt{2}) \quad \text{,,} \quad a = \frac{l}{\sqrt{2} + 1} = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = (\sqrt{2} - 1)l$$

Comprobamos que la arista de esta red coincide en dimensión con la del cubo truncado (apartado 8.2.1.1.).

Veamos las demás aristas:

$$\overline{OP} = \overline{OP''} = l = 1$$

$$\overline{PL'} = \overline{L'V'} = \overline{L'P''} = \overline{L''P''} = \overline{V'L''} = \overline{LP''} = \overline{LP'''} = \overline{L''P'''} = a = (\sqrt{2} - 1)l = 0,4142135623$$

$$\overline{PV'} = \overline{LV'} = \overline{V'P'''} = \overline{VP'''} = \sqrt{2}a = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)l = (2 - \sqrt{2})l = 0,5857864377$$

$$\overline{VV'} = \overline{PV} - \overline{PV'} = \sqrt{2} \cdot l - (2 - \sqrt{2})l = (2\sqrt{2} - 2)l = 0,8284271247$$

$$\overline{P'L''} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (\sqrt{2} - 1)l = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3} l = 0,2391463117$$

$$\overline{P'V'} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{2}{3}(\sqrt{6} - \sqrt{3})l = 0,4782926235$$

$$\overline{VL''}^2 = \overline{VP'''}^2 + \overline{L''P'''}^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 9 - 6\sqrt{2}$$

$$\overline{VP'}^2 = \overline{VL''}^2 - \overline{P'L''}^2 = 9 - 6\sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{2} - \frac{6 + 3 - 2\sqrt{18}}{9} = 9 - 1 - 6\sqrt{2} + \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{9} = 8 - \frac{18}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} = 8 - \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

$$\overline{VP'} = \sqrt{8 - \frac{16}{3}\sqrt{2}} = 0,6764079144$$

$$\overline{OL''}^2 = \overline{OP''}^2 + \overline{L''P''}^2 = 1 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 + 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OL''}^2 - \overline{P'L''}^2 = 4 - 2\sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{2} - \frac{6 + 3 - 2\sqrt{18}}{9} = 4 - 1 - 2\sqrt{2} + \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{9} = 3 - \frac{6}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} = 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$\overline{OP'} = \sqrt{3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}} = 1,0556428926$$

Como comprobación, vemos que

$$\overline{OP'} + \overline{VP'} = \sqrt{8 - \frac{16}{3}\sqrt{2}} + \sqrt{3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}} = 1,732050808 = \sqrt{3} = \overline{OV}$$

Muchos de estos valores han coincidido con otros obtenidos en 8.2.1.1.

Los volúmenes de los módulos y los poliedros son:

Para el cubo menor:

$$V_{Mc} = \frac{1}{2} a^3 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)^3 l^3 = \frac{1}{2} (2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1) l^3 = \frac{5\sqrt{2} - 7}{2} l^3 = 0,0355339059$$

$$V_C = 16 \cdot V_{MC} = 8(5\sqrt{2}-7)1^3 = 0,568542494$$

El volumen del módulo del cuboctaedro se obtuvo en 8.2.1.2. en función de $l' = \sqrt{2}a$ (figura 8.2.6.); para obtenerla con el valor actual de $a = (\sqrt{2}-1)1$, pondremos:

$$\begin{aligned} V_{MCO} &= \frac{5}{36}1'^3 = \frac{5}{36}(\sqrt{2}a)^3 = \frac{5}{36}[\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)1]^3 = \frac{5}{36}(2-\sqrt{2})^3 \cdot 1^3 = \frac{5}{36}(8-3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}+3 \cdot 2 \cdot 2-2\sqrt{2})1^3 = \\ &= \frac{5}{36}(20-14\sqrt{2})1^3 = \frac{5}{18}(10-7\sqrt{2}) = 0,02791807317 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{El volumen del cuboctaedro es: } V_{CO} &= 48 \cdot V_{MCO} = 48\left(\frac{25}{9} - \frac{35\sqrt{2}}{18}\right)1^3 = \frac{400}{3} - \frac{280\sqrt{2}}{3} = \\ &= \frac{40}{3}(10-7\sqrt{2}) = 1,3400675133 \end{aligned}$$

La relación entre las aristas de los cuboctaedros de ambas redes es

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2} = 0,5857864377$$

y la relación volumétrica es $[\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)]^3 = 20-14\sqrt{2} = 0,201010127$, es decir, aquél tenía un volumen unas cinco veces mayor.

El volumen restante del módulo del cubo básico corresponde al módulo del rombicuboctaedro:

$$\begin{aligned} V_{MRCO} &= V_{MC} - V_{MCO} = \frac{1}{6}1^3 - \frac{5\sqrt{2}-7}{2}1^3 = \frac{50-35\sqrt{2}}{18}1^3 = \frac{3-45\sqrt{2}+63-50+35\sqrt{2}}{18}1^3 = \\ &= \frac{16-10\sqrt{2}}{18}1^3 = \frac{1}{9}(8-5\sqrt{2}) = 0,1032146876 \end{aligned}$$

y el volumen del rombicuboctaedro:

$$V_{RCO} = 48 \cdot V_{MRCO} = \frac{48}{9}(8-5\sqrt{2})1^3 = \frac{16}{3}(8-5\sqrt{2})1^3 = 4,954305007$$

Esta cifra, en relación con el volumen del cubo básico, supone:

$$\frac{V_{MRCO}}{V_{MC}} = \frac{V_{RCO}}{V_C} = \frac{16(8-5\sqrt{2})}{3 \cdot 8} = \frac{2}{3}(8-5\sqrt{2}) = 0,6192881256$$

coincidente con el índice de ocupación del espacio por el rombicuboctaedro en la red.

Los índices de ocupación del espacio por los otros tipos de regiones son:

$$\frac{V_{MCO}}{V_{MC}} = \frac{25/9 - 35\sqrt{2}/18}{1/6} = \frac{50}{3} - \frac{35\sqrt{2}}{3} = \frac{5}{3}(10-7\sqrt{2}) = 0,167508439$$

$$\frac{V_{MC}}{V_{MC}} = \frac{5\sqrt{2}/2 - 7/2}{1/6} = 15\sqrt{2}-21 = 3(5\sqrt{2}-7) = 0,213203435$$

Teniendo en cuenta que por cada cuboctaedro y rombicuboctaedro hay tres cubos menores, cada uno de éstos ocupa $5\sqrt{2}-7 = 0,0710678118$

Es decir: mientras los rombicuboctaedros ocupan más de 3/5 del espacio, formando un conjunto conexo, los otros dos tipos de regiones ocupan menos de 2/5 entre los dos, formando también un conjunto conexo entre ambos, mientras que por separado sólo comparten sus vértices los cubos. Los cuboctaedros ocupan algo más de 1/6 del espacio, mientras los cubos menores llenan un poco más de 1/5, pero hay que tener en cuenta que su número es triple.

8.2.2.2. GRAN ROMBICUBOCTAEDRO

En la figura 8.2.13. vemos el módulo elemental de este poliedro, conjuntamente con el de un octaedro truncado y un cubo menor. Como en el caso anterior, O, V, L son los centros respectivos; P, P', P'', P''' los centros de las distintas caras; L', L'', L''' los centros de las aristas diferentes, que ahora son tres (la perteneciente a dos GRCO y un cubo menor, la que comparten los tres tipos de poliedros y la común a dos GRCO y un octaedro truncado); el único vértice es V' , compartido por dos GRCO, un OT y un cubo.

El módulo elemental del cubo básico contiene los módulos elementales del GRCO y del OT (1/48 de cada uno), y 1/16 del cubo menor, prisma triangular compuesto por tres módulos elementales del mismo, siendo los otros módulos una cuasi pirámide cuadrangular truncada con una cara cuadrada y cinco trapezoidales (GRCO), y una pirámide triangular truncada (OT).

En conjunto hay veinte aristas distintas, con nueve compartidas, cinco pertenecientes al GRCO y tres a cada uno de los otros poliedros. La arista $V'L''$ es común a los tres módulos.

Como en todos los casos, será a la semiarista de los poliedros, y l la del cubo básico. Las caras del módulo básico se asemejan a los módulos de las redes planas de las figuras 4.3.e, f (caras OPL, OPV) y 4.3.h (caras VLP y OLV); estas caras contienen a todas las aristas compartidas por dos módulos.

Haciendo (figura 8.2.13.) $x = PL' = PL'''$, $y = VL''$, $z = VP''''$:

$$\begin{aligned} \overline{PV} &= \overline{PL''''} + \overline{VL''''} = x + y = \sqrt{2}l & \rightarrow & \left. \begin{array}{l} y = \sqrt{2}l - x \\ x = 1 - \sqrt{2}a \\ z = 1 - a \end{array} \right\} \begin{array}{l} y^2 = 2l^2 - 2\sqrt{2}lx + x^2 \\ z^2 = l^2 - 2al + a^2 \\ z^2 + 2a^2 = y^2 + a^2 \\ z^2 + a^2 = y^2 \end{array} \\ \overline{PL} &= \overline{PL'} + \overline{LL'} = x + \sqrt{2}a = l & \rightarrow & \\ \overline{VL} &= \overline{VP''''} + \overline{LP''''} = z + a = l & \rightarrow & \\ \overline{VV'}^2 &= \overline{VP''''}^2 + \overline{V'P''''}^2 = z^2 + (\sqrt{2}a)^2 = y^2 + a^2 & \rightarrow & \\ a^2 &= y^2 - z^2 = l^2 - 2\sqrt{2}lx + x^2 + 2al - a^2 \quad \text{,,} \quad 2a^2 = l^2 + 2al - 2\sqrt{2}l(1 - \sqrt{2}a) + (1 - \sqrt{2}a)^2 = \\ &= l^2 + 2al - 2\sqrt{2}l^2 + 4al + l^2 - 2\sqrt{2}al + 2a^2 \quad \text{,,} \quad a(2l + 4l - 2\sqrt{2}l) + l^2(1 - 2\sqrt{2} + 1) = 0 \\ a(6 - 2\sqrt{2})l + l^2(2 - 2\sqrt{2}) &= 0 \quad \text{,,} \quad a(6 - 2\sqrt{2})l = (2\sqrt{2} - 2)l^2 \quad \text{,,} \quad a = \frac{2\sqrt{2} - 2}{6 - 2\sqrt{2}}l \\ a &= \frac{(2\sqrt{2} - 2)(6 + 2\sqrt{2})}{36 - 4 \cdot 2}l = \frac{12\sqrt{2} + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 6 - 4\sqrt{2}}{28}l = \frac{8\sqrt{2} - 4}{28}l = \frac{1}{7}(2\sqrt{2} - 1)l = 0,261203875 \\ x &= 1 - \sqrt{2}a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{7}(2\sqrt{2} - 1)l = (1 - \frac{2 \cdot 2}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7})l = \frac{7 - 4 + \sqrt{2}}{7}l = \frac{1}{7}(3 + \sqrt{2})l = 0,6306019375 \\ y &= \sqrt{2}l - x = \sqrt{2}l - \frac{1}{7}(3 + \sqrt{2})l = \frac{7\sqrt{2} - 3 - \sqrt{2}}{7}l = \frac{6\sqrt{2} - 3}{7}l = \frac{3}{7}(2\sqrt{2} - 1)l = 0,7836116249 \\ z &= 1 - a = 1 - \frac{1}{7}(2\sqrt{2} - 1)l = \frac{7 - 2\sqrt{2} + 1}{7}l = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{7}l = \frac{2}{7}(4 - \sqrt{2})l = 0,738796125 \end{aligned}$$

A continuación van los valores de todas las aristas que intervienen en estos módulos:

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= l = 1 \quad \text{,,} \quad \overline{PL'} = \overline{PL''''} = x = \frac{1}{7}(3 + \sqrt{2})l = 0,6306019375 \\ \overline{L'P''} &= \overline{L'V'} = \overline{V'L''} = \overline{L''P''} = \overline{V'L''''} = \overline{LP''} = \overline{LP''''} = \overline{L''P''''} = a = \frac{1}{7}(2\sqrt{2} - 1)l = 0,261203875 \\ \overline{LL'} &= \overline{V'P''''} = \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{7}(2\sqrt{2} - 1)l = \frac{2 \cdot 2 - \sqrt{2}}{7}l = \frac{1}{7}(4 - \sqrt{2})l = 0,3693980625 \\ \overline{P'L''} &= \overline{P'L''''} = \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{7}(2\sqrt{2} - 1)l = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{3}}{7}l = \frac{1}{7}(2\sqrt{6} - \sqrt{3})l = 0,4524183826 \end{aligned}$$

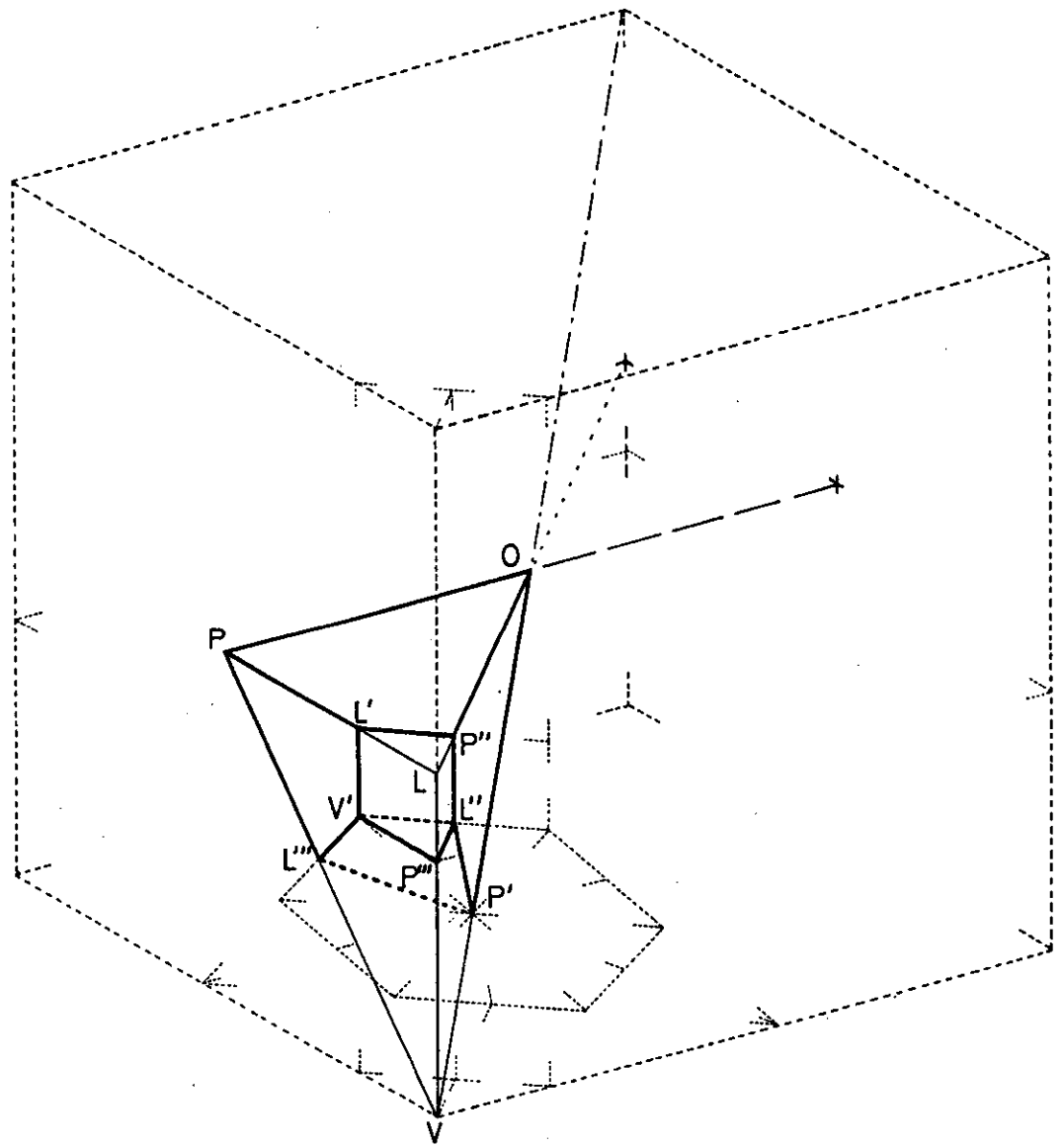


FIG 8.2.13. MODULO DEL GRAN ROMBICUBOCTAEDRO

$$\overline{VL}''' = y = \frac{3}{7}(2\sqrt{2}-1)l = 0,7836116249$$

$$\overline{VP}''' = z = \frac{2}{7}(4-\sqrt{2})l = 0,738796125$$

$$\overline{OP}'' = \overline{OL} - \overline{LP}'' = \sqrt{2}l - a = \sqrt{2}l - \frac{2\sqrt{2}-1}{7}l = \frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1}{7}l = \frac{1}{7}(5\sqrt{2}+1)l = 1,1530096874$$

$$\begin{aligned}\overline{VL}''^2 &= \overline{VP}'''^2 + \overline{LP}'''^2 = \frac{4}{49}(4-\sqrt{2})^2 l^2 + \frac{1}{49}(2\sqrt{2}-1)^2 l^2 = \frac{4}{49}(16-8\sqrt{2}+2)l^2 + \frac{1}{49}(8-4\sqrt{2}+1)l^2 = \\ &= \frac{64-32\sqrt{2}+8+8-4\sqrt{2}+1}{49}l^2 = \frac{81-36\sqrt{2}}{49}l^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{VP}''^2 &= \overline{VL}''^2 - \overline{LP}''^2 = \frac{81-36\sqrt{2}}{49}l^2 - 3a^2 = \frac{81-36\sqrt{2}}{49}l^2 - 3\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7}l\right)^2 = \\ &= \frac{81-36\sqrt{2}}{49}l^2 - 3\frac{4\cdot 2 - 2\cdot 2\sqrt{2} + 1}{49}l^2 = \frac{81-36\sqrt{2}-24+12\sqrt{2}-3}{49}l^2 = \frac{54-24\sqrt{2}}{49}l^2 = \frac{6(9-4\sqrt{2})}{49}l^2\end{aligned}$$

$$\overline{VP}'' = \frac{\sqrt{6}}{7}\sqrt{9-4\sqrt{2}}l = 0,6398162125$$

$$\overline{OP}'' = \overline{OV} - \overline{VP}'' = \sqrt{3}l - \frac{\sqrt{6}}{7}\sqrt{9-4\sqrt{2}}l = 1,092234595$$

Los volúmenes de los módulos y de los poliedros son:

Para el cubo menor:

$$\begin{aligned}V_{Mc} &= \frac{1}{2}a^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^3}(2\sqrt{2}-1)^3 l^3 = \frac{1}{686}(8\cdot 2\sqrt{2}-3\cdot 4\cdot 2+3\cdot 2\sqrt{2}-1)l^3 = \frac{16\sqrt{2}-24+6\sqrt{2}-1}{686}l^3 = \\ &= \frac{22\sqrt{2}-25}{686}l^3 = 0,008910639026\end{aligned}$$

$$V_c = 16\cdot V_{Mc} = \frac{176\sqrt{2}-200}{7^3}l^3 = 0,1425702244$$

La relación que guarda este cubo menor con el del apartado anterior es:

$$\frac{22\sqrt{2}-25}{343(5\sqrt{2}-7)} = \frac{(22\sqrt{2}-25)(5\sqrt{2}+7)}{343(25\cdot 2-49)} = \frac{110\cdot 2+154\sqrt{2}-125\sqrt{2}-175}{343} = \frac{45+29\sqrt{2}}{7^3} = 0,250764412$$

es decir: este cubo es aproximadamente 1/4 de aquél.

El volumen del módulo del OT se obtuvo en 8.2.1.3. (figura 8.2.7.) en función de $l' = 2\sqrt{2}a$, mientras que ahora es $a = \frac{1}{7}(2\sqrt{2}-1)l$, y era:

$$\begin{aligned}V_{MOT} &= \frac{1}{12}l'^3 = \frac{1}{12}(2\sqrt{2})^3 \cdot a^3 = \frac{1}{12}(2\sqrt{2})^3 \cdot \frac{1}{7^3}(2\sqrt{2}-1)^3 l^3 = \\ &= \frac{1}{12\cdot 7^3} \cdot 8\cdot 2\sqrt{2}(8\cdot 2\sqrt{2}-3\cdot 4\cdot 2+3\cdot 2\sqrt{2}-1)l^3 = \frac{4}{3\cdot 7^3}(44-25\sqrt{2})l^3 = \frac{176-100\sqrt{2}}{3\cdot 7^3}l^3 = \\ &= 0,03360412417\end{aligned}$$

El volumen del octaedro truncado es:

$$V_{OT} = 48\cdot \frac{176-100\sqrt{2}}{3\cdot 7^3}l^3 = 16\frac{176-100\sqrt{2}}{7^3}l^3 = 1,612997959$$

La relación entre las aristas de este octaedro truncado y las del de la red que forma este poliedro por sí solo es:

$$\frac{l'}{l} = \frac{2\sqrt{2}a}{l} = \frac{2\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)l}{7l} = \frac{8-2\sqrt{2}}{7} = 0,738796125$$

relación que, en cuanto a volumen, supone el cubo de esta cifra, 0,40324949, siendo éste unos 2/5 de aquél.

El módulo del GRCO se obtiene por diferencia entre el del cubo básico y los obtenidos hasta ahora:

$$\begin{aligned}V_{MGRCO} &= V_{Mc} - V_{Mc} - V_{MOT} = \frac{1}{6}l^3 - \frac{22\sqrt{2}-25}{686}l^3 - \frac{176-100\sqrt{2}}{1029}l^3 = \frac{343-66\sqrt{2}+75-352+200\sqrt{2}}{2058}l^3 = \\ &= \frac{66+134\sqrt{2}}{2058}l^3 = \frac{33+67\sqrt{2}}{1029} = 0,1241519035\end{aligned}$$

Y el de todo el poliedro:

$$V_{\text{GRCO}} = 48 \cdot V_{\text{MGRCO}} = \frac{528+1072\sqrt{2}}{343} 1^3 = 5,959291367$$

La relación entre el volumen de este poliedro y el del cubo básico es:

$$\frac{V_{\text{MGRCO}}}{V_{\text{MC}}} = \frac{V_{\text{GRCO}}}{V_{\text{C}}} = \frac{528+1072\sqrt{2}}{8 \cdot 343} = 0,74491142$$

que es aún mayor que para el RCO.

Los índices de ocupación del espacio de los otros dos tipos de regiones son:

$$\frac{V_{\text{MOT}}}{V_{\text{MC}}} = \frac{176/3 \cdot 7^3 - 100\sqrt{2}/3 \cdot 7^3}{176} = \frac{352-200\sqrt{2}}{7^3} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot (44-25\sqrt{2}) = 0,201624745$$

$$\frac{V_{\text{Mc}}}{V_{\text{MC}}} = \frac{22\sqrt{2}/686 - 25/686}{1/6} = \frac{66\sqrt{2}-75}{343} = \frac{3}{7^3}(22\sqrt{2}-25) = 0,05346383416$$

Como en el cubo básico hay $12 \cdot \frac{1}{4} = 3$ cubos menores, cada uno de éstos ocupa sólo $\frac{1}{3}(22\sqrt{2}-25) = 0,01782127805$

Podemos ver que los grandes rombicuboctaedros ocupan algo menos de 3/4 del espacio, formando un conjunto conexo; los octaedros truncados ocupan algo más de 1/5, y los cubos menores (que son en número tres veces más) tan sólo un poco más de 1/19. Estos dos últimos tipos de regiones forman conjuntos no conexos por separado, estando conectados los unos con los otros.

8.2.3. RESUMEN

Sigue en un cuadro la participación relativa de los poliedros en las descomposiciones semirregulares del espacio del sistema del cubo:

CUBO TRUNCADO Y OCTAEDRO

Regiones		Unidades de volumen
nº	tipo	
1	CT	0,9664983122
1	O	0,0335016878
C	básico	1

CUBOCTAEDRO Y OCTAEDRO

Regiones		Unidades de volumen
nº	tipo	
1	CO	0,83
1	O	0,16
C	básico	1

OCTAEDRO TRUNCADO

Regiones		Unidades de volumen
nº	tipo	
2	OT	0,5
C	básico	1

ROMBICUBOCTAEDRO, CUBOCTAEDRO Y CUBO

Regiones		Unidades de volumen
nº	tipo	
1	RCO	0,6192881256
1	CO	0,167508439
3	C	0,0710678118
C básico		1

GRAN ROMBICUBOCTAEDRO, OCTAEDRO TRUNCADO Y CUBO

Regiones		Unidades de volumen
nº	tipo	
1	GRCO	0,74491142
1	OT	0,201624745
3	C	0,01782127805
C básico		1

Para completar la visión de los rombicuboctaedros, vamos a representarlos en relación con el romboedro de su sistema (rombododecaedro) en las figuras 8.2.14. Esto es lo que hicimos con los rombitetratetraedros en las figuras 8.1.14.

En 8.2.15. se ve la relación entre el rombododecaedro y el cubo básico, representado de puntos. Su módulo (1/48 de su volumen) equivale al de dos cubos, y efectivamente ya sabemos que el volumen del romboedro es doble que el del cubo, por repartirse los cubos de clase II entre los de clase I (figura 7.7.).

En la figura 8.2.16. aparecen las descomposiciones del módulo elemental del cubo en módulos de otros poliedros del sistema vistas anteriormente. 8.2.16.a recoge las descomposiciones en dos poliedros, y 8.2.16.b aquéllas en que se descompone entre tres.

8.2.17. visualiza cómo pueden obtenerse los módulos de los poliedros del sistema como intersecciones de módulos básico y dual (cubo y octaedro, figura 8.2.17a), y, en los rombicuboctaedros, interviniendo también el rombododecaedro (figura 8.2.17.b).

Por último en 8.2.18. se muestra el módulo del rombododecaedro como doble del cubo (unión de módulos de las clases de cubos I y II).

8.2.4. DUALIDAD E INVERSION

Si comparamos los módulos del cubo y del octaedro dual inscrito en él, podemos ver que (figura 8.2.8., en relación con la 8.2.6., con medidas tomadas del apartado 8.2.1.4., en relación con 8.2.1.2.):

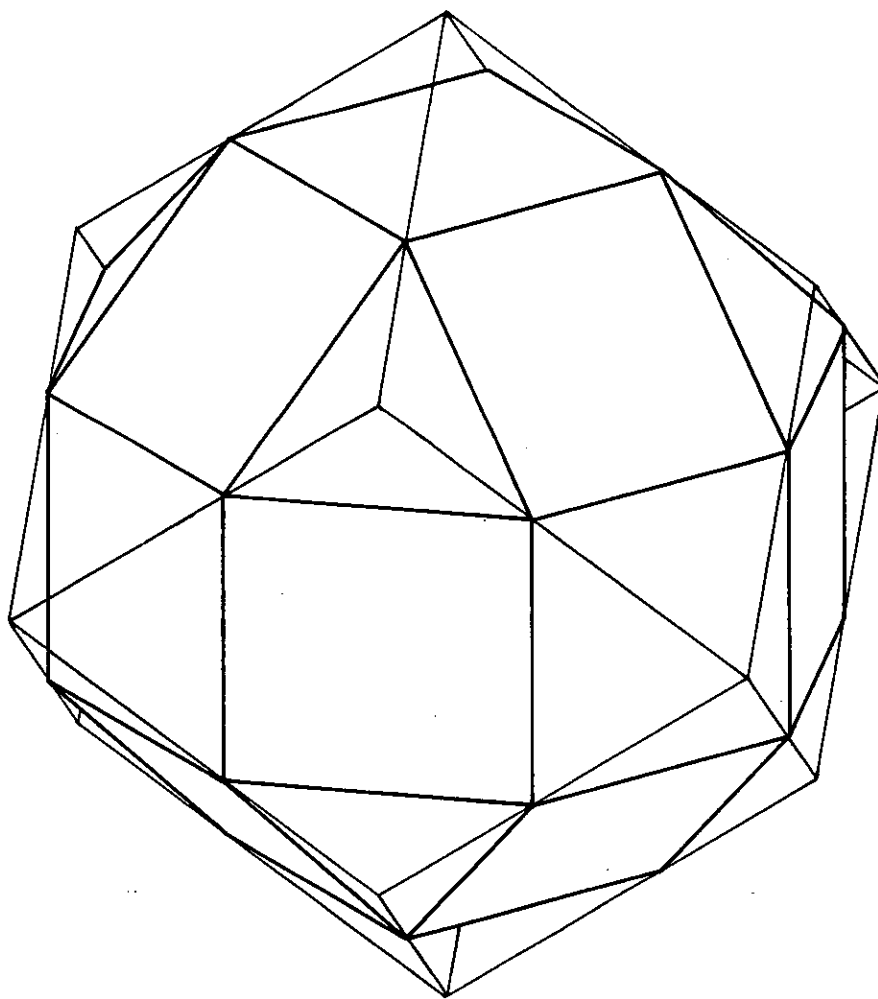


FIG 8.2.14. a EL ROMBICUBOCTAEDRO INSCRITO
EN EL ROMBODÓDECAEDRO

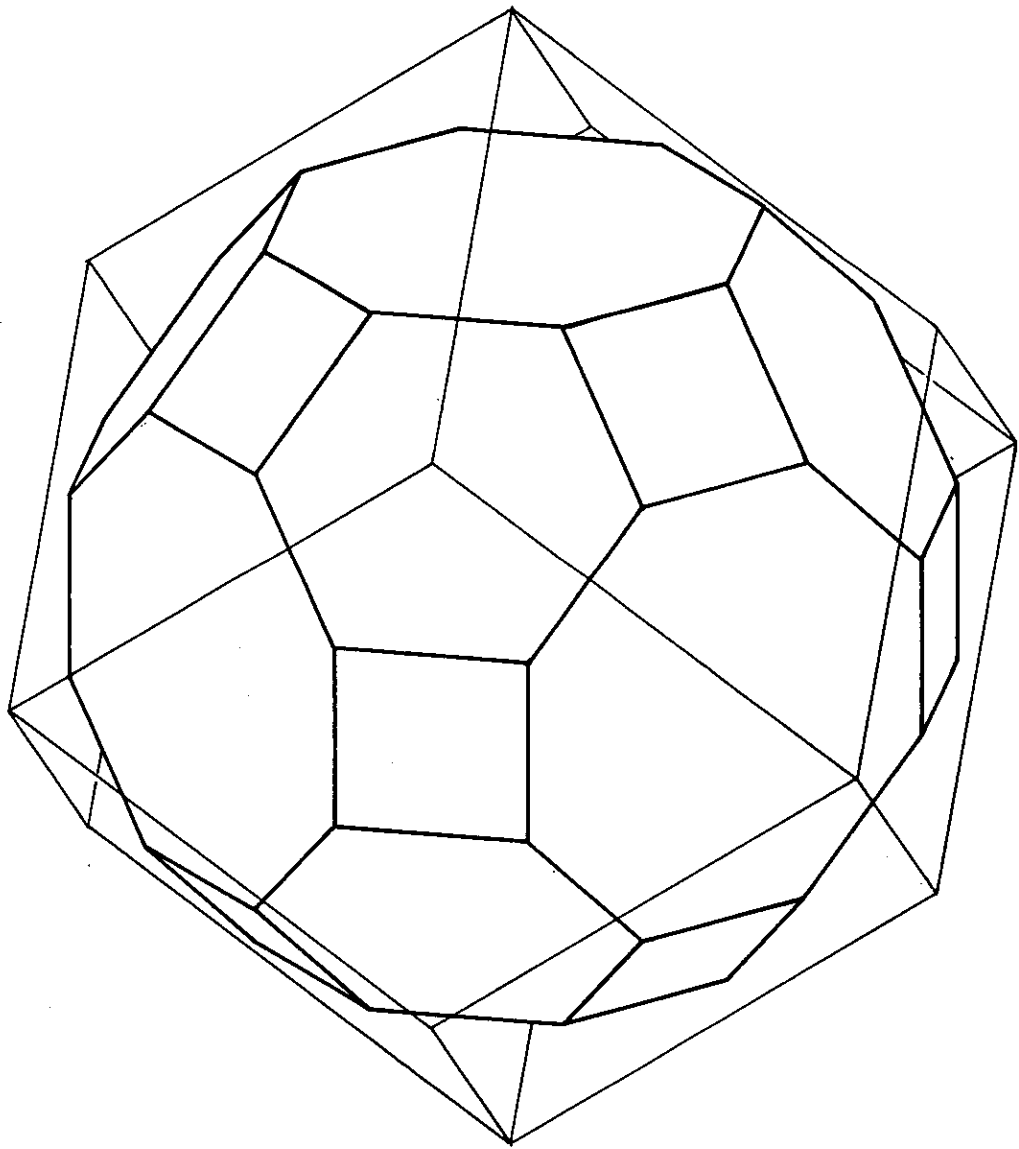


FIG 8.2.14. b EL GRAN ROMBICUBOCTAEDRO INSCRITO
EN EL ROMBODODECAEDRO

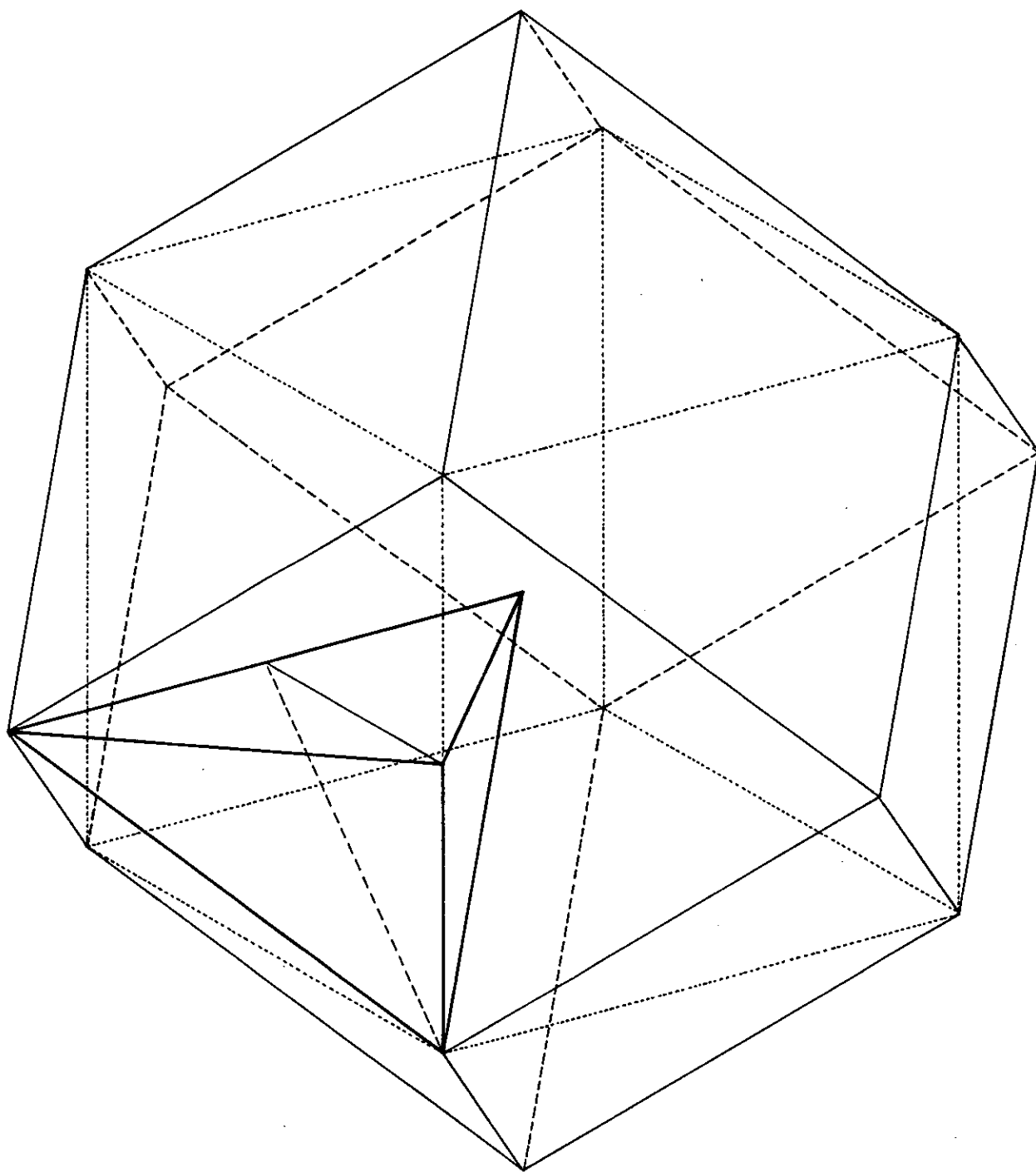


FIG 8.2.15. ROMBODODECAEDRO CIRCUNSCRITO AL CUBO
Y MODULOS ELEMENTALES DE AMBOS

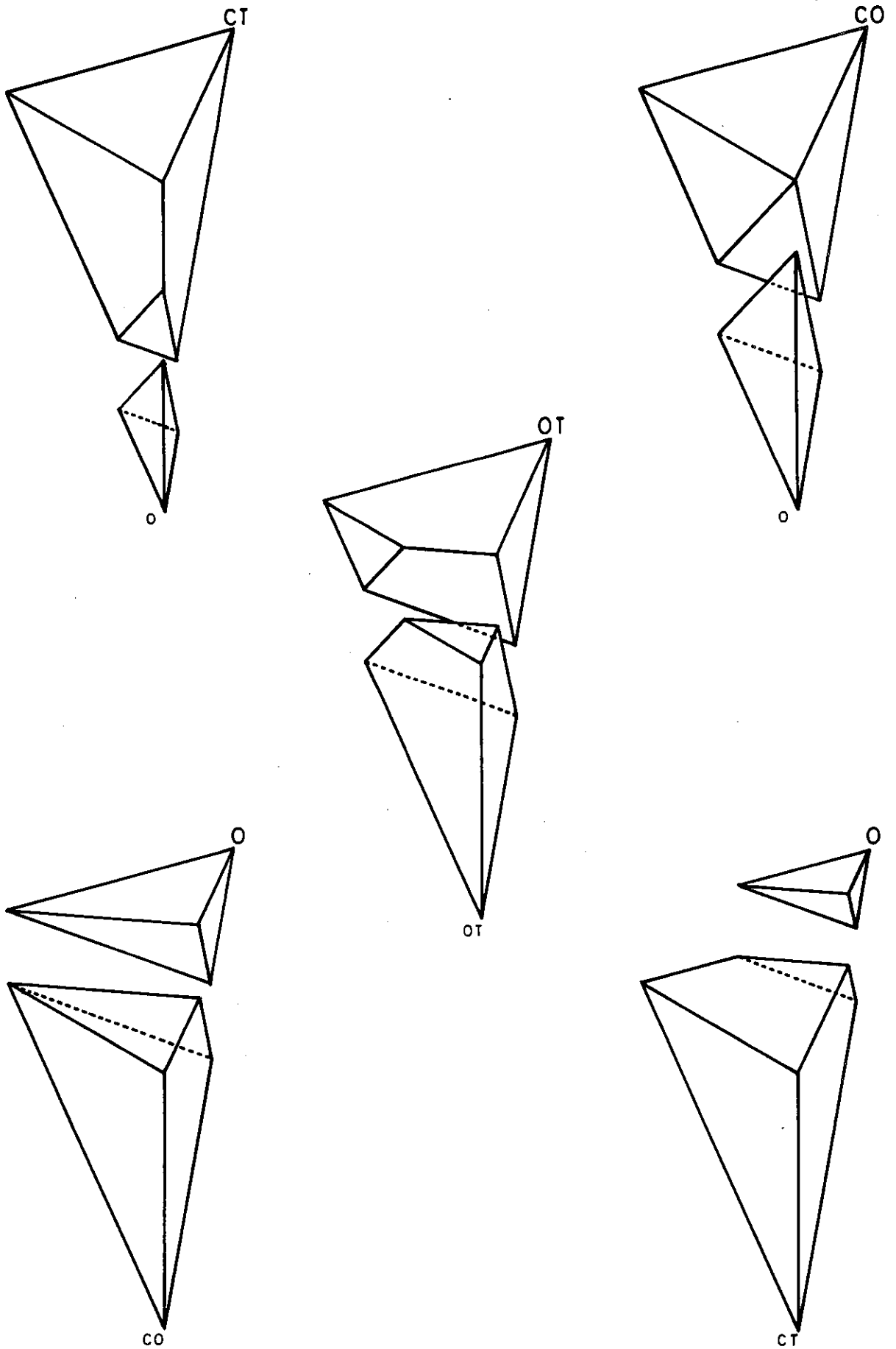


FIG 8.2.16.a DESCOMPOSICIONES DEL MODULO ELEMENTAL DEL CUBO EN DOS REGIONES

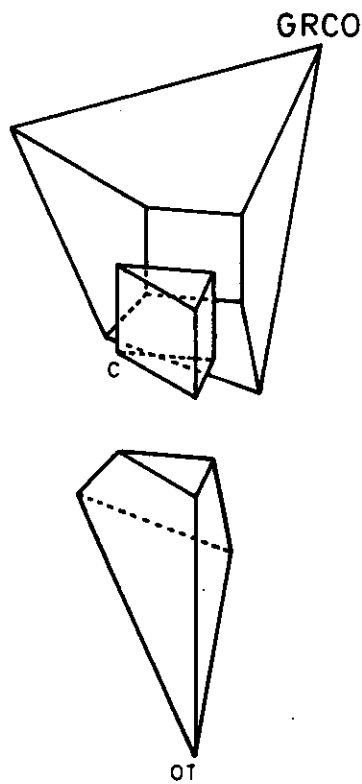
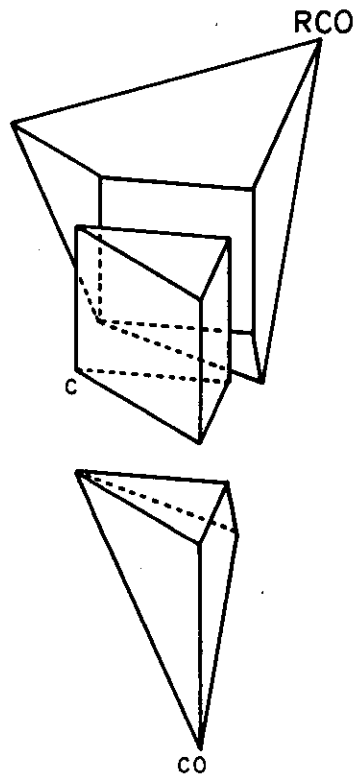


FIG 8.2.16. b DESCOMPOSICIONES DEL MODULO ELEMENTAL DEL CUBO EN TRES REGIONES

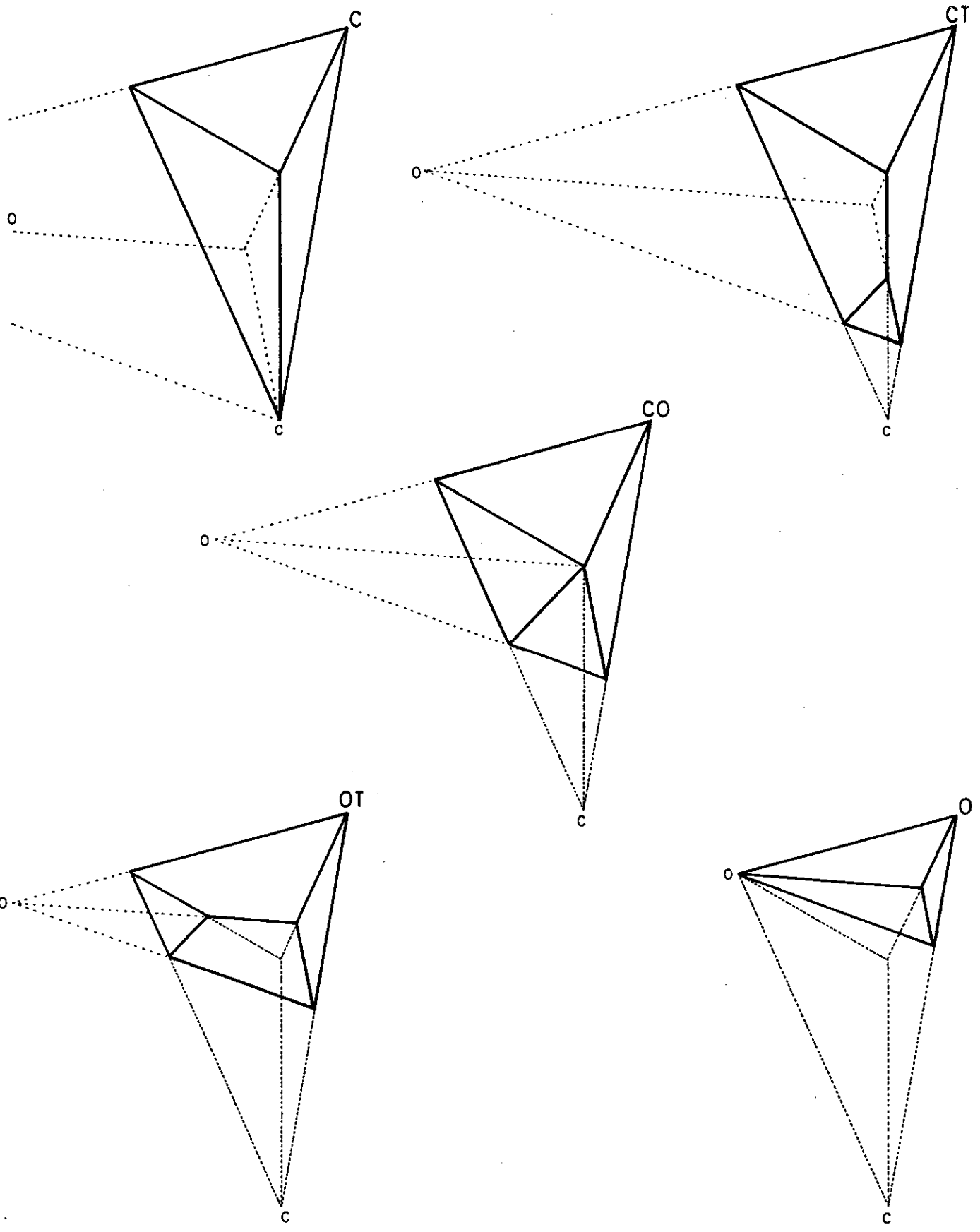


FIG 8.2.17.a MODULOS OBTENIDOS COMO INTERSECCION DE LOS MODULOS DEL CUBO Y DEL OCTAEDRO DUALES

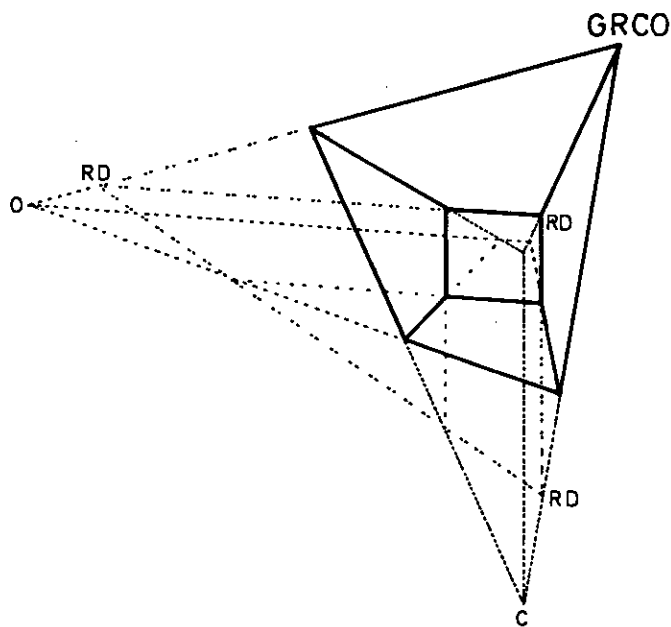
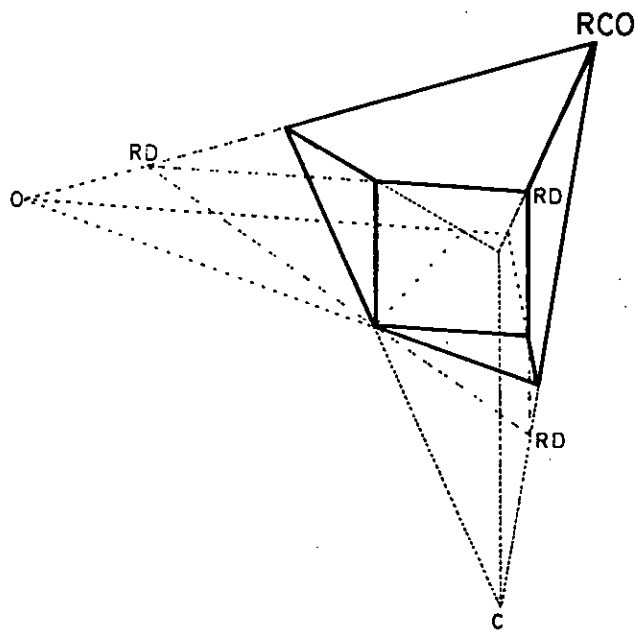


FIG 8.2.17. b MODULOS OBTENIDOS COMO INTERSECCION DE LOS DEL CUBO, EL OCTAEDRO Y EL ROMBODODECAEDRO

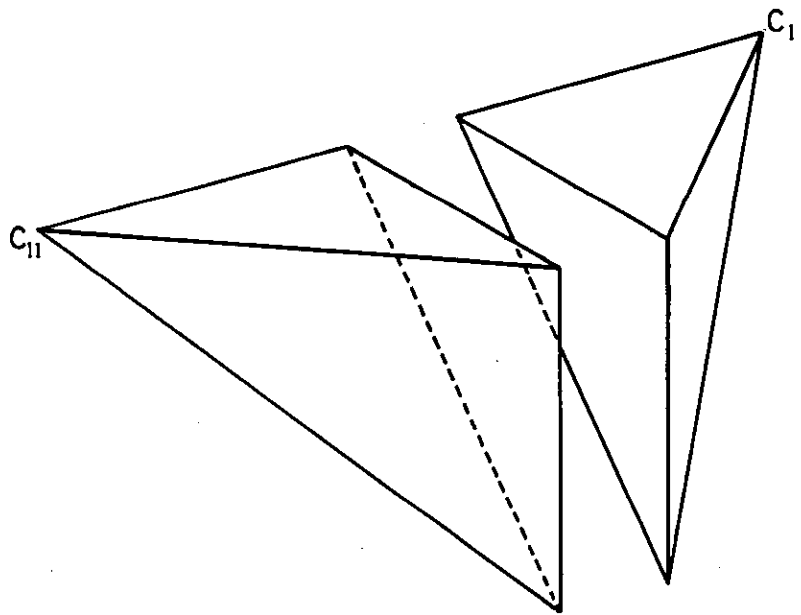


FIG 8.2.18. MODULO DEL ROMBODECAEDRO, COMPUESTO POR
LOS DE DOS CUBOS DE DISTINTA CLASE

Módulo del cubo

$$\overline{OP} = \overline{PL} = \overline{LV} = 1$$

$$\overline{OL} = \overline{PV} = \sqrt{2}$$

$$\overline{OV} = \sqrt{3}$$

Módulo del octaedro

$$\overline{OP} = 1 \quad \text{,,} \quad \overline{PL'} = \sqrt{2}/2 \quad \text{,,} \quad \overline{L'P'} = \sqrt{6}/6$$

$$\overline{OL'} = \sqrt{2}/2 \quad \text{,,} \quad \overline{PP'} = \sqrt{6}/3$$

$$\overline{OP'} = \sqrt{3}/3$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = 1$$

$$\overline{OL} \cdot \overline{OL'} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\overline{OV} \cdot \overline{OP'} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$

Además, y por ello mismo, los triángulos de las caras coplanarias son semejantes (\overline{OPL} y $\overline{OL'P'}$, \overline{OPV} y $\overline{OP'L'}$, \overline{OLV} y $\overline{OP'L'}$).

Ello nos indica que los poliedros duales están relacionados por una inversión: los puntos que se corresponden en la dualidad son inversos, siendo la esfera autoinversora la inscrita en el cubo y circunscrita al octaedro.

El plano de la cara de un poliedro (\overline{PLV}) tiene como figura inversa la superficie esférica circunscrita al módulo del poliedro dual, que contiene a P, L', V' y O.

Si el cubo estuviera inscrito en el octaedro, la esfera autoinversora sería la circunscrita al cubo e inscrita en el octaedro.

Finalmente, si el cubo y el octaedro comparten los puntos L, es decir, están inscritos en un mismo rombododecaedro, la esfera autoinversora será la inscrita en este último, esfera de las aristas de los poliedros duales.

8.3. SISTEMA DEL DODECAEDRO

Este sistema, como sabemos, es incapaz de compartimentar el espacio en regiones iguales que pertenezcan en exclusiva a él. Los módulos elementales de sus poliedros sólo pueden agruparse en torno a un centro para formar un poliedro aislado, sin que la red pueda extenderse más. A pesar de ello, y dado el paralelismo de estos poliedros con los de los otros sistemas, y en particular con el del cubo, vamos a exponer estos módulos para poderlos comparar mejor con aquéllos. Exceptuamos el dodecaedro achatado, como antes el cubo achatado y el tetraedro achatado (que es precisamente el poliedro dual de este sistema), pues ninguno de ellos permite compartimentaciones regulares ni semirregulares.

El módulo elemental del dodecaedro es una pirámide triangular, equivalente en volumen a 1/120 del poliedro completo, con dos formas simétricas entre sí (enantiomorfos). En la figura 8.3.1. se han dibujado todos estos módulos, indicándose en 8.3.2. los ejes de simetría y en 8.3.3. los planos de simetría que separan estos 120 módulos entre sí.

La figura 8.3.4. representa un módulo, con indicación de los ejes de simetría, de tres tipos distintos, que, junto con la cara \overline{PLV} , lo definen.

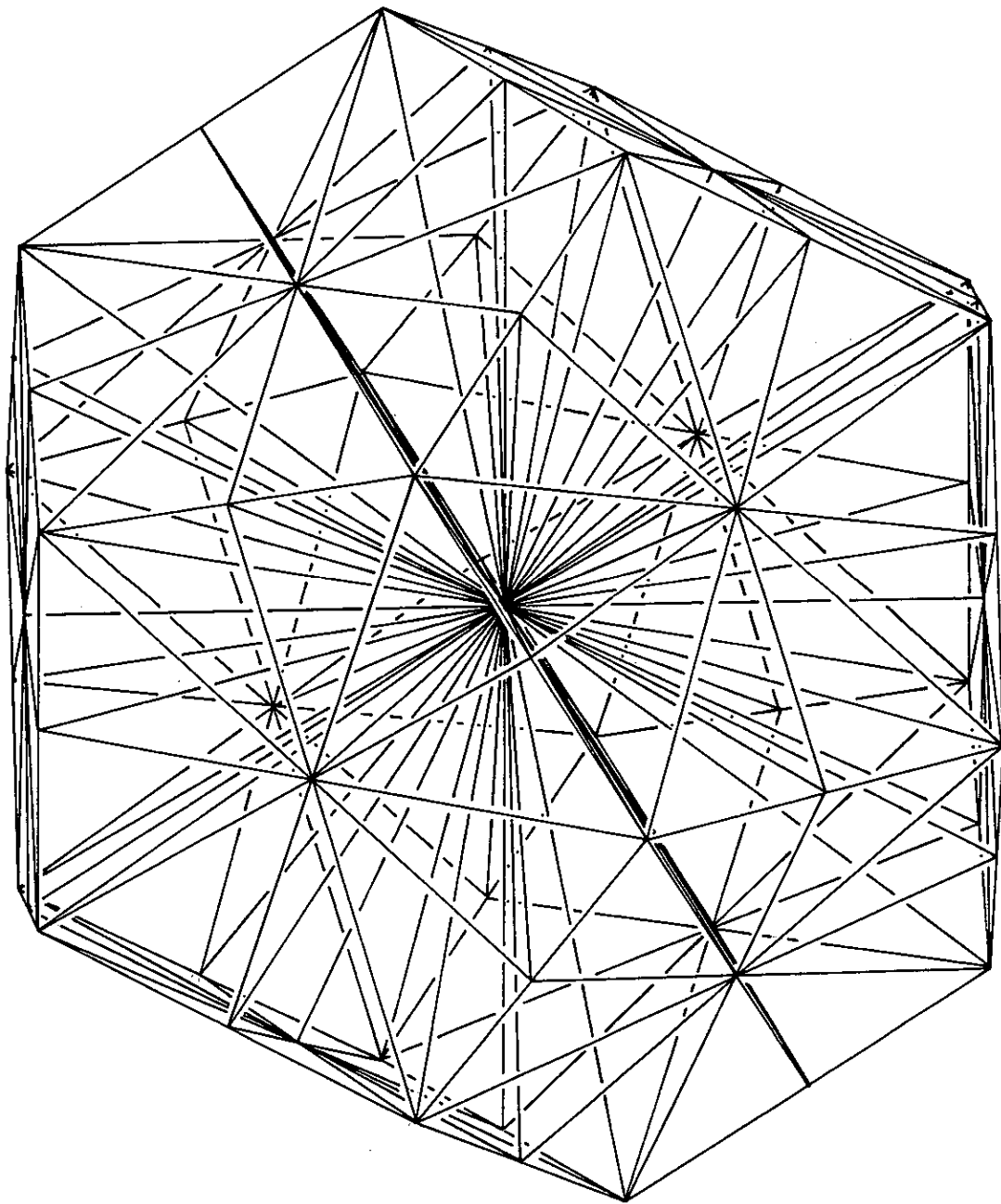


FIG 8.3.1. DESCOMPOSICION DEL DODECAEDRO EN MODULOS

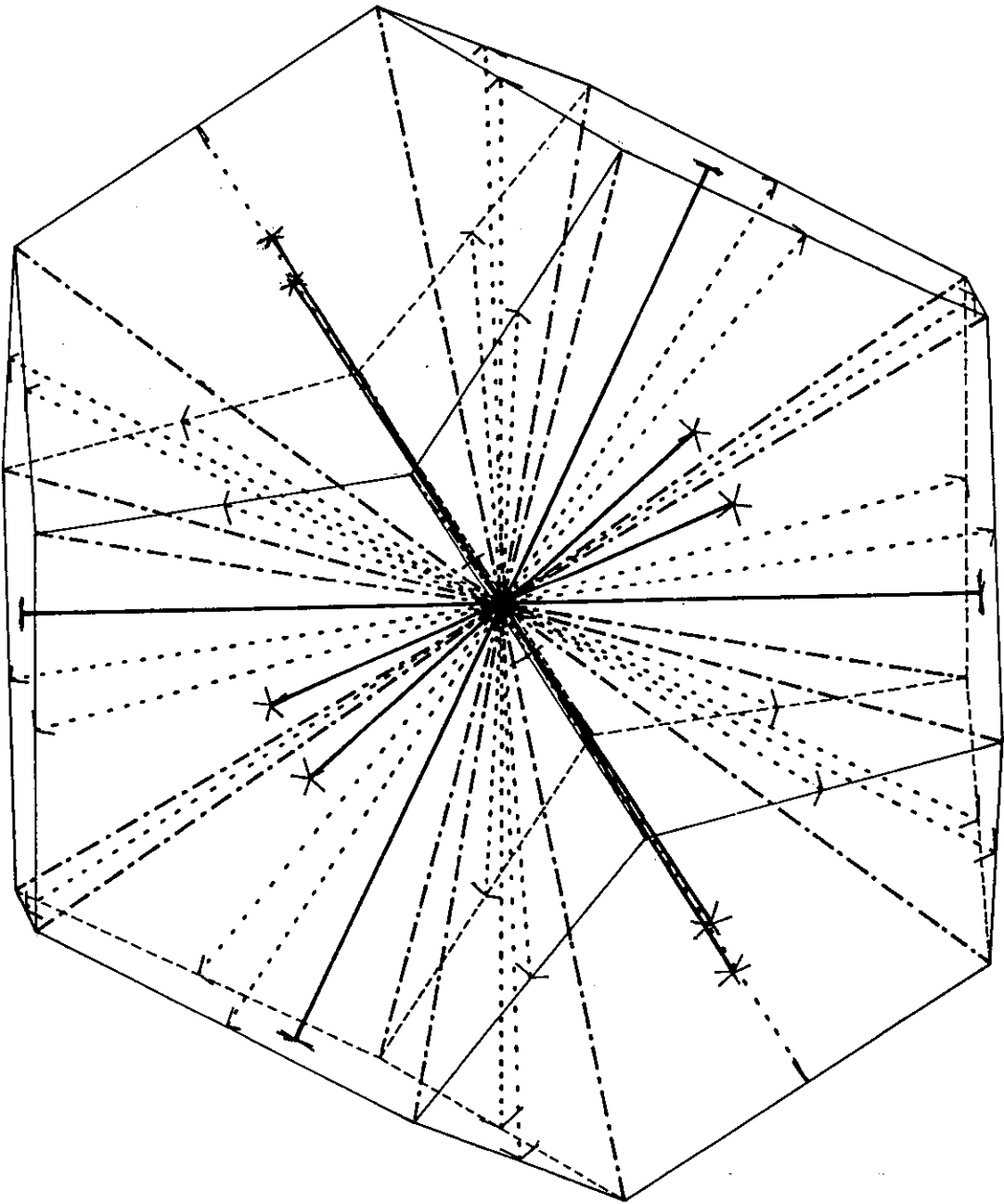


FIG 8.3.2. EJES DE SIMETRIA

BINARIOS
TERNARIOS - - - - -
QUINARIOS ————

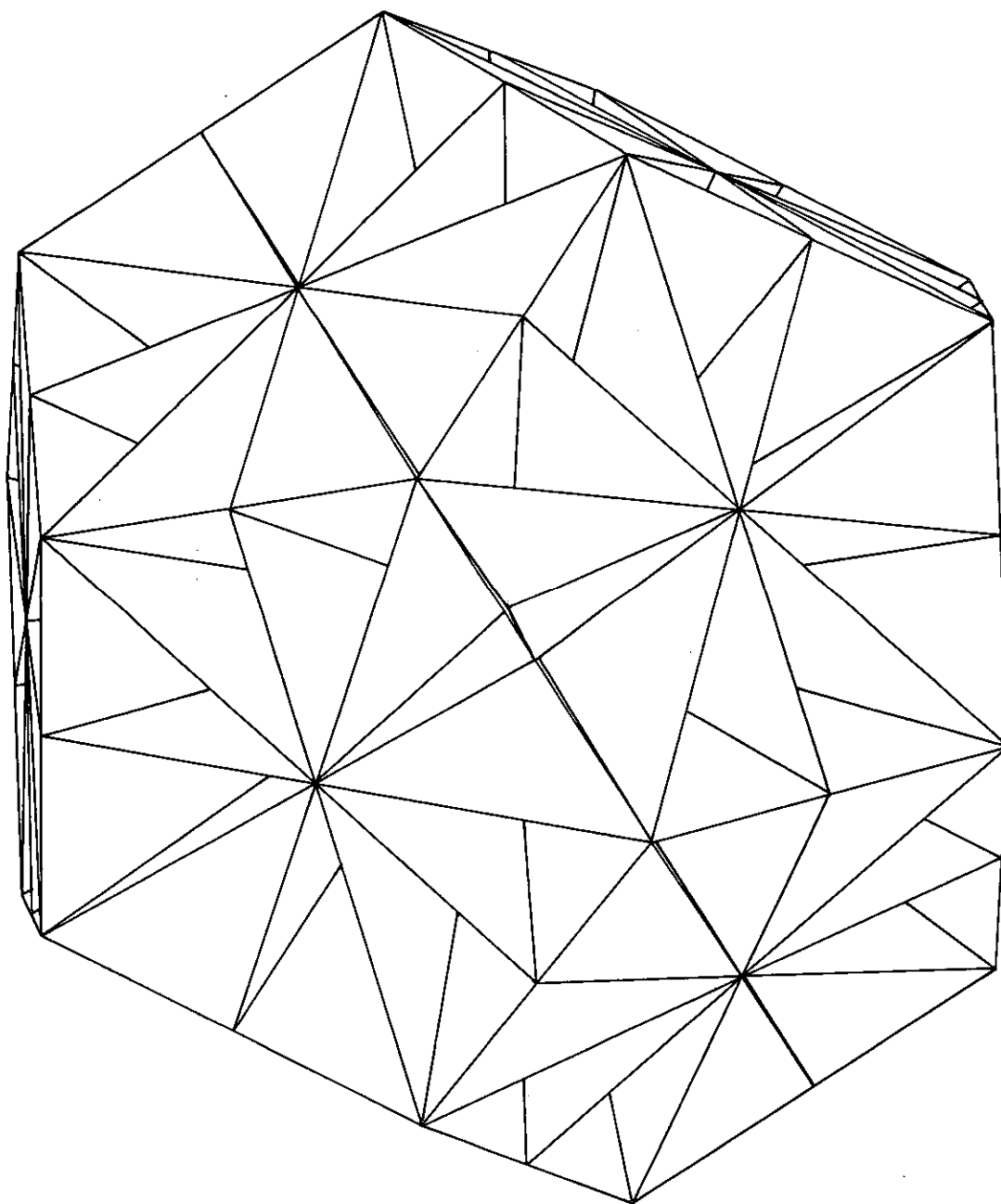


FIG 8.3.3. PLANOS DE SIMETRIA

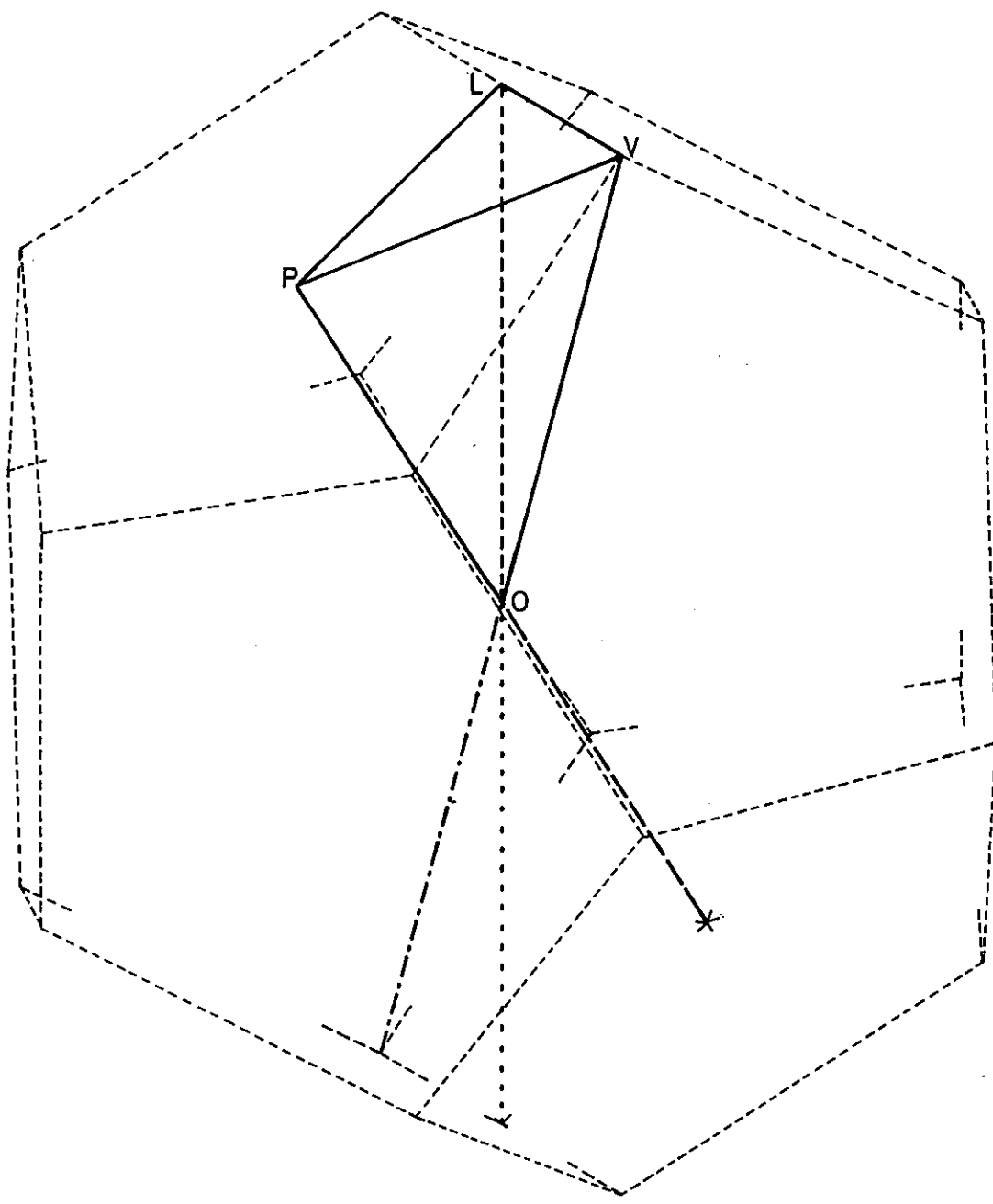


FIG 8.3.4. MODULO ELEMENTAL DEL DODECAEDRO

8.3.1. POLIEDROS DERIVADOS DEL DODECAEDRO Y DEL ICOSAEDRO

En las figuras siguientes se han representado los módulos de estos poliedros, a saber: dodecaedro truncado (figura 8.3.5.), icosidodecaedro (figura 8.3.6.), icosaedro truncado (figura 8.3.7.) y, por último, el poliedro dual, icosaedro (figura 8.3.8.) con vértices coincidentes con los centros de las caras del dodecaedro.

Como ocurría con el cubo y el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro se relacionan mediante una inversión con centro en O , siendo inversos los puntos P' y V , L' y L , y coincidiendo en P centros de caras del dodecaedro y vértices del icosaedro. De este modo, la esfera autoinversora es la circunscrita a este último e inscrita en el dodecaedro, verificándose:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OL} \cdot \overline{OL'} = \overline{OV} \cdot \overline{OP'}$$

siendo semejantes los triángulos que constituyen las caras \overline{OPL} y $\overline{OL'P}$, \overline{OPV} y $\overline{OP'P}$, \overline{OLV} y $\overline{OP'L}$ (pero no \overline{PLV} y $\overline{PL'P'}$).

Los planos de las caras de un poliedro tienen como figura inversa la esfera circunscrita al módulo del otro.

Si el icosaedro estuviese circunscrito al dodecaedro, la esfera autoinversora estaría inscrita en el primero y circunscrita al segundo.

Si las aristas de ambos se cortasen en L , estando los dos inscritos en un mismo rombotriacontaedro, la esfera autoinversora, inscrita en este último, sería esfera de las aristas de los dos poliedros duales.

En la figura 8.3.9. se han representado inscritos sucesivamente en el dodecaedro los restantes poliedros mencionados aquí, junto con sus módulos elementales.

8.3.2. ROMBIICOSIDODECAEDROS

La figura 8.3.10. muestra los RID mayor y menor inscritos en el dodecaedro, junto con sus módulos, y en las dos siguientes (8.3.11. y 8.3.12.) se han representado estos módulos por separado.

La figura 8.3.13.a, b los muestra inscritos en el romboedro del sistema.

8.3.3. RESUMEN

En la figura 8.3.14.a aparecen los módulos de los poliedros intersección de dodecaedros e icosaedros como intersecciones de módulos (duales) de los mismos.

Por último, en 8.3.14.b los módulos de los rombicuboctaedros se presentan como intersección de dichos módulos y del módulo del rombotriacontaedro.

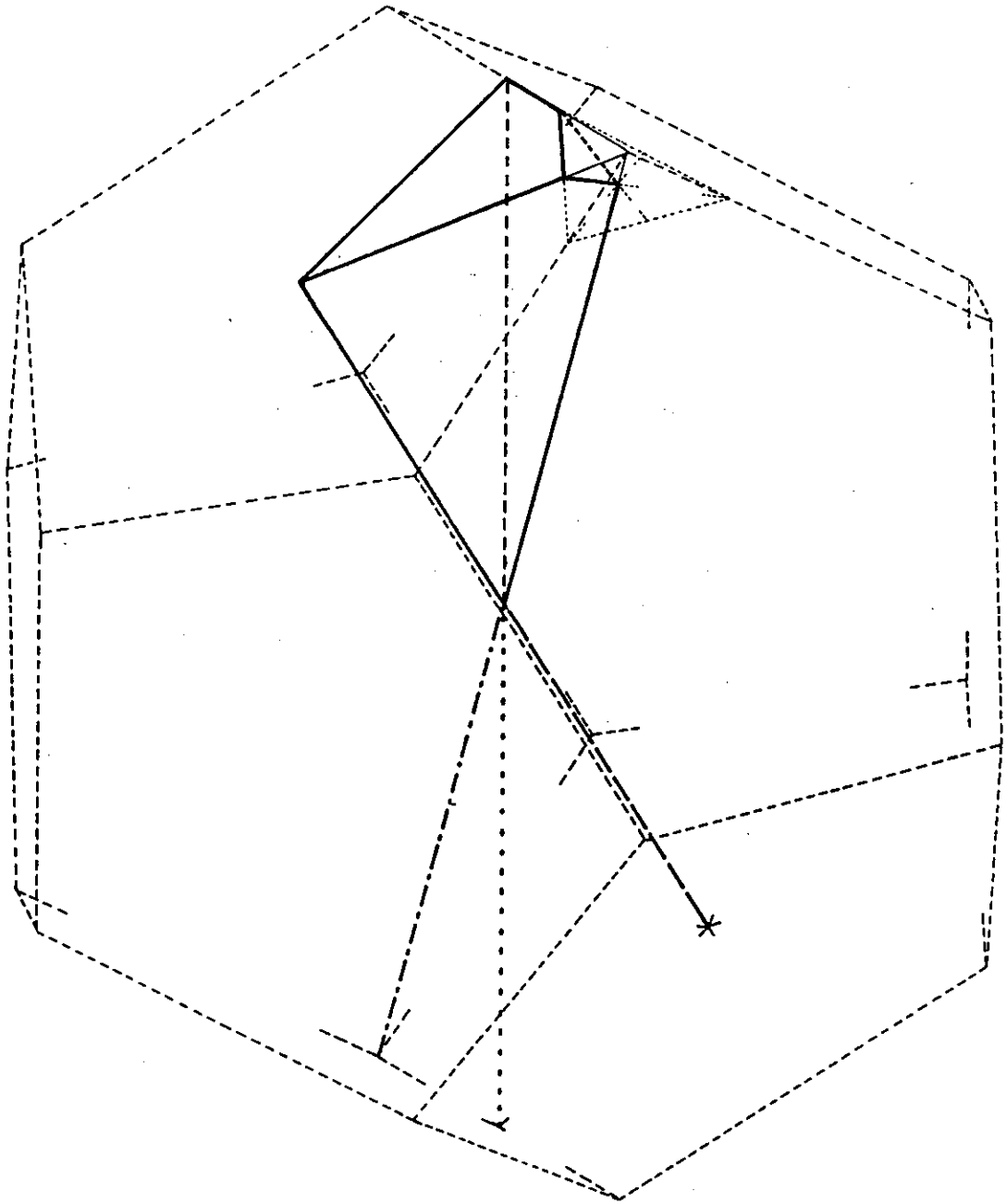


FIG 8.3.5. MODULO DEL DODECAEDRO TRUNCADO

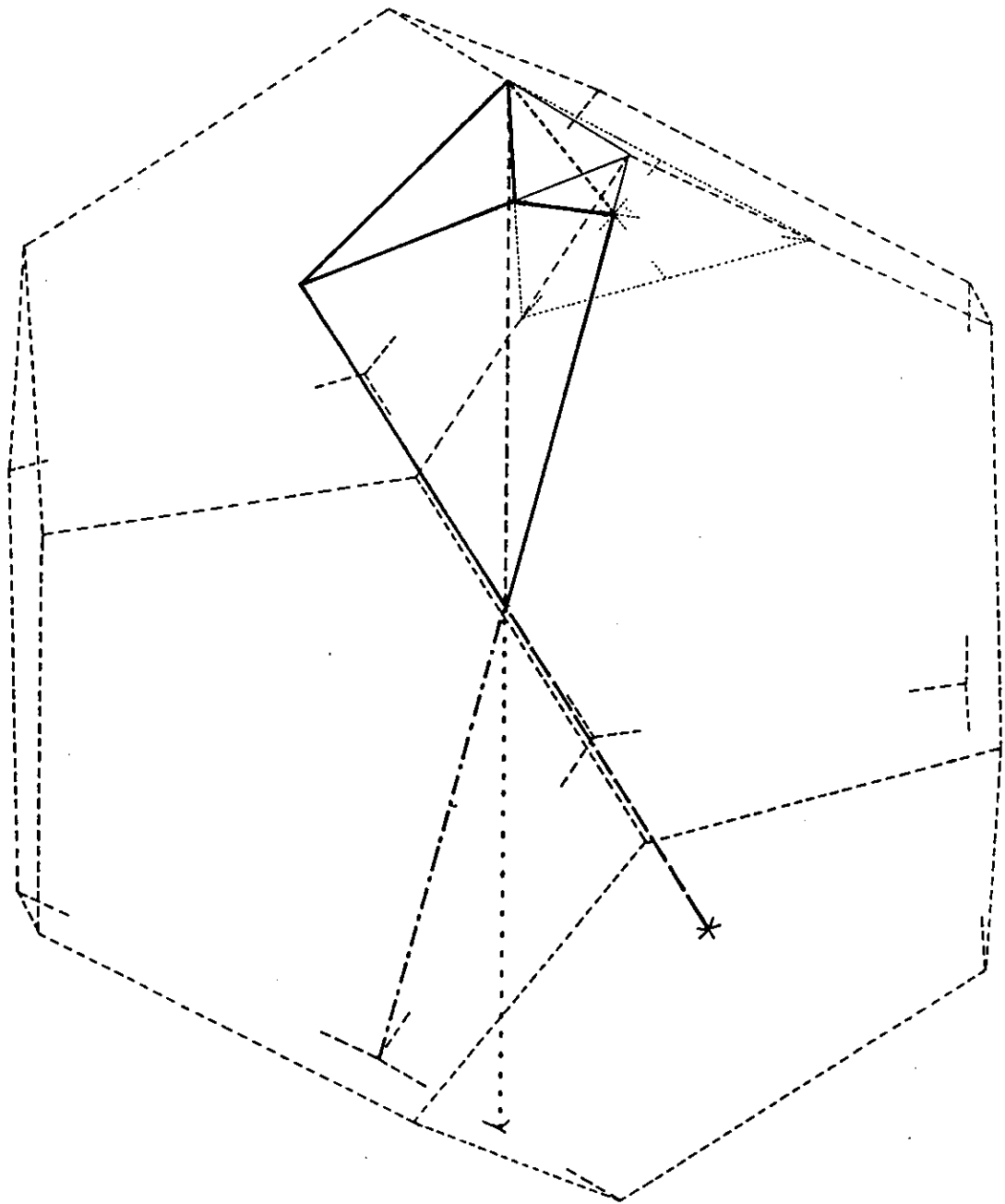


FIG 8.3.6. MODULO DEL ICOSIDODECAEDRO

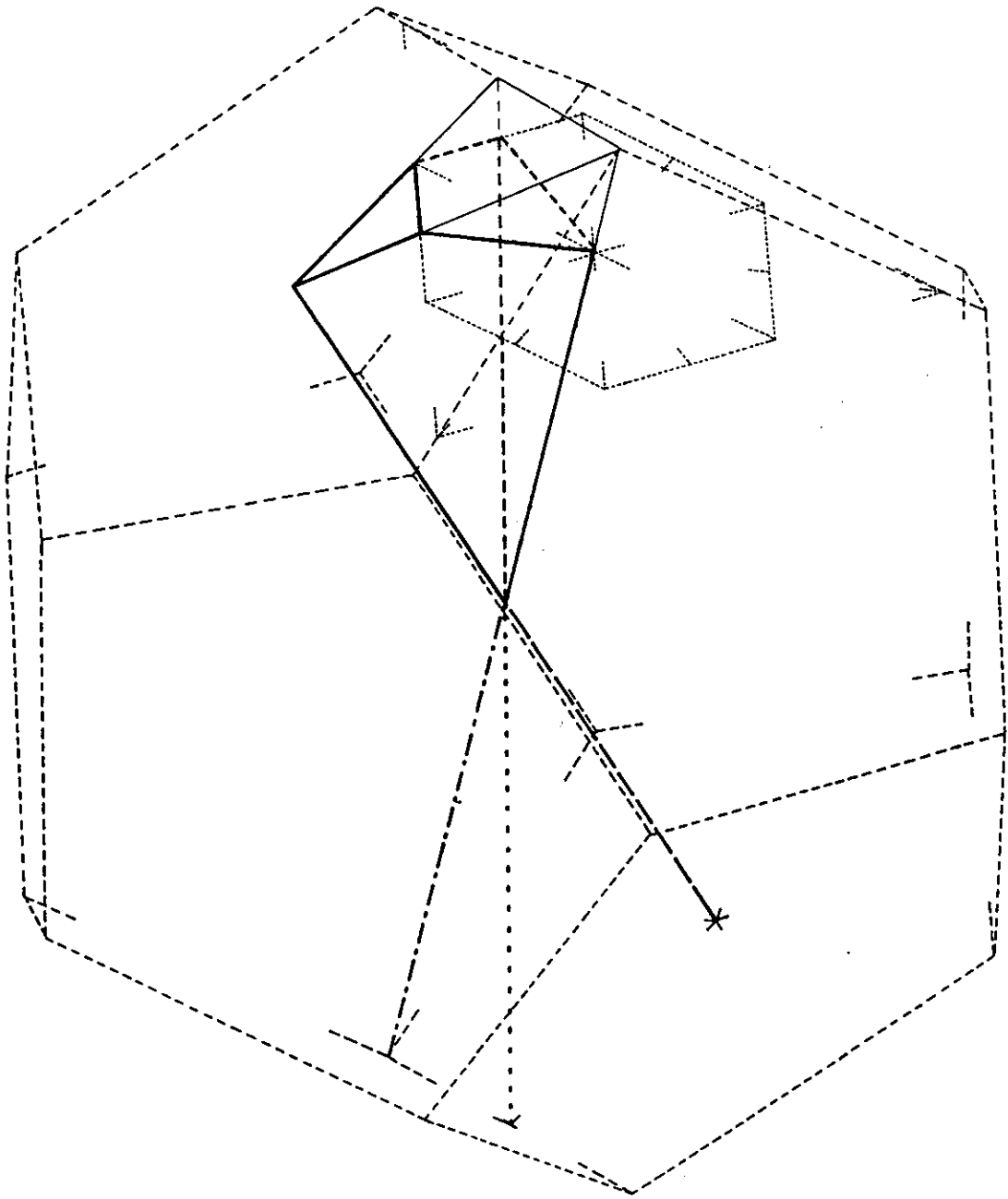


FIG 8.3.7. MODULO DEL ICOSAEDRO TRUNCADO

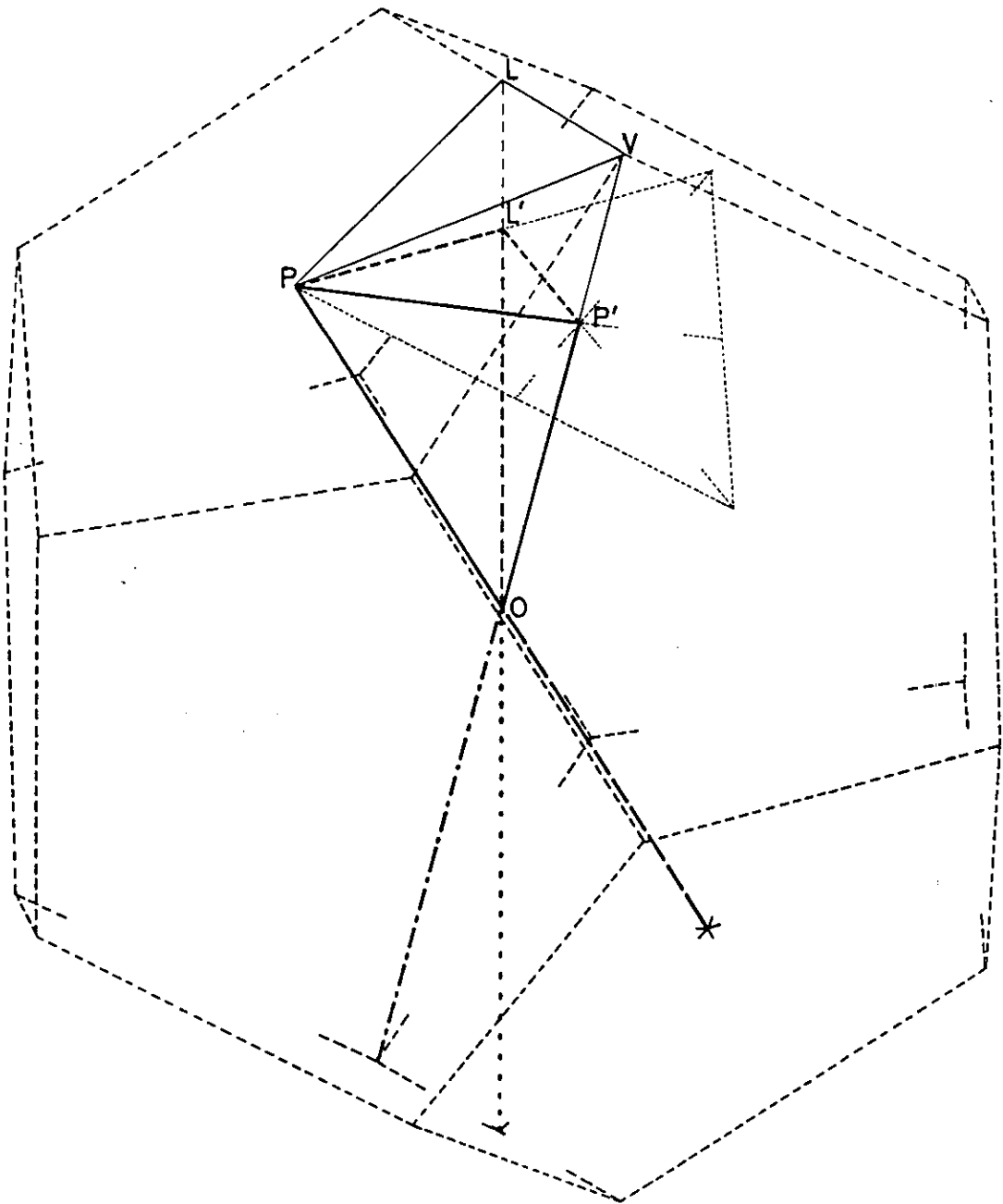


FIG 8.3.8. MODULO DEL ICOSAEDRO

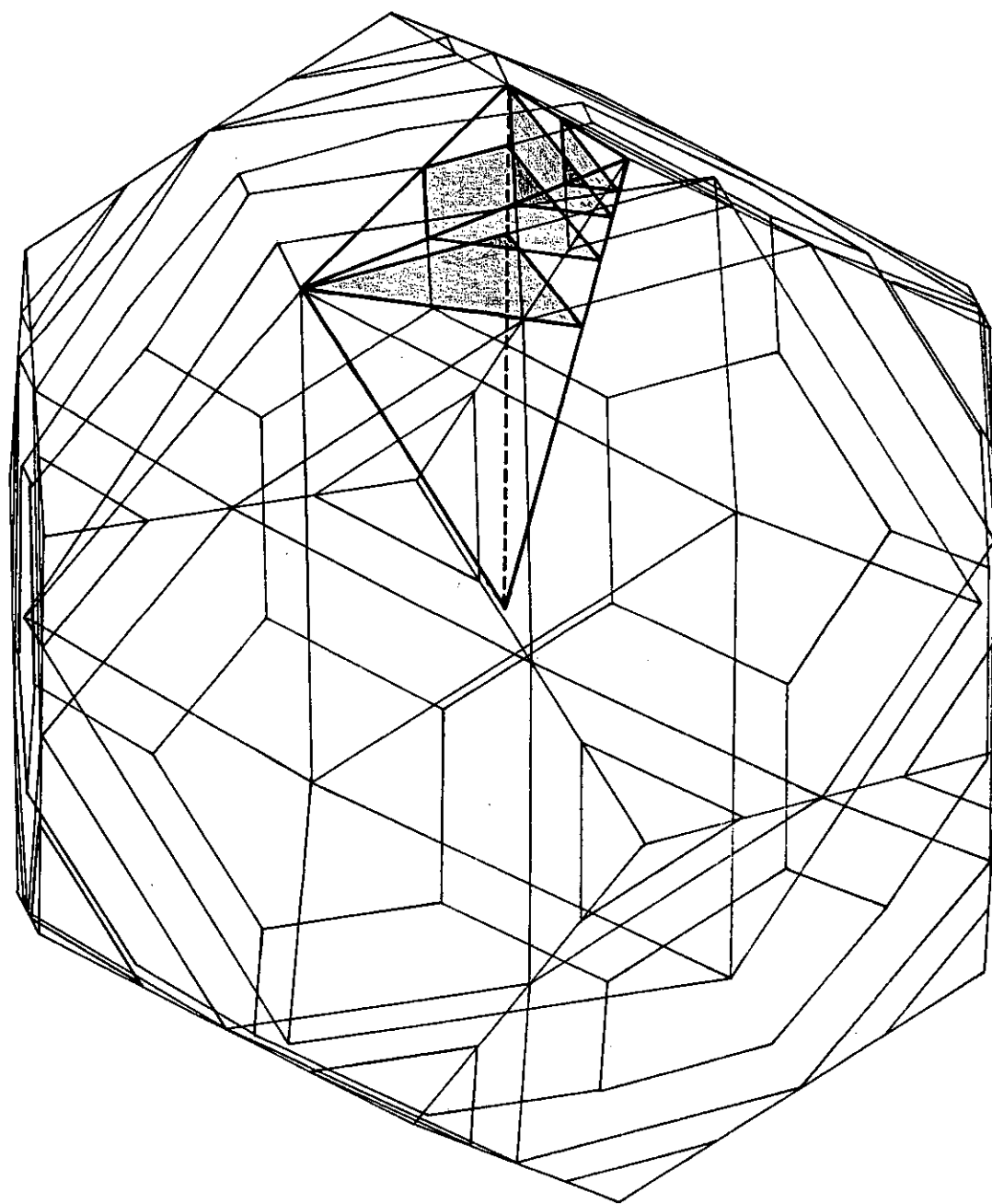


FIG 8.3.9. POLIEDROS OBTENIDOS POR INTERSECCION DE DODECAEDROS E ICOSAEDROS, Y SUS MODULOS

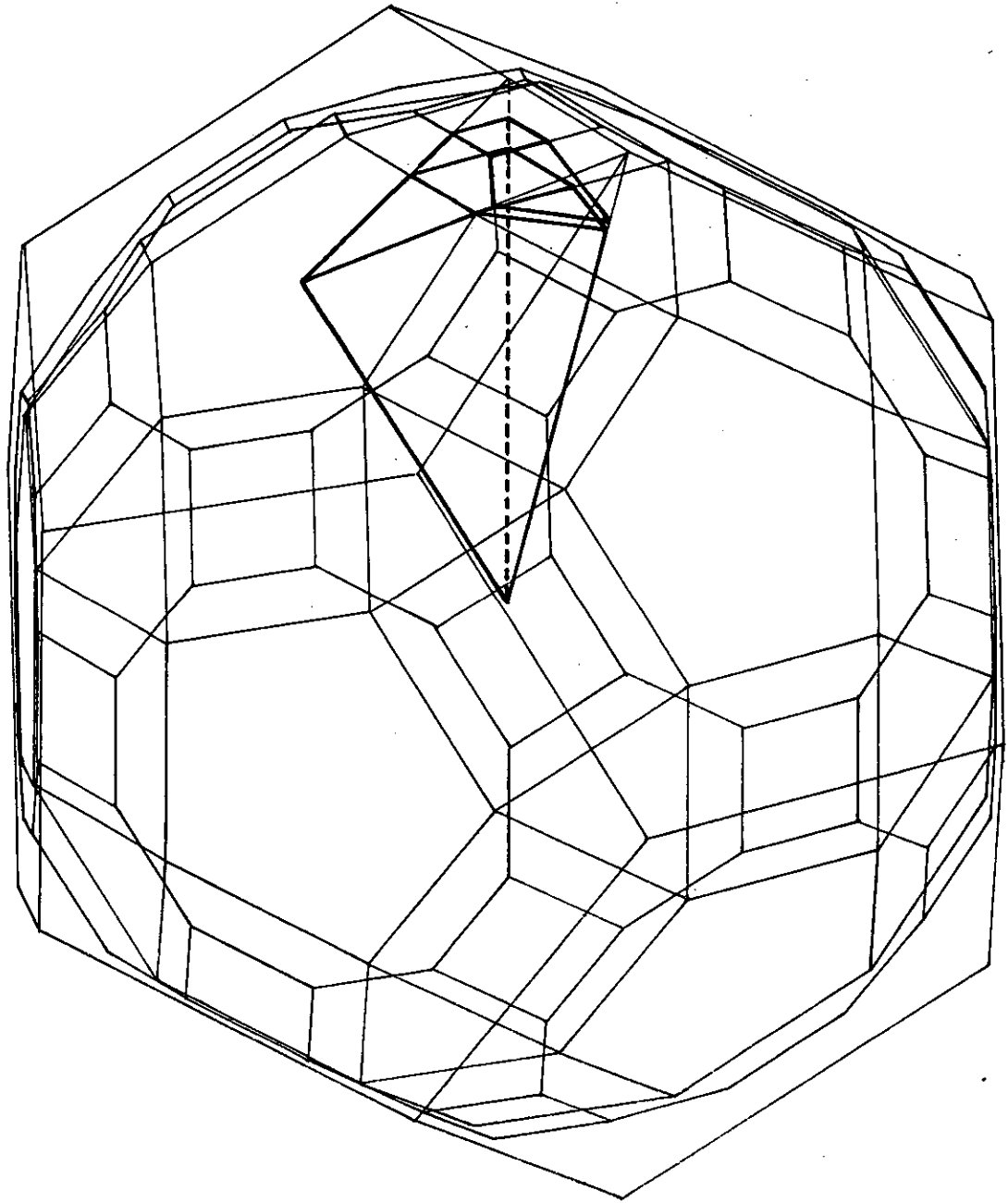


FIG 8.3.10. ROMBIICOSIDODECAEDROS INSCRITOS EN EL DODECAEDRO

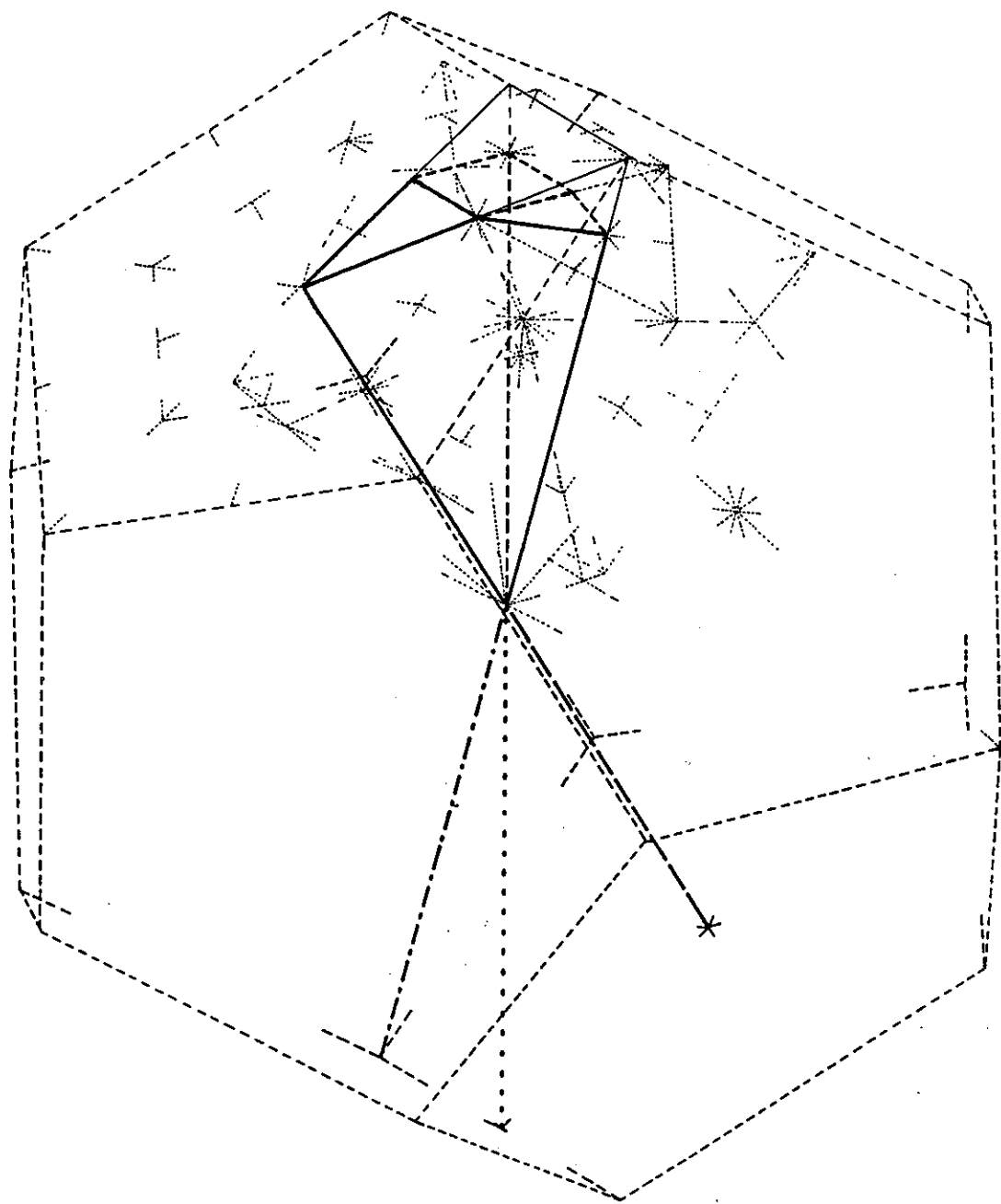


FIG 8.3.11. MODULO DEL ROMBIICOSIDODECAEDRO

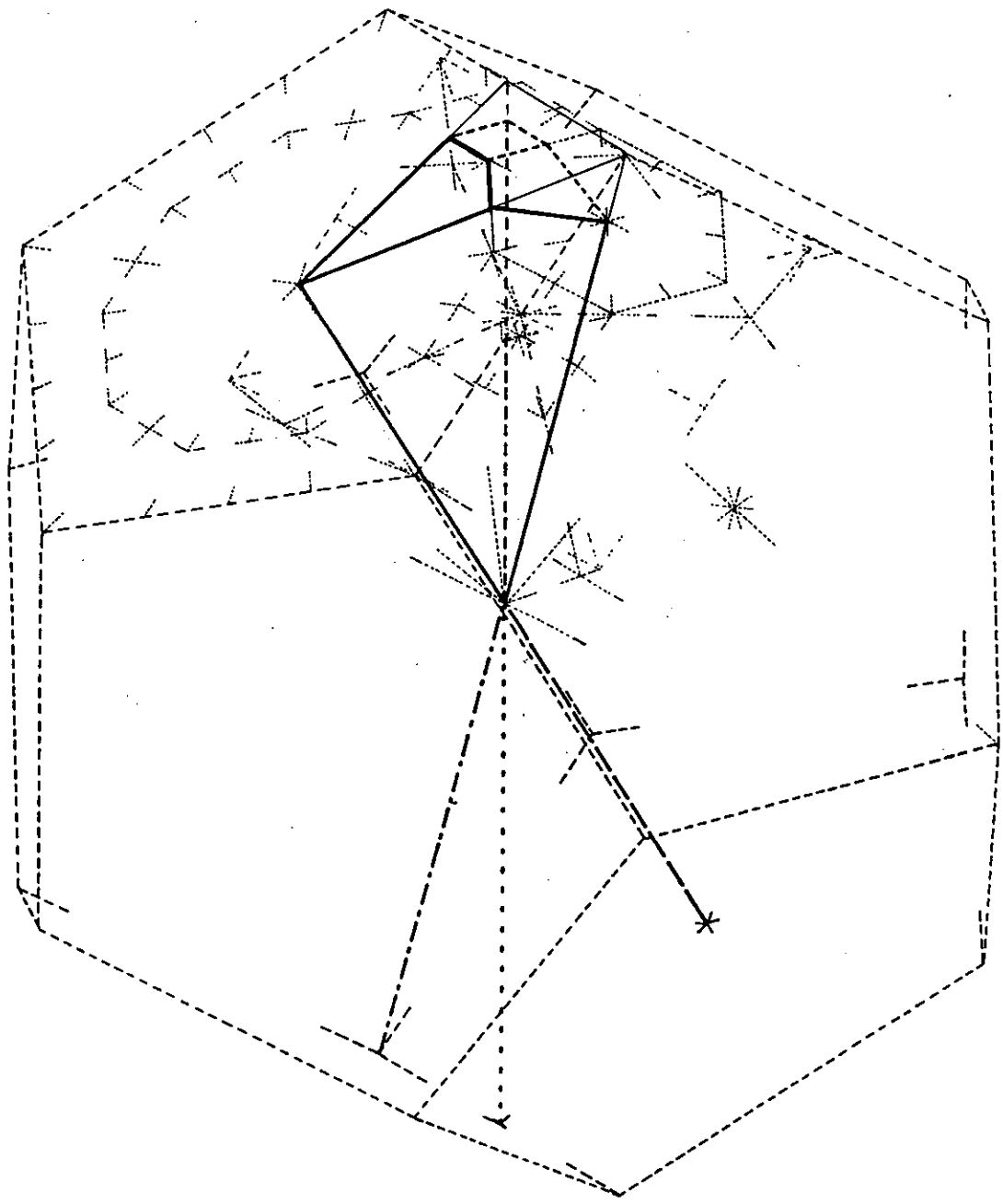


FIG 8. 3.12. MODULO DEL GRAN ROMBIICOSIDODECAEDRO

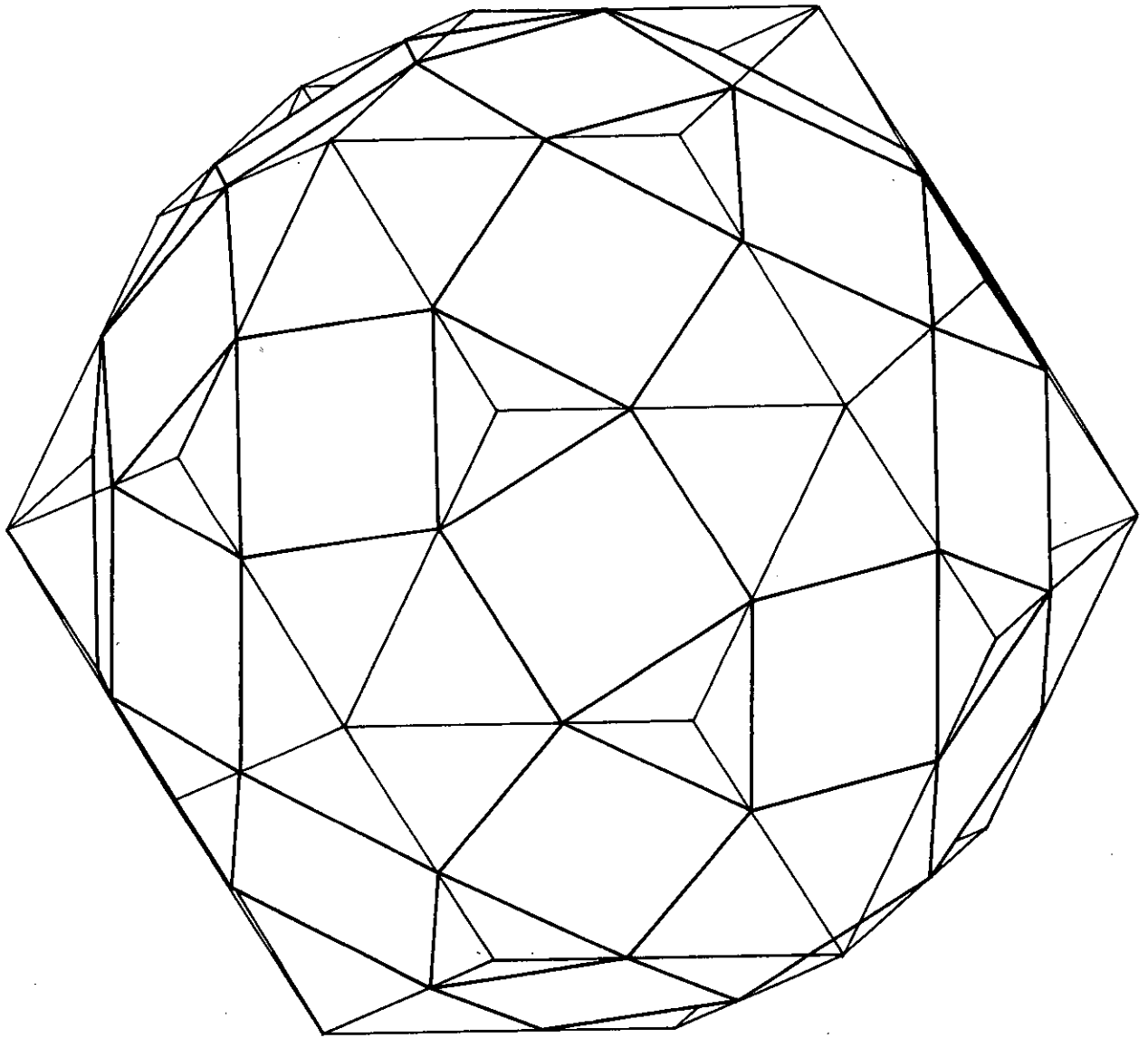


FIG 8.3.13.α EL ROMBIICOSIDODECAEDRO INSCRITO
EN EL ROMBOTRIACONTAEDRO

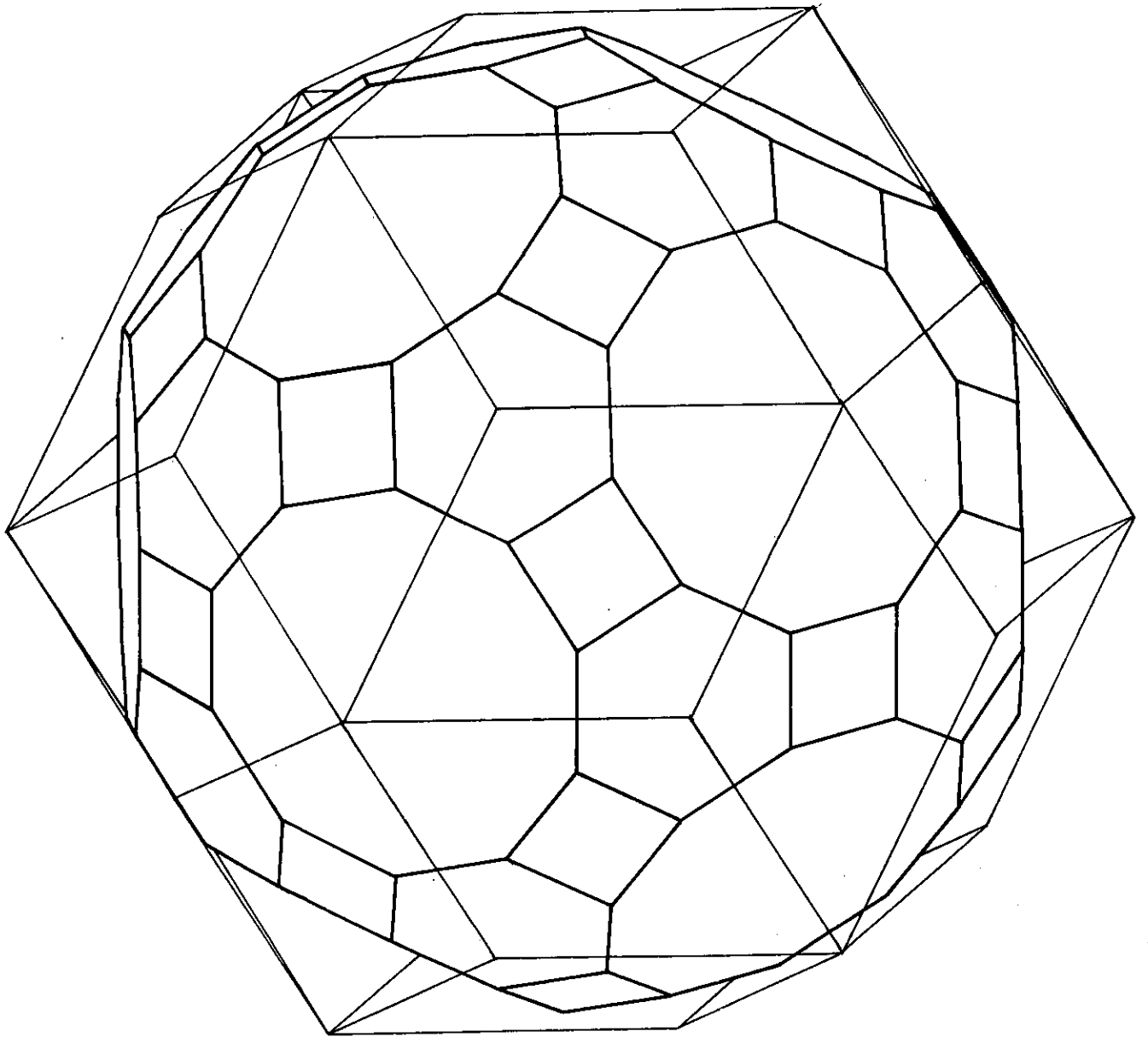


FIG 8. 3.13. b EL GRAN ROMBIICOSIDODECAEDRO
INSCRITO EN EL ROMBOTRIACONTAEDRO

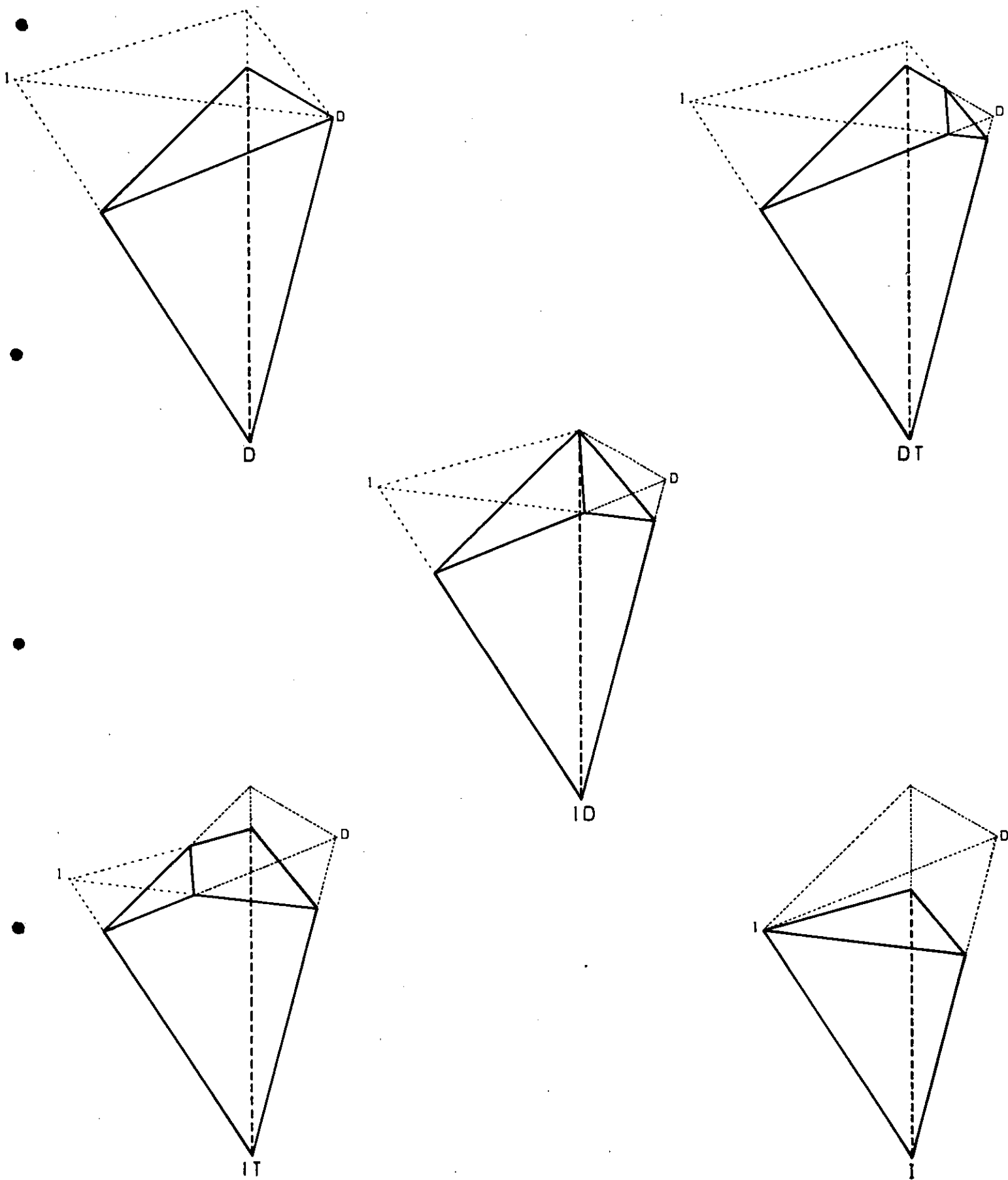


FIG 8. 3.14.a MODULOS OBTENIDOS COMO INTERSECCION DE LOS MODULOS DEL DODECAEDRO Y EL ICOSAEDRO DUALES

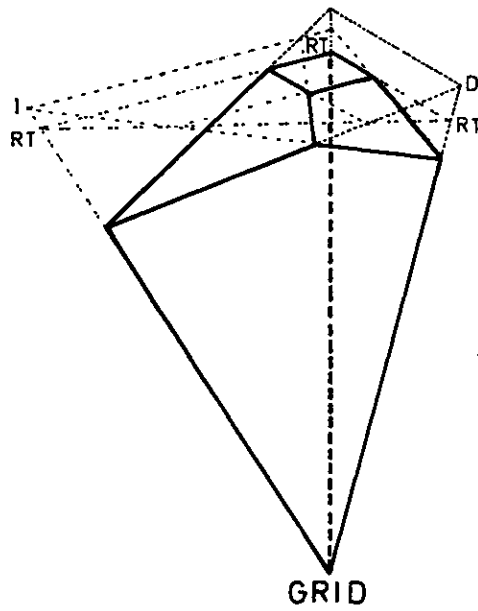
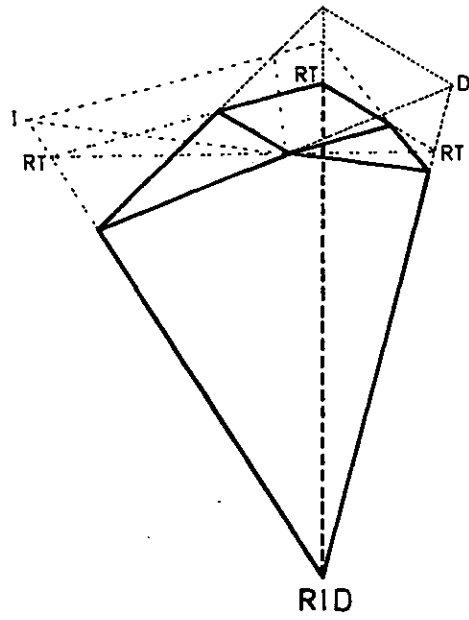


FIG 8.3.14.b MODULOS OBTENIDOS COMO INTERSECCION DE LOS DEL DODECAEDRO, EL ICOSAEDRO Y EL ROMBOTRIACONTAEDRO

9. DIVISION PENTAGONAL DEL PLANO

Volviendo de nuevo sobre el cuadro que inicia el capítulo 6, referido a los sistemas de simetría isótopos, encontramos en él ejes de simetría normales a la superficie (centros en ella) binarios, ternarios y cuaternarios (los más frecuentes, por este orden), y quinarios y senarios, que se dan en un solo sistema cada uno. Los ejes quinarios son exclusivos del sistema del do decaedro, permitiendo la compartimentación superficial de la esfera, pero están ausentes de cualquier compartimentación del plano. De hecho, son los únicos que no aparecen en las compartimentaciones isótopas del plano. La razón, ya indicada en otro lugar, es que, de los cuatro primeros polígonos regulares, el pentágono es el único cuyo ángulo en el vértice (108°) no es submúltiplo de 360° , por lo que no existe un poliedro plano regular constituido por pentágonos, como los hay constituidos por triángulos, cuadrados y exágonos.

El único poliedro regular formado por pentágonos es el dodecaedro $(5)_3$, con un defecto plano de 36° ; si lo representamos en desarrollo, como figuraba en el capítulo 1, lo vemos claramente. Pero si admitimos la superposición de polígonos en un poliedro, podremos colocar un cuarto pentágono compartiendo con los tres anteriores el vértice V_0 (véase la figura 9.1.1); el poliedro tendría un defecto plano de $36^\circ - 108^\circ = -72^\circ$ ("exceso plano" de 72°). Podemos seguir añadiendo pentágonos alrededor de V_0 , hasta un total de 10. En este momento el ángulo total abarcado por el poliedro es de $108^\circ \cdot 10 = 1080^\circ = 360^\circ \cdot 3$; como 10 y 3 son primos entre sí, este ángulo es el mínimo común múltiplo de 108° y 360° . Diez pentágonos suponen tres vueltas alrededor de V_0 ; por analogía con los polígonos estrellados, podríamos llamar a este poliedro plano "decaedro pentagonal regular de tercera especie".

La adición de nuevos pentágonos a partir del décimo se superpone a la figura sin modificarla, de modo que a partir del vértice V_0 hemos obtenido una corona de vértices contiguos que forman con él todos los ángulos múltiplos de $360^\circ/10 = 36^\circ$.

Si a partir de cada uno de estos vértices repetimos la operación, como se ve en la figura 9.1.2., se obtiene una superposición de pentágonos en la que la mayor parte de los nuevos vértices no coinciden con los previos, apareciendo alrededor de V_0 nuevas coronas de vértices relacionados con los primeros por homotecias de razón $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Evidentemente, la reiteración del proceso densificaría la red pentagonal indefinidamente, a diferencia de las redes obtenidas con triángulos, cuadrados y exágonos. En la figura aparecen pentágonos de lados relacionados con los iniciales por factores $\phi^{-2} = 2-\phi$,

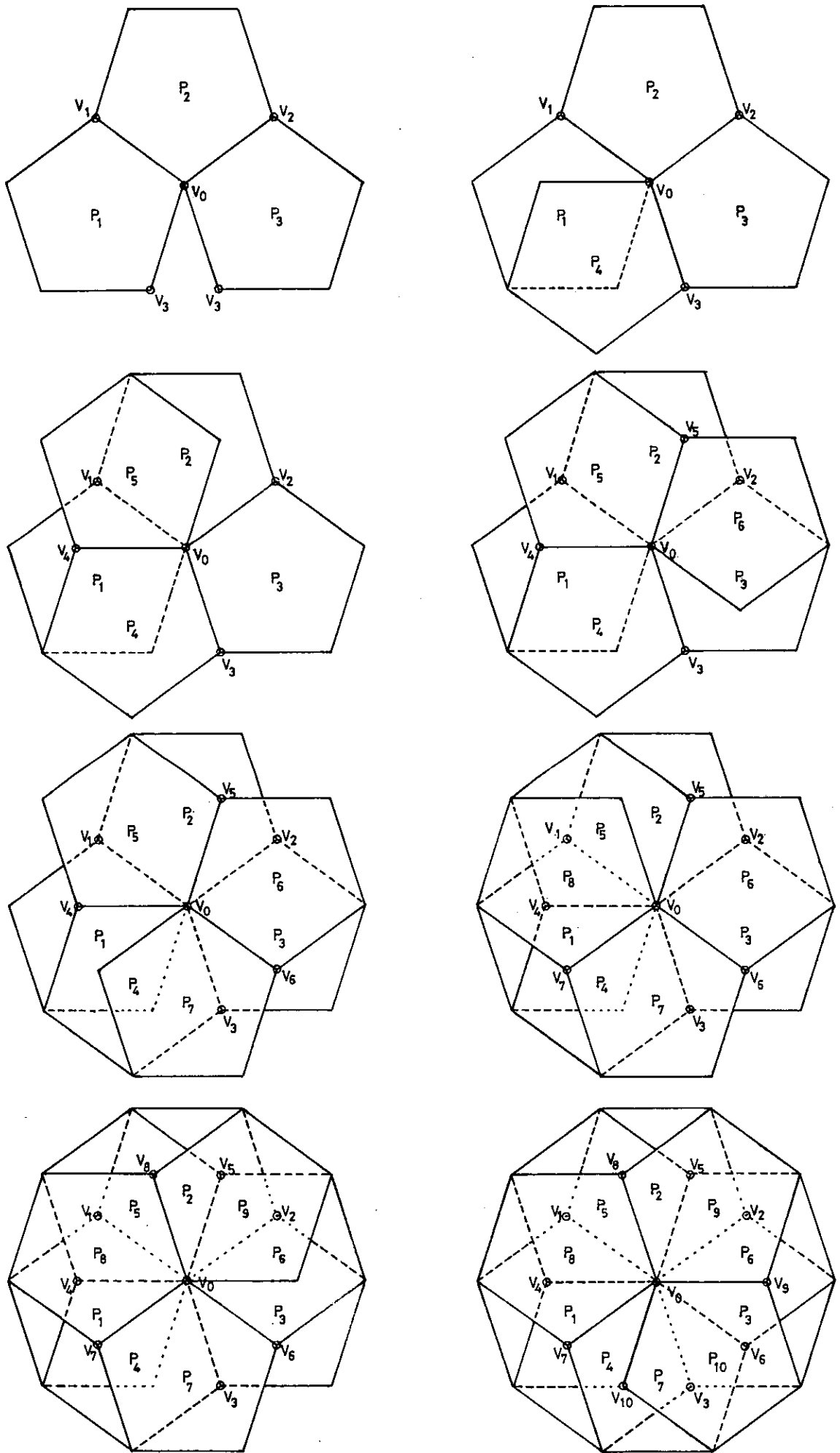


FIG 9.1.1. DECAEDRO PENTAGONAL DE TERCERA ESPECIE

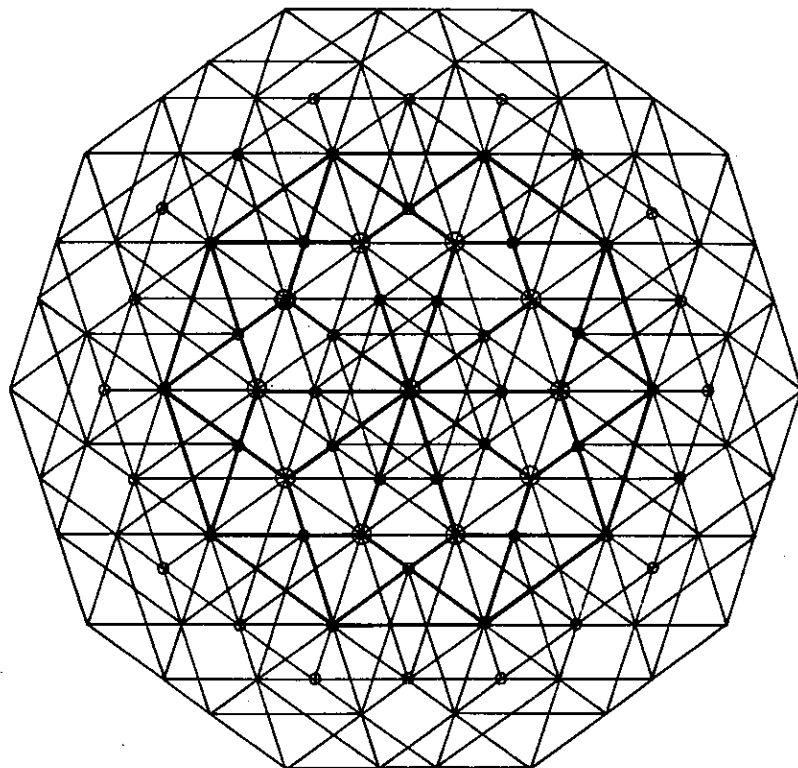
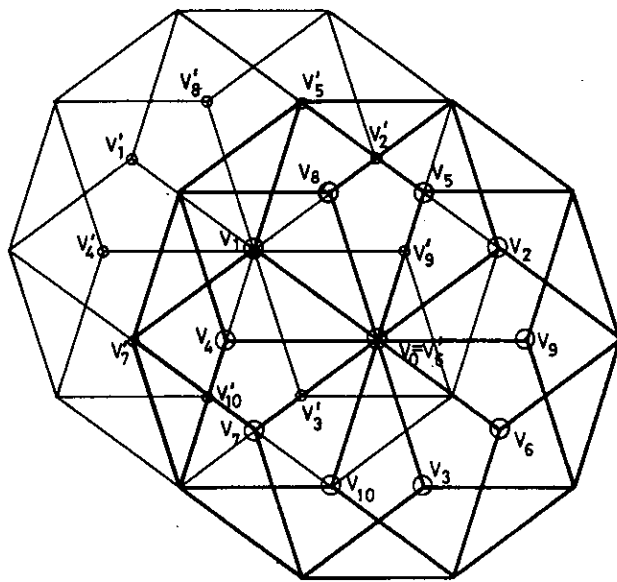


FIG 9.1.2, RED PLANA DERIVADA DEL PENTAGONO

$\phi^{-1} = \phi - 1$, $\phi^0 = 1$, $\phi^1 = \phi$, $\phi^2 = 1 + \phi$, etc.; esto es: la red (infinita) contendría pentágonos de lados dados por las potencias enteras de ϕ .

Obsérvese que las potencias enteras de ϕ se obtienen también como binomios de la forma $f + g\phi$, con f y g términos consecutivos de la serie de Fibonacci. En efecto: siendo $\phi^2 = 1 + \phi$, cada término de la serie de potencias equivale a la suma de los dos anteriores:

$$\phi^{n+1} = \phi^{n-1} \cdot \phi^2 = \phi^{n-1}(1 + \phi) = \phi^{n-1} + \phi^{n-1} \cdot \phi = \phi^{n-1} + \phi^n$$

Considerando la serie de Fibonacci (ampliada con enteros negativos)... -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... se tiene:

$$\begin{aligned} \phi^{-7} &= -21 + 13\phi = \frac{1}{2}(-29 + 13\sqrt{5}) = \frac{13\sqrt{5}-29}{2} = 0,0344418535 \\ \phi^{-6} &= 13 - 8\phi = \frac{1}{2}(18 - 8\sqrt{5}) = 9 - 4\sqrt{5} = 0,0557280901 \\ \phi^{-5} &= -8 + 5\phi = \frac{1}{2}(-11 + 5\sqrt{5}) = \frac{5\sqrt{5}-11}{2} = 0,0901699435 \\ \phi^{-4} &= 5 - 3\phi = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = 0,1458980338 \\ \phi^{-3} &= -3 + 2\phi = \frac{1}{2}(-4 + 2\sqrt{5}) = \sqrt{5}-2 = 0,2360679774 \\ \phi^{-2} &= 2 - \phi = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819660113 \\ \phi^{-1} &= -1 + \phi = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887 \\ \phi^0 &= 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = 1 \\ \phi^1 &= \phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \\ \phi^2 &= 1 + \phi = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,6180339887 \\ \phi^3 &= 1 + 2\phi = \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5} = 4,2360679774 \\ \phi^4 &= 2 + 3\phi = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}) = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 6,8541019662 \\ \phi^5 &= 3 + 5\phi = \frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5}) = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} = 11,0901699435 \\ \phi^6 &= 5 + 8\phi = \frac{1}{2}(18 + 8\sqrt{5}) = 9 + 4\sqrt{5} = 17,9442719099 \\ \phi^7 &= 8 + 13\phi = \frac{1}{2}(29 + 13\sqrt{5}) = \frac{29+13\sqrt{5}}{2} = 29,0344418535 \end{aligned}$$

Pero si bien en cualquier área finita de la red el número de vértices es infinito, y aparecen infinitos pentágonos de infinitos tamaños, las aristas de todos ellos están orientadas exclusivamente en diez direcciones, que forman entre sí ángulos múltiplos de 36° .

Aunque en esta red existen pentágonos mayores y menores, hay que tener en cuenta que aparecen por superposición; si consideramos exclusivamente como aristas a las que relacionan vértices consecutivos, como por ejemplo $\overline{V_0V_1}$, $\overline{V_1V'_j}$, y reiterando el proceso $\overline{V'_jV''_k}$, etc, todas las aristas de la red tienen tamaño unidad.

Dadas dos aristas $\overline{V_0V'_i}$, $\overline{V_0V'_j}$ concurrentes en un mismo vértice V_0 , ya hemos dicho que pueden formar ángulos múltiplos de 36° . Como dos aristas forman

dos ángulos que suman 360° , consideraremos solamente el menor de ellos. Si en los vértices V'_i, V'_j consideramos las aristas paralelas respectivamente a $\overline{V_0V'_j}$ y $\overline{V_0V'_i}$, ambas concurrirán en un mismo vértice V''_k , formando el rombo $\overline{V_0V'_iV''_kV'_j}$. Si el ángulo $\overline{V'_iV_0V'_j}$ fuese de 0° ó de 180° , no se formaría rombo; excluyamos, pues, estos ángulos y tendremos únicamente ángulos de 36° y dobles, triples y cuádruples. Estos rombos se ajustan, como los pentágonos, a la red; sus aristas y vértices pertenecen a ella (figura 9.1.3.). Como los ángulos de un rombo suman cuatro rectos y son dos pares de ángulos iguales, es evidente que dos no iguales suman dos rectos. Siendo los ángulos posibles $a = 36^\circ, b = 72^\circ, c = 108^\circ, d = 144^\circ$, son suplementarios a y d , y también b y c ; en conclusión, los cuatro ángulos que forman las aristas de la red pertenecen solamente a dos clases de rombos. Se les conoce como rombos de Penrose.

Si dos rombos de igual o distinta clase comparten una arista, en cada vértice ocupan conjuntamente un ángulo múltiplo de 36° , que como mínimo será de 72° y como máximo de 288° , dejando sin ocupar el resto hasta 360° (máximo de 288° y mínimo de 72°), lo que puede permitir llenar el espacio vacante con nuevos rombos de cualquiera de las dos clases. De este modo en cada nuevo vértice pueden colocarse más rombos hasta llenar totalmente el plano, de modo parecido a como lo hacían los polígonos de 3, 4, 6, 8 y 12 lados de los mosaicos regulares y semirregulares o las combinaciones que podían hacerse entre algunos de ellos. Puede verse un ejemplo en la misma figura 9.1.3.

9.1. ROMBOS DE PENROSE

Los vemos en la figura 9.2., en la que se especifican sus proporciones.

El rombo de la parte superior de la figura tiene como ángulos $b = 2a$ y $c = 3a$, con lo que la suma de sus ángulos es $2b + 2c = 10a = 360^\circ$; podemos llamarlo rombo de clase b , por el menor de sus ángulos.

El rombo de la parte inferior, que llamaremos de clase a , tiene por ángulos a y $d = 4a$, verificándose también $2a + 2d = 10a = 360^\circ$.

Conservando el criterio seguido en los polígonos regulares, hemos tomado como unidad de medida la semiarista $l = 1$, con lo que la arista del rombo mide 2.

En función de ella se han obtenido las dimensiones de las diagonales de los dos rombos, así como sus áreas.

Para el rombo de clase b , sus semidiagonales son:

$$D_b = 2 \cos 36^\circ = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339887$$

$$D_c = 2 \sin 36^\circ = 3-\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,175570505$$

Verificándose:

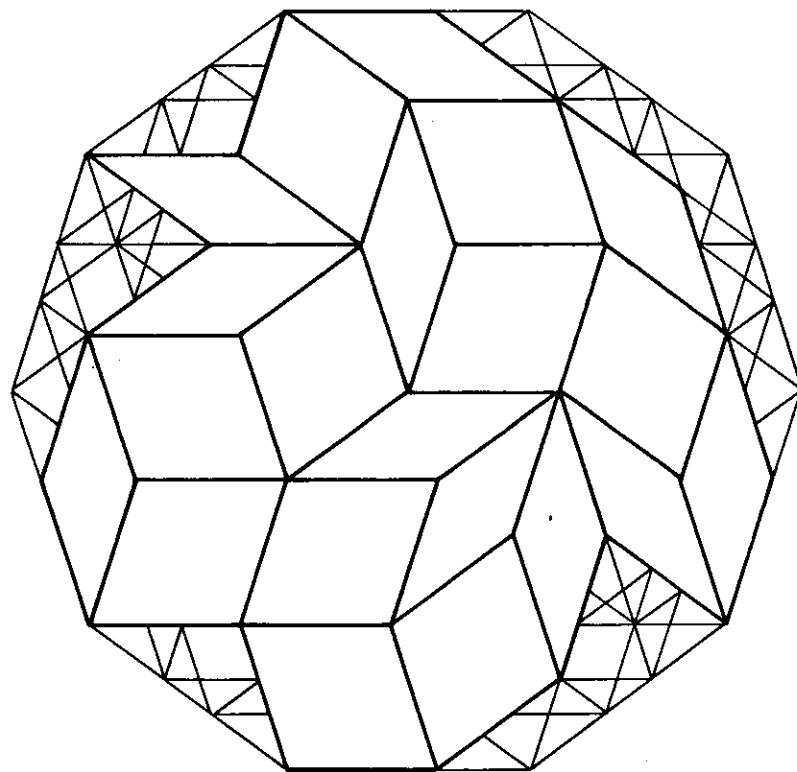
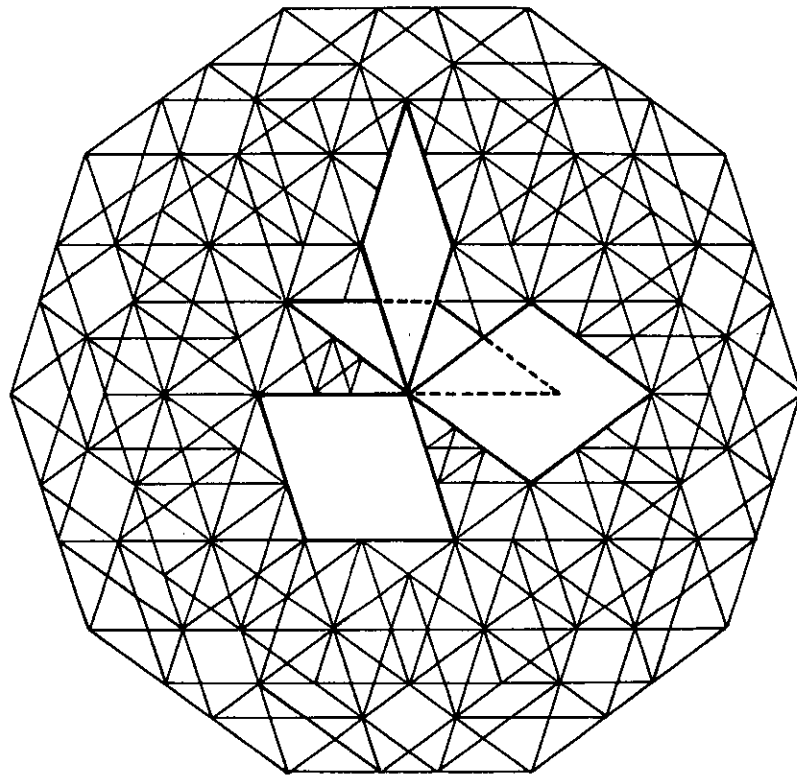


FIG 9.1.3. ROMBOS DE LA RED PENTAGONAL

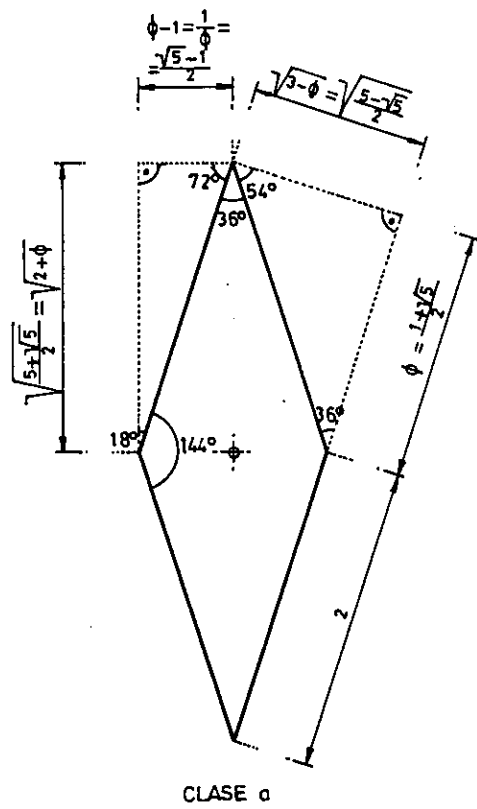
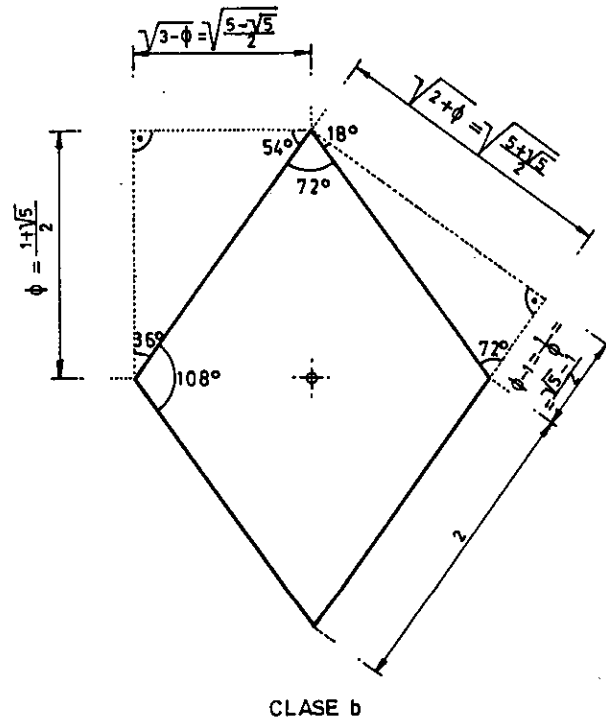


FIG 9.2. LAS DOS CLASES DE ROMBOS DE PENROSE

$$D_b^2 + D_c^2 = \phi^2 + 3 - \phi = 1 + \phi + 3 - \phi = 4 = 2^2$$

El triángulo rectángulo de lados D_b , D_c , 2, cuarta parte del rombo, es también la décima parte del pentágono de radio 2, módulo elemental de ambos polígonos.

El área del módulo es :

$$M_b = \phi\sqrt{3-\phi} = \sqrt{3\phi^2 - \phi^3} = \sqrt{3(1+\phi) - (1+2\phi)} = \sqrt{2+\phi} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1,902113033$$

El área del rombo:

$$R_b = 4M_b = 4\phi\sqrt{3-\phi} = 4\sqrt{2+\phi} = \sqrt{40+8\sqrt{5}} = 7,60845213$$

La del pentágono asociado:

$$10M_b = 10\phi\sqrt{3-\phi} = 10\sqrt{2+\phi} = \sqrt{250 + 50\sqrt{5}} = 19,02113033$$

La proporción entre las diagonales es:

$$\frac{D_c}{D_b} = \frac{\sqrt{3-\phi}}{\phi} = \sqrt{3\phi^{-2} - \phi^{-1}} = \sqrt{3(2-\phi) - (\phi-1)} = \sqrt{7-4\phi} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = 0,726542528$$

En cuanto al rombo de la clase a, son sus semidiagonales:

$$D_a = 2 \cos 18^\circ = \sqrt{2+\phi} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1,902113033$$

$$D_d = 2 \sin 18^\circ = \frac{1}{\phi} = \phi-1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887$$

Se verifica:

$$D_a^2 + D_d^2 = 2+\phi - \phi^{-2} = 2 + \phi + 2 - \phi = 4 = 2^2$$

El triángulo rectángulo de lados D_a , D_d , 2, cuarta parte del rombo, y vigésima parte del decágono regular de radio 2, es el módulo elemental de ambos; su área es:

$$M_a = \sqrt{2+\phi} \cdot \frac{1}{\phi} = \sqrt{2\phi^{-2} + \phi^{-1}} = \sqrt{2(2-\phi) + (\phi-1)} = \sqrt{3-\phi} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 1,175570505$$

La del rombo:

$$R_a = 4M_a = 4\sqrt{3-\phi} = \sqrt{40-8\sqrt{5}} = 4,702282018$$

y la del decágono:

$$20M_a = 20\sqrt{3-\phi} = \sqrt{1000-200\sqrt{5}} = 23,51141009$$

La proporción entre las diagonales es:

$$\frac{D_a}{D_d} = \frac{\sqrt{2+\phi}}{1/\phi} = \phi\sqrt{2+\phi} = \sqrt{2\phi^2 + \phi^3} = \sqrt{2(1+\phi) + (1+2\phi)} = \sqrt{3+4\phi} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3,077683537$$

Es interesante la relación entre las áreas de los dos rombos, así como con la del cuadrado del mismo lado (2):

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{M_b}{M_a} = \frac{\phi\sqrt{3-\phi}}{\sqrt{3-\phi}} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339887$$

$$\frac{R_b}{C} = \frac{4\phi\sqrt{3-\phi}}{4} = \phi\sqrt{3-\phi} = \sqrt{2+\phi} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1,902113033$$

$$\frac{R_a}{C} = \frac{4\sqrt{3-\phi}}{4} = \sqrt{3-\phi} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 1,175570505$$

Los rombos de Penrose pueden obtenerse del cuadrado (y uno del otro) mediante una transformación afín oblicua cuyo eje sería la arista común. También pueden obtenerse mediante una transformación afín ortogonal del cuadrado, siendo el eje de afinidad una diagonal del rombo coincidente con la del cuadrado, y la razón de afinidad la proporción entre las diagonales del primero.

Obsérvese que los módulos de los rombos de Penrose contienen en sus vértices todos los ángulos múltiplos de 18° hasta el ángulo recto: 18° , 36° , 54° , 72° , 90° .

9.2. MOSAICOS DE PENROSE

En las figuras 9.3. vemos varias posibilidades de extensión de mosaicos utilizando ambas clases de rombos. En 9.3.1. se comienza colocando rombos a alrededor de P_0 ; entre ellos se encajan rombos b y luego otra corona de rombos b en posición c, para terminar con otra de rombos a en posición d, que completan un decágono regular de lado $4l$. Este decágono mayor aparece como unión de diez decágonos de lado $2l$ que comparten el vértice P_0 . Tanto el decágono mayor como los menores se componen del mismo número de rombos de cada clase, por lo que la participación de ambas en su superficie está en proporción con la relación entre sus áreas: los rombos de clase a ocupan un área ϕ veces mayor que los de clase b, mientras el área total es, en relación con la ocupada por los rombos a, $\frac{1+\phi}{\phi} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi$, nuevamente.

Pero esta relación entre áreas no es en absoluto obligada: en la figura 9.3.2. vemos un mosaico constituido únicamente por rombos de clase a, que puede extenderse indefinidamente, mientras que en 9.3.3. el mosaico llena el plano utilizando solamente rombos de clase b.

En estas dos últimas figuras puede verse que las diagonales menores de los rombos que rodean el vértice inicial P_0 delimitan respectivamente el decágono y el pentágono regulares de radio $2l$.

Podemos ya enunciar la característica esencial de estos mosaicos derivados del pentágono. De modo semejante a los mosaicos semirregulares, permiten la ocupación del plano con sólo dos piezas de aristas iguales, o con dos pares de módulos enantiomorfos que son triángulos rectángulos. Pero mientras aquellos mosaicos semirregulares formaban redes uniformes, con simetrías perfectamente establecidas y con un solo tipo de vértice, estos mosaicos de Penrose son esencialmente aleatorios y asimétricos, y sus vértices son muy diferentes unos de otros.

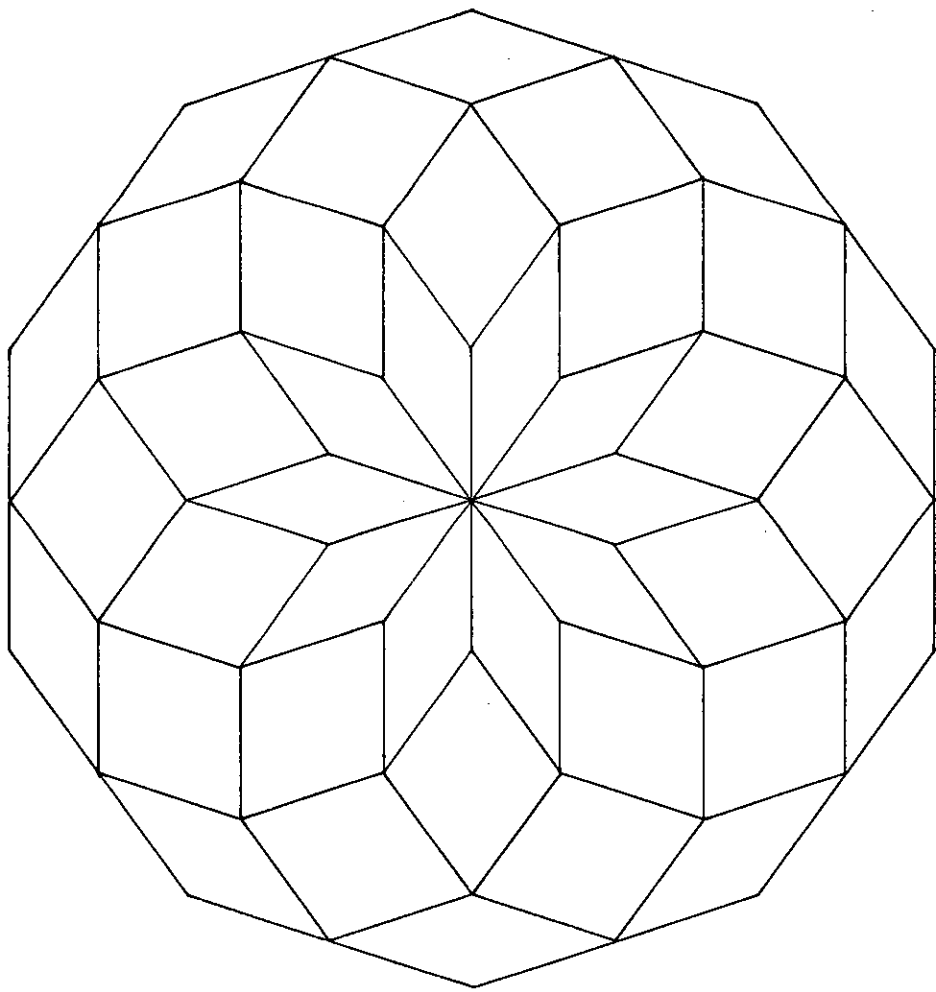


FIG 9.3.1. MOSAICO CON ROMBOS a Y b

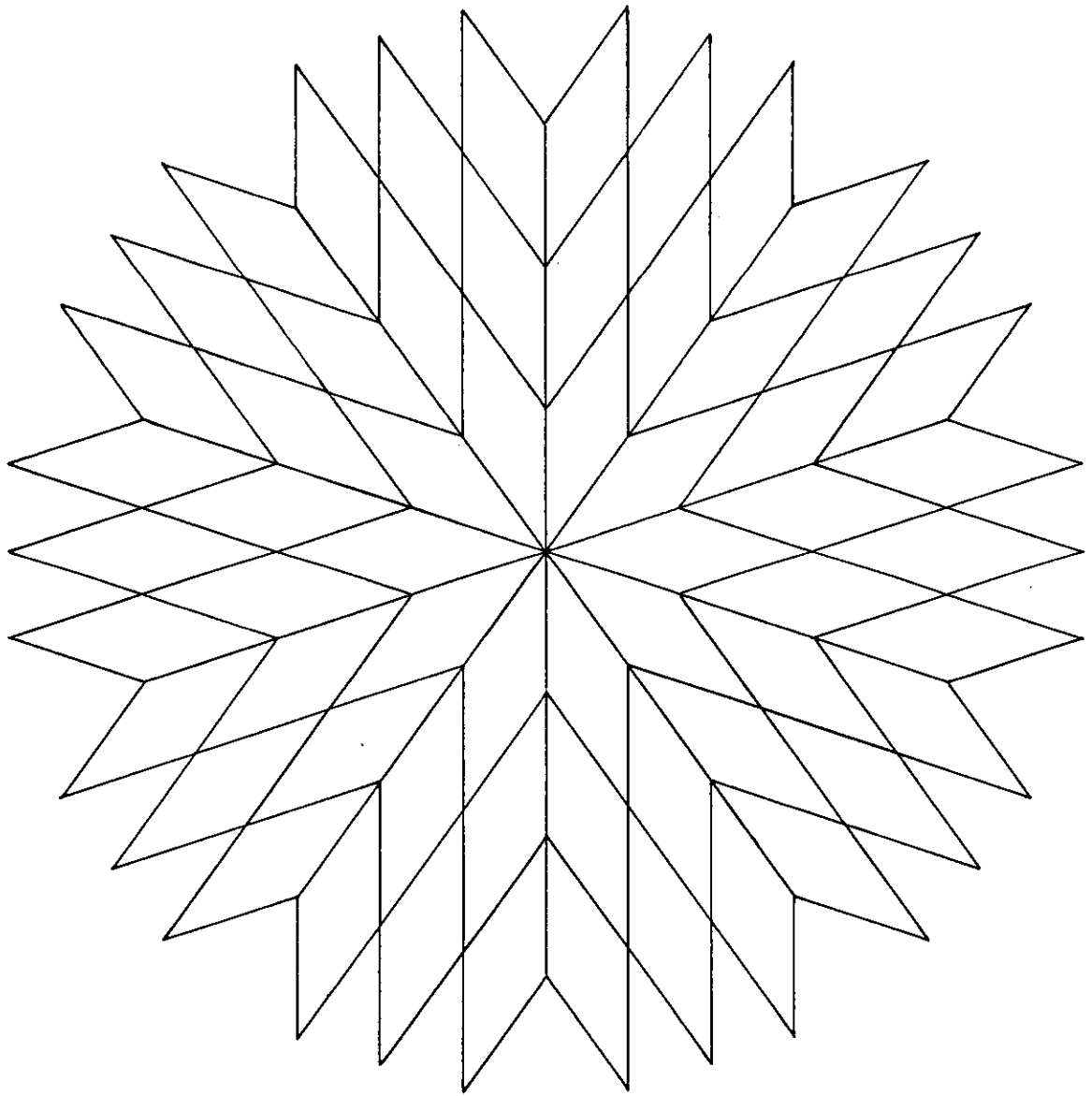


FIG 9.3.2. MOSAICO CON ROMBOS α

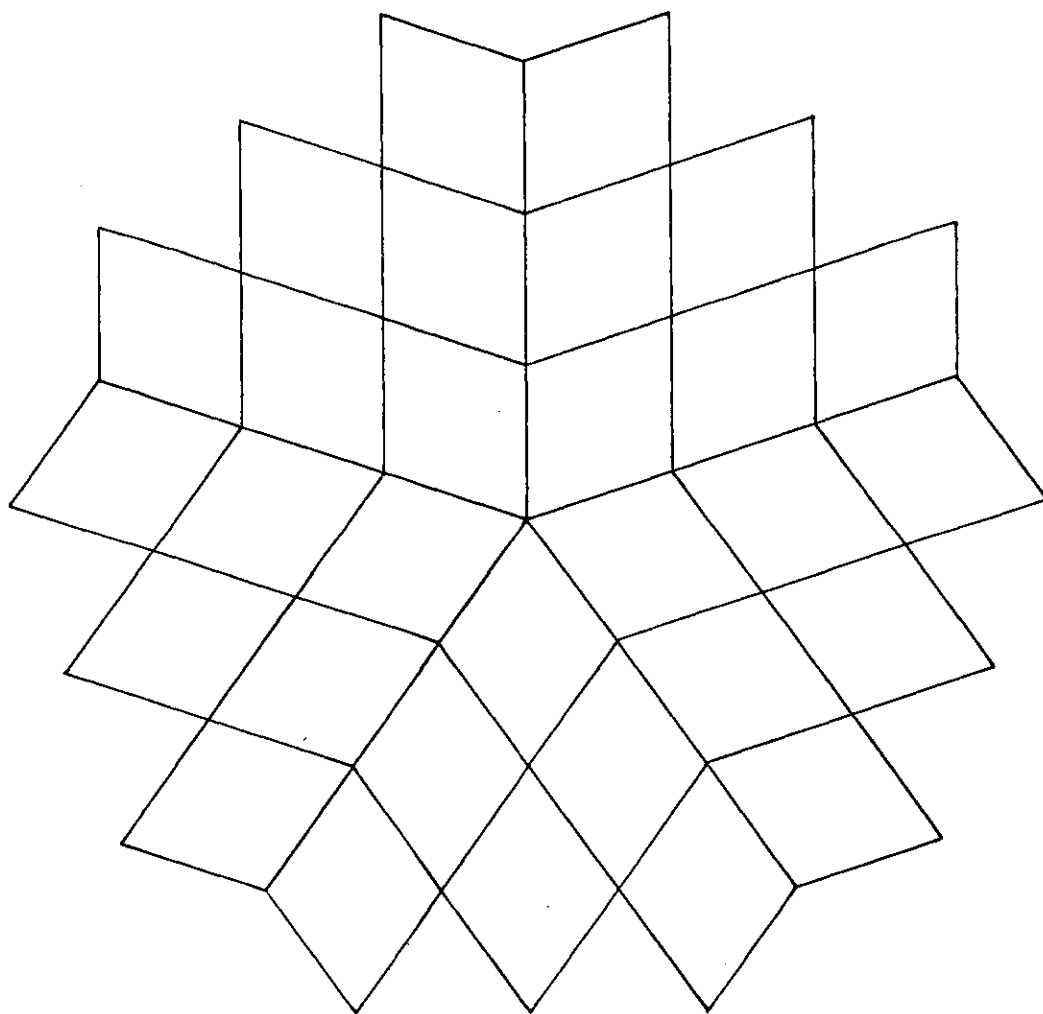


FIG 9.3.3. MOSAICO CON ROMBOS b

9.3 CLASES DE VERTICES DEL MOSAICO

Exponemos a continuación los vértices diferentes que se pueden formar con los dos rombos, cada uno de los cuales tiene a su vez dos posiciones en el vértice. Denominaremos a las cuatro posibilidades de colocación a, b, c, d, como los correspondientes ángulos, y denominaremos al vértice con los ángulos que sucesivamente lo rodean.

Los distintos ángulos poliedros planos resultantes pueden tener ejes y centros de simetría en número variable, que señalaremos en cada caso.

Con uno o dos tipos de ángulo:

Tipo	Clase	Vértice	Ejes	Centro	
[a, b]	10a	(a) ₁₀	10	decenario	
	8a+b	(a,a,a,a,a,a,a,b)	1		
	6a+2b	I (a,a,a,a,a,b,b)	1	binario	
		II (a,a,a,a,b,a,b)	1		
		III (a,a,a,b,a,a,b)	1		
		IV (a,a,a,b,a,a,a,b)	2		
	4a+3b	I (a,a,a,a,b,b,b)	I en II (a,a,a,b,a,b,b) III (a,a,a,b,b,a,b)	1	
		IV (a,a,b,a,a,b,b)		1	
V (a,a,b,a,b,a,b)		1			
2a+4b		I (a,a,b,b,b,b)	1	binario	
		II (a,b,a,b,b,b)	1		
	III (a,b,b,a,b,b)	2			
5b	(b) ₅	5	quinario		
[a, c]	7a+c	(a,a,a,a,a,a,c)	1		
	4a+2c	I (a,a,a,a,c,c)	1	binario	
		II (a,a,a,c,a,c)	1		
		III (a,a,c,a,a,c)	2		
a+3c	(a,c,c,c)	1			
[a, d]	6a+d	(a,a,a,a,a,d)	1		
	2a+2d	I (a,a,d,d)	1	binario	
II (a,d,a,d)		2			
[b, c]	2b+2c	I (b,b,c,c)	1	binario	
		II (b,c,b,c)	2		

Tipo	Clase	Vértice	Ejes	Centro
[b, d]	3b+d	(b,b,b,d)	1	
	b+2d	(b,d,d)	1	
[c, d]	2c+d	(c,c,d)	1	

Con tres tipos de ángulo:

[a, b, c]	5a+b+c	I (a,a,a,a,a,b,c)} VI (a,a,a,a,a,c,b)} II (a,a,a,a,b,a,c)} V (a,a,a,a,c,a,b)} III (a,a,a,b,a,a,c)} IV (a,a,a,c,a,a,b)}	en en en	
	3a+2b+c	I (a,a,a,b,c,b) II (a,a,a,b,b,c)} III (a,a,a,c,b,b)} IV (a,a,b,b,a,c)} V (a,a,c,a,b,b)} VI (a,a,b,a,c,b)} VII (a,a,b,c,a,b)} VIII (a,a,b,a,b,c)} IX (a,a,c,b,a,b)} X (a,b,a,b,a,c)	1 en en en en en en	1 1
	a+3b+c	I (a,b,b,b,c)} II (a,c,b,b,b)} III (a,b,b,c,b)} IV (a,b,c,b,b)}	en en en	
	2a+b+2c	I (a,a,c,b,c) II (a,b,a,c,c) III (a,a,b,c,c)} IV (a,a,c,c,b)} V (a,b,c,a,c)} VI (a,c,a,c,b)}	en en en en	1 1
	[a, b, d]	4a+b+d	I (a,a,a,a,b,d)} II (a,a,a,a,d,b)} III (a,a,a,b,a,d)} IV (a,a,a,d,a,b)} V (a,a,b,a,a,d)	en en en
2a+2b+d		I (a,a,b,d,b) II (a,b,b,a,d) III (a,a,b,b,d)} IV (a,a,d,b,b)} V (a,b,a,b,d)} VI (a,b,a,d,b)}	en en en	1 1

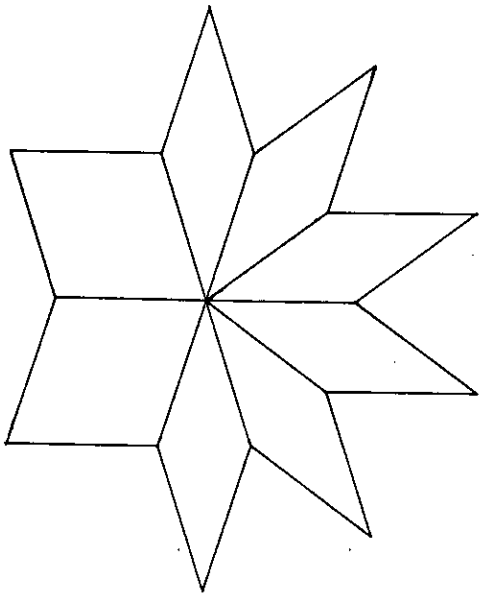
Tipo	Clase	Vértice	Ejes	Centro
[a, c, d]	3a+c+d	I (a,a,a,c,d)} II (a,a,a,d,c)} en III (a,a,c,a,d)} IV (a,a,d,a,c)} en		

Con cuatro tipos de ángulo:

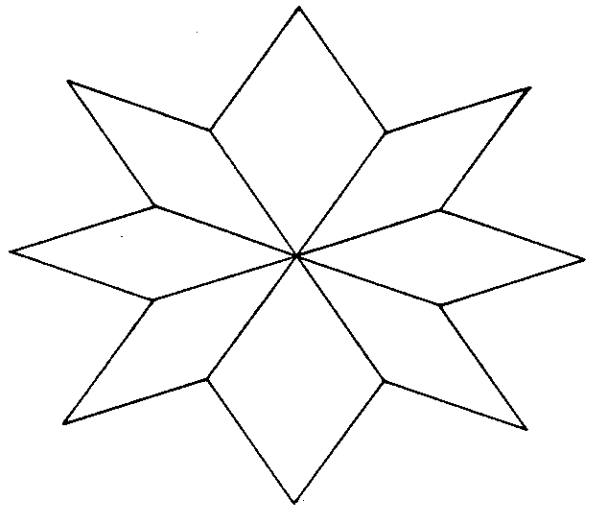
[a, b, c, d]	a+b+c+d	I (a,b,c,d)} II (a,d,c,b)} en III (a,b,d,c)} IV (a,c,d,b)} en V (a,c,b,d)} VI (a,d,b,c)} en		
--------------	---------	--	--	--

Existen en total 75 formas posibles, de las que 42 son asimétricas (21 pares de enantiomorfos) y 33 simétricas, de ellas 26 con un solo eje de simetría, 5 con dos ejes (y centro binario), una con cinco ejes (y centro quinario de simetría) y otra más con diez ejes (y centro decenario).

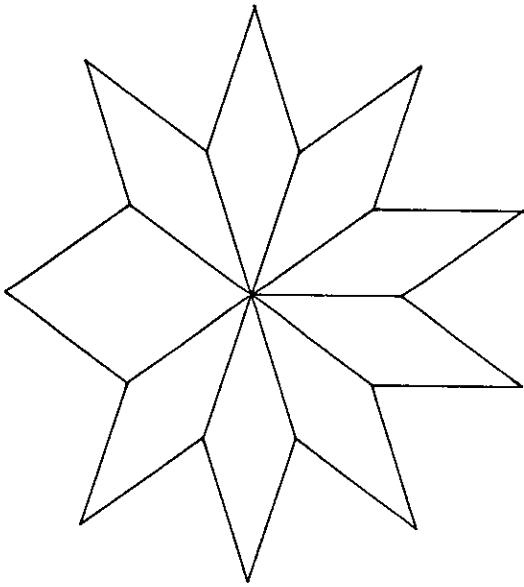
Finalizamos con la representación gráfica de estas formas poliédricas planas de Penrose; de los pares enantiomorfos dibujamos un solo elemento, con lo que su número se reduce a 54.



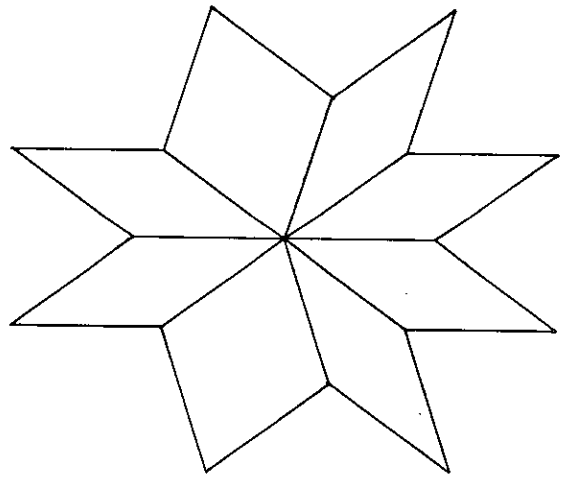
6a+2b I



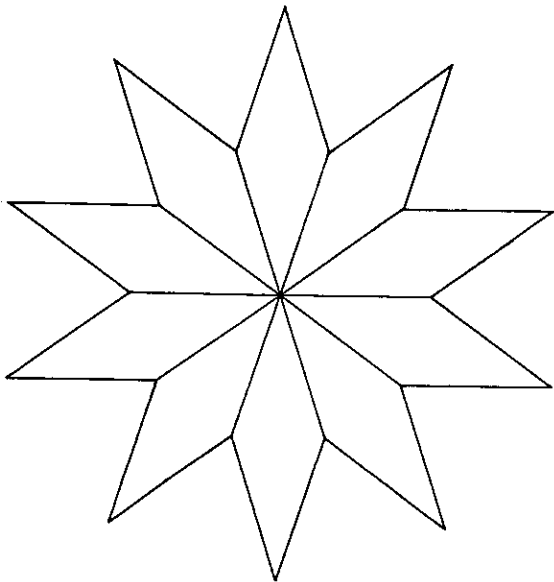
6a+2b IV



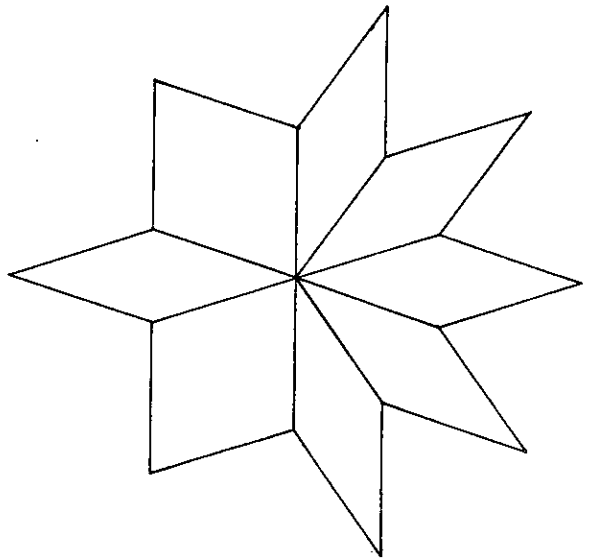
8a+b



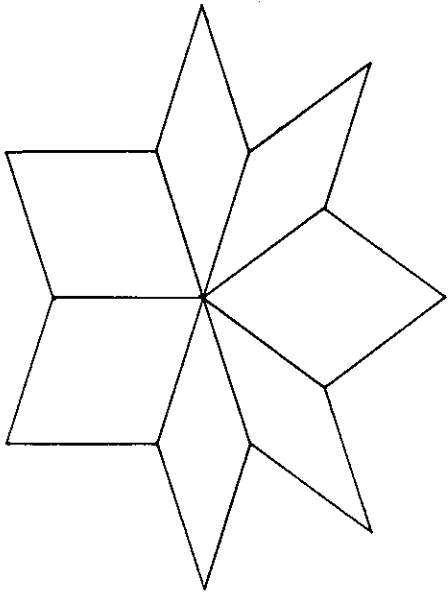
6a+2b II



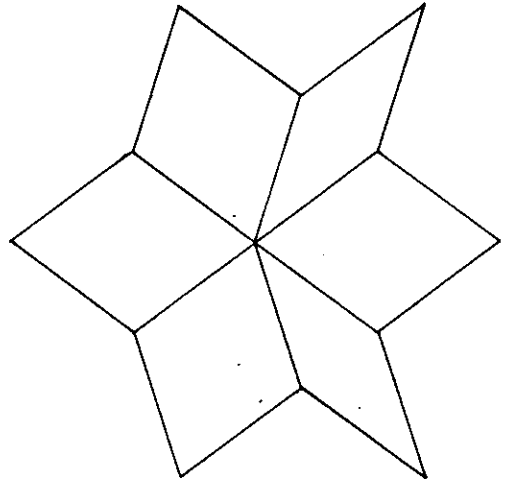
10a



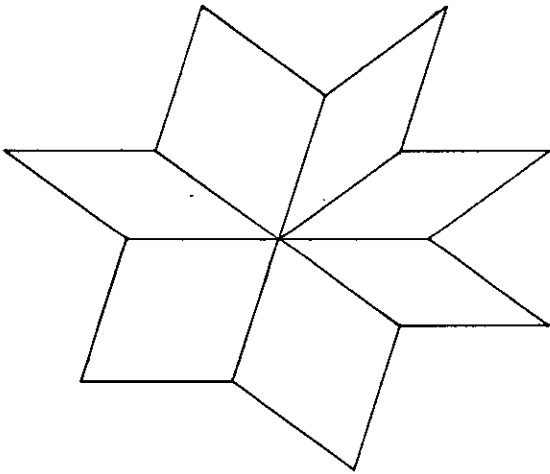
6a+2b III



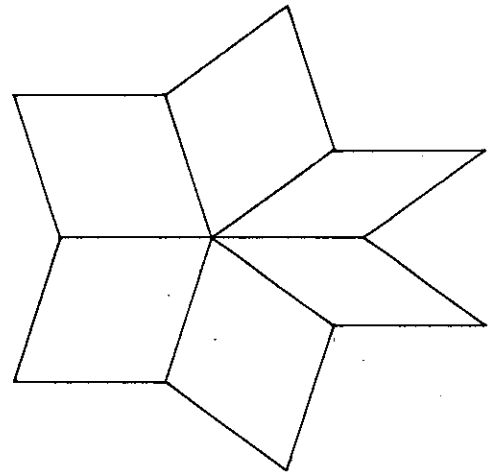
$4a+3b$ (IV)



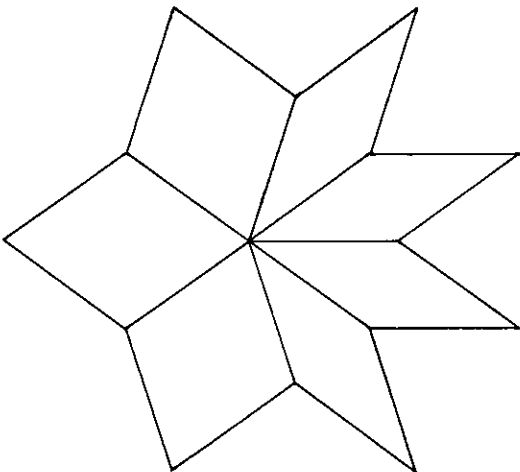
$2a+4b$ (II)



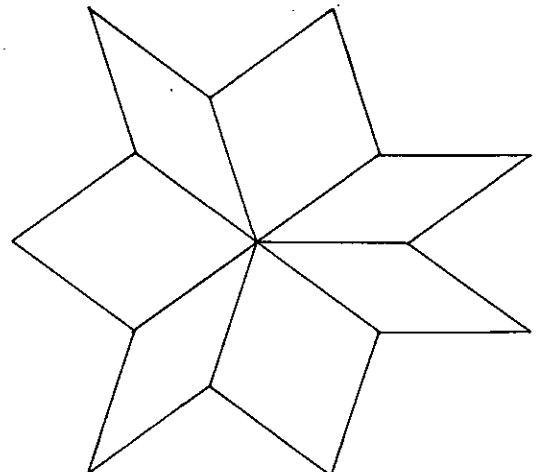
$4a+3b$ (II)
(II) $d \neq a$



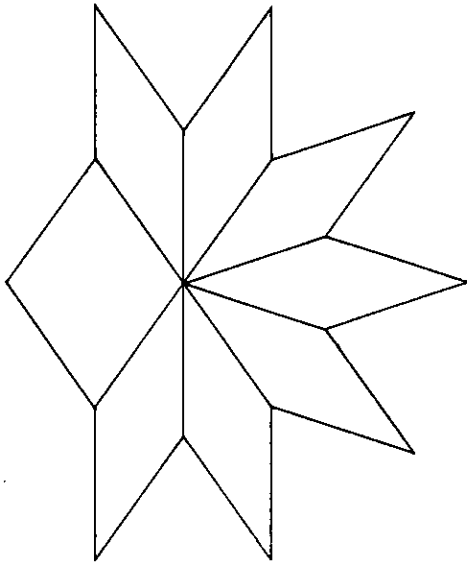
$2a+4b$ (II)



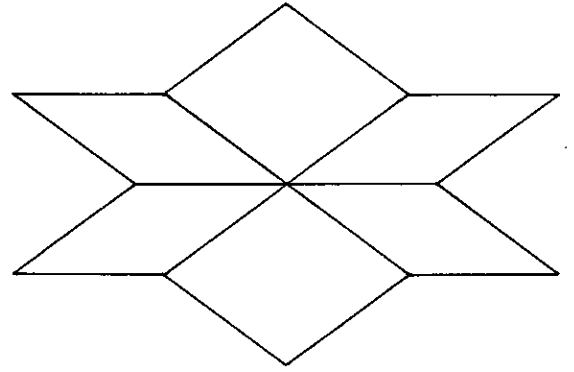
$4a+3b$ (I)



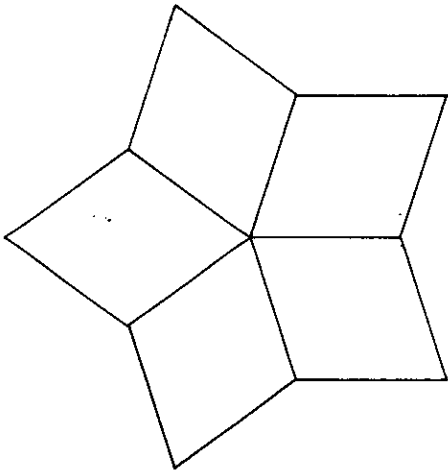
$4a+3b$ (V)



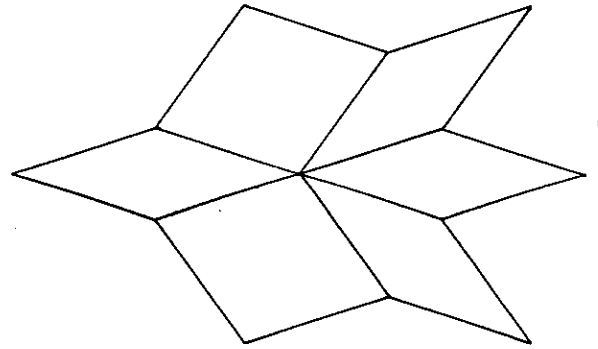
7a+c



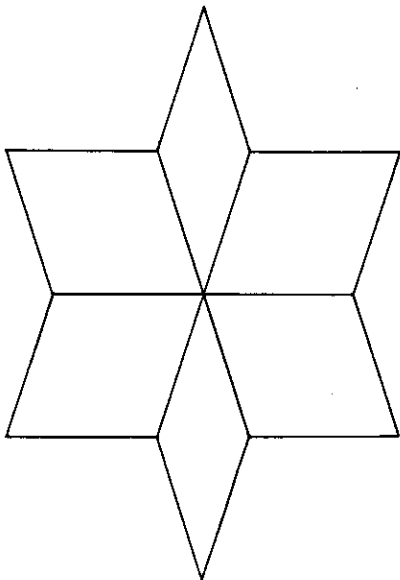
4a+2c (III)



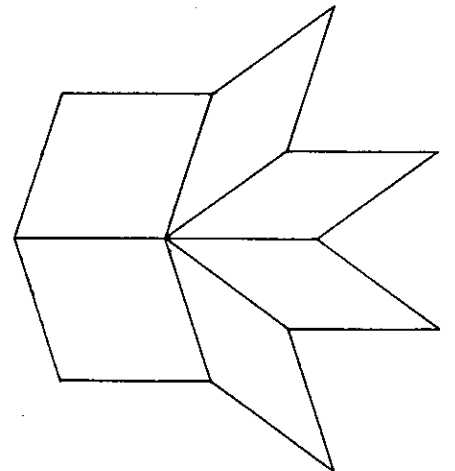
5b



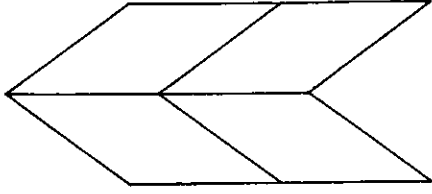
4a+2c (II)



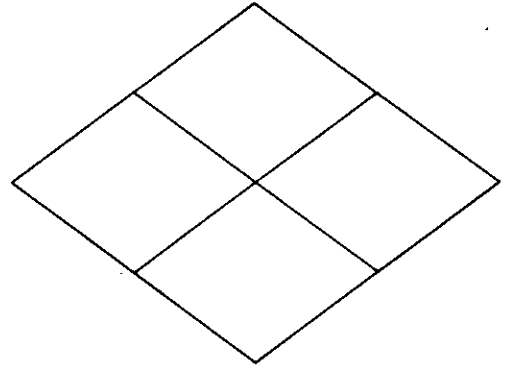
2a+4b (II)



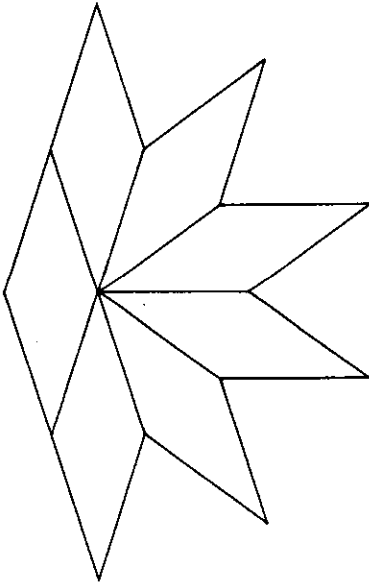
4a+2c (I)



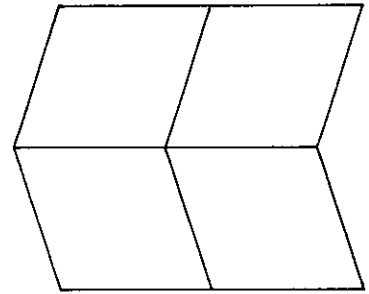
$$2a + 2d \text{ (I)}$$



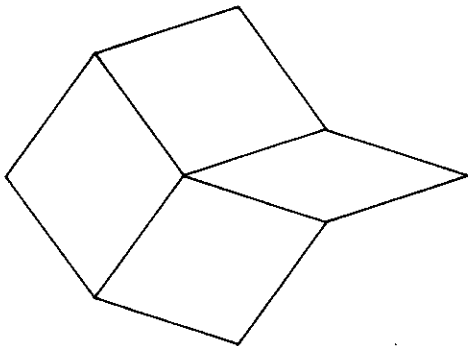
$$2b + 2c \text{ (II)}$$



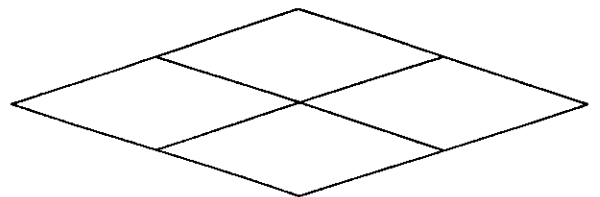
$$6a + d$$



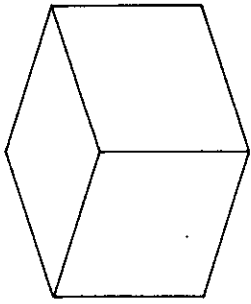
$$2b + 2c \text{ (I)}$$



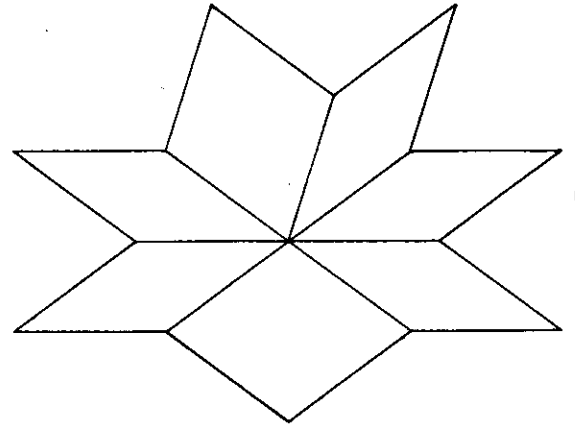
$$a + 3c$$



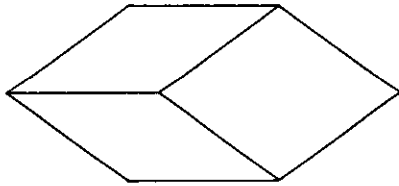
$$2a + 2d \text{ (II)}$$



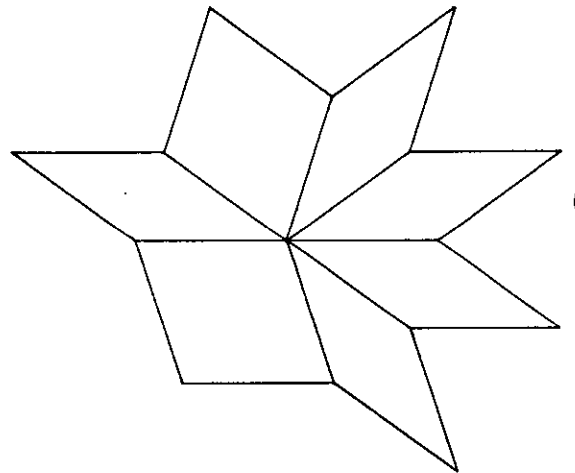
$2c+d$



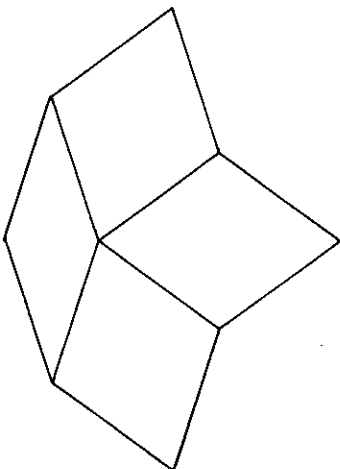
$5a+b+c$ (II)
 $c+d+02$ (VI)



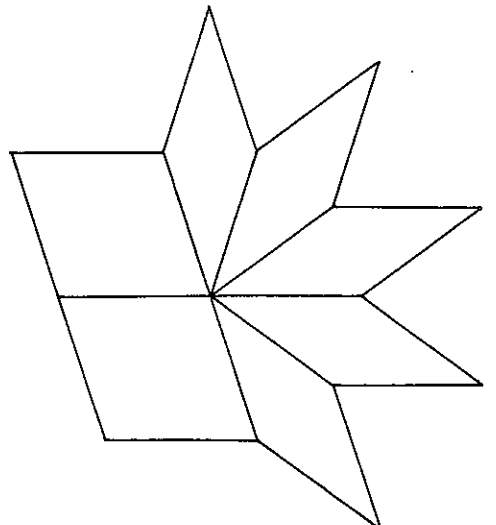
$b+2d$



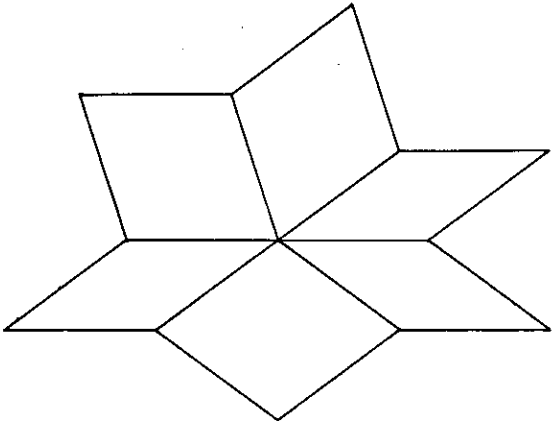
$2a+p+c$ (V)
 $c+q+05$ (II)



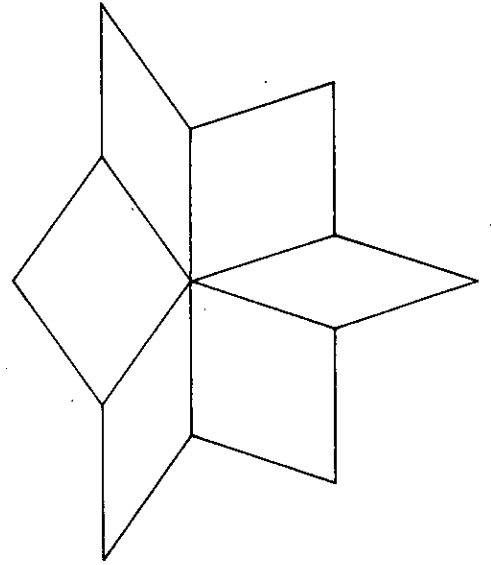
$3b+d$



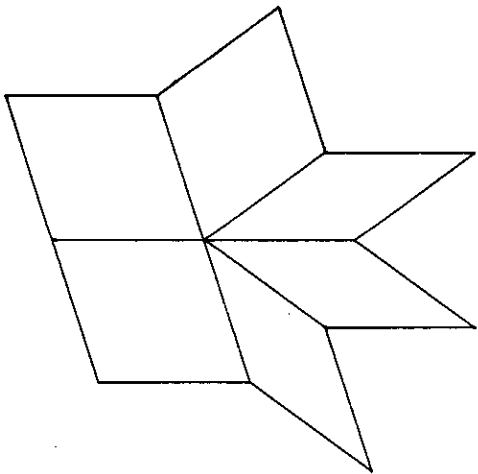
$2a+p+c$ (I)
 $c+d+02$ (IV)



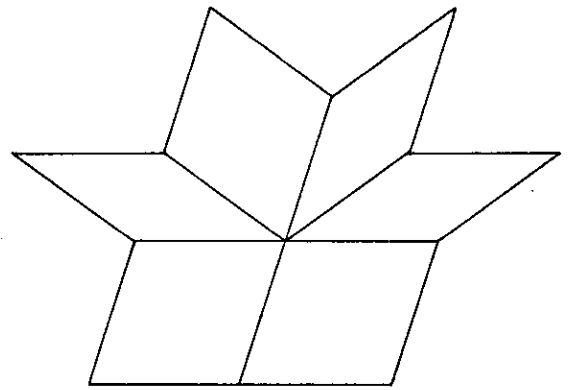
$3a+2b+c$ (IV)
 (V) $c+dS+ae$



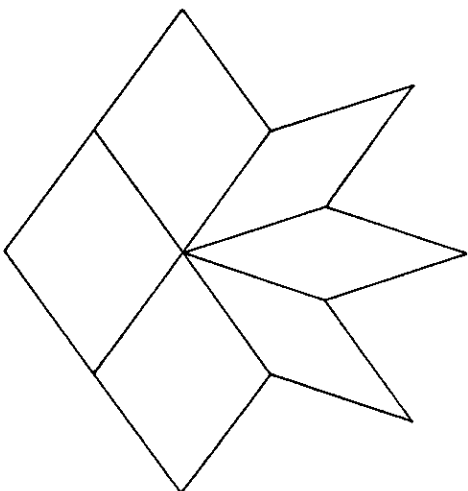
$3a+2b+c$ (X)



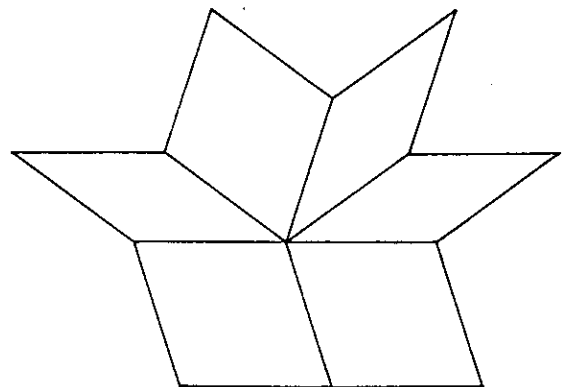
$3a+2b+c$ (II)
 $3a+Spc$ (III)
 (III) $c+dS+ae$



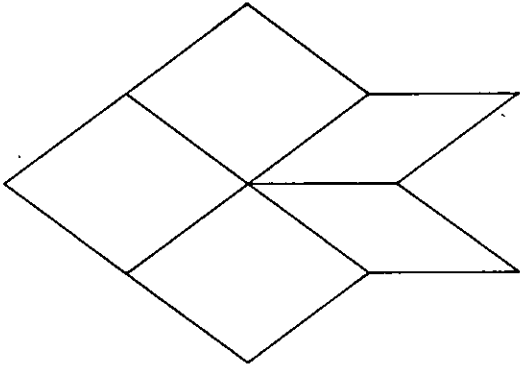
$3a+2b+c$ (VIII)
 (XI) $c+dS+ae$



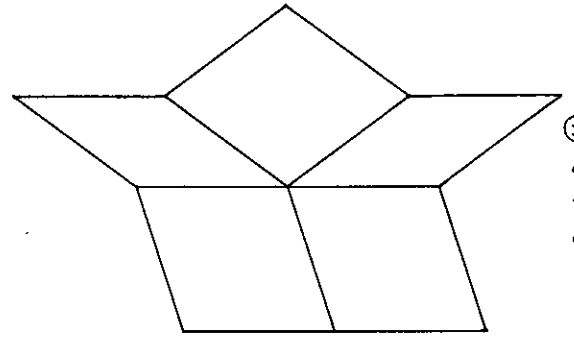
$3a+2b+c$ (I)



$3a+2b+c$ (VI)
 (IV) $c+dS+ae$

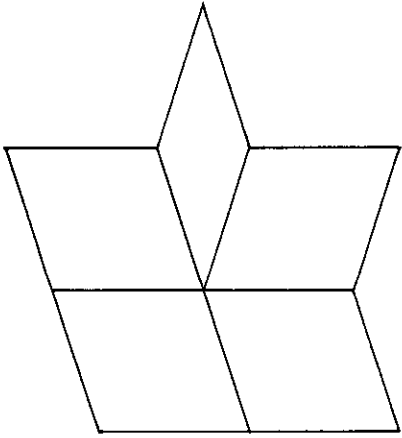


$$2a+b+2c \text{ (I)}$$



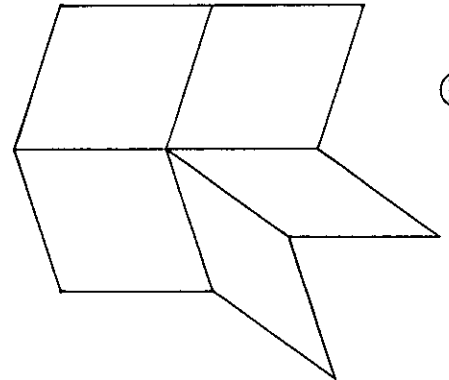
$$2a+b+2c \text{ (V)}$$

$$\text{(IV) } a^2+d+ab$$



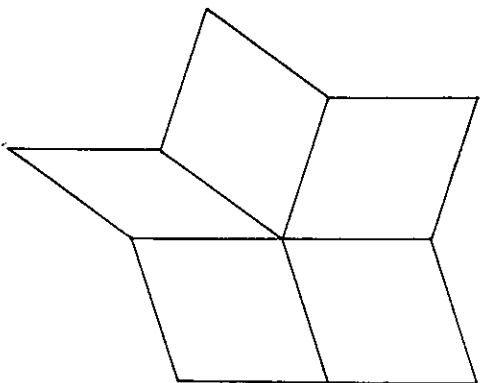
$$a+3b+c \text{ (III)}$$

$$\text{(VI) } a+df+ab$$



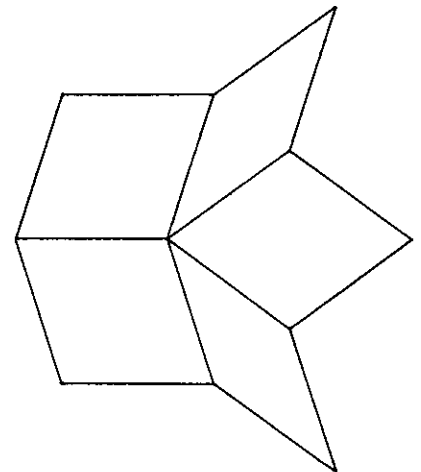
$$2a+b+2c \text{ (II)}$$

$$\text{(VI) } a^2+d+ab$$

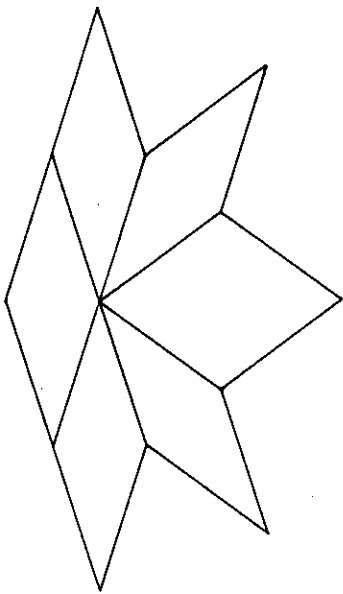


$$a+3b+c \text{ (I)}$$

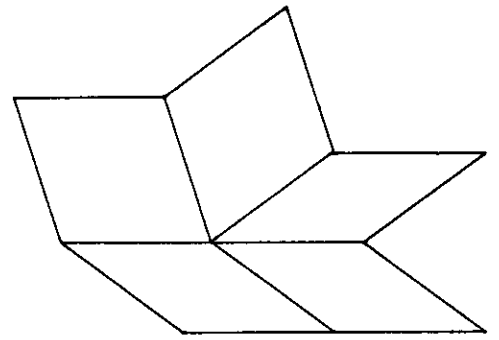
$$\text{(II) } a+df+ab$$



$$2a+b+2c \text{ (II)}$$

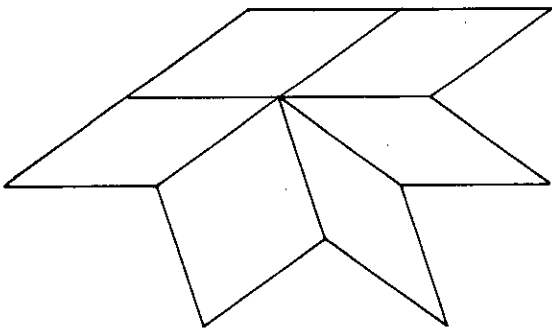


$$4a + b + d \text{ (V)}$$



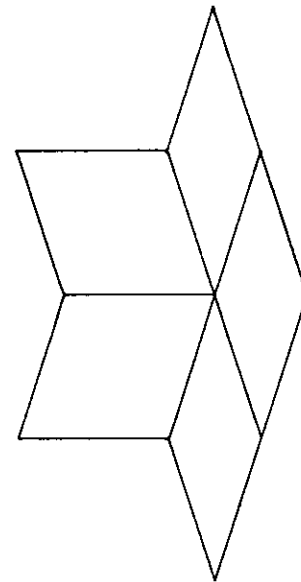
$$2a + 2b + d \text{ (III)}$$

$$\text{(VI)} \quad b + d + bS$$

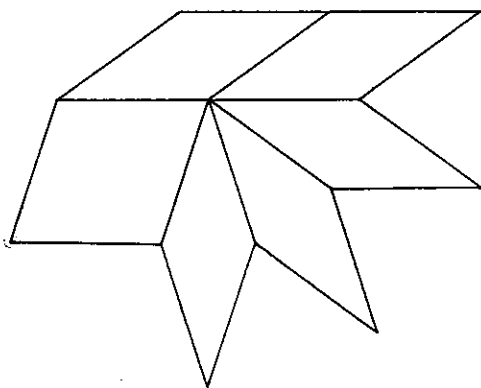


$$4a + b + d \text{ (III)}$$

$$\text{(IV)} \quad b + d + bS$$

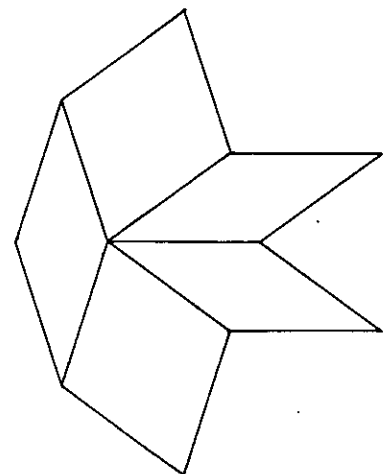


$$2a + 2b + d \text{ (II)}$$

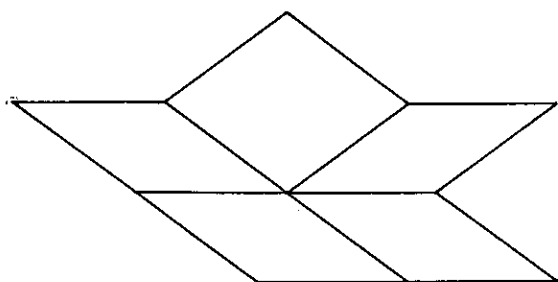


$$4a + b + d \text{ (I)}$$

$$\text{(II)} \quad b + d + bS$$

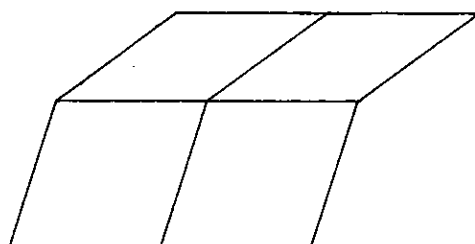


$$2a + 2b + d \text{ (I)}$$



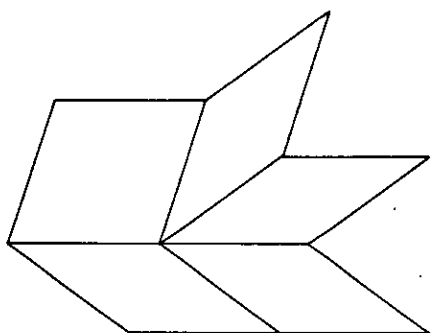
$$3a + c + d \text{ (III)}$$

$$\text{(VI)} b + c + d \text{ \& } \text{ \& }$$



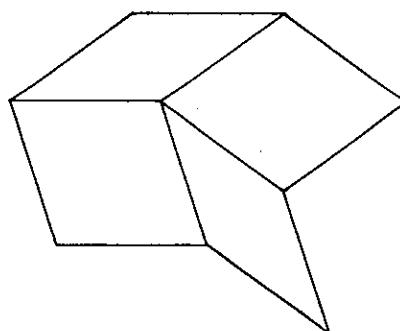
$$a + b + c + d \text{ (V)}$$

$$\text{(IV)} b + c + d + a$$



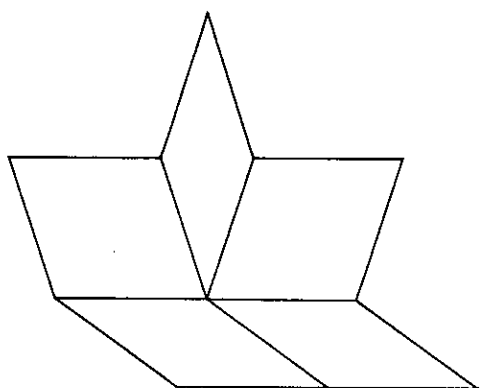
$$3a + c + d \text{ (I)}$$

$$\text{(II)} b + c + d \text{ \& } \text{ \& }$$



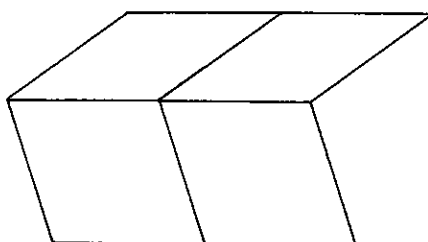
$$a + b + c + d \text{ (III)}$$

$$\text{(VI)} b + c + d + a$$



$$2a + 2b + d \text{ (V)}$$

$$\text{(IV)} b + d + a + d$$



$$a + b + c + d \text{ (I)}$$

$$\text{(II)} b + c + d + a$$

10. DIVISION PENTAGONAL DEL ESPACIO

Comenzamos el capítulo anterior observando como la simetría binaria, capaz de compartimentar superficialmente la esfera, no permitía hacerlo con el plano, y veíamos después que dos rombos derivados del pentágono lo conseguían, a costa de la pérdida de la regularidad y simetría, o bien de la isotropía.

Pasemos de la división superficial del plano a la división del espacio. Las figuras isótropas de simetría quinario pertenecen todas al sistema del dodecaedro, y ya vimos en los capítulos 7 y 8 que estos poliedros no permiten compartimentar el espacio.

Pero si en el plano dos rombos derivados del pentágono consiguen llenarlo, es posible que figuras tridimensionales derivadas del dodecaedro puedan cumplir la misma función en el espacio.

10.1. ROMBOEDROS DE PENROSE

Analicemos la relación del pentágono con los rombos de Penrose, para tratar de hacer algo semejante en el espacio.

En la figura 10.1.1. vemos la relación entre el pentágono y el rombo b; el rombo se compone de cuatro módulos elementales de los diez que forman el pentágono; por consiguiente, el rombo es $2/5$ del pentágono.

En la figura 10.1.2. se refleja la relación entre el decágono y el rombo a; éste se compone de 4 módulos de los 20 que forman el decágono regular, siendo por tanto el rombo a $1/5$ del decágono.

Como ya se vio en el capítulo 9, los ángulos a, b, c, d de los rombos son los múltiplos (menores de 180°) de 36° . Estos ángulos son todos los que pueden formar entre sí los radios del decágono regular (si se excluyen los que forman dos radios opuestos y un radio consigo mismo), radios que coinciden con los ejes de simetría del pentágono.

Sustituyamos los ejes del pentágono por los ejes quinario del sistema del dodecaedro, y veamos qué ángulos pueden formar entre sí dichos ejes; la figura en que mejor se materializan éstos es el icosaedro: los radios que unen sus vértices V_i con el centro del poliedro O coinciden con ellos. Dos radios distintos no opuestos sólo pueden formar dos ángulos distintos, pues o bien son contiguos o no lo son.

Para medir estos ángulos recurriremos a la resolución del poliedro $(3)_5I$ que se hizo en el apartado 1.2.13.3.1. (figura 1.2.11.). Tomando como de costumbre la semiarista l como unidad, resulta el radio de la esfera de los vértices: $R = l\sqrt{2+\phi} = 1,902113033$

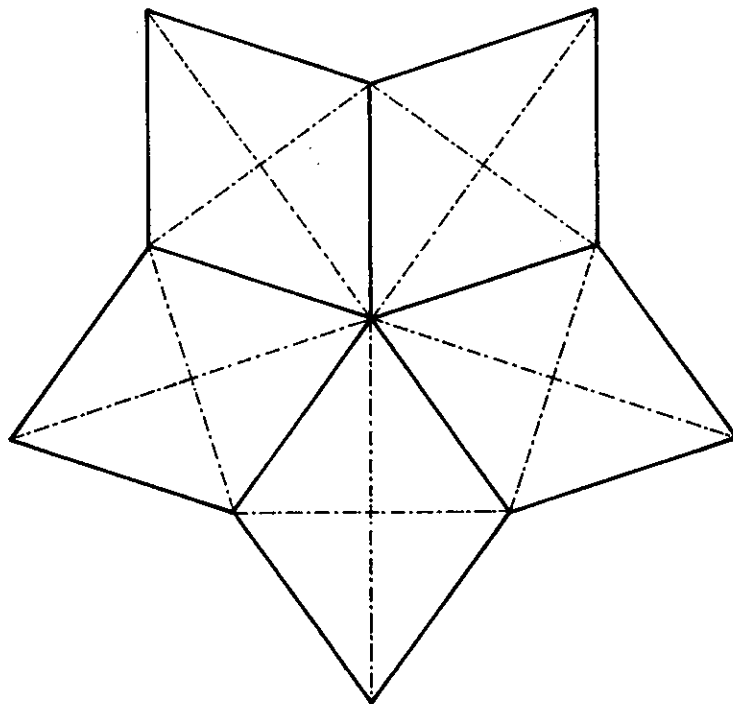
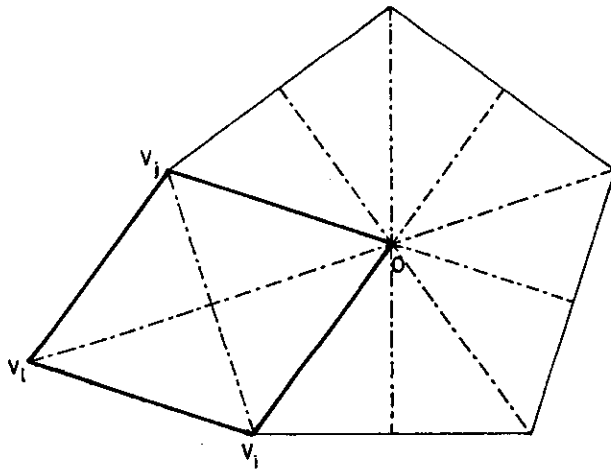
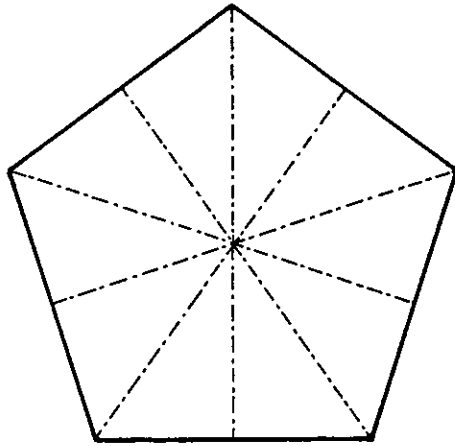


FIG 10. 1. 1. PENTAGONO Y ROMBO b

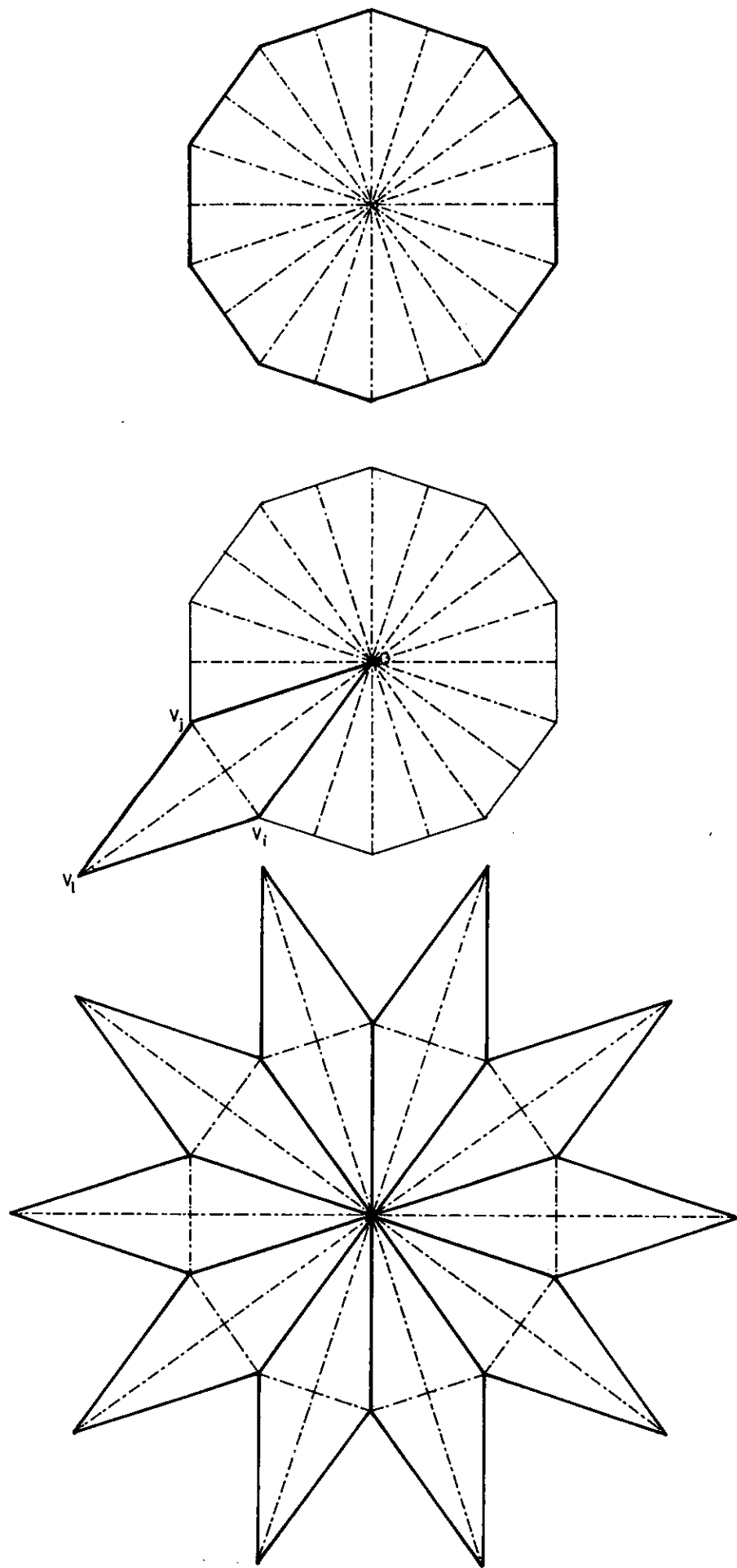


FIG 10. 1. 2. DECAGONO Y ROMBO α

Si dos vértices, V_i, V_j , son consecutivos, la distancia entre ellos es $2l=2$, y el ángulo que forman es $\overline{V_iOV_j} = \alpha = 2 \text{ arc sen } \frac{1}{R} = 2 \text{ arc sen } \frac{1}{\sqrt{2+\phi}} = 63,43494882^\circ = 63^\circ 26' 5,82''$

Si los vértices V_i, V_j , no son consecutivos, su distancia es $2\phi l = 3,236067977$, y el ángulo que forman es $\overline{V_iOV_j} = \beta = 2 \text{ arc sen } \frac{\phi}{R} = 2 \text{ arc sen } \frac{\phi}{\sqrt{2+\phi}} = 116,56505117^\circ = 116^\circ 33' 54,18''$

Nótese que ambos ángulos son suplementarios. Ello significa que, si como hicimos en el caso de los radios del decágono, formamos rombos (figura 10.2.) trazando por cada vértice V_i paralelas $\overline{V_iV_1}$ al radio correspondiente a otro vértice V_j , todos los rombos $\overline{V_iOV_jV_1}$ determinados por radios distintos no opuestos del icosaedro son iguales, pues si $\overline{OV_i}, \overline{OV_j}$ forman entre sí un ángulo $\overline{V_iOV_j}$, entre cada uno ($\overline{OV_i}$) y el lado paralelo al otro ($\overline{V_iV_1}$) forman el suplementario, $\overline{OV_iV_1}$.

Si en lugar de dos vértices V_i, V_j consideramos tres, llamando al tercero V_k , los tres radios $\overline{OV_i}, \overline{OV_j}, \overline{OV_k}$ forman un triedro, y los tres vértices y el centro O un tetraedro con tres aristas de valor R ($\overline{OV_i}, \overline{OV_j}, \overline{OV_k}$) y otras tres ($\overline{V_iV_j}, \overline{V_iV_k}, \overline{V_jV_k}$) que forman un triángulo $\overline{V_iV_jV_k}$ cuyos lados admiten las siguientes posibles combinaciones, según sus longitudes: $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 2\phi)$, $(2, 2\phi, 2\phi)$, $(2\phi, 2\phi, 2\phi)$. Los triángulos que forman dos radios del icosaedro, $\overline{V_iOV_j}, \overline{V_jOV_k}, \overline{V_kOV_i}$, son las mitades de los rombos $\overline{V_iOV_jV_1}, \overline{V_jOV_kV_m}, \overline{V_kOV_iOV_n}$, siendo V_1, V_m, V_n los puntos, sobre cada una de las caras del triedro $\overline{OV_iV_jV_k}$, donde se cortan las paralelas a cada radio $\overline{OV_i}$ trazadas por los otros dos vértices V_j y V_k .

Como ya hemos visto, siendo posibles dos ángulos tan solo, ambos suplementarios, y un lado, de valor R , los tres rombos citados son iguales, y asimismo serán iguales los que obtengamos trazando por V_1, V_m, V_n paralelas a los tres radios iniciales, $\overline{OV_k}, \overline{OV_i}, \overline{OV_j}$, respectivamente, concurrentes en V_p ; los seis rombos forman un romboedro, cuyas caras son siempre iguales.

Estudiamos las proporciones de este rombo único: siendo las medidas de sus diagonales necesariamente 2 y 2ϕ , su cociente coincide con la razón áurea, $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, siendo 1 y ϕ las respectivas semidiagonales. En cuanto a la arista R , hallada ya en 1.2.13.3.1., se obtiene también del teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo que es módulo elemental del rombo:

$$R = \sqrt{1+\phi^2} = \sqrt{1+1+\phi} = \sqrt{2+\phi} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1,902113033$$

El área del rombo es:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \phi = 2\phi = \sqrt{5}+1 = 3,236067977$$

y la altura, tomando como base la arista, se obtiene dividiendo esta área por la base:

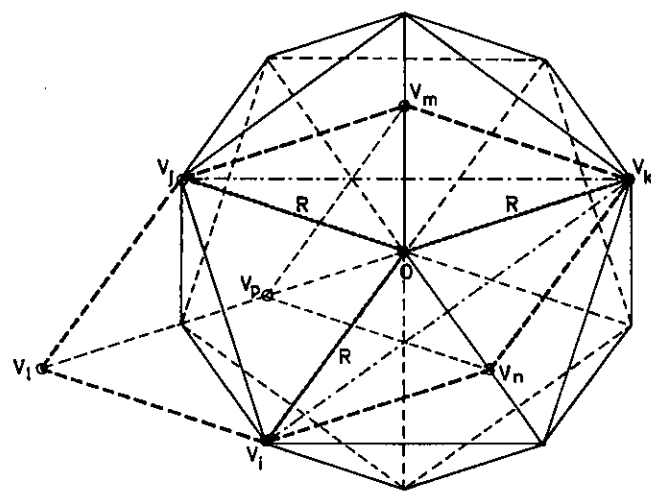
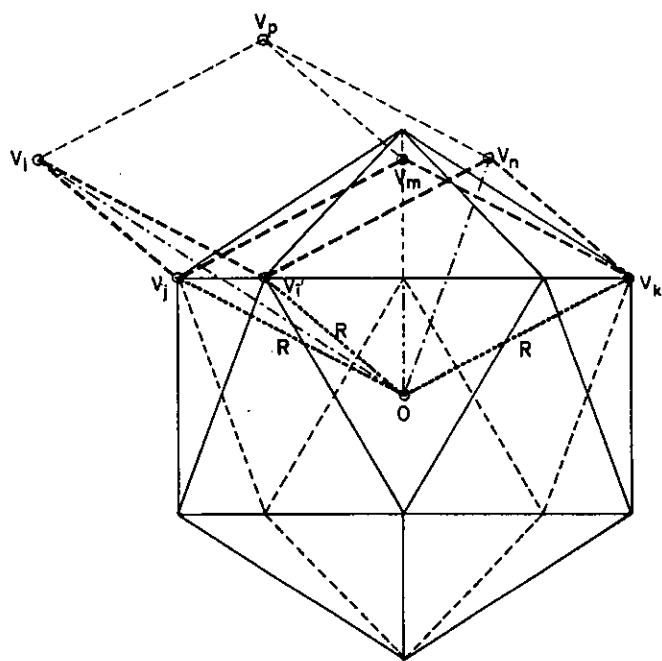


FIG 10. 2. 1. ICOSAEDRO Y ROMBOS DERIVADOS
VISTAS RELACIONADAS CON UN EJE QUINARIO

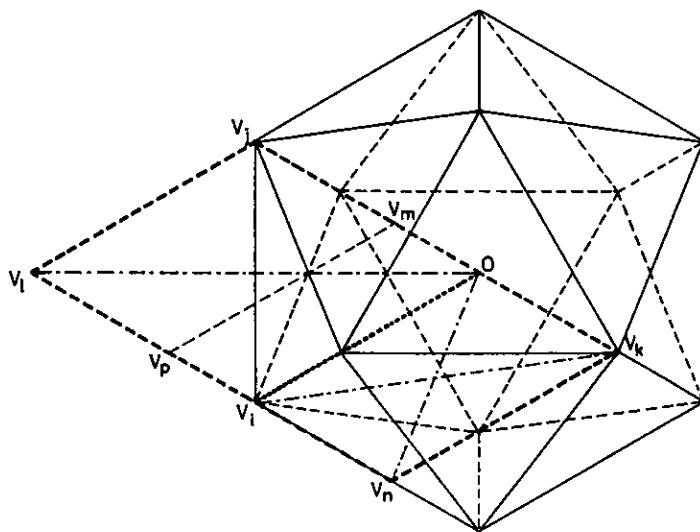
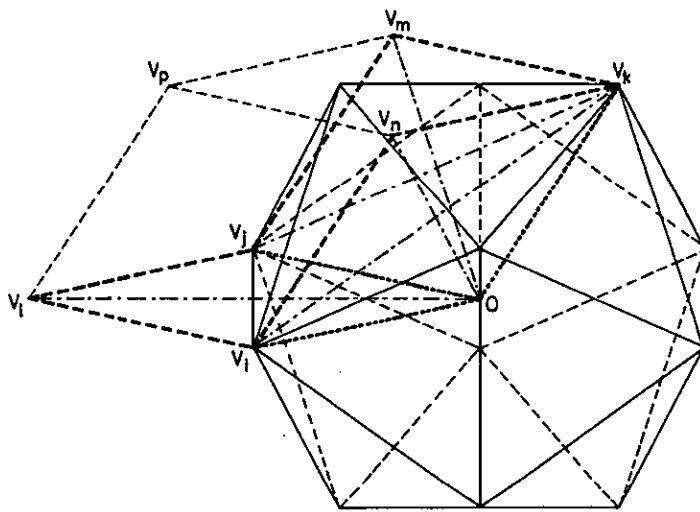


FIG 10.2.2. ICOSAEDRO Y ROMBOS DERIVADOS
 VISTAS RELACIONADAS CON UN EJE TERNARIO

$$\frac{2\phi}{\sqrt{2+\phi}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}} = 1,701301617$$

Encontramos esta medidas en la figura 10.3.1.

Si tomamos como unidad la arista del romboedro, las medidas anteriores hay que dividir las por $R = \sqrt{2+\phi}$, y la superficie por $R^2 = 2+\phi$.

Semidiagonales:

$$\frac{1}{\sqrt{2+\phi}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = 0,5257311121$$

$$\frac{\phi}{\sqrt{2+\phi}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 0,8506508083$$

Area:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\phi}} \cdot \frac{\phi}{\sqrt{2+\phi}} = \frac{2\phi}{2+\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894427191$$

La altura, tomando como base la arista unidad, coincide con el área.

Todas estas medidas las encontramos en la figura 10.3.2.

Ya conocidos los valores de los ángulos ($\alpha = 63^\circ 26' 5,82''$ y $\beta = 180^\circ - \alpha$), los triedros aparecen como combinaciones ternarias con repetición de estos dos ángulos; estas combinaciones son (α, α, α) , (α, α, β) , (α, β, β) y (β, β, β) . Como ya vimos en el capítulo 1 (apartado 1.1.9. y figura 1.1.8.), el estudio de un triedro equivale al de un triángulo esférico, intersección de aquél con una esfera de centro en el vértice y radio unidad, siendo los ángulos planos del triedro lados del triángulo esférico, y los diedros del triedro ángulos del triángulo. En nuestro caso los lados del triángulo son conocidos (las combinaciones anteriores de α y β , cuatro casos en total), y en función de ellos podemos obtener los lados mediante las fórmulas de Briggs de la trigonometría esférica, en las que A, B, C son los ángulos del triángulo (los diedros) y a, b, c los lados (los ángulos planos del triedro):

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}} \quad \text{"} \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-c)}} \quad \text{"} \quad \text{siendo } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Aquí a, b, c, sólo pueden tomar los valores α y β .

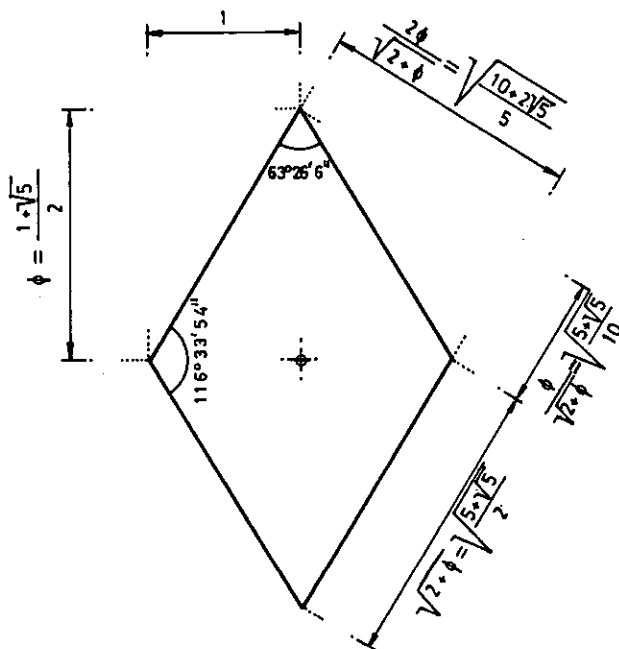
Primer caso (figura 10.4.1.); triedro (α, α, α) : tres vértices contiguos entre sí: $p = \frac{3\alpha}{2}$ " $p-a = p-b = p-c = \frac{3\alpha}{2} - \alpha = \frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \alpha/2 \cdot \operatorname{sen} \alpha/2}{\operatorname{sen} 3\alpha/2 \cdot \operatorname{sen} \alpha/2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \alpha/2}{\operatorname{sen} 3\alpha/2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 31,71747441^\circ}{\operatorname{sen} 95,15242323^\circ}} =$$

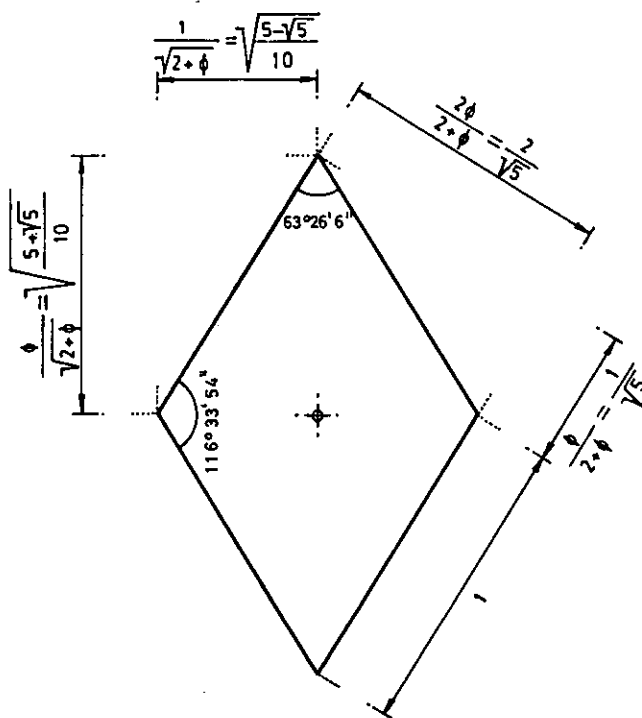
$$= \sqrt{\frac{0,525731112}{0,995959314}} = \sqrt{0,527864044} = 0,726542527 \quad \text{"} \quad A/2 = B/2 = C/2 = 36^\circ$$

$$A = B = C = 72^\circ$$

Segundo caso (figura 10.4.2.); triedro (α, α, β) : dos vértices no contiguos entre sí y contiguos a otro:



10. 3. 1. TOMANDO COMO UNIDAD LA SEMIARISTA DEL ICOSAEDRO



10. 3. 2. TOMANDO COMO UNIDAD EL LADO DEL ROMBO

FIG 10.3. CARA DE LOS ROMBOEDROS

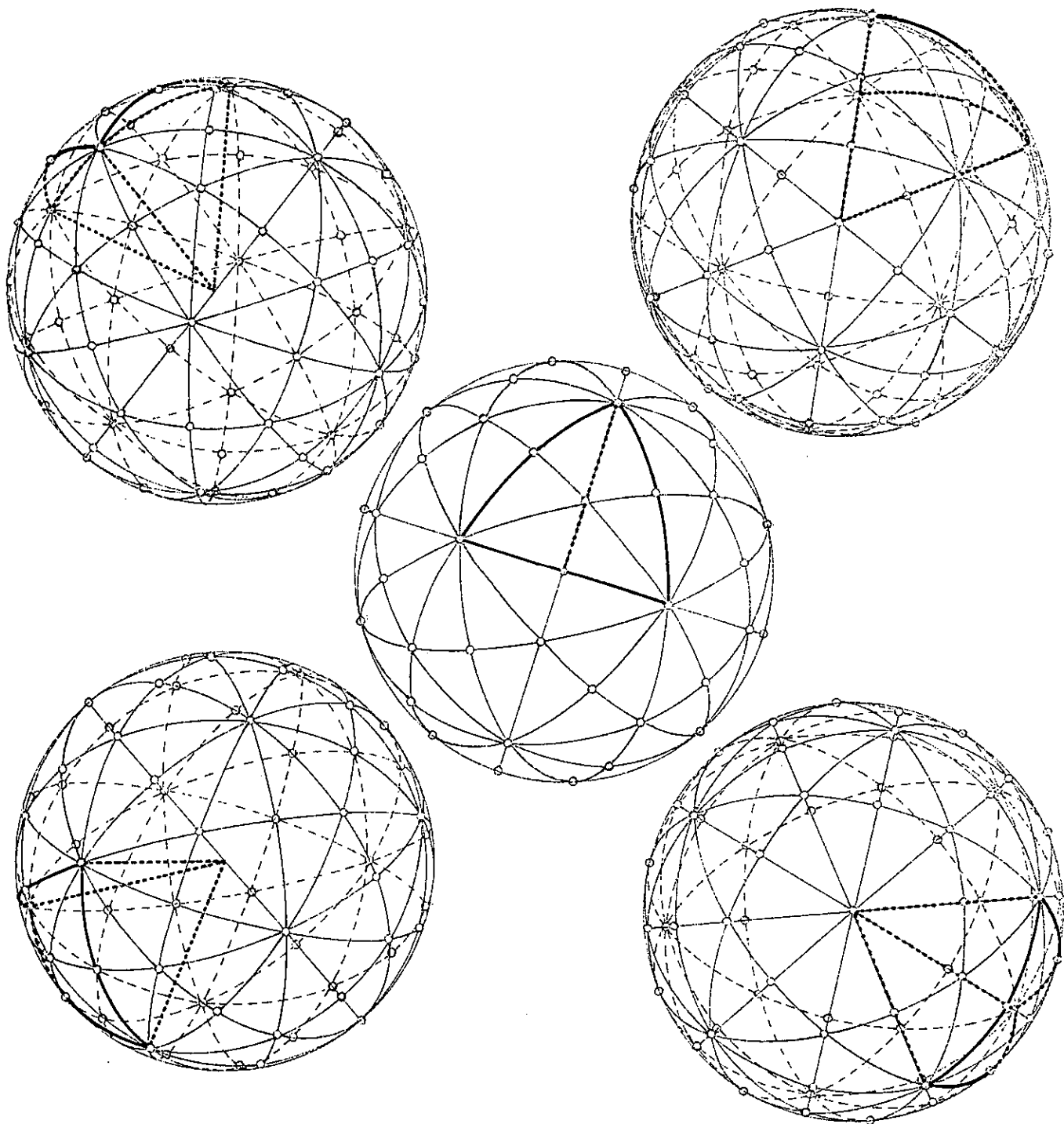


FIG 10. 4. 1. TRIEDRO (α, α, α) Y TRIANGULO ESFERICO ASOCIADO

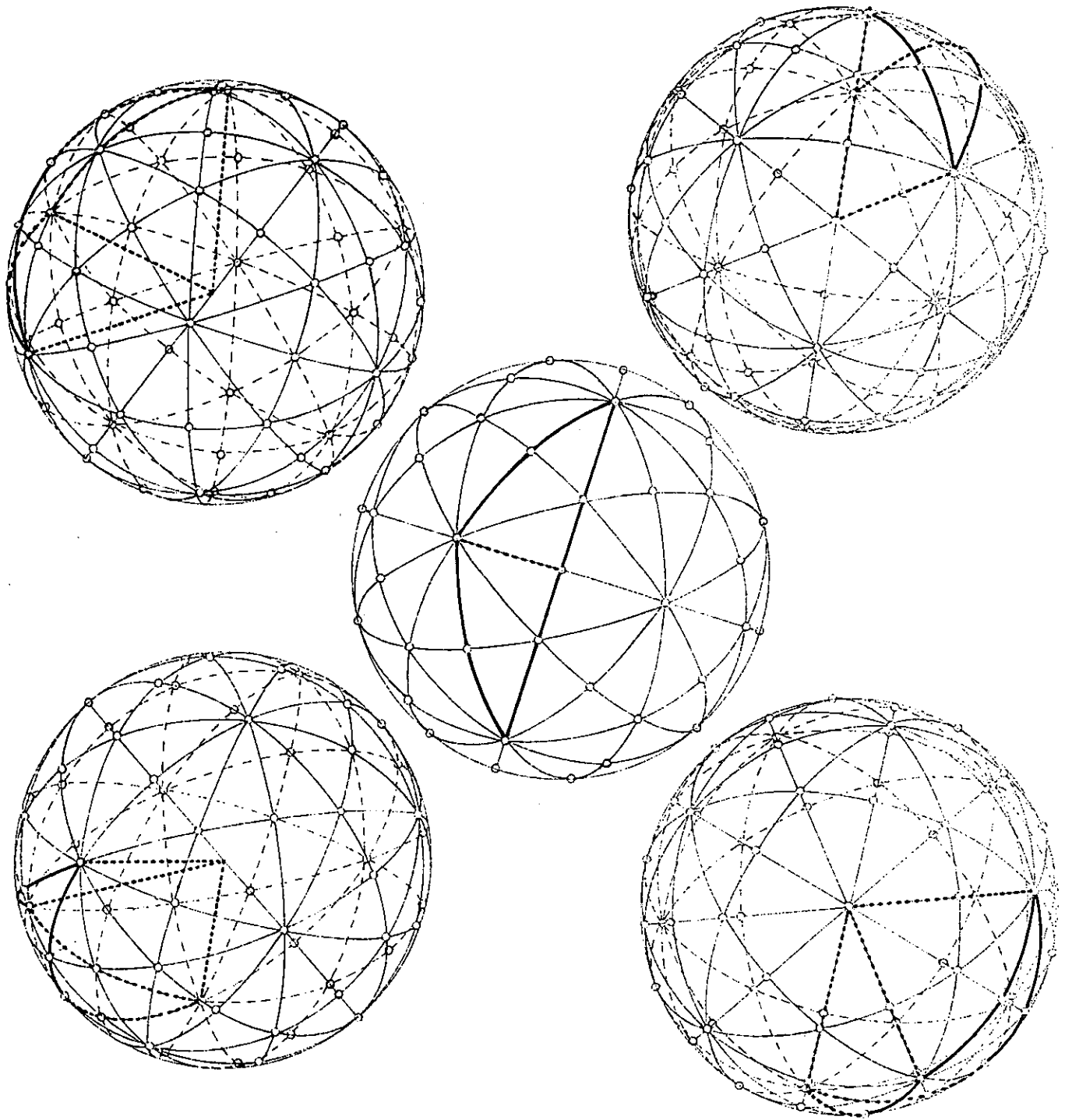


FIG 10.4.2. TRIEDRO (α, α, β) Y TRIANGULO ESFERICO ASOCIADO

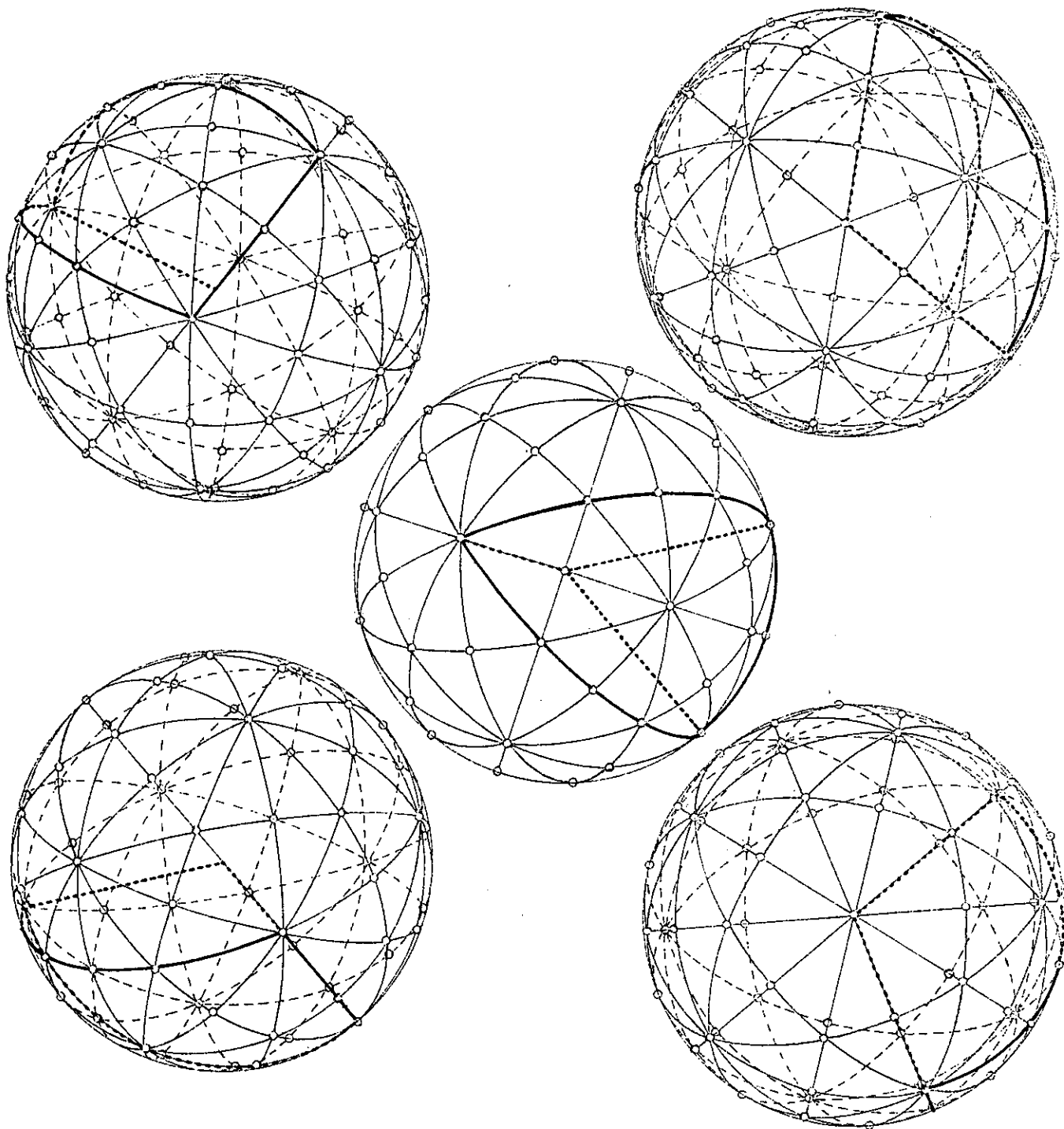


FIG 10.4.3. TRIEDRO (α, β, β) Y TRIANGULO ESFERICO ASOCIADO

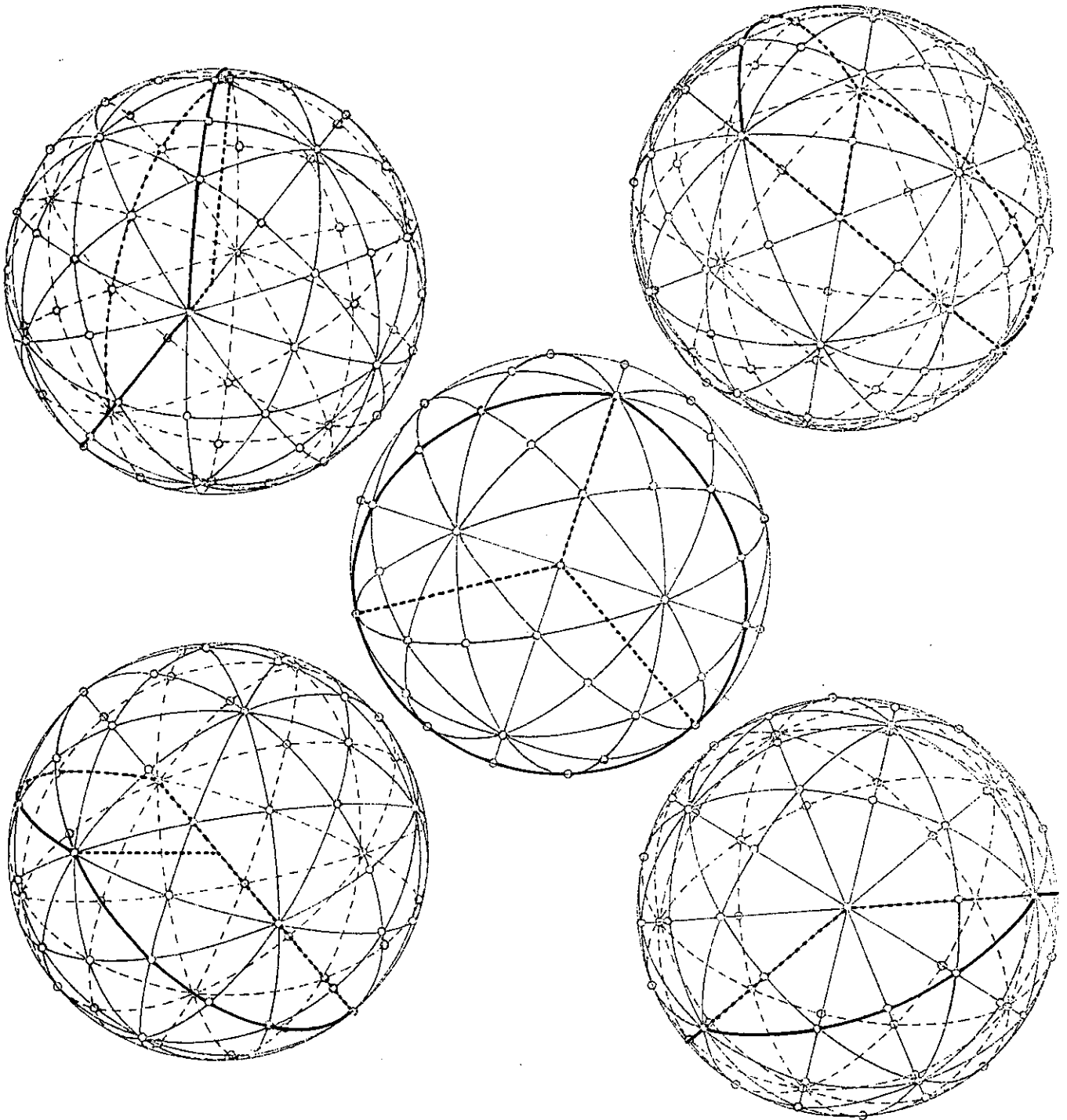


FIG 10.4.4. TRIEDRO (β, β, β) Y TRIANGULO ESFERICO ASOCIADO

$$p = \frac{\alpha + \alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha + 180^\circ}{2} = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ \quad \text{,,} \quad p-a = p-b = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$p-c = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \beta = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \frac{3\alpha}{2} - 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha/2) \cdot \operatorname{sen}(3\alpha/2 - 90^\circ)}{\operatorname{sen}(\alpha/2 + 90^\circ) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha/2)}} = \sqrt{\frac{-\cos 3\alpha/2}{\cos \alpha/2}} = \sqrt{\frac{-\cos 95,15242323^\circ}{\cos 31,71747441^\circ}} \\ &= \sqrt{\frac{0,089805595}{0,850650808}} = \sqrt{0,105572809} = 0,324919696 \quad \text{,,} \quad A/2 = B/2 = 18^\circ \quad \text{,,} \quad A = B = 36^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(90^\circ - \alpha/2)}{\operatorname{sen}(\alpha/2 + 90^\circ) \cdot \operatorname{sen}(3\alpha/2 - 90^\circ)}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha/2}{\cos \alpha/2 \cdot (-\cos 3\alpha/2)}} = \sqrt{\frac{\cos \alpha/2}{-\cos 3\alpha/2}} = \\ &= \sqrt{\frac{0,850650808}{0,089805595}} = \sqrt{9,472135959} = 3,077683538 \quad \text{,,} \quad C/2 = 72^\circ \quad \text{,,} \quad C = 144^\circ \end{aligned}$$

Tercer caso (figura 10.4.3.); triedro (α, β, β) : dos vértices contiguos entre sí, no contiguos a un tercero:

$$p = \frac{\alpha + \beta + \beta}{2} = \frac{180^\circ + \beta}{2} = \frac{180^\circ + 180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \text{,,} \quad p-a = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \alpha = 180^\circ - \frac{3\alpha}{2}$$

$$p-b = p-c = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (180^\circ - \alpha) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha/2}{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha/2) \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - 3\alpha/2)}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha/2}{\operatorname{sen} \alpha/2 \cdot \operatorname{sen} 3\alpha/2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \alpha/2}{\operatorname{sen} 3\alpha/2}} = \\ &= 0,726542527 \quad \text{,,} \quad A/2 = 36^\circ \quad \text{,,} \quad A = 72^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(180^\circ - 3\alpha/2) \cdot \operatorname{sen} \alpha/2}{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha/2) \cdot \operatorname{sen} \alpha/2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 3\alpha/2}{\operatorname{sen} \alpha/2}} = \sqrt{\frac{0,995959314}{0,525731112}} = \\ &= \sqrt{1,894427191} = 1,376381921 \quad \text{,,} \quad B/2 = C/2 = 54^\circ \quad \text{,,} \quad B = C = 108^\circ \end{aligned}$$

Cuarto caso (figura 10.4.4.); triedro (β, β, β) : tres vértices no contiguos entre sí:

$$p = \frac{3\beta}{2} = \frac{3(180^\circ - \alpha)}{2} = 270^\circ - \frac{3\alpha}{2} \quad \text{,,} \quad p-a = p-b = p-c = 270^\circ - \frac{3\alpha}{2} - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(90^\circ - \alpha/2)}{\operatorname{sen}(270^\circ - 3\alpha/2) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha/2)}} = \sqrt{\frac{\cos \alpha/2}{-\cos 3\alpha/2}} = 3,077683538 \\ A/2 = B/2 = C/2 &= 72^\circ \quad \text{,,} \quad A = B = C = 144^\circ \end{aligned}$$

En conclusión, los diedros del triedro son, para cada uno de los casos posibles:

$$[72^\circ, 72^\circ, 72^\circ], [36^\circ, 36^\circ, 144^\circ], [72^\circ, 108^\circ, 108^\circ], [144^\circ, 144^\circ, 144^\circ]$$

Volvamos a los romboedros: sus tres pares de caras paralelas se cortan en doce aristas, que forman tres grupos de cuatro, paralelas entre sí las de cada uno. Si cortamos el romboedro por un plano normal a cuatro aristas paralelas tendremos un rombo, cuyos lados son las alturas del rombo de base unidad de la figura 10.3.2., y sus ángulos los diedros, que pueden tomar los valores obtenidos más arriba; estos diedros han de ser, por lo tanto, dos pares iguales de ángulos suplementarios. Es inmediato que los triedros de los casos primero y tercero, $[72^\circ, 72^\circ, 72^\circ]$ y $[72^\circ, 108^\circ, 108^\circ]$, pertenecen al mismo romboedro, mientras que los de los casos segundo y cuarto, $[36^\circ, 36^\circ, 144^\circ]$ y $[144^\circ, 144^\circ, 144^\circ]$ pertenecen a otro.

De esta manera vemos que la sección normal a una arista de cada uno de los

dos romboedros es uno de los dos rombos de Penrose vistos en el capítulo 9. Podemos llamar a los romboedros con el mismo nombre que a los rombos correspondientes, recuperando las letras a, b, c, d, para los valores de los diedros ($a=36^\circ$, $b=72^\circ$, $c=108^\circ$, $d=144^\circ$), existiendo por consiguiente un romboedro de clase a, con diedros a y d, y un romboedro b, con diedros b y c. Estos dos romboedros aparecen en las figuras 10.5., representados junto con el icosaedro del que se originan, en vistas coincidente y normal a su eje de simetría ternaria, uno de los del dodecaedro, pues en ambos casos el triedro cuyo vértice se ha hecho coincidir con 0 es equilátero. En 10.5.1. el romboedro representado, b, es alargado, y el triángulo $\overline{V_i V_j V_k}$ es una cara del icosaedro; en 10.5.2. el romboedro, a, es achatado, y el triángulo $\overline{V_i V_j V_k}$ tiene por lados diagonales no diametrales del icosaedro, ϕ veces mayores que las aristas del icosaedro.

En la figura 10.6. se han representado diferentes vistas, ortogonales entre sí las contiguas, como requiere el sistema diédrico, de ambos romboedros, y allí se indican las medidas de cada uno tomando como unidad la semidiagonal menor de la cara, semiarista del icosaedro correspondiente. Los vértices de los romboedros se nombran por las mayúsculas de sus subíndices, para mayor simplicidad.

Aunque estos romboedros no sean iguales que aquéllos, les es de aplicación lo visto en 7.2.2. (figuras 7.14.) y en 8.1.1. para el romboedro formado por dos tetraedros regulares apoyados sobre las caras opuestas de un octaedro regular: el eje de simetría ternario pasa por dos vértices opuestos O y P, cuya distancia es el triple de la altura de los tetraedros $\overline{O I J K}$, que a su vez coincide con la distancia entre las caras opuestas $\overline{I J K}$, $\overline{L M N}$ del octaedro. Esta altura es un cateto del triángulo rectángulo que tiene por vértices O, el centro de la diagonal $\overline{I J}$ del rombo $\overline{I O J L}$ y el centro del triángulo equilátero $\overline{I J K}$. Su hipotenusa es la semidiagonal, $\frac{1}{2} \overline{O L}$, y el otro cateto $\frac{1}{3}$ de la altura del triángulo $\overline{I J K}$, esto es, $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{I J} = \frac{\sqrt{3}}{6} \overline{I J}$. Por consiguiente la altura del tetraedro es $\sqrt{(\frac{1}{2} \overline{O L})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{6} \overline{I J})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \overline{O L}^2 - \frac{1}{12} \overline{I J}^2}$

Para el romboedro b es $\overline{I J} = 2$, $\overline{O L} = 2\phi$, siendo la altura:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4\phi^2 - \frac{1}{12} \cdot 4} &= \sqrt{\phi^2 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3(1+\phi)-1}{3}} = \sqrt{\frac{2+3\phi}{3}} = \sqrt{\frac{\phi^4}{3}} = \frac{\phi^2}{\sqrt{3}} = \frac{1+\phi}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{27}}{6} = \\ &= 1,511522628 \end{aligned}$$

Y por lo tanto $OP = 3\sqrt{\frac{2+3\phi}{3}} = \sqrt{6+9\phi} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2+3\phi} = \sqrt{3}\phi^2 = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{27}}{2} = 4,534567884$

Para el romboedro a, las diagonales de las caras están cambiadas, siendo $\overline{I J} = 2\phi$, $\overline{O L} = 2$, y la altura es :

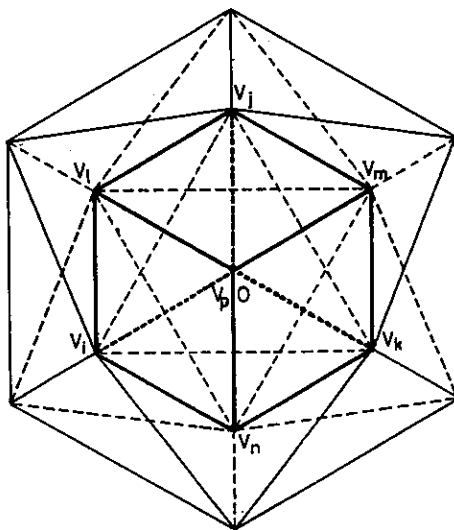
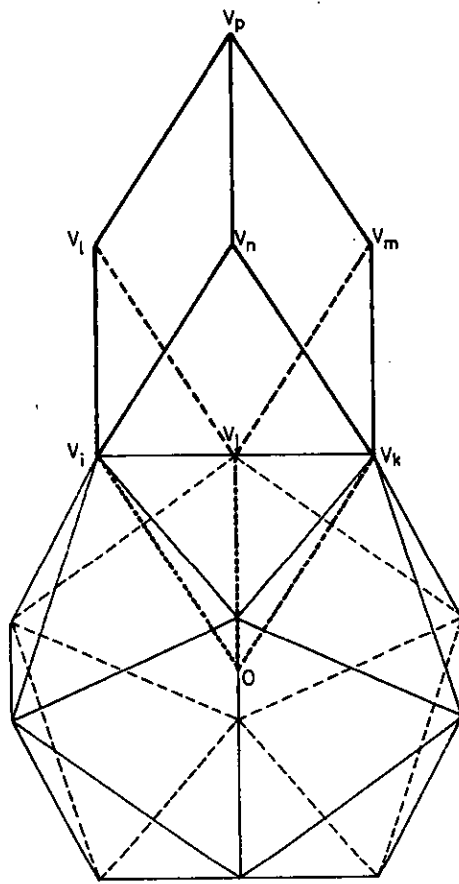


FIG 10.5.1. ICOSAEDRO Y ROMBOEDRO b

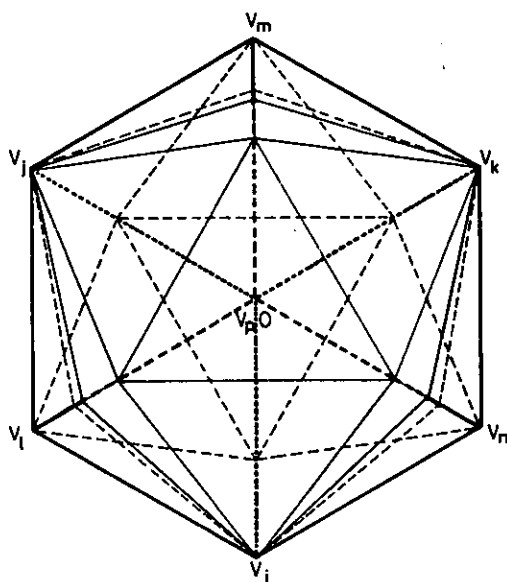
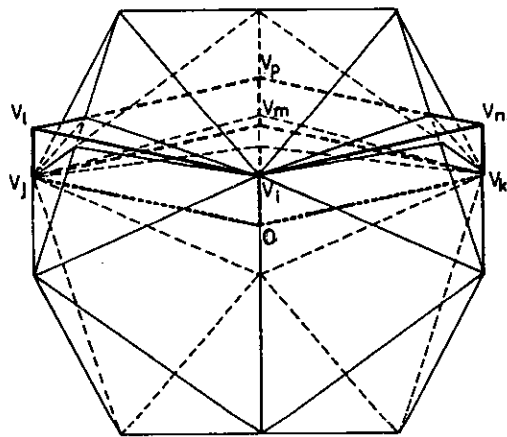
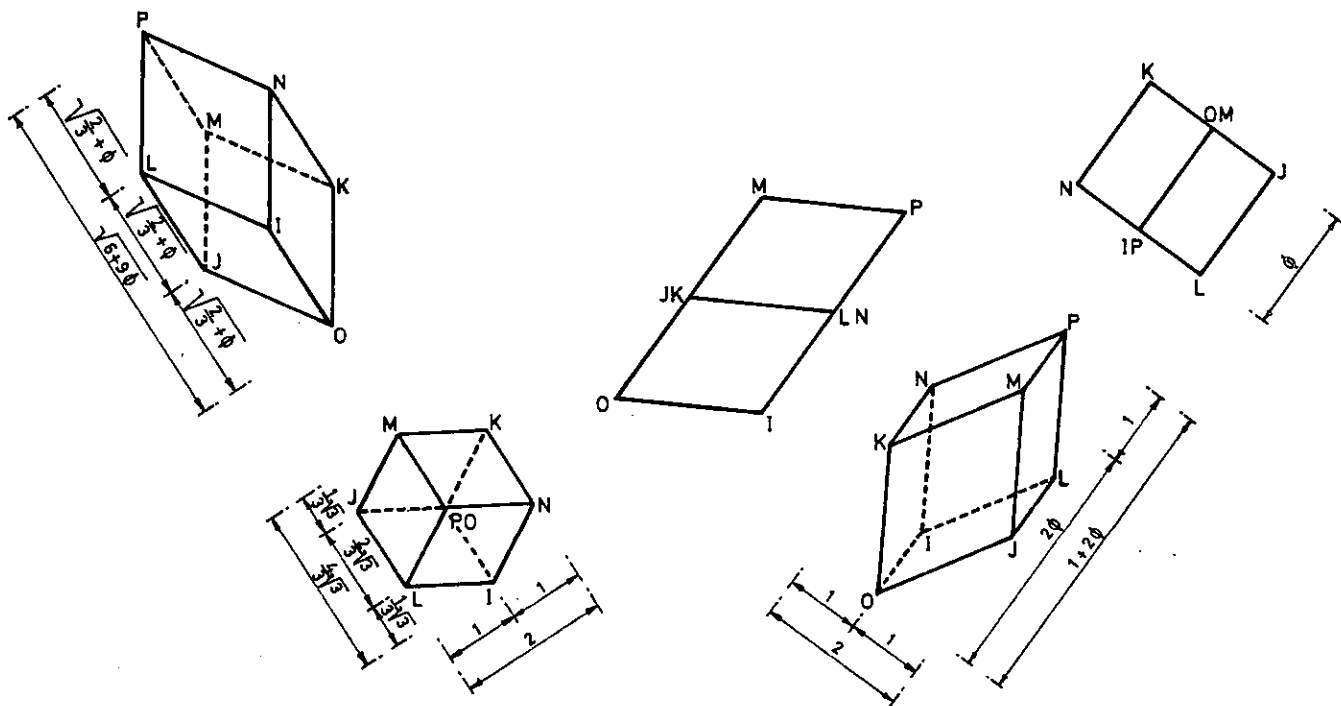
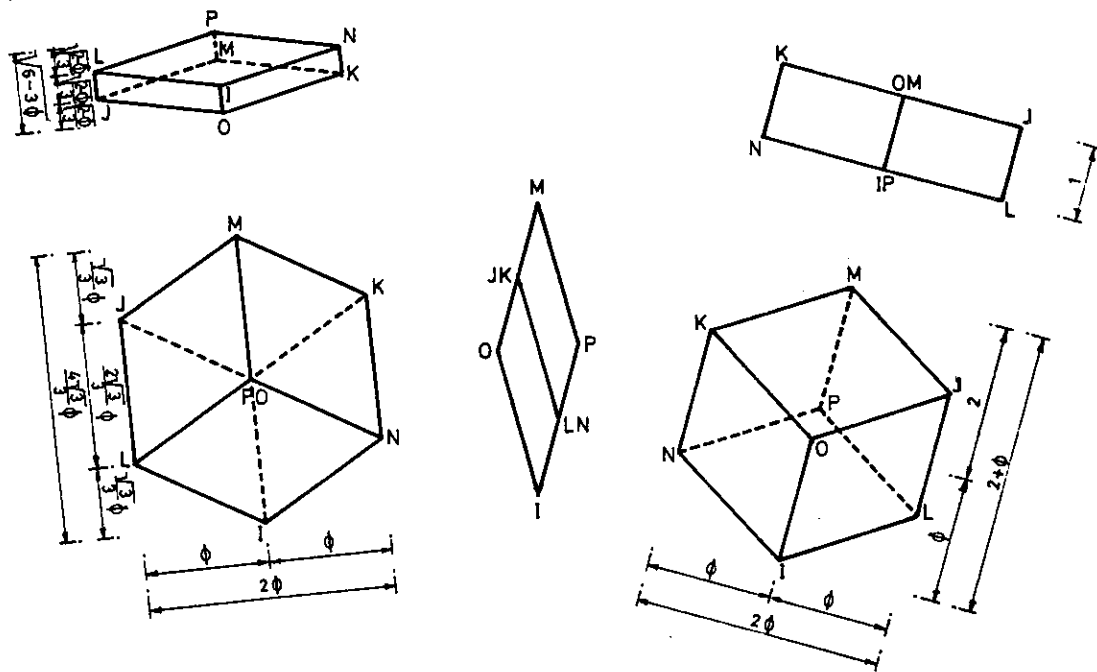


FIG 10.5.2. ICOSAEDRO Y ROMBOEDRO α



10. 6. 1. ROMBOEDRO b



10. 6. 2. ROMBOEDRO a

FIG 10.6. ROMBOEDROS a Y b

$$\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{12} \cdot 4\phi^2} = \sqrt{1 - \frac{\phi^2}{3}} = \sqrt{\frac{3 - (1 + \phi)}{3}} = \sqrt{\frac{2 - \phi}{3}} = \sqrt{\frac{\phi^{-2}}{3}} = \frac{\phi^{-1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3\phi}} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} =$$

$$= 0,3568220898$$

De donde $\overline{OP} = 3 \cdot \sqrt{\frac{2 - \phi}{3}} = \sqrt{6 - 3\phi} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3\phi} = \frac{\sqrt{3}}{\phi} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2} = 1,070466269$

El volumen de cada romboedro es la suma de los volúmenes del octaedro y los dos tetraedros que lo componen, siendo el de aquél equivalente al de cuatro tetraedros, como ya se vio en 8.1.1. para un romboedro afín a éstos; por lo tanto el romboedro tiene un volumen que es seis veces el del tetraedro \overline{OIK} .

Volumen del tetraedro:

$$V_{OIK} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{IJ} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{IJ}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \overline{OL}^2 - \frac{1}{12} \overline{IJ}^2}}_{\text{altura}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \overline{IJ}^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \overline{OL}^2 - \frac{1}{12} \overline{IJ}^2}$$

Para el romboedro b:

$$V_{OIK} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{\frac{2 + 3\phi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1 + \phi}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \phi}{3} = \frac{\sqrt{5} + 3}{6} = 0,8726779962$$

y el volumen de todo el romboedro es:

$$V_b = 6 \cdot V_{OIK} = 2 + 2\phi = \sqrt{5} + 3 = 5,236067977$$

Para el romboedro a, el volumen del tetraedro es:

$$V_{OIK} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 4\phi^2 \cdot \sqrt{\frac{2 - \phi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3\phi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3\phi}} = \frac{\phi}{3} = \frac{\sqrt{5} + 1}{6} = 0,5393446629$$

y el de todo el romboedro:

$$V_a = 6 \cdot V_{OIK} = 6 \cdot \frac{\phi}{3} = 2\phi = \sqrt{5} + 1 = 3,236067977$$

La relación entre ambos volúmenes es:

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{2 + 2\phi}{2\phi} = \frac{1 + \phi}{\phi} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,6180339887$$

Lo que era de esperar, pues siendo el volumen del romboedro la sección recta del mismo multiplicada por la arista, y siendo las aristas de ambos romboedros iguales, de valor R, al dividir ambos volúmenes V_b y V_a por R se obtendrán las áreas de los rombos de Penrose, secciones rectas de los romboedros, que están precisamente en esta proporción ϕ .

De otro modo, dividiendo los volúmenes de los romboedros por el área de la cara, que es la misma, 2ϕ , se obtendrá la distancia entre caras opuestas en ambos casos:

$$\frac{V_b}{2\phi} = \frac{2 + 2\phi}{2\phi} = \phi \quad \text{"} \quad \frac{V_a}{2\phi} = \frac{2\phi}{2\phi} = 1 \quad \text{"} \quad \frac{V_b}{V_a} = \phi$$

Las distancias entre caras están, desde luego, en esta misma proporción ϕ . Podemos obtener una relación entre el volumen del icosaedro y los de los romboedros.

El romboedro b equivale a seis tetraedros \overline{OIK} , con $\overline{IJ} = 2$, mientras que el icosaedro se compone de veinte de estos tetraedros, por lo que será:

$$\frac{V_b}{V_I} = \frac{6V_{OIJK}}{20V_{OIJK}} = \frac{3}{10} \quad " \quad V_b = \frac{3V_I}{10} = 0,3V_I$$

Por lo tanto, para el otro romboedro:

$$V_a = \frac{V_b}{\phi} = V_b(\phi-1) = \frac{3}{10}(\phi-1)V_I = \frac{3\phi-3}{10}V_I = \frac{3\sqrt{5}-3}{20}V_I = 0,1854101966V_I$$

Este es también un modo fácil de obtener el volumen del icosaedro en función de la semiarista:

$$V_I = \frac{10}{3} V_b = \frac{10}{3}(2+2\phi) = \frac{20+20\phi}{3} = \frac{10}{3}(\sqrt{5}+3) = \frac{10\sqrt{5}}{3} + 10 = 17,453559925$$

En función de la arista habría sido $\frac{5}{6}(1+\phi) = 2,181694991$

Como todos los romboedros, cada uno de éstos por separado puede llenar el espacio; este espacio romboédrico puede obtenerse por una transformación afín de un espacio cúbico, resultado de multiplicar las distancias sobre uno de los ejes ternarios por un factor (>1 para el romboedro b: dilatación; <1 para el romboedro a: contracción). Calculemos las relaciones $\overline{OP}/\overline{IJ}$ en ambos romboedros y en el cubo y comparémoslas:

Para el romboedro b:

$$\frac{OP}{IJ} = \frac{\sqrt{3}\phi^2}{2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{27}}{4} = 2,267283942$$

Para el romboedro a:

$$\frac{OP}{IJ} = \frac{\sqrt{3}/\phi}{2\phi} = \frac{\sqrt{3}}{2\phi^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-\phi) = \frac{\sqrt{3} \cdot 3-\sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{27}-\sqrt{15}}{4} = 0,3307922691$$

Para el cubo:

$$\frac{OP}{IJ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1,2247448713$$

Dilatación del romboedro b respecto al cubo:

$$\frac{\sqrt{3}\phi^2}{2} : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \phi^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \phi^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\phi) = \frac{\sqrt{2} \cdot 3+\sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{10}}{4} = 1,851229587$$

Contracción del romboedro a respecto al cubo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\phi^2} : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2\phi^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \phi^{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-\phi) = \frac{\sqrt{2} \cdot 3-\sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{10}}{4} = 0,2700907568$$

Afinidad entre los romboedros a y b (razón de sus razones):

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \phi^2 : \frac{\sqrt{2}}{2} \phi^{-2} = \phi^4 = 2+3\phi = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 6,854101966$$

Producto entre las razones de afinidad de ambos romboedros respecto del cubo:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \phi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \phi^{-2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Esto quiere decir que el achatamiento del cubo que produce el romboedro b es doble que la dilatación que genera el romboedro a.

Recordemos que una dilatación de un eje ternario del cubo de razón 2 producía el romboedro constituido por un octaedro y dos tetraedros regulares que en

7.2.2. y 8.1.1. originaba una división semirregular del espacio.

Si cortamos los romboedros por sus planos de simetría, podremos dividirlos, como todos los poliedros que tengan alguno, en módulos elementales asimétricos. Dada su simetría no isótropa con un eje ternario y tres ejes binarios perpendiculares a él, que unen los centros de las aristas que no lo cortan, los cuatro planos de simetría determinados por estos ejes producen doce módulos, o seis pares de enantiomorfos.

Las figuras 10.7. nos muestran estos módulos elementales.

Añadimos ahora unas figuras en las que se ven los romboedros en las posiciones de máxima simetría común respecto al icosaedro (figuras 10.8.) y en relación con los elementos de simetría del sistema del dodecaedro, representados estos elementos (planos y ejes) por sus intersecciones con la esfera de radio R igual a la arista del romboedro (figuras 10.9.); en ambos casos el vértice de un triedro coincide con el centro del sistema de simetría isótropo.

Designamos los triedros por sus ángulos ($\alpha=63^{\circ}26'5,82''$; $\beta=116^{\circ}33'54,18''$) o por sus lados [$a=36^{\circ}$; $b=72^{\circ}$; $c=108^{\circ}$; $d=144^{\circ}$] , de modo que los triedros en cuestión son para cada romboedro los siguientes:

Romboedro b:

triedro (α, α, α) = [b, b, b] : figuras 10.8.1. y 10.9.1.

triedro (α, β, β) = [b, c, c] : figuras 10.8.2. y 10.9.2.

Romboedro a:

triedro (β, β, β) = [d, d, d] : figuras 10.8.3. y 10.9.3.

triedro (α, α, β) = [a, a, d] : figuras 10.8.4. y 10.9.4.

Veamos para terminar qué porción de espacio abarca cada uno de estos cuatro triedros. Podemos verlo directamente en las figuras 10.4., contando los módulos superficiales de la esfera que abarca cada triedro y teniendo en cuenta que la esfera completa contiene 120 módulos, o calculando el exceso esférico de los triángulos y considerando que 1/2 esfera corresponde a un exceso esférico de 360° .

Ambas consideraciones conducen al mismo resultado:

Para el romboedro b:

Triedro (α, α, α) = [b, b, b] (figura 10.4.1.):

$$\frac{6 \text{ mod}}{120 \text{ mod/esf}} = \frac{3 \cdot 72^{\circ} - 180^{\circ}}{720^{\circ}/\text{esf}} = \frac{36^{\circ}}{720^{\circ}/\text{esf}} = \frac{1}{20} \text{ de esfera}$$

Triedro (α, β, β) = [b, c, c] (figura 10.4.3.):

$$\frac{18 \text{ mod}}{120 \text{ mod/esf}} = \frac{72^{\circ} + 2 \cdot 108^{\circ} - 180^{\circ}}{720^{\circ}/\text{esf}} = \frac{108^{\circ}}{720^{\circ}/\text{esf}} = \frac{3}{20} \text{ de esfera}$$

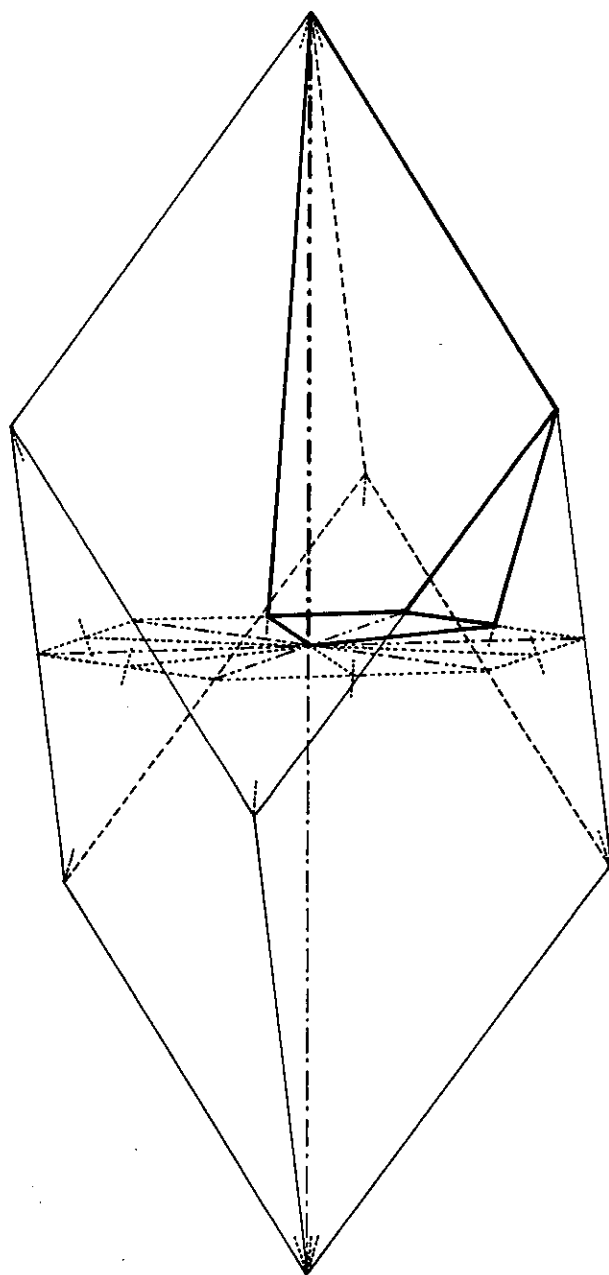


FIG 10.7.1. MODULO DEL ROMBOEDRO. b

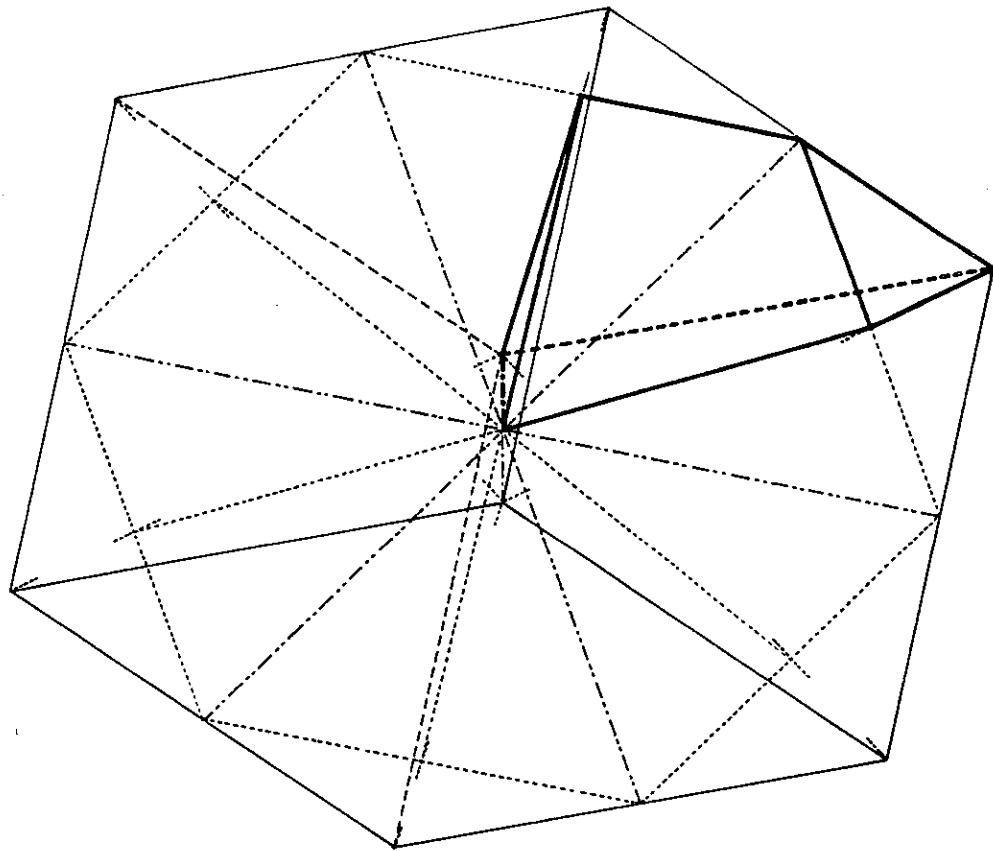


FIG 10.7.2. MODULO DEL ROMBOEDRO α

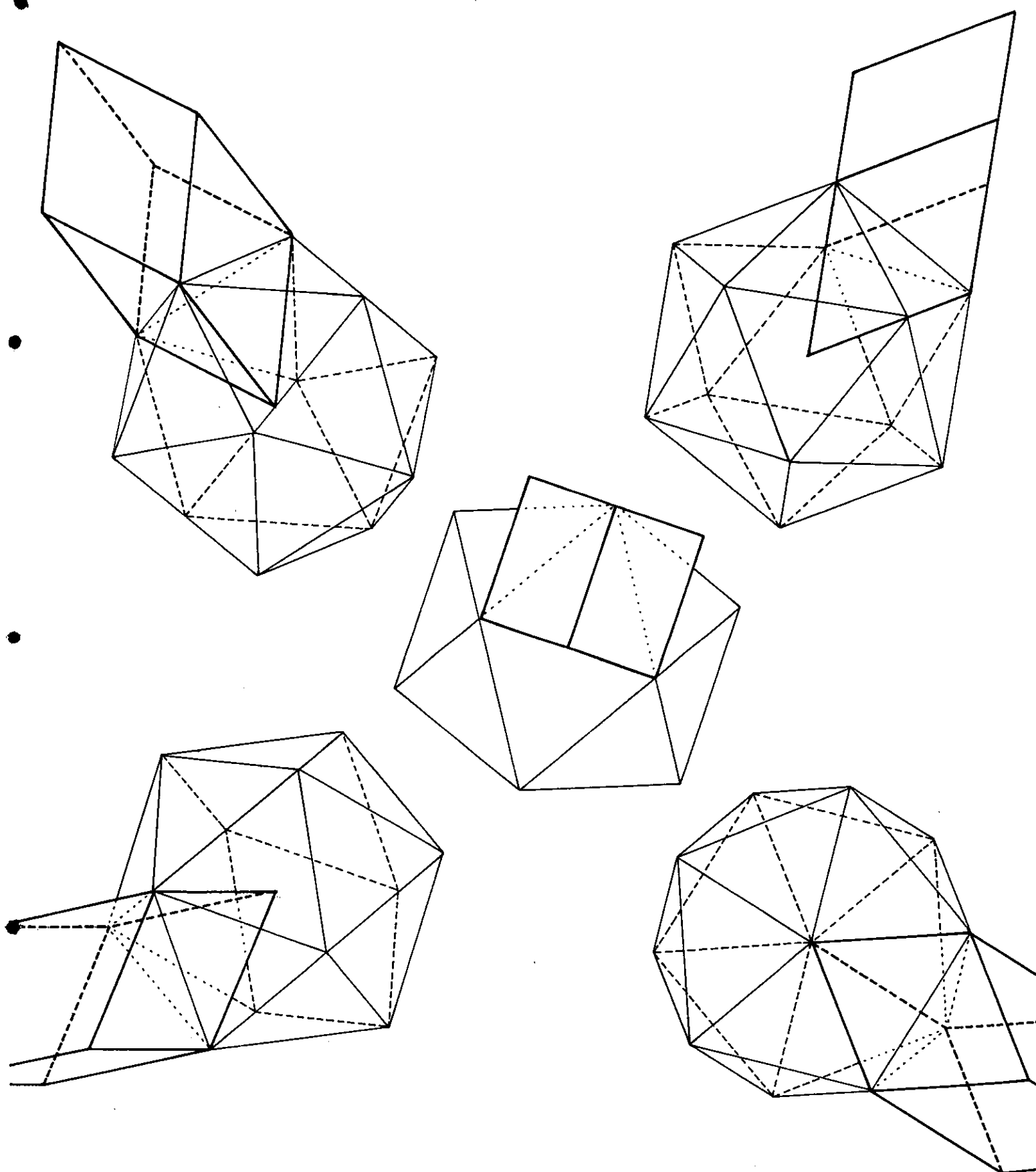


FIG 10.8.1. ROMBOEDRO b
 VERTICE $(\alpha, \alpha, \alpha) = [b, b, b]$ EN EL CENTRO DEL ICOSAEDRO

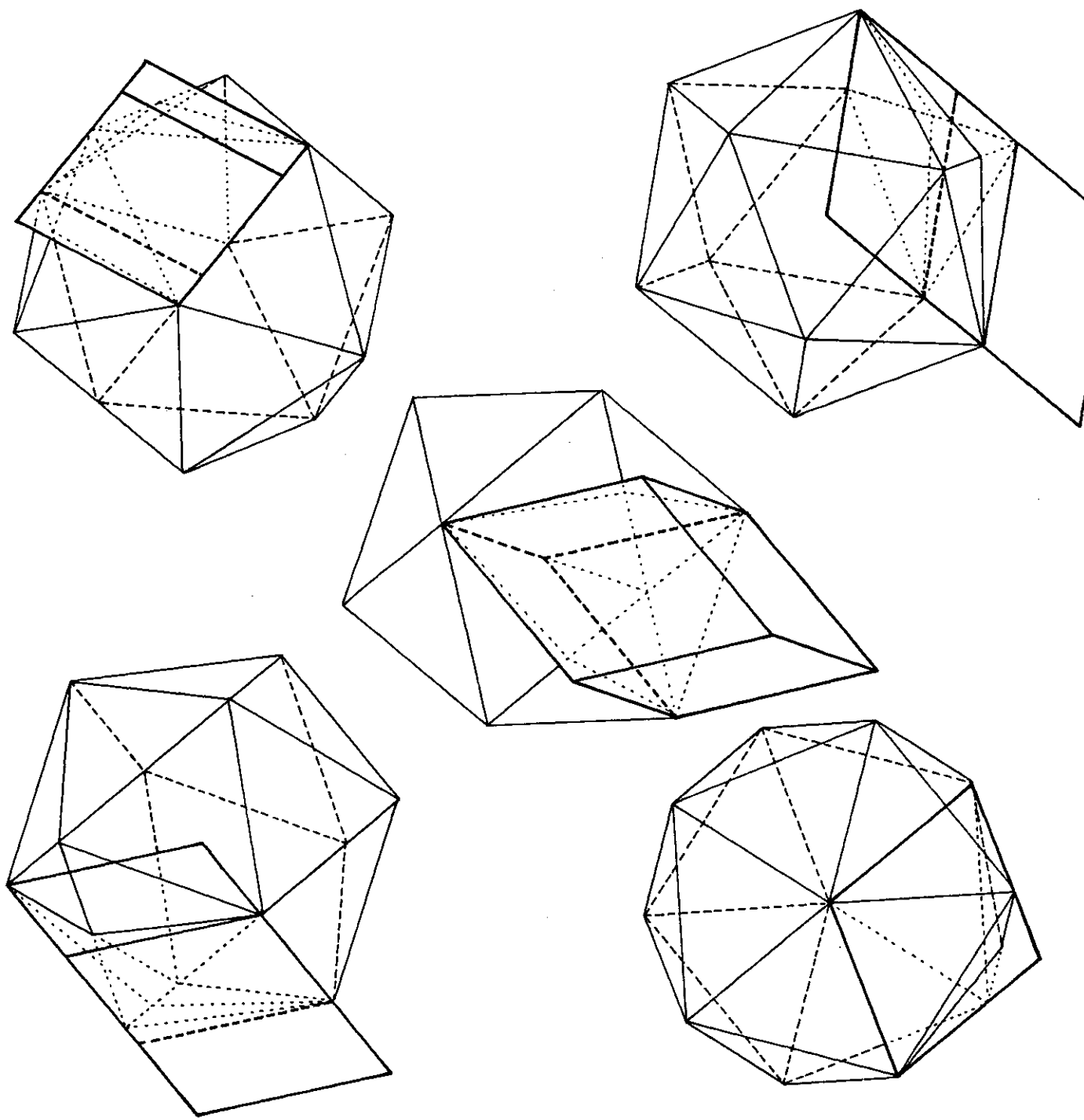


FIG 10.8.2. ROMBOEDRO b
 VERTICE $(\alpha, \beta, \beta) = [b, c, c]$ EN EL CENTRO DEL ICOSAEDRO

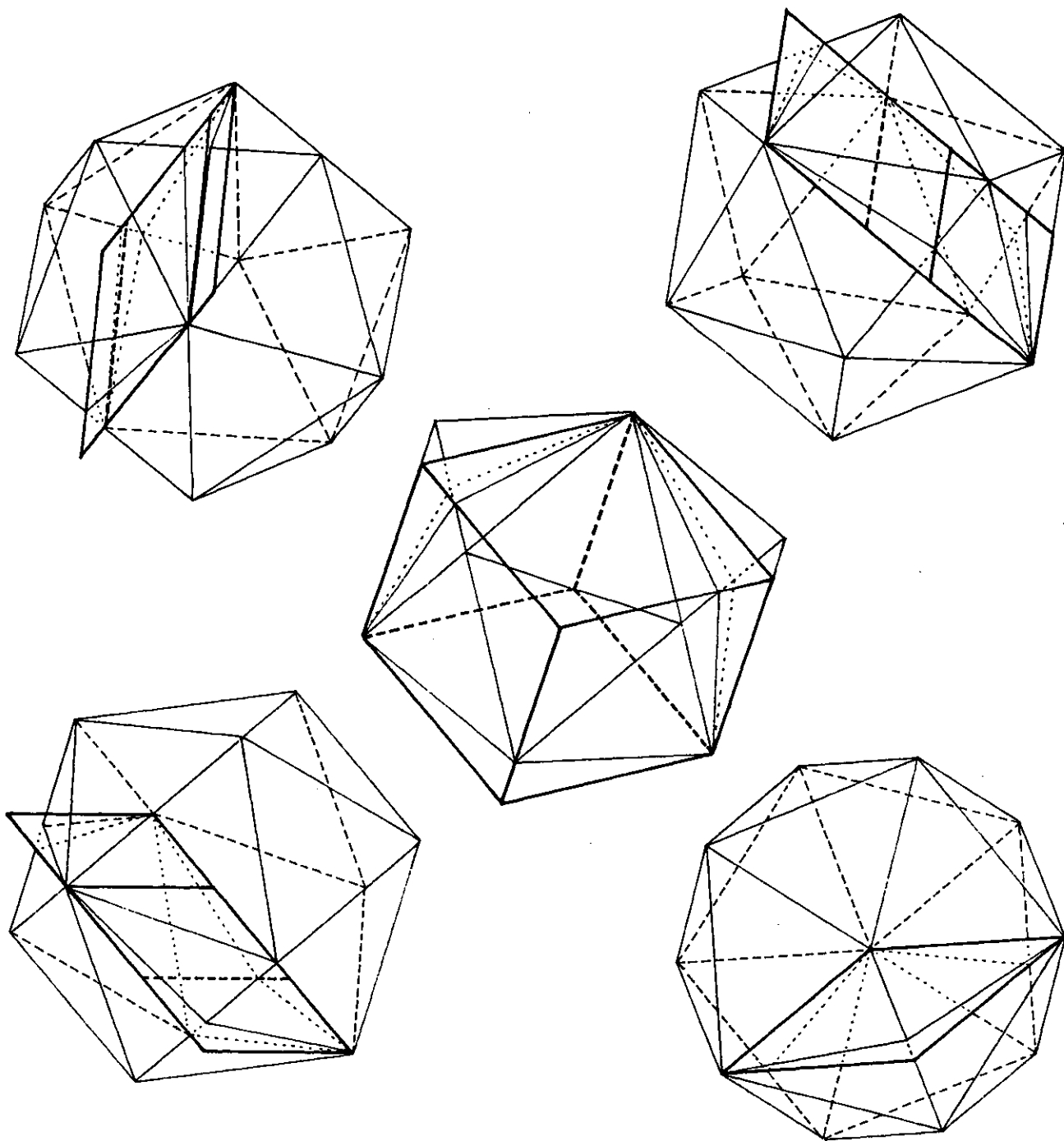


FIG 10. 8. 3. ROMBOEDRO α
VERTICE $(\beta, \beta, \beta) = [d, d, d]$ EN EL CENTRO DEL ICOSAEDRO

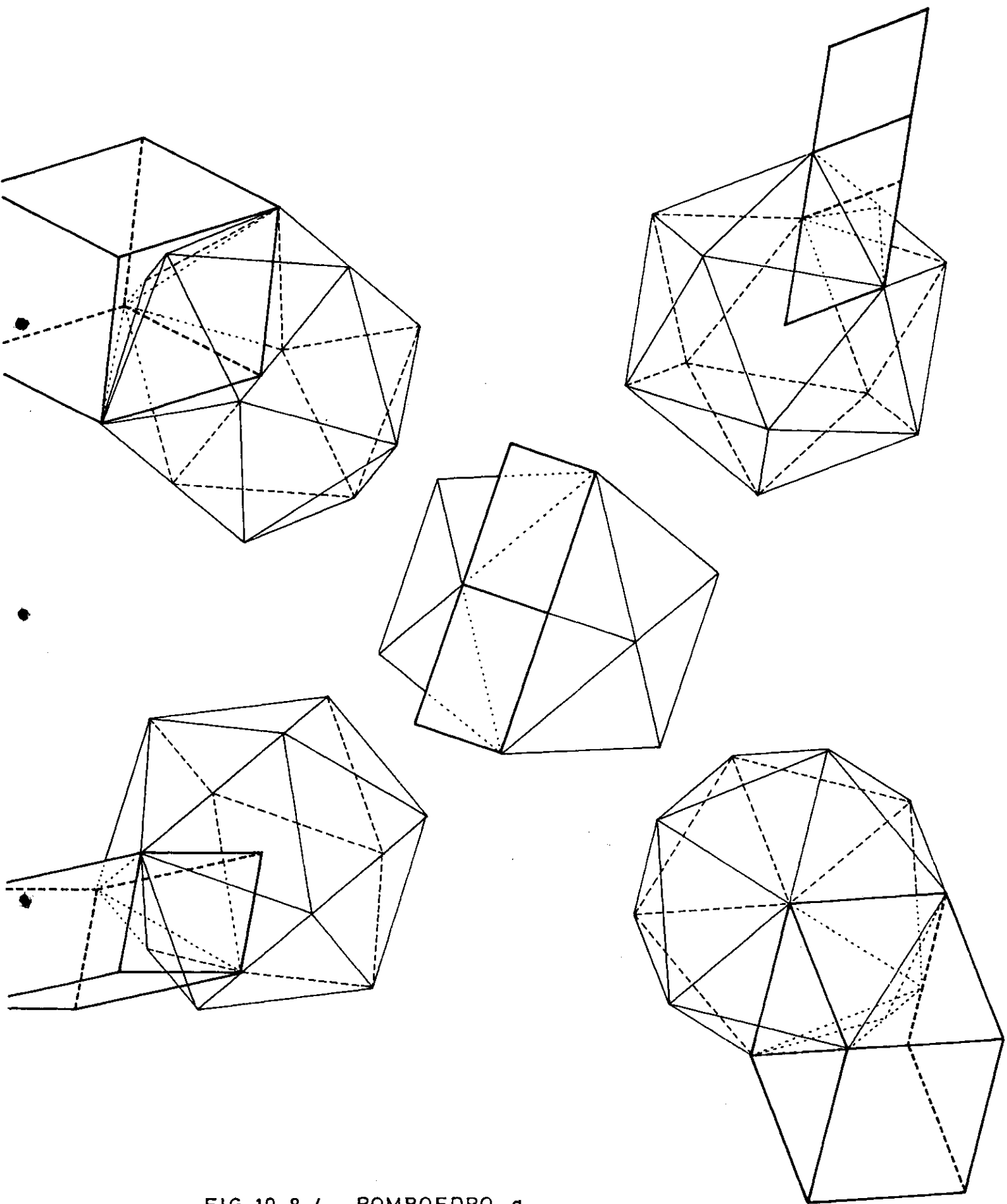


FIG 10.8.4. ROMBOEDRO α
 VERTICE $(\alpha, \alpha, \beta) = [a, a, d]$ EN EL CENTRO DEL ICOSAEDRO

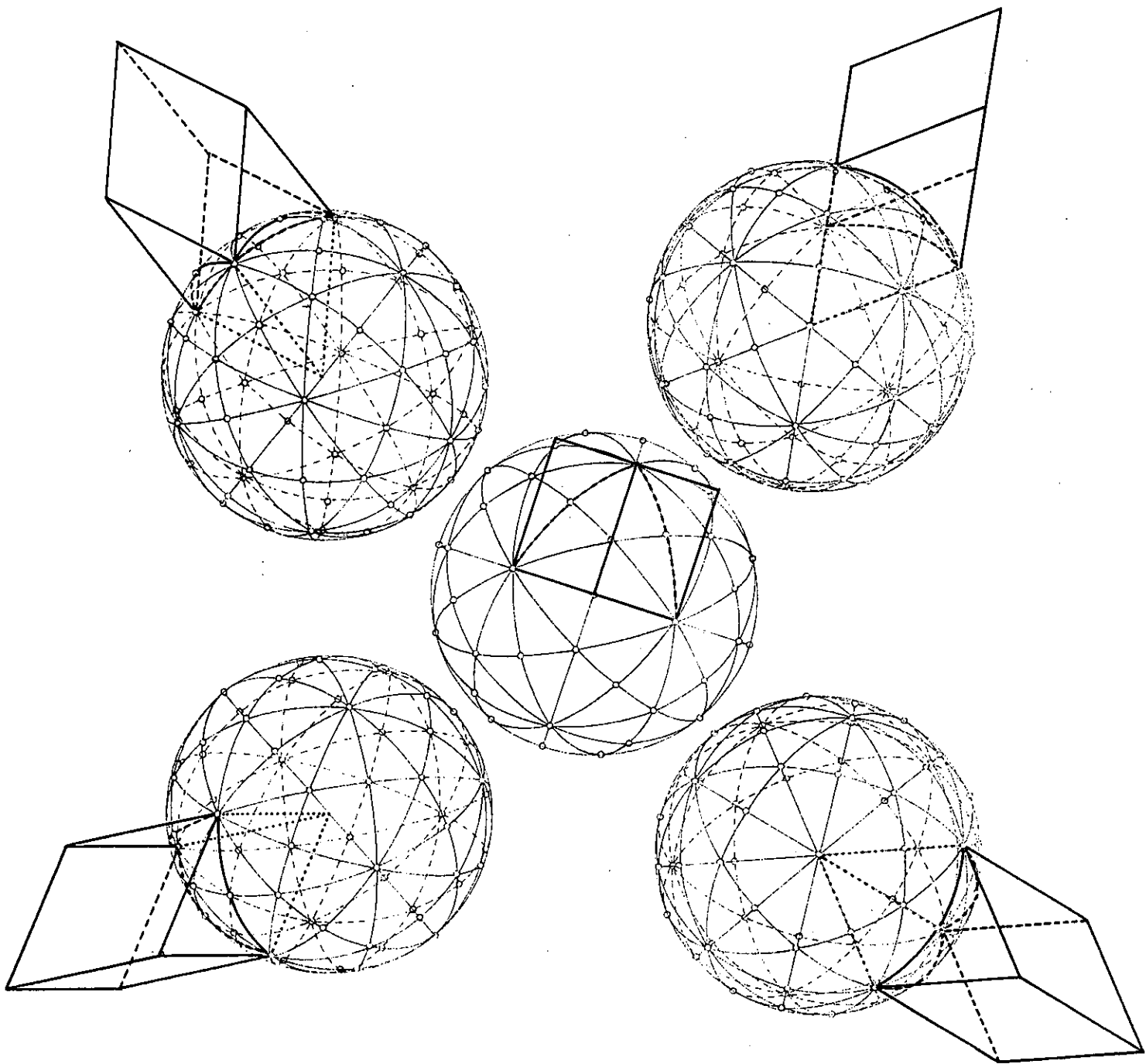


FIG 10.9.1. ROMBOEDRO b
 VERTICE $(\alpha, \alpha, \alpha) = [b, b, b]$ EN EL CENTRO DE LA ESFERA

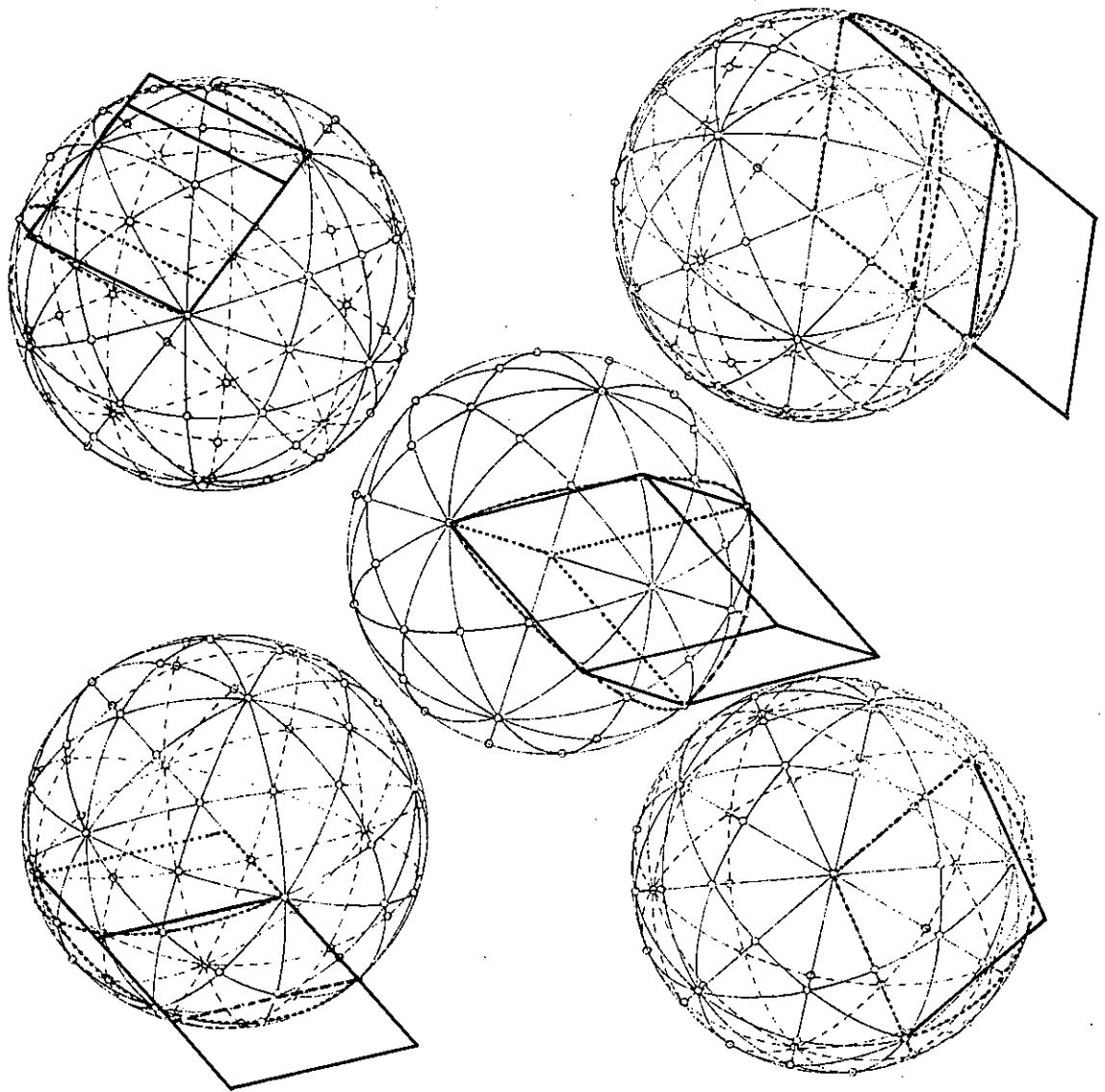


FIG 10. 9. 2. ROMBOEDRO b
VERTICE $(\alpha, \beta, \beta) = [b, c, c]$ EN EL CENTRO DE LA ESFERA

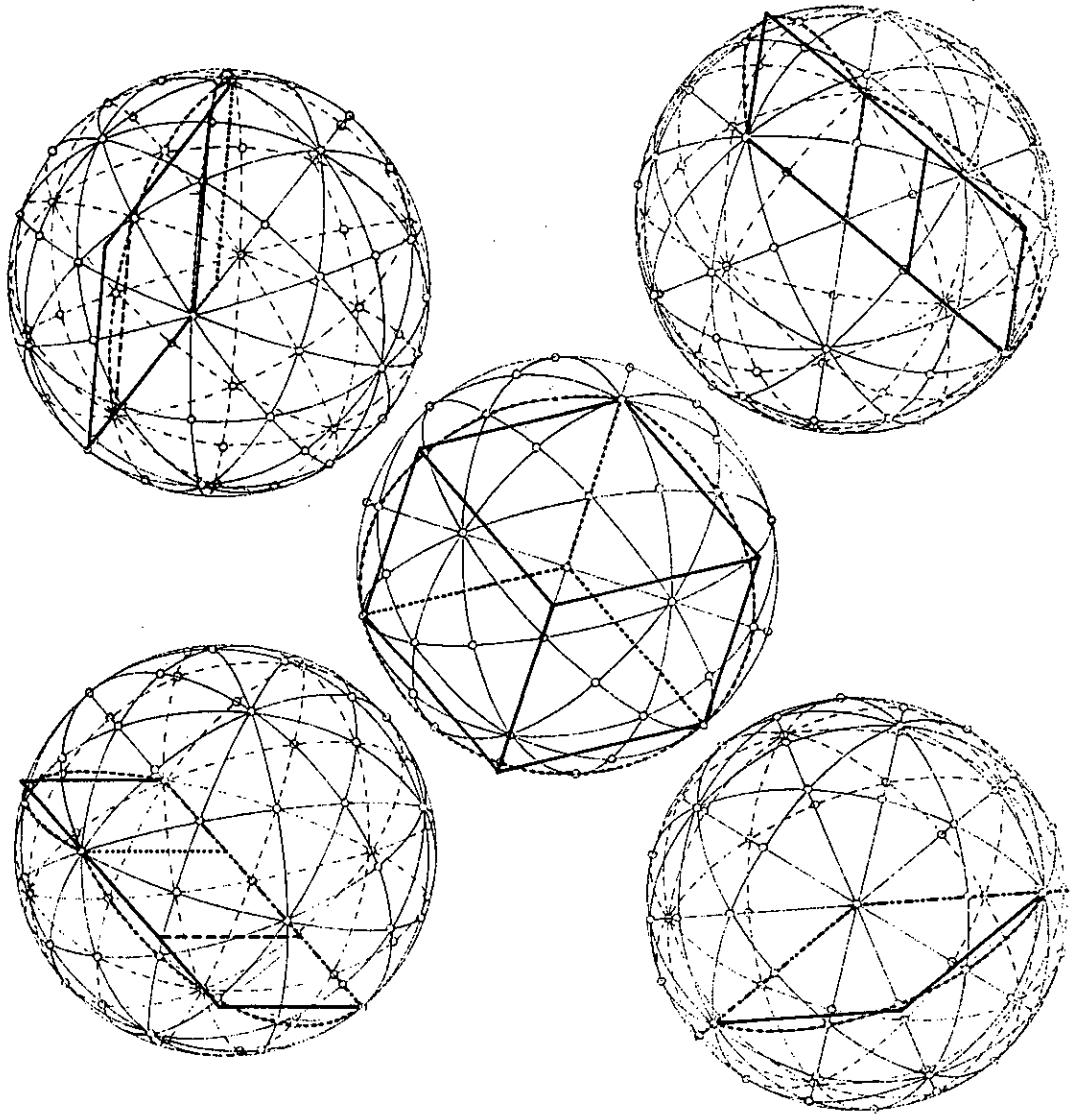


FIG 10.9.3. ROMBOEDRO α
VERTICE $(\beta, \beta, \beta) = [d, d, d]$ EN EL CENTRO DE LA ESFERA

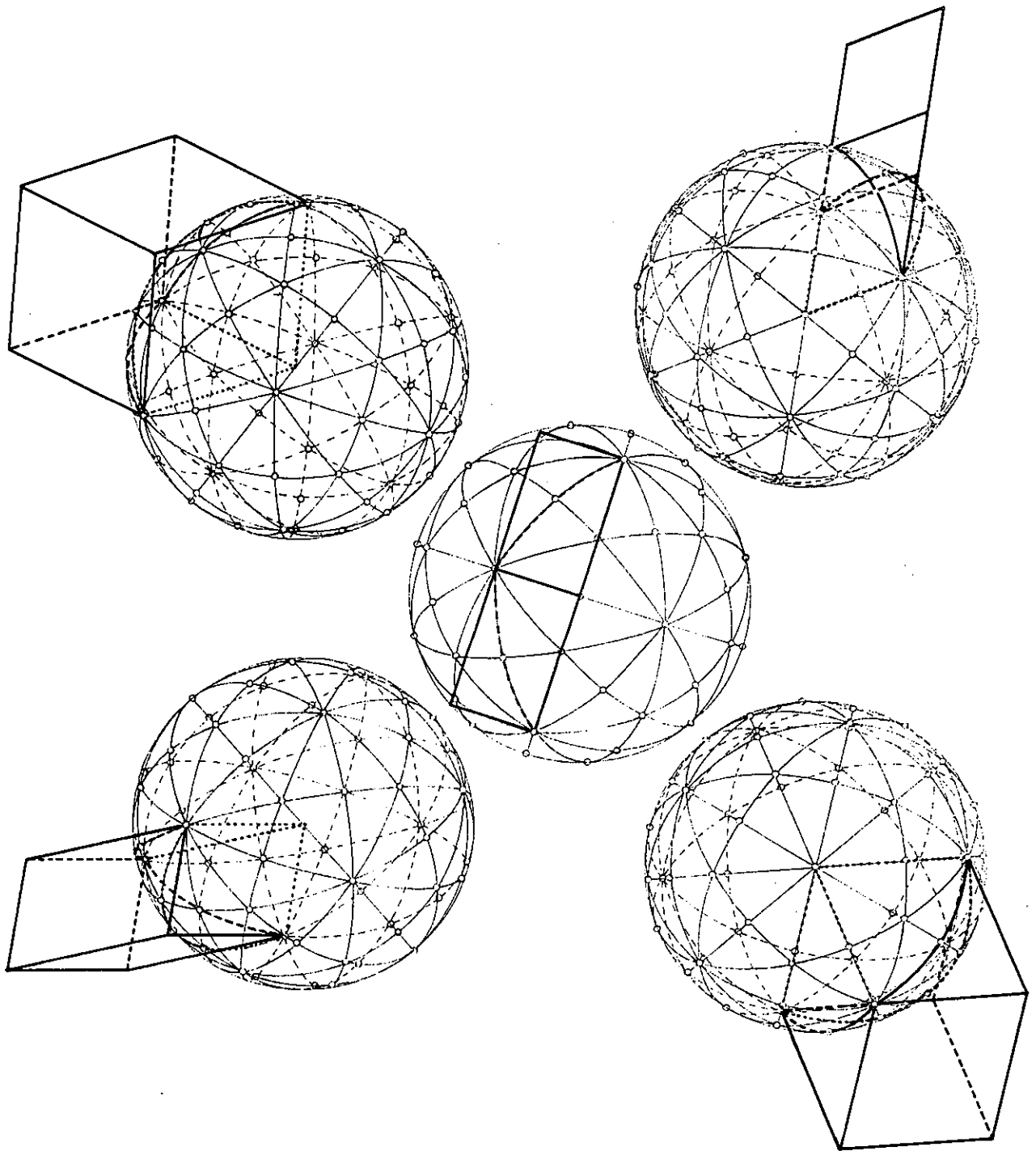


FIG 10. 9. 4. ROMBOEDRO α
 VERTICE $(\alpha, \alpha, \beta) = [a, a, d]$ EN EL CENTRO DE LA ESFERA

Para el romboedro a:

Triedro (β, β, β) = $[\bar{d}, d, d]$ (figura 10.4.4.):

$$\frac{42 \text{ mod}}{120 \text{ mod/esf}} = \frac{3 \cdot 144^\circ - 180^\circ}{720^\circ/\text{esf}} = \frac{252^\circ}{720^\circ/\text{esf}} = \frac{7}{20} \text{ de esfera}$$

Triedro (α, α, β) = $[\bar{a}, a, d]$ (figura 10.4.2.):

$$\frac{6 \text{ mod}}{120 \text{ mod/esf}} = \frac{2 \cdot 36^\circ + 144^\circ - 180^\circ}{720^\circ/\text{esf}} = \frac{36^\circ}{720^\circ/\text{esf}} = \frac{1}{20} \text{ de esfera}$$

Esto es: el romboedro b ocupa, según el vértice elegido, 1/20 ó 3/20 de espacio alrededor del mismo, mientras que el romboedro a ocupa 7/20 ó 1/20 de espacio alrededor de sus dos tipos de vértice.

10.2. COMPARTIMENTACION TRIDIMENSIONAL DE PENROSE

Las aristas de los romboedros pueden clasificarse según el valor de los diedros a que pertenecen; así habrá aristas b y c en el romboedro b y aristas a y d en el romboedro a.

En la parte inferior de la figura 10.10.1. se muestra el romboedro b junto con un icosaedro asociado al mismo, proyectados ambos según la dirección de una arista b. Se ha situado un vértice $[b, b, b]$ en el centro del icosaedro. La proyección del romboedro es un rombo de ángulos b, c, b, c, esto es, el rombo de Penrose de clase b. Por otra parte, como la arista b coincide con un diámetro del icosaedro (eje quinario), la proyección de éste según esta dirección presenta simetría quinario. Así, las cinco caras contiguas al extremo proximal del diámetro se proyectan como un pentágono regular.

Tenemos entonces una proyección en la que aparecen dos figuras planas (rombo y pentágono) coincidentes con la parte central de la figura 10.1.1.

Si en lugar de proyectar sobre un plano normal a una arista b lo hubiésemos hecho según una arista c (colocado el romboedro de modo que el centro del icosaedro fuese un vértice $[b, c, c]$, para que la arista c del primero pudiese coincidir con un radio del segundo), el rombo correspondiente tendría un ángulo c coincidente con el centro del pentágono, ocupando tres módulos de 36° del mismo, y coincidiría un lado del rombo con un radio y otro con una apotema.

Fijémosnos ahora en la parte inferior de la figura 10.10.2. En ella aparece un romboedro a en el que se ha hecho coincidir un vértice $[a, a, d]$ con el centro del icosaedro. La proyección según la arista a es un rombo de Penrose de clase a, y como las aristas del icosaedro más alejadas del eje quinario se proyectan como un decágono, la figura coincide con la parte central de la 10.1.2.

Si hubiésemos colocado el centro del icosaedro coincidiendo con un vértice $[d, d, d]$, proyectando ortogonalmente sobre un plano normal a la arista, el rombo resultante de la proyección del romboedro tendría un ángulo d en el centro del decágono representativo del icosaedro, ocupando ocho módulos de

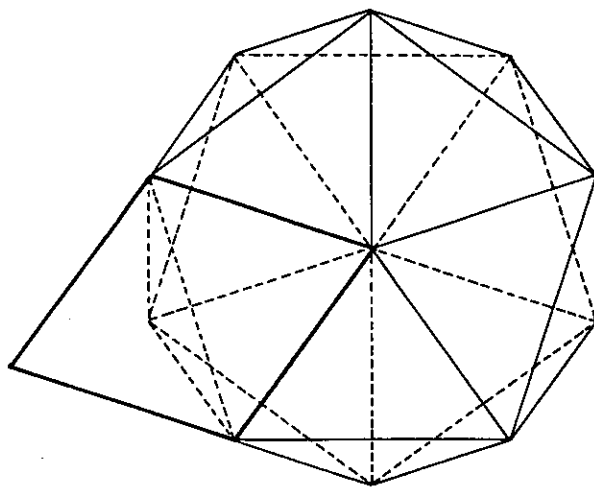
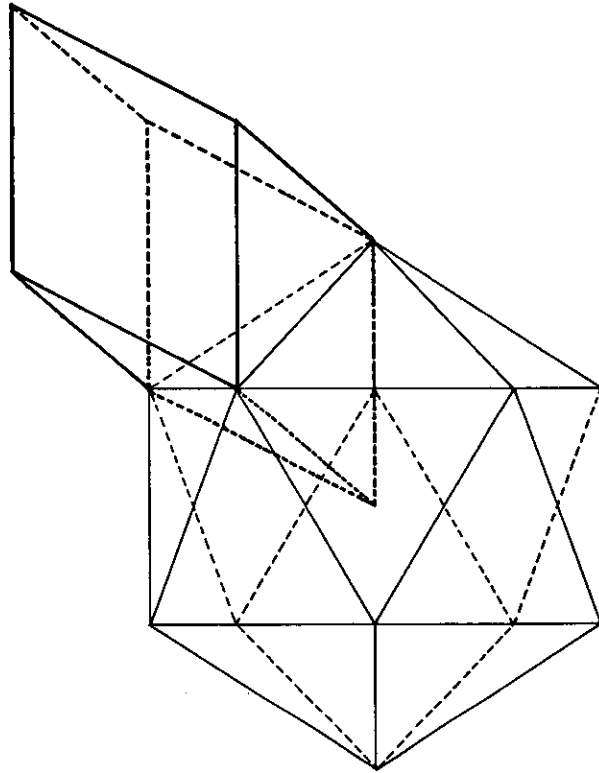


FIG 10.10.1. ICOSAEDRO Y ROMBOEDRO b

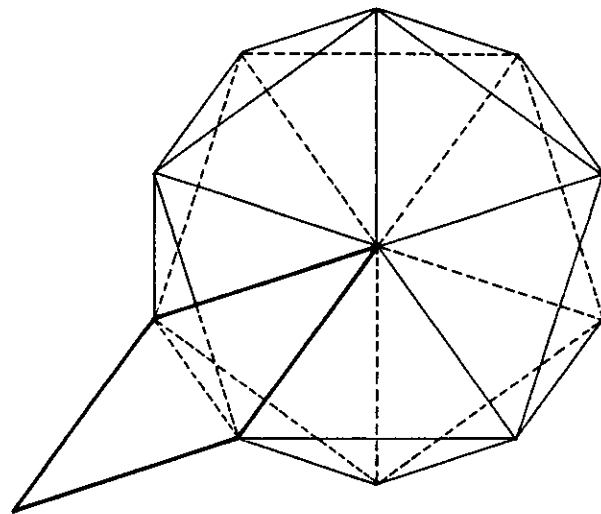
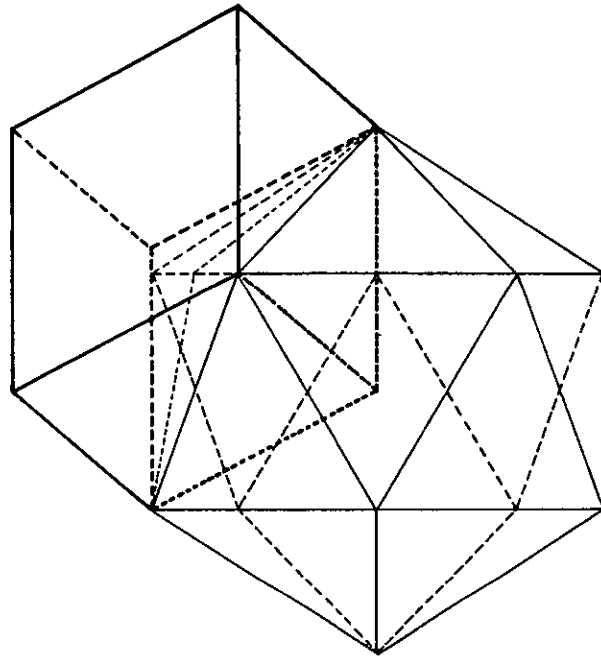


FIG 10.10.2. ICOSAEDRO Y ROMBOEDRO α

18° del decágono (cuatro módulos de 36° del pentágono) en correspondencia sus lados con dos radios no contiguos del pentágono.

De este modo se establece la coincidencia total entre los romboedros y los rombos de Penrose, correspondiéndose las caras de los primeros con los lados de los segundos, y los vértices de los rombos con las aristas de los romboedros.

Como además las caras de los dos romboedros son idénticas, pueden ponerse en contacto compartiéndose sus aristas igual que ocurre cuando los rombos comparten una arista y los vértices extremos de la misma.

Y de igual modo que los rombos pueden rodear a un vértice de las numerosas formas vistas en 9.3., los romboedros pueden rodear una arista de forma absolutamente equivalente. De hecho las figuras que finalizaban el capítulo 9 pueden considerarse, además de agrupaciones de rombos en torno a un vértice común, agrupaciones de romboedros de las clases correspondientes en torno a una arista común, proyectadas en la dirección de la misma sobre un plano normal a ella.

Las figuras 10.11. representan, como ejemplo, dos de estas agrupaciones de romboedros en torno a una arista: en 10.11.1. aparece la agrupación $(a)_{10}$, que contiene solamente romboedros a, mientras que en 10.11.2. se ve la agrupación $(b)_5$, con sólo romboedros b. La parte inferior de las figuras coincide con lo visto al final del capítulo 9, mientras en la parte superior se representa una proyección ortogonal sobre un plano perpendicular, como pide el sistema diédrico. Estas vistas de la parte superior nos facilitan una idea más cabal de cómo se agrupan los romboedros en torno a una arista. Del mismo modo podríamos añadir un "alzado" semejante sobre cada uno de los dibujos del final del capítulo 9, considerado como "planta" de la agrupación de romboedros.

Fijémonos en que los triedros de los extremos de una misma arista son de distinto tipo: Si se trata del romboedro a, uno es $[a, a, d]$ y el otro $[d, d, d]$ si es un romboedro b, un triedro es $[b, b, b]$ y otro $[b, c, c]$. Como $a+d=b+c=180^\circ$, cada romboedro puede encajarse con otro idéntico con sus aristas en prolongación, de modo que cada agrupación en torno a una arista puede encajarse con una agrupación idéntica, con tal que los extremos en contacto sean los opuestos.

De esta manera, colocando una agrupación idéntica y en la misma posición bajo la representada en la figura 10.11.1. podemos ocupar totalmente el espacio en torno al centro del icosaedro, y lo mismo ocurriría con las agrupaciones de la figura 10.11.2., y con cualquiera de las demás posibles, cuyas plantas aparecen al final del capítulo 9.

Para el caso de la figura 10.11.1. cada romboedro a ocupa $1/20$ del espacio

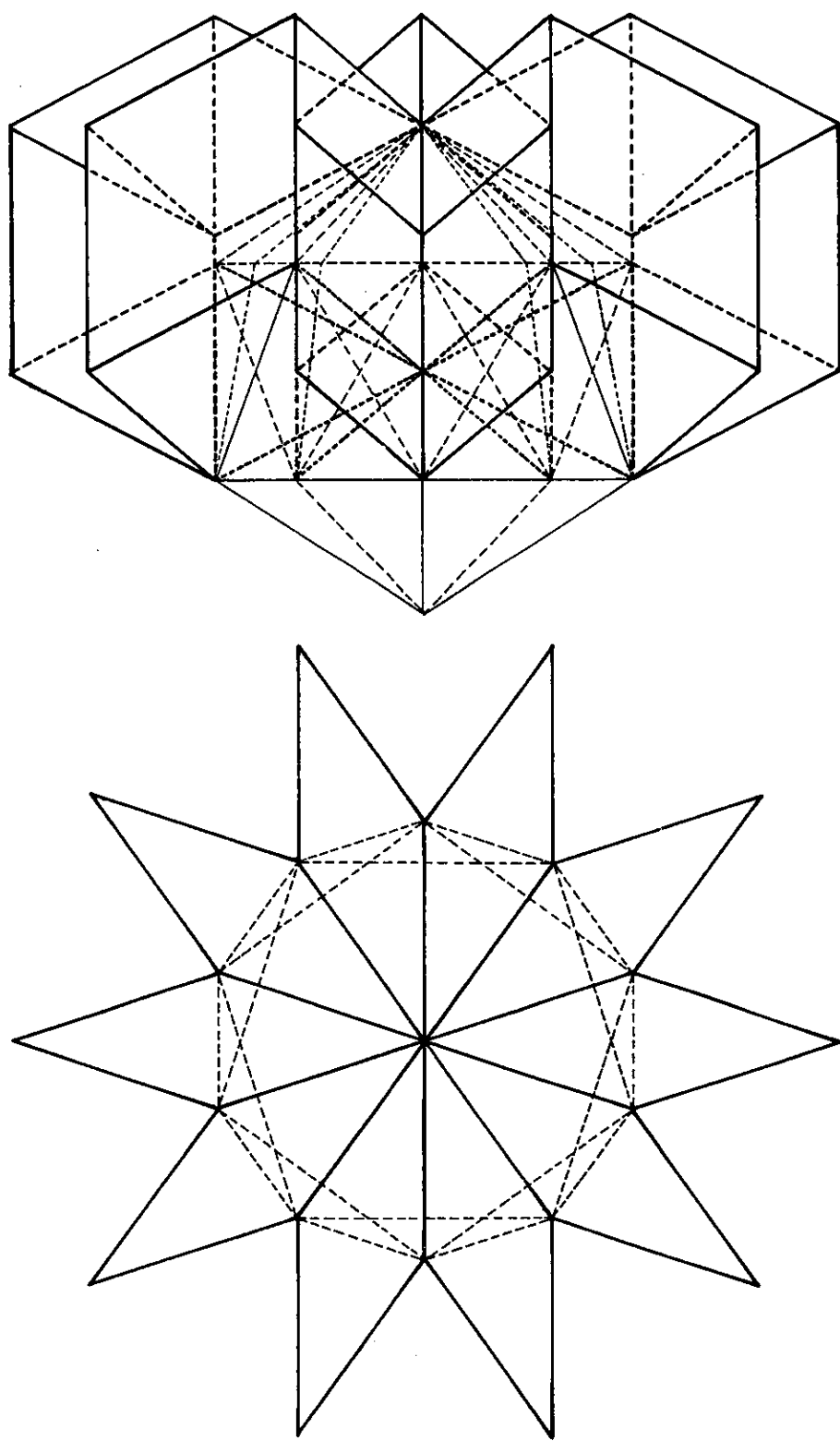


FIG 10.11.1. ICOSAEDRO Y CORONA DE ROMBOEDROS α

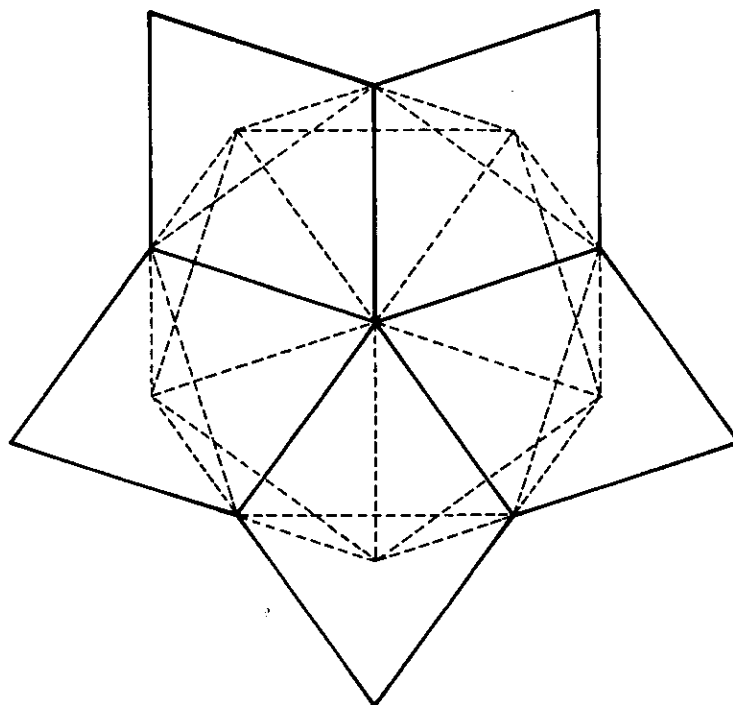
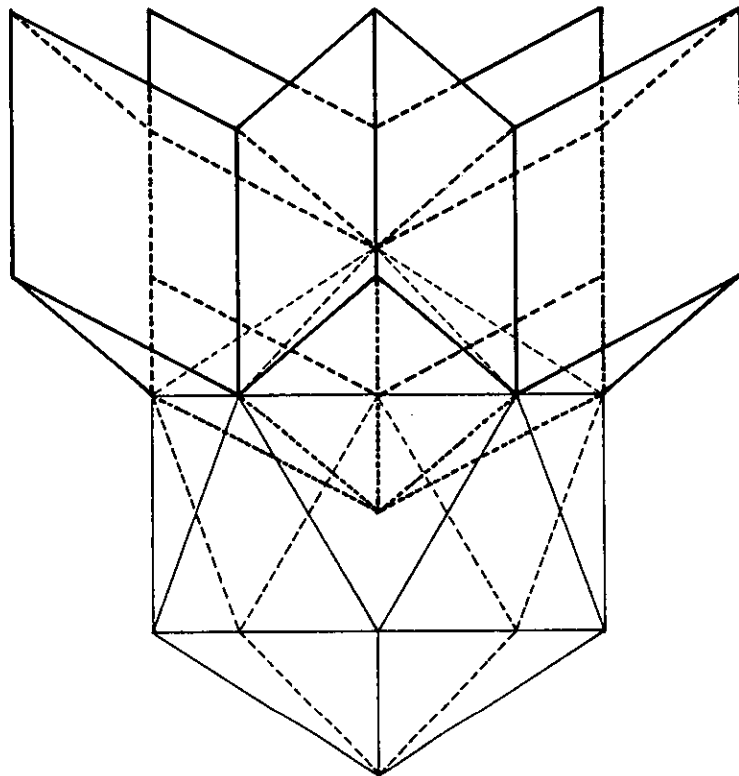


FIG 10.11.2. ICOSAEDRO Y CORONA DE ROMBOEDROS b

alrededor del vértice común en la posición representada, (1), por lo que los diez que aparecen ocupan $10/20 = 1/2$ espacio; en la posición complementaria, (2), ocupan la mitad restante. De hecho, no pueden distinguirse $(a)_{10}(1)$ y $(a)_{10}(2)$; en todo caso, 20 romboedros a permiten ocupar el espacio alrededor de un vértice común.

En la figura 10.11.2. cada romboedro b ocupa también $1/20$ del espacio en torno al vértice en la posición (1), con lo que los cinco de la agrupación $(b)_5(1)$ ocupan $5/20 = 1/4$ del espacio. En la posición complementaria (2) cada uno ocupa $3/20$, y el conjunto, $(b)_5(2)$, $15/20 = 3/4$ del espacio. En total 10 romboedros b, 5 en cada posición, ocupan todo el espacio en torno al vértice común. Este ejemplo nos sirve para ver que dos posiciones complementarias de una misma agrupación no son la única posibilidad para ocupar el espacio en torno a un vértice: basta observar que en lugar de completar $(b)_5(1)$ con $(b)_5(2)$ usando diez romboedros, puede hacerse con veinte, todos en la misma posición (1), encajando cada uno en una cara del icosaedro.

Tomando como base un mosaico plano de Penrose, puede colocarse una capa de romboedros con aristas ortogonales a dicho plano cuya proyección sea el mosaico. La colocación de capas idénticas sucesivas permite ocupar el espacio indefinidamente en la dirección normal al plano de referencia; pero también, dado que las caras de los romboedros son iguales, podemos colocar sobre los romboedros de una capa otros diferentes, o en posiciones no complementarias. Cada una de las aristas de diferente dirección permite agrupaciones de romboedros en torno a ella, así que esta compartimentación espacial puede extenderse sin mantener ejes ni planos de simetría y con un carácter aleatorio e imprevisible, como ocurría en los mosaicos planos.

Pero de la misma manera que en el plano todos los lados de los rombos eran paralelos a alguna de las cinco direcciones definidas por los ejes de simetría del pentágono, en el espacio todas las aristas de la compartimentación son paralelas a las seis direcciones definidas por los ejes quinarios del sistema del dodecaedro, que son los seis diámetros del icosaedro. Esto es así porque los vértices contiguos, con una arista común, tienen otros dos pares de aristas paralelas, con lo que los icosaedros que coloquemos en estos vértices tienen que mantener tres diámetros en la misma posición, lo que automáticamente orienta a los otros tres, produciendo en el espacio una red de icosaedros infinitamente densa, dos cualesquiera de ellos relacionados por una traslación, red semejante a la de pentágonos de la figura 9.1.2.

10.3. CLASES DE ARISTAS DEL MOSAICO

De modo paralelo a lo expuesto en 9.3., indicamos ahora las agrupaciones que se pueden formar alrededor de una arista con los dos tipos de romboedros, cada uno a su vez con dos posiciones posibles en la arista. Llamaremos a una arista dada a, b, c ó d, según sea el diedro que se forma en ella, y a la agrupación de romboedros según los que allí concurren.

Así como una agrupación de rombos en torno a un vértice podía carecer de ejes de simetría, y existir por lo tanto una pareja de enantiomorfos, ocurre lo mismo ahora, pues si una agrupación tiene planos de simetría éstos siempre contienen a la arista común, al no ser nunca simétrica una agrupación en otra dirección diferente.

En principio, para cada una de estas agrupaciones existen dos posiciones posibles, la (1) y la (2), complementarias entre sí, esto es, que juntas llenan el espacio, pero en algunos casos, como el ya visto $(a)_{10}$, ambas posiciones son idénticas; ello ocurre cuando la agrupación presenta un número par de planos de simetría, y por lo tanto un eje 2n-ario. De hecho n siempre vale 1 en estos casos, salvo el ya visto $(a)_{10}$, en que vale 5; en todos los demás casos existen dos posiciones de la misma agrupación.

Veamos ahora las agrupaciones de romboedros en torno a una arista que puede haber, indicando, cuando existan, las dos posiciones diferentes de la agrupación respecto al icosaedro, y señalando la proporción de espacio ocupada en cada vértice de la arista común.

Con uno o dos tipos de diedro:

Tipo	Clase	Arista	Planos de sim.	Eje de simet.	Posición	Ocup.del espacio	
[a,b]	10a	$(a)_{10}$	10	10ario		$10/20=1/2$	
	8a+b	(a,a,a,a,a,a,a,a,b)	1		(1) (2)	$9/20$ $11/20$	
	6a+2b	I	(a,a,a,a,a,a,b,b)	1		(1) (2)	$8/20=2/5$ $12/20=3/5$
			(a,a,a,a,a,b,a,b)	1		(1) (2)	$10/20=1/2$ $10/20=1/2$
		III	(a,a,a,a,b,a,a,b)	1		(1) (2)	$8/20=2/5$ $12/20=3/5$
			IV	(a,a,a,b,a,a,a,b)	2	bin.	
	4a+3b	I	(a,a,a,a,b,b,b)	1		(1) (2)	$7/20$ $13/20$
			II (a,a,a,b,a,b,b)	1		(1)	$9/20$
			III (a,a,a,b,b,a,b)			(2)	$11/20$
			IV (a,a,b,a,a,b,b)	1		(1) (2)	$7/20$ $13/20$

Tipo	Clase	Arista	Planos de sim.	Eje de simet.	Posición	Ocup. del espacio
[a,b]	4a+3b	V (a,a,b,a,b,a,b)	1		(1) (2)	9/20 11/20
	2a+4b	I (a,a,b,b,b,b)	1		(1) (2)	6/20=3/10 14/20=7/10
		II (a,b,a,b,b,b)	1		(1) (2)	8/20=2/5 12/20=3/5
		III (a,b,b,a,b,b)	2	bin.		10/20=1/2
5b	(b) ₅	5	quin.	(1) (2)	5/20=1/4 15/20=3/4	
[a,c]	7a+c	(a,a,a,a,a,a,a,c)	1		(1) (2)	10/20=1/2 10/20=1/2
	4a+2c	I (a,a,a,a,c,c)	1		(1) (2)	10/20=1/2 10/20=1/2
		II (a,a,a,c,a,c)	1		(1) (2)	10/20=1/2 10/20=1/2
		III (a,a,c,a,a,c)	2	bin.		10/20=1/2
a+3c	(a,c,c,c)	1		(1) (2)	10/20=1/2 10/20=1/2	
[a,d]	6a+d	(a,a,a,a,a,a,d)	1		(1) (2)	7/20 13/20
	2a+2d	I (a,a,d,d)	1		(1) (2)	4/20=1/5 16/20=4/5
II (a,d,a,d)		2	bin.		10/20=1/2	
[b,c]	2b+2c	I (b,b,c,c)	1		(1) (2)	8/20=2/5 12/20=3/5
		II (b,c,b,c)	2	bin.		10/20=1/2
[b,d]	3b+d	(b,b,b,d)	1		(1) (2)	4/20=1/5 16/20=4/5
	b+2d	(b,d,d)	1		(1) (2)	3/20 17/20
[c,d]	2c+d	(c,c,d)	1		(1) (2)	7/20 13/20

Con tres tipos de diedro:

[a,b,c]	5a+b+c	I (a,a,a,a,a,b,c)				(1)	9/20
		VI (a,a,a,a,a,c,b)				(2)	11/20
		II (a,a,a,a,b,a,c)				(1)	9/20
		V (a,a,a,a,c,a,b)				(2)	11/20
		III (a,a,a,b,a,a,c)				(1)	9/20
		IV (a,a,a,c,a,a,b)				(2)	11/20

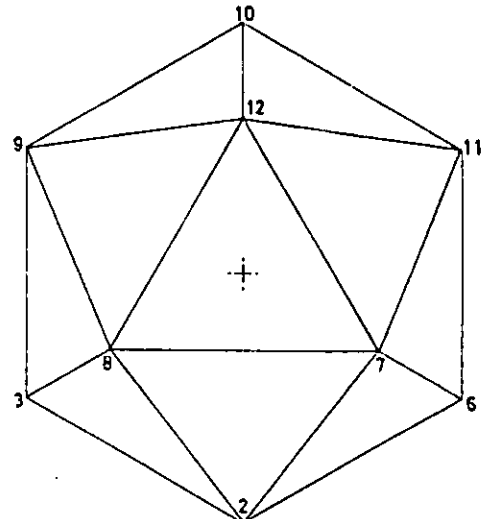
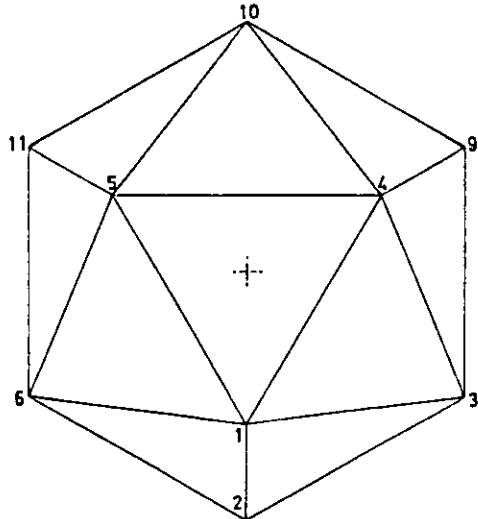
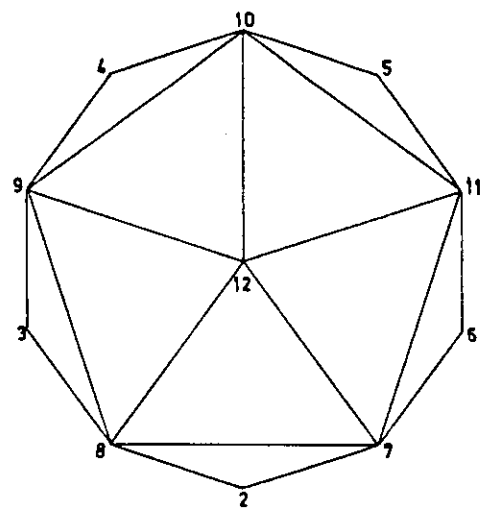
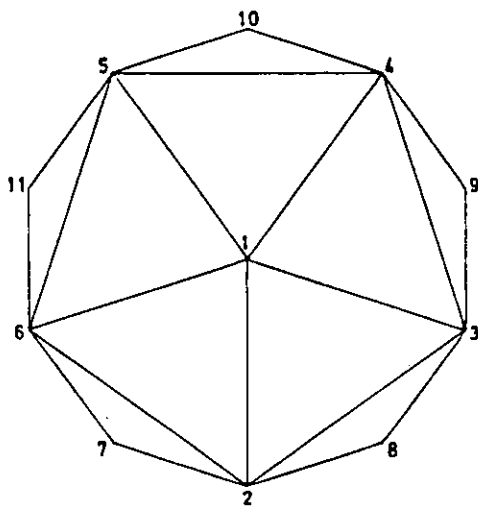
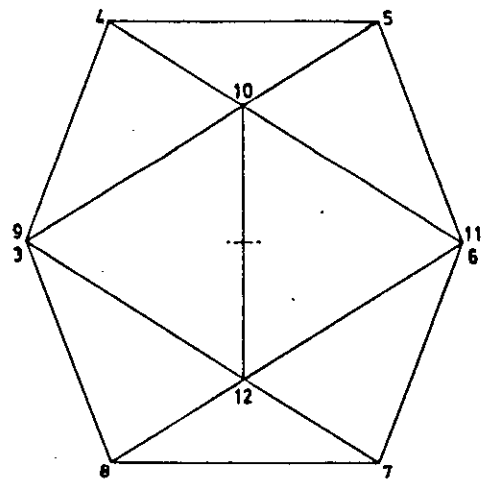
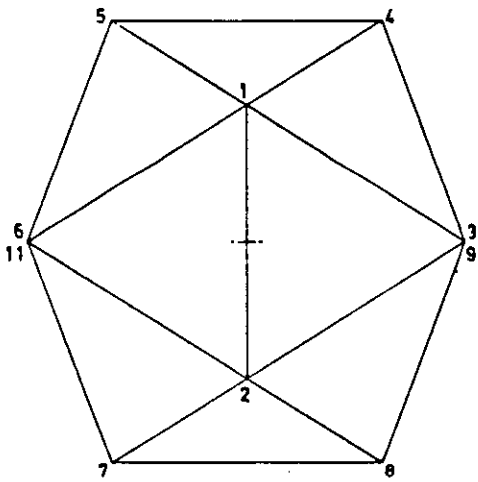
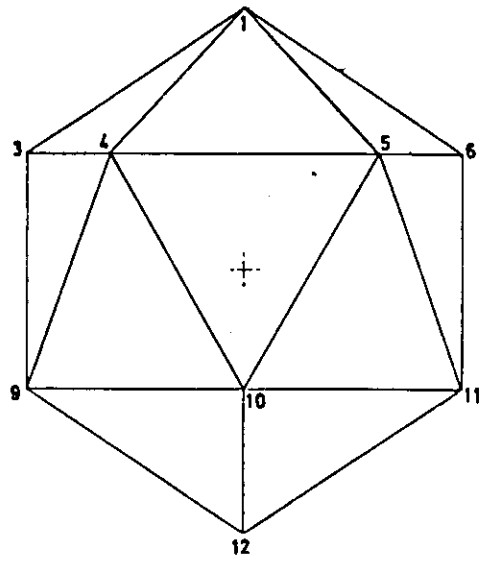
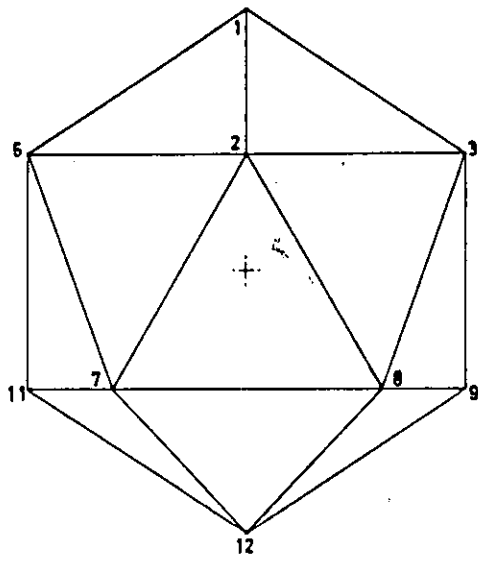
Tipo	Clase	Arista	Planos de sim.	Eje de simet.	Posición	Ocup. del espacio	
[a, b, c]	3a+2b+c	I (a, a, a, b, c, b)	1		(1)	10/20=1/2	
					(2)	10/20=1/2	
		II (a, a, a, b, b, c) } en			(1)	8/20=2/5	
		III (a, a, a, c, b, b) } en			(2)	12/20=3/5	
		IV (a, a, b, b, a, c) } en			(1)	8/20=2/5	
		V (a, a, c, a, b, b) } en			(2)	12/20=3/5	
		VI (a, a, b, a, c, b) } en			(1)	8/20=2/5	
		VII (a, a, b, c, a, b) } en			(2)	12/20=3/5	
		VIII (a, a, b, a, b, c) } en			(1)	10/20=1/2	
		IX (a, a, c, b, a, b) } en			(2)	10/20=1/2	
	X (a, b, a, b, a, c)	1		(1)	10/20=1/2		
				(2)	10/20=1/2		
	a+3b+c	I (a, b, b, b, c) } en			(1)	7/20	
		II (a, c, b, b, b) } en			(2)	13/20	
		III (a, b, b, c, b) } en			(1)	9/20	
		IV (a, b, c, b, b) } en			(2)	11/20	
2a+b+2c		I (a, a, c, b, c)	1		(1)	9/20	
					(2)	11/20	
		II (a, b, a, c, c)	1		(1)	9/20	
					(2)	11/20	
		III (a, a, b, c, c) } en			(1)	9/20	
		IV (a, a, c, c, b) } en			(2)	11/20	
V (a, b, c, a, c) } en		(1)	9/20				
VI (a, c, a, c, b) } en		(2)	11/20				
[a, b, d]	4a+b+d	I (a, a, a, a, b, d) } en			(1)	6/20=3/10	
		II (a, a, a, a, d, b) } en			(2)	14/20=7/10	
		III (a, a, a, b, a, d) } en			(1)	8/20=2/5	
		IV (a, a, a, d, a, b) } en			(2)	12/20=3/5	
		V (a, a, b, a, a, d)			1	(1)	6/20=3/10
			(2)	14/20=7/10			
	2a+2b+d		I (a, a, b, d, b)	1		(1)	5/20=1/4
						(2)	15/20=3/4
			II (a, b, b, a, d)	1		(1)	9/20
						(2)	11/20
III (a, a, b, b, d) } en				(1)		5/20=1/4	
IV (a, a, d, b, b) } en				(2)		15/20=3/4	
V (a, b, a, b, d) } en		(1)	7/20				
VI (a, b, a, d, b) } en		(2)	13/20				
[a, c, d]	3a+c+d	I (a, a, a, c, d) } en			(1)	7/20	
		II (a, a, a, d, c) } en			(2)	13/20	
		III (a, a, c, a, d) } en			(1)	7/20	
		IV (a, a, d, a, c) } en			(2)	13/20	

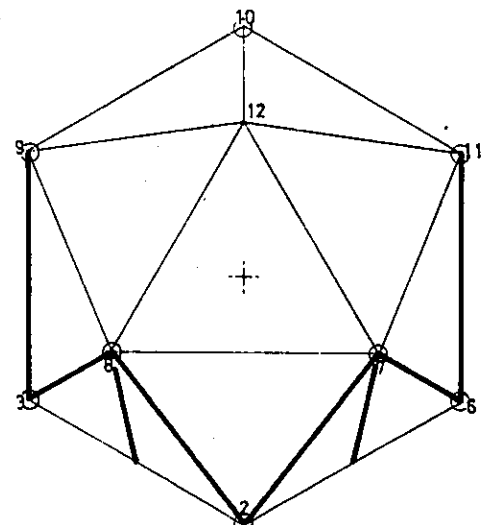
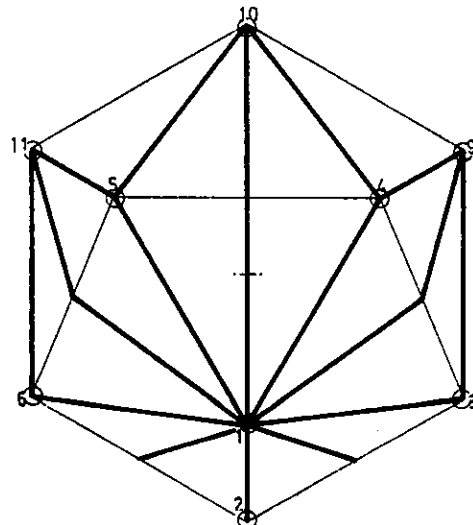
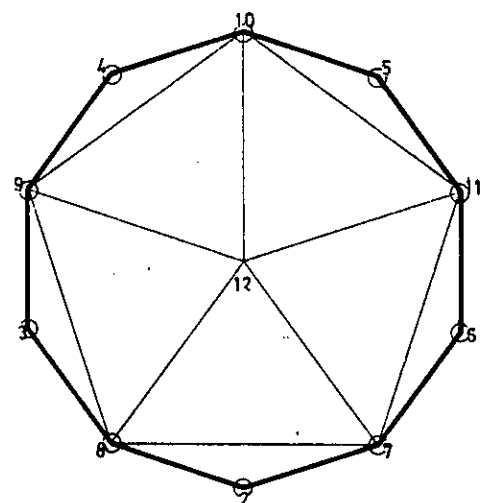
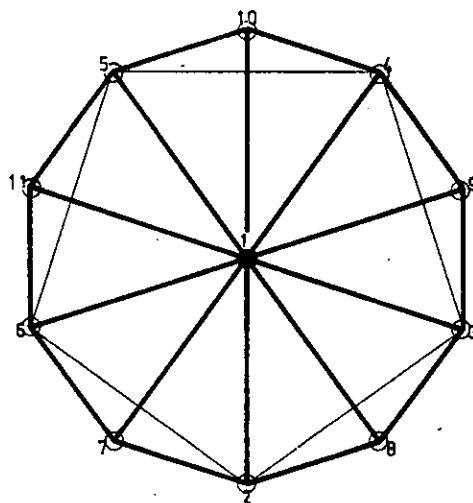
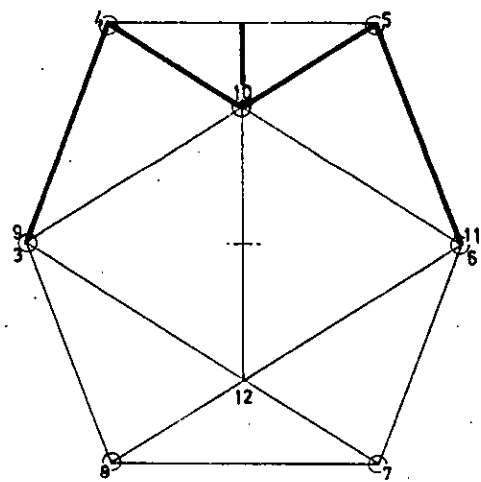
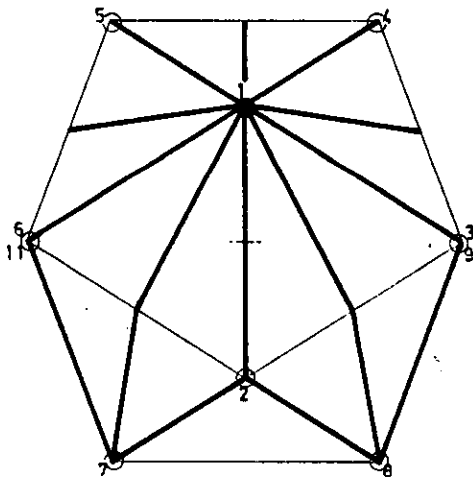
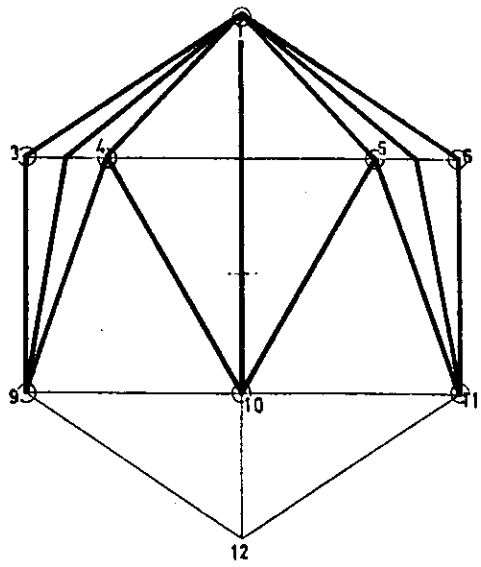
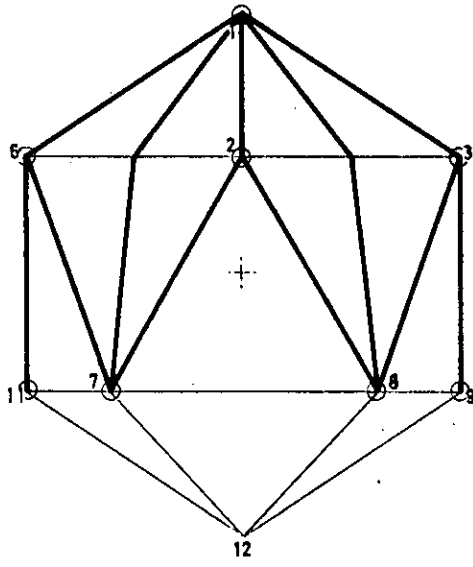
Con cuatro tipos de diedro:

Tipo	Clase	Arista	Planos de sim.	Eje de simet.	Posición	Ocup.del espacio
[a,b,c,d]	a+b+c+d	I (a,b,c,d)}			(1)	8/20=2/5
		II (a,d,c,b)}			(2)	12/20=3/5
		III (a,b,d,c)}			(1)	6/20=3/10
		IV (a,c,d,b)}			(2)	14/20=7/10
		V (a,c,b,d)}			(1)	6/20=3/10
		VI (a,d,b,c)}			(2)	14/20=7/10

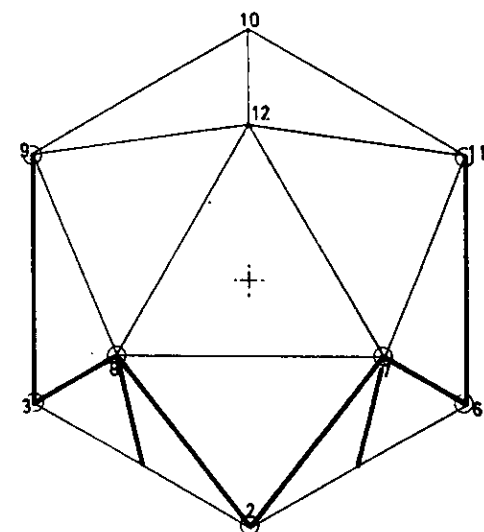
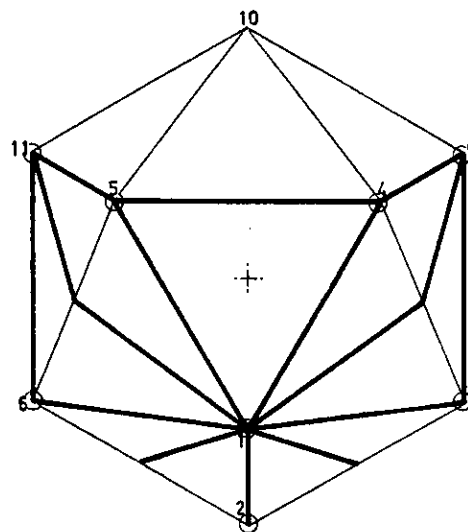
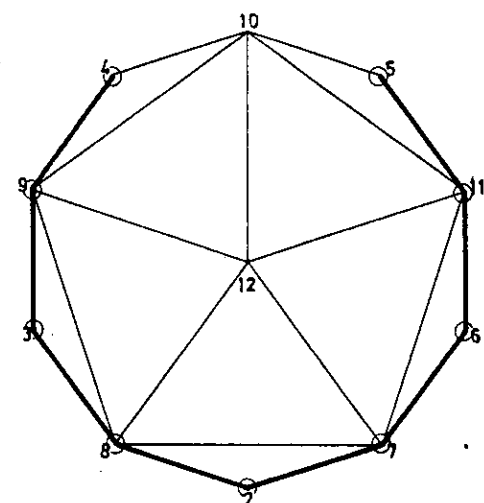
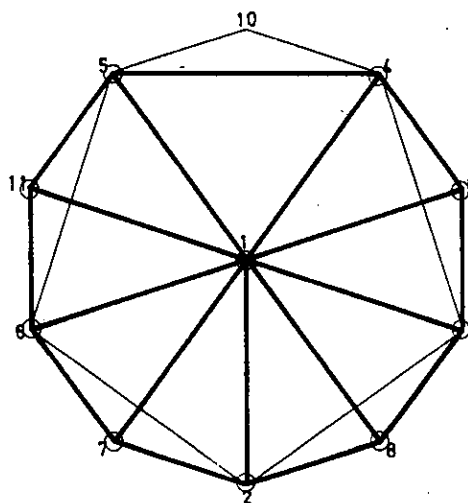
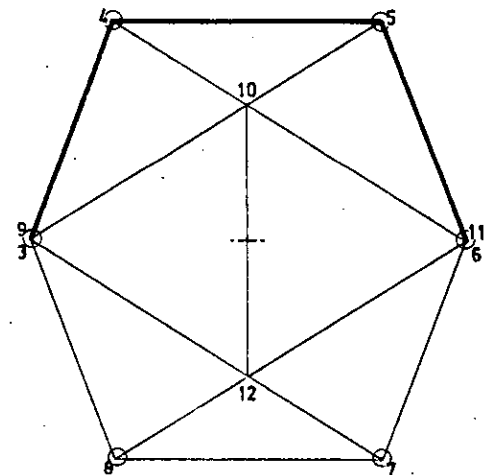
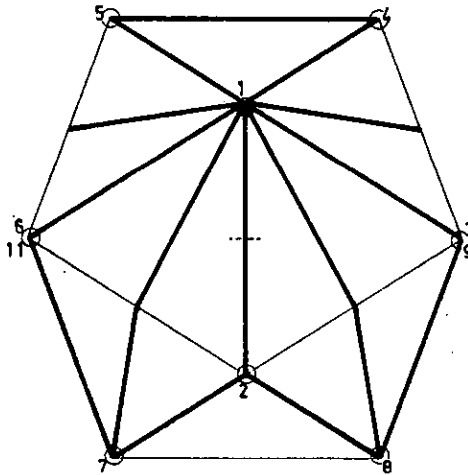
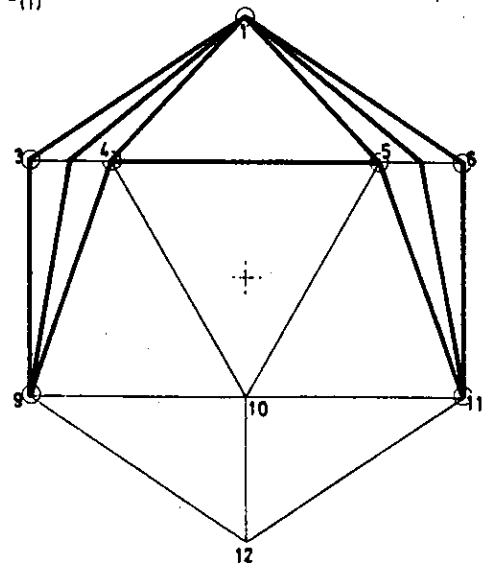
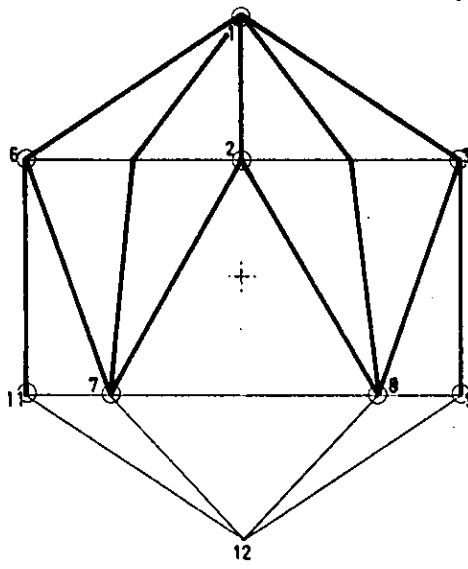
Y finalizamos el capítulo con una colección de vistas, sobre el icosaedro, de las intersecciones de cada una de las agrupaciones anteriores con el mismo. Las líneas gruesas forman, con el centro del icosaedro, las caras del triedro correspondientes a cada romboedro, esto es, los "moldes" en que encajaría cada uno de los romboedros de la agrupación.

Como ya hicimos en los dibujos del final del capítulo 9, está invertida la rotulación del enantiomorfo del elemento representado, para dar a entender que es simétrico, por lo que puede leerse la denominación mientras se ve dicho elemento enantiomorfo en un espejo.

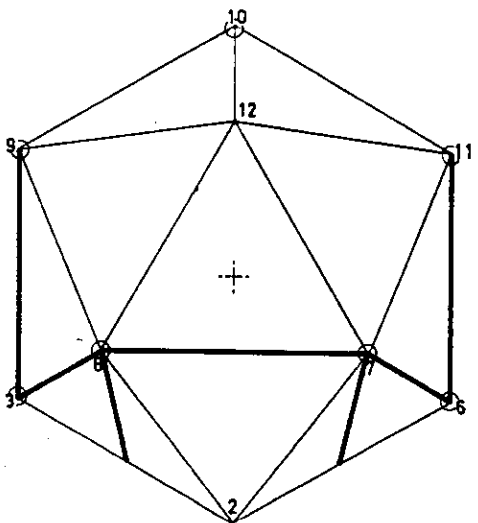
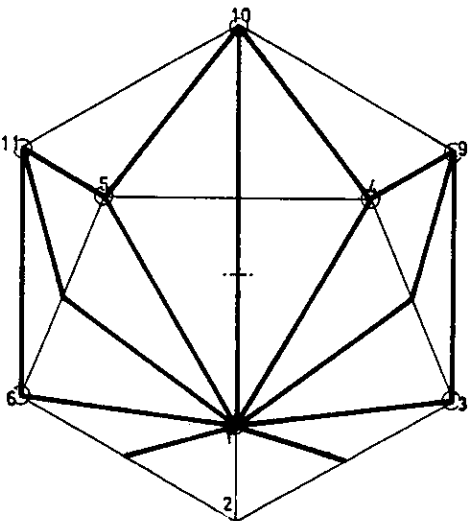
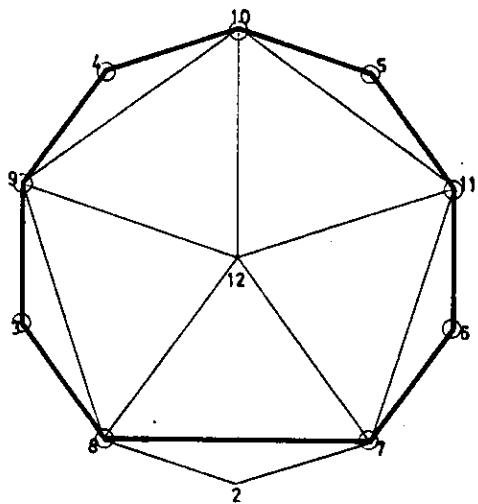
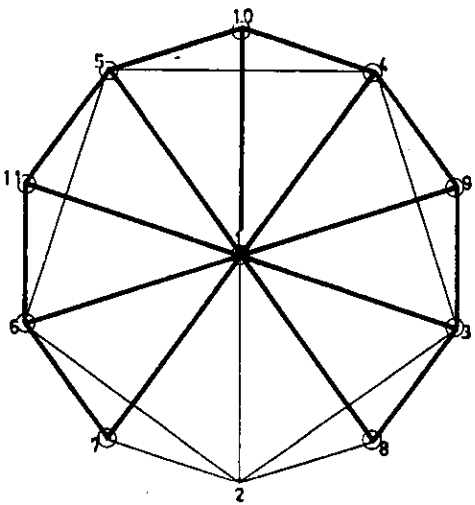
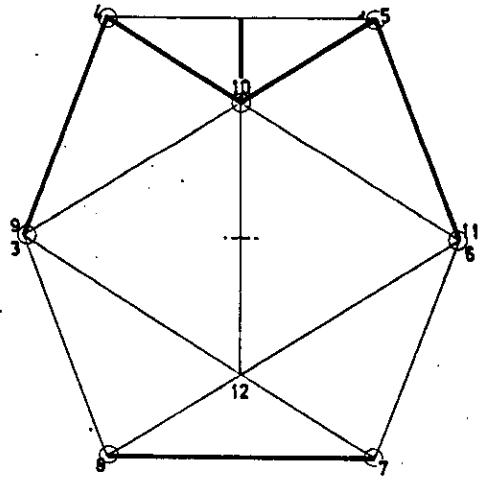
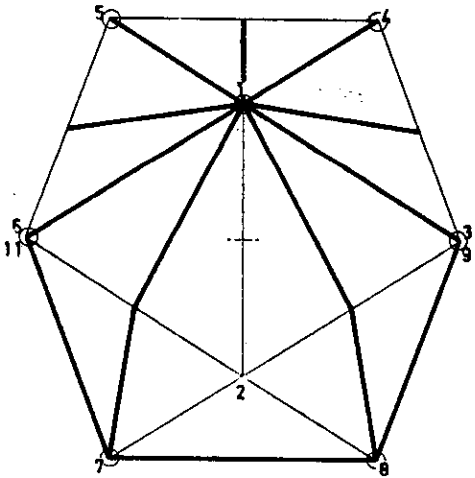
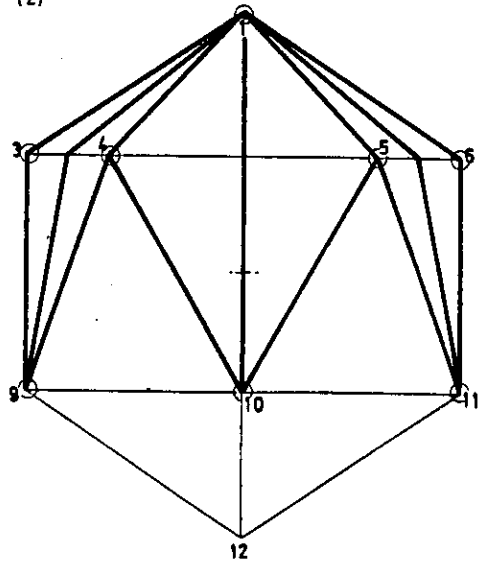
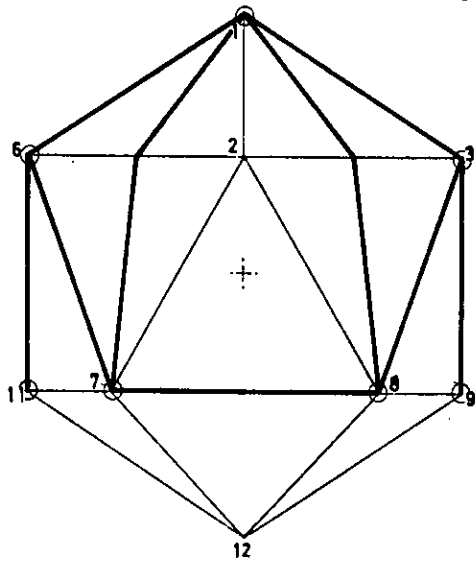


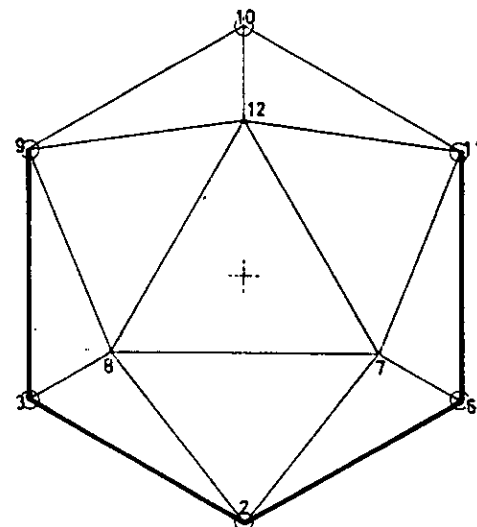
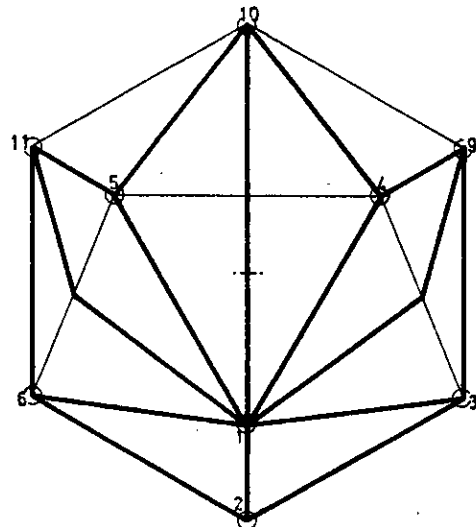
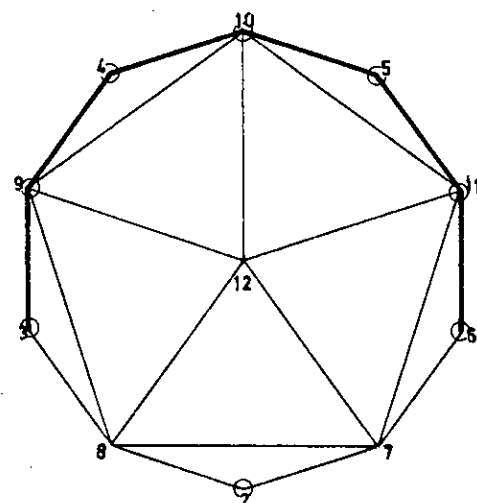
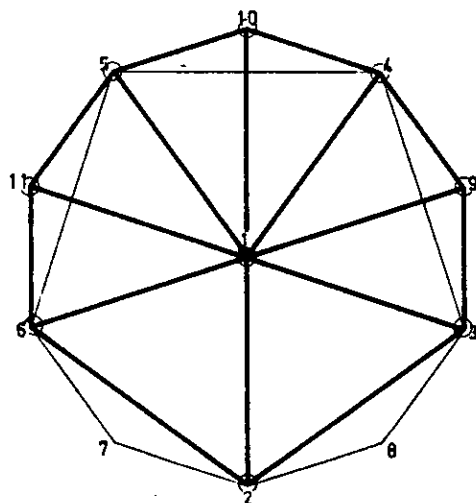
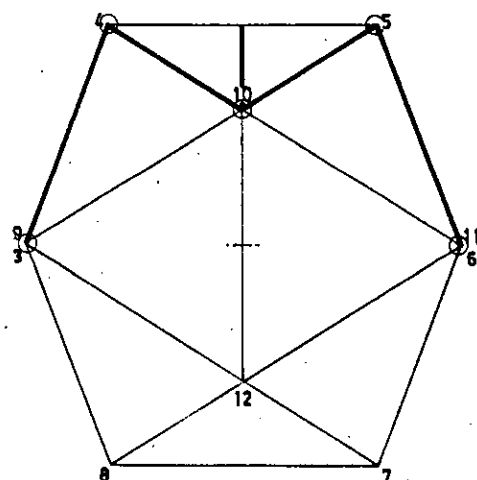
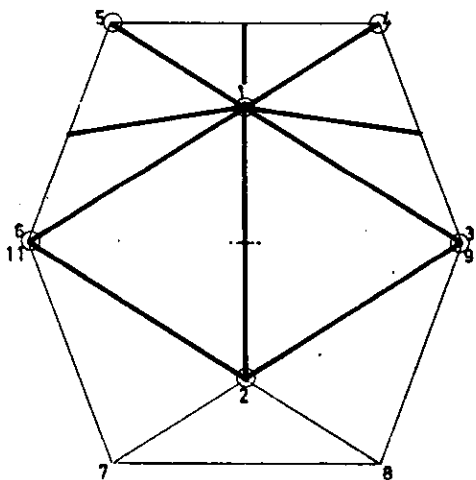
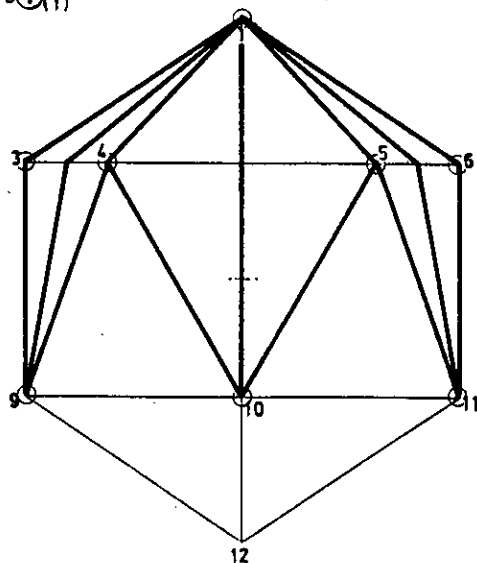
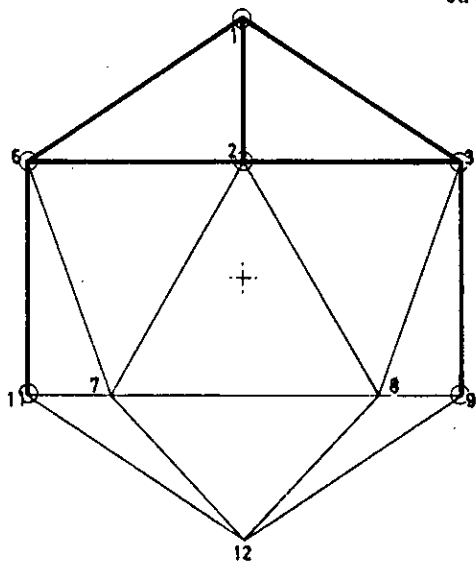


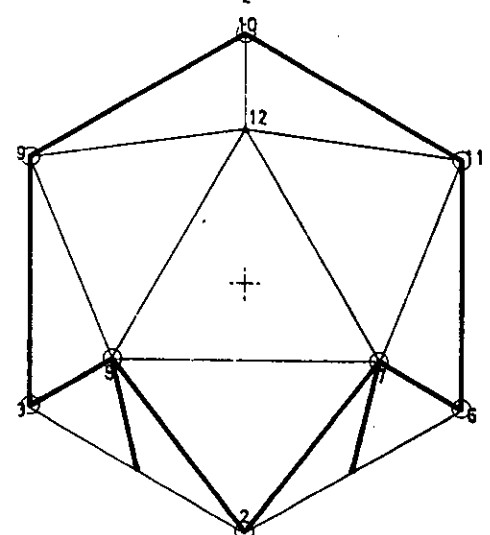
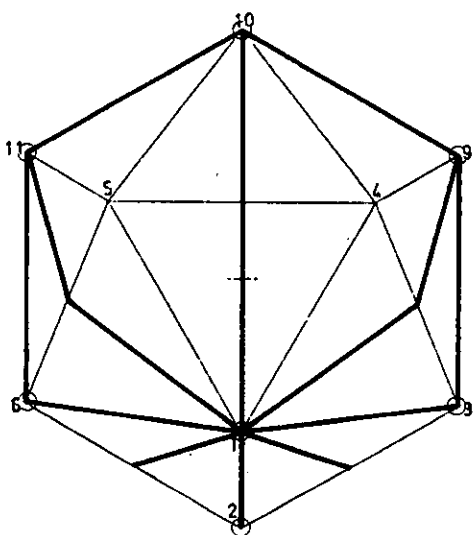
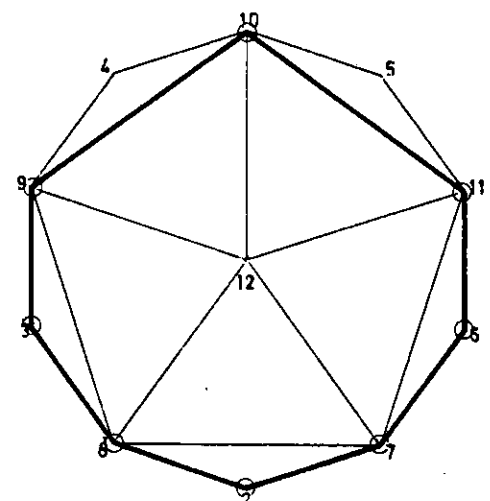
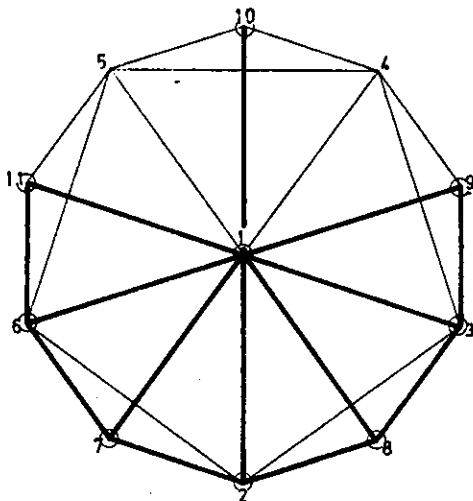
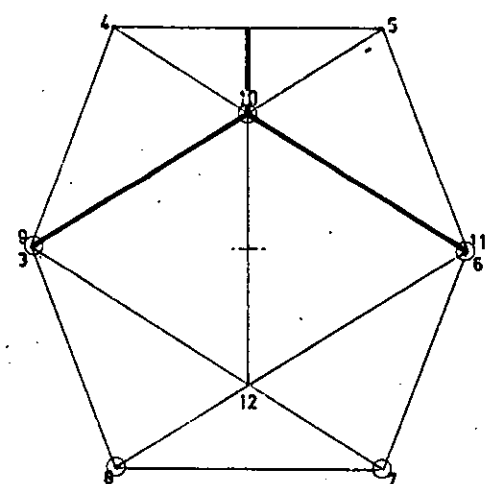
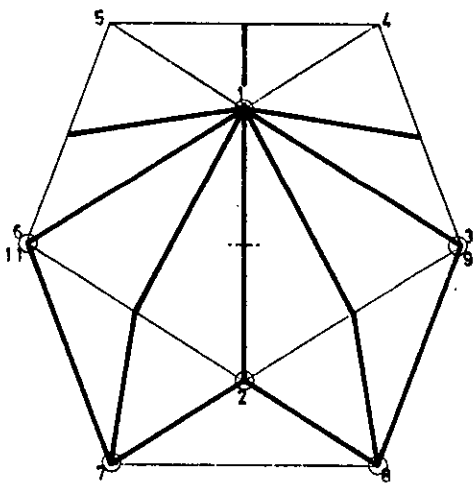
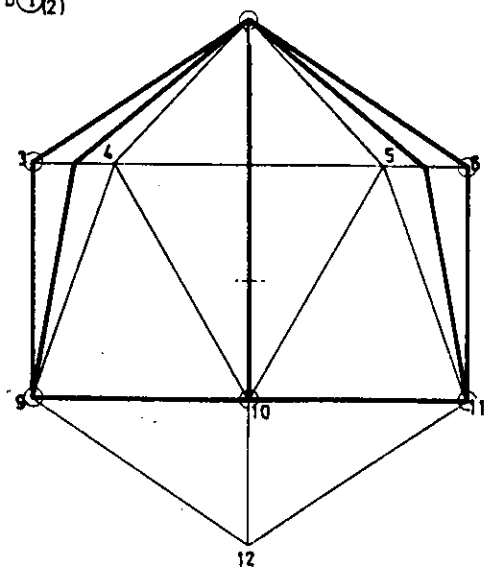
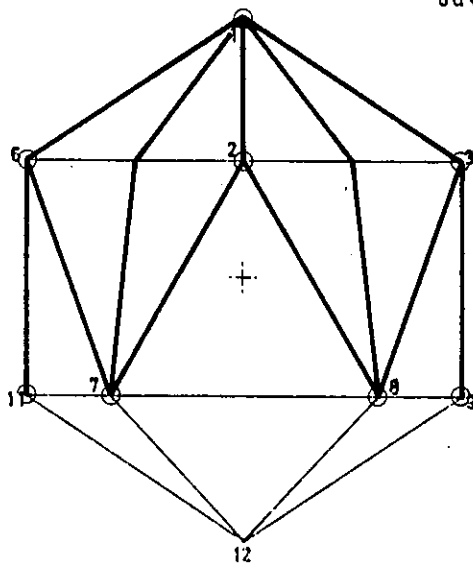
8a + b(1)

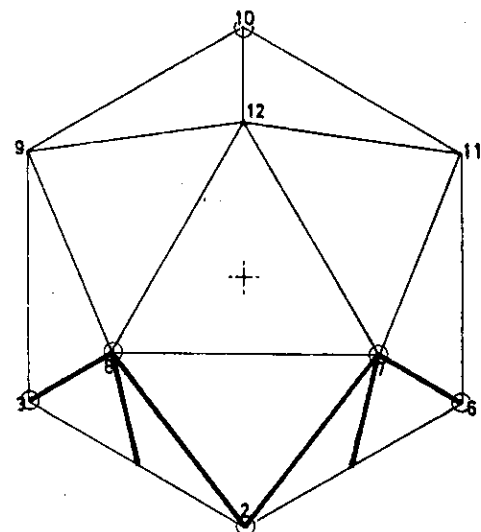
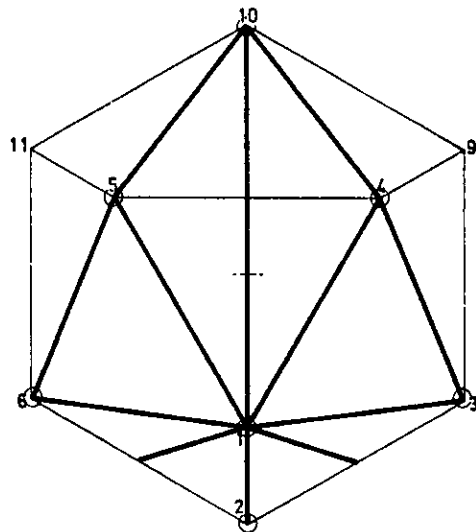
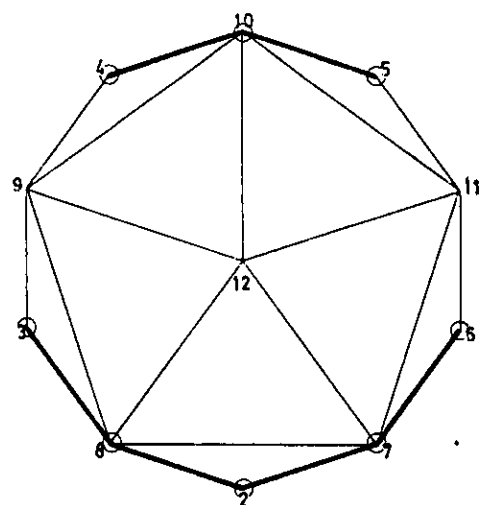
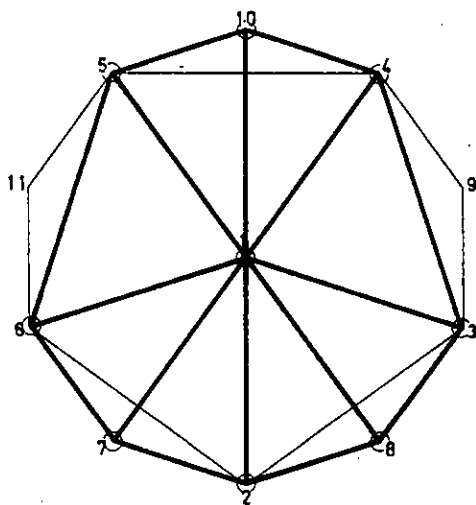
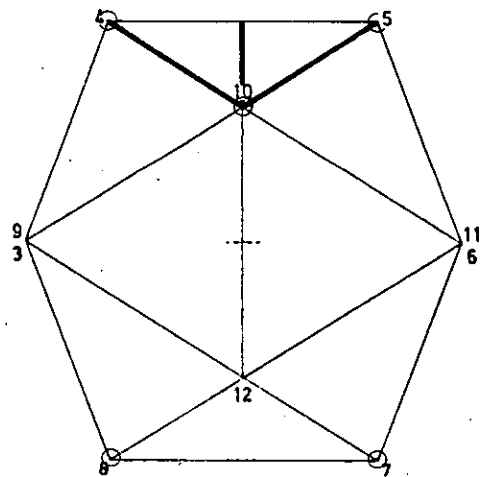
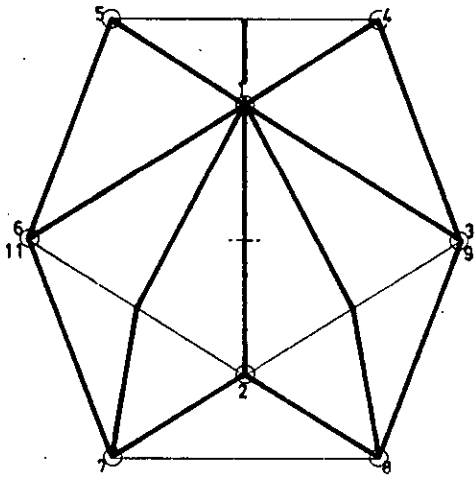
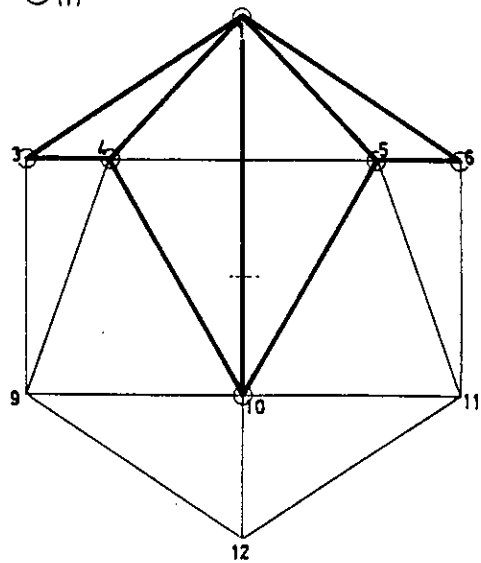
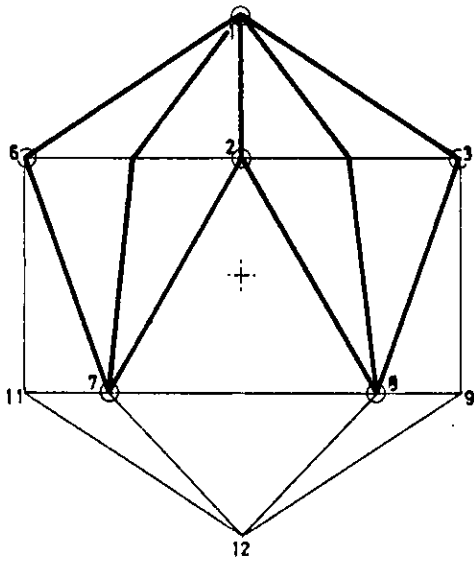


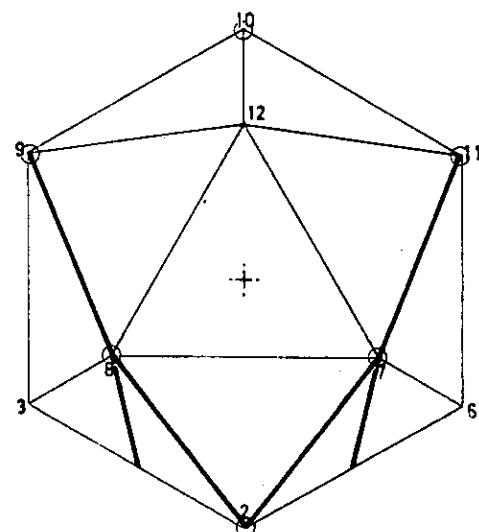
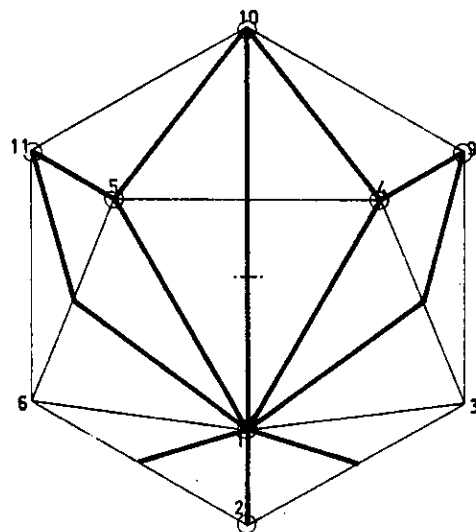
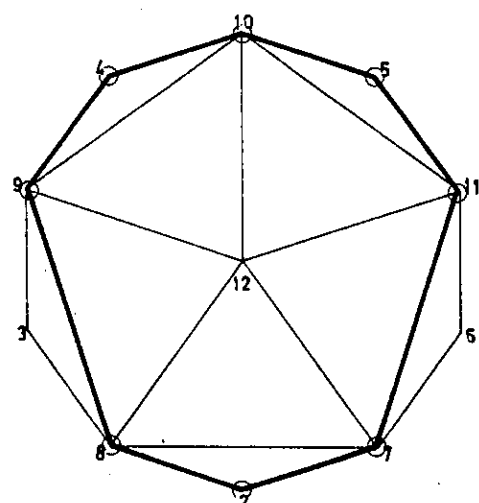
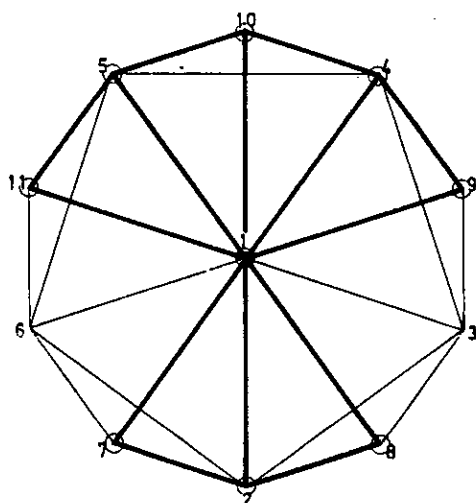
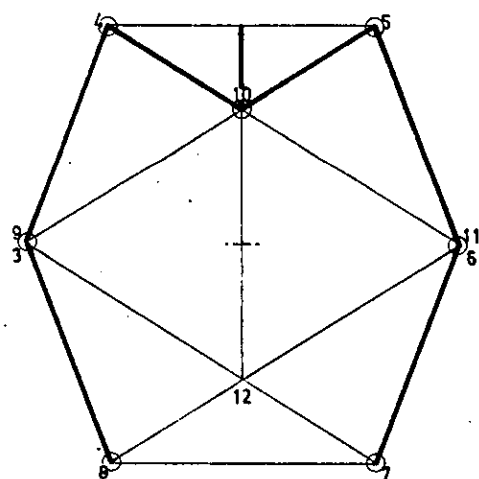
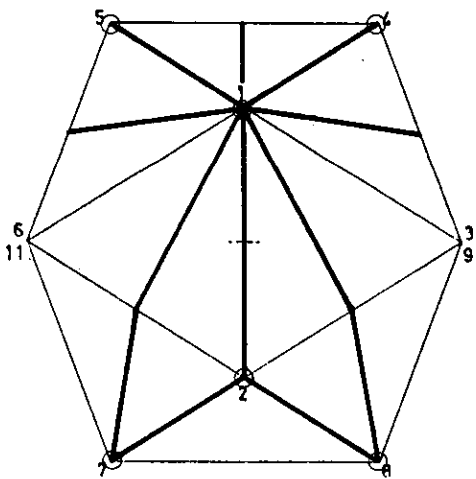
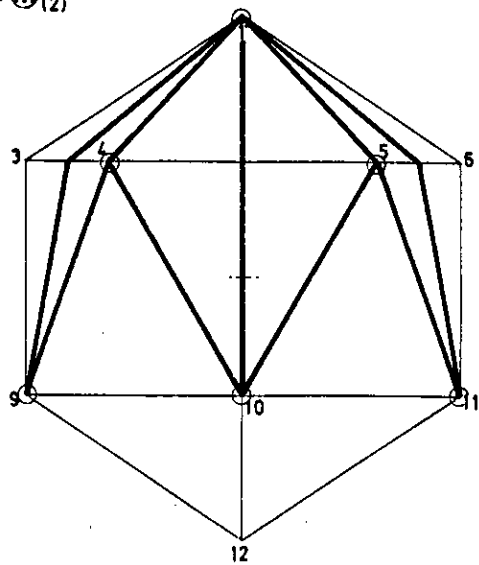
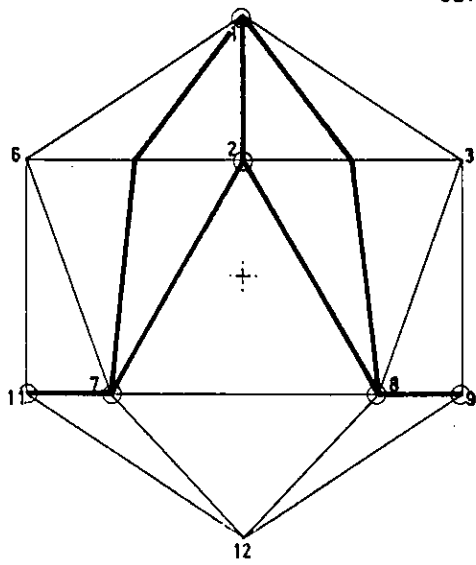
8a+b(2)

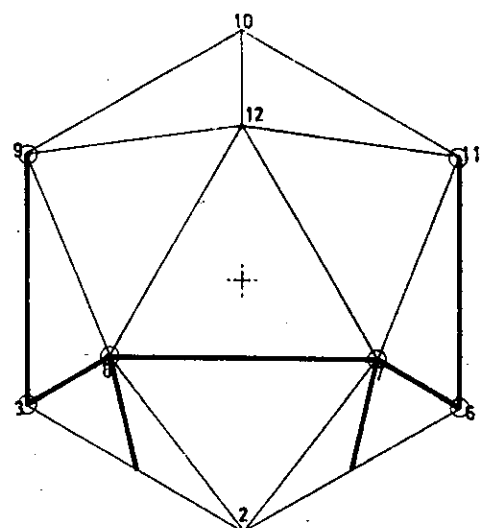
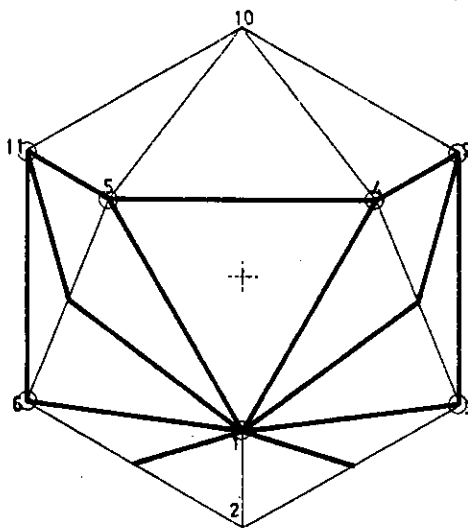
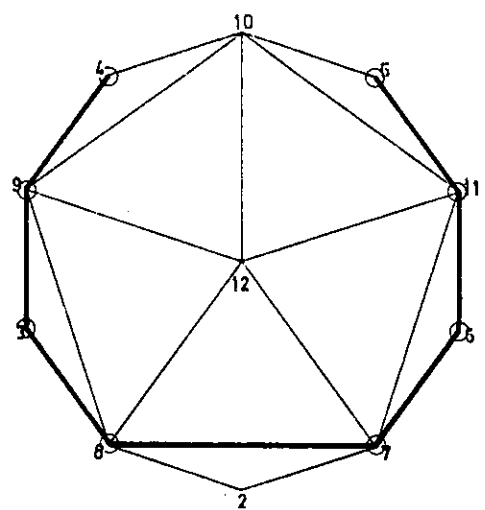
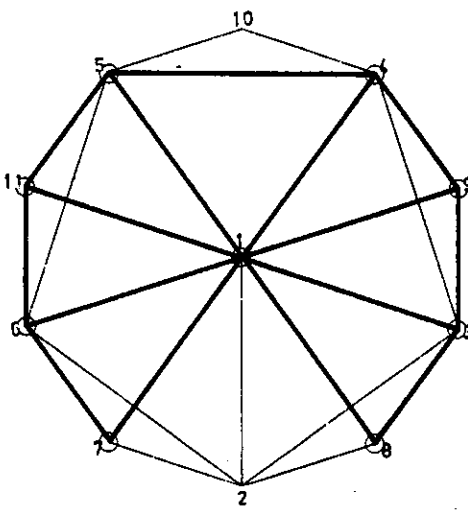
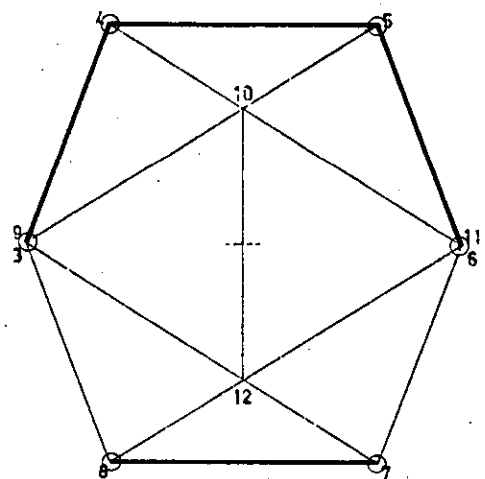
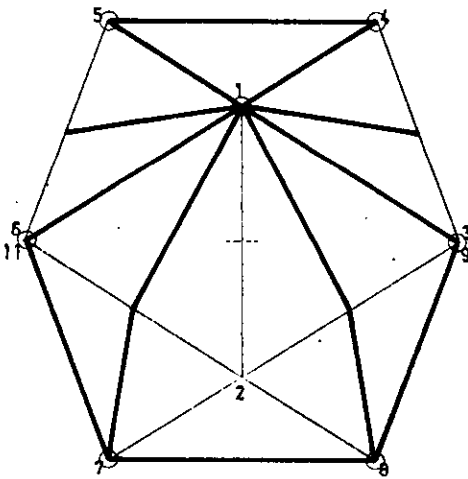
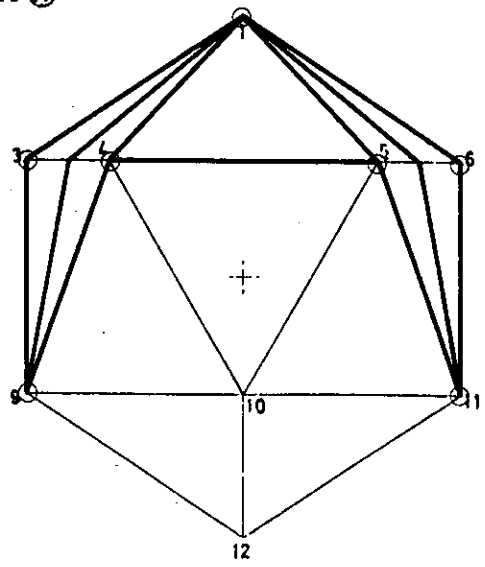
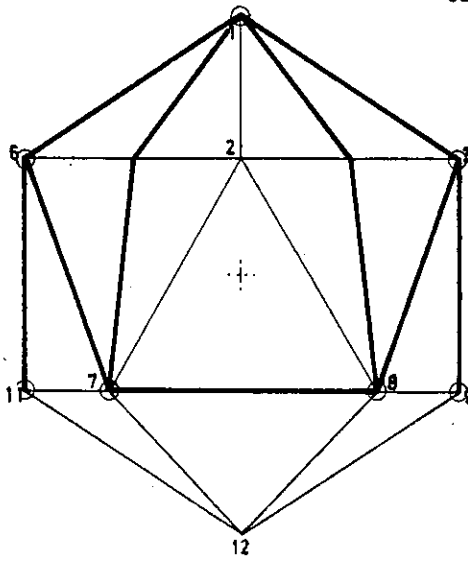




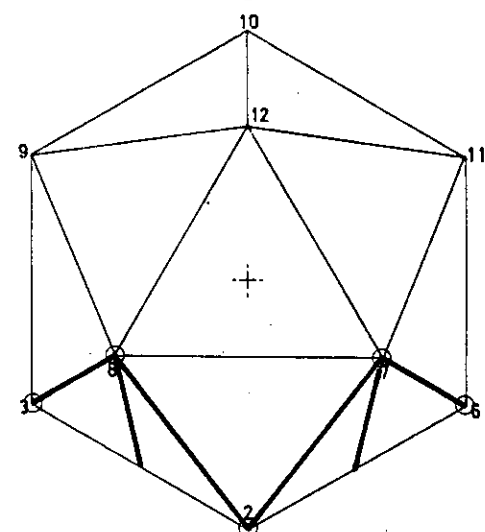
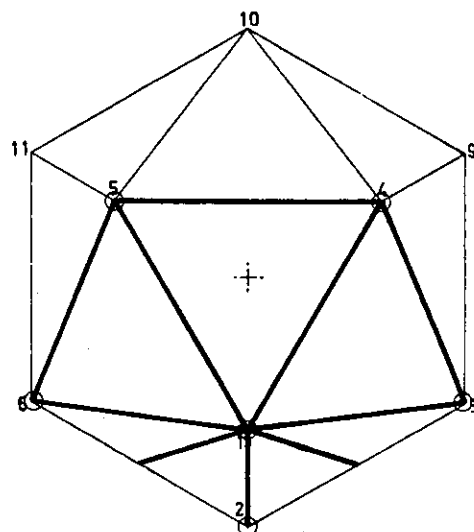
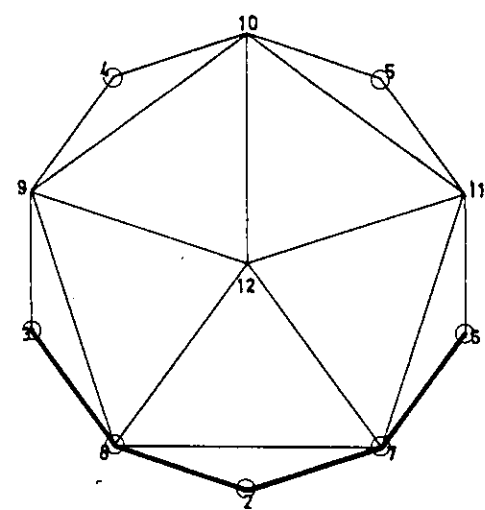
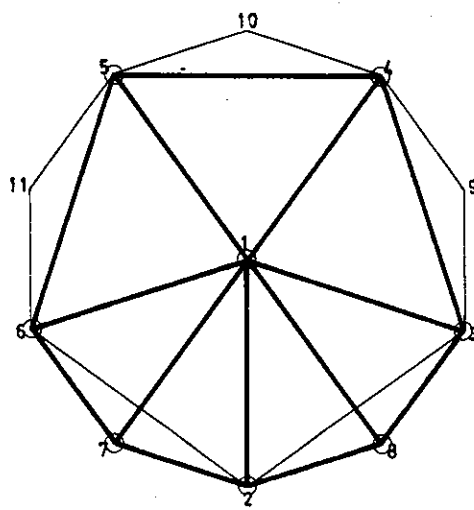
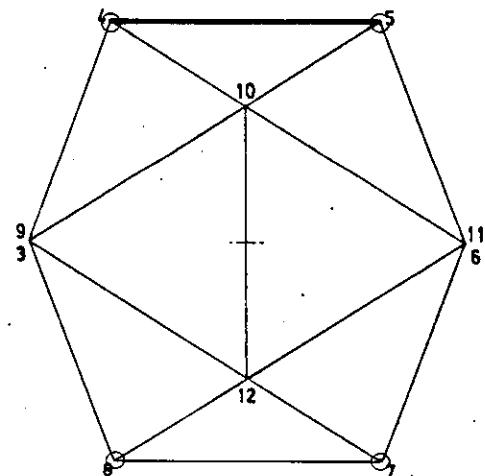
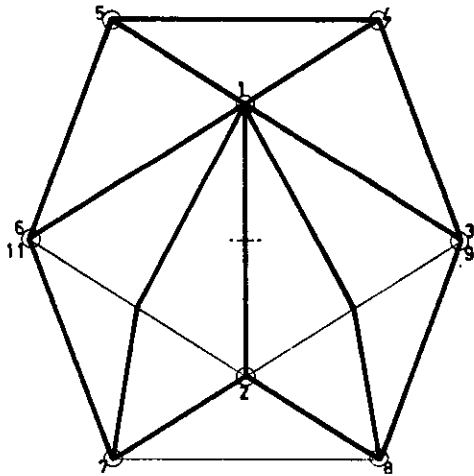
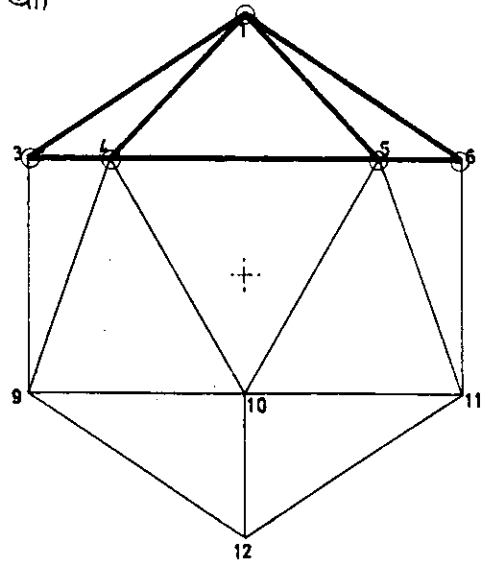
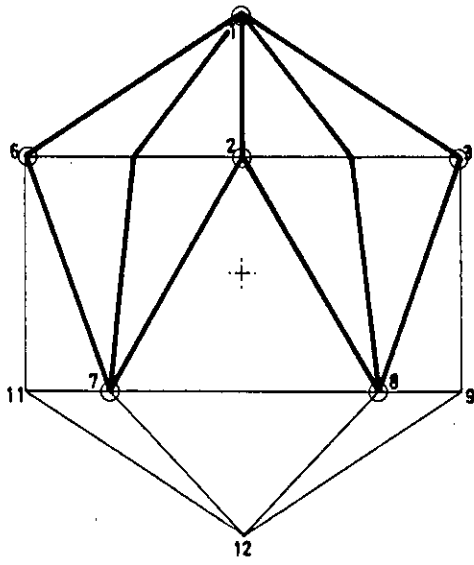




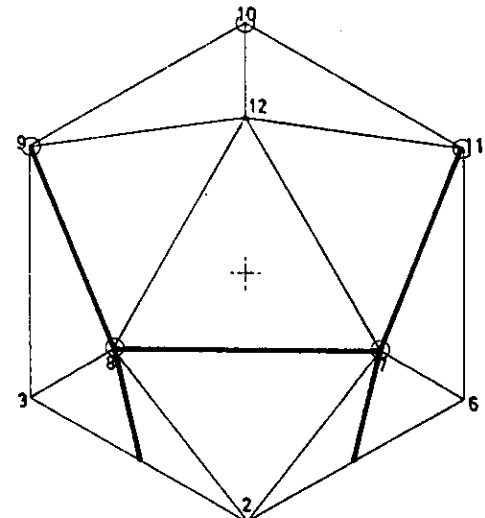
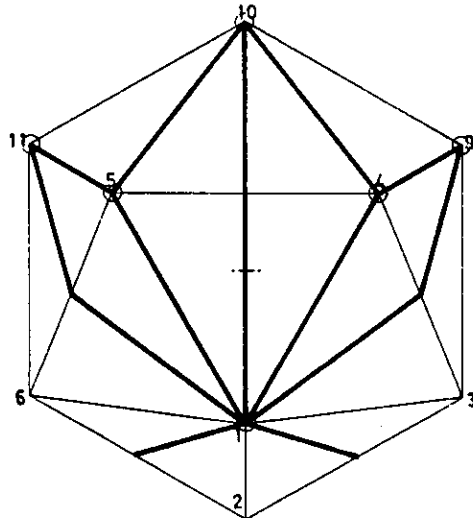
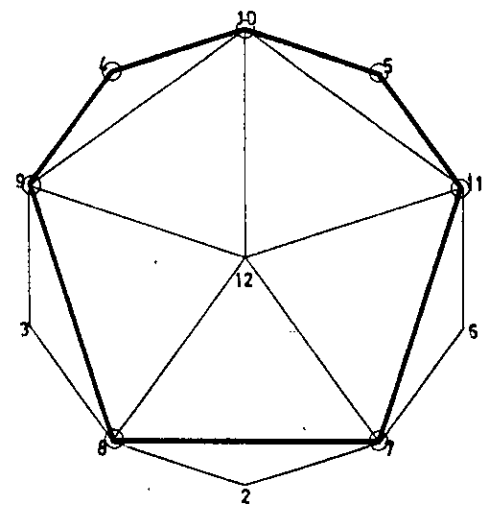
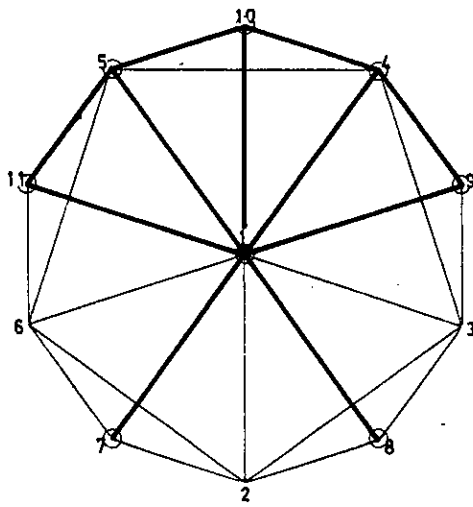
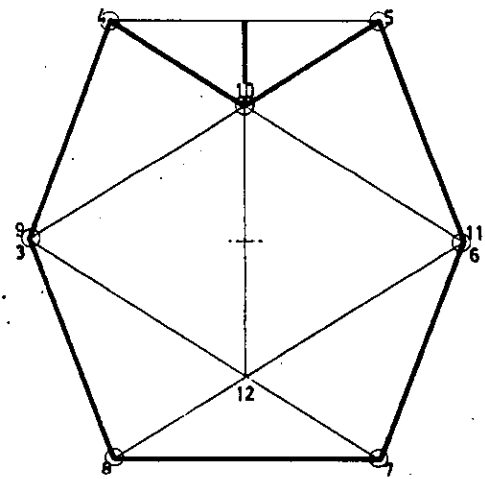
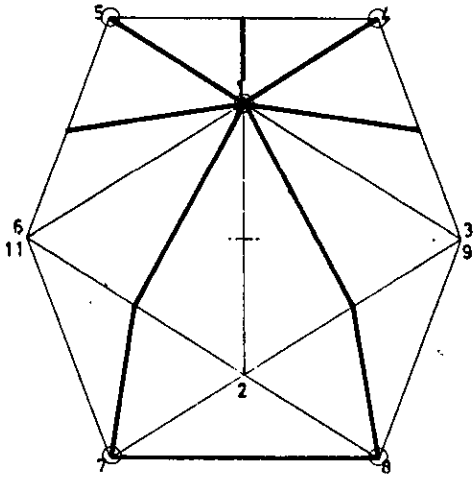
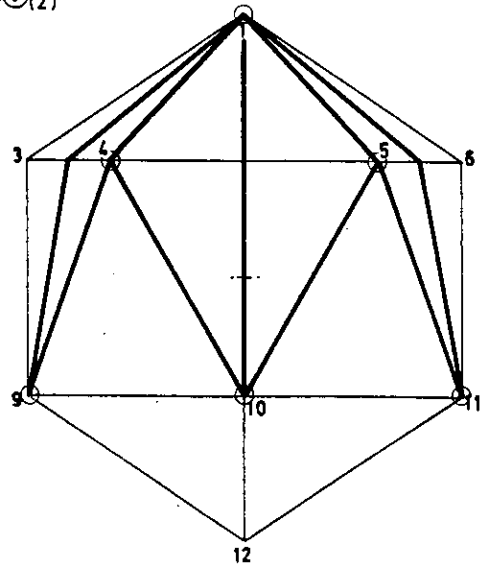
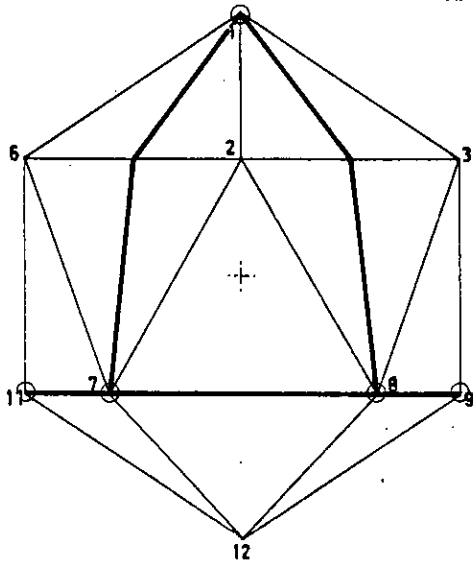




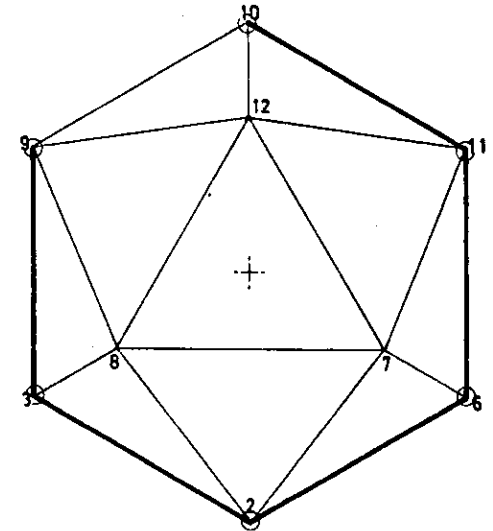
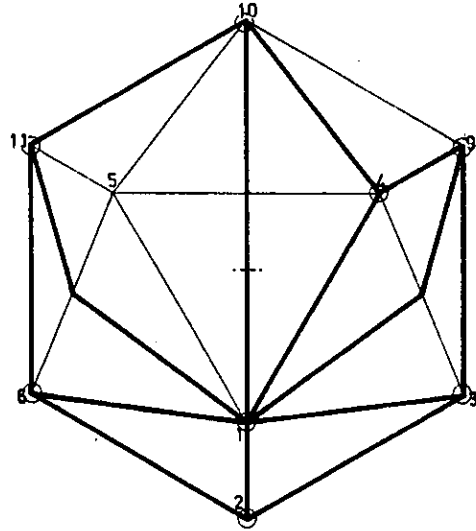
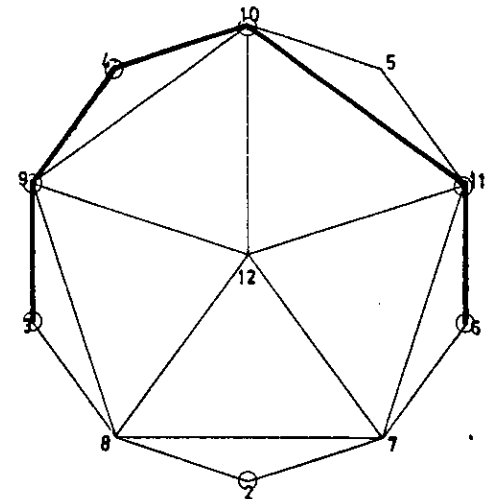
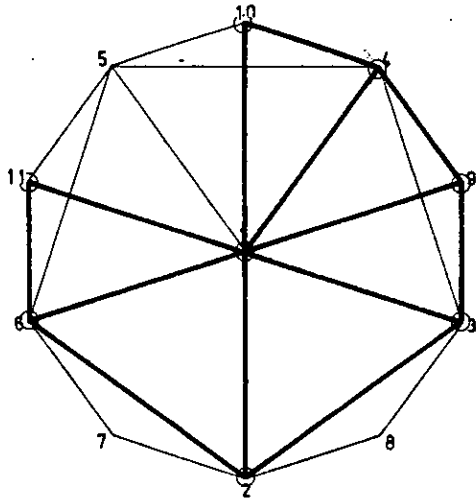
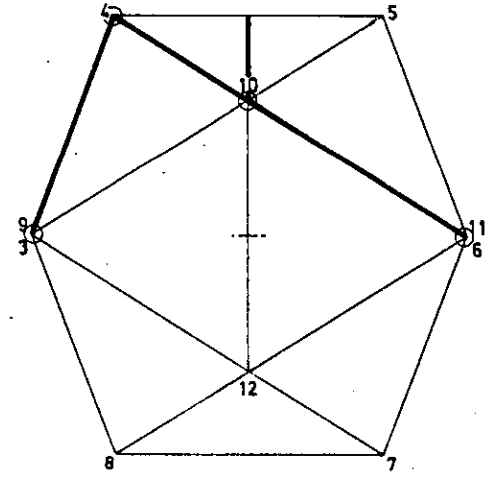
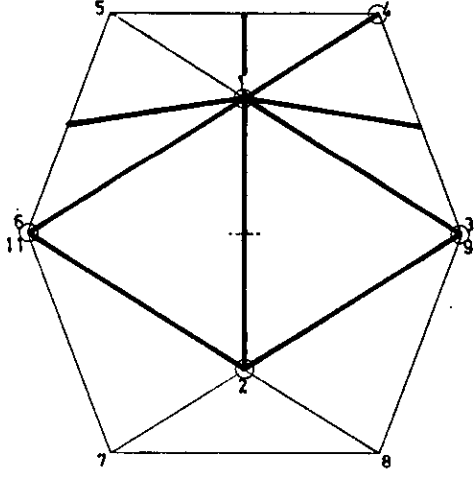
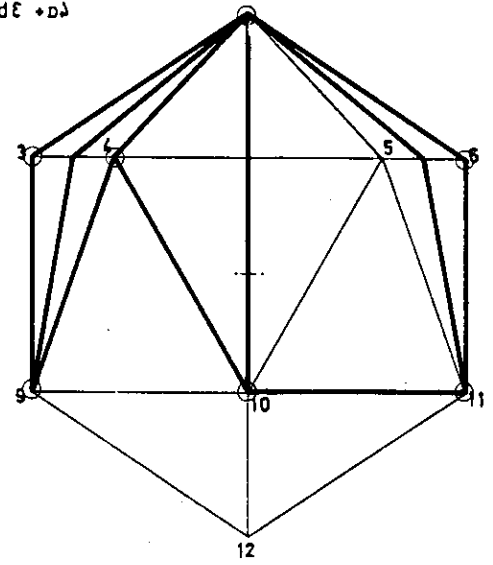
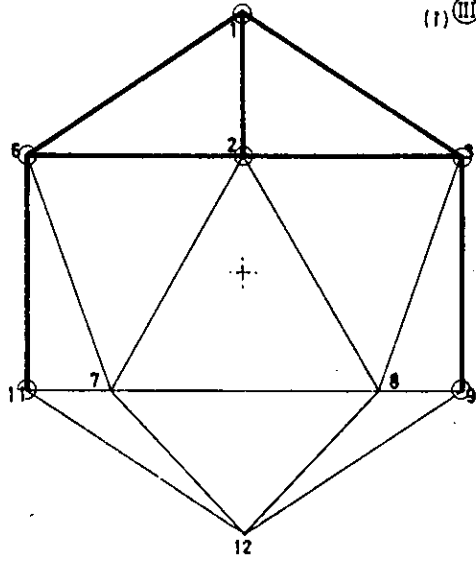
4a+3b(1₁)



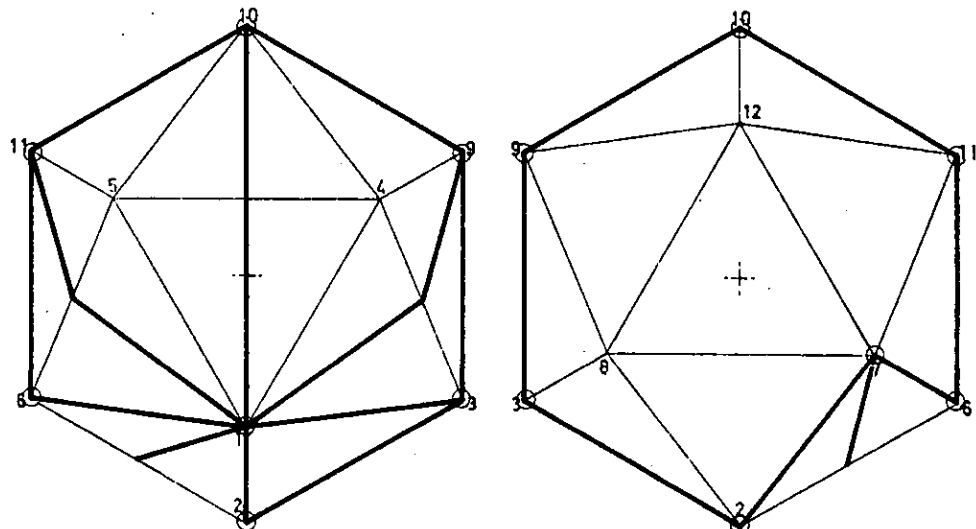
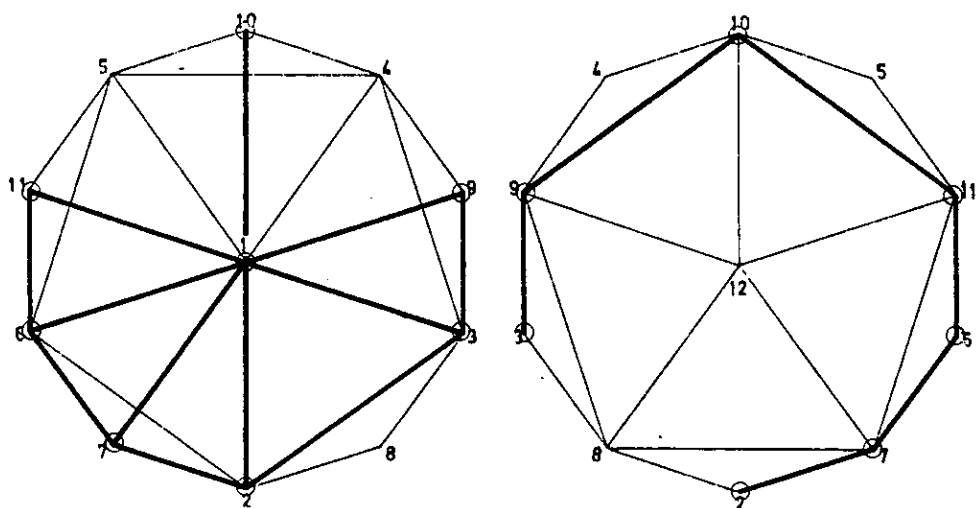
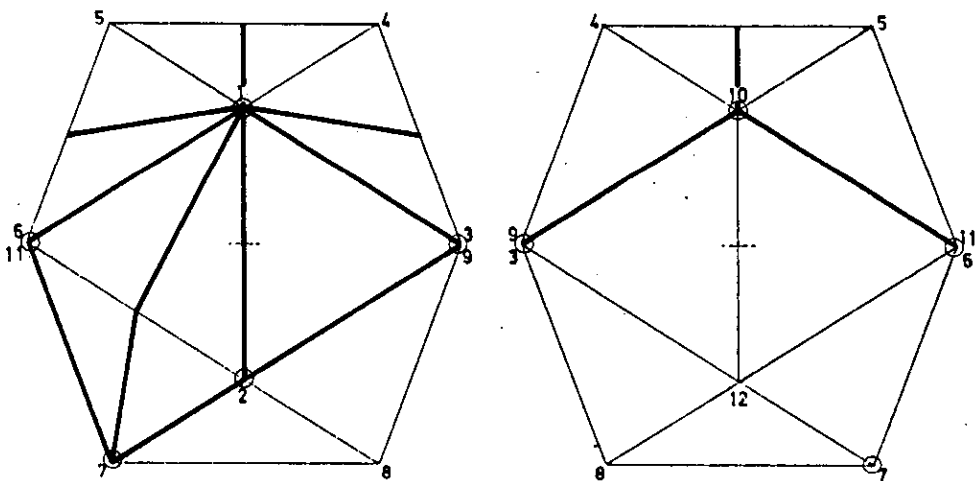
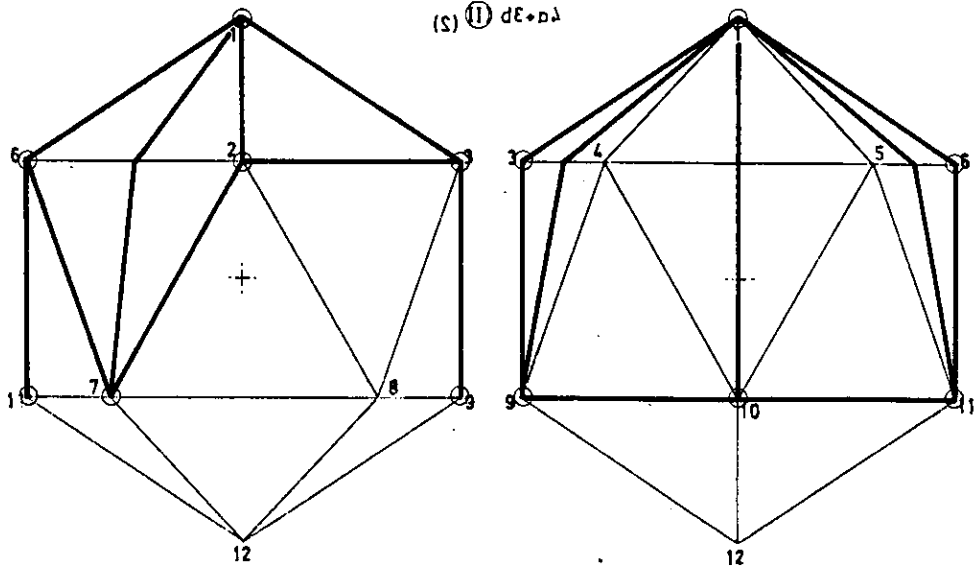
4a+3b①(2)

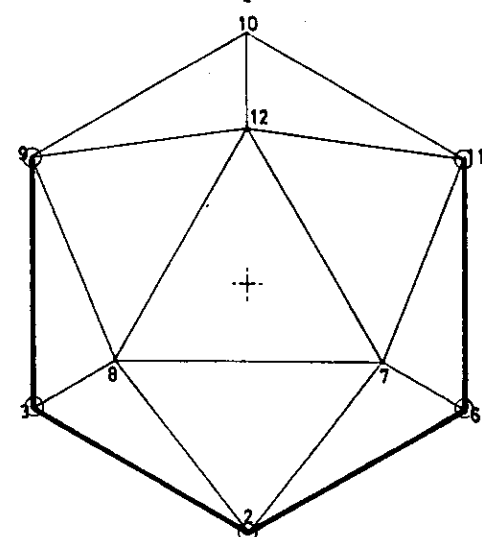
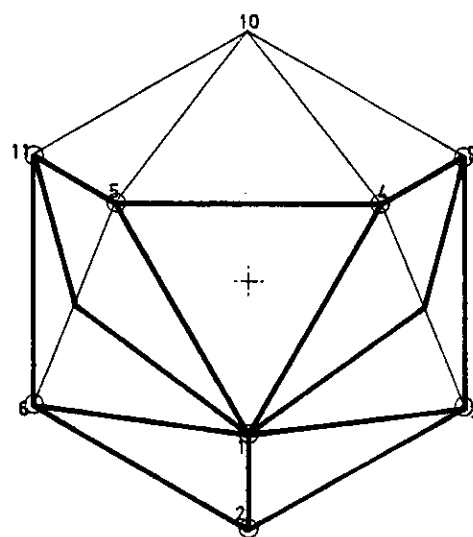
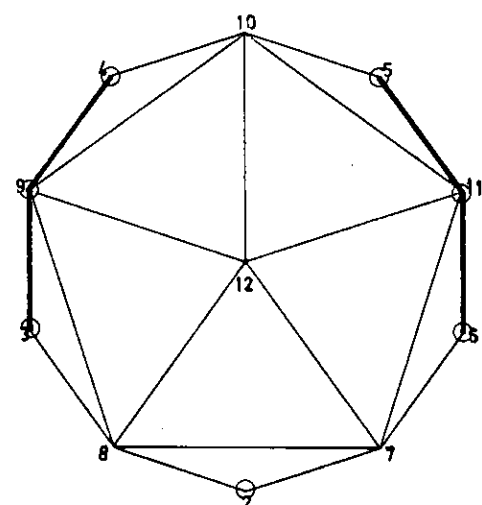
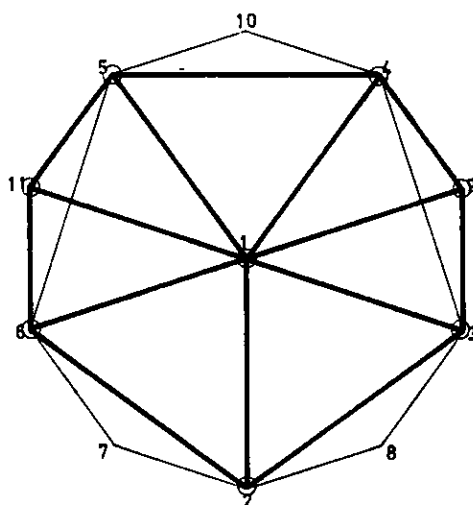
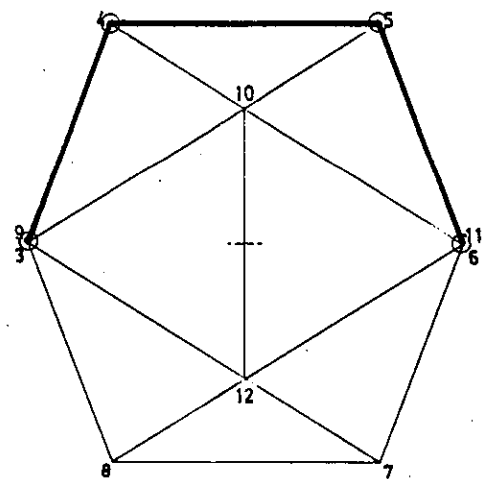
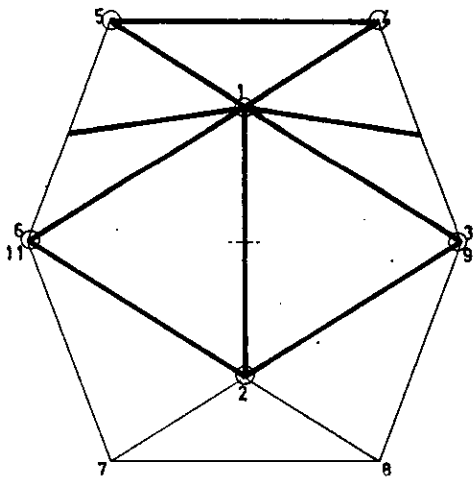
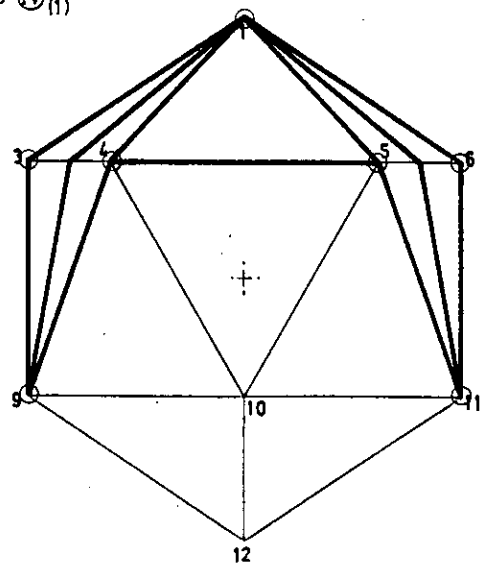
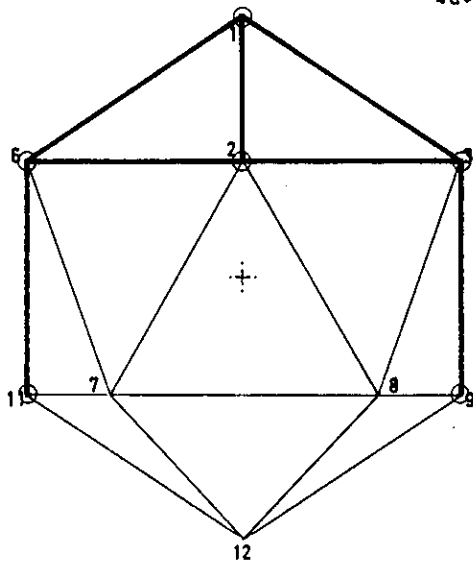


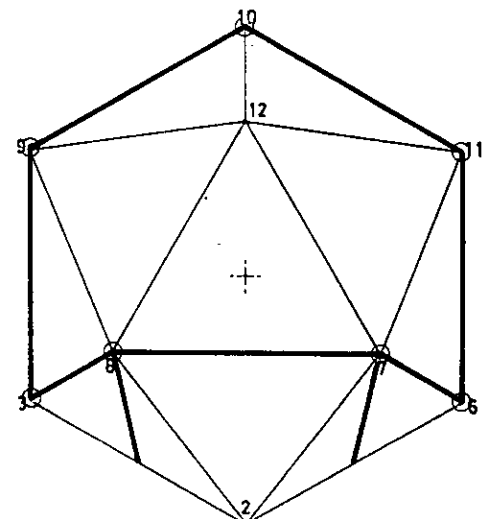
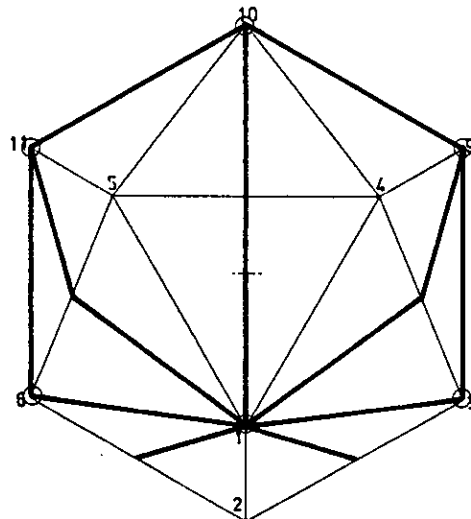
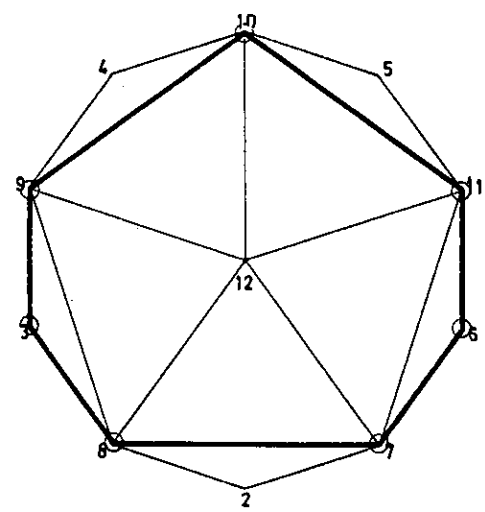
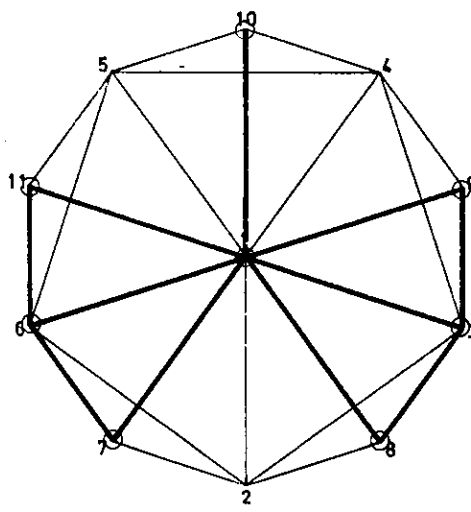
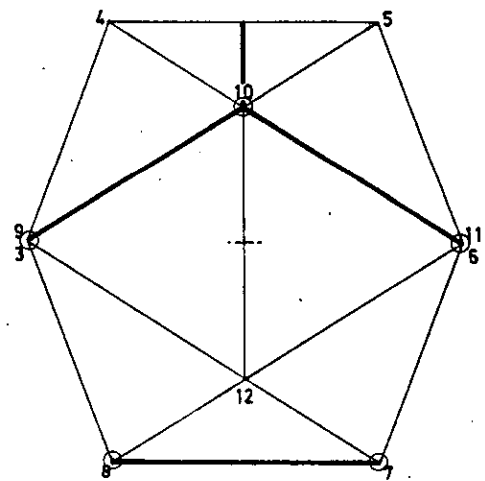
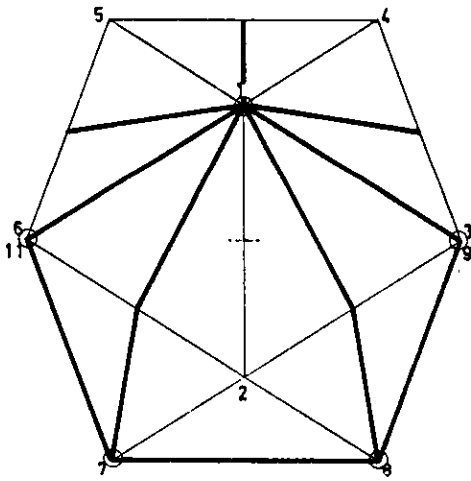
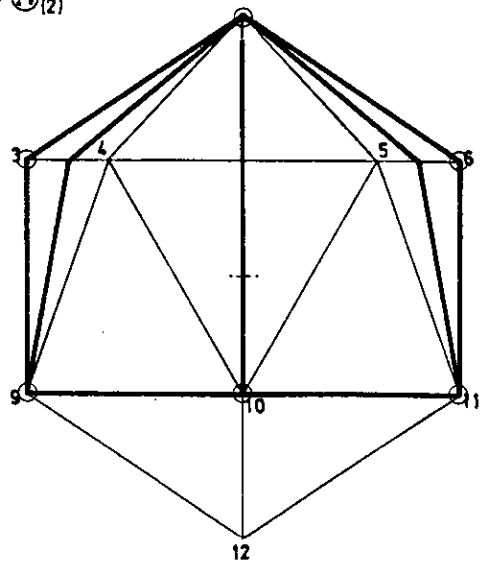
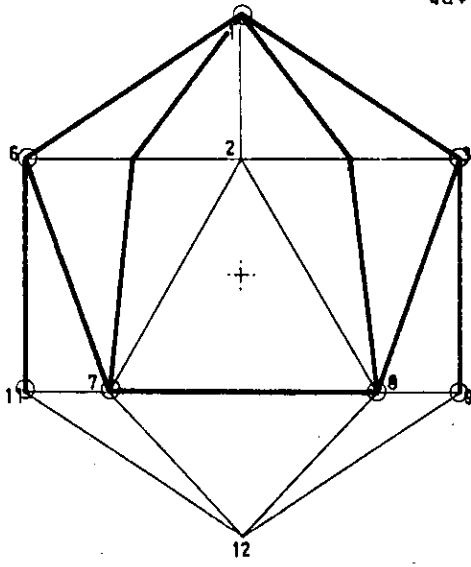
$4a + 3b \text{ (I) (1)}$
 $(1) \text{ (III) } d\epsilon + d\lambda$



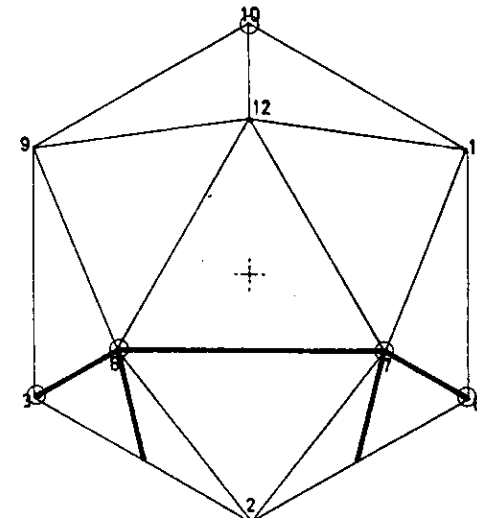
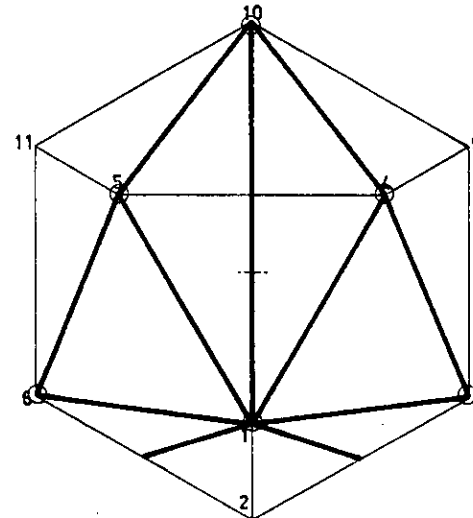
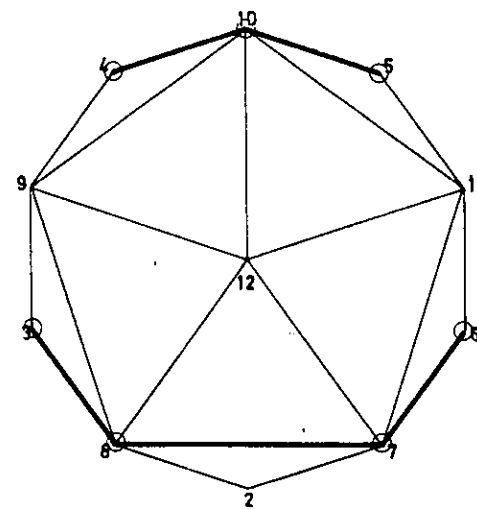
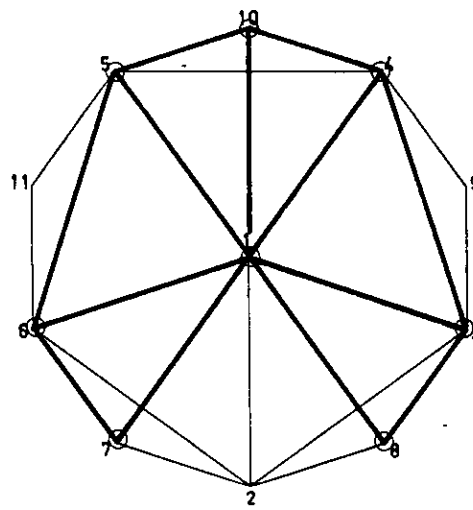
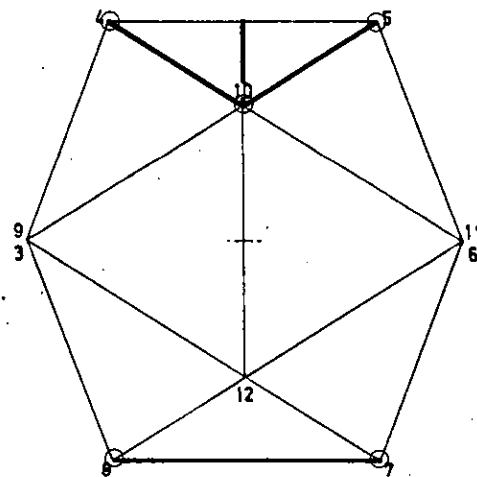
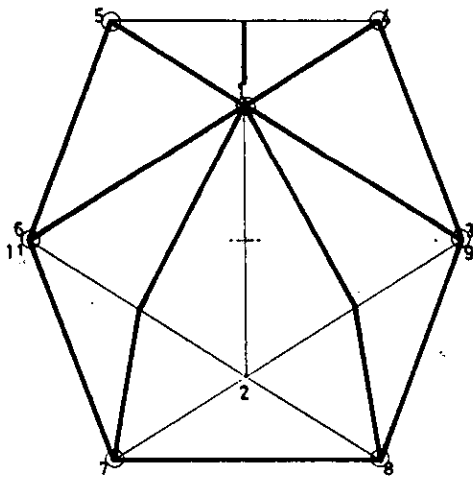
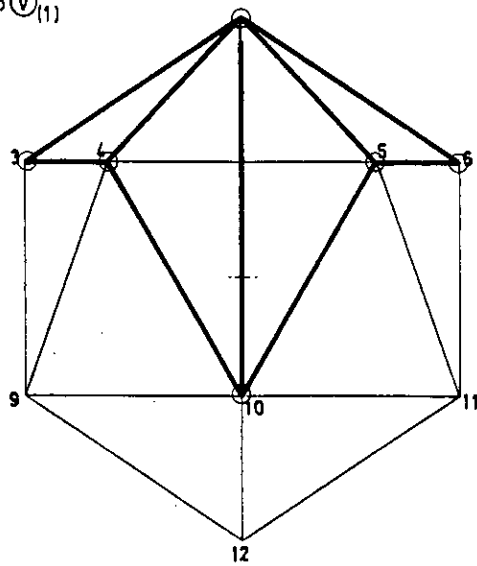
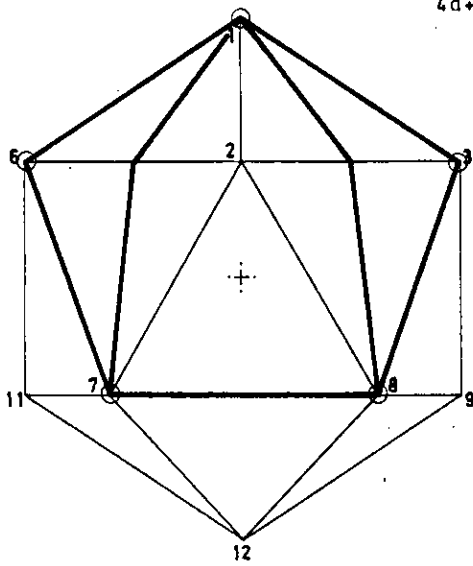
$4a+3b$ (1) (2)
 (S) (1) $dE+p^2$



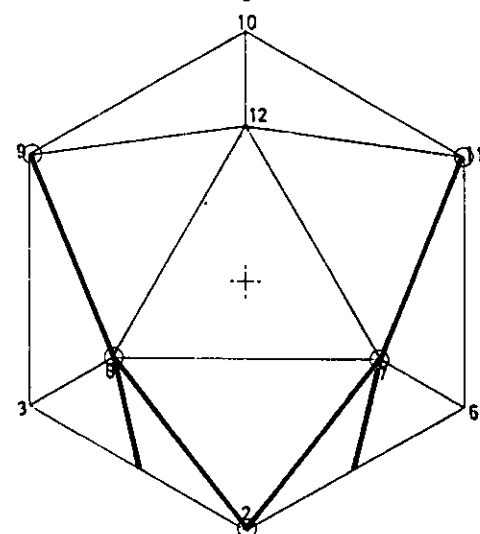
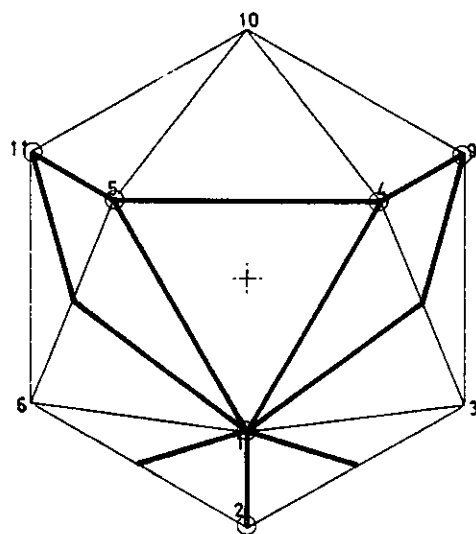
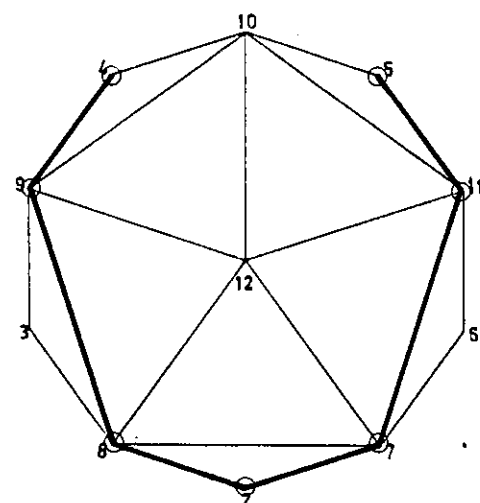
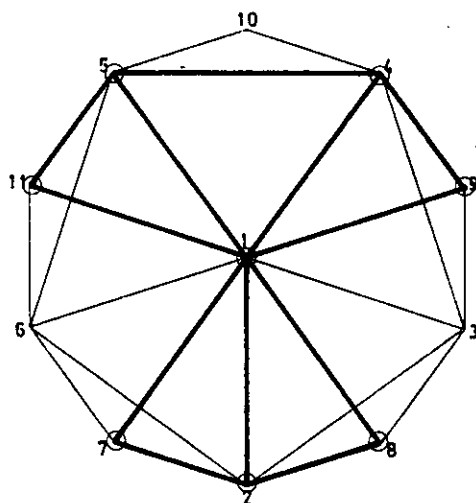
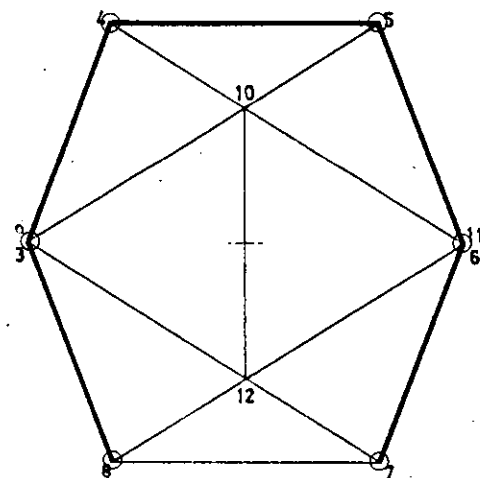
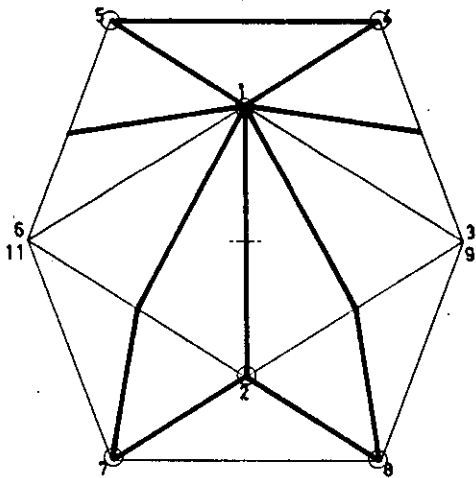
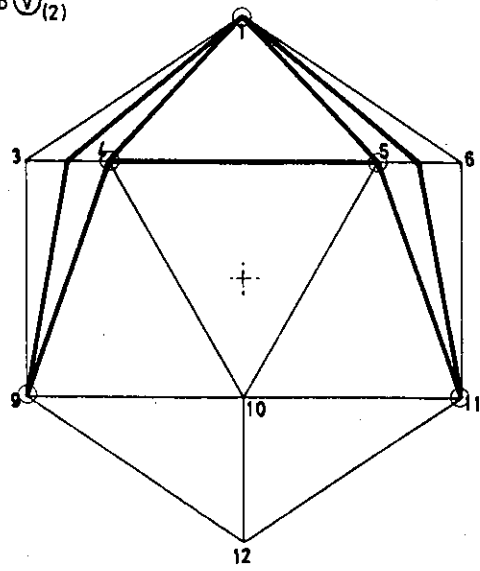
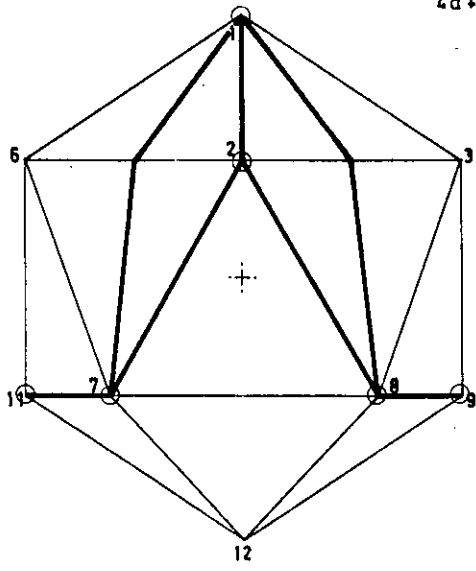


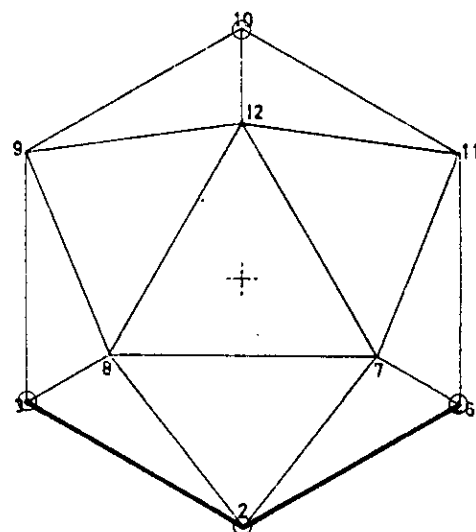
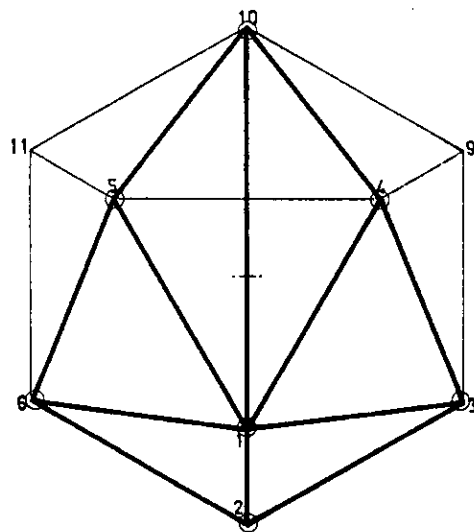
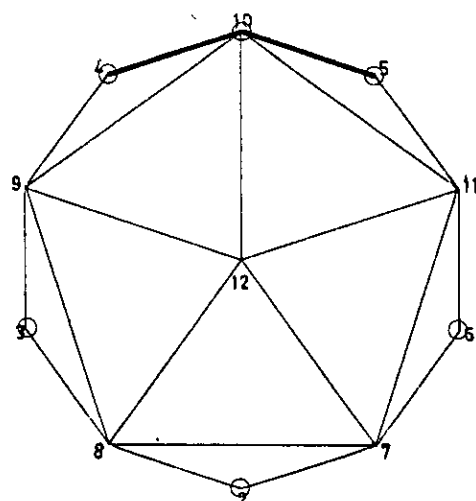
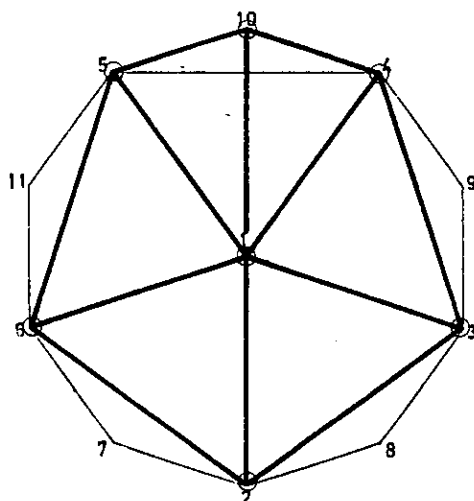
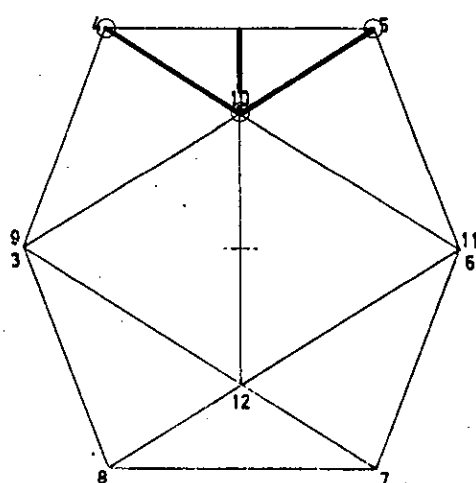
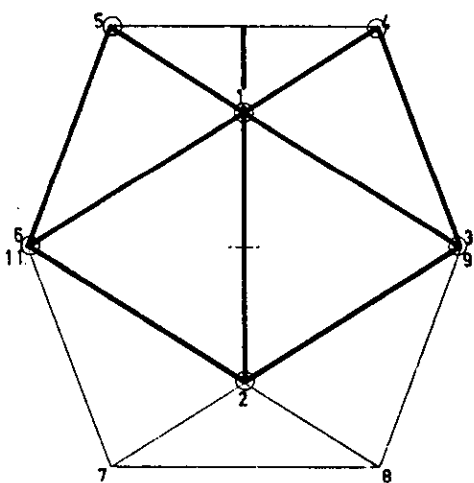
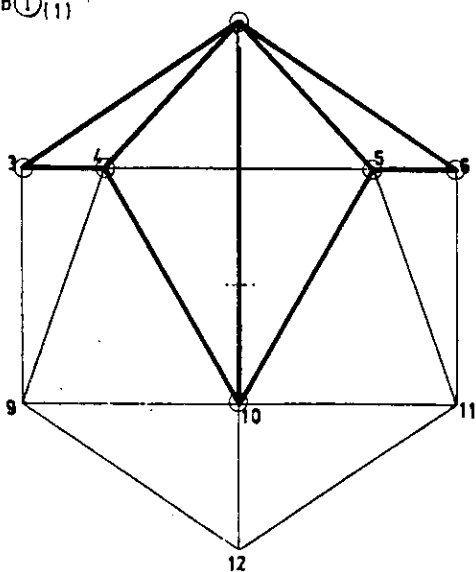
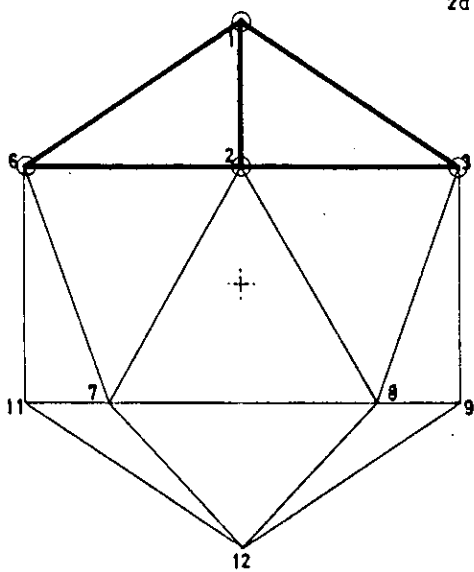


$4a+3b \text{ (V)}_{(11)}$

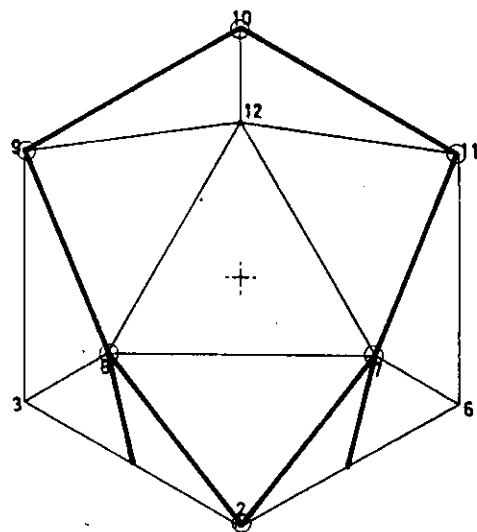
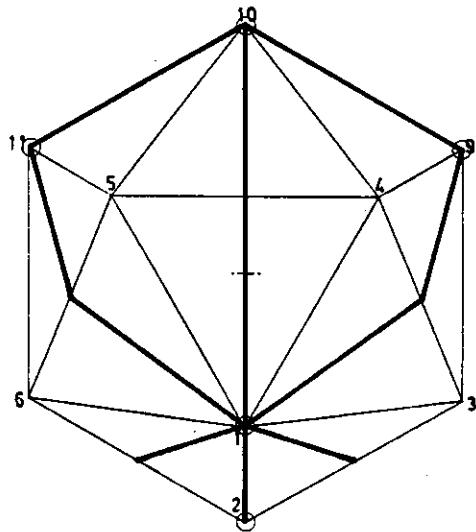
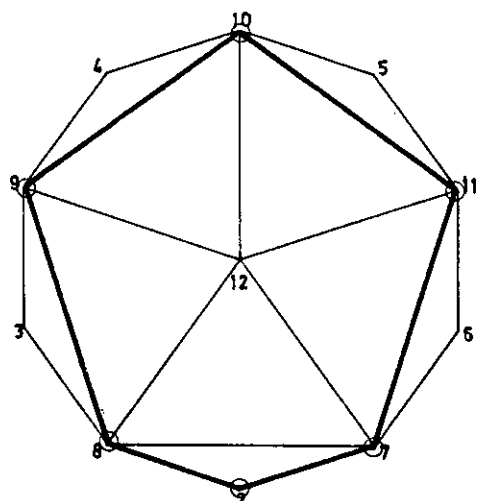
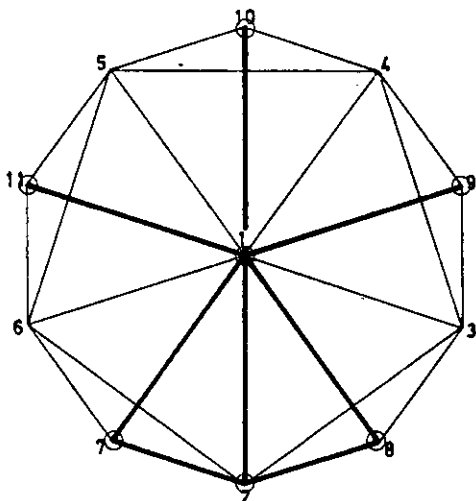
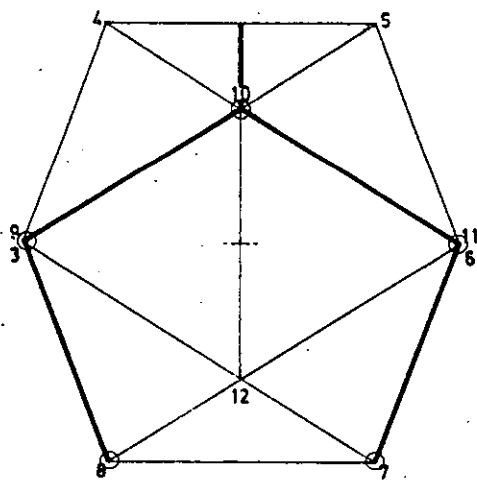
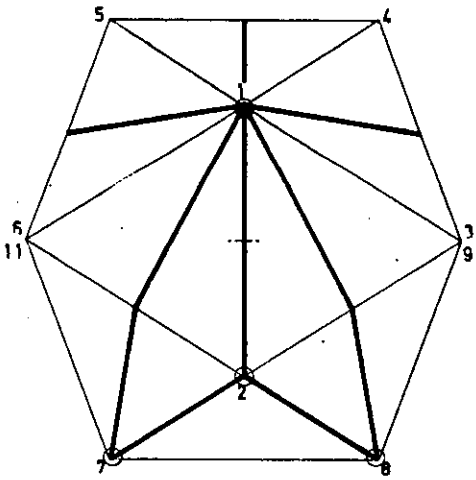
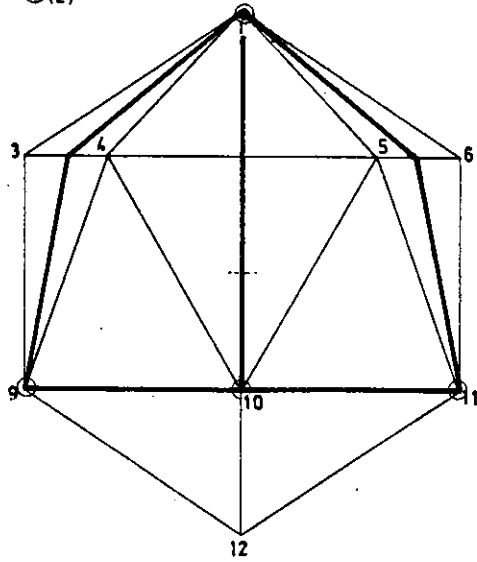
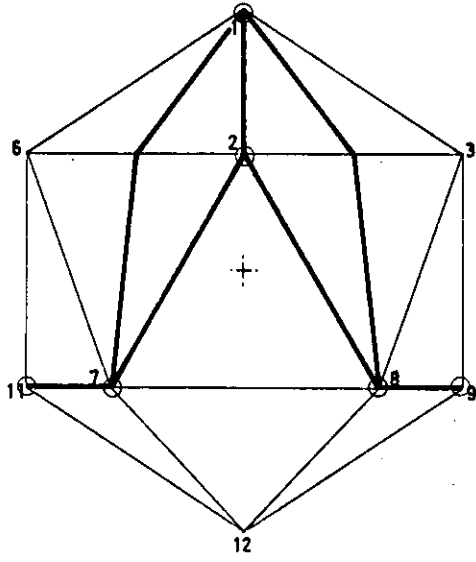


$4a+3b \text{ (V)}_{(2)}$

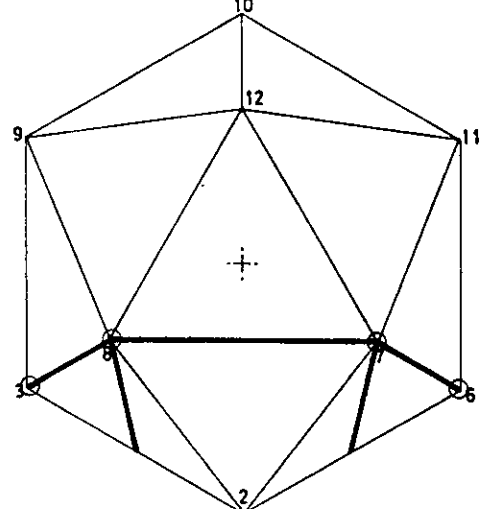
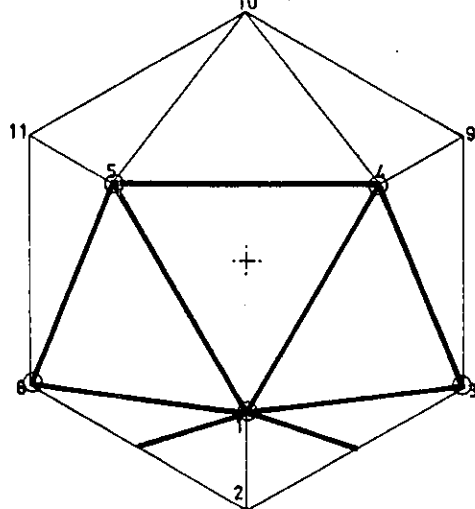
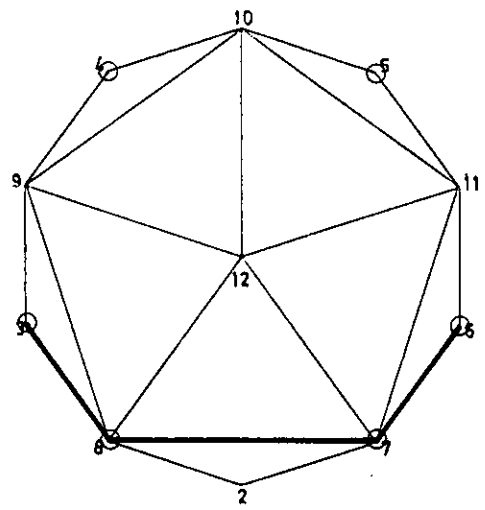
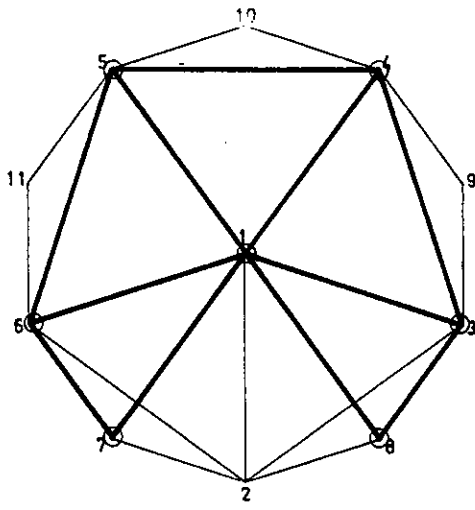
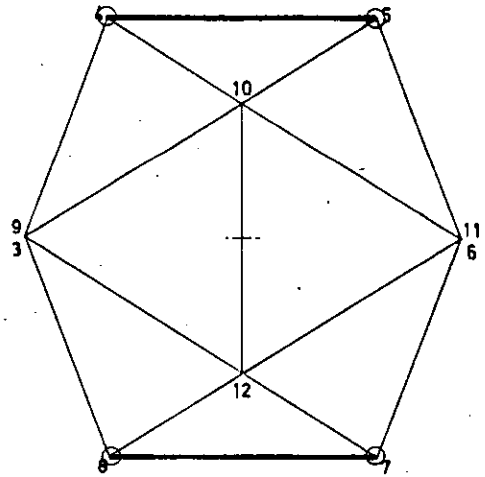
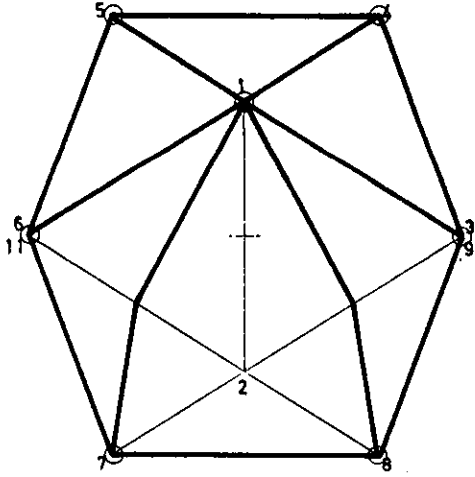
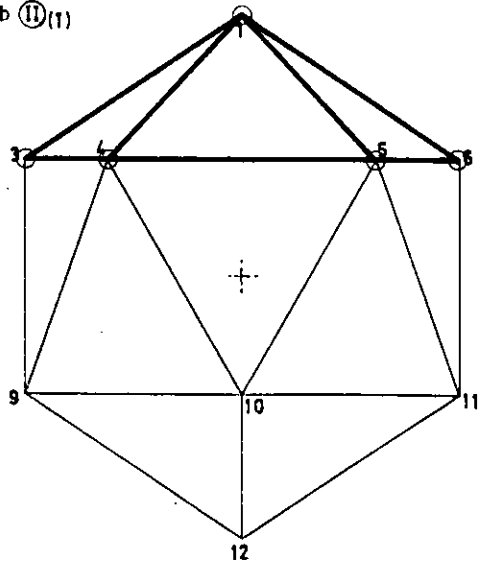
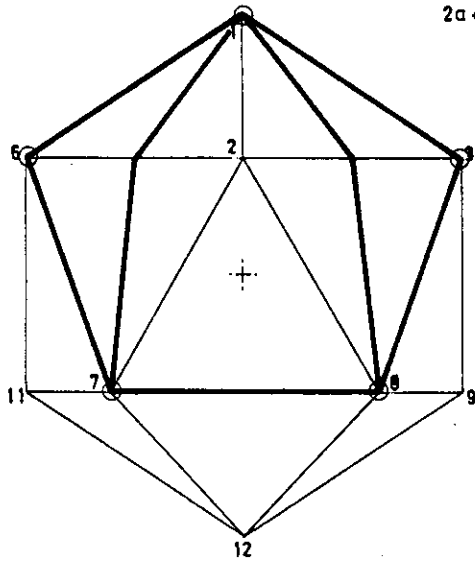




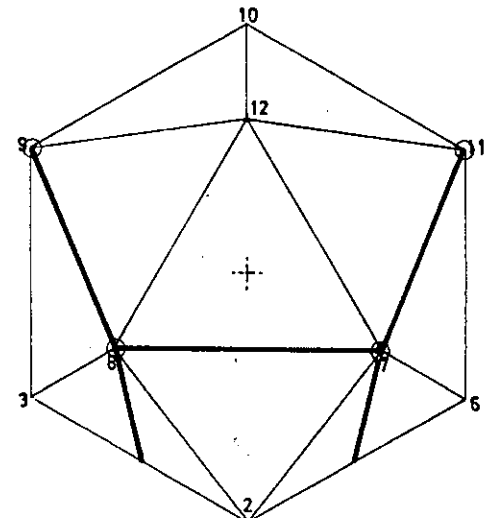
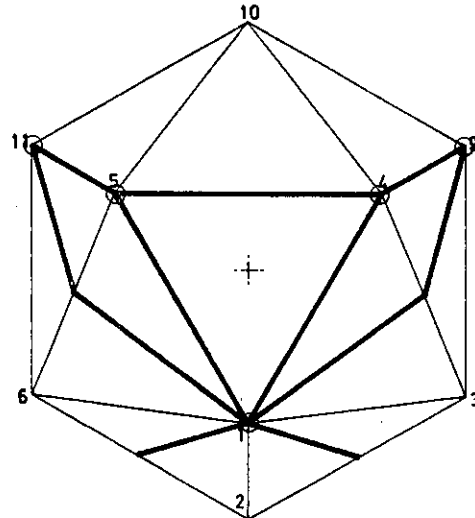
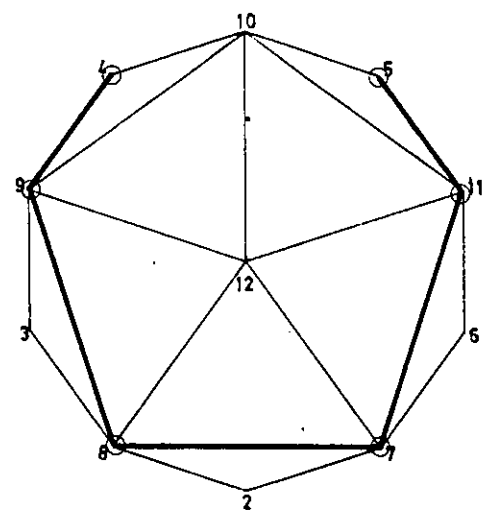
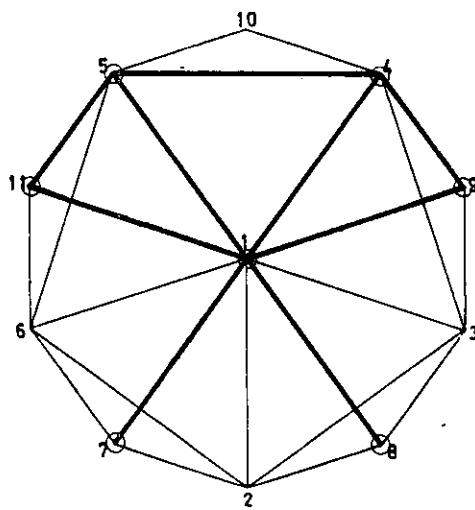
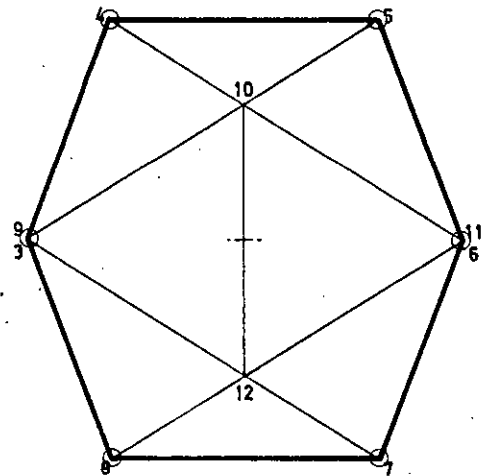
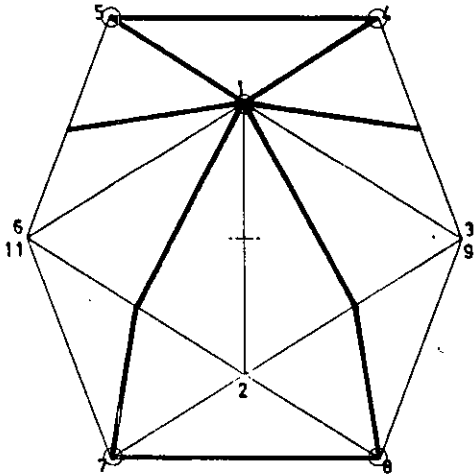
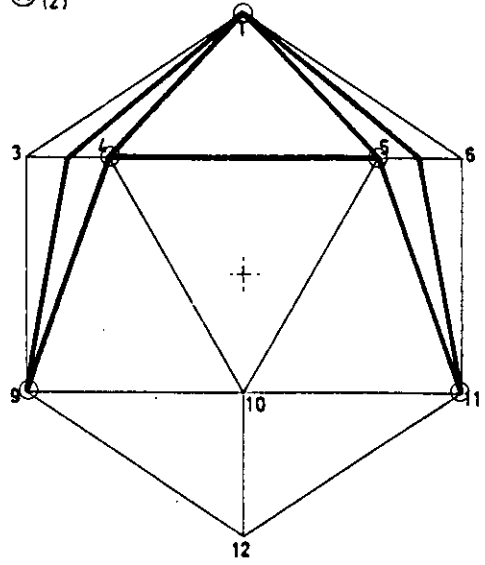
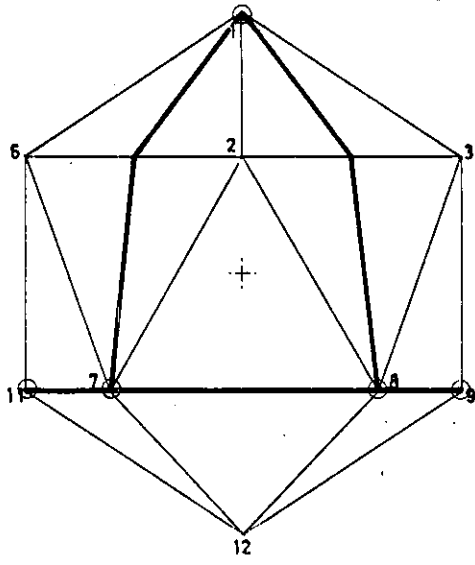
$2a + 4b \textcircled{1}(2)$

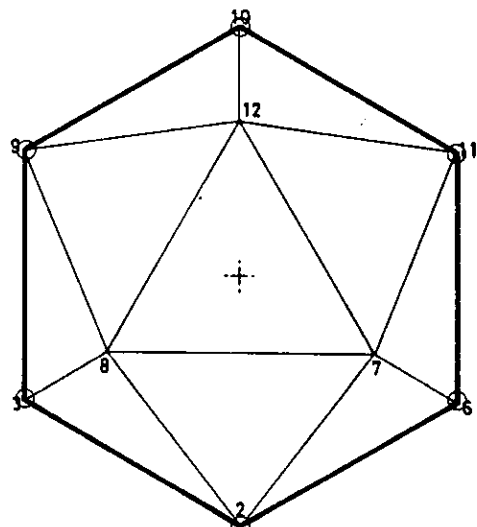
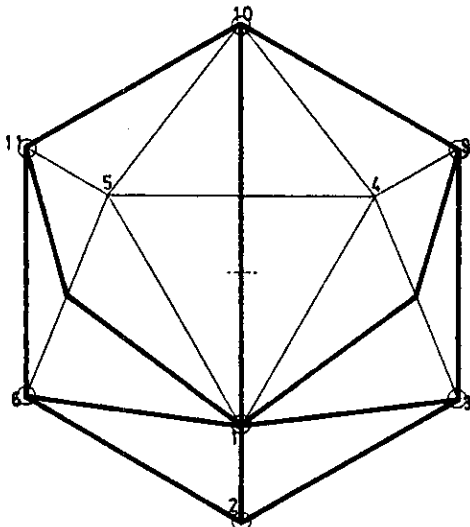
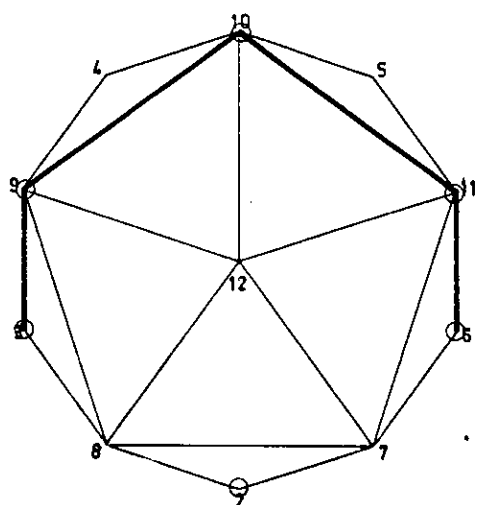
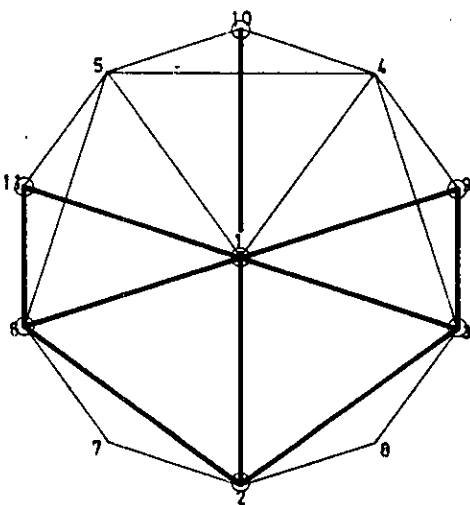
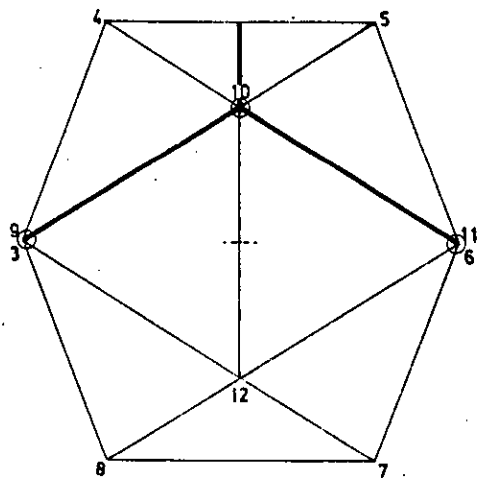
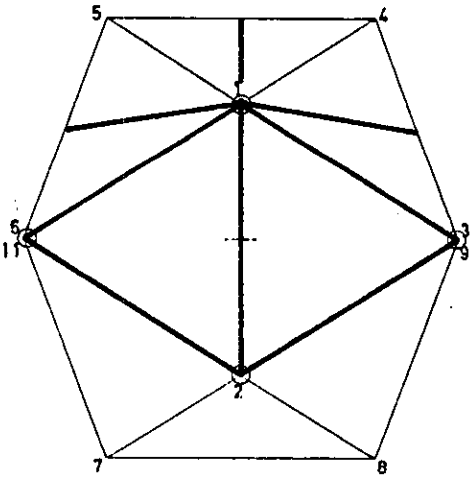
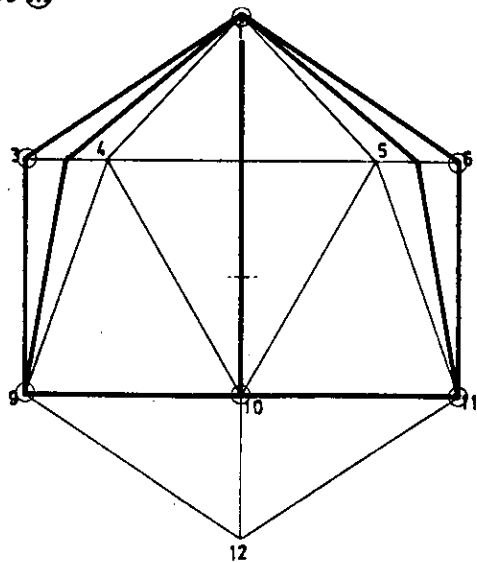
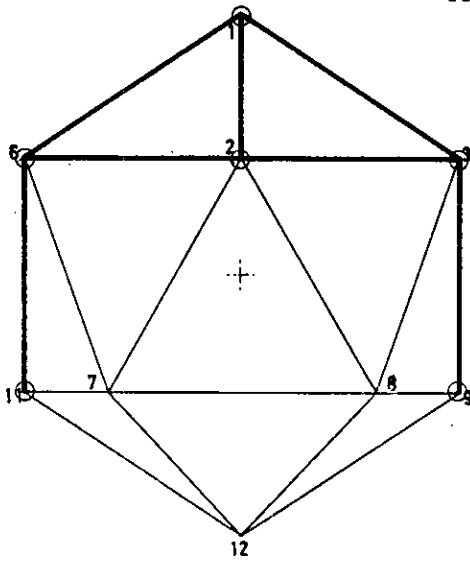


$2a+4b$ (11)(1)

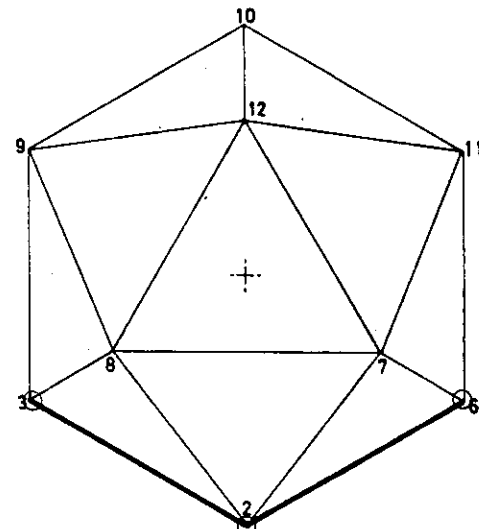
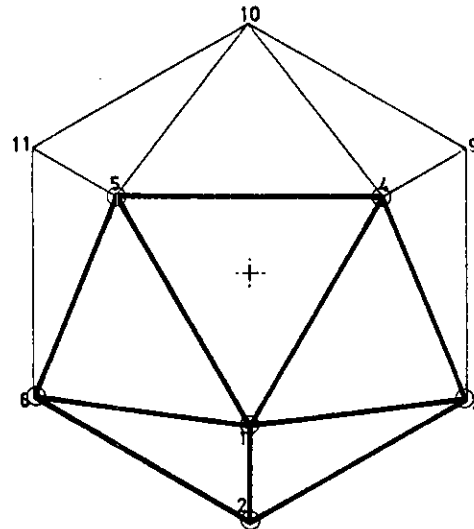
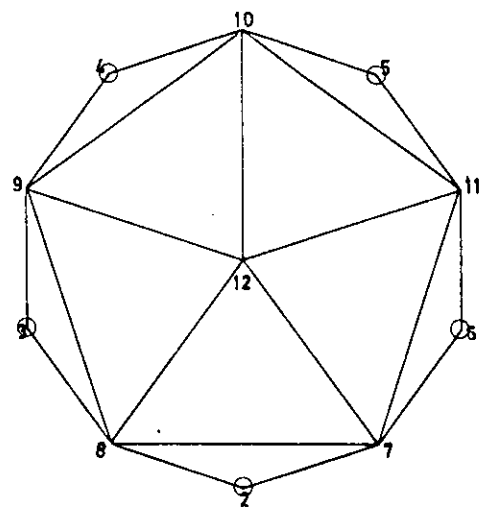
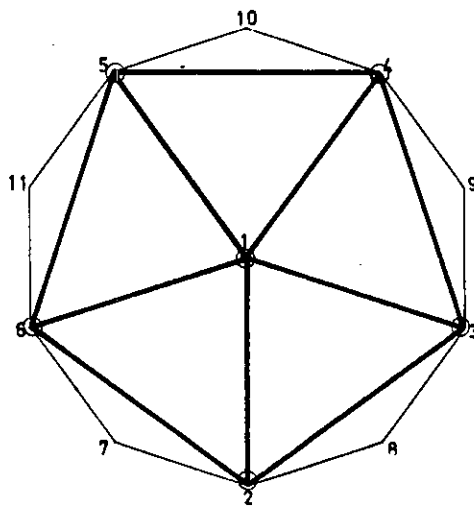
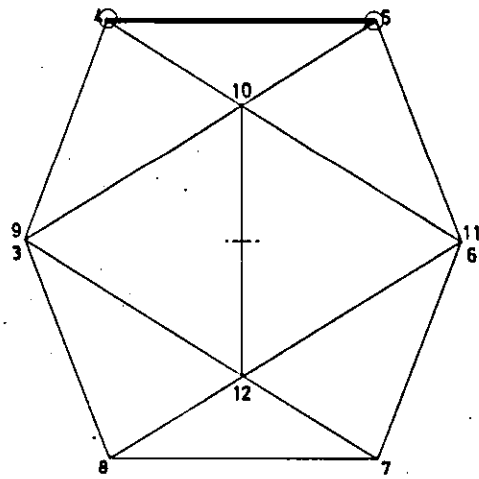
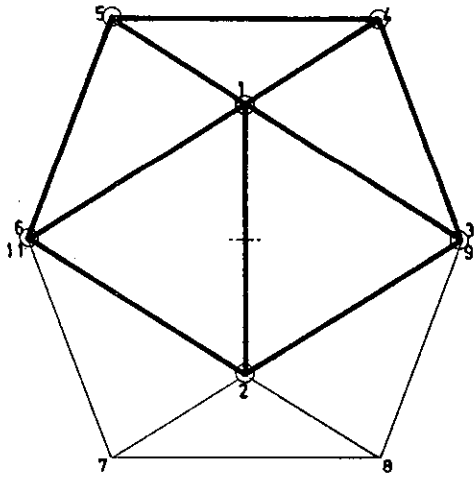
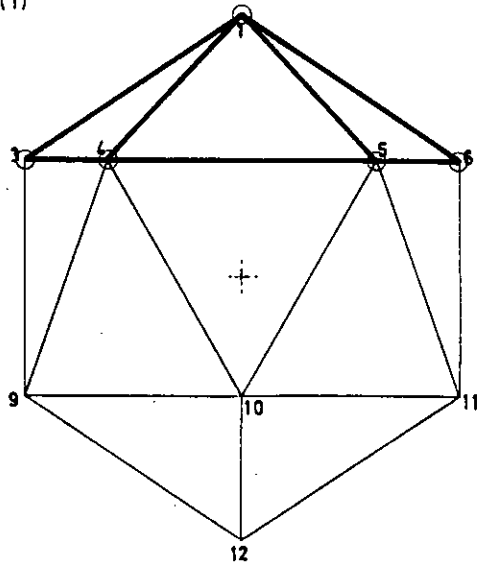
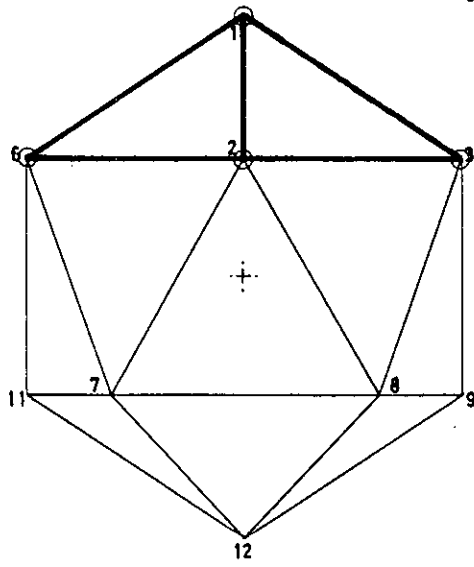


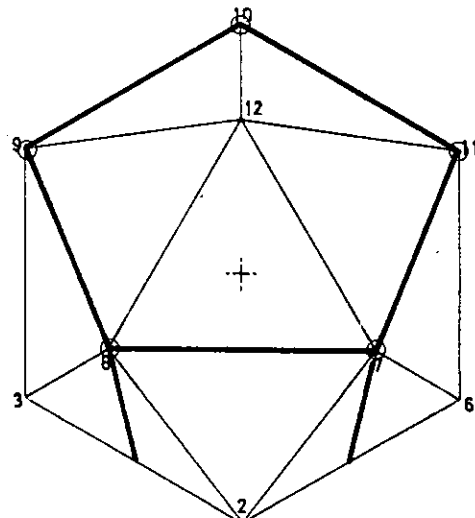
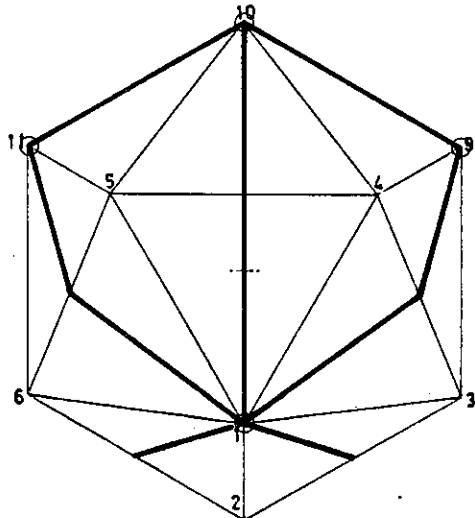
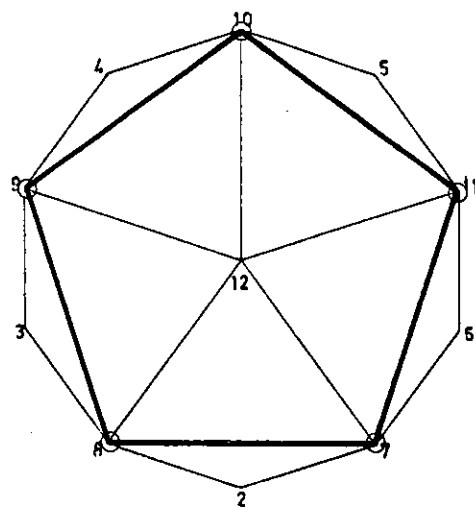
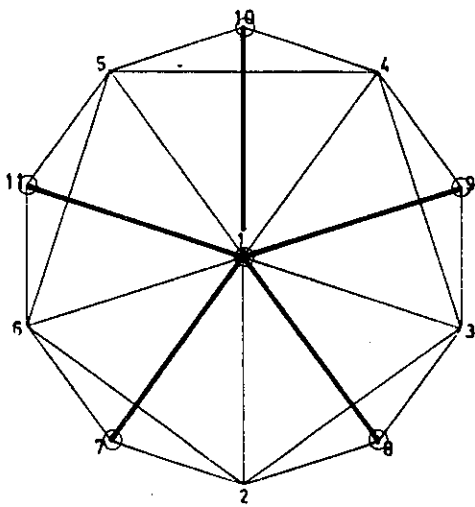
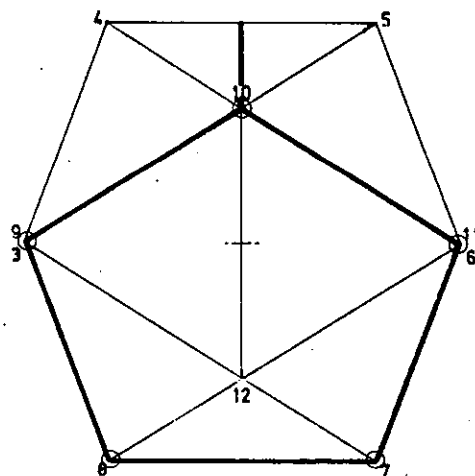
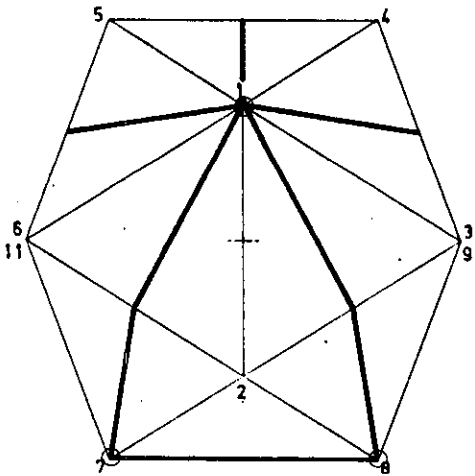
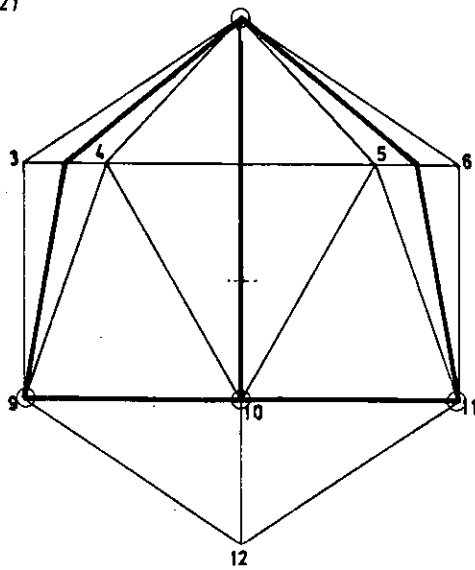
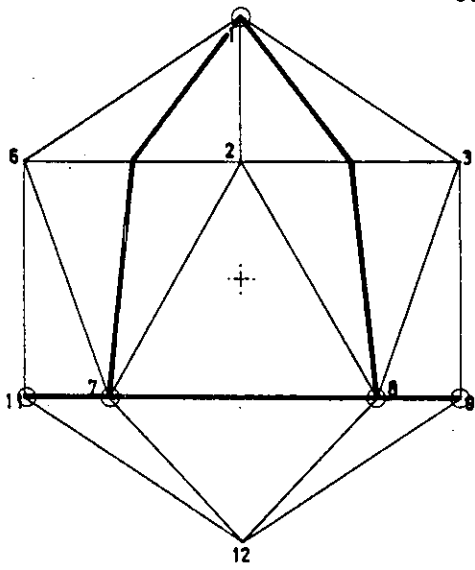
$2a+4b$ (1) (2)



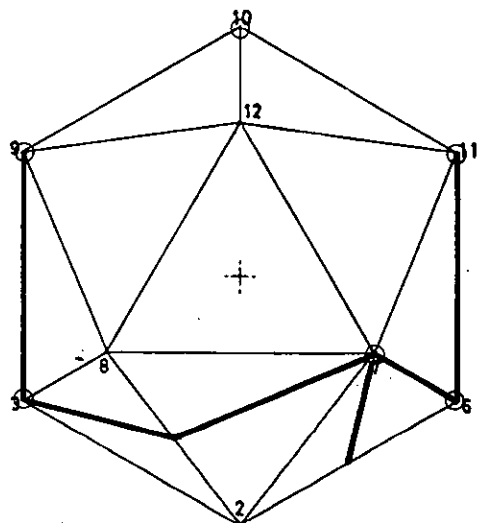
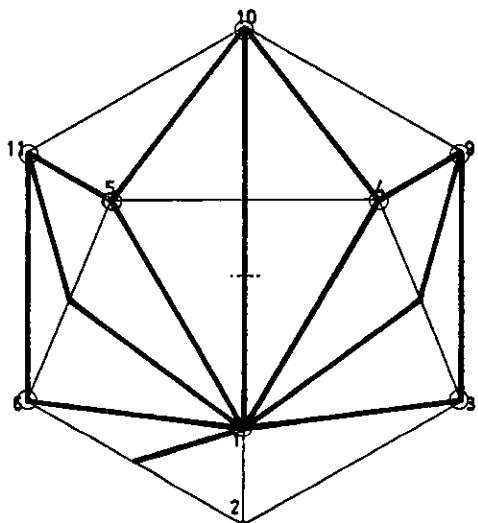
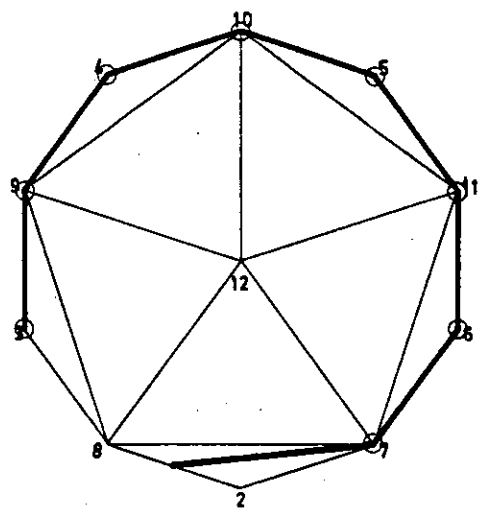
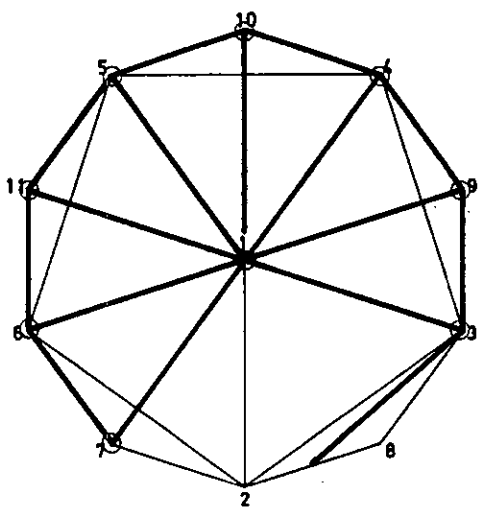
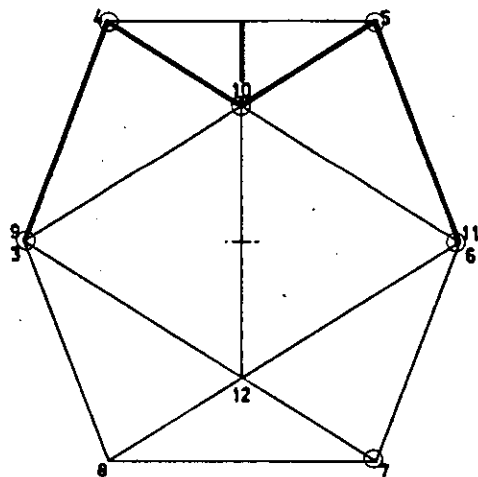
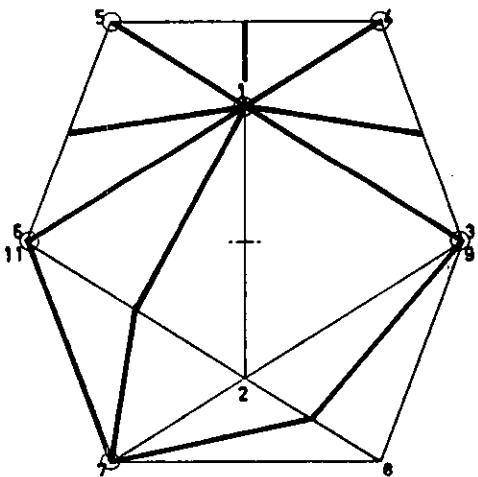
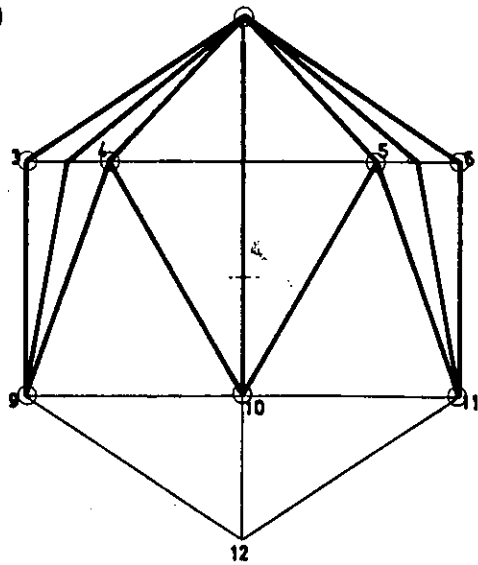
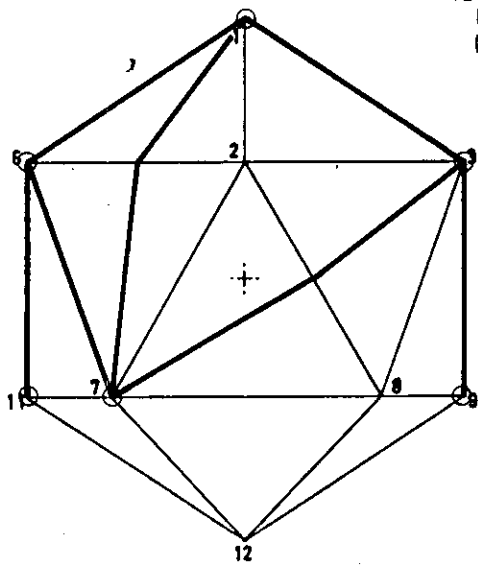


5b (1)

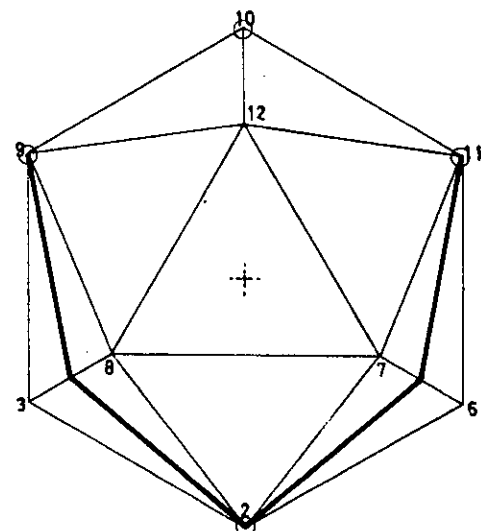
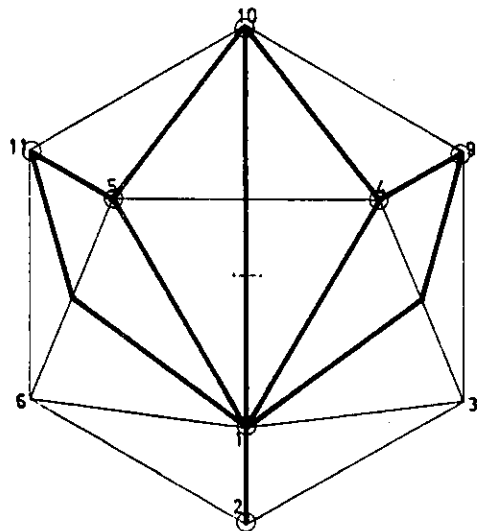
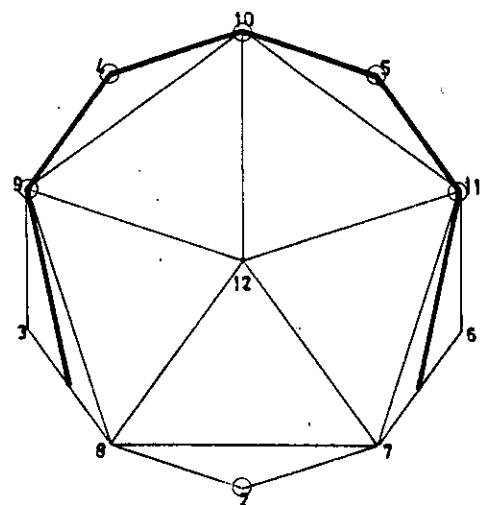
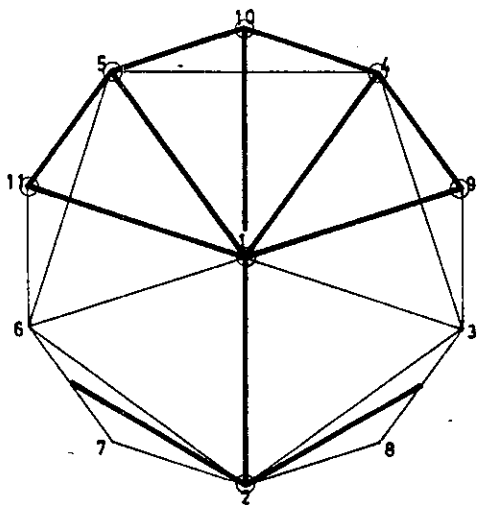
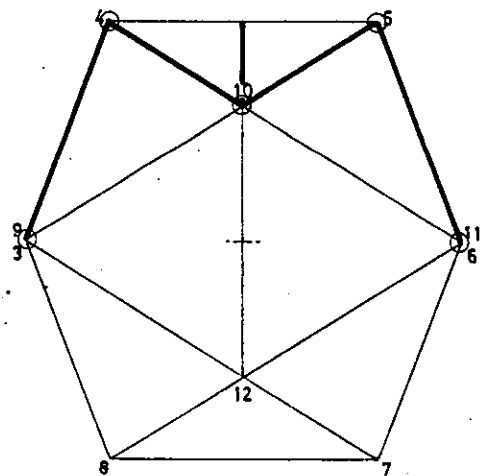
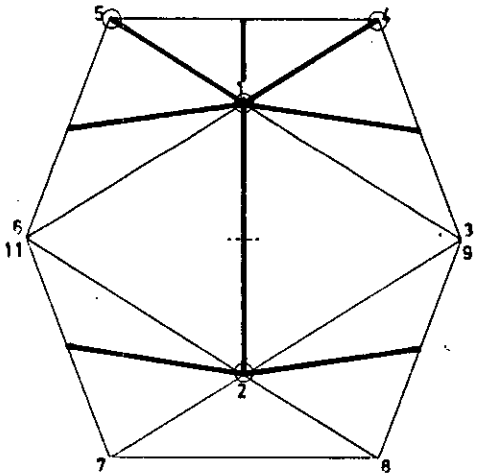
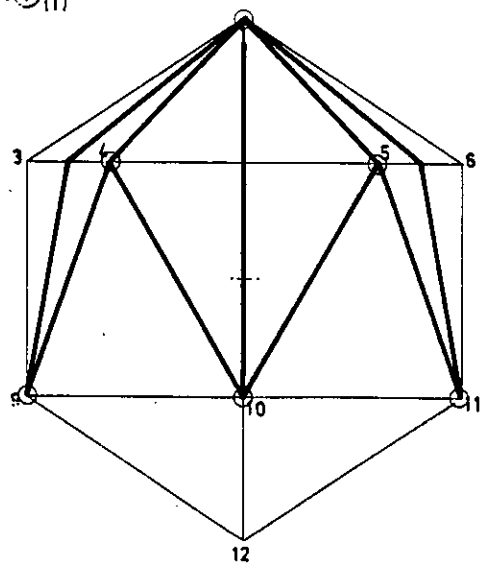
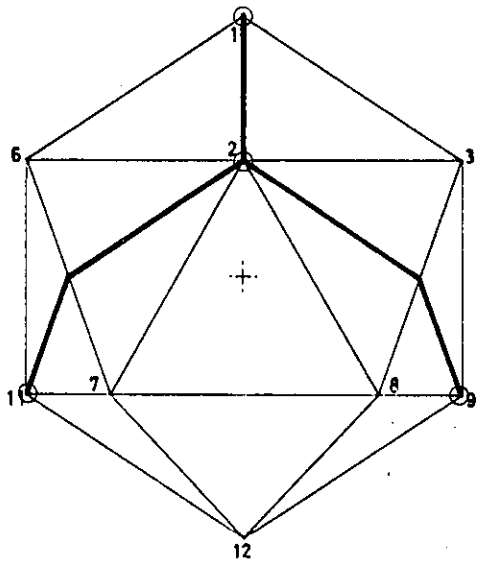




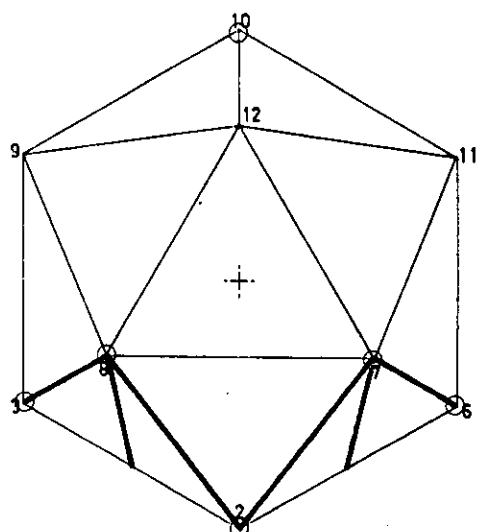
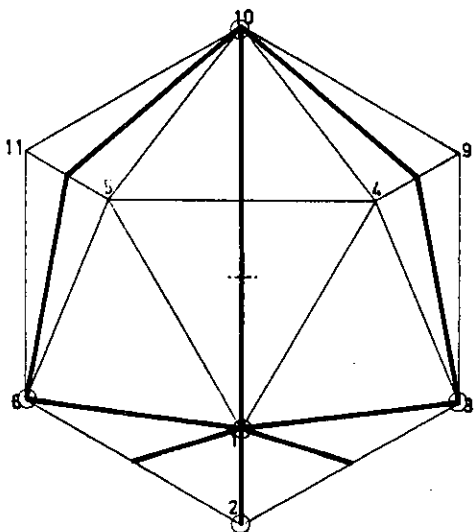
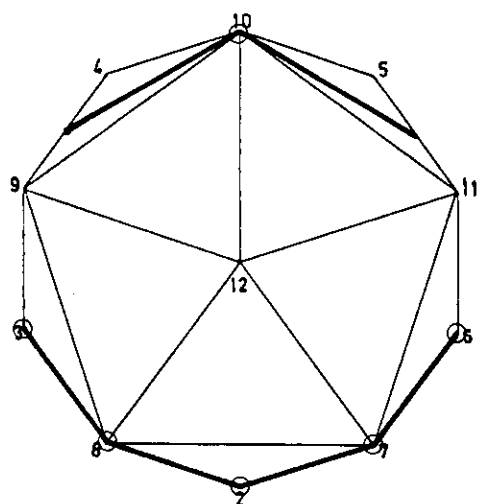
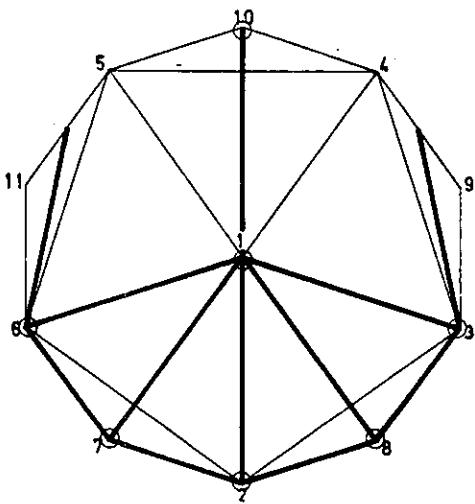
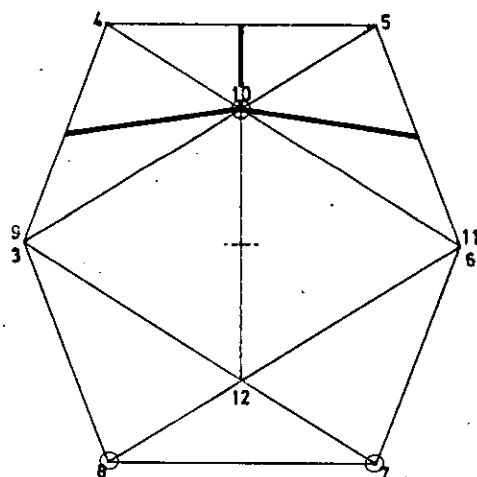
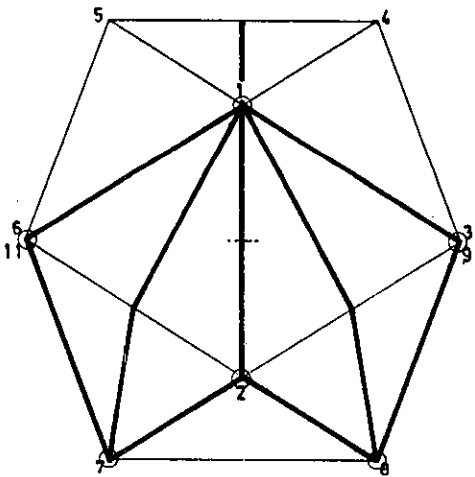
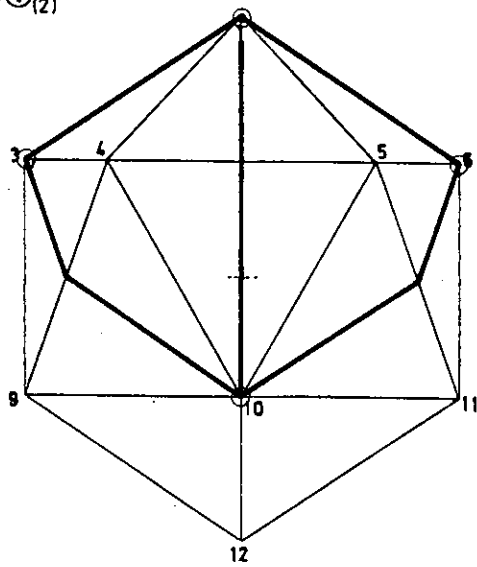
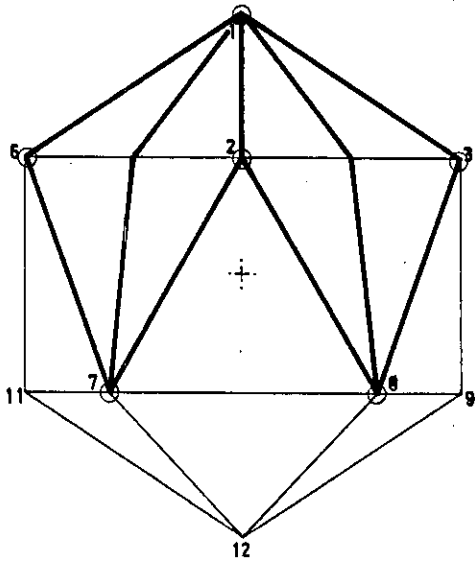
7a+c
(1)
(S)



$4a+2c(1)_{(1)}$



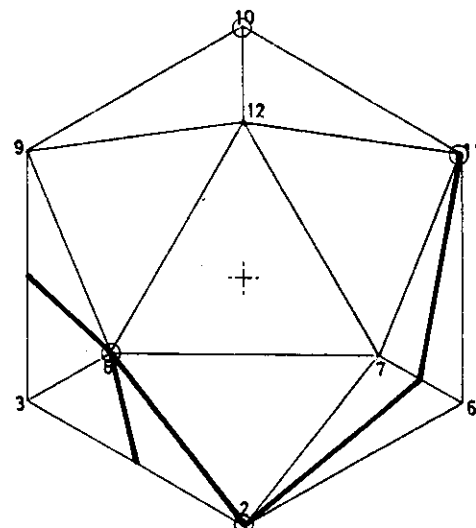
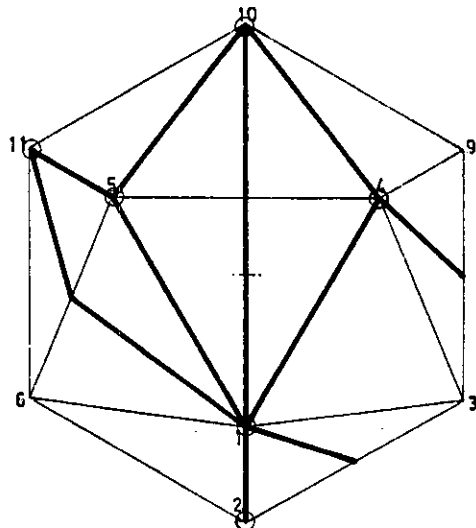
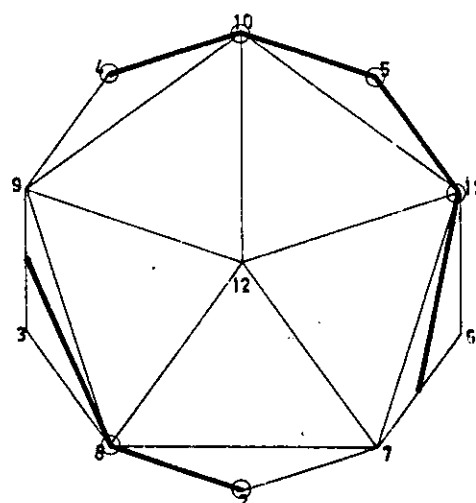
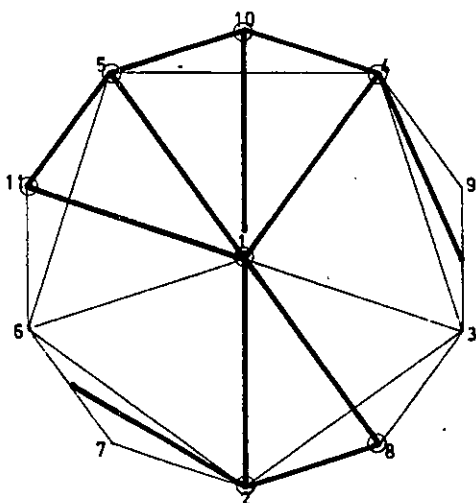
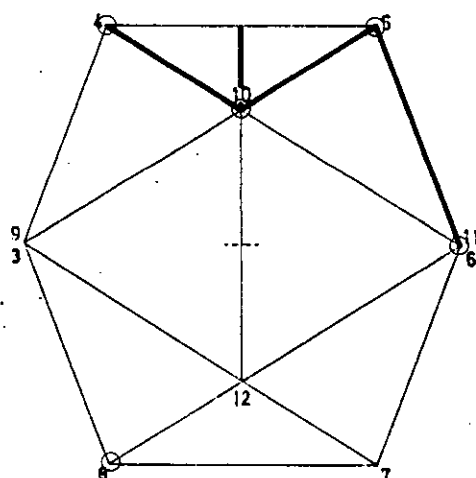
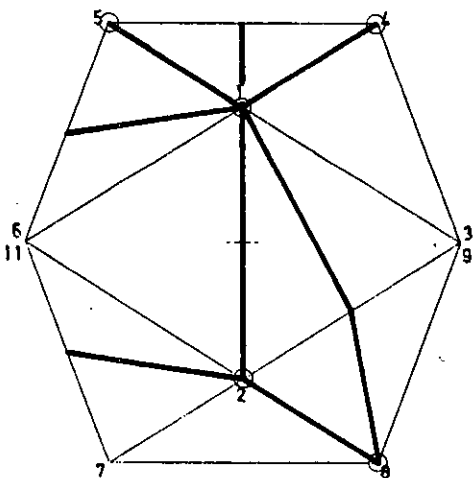
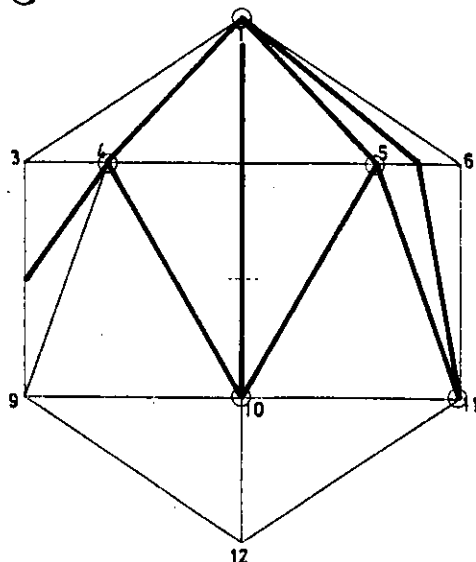
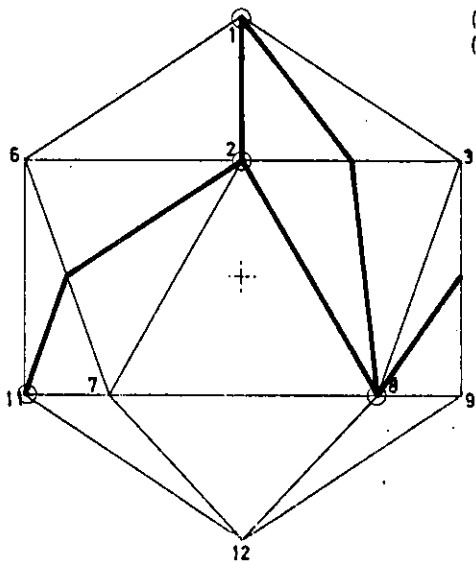
$4a + 2c$ ①(2)

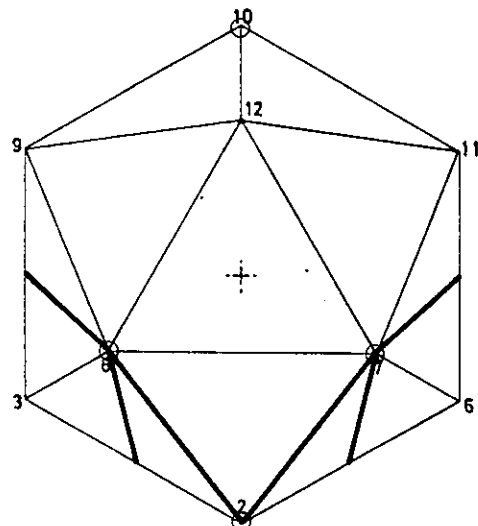
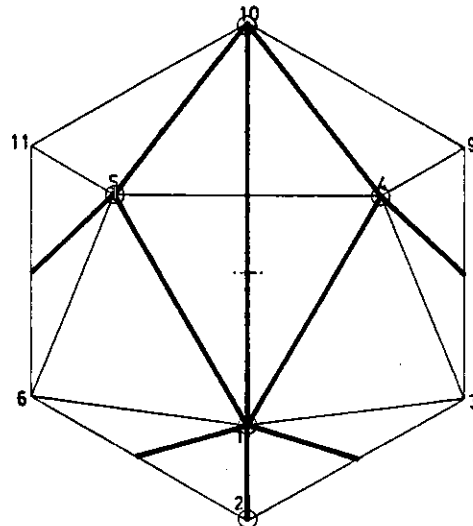
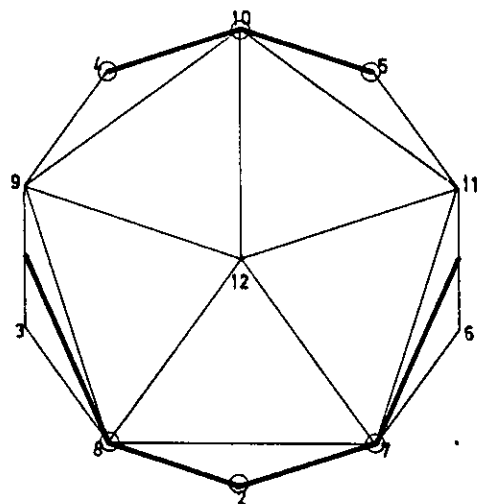
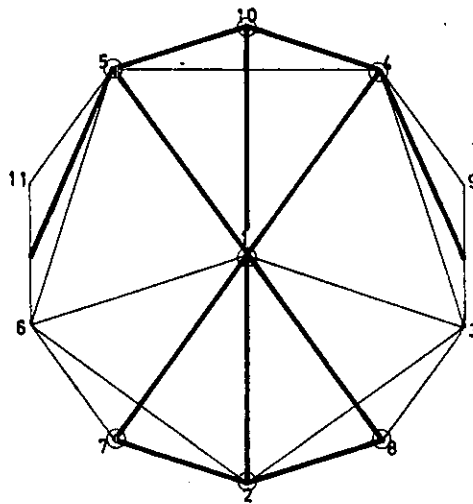
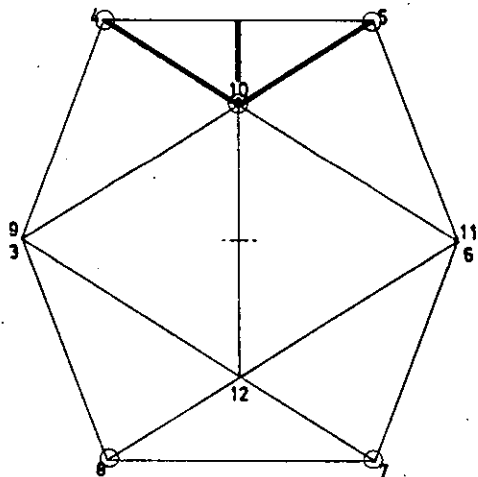
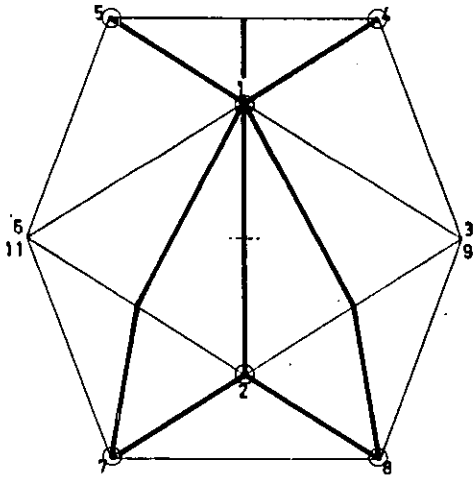
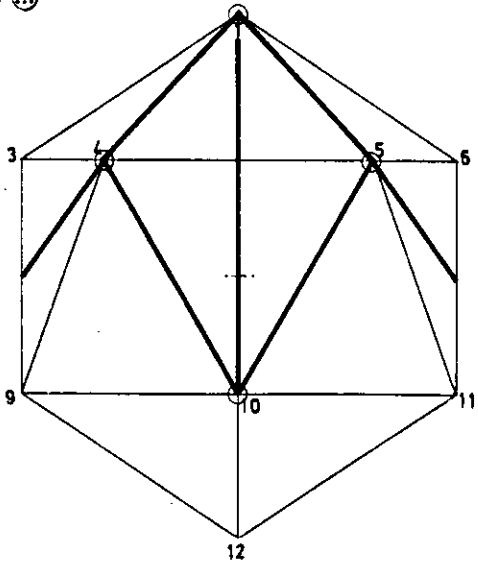
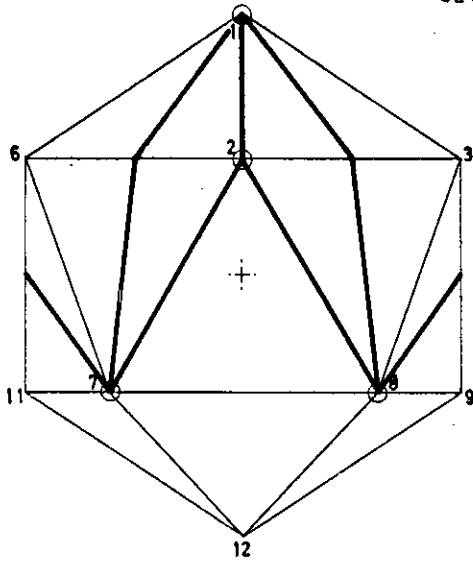


$4a+2c$ (11)

(1)

(5)

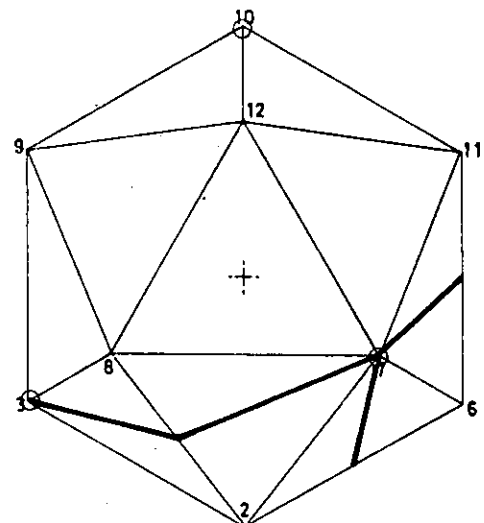
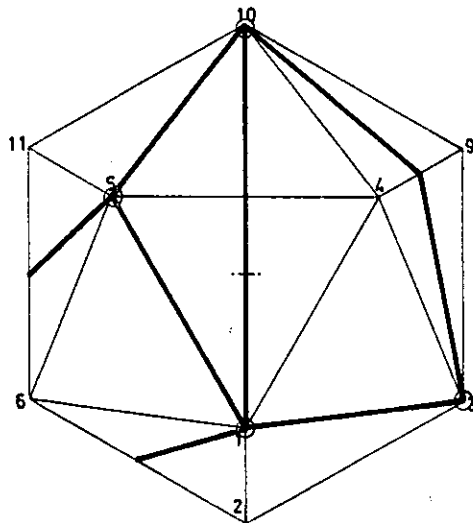
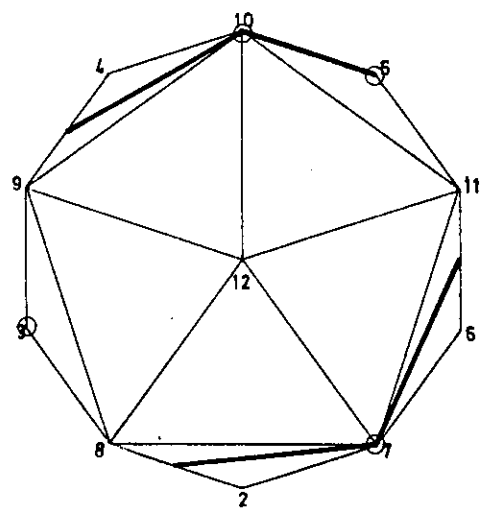
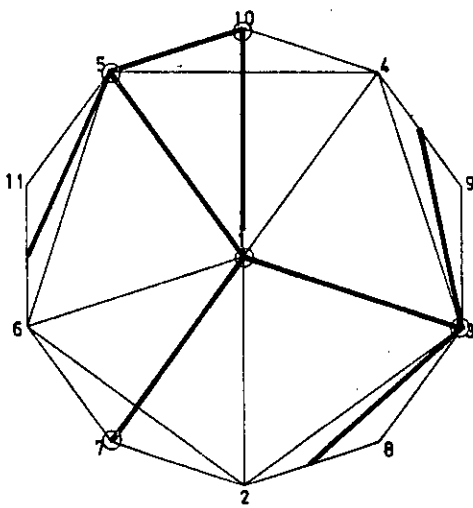
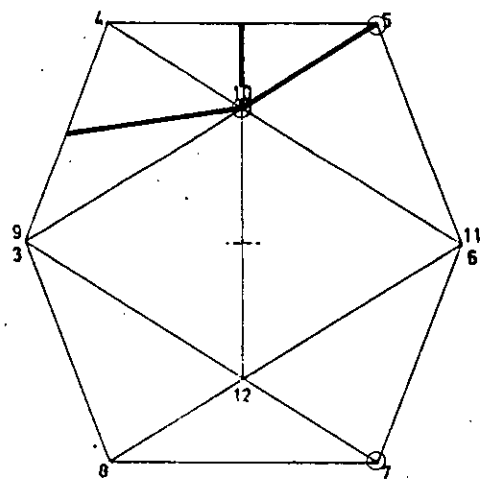
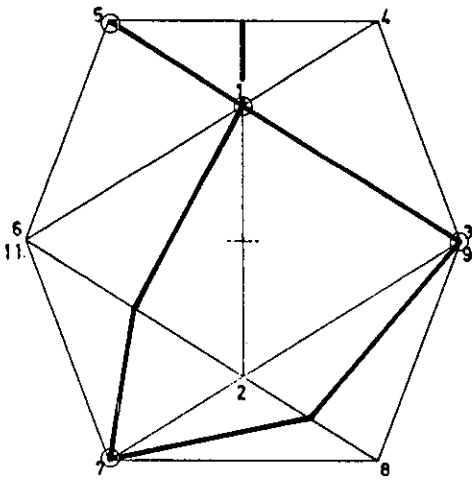
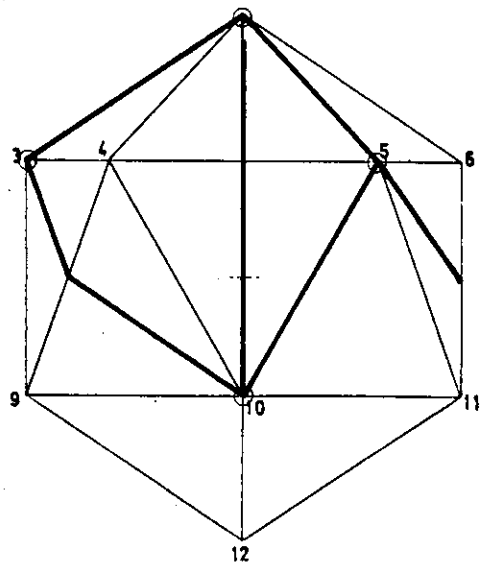
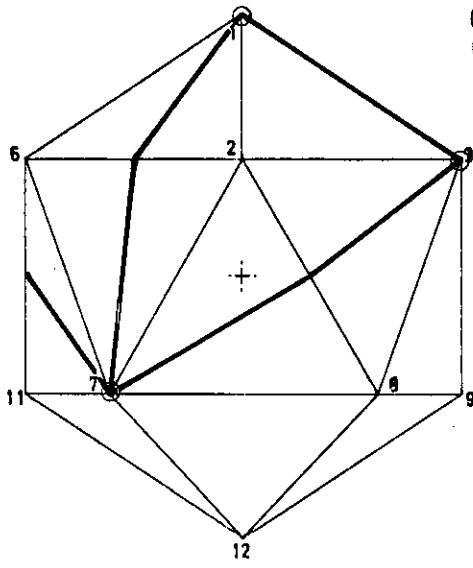




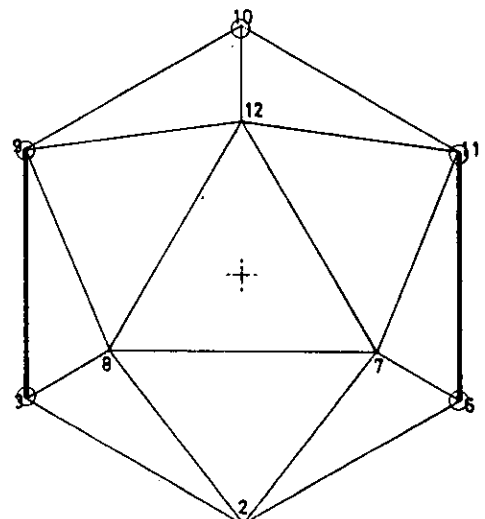
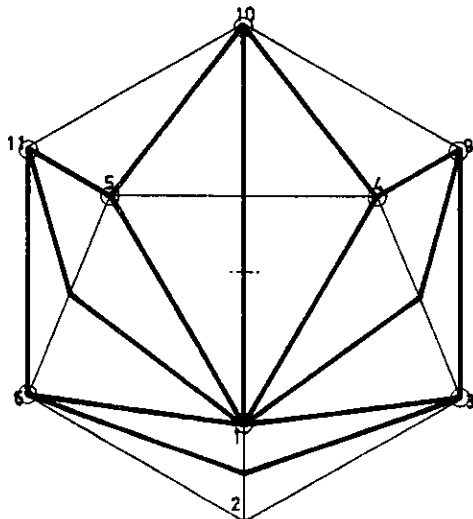
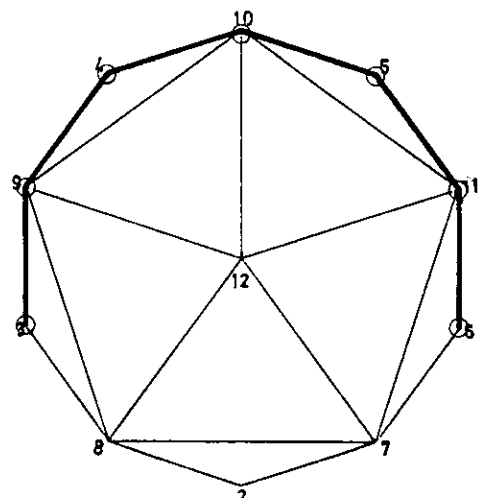
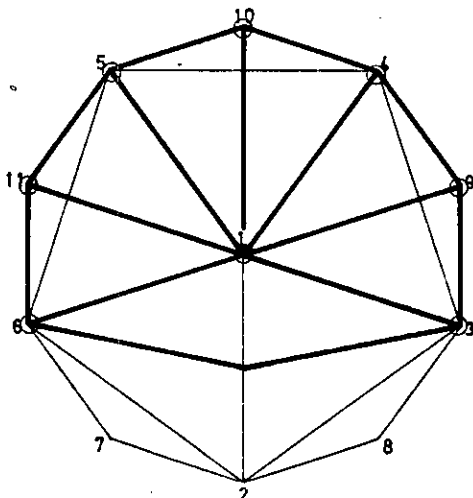
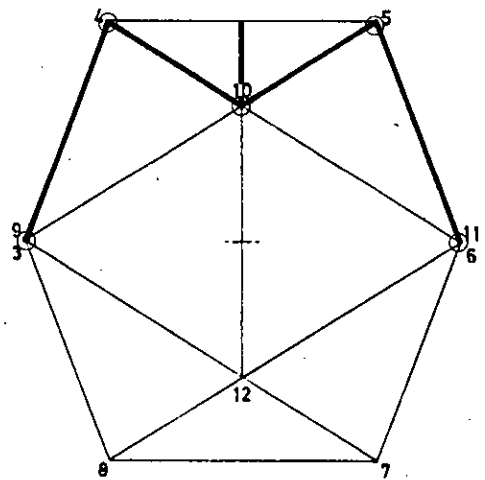
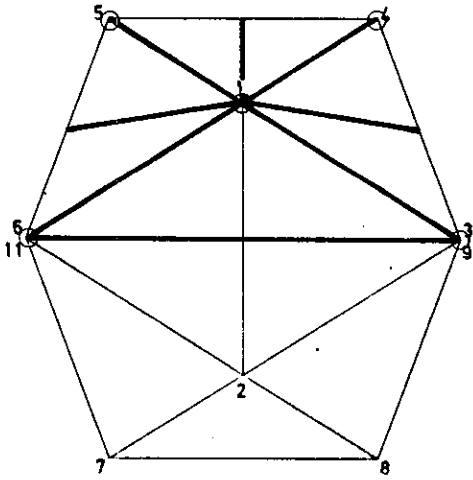
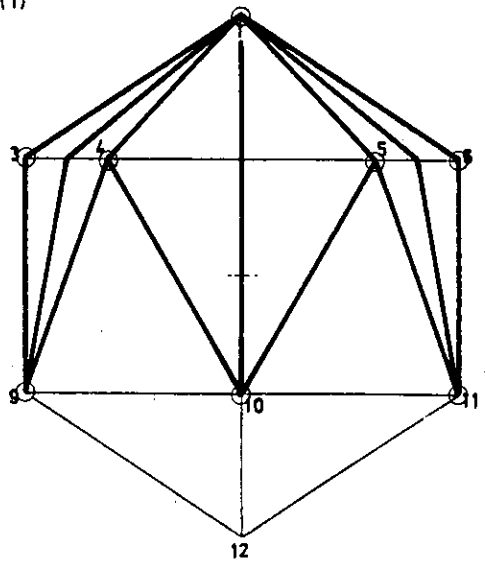
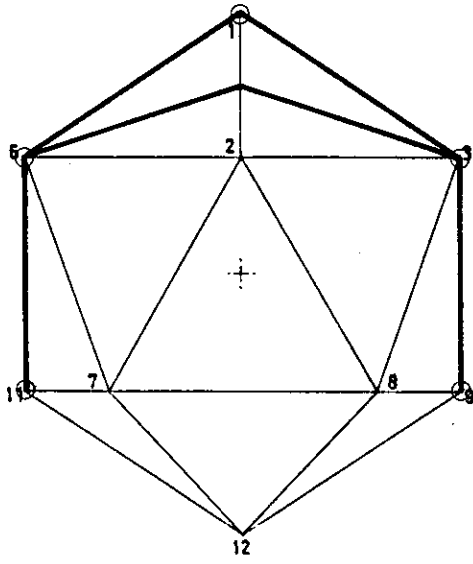
$a = 3c$

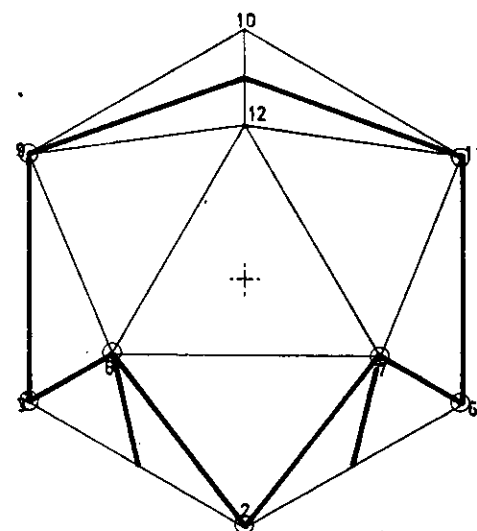
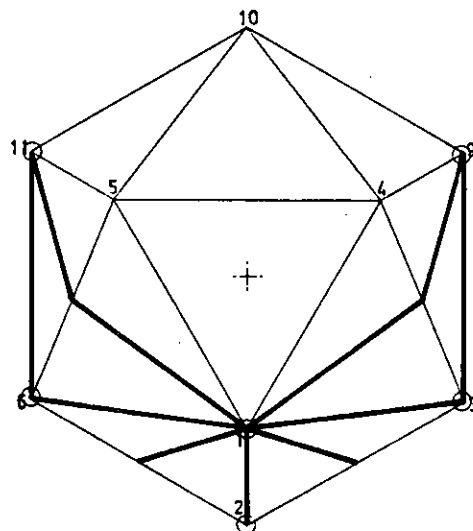
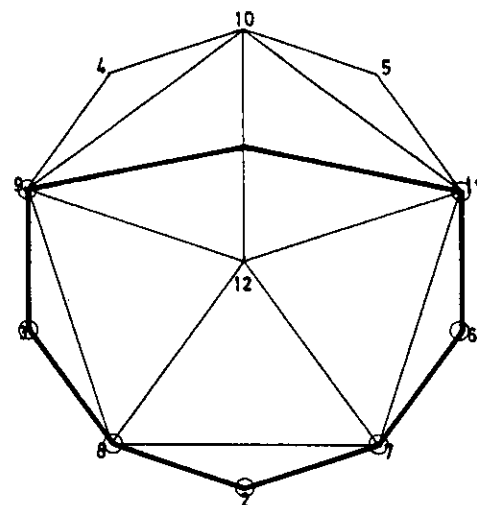
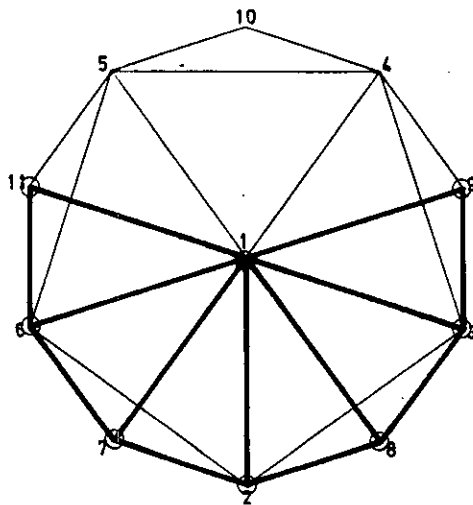
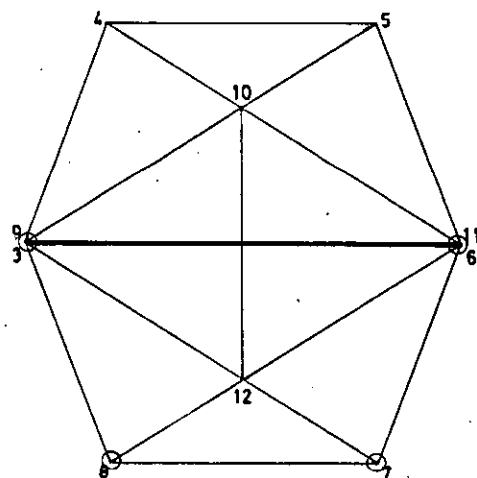
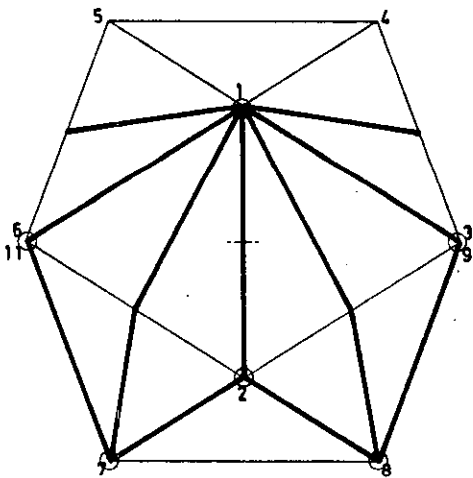
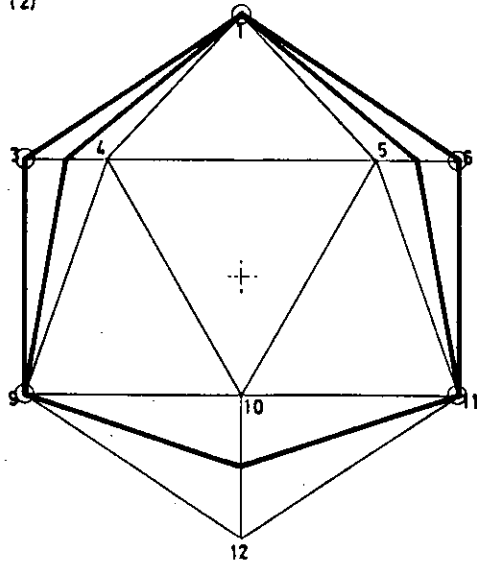
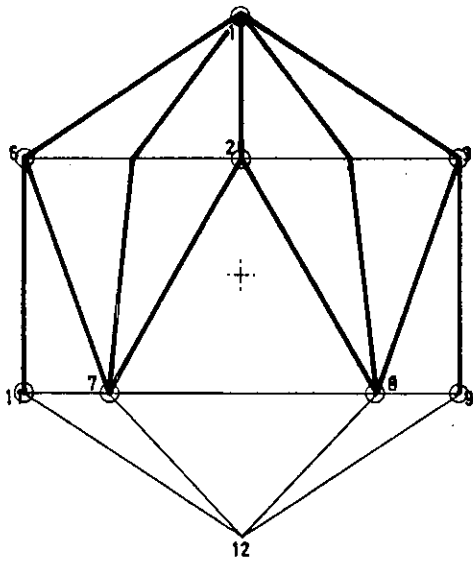
(1)

(2)

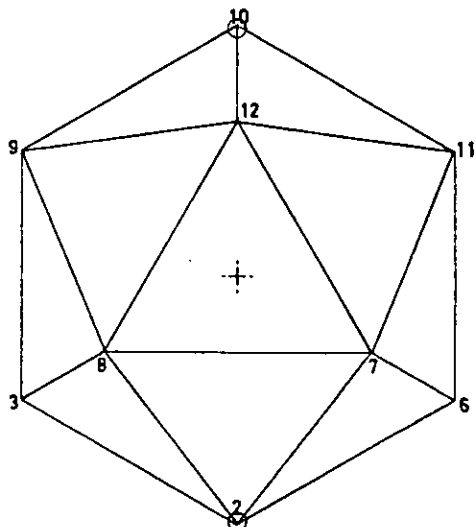
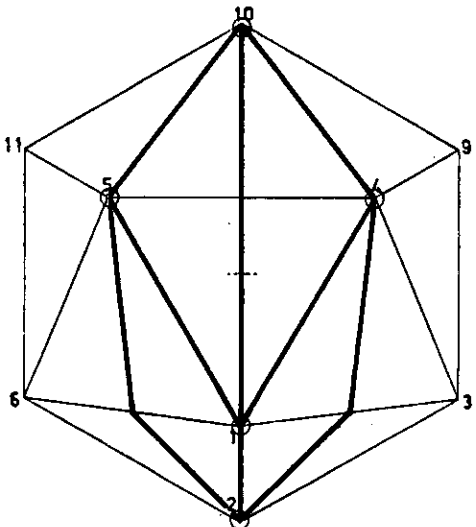
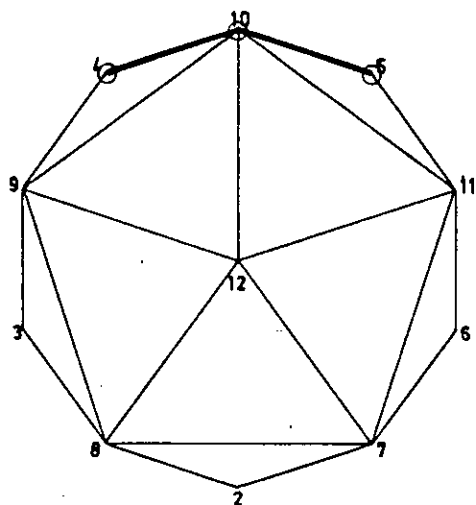
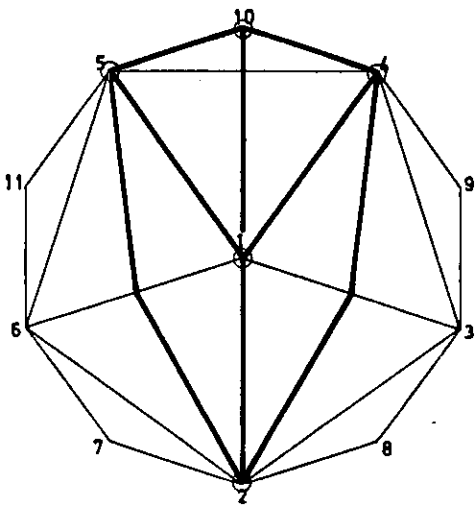
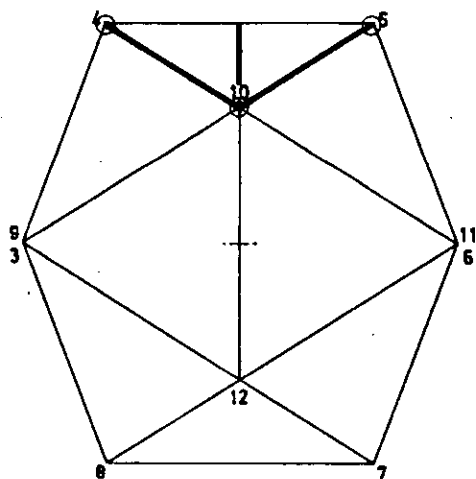
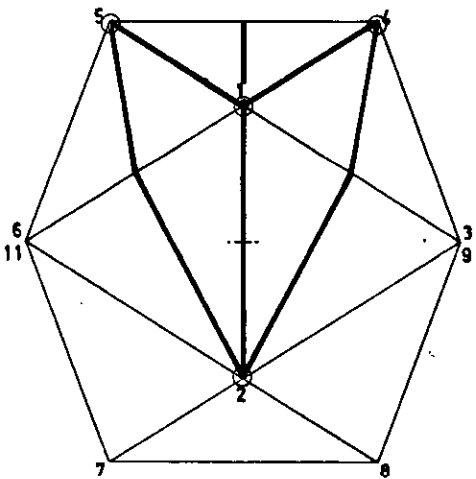
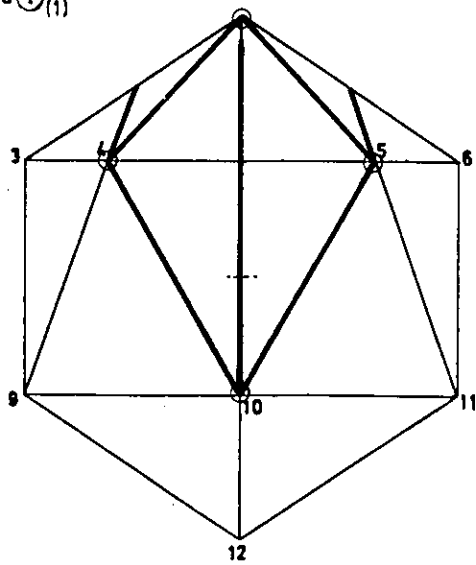
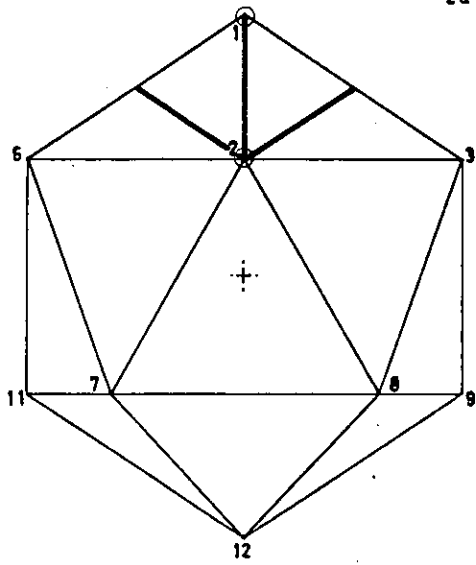


6a + d (11)

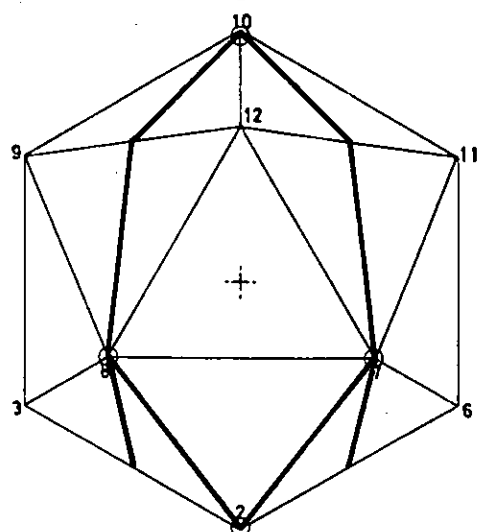
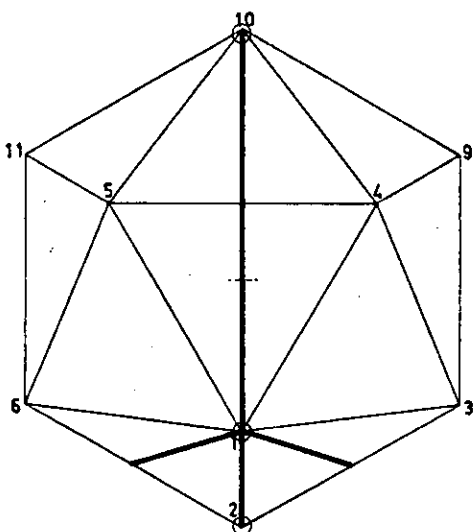
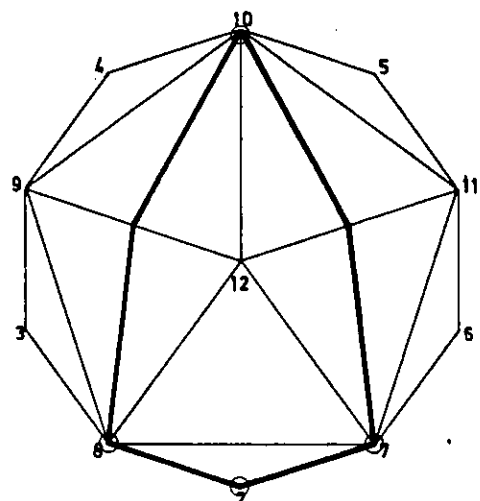
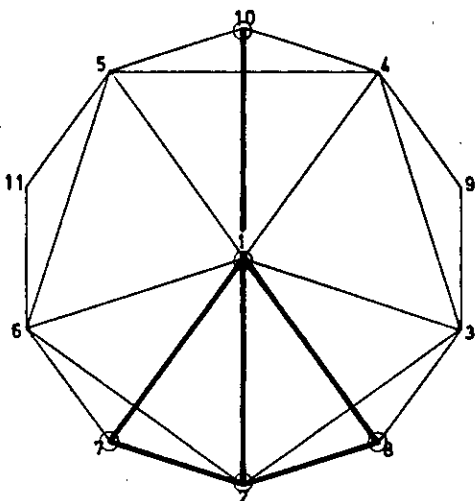
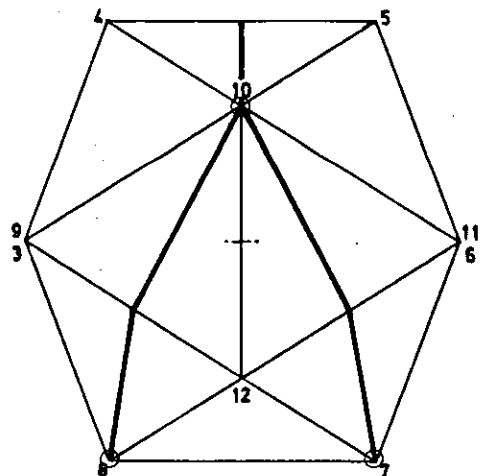
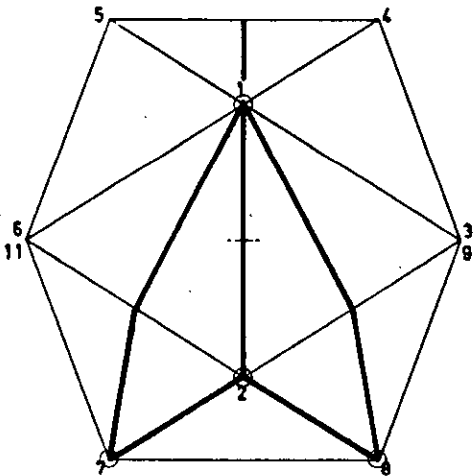
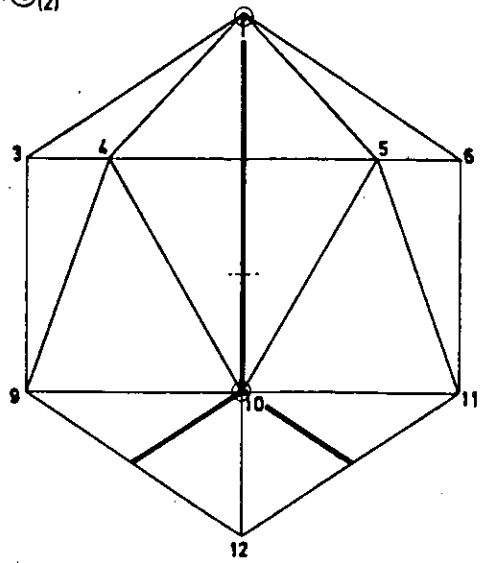
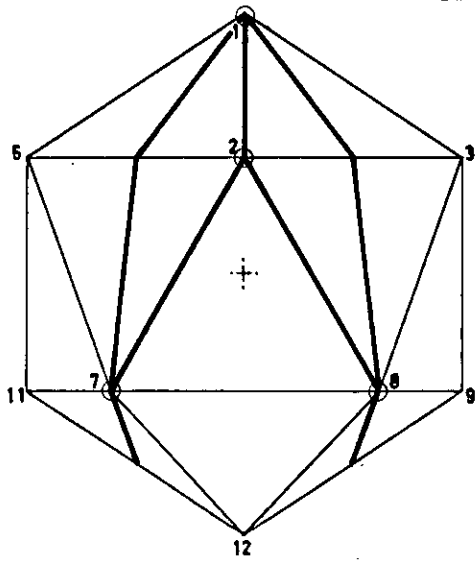


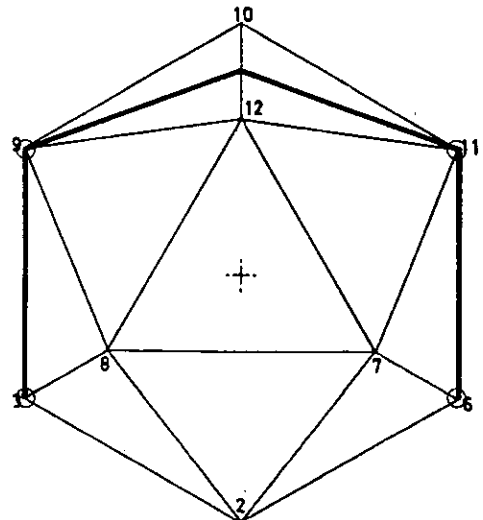
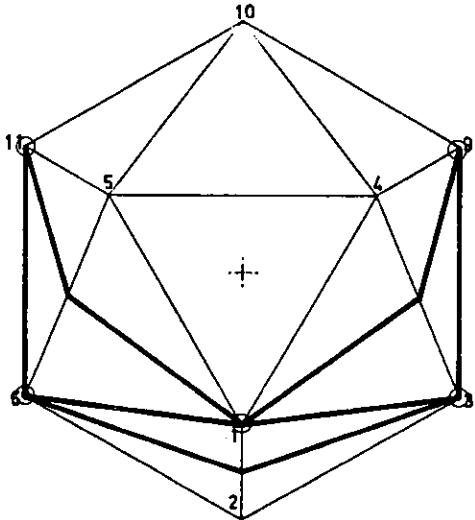
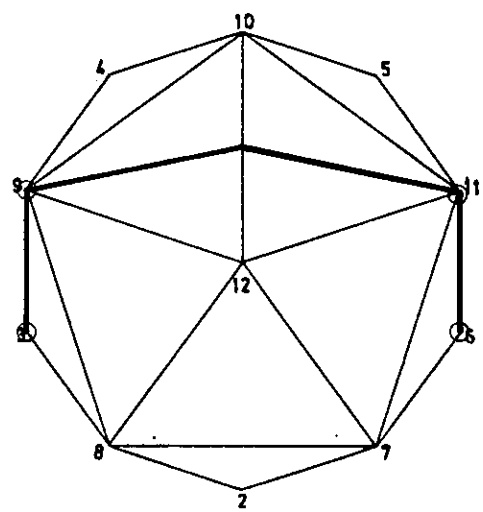
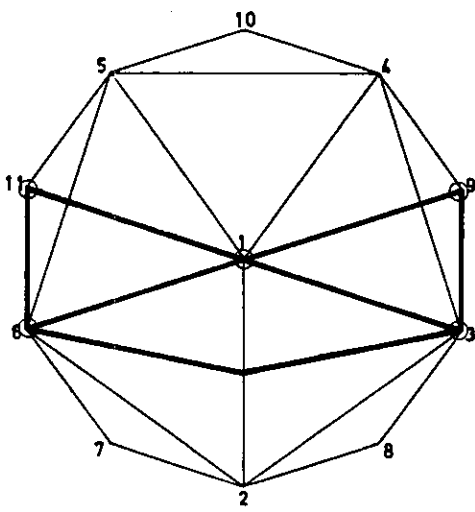
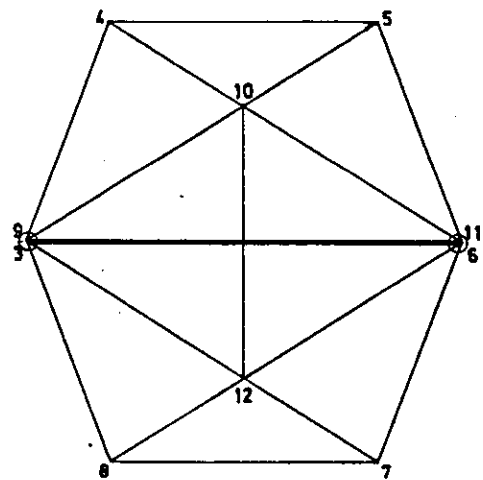
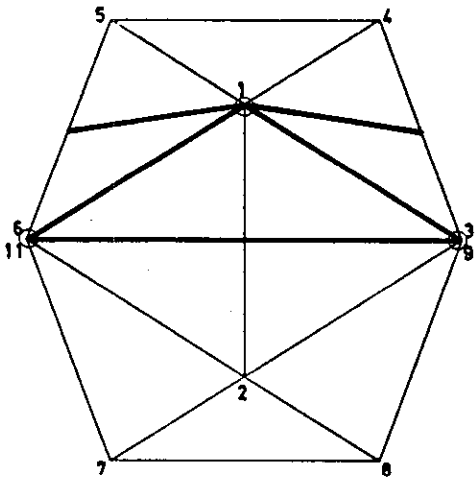
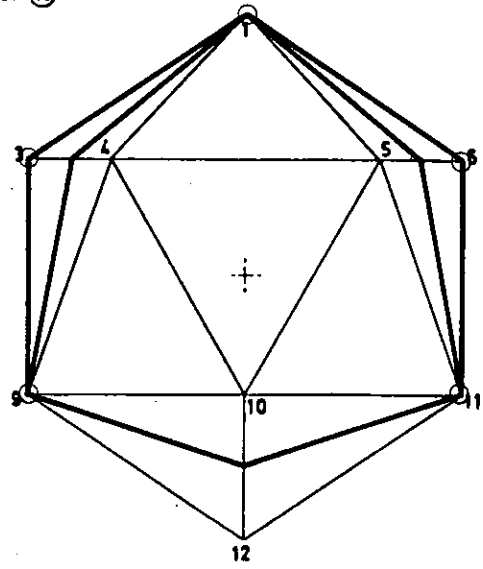
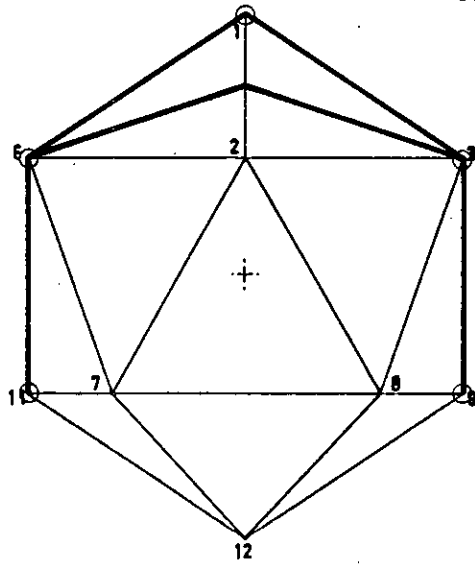


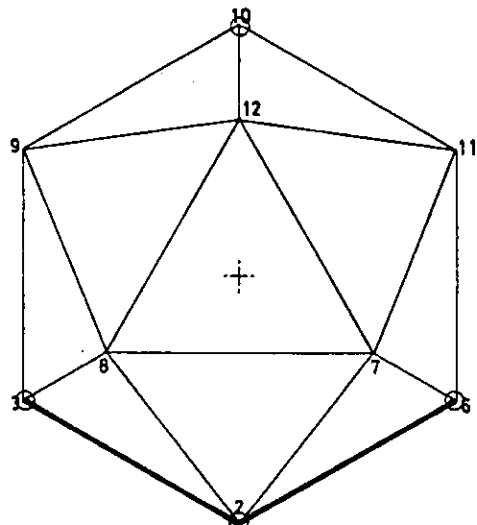
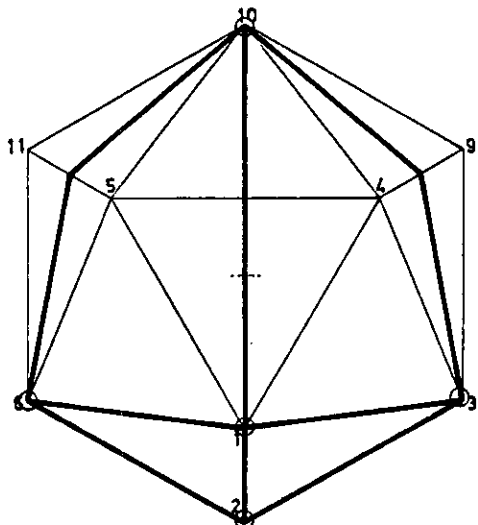
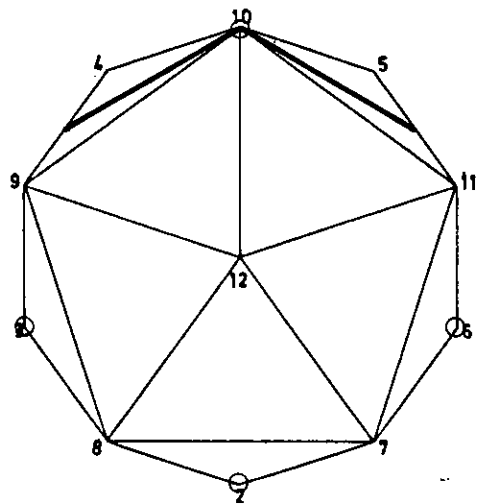
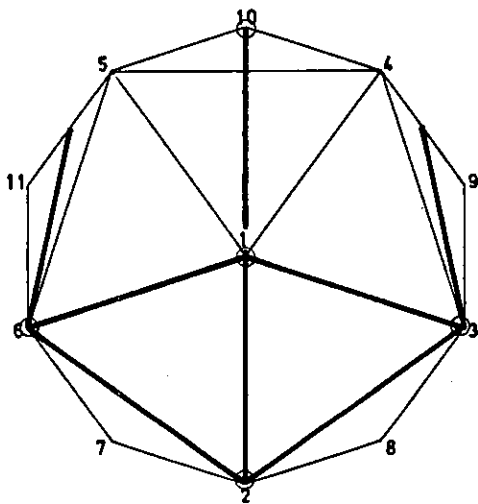
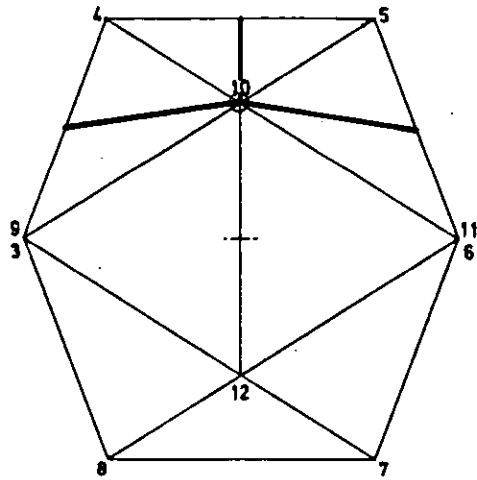
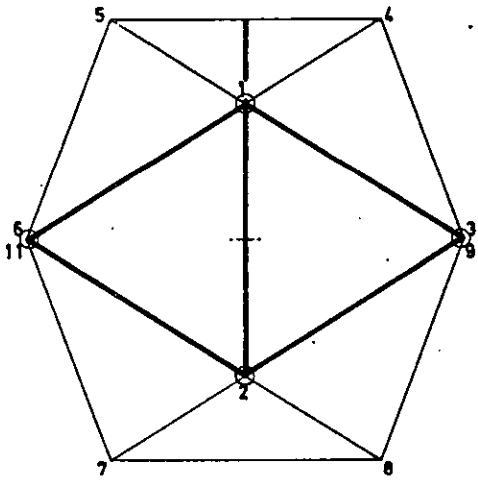
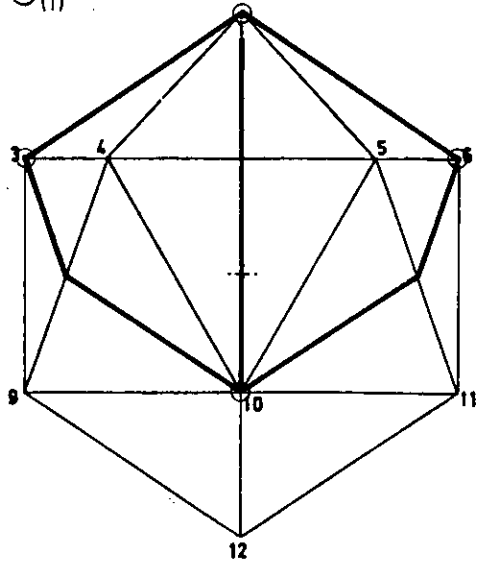
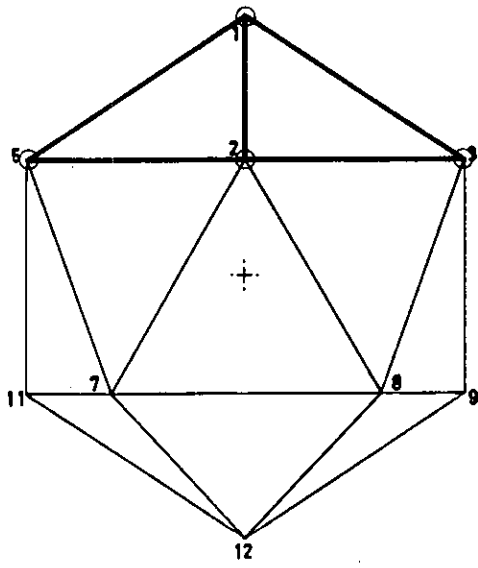
2a+2d①(11)



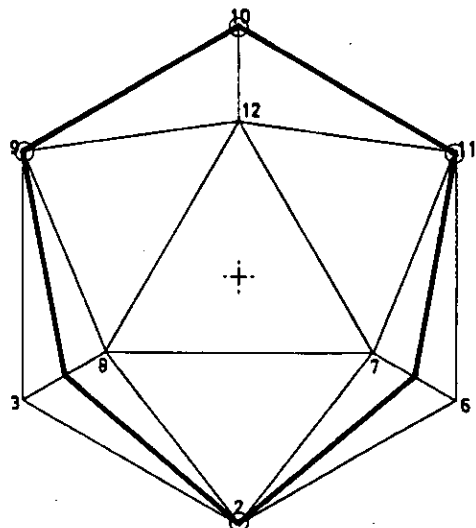
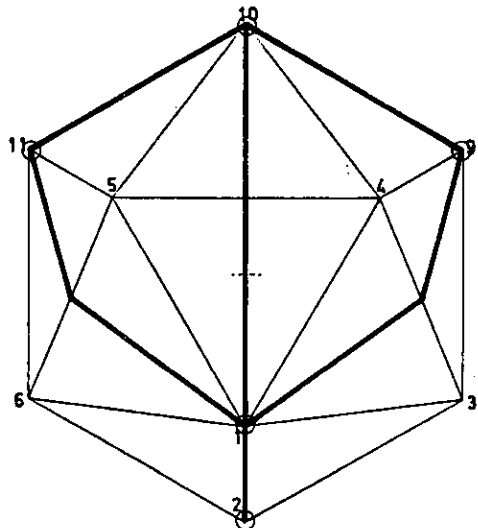
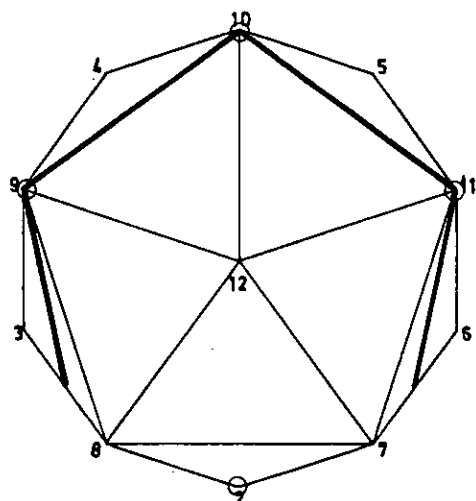
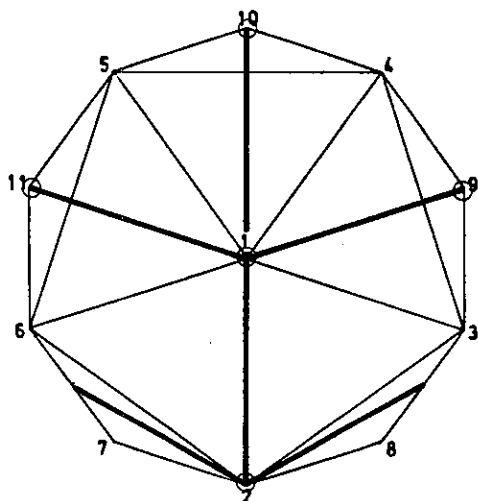
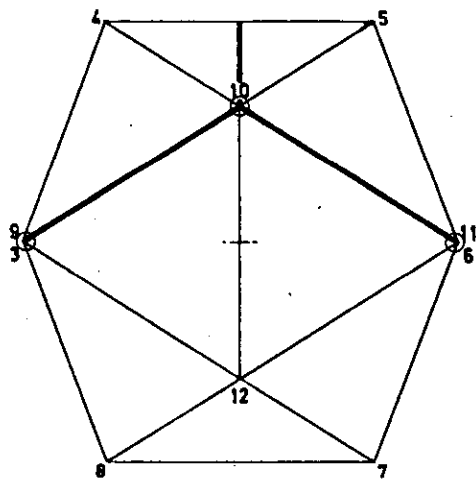
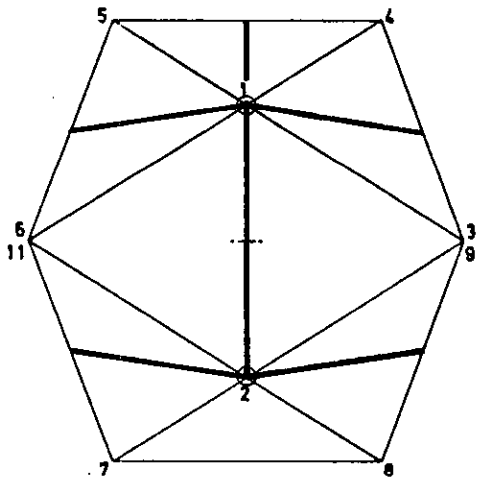
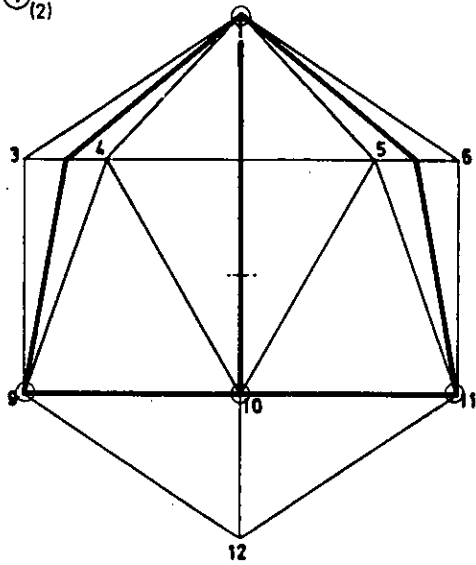
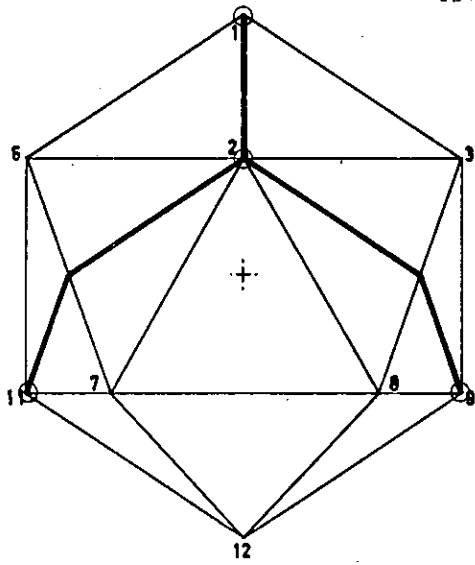
2a+2d(1)(2)

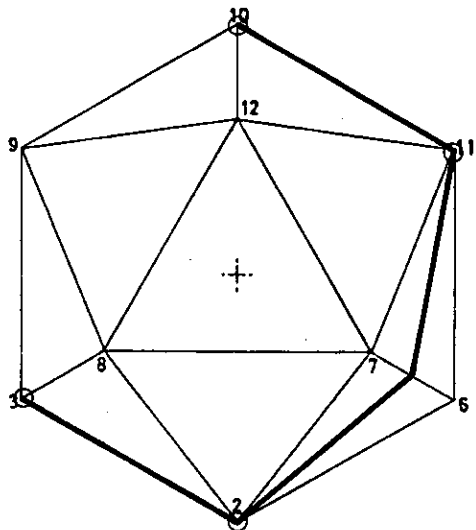
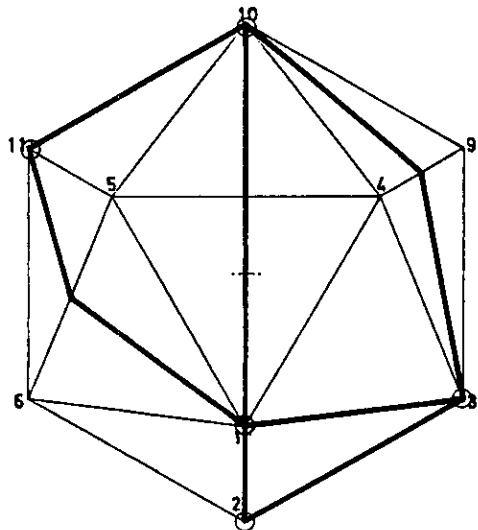
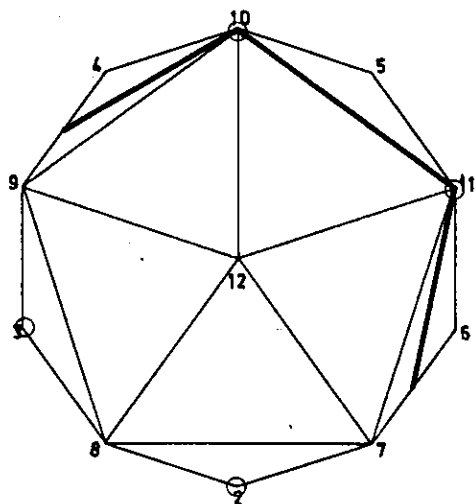
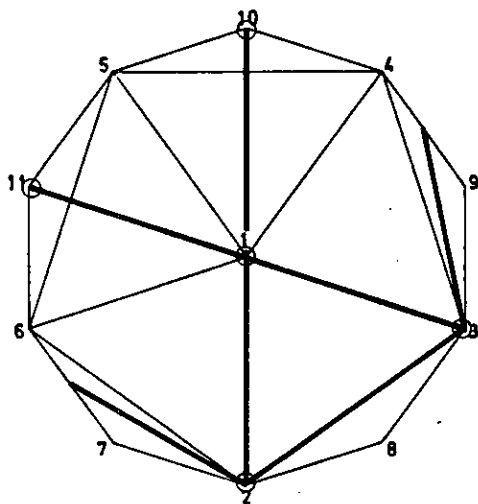
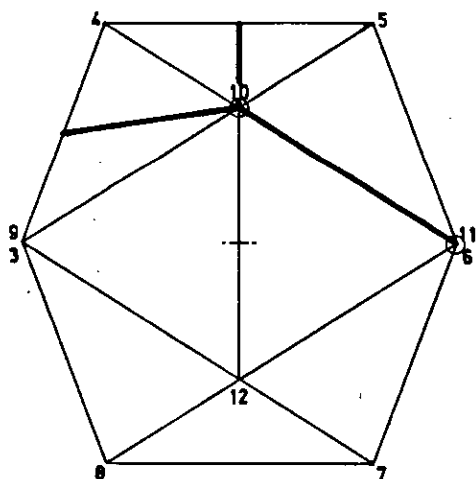
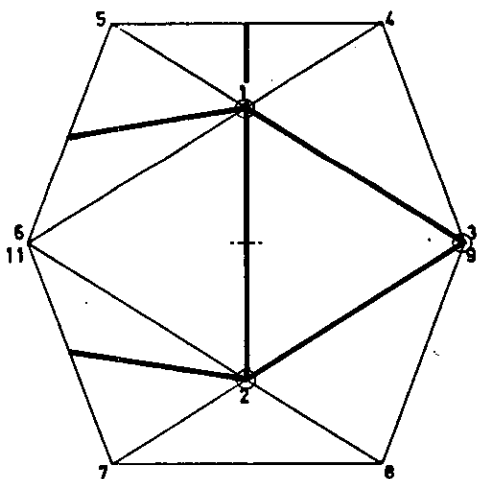
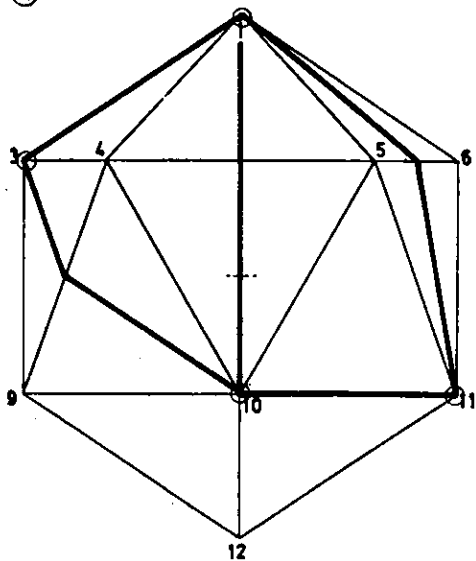
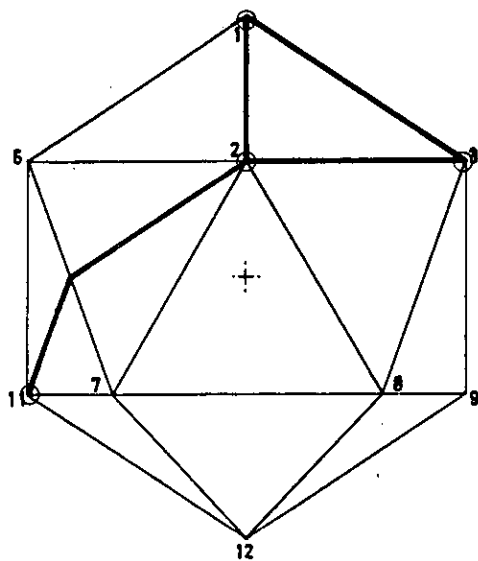


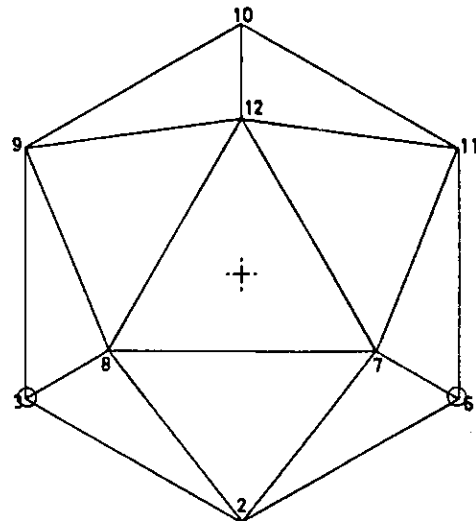
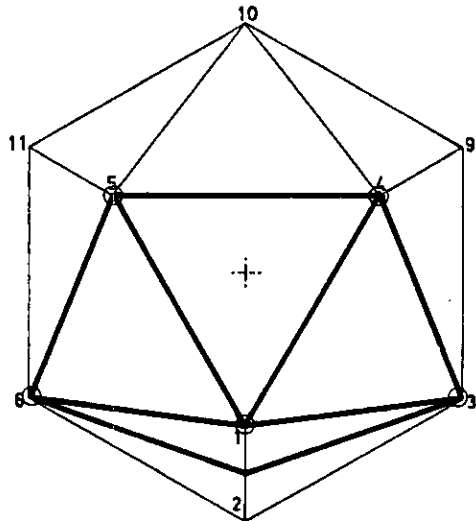
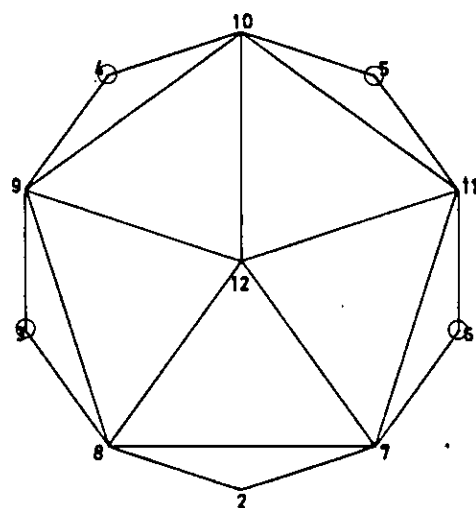
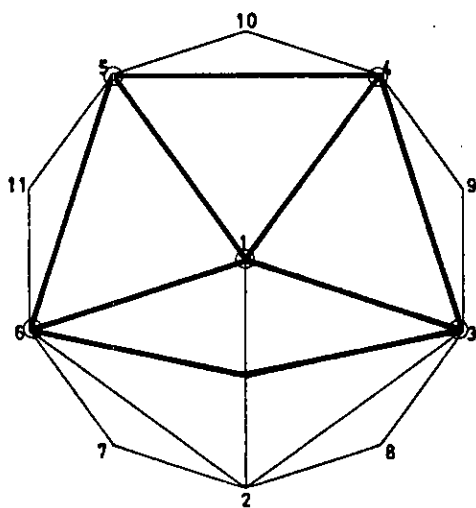
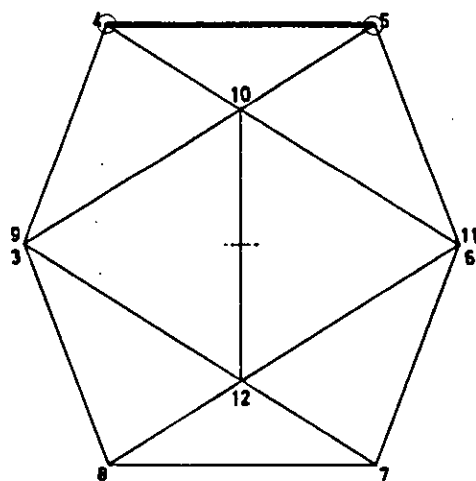
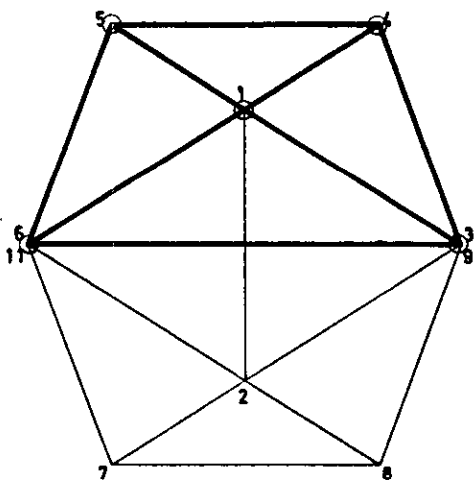
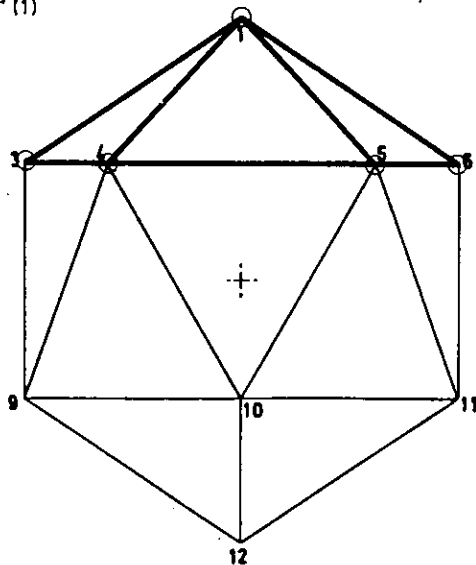
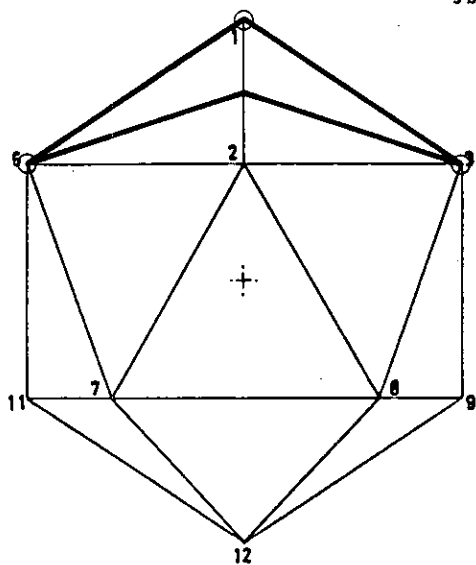




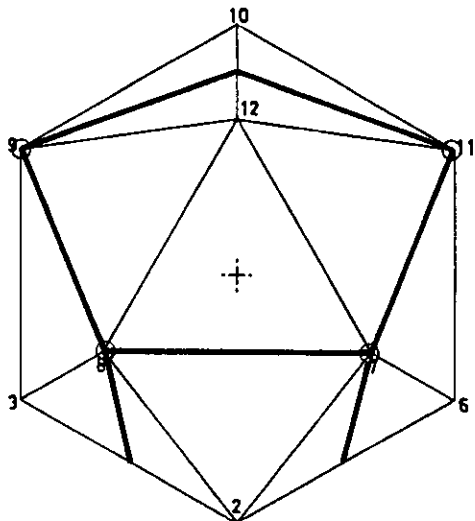
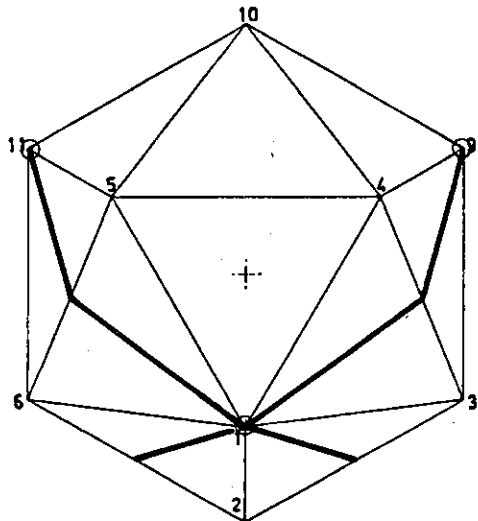
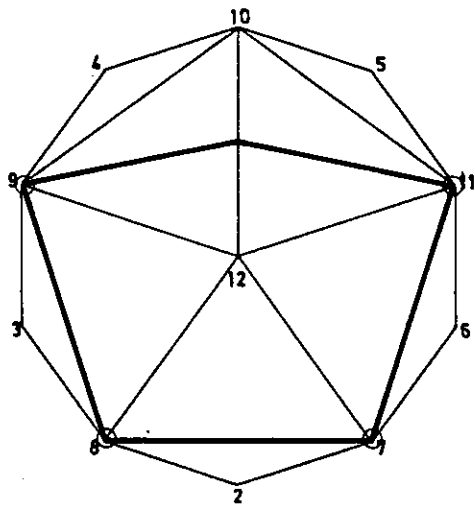
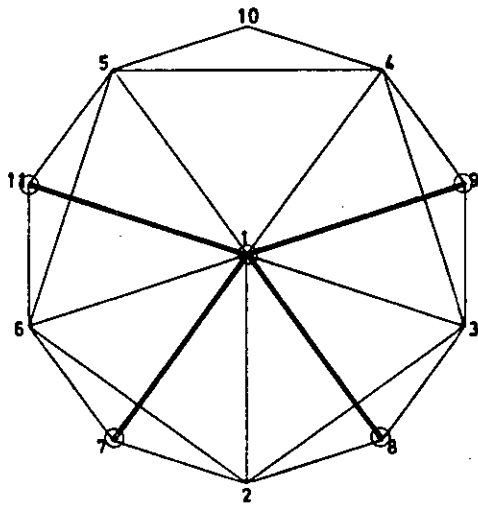
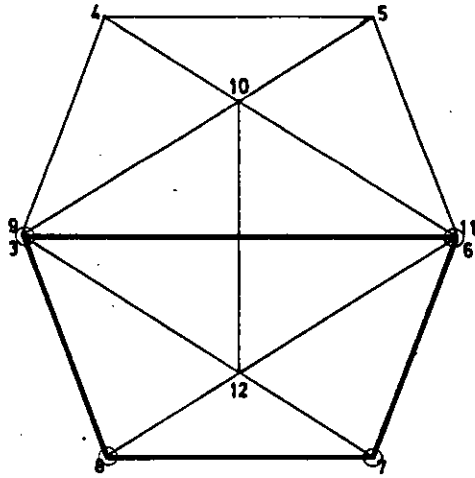
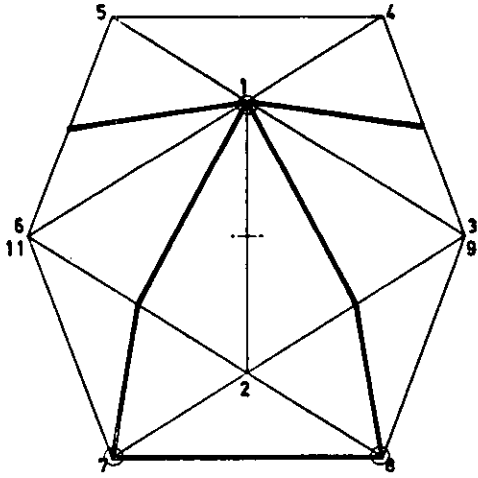
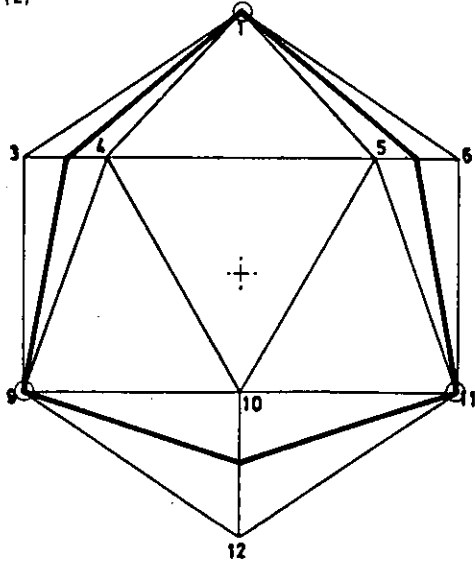
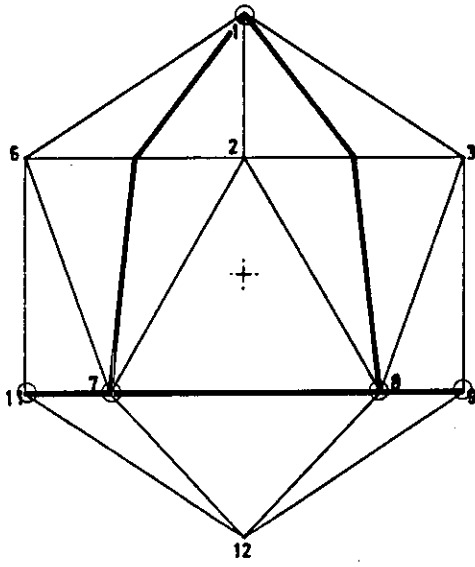
$2b+2c$ ① (2)



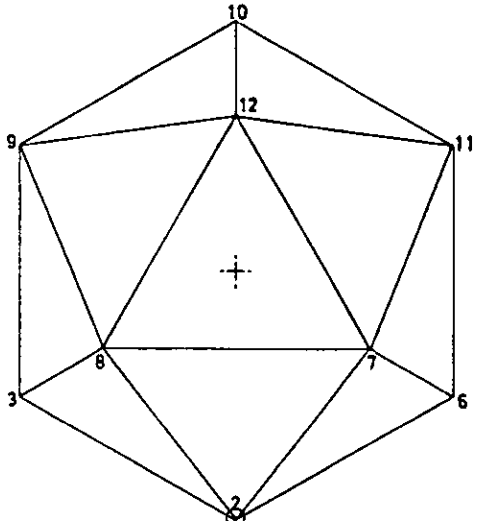
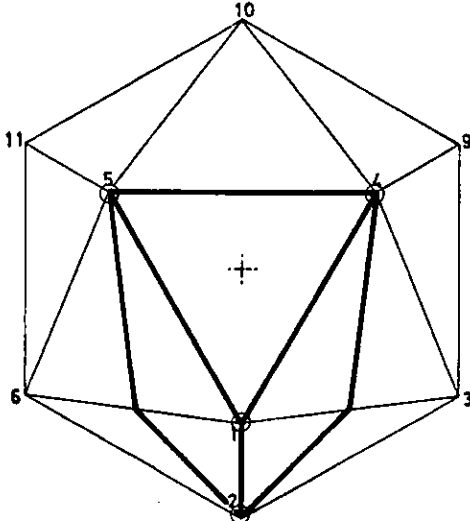
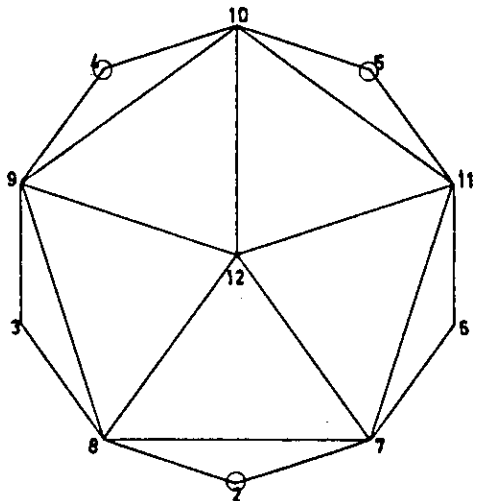
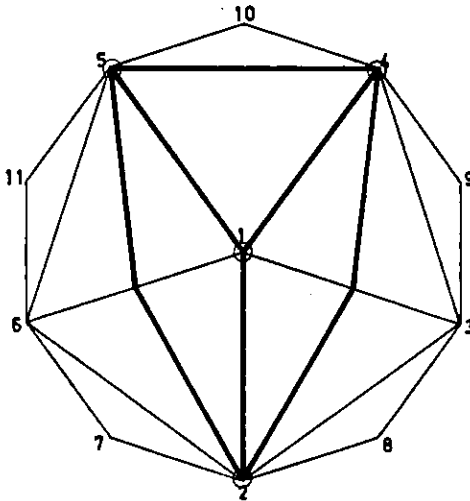
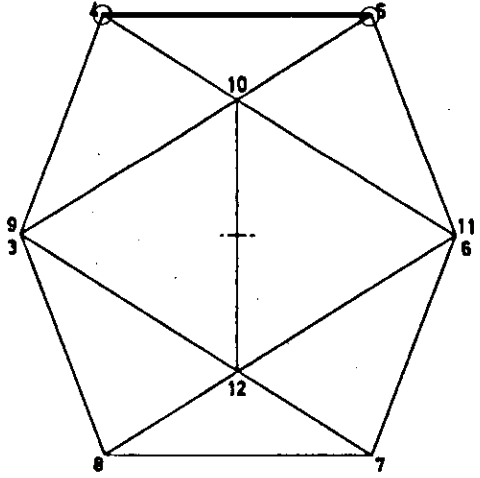
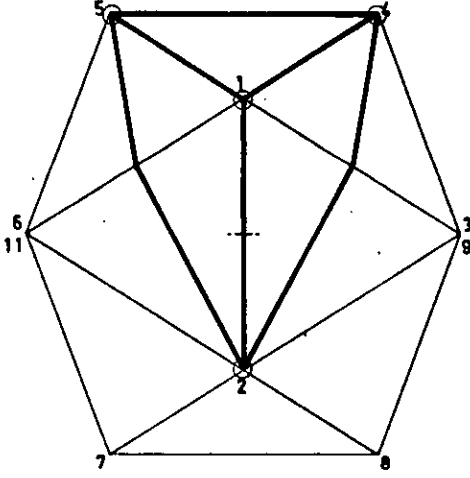
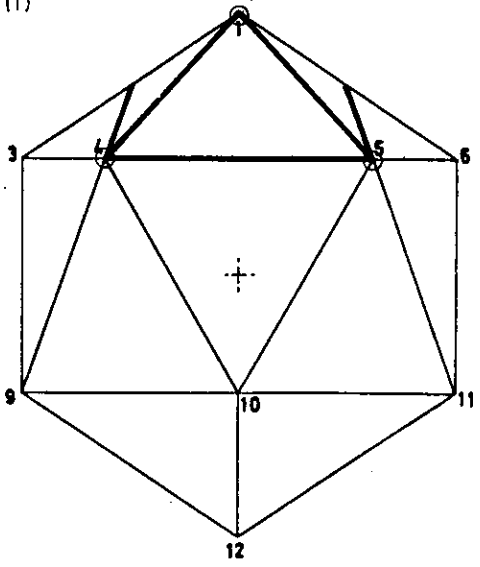
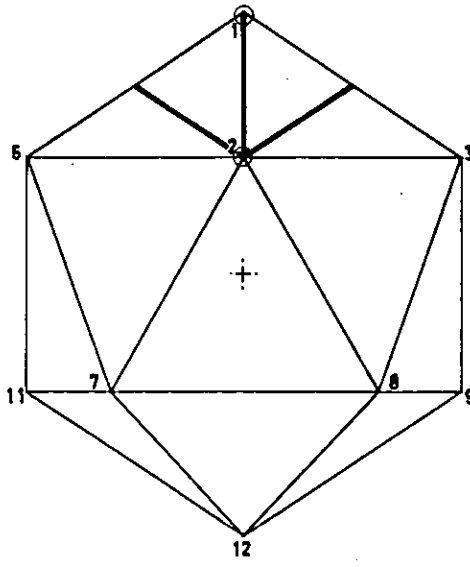




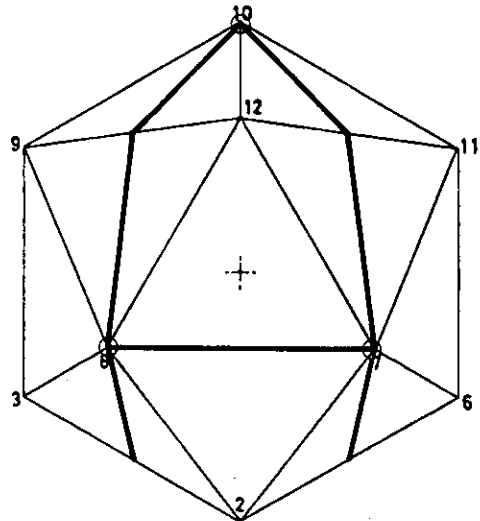
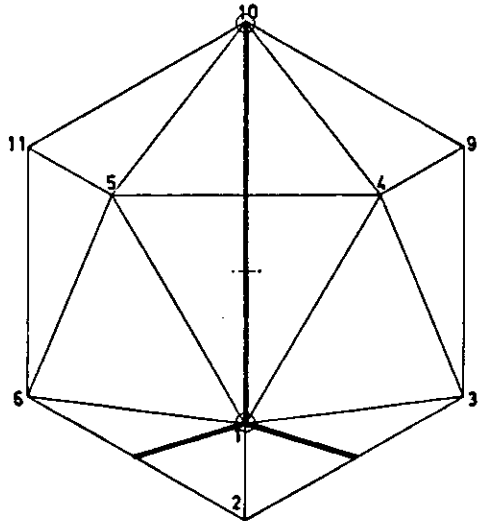
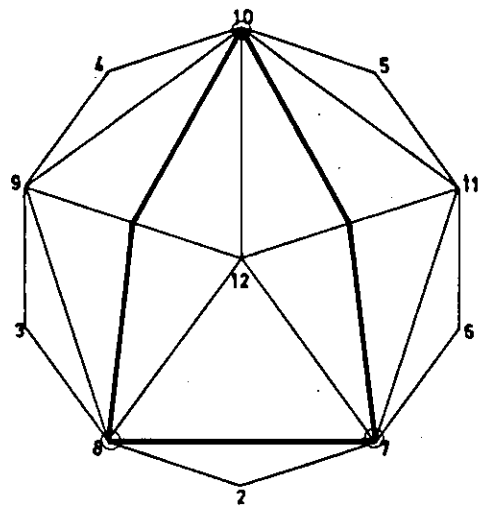
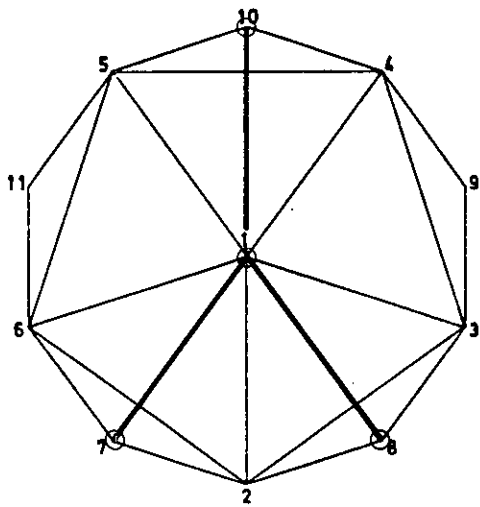
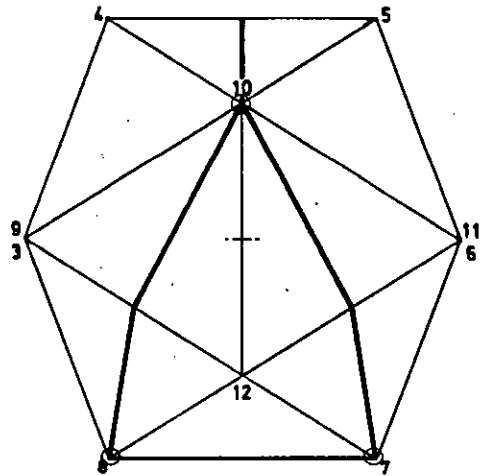
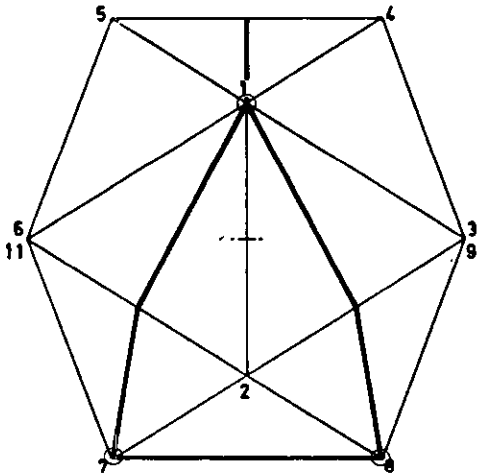
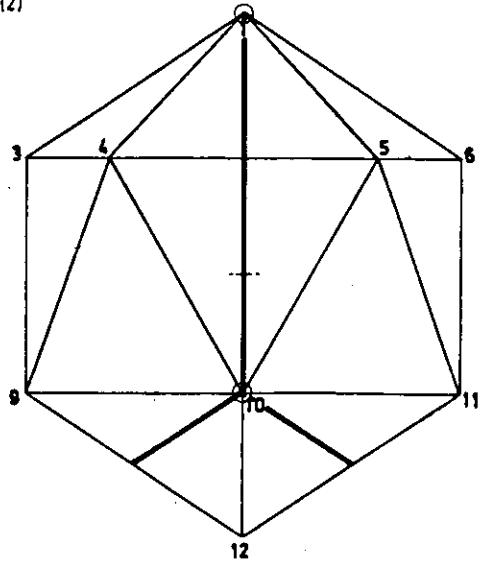
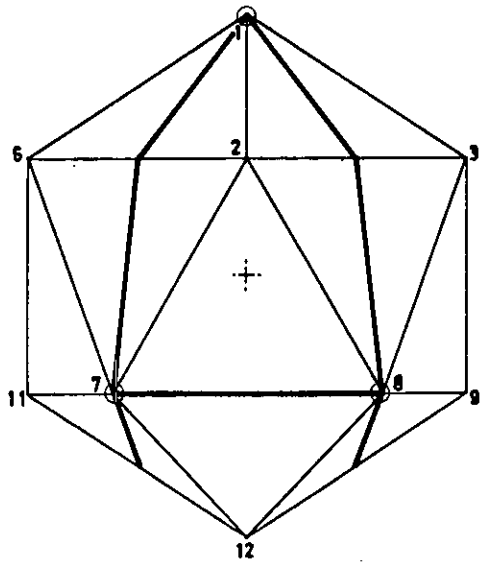
3b+d (2)

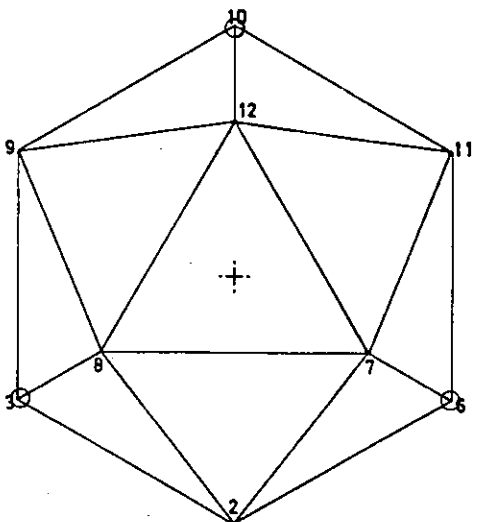
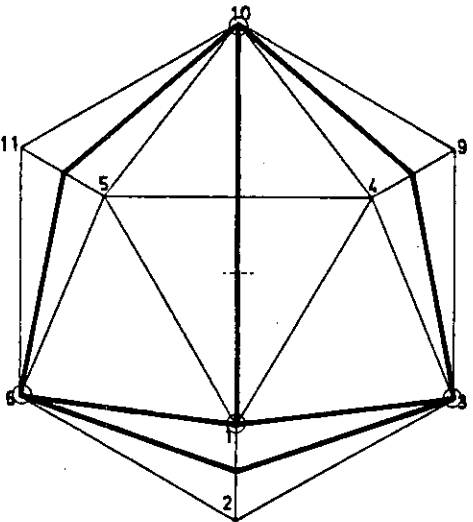
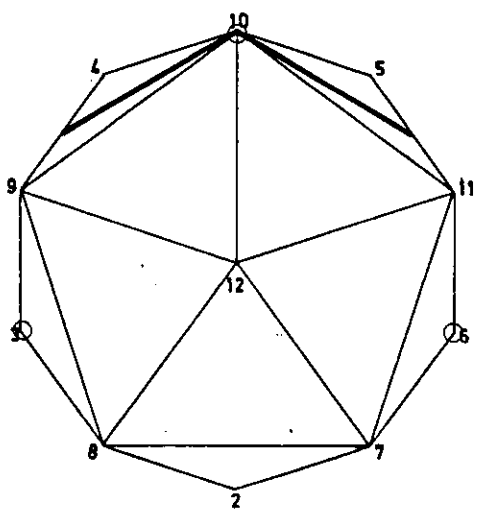
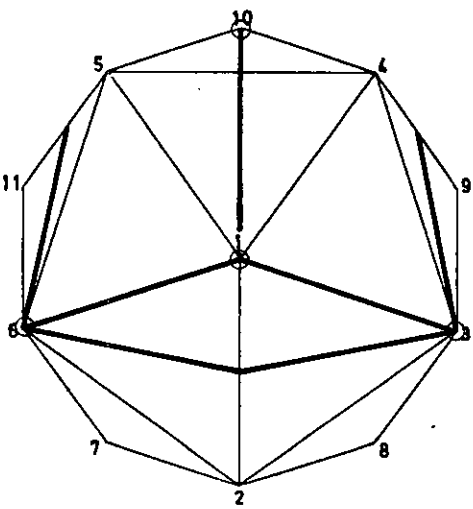
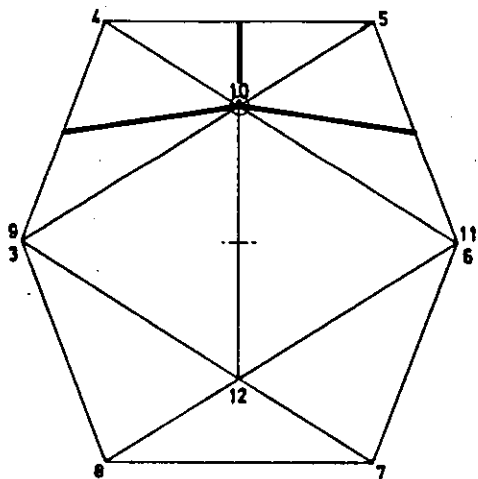
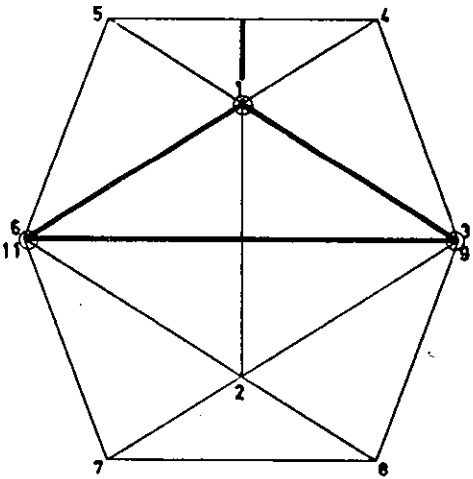
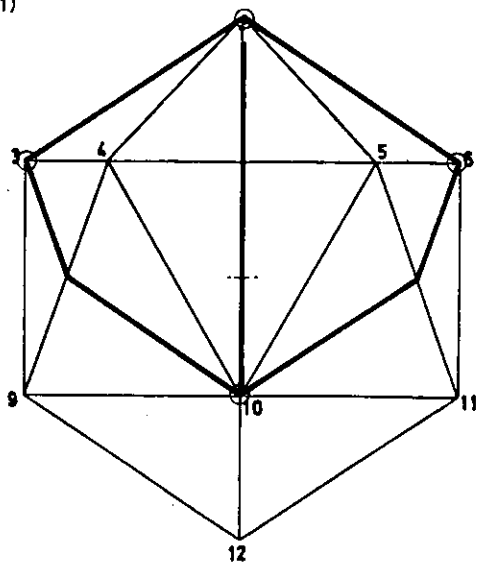
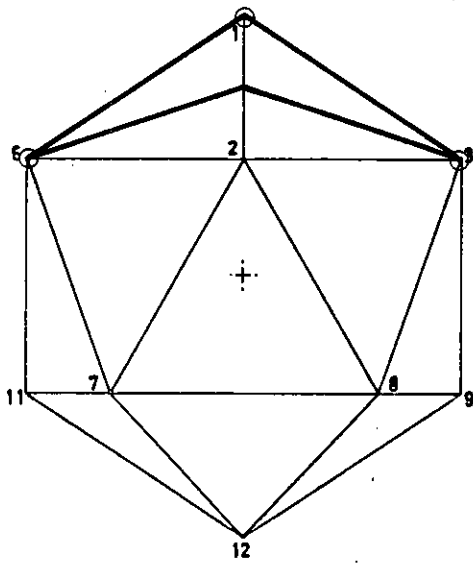


$b+2d_{(1)}$

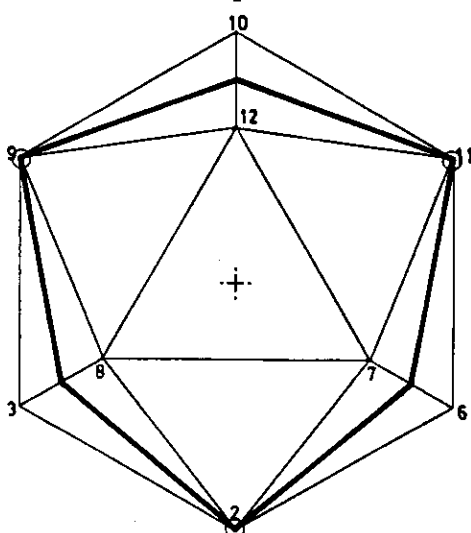
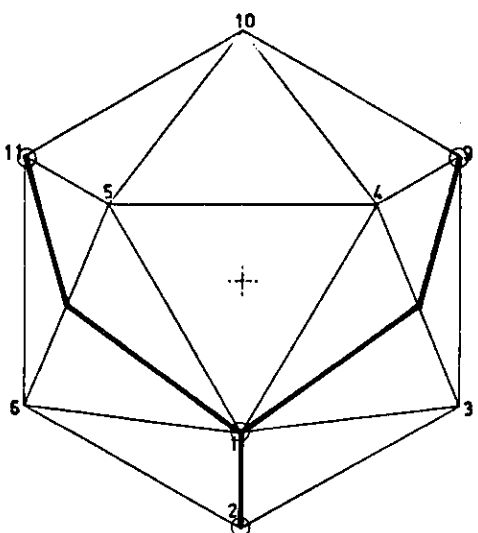
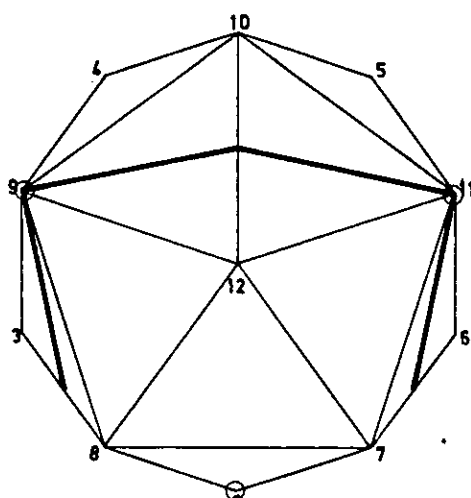
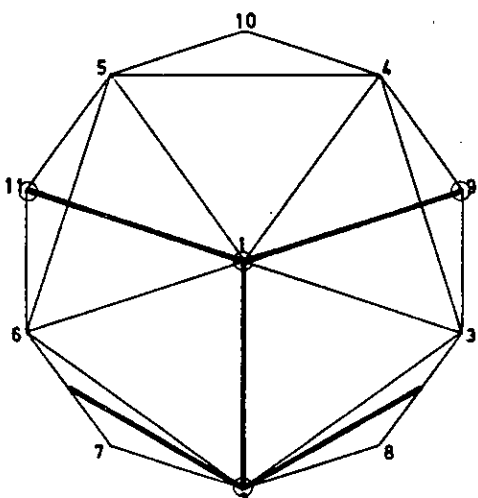
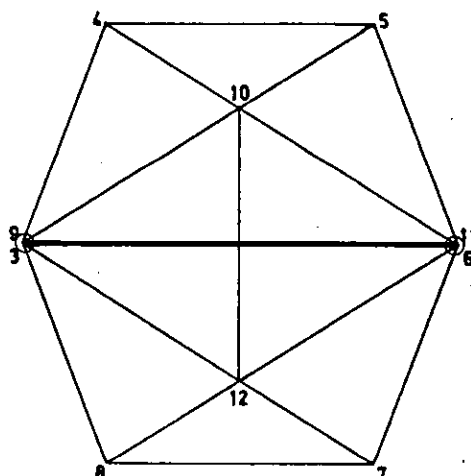
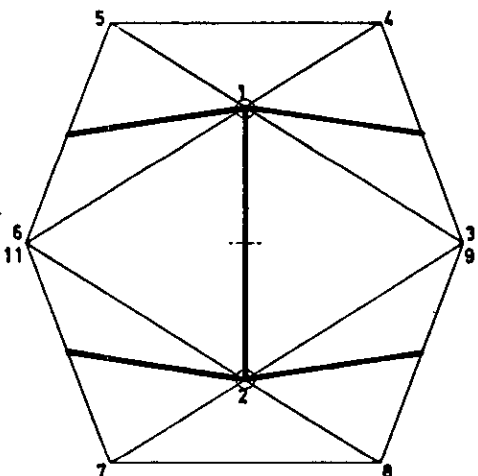
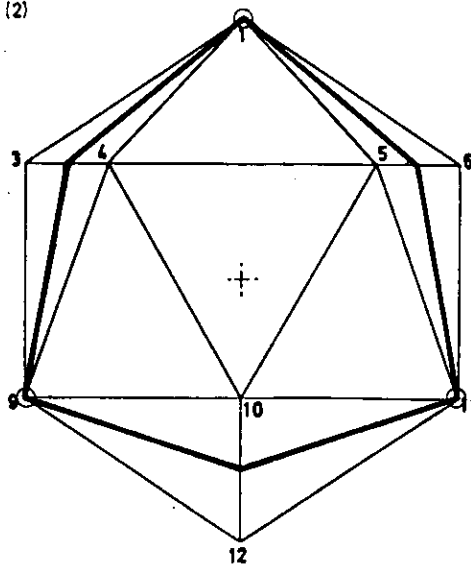
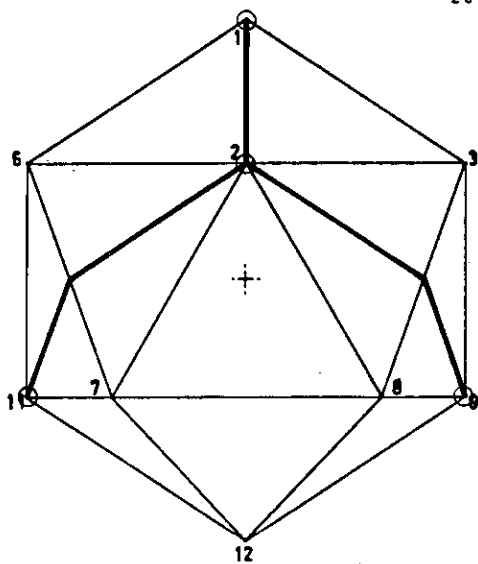


b+2d (2)



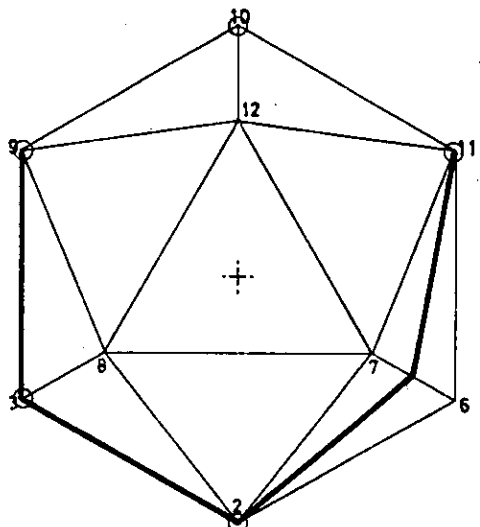
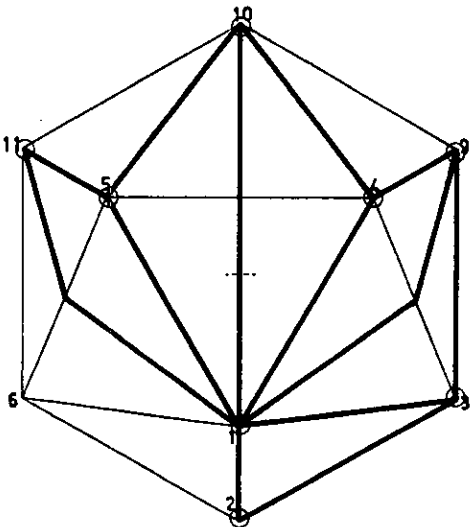
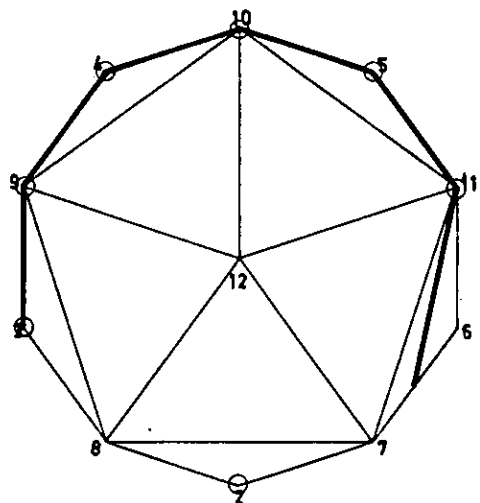
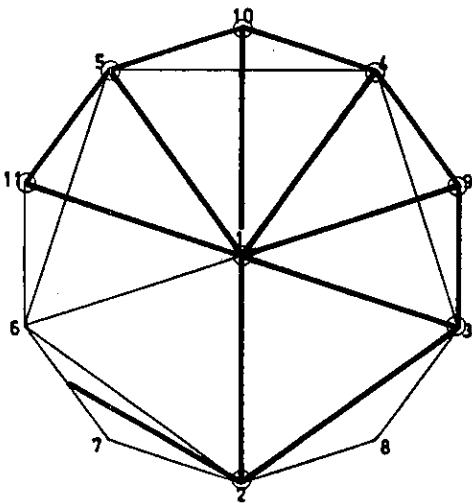
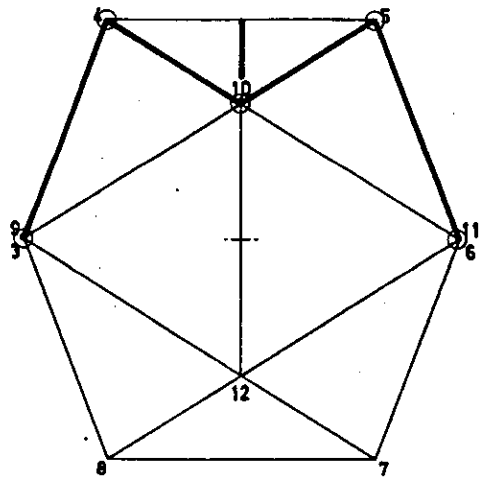
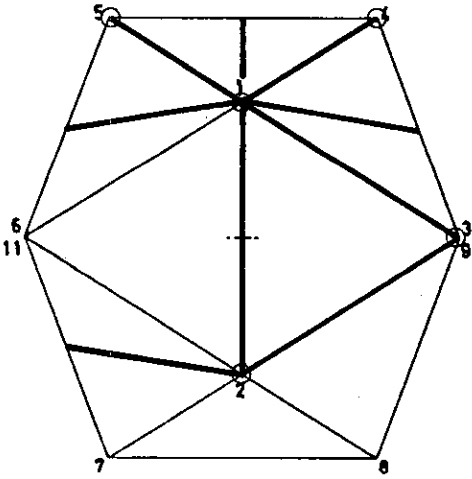
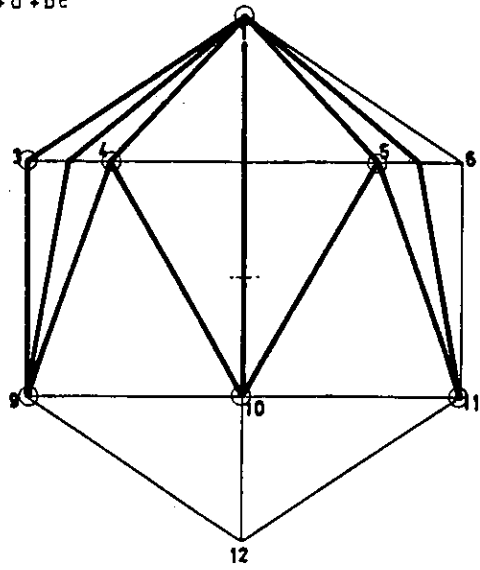
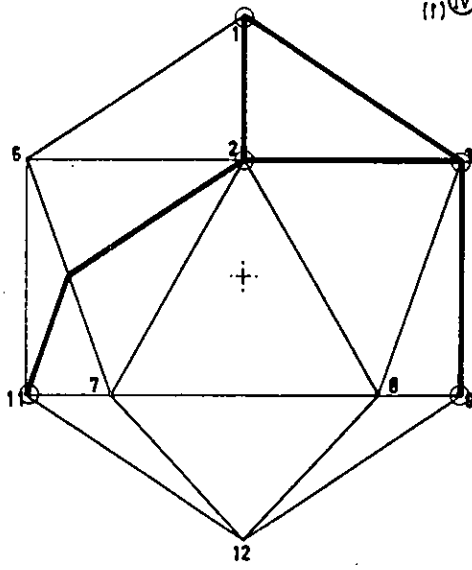


2c+d (2)



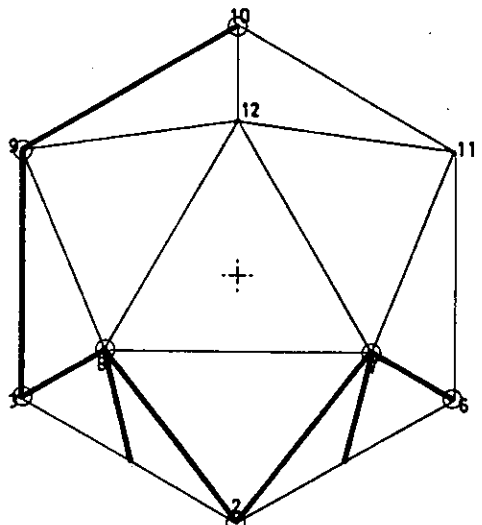
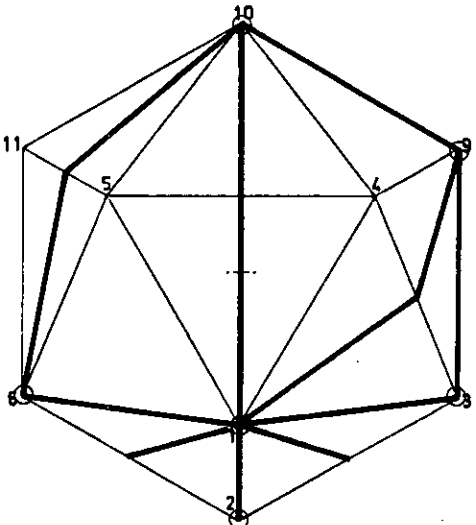
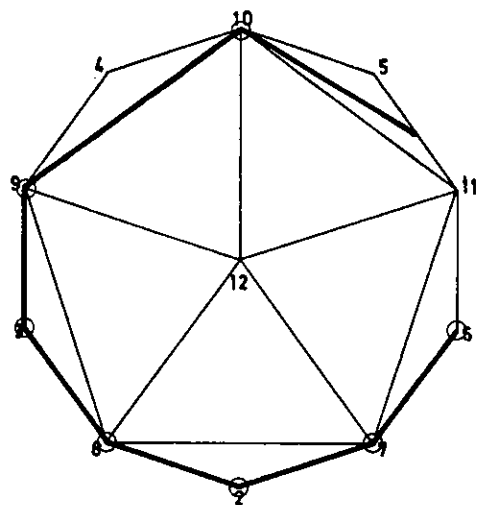
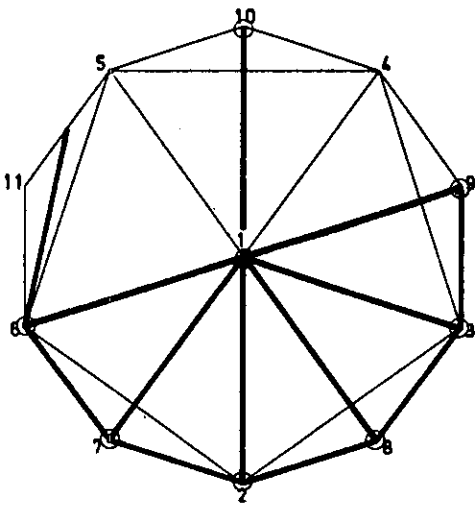
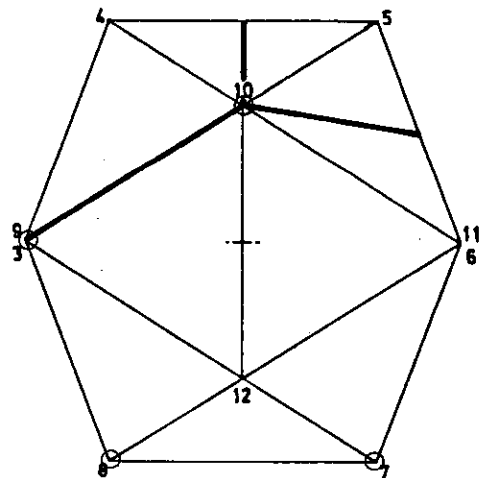
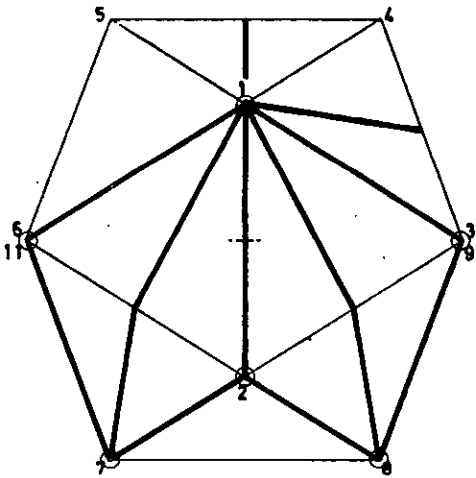
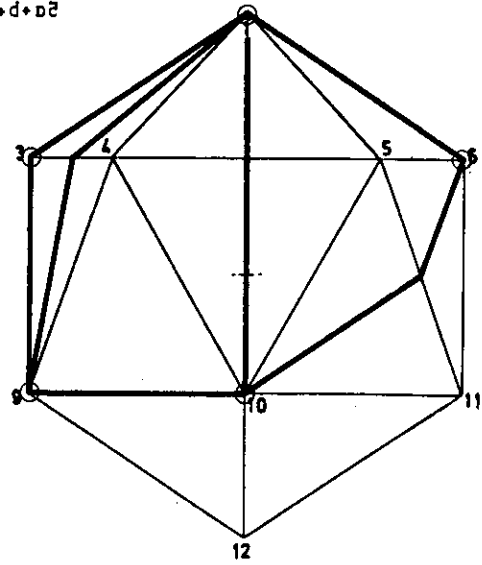
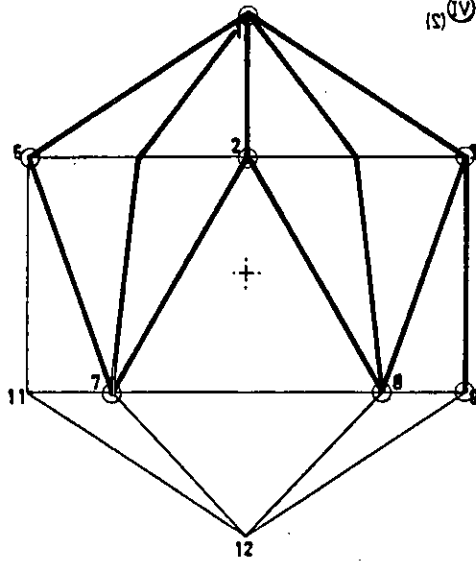
$$5a+b+c \textcircled{1} (1)$$

$$(1) \textcircled{IV} = d + a^2$$



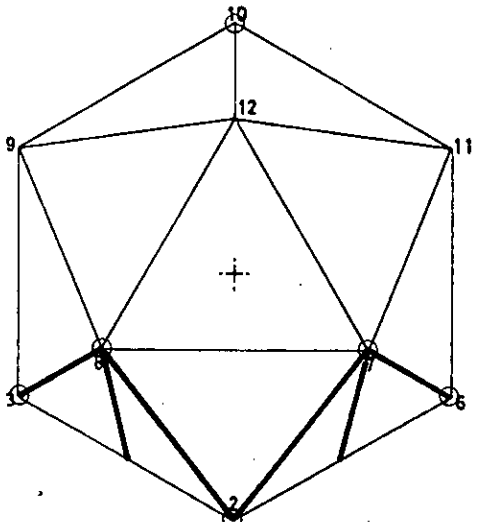
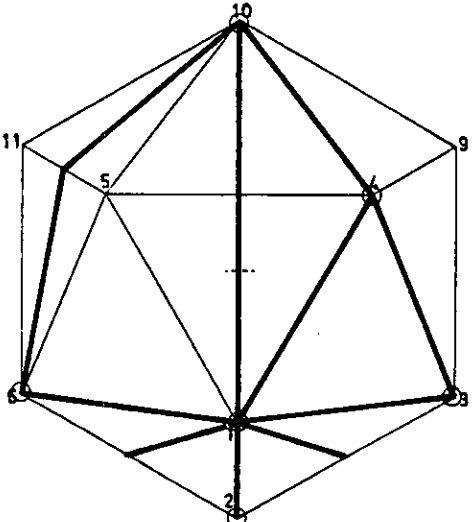
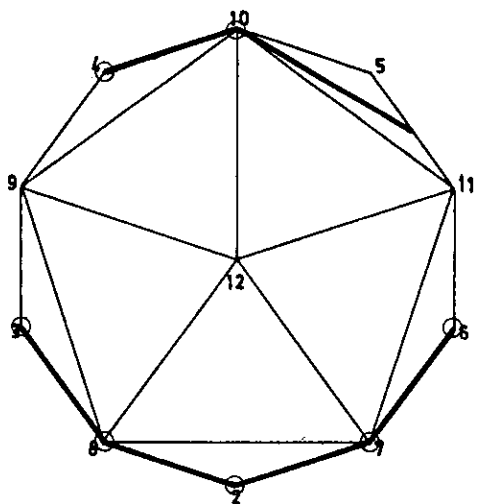
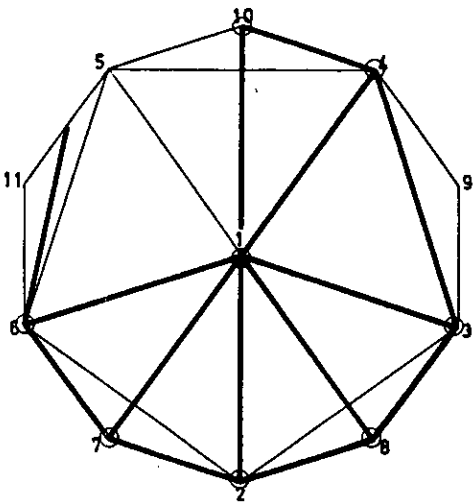
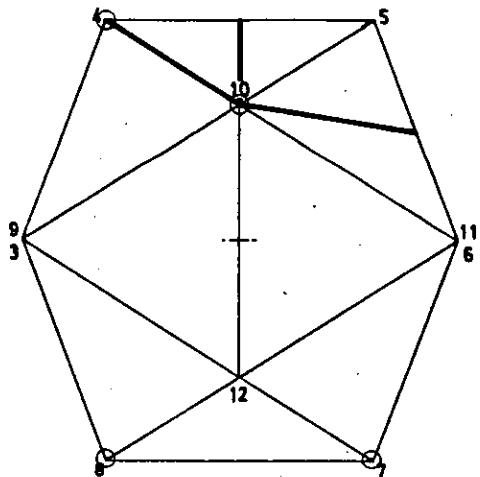
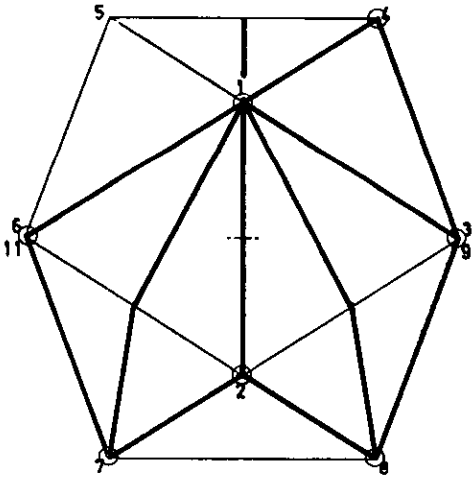
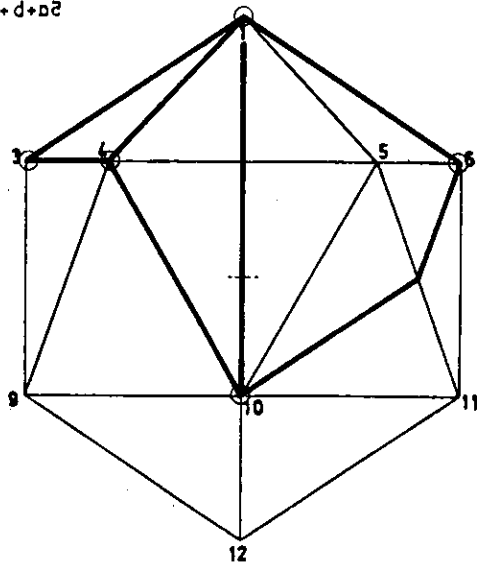
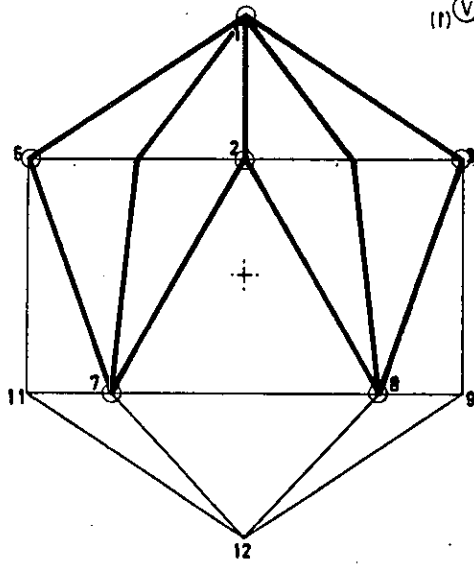
$$5a + b + c \textcircled{1} (2)$$

$$(3) \textcircled{V} c + d + d^2$$



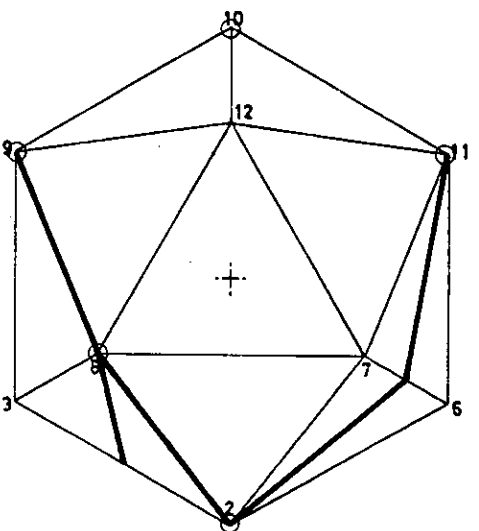
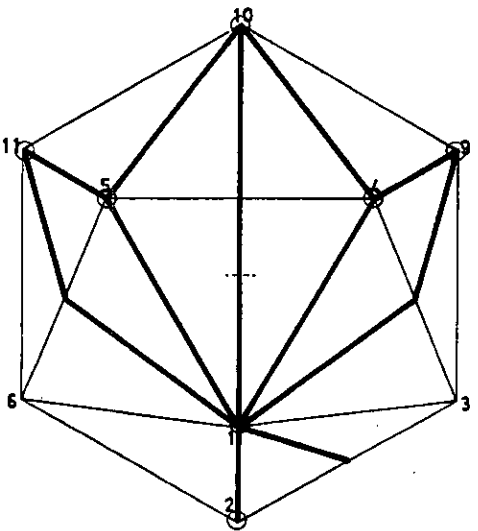
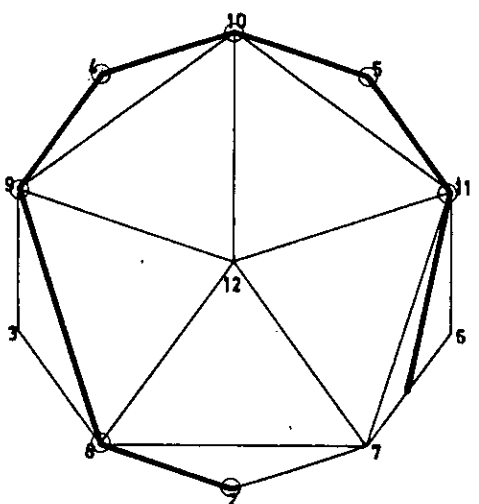
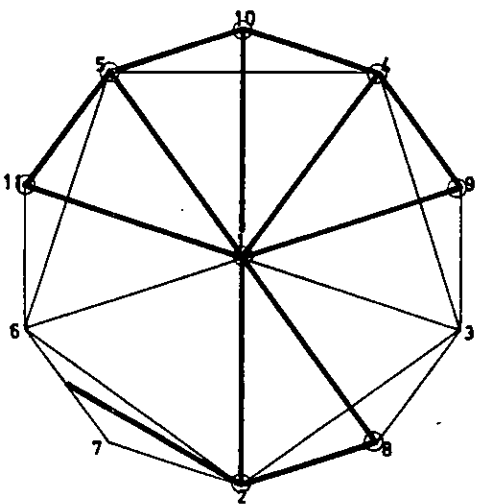
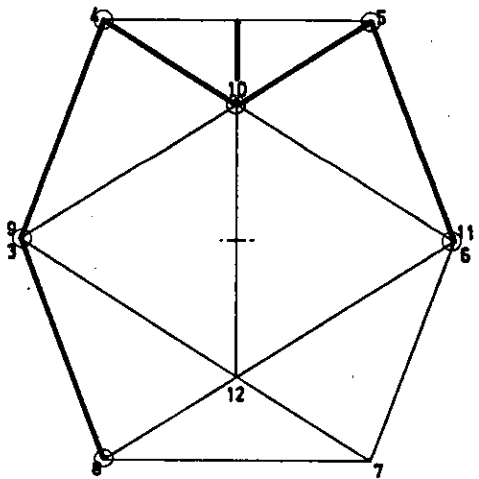
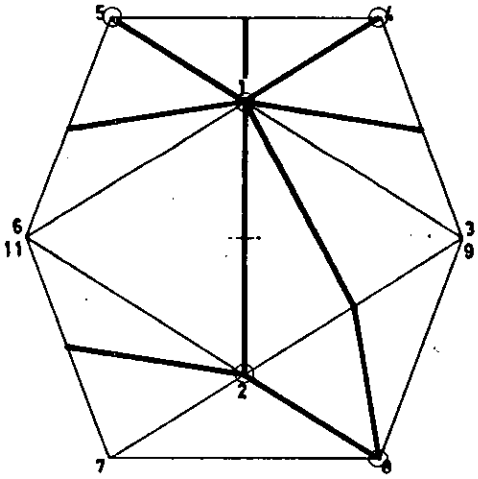
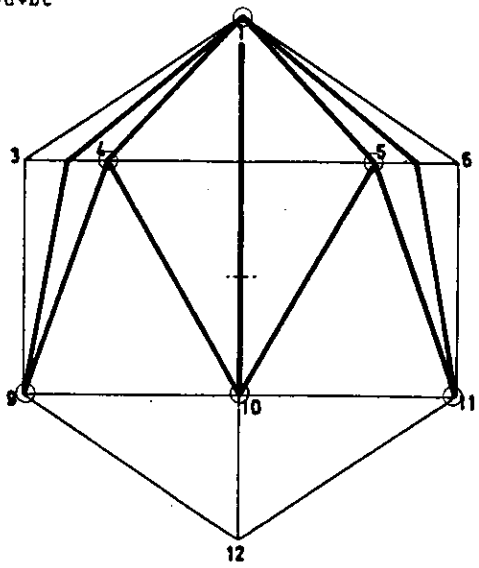
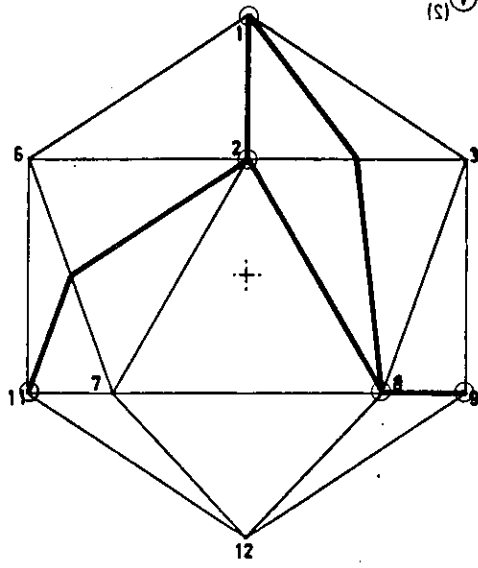
$$5a+b+c \textcircled{II} \textcircled{11}$$

$$\textcircled{11} \textcircled{V} c+d+2e$$



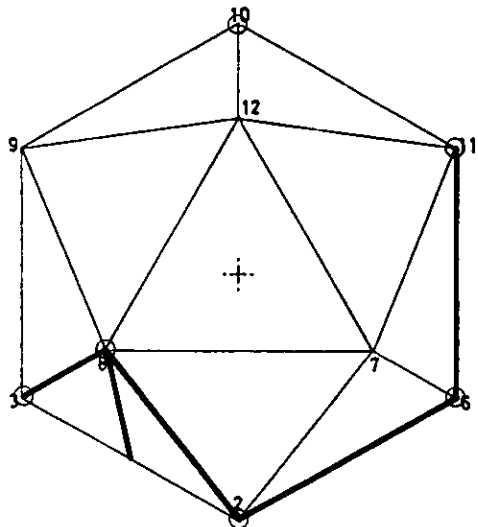
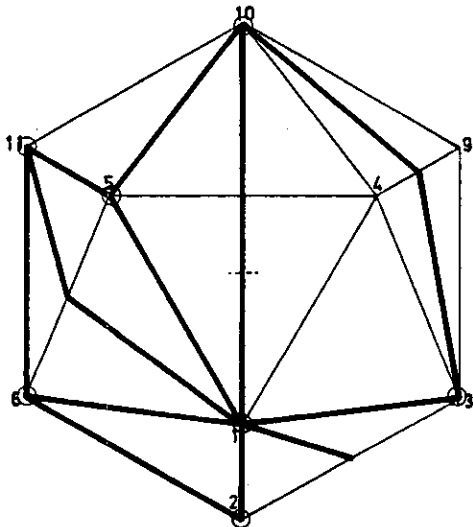
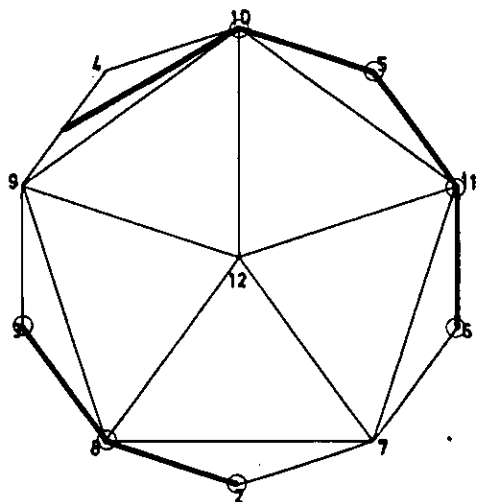
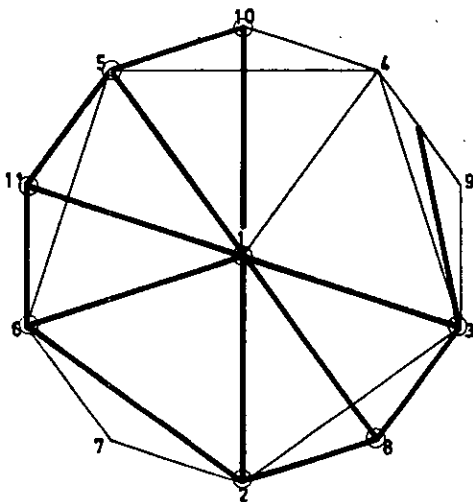
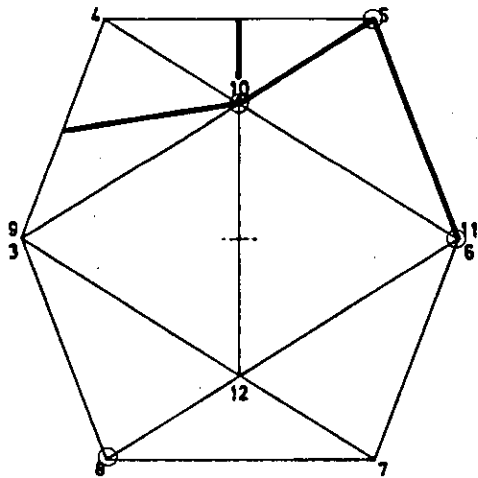
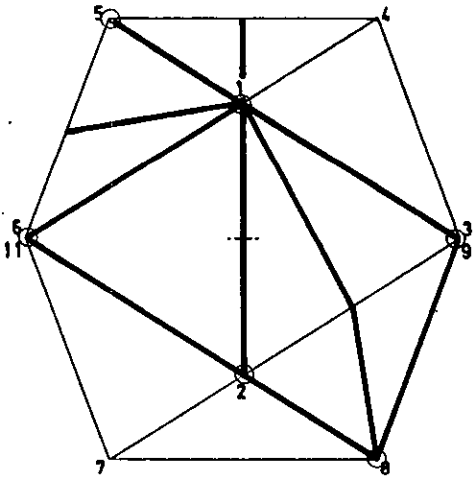
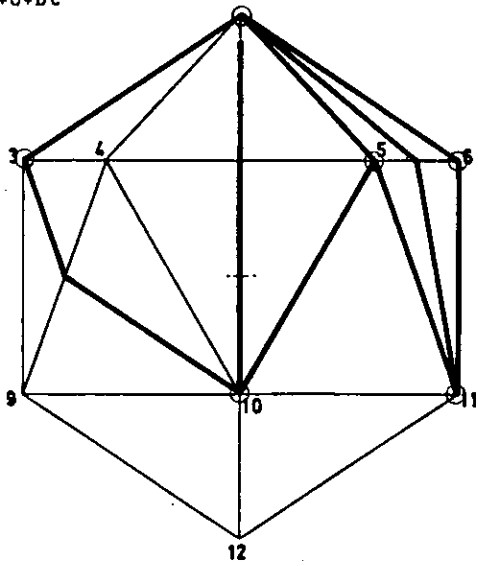
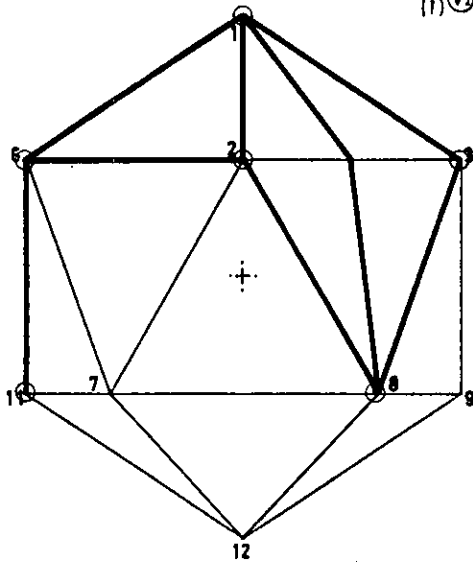
$$5a+b+c \textcircled{11} (2)$$

$$(5) \textcircled{V} c+d+d^2$$



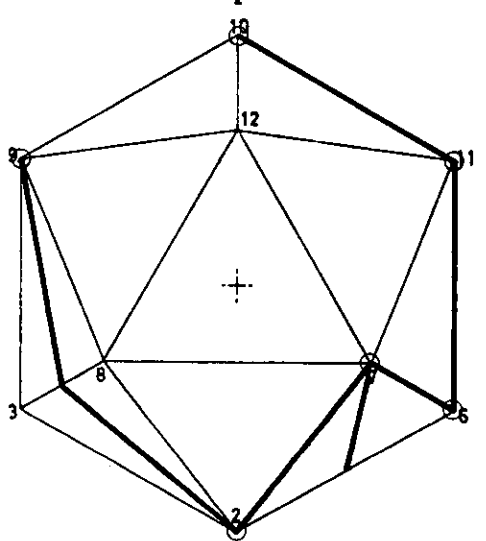
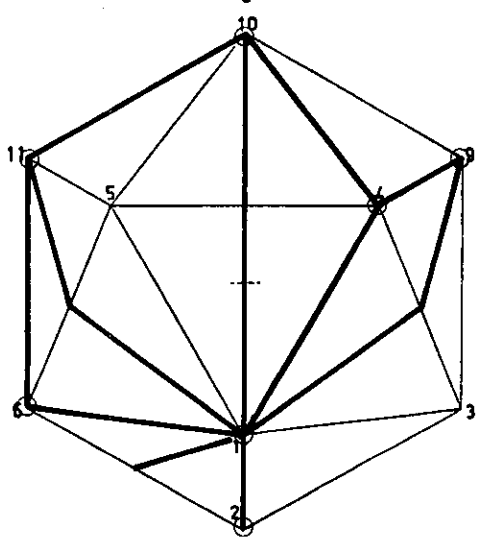
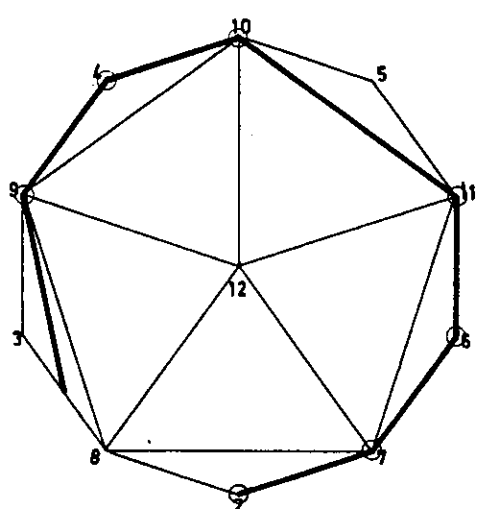
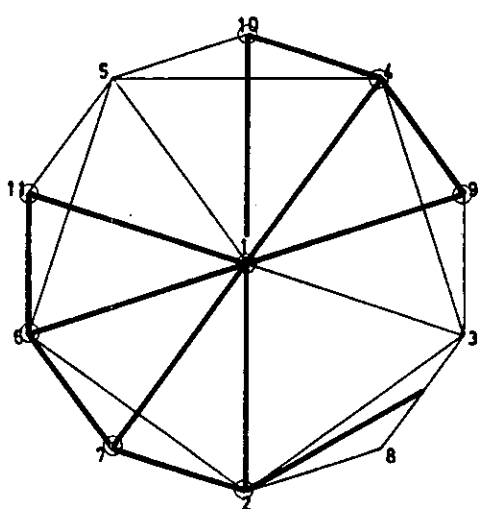
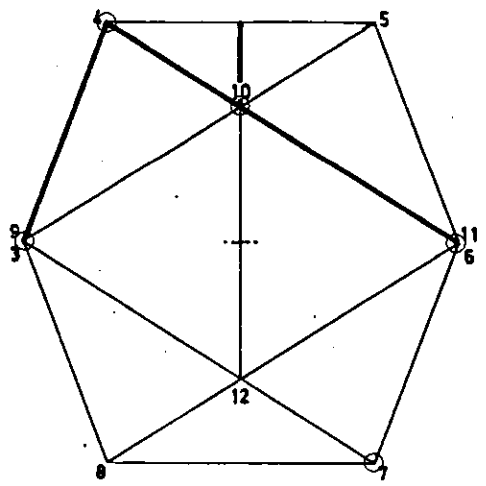
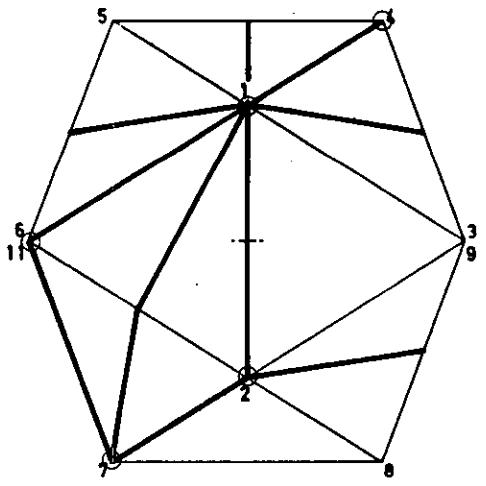
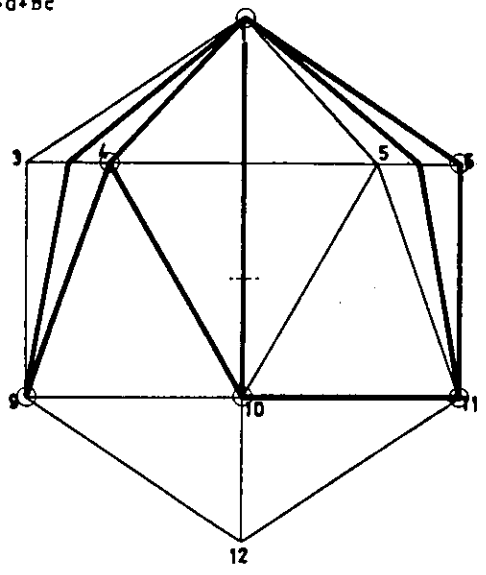
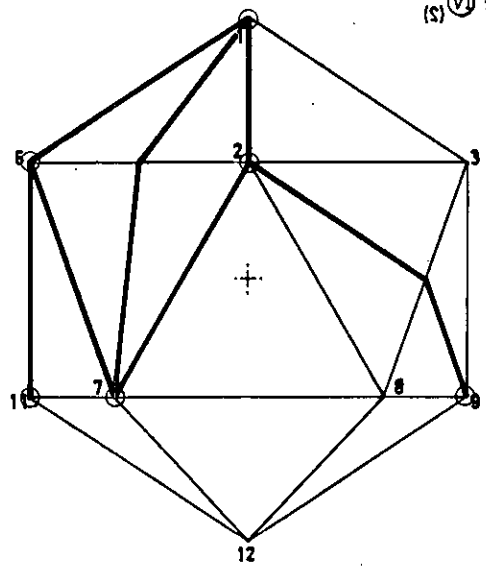
$$5a+b+c \text{ (II) (1)}$$

$$(1) \text{ (V) } c+d+2e$$



$$5a + b + c \text{ (II) (2)}$$

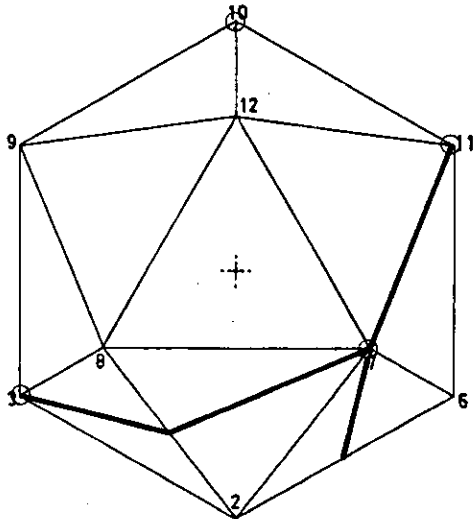
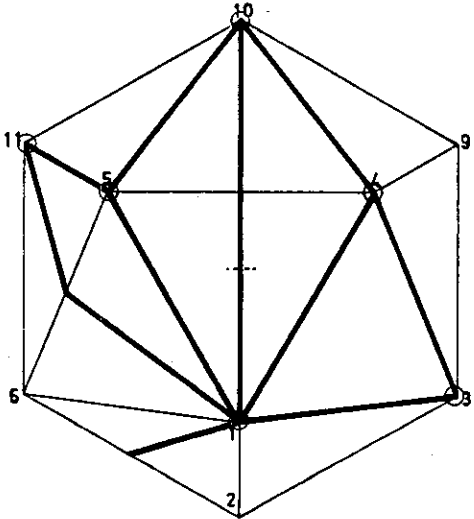
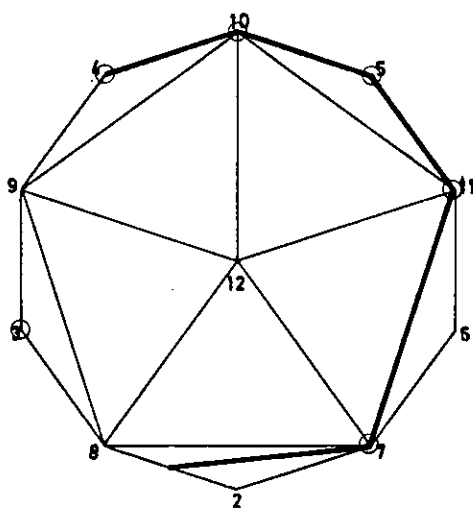
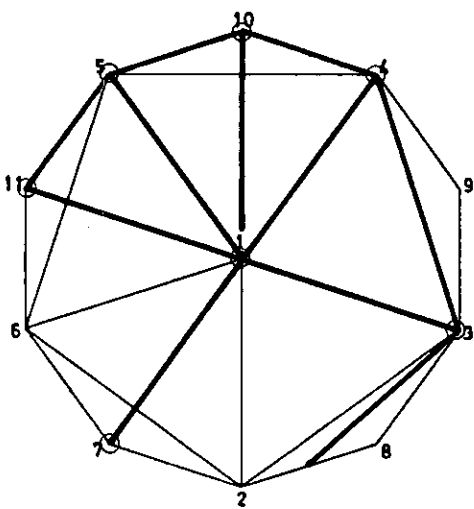
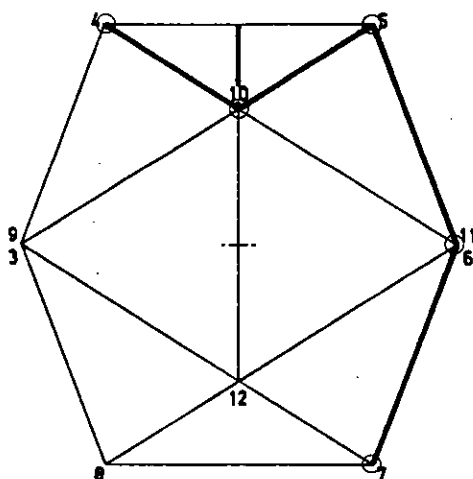
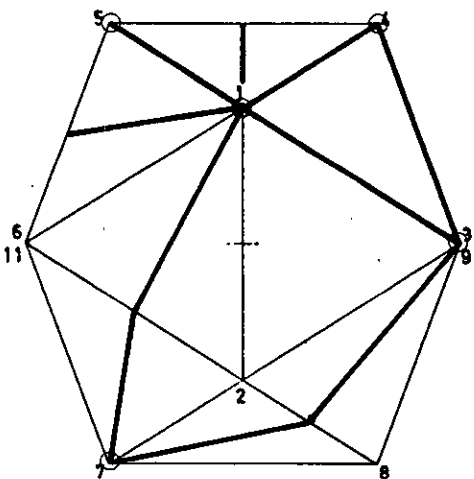
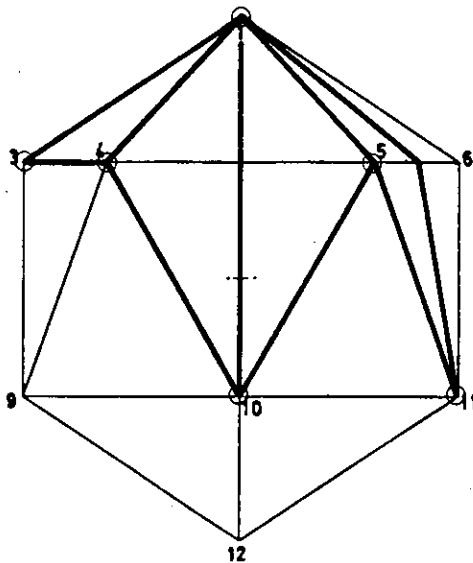
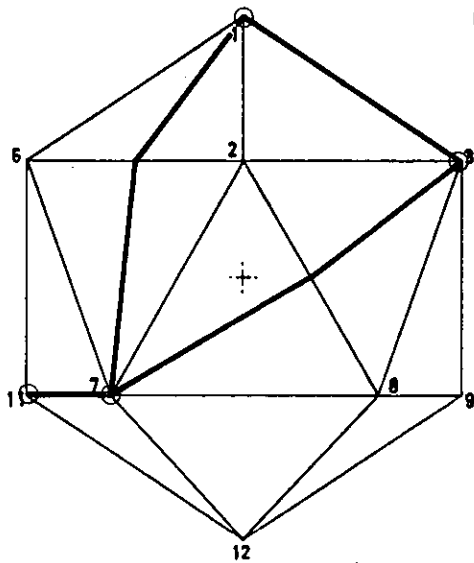
$$(5) \text{ (VI) } c + d + b^2$$



$$3a + 2b + c \quad (1)$$

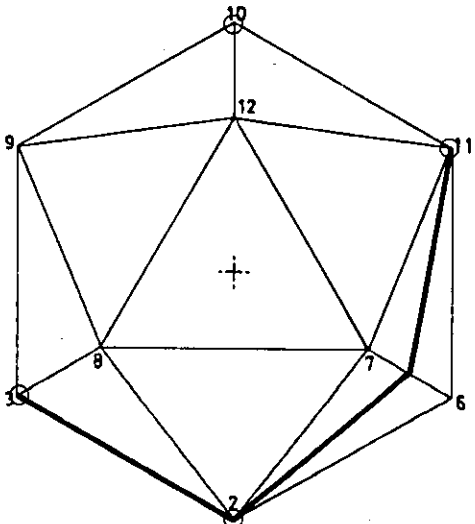
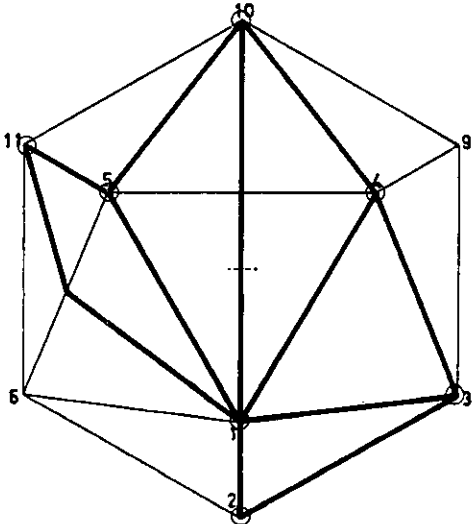
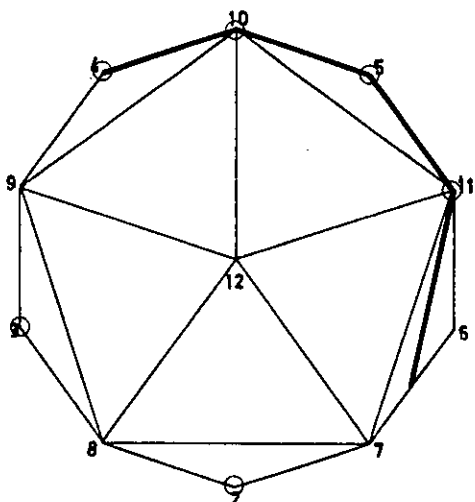
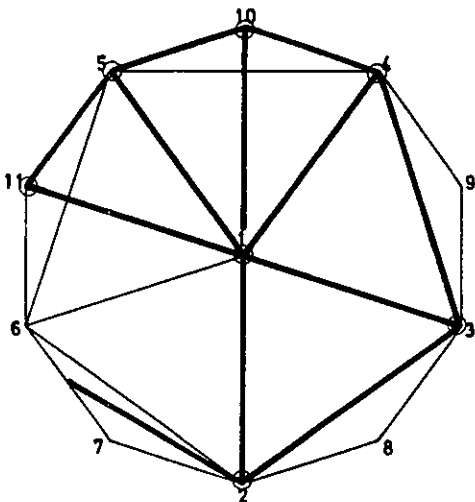
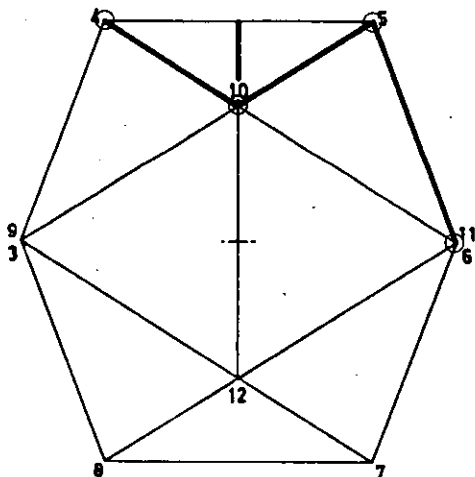
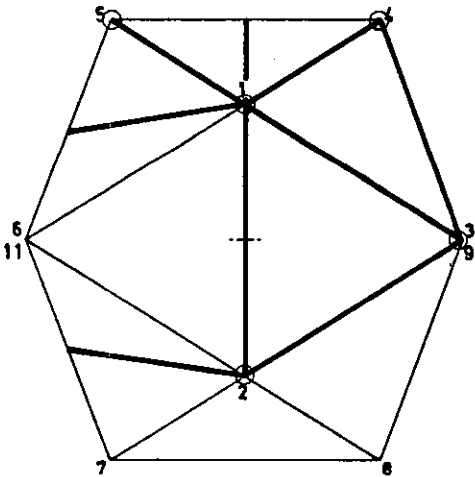
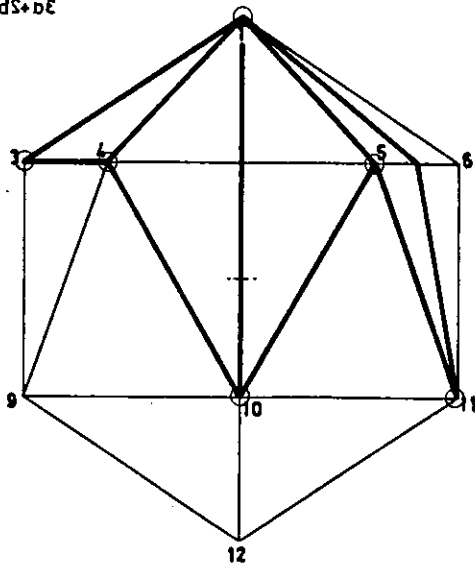
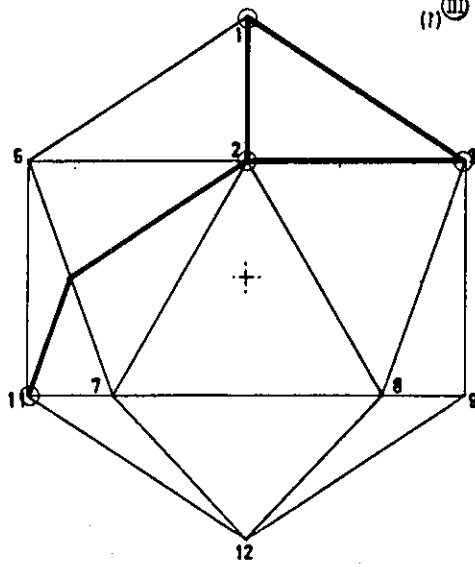
$$(1)$$

$$(S)$$

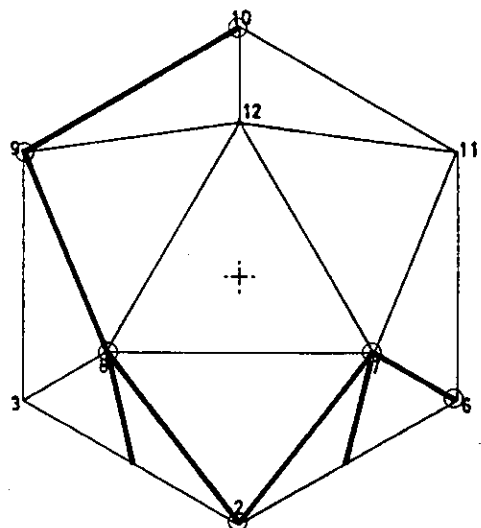
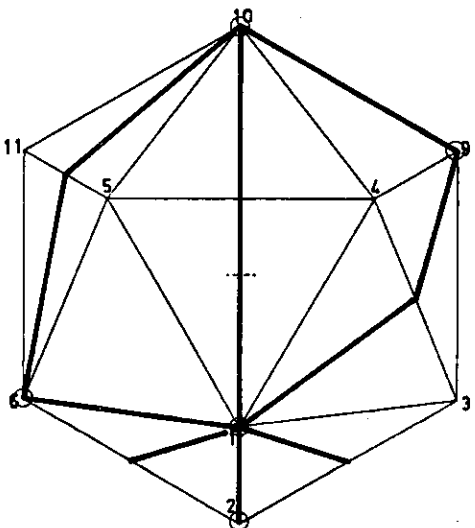
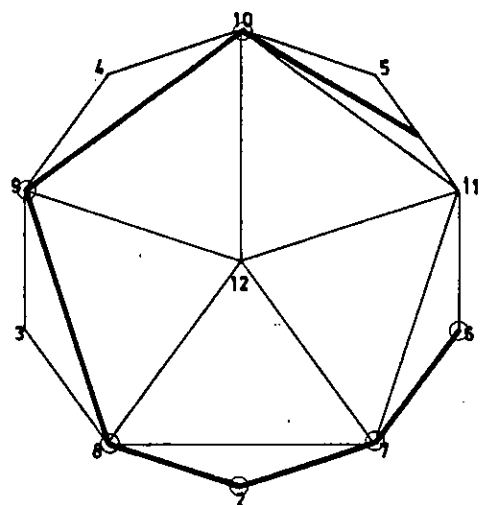
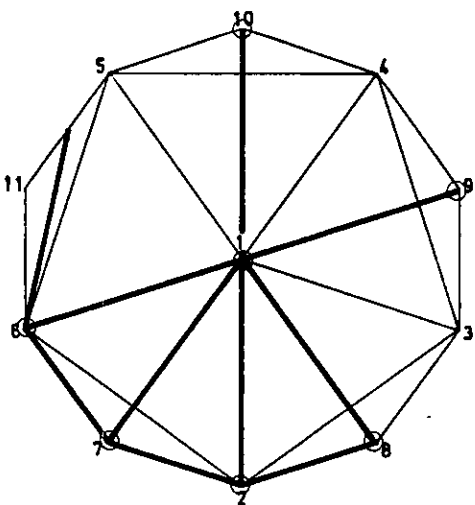
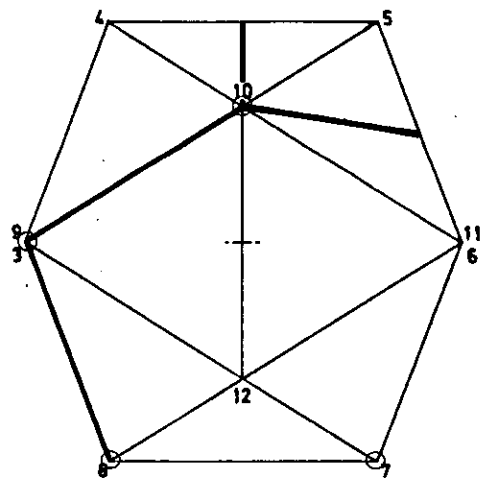
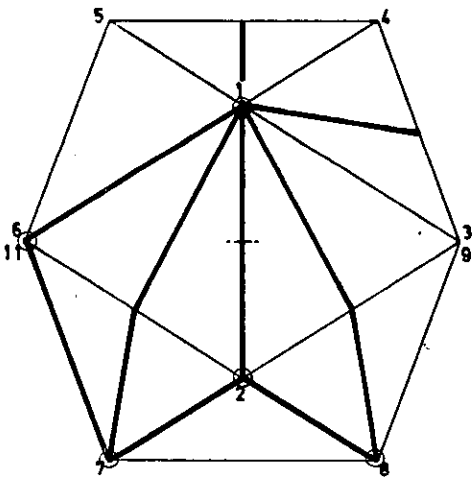
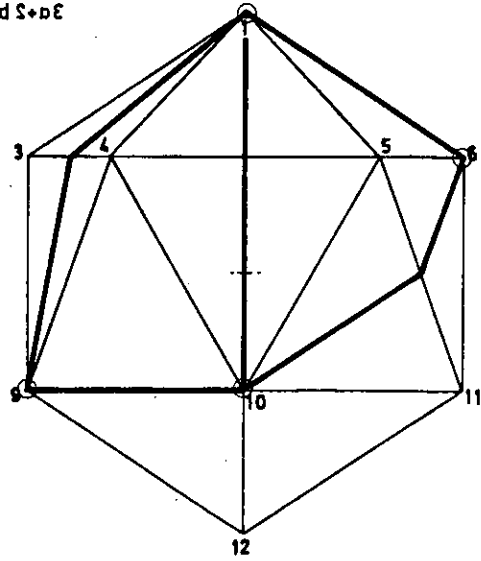
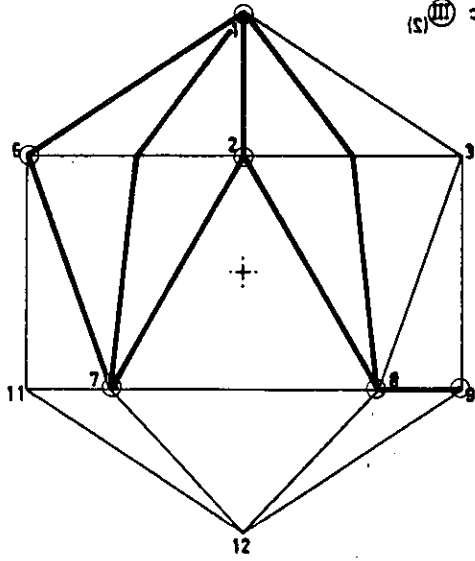


$$3a+2b+c \text{ (I) (1)}$$

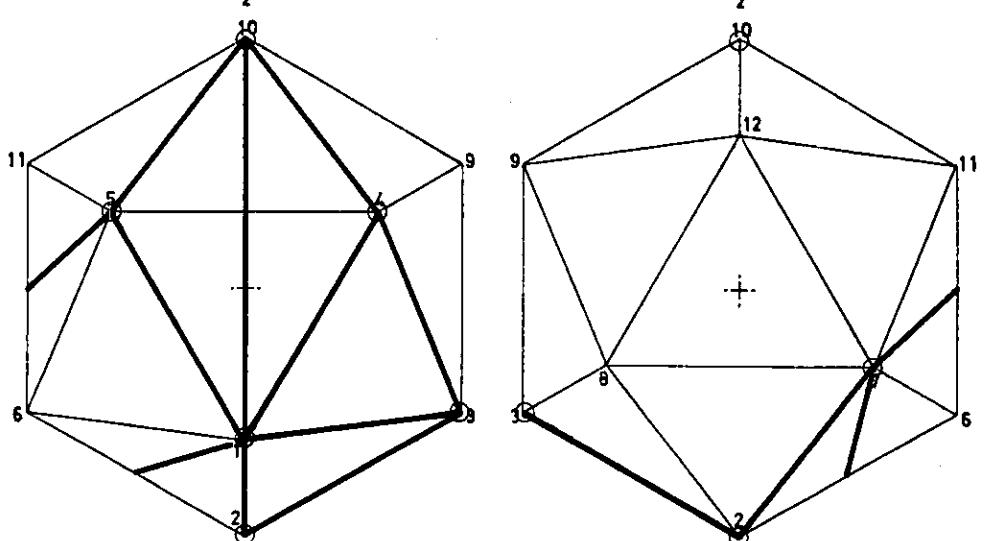
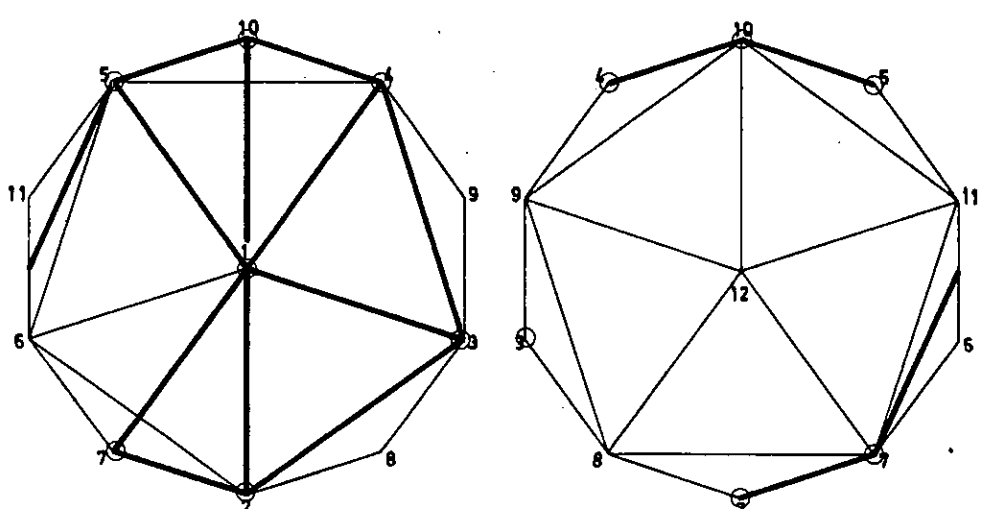
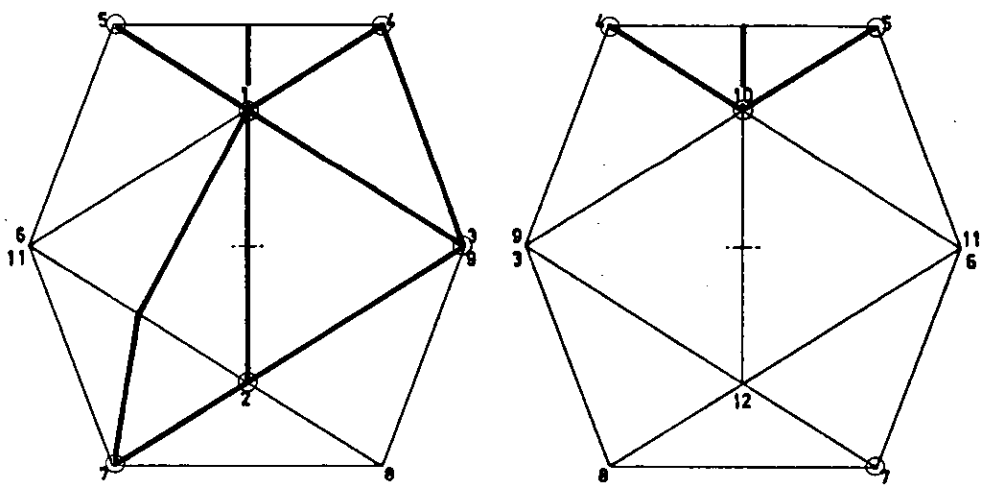
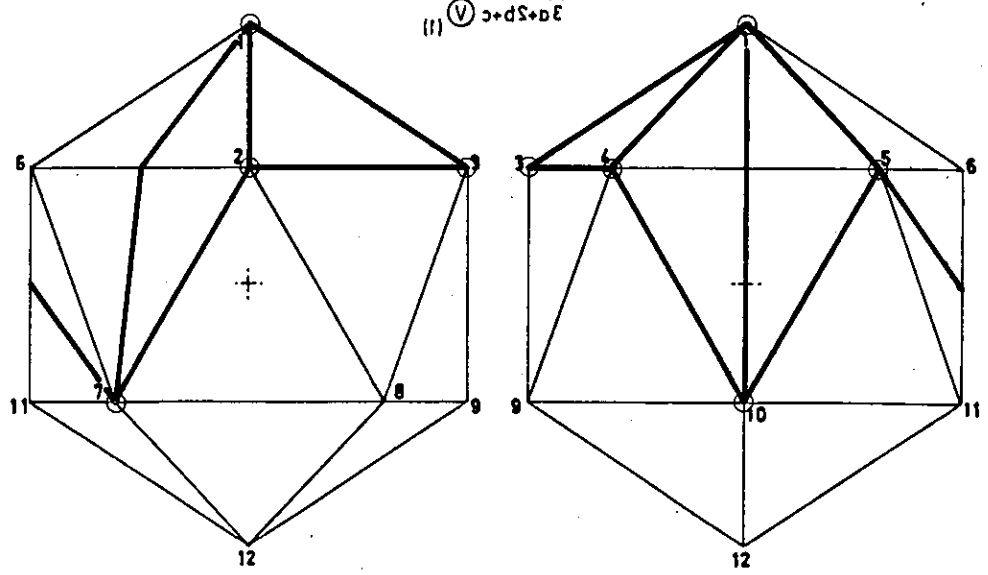
$$(1) \text{ (II) } a+dS+bE$$



$3a+2b+c$ (II) (2)
 (S) (III) $c+d$ $S+ad$

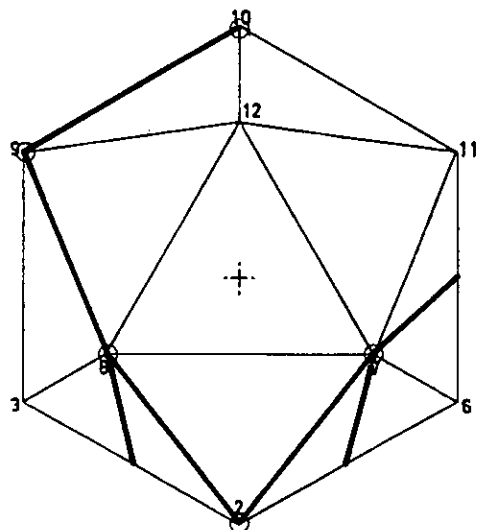
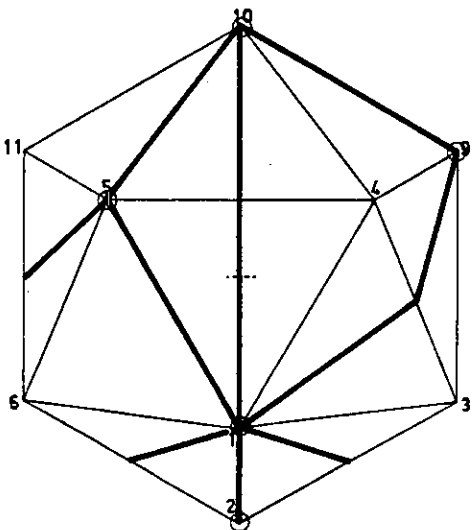
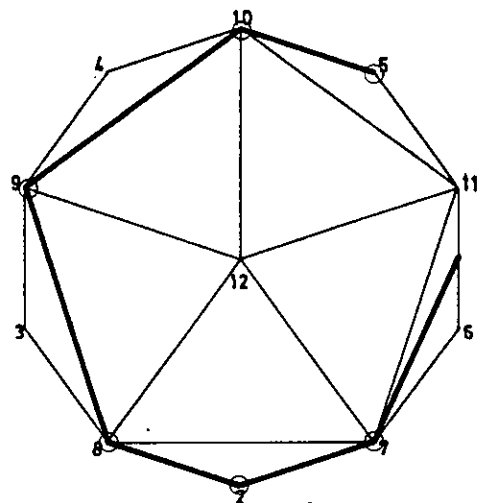
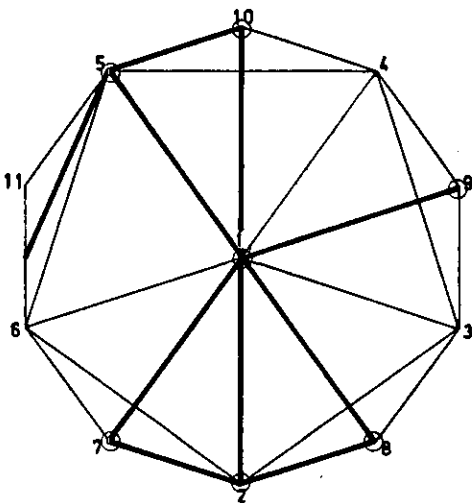
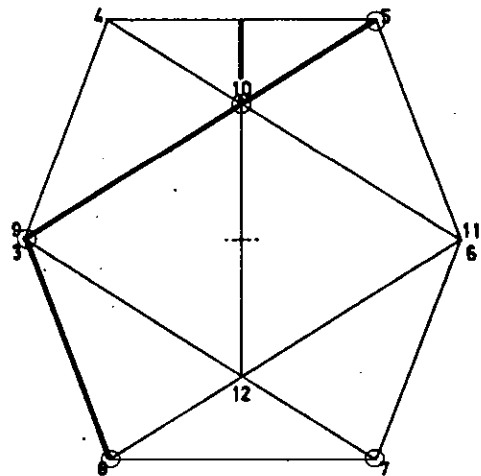
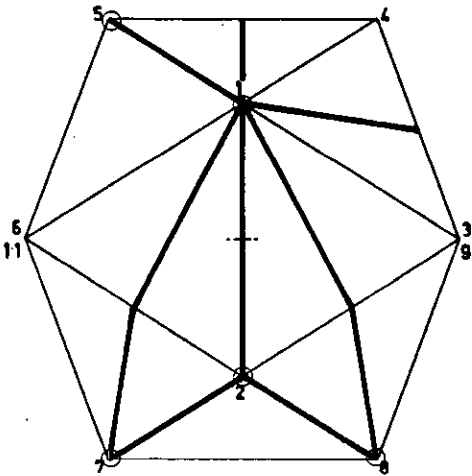
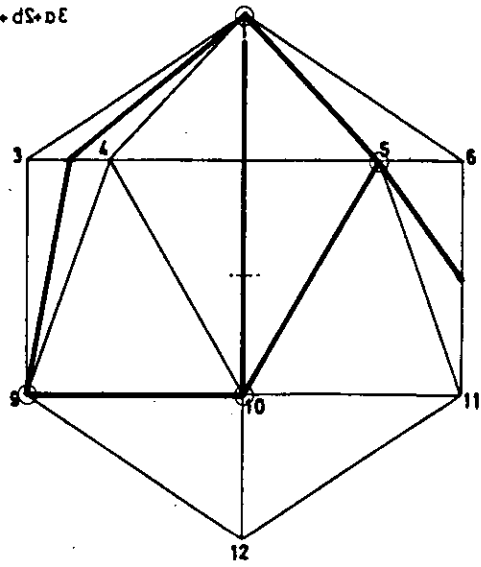
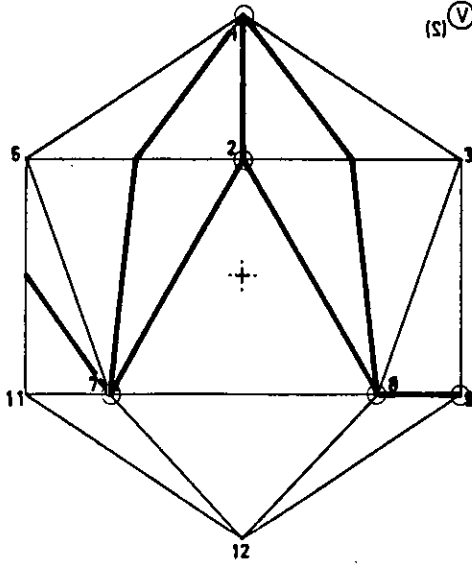


$3a+2b+c$ (V) (1)
 $3d+5p+c$ (V) (1)

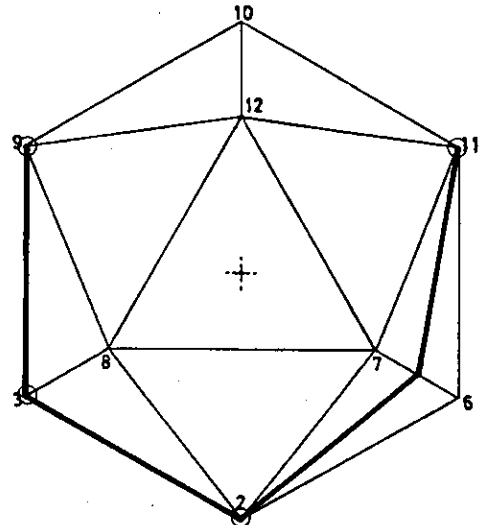
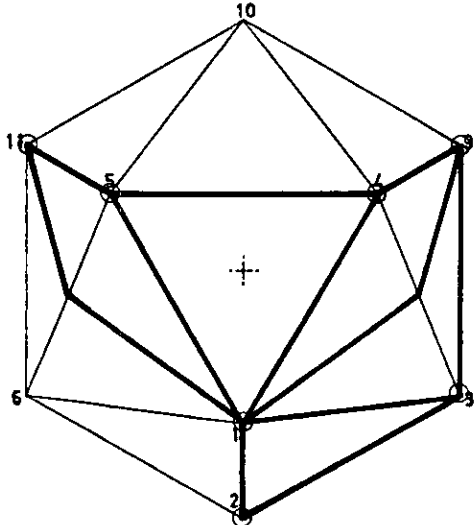
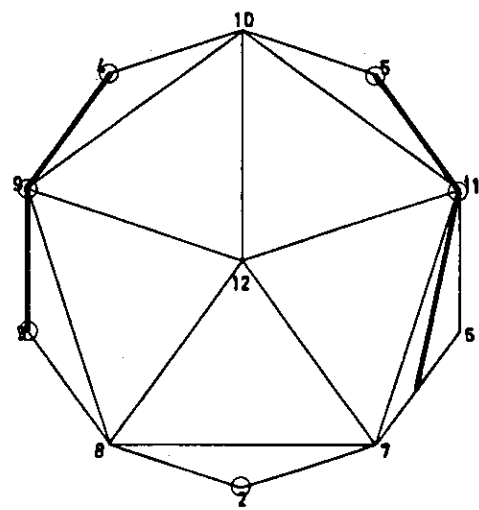
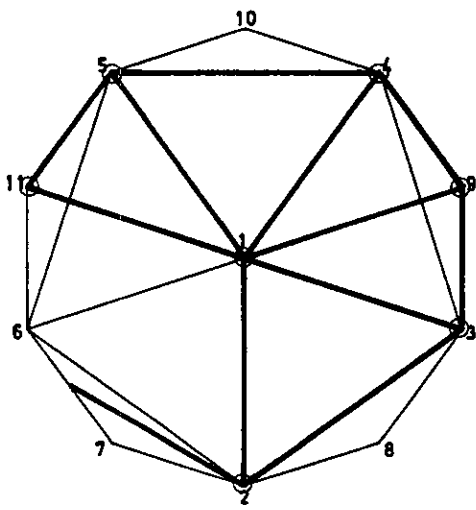
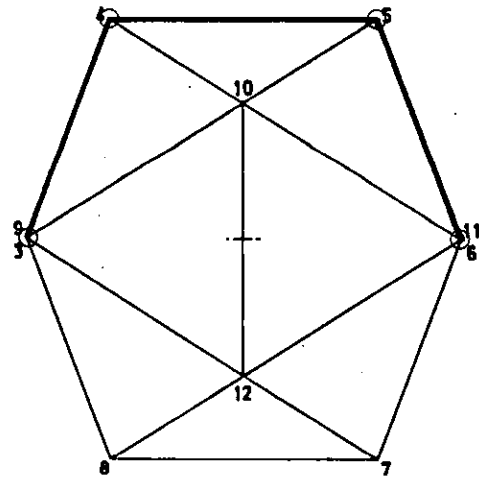
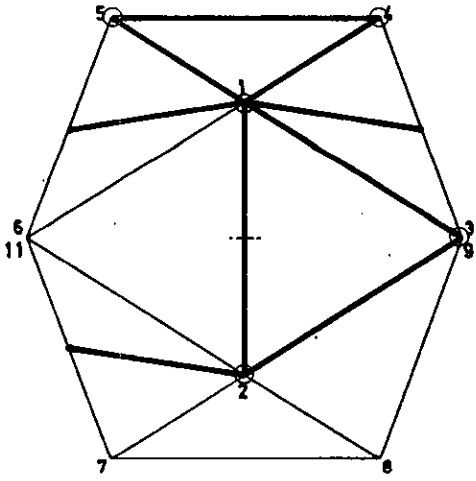
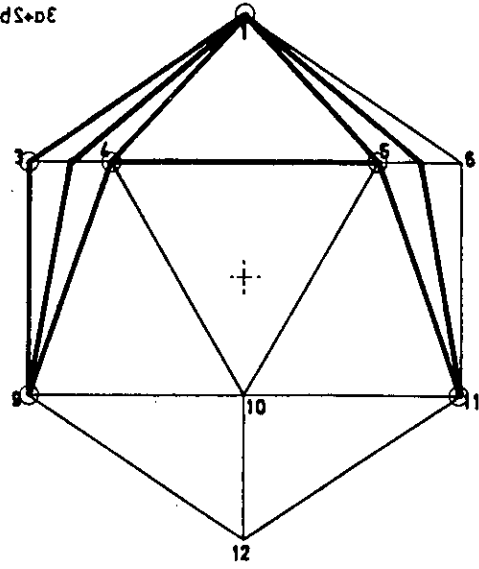
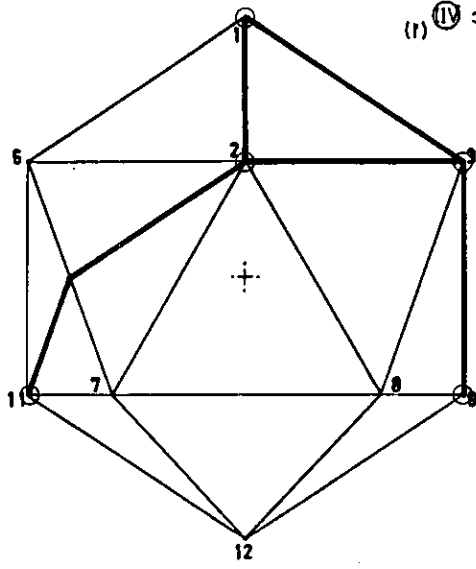


$$3a+2b+c \quad \textcircled{V} \quad (2)$$

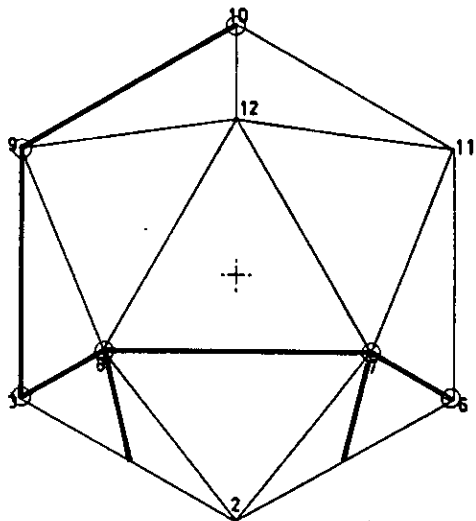
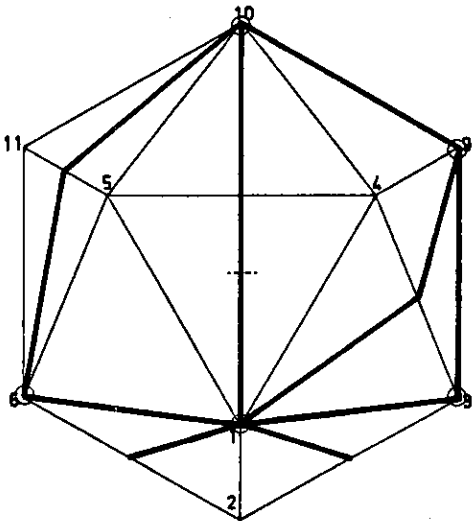
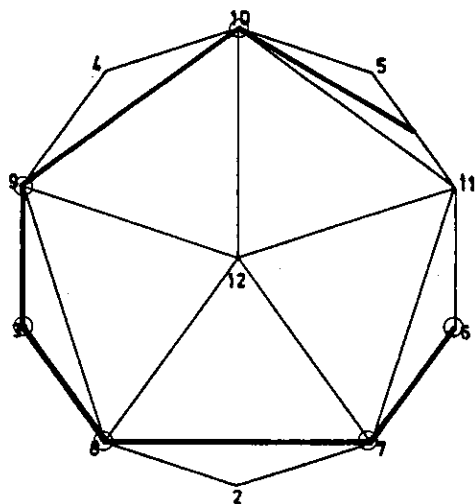
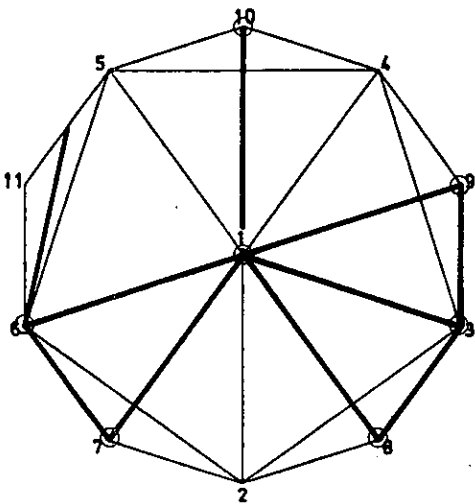
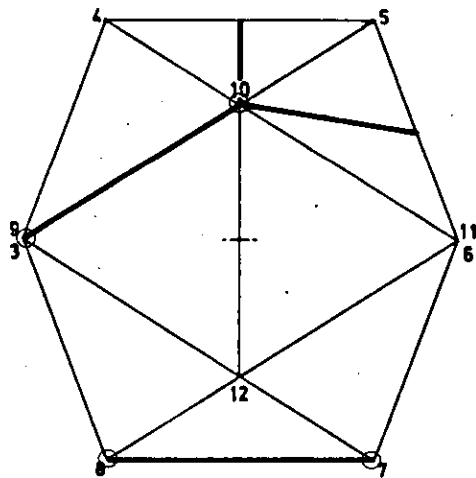
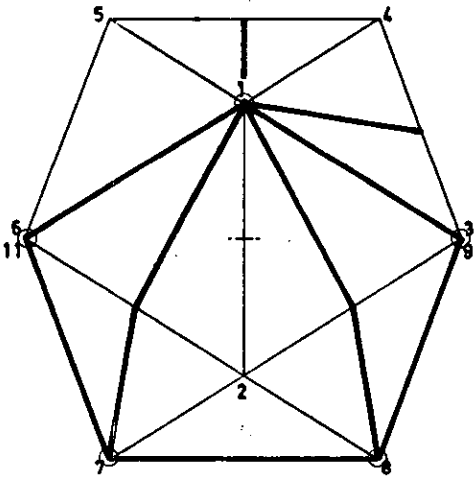
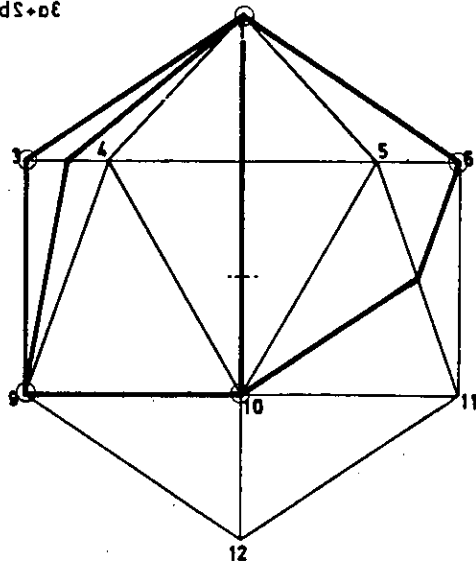
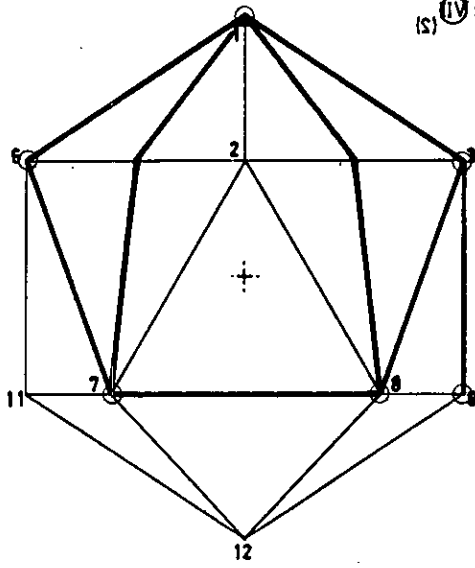
$$(1) \quad \textcircled{V} \quad c+d \quad \textcircled{S} \quad bE$$



$3a+2b+c$ (VI) (1)
 $3a+dS+eE$ (IV) (1)

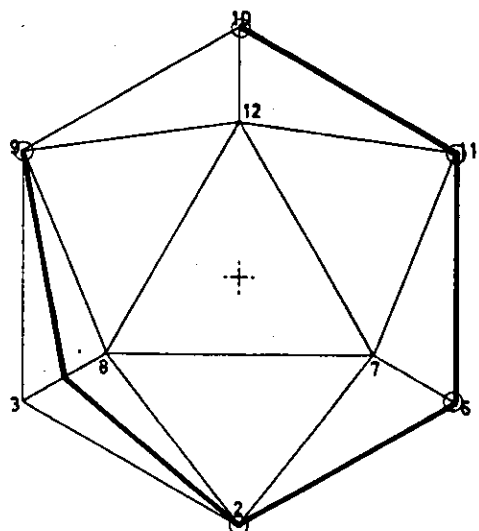
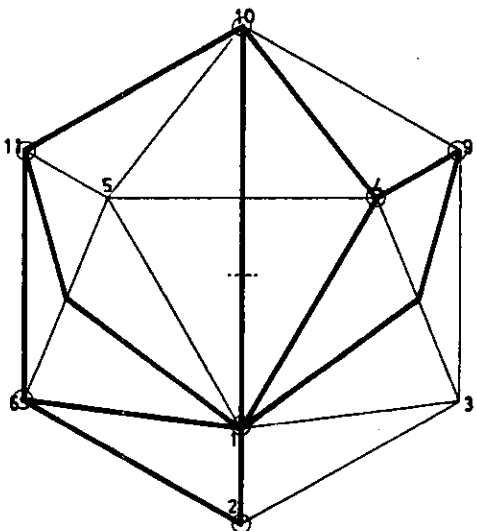
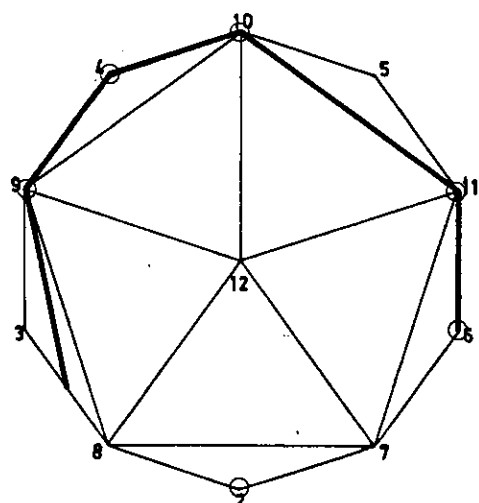
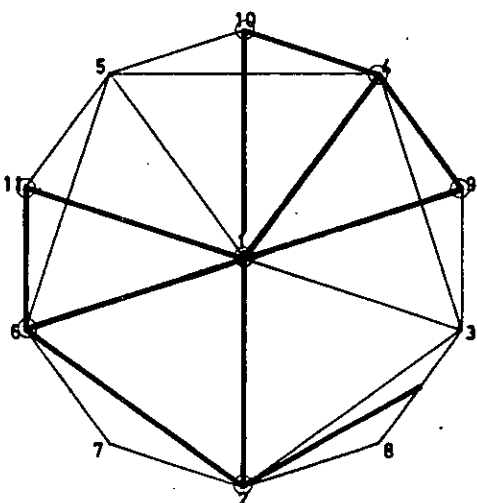
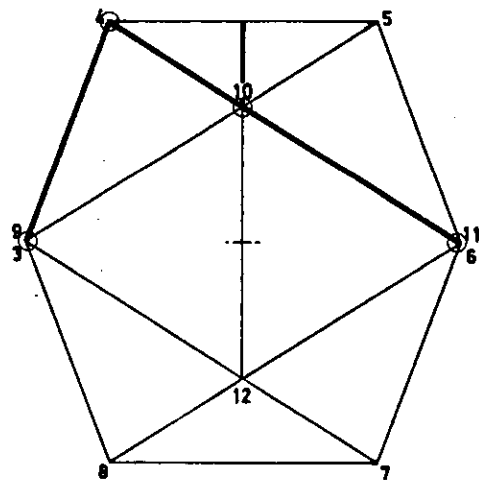
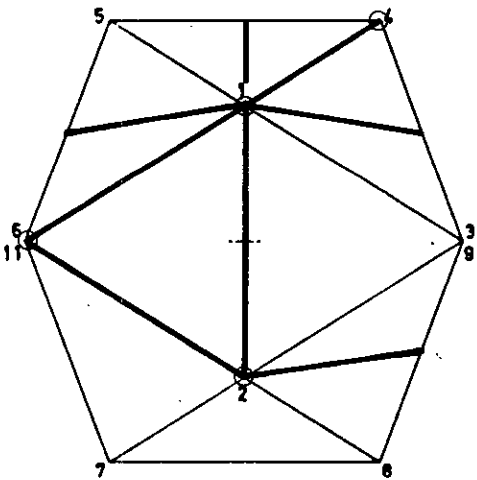
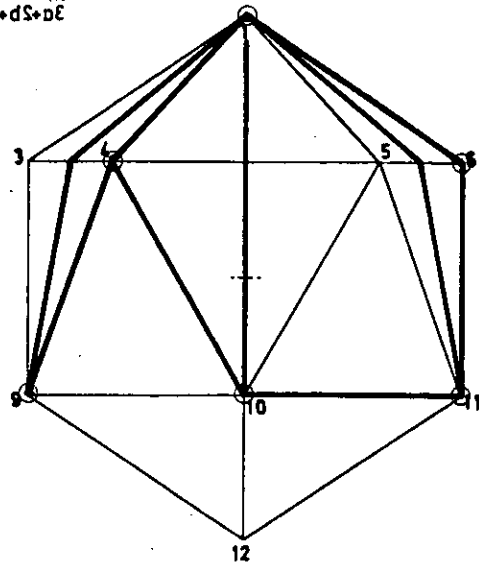
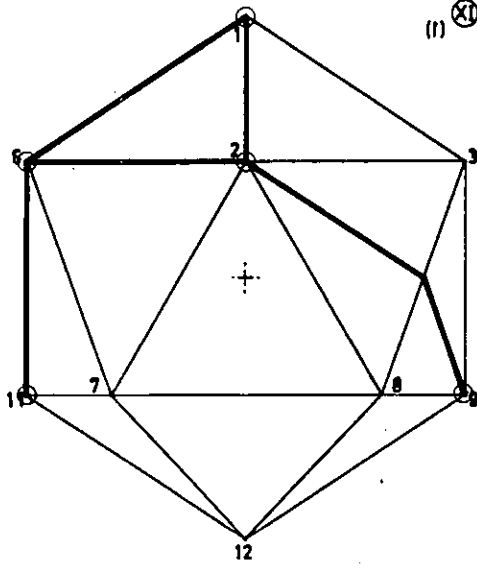


$3a+2b+c$ (V) (2)
 $3a+5p+c$ (IV) (15)

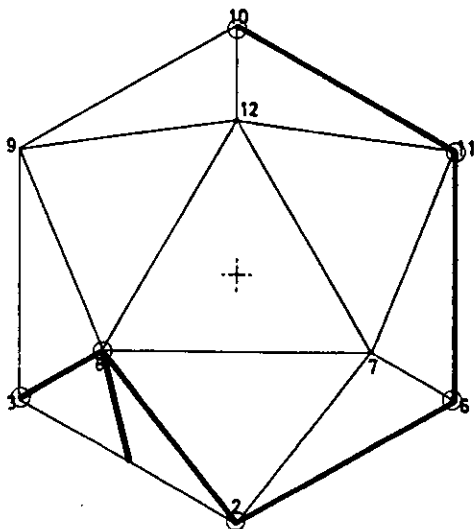
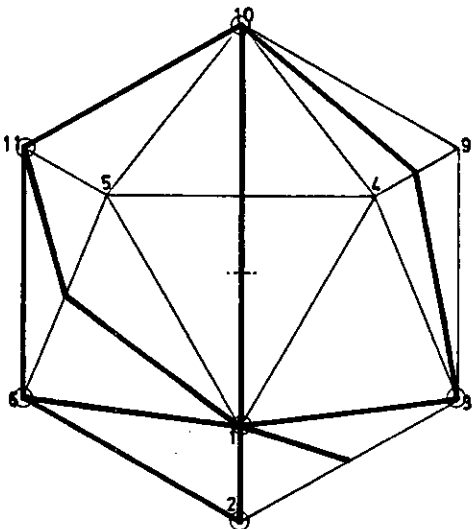
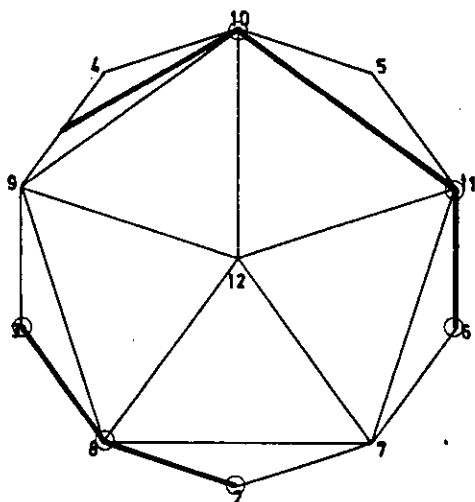
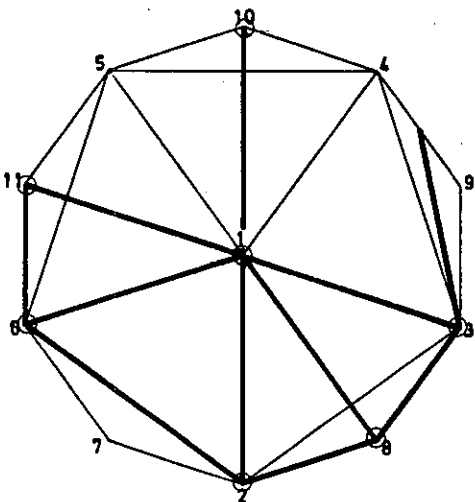
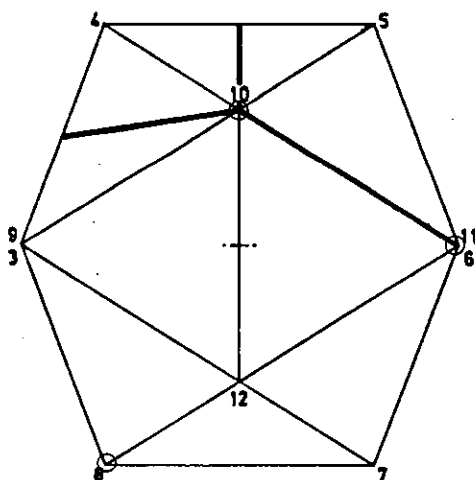
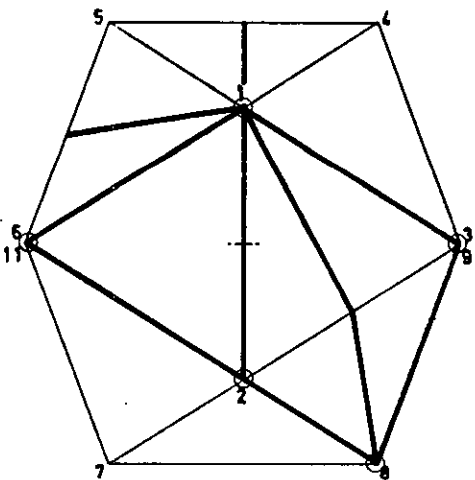
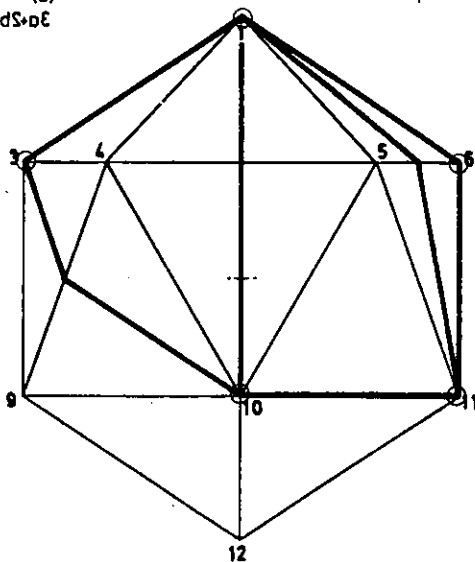
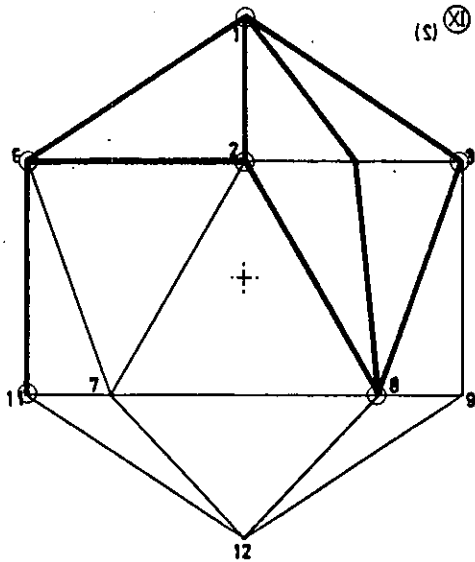


$$3a+2b+c \text{ (11)}$$

$$(1) \text{ (11)} \text{ } a+d \text{ } b+c$$

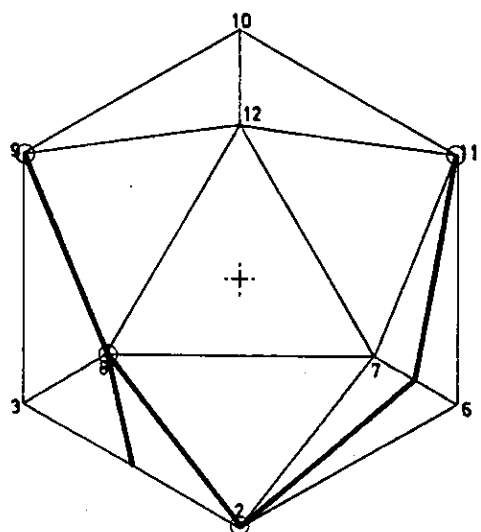
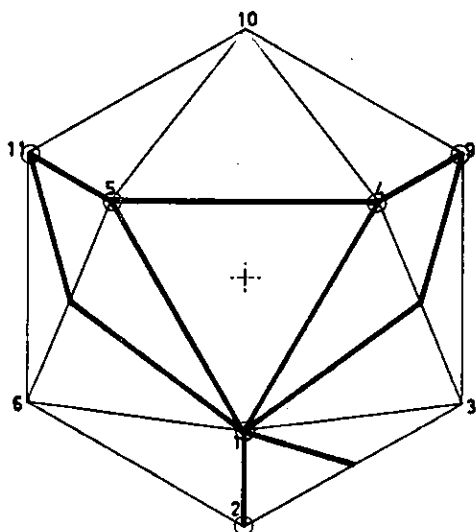
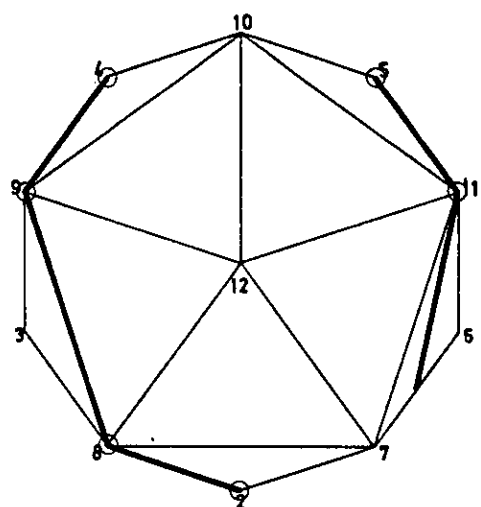
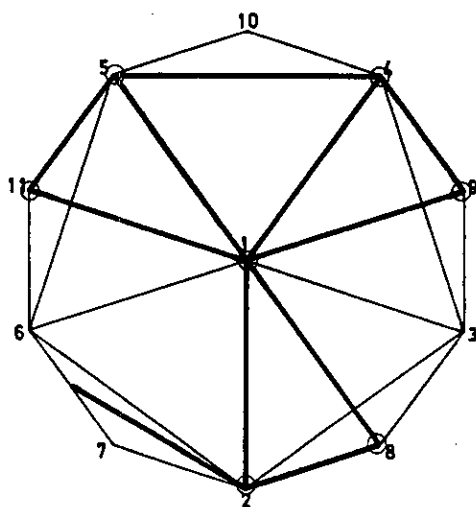
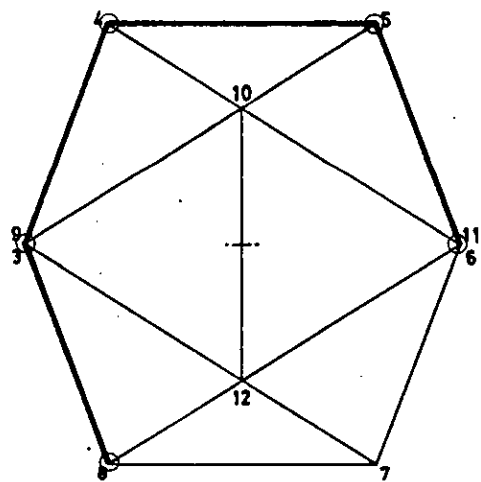
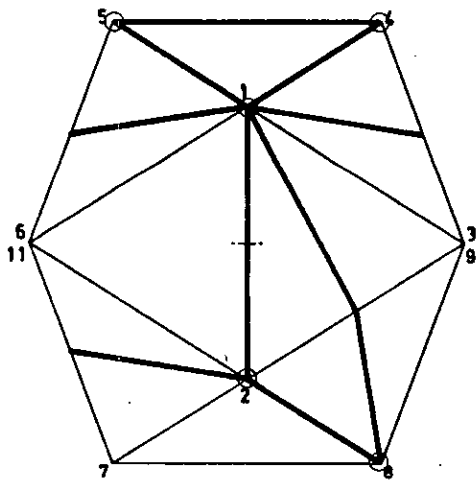
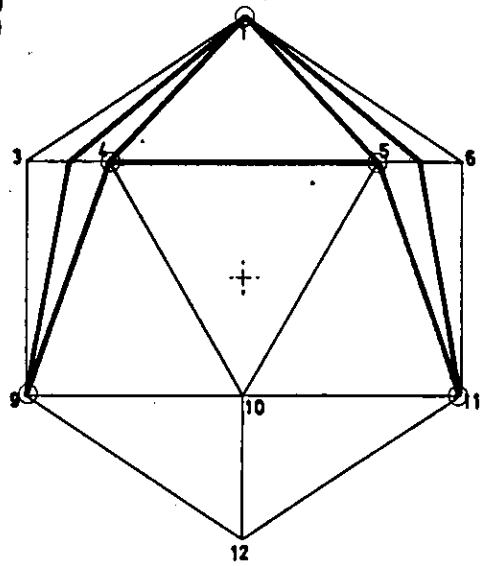
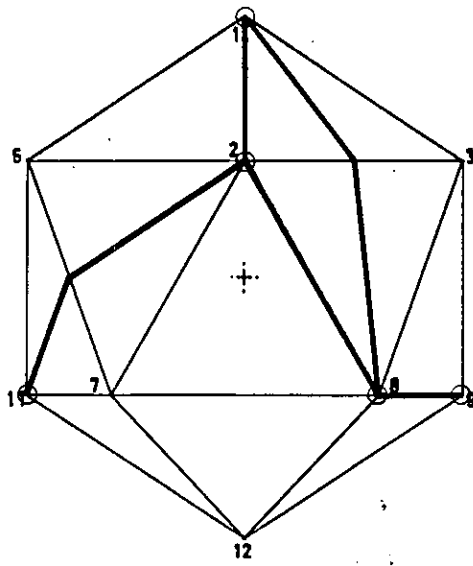


$3a+2b+c$ VIII (2)
 (S) \otimes $3+dS+0E$



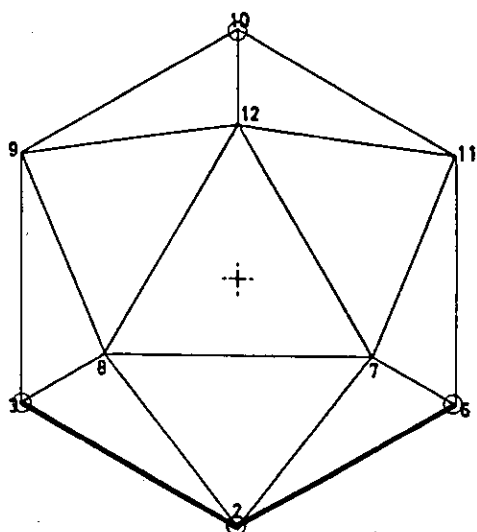
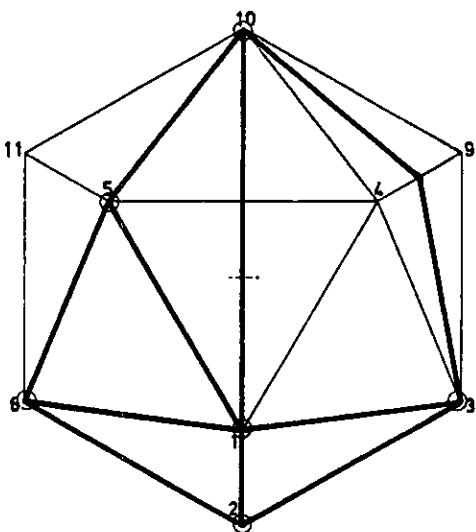
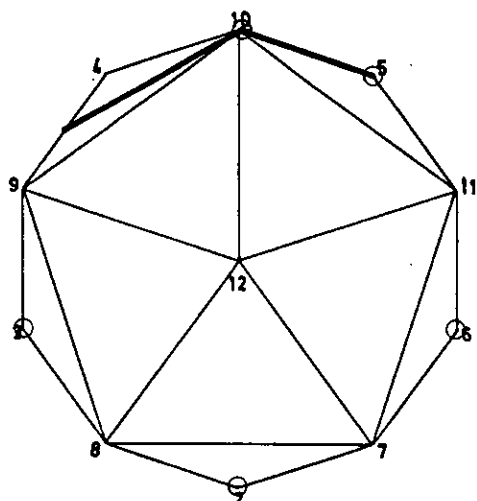
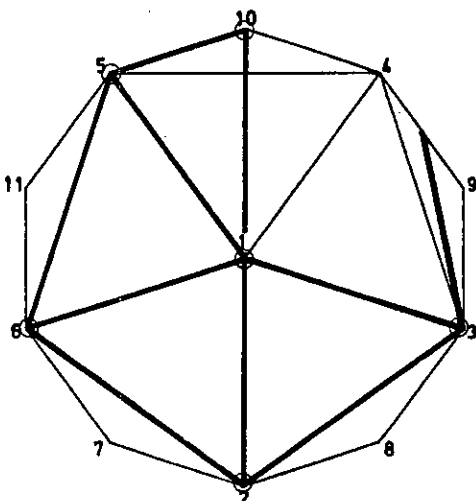
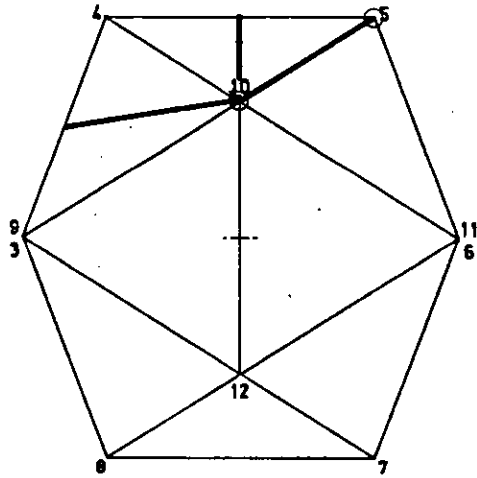
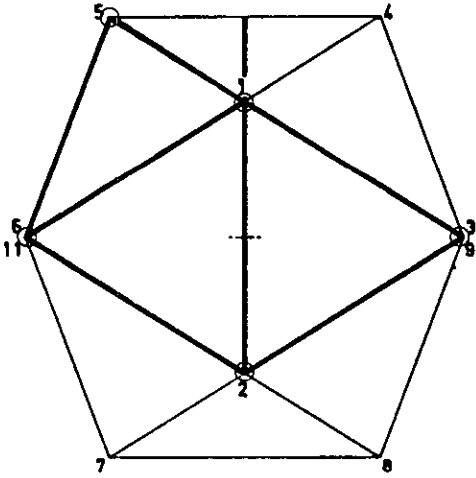
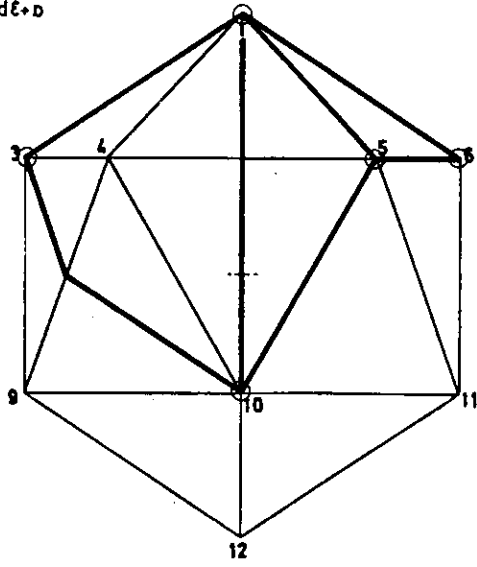
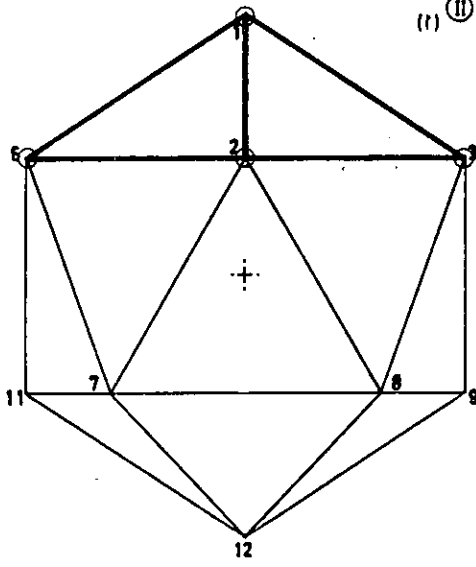
$$3a+2b+c \text{ (X)}$$

(1)
(S)



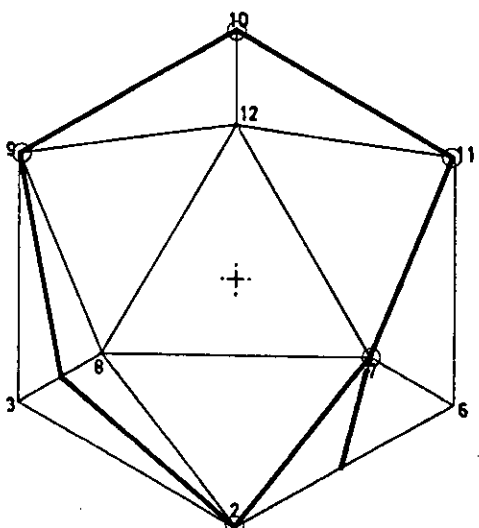
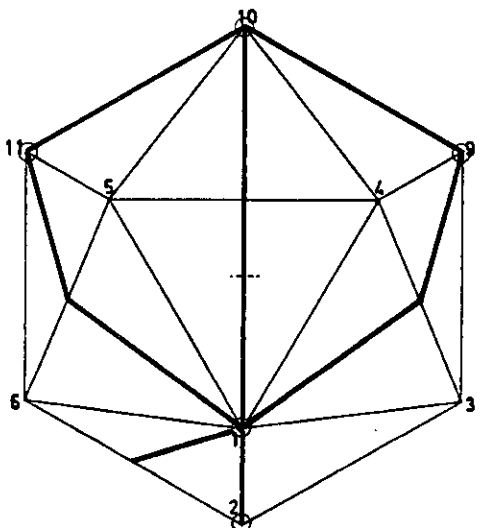
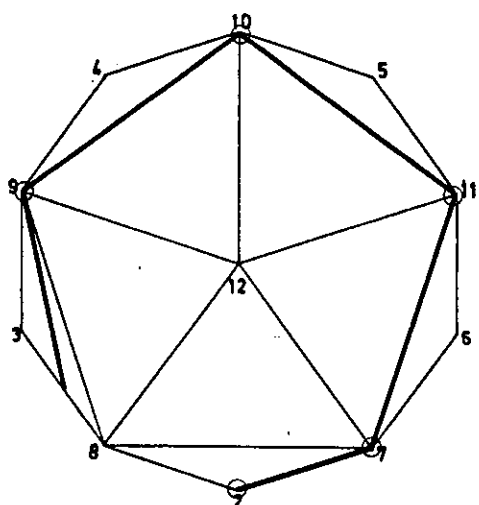
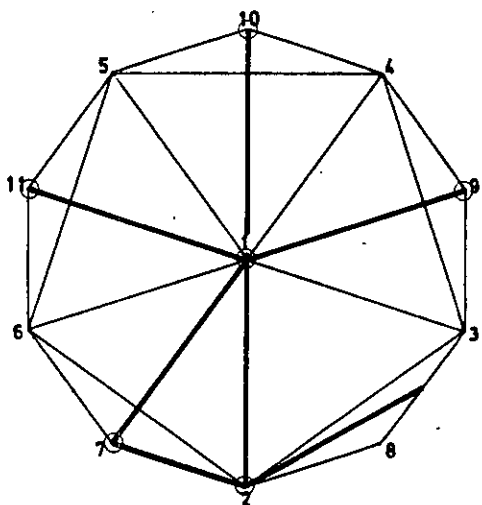
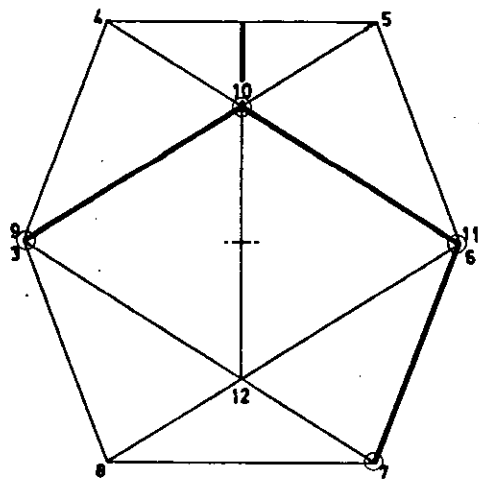
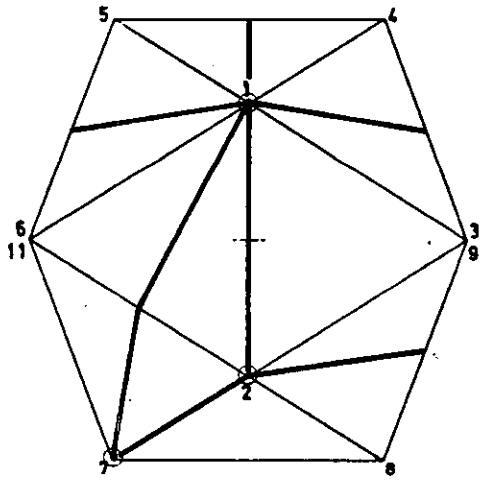
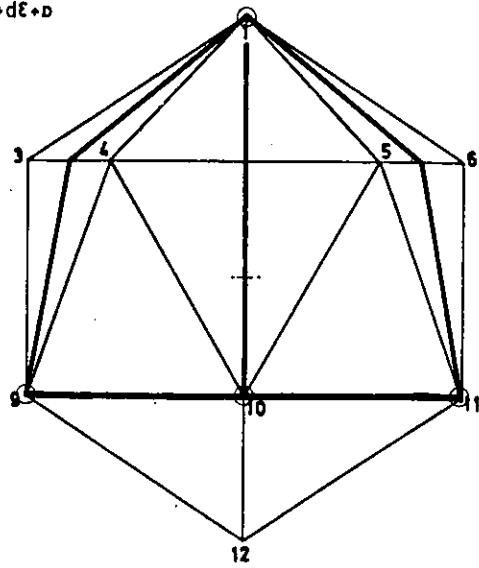
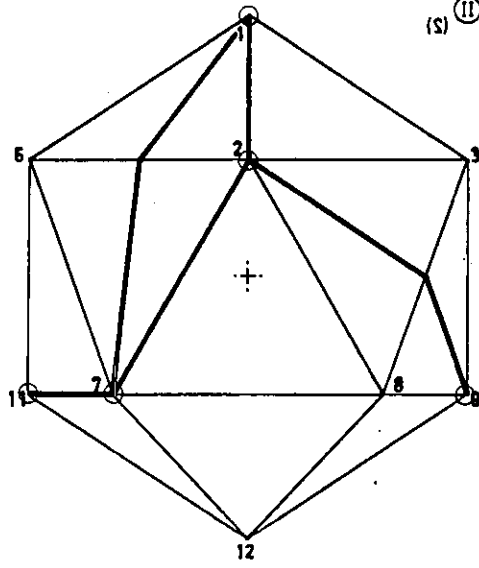
$$a+3b+c \textcircled{I} (1)$$

$$(1) \textcircled{II} c+d \textcircled{E} + D$$



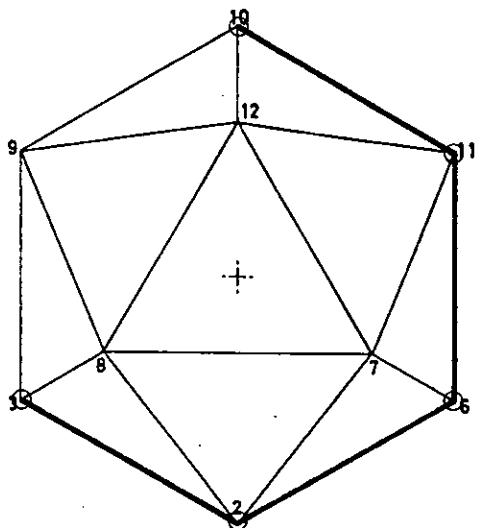
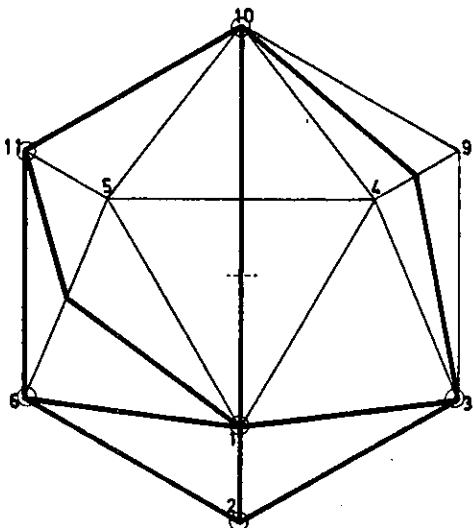
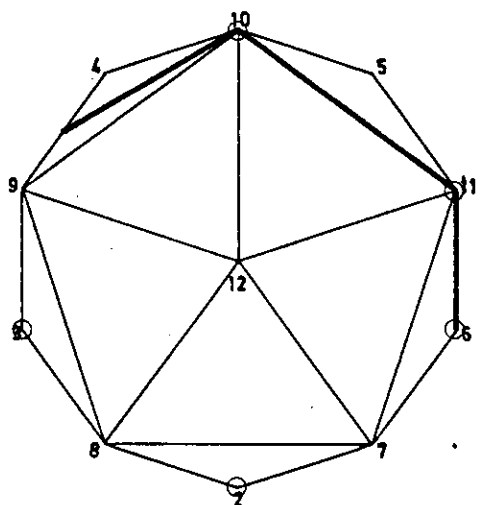
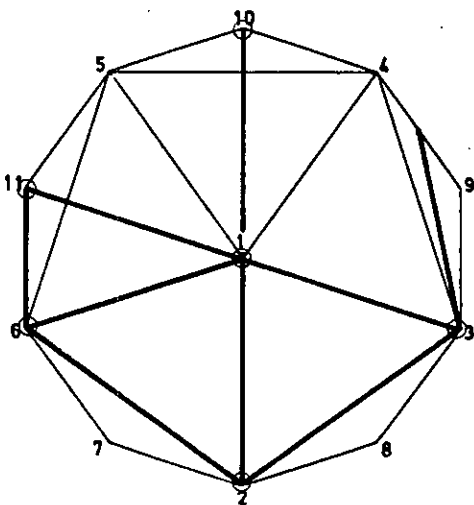
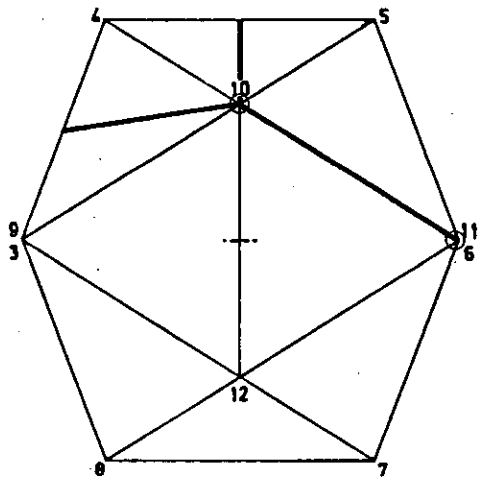
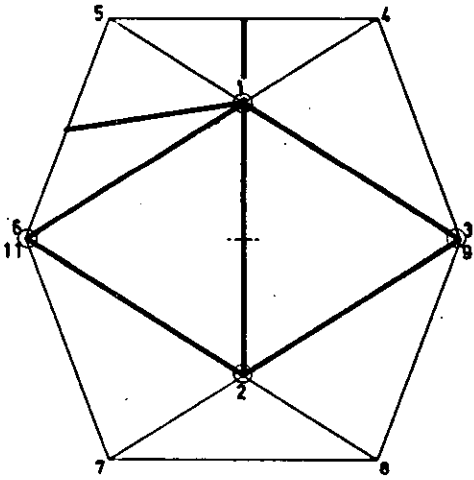
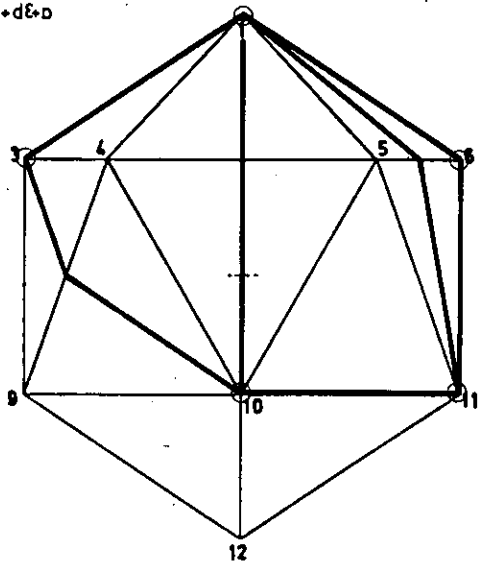
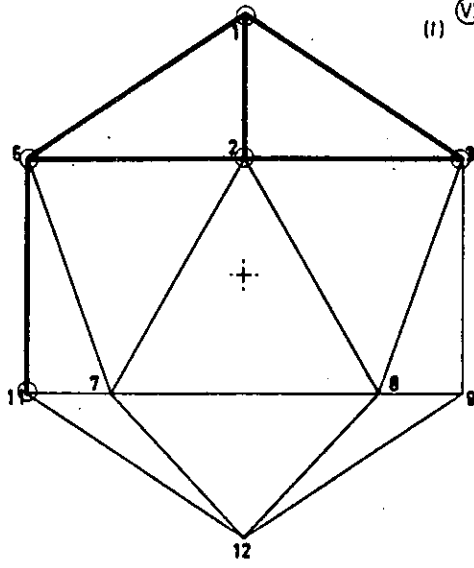
$$a+3b+c \textcircled{1} (2)$$

$$(S) \textcircled{II} c+dE+d$$



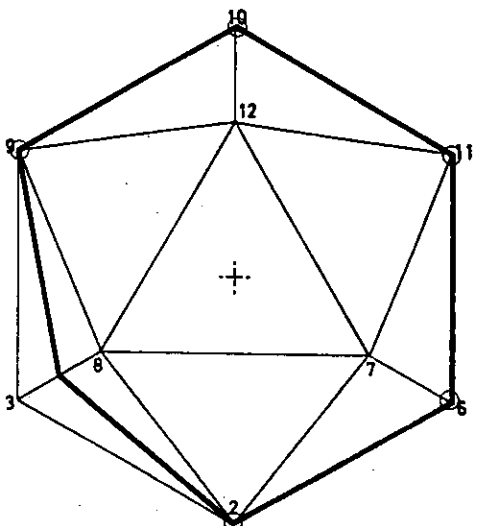
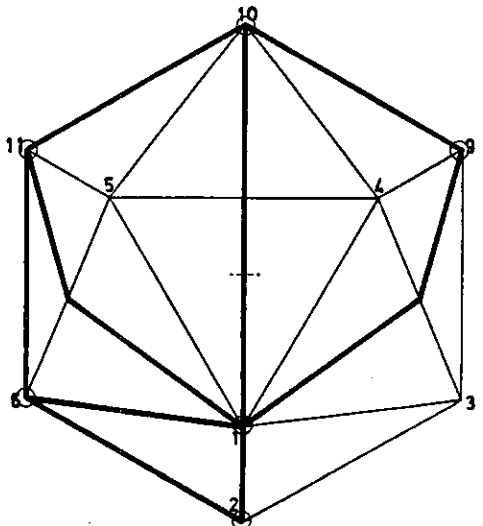
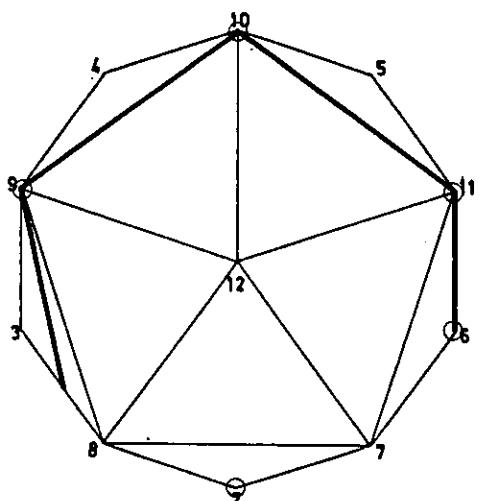
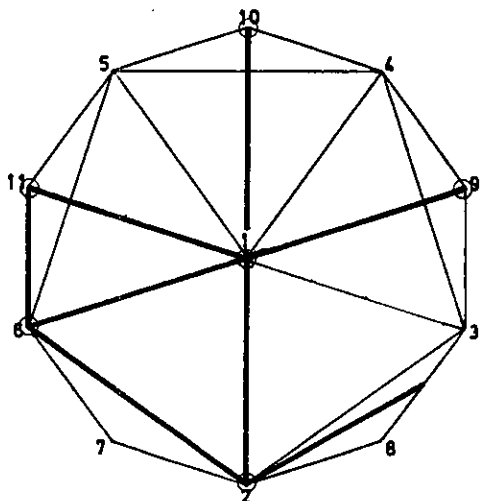
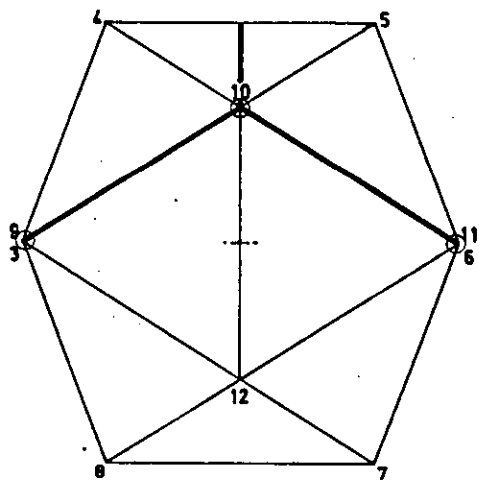
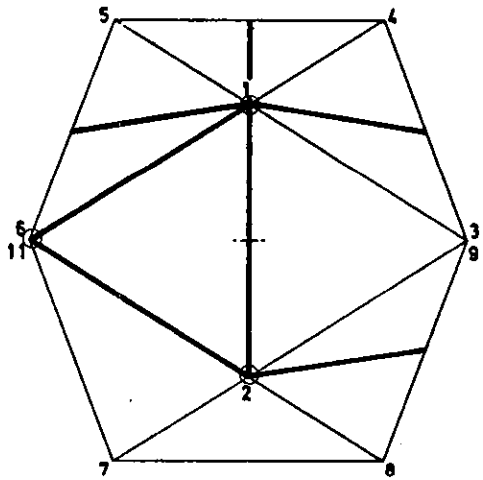
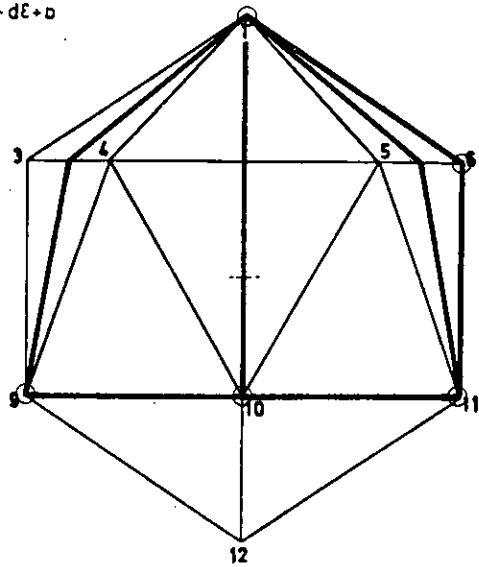
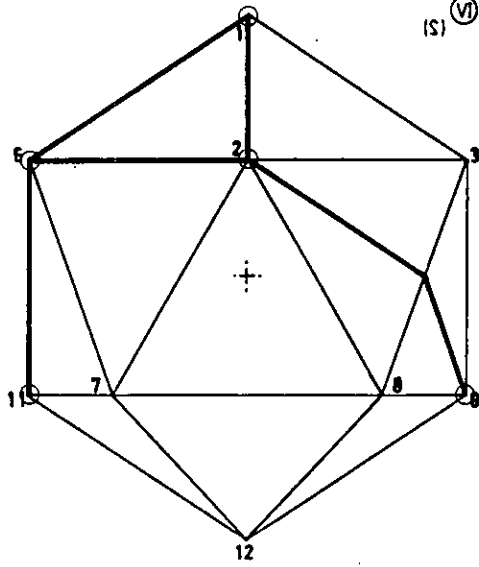
$$a + 3b + c \text{ (III) } (1)$$

$$(1) \text{ (V) } c + d + d$$

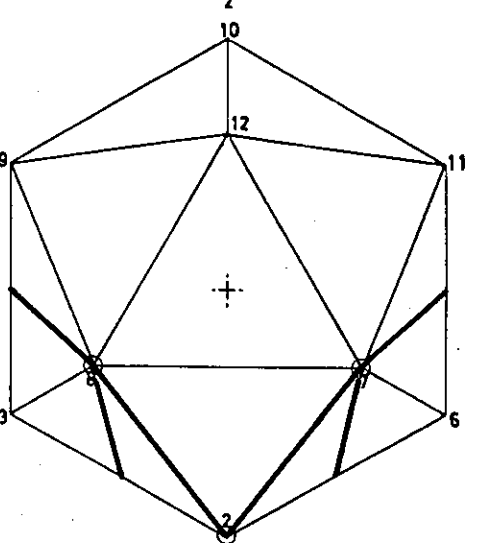
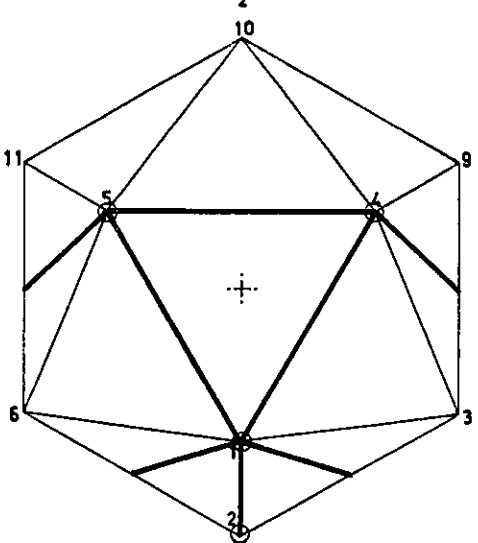
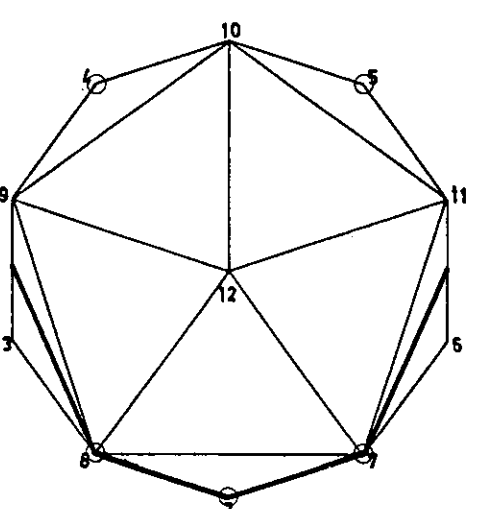
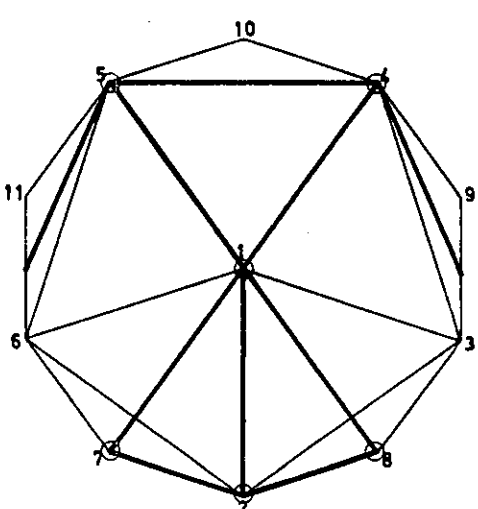
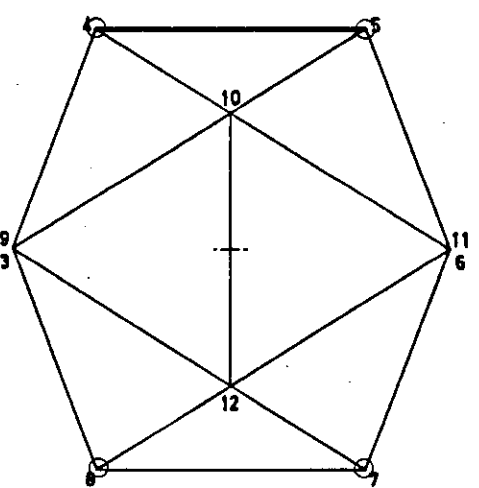
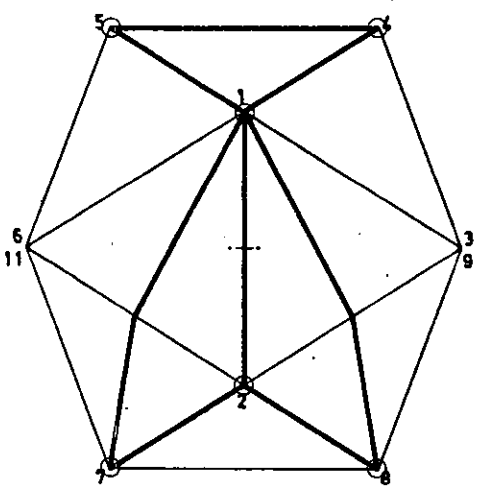
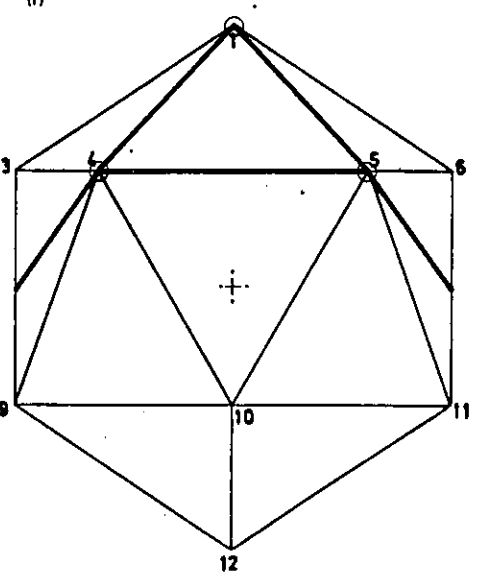
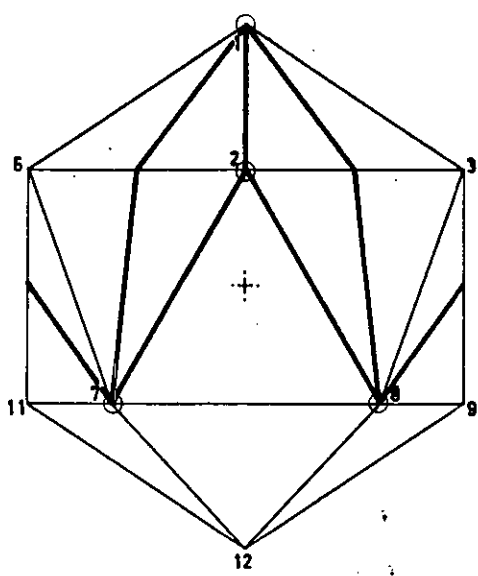


$$a + 3b + c \text{ (III) } (2)$$

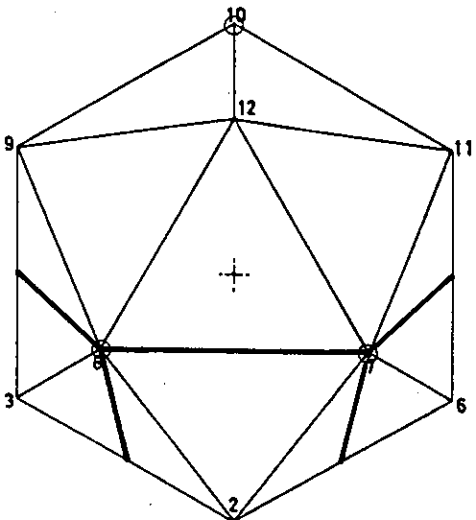
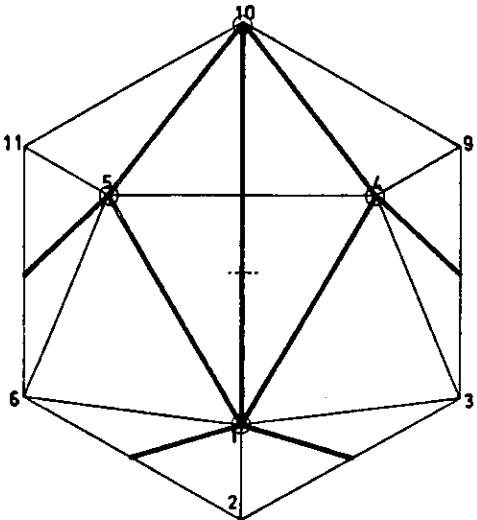
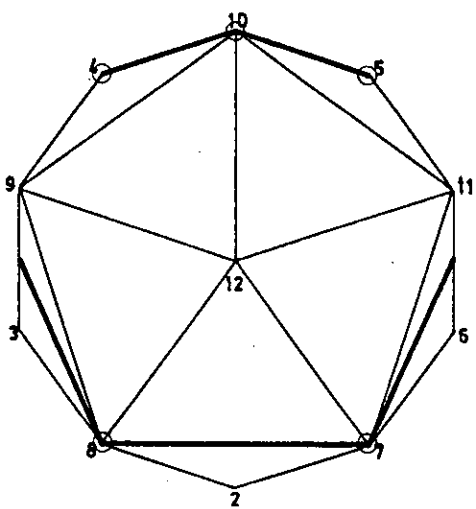
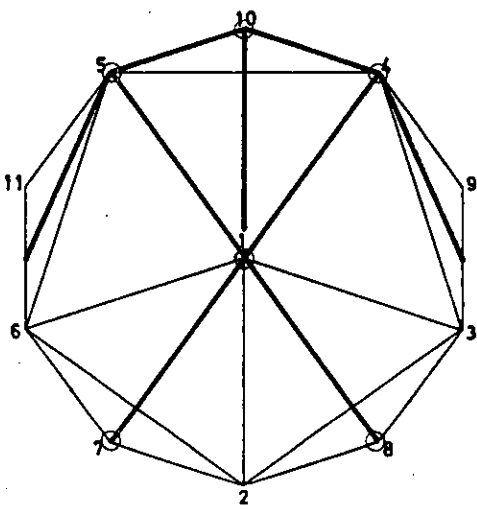
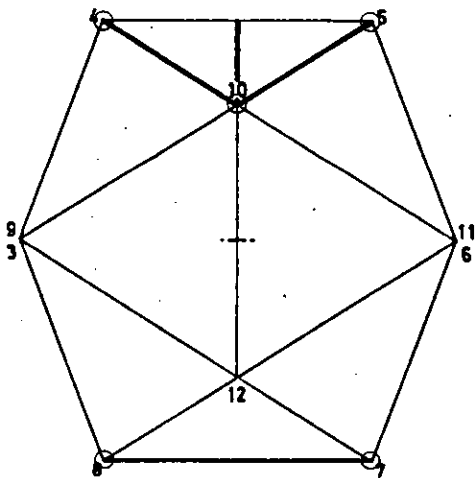
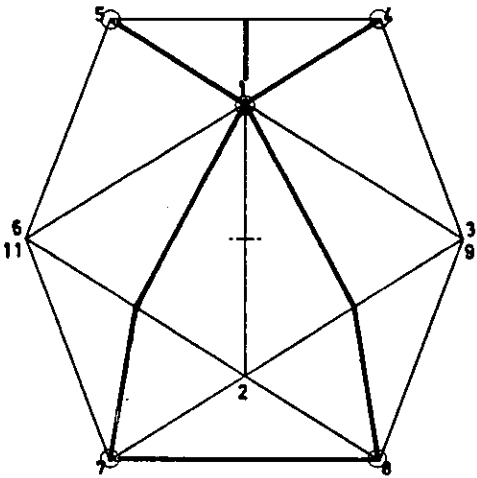
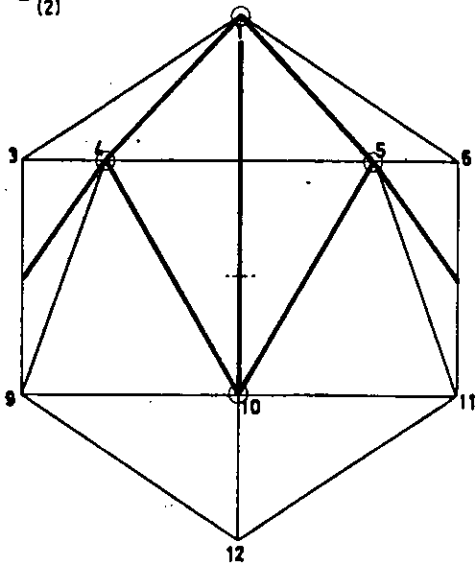
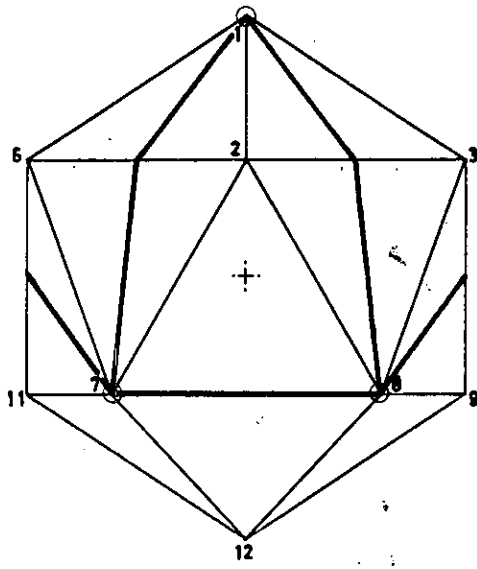
$$(S) \text{ (V) } c + dE + b$$



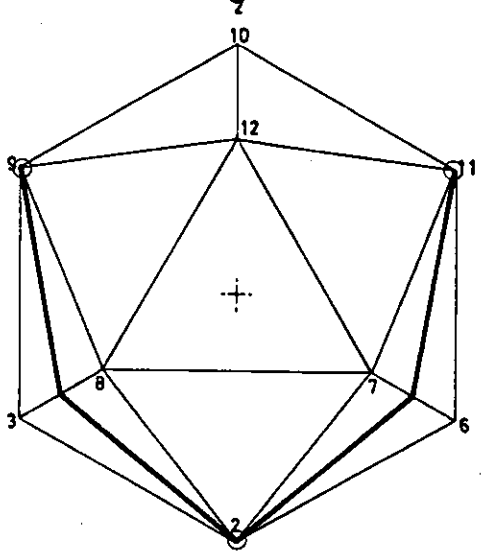
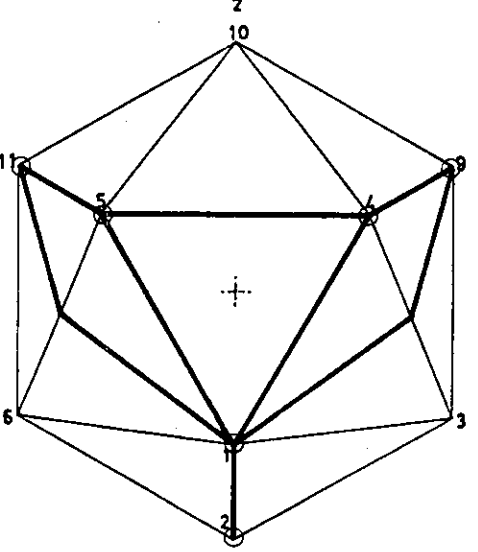
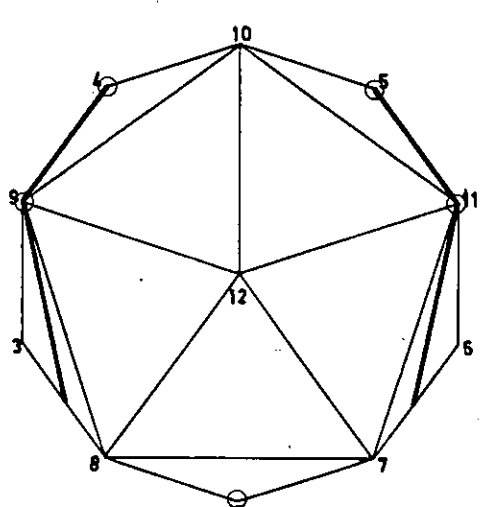
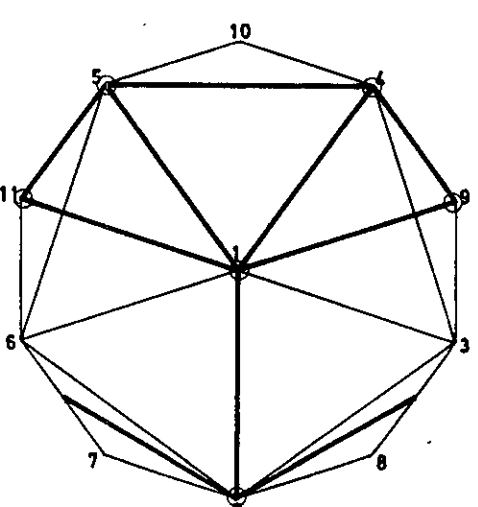
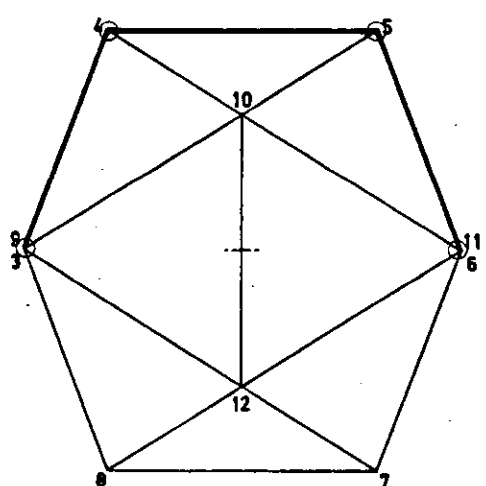
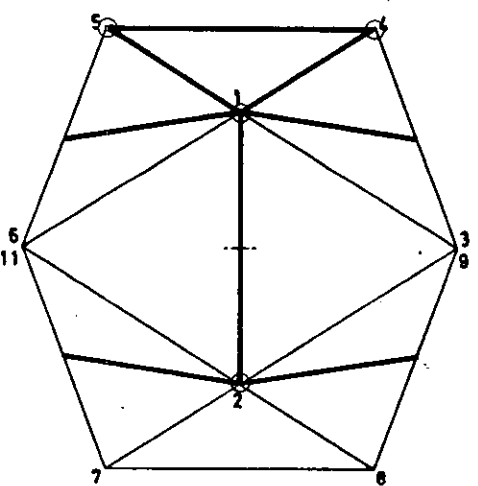
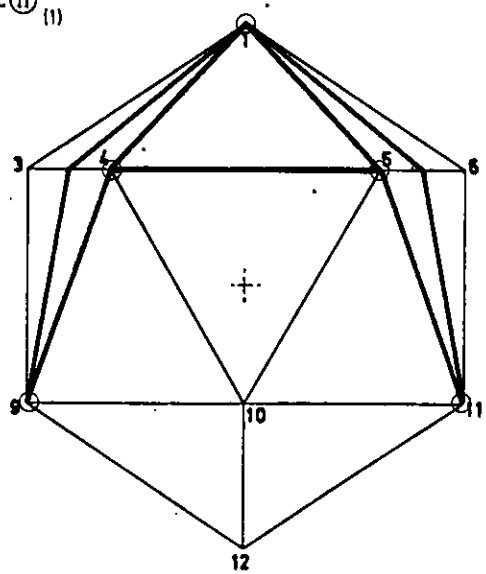
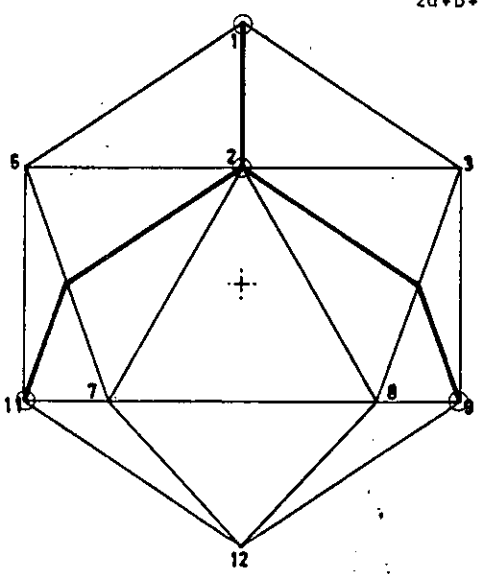
$$2a + b + 2c \text{ (1)}$$



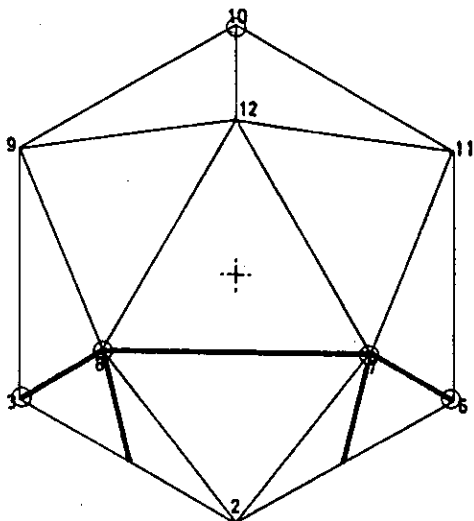
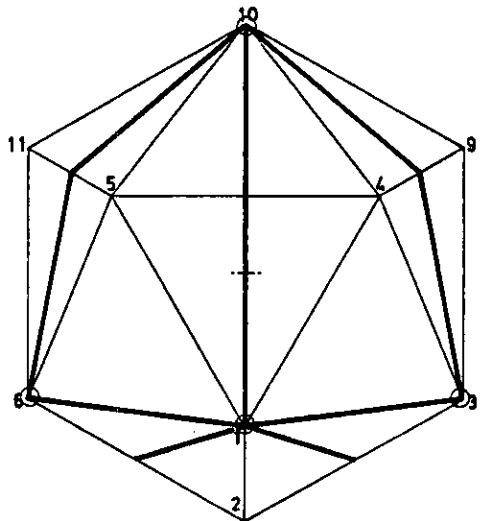
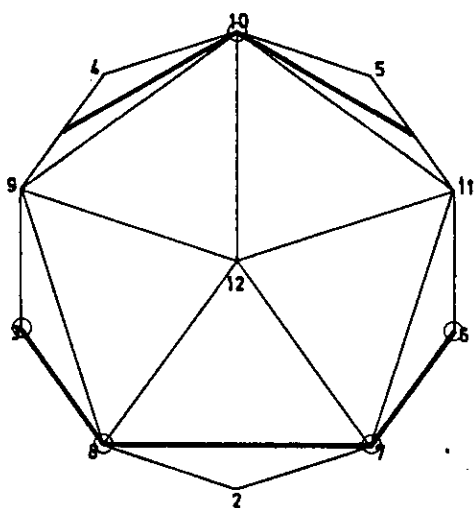
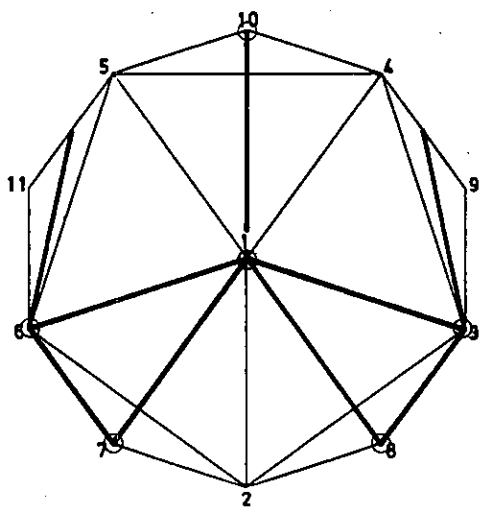
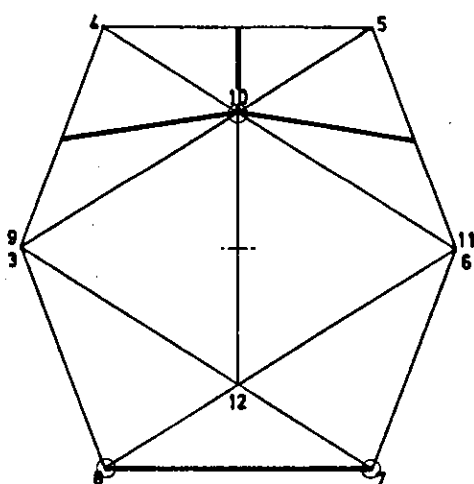
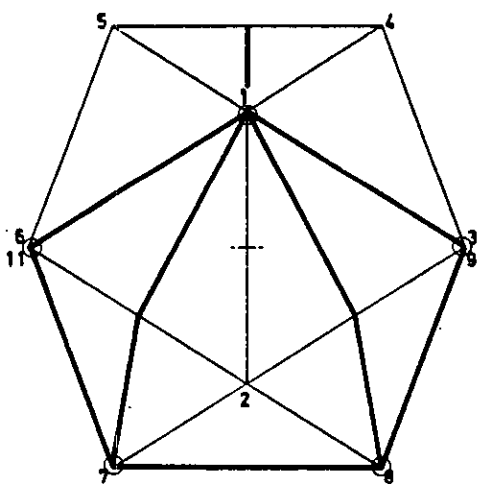
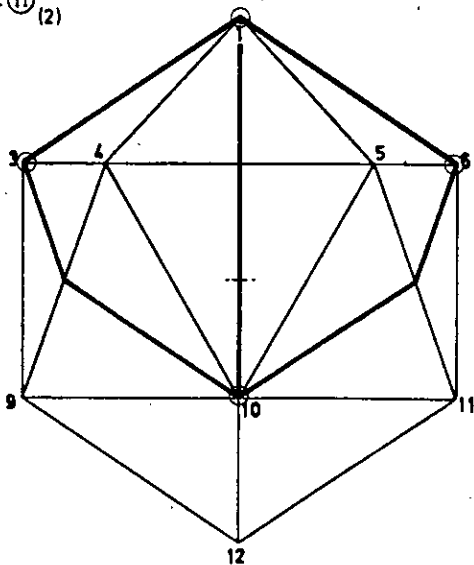
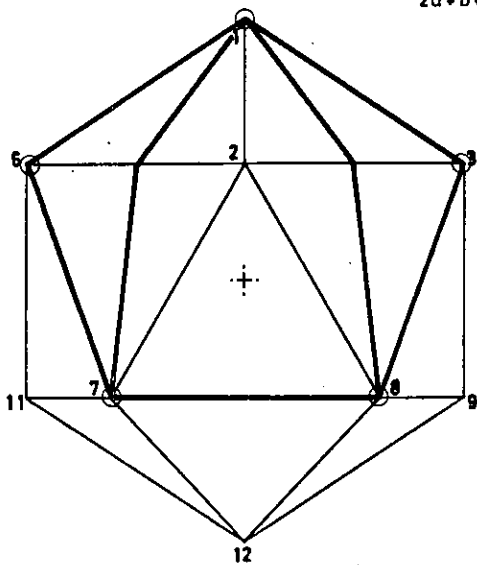
$$2a+b+2c \textcircled{1} (2)$$



$$2a+b+2c \text{ (11) (1)}$$

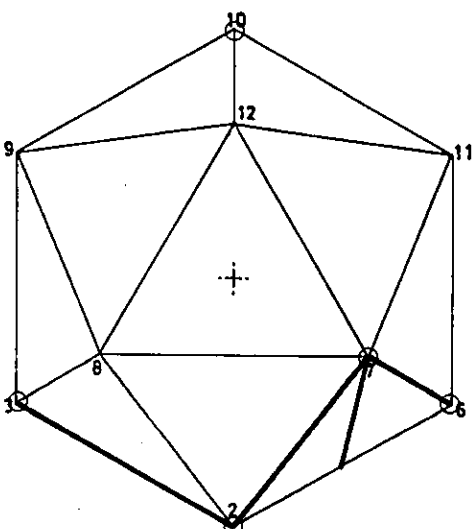
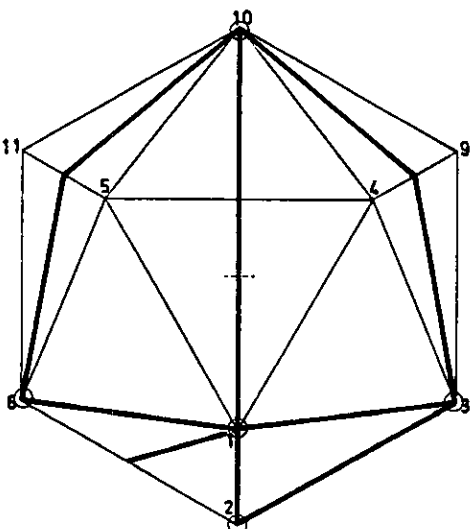
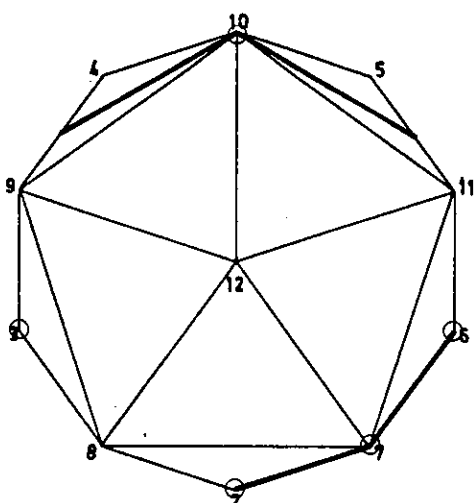
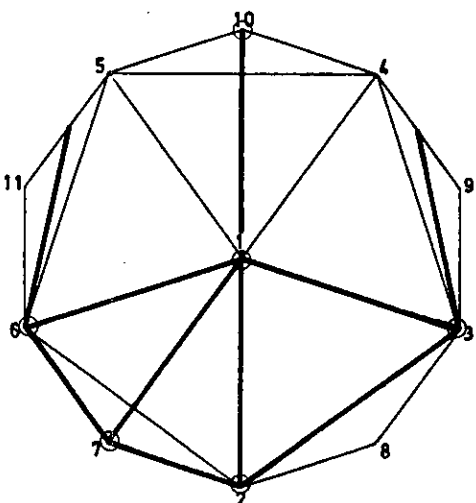
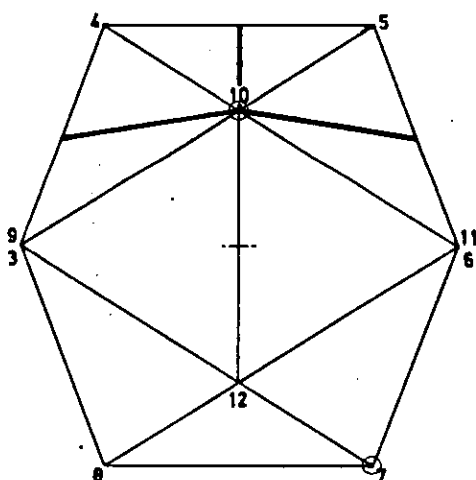
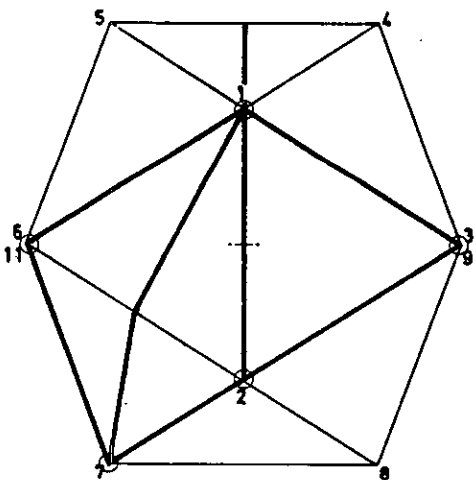
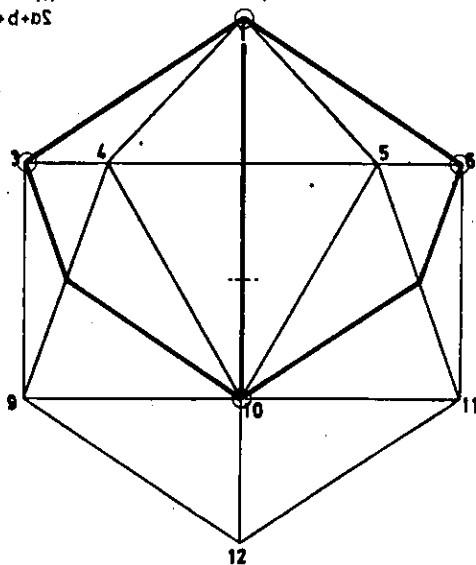
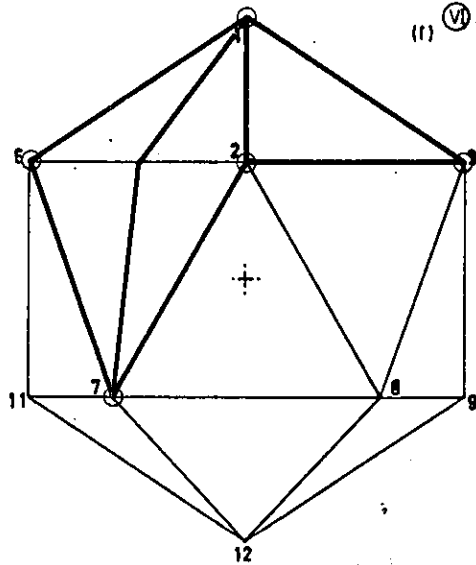


$$2a + b + 2c \text{ (1) (2)}$$

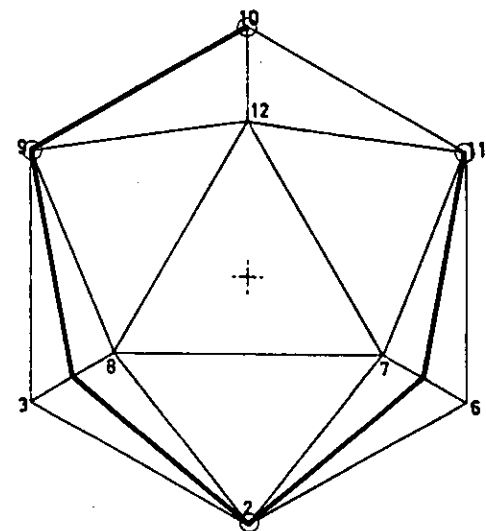
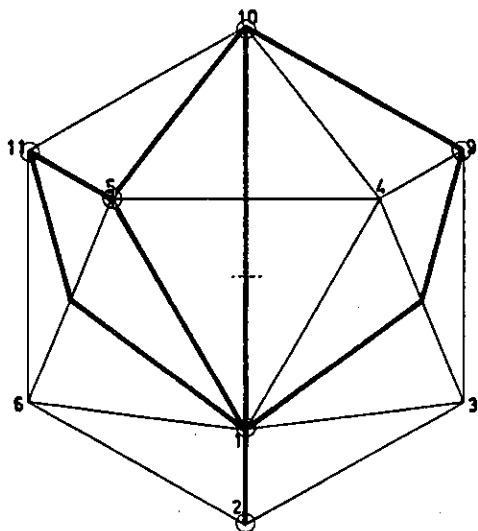
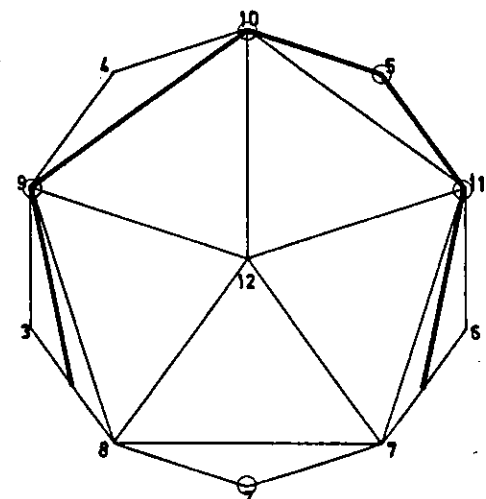
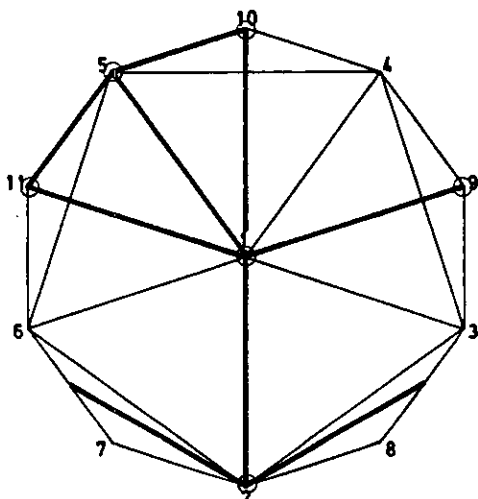
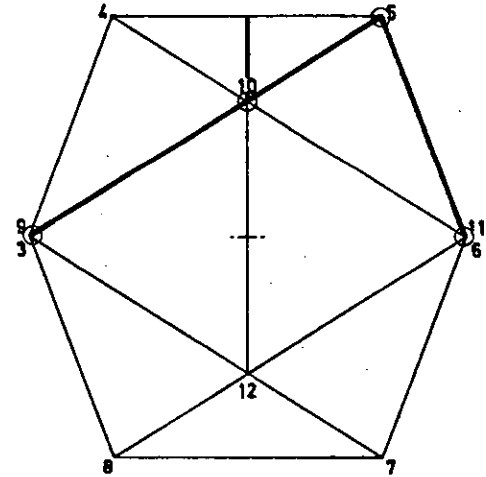
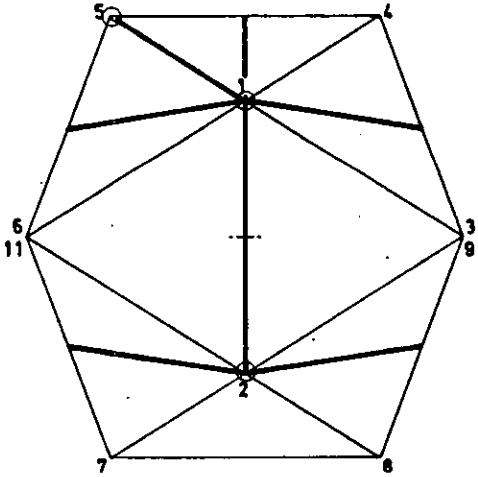
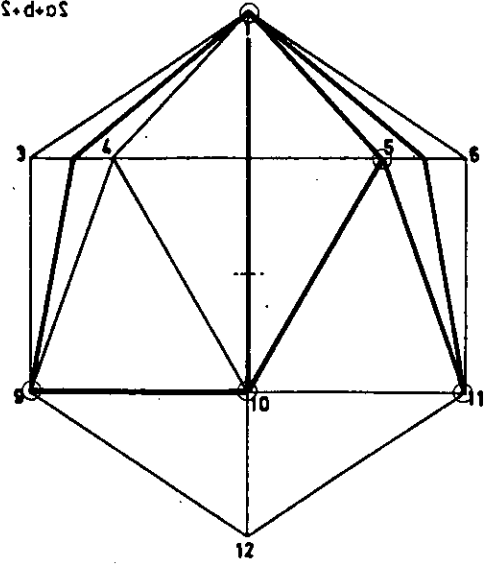
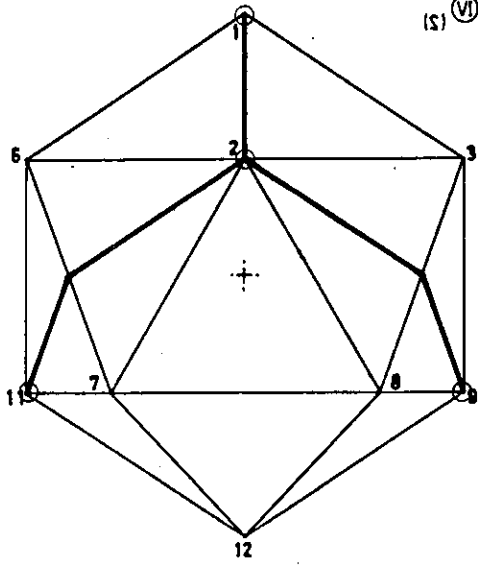


$$2a + b + 2c \text{ (III) (1)}$$

$$(1) \text{ (VI) } 3S + d + bS$$

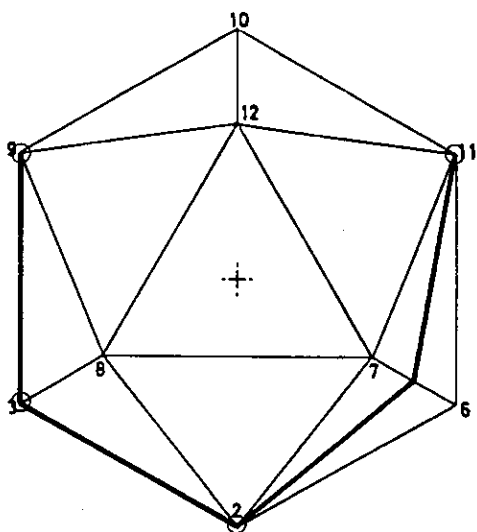
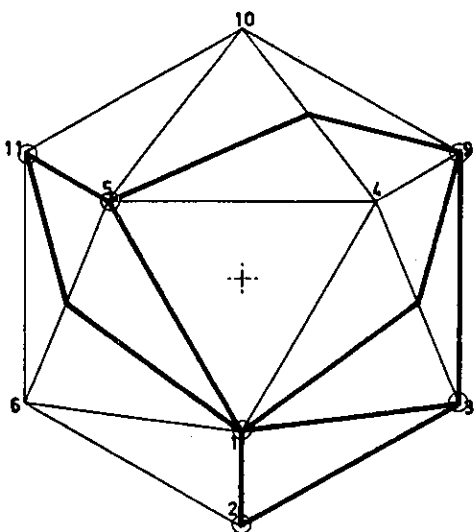
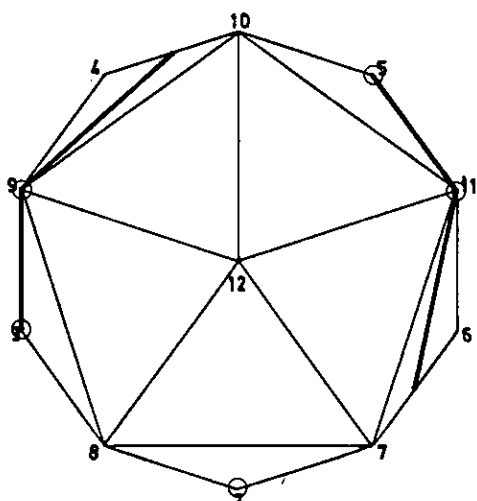
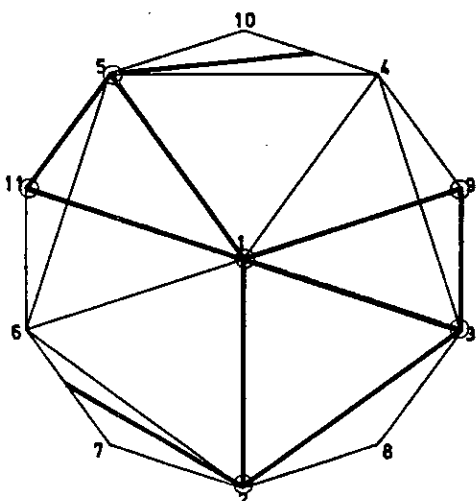
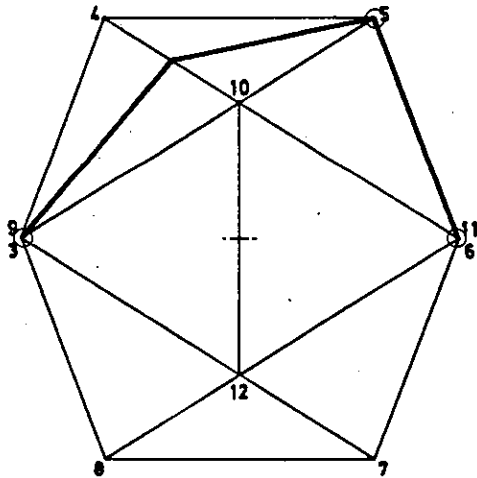
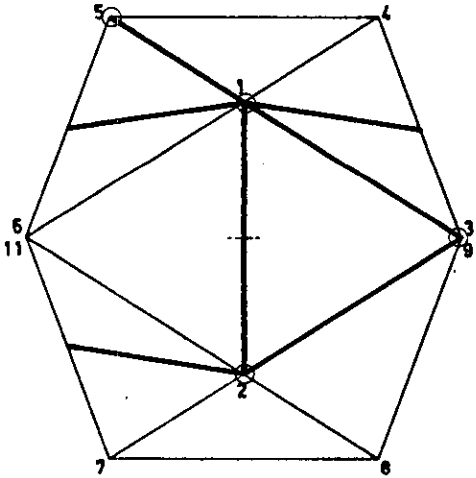
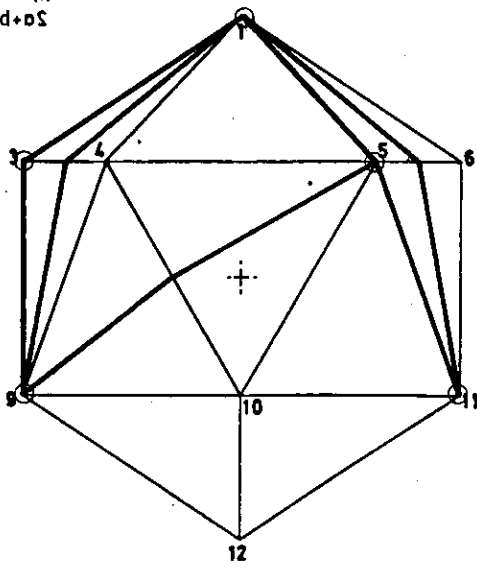
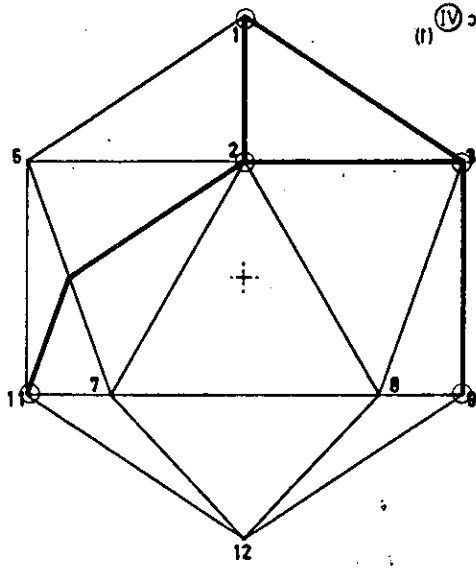


$2a+b+2c$ (III) (2)
 $(S) (VI) \rightarrow S+d+oS$



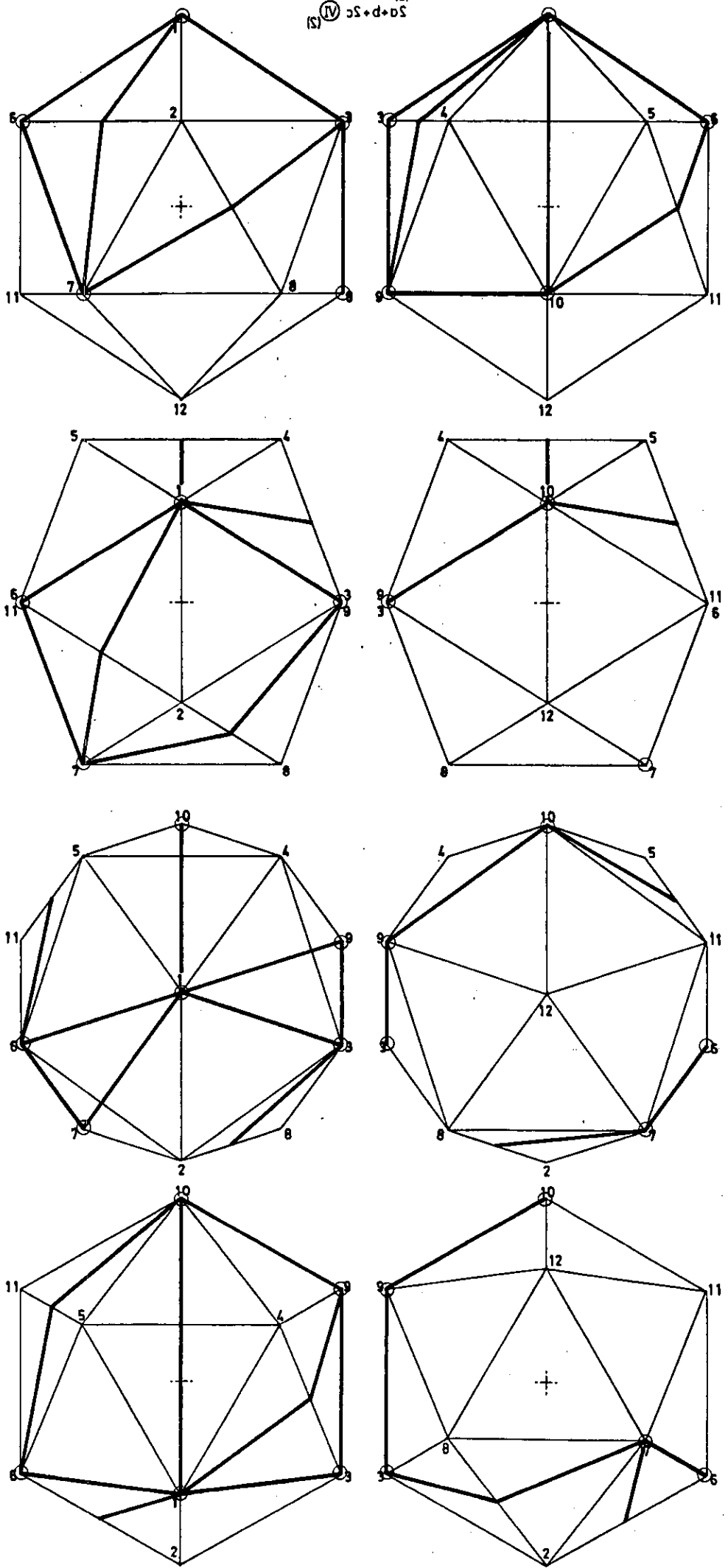
$$2a+b+2c \text{ (V)} \quad (1)$$

$$3a+b+5c \text{ (IV)} \quad (1)$$

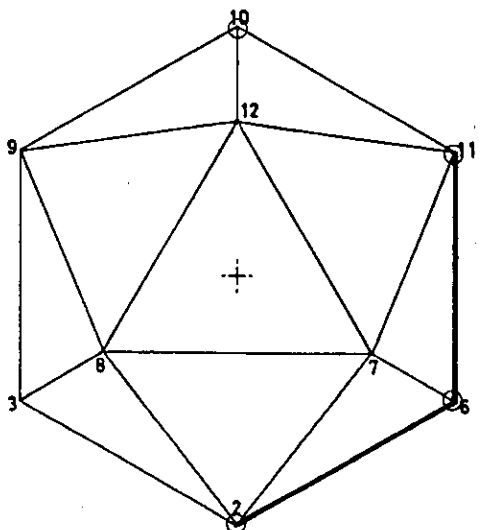
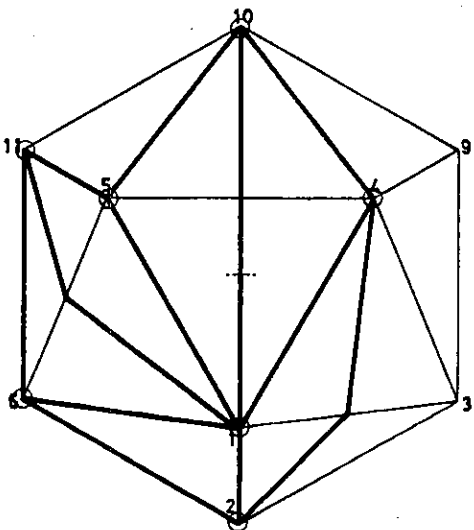
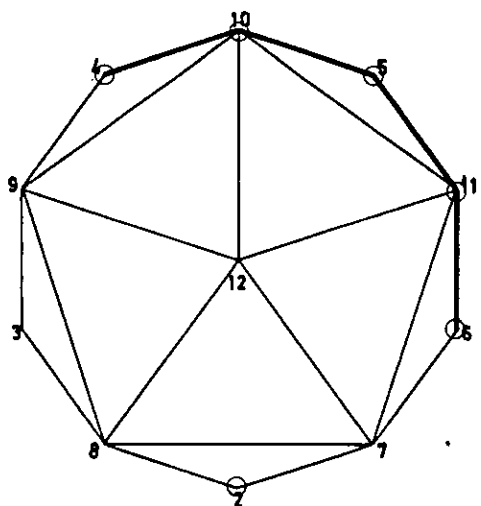
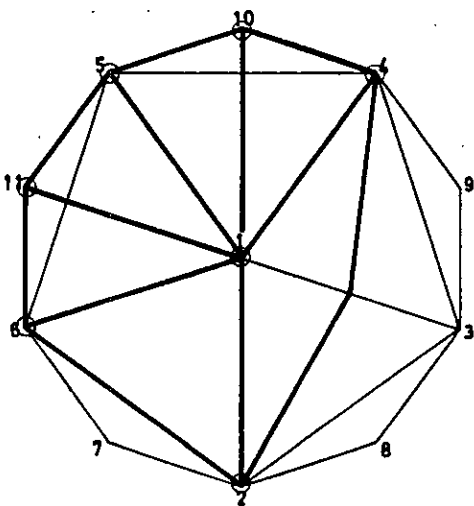
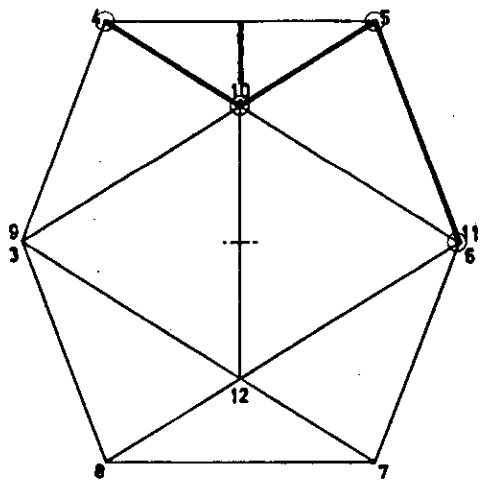
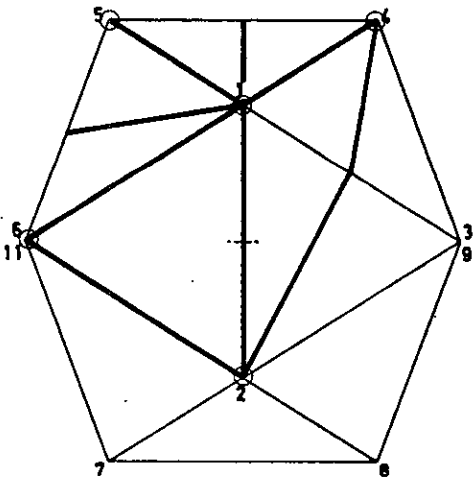
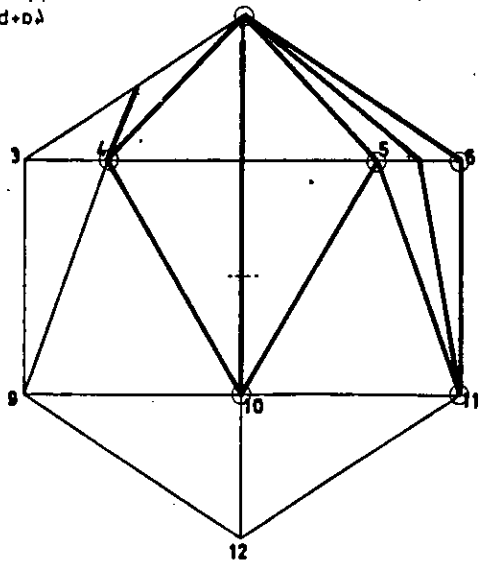
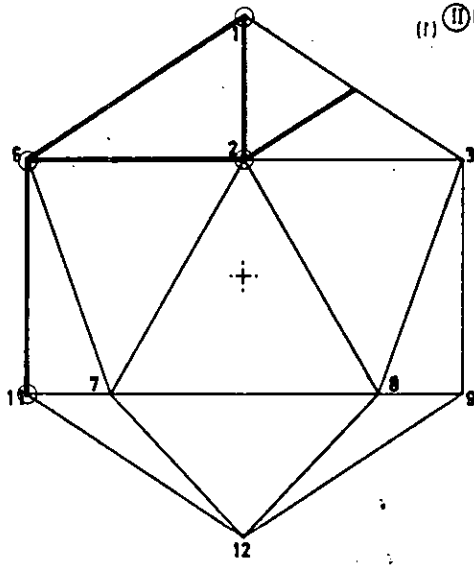


$$2a+b+2c \text{ (V) } (2)$$

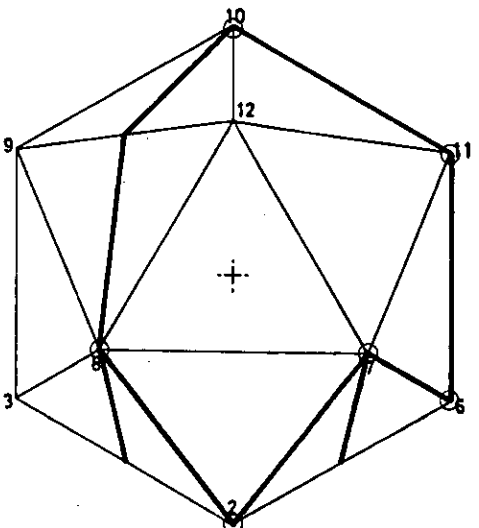
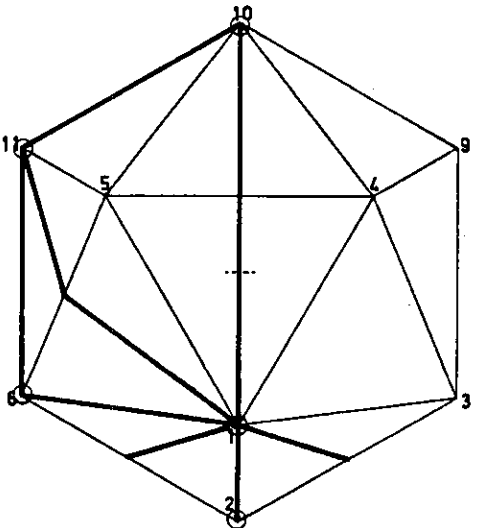
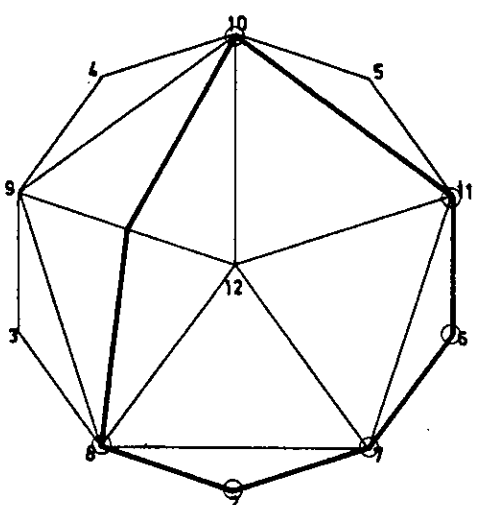
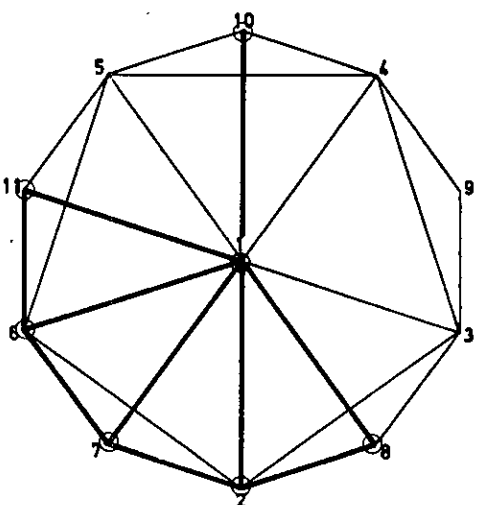
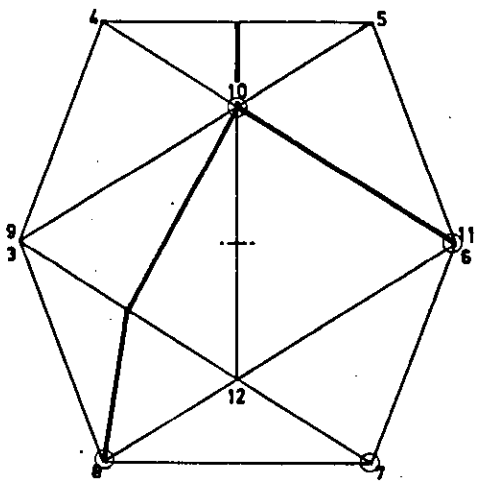
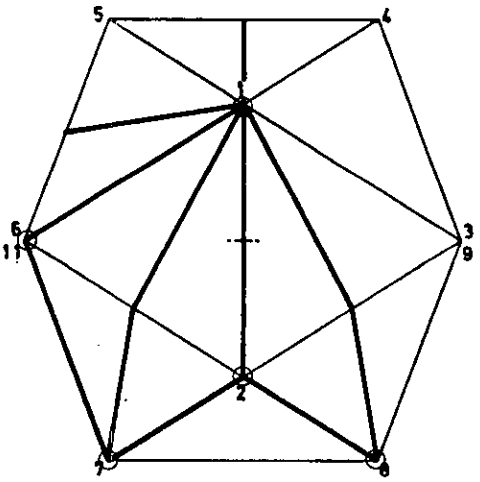
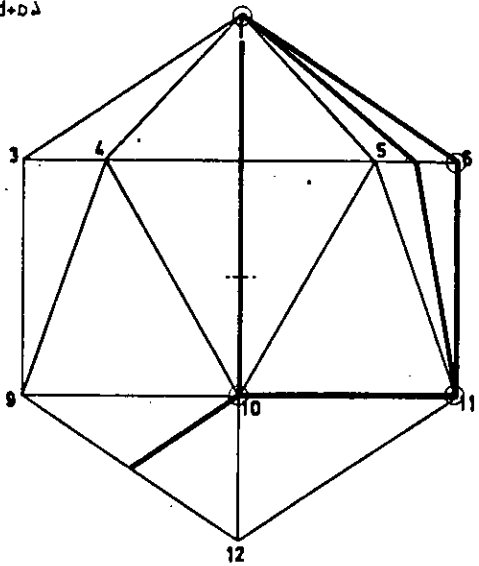
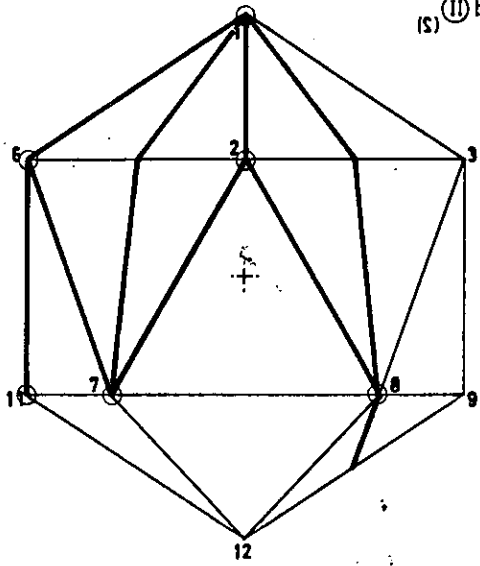
$$(3) \text{ (IV) } cS+d+bS$$



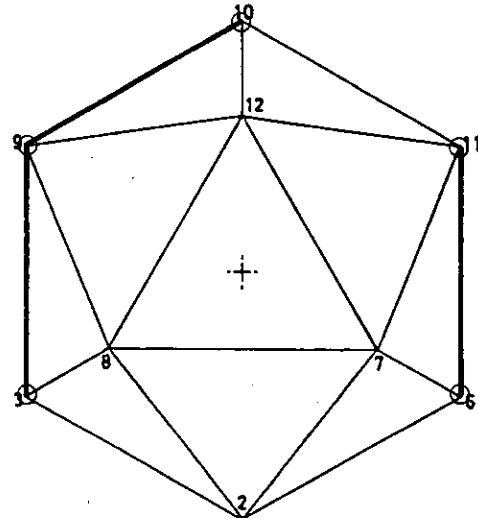
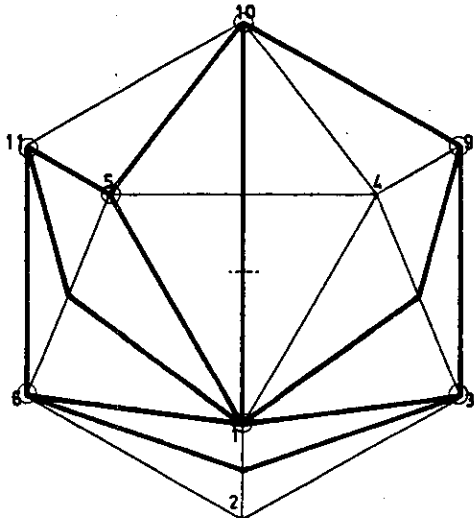
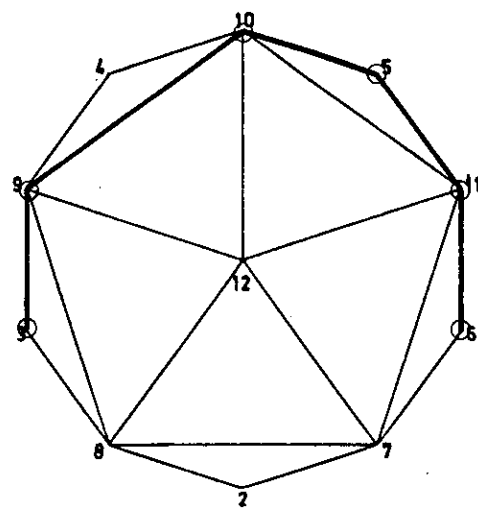
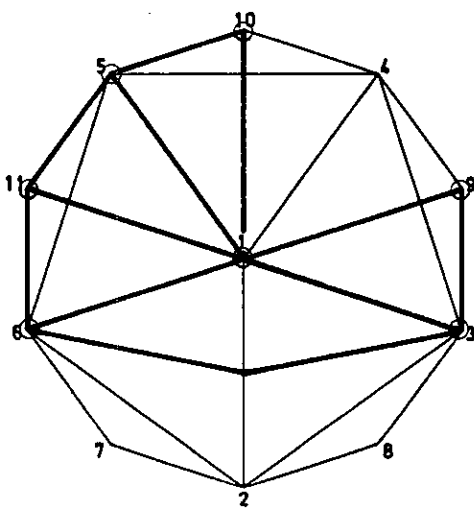
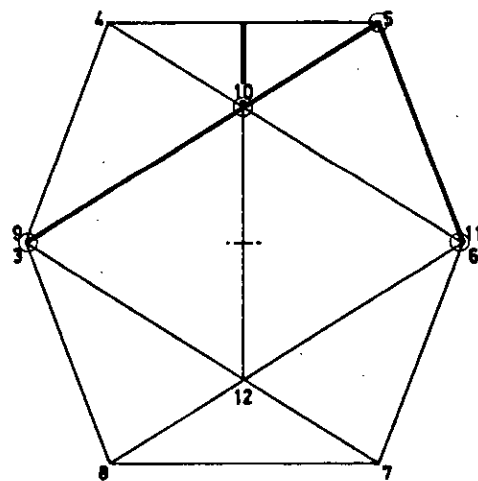
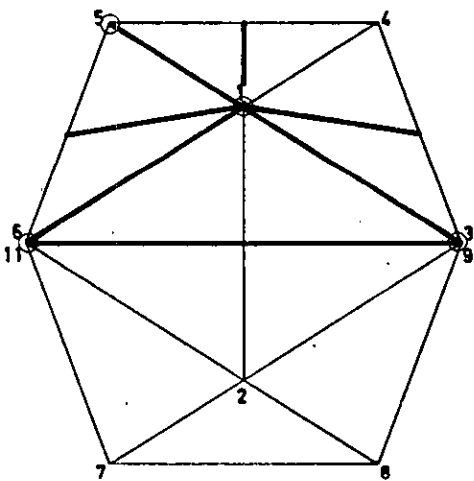
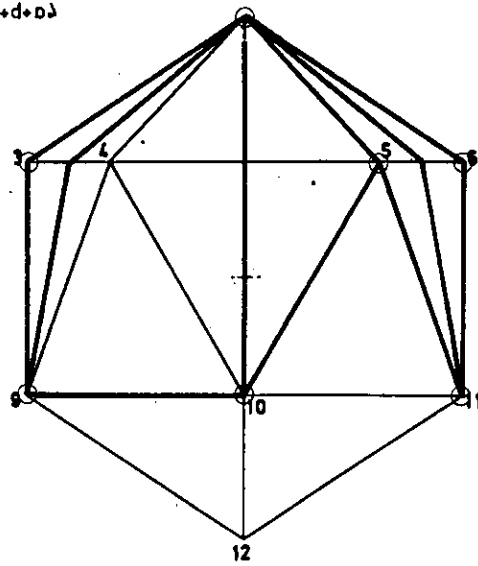
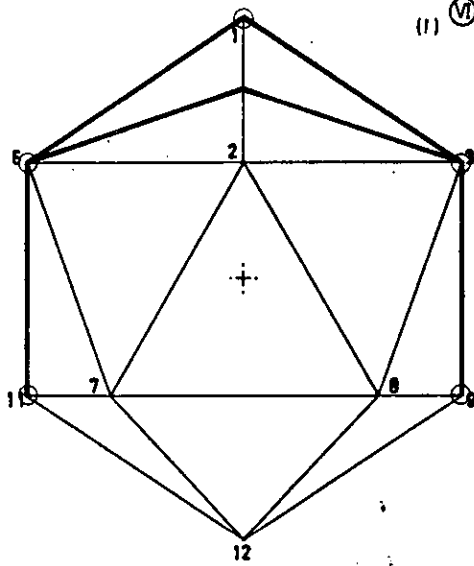
$4a+b+d$ (I)
 (II) $b+d+0\lambda$



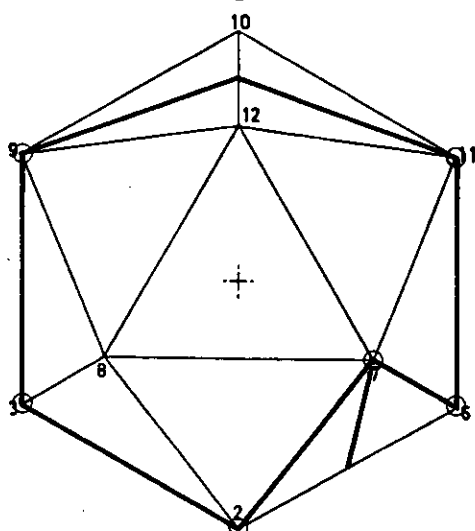
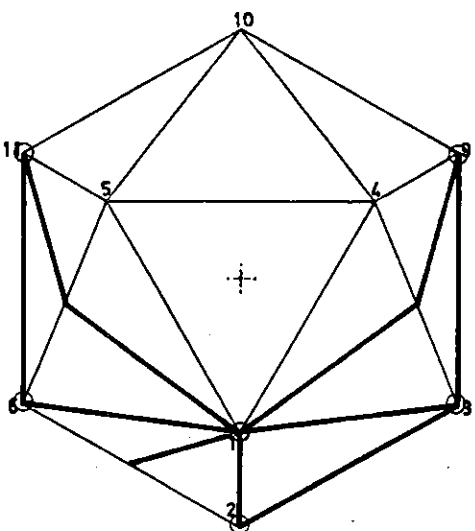
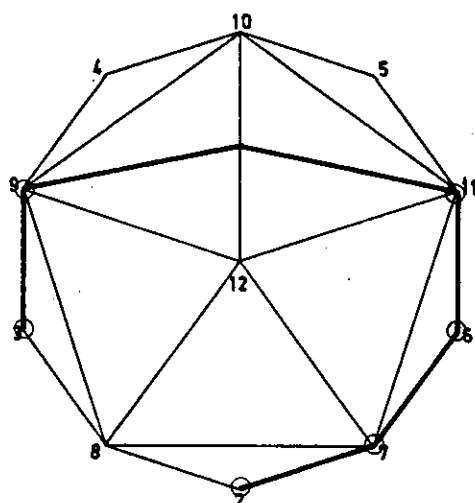
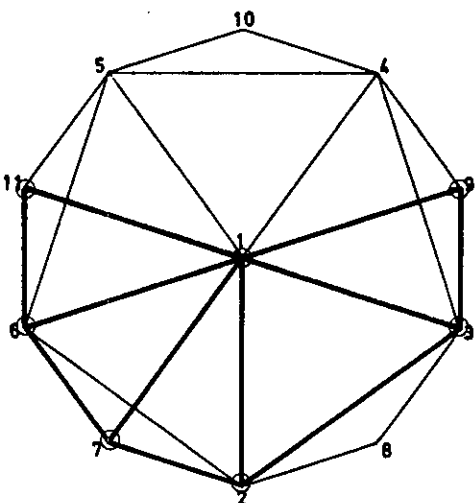
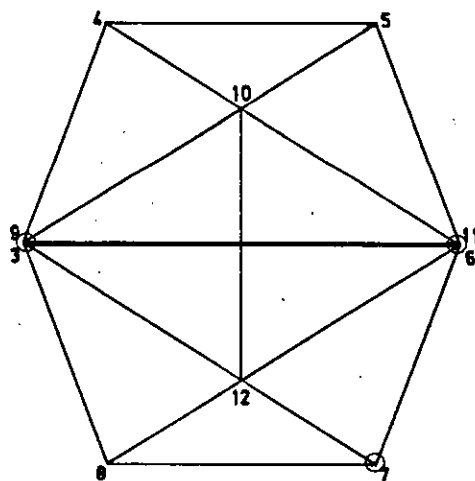
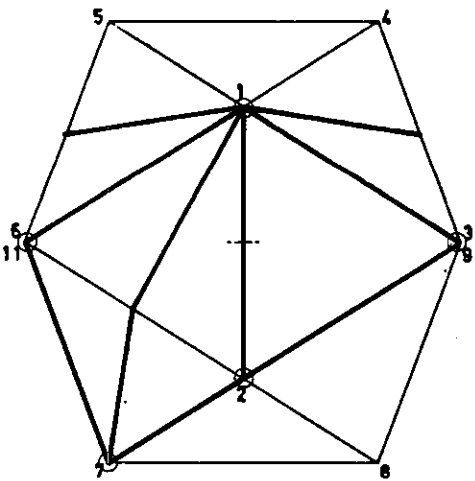
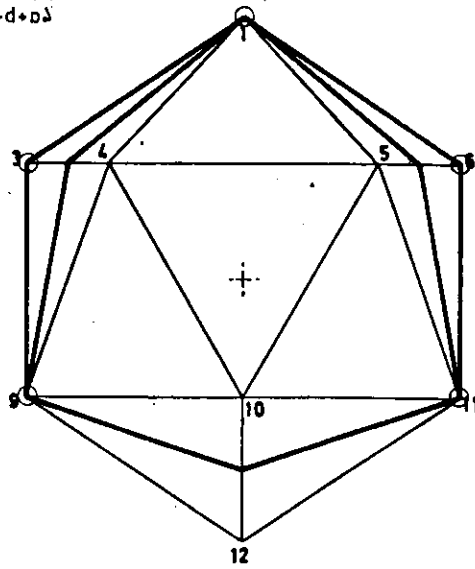
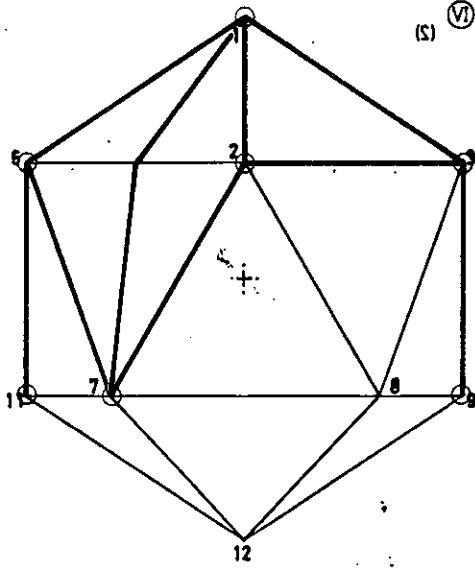
$4a+b+d$ (I) (2)
 (S) (II) $b+d+0\lambda$



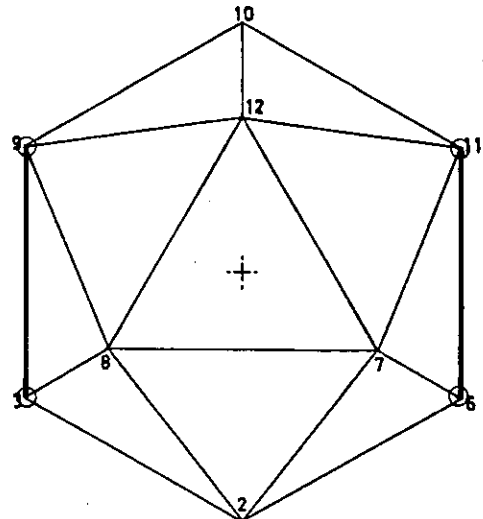
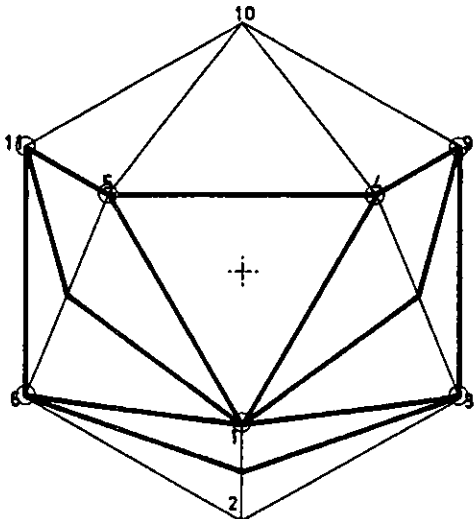
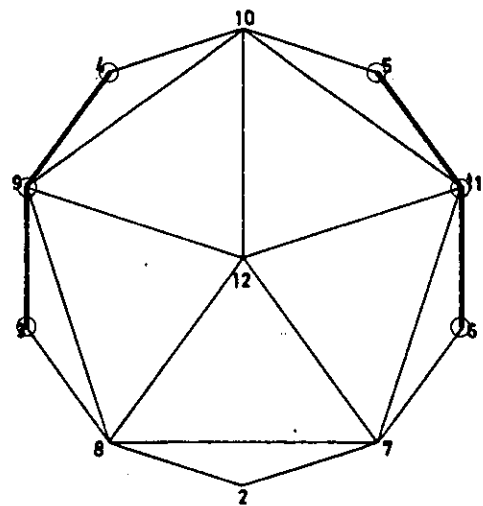
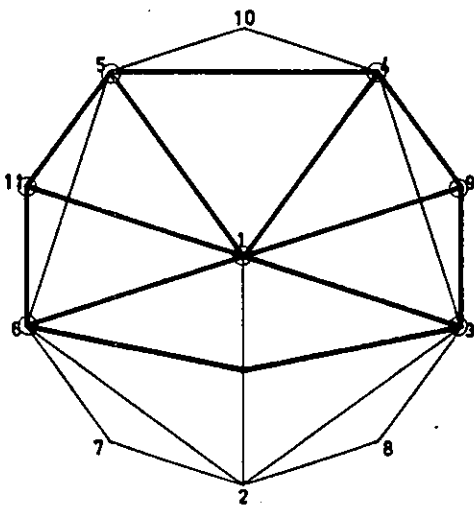
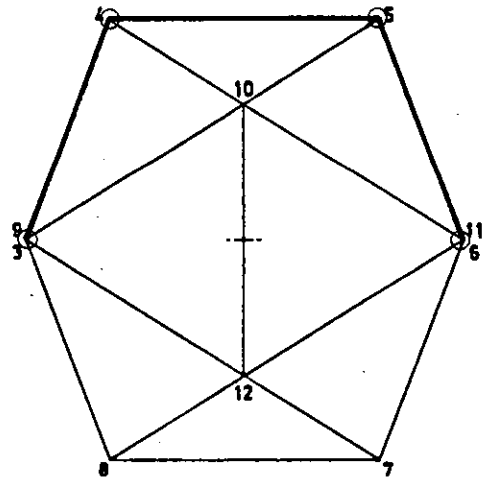
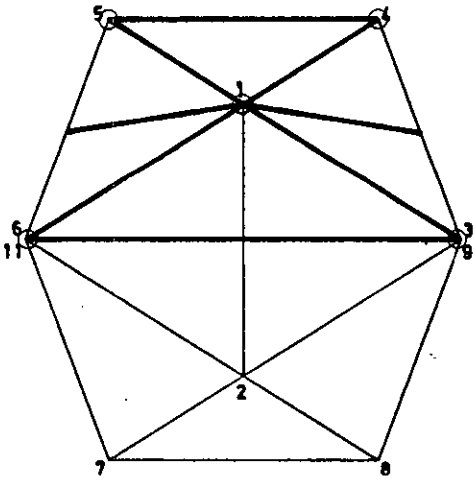
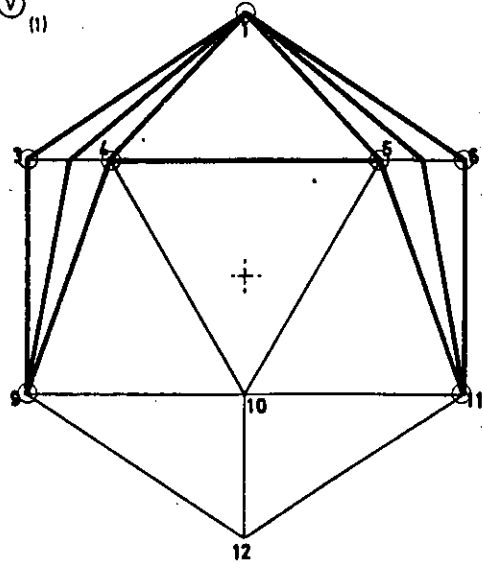
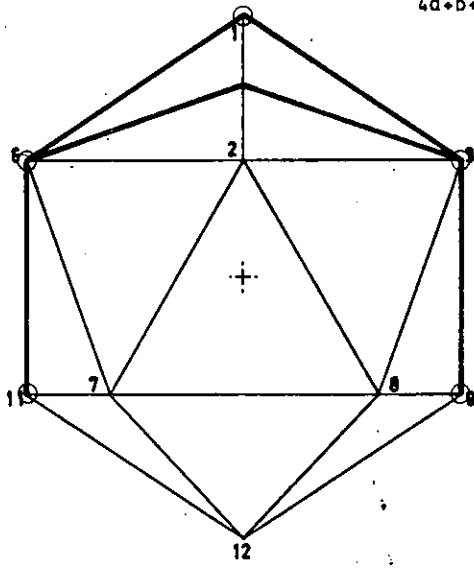
$4a+b+d$ (III) (1)
 (1) (VII) $b+d+0d$



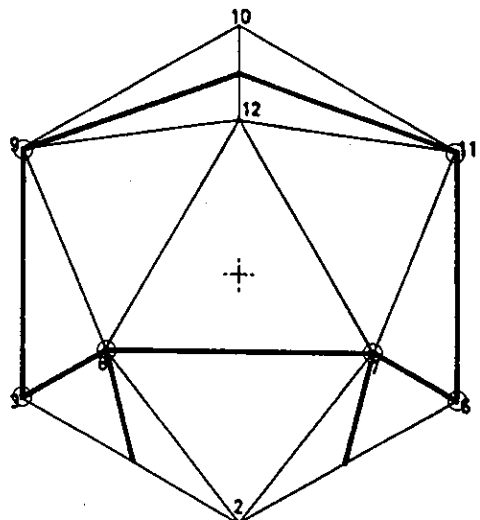
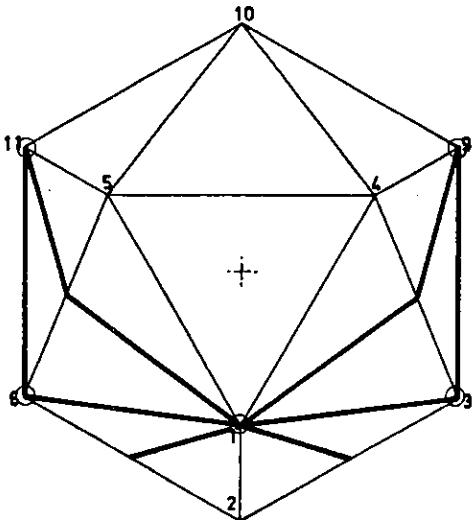
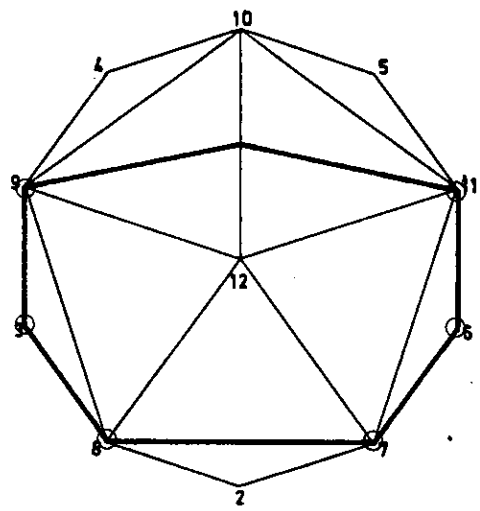
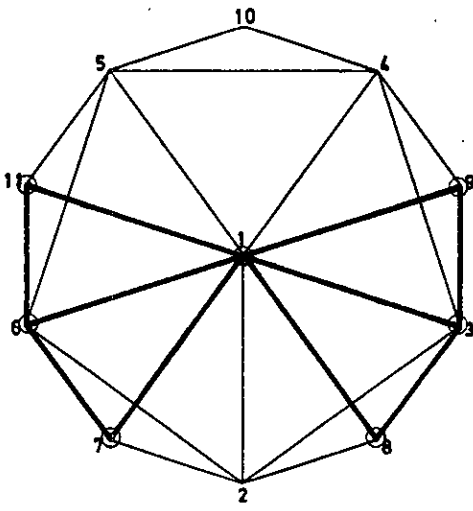
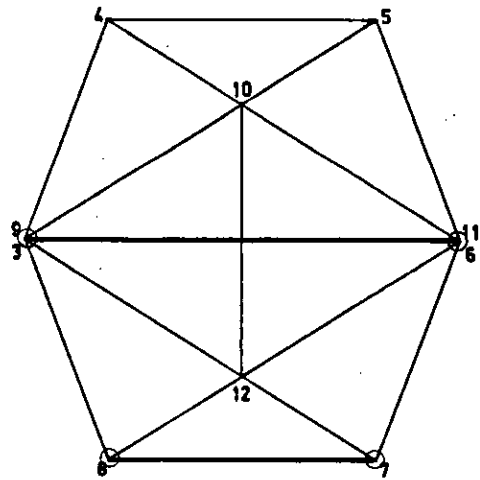
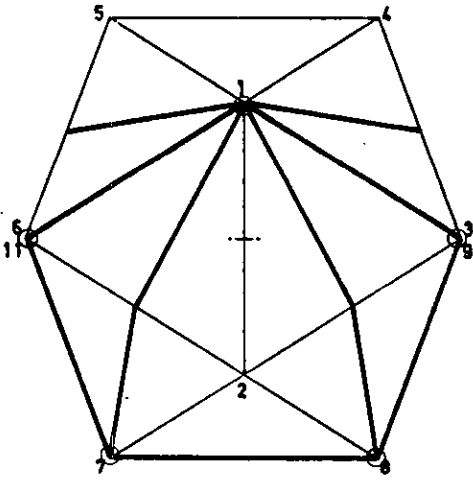
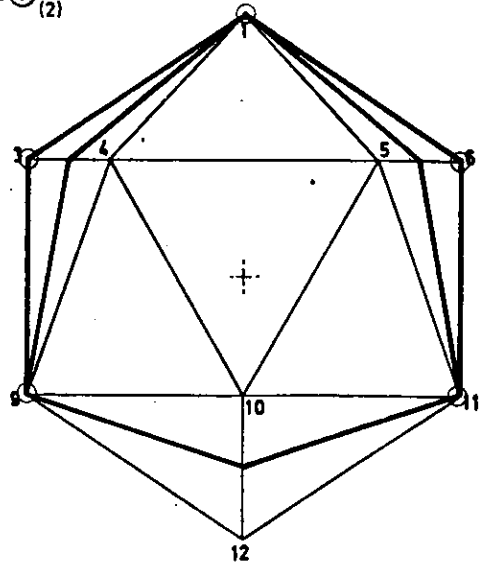
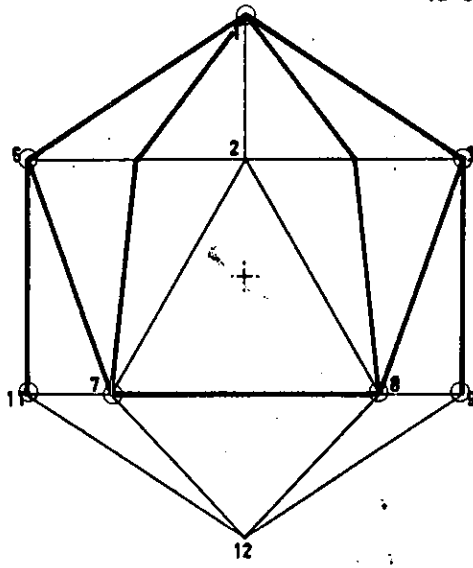
$4a+b+d$ (III) (2)
 (S) (VI) $b+d+d^2$



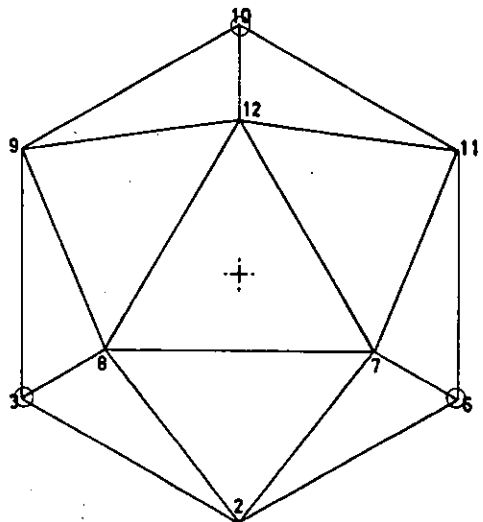
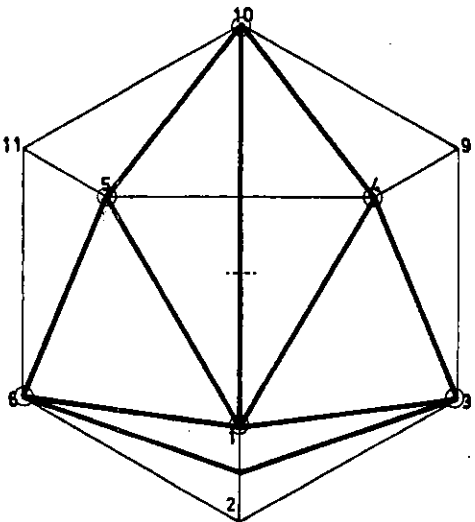
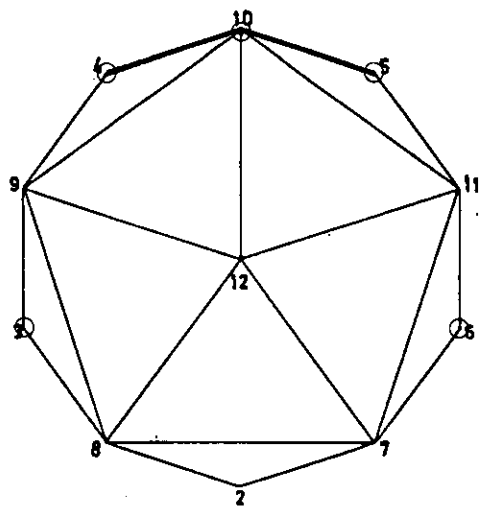
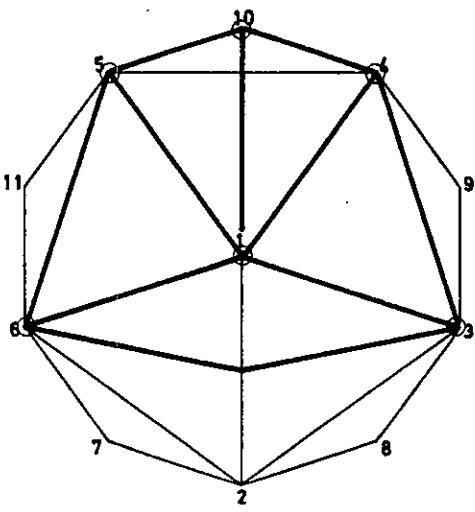
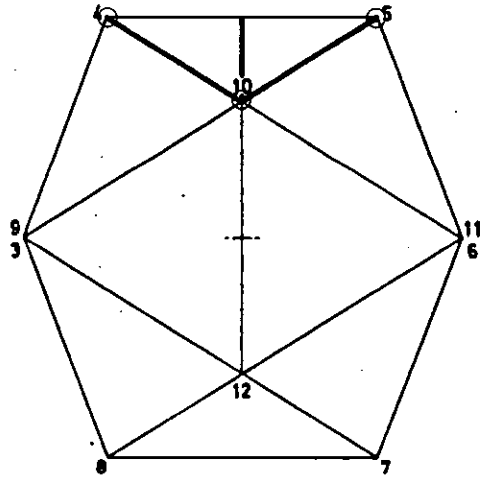
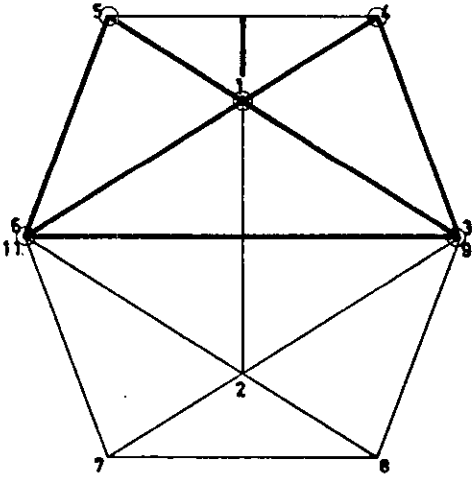
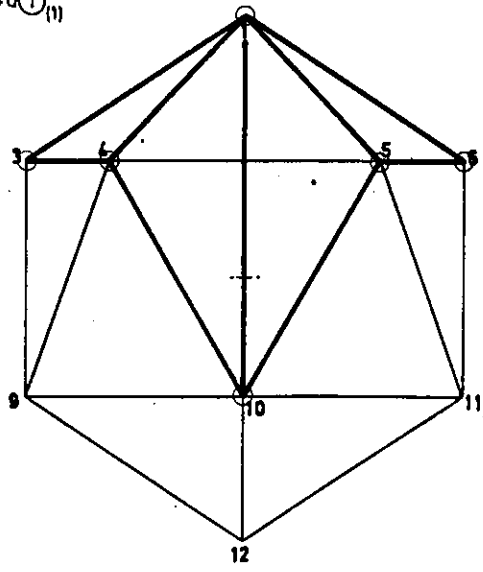
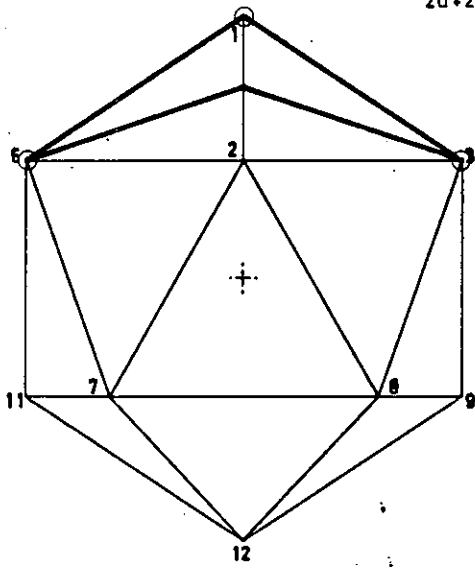
$$4a+b+d \text{ (V) (1)}$$



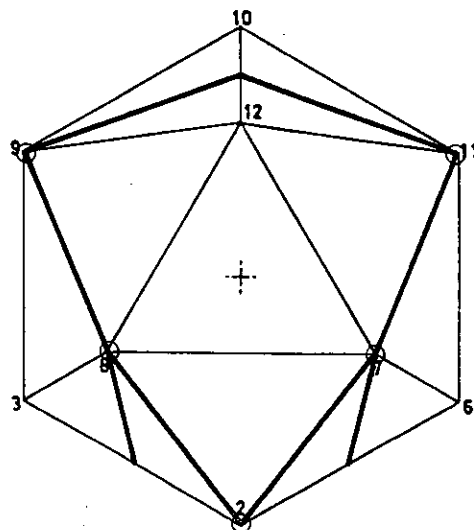
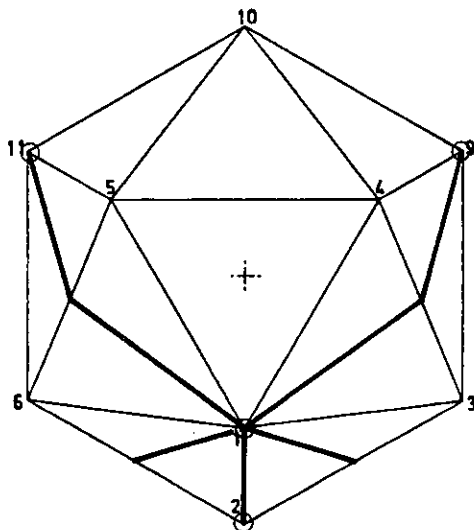
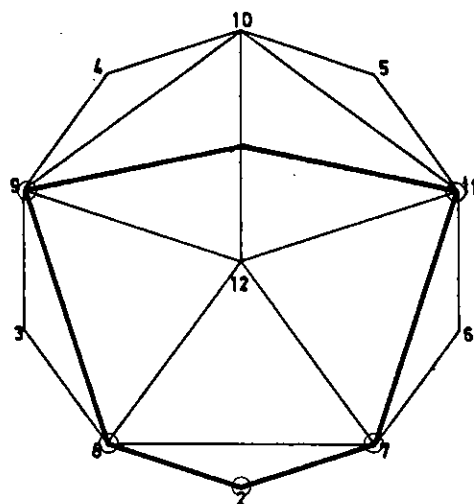
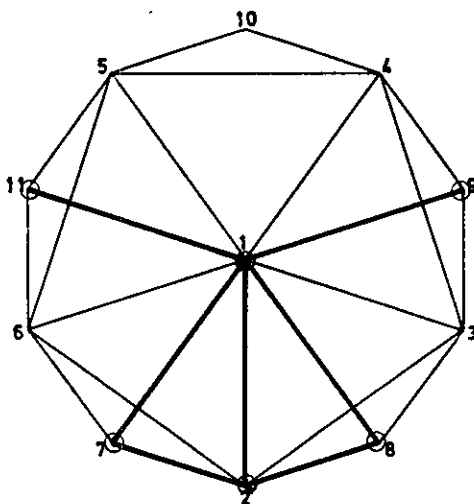
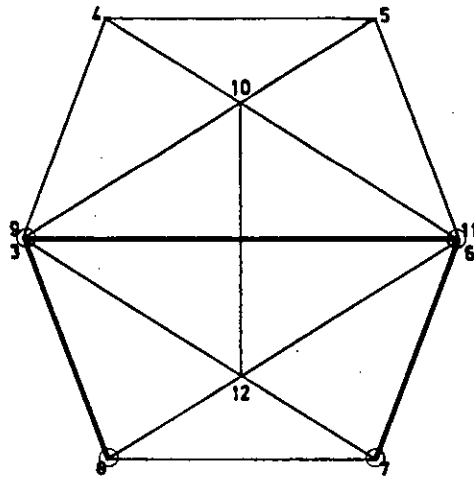
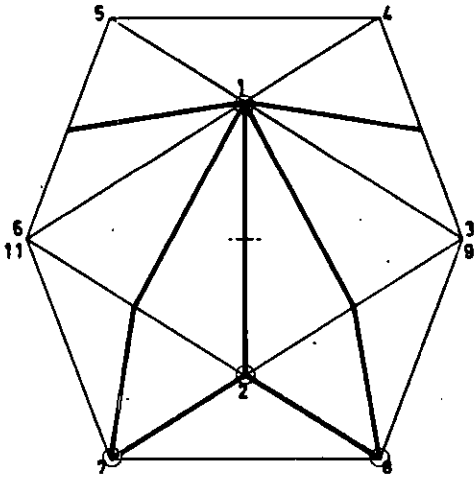
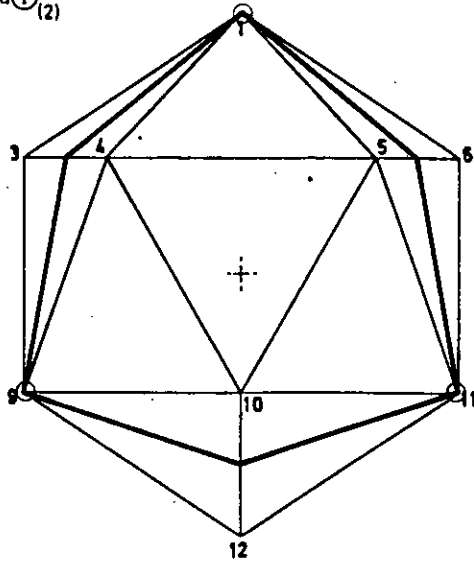
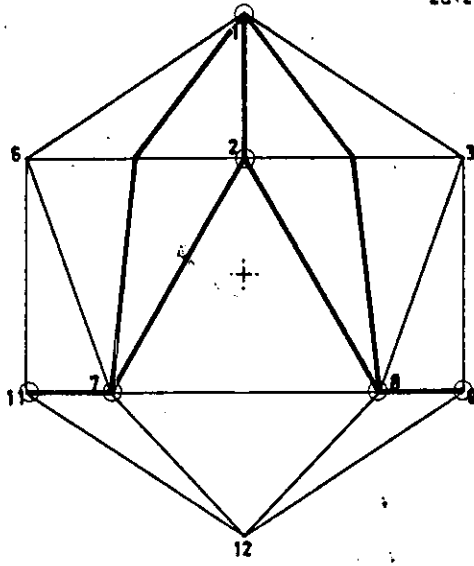
$$4a+b+d \textcircled{V} (2)$$



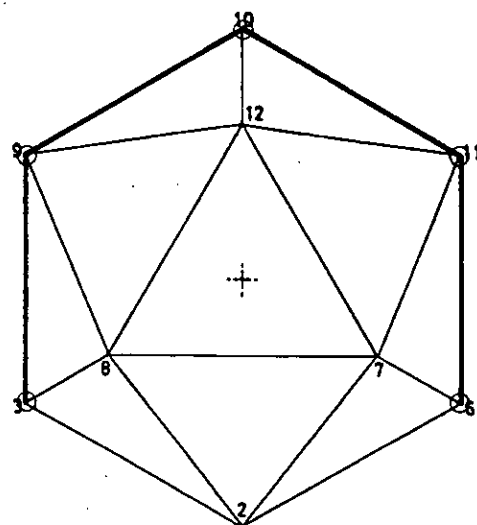
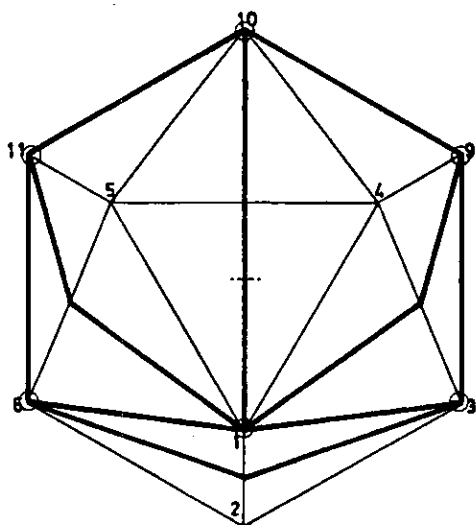
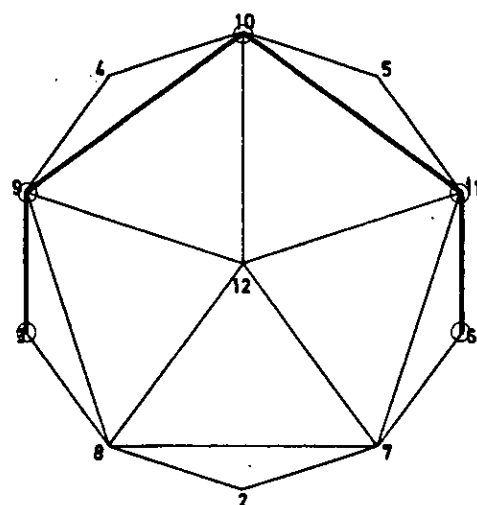
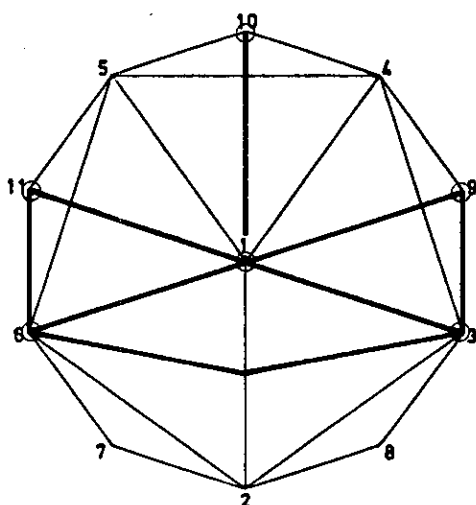
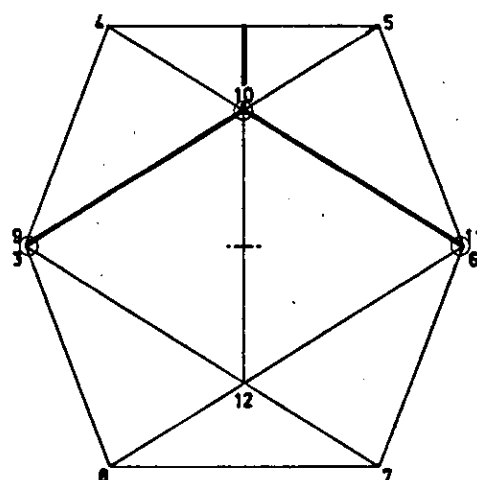
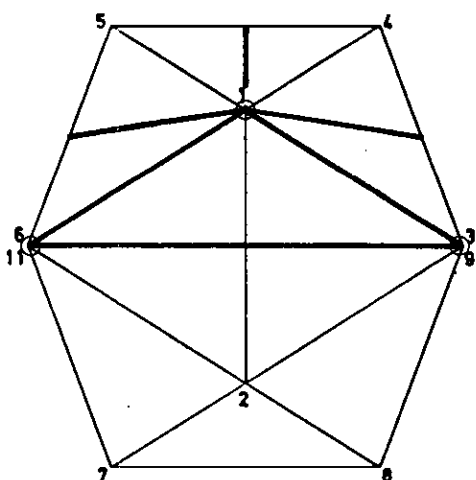
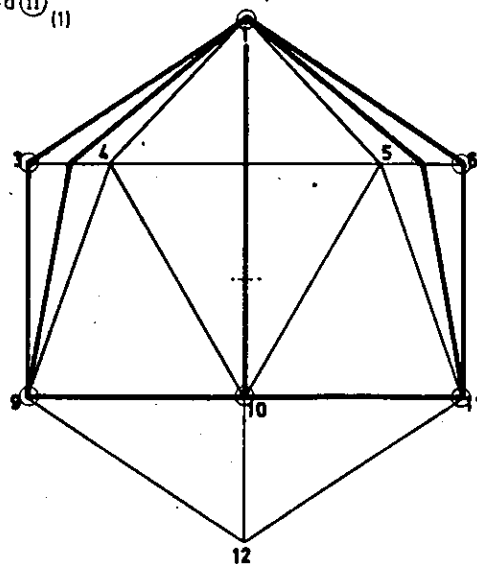
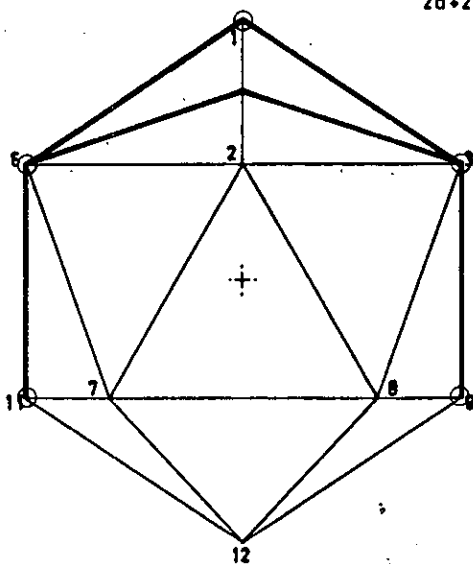
$$2a + 2b + d \textcircled{1} \textcircled{11}$$



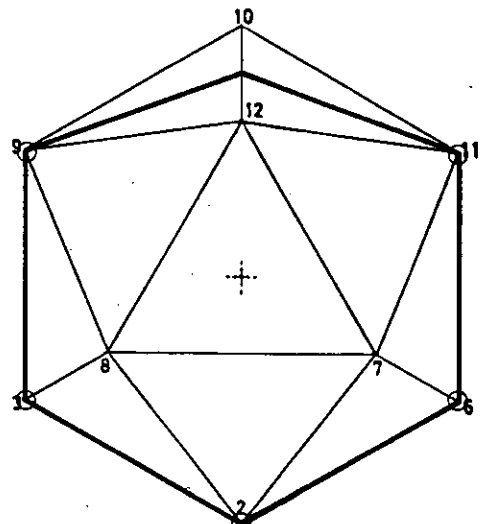
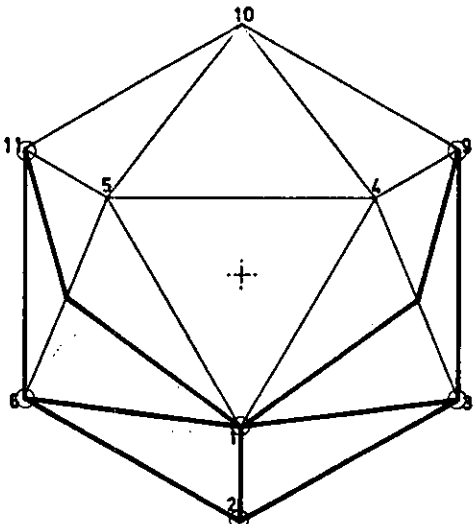
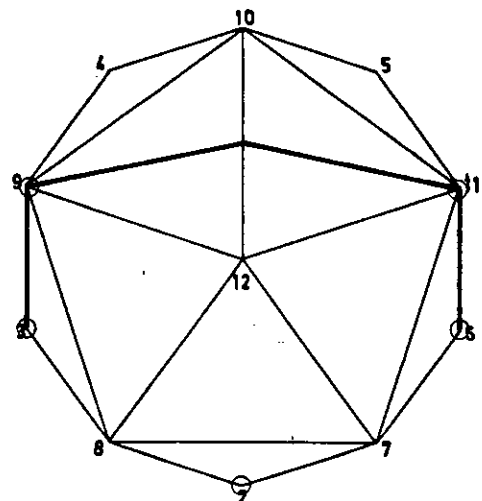
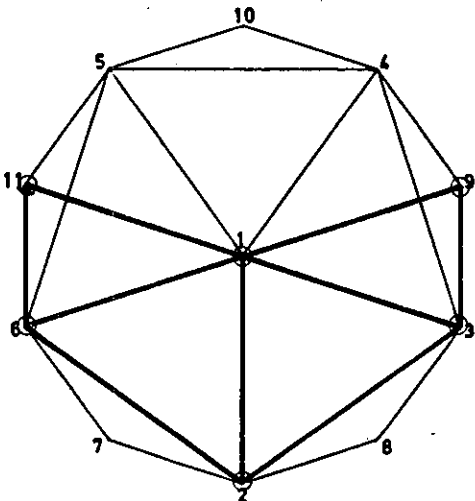
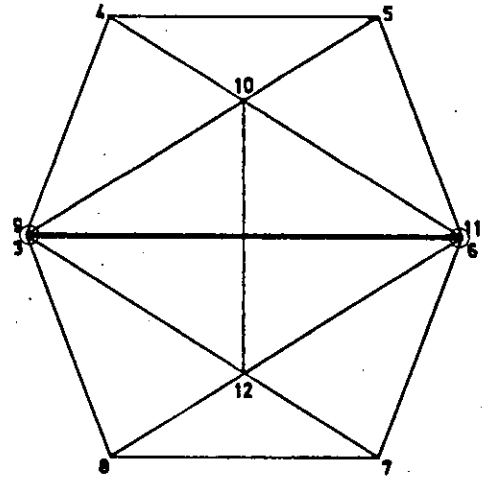
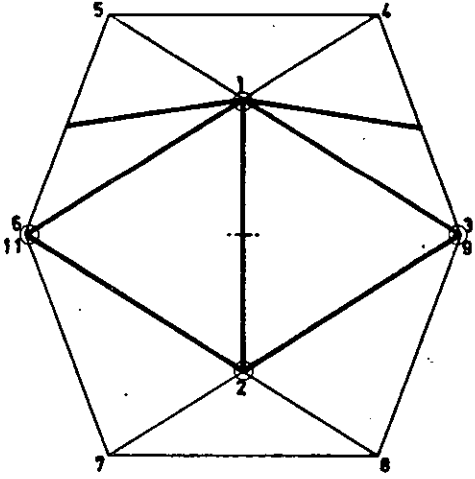
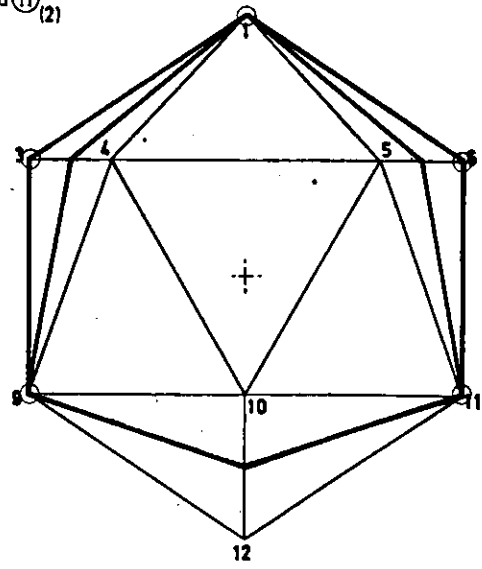
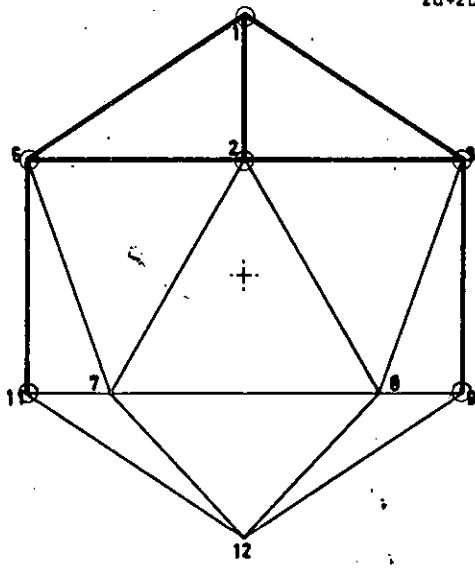
$$2a+2b+d \textcircled{1} (2)$$



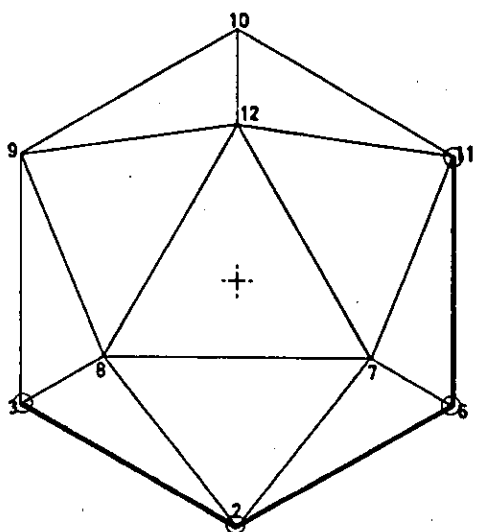
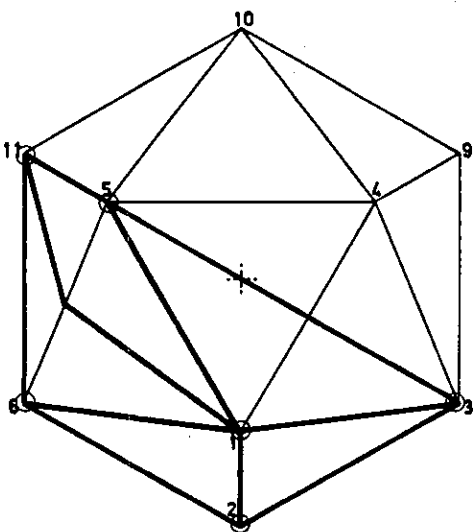
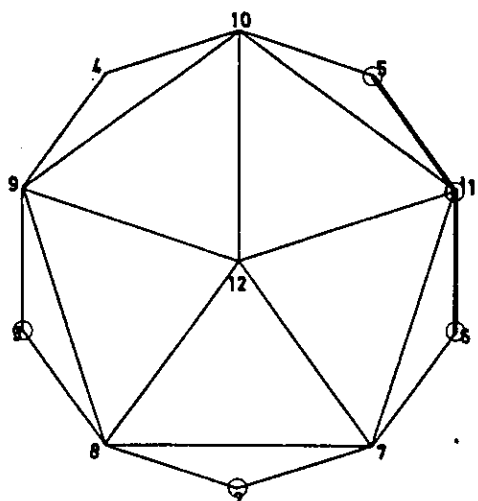
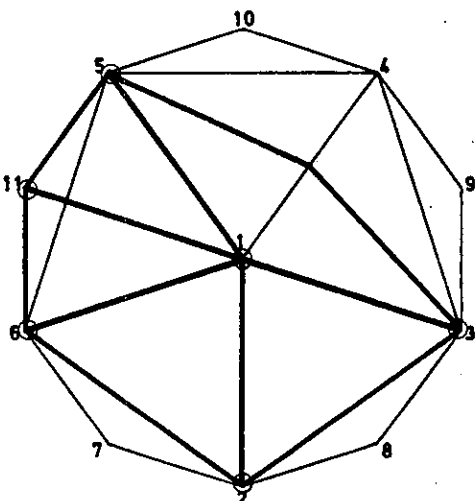
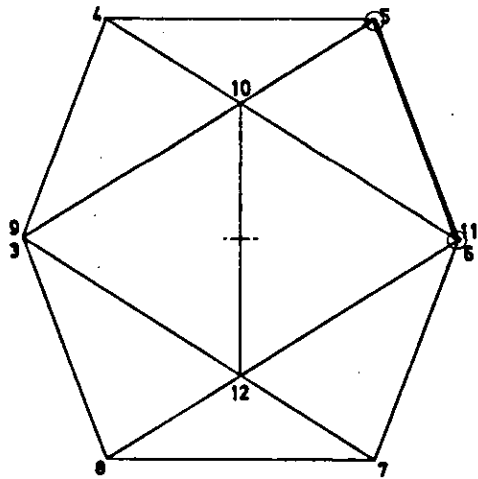
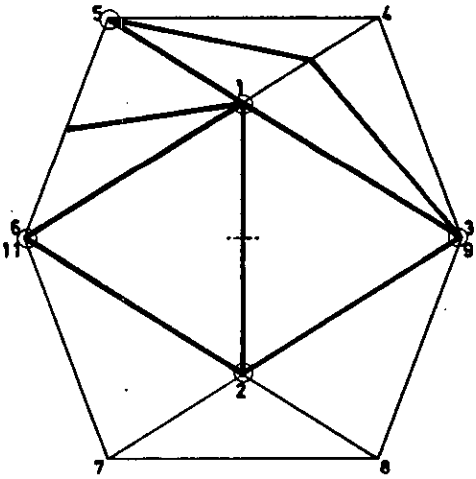
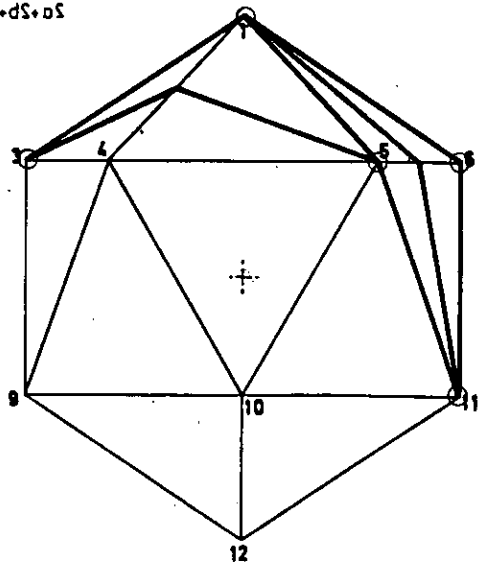
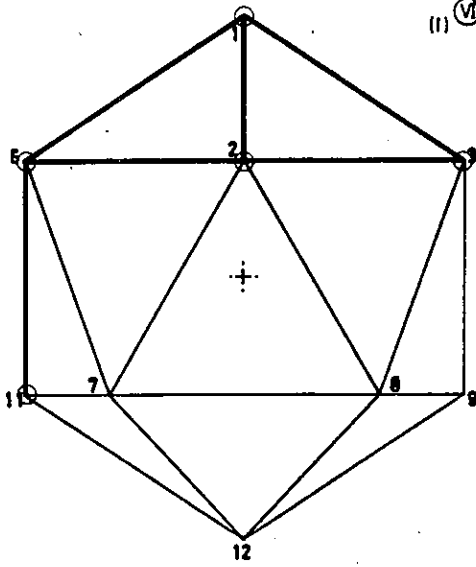
$$2a+2b+d \text{ (II) (1)}$$



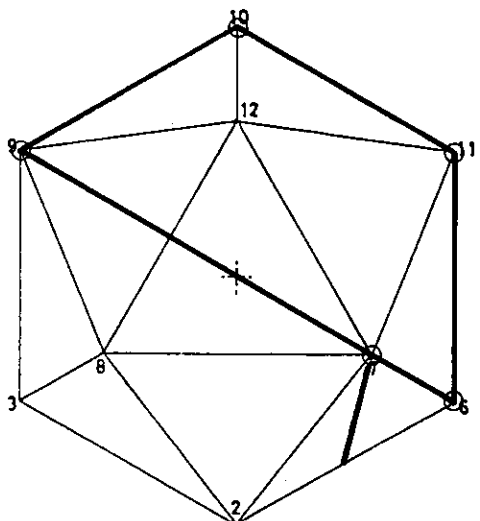
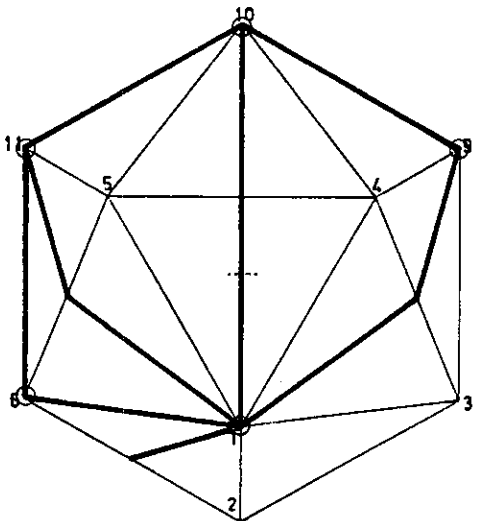
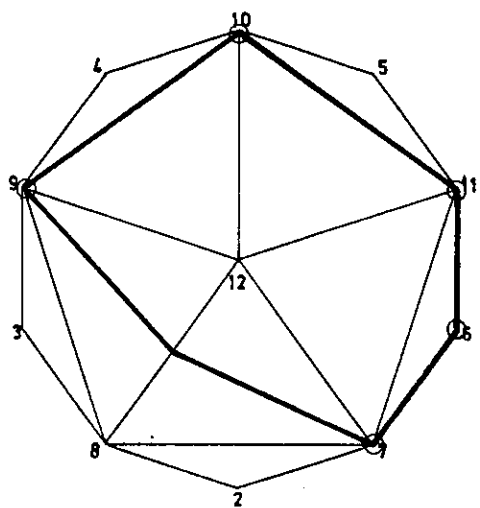
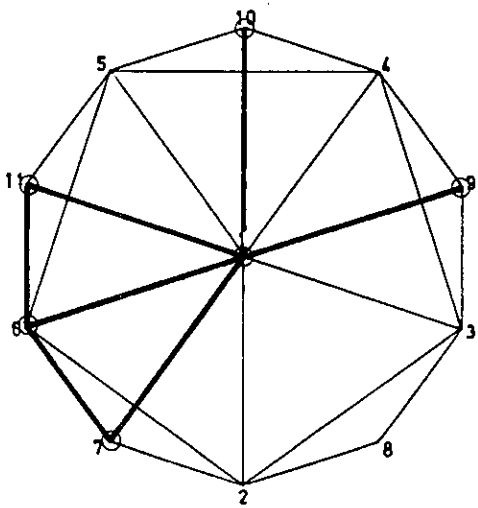
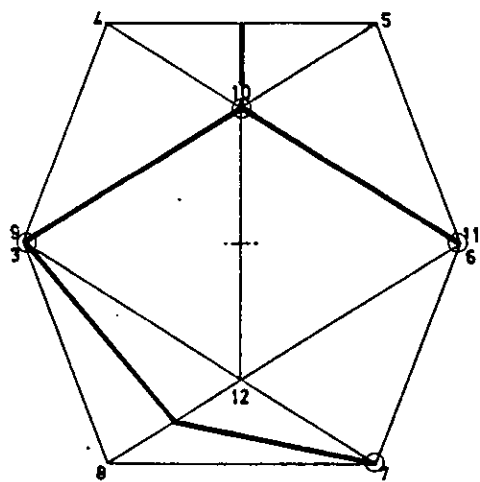
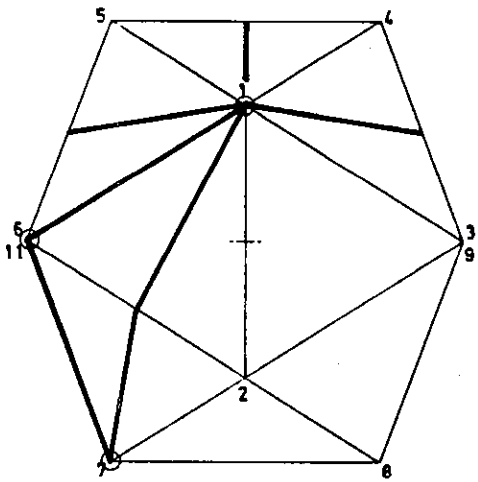
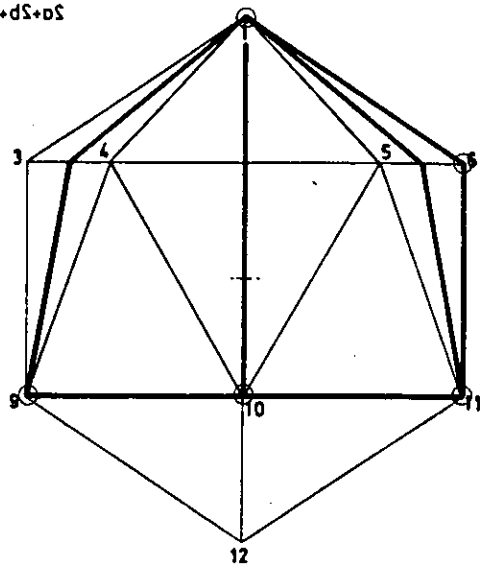
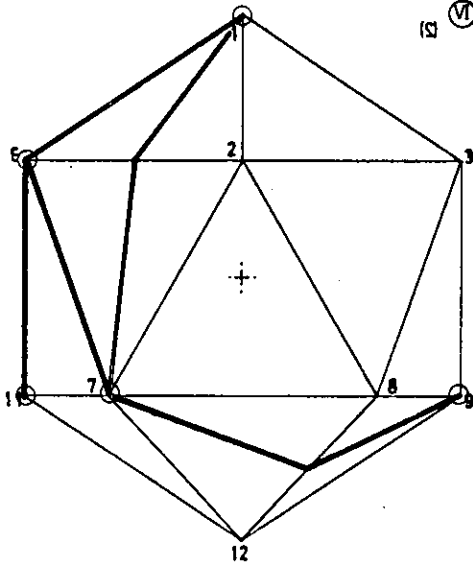
$$2a+2b+d \textcircled{11} (2)$$



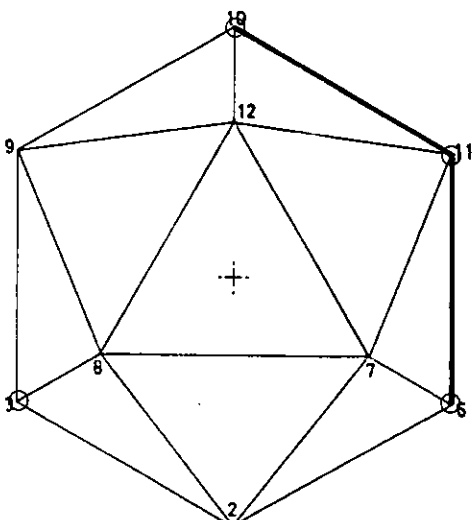
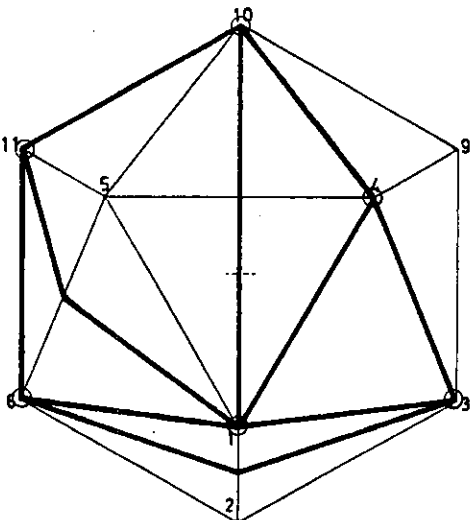
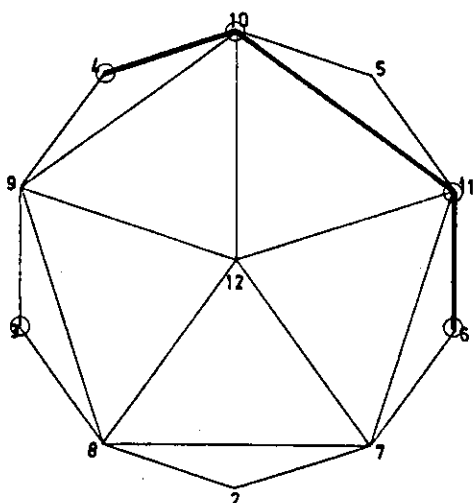
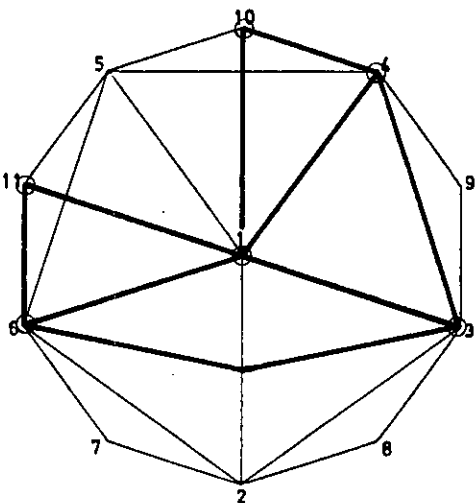
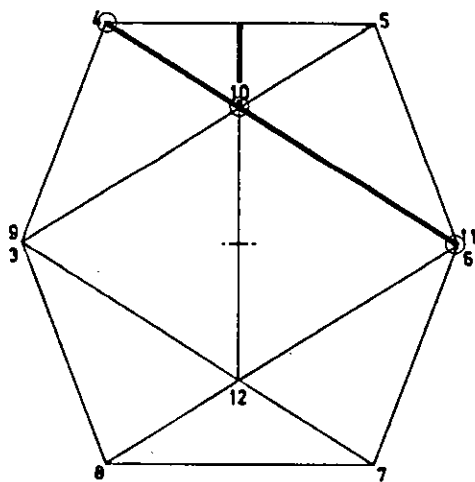
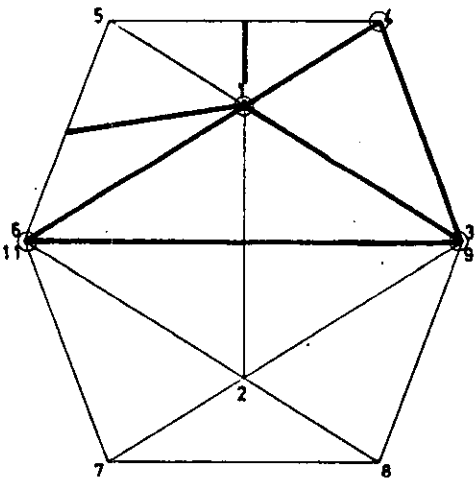
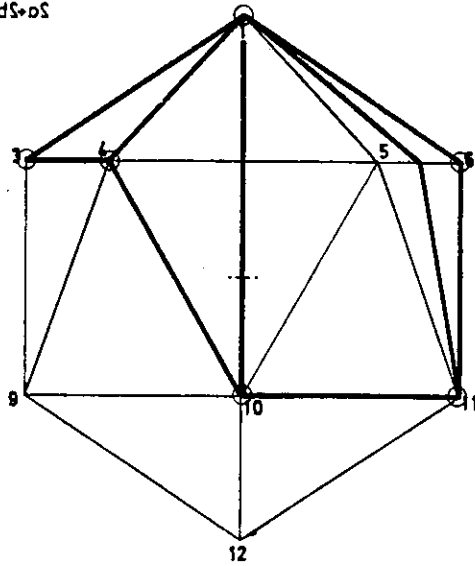
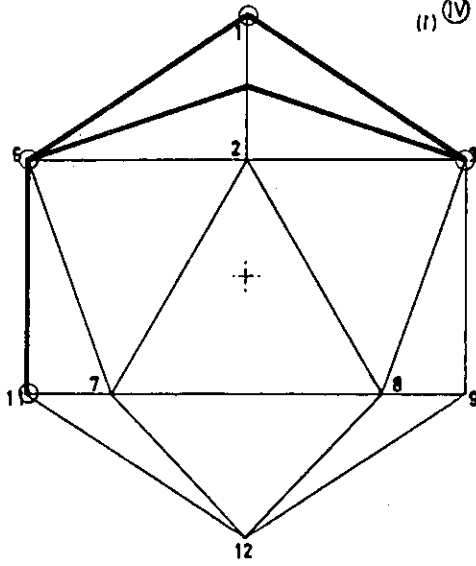
$2a+2b+d$ (III) (1)
 (1) (VI) $b+dS+oS$



$2a+2b+d$ (II) (2)
 $5a+5b+d$ (VI) (2)

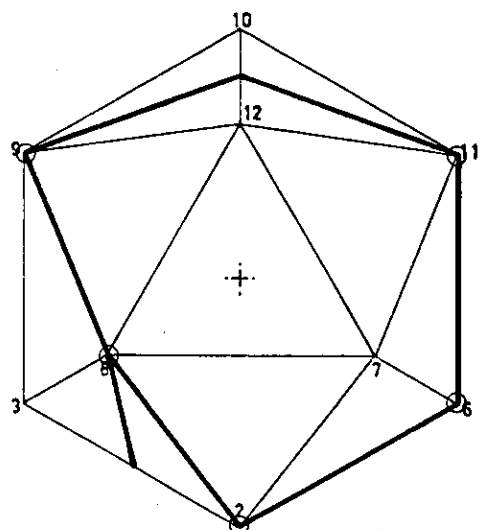
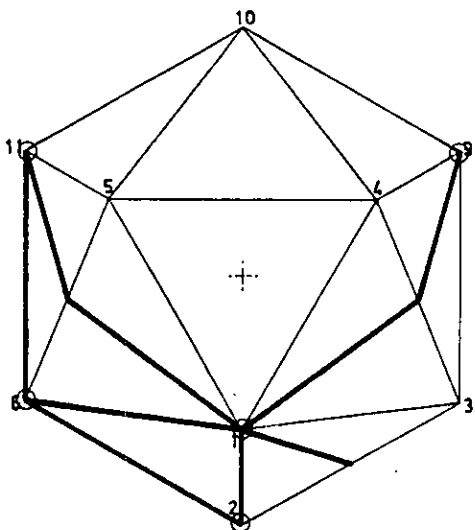
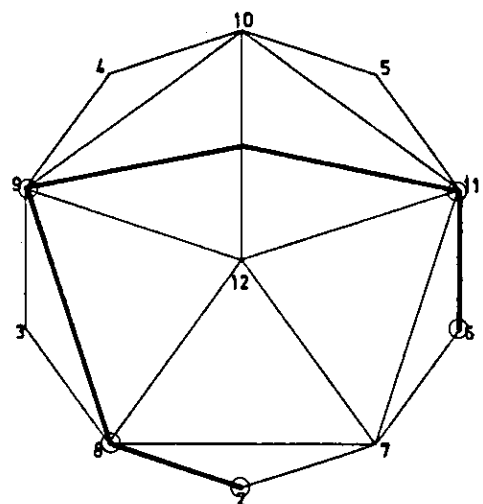
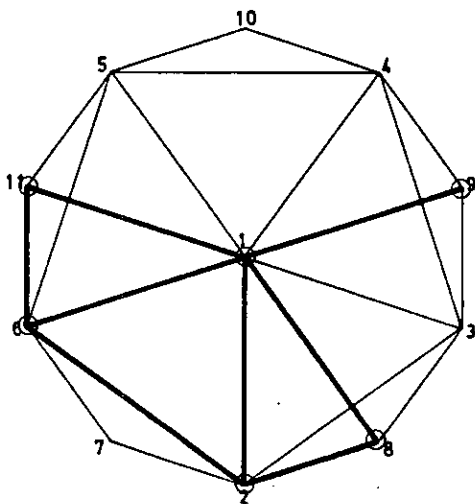
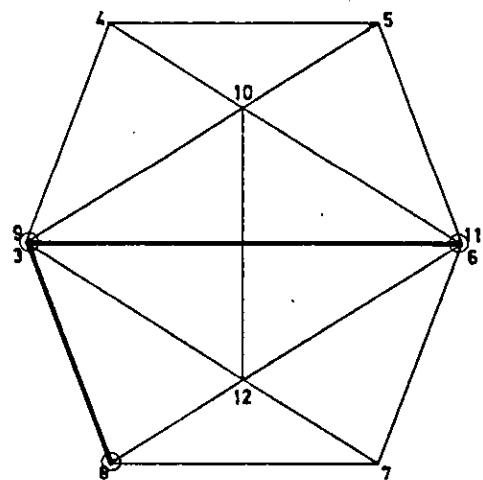
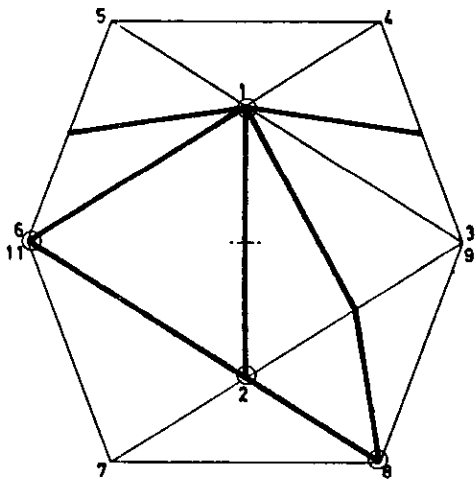
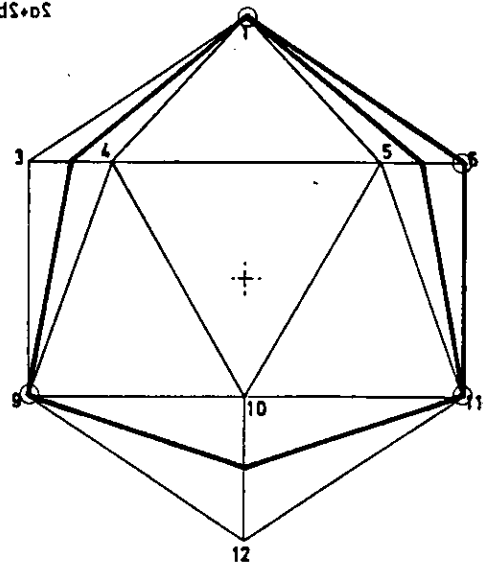
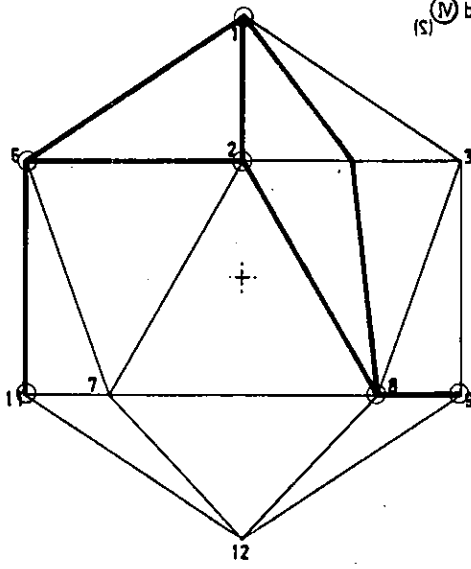


$2a+2b+d \text{ (V)}$ (1)
 $(1) \text{ (V)}$ $b+d \rightarrow a \rightarrow$

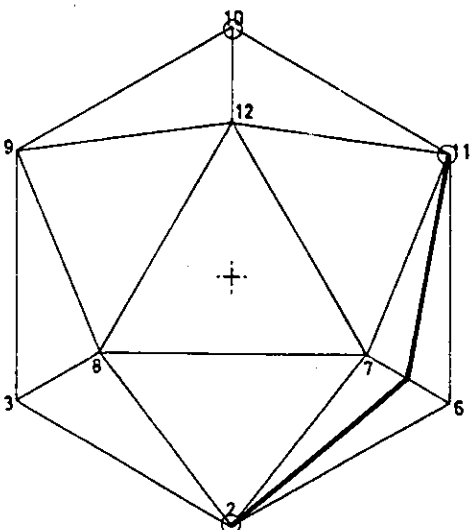
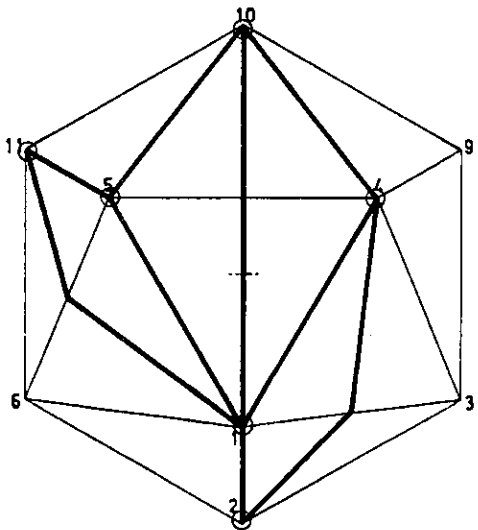
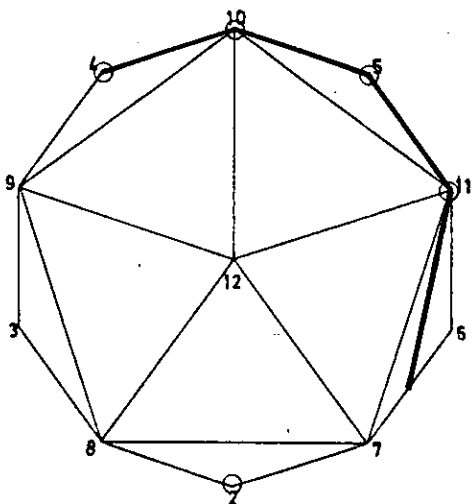
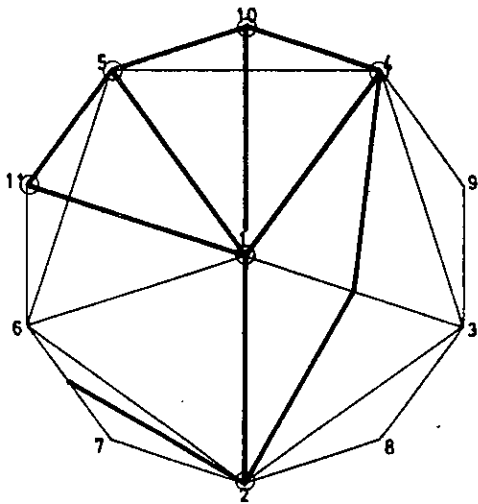
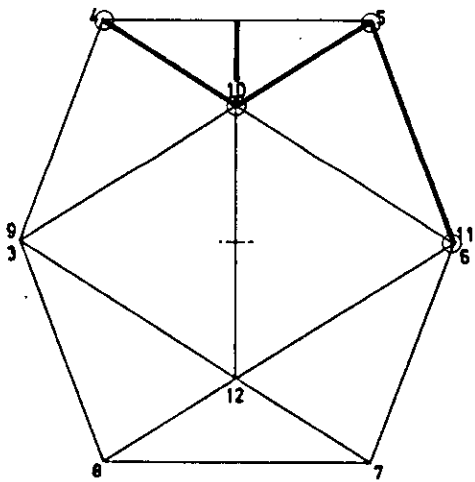
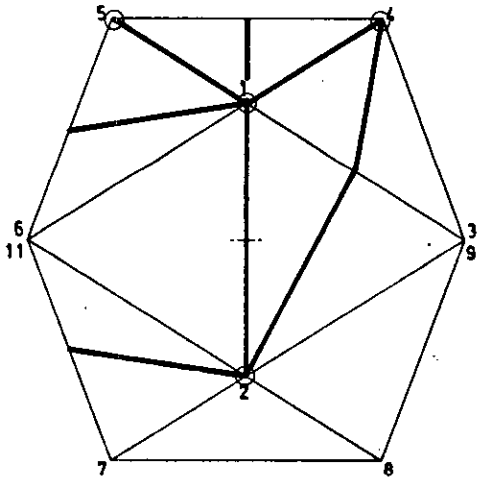
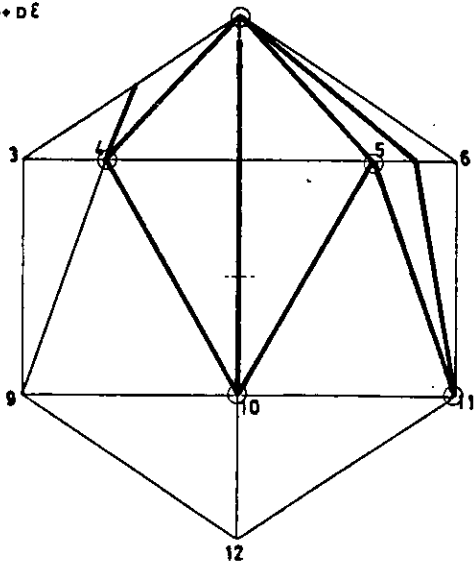
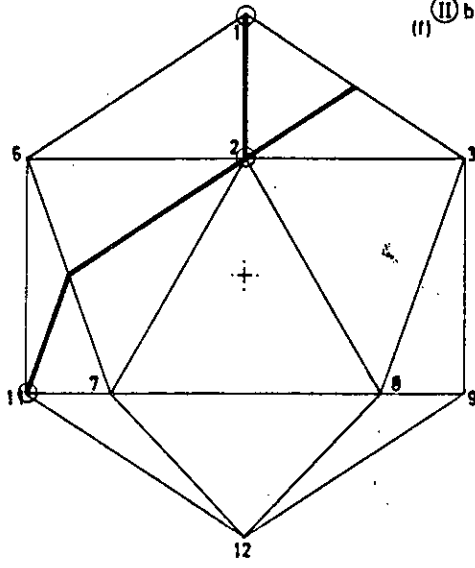


$$2a+2b+d \textcircled{V} 12$$

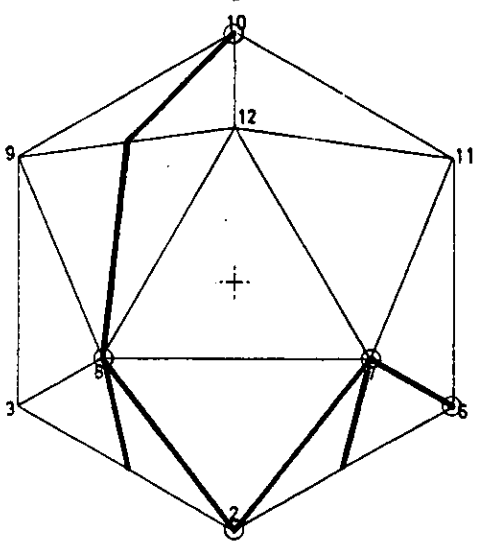
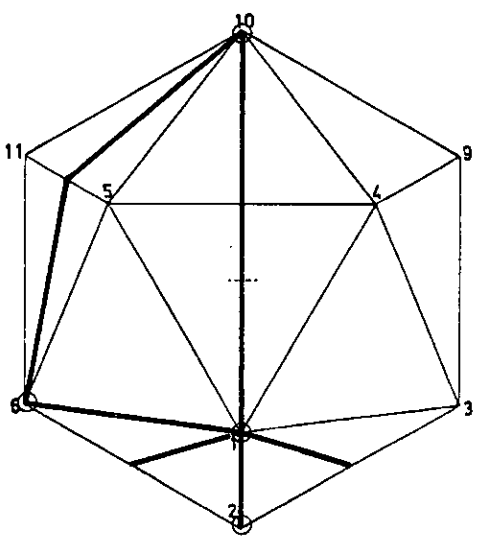
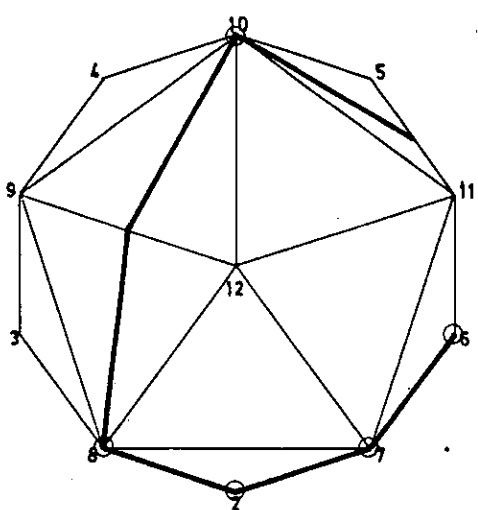
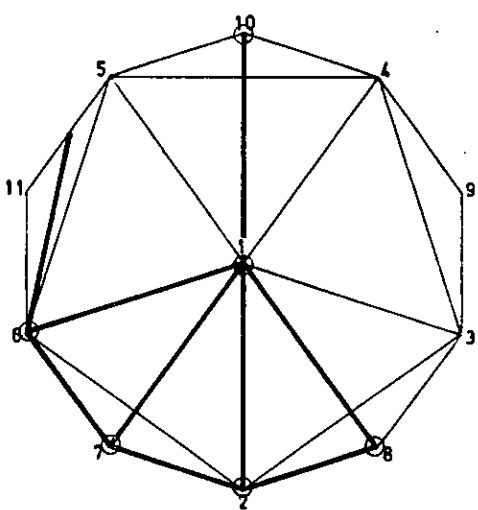
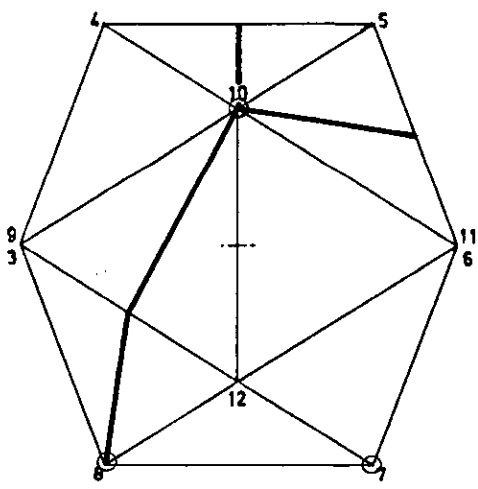
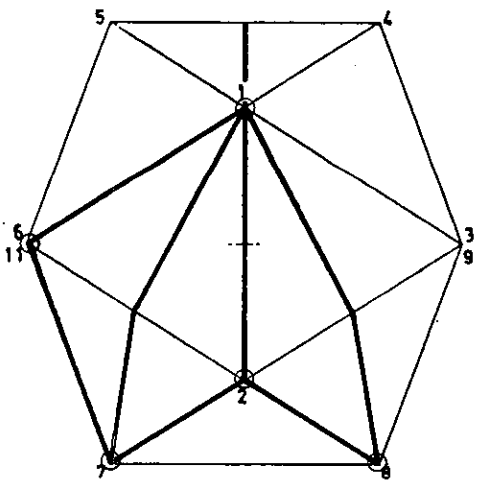
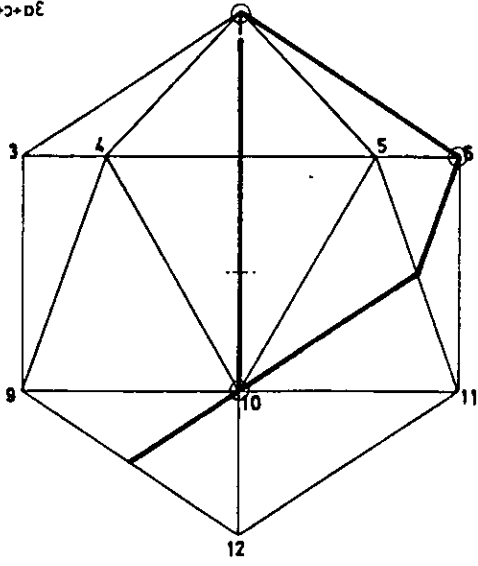
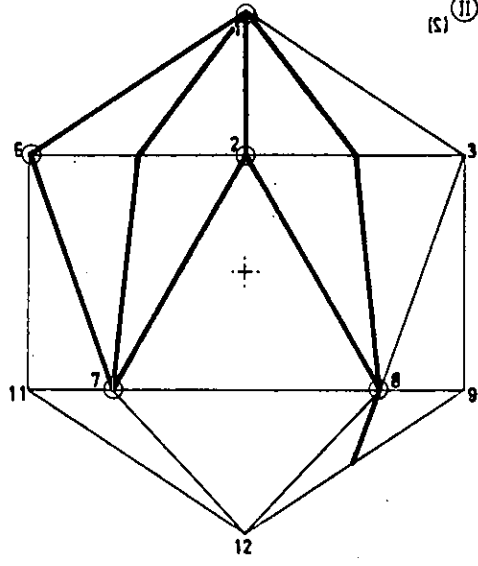
$$15 \textcircled{V} b+dS+dS$$



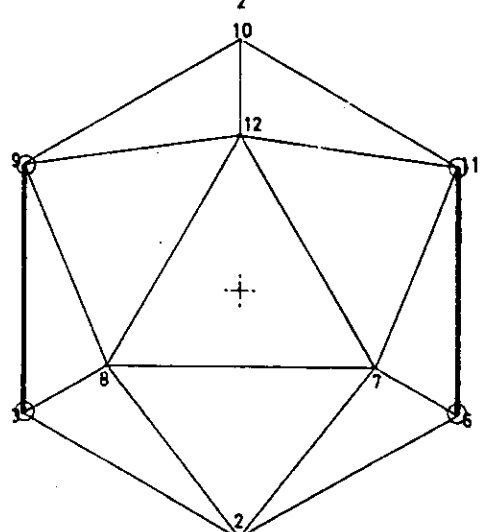
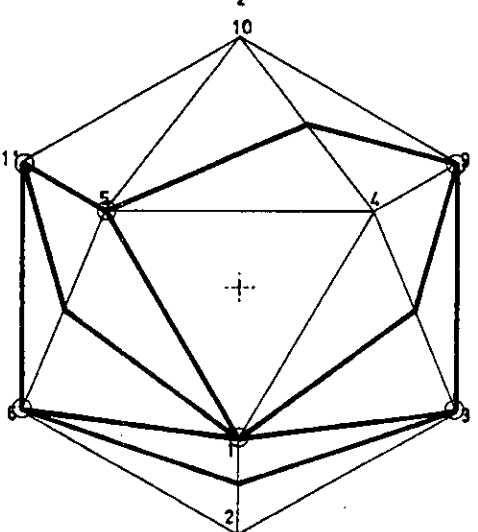
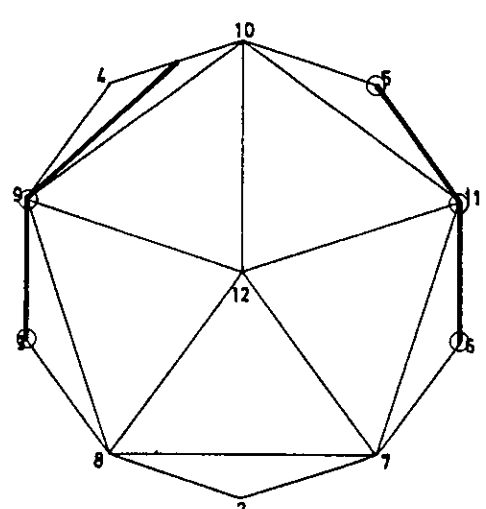
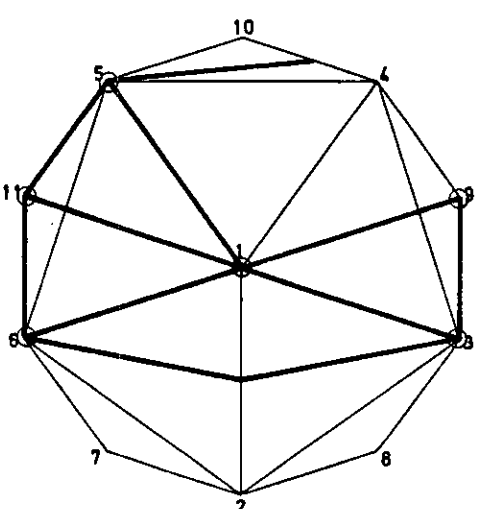
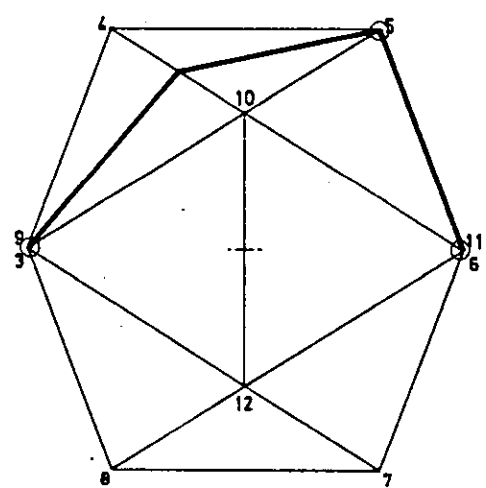
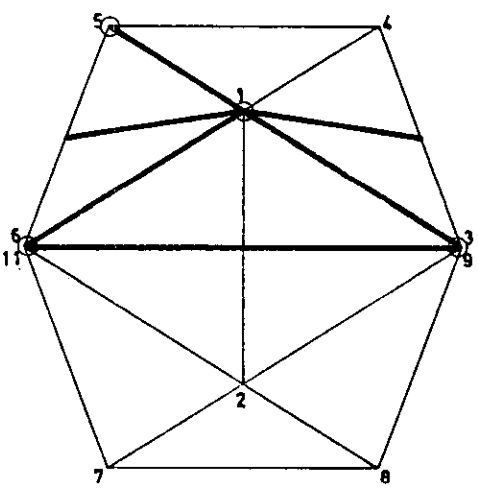
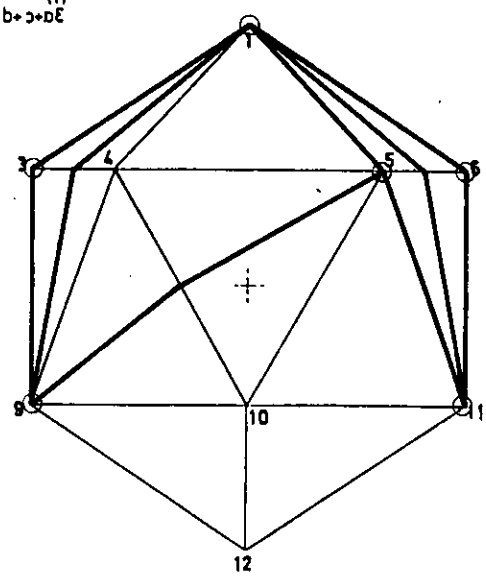
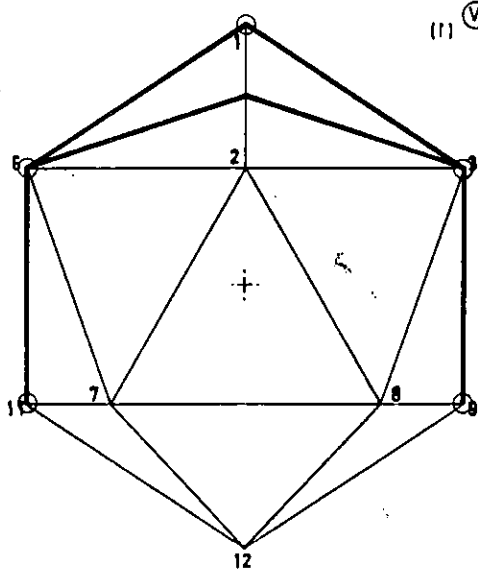
$3a+c+d$ (I) (11)
 (II) $b+c+d$



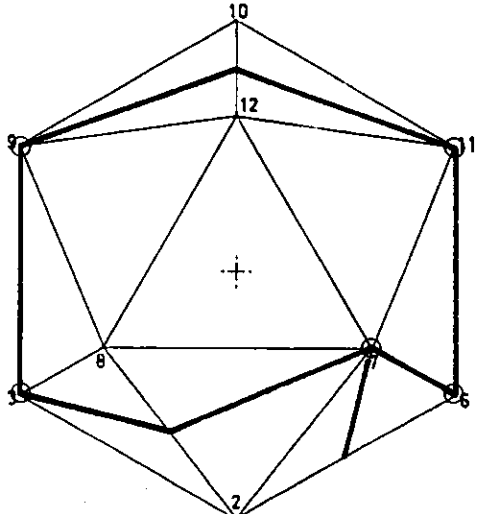
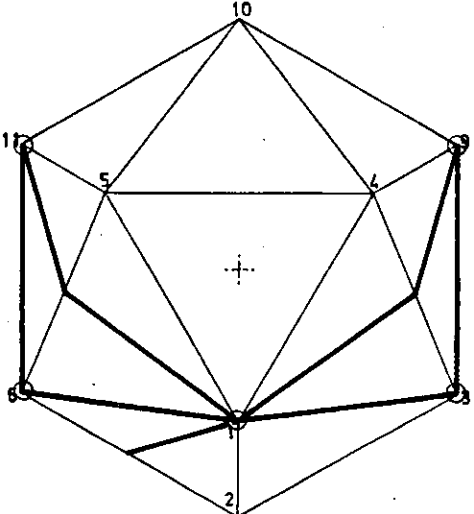
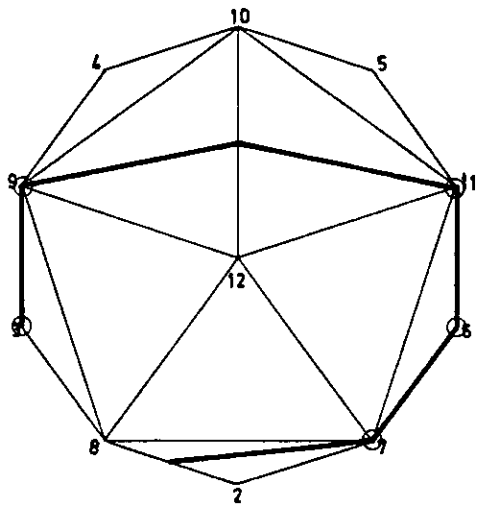
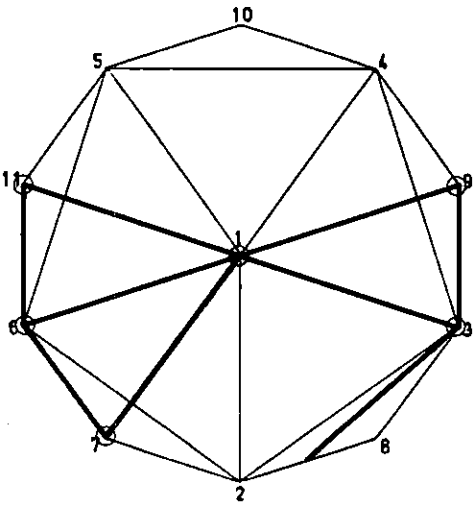
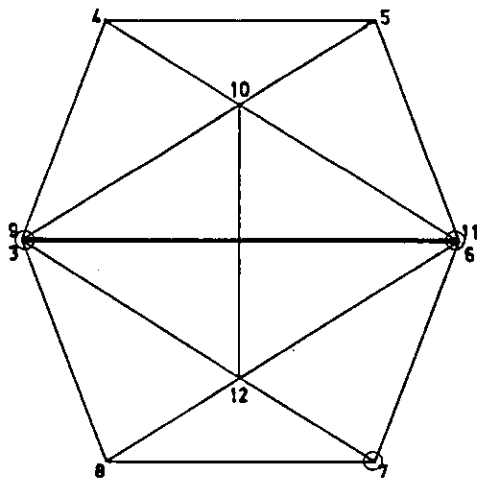
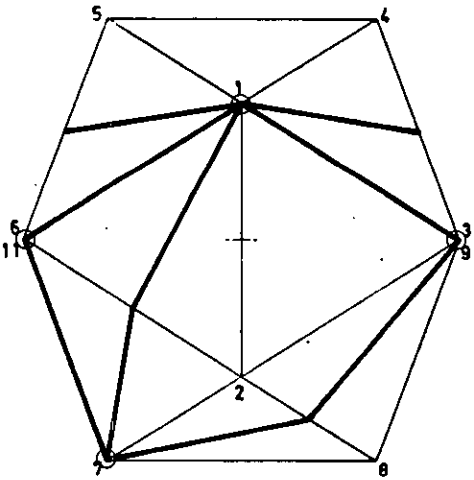
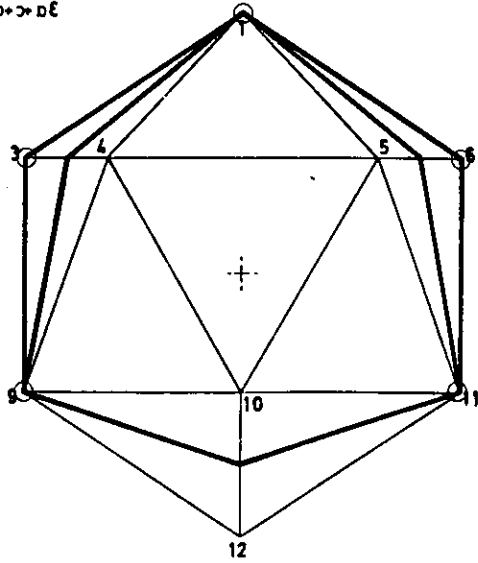
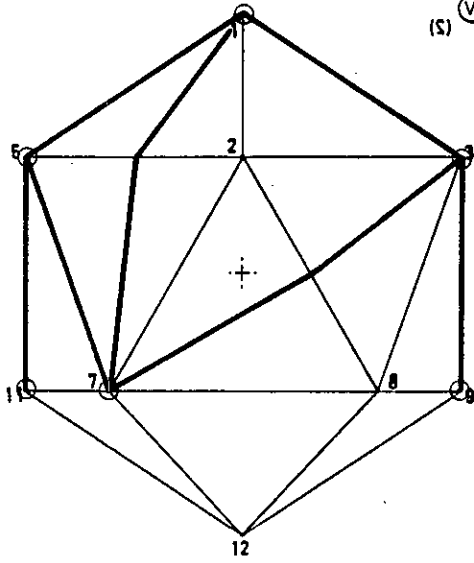
$3a + c + d \text{ (I) (2)}$
 $(5) \text{ (II) } b + c + dE$



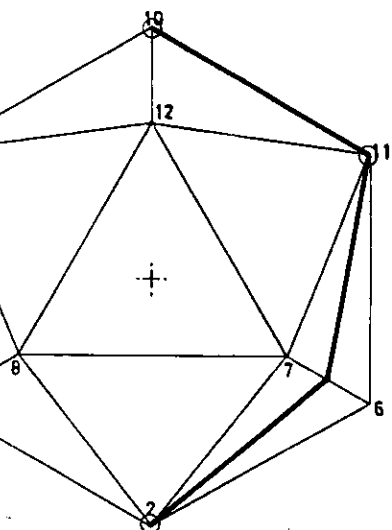
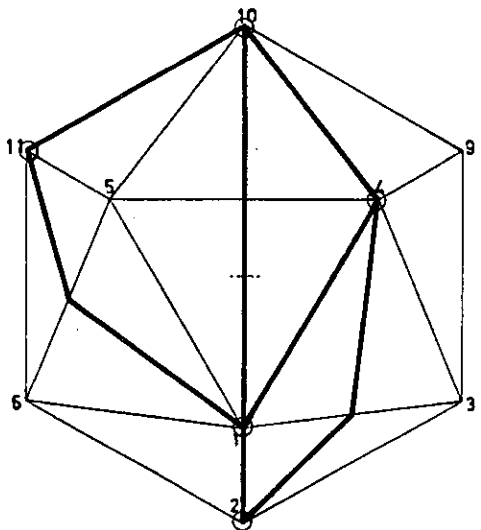
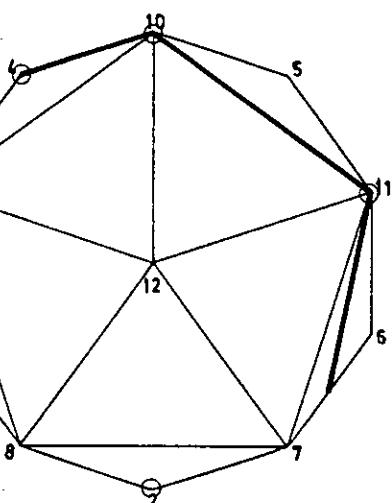
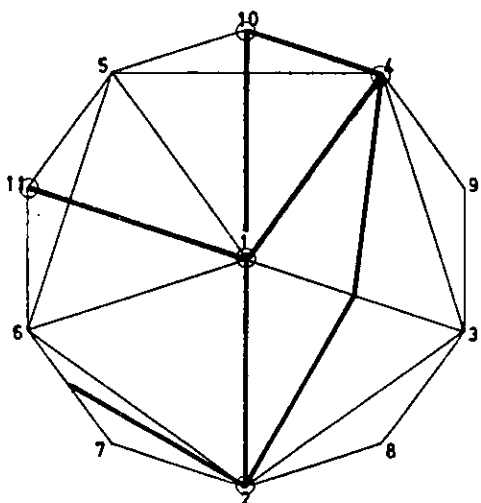
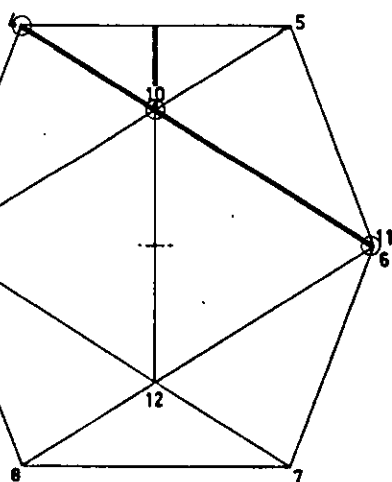
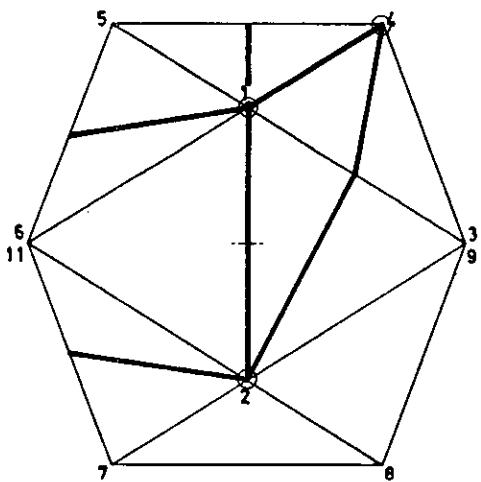
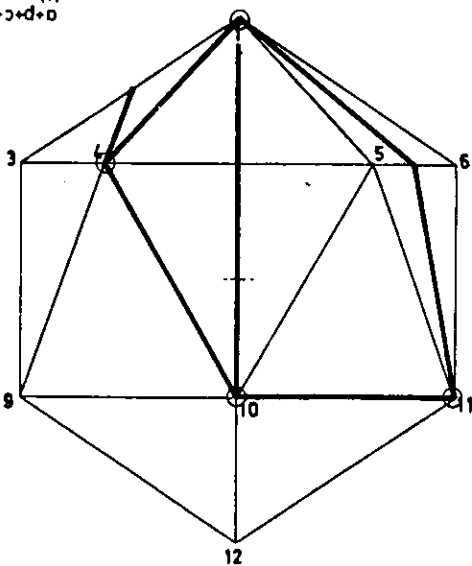
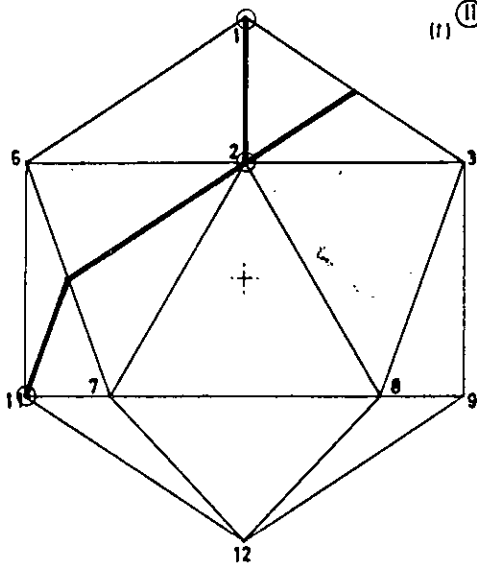
$3a + c + d$ (III) (11)
 (11) (VI) $b + c + dE$



$3a + c + d$ (12)
 (5) (M) $b \rightarrow de$

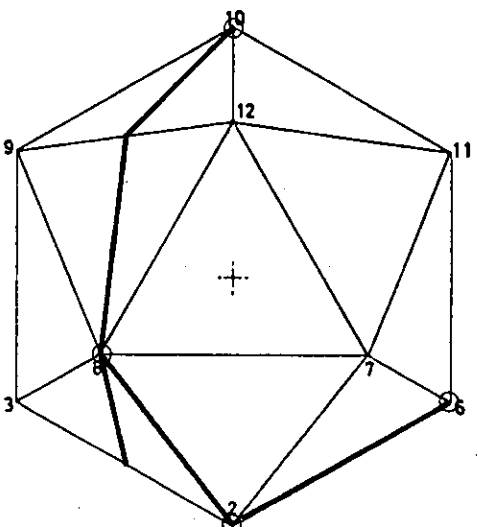
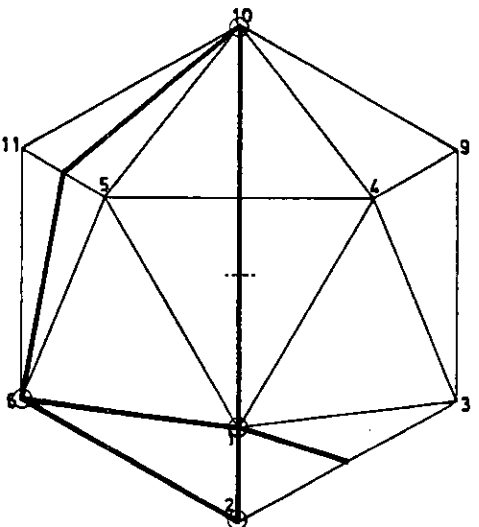
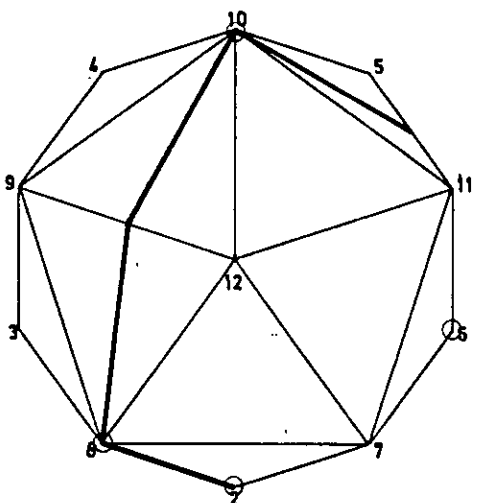
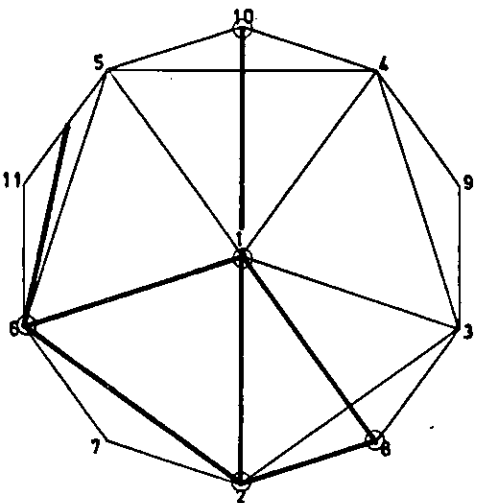
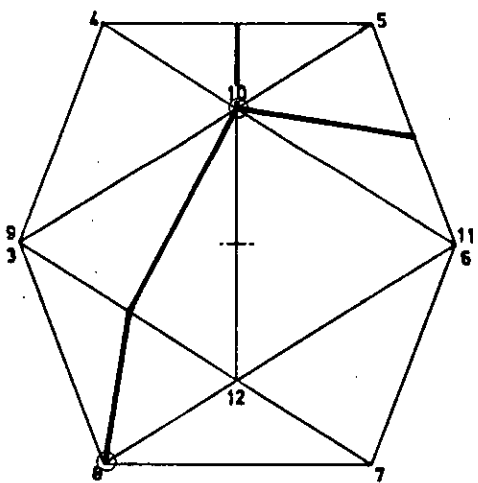
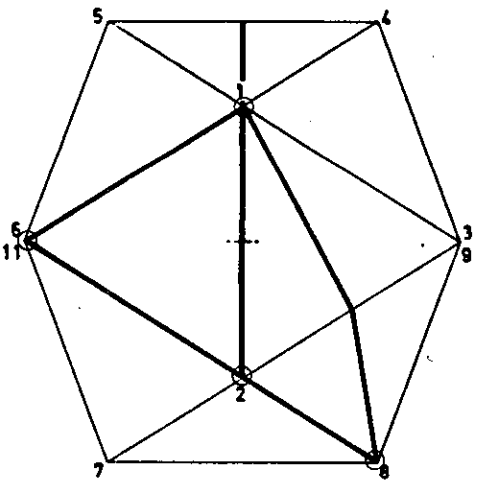
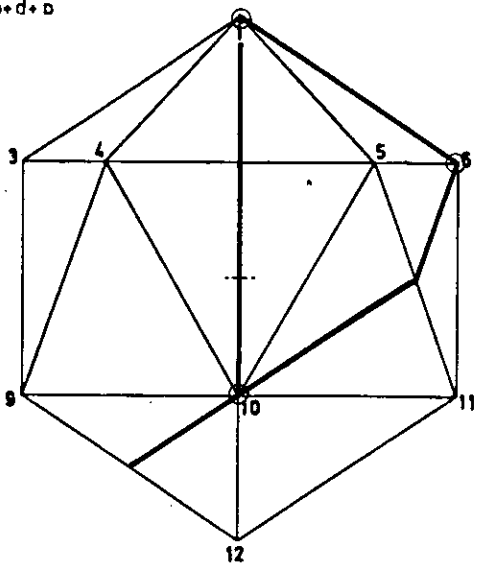
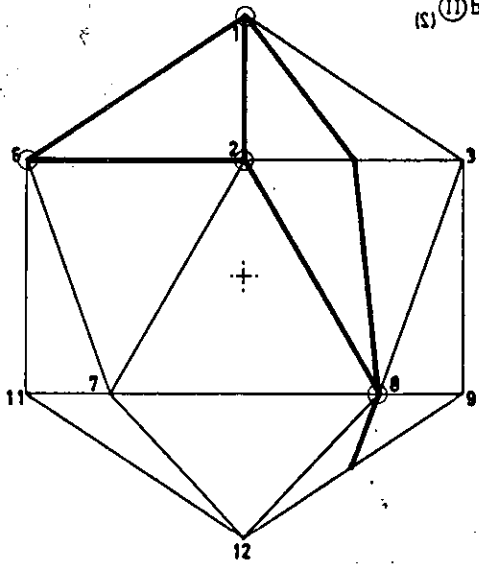


$a+b+c+d$ ①
 (1) ② $b+c+d+d$

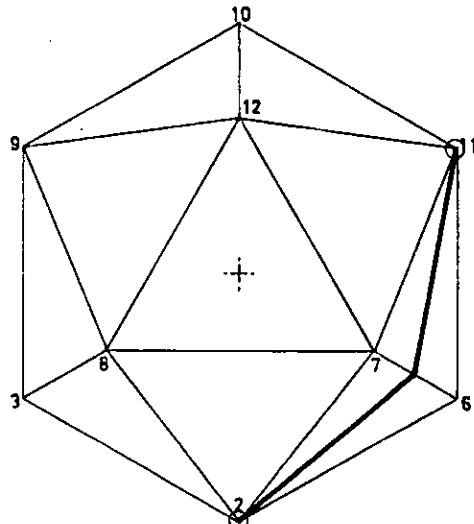
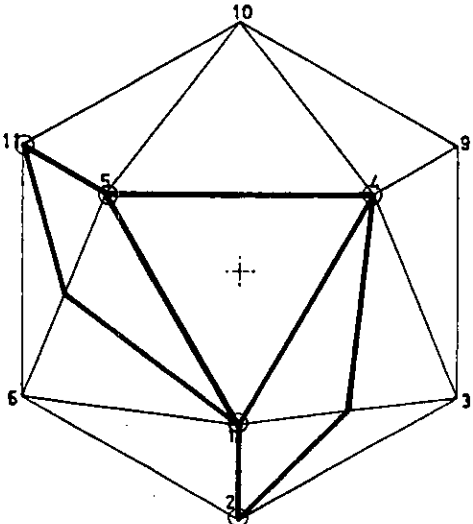
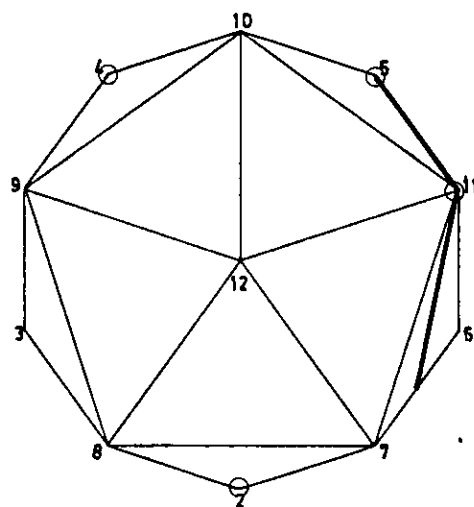
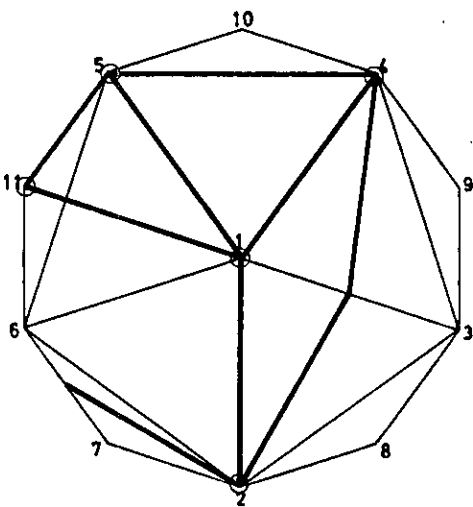
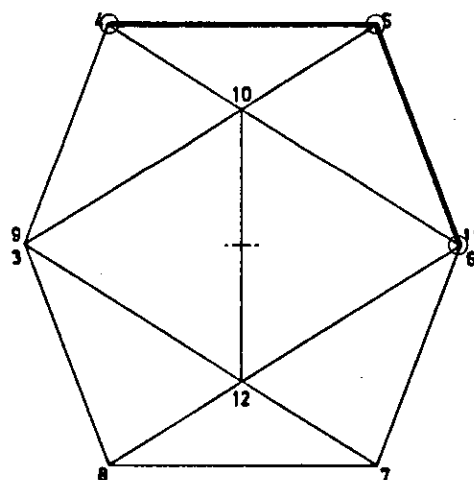
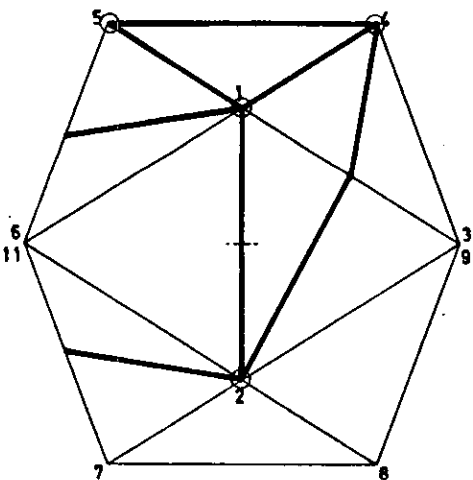
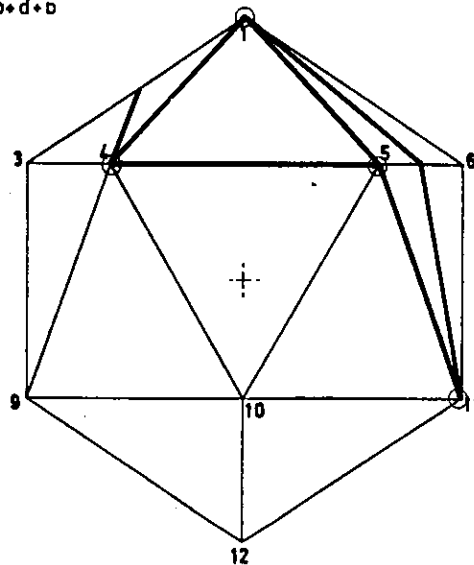
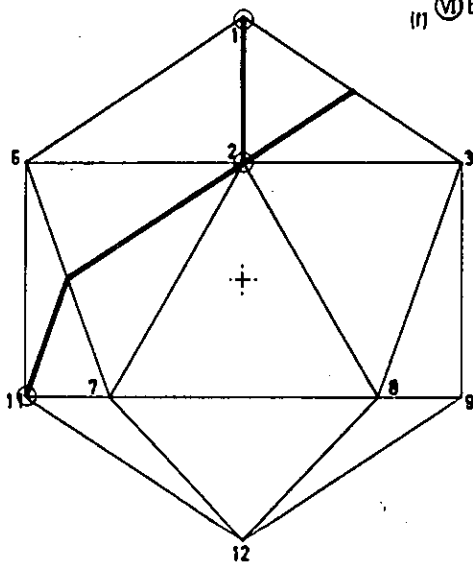


$$a = b + c + d \text{ (I) (2)}$$

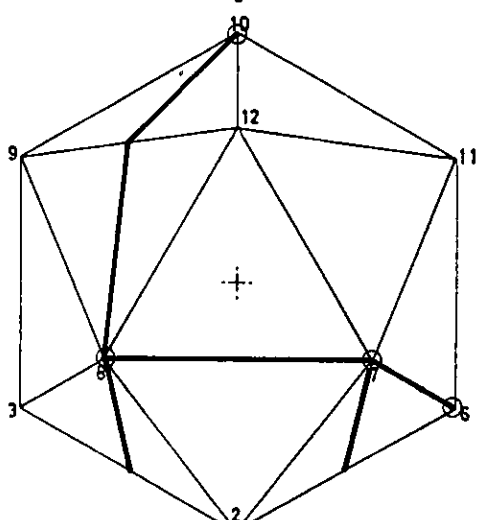
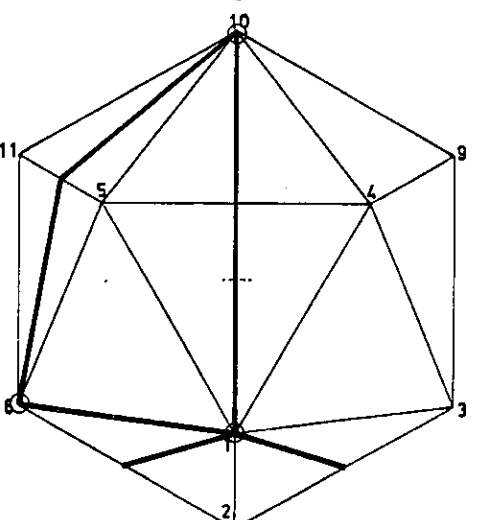
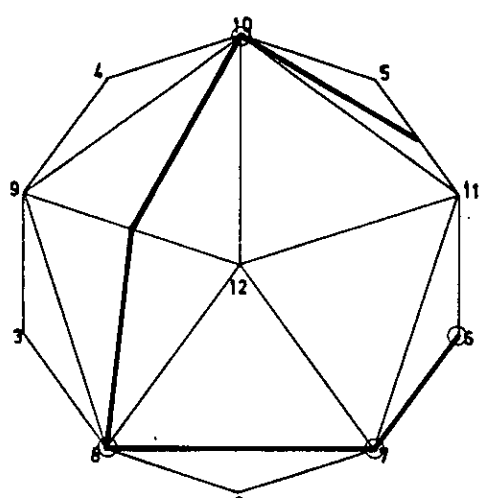
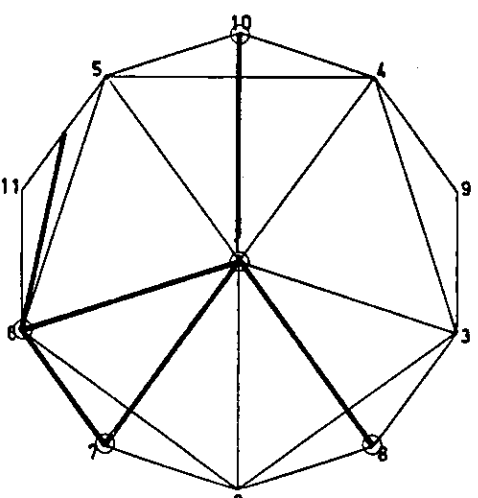
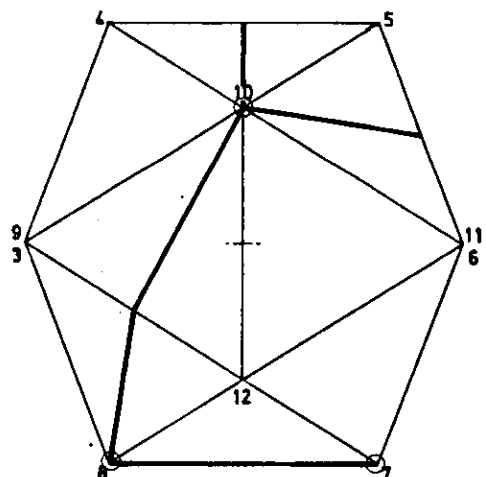
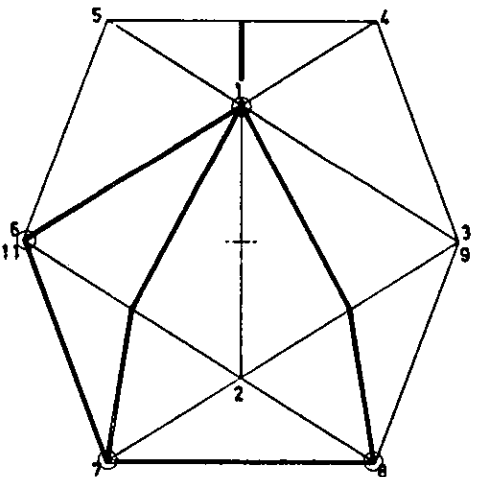
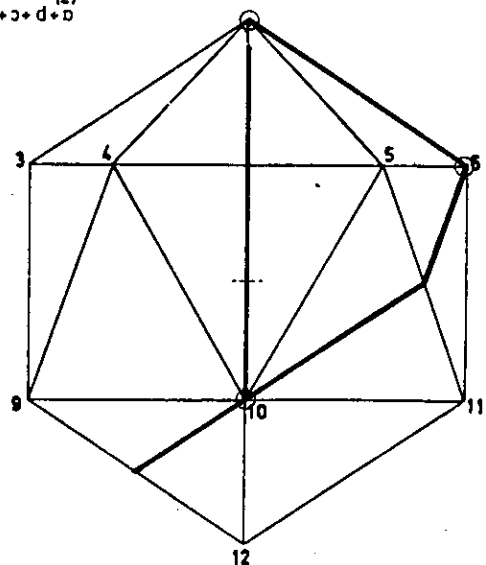
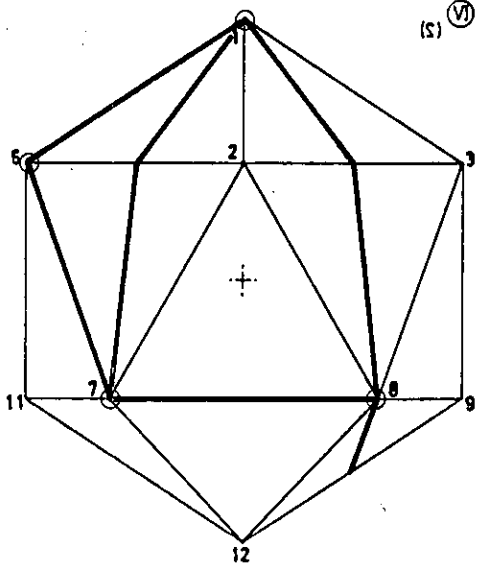
$$(S) \text{ (II) } b + c + d + b$$



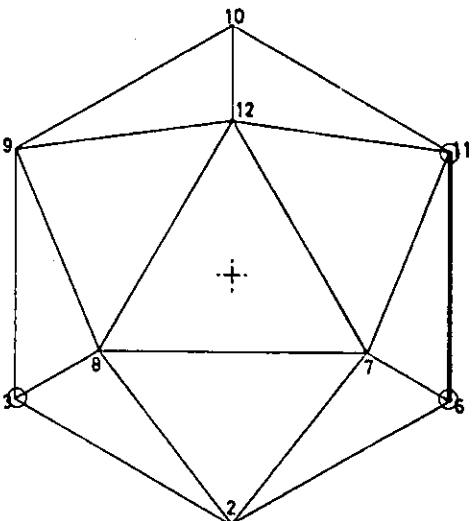
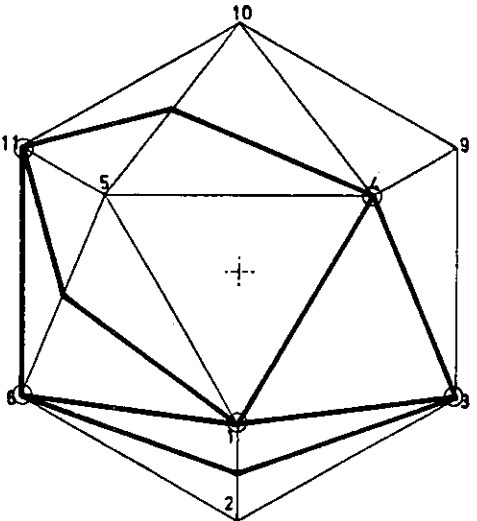
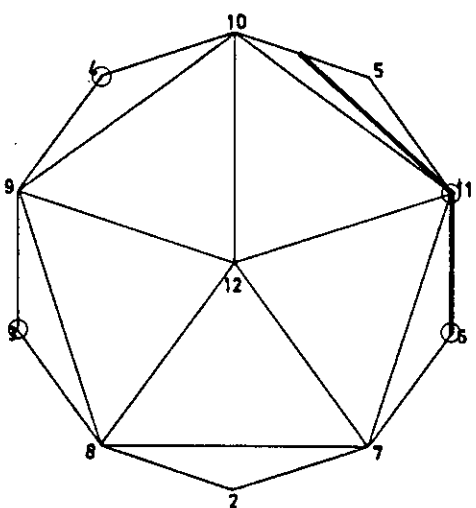
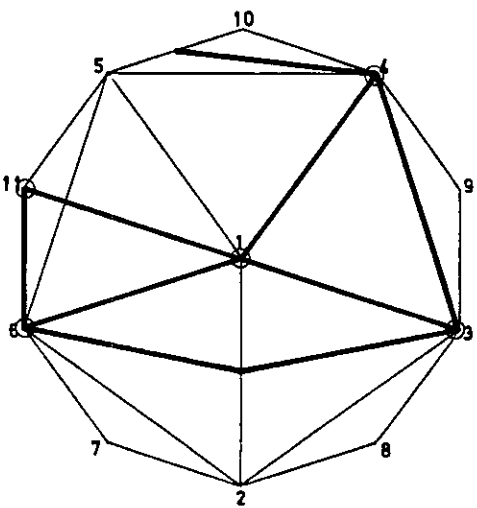
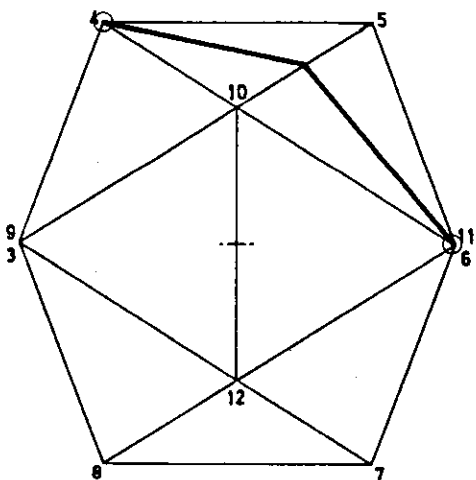
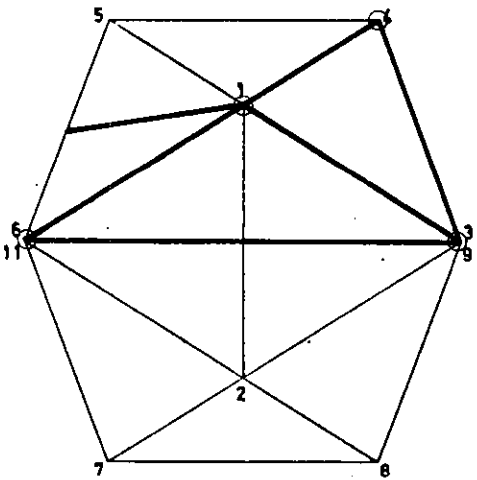
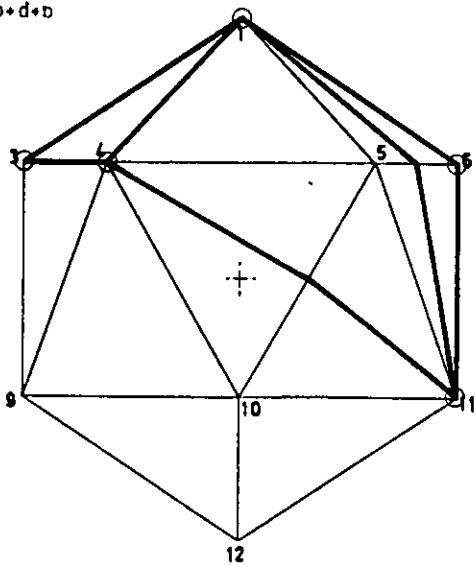
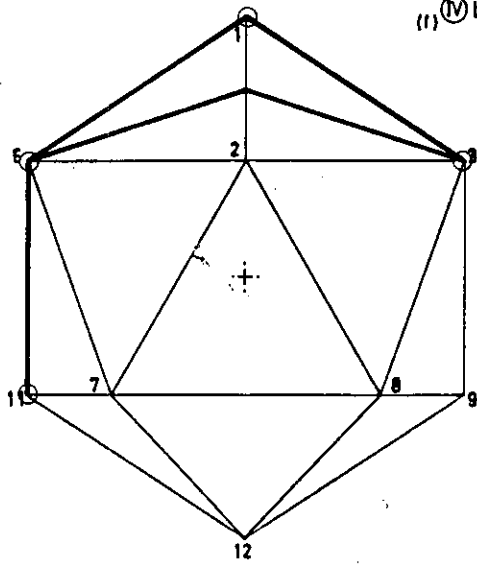
$a+b+c+d$ (III) (1)
 (1) (VI) $b+c+d+e$



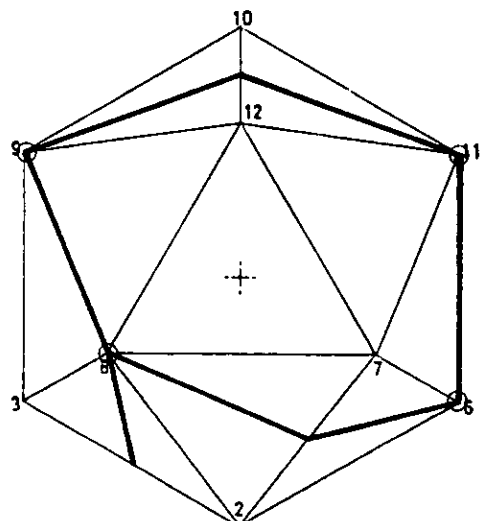
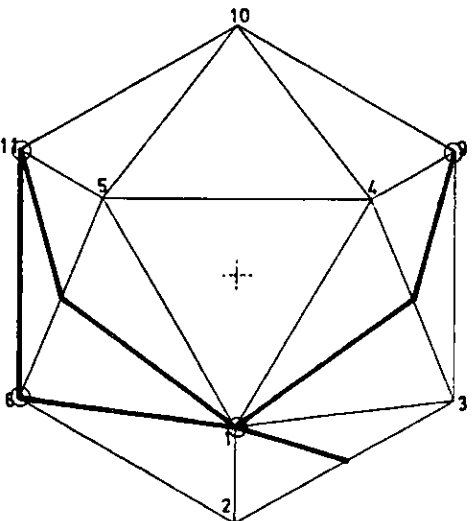
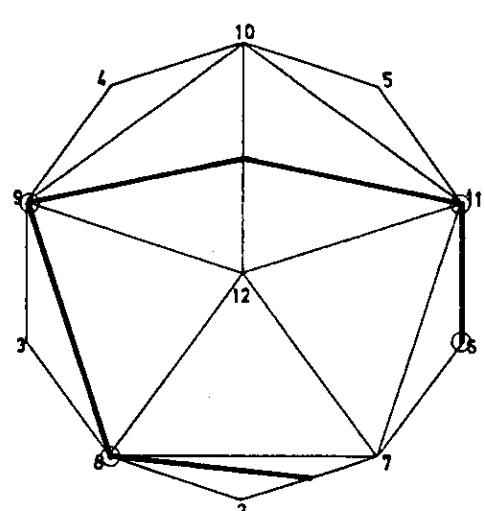
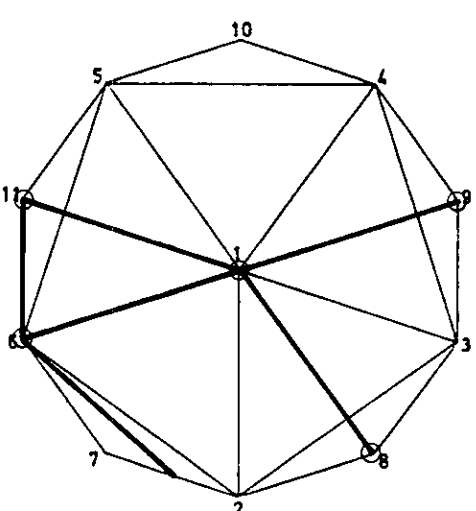
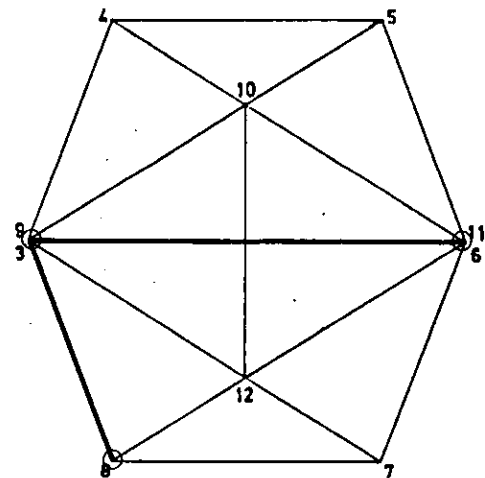
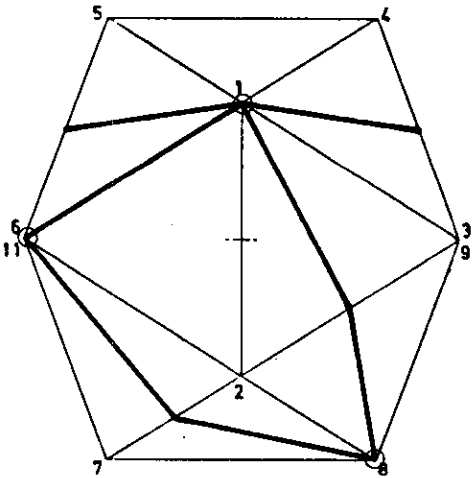
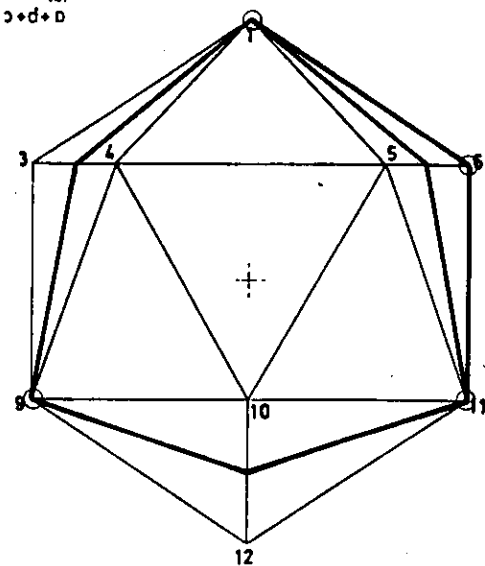
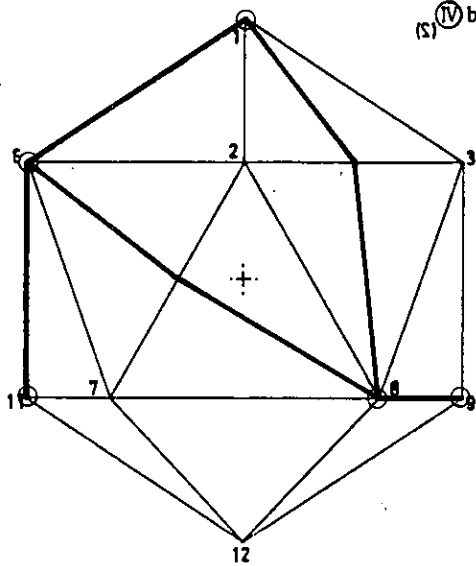
$a+b+c+d$ (11) (2)
 (5) (7) $b+c+d+a$



$a+b+c+d \text{ (V)} \text{ (1)}$
 $(1) \text{ (V)} b+c+d+b$



$a+b+c+d$ (V) (2)
 (Ω) (IV) $b+c+d+d$



CONCLUSIONES

En nuestra búsqueda de divisiones poliédricas del espacio en partes con la mayor regularidad posible, recurrimos a situar los vértices de los poliedros sobre superficies esféricas, las más regulares, por ser la esfera la única superficie que, junto con el plano, está constituida por puntos absolutamente equivalentes. Encontramos de esta forma unas compartimentaciones superficiales de la esfera con vértices idénticos y, considerando el plano como el límite de una superficie esférica al aumentar infinitamente su radio, hallamos otras compartimentaciones del plano, también con vértices idénticos. Dos son las diferencias fundamentales entre ambos casos; de una parte, la curvatura de la superficie, nula para el plano y no para la esfera; de otra, el número de elementos de la teselación, infinito en el plano y finito en la superficie esférica. Pero, por lo demás, aparecen notables parecidos, que nos llevan a tratar ambas estructuraciones conjuntamente.

Sobre la superficie plana de los mosaicos infinitos, descubrimos unos ejes y centros de simetría que eran idénticos para varios de ellos, de modo que los agrupamos en sistemas de simetría.

En un caso, el del mosaico semirregular $(3, 3, 3, 3, 6)$, no existían ejes de simetría, pero sí centros (simetría cíclica), que al coincidir con los de otros mosaicos con ejes (simetría diedral) nos permitieron incluirlo como variante, junto con ellos, del mismo sistema, al que llamamos triangular equilátero o exagonal. Venía definido este sistema por la posición de los centros, en los vértices de semitriángulos equiláteros (la forma del cartabón), y por el orden de las simetrías en los tres vértices distintos, respectivamente 2, 3 y 6.

Otro sistema, al que llamamos cuadrado, tenía en todos los casos simetría diedral, y por lo tanto ejes de simetría, si bien en un caso, el mosaico

(3, 3, 4, 3, 4), en menor número que en los demás. En este sistema los centros de simetría se situaban en los vértices de triángulos rectángulos isósceles (la forma de la escuadra), siendo el orden de las simetrías 2 y 4. Un solo mosaico, (3, 3, 3, 4, 4), no se ajusta a estos sistemas, constituyendo el único espécimen de otro, en el que los centros de simetría ocupan los vértices de rectángulos.

Los elementos de simetría, ejes y centros, pueden clasificarse con un criterio sencillo: cuando todas las caras, vértices y aristas de un mosaico puedan hacerse coincidir con otras caras, vértices y aristas del mismo mediante un movimiento que haga coincidir a su vez un eje de simetría con otro (o un centro con otro), diremos que tales ejes (o centros) son de la misma clase, y si ello no es posible, los catalogamos como de clases distintas.

Si todos los ejes de simetría de una misma clase de un sistema son paralelos, decimos que el sistema es anisótropo, porque en la dirección común de todos ellos se manifiestan propiedades que no se dan en ninguna otra dirección del plano. Esto ocurre con el mosaico (3, 3, 3, 4, 4), en el que las direcciones de sus dos clases de ejes de simetría son diferentes, y exclusivas para cada clase.

En cambio en los demás sistemas los ejes de simetría de cada clase no son todos paralelos a una única dirección, por lo que no existe en ellos una dirección del plano privilegiada con propiedades exclusivas, y decimos que son sistemas isótropos.

Considerando luego los poliedros de número finito de caras (formas no planas), cuyos vértices se sitúan sobre superficies esféricas, vimos que presentan planos y ejes de simetría que son idénticos para varios de ellos, por lo que los agrupamos también en sistemas de simetría.

En dos casos, los poliedros achatados $(3, 3, 3, 3, 4)$ y $(3, 3, 3, 3, 5)$, no existían planos de simetría, pero sí ejes (simetría cíclica), que al coincidir con los de otros poliedros con planos (simetría diedral), nos permitieron incluirlos como variantes, junto con ellos, de dos sistemas, a los que llamamos cúbico y dodecaédrico. Quedaban estos sistemas definidos por los ángulos que formaban entre sí los ejes más cercanos, y por los órdenes de las simetrías que presentaban, 2, 3 y 4 para el sistema cúbico y 2, 3 y 5 para el dodecaédrico.

Otro sistema, el tetraédrico, tenía en todos los casos simetría diedral, y consecuentemente planos de simetría. En este sistema los ejes de simetría eran de órdenes 2 y 3.

Dos series de infinitos poliedros, $(4, 4, n)$ y $(3, 3, 3, n)$, respectivamente prismas y antiprismas, no se ajustaban a estos sistemas, salvo los casos P4 (cubo) y AP3 (octaedro); pero salvo estas dos excepciones, los prismas y antiprismas tienen un único eje con simetría diedral de orden n , mientras los demás ejes de simetría son binarios, siendo ejes diedrales para los prismas y cíclicos para los antiprismas.

Al existir un eje con propiedades únicas, decimos que estos sistemas son anisótropos.

También en estos sistemas los ejes y planos de simetría pertenecen a diferentes clases, y las caras, vértices y aristas de un poliedro pueden hacerse coincidir con otras caras, vértices y aristas del mismo mediante un movimiento que haga coincidir un eje (o plano) con otro eje (plano) de la misma clase.

En los sistemas anisótropos ya hemos visto que hay un eje único, con simetría de orden n , pero en los sistemas tetraédrico, cúbico y dodecaédrico no existe ninguna clase de ejes de simetría con un solo elemento, y como

cada uno de estos ejes tiene una dirección distinta, no hay direcciones privilegiadas, con propiedades exclusivas, y decimos que son sistemas isótropos.

La intersección de los planos de simetría con la esfera circunscrita al poliedro produce círculos máximos, líneas que sobre la esfera cumplen el mismo papel que las rectas sobre el plano. Los ejes de simetría, diámetros de la esfera, se cortan en puntos, por los que pasan los círculos máximos correspondientes a los planos de simetría, cuando éstos existen (simetría diédral), en número igual al orden de simetría del eje. Esta retícula, característica en cada caso del sistema de simetría, es muy semejante a la obtenida sobre el plano en los sistemas planos, con la diferencia de que el número de triángulos que forman los puntos definitorios de los ejes y los círculos de los planos de simetría es aquí finito y era allí infinito.

Para ver mejor el parecido entre los sistemas planos y los abovedados, con sideremos el plano como una esfera de radio infinito: las rectas de la red plana aparecen como circunferencias de radio infinito, y su centro, coinci dente con el de la esfera de curvatura nula que es el plano, estaría en el punto del infinito de las rectas perpendiculares al mismo; por este punto del infinito pueden trazarse perpendiculares al plano que pasen por los centros de simetría del sistema, y serán ejes de simetría del orden corres pondiente, y estos ejes, con los ejes situados en el plano, determinarán planos de simetría. De este modo la diferencia esencial entre sistemas pla nos y abovedados es el radio, infinito y finito respectivamente, de la esfera de los vértices.

En cuanto a la isotropía o anisotropía de los sistemas, está claro ahora que sólo existe sobre la superficie, porque en el espacio, para los sistemas planos siempre existe una dirección privilegiada, la normal al plano del mosaico, definida por un punto impropio del espacio; y en cuanto a la

esfera, si bien no existe necesariamente dirección privilegiada, sí hay un punto, aquí propio, el centro, en torno al cual se organiza todo el en tramado de las simetrías y que jerarquiza todo el espacio.

Sobre la superficie, plana o esférica, correspondiente a cada sistema, he mos hallado una dualidad, que se establecía entre vértices, centros de aristas y centros de caras de las formas regulares (esto es, de caras idénticas) pertenecientes a los sistemas isótropos; esta dualidad hacía corresponder a un vértice una cara de la forma dual, y viceversa, y a una arista otra arista. Así, a la red de triángulos equiláteros correspondía otra de hexágonos en el sistema exagonal; al cubo correspondía el octaedro en el cúbico, y al dodecaedro el icosaedro en el dodecaédrico. En el sistema cuadrado, a una red de cuadrados correspondía otra idéntica, como en el tetraédrico a un tetraedro otro igual, y llamábamos a estas formas autoduales.

Esta dualidad se manifiesta también en otras relaciones entre caras, aristas y vértices, sustituyendo entre sí los elementos cara y vértice, como se indica a continuación:

En un vértice concurren al menos tres aristas.

En un vértice concurren al menos tres caras.

Una arista separa siempre dos caras.

En una cara hay al menos tres aristas.

En una cara hay al menos tres vértices.

Una arista une siempre dos vértices.

Esta dualidad recuerda notablemente a la que, en geometría proyectiva, se daba en el espacio entre punto (aquí vértices), rectas (aquí aristas) y planos (ahora caras), sustituyendo entre sí punto y plano y "están en" y "pasar por". Recordemos que los conceptos duales esenciales en proyectividad eran el punto como intersección de dos rectas de un mismo plano y el plano como envolvente lineal de dos rectas por un mismo punto. Precisamente

los romboedros realizan este papel de envolventes de los poliedros duales, pues sus caras (planos) son envolventes de las aristas (rectas) de los mismos cuando éstas se cortan.

Como hemos visto, en un vértice puede haber diferente número de aristas y de caras (nunca menos de tres, ni más de seis para caras regulares), como en una cara puede haber diferente número de aristas y vértices (nunca menos de tres, ni más de seis para redes regulares), pero en una arista siempre hay dos vértices y dos caras. Si atendemos a esto, además de los números m y n que en los sistemas isótropos (página 193) indicaban los tipos de simetría no binaria de los sistemas, y que representaban las aristas y caras por vértice y las aristas y vértices por cara de los poliedros básico y dual del sistema, respectivamente, existe un tercer parámetro, l , siempre de valor 2, que produce la simetría binaria común a todos estos sistemas, y que claramente representa las dos caras y los dos vértices correspondientes a una arista. De manera que el cuadro de las simetrías de los sistemas queda así:

Planos	Abovedados	l	m	n	m.c.m.(l, m, n)	
Cuadrado		2	4	4	4 = n	autoduales
	Tetraédrico	2	3	3	6	
	Cúbico	2	3	4	12	no autoduales
Dodecaédrico	2	3	5	30		
Exagonal		2	3	6	6 = n	

Hemos incluido en el cuadro el mínimo común múltiplo de los números representativos de los tipos de simetría, para hacer patentes unas curiosas relaciones numéricas.

La primera de ellas, ya sabida, es que son autoduales los sistemas en que dos tipos de simetría son del mismo grado ($m = n$), a saber, los sistemas cuadrado y tetraédrico.

En segundo lugar, en los sistemas planos el grado del tipo de simetría que lo tiene mayor (n) es múltiplo de los otros dos, con lo que resulta ser $m.c.m. (1, m, n) = n$.

En cambio, esto no ocurre en los sistemas abovedados, en los que $m.c.m. (1, m, n)$ representa el número de aristas de los poliedros básico y dual y también el número de caras del romboedro del sistema.

En tercer lugar, sólo en un sistema son $1, m, n$ número primos entre sí: el sistema del dodecaedro, en el cual por lo tanto es $m.c.m. (1, m, n) = 1.m.n$; resulta interesante ver que se trata del único de los sistemas que no produce compartimentaciones planas ni espaciales (pero sí permite la compartimentación de una superficie esférica de curvatura no nula). Sin embargo, en la simetría pentagonal se basaban las compartimentaciones aleatorias de Penrose vistas en los capítulos 9 y 10.

Este sistema dodecaédrico es también el único en que todos los poliedros incluidos en él son diferentes, mientras el sistema cuadrado, en el que existe la mayor dependencia entre $1, m$ y n , es el que tiene menor número de formas distintas.

Los poliedros regulares y semirregulares de los distintos sistemas tienen configuraciones que vienen dadas por las siguientes fórmulas, relativas a sus vértices:

Clasificación según tipos de cara:

con 1 tipo de cara (siempre):

básico:	$(n)_m$		regulares (siempre)
dual:	$(m)_n$		

con 2 tipos de cara como máximo:

básico truncado:	$(m, 2n, 2n)$		semirregulares (en general)
dual truncado:	$(n, 2m, 2n)$		
polipoliedro:	(m, n, m, n)		

con 3 tipos de cara como máximo:

rombipolipoliedro:	(m, 2l, n, 2l)
gran rombipolipoliedro:	(2l, 2m, 2n)
achatado:	(3, 3, m, 3, n)

semirregulares
(en general)

Clasificación de los semirregulares según el número de polígonos por vértice

con 3 polígonos por vértice:

básico truncado: (m, 2n, 2n)

dual truncado: (n, 2m, 2m)

gran rombipolipoliedro (2l, 2m, 2n)

con 4 polígonos por vértice:

polipoliedro: (m, n, m, n)

rombipolipoliedro: (m, 2l, n, 2l)

con 5 polígonos por vértice:

achatado: (3, 3, m, 3, n)

Pueden relacionarse fácilmente estas configuraciones con las de los módulos elementales correspondientes (página 154 y siguientes); el vértice recángulo del módulo triangular se relaciona con l y los otros dos con m y n.

En cuanto a compartimentaciones espaciales (página 291), además de las anisótropas, regulares y semirregulares, directamente relacionadas con las planas, encontramos tres configuraciones isótropas regulares (cubos, rombododecaedros y octaedros truncados), y siete semirregulares, cuatro de ellas con dos tipos de poliedro (T + TT, T + O, CT + O, CO + O) y tres con tres tipos (C + CO + RCO, C + OT + GRCO, TT + CO + OT); las configuraciones regulares son todas del sistema cúbico; de las semirregulares, tres son del sistema tetraédrico (T + TT, T + O, TT + CO + OT) y el resto del cúbico.

Nótese que las configuraciones semirregulares obedecen a dos esquemas; los tipos más simples, los de dos tipos de poliedro, no contienen poliedros en cuya fórmula intervenga l, los que sí intervienen en las configuraciones con

tres tipos de poliedro. Por su parte, los poliedros achatados no intervienen en ninguna compartimentación regular ni semirregular.

En estas configuraciones espaciales hemos insinuado otra dualidad: la que en las redes espaciales basadas en el cubo se daba entre redes duales (página 249, figura 7.3.): aquí a cada cubo de una red correspondía un vértice de la otra, y a cada cara de la primera una arista de la segunda. Además, ambas redes son idénticas, por lo que se trata de un sistema autodual. Observemos que esta dualidad, que se manifiesta tan sencillamente sólo para este sistema isótropo de compartimentación espacial, y que produce una malla en la que encajan otras compartimentaciones, se da en una red regular (es decir, con un solo tipo de poliedro) y con un poliedro regular, como en los sistemas superficiales, planos o esféricos, se daba así en redes regulares (es decir, con un solo tipo de polígono) y con polígonos regulares.

Para los sistemas anisótropos de compartimentación espacial, constituidos por prismas en capas (página 239 y 240, figuras 7.1.), puede trazarse fácilmente la red dual para las compartimentaciones regulares (página 239, figura 7.1.a), porque no es más que la expansión en dirección normal al plano de las redes duales planas correspondientes, no habiendo más que desplazar la longitud de una semiarista los planos de las caras no cuadradas entre una y otra red.

Como manifestación de esta dualidad espacial apenas esbozada, que opone vértice a espacio poliédrico y arista a cara, podemos ver a continuación algunas relaciones entre estos elementos, que se dan en las redes espaciales:

En un vértice concurren al menos 4 aristas.

En un vértice concurren al menos 4 espacios.

En un vértice concurren al menos 6 caras.

En un espacio hay al menos 4 caras.

En un espacio hay al menos 4 vértices.

En un espacio hay al menos 6 aristas.

En una cara hay al menos
3 vértices.

En una cara hay al menos
3 aristas.

Una cara separa siempre
2 espacios.

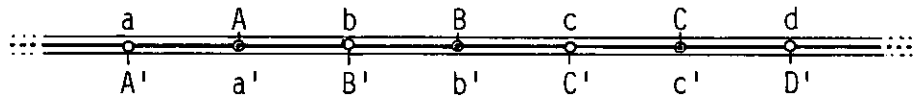
En una arista concurrén al menos
3 espacios.

En una arista concurrén al menos
3 caras.

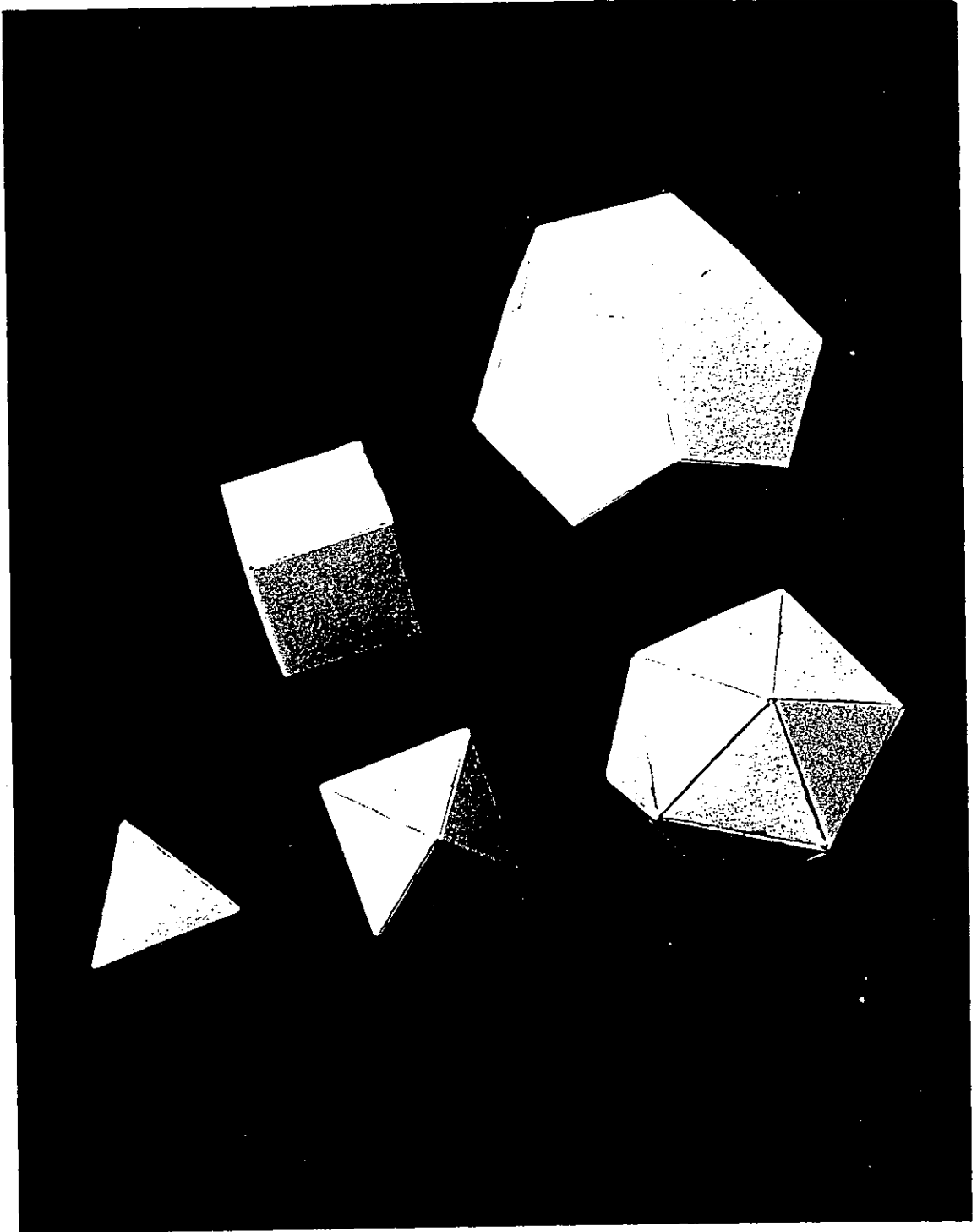
Una arista une siempre 2 vértices.

No me es posible establecer una analogía proyectiva de esta dualidad espacial, pues si en la dualidad superficial vista en los sistemas isótropos planos y esféricos el correlato proyectivo se daba en un espacio tridimensional entre puntos, rectas y planos, ahora parece que habría que recurrir a espacios de más dimensiones, cosa que excede los límites de este trabajo.

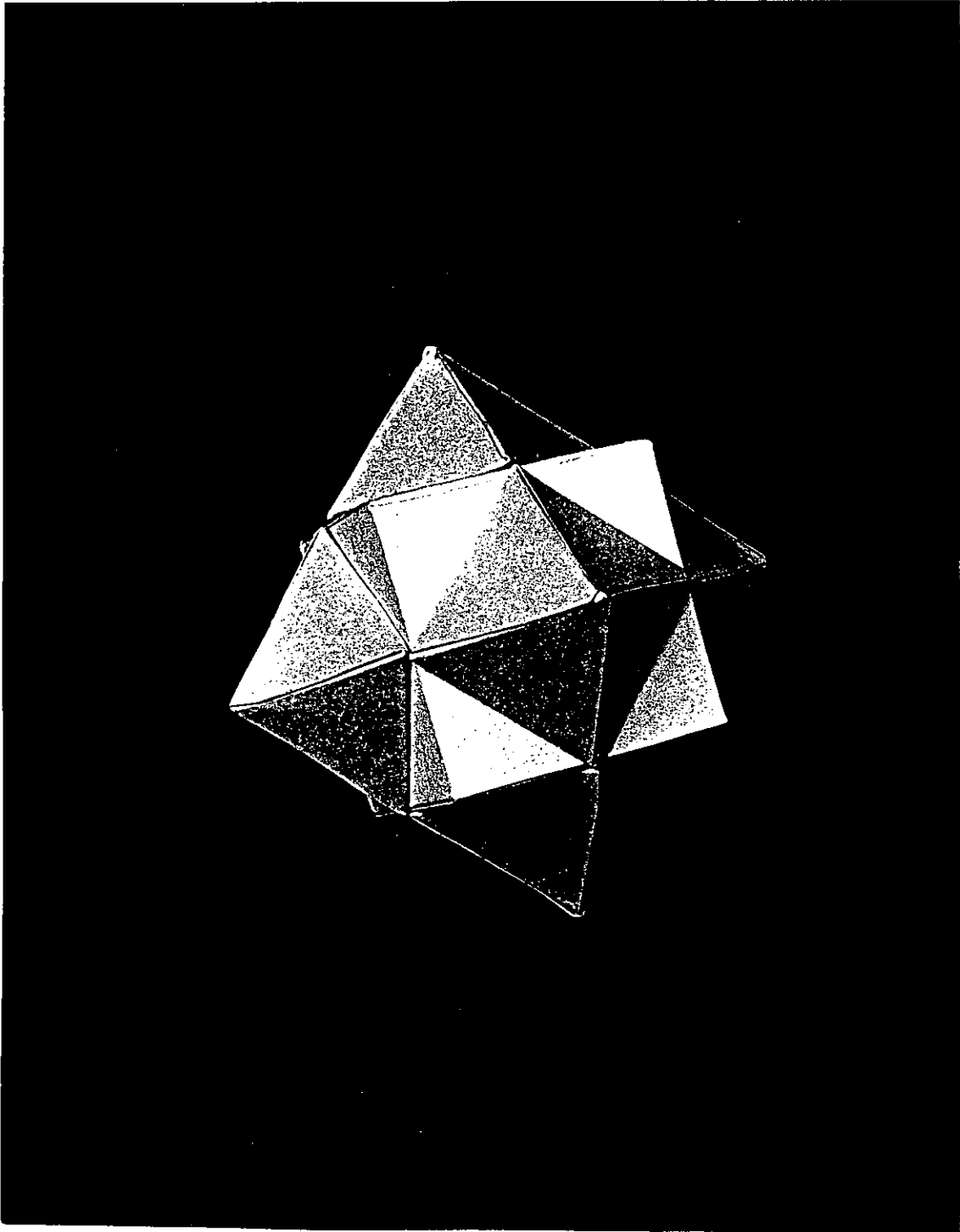
En cambio sí parece inmediata la analogía de la dualidad proyectiva sobre el plano, que sustituye entre sí punto y recta, por una dualidad lineal que podemos ver en este esquema:



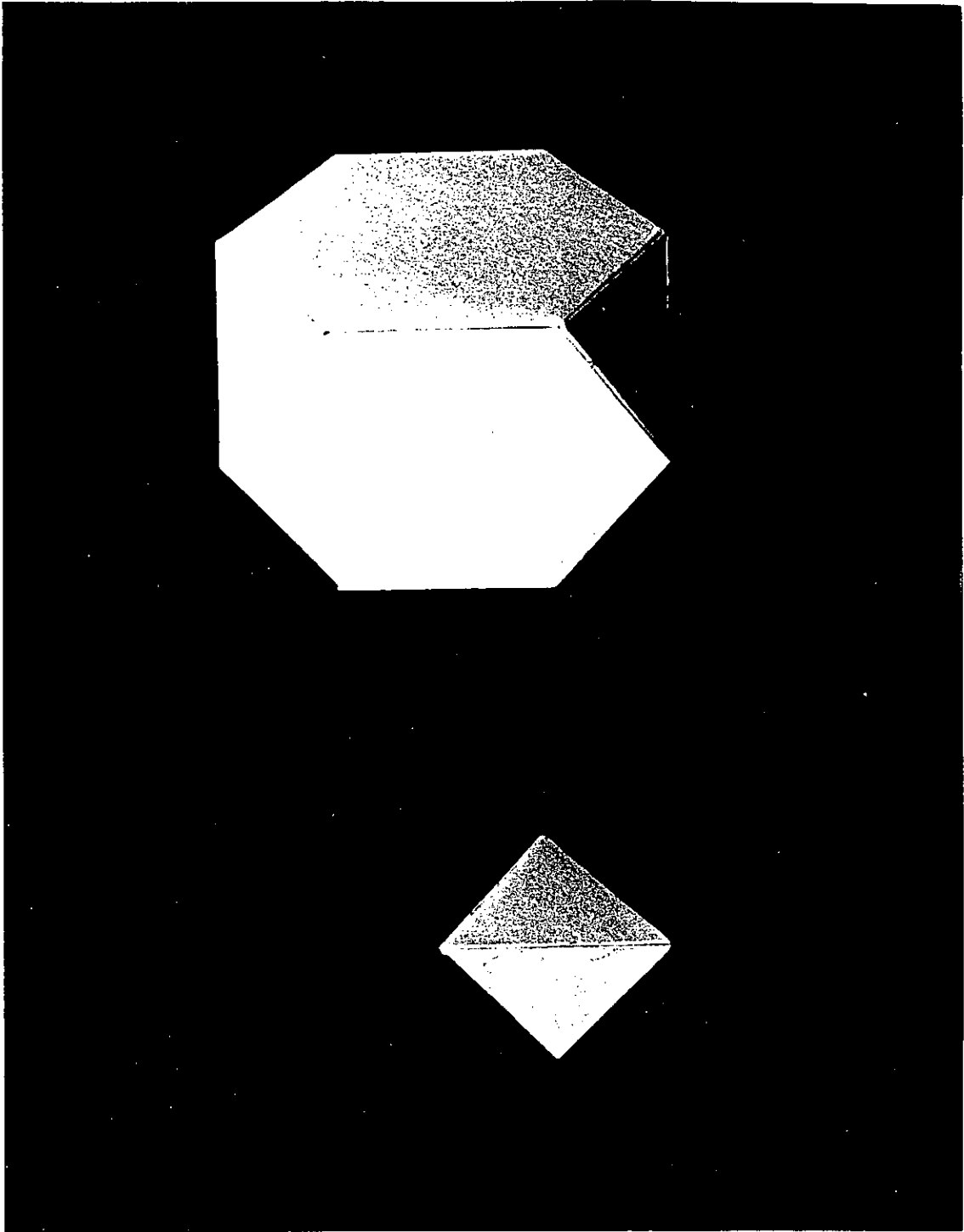
Es decir: los recintos sobre una línea (segmentos) están limitados por puntos, y atravesar una frontera de éstas equivale a trazar otro segmento dual sobre la línea inicial, uniendo con él puntos representativos de los segmentos vecinos.



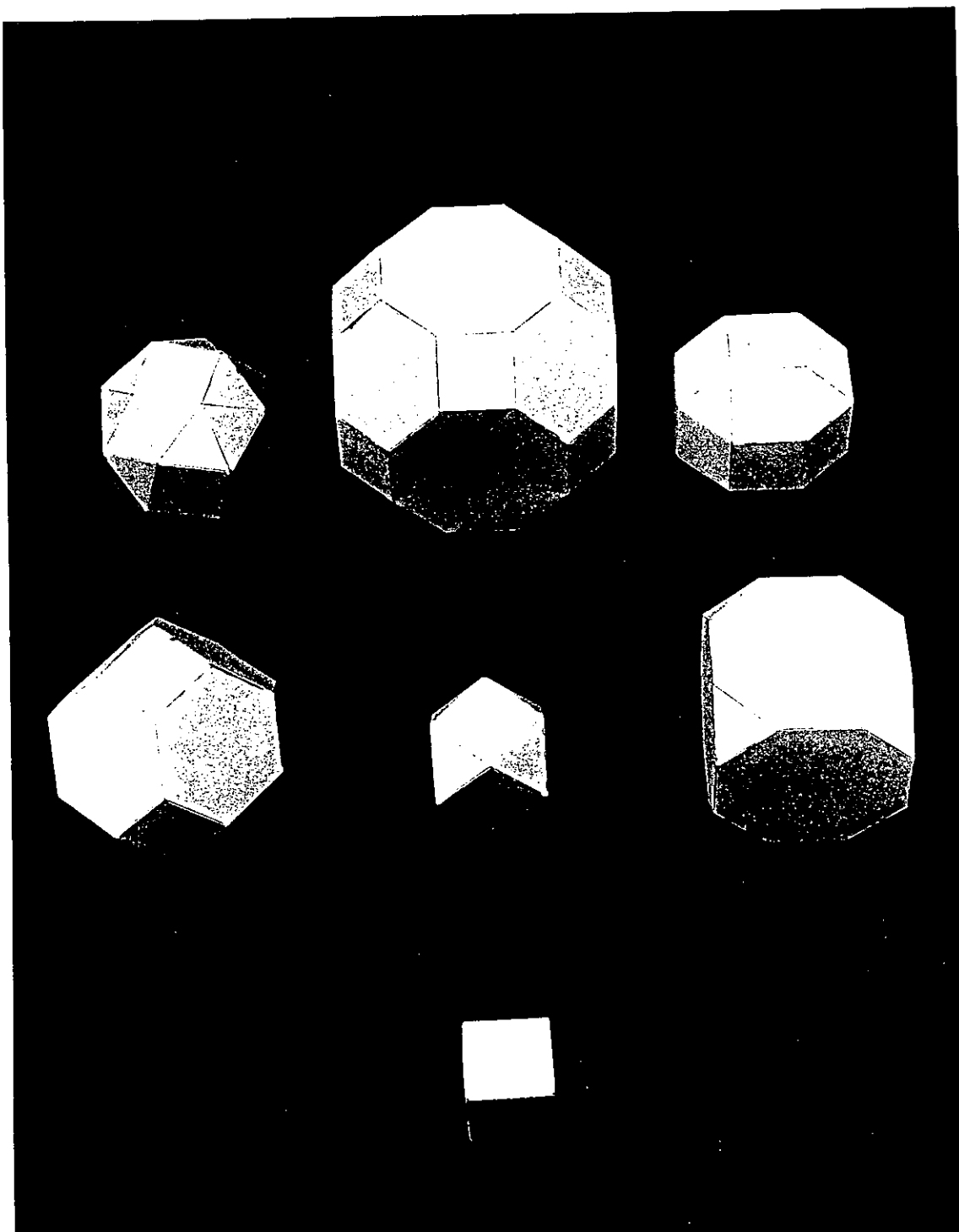
LOS POLIEDROS REGULARES



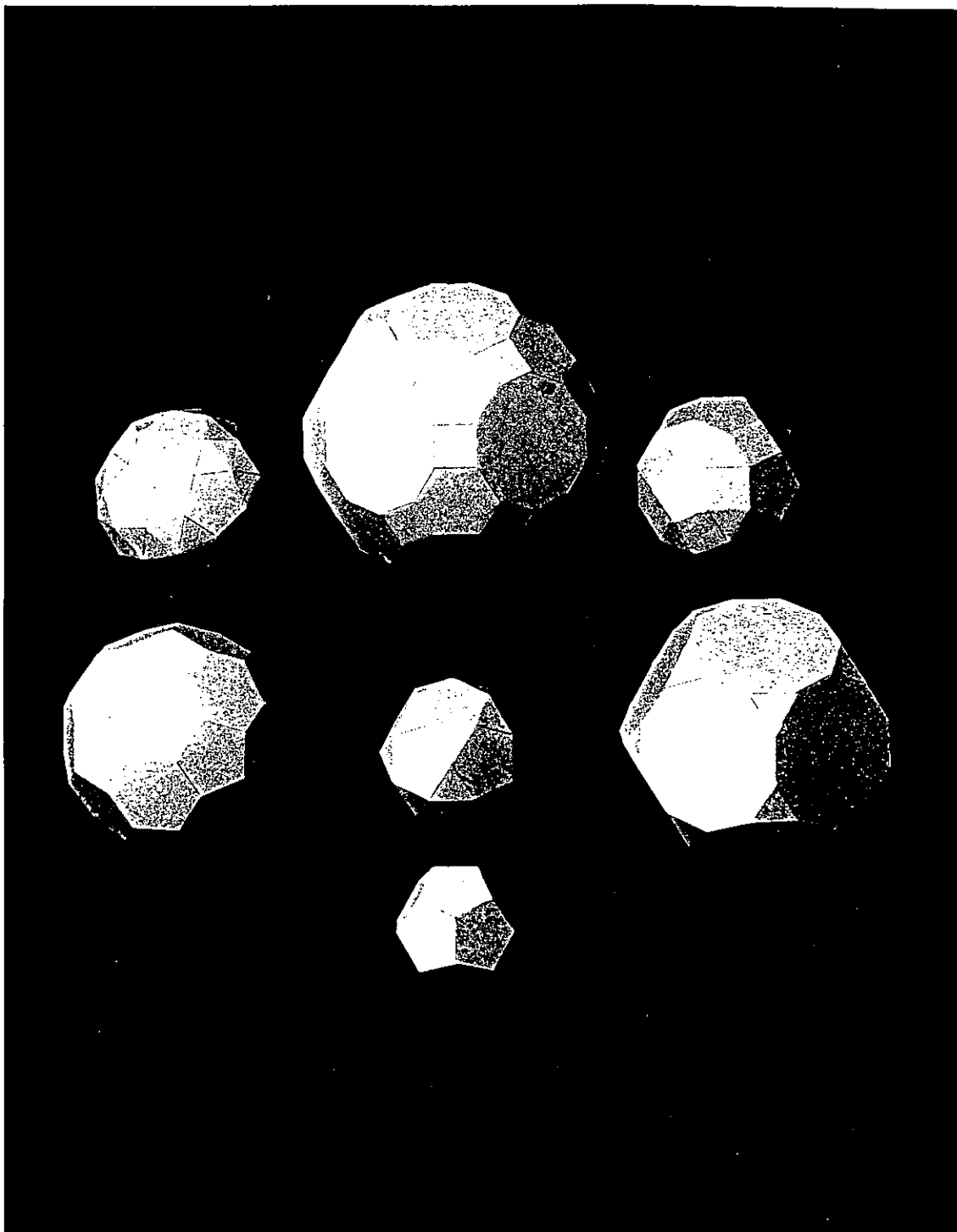
POLIEDROS REGULARES DUALES



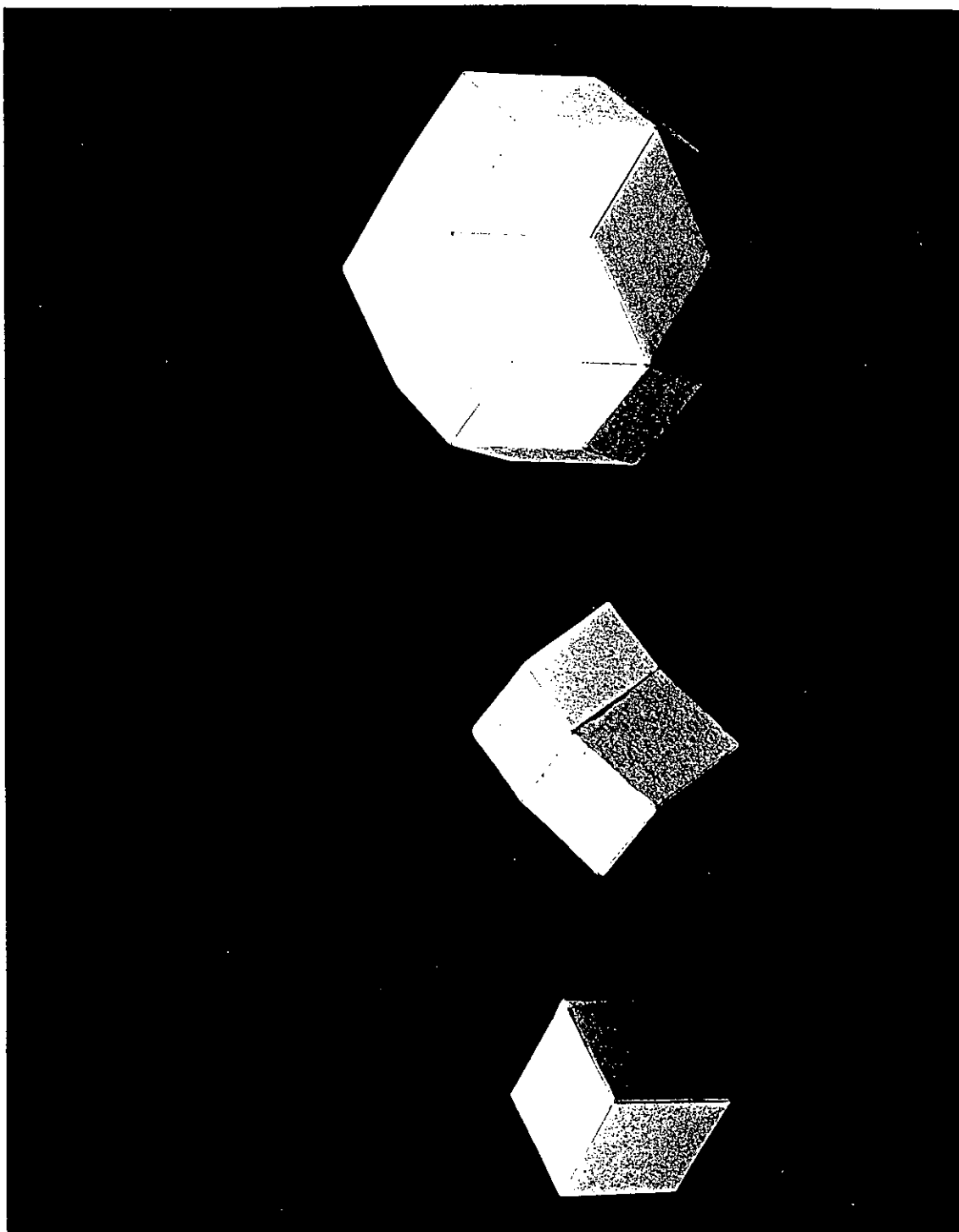
POLIEDROS EXCLUSIVOS DEL SISTEMA DEL TETRAEDRO



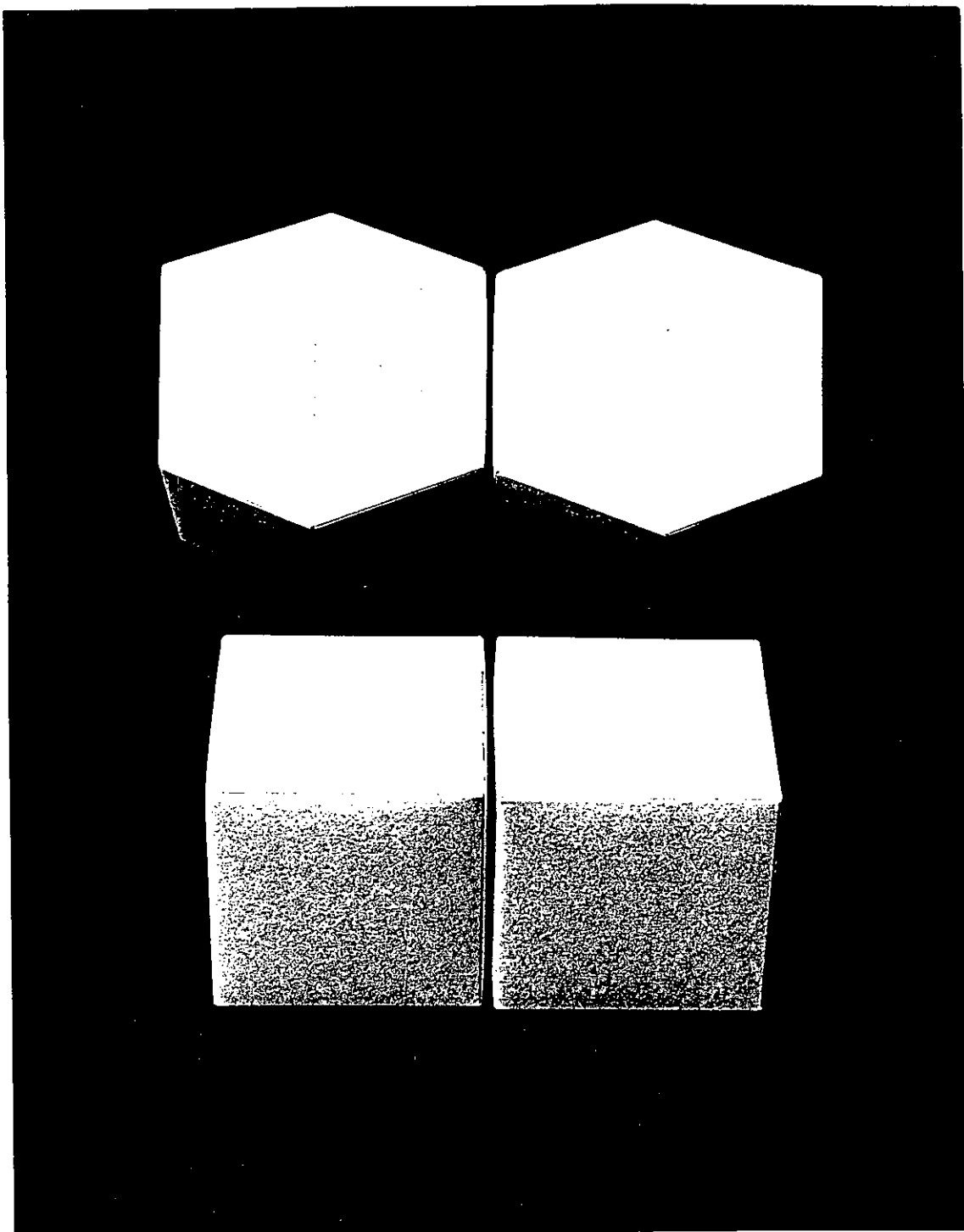
SISTEMA DEL CUBO



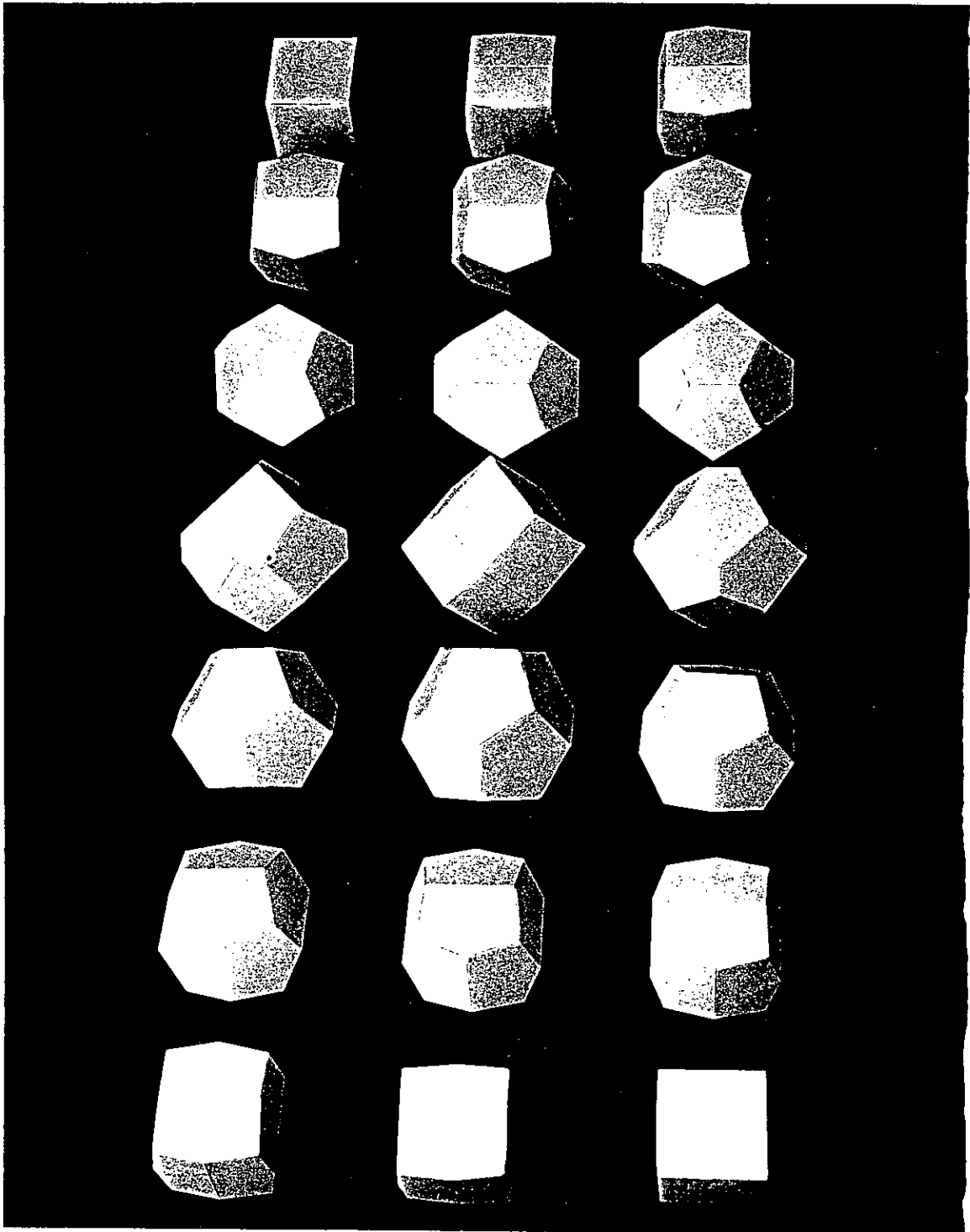
SISTEMA DEL DODECAEDRO



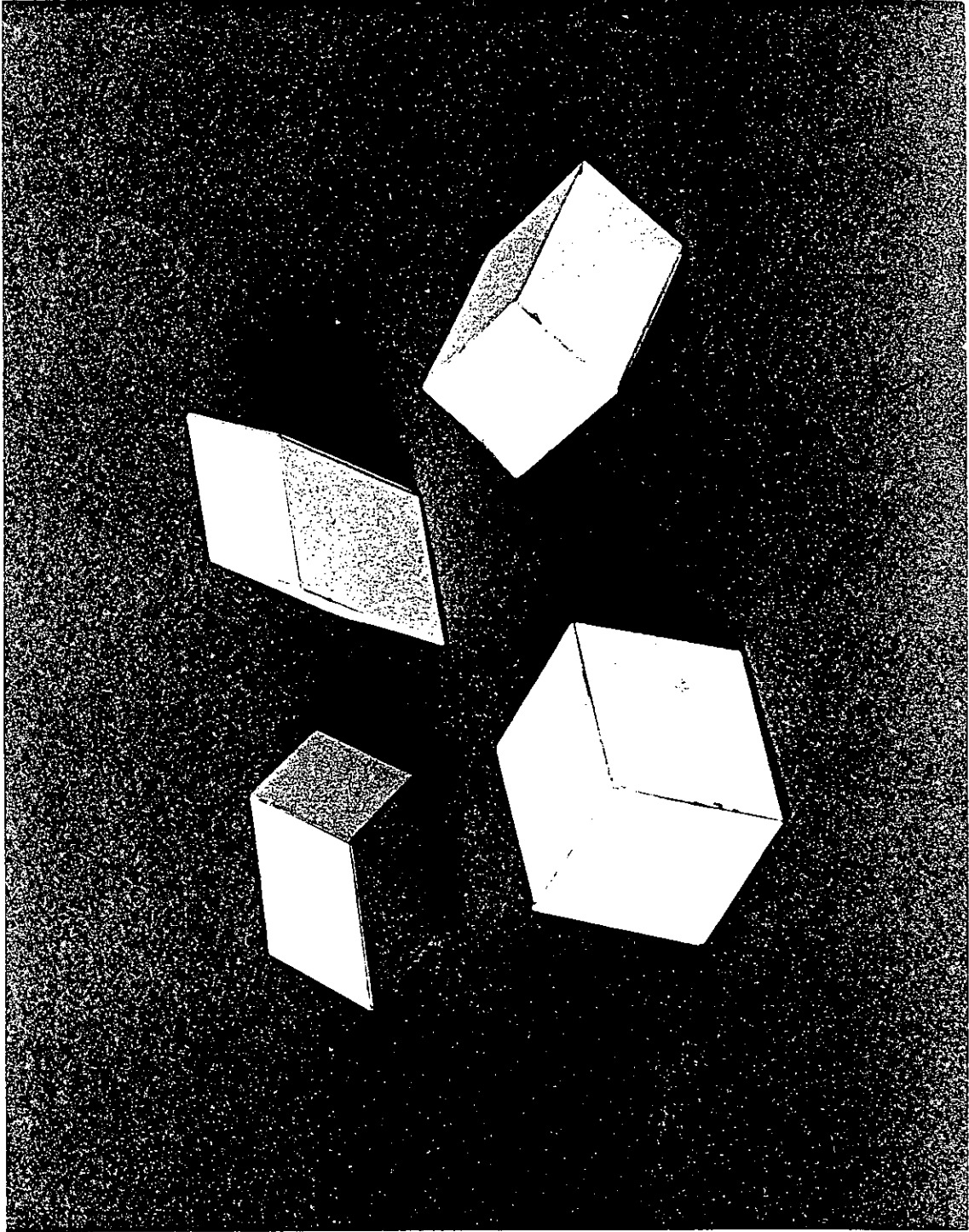
ROMBOEDROS DE LOS TRES SISTEMAS ABOVEDADOS



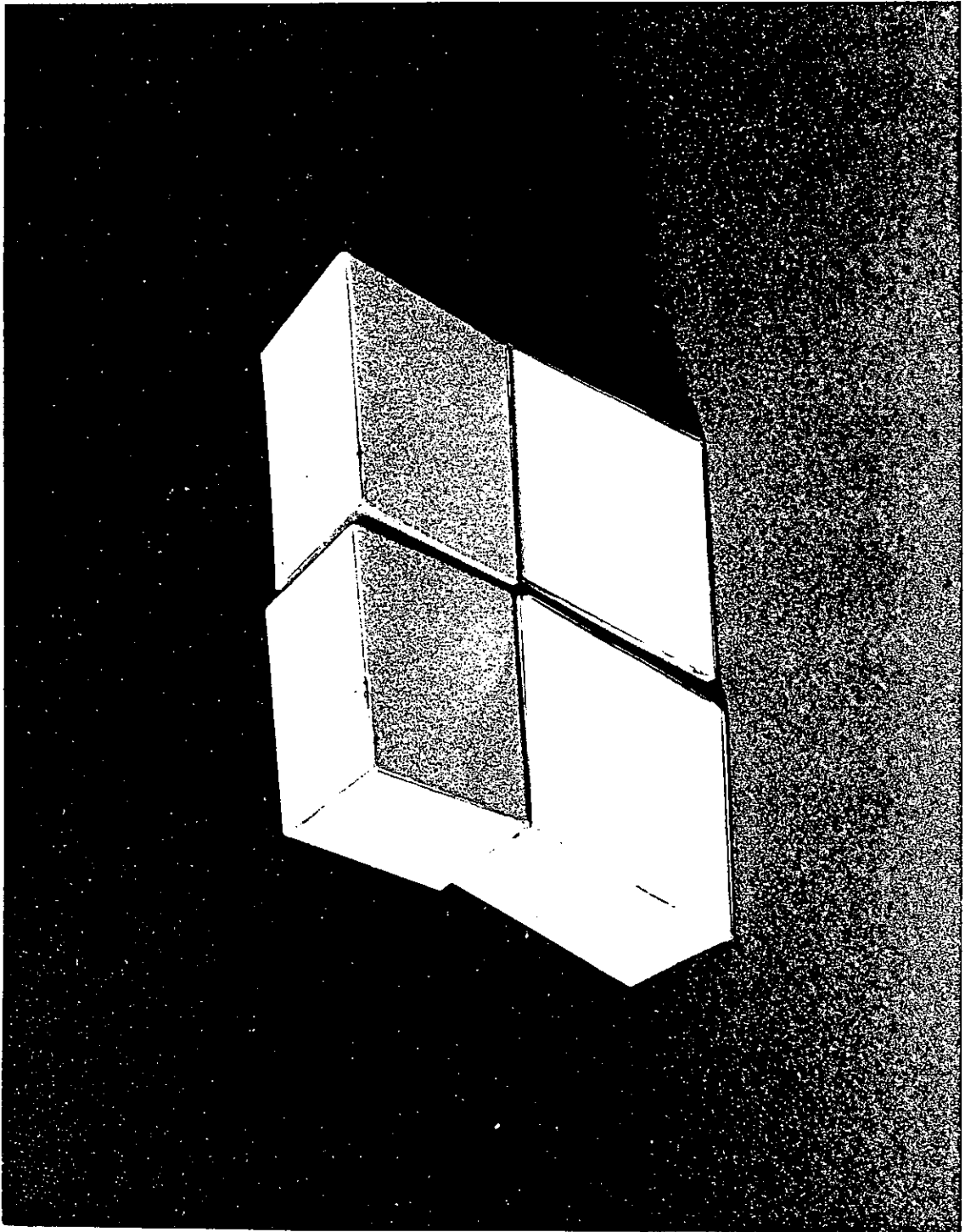
ROMBODECAEDROS Y CUBOS LLENAN EL ESPACIO



DODECAEDROS DERIVADOS DEL CUBO



ROMBOEDROS DE PENROSE



LOS ROMBOEDROS DE PENROSE LLENAN EL ESPACIO

BIBLIOGRAFIA

ABBOTT, Edwin A.

PLANILANDIA

Ed. Guadarrama, Madrid, 1976

Narración fantástica sobre un espacio bidimensional.

ALSINA, Claudi; TRILLAS, Enric.

LECCIONES DE ALGEBRA Y GEOMETRIA

Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1984

Conceptos básicos sobre las Teorías de Grafos, Simetría, Proporción y Geometría Projectiva.

AYRES, Frank.

TEORIA Y PROBLEMAS DE GEOMETRIA PROYECTIVA

Ed. McGraw-Hill, México, 1971

BAIR, Jacques; FOURNEAU, René.

ETUDE GEOMETRIQUE DES ESPACES VECTORIELS

Ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1980

Poliedros y politopos convexos.

CAMARA, Sixto.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA

Madrid, 1963

Ley de dualidad, geometría projectiva, líneas y superficies.

AMPEDELLI, Luigi.

FANTASIA Y LOGICA EN LA MATEMATICA

Ed. Labor, Barcelona, 1970

Manual de divulgación. Líneas y superficies.

COXETER, H. S. M.

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA

Ed. Limusa, México, 1984

Simetrías, grupos finitos, transformaciones geométricas, mosaicos, geometría projectiva, curvatura, geodésicas, topología. Geometría de cuatro dimensiones.

CRITCHLOW, Keith.

ORDER IN SPACE

Ed. Thames and Hudson, London, 1987

Síntesis gráfica sobre compartimentaciones planas y espaciales.

GARDNER, Martin.

NUEVOS PASATIEMPOS MATEMATICOS

Alianza Editorial, Madrid, 1984

Problemas topológicos, empaquetamientos, teselaciones y nudos.

RUEDAS, VIDA Y OTRAS DIVERSIONES MATEMATICAS

Ed. Labor, Barcelona, 1985

Poliedros y grafos.

GRATZ, W. M.

ENIGMAS, ENTRETENIMIENTOS Y CURIOSIDADES MATEMATICAS

Librería Bergua, Madrid, c. 1930

Recopilación de Matemáticas recreativas de autores antiguos, con apuntes curiosos sobre grafos (figuras de un solo trazo, laberintos, árboles, mosaicos, poliedros, juegos de Hamilton).

GHEORGHIU, Adrian; DRAGOMIR, Virgil.

GEOMETRY OF STRUCTURAL FORMS

Applied Science Publishers Ltd, London, 1978

Poliedros semirregulares.

De este libro se ha tomado el código de Schläfli, usado en cristalografía, que denomina a los poliedros con vértices iguales indicando sucesivamente el número de lados de cada polígono de los que rodean un vértice.

GHYKA, Mathila.

EL NUMERO DE ORO

Ed. Poseidón.

La proporción en la Geometría y en el Arte.

HILDEBRANDT, Stefan; TROMBA, Anthony.

MATEMATICA Y FORMAS OPTIMAS

Prensa Científica, Barcelona, 1990

Espumas poliédricas.

MANSFIELD, M. J.

INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA

Ed. Alhambra, Madrid, 1974

Conjuntos abiertos y cerrados.

MATTHEWS, W. H.

MAZES AND LABYRINTHS

Dover Publications, New York, 1970

Estudio histórico de los laberintos en Arquitectura y Jardinería.

PEDOE, Dan.

LA GEOMETRIA EN EL ARTE

Ed. Gustavo Gili, Barcelona.

Poliedros regulares y semirregulares.

WENNINGER, Magnus J.

POLYHEDRON MODELS

Cambridge University Press, Cambridge, 1985

WILSON, Robin J.

INTRODUCCION A LA TEORIA DE GRAFOS

Alianza Editorial, Madrid, 1983

REVISTAS

BODEN, nº 17, 1978. La Fundación Rafael Leoz.

INVESTIGACION Y CIENCIA:

Nº 72, Sept. 1982. La fecunda progenie del cubo.

Nº 96, sept. 1984. Matemática de las variedades tridimensionales.

William P. Thurston & Jeffrey R. Weeks.

Nº 106 Julio 1985. Cristales a altas presiones.

Röbert M. Hazen & Larry W. Finger.

Nº 113 Feb. 1986. Grupos finitos simples.

Daniel Gorenstein.

Nº 113 Feb. 1986. Caleidoscopios.

Jearl Walker.

Nº 114 Marzo 1986. Caleidoscopios.

Jearl Walker.

Nº 117 Junio 1986. Representaciones gráficas del hipercubo y la hiperesfera. A. K. Dewdney.

Nº 118 Julio 1986. Espumas acuosas.

James H. Aubert, Andrew M. Kraynik, Peter B. Rand.

Nº 119 Agosto 1986. Laberintos de espejos.

Jearl Walker.

Nº 121 Oct. 1986. Cuasicristales.

David R. Nelson.

Nº 131 Agosto 1987. Rompecabezas de dos y tres dimensiones.

Jearl Walker.

Nº 143 agosto 1988. Perowskitas.

Robert M. Hazen.

Nº 143 agosto 1988. Celosías.

A. K. Dewdney.

- Nº 146 Nov. 1988. Laberintos tridimensionales.
A.K. Dewdney.
Nº 156 Sept. 1989. Zeolitas sintéticas.
George T. Kerr.
Nº 161 Feb. 1990. Microagregados.
Michael A. Duncan & Dennis H. Rouvray.
Nº 166 Julio 1990. Pavimentos y teselaciones.
Ian Stewart.
Nº 167 Agosto 1990. Microagregados metálicos.
M. Pilar Iñiguez & Julio A. Alonso.
Nº 168 Sep. 1990. Teoría de Ramsey (sobre configuraciones regulares)
Ronald L. Graham & Joel H. Spencer.
Nº 169 Oct. 1990. Superconductores (estructuras planas en los mismos).
Robert J. Cava.
Nº 175 Abril 1991. Laberintos.
Ian Stewart.

SCIENTIFIC AMERICAN:

- Nº 2, 1965. Juegos matemáticos.
Nº 10, 1968. La serie de Fibonacci.

TECHNIQUE & ARCHITECTURE:

- Nº 309, 1976. Possibilités des Structures Spatiales.
Nº 320, 1978. Structures Spatiales. Bilan et tendances.

TOPOLOGIE STRUCTURALE. Universidad de Montreal

INDICE GENERAL

Introducción	I
1. Angulos poliedros	1
1.1. Planteamiento teórico	1
1.1.1. Un polígono en el espacio	1
1.1.2. Dos polígonos con un lado común	2
1.1.3. Tres polígonos con un vértice común	2
1.1.4. Más de tres polígonos con un vértice común	6
1.1.5. Angulos poliedros convexos	6
1.1.6. Angulos poliedros inscriptibles en la esfera	7
1.1.7. El radio de la esfera, variable independiente	9
1.1.8. El diedro de dos caras	9
1.1.9. Angulo que forman las aristas contiguas a la común	10
1.1.10. Triedro con una cara variable	13
1.1.11. Cómo crece el triedro con el radio de la esfera	14
1.1.12. Angulo tetraedro	18
1.1.13. Angulo pentaedro	20
1.1.14. Y no hay más	20
1.2. Formación y clasificaciones	25
1.2.1. Procedimiento	25
1.2.2. Notación	25
1.2.3. Dos esferas	26
1.2.4. Espacio cubierto	26
1.2.5. Espacio segregado	26
1.2.6. Defecto plano	28
1.2.7. Resolución de triedros	29
1.2.8. Tetraedros y pentaedros	29
1.2.9. La circunferencia de los vértices contiguos a V_0	29

1.2.10. Estudio plano de ángulos poliedros abovedados	30
1.2.11. Polígonos regulares	31
1.2.12. La esfera de los vértices en función del radio de la circunferencia de los vértices contiguos	34
1.2.13. Casos posibles de poliedros abovedados	36
1.2.13.1. Triedros (a, b, c)	36
1.2.13.2. Tetraedros	38
1.2.13.2.1. Caso (a, a, a, a)	38
1.2.13.2.2. Caso (a, a, a, b)	39
1.2.13.2.3. Caso (a, b, a, b)	39
1.2.13.2.4. Caso (a, a, b, b)	41
1.2.13.2.5. Caso (a, b, a, c)	41
1.2.13.2.6. Casos (a, a, b, c), (a, a, c, b)	41
1.2.13.3. Pentaedros	41
1.2.13.3.1. Caso (a, a, a, a, a)	41
1.2.13.3.2. Caso (a, a, a, a, b)	43
1.2.13.3.3. Caso (a, a, a, b, b)	43
1.2.13.3.4. Caso (a, a, b, a, b)	43
1.2.13.4. Exaedro	43
1.2.13.5. Ejemplos de resolución	45
1.2.13.5.1. Triedro (3, 4, 5)*	45
1.2.13.5.2. Pentaedro (3, 3, 3, 3, 4)CA	47
1.2.13.5.3. Pentaedro (3, 3, 3, 3, 5)DA	48
1.2.14. Relación de los poliedros abovedados	50
1.2.14.1. Triedros	50
1.2.14.2. Poliedros de más de tres caras	51
1.2.15. Lista general de poliedros	51
1.2.15.1. Poliedros regulares	52
1.2.15.2. Poliedros no regulares	52

1.2.15.2.1. Con dos tipos de polígonos	52
1.2.15.2.2. Con tres tipos de polígonos	54
1.2.16. Formas planas	57
1.2.17. El número de los poliedros	58
1.2.18. Representación diédrica de los ángulos poliedros	62
2. Las redes planas	88
2.1. Las simetrías del polígono	89
2.2. Sistemas de simetría	89
2.2.1. Sistemas anisótropos	92
2.2.2. Sistemas isótropos	92
2.3. Mosaicos	94
3. Formas abovedadas	111
3.1. Simetrías del polígono en el espacio	111
3.2. Sistemas de simetría	111
3.2.1. Sistemas anisótropos	122
3.2.2. Sistemas isótropos	123
3.3. Poliedros	125
4. Compartimentación superficial del plano y la esfera	147
4.1. Los romboedros	148
4.2. Los módulos de los poliedros isótropos	149
4.3. Los módulos de los poliedros anisótropos	167
5. Poliedros regulares duales y romboedros	172
6. Poliedros semirregulares	192
6.1. Poliedros generadores de los semirregulares	195
6.2. Poliedros achatantes	196
6.2.1. Poliedros achatantes abovedados	196
6.2.2. Poliedros achatantes planos	196
6.2.3. Los módulos de los poliedros achatantes	212
6.2.4. Poliedros achatantes y romboedros	212

6.3. Poliedros semirregulares	212
7. Compartimentación simétrica del espacio	237
7.1. Compartimentación no isótropa	237
7.2. Compartimentación isótropa	238
7.2.1. Sistema del cubo	238
7.2.1.1. Redes duales	238
7.2.1.2. Redes con tres tipos de poliedros	241
7.2.1.3. Redes romboédricas	251
7.2.2. Sistema del tetraedro	255
7.2.3. Sistema del dodecaedro	272
7.3. Compartimentaciones regulares y semirregulares	291
8. Módulos mínimos en el espacio	292
8.1. Sistema del tetraedro	292
8.1.1. Poliedros derivados de los tetraedros básico y dual	298
8.1.1.1. Tetraedro básico truncado	301
8.1.1.2. Octaedro	305
8.1.1.3. Tetraedro dual truncado	305
8.1.1.4. Tetraedro dual	312
8.1.2. Rombitetratetraedros	312
8.1.2.1. Cuboctaedro	312
8.1.2.2. Octaedro truncado	318
8.1.3. Resumen	325
8.1.4. Tetraedros duales e inversión	334
8.2. Sistema del cubo	340
8.2.1. Poliedros derivados del cubo y el octaedro	340
8.2.1.1. Cubo truncado	340
8.2.1.2. Cuboctaedro	347
8.2.1.3. Octaedro truncado	349
8.2.1.4. Octaedro con cuboctaedro como espacio complementario	349
8.2.1.5. Octaedro con cubo truncado como complementario	352

8.2.2. Rombicuboctaedros	352
8.2.2.1. Rombicuboctaedro	352
8.2.2.2. Gran rombicuboctaedro	359
8.2.3. Resumen	362
8.2.4. Dualidad e inversión	363
8.3. Sistema del dodecaedro	372
8.3.1. Poliedros derivados del dodecaedro y del icosaedro	377
8.3.2. Rombiicosidodecaedros	377
8.3.3. Resumen	377
9. División pentagonal del plano	390
9.1. Rombos de Penrose	394
9.2. Mosaicos de Penrose	398
9.3. Clases de vértices del mosaico	402
10. División pentagonal del espacio	414
10.1. Romboedros de Penrose	414
10.2. Compartimentación tridimensional de Penrose	444
10.3. Clases de aristas del mosaico	451
Conclusiones	552
Bibliografía	571

INDICE DE ILUSTRACIONES

Capítulo 1. ANGULOS POLIEDROS

1.1.	Polígonos regulares con un vértice común.	
1.1.1.	Triedro formado por tres polígonos.	
1.1.1.a	Los vértices, sobre una superficie esférica	4
1.1.1.b	Desarrollo sobre un plano	5
1.1.2.	Plano de simetría de un diedro	8
1.1.3.	Plano de la arista y el centro de la esfera	8
1.1.4.	Mínima esfera circunscriptible	8
1.1.5.	Esfera máxima (plano)	8
1.1.6.	Diedro de dos caras.	8
1.1.7.	Diedro correspondiente a la esfera mínima	8
1.1.8.	El triedro y la esfera con centro en el vértice	12
1.1.9.	Triángulo esférico correspondiente al triedro	12
1.1.10.	Angulo tetraedro formado al separar dos caras	15
1.1.11.	El lado añadido al triángulo esférico	15
1.1.12.	Comienzo del proceso de separación de dos caras	15
1.1.13.	Crecimiento del ángulo al separar dos caras	19
1.1.14.	Crecimiento infinitesimal	19
1.1.15.	Angulo pentaedro: diedros y caras	21
1.1.16.	Angulo exaedro plano	21
1.1.17.	Formación de ángulos poliedros con caras regulares.	
1.1.17.a	Formación de un triedro	22
1.1.17.b	Formación de un tetraedro	23
1.1.17.c	Formación de un pentaedro	24
1.2.	Estudio geométrico de los ángulos poliedros.	
1.2.1.	Los vértices contiguos al común, sobre una circunferencia	27

1.2.2.	Magnitudes a considerar en un polígono regular	27
1.2.3.	Relación entre el polígono y la circunferencia de los vértices contiguos	35
1.2.4.	Triedro (a, b, c)	37
1.2.5.	Tetraedro (a, a, a, a)	37
1.2.6.	Tetraedro (a, a, a, b)	37
1.2.7.	Tetraedro (a, b, a, b)	40
1.2.8.	Tetraedro (a, a, b, b)	40
1.2.9.	Tetraedro (a, b, a, c)	40
1.2.10.	Tetraedro (a, a, b, c)	42
1.2.11.	Pentaedro (a, a, a, a, a)	42
1.2.12.	Pentaedro (a, a, a, a, b)	42
1.2.13.	Pentaedro (a, a, a, b, b)	44
1.2.14.	Pentaedro (a, a, b, a, b)	44
1.2.15.	Exaedro (a, a, a, a, a, a)	44
1.2.16.	Resolución del caso (3, 4, 5)	46
1.2.17.	Resolución del caso (3, 3, 3, 3, 4)	46
1.2.18.	Resolución del caso (3, 3, 3, 3, 5)	49

Desarrollo plano y representación diédrica de los ángulos poliedros de caras regulares, desde la página 63

Capítulo 2. LAS REDES PLANAS

2.1.	La dualidad entre mosaicos regulares.	
2.1.a	Triángulos y exágonos	91
2.1.b	Cuadrados	91
2.2.	Mosaicos semirregulares: casos especiales.	
2.2.a	Caso (3, 3, 3, 4, 4)	93
2.2.b	Caso (3, 3, 4, 3, 4)	93

Mosaicos planos y sus redes de simetría desde la página 95

Capítulo 3. FORMAS ABOVEDADAS

3.1.	Sistema del tetraedro.	
3.1.a	Módulo elemental	114
3.1.b	Ejes y planos de simetría	115
3.2.	Sistema del cubo.	
3.2.a	Módulo elemental	116
3.2.b	Ejes y planos de simetría	117
3.3.	Sistema del dodecaedro.	
3.3.a	Módulo elemental	118
3.3.b	Ejes y planos de simetría	119
	Mosaicos esféricos y sus redes de simetría desde la pág.	126

Capítulo 4. COMPARTIMENTACION SUPERFICIAL DEL PLANO Y LA ESFERA

4.1.	Redes planas duales y sus romboedros.	
4.1.a	Sistema exagonal	150
4.1.b	Sistema cuadrado	150
4.2.	Redes esféricas duales y sus romboedros.	
4.2.a	Sistema tetraédrico	151
4.2.b	Sistema cúbico	152
4.2.c	Sistema dodecaédrico	153
4.3.	Módulos de los poliedros isótropos.	
4.3.a	Poliedros básicos	154
4.3.b	Poliedros duales de los básicos	155
4.3.c	Romboedros	156
4.3.d	Polipoliedros	157
4.3.e	Poliedros básicos truncados	158
4.3.f	Poliedros duales truncados	159
4.3.g	Rombipolipoliedros	160
4.3.h	Grandes rombipolipoliedros	161

4.3.i	Poliedros achatados (semirregulares)	162
4.3.j	Poliedros achatados (incluido el icosaedro)	164
4.3.k	Poliedros achatados con planos de simetría	165
4.4.	El icosaedro como tetraedro achatado	166
4.5.	Módulo del mosaico anisótropo (3, 3, 3, 4, 4)	168
4.6.	Módulos de prismas y antiprismas.	
4.6.a	Prisma (4, 4, n)	168
4.6.b	Antiprisma (3, 3, 3, n); módulo isósceles	168
4.6.c	Antiprisma (3, 3, 3, n); módulo escaleno	168
4.7.	Poliedros abovedados anisótropos.	
4.7.a	Prisma proyectado sobre la esfera	169
4.7.b	Antiprisma proyectado sobre la esfera	170

Capítulo 5. POLIEDROS REGULARES DUALES Y ROMBOEDROS

	Sistema del tetraedro desde la página	174
	Sistema del cubo desde la página	180
	Sistema del dodecaedro desde la página	186

Capítulo 6. POLIEDROS SEMIRREGULARES

6.1.	Poliedros achatantes abovedados.	
6.1.a	Sistema del tetraedro; dodecaedro pentagonal	197
6.1.b	Sistema del cubo; icositetraedro pentagonal	198
6.1.c	Sistema del dodecaedro; exacontaedro pentagonal	199
6.2.	Poliedros achatantes planos.	
6.2.a	Sistema cuadrado	200
6.2.b	Sistema exagonal	201
6.3.	Módulos de los poliedros achatantes.	
6.3.a	Módulos triangulares isósceles	202
6.3.b	Módulos rómbicos (poliedros con planos de simetría)	203

6.4.	Poliedros achatantes y romboedros.	
6.4.a	Sistema cuadrado	204
6.4.b	Sistema exagonal	204
6.4.c	Sistema tetraédrico	205
6.4.d	Sistema cúbico	206
6.4.e	Sistema dodecaédrico	207
6.5.	Romboedros de caras no planas (cada rombo origina dos triángulos).	
6.5.a	Icositetraedro triangular	208
6.5.b	Exacontaedro triangular	209
6.6.	Poliedros achatantes abovedados sin planos de simetría.	
6.6.a	Icositetraedro pentagonal	210
6.6.b	Exacontaedro pentagonal	211
	Mosaicos semirregulares desde la página	213
	Poliedros semirregulares del sistema del tetraedro desde	219
	Poliedros semirregulares del sistema del cubo desde	225
	Poliedros semirregulares del sistema del dodecaedro desde la página	231

Capítulo 7. COMPARTIMENTACION SIMETRICA DEL ESPACIO

7.1.	Compartimentaciones anisótropas.	
7.1.a	Regular	239
7.1.b	Semirregular	240
7.2.	Compartimentaciones derivadas del cubo y el octaedro.	
7.2.a	Red cúbica básica	242
7.2.b	Cubos truncados y octaedros	243
7.2.c	Cuboctaedros y octaedros	244
7.2.d	Octaedros truncados	245
7.2.e	Octaedros y cuboctaedros	246

7.2.f	Octaedros y cubos truncados	247
7.2.g	Red cúbica dual de la básica	248
7.3.	Redes cúbicas duales	249
7.4.	Centros de las redes cúbicas	250
7.5.	Compartimentaciones derivadas del cubo, el octaedro y el rombododecaedro.	
7.5.a	Rombicuboctaedros, cuboctaedros y cubos	252
7.5.b	Grandes rombicuboctaedros, octaedros truncados y cubos	253
7.6.	Centros de la red cúbica completa	254
7.7.	Cubos y rombododecaedros de la clase I.	
7.7.a	Cubos	256
7.7.b	Rombododecaedros	257
7.8.	Cubos y rombododecaedros de la clase II.	
7.8.a	Cubos	258
7.8.b	Rombododecaedros	259
7.9.	Rombododecaedros de las clases I y II	260
7.10.	Centros de la red rombododecaédrica	261
7.11.	Tetraedros y octaedros	263
7.12.	Centros de la red tetraoctaédrica	264
7.13.	Los poliedros de la red tetraoctaédrica.	
7.13.a	Octaedros	265
7.13.b	Tetraedros de la clase I (posición básica)	266
7.13.c	Tetraedros de la clase II (posición dual)	267
7.14.	Romboedros en la red tetraoctaédrica.	
7.14.a	El octaedro y los romboedros derivados de él	268
7.14.b	Romboexaedros isótropo y anisótropo	269
7.14.c	Descomposiciones semirregulares del romboexaedro	270
7.14.d	Despieces semirregulares del romboexaedro	271

7.15.	Agrupaciones $T_1 + 0 + T_2$: romboedros	273
7.16.	Agrupaciones $T_1 + T_1T + T_2T + T_2$	
7.16.a	Romboedros	274
7.16.b	Tetraedros y tetraedros truncados	275
7.17.	Centros de la red tetraédrica	276
7.18.	Los poliedros de la red tetraédrica.	
7.18.a	Tetraedros truncados	277
7.18.b	Tetraedros truncados de la clase I (posición básica)	278
7.18.c	Tetraedros truncados de la clase II (posición dual)	279
7.18.d	Tetraedros	280
7.19.	Centros de los tetraedros	281
7.20.	El romboedro.	
7.20.a	El romboedro y sus partes elementales	282
7.20.b	Red de centros del romboedro	283
7.20.c	Despiece del romboedro en tetraedros y octaedros	284
7.20.d	Reagrupamiento en tetraedros y octaedros	285
7.20.e	Red de centros de tetraedros y octaedros	286
7.20.f	Despiece de tetraedros y octaedros	287
7.20.g	Reagrupamiento en tetraedros y tetraedros truncados	288
7.20.h	Red de centros de tetraedros y tetraedros truncados	289
7.20.i	Despiece de tetraedros y tetraedros truncados	290
7.21.	Tetraedros truncados, cuboctaedros y octaedros truncados	291 bis

Capítulo 8. MODULOS MINIMOS EN EL ESPACIO

8.1.	Sistema tetraédrico.	
8.1.1.	Tetraedro	293
8.1.2.	Descomposición en módulos	294
8.1.3.	Ejes de simetría	295
8.1.4.	Planos de simetría	296
8.1.5.	Módulo elemental del tetraedro básico	297
8.1.6.	Red de tetraedros y tetraedros truncados.	
8.1.6.a	Tetraedro truncado inscrito en el básico	302
8.1.6.b	Módulo del tetraedro truncado	303
8.1.6.c	Tetraedro truncado apiramidado	304
8.1.7.	Red de tetraedros y octaedros.	
8.1.7.a	Octaedro inscrito en el tetraedro	306
8.1.7.b	Módulo del octaedro	307
8.1.7.c	Octaedro apiramidado en cuatro caras	308
8.1.7.d	Octaedro apiramidado (rombododecaedro)	309
8.1.8.	Red de tetraedros truncados y tetraedros.	
8.1.8.a	Tetraedro dual truncado inscrito en el básico	310
8.1.8.b	Módulo del tetraedro dual truncado	311
8.1.9.	Red de tetraedros y octaedros.	
8.1.9.a	Tetraedro dual inscrito en el básico	313
8.1.9.b	Módulo del tetraedro dual	314
8.1.9.c	Tetraedro apiramidado (cubo)	315
8.1.10.	Poliedros obtenidos por intersección de tetraedros duales, y sus módulos	316
8.1.11.	Rombitetratetraedros inscritos en el tetraedro básico	317
8.1.12.	Red de octaedros y cuboctaedros.	
8.1.12.a	Cuboctaedro inscrito en el tetraedro	319

8.1.12.b	Descomposición del cuboctaedro	320
8.1.12.c	Red de centros del cuboctaedro	321
8.1.12.d	Cuboctaedro y octaedros inscritos en el tetraedro	322
8.1.12.e	Cuboctaedro inscrito en el tetraedro	323
8.1.12.f	Módulo del cuboctaedro	324
8.1.13.	Red de octaedros truncados.	
8.1.13.a	Octaedro truncado inscrito en el tetraedro	326
8.1.13.b	Descomposición del octaedro truncado	327
8.1.13.c	Red de centros del octaedro truncado	328
8.1.13.d	Octaedro truncado inscrito en el tetraedro	329
8.1.13.e	Módulo del octaedro truncado	330
8.1.14.	Los rombitetratetraedros inscritos en el rombohexaedro	335
8.1.15.	Descomposiciones del módulo del tetraedro básico	336
8.1.16.	Módulos obtenidos por intersección de módulos.	
8.1.16.a	De dos tetraedros duales	337
8.1.16.b	De dos tetraedros duales y un rombohexaedro	338
8.1.17.	Módulos del sistema del tetraedro que llenan el espacio, descompuestos en sus elementos	339
8.2.	Sistema cúbico.	
8.2.1.	Descomposición del cúbo en módulos	341
8.2.2.	Ejes de simetría	342
8.2.3.	Planos de simetría	343
8.2.4.	Módulo elemental del cubo	344
8.2.5	Módulo del cubo truncado	345
8.2.6.	Módulo del cuboctaedro	348
8.2.7.	Módulo del octaedro truncado	350
8.2.8.	Módulo del octaedro	351

8.2.9.	Módulo del octaedro complementario del cubo truncado	353
8.2.10.	Poliedros obtenidos por intersección de cubos y octaedros, y sus módulos	354
8.2.11.	Rombicuboctaedros inscritos en el cubo	355
8.2.12.	Módulo del rombicuboctaedro	356
8.2.13.	Módulo del gran rombicuboctaedro	360
8.2.14.	Los rombicuboctaedros inscritos en el rombododecaedro.	
8.2.14.a	Rombicuboctaedro	364
8.2.14.b	Gran rombicuboctaedro	365
8.2.15.	Rombododecaedro circunscrito al cubo y módulos elementales de ambos	366
8.2.16.	Descomposiciones del módulo elemental del cubo.	
8.2.16.a	En dos regiones	367
8.2.16.b	En tres regiones	368
8.2.17.	Módulos obtenidos por intersección de módulos.	
8.2.17.a	Del cubo y el octaedro	369
8.2.17.b	Del cubo, el octaedro y el rombododecaedro	370
8.2.18.	Módulo del rombododecaedro, compuesto por los de dos cubos de distinta clase	371
8.3.	Sistema dodecaédrico.	
8.3.1.	Descomposición del dodecaedro en módulos	373
8.3.2.	Ejes de simetría	374
8.3.3.	Planos de simetría	375
8.3.4.	Módulo elemental del dodecaedro	376
8.3.5.	Módulo del dodecaedro truncado	378
8.3.6.	Módulo del icosidodecaedro	379
8.3.7.	Módulo del icosaedro truncado	380

8.3.8.	Módulo del icosaedro	381
8.3.9.	Poliedros obtenidos por intersección de dodecaedros e icosaedros, y sus módulos	382
8.3.10.	Rombiicosidodecaedros inscritos en el dodecaedro	383
8.3.11.	Módulo del rombiicosidodecaedro	384
8.3.12.	Módulo del gran rombiicosidodecaedro	385
8.3.13.	Los rombiicosidodecaedros inscritos en el rombotriacontraedro.	
8.3.13.a	Rombiicosidodecaedro	386
8.3.13.b	Gran rombiicosidodecaedro	387
8.3.14.	Módulos obtenidos por intersección de módulos.	
8.3.14.a	Del dodecaedro y el icosaedro	388
8.3.14.b	Del dodecaedro, el icosaedro y el rombotriacontaedro	389

Capítulo 9. DIVISION PENTAGONAL DEL PLANO

9.1.	Redes pentagonales.	
9.1.1.	Decaedro pentagonal de tercera especie	391
9.1.2.	Red plana derivada del pentágono	392
9.1.3.	Rombos de la red pentagonal	395
9.2.	Las dos clases de rombos de Penrose	396
9.3.	Mosaicos de Penrose.	
9.3.1.	Mosaico con rombos <u>a</u> y <u>b</u>	399
9.3.2.	Mosaico con rombos <u>a</u>	400
9.3.3.	Mosaico con rombos <u>b</u>	401
	Los distintos vértices posibles, desde la página	405

Capítulo 10. DIVISION PENTAGONAL DEL ESPACIO

10.1	Rombos formados por los módulos del pentágono y el decágono.	
------	--	--

10.1.1.	Rombo <u>b</u>	415
10.1.2.	Rombo <u>a</u>	416
10.2.	Icosaedro y rombos derivados.	
10.2.1.	Vistas relacionadas con un eje quinario	418
10.2.2.	Vistas relacionadas con un eje ternario	419
10.3.	Cara de los romboedros	421
10.4.	Triángulos esféricos asociados a los triedros de los romboedros.	
10.4.1.	Triedro (α, α, α)	422
10.4.2.	Triedro (α, α, β)	423
10.4.3.	Triedro (α, β, β)	424
10.4.4.	Triedro (β, β, β)	425
10.5.	Icosaedro y romboedros; vistas relativas a un eje ternario.	
10.5.1.	Romboedro <u>b</u>	428
10.5.2.	Romboedro <u>a</u>	429
10.6.	Romboedros <u>a</u> y <u>b</u>	430
10.7.	Los módulos elementales de los romboedros.	
10.7.1.	Romboedro <u>b</u>	434
10.7.2.	Romboedro <u>a</u>	435
10.8.	Vistas de los romboedros en relación con las del icosaedro.	
10.8.1.	Romboedro <u>b</u> ; vértice (α, α, α) en el centro del icosaedro	436
10.8.2.	Romboedro <u>b</u> ; vértice (α, β, β) en el centro del icosaedro	437
10.8.3.	Romboedro <u>a</u> ; vértice (β, β, β) en el centro del icosaedro	438
10.8.4.	Romboedro <u>a</u> ; vértice (α, α, β) en el centro del icosaedro	439

10.9.	Vistas de los romboedros en relación con la red esférica del sistema del dodecaedro.	
10.9.1.	Romboedro <u>b</u> ; vértice (α, α, α) en el centro de la esfera	440
10.9.2.	Romboedro <u>b</u> ; vértice (α, β, β) en el centro de la esfera	441
10.9.3.	Romboedro <u>a</u> ; vértice (β, β, β) en el centro de la esfera	442
10.9.4.	Romboedro <u>a</u> ; vértice (α, α, β) en el centro de la esfera	443
10.10.	Icosaedro y romboedros; vistas relativas a un eje quinario.	
10.10.1.	Romboedro <u>b</u>	445
10.10.2.	Romboedro <u>a</u>	446
10.11.	Aristas regulares de la red espacial de romboedros.	
10.11.1.	Icosaedro y corona de romboedros <u>a</u>	448
10.11.2.	Icosaedro y corona de romboedros <u>b</u>	449
	Vistas del icosaedro	455
	Clases de aristas posibles de la red en relación con las vistas del icosaedro desde la página	456
	LAMINAS FUERA DEL TEXTO	
	Los poliedros regulares	561
	Poliedros regulares duales	562
	Poliedros exclusivos del sistema del tetraedro	563
	Sistema del cubo	564
	Sistema del dodecaedro	565
	Romboedros de los tres sistemas abovedados	566
	Rombododecaedros y cubos llenan el espacio	567

Dodecaedros derivados del cubo	568
Romboedros de Penrose	569
Los romboedros de Penrose llenan el espacio	570

UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Servicio de Bibliotecas



1700744460