

LA COMPARTIMENTACION DEL ESPACIO
TOMO I

TESIS DOCTORAL DE
JUAN JOSE GUIRADO FERNANDEZ
DIRIGIDA POR
D. JOSE ANTONIO FRANCO TABOADA

DEPARTAMENTO DE REPRESENTACION
Y TEORIA ARQUITECTONICA
DE LA UNIVERSIDAD DE A CORUÑA
1991

LA COMPARTIMENTACION DEL ESPACIO

TOMO I

TESIS DOCTORAL DE

JUAN JOSE GUIRADO FERNANDEZ

DIRIGIDA POR EL DOCTOR

D. JOSE ANTONIO FRANCO TABOADA

DEPARTAMENTO DE REPRESENTACION

Y TEORIA ARQUITECTONICA

DE LA UNIVERSIDAD DE A CORUÑA

1991

INDICE DEL TOMO I

Introducción	I
1. Angulos poliedros	1
1.1. Planteamiento teórico	1
1.1.1. Un polígono en el espacio	1
1.1.2. Dos polígonos con un lado común	2
1.1.3. Tres polígonos con un vértice común	2
1.1.4. Más de tres polígonos con un vértice común	6
1.1.5. Angulos poliedros convexos	6
1.1.6. Angulos poliedros inscriptibles en la esfera	7
1.1.7. El radio de la esfera, variable independiente	9
1.1.8. El diedro de dos caras	9
1.1.9. Angulo que forman las aristas contiguas a la común	10
1.1.10. Triedro con una cara variable	13
1.1.11. Cómo crece el triedro con el radio de la esfera	14
1.1.12. Angulo tetraedro	18
1.1.13. Angulo pentaedro	20
1.1.14. Y no hay más	20
1.12. Formación y clasificaciones	25
1.2.1. Procedimiento	25
1.2.2. Notación	25
1.2.3. Dos esferas	26
1.2.4. Espacio cubierto	26
1.2.5. Espacio segregado	26
1.2.6. Defecto plano	28
1.2.7. Resolución de triedros	29
1.2.8. Tetraedros y pentaedros	29

1.2.9. La circunferencia de los vértices contiguos a V_0	29
1.2.10. Estudio plano de ángulos poliedros abovedados	30
1.2.11. Polígonos regulares	31
1.2.12. La esfera de los vértices en función del radio de la circunferencia de los vértices contiguos	34
1.2.13. Casos posibles de poliedros abovedados	36
1.2.13.1. Triedros (a, b, c)	36
1.2.13.2. Tetraedros	38
1.2.13.2.1. Caso (a, a, a, a)	38
1.2.13.2.2. Caso (a, a, a, b)	39
1.2.13.2.3. Caso (a, b, a, b)	39
1.2.13.2.4. Caso (a, a, b, b)	41
1.2.13.2.5. Caso (a, b, a, c)	41
1.2.13.2.6. Casos (a, a, b, c), (a, a, c, b)	41
1.2.13.3. Pentaedros	41
1.2.13.3.1. Caso (a, a, a, a, a)	41
1.2.13.3.2. Caso (a, a, a, a, b)	43
1.2.13.3.3. Caso (a, a, a, b, b)	43
1.2.13.3.4. Caso (a, a, b, a, b)	43
1.2.13.4. Exaedro	43
1.2.13.5. Ejemplos de resolución	45
1.2.13.5.1. Triedro (3, 4, 5)*	45
1.2.13.5.2. Pentaedro (3, 3, 3, 3, 4)CA	47
1.2.13.5.3. Pentaedro (3, 3, 3, 3, 5)DA	48
1.2.14. Relación de los poliedros abovedados	50
1.2.14.1. Triedros	50
1.2.14.2. Poliedros de más de tres caras	51
1.2.15. Lista general de poliedros	51
1.2.15.1. Poliedros regulares	52

1.2.15.2. Poliedros no regulares	52
1.2.15.2.1. Con dos tipos de polígonos	52
1.2.15.2.2. Con tres tipos de polígonos	54
1.2.16. Formas planas	57
1.2.17. El número de los poliedros	58
1.2.18. Representación diédrica de los ángulos poliedros	62
2. Las redes planas	88
2.1. Las simetrías del polígono	89
2.2. Sistemas de simetría	89
2.2.1. Sistemas anisótropos	92
2.2.2. Sistemas isotropos	92
2.3. Mosaicos	94
3. Formas abovedadas	111
3.1. Simetrías del polígono en el espacio	111
3.2. Sistemas de simetría	111
3.2.1. Sistemas anisótropos	122
3.2.2. Sistemas isotropos	123
3.3. Poliedros	125
4. Compartimentación superficial del plano y la esfera	147
4.1. Los romboedros	148
4.2. Los módulos de los poliedros isotropos	149
4.3. Los módulos de los poliedros anisótropos	167
5. Poliedros regulares duales y romboedros	172
6. Poliedros semirregulares	192
6.1. Poliedros generadores de los semirregulares	195
6.2. Poliedros achatantes	196

6.2.1. Poliedros achatantes abovedados	196
6.2.2. Poliedros achatantes planos	196
6.2.3. Los módulos de los poliedros achatantes	212
6.2.4. Poliedros achatantes y romboedros	212
6.3. Poliedros semirregulares	212

LA COMPARTIMENTACION DEL ESPACIO

INTRODUCCION

Es finalidad de esta tesis el estudio de la división del espacio en partes de dimensiones finitas, con la máxima regularidad posible, esto es, con el mínimo número de formas diferentes, de modo que por repetición de módulos sencillos pueda llenarse totalmente un volumen cualquiera.

De entre las variadísimas modalidades de división del espacio en regiones limitadas, vamos a restringir este estudio a las que cumplan algunas condiciones.

En primer lugar la superficie que separe dos regiones será una cara plana; esta cara estará limitada por aristas rectilíneas. De esta manera cada región es un poliedro, y su superficie está formada por caras poligonales. Las caras serán polígonos convexos, y también los poliedros, es decir, tanto los ángulos planos como los diedros serán menores de 180° .

Como el poliedro más sencillo es el tetraedro, con cuatro caras, seis aristas y cuatro vértices, tales serán los números mínimos de tales elementos en la frontera de una región; y como el polígono más sencillo es el triángulo, el número mínimo de aristas y vértices de una cara es tres.

La frontera compartida por dos regiones puede ser una cara, o bien una arista común, o pueden sólo compartir un vértice. También pueden estar totalmente aisladas entre sí. Si una de estas regiones poliédricas está totalmente rodeada por otras, éstas serán al menos cuatro, porque siempre

habrá una por cada cara, pero podría haber más que caras, estando algunas en contacto a través de aristas y vértices. Un vértice interior de la compartimentación pertenecerá al menos a cuatro aristas, cuatro espacios y seis caras, mientras una arista interior es compartida por no menos de tres espacios y tres caras, y naturalmente siempre por dos vértices.

Además de las condiciones anteriores impondremos otras: todas las aristas serán de igual longitud, y los ángulos de cada cara iguales, con lo que las caras han de ser polígonos regulares, y por ello inscriptibles en circunferencias. Si las caras fueran todas idénticas restringiríamos el estudio a los poliedros regulares, pero como entonces las posibilidades de compartimentación serían muy reducidas, vamos a dar entrada a todos los poliedros de caras regulares y vértices iguales, condición esta última que extenderemos luego de los poliedros aislados a las compartimentaciones: en todas las que estudiaremos los vértices serán iguales, concurriendo en cada uno de ellos números iguales de los mismos poliedros, con las mismas caras y aristas en cada vértice.

Es natural que, con estas condiciones, puedan hacerse coincidir unas regiones con otras mediante operaciones geométricas que mantengan ángulos y distancias, traslación, giro y simetría, con lo que en definitiva lo que buscamos son sistemas de simetría que nos conduzcan a la repetición de módulos idénticos por medio de movimientos.

Se divide este trabajo en dos partes: en la primera, correspondiente al primer tomo, se estudian los poliedros aislados, mientras que la segunda parte, en el segundo tomo, se refiere a las agrupaciones de poliedros que llenan el espacio, incluyendo al final dos tipos de compartimentación, una del plano y otra del espacio, que sin ser regulares en sus vértices emplean un mínimo número de caras idénticas (dos para el plano y una sola para el espacio).

Comienza la primera parte (capítulo 1) estudiando los vértices de los poliedros aisladamente, como agrupaciones de polígonos regulares que comparten todos un vértice y cada dos una arista. Inmediatamente se ve que las agrupaciones de tres polígonos son inscriptibles en una esfera y las de más de tres son deformables, pudiéndoseles imponer la condición de que también lo sean. En este caso todos los vértices contiguos al común se hallan sobre una circunferencia.

Partiendo de aquí se desarrolla el capítulo siguiendo dos líneas: por una parte se busca un método general para calcular las relaciones métricas en el conjunto formado, incluyendo el radio de la esfera que contiene a todos los vértices, el radio de la circunferencia que contiene a los vértices contiguos al común y datos sobre el ángulo poliedro (ángulos de las caras y diedros que forman; fracción del espacio total que segregan las caras del ángulo poliedro, supuestas prolongadas infinitamente; fracción de la superficie esférica circunscrita que cubre las caras poligonales). Por otra parte se trata de realizar un inventario de todas las agrupaciones de polígonos regulares que puedan ser inscritas en una esfera, incluyendo aquellas en que el resultado sea una figura plana, considerado el plano como un caso particular de esfera, de radio infinito.

Se dedica el capítulo segundo a estudiar las agrupaciones planas de polígonos que pueden extenderse indefinidamente conservando en todos sus vértices la misma disposición, obteniendo los mosaicos planos regulares y semirregulares, todos los cuales obedecen a unos pocos sistemas de simetría.

En el capítulo 3, dedicado a las agrupaciones no planas, se extiende el procedimiento del capítulo anterior, buscando cuáles de ellas pueden cubrir totalmente la superficie esférica con vértices idénticos. Los poliedros obtenidos, regulares y semirregulares, se proyectan sobre la esfera desde su centro, obteniéndose mosaicos esféricos cuyas caras son polígonos

esféricos y sus aristas arcos de circunferencia. Se observa que también aquí los poliedros obtenidos se ajustan a unos pocos sistemas de simetría. En los capítulos 2 y 3, además de las formas regulares y semirregulares, aparecen otras, con dos tipos de vértices, cuyas caras son rombos, todas iguales, a los que llamamos genéricamente romboedros. Los romboedros, aunque no tienen en general caras regulares, ni son siempre inscriptibles en una esfera, son elementos importantes que relacionan otros elementos de los sistemas de simetría.

El capítulo 4 pone en relación lo obtenido en los dos anteriores, deteniéndose especialmente en aquellos sistemas que no presentan un elemento de simetría privilegiado (isótropos). Se agrupan los poliedros de estos cinco sistemas (dos planos y tres no planos) buscando correspondencias entre elementos que en cada uno de ellos ocupan posiciones comparables; y para poner estas correspondencias en claro se buscan aquellas porciones elementales (módulos) que por simetría originan todo el poliedro, estudiándolas paralelamente en los distintos sistemas.

El capítulo 5 expone escuetamente los poliedros regulares de los sistemas no planos, para poner de manifiesto la dualidad que se da entre los pertenecientes al mismo sistema, y el papel que como envolvente de los poliedros duales tienen los romboedros.

Remata la primera parte del trabajo con una exposición (capítulo 6) de todos los poliedros semirregulares, analizando las relaciones entre los mismos, y su génesis como intersecciones entre poliedros regulares duales, solos o con los romboedros correspondientes. En el caso de los poliedros achatados, que no tienen planos de simetría, intervienen los poliedros básico y dual correspondientes, junto con unos poliedros de caras iguales no regulares, a los que provisionalmente denomino poliedros achatantes. Por analogía, en los sistemas planos se utilizan denominaciones paralelas a

las usadas para los poliedros propiamente dichos, aunque en estos casos está claro que las caras no se obtienen por intersección.

La segunda parte comienza (capítulo 7) con la búsqueda de agrupaciones de aquellos poliedros vistos en la primera parte que pueden ocupar totalmente el espacio, con vértices iguales. Como los poliedros de sistemas anisótropos producen empaquetamientos que no son más que una extensión al espacio de los sistemas planos totalmente paralela a ellos, se dedica mayor atención a los sistemas isótropos. Solamente el sistema cúbico puede formar redes espaciales con un solo tipo de poliedro (redes regulares), mientras el tetraédrico y el cúbico pueden formarlas con dos o tres (semirregulares), y el dodecaédrico no se presta a estas compartimentaciones, como tampoco lo hacen los poliedros que no tienen planos de simetría (achataados). Se indican los centros y ejes de simetría que se repiten a lo largo de las redes, y en el sistema cúbico se esboza una dualidad espacial que asocia espacio con vértice y arista con cara en dos redes cúbicas duales. En la parte final del capítulo se analizan las redes tetraédricas como una derivación de las cúbicas, pues aquel sistema es más bien una versión menor subsidiaria de éste.

El capítulo 8 estudia los módulos espaciales elementales de las redes vistas en el capítulo anterior; se consideran módulos las piezas carentes de elementos de simetría que por acumulación producen los poliedros, y por lo tanto las regiones de una compartimentación. Se estudian sus características dimensionales para los sistemas tetraédrico y cúbico, y se completa la visión conjunta añadiendo paralelamente los módulos del sistema del dodecaedro, aunque no intervengan sus poliedros en compartimentaciones totales del espacio.

Los dos últimos capítulos se dedican a compartimentaciones derivadas de simetrías pentagonales. Después de constatar que el pentágono no permite

la ocupación total del plano, ni el dodecaedro la del espacio, se ve que en cambio dan origen a piezas que sí lo hacen, si bien con un número de combinaciones posibles en los vértices bastante elevado, lejos de la regularidad de los sistemas de simetría.

Así, en el capítulo 9 se estudian los rombos de Penrose, que son dos rombos obtenidos de los módulos elementales del pentágono y el decágono regulares, de modo idéntico a cómo en el capítulo 4 se obtienen las redes rómbicas asociadas al triángulo equilátero, cuadrado y exágono. Se analizan sus características métricas y se catalogan todas las posibilidades de agrupación alrededor de un vértice.

Y de modo paralelo, en el capítulo 10 se investiga la utilización del módulo elemental del sistema dodecaédrico para obtener dos romboedros, ambos con un mismo tipo de cara, que permiten llenar el espacio completamente, con un número de aristas posibles igual al de vértices de la división plana, y un número de vértices diferentes todavía mayor, terminando con la indicación, sobre la superficie de un icosaedro, de la intersección con el mismo de las distintas combinaciones posibles de romboedros en torno a una arista, haciendo coincidir el vértice de cada agrupación con el centro del icosaedro.

LA COMPARTIMENTACION DEL ESPACIO

1. ANGULOS POLIEDROS

1.1 PLANTEAMIENTO TEORICO

1.1.1. UN POLIGONO EN EL ESPACIO

El elemento básico de partida para este estudio es el polígono regular: porción del plano cerrada, limitada por lados, segmentos iguales en contacto por sus extremos, los vértices, en los que forman ángulos iguales. el centro del polígono, punto de su plano equidistante de los vértices, es también centro de una circunferencia circunscrita al polígono y de otra inscrita.

La recta perpendicular al plano por este centro, a la que llamaremos eje normal, es un lugar geométrico de interés: cada punto del eje normal es centro de una superficie esférica que contiene a la circunferencia circunscrita al polígono, de otra esfera conteniendo a la circunferencia inscrita y de otra más, tangente al plano del polígono en su centro. Podemos denominarlas en lo sucesivo como la esfera de los vértices, la esfera de los lados y la esfera de la cara.

Para la intersección del eje normal con el plano del polígono, los valores de los radios de las esferas son mínimos. Estos valores son: el radio del polígono para la esfera de los vértices, la apotema para la de los lados y valor cero para la de la cara. Al alejarse el centro sobre el eje normal las tres esferas aumentan su radio, acercándose al mismo tiempo entre sí. Cuando el centro de las esferas tiende al punto impropio del eje normal, sus superficies tienden a confundirse con el plano del polígono, lo que permite considerar a dicho plano como una esfera más, de radio infinito.

1.1.2. DOS POLIGONOS CON UN LADO COMUN

Consideremos ahora un segundo polígono, de igual lado que el primero, ambos de cualquier número de lados. Hagamos coincidir un lado del primero con otro del segundo; a partir de ahora llamaremos arista a este lado común. La arista es por la tanto la recta común a los planos de ambos polígonos, que formarán un cierto ángulo diedro. Las apotemas que concurren en el centro de la arista definen el plano normal a la misma, y el ángulo que forman las apotemas es la sección normal que mide el valor del diedro. El plano normal contiene a ambos ejes normales, que se cortan en un punto común. La superficie esférica con centro en dicho punto y que pasa por los vértices extremos de la arista es la esfera de los vértices de ambos polígonos, y esfera circunscrita del conjunto que forman, pero como este conjunto conserva un grado de libertad, al ser arbitrario el valor del diedro, cuando éste varía entre 0° y 180° , lo hace el radio de la esfera circunscrita, con un valor mínimo cuando el eje normal a uno de los polígonos pasa por el centro del otro, y que aumenta al alejarse de esta posición. Para un ángulo de 180° los ejes normales se hacen paralelos, el radio de la esfera infinito y los polígonos coplanarios.

Naturalmente, el ángulo que forman los ejes normales es el suplementario de la sección normal del diedro.

1.1.3. TRES POLIGONOS CON UN VERTICE COMUN

Los lados de cada polígonos contiguos a la arista común en uno de sus vértices extremos forman un cierto ángulo, variable con la sección normal del diedro; con las limitaciones que luego se verán, podemos hacer coincidir el ángulo de estos lados con el valor del ángulo en el vértice de un tercer polígono regular, de número de lados coincidente, o no, con alguno de los dos anteriores. Si el lado del tercer polígono es de igual medida de los dos primeros encajarán perfectamente los

tres polígonos, con un vértice compartido por todos y tres más por cada dos; la figura no tendrá ya ningún grado de libertad. La esfera circunscrita a los dos primeros polígonos contendrá tres vértices, pertenecientes a ellos, del tercero, y por lo tanto contendrá a la circunferencia que pasa por dichos tres vértices que a su vez contiene a todos los demás. En definitiva, la esfera está circunscrita a los tres polígonos, los tres planos, con un vértice y tres aristas comunes, definen tres diedros cuyas tres secciones normales se cortan en tres ejes normales, que se cortan a su vez en un único punto, centro de la esfera circunscrita.

En la figura 1.1.1. a. se ha representado lo dicho hasta ahora: P_1 , P_2 , P_3 son los centros de los polígonos, a_1 es la arista del primer diedro, y a_2 , a_3 las aristas de los diedros formados al añadir el tercer polígono. V_0 es el vértice del triedro, donde concurren a_1 , a_2 , a_3 . L, M y N son los centros de las aristas, siendo $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ y $\overline{OP_3}$ los ejes normales; $\overline{OP_1 LP_2}$, $\overline{OP_2 MP_3}$ y $\overline{OP_1 NP_3}$ los planos normales de los diedros, y O el centro de la esfera de los vértices.

La simetría de cada dos polígonos respecto a los planos normales a su correspondiente arista permitiría colocar otro polígono igual al de centro P_3 (polígono P_3 , para abreviar) en V_1 , otro igual a P_1 en V_2 y otro más, igual a P_2 , en V_3 . De este modo podemos extender la red poligonal, manteniendo todos los vértices sobre la superficie esférica.

El ángulo del polígono P_3 en V_0 tiene una limitación clara: la suma de los ángulos de los tres polígonos concurrentes no puede exceder de 360° , porque la suma de las caras de un triedro tiene este valor máximo. El caso de suma de ángulos igual a 360° exige (salvo en un caso que veremos más adelante) que los tres diedros valgan 180° , los planos de los polígonos coincidan y los ejes normales sean paralelos, con O como punto impropio: la esfera de los vértices, de radio infinito, es el plano (figura 1.1.1.b.).

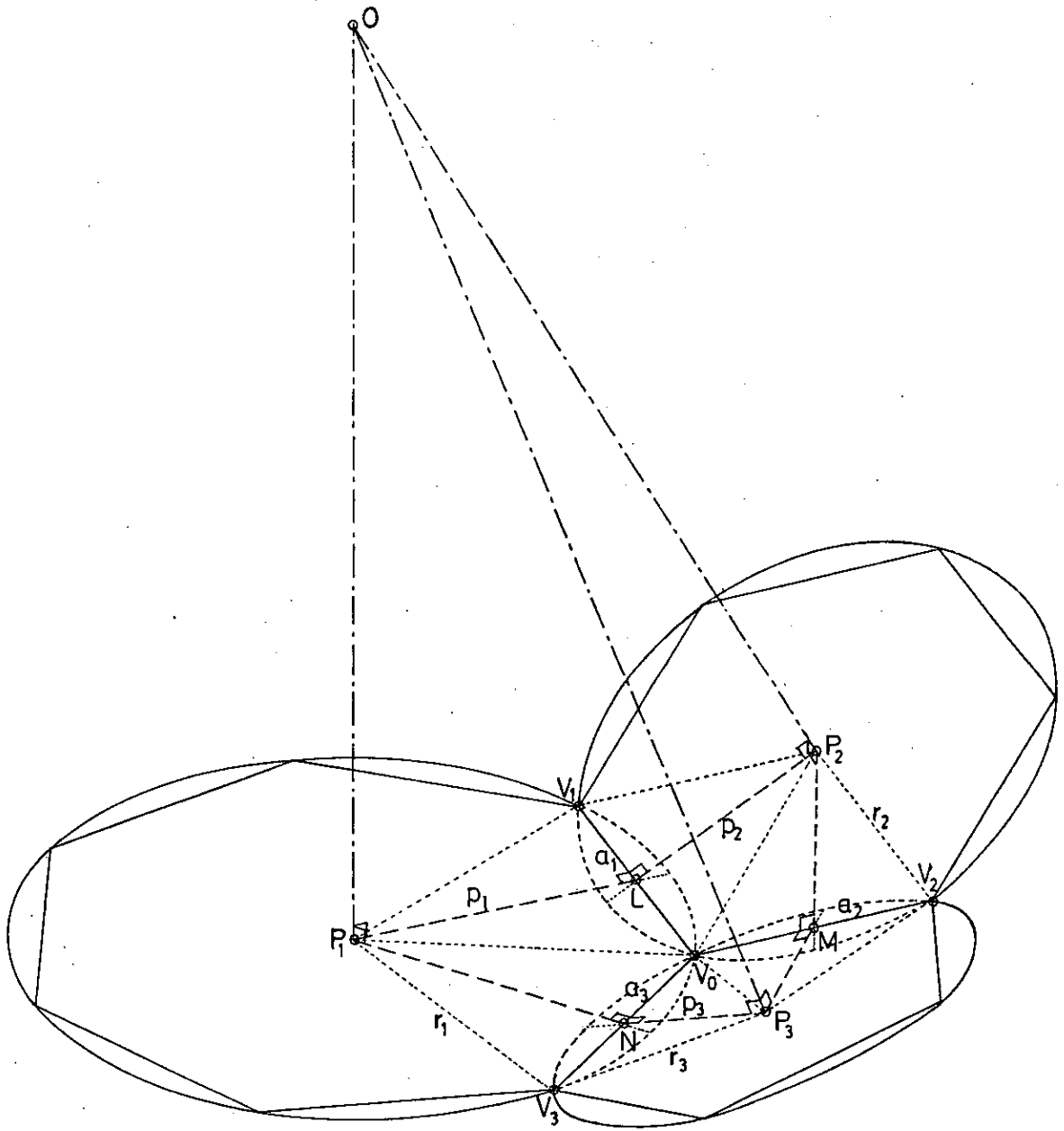


FIG 1.1.1.a

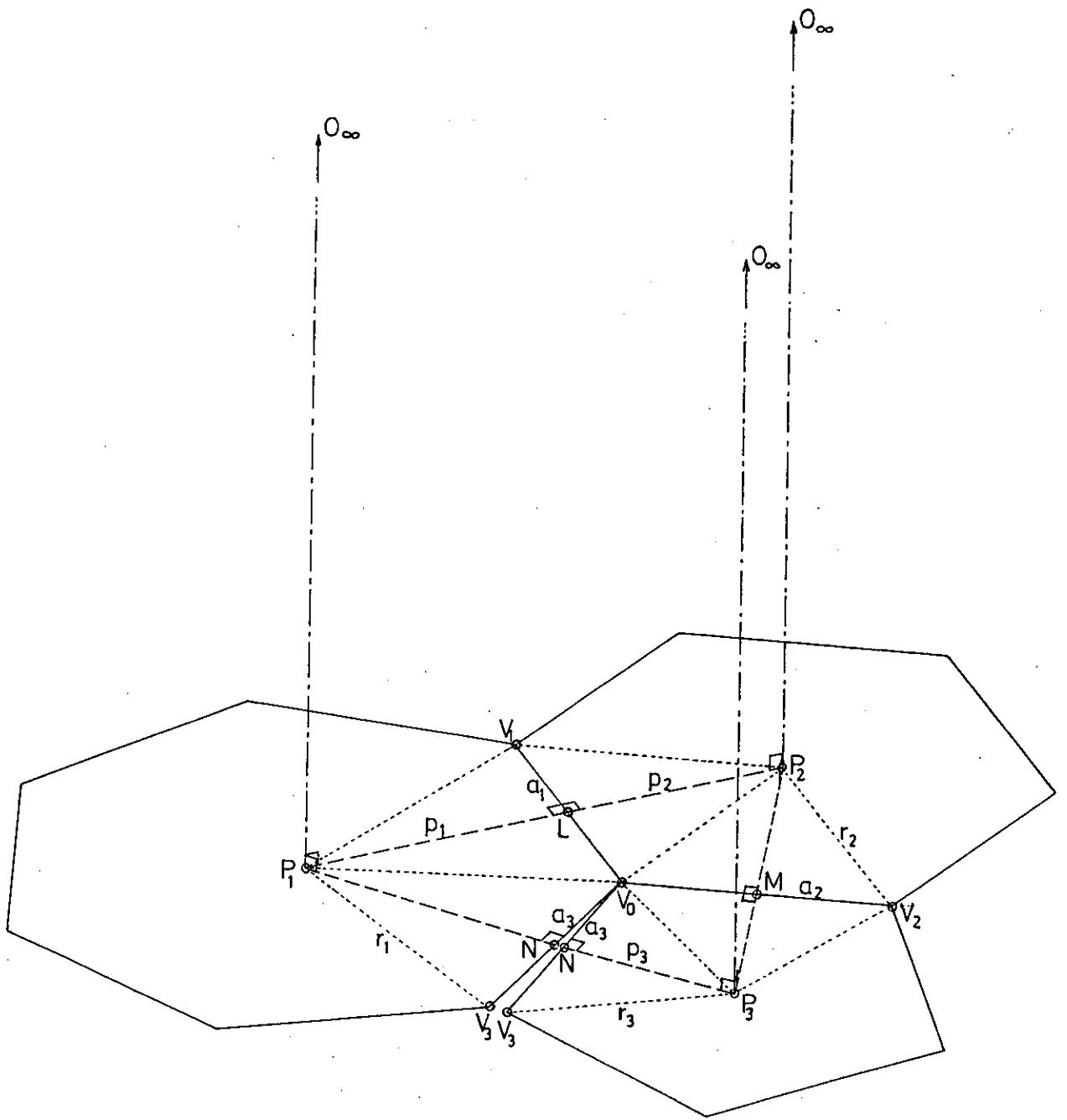


FIG 1.1.1.b

1.1.4. MAS DE TRES POLIGONOS CON UN VERTICE COMUN

Dados los dos primeros polígonos, en lugar de yuxtaponer a las aristas a_2 y a_3 un solo polígono, se pueden intercalar dos o más. El número total de aristas en V_0 es en este caso de cuatro o más, y así mismo el de diedros. La figura que se obtiene no es estable, pues el conjunto de diedros mantiene un grado de libertad, o más. Si la concavidad de los diedros se alterna, puede obtenerse una figura plegada sobre un vértice sin limitaciones. Pero si obligamos a los diedros a mantener la concavidad hacia la misma región del espacio tenemos la misma limitación que antes: la suma total de los ángulos de las caras concurrentes en un vértice no puede superar los 360° . Como el ángulo mínimo de un polígono regular es de 60° (triángulo equilátero), en un ángulo poliedro convexo (cóncavo desde la otra región del espacio) no puede haber más de cinco polígonos (los seis de 60° del caso límite corresponden a la yuxtaposición de seis triángulos equiláteros en un mismo plano).

1.1.5. ANGULOS POLIEDROS CONVEXOS

Tenemos entonces, tres tipos de ángulos poliedros convexos con caras regulares: los del primer tipo, de tres caras por vértice, rígidos y con todos los vértices sobre una esfera; los del segundo de cuatro caras (y cuatro aristas) por vértice, con un grado de libertad, que pueden modificar su forma al alterar uno de sus diedros; y un tercer tipo, de cinco caras y cinco aristas por vértice, con dos grados de libertad, que hacen depender la forma del conjunto del valor de dos de sus diedros.

¿Podrán los ángulos poliedros de estos dos últimos tipos alcanzar, como la tienen los del primero, una configuración en que los vértices de todas sus caras se hallen sobre una sola superficie esférica? Intentaremos demostrar que sí.

1.1.6. ANGULOS POLIEDROS INSCRIPTIBLES EN LA ESFERA

Sean los primeros polígonos P_1 y P_2 , unidos por la arista a_1 y formando un diedro de valor α_1 ; en la figura 1.1.2. que representa la sección normal a a_1 por su centro L (ver la figura 1.1.1.), $\overline{P_1L}$ y $\overline{P_2L}$ son las apotemas de ambos polígonos; α_1 mide el diedro; O es el centro de las esferas de ambas caras, de la de las aristas y de la de los vértices; $\overline{OP_1}$ y $\overline{OP_2}$ dan los radios de las esferas de ambas caras, siendo sus respectivas los ejes normales; el ángulo $\widehat{P_1OP_2}$ es suplementario de α_1 ; \overline{OL} es el radio de la esfera de las aristas.

La figura 1.1.3. representa el plano $\overline{V_0OV_1}$ de la figura 1.1.1.; en ella $R = \overline{OV_0} = \overline{OV_1}$ es el radio de la esfera de los vértices.

Se verifica (Pitágoras):

$$R^2 = \overline{OV}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LV}^2 \quad (\text{figura 1.1.3.})$$

$$\overline{OL}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PL}^2 \quad (\text{figura 1.1.2.})$$

$$R^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PL}^2 + \overline{LV}^2$$

Esto es: el radio (variable) de la esfera de los vértices es la suma pitagórica del radio (también variable) de la esfera de una cara, la apotema de la misma y el semilado (ambos valores constantes).

Podemos escribir asimismo:

$$\begin{aligned} \overline{OP_1}^2 &= \overline{OV}^2 - \overline{P_1L}^2 - \overline{LV}^2 \\ \overline{OP_1} &= \sqrt{R^2 - (\overline{P_1L}^2 + \overline{LV}^2)} = \sqrt{R^2 - r_1^2} \end{aligned}$$

Siendo r_1 el radio del polígono (suma pitagórica de su apotema y su semilado). Es claro que si $\overline{OP_1} = 0$, $R = r_1$, es decir: la menor esfera circunscriptible a dos polígonos con una arista común corresponde al ángulo para el que el eje normal de uno de los polígonos (P_2) pasa por el centro del otro (P_1). En este caso (figura 1.1.4.) el radio de la esfera de este último polígono se anula, el radio de la esfera de las aristas es el de la circunferencia inscrita en P_1 y el de la esfera de los vértices.

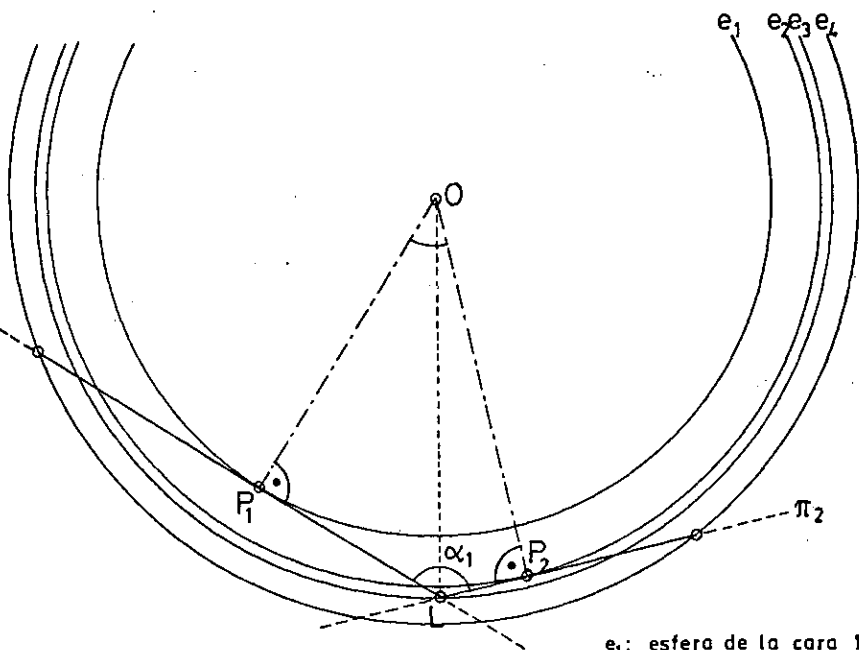


FIG 1.1.2.

- e_1 : esfera de la cara 1
- e_2 : esfera de la cara 2
- e_3 : esfera de las aristas
- e_4 : esfera de los vértices

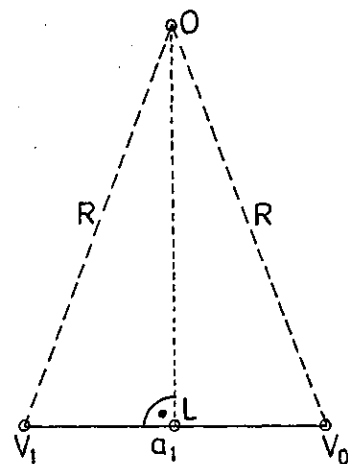


FIG 1.1.3.

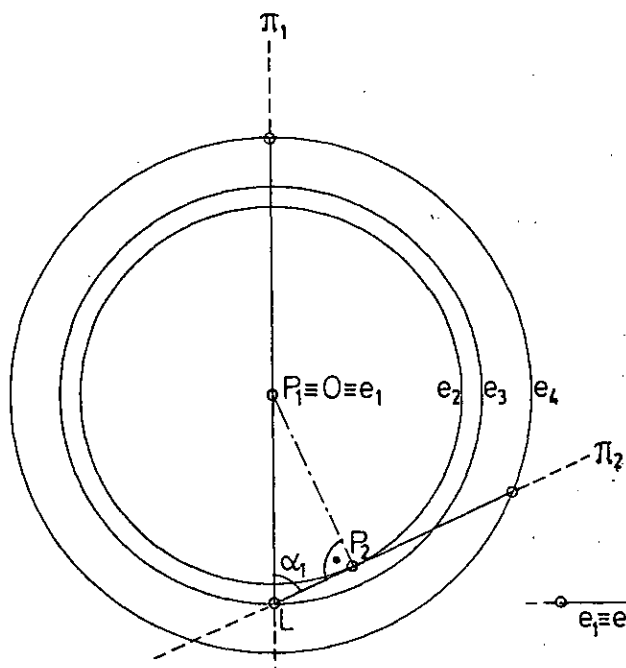


FIG 1.1.4.

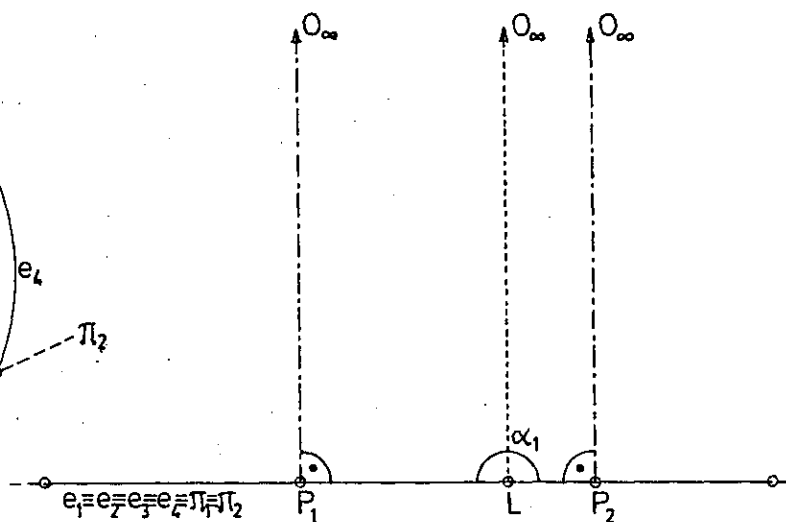


FIG 1.1.5.

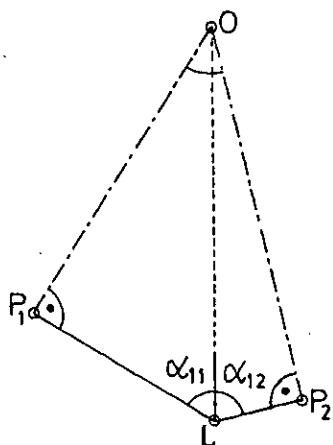


FIG 1.1.6.

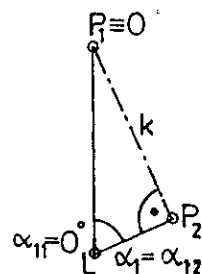


FIG 1.1.7.

tices es el de la circunferencia circunscrita. Los círculos inscrito y circunscrito son círculos máximos de las esferas correspondientes.

1.1.7. EL RADIO DE LA ESFERA, VARIABLE INDEPENDIENTE

Hemos tomado, pues, R como variable independiente, a partir de su valor mínimo r_1 . Si R crece tendiendo a infinito, \overline{OP}_1 crece también, a partir de cero, tendiendo asimismo a infinito (figura 1.1.5.). La función $\overline{OP}_1 = R^2 - r_1^2$, abreviadamente $\overline{OP}_1 = f_1(R)$, es continua y creciente en todo el intervalo de R comprendido entre r_1 e ∞ : $[r_1, \infty)$.

1.1.8. EL DIEDRO DE DOS CARAS

Veamos ahora (figura 1.1.6.) como depende α_1 de \overline{OP}_1 :

$$\overline{OP}_1^2 + \overline{P}_1L^2 = \overline{OP}_2^2 + \overline{P}_2L^2 = \overline{OL}^2$$

$$\overline{OP}_2^2 = \overline{OL}^2 - \overline{P}_2L^2 = \overline{OP}_1^2 + \overline{P}_1L^2 - \overline{P}_2L^2$$

$$\overline{OP}_2 = \sqrt{\overline{OP}_1^2 + k^2}$$

Siendo k constante, diferencia pitagórica entre las apotemas de ambos polígonos. Si ambos fueren iguales, las esferas de las caras coincidirán. Podemos adelantar que es el caso de los poliedros regulares.

Para $\overline{OP}_1=0$, es $\overline{OP}_2=k$; vemos pues que k es el radio de la esfera de una cara, cuando se anula la esfera de la otra (figura 1.1.7.).

Si ambos polígonos son iguales, se verifica:

$$P_2 \equiv P_1 \equiv 0$$

$$\overline{P}_1L = \overline{P}_2L$$

$$\alpha_1 = \alpha_{12} = \alpha_{11} = 0$$

Ambas caras coinciden, orientadas a distinto semiespacio, encerrando entre ellas un volumen nulo.

Podemos decir entonces que un polígono en el espacio es un poliedro regular de dos caras (*).

De la anterior relación entre \overline{OP}_1 y \overline{OP}_2 concluimos que para \overline{OP}_1 creciente lo son también de modo continuo \overline{OP}_2 y \overline{OL} .

Entonces:

$$\alpha_{11} = \text{arc tg} \frac{\overline{OP}_1}{P_1 L}$$

$$\alpha_{12} = \text{arc tg} \frac{\overline{OP}_2}{P_2 L} = \text{arc tg} \frac{\sqrt{\overline{OP}_1^2 + k^2}}{P_2 L}$$

Ambas funciones continuas y crecientes para todos los valores considerados de la variable \overline{OP}_1 , de 0 a ∞ : $[0, \infty)$.

$$\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} = f_2(\overline{OP}_1)$$

Y es f_2 continua y creciente, etc. etc.

1.1.9. ANGULO QUE FORMAN LAS ARISTAS CONTIGUAS A LA COMUN

Volvamos a la figura 1.1.1. Supongamos que aun no hemos añadido el tercer polígono; el ángulo $\widehat{P_1LP_2} = \alpha_1$ es aún variable, las aristas a_2 y a_3 definen un plano variable, y forman un ángulo también variable. Sea β_3 este ángulo, siendo β_1 y β_2 los correspondientes a $\widehat{a_1, a_3}$ y a $\widehat{a_1, a_2}$,

(*)

Nótese que el plano, en sí mismo, no tiene caras; éstas aparecen cuando, desde el espacio tridimensional, consideramos las regiones separadas por él. Dos puntos son de la misma región si existe una línea continua a la que pertenezcan ambos y cuya intersección con el plano sea el conjunto vacío. Si no existe tal línea son de regiones distintas. Sólo desde una región del espacio aparece el plano como cara.

respectivamente, es decir, los ángulos de los polígonos P_1 y P_2 .

Supongamos por ahora, para mayor sencillez, el valor de la arista $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Tracemos la esfera de centro V_0 y radio unidad: la intersección de esta esfera unitaria con los planos de los polígonos $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_1 a_2}$ y el plano $\overline{a_2 a_3}$ producirá tres circunferencias máximas que se cortan entre sí en V_1 , V_2 y V_3 (figura 1.1.8.) y definen un triángulo esférico (figura 1.1.9.). Los ángulos de este triángulo coinciden con los valores de los diedros α_1, α_2 y α_3 , y los lados con la medida, en radianes, de β_1, β_2 y β_3 . Siendo α_1 la variable y β_1 y β_2 valores fijos, β_3 es función de α_1 ; $0 < \beta_1 < 180^\circ$, $0 < \beta_2 < 180^\circ$.

El teorema del coseno de la trigonometría esférica afirma:

$$\cos \beta_3 = \overbrace{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}^{k_1} + \overbrace{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \cos \alpha_1}^{k_2} = \Psi(\alpha_1)$$

$$\beta_3 = \arccos [\Psi(\alpha_1)]$$

Para α_1 acotado entre 0° y 180° , $\cos \alpha_1$ es una función continua, acotada entre -1 y 1; $\Psi(\alpha_1) = k_1 + k_2 \cos \alpha_1$ también lo es, acotada entre $k_1 + k_2$ y $k_1 - k_2$, es decir entre

$$k_1 + k_2 = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 = \cos(\beta_1 - \beta_2)$$

$$k_1 - k_2 = \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 = \cos(\beta_1 + \beta_2)$$

valores en todo caso acotados también entre -1 y 1; como β_3 está acotado necesariamente entre 0° y 180° , podemos afirmar que es función continua de α_1

$$\beta_3 = f_3(\alpha_1)$$

Para ver si es función creciente con α_1 , veamos su derivada:

$$\frac{d\beta_3}{d\alpha_1} = \frac{-1}{\sqrt{1-\Psi^2}} \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot (-\sin \alpha_1) = \dots$$

$$= \frac{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2}{\sqrt{1-\cos^2 \beta_3}} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2}{\sin \beta_3} \cdot \sin \alpha_1$$

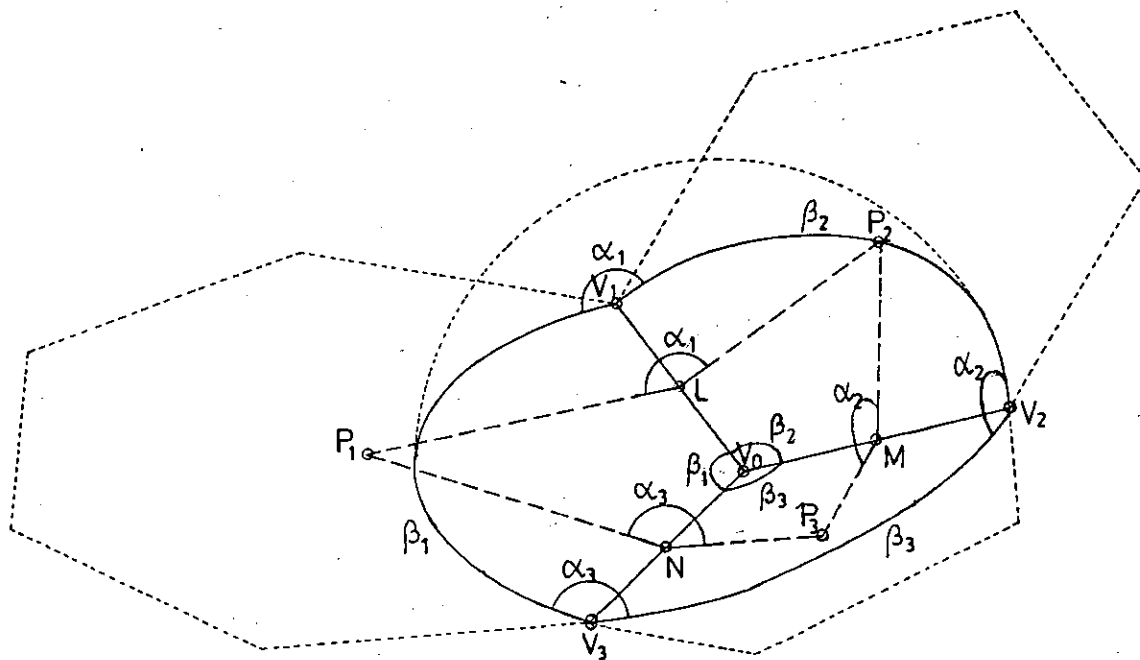


FIG 1. 1. 8.

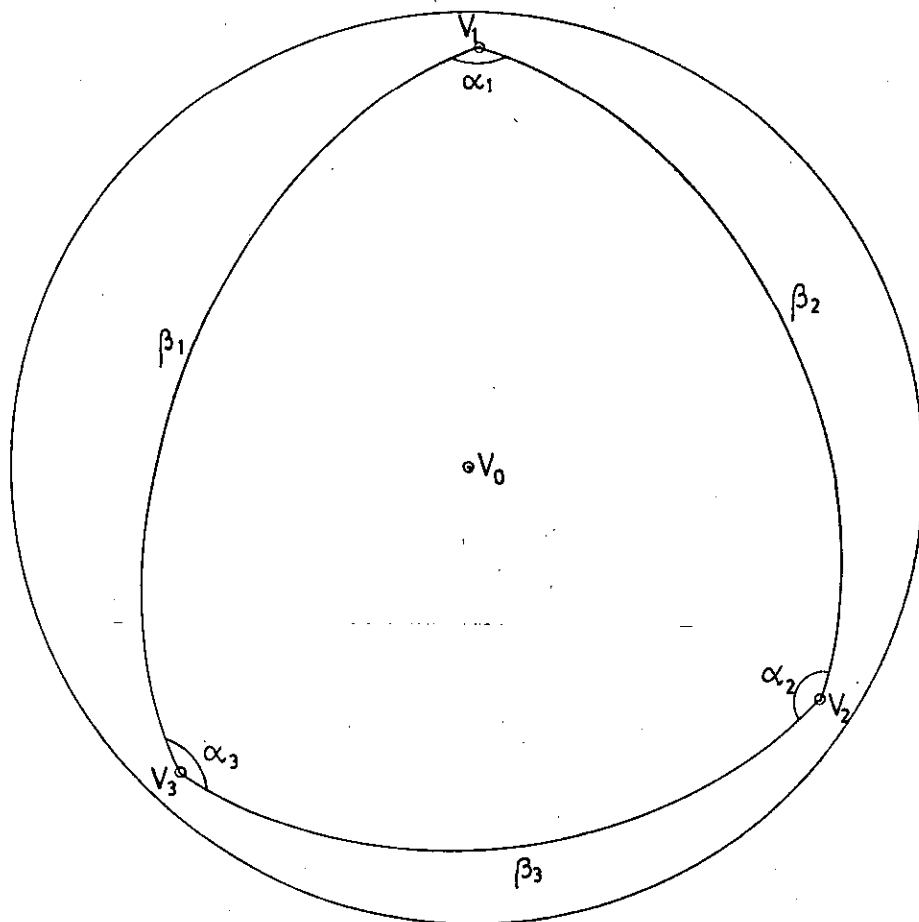


FIG 1. 1. 9.

Valor siempre positivo y finito, salvo el caso de que $\beta_3=0^\circ$, pero entonces también es $\alpha_1=0^\circ$ (caso de los polígonos P_1 y P_2 iguales y coincidentes), en que aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$, como también aparece si $\beta_3=180^\circ$, con α_1 igualmente 180° (caso de figura plana, con ángulos suplementarios en P_1 y P_2 : exágono con triángulo o dos cuadrados adyacentes, en el plano); en cualquier caso, para el intervalo abierto $(0^\circ, 180^\circ)$ la función $\beta_3=f_3(\alpha_1)$ es continua y creciente.

En resumidas cuentas:

$$\begin{aligned}\beta_3 &= f_3(\alpha_1) \\ \alpha_1 &= f_2(\overline{OP}_1) \\ \overline{OP}_1 &= f_1(R) \\ \beta_3 &= f_3[f_2[f_1(R)]] = F(R)\end{aligned}$$

Siendo esta función continua y creciente en el intervalo (r_1, ∞) .

Consecuentemente, cuando R , radio de la esfera de los vértices, crece desde su valor mínimo r_1 tendiendo a infinito, \overline{OP}_1 , radio de la esfera inscrita en P_1 , lo hace entre 0 e ∞ ; α_1 crece simultáneamente desde un cierto valor dependiente de qué polígonos sean P_1 y P_2 (0° si son iguales) hasta 180° , y β_3 crece asimismo desde su valor mínimo (0° sólo si los polígonos son iguales: el "poliedro de dos caras" antes aludido) hasta un máximo que corresponde a $R \rightarrow \infty, \overline{OP}_1 \rightarrow \infty, \alpha_1 \rightarrow 180^\circ$: las esferas de los vértices de las aristas y de las caras se han convertido en un plano, en el que se hallan yuxtapuestos por su arista los dos polígonos, y $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 360^\circ$. El valor máximo posible de β_3 es pues:

$$\beta_3 = 360^\circ - (\beta_1 + \beta_2)$$

1.1.10. TRIEDRO CON UNA CARA VARIABLE

Operaremos ahora de la siguiente manera:

Desde su valor mínimo, aumentaremos el radio de la esfera circunscrita de los vértices, manteniendo a éstos sobre ella, con lo que β_3 irá au-

mentando. Cuando β_3 alcance el valor del ángulo de algún polígono regular, podremos encajarlo entre a_2 y a_3 (figura 1.1.17.a.); al tener este tercer polígono tres vértices (V_0, V_2, V_3 de la figura 1.1.1.) en la esfera, los tiene todos, como ya vimos; si el radio de la esfera aun es finito, podemos aumentarlo, aumentando también α_1 y manteniendo sobre ella los vértices de P_1 y P_2 . El tercer polígono P_3 puede asimismo mantener los vértices sobre la esfera, manteniendo la arista a_2 como nexo con P_2 y aumentando el ángulo α_2 : basta con sustituir en todo lo anteriormente razonado para P_1 y P_2 , P_1 por P_2 , P_2 por P_3 , a_1 por a_2 , V_1 por V_2 , L por M , α_1 por α_2 .

En la figura 1.1.10. vemos lo que ocurre con el triángulo esférico $V_1V_2V_3$ al crecer la esfera de los vértices. Desde este momento usaremos los sub-índices 31 ó 32 en lugar de 3 para dejar el 3 asociado a a_3 . (figura 1.1.11.)

1.1.11. COMO CRECE EL TRIEDRO CON EL RADIO DE LA ESFERA

Los diedros α_1 y α_2 crecen con R , mientras que β_2 , ángulo del polígono P_2 , permanece constante; como β_1 y β_3 son valores también constantes dados por los polígonos respectivos, los incrementos de α_1 y α_2 hacen imposible el mantenimiento del vértice V_3 , pues tendríamos en el triángulo aumento de los ángulos no acompañado de aumento de los lados, lo que contradice, por ejemplo, al teorema del coseno. El vértice V_3 , al que llamaremos ahora V_{31} , se desdobra en el que seguiremos llamando V_3 ligado a P_1 , y en V_4 , ligado a P_3 .

Tenemos ahora, además de $\overline{V_1V_2V_{31}}$, los triángulos $\overline{V_1V_{31}V_3}$ y $\overline{V_2V_{31}V_4}$. Ambos son isósceles: tienen dos lados iguales ($a\beta_1$ y β_3 , respectivamente) y también dos ángulos, como demuestra inmediatamente el teorema de los senos. Llamemos γ y δ a estos ángulos iguales, siendo ζ y θ los lados opuestos a $\Delta\alpha_1$ e $\Delta\alpha_2$.

Como esta esfera, propiamente esfera trigonométrica, tiene radio unidad, el área de un triángulo es el valor del exceso esférico, ϵ , expresado en radianes.

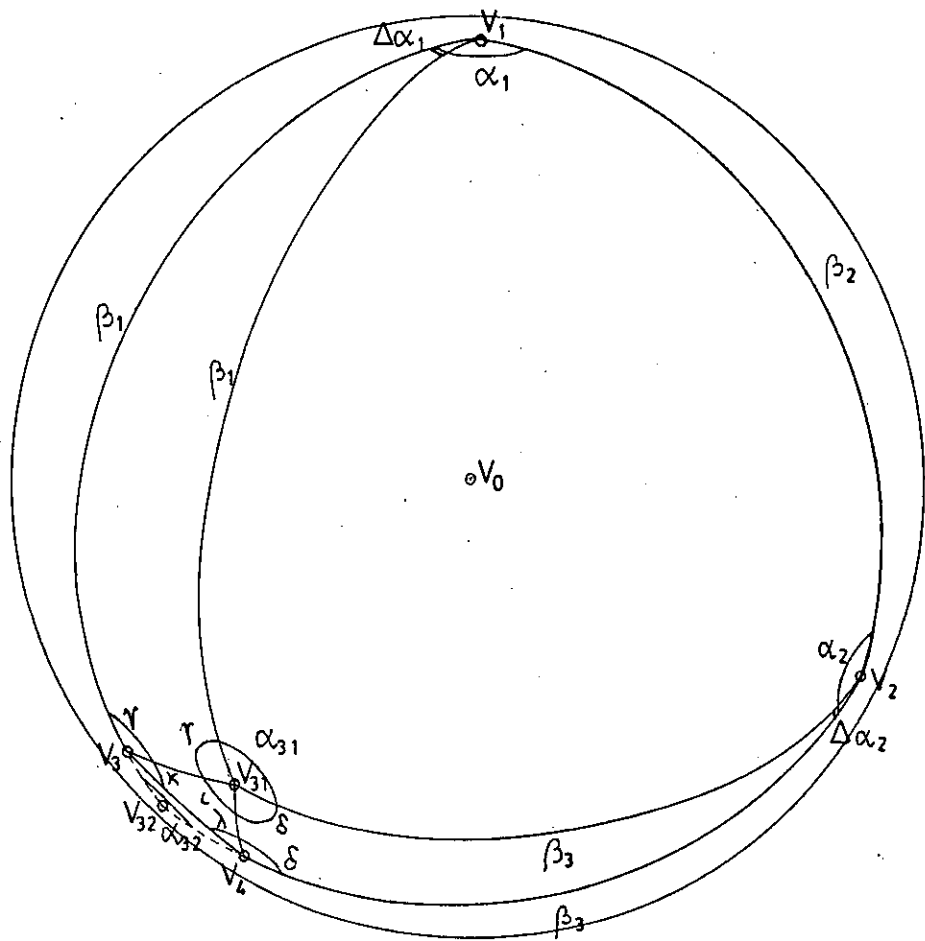


FIG 1.1.10.

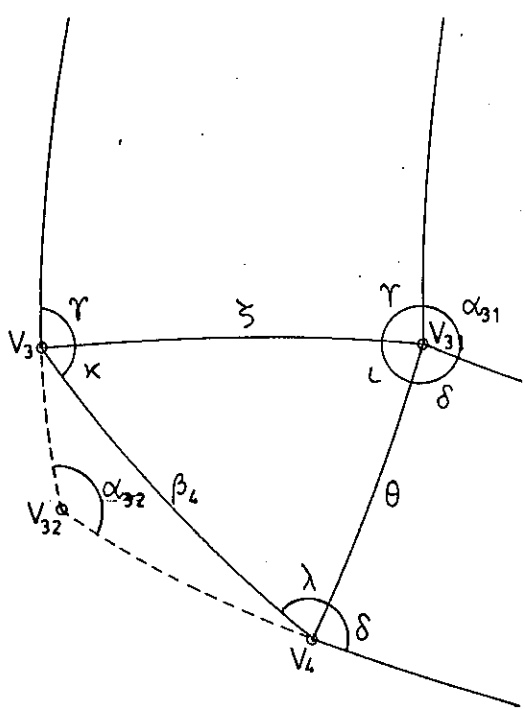


FIG 1.1.11.

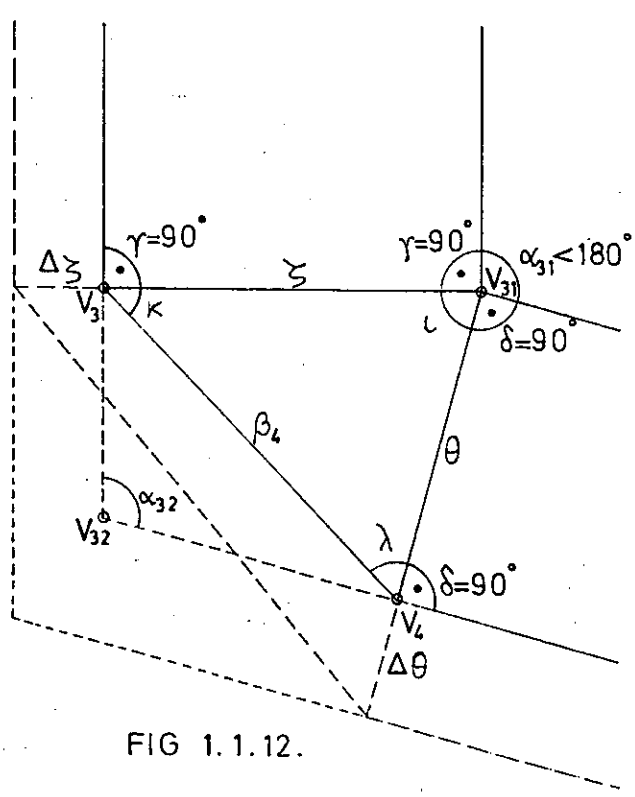


FIG 1.1.12.

Cuando $\Delta\alpha_1$ es suficientemente pequeño, tendente a 0 ($d\alpha_1$), el exceso esférico $\varepsilon \rightarrow 0$, y la suma de ángulos $2\gamma + d\alpha_1 \rightarrow 180^\circ$, con lo que $\gamma \rightarrow 90^\circ$. Análogamente para $d\alpha_2, \delta \rightarrow 90^\circ$, mientras que, teniendo R un valor finito, son α_1 y α_2 menores de 180° , y también $\alpha_3 < 180^\circ$.

Veamos el triángulo $V_3V_3V_4$. Aquí son infinitesimales dos de sus lados y su área es un infinitésimo de segundo orden. Lo estudiaremos pues, en el límite como plano (figura 1.1.12.). Llamaremos β_4 al lado V_3V_4 , y ι, κ, λ a los tres ángulos.

Siendo $\alpha_{31} < 180^\circ$, y γ y δ tan próximas a 90° como queramos, ι es el ángulo suplementario de α_{31} , luego $\iota > 0^\circ$, y como $\iota + \kappa + \lambda = 180^\circ$, es $\kappa + \lambda < 180^\circ$.

El teorema de los senos de la trigonometría esférica tiende a coincidir con el de la trigonometría plana, para ζ, θ y β_4 pequeños:

$$\frac{\text{sen}\beta_4}{\text{sen}\iota} = \frac{\text{sen}\zeta}{\text{sen}\lambda} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\kappa}$$

$$\frac{\beta_4}{\text{sen}\iota} = \frac{\zeta}{\text{sen}\lambda} = \frac{\theta}{\text{sen}\kappa}$$

$$\beta_4 = \frac{\theta \text{sen}\iota}{\text{sen}\kappa} = \frac{\zeta \text{sen}\iota}{\text{sen}\lambda}$$

Valor del ángulo $\widehat{V_3V_0V_4}$ necesariamente positivo, al menos en un entorno de la variable R.

La separación de V_3 y V_4 produce un plano en el que está contenido β_4 , pero los planos de P_1 y P_3 siguen cortándose, ahora en otra recta que también pasa por V_0 y que produce en la esfera trigonométrica un punto V_{32} , que se obtiene prolongando los círculos máximos que pasan por V_1 y V_3 y por V_2 y V_4 , respectivamente.

El ángulo $\widehat{V_1V_3V_4}$, al que llamaremos ahora α_3 , coincide con el valor del diedro de arista a_3 , que por estar inscrito en la esfera es también menor

de 180° , e igual ocurre con $\widehat{V_3V_4V_2} = \alpha_4$, valor del diedro de arista a_4 .

De aquí podemos deducir que:

$$\alpha_3 = \gamma + \kappa = 90^\circ + \kappa < 180^\circ \implies \kappa < 90^\circ \implies 90^\circ - \kappa > 0^\circ \implies \text{sen}(90^\circ - \kappa) > 0$$

$$\alpha_4 = \delta + \lambda = 90^\circ + \lambda < 180^\circ \implies \lambda < 90^\circ \implies 90^\circ - \lambda > 0^\circ \implies \text{sen}(90^\circ - \lambda) > 0$$

Y del teorema de los senos:

$$\frac{\beta_4}{\text{sen}\alpha_{32}} = \frac{\overline{V_3V_{32}}}{\text{sen}(90^\circ - \lambda)} = \frac{\overline{V_{32}V_4}}{\text{sen}(90^\circ - \kappa)}$$

Como α_{32} es tan próximo a α_{31} como queramos, y por tanto positivo, y así mismo $\beta_4 > 0$, son positivos los otros dos cocientes, y al serlo los divisores, lo son los dividendos, a los que llamaremos $\Delta\beta_1$ e $\Delta\beta_2$.

Incrementemos aún R , y con él crecerán aún más $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \zeta, \theta, \beta_4, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2$; concretamente, la función $\beta_4(R)$ nace con valor 0° a partir del triedro $\overline{V_1V_2V_{31}}$ y es continua y creciente. ¿Es indefinidamente creciente? Tiene desde luego una cota superior en el valor $\beta_4 = 360^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$, correspondiente a $R \rightarrow \infty$, caso de poliedros apoyados en el plano, pero ¿alcanzará esta función creciente dicha cota superior? Tratemos de seguir el crecimiento de β_4 .

Al alejarnos de las dimensiones infinitesimales, los triángulos $\overline{V_1V_{31}V_3}$, $\overline{V_2V_{31}V_4}$, $\overline{V_{31}V_3V_4}$ y $\overline{V_{32}V_3V_4}$ aumentan su exceso esférico, que se repartirá de algún modo entre todos sus ángulos. A la vez se hace más patente que los arcos $\overline{V_{31}V_3}$ y $\overline{V_{31}V_4}$, salvo que $\beta_1 = \beta_3 = 90^\circ$ (lo que ocurre si P_1 y P_3 son cuadrados), no son de círculo máximo, pues son en realidad paralelos trazados desde los polos V_1 y V_2 , respectivamente. De todos modos, la diferencia obtenida por este hecho en los valores de $\gamma, \delta, \epsilon, \kappa, \lambda$, no afecta afortunadamente a sus sumas $\gamma + \kappa = \alpha_3$, $\delta + \lambda = \alpha_4$, $\gamma + \epsilon + \delta = 360^\circ - \alpha_{31}$, pues lo que aumentan unos al sustituir el arco de paralelo por el de círculo máximo o viceversa lo disminuyen los otros sumandos en idéntica cuantía.

1.1.12. ANGULO TETRAEDRO

Consideremos (figura 1.1.13.) que β_4 ha alcanzado un cierto valor. Un incremento suficientemente pequeño de α_1 y α_3 produce en V_3 y V_4 desplazamientos que podemos considerar perpendiculares a β_1 y β_3 , respectivamente; sean V'_3 y V'_4 las posiciones finales de V_3 y V_4 . Dado el pequeño valor de los desplazamientos $\Delta\zeta$ y $\Delta\theta$ podemos prescindir de la curvatura en sentido perpendicular a β_4 y, sin error apreciable, considerar el cuadrilátero $\overline{V_3V_4V'_4V'_3}$ como cilíndrico y desarrollarlo (a efectos de proyección es válido: no lo sería tal vez a efectos de área). Así se ha representado en la figura 1.1.14. Aunque $\Delta\zeta$ y $\Delta\theta$ no sean iguales y V_3V_4 , $V'_3V'_4$ no sean por consiguiente paralelas, haciendo estos incrementos suficientemente pequeños podemos hacer el ángulo de $\overline{V_3V_4}$ y $\overline{V'_3V'_4}$ tan pequeño como queramos, y conseguir que en el trapecio $\overline{V_3V_4BA}$ sea $\overline{AB} = \frac{\beta_4}{\cos 0^\circ} = \beta_4$, en cambio el ángulo $\widehat{V'_3V_3A} = 180^\circ - \alpha_3$ tiene un valor no nulo para $\alpha_3 < 180^\circ$, y asimismo $\widehat{BV_4V'_4} = 180^\circ - \alpha_4$ no es nulo si $\alpha_4 < 180^\circ$. En consecuencia, para un desplazamiento $\Delta\zeta$ de V_3 y otro $\Delta\theta$ de V_4 , será el valor incrementado de β_4 :

$$\Delta_1 \beta_4 + \beta_4 + \Delta_2 \beta_4$$

Y el valor del incremento de β_4 :

$$\Delta \beta_4 = \Delta_1 \beta_4 + \Delta_2 \beta_4 = \Delta\zeta \cdot \text{sen}(180^\circ - \alpha_3) + \Delta\theta \cdot \text{sen}(180^\circ - \alpha_4)$$

Cuando los incrementos tienden a 0:

$$d\beta_4 = \text{sen}(180^\circ - \alpha_3) \cdot d\zeta + \text{sen}(180^\circ - \alpha_4) \cdot d\theta$$

Valores todos ellos positivos, por lo que en definitiva, en función de la variable independiente R:

$$\frac{d\beta_4(R)}{dR} > 0$$

Por consiguiente, mientras R crece con un valor finito, crecen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 manteniéndose menores que 180° , y β_4 crece asimismo. Sólo cuando

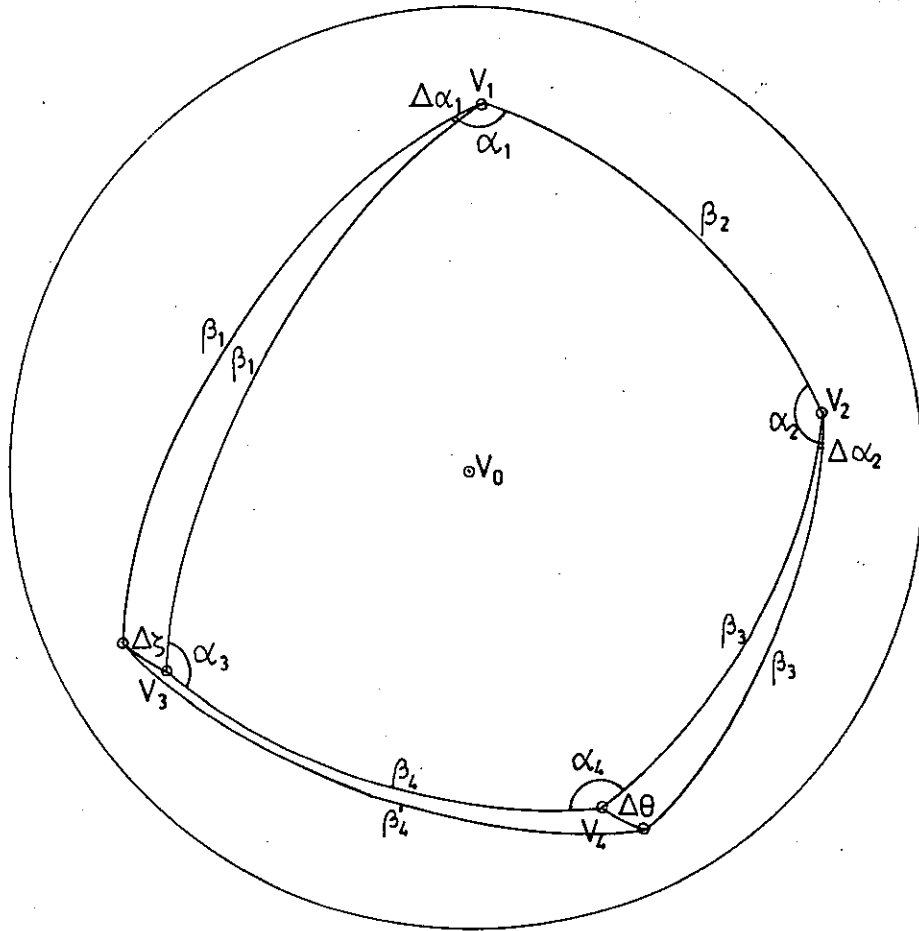


FIG 1.1.13.

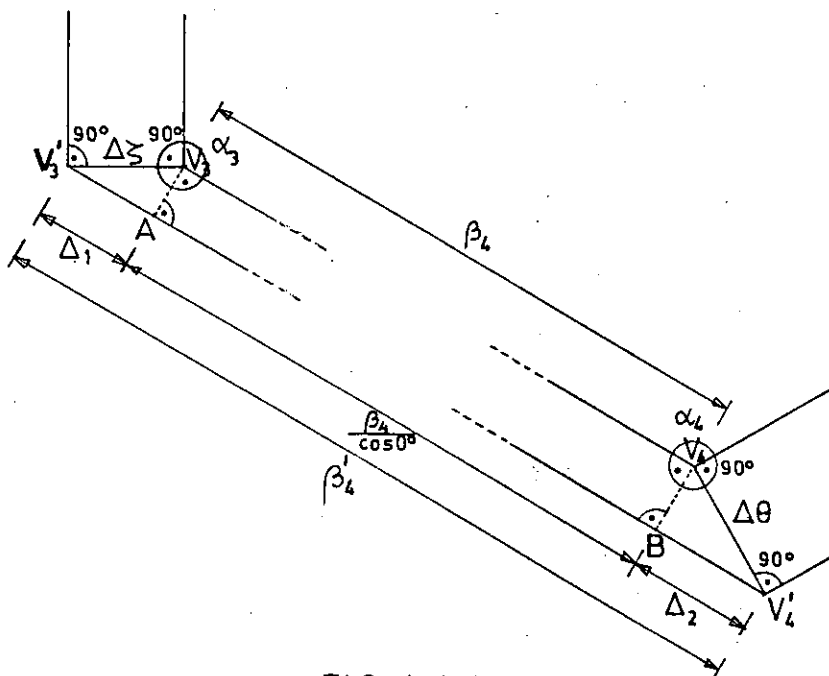


FIG 1.1.14.

$180^\circ - \alpha_3 \rightarrow 0^\circ$ y $180^\circ - \alpha_4 \rightarrow 0^\circ$ tienden también a 0 los incrementos $\Delta_1 \beta_4$ y $\Delta_2 \beta_4$ y con ellos la derivada de $\beta_4(R)$, pero éste es precisamente el caso límite de figura plana en que

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 180^\circ \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 360^\circ \end{cases}$$

En algún momento de esta variación continua y creciente de β_4 en función de R , puede coincidir con el ángulo de un polígono regular, y entonces podemos encajarlo según aparece en la figura 1.1.17.b.

1.1.13. ANGULO PENTAEDRO

Si aumentamos entonces el radio de la esfera de los vértices, reiterando el proceso y desdoblado de nuevo la arista a_3 en a_3 y a_5 y el vértice V_3 en V_3 y V_5 , podremos introducir un nuevo ángulo β_5 (figura 1.1.15) que podrá crecer aumentando R , como máximo hasta el valor límite $\beta_5 = 360^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)$, lo que en algunos casos puede permitir introducir otro quinto polígono en la esfera (figura 1.1.17.c.), todos ellos con los vértices sobre su superficie, pues al estar allí V_3 , V_0 y V_5 , de tener algún vértice más el polígono estaría en la circunferencia definida por estos tres, y con ella en la superficie esférica de los vértices.

1.1.14. Y NO HAY MAS

Como ya hemos visto, sólo en el caso de que los cinco polígonos sobre la esfera sean triángulos equiláteros puede introducirse un sexto triángulo equilátero (figura 1.1.16.), aumentando hasta el infinito el radio de la esfera: mosaico plano de seis triángulos equiláteros alrededor de un vértice.

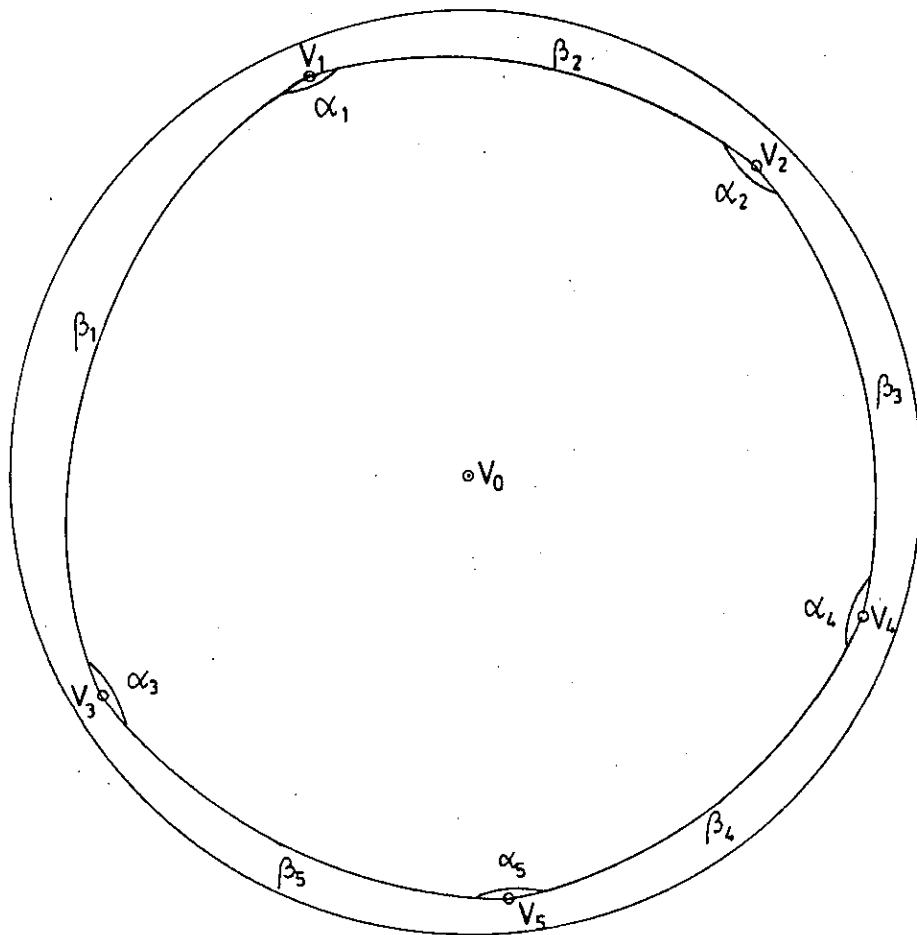


FIG 1. 1. 15.

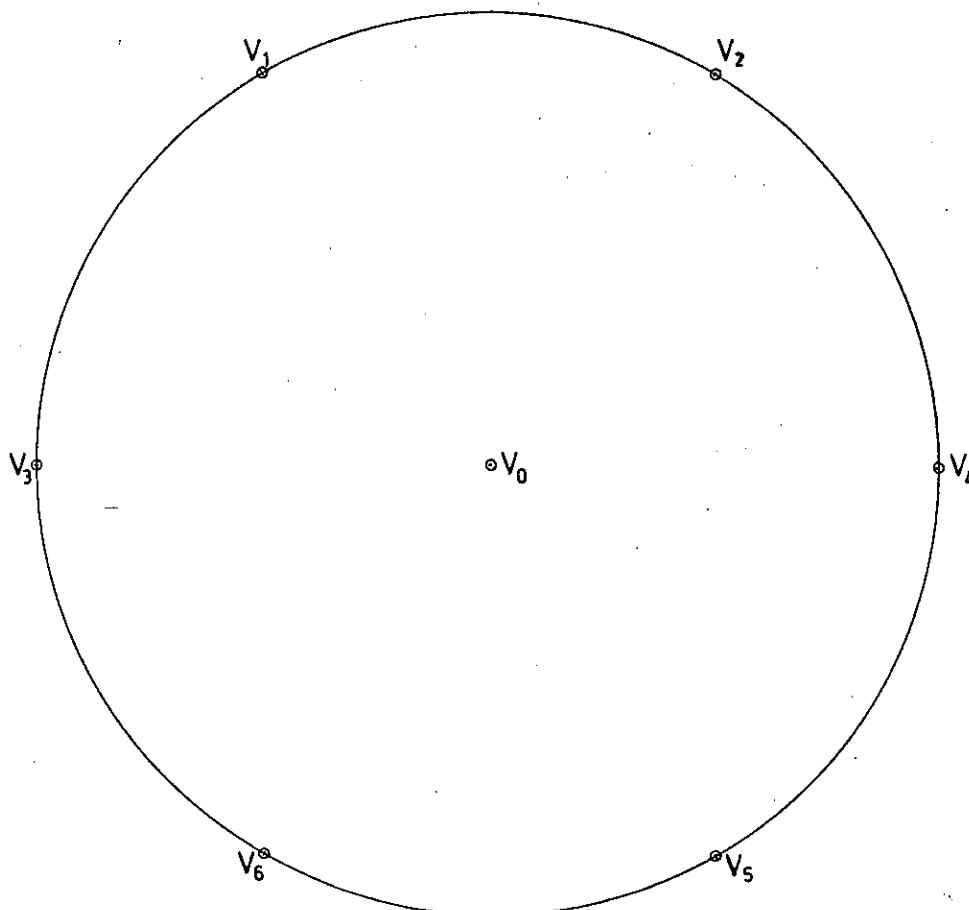


FIG 1. 1. 16.

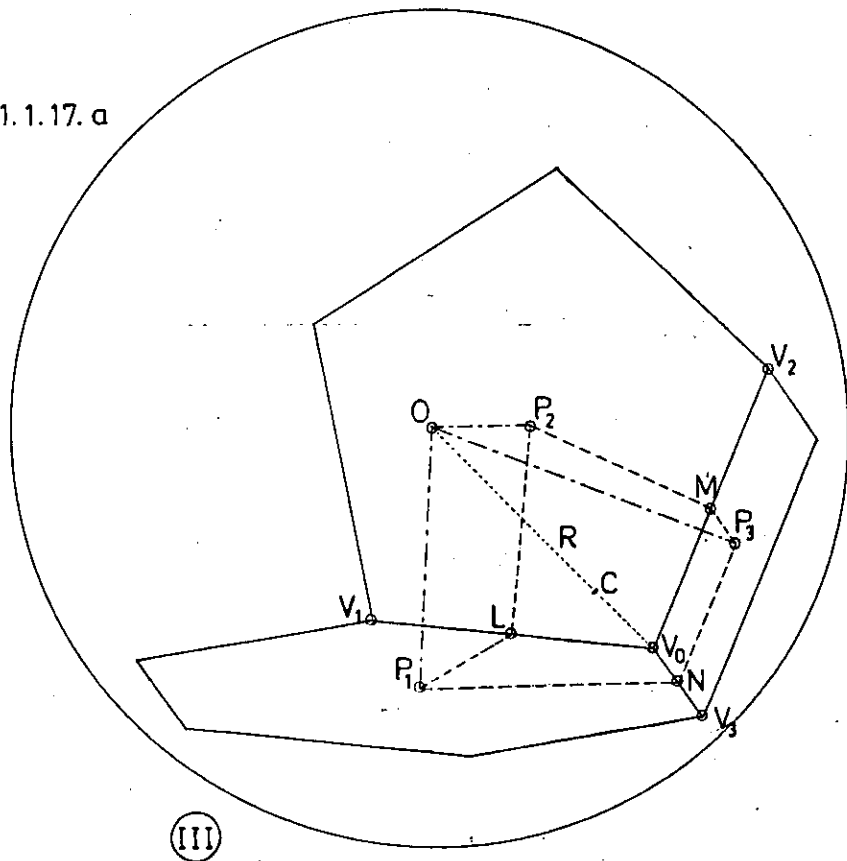
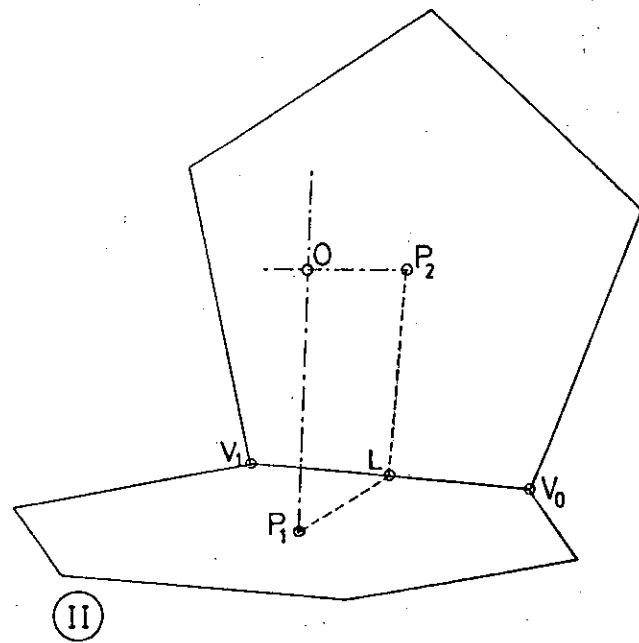
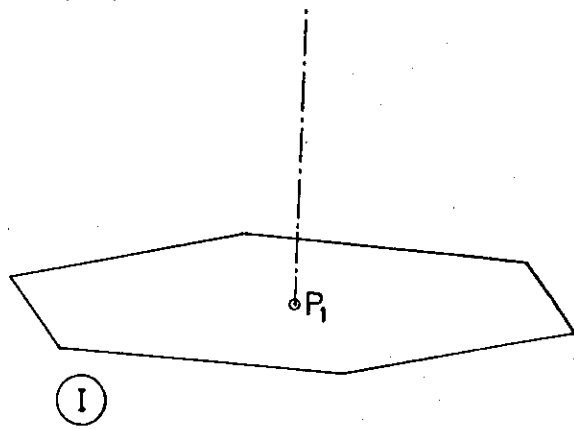


FIG 1.1.17. a

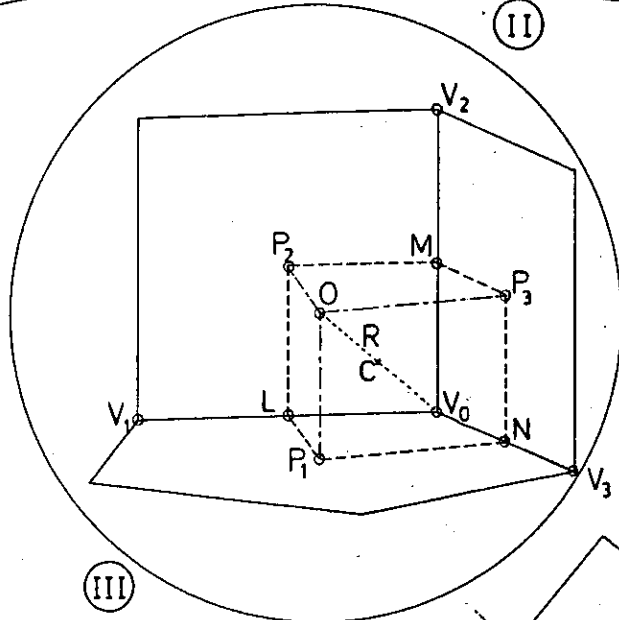
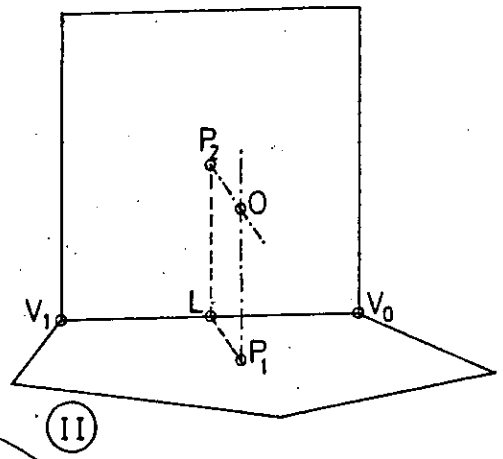
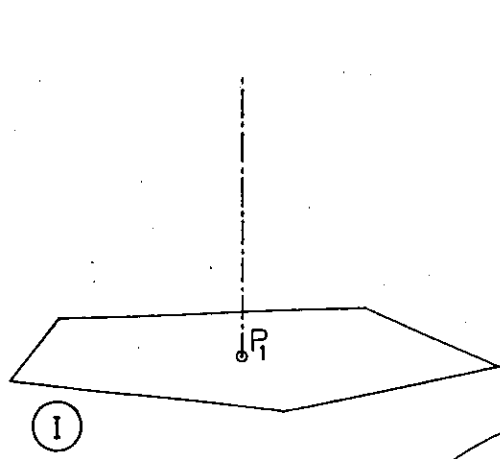
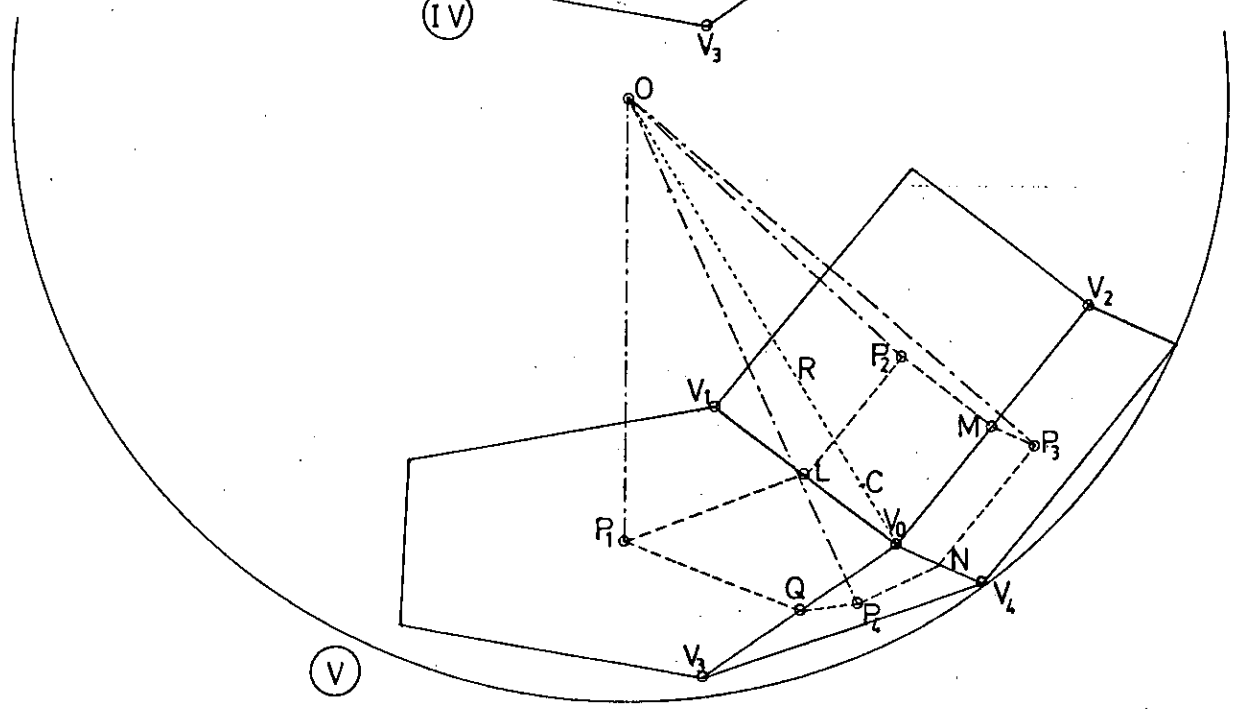
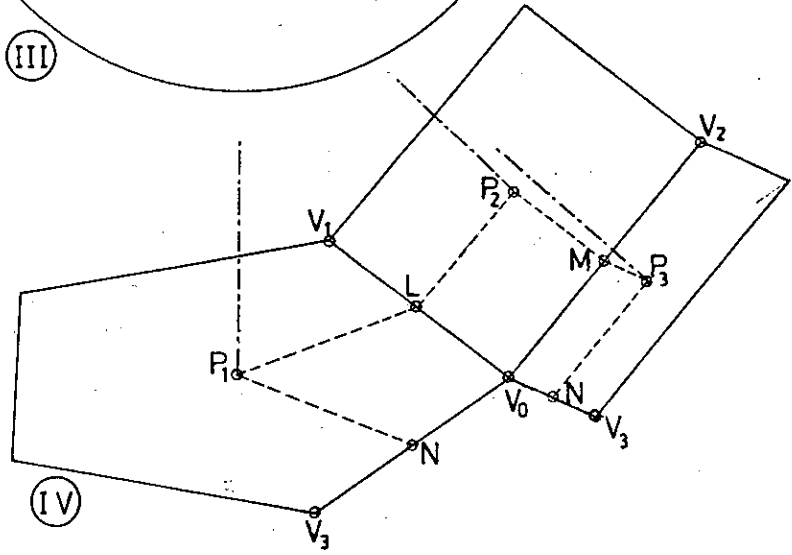


FIG 1.1.17.b



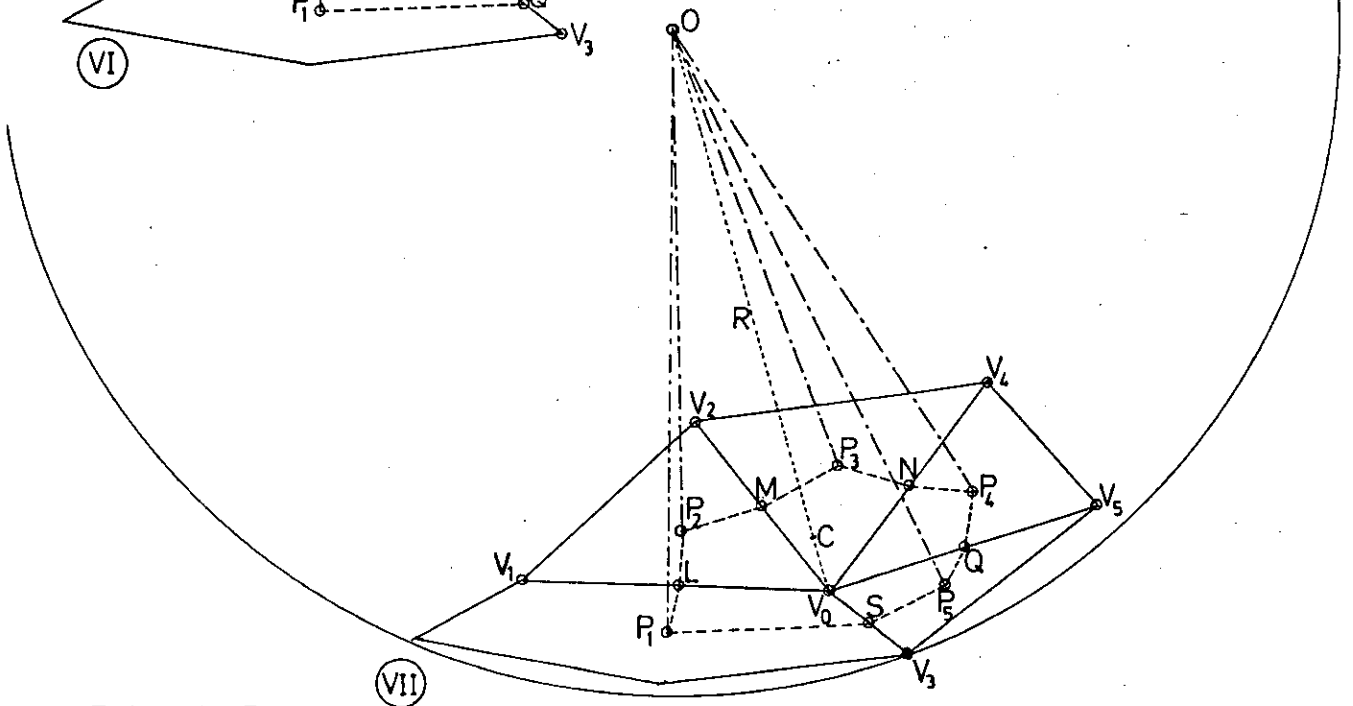
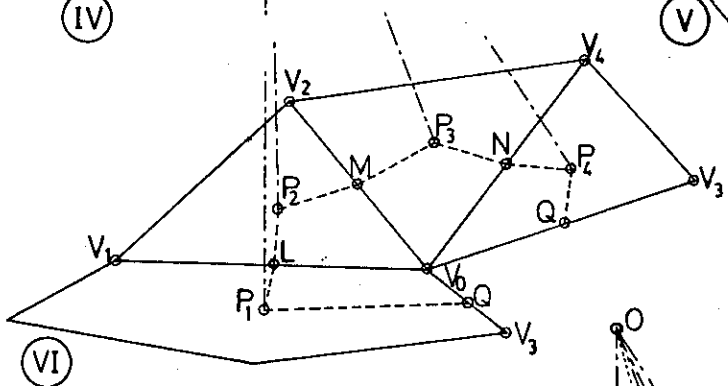
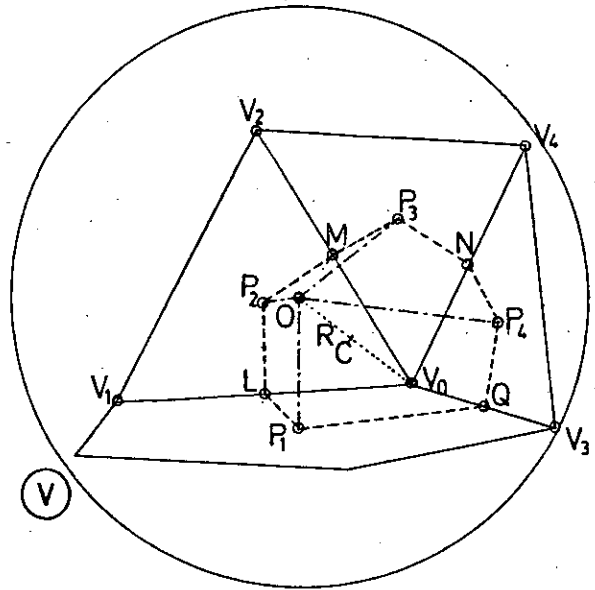
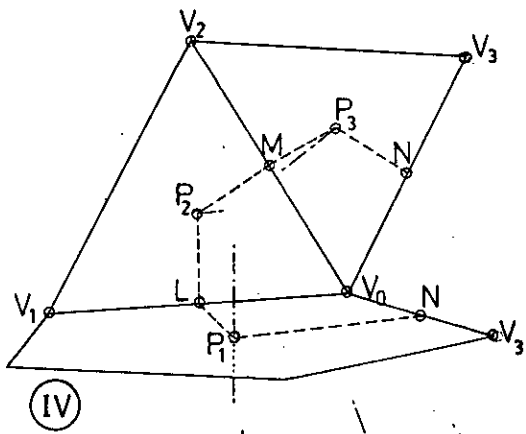
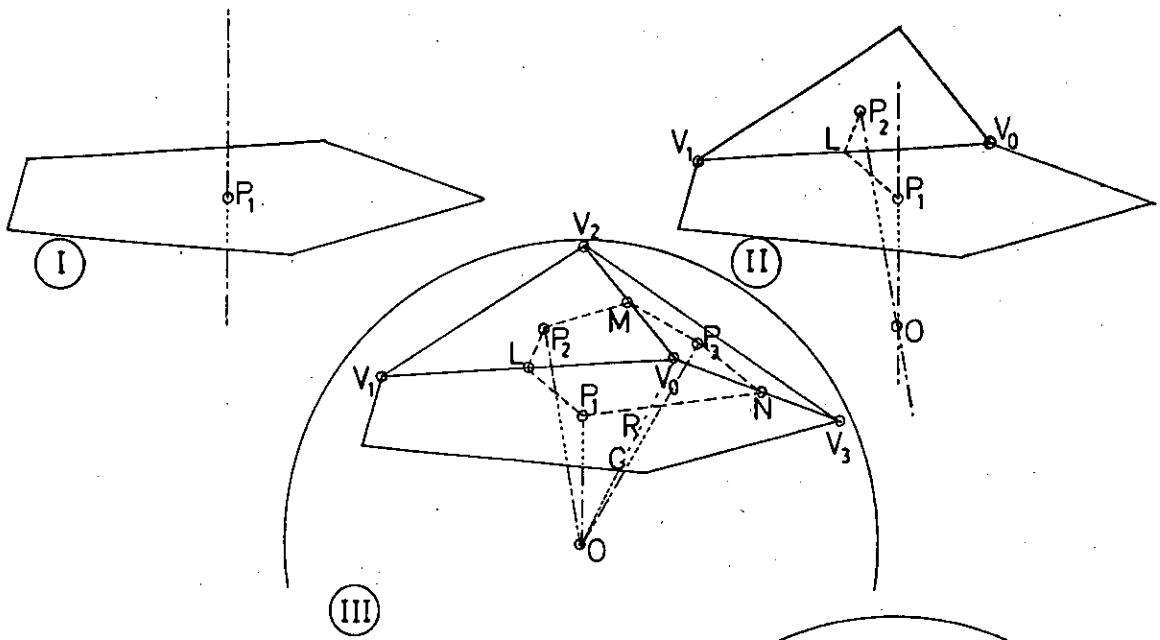


FIG 1.1.17.c

1.2. FORMACION Y CLASIFICACIONES

1.2.1. PROCEDIMIENTO

Para hacer un estudio sistemático de todas las variedades posibles de ángulos poliedros regulares yuxtapuestos sobre un vértice e incriptibles en una esfera, procederemos como sigue:

Comenzaremos estudiando los ángulos poliedros de caras regulares iguales, y los llamaremos ángulos poliedros regulares.

A continuación, veremos los formados por dos tipos de polígonos, considerando diferentes los que, con el mismo número de polígonos de cada tipo, los presenten en diferente orden (permutaciones circulares con repetición).

Consideraremos luego los formados por tres tipos de polígonos diferentes, con el mismo criterio del párrafo anterior.

Naturalmente, cesará nuestra búsqueda cuando la suma de los ángulos concurrentes de los polígonos alcance 360° .

Debido a ello, podemos asegurar que no existen ángulos poliedros convexos (cóncavos) con cuatro tipos de poliedros concurrentes, pues si, para minimizar la suma de los ángulos, comenzamos con el triángulo equilátero, seguimos con el cuadrado, a continuación el pentágono e intentamos introducir luego el exágono, no podremos hacerlo, porque juntos suman ya $60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ > 360^\circ$.

1.2.2.

NOTACION

Denotaremos un ángulo poliedro colocando entre paréntesis cifras sucesivas, correspondientes al número de lados de los polígonos consecutivos; así, (3, 4, 5) indica la yuxtaposición con un vértice común de un triángulo, un cuadrado y un pentágono. El orden de las caras será aquel en que las cifras sucesivas formen el menor número posible dentro de la misma permutación circular; en el ejemplo anterior, aunque (4,5,3) sea el mismo

ángulo poliedro, preferiremos la primera denominación. El poliedro (3, 5, 4), que cambia el sentido de giro alrededor el vértice, no será el mismo, aunque ambas formas poseen simetría especular entre sí; se llaman enantiomorfos. Cuando un poliedro coincide con su enantiomorfo tiene, al menos, un plano de simetría, y para abreviar sólo hablaremos de enantiomorfos cuando una forma es asimétrica.

1.2.3. DOS ESFERAS

El estudio de un ángulo poliedro inscriptible en la esfera (podemos llamarlo en lo sucesivo, abreviadamente, poliedro) incluirá de modo preferente su relación con dos superficies esféricas (figura 1.2.1.): la primera de ellas contiene a todos sus vértices, y es la que hemos llamado "esfera de los vértices"; la segunda tiene por centro el vértice del poliedro y por radio la arista, conteniendo por lo tanto a los vértices contiguos al del poliedro, y es la que, haciendo la arista igual a la unidad, hemos llamado antes esfera unitaria, o trigonométrica.

1.2.4. ESPACIO CUBIERTO

En relación con la esfera de los vértices nos interesa saber qué porción de la misma cubre el poliedro si lo proyectamos desde su centro O sobre la esfera y qué porción cubre cada cara diferente. Pueden medirse estos ángulos en estereorradianes, y entonces la esfera completa mide 4π , o en fracción de esfera, dividiendo la cantidad anterior por 4π . Obviamente en los poliedros planos la "esfera" tiene superficie infinita y este ángulo es 0. Llamaremos a este ángulo sólido "espacio cubierto" (ϵ_c) (punto de vista: el centro de la esfera de los vértices).

1.2.5. ESPACIO SEGREGADO

Con respecto a la esfera trigonométrica cuyo centro es el vértice del poliedro buscamos el polígono esférico que interceptan las caras en ella. Su medida da el ángulo sólido abarcado por el poliedro, pudiendo medirse también en estereorradianes o en fracción de esfera. Los poliedros planos

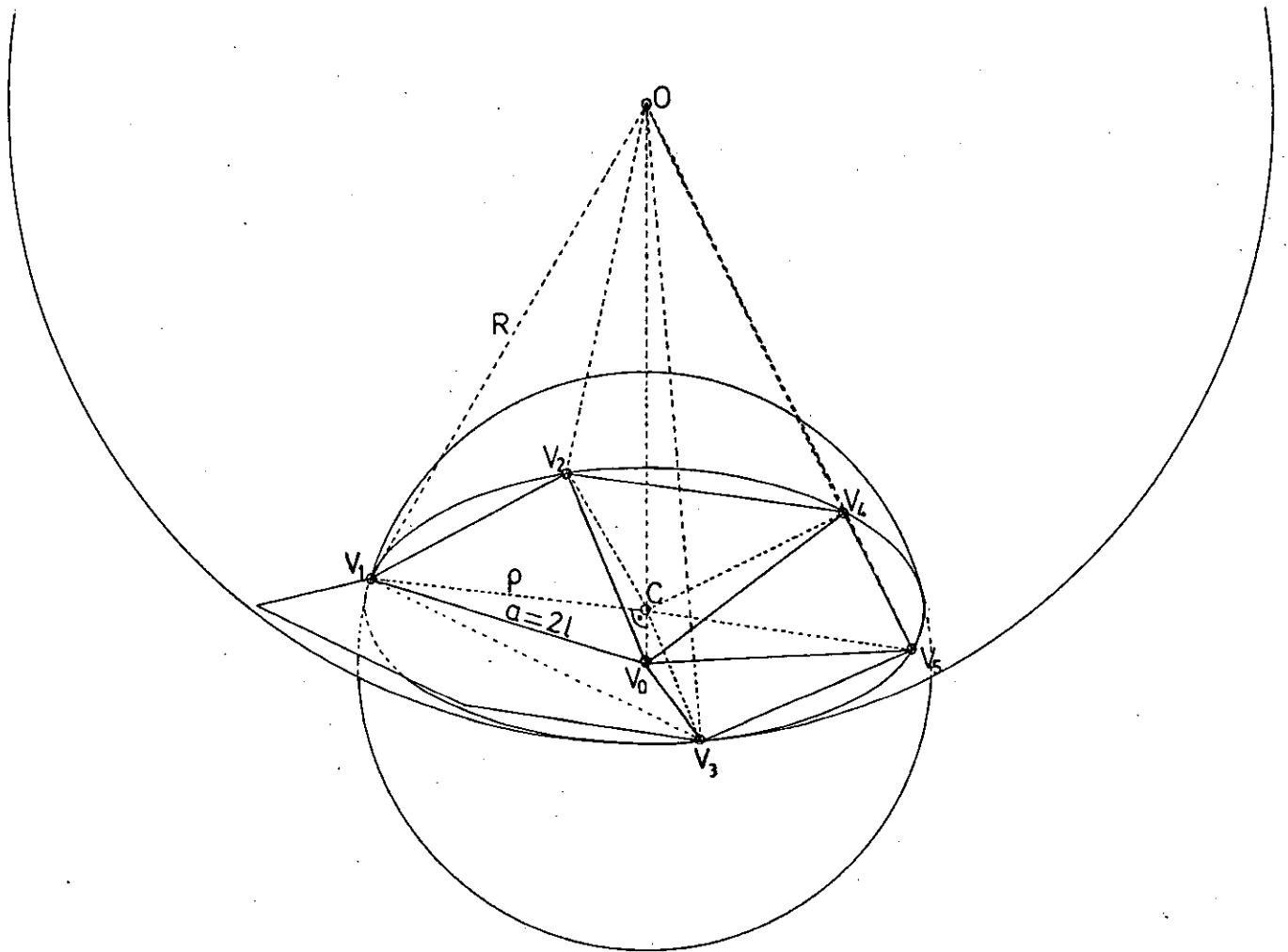


FIG 1. 2. 1.

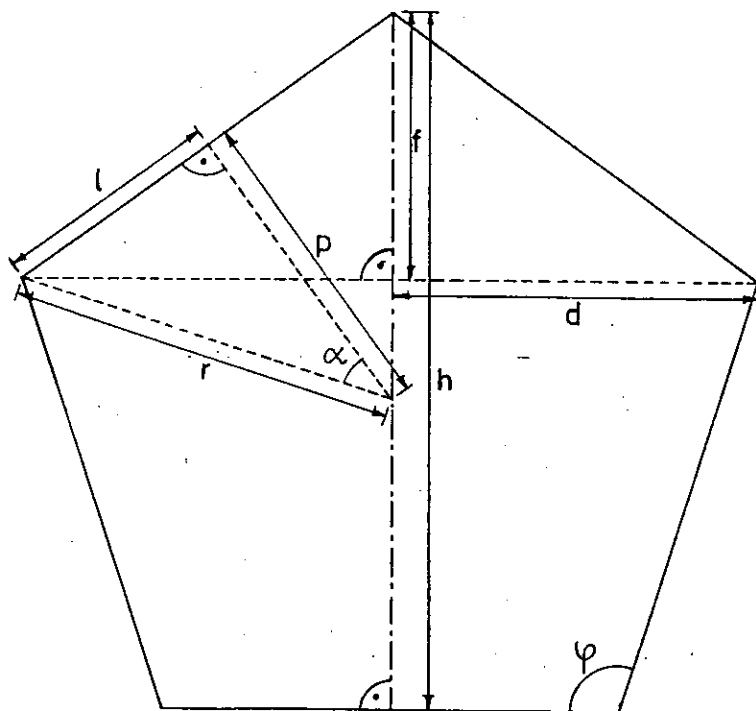


FIG 1. 2. 2.

abarcen un ángulo sólido de 2π estereorradianes, o media esfera. A este ángulo sólido lo llamaremos "espacio segregado" (ε_s) (punto de vista en el vértice V_0).

1.2.6. DEFECTO PLANO

Ambos ángulos sólidos tienen relación con la suma de los ángulos de las caras del poliedro en el vértice común, y más concretamente con la diferencia entre dicha suma y 360° , a la que llamaremos "defecto plano" (δ_p). El defecto plano guarda relación con el espacio segregado: A grandes rasgos, cuanto menor es el defecto plano, mayor es el espacio segregado; en los poliedros planos es $\delta_p = 0$, y $\varepsilon_s = 2\pi$, o un semiespacio, máximo valor posible. En cambio, en el poliedro (3, 3, 3), (triedro del tetraedro regular), es $\delta_p = 180^\circ$ y $\varepsilon_s = 0,55 \text{ rad}^2$, ó 0,0439 esferas (4,39% de espacio segregado), valores que corresponden a un exceso esférico de $31^\circ 35'$. Estos valores son el máximo posible de defecto plano y corresponden a un espacio segregado muy pequeño.

Cuando las caras del poliedro son desiguales, el espacio segregado no aumenta tanto al disminuir el defecto plano: así, en los prismas regulares y antiprismas que veremos más adelante, cuando $\delta_p \rightarrow 0$ al aumentar el número de caras del polígono base, $\varepsilon_s \rightarrow \pi \text{ rad}^2$, ó 1/4 de espacio, la mitad que los poliedros planos.

El defecto plano se obtiene fácilmente. El espacio cubierto también puede obtenerse, porque un polígono regular, proyectado sobre la esfera de los vértices, da un polígono esférico fácil de descomponer en triángulos esféricos iguales. Pero previamente hay que determinar R.

El espacio segregado es inmediato para los triedros, mediante la fórmula de L' Huillier:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-\beta_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-\beta_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-\beta_3}{2}} \quad \text{siendo } p = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{2}$$

1.2.7. RESOLUCION DE TRIEDROS

Las fórmulas de la trigonometría esférica permiten resolver los triedros a partir de los ángulos de sus caras, que son los lados de un triángulo esférico, de los que se deducen los ángulos, que son los diedros del triedro.

De los diedros y las apotemas de los polígonos se deducen los cuadriláteros $\overline{OP_1LP_2}$, $\overline{OP_2MP_3}$, $\overline{OP_3NP_1}$, rectángulos todos en P_1 , P_2 y P_3 , y R , como suma pitagórica de \overline{OP} , la correspondiente apotema y el semilado (figura 1.1.17.).

1.2.8. TETRAEDROS Y PENTAEDROS

Para ángulos poliedros de cuatro o cinco caras la cuestión es más complicada, porque los correspondientes polígonos esféricos sobre la esfera trigonométrica son deformables (uno y dos grados de libertad, respectivamente), y habría que fijar sus posiciones y triangularlos luego para obtener sus áreas.

1.2.9. LA CIRCUNFERENCIA DE LOS VERTICES CONTIGUOS A V_0

Un modo de abordar la cuestión puede ser el siguiente:

Los vértices V_1 , V_2 , V_3 , V_4 y en su caso V_5 se hallan simultáneamente sobre la "esfera de los vértices" y sobre la esfera trigonométrica, y por consiguiente pertenecen a su intersección, que es necesariamente una circunferencia. El centro de esta circunferencia viene dado por la intersección de su plano con el eje perpendicular al mismo $\overline{OV_0}$, que une los centros de la esfera de los vértices O y de la trigonométrica V_0 . Las distancias $\overline{V_3V_1}$, $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_4}$ y $\overline{V_4V_3}$ (caso de 4 caras) o bien las tres primeras más $\overline{V_4V_5}$ y $\overline{V_5V_3}$ (caso de 5 caras) son conocidas, pues se trata de lados o diagonales de polígonos regulares. Se tratará, pues, de inscribir cuerdas de longitud conocida en una circunferencia de radio indeterminado. Puede verse todo ello en la figura 1.2.1.

1.2.10. ESTUDIO PLANO DE ANGULOS POLIEDROS ABOVEDADOS

Planteado de este modo, el problema pasa al dominio de la geometría plana: Polígonos de 3, 4, 5 y en un caso 6 lados, de longitudes conocidas, determinan una circunferencia que pasa por sus vértices. El número de lados diferentes es como máximo tres, pues ya hemos visto que no hay poliedros convexos en que concurren cuatro tipos de polígonos distintos en un mismo vértice. Cada lado mide lo que la diagonal mínima del polígono correspondiente (distancia entre los dos vértices contiguos a uno dado: para el triángulo no hay diagonales y esta distancia es el lado).

Si los polígonos son todos iguales, lo son sus diagonales mínimas, y al inscribir éstas en la circunferencia se obtienen polígonos regulares, cuyo lado es la diagonal de las caras. Así se obtienen los poliedros regulares de los tipos (a, a, a) cuyos vértices V_1, V_2, V_3 forman un triángulo equilátero, y que son (*) $(3, 3, 3)T$, $(4, 4, 4)C$, $(5, 5, 5)D$, $(6, 6, 6)MR$; (a, a, a, a) , cuyos vértices V_1, V_2, V_3, V_4 forman un cuadrado, y que son $(3, 3, 3, 3)O$ y $(4, 4, 4, 4)MR$; (a, a, a, a, a) , cuyos vértices V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 forman un pentágono regular con el único representante $(3, 3, 3, 3, 3)I$; y finalmente (a, a, a, a, a, a) , único tipo de poliedro

(*)

Las letras y signos a continuación de los poliedros tienen los siguientes significados:

T: tetraedro, C: cubo, O: octaedro, D: dodecaedro, I: icosaedro, TT: tetraedro truncado, CT: cubo truncado, CO: cuboctaedro, OT: octaedro truncado, RCO: rombicuboctaedro, GRCO: gran rombicuboctaedro, CA: cubo achatado, DT: dodecaedro truncado, ID: icosidodecaedro, IT: icosaedro truncado, RID: rombiicosidodecaedro, GRID: gran rombiicosidodecaedro, DA: dodecaedro achatado, Pn: prisma n-gonal, APn: antiprisma n-gonal, MR: mosaico regular, MS: mosaico semirregular, *: forma no regular, en: par de enantiomorfos.

convexo con seis polígonos concurrentes, con vértices $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ que forman un exágono regular y con un representante en solitario, (3, 3, 3, 3, 3, 3)MR.

Si concurren tres polígonos no todos iguales, puede ocurrir que dos sean iguales, tipo (a, a, b) y el triángulo $\overline{V_1V_2V_3}$ será isósceles, y escaleno si los tres son distintos, tipo (a, b, c). En cualquiera de estos casos la determinación del circuncentro C de dichos triángulos y del radio p de la circunferencia circunscrita, como en el párrafo anterior el radio del polígono formado por las diagonales mínimas, es inmediata, en función del lado del polígono.

Antes de plantear el problema en toda su generalidad, veamos los elementos de los polígonos regulares que aparecerán en nuestro estudio.

1.2.11. POLIGONOS REGULARES

En lo que sigue se hace referencia a la figura 1.2.2.

Las letras que aparecen en dicha figura tienen los significados siguientes:

n: número de lados del polígono

l: semilado del polígono

r: radio del polígono

p: apotema

d: semidiagonal mínima

f: flecha (altura del triángulo cuya base es la diagonal mínima)

h: altura del polígono

α : semiángulo central

φ : ángulo del polígono

Verificándose:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n} \quad \text{"} \quad 2\alpha = \frac{360^\circ}{n} \quad \text{"} \quad \varphi = 180^\circ - 2\alpha \quad \text{"} \quad \varphi = (n-2)\alpha$$

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{d}{r} \quad \text{"} \quad \text{sen } 2\alpha = 2\text{sen}\alpha \text{cos}\alpha \quad \text{"} \quad \text{cos } 2\alpha = \text{cos}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{r} \quad r = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \quad \text{"} \quad d = r \cdot \text{sen } 2\alpha = r \cdot 2\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha$$

$$d = r \cdot 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{cos}\alpha = 2\text{cos}\alpha = 2\text{cos} \frac{180^\circ}{n}$$

Para $l = 1$:

semidiagonal mínima

$$d = 2 \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$\text{sen} 2\alpha = \frac{d}{r} \quad \text{r} = \frac{d}{\text{sen} 2\alpha} = \frac{2l \cos \alpha}{2 \text{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{l}{\text{sen} \alpha} = \frac{l}{\text{sen} \frac{180^\circ}{n}}$$

Para $l = 1$:

radio

$$r = \frac{1}{\text{sen} \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{p} = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{1}{\text{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

para $l = 1$:

apotema

$$p = \frac{1}{\text{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

altura: n par: $h = 2p$ „ n impar: $h = r + p$

$$\frac{r-f}{r} = \cos 2\alpha \quad \text{r} - f = r \cdot \cos 2\alpha \quad \text{f} = r(1 - \cos 2\alpha) =$$

$$= r(1 - \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) = r(\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) = 2r \cdot \text{sen}^2 \alpha = 2 \frac{1}{\text{sen} \alpha} \cdot \text{sen}^2 \alpha =$$

$$= 2l \cdot \text{sen} \alpha = 2l \cdot \text{sen} \frac{180^\circ}{n}$$

Para $l = 1$:

flecha

$$f = 2 \text{sen} \frac{180^\circ}{n}$$

La diagonal mínima une dos vértices contiguos a uno dado. En el caso del triángulo, que no tiene diagonales, tomamos como tal el lado, y como radio y apotema las dos partes en que el centro divide a la altura, equivalentes a $2/3$ y $1/3$ de la misma. En el cuadrado y el pentágono sólo existen diagonales mínimas.

Los polígonos de número impar de lados tienen por altura la suma de radio y apotema, y en los de número par de lados la altura es el doble de la apotema, mientras que el doble del radio es el diámetro, o diagonal máxima.

A continuación se incluye una tabla de polígonos que en función del lado da los valores antes aludidos:

TABLA DE POLIGONOS (I = 1)

n	α	φ	r	p	h	d	f
3	60°	60°	1,154700538	0,577350269	1,732050808	1	1,732050808
4	45°	90°	1,414213562	1	2	1,414213562	1,414213562
5	36°	108°	1,701301617	1,37638192	3,077683537	1,618033989	1,175570505
6	30°	120°	2	1,732050808	3,464101615	1,732050808	1
7	25°42'51,43"	128°34'17,1"	2,304764871	2,076521397	4,381286268	1,801937736	0,867767478
8	22°30'	135°	2,61312593	2,414213562	4,828427125	1,847759065	0,765366864
9	20°	140°	2,9238044	2,74747742	5,67128182	1,879385242	0,684040286
10	18°	144°	3,236067977	3,077683537	6,155367074	1,902113033	0,618033988
11	16°21'49,09"	147°16'21,8"	3,549465533	3,405687239	6,955152772	1,918985947	0,563465113
12	15°	150°	3,863703305	3,732050808	7,464101615	1,931851653	0,51763809
13	13°50'46,15"	152°18'27,6"	4,178581469	4,057159486	8,235740955	1,941883635	0,478631328
...							
15	12°	156°	4,809734345	4,70463011	9,514364455	1,956295202	0,415823381
...							
18	10°	160°	5,758770483	5,67128182	11,34256364	1,969615506	0,347296355
...							
20	9°	162°	6,392453222	6,313751515	12,62750303	1,975376681	0,31286893
...							
24	7°30'	165°	7,661297576	7,595754113	15,19150823	1,982889723	0,261052384
...							
30	6°	168°	9,566772234	9,514364455	19,02872891	1,989043791	0,209056926
...							
42	4°17'8,57"	171°25'42,8"	13,38149	13,34407264	26,68814528	1,994407595	0,149460187

Veamos con algún detenimiento el caso del pentágono regular. En él la relación entre la diagonal y el lado es la llamada razón áurea, cuyo valor ϕ es $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2d}{2l}$; para $l=1$ se verifica (Pitágoras); llamando a f a a y a $r-f$ a b :

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 4-\phi^2 \quad \text{,,} \quad b^2 = r^2-\phi^2 \quad \text{,,} \quad a^2+b^2 = 4+r^2-2\phi^2 \quad \text{,,} \quad a^2-b^2 = 4-r^2 \quad \text{,,} \quad a+b = r \\
 a^2+b^2+2ab &= r^2 \quad \text{,,} \quad 2ab = r^2-(a^2+b^2) \quad \text{,,} \quad 4a^2b^2 = [r^2-(a^2+b^2)][r^2-(a^2+b^2)] = \\
 &= r^4-2(a^2+b^2)r^2+(a^2+b^2)^2 = r^4-2(a^2+b^2)r^2+a^4+b^4+2a^2b^2 \quad \text{,,} \\
 r^4-2(a^2+b^2)r^2+a^4+b^4-2a^2b^2 &= 0 \quad \text{,,} \quad r^4-2(a^2+b^2)r^2+(a^2-b^2)^2 = 0 \quad \text{,,} \\
 r^4-2(4+r^2-2\phi^2)r^2+(4-r^2)^2 &= 0 \quad \text{,,} \quad r^4-8r^2-2r^4+4\phi^2r^2+4^2+r^4-8r^2 = 0 \quad \text{,,} \\
 r^2(4\phi^2-16)+4^2 &= 0 \quad \text{,,} \quad r^2 = \frac{-16}{-16+4\phi^2} = \frac{4}{4-\phi^2} \quad \text{,,} \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\phi^2}} = \frac{2}{\sqrt{(2+\phi)(2-\phi)}} \quad \text{,,} \\
 a = \sqrt{4-\phi^2} = f \quad \text{,,} \quad d = \phi \quad \text{,,} \quad p = \sqrt{r^2-1} &= \sqrt{\frac{4}{4-\phi^2}-1} = \sqrt{\frac{4-4+\phi^2}{4-\phi^2}} = \frac{\phi}{\sqrt{4-\phi^2}} \quad \text{,,} \\
 h = r+p = \frac{2+\phi}{\sqrt{4-\phi^2}} &= \frac{2+\phi}{\sqrt{(2+\phi)(2-\phi)}} \quad \text{,,} \quad \text{y siendo } \phi^2 = 1+\phi, \text{ quedan las expresiones}
 \end{aligned}$$

anteriores, para semilado $l = 1$:

$$\boxed{r = \frac{2}{\sqrt{3-\phi}} \quad \text{,,} \quad p = \frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}} \quad \text{,,} \quad d = \phi \quad \text{,,} \quad f = \sqrt{3-\phi} \quad \text{,,} \quad h = \frac{2+\phi}{\sqrt{3-\phi}} \quad \text{,,}}$$

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{3-\phi}}{2}$$

1.2.12. LA ESFERA DE LOS VERTICES EN FUNCION DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA DE LOS VERTICES CONTIGUOS

Veamos, a partir de estos valores, qué relación existe entre el radio R de la esfera de los vértices y el radio p de la circunferencia que contiene los V_i , $i \neq 0$ (véase la figura 1.2.3.):

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{VP}^2 = \overline{OP}^2 + r^2 \quad \text{,,} \quad \overline{OP}^2 = R^2 - r^2 \quad \text{,,} \quad \left\| \begin{array}{l} FC = x \\ V_0C = y \end{array} \right. \\
 \rho^2 &= \overline{VF}^2 + \overline{FC}^2 = d^2 + \overline{FC}^2 \quad \text{,,} \quad \overline{FC}^2 = \rho^2 - d^2 \quad \text{,,} \\
 \frac{1}{\text{sen } \gamma} &= \frac{R}{\overline{OP}} = \frac{FV_0}{FC} \quad \text{,,} \quad \frac{R}{FV_0} = \frac{OP}{FC} \quad \text{,,} \quad \frac{R}{f} = \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{\sqrt{\rho^2-d^2}} \quad \text{,,} \quad \frac{R^2}{f^2} = \frac{R^2-r^2}{\rho^2-d^2} \quad \text{,,} \\
 R^2(\rho^2-d^2) &= R^2f^2-r^2f^2 \quad \text{,,} \quad R^2(d^2+f^2-\rho^2) = r^2f^2 \quad \text{,,} \quad R^2(4f^2-\rho^2) = r^2f^2 \quad \text{,,} \\
 R^2 &= \frac{r^2f^2}{4f^2-\rho^2} \quad \text{,,} \quad R = \frac{rf}{\sqrt{(2f)^2-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{(21)^2-\rho^2}} \cdot 21 \cdot \text{sen}(180^\circ/n) = \frac{21^2}{\sqrt{(21)^2-\rho^2}} \quad \text{,,} \\
 R &= \frac{1^2}{\sqrt{1^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

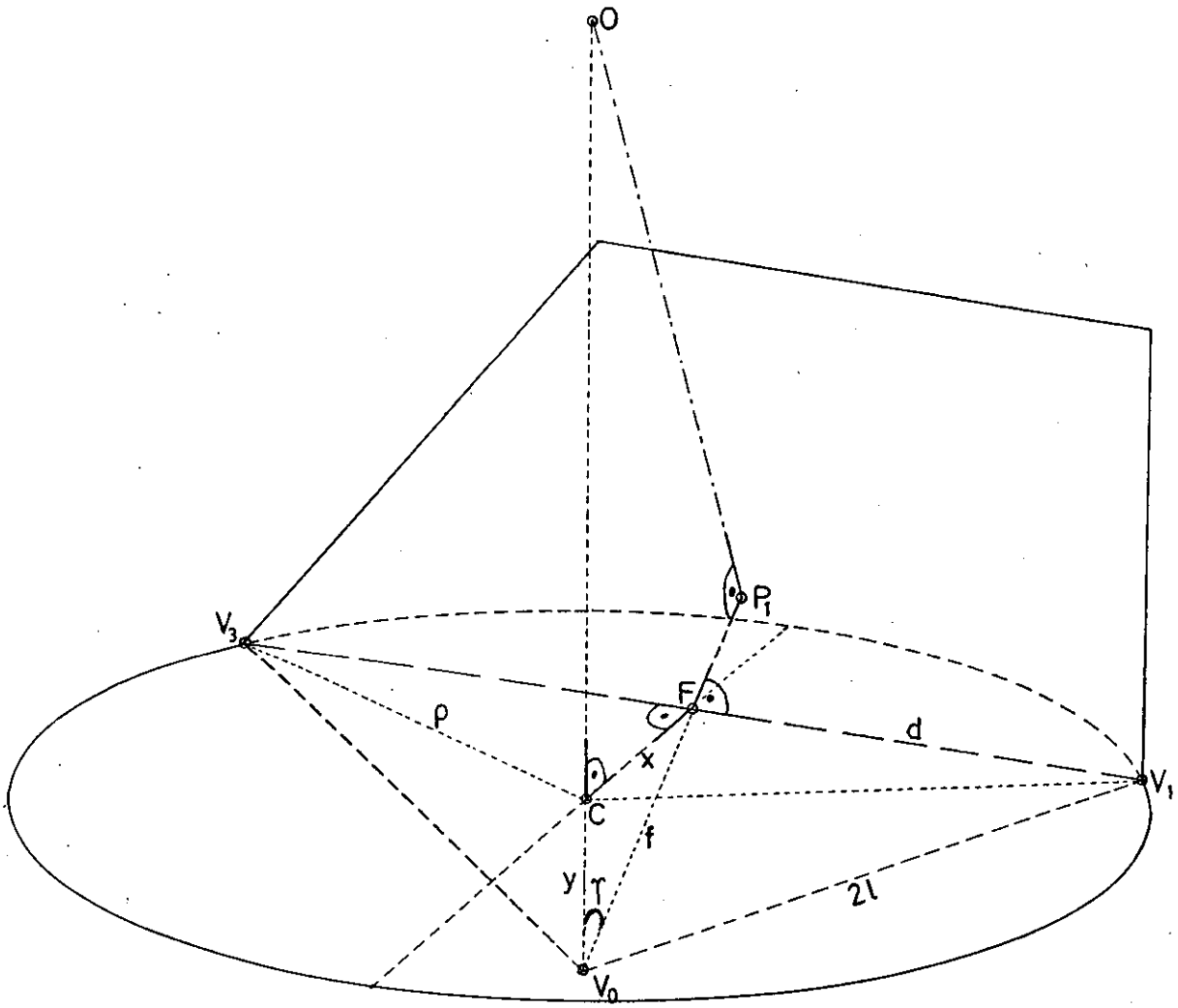


FIG 1.2.3.

y para $l=1$:

$$R = \frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}}$$

Conclusión: Cuanto más próximo a $2l$ sea ρ , mayor es R ; en las formas planas $\rho = 2l$, $R = \infty$.

Ahora podemos obtener para los distintos casos el valor de ρ .

1.2.13. CASOS POSIBLES DE POLIEDROS ABOVEDADOS

Para estudiar el caso general, no habiendo más de tres polígonos distintos, y llamando $d_a=2d_1$, $d_b=2d_2$, $d_c=2d_3$ a las diagonales mínimas de los tres, pueden presentarse los siguientes tipos de poliedros:

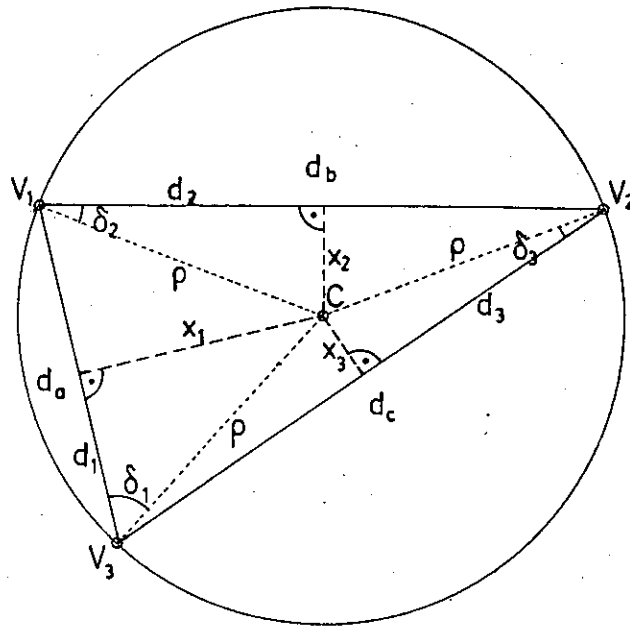
con 3 polígonos	con 4 polígonos	con 5 polígonos	con 6 polígonos	
(a,a,a)	(a,a,a,a)	(a,a,a,a,a)	(a,a,a,a,a,a)	regulares
(a,a,b)	(a,a,a,b)	(a,a,a,a,b)		
(a,b,c)	(a,a,b,b)	(a,a,a,b,b)		
	(a,b,a,b)	(a,a,b,a,b)		
	(a,a,b,c)			
	(a,a,c,b)			
	(a,b,a,c)			

1.2.13.1. TRIEDROS (a, b, c)

Los triedros (poliedros de tres polígonos) se resuelven mediante la fórmula general:(figura 1.2.4.):

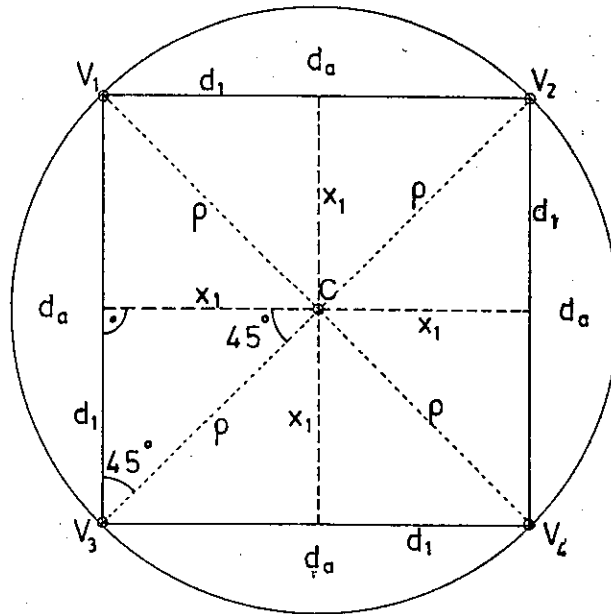
$$\begin{array}{l} \rho^2 = d_1^2 + x_1^2 \\ \rho^2 = d_2^2 + x_2^2 \\ \rho^2 = d_3^2 + x_3^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{sen } \delta_1 = \frac{x_1}{\rho} \quad \text{cos } \delta_1 = \frac{d_1}{\rho} \\ \text{sen } \delta_2 = \frac{x_2}{\rho} \quad \text{cos } \delta_2 = \frac{d_2}{\rho} \\ \text{sen } \delta_3 = \frac{x_3}{\rho} \quad \text{cos } \delta_3 = \frac{d_3}{\rho} \end{array} \right.$$

FIG 1. 2. 4.



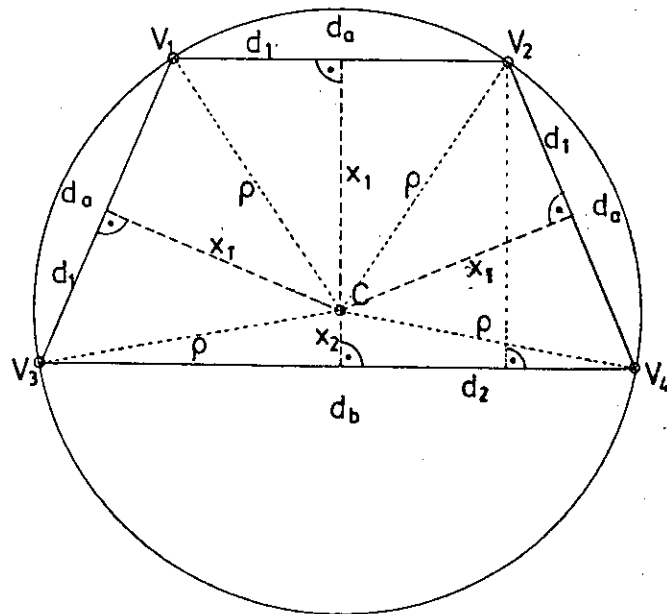
(a, b, c)

FIG 1. 2. 5.



(a, a, a, a)

FIG 1. 2. 6.



(a, a, a, b)

$$2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 = 180^\circ \quad \parallel \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 90^\circ \quad \parallel \quad \sin(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) = 1$$

$$\begin{aligned} \sin(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) &= \sin \delta_1 \cdot \cos(\delta_2 + \delta_3) + \cos \delta_1 \cdot \sin(\delta_2 + \delta_3) = \\ &= \sin \delta_1 [\cos \delta_2 \cos \delta_3 - \sin \delta_2 \sin \delta_3] + \cos \delta_1 [\sin \delta_2 \cos \delta_3 + \cos \delta_2 \sin \delta_3] = \\ &= \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \delta_3 + \cos \delta_1 \sin \delta_2 \cos \delta_3 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \sin \delta_3 - \sin \delta_1 \sin \delta_2 \sin \delta_3 \end{aligned}$$

$$\frac{x_1}{\rho} \cdot \frac{d_2}{\rho} \cdot \frac{d_3}{\rho} + \frac{d_1}{\rho} \cdot \frac{x_2}{\rho} \cdot \frac{d_3}{\rho} + \frac{d_1}{\rho} \cdot \frac{d_2}{\rho} \cdot \frac{x_3}{\rho} - \frac{x_1}{\rho} \cdot \frac{x_2}{\rho} \cdot \frac{x_3}{\rho} = 1$$

$$\frac{x_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{\rho^3} + \frac{d_1 \cdot x_2 \cdot d_3}{\rho^3} + \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot x_3}{\rho^3} - \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{\rho^3} = \rho^3$$

siendo $x_1 = \sqrt{\rho^2 - d_1^2}$

$$x_2 = \sqrt{\rho^2 - d_2^2}$$

$$x_3 = \sqrt{\rho^2 - d_3^2}$$

abreviadamente: $\sum \frac{x_i d_j d_k}{x_i} - \frac{x_i x_j x_k}{x_i} = \rho^3$

$$x_i = \sqrt{\rho^2 - d_i^2}$$

En definitiva, la única incógnita en esta ecuación es ρ , pues d_1, d_2, d_3 son datos del problema. El modo más sencillo de resolver la ecuación es dar valores a ρ en la función

$$f(\rho) = \frac{x_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{x_1} + \frac{x_2 \cdot d_1 \cdot d_3}{x_2} + \frac{x_3 \cdot d_1 \cdot d_2}{x_3} - \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{x_1} - \rho^3$$

El valor de ρ que anule $f(\rho)$ será la solución buscada.

Sabemos que la raíz que nos interesa es real y positiva, y, para $l=1$, menor que 2. Además podemos encontrar un valor aproximado gráficamente y ajustarlo con una calculadora de bolsillo. Utilizaremos el cuadro siguiente:

ρ	x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	ρ^3	$f(\rho)$
--------	-------	-------	-------	---------------------------	----------	-----------

Y a partir de ρ se obtiene inmediatamente R.

1.2.13.2. TETRAEDROS

Poliedros de cuatro polígonos.

1.2.13.2.1. CASO (a,a,a,a)

En la figura 1.2.5.:

$$\rho = d_1 \cdot \sqrt{2}$$

$$R = \frac{1^2}{\sqrt{1^2 - \left(\frac{d_1 \sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{1^2}{\sqrt{1 - \frac{d_1^2}{2}}}$$

Para $l = 1$:

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d_1^2}{2}}}$$

1.2.13.2.2. CASO (a, a, a, b)

En la figura 1.2.6.:

$$(x_1 + x_2)^2 + (d_2 - d_1)^2 = (2d_1)^2 \quad \text{''} \quad x_1^2 + d_1^2 = \rho^2 \quad \text{''} \quad x_2^2 + d_2^2 = \rho^2 \quad \text{''}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + d_2^2 + d_1^2 - 2d_1d_2 = 4d_1^2 \quad \text{''}$$

$$x_1^2 + d_1^2 + x_2^2 + d_2^2 + 2x_1x_2 - 2d_1d_2 = 4d_1^2 \quad \text{''}$$

$$\rho^2 + \rho^2 + 2x_1x_2 - 2d_1d_2 = 4d_1^2 \quad \text{''} \quad \rho^2 + x_1x_2 - d_1d_2 - 2d_1^2 = 0 \quad \text{''}$$

$$\text{siendo } x_1 = \sqrt{\rho^2 - d_1^2}$$

$$x_2 = \sqrt{\rho^2 - d_2^2}$$

También aquí es ρ la única incógnita, y el modo más simple de resolver la ecuación es dar valores a la función

$$f(\rho) = \rho^2 + x_1x_2 - d_1d_2 - 2d_1^2$$

Buscando una raíz real positiva menor que 2l, partiendo de un valor aproximado obtenido gráficamente y utilizando el cuadro siguiente hasta anular $f(\rho)$:

ρ	ρ^2	x_1	x_2	x_1x_2	$f(\rho)$
--------	----------	-------	-------	----------	-----------

y de aquí se obtendrá R.

1.2.13.2.3. CASO (a, b, a, b)

En la figura 1.2.7.:

$$\rho^2 = d_1^2 + d_2^2 \quad \text{''} \quad R = \frac{2l^2}{\sqrt{4l^2 - \rho^2}} = \frac{2l^2}{\sqrt{4l^2 - d_1^2 - d_2^2}}$$

FIG 1.2.7.

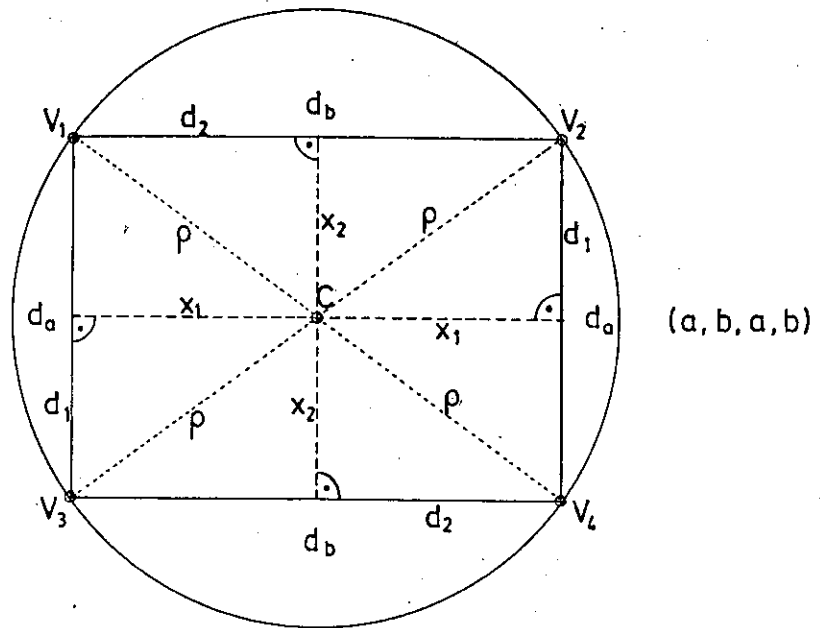


FIG 1.2.8.

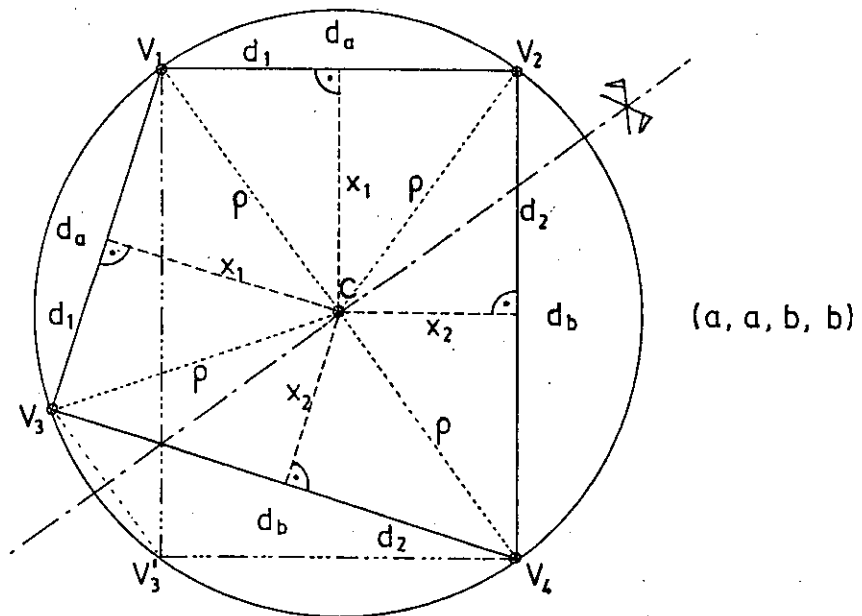
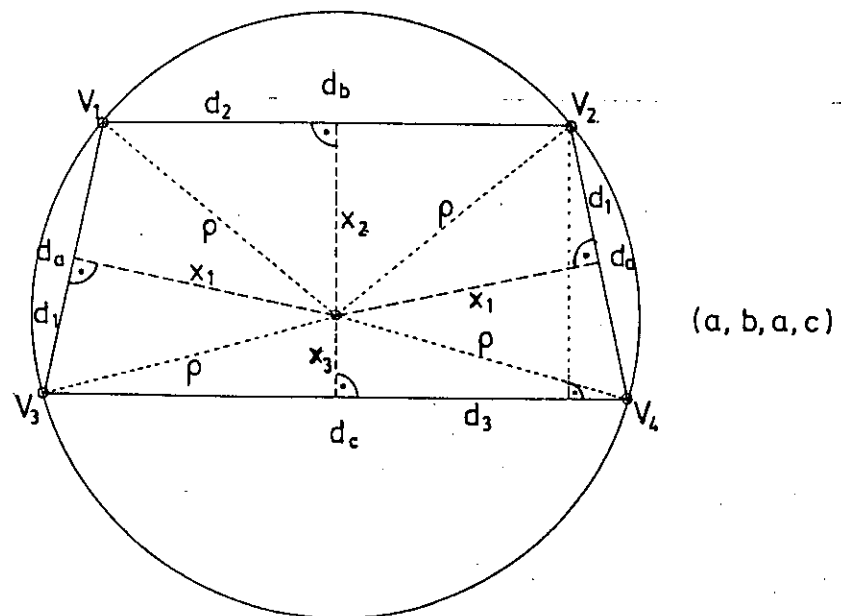


FIG 1.2.9.



Para $l = 1$:

$$R = \frac{2}{\sqrt{4 - d_1^2 - d_2^2}}$$

1.2.13.2.4. CASO (a, a, b, b)

En la figura 1.2.8. vemos la simetría de los triángulos $\overline{V_1 V_3 V_4}$, y $\overline{V_1 V'_3 V_4}$, de donde se deduce que la solución es la misma del caso anterior.

1.2.13.2.5. CASO (a, b, a, c)

En la figura 1.2.9.:

$$(x_2 + x_3)^2 + (d_3 - d_2)^2 = (2d_1)^2 \quad \text{,,} \quad x_1^2 + d_1^2 = \rho^2 \quad \text{,,} \quad x_2^2 + d_2^2 = \rho^2 \quad \text{,,} \quad x_3^2 + d_3^2 = \rho^2 \quad \text{,,}$$

$$x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + d_3^2 + d_2^2 - 2d_2d_3 = 4d_1^2 \quad \text{,,} \quad x_2^2 + d_2^2 + x_3^2 + d_3^2 + 2x_2x_3 - 2d_2d_3 = 4d_1^2 \quad \text{,,}$$

$$\rho^2 + \rho^2 + 2x_2x_3 - 2d_2d_3 = 4d_1^2 \quad \text{,,} \quad \rho^2 + x_2x_3 - d_2d_3 - 2d_1^2 = 0, \text{ siendo } \begin{cases} x_2 = \sqrt{\rho^2 - d_2^2} \\ x_3 = \sqrt{\rho^2 - d_3^2} \end{cases}$$

Ecuación muy semejante a la del caso (a, a, a, b), que se resuelve de idéntico modo.

1.2.13.2.6. CASOS $\left. \begin{matrix} (a, a, b, c) \\ (a, a, c, b) \end{matrix} \right\}$ en

Como se ve en la figura 1.2.10., de la simetría de los triángulos $\overline{V_3 V_1 V_4}$ y $\overline{V'_3 V_4 V_1}$ se infiere que la solución es la del caso anterior.

1.2.13.3. PENTAEDROS

Poliedros de cinco polígonos.

1.2.13.3.1. CASO: (a, a, a, a, a)

En la figura 1.2.11.:

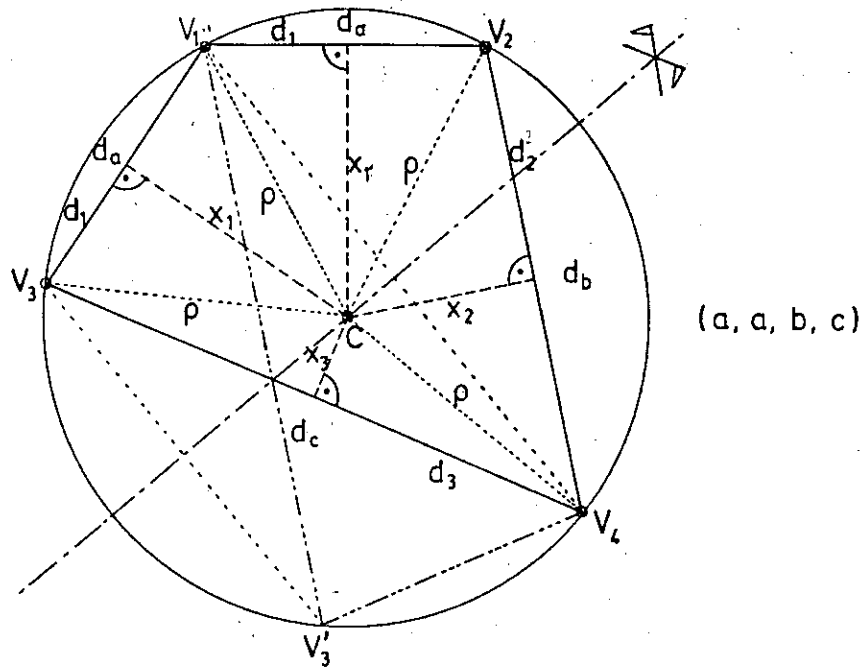
$$\rho = \frac{d_1}{\sin \frac{180^\circ}{5}} = \frac{d_1}{\sin 36^\circ} = \frac{d_1}{\frac{\sqrt{3-\phi}}{2}} = \frac{2d_1}{\sqrt{3-\phi}}$$

Para $l = 1$:

$$R = \frac{2}{\sqrt{4 - \rho^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - \frac{4d_1^2}{3-\phi}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{12 - 4\phi - 4d_1^2}{3-\phi}}} = \frac{2\sqrt{3-\phi}}{2\sqrt{3-\phi - d_1^2}} = \frac{\sqrt{3-\phi}}{\sqrt{3-\phi - d_1^2}}$$

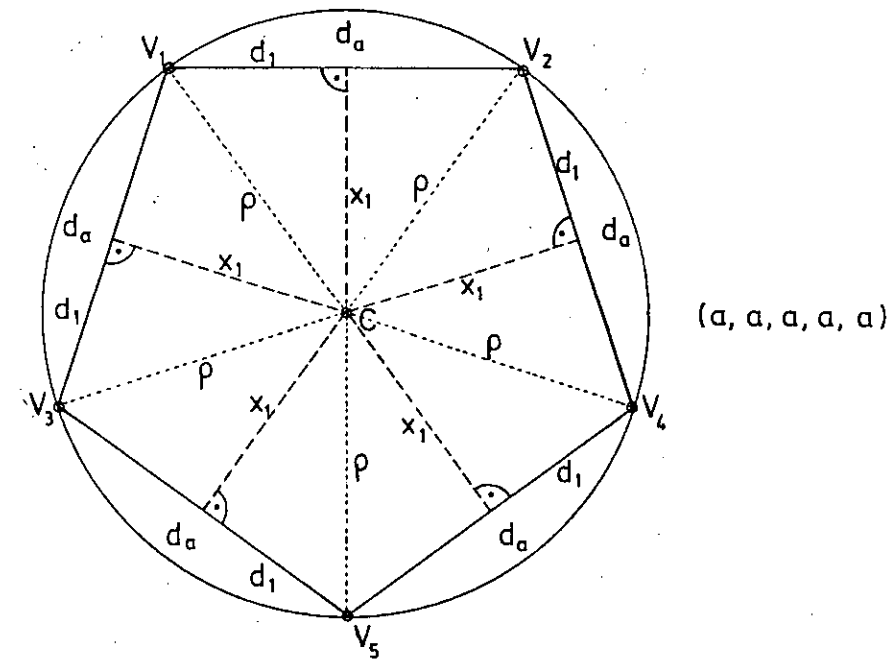
Como el único poliedro de este tipo es (3, 3, 3, 3, 3), con $d_1 = 1$, será:

FIG 1. 2. 10.



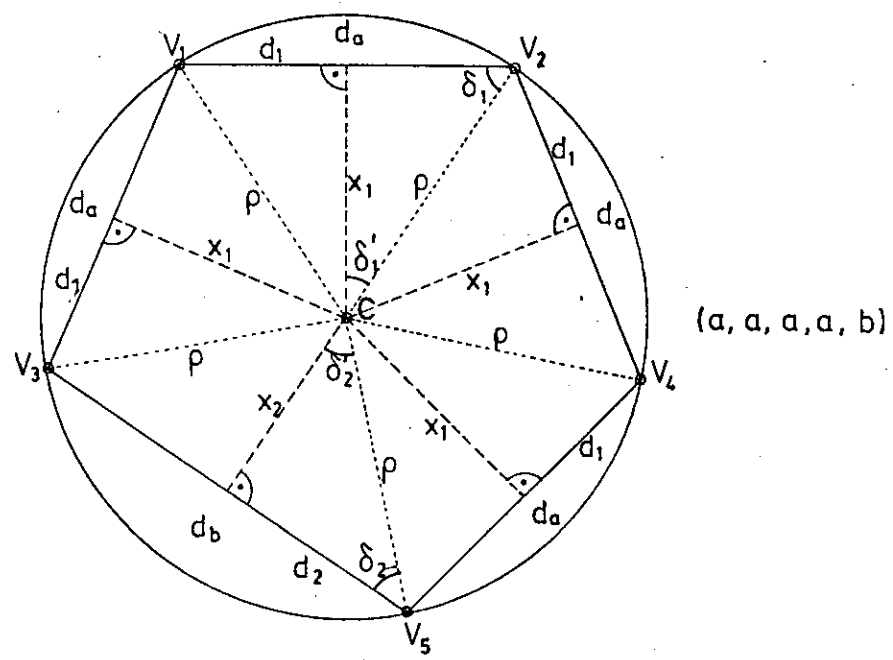
(a, a, b, c)

FIG 1. 2. 11.



(a, a, a, a, a)

FIG 1. 2. 12.



(a, a, a, a, b)

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{3-\phi}} \quad \text{R} = \sqrt{\frac{3-\phi}{2-\phi}} = \sqrt{\frac{4-\phi^2}{2-\phi}} = \sqrt{\frac{(2+\phi)(2-\phi)}{2-\phi}} = \sqrt{2+\phi}$$

1.2.13.3.2. CASO (a, a, a, a, b)

En la figura 1.2.12.:

$$\rho^2 = d_1^2 + x_1^2 \quad \rho^2 = d_2^2 + x_2^2 \quad \delta'_1 = 90^\circ - \delta_1 \quad \delta'_2 = 90^\circ - \delta_2$$

$$\text{sen } \delta'_1 = \frac{d_1}{\rho} \quad \text{sen } \delta'_2 = \frac{d_2}{\rho} \quad \text{cos } \delta'_1 = \frac{x_1}{\rho} \quad \text{cos } \delta'_2 = \frac{x_2}{\rho}$$

$$4\delta'_1 + \delta'_2 = 180^\circ \quad \text{sen } 4\delta'_1 = \text{sen } \delta'_2 \quad \text{sen } 4\delta'_1 = 2\text{sen}2\delta'_1 \cdot \text{cos}2\delta'_1 =$$

$$= 2 \cdot 2\text{sen}'\delta'_1 \cdot \text{cos } \delta'_1 \cdot (\text{cos}^2\delta'_1 - \text{sen}^2\delta'_1) =$$

$$= 4 \cdot \text{sen } \delta'_1 \cdot \text{cos}^3\delta'_1 - 4 \cdot \text{sen}^3\delta'_1 \cdot \text{cos } \delta'_1 = \text{sen } \delta'_2$$

$$4 \cdot \frac{d_1}{\rho} \cdot \frac{x_1^3}{\rho^3} - 4 \cdot \frac{d_1^3}{\rho^3} \cdot \frac{x_1}{\rho} = \frac{d_2}{\rho} \quad 4d_1 \cdot x_1^3 - 4d_1^3 \cdot x_1 = d_2 \cdot \rho^3, \quad \text{con } x_1 = \sqrt{\rho^2 - d_1^2}$$

Se hace : $f(\rho) = 4d_1 \cdot x_1^3 - 4d_1^3 \cdot x_1 - d_2 \cdot \rho^3$

y se busca el valor de ρ real y positivo menor que dos que anule $f(\rho)$, mediante el siguiente cuadro a partir de un valor aproximado obtenido gráficamente:

ρ	x_1	x_1^3	ρ^3	$f(\rho)$
--------	-------	---------	----------	-----------

1.2.13.3.3. CASO (a, a, a, b, b)

A él corresponde la figura 1.2.13. Forzosamente reducido a (3,3,3,4,4)MS, que es una forma plana bastante trivial.

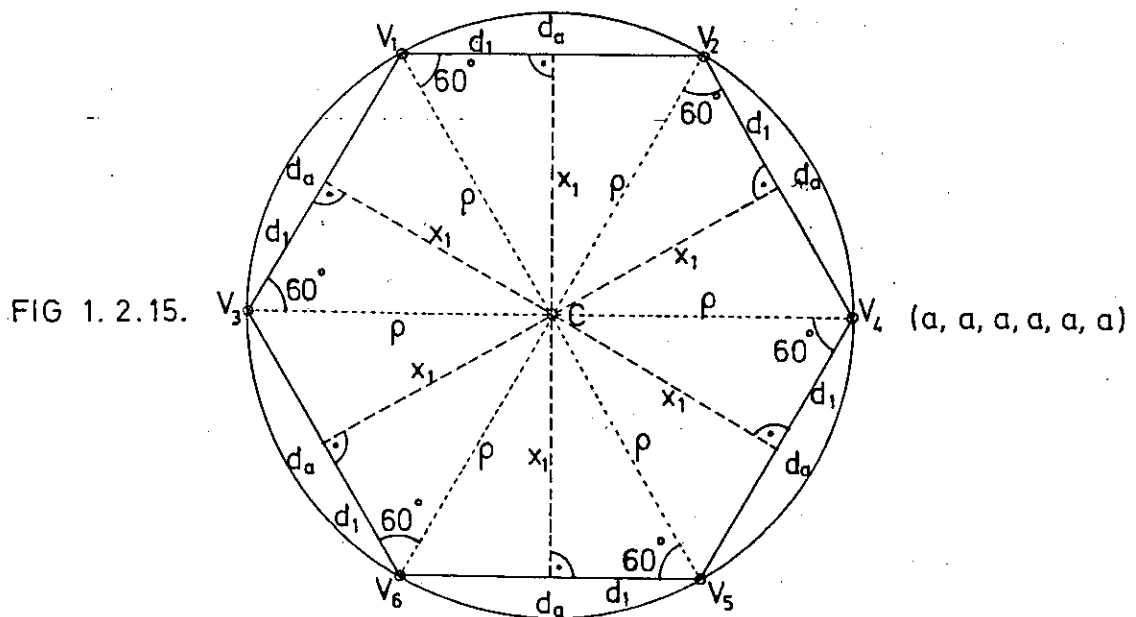
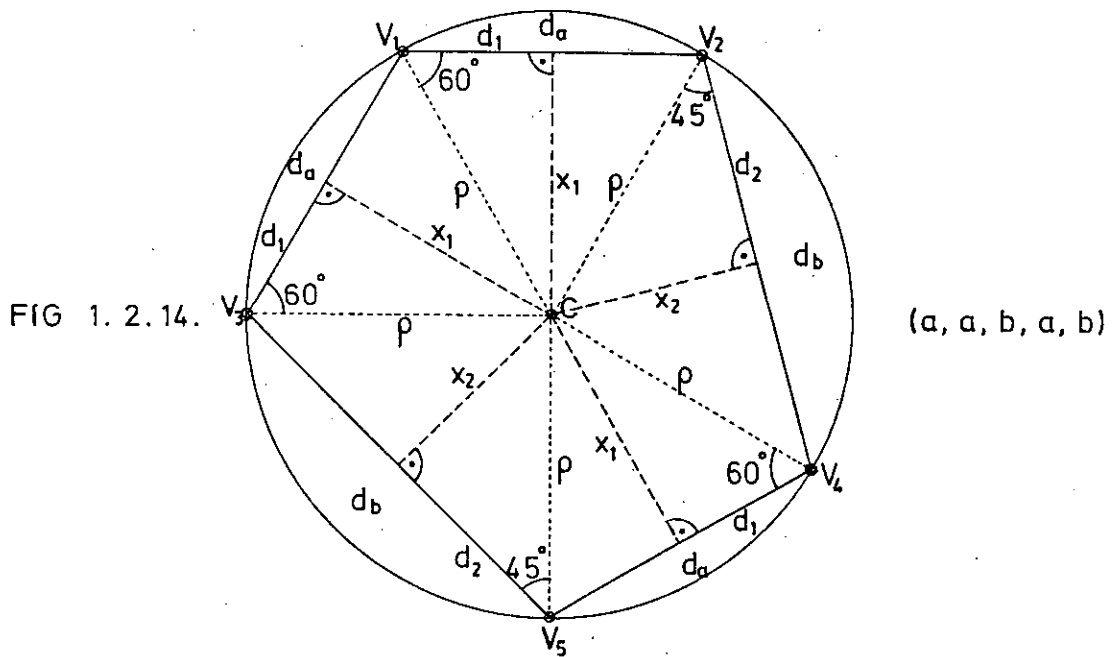
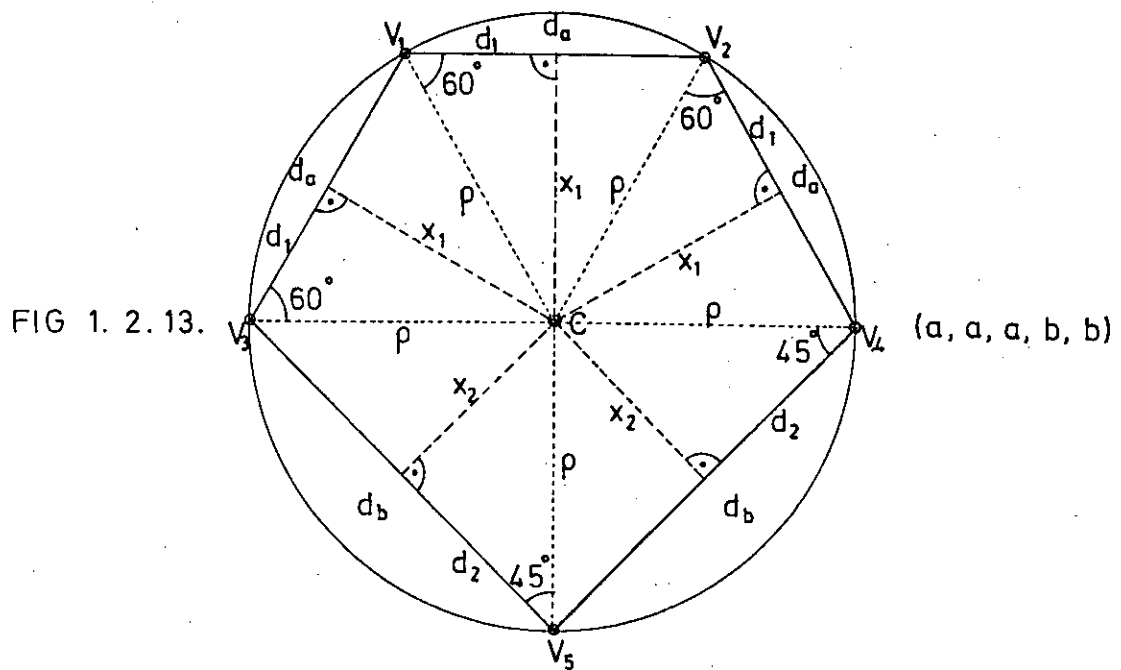
1.2.13.3.4. CASO (a, a, b, a, b)

Figura 1.2.14. Reducido a (3, 3, 4, 3, 4)MS, también forma plana.

1.2.13.4. EXAEDRO

Poliedro de seis polígonos:

Caso (a, a, a, a, a, a) (figura 1.2.15), con el único representante plano y regular (3, 3, 3, 3, 3, 3)MR.



1.2.13.5. EJEMPLOS DE RESOLUCION

Aplicaremos los procedimientos vistos en apartados anteriores a la resolución de algunos poliedros.

1.2.13.5.1. TRIEDRO (3, 4, 5) *

Poliedro asimétrico que, junto al (3,5,4) *, forma una pareja de enantiomorfos. En lo que sigue nos referiremos a la figura 1.2.16.

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 2 = \rho^2 & \text{sen } \alpha = \frac{x}{\rho} \quad \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\rho} \\ y^2 + 1 = \rho^2 & \text{sen } \beta = \frac{y}{\rho} \quad \text{cos } \beta = \frac{1}{\rho} \\ z^2 + \phi^2 = \rho^2 & \text{sen } \gamma = \frac{z}{\rho} \quad \text{cos } \gamma = \frac{\phi}{\rho} \end{array}$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \quad \text{sen } (\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) = \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}(\beta + \gamma) + \text{cos}\alpha \cdot \text{sen}(\beta + \gamma) =$$

$$= \text{sen}\alpha [\text{cos}\beta \text{cos}\gamma - \text{sen}\beta \text{sen}\gamma] + \text{cos}\alpha [\text{sen}\beta \text{cos}\gamma + \text{cos}\beta \text{sen}\gamma] =$$

$$= \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta \cdot \text{cos}\gamma + \text{cos}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{cos}\gamma + \text{cos}\alpha \cdot \text{cos}\beta \cdot \text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma =$$

$$= \frac{x}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\phi}{\rho} + \frac{\sqrt{2}}{\rho} \cdot \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\phi}{\rho} + \frac{\sqrt{2}}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{z}{\rho} - \frac{x}{\rho} \cdot \frac{y}{\rho} \cdot \frac{z}{\rho} = 1$$

$$\phi \cdot x + \phi\sqrt{2} \cdot y + \sqrt{2} \cdot z - xyz = \rho^3, \text{ siendo } x = \sqrt{\rho^2 - 2} = x(\rho)$$

$$y = \sqrt{\rho^2 - 1} = y(\rho)$$

$$z = \sqrt{\rho^2 - \phi^2} = z(\rho)$$

$$\text{Sea } f(\rho) = \phi \cdot x(\rho) + \phi\sqrt{2} \cdot y(\rho) + \sqrt{2} \cdot z(\rho) - x(\rho) \cdot y(\rho) \cdot z(\rho) - \rho^3$$

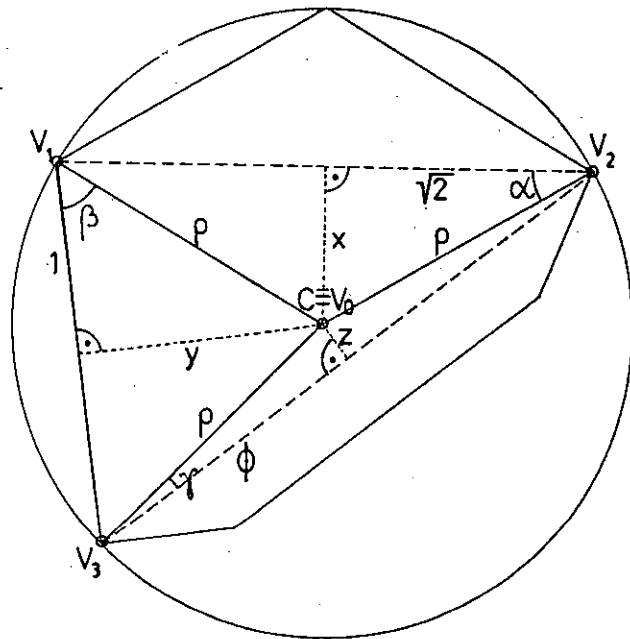
Veamos qué valor de ρ anula $f(\rho)$.

Sea $\rho = 1,62$ (de la construcción gráfica) el primer valor a tantear:

ρ	x	y	z	xyz	ρ^3	f(ρ)
1,62	0,790189850	1,274519517	0,006366011	0,006411289	4,251528	-0,0053968662
1,63	0,810493676	1,287206277	0,197144646	0,205675597	4,330747	-0,0007675358
1,64	0,830421579	1,299846145	0,267518245	0,288764621	4,410944	-0,0033631149
1,635	0,820502894	1,293531986	0,234927672	0,249339718	4,370722875	-0,0003042331
1,633	0,816510257	1,291003098	0,220578811	0,232515934	4,354703137	-0,0000000044
1,6329	0,816310241	1,290876605	0,219837261	0,231654787	4,353903179	-0,0000006891
1,63299	0,816490257	1,290990449	0,220504765	0,23242991	4,354623137	-0,0000000019
1,632993	0,816496257	1,290994244	0,220526981	0,232455719	4,354647137	-0,0000000006

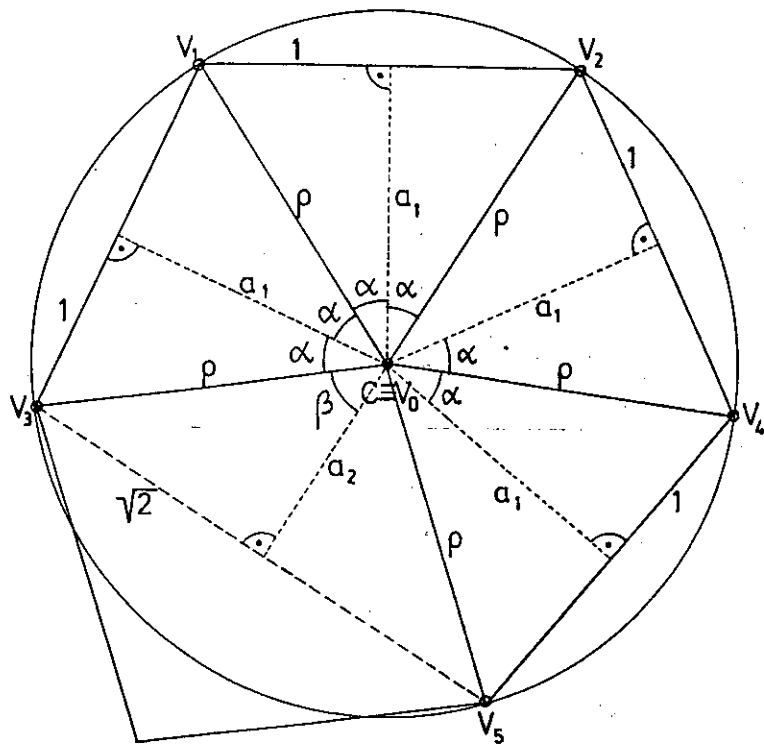
Este valor de $f(\rho) = \phi x + \phi\sqrt{2}y + \sqrt{2}z - xyz - \rho^3$ es el más próximo a 0 que permite obtener la precisión de la calculadora. Constituye un valor bastante aproximado de $\sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 1,632993162$.

FIG 1. 2. 16.



(3, 4, 5)

FIG 1. 2. 17.



(3, 3, 3, 3, 4)

A este valor corresponden los siguientes para las demás incógnitas del problema:

$$\begin{aligned} x &= 0,816496257 \quad \text{"} = \text{arc sen } \frac{x}{\rho} = \text{arc cos } \frac{\sqrt{2}}{\rho} = 30^\circ \\ y &= 1,290994244 \quad \text{"} = \text{arc sen } \frac{y}{\rho} = \text{arc cos } \frac{1}{\rho} = 52^\circ 14' 19,52'' \\ z &= 0,220526981 \quad \text{"} = \text{arc sen } \frac{z}{\rho} = \text{arc cos } \frac{\phi}{\rho} = 7^\circ 45' 40,48'' \end{aligned}$$

A continuación incluimos los valores de las variables anteriores con expresiones que permitan afinar el cálculo tanto como se desee (siendo como ya sabemos $\phi = \frac{\sqrt{5+1}}{2}$):

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{8}{3} - 2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{"} \quad y = \sqrt{\frac{8}{3} - 1} = \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{"} \quad z = \sqrt{\frac{8}{3} - \phi^2} = \sqrt{\frac{8}{3} - (1+\phi)} = \sqrt{\frac{5}{3} - \phi} \quad \text{"} \\ \text{sen } \alpha &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2} \quad \text{"} \quad \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{"} \quad \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \quad \text{"} \\ \text{cos } \beta &= \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{"} \quad \text{sen } \gamma = \frac{\sqrt{\frac{5}{3} - \phi}}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \sqrt{\frac{5-3\phi}{8}} = \frac{\sqrt{5-3\phi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{"} \quad \text{cos } \gamma = \frac{\phi}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{\sqrt{3}\phi^2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3(1+\phi)}}{2\sqrt{2}} \\ xyz &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{5}{3} - \phi} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3} - \phi} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5^2}{3^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot \phi}{3^2} - \frac{2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \phi}{3\sqrt{3}}} \quad \text{"} \quad \rho^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

1.2.13.5.2. PENTAEDRO (3, 3, 3, 3, 4)CA

Este poliedro como veremos más adelante, corresponde al vértice del poliedro semirregular denominado cubo achatado. Todo lo siguiente se refiere a la figura 1.2.17.

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{1}{\rho} \quad \text{"} \quad \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{2}}{\rho} \quad \text{"} \quad \text{sen } \alpha \cdot \sqrt{2} = \text{sen } \beta \quad \text{"} \quad 4\alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{"} \\ \text{sen } 4\alpha &= 2\text{sen } 2\alpha \cdot \text{cos } 2\alpha \quad \text{"} \quad \text{sen } 4\alpha = \text{sen } \beta \quad \text{"} \quad 2 \cdot 2\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha (\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = \\ &= 4\text{sen } \alpha \text{cos}^3 \alpha - 4\text{sen}^3 \alpha \text{cos } \alpha = \sqrt{2} \text{sen } \alpha \quad \text{"} \quad 4\text{cos}^3 \alpha - 4\text{sen}^2 \alpha \text{cos } \alpha = \sqrt{2} \quad \text{"} \\ 4\text{cos}^3 \alpha - 4(1 - \text{cos}^2 \alpha)\text{cos } \alpha &= \sqrt{2} \quad \text{"} \quad 4\text{cos}^3 \alpha + 4\text{cos}^3 \alpha - 4\text{cos } \alpha - \sqrt{2} = 0 \quad \text{"} \quad \dots \dots \dots \\ 8\text{cos}^3 \alpha - 4\text{cos } \alpha - \sqrt{2} &= 0, \text{ y llamando } x \text{ al coseno de } \alpha, \alpha = \text{arc cos } x; \text{ hemos de encontrar el valor de } x \text{ que anule la función } y = 8x^3 - 4x - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Resolveremos esta ecuación de tercer grado dando valores a x a partir de uno aproximado obtenido gráficamente, $\text{arc cos } 30^\circ \approx 0,85$

x	y	x	y	x	y
0,85	+0,098786437	0,8426	+ 0,0011842998	0,84250916	-0,0000000319
0,84	-0,032581562	0,84251	+ 0,0000109177	0,842509163	+0,0000000072
0,843	+0,0064032937	0,842509	- 0,0000021176	0,842509162	-0,0000000059
0,842	-0,0066320583	0,8425092	+ 0,0000004895	0,8425091625	≈ 0
0,8425	-0,0001194374	0,84250918	+ 0,0000002288		

Para este último valor de x es:

$$\alpha = \arccos x = 32^{\circ}35'38,27'' \quad \beta = 180^{\circ} - 4\alpha = 49^{\circ}37'26,94''$$

$$\rho = 1/\sin\alpha = 1,856382754 \quad a_1 = 1/\operatorname{tg}\alpha = 1,564019478$$

$$a_2 = \sqrt{2}/\operatorname{tg}\beta = 1,202562661$$

1.2.13.5.3. PENTAEDRO (3, 3, 3, 3, 5)DA

Corresponde al vértice del poliedro semiregular llamado dodecaedro achatado.

Lo que sigue se refiere a la figura 1.2.18.

$$4\alpha + \beta = 180^{\circ} \quad \sin 4\alpha = \sin \beta \quad \sin \beta = \frac{\phi}{\rho} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\rho} \quad \sin \beta = \phi \cdot \sin \alpha$$

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha$$

$$4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha = \phi \sin \alpha \quad 4 \cos^3 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \phi$$

$$4 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \phi \quad 4 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha = \phi \quad 8 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha - \phi = 0$$

Llamando $\cos \alpha = x$ $\alpha = \arccos x$, hay que anular la función:

$$y = 8x^3 - 4x - \phi = 0$$

Como en el poliedro anterior podemos comenzar el tanteo a partir de $x = 0,85$, valor aproximado de la única raíz real y positiva.

x	y	x	y
0,85	-0,105033988	0,85778	-0,0000102421
0,86	+0,030414011	0,857781	+0,0000034168
0,857	-0,010651644	0,8577807	-0,0000006809
0,858	+0,0029957073	0,85778075	+0,0000000021
0,8578	+0,0002629437		

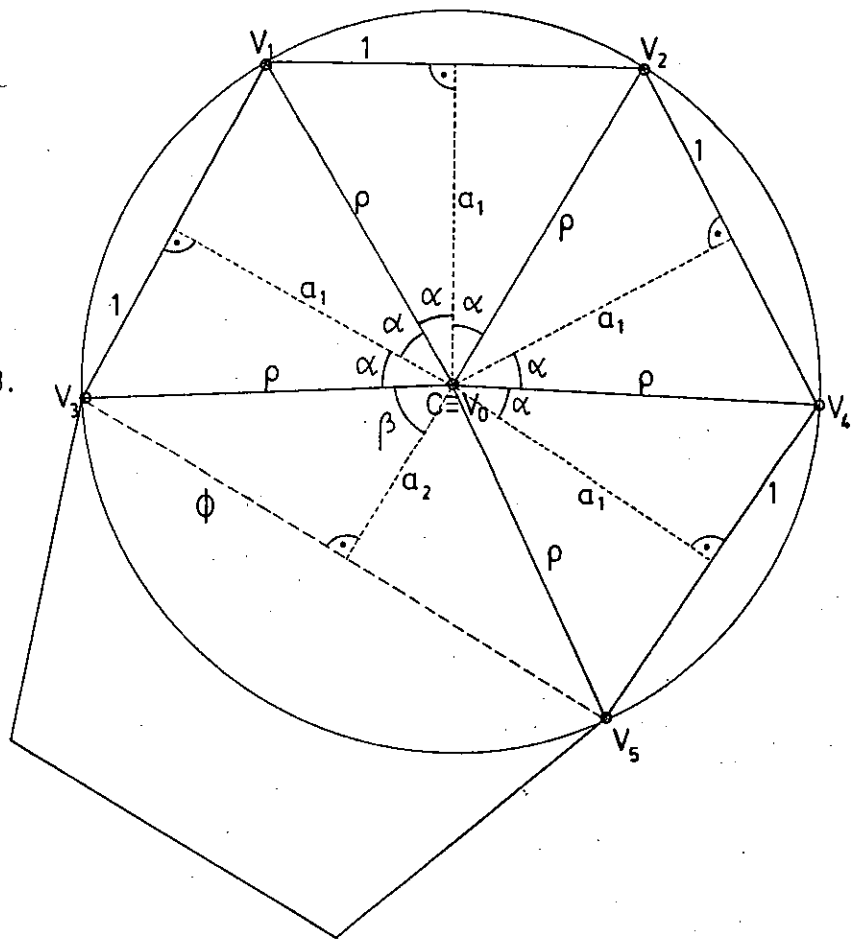
Siendo este último valor $x = 0,857780750$ el más aproximado que permite obtener la calculadora, a él corresponden los siguientes valores de las demás variables:

$$\alpha = \arccos x = 30^{\circ}55'54,08'' \quad \beta = 180^{\circ} - 4\alpha = 56^{\circ}16'23,68''$$

$$\rho = 1/\sin\alpha = 1,945465702 \quad a_1 = 1/\operatorname{tg}\alpha = 1,668783029$$

$$a_2 = \phi/\operatorname{tg}\beta = 1,080186464 \quad R = 2/\sqrt{4 - \rho^2} = 4,311674784$$

FIG 1.2.18.



(3, 3, 3, 3, 5)

1.2.14. RELACION DE LOS POLIEDROS ABOVEDADOS

Haremos un listado de los mismos, siguiendo el criterio de formación del apartado 1.2.13., recordando que $\sum \beta_i \leq 360^\circ$ y que cualquier β_i es siempre menor que la suma de los demás.

1.2.14.1 TRIEDROS

(3, 3, 3)T, (4, 4, 4)C, (5, 5, 5)D, (6, 6, 6)MR

(3, 3, 4)*, (3, 3, 5)*

(4, 4, 5)P5, ... (4, 4, n)Pn, para $5 \leq n \rightarrow \infty$

(5, 5, 6)*, (5, 5, 7)*, (5, 5, 8)*, (5, 5, 9)*, (5, 5, 10)*

(3, 4, 4)P3, (3, 5, 5)*, (3, 6, 6)TT, (3, 7, 7)*, (3, 8, 8)CT, (3, 9, 9)*,

(3, 10, 10)DT, (3, 11, 11)*, (3, 12, 12)MS

(4, 5, 5)*, (4, 6, 6)OT, (4, 7, 7)*, (4, 8, 8)MS

(5, 6, 6)IT

$\left. \begin{matrix} (3, 4, 5) \\ (3, 5, 4) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (3, 4, n) \\ (3, n, 4) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 5 \leq n < 12$

$\left. \begin{matrix} (3, 5, 6) \\ (3, 6, 5) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (3, 5, n) \\ (3, n, 5) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 6 \leq n < 30$

$\left. \begin{matrix} (3, 6, 7) \\ (3, 7, 6) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (3, 6, n) \\ (3, n, 6) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 7 \leq n \rightarrow \infty$

$\left. \begin{matrix} (3, 7, 8) \\ (3, 8, 7) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (3, 7, n) \\ (3, n, 7) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 8 \leq n \leq 42$

$\left. \begin{matrix} (3, 8, 9) \\ (3, 9, 8) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (3, 8, n) \\ (3, n, 8) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 9 \leq n \leq 24$

$\left. \begin{matrix} (3, 9, 10) \\ (3, 10, 9) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (3, 9, n) \\ (3, n, 9) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 10 \leq n \leq 18$

$\left. \begin{matrix} (3, 10, 11) \\ (3, 11, 10) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (3, 10, n) \\ (3, n, 10) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 11 \leq n \leq 15$

$\left. \begin{matrix} (3, 11, 12) \\ (3, 12, 11) \end{matrix} \right\} *en, \left. \begin{matrix} (3, 11, 13) \\ (3, 13, 11) \end{matrix} \right\} *en$

$\left. \begin{matrix} (4, 5, 6) \\ (4, 6, 5) \end{matrix} \right\} *en, \dots \left. \begin{matrix} (4, 5, n) \\ (4, n, 5) \end{matrix} \right\} *en, \text{ para } 6 \leq n \leq 20$

$\left. \begin{matrix} (4, 6, 7) \\ (4, 7, 6) \end{matrix} \right\} *en, \left. \begin{matrix} (4, 6, 8) \\ (4, 8, 6) \end{matrix} \right\} \text{GRCO en}, \left. \begin{matrix} (4, 6, 9) \\ (4, 9, 6) \end{matrix} \right\} *en, \left. \begin{matrix} (4, 6, 10) \\ (4, 10, 6) \end{matrix} \right\} \text{GRID en},$

$\left. \begin{matrix} (4, 6, 11) \\ (4, 11, 6) \end{matrix} \right\} *en, \left. \begin{matrix} (4, 6, 12) \\ (4, 12, 6) \end{matrix} \right\} \text{MS en}$

$(5, 6, 7)\}^*$ en
 $(5, 7, 6)\}$

1.2.14.2 POLIEDROS DE MAS DE TRES CARAS

Con cuatro polígonos:

$(3, 3, 3, 3)0$, $(4, 4, 4, 4)MR$

$(3, 3, 3, 4)AP4$, ... $(3, 3, 3, n)APn$, para $4 \leq n \rightarrow \infty$

$(3, 3, 4, 4)^*$ $(3, 3, 5, 5)^*$ $(3, 3, 6, 6)^*$
 $(3, 4, 3, 4)CO$ " $(3, 5, 3, 5)ID$ $(3, 6, 3, 6)MS$

$(3, 3, 4, 5)\}^*$ en $(3, 3, 4, n)\}^*$ en para $5 \leq n \leq 12$
 $(3, 3, 5, 4)\}$ $(3, 3, n, 4)\}$
 $(3, 4, 3, 5)^*$ $(3, 4, 3, n)^*$

$(3, 4, 4, 5)\}^*$ en $(3, 4, 4, 6)\}^*$ en
 $(3, 5, 4, 4)\}$ $(3, 6, 4, 4)\}$
 $(3, 4, 5, 4)RID$ $(3, 4, 6, 4)MS$

$(3, 3, 5, 6)\}^*$ en $(3, 3, 5, 7)\}^*$ en
 $(3, 3, 6, 5)\}$ $(3, 3, 7, 5)\}$
 $(3, 5, 3, 6)^*$ $(3, 5, 3, 7)^*$

Con cinco polígonos:

$(3, 3, 3, 3, 3)I$

$(3, 3, 3, 3, 4)CA$,

$(3, 3, 3, 3, 5)DA$,

$(3, 3, 3, 3, 6)MS$

$(3, 3, 3, 4, 4)MS$, $(3, 3, 4, 3, 4)MS$

Con seis polígonos:

$(3, 3, 3, 3, 3, 3)MR$

1.2.15. LISTA GENERAL DE POLIEDROS

Vamos a hacer este listado con un criterio distinto del de la anterior relación. Comenzaremos por los poliedros que tienen un solo tipo de polígono, los llamados poliedros regulares. Después veremos aquellos en que concurren en un vértice dos tipos de polígonos, y finalmente los que tienen tres tipos de polígonos diferentes. Todos estos poliedros no regulares pueden clasificarse en semirregulares e irregulares, lo que indicaremos poniendo junto a estos últimos un asterisco. Ya veremos en qué consiste la diferencia entre unos y otros.

1.2.15.1 POLIEDROS REGULARES

Como queda dicho tienen sus caras iguales. De estos poliedros vamos a señalar tres datos: el defecto plano, el espacio cubierto y el espacio segregado, correspondientes estos dos últimos al conjunto de los polígonos que concurren en el vértice.

Tipo de polígono	Poliedro	δ_p	ϵ_c	ϵ_s	
n	3	(3,3,3)T	180°	$3\pi(r^2), \frac{3}{4}(\text{esf})$	$0,55(r^2), 0,0439(\text{esf})$
		(3,3,3,3)O	120°	$2\pi(r^2), \frac{1}{2}(\text{esf})$	$1,36(r^2), 0,1082(\text{esf})$
		(3,3,3,3,3)I	60°	$\pi(r^2), \frac{1}{4}(\text{esf})$	$2,63(r^2), 0,2097(\text{esf})$
		(3,3,3,3,3,3)MR	0°	0	$6,28(r^2), 0,5 (\text{esf})$ (2π)
4		(4,4,4)C	90°	$2\pi(r^2), \frac{1}{2}(\text{esf})$	$1,57(r^2), 0,125 (\text{esf})$ (π/2) (1/8)
		(4,4,4,4)MR	0°	0	$6,28(r^2), 0,5 (\text{esf})$ (2π)
5		(5,5,5)D	36°	$\pi(r^2), \frac{1}{4}(\text{esf})$	$2,96(r^2), 0,2357(\text{esf})$
6		(6,6,6)MR	0°	0	$6,286r^2), 0,5 (\text{esf})$ (2π)

1.2.15.2. POLIEDROS NO REGULARES

En estos poliedros sólo vamos a indicar el dato correspondiente al defecto plano de cada uno de ellos.

1.2.15.2.1. CON DOS TIPOS DE POLIGONOS

Tipos de polígonos		Poliedro	δ_p
m, n	3, n	(3, 3, 4)*	150°
		(3, 3, 5)*	132°
	3, n, n	(3, 4, 4)P3	120°
		(3, 5, 5)*	84°
		(3, 6, 6)TT	60°
		(3, 7, 7)*	42°51'25,71"
		(3, 8, 8)CT	30°
		(3, 9, 9)*	20°

Tipos de polígonos		Poliedro	δ_p
m,n	3,n	3,n,n	(3, 10, 10)DT 12° (3, 11, 11)* 5°27'16,36" (3, 12, 12)MS 0°
		3,3,3,n	(3, 3, 3, 4)AP4 90° (3, 3, 3, 5)AP5 72° (3, 3, 3, 6)AP6 60° (3, 3, 3, 7)AP7 51°25'42,86" (3, 3, 3, 8)AP8 45° (3, 3, 3, 9)AP9 40° (3, 3, 3, 10)AP10 36° (3, 3, 3, 11)AP11 32°43'38,18" (3, 3, 3, 12)AP12 30° (3, 3, 3, 13)AP13 27°41'32,31" (3, 3, 3, n)APn $n \rightarrow \infty$ $\delta_p \rightarrow 0^\circ$
		3,3,n,n	(3,3,n,n) (3, 3, 4, 4)* 60° (3, 3, 5, 5)* 24° (3, 3, 6, 6)* 0° (3,n,3,n) (3, 4, 3, 4)CO 60° (3, 5, 3, 5)ID 24° (3, 6, 3, 6)MS 0°
	3,n,n,n	(3, 4, 4, 4)RCO 30°	
	3,3,3,3,n	(3, 3, 3, 3, 4)CA 30° (3, 3, 3, 3, 5)DA 12° (3, 3, 3, 3, 6)MS 0°	
	3,3,3,n,n	(3,3,3,n,n) (3, 3, 3, 4, 4)MS 0° (3,3,n,3,n) (3, 3, 4, 3, 4)MS 0°	
	4,n	4,4,n	(4, 4, 5)P5 72° (4, 4, 6)P6 60° (4, 4, 7)P7 51°25'42,86"

Tipos de polígonos		Poliedro	δ_p	
m, n	4, n	4, 4, n	(4, 4, 8, p, 8)P8	45°
			(4, 4, 9)P9	40°
		(4, 4, n)Pn $n \rightarrow \infty$	$(360/n)^\circ$ $\delta_p \rightarrow 0^\circ$	
	4, n, n	(4, 5, 5)*	54°	
		(4, 6, 6)OT	30°	
		(4, 7, 7)*	17°51'25,71"	
		(4, 8, 8)MS	0°	
5, n	5, 5, n	(5, 5, 6)*	24°	
		(5, 5, 7)*	15°25'42,86"	
		(5, 5, 8)*	9°	
		(5, 5, 9)*	4°	
		(5, 5, 10)*	0°	
	5, n, n	(5, 6, 6)IT	12°	

1.2.15.2.2. CON TRES TIPOS DE POLIGONOS

Tipos de polígonos			Poliedro	δ_p	
l, m, n	3, m, n	3, 4, n	(3, 4, n) (3, n, 4)	(3, 4, 5)} *en (3, 5, 4)} *en	102°
			(3, 4, 6)} *en (3, 6, 4)} *en	90°	
			(3, 4, 7)} *en (3, 7, 4)} *en	81°25'42,86"	
			(3, 4, 8)} *en (3, 8, 4)} *en	75°	
			(3, 4, 9)} *en (3, 9, 4)} *en	70°	
			(3, 4, 10)} *en (3, 10, 4)} *en	66°	
			(3, 4, 11)} *en (3, 11, 4)} *en	62°43'38,18"	

Tipos de polígonos			Poliedro	δ_p	
l, m, n	$3, m, n$	$3, 4, n$	$(3, 3, 4, n)$	$(3, 3, 4, 5)$ } *en	42°
			$(3, 3, n, 4)$	$(3, 3, 5, 4)$ }	42°
			$(3, 4, 3, n)$	$(3, 4, 3, 5) *$	
				$(3, 3, 4, 6)$ } *en	30°
				$(3, 3, 6, 4)$ }	30°
				$(3, 4, 3, 6) *$	
				$(3, 3, 4, 7)$ } *en	$21^\circ 25' 42,86''$
				$(3, 3, 7, 4)$ }	$21^\circ 25' 42,86''$
				$(3, 4, 3, 7) *$	
				$(3, 3, 4, 8)$ } *en	15°
				$(3, 3, 8, 4)$ }	15°
				$(3, 4, 3, 8) *$	
				$(3, 3, 4, 9)$ } *en	10°
				$(3, 3, 9, 4)$ }	10°
				$(3, 4, 3, 9) *$	
	$(3, 3, 4, 10)$ } *en	6°			
	$(3, 3, 10, 4)$ }	6°			
	$(3, 4, 3, 10) *$				
	$(3, 3, 4, 11)$ } *en	$2^\circ 43' 38,18''$			
	$(3, 3, 11, 4)$ }	$2^\circ 32' 38,18''$			
	$(3, 4, 3, 11) *$				
	$(3, 3, 4, 12)$ } *en	0°			
	$(3, 3, 12, 4)$ }	0°			
	$(3, 4, 3, 12) *$				
	$(3, 4, 4, n)$	$(3, 4, 4, 5)$ } *en	12°		
	$(3, n, 4, 4)$	$(3, 5, 4, 4)$ }	12°		
	$(3, 4, n, 4)$	$(3, 4, 5, 4)$ RID			
		$(3, 4, 4, 6)$ } *en	0°		
		$(3, 6, 4, 4)$ }	0°		
		$(3, 4, 6, 4)$ MS			
	$3, 5, n$	$(3, 5, n)$ $(3, n, 5)$	$(3, 5, 6)$ } *en	72°	
			$(3, 6, 5)$ }		
			$(3, 5, 7)$ } *en	$63^\circ 25' 42,86''$	
			$(3, 7, 5)$ }		
			$(3, 5, 8)$ } *en	57°	
			$(3, 8, 5)$ }		
	$(3, 5, n)$ } *en	$12^\circ + (360/n)^\circ$			
	$(3, n, 5)$ }				
	$(3, 5, 29)$ } *en	$24^\circ 24' 49,66''$			
	$(3, 29, 5)$ }				
	$(3, 3, 5, n)$ $(3, 3, n, 5)$ $(3, 5, 3, n)$	$(3, 3, 5, 6)$ } *en	$(3, 3, 5, 6)$ } *en	12°	
			$(3, 3, 6, 5)$ }	12°	
			$(3, 5, 3, 6) *$		
		$(3, 3, 5, 7)$ } *en	$3^\circ 25' 42,86''$		
		$(3, 3, 7, 5)$ }	$3^\circ 25' 42,86''$		
		$(3, 5, 3, 7) *$			

Tipos de polígonos			Poliedro	δ_p	
l, m, n	3, m, n	3, 6, n	$(3, 6, n)$ $(3, n, 6)$	$(3, 6, 7)$ $(3, 7, 6)$ } *en	$51^{\circ}25'42,86''$
				$(3, 6, n)$ $(3, n, 6)$ } *en $n \rightarrow \infty$	$(360/n)^{\circ}$ $\delta_p \rightarrow 0^{\circ}$
		3, 7, n	$(3, 7, n)$ $(3, n, 7)$	$(3, 7, 8)$ $(3, 8, 7)$ } *en	$36^{\circ}25'42,86''$
				$(3, 7, n)$ $(3, n, 7)$ } *en	$360^{\circ}/n - 8^{\circ}34'17,14''$
				$(3, 7, 42)$ $(3, 42, 7)$ } *en	0°
		3, 8, n	$(3, 8, n)$ $(3, n, 8)$	$(3, 8, 9)$ $(3, 9, 8)$ } *en	25°
				$(3, 8, n)$ $(3, n, 8)$ } *en	$360^{\circ}/n - 15^{\circ}$
$(3, 8, 24)$ $(3, 24, 8)$ } *en	0°				
3, 9, n	$(3, 9, n)$ $(3, n, 9)$	$(3, 9, 10)$ $(3, 10, 9)$ } *en	16°		
		$(3, 9, n)$ $(3, n, 9)$ } *en	$360^{\circ}/n - 20^{\circ}$		
		$(3, 9, 18)$ $(3, 18, 9)$ } *en	0°		
3, 10, n	$(3, 10, n)$ $(3, n, 10)$	$(3, 10, 11)$ $(3, 11, 10)$ } *en	$8^{\circ}43'38,18''$		
		$(3, 10, n)$ $(3, n, 10)$ } *en	$360^{\circ}/n - 24^{\circ}$		
		$(3, 10, 15)$ $(3, 15, 10)$ } *en	0°		
3, 11, n	$(3, 11, n)$ $(3, n, 11)$	$(3, 11, 12)$ $(3, 12, 11)$ } *en	$2^{\circ}43'38,18''$		
		$(3, 11, 13)$ $(3, 13, 11)$ } *en	$(360^{\circ}/n - 27^{\circ}16'21,82'')$ $0^{\circ}25'10,49''$		
4, m, n	4, 5, n	$(4, 5, n)$ $(4, n, 5)$	$(4, 5, 6)$ $(4, 6, 5)$ } *en	42°	
			$(4, 5, n)$ $(4, n, 5)$ } *en	$360^{\circ}/n - 18^{\circ}$	
			$(4, 5, 20)$ $(4, 20, 5)$ } *en	0°	

Tipos de polígonos			Poliedro	δ_p
l, m, n	$4, m, n$	$4, 6, n$	$(4, 6, n)$ $(4, n, 6)$ $(4, 6, 7)$ $(4, 7, 6)$ *en $(4, 6, 8)$ $(4, 8, 6)$ } GRCO en $(4, 6, 9)$ $(4, 9, 6)$ *en $(4, 6, 10)$ $(4, 10, 6)$ } GRID en $(4, 6, 11)$ $(4, 11, 6)$ *en $(4, 6, 12)$ $(4, 12, 6)$ } MS en	$21^{\circ}24'42,86''$ $(360^{\circ}/n-30^{\circ})$ 15° 10° 6° $2^{\circ}43'38,18''$ 0°
	$5, m, n$	$5, 6, n$	$(5, 6, n)$ $(5, n, 6)$ $(5, 6, 7)$ $(5, 7, 6)$ *en	$3^{\circ}25'42,86''$ $(360^{\circ}/n-48^{\circ})$

En la relación anterior no hemos incluido los poliedros (3, 3, 6), (3, 4, 12) y (3, 5, 30). En los tres casos el tercer polígono es igual a la suma de los otros dos, por lo que el espacio segregado es nulo, pudiendo considerarse como formas planas, con la salvedad de que los polígonos pertenecen a distintas caras del plano. Son comparables al polígono considerado como poliedro de dos caras, al que hicimos alusión anteriormente en nota a pie de página.

No existen más poliedros convexos formados por polígonos regulares. Considerando la convexidad en sentido estricto habría que excluir de la lista los que tienen $\delta_p = 0$, que son los siguientes:

1.2.16. FORMAS PLANAS

Regulares	No regulares			
$(3, 3, 3, 3, 3, 3)$	$(3, 3, 3, 4, 4)$	$(3, 4, 4, 6)$ *en	$(3, 7, 42)$ *en	$(4, 5, 20)$ *en
$(4, 4, 4, 4)$	$(3, 3, 4, 3, 4)$	$(3, 6, 4, 4)$ *en	$(3, 42, 7)$ *en	$(4, 20, 5)$ *en
$(6, 6, 6)$	$(3, 3, 6, 6)$ *	$(3, 4, 6, 4)$	$(3, 8, 24)$ *en	$(4, 6, 12)$ *en
	$(3, 6, 3, 6)$	$(3, 3, 4, 12)$ *en	$(3, 24, 8)$ *en	$(4, 12, 6)$ *en
	$(3, 3, 3, 3, 6)$	$(3, 3, 12, 4)$ *en	$(3, 4, 3, 12)$ *	$(3, 9, 18)$ *en
	$(3, 12, 12)$		$(3, 18, 9)$ *en	
	$(4, 8, 8)$		$(3, 10, 15)$ *en	
	$(5, 5, 10)$ *		$(3, 15, 10)$ *en	

Son en total 29 modos distintos de llenar el plano alrededor de un punto haciendo coincidir en él tres o más polígonos regulares. Si consideramos como uno solo los pares de enantiomorfos el número se reduce a 21 modos esenciales (13 simétricos y 8 pares de enantiomorfos). Prescindiendo del orden pero no del número de polígonos de cada tipo, habría 17 modos. Considerando sólo los tipos de polígonos y no su número, hay 16, por coincidir 2 de los anteriores, con diferente número de triángulos y exágonos. Por otra parte, podemos clasificar los 21 modos esenciales según el número total de polígonos: un modo con 6 polígonos, (3, 3, 3, 3, 3, 3); 3 modos con 5 polígonos, (3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 3, 4) y (3, 3, 3, 3, 6); 7 modos con 4 polígonos, (4, 4, 4, 4), (3, 3, 6, 6)*, (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (3, 4, 3, 12)* y los dos pares enantiomorfos (3, 4, 4, 6)* y (3, 3, 4, 12)*; 10 modos con 3 polígonos, (6, 6, 6), (3, 12, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10)* y los 6 pares enantiomorfos (3, 7, 42)*, (3, 8, 24)*, (3, 9, 18)*, (3, 10, 15)*, (4, 5, 20)* y (4, 6, 12). Obsérvese que todos los enantiomorfos tienen tres tipos de polígonos y que de ellos sólo dos tienen cuatro polígonos, con dos iguales consecutivos, siendo el resto de tres polígonos diferentes.

1.2.17. EL NUMERO DE LOS POLIEDROS

Clasifiquemos ahora todos los poliedros, señalando en tablas separadas el número de los planos y los convexos, de los simétricos y los pares de enantiomorfos, a los que consideraremos como un solo tipo.

Nº de lados de los polígonos	Tipo básico	Nº	Formas planas		Nº	Formas abovedadas		Nº	
			simétr.	pares de en.		simétr.	pares de en.		
\boxed{n} $3 \leq n \leq 6$	$\boxed{3}$	[3, ... 3]	4	1	0	1	3	0	3
	$\boxed{4}$	[4, ... 4]	2	1	0	1	1	0	1
	$\boxed{5}$	[5, 5, 5]	1	0	0	0	1	0	1
	$\boxed{6}$	[6, 6, 6]	1	1	0	1	0	0	0
Total n			8	3	0	3	5	0	5
$\boxed{m, n}$ $3 \leq m \leq 5$ $4 \leq n$ $m \leq n$	$\boxed{3, n}$	[3, 3, n] $4 \leq n \leq 5(1)$	2 (2*)	0	0	0	2 (2*)	0	2 (2*)
		[3, n, n] $4 \leq n \leq 12$	9 (4*)	1	0	1	8 (4*)	0	8 (4*)
		[3, 3, 3, n] $4 \leq n \rightarrow \infty$	∞	0	0	0	∞	0	∞
		[3, 3, n, n] $4 \leq n \leq 6$	6 (3*)	2 (1*)	0	2 (1*)	4 (2*)	0	4 (2*)

Nº de lados de los polígonos	Tipo básico	Nº	Formas planas		Nº	Formas abovedadas		Nº
			simétr.	pares de en.		simétr.	pares de en.	
m, n $3, n$	$[3, n, n, n]$ $n=4$	1	0	0	0	1	0	1
	$[3, 3, 3, 3, n]$ $4 \leq n \leq 6$	3	1	0	1	2	0	2
	$[3, 3, 3, n, n]$ $n=4$	2	2	0	2	0	0	0
Total $3, n$		$23+\infty$ (9*)	6 (1*)	0	6 (1*)	$17+\infty$ (8*)	0	$17+\infty$ (8*)
$4, n$	$[4, 4, n]$ $5 \leq n \rightarrow \infty$	∞	0	0	0	∞	0	∞
	$[4, n, n]$ $5 \leq n \leq 8$	4 (2*)	1	0	1	3 (2*)	0	3 (2*)
Total $4, n$		$4+\infty$ (2*)	1	0	1	$3+\infty$ (2*)	0	$3+\infty$ (2*)
$5, n$	$[5, 5, n]$ $6 \leq n \leq 10$	5 (5*)	1 (1*)	0	1 (1*)	4 (4*)	0	4 (4*)
	$[5, n, n]$ $n=6$	1	0	0	0	1	0	1
Total $5, n$		6 (5*)	1 (1*)	0	1 (1*)	5 (4*)	0	5 (4*)
Total m, n		$33+2\infty$ (16*)	8 (2*)	0	8 (2*)	$25+2\infty$ (14*)	0	$25+2\infty$ (14*)
l, m, n $3, m, n$ $3, 4, n$	$[3, 4, n]$ $5 \leq n \leq 11(1)$	7 (7*)	0	0	0	0	7 (7*)	7 (7*)
$3 \leq l \leq 5$ $4 \leq m$ $5 \leq n$ $1 < m < n$	$[3, 3, 4, n]$ $5 \leq n \leq 12$	16 (16*)	1 (1*)	1 (1*)	2 (2*)	7 (7*)	7 (7*)	14 (14*)
	$[3, 4, 4, n]$ $5 \leq n \leq 6$	4 (2*)	1	1 (1*)	2 (1*)	1	1 (1*)	2 (1*)
Total $3, 4, n$		27 (25*)	2 (1*)	2 (2*)	4 (3*)	8 (7*)	15 (15*)	23 (22*)
$3, 5, n$	$[3, 5, n]$ $6 \leq n \leq 29(1)$	24 (24*)	0	0	0	0	24 (24*)	24 (24*)
	$[3, 3, 5, n]$ $6 \leq n \leq 7$	4 (4*)	0	0	0	2 (2*)	2 (2*)	4 (4*)
Total $3, 5, n$		28 (28*)	0	0	0	2 (2*)	26 (26*)	28 (28*)
$3, 6, n$	$[3, 6, n]$ $7 \leq n \rightarrow \infty$	∞ (∞ *)	0	0	0	0	∞ (∞ *)	∞ (∞ *)
$3, 7, n$	$[3, 7, n]$ $8 \leq n \leq 42$	35 (35*)	0	1 (1*)	1 (1*)	0	34 (34*)	34 (34*)
$3, 8, n$	$[3, 8, n]$ $9 \leq n \leq 24$	16 (16*)	0	1 (1*)	1 (1*)	0	15 (15*)	15 (15*)

Mº de lados de los polígonos	Tipó básico	Nº	Formas planas		Nº	Formas abovedadas		Nº
			simétr.	pares de en.		simétr.	pares de en.	
[1,m,n] [3,m,n] [3,9,n]	[3,9,n] $10 \leq n \leq 18$	9 (9*)	0	1 (1*)	1 (1*)	0	8 (8*)	8 (8*)
	[3,10,n] $10 \leq n \leq 15$	5 (5*)	0	1 (1*)	1 (1*)	0	4 (4*)	4 (4*)
	[3,11,n] $12 \leq n \leq 13$	2 (2*)	0	0	0	0	2 (2*)	2 (2*)
Total 3,m,n		$122 + \infty$ ($120 + \infty$)	2 (1*)	6 (6*)	8 (7*)	10 (9*)	$104 + \infty$ ($104 + \infty$)	$114 + \infty$ ($113 + \infty$)
[4,m,n] [4,5,n]	[4,5,n] $6 \leq n \leq 20$	15 (15*)	0	1 (1*)	1 (1*)	0	14 (14*)	14 (14*)
	[4,6,n] $7 \leq n \leq 12$	6 (3*)	0	1	1	0	5 (3*)	5 (3*)
Total 4,m,n		21 (18*)	0	2 (1*)	2 (1*)	0	19 (17*)	19 (17*)
[5,m,n] [5,6,7]	[5,6,7]	1 (1*)	0	0	0	0	1 (1*)	1 (1*)
Total 1,m,n		$144 + \infty$ ($139 + \infty$)	2 (1*)	8 (7*)	10 (8*)	10 (9*)	$124 + \infty$ ($122 + \infty$)	$134 + \infty$ ($131 + \infty$)
Total nó regulares m,n + 1,m,n		$177 + 3\infty$ ($155 + \infty$)	10 (3*)	8 (7*)	18 (10*)	$35 + 2\infty$ (23*)	$124 + \infty$ ($122 + \infty$)	$159 + 3\infty$ ($145 + \infty$)
Total poliedros n + m,n + 1,m,n		$185 + 3\infty$ ($155 + \infty$)	13 (3*)	8 (7*)	21 (10*)	$40 + 2\infty$ (23*)	$124 + \infty$ ($122 + \infty$)	$164 + 3\infty$ ($145 + \infty$)

Con referencia a la nota (1), vamos a hacer algunas precisiones:

Los poliedros (3, 3, 6), (3, 4, 12) y (3, 5, 30), son comparables al "poliedro de dos caras" (n, n), al que hemos hecho referencia en una nota anterior. Su ángulo sólido segregado es nulo, y aún estando sus caras en el mismo plano, se orientan a diferente semiespacio. Los hemos excluido a los tres de las tablas anteriores.

En resumen, hay tres series infinitas: (3, 3, 3, n)APn, (4, 4, n)Pn y (3, 6, n) y 185 formas más (155*), de ellas 21 planas (10*) y 164 abovedadas (145*). Ya vimos que en las series planas se dividían en 13 simétricas (3*) y 8 pares de enantiomorfos (7*), lo que daba en total 29 formas (17*). Las formas abovedadas se dividen, sin contar las dos series infinitas simétricas y la serie infinita de pares de enantiomorfos *, en 40 formas simétricas (23*) y 124 pares de enantiomorfos (122*), es decir, 288 formas (267*), lo que da globalmente $317 + 4\infty$ ($284 + 2\infty$).

En todo lo anterior hemos indicado entre paréntesis y con un asterisco las formas que llamaremos irregulares, cuyo significado veremos a continuación. Si prescindimos de ellas las series finitas comprenden en total 30 formas, de ellas 11 planas y 19 abovedadas. Tres de estas formas abovedadas son incluidas en las series infinitas. Se trata de $(3, 3, 3, 3)0$, que puede considerarse como el antiprisma AP_3 , $(3, 4, 4)P_3$ y $(4, 4, 4)C$, que también puede ser visto como el prisma P_4 .

Hasta aquí hemos estudiado los modos posibles de inscribir polígonos en una esfera considerando los ángulos poliedros de caras poligonales regulares P_i concurrentes en un vértice V_0 . Pasemos a un vértice contiguo V_1 . Si en V_0 concurrían P_1, P_2 entre otros, y en V_1 también concurren P_1 y P_2 , y en ambos casos los dos polígonos forman el diedro α_1 , podemos en V_1 situar otro poliedro igual (el mismo si era simétrico y su enantiomorfo si no lo era) que tenga comunes con el primero P_1 y P_2 . Si hacemos lo mismo en los demás vértices V_i tendremos un conjunto de $i+1$ ángulos poliedros con i polígonos comunes, y puede ocurrir que sea posible extender esta red de ángulos poliedros todos iguales hasta cubrir totalmente la superficie esférica con sus vértices todos iguales también; o, en el caso de redes planas, extender indefinidamente la red formando un mosaico plano tan extenso como se desee, con todos los vértices iguales.

Esto es precisamente lo que ocurre con los ángulos poliedros regulares, y así se obtienen los poliedros abovedados tetraedro, con vértices $(3, 3, 3)$, octaedro $(3,3,3,3)$, icosaedro $(3, 3, 3, 3, 3)$, cubo $(4, 4, 4)$ y dodecaedro $(5, 5, 5)$ y los mosaicos regulares $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$ y $(6, 6, 6)$.

Diferente es el caso de los ángulos poliedros no regulares. Algunos, como el $(3, 4, 4)P_3$, permiten recubrir la esfera de los vértices con un número limitado de ellos, todos iguales; o, como el poliedro plano $(3, 6, 3, 6)MS$, extender indefinidamente un mosaico plano de vértices idénticos. Llamaremos a estas figuras poliedros semirregulares, y a las planas mosaicos semirregulares.

Otros ángulos poliedros no regulares no admiten esta ordenación de vértices. Los vértices contiguos al de partida generan caras que se cortan entre sí en nuevas aristas, de cada uno de estos vértices se pueden hacer partir otras caras y otros vértices que, en lugar de cubrir progresivamente la esfera (o el plano) y originar un poliedro estable, tienden a una multiplicación indefinida de los vértices y aristas en un proceso sin fin. En algunos casos no es así, y la red de caras tiene un límite, como ocurre con $(3, 3, 4)^*$, que forma en su conjunto un octaedro más tres planos de simetría del mismo, pero siempre el espacio queda dividido en más de dos regiones, lo que no ocurre en los poliedros regulares y semirregulares; o la red plana, al super-

ponerse polígonos, produce vértices y aristas estables pertenecientes a otra red, como ocurre con $(3, 3, 6, 6)^*$, que degenera al reiterarse en $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ MR. En ambos casos, la combinación de estos vértices con otros distintos puede permitir la obtención de otro poliedro o mosaico, cuyos vértices no son ya todos iguales: Así, con $(3, 3, 4)^*$ y $(3, 3, 3, 3)0$ puede formarse una pirámide cuadrangular, y con $(3, 3, 6, 6)^*$ y $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ MR otros mosaicos.

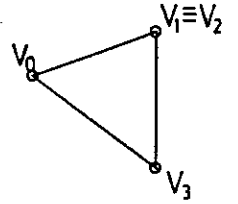
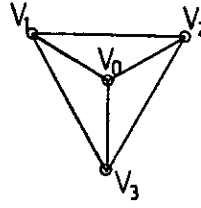
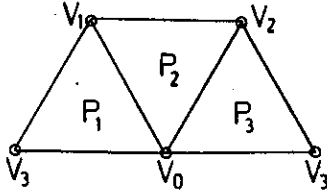
Estos son los ángulos poliedros marcados con $*$, a los que llamaremos irregulares.

1.2.18. REPRESENTACION DIEDRICA DE LOS ANGULOS POLIEDROS

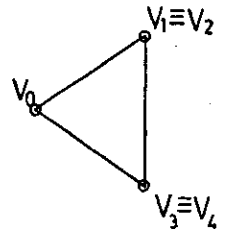
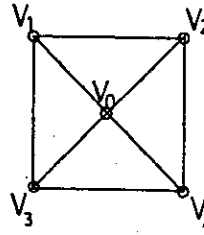
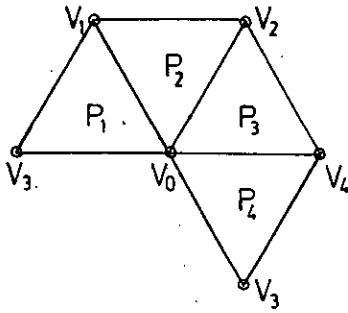
Vamos a representar gráficamente a continuación los diferentes ángulos poliedros que hemos visto que pueden construirse. En las series infinitas sólo indicaremos los primeros elementos y en las muy largas los iniciales y finales.

De cada uno de ellos incluimos un desarrollo sobre el plano, en el que la porción de plano no ocupada por los polígonos alrededor del vértice V_0 expresa el defecto plano $\delta_p = \widehat{V_3 V_0 V_1}$. En todos los casos la diagonal mínima del segundo polígono $V_1 V_2$ se ha dibujado en posición horizontal. Además del desarrollo se indican dos vistas ortogonales entre sí, relacionadas de acuerdo con el sistema europeo de representación diédrica: la primera es la proyección perpendicular al plano de los vértices V_i , $i \neq 0$, según el eje normal al mismo OCV_0 , manteniendo horizontal la diagonal mínima $V_1 V_2$; la segunda, según la dirección $V_1 V_2$, sobre un plano perpendicular a la misma. A partir de ambas vistas, mediante cambios de plano de proyección, puede obtenerse cualquier otra que se desee.

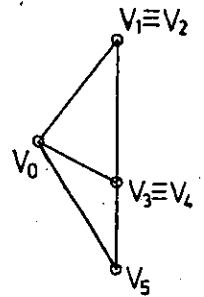
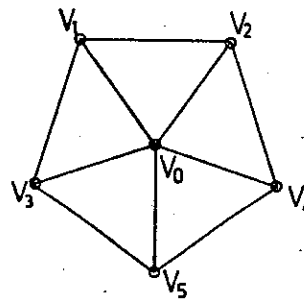
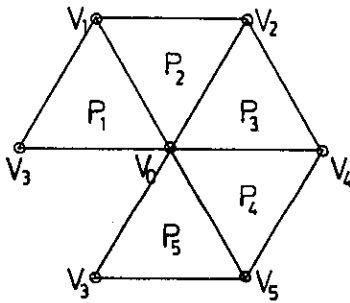
(3, 3, 3) T



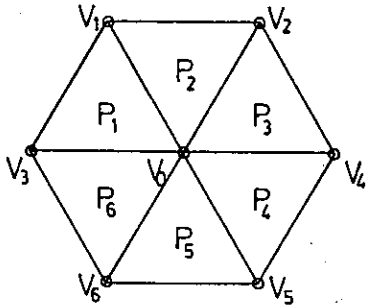
(3, 3, 3, 3) O



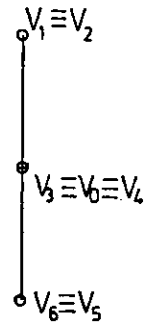
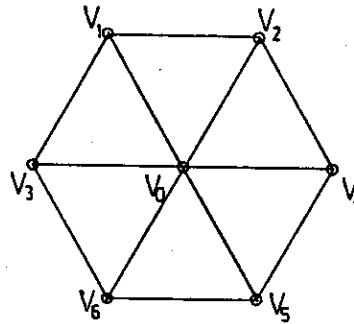
(3, 3, 3, 3, 3) I



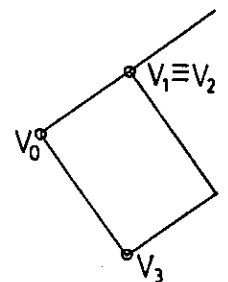
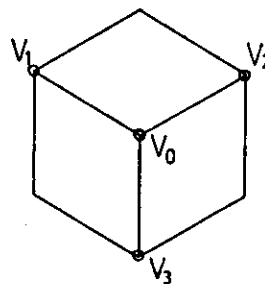
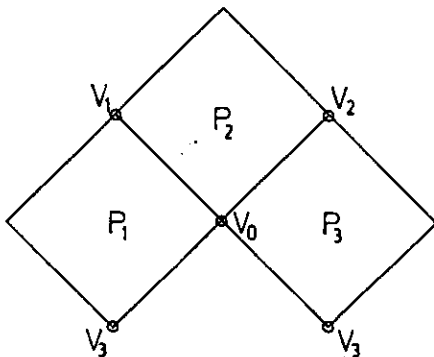
(3, 3, 3, 3, 3, 3) MR



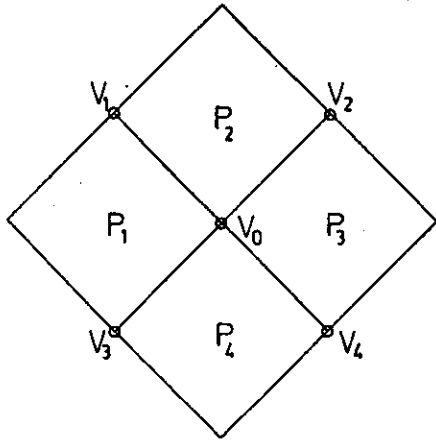
FORMA PLANA



(4, 4, 4) C

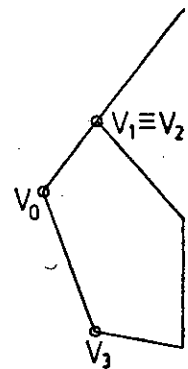
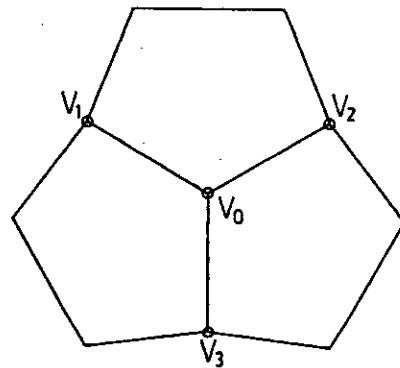
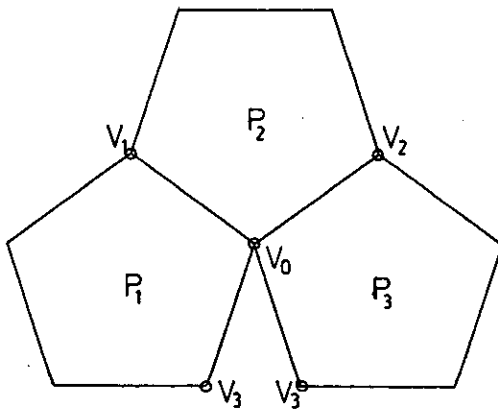


(4, 4, 4, 4) MR

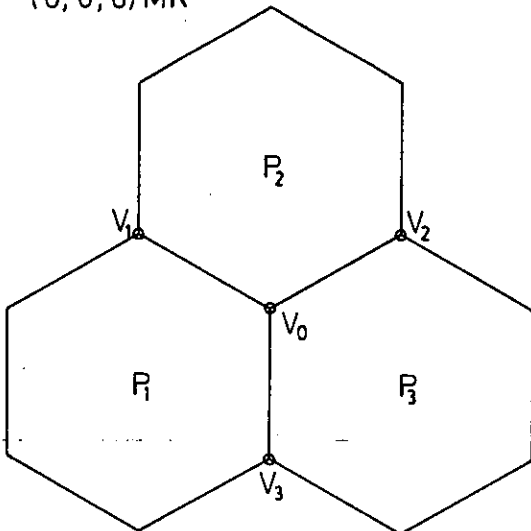


FORMA PLANA

(5, 5, 5) D

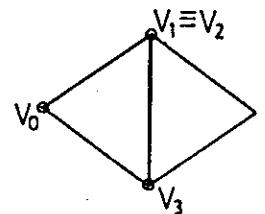
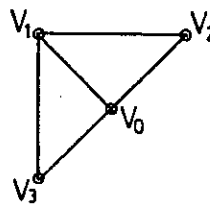
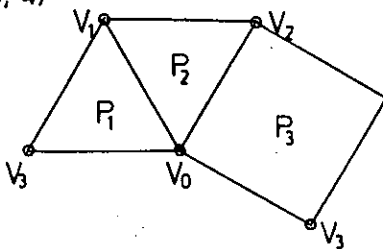


(6, 6, 6) MR

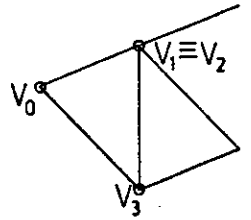
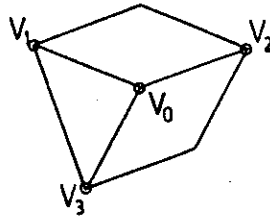
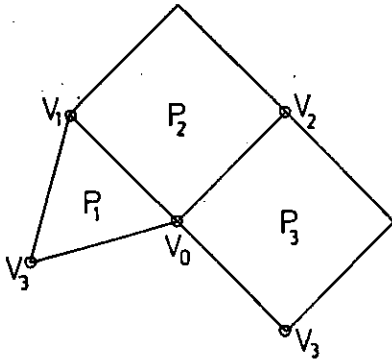


FORMA PLANA

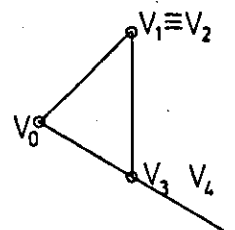
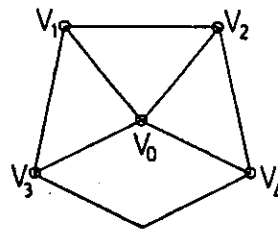
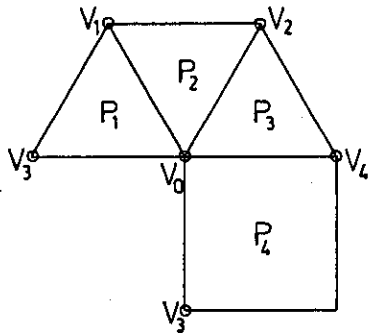
(3, 3, 4)*



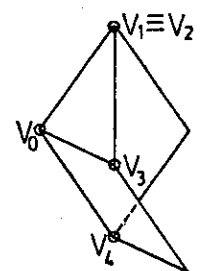
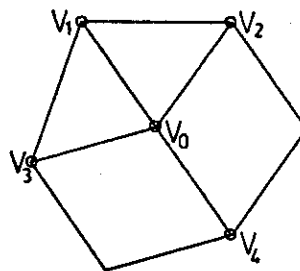
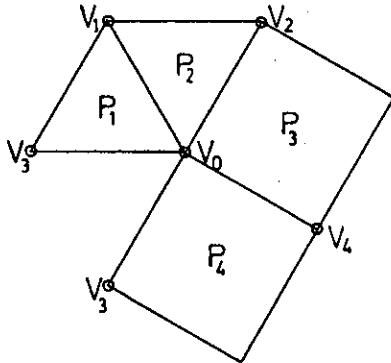
(3, 4, 4) P3



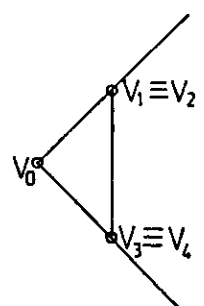
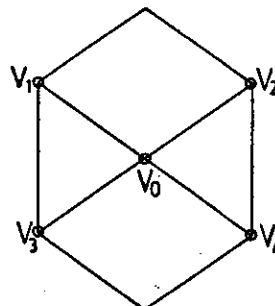
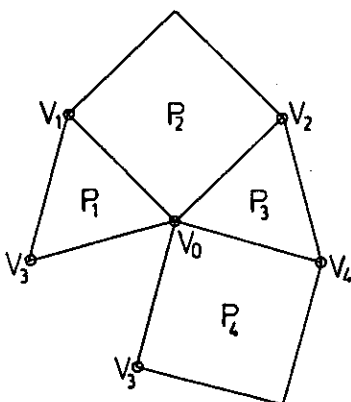
(3, 3, 3, 4) AP4



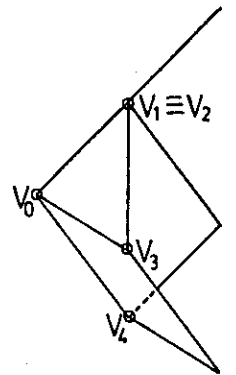
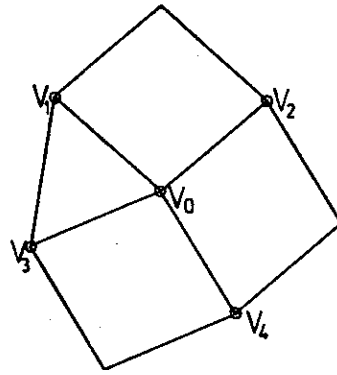
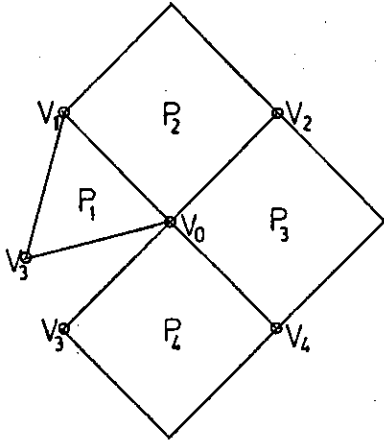
(3, 3, 4, 4) *



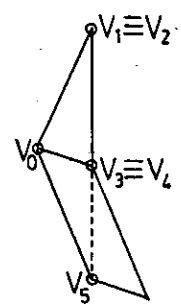
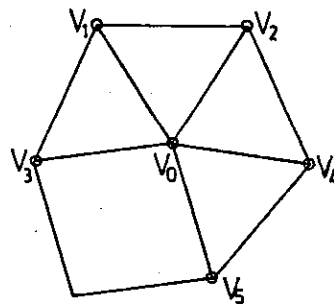
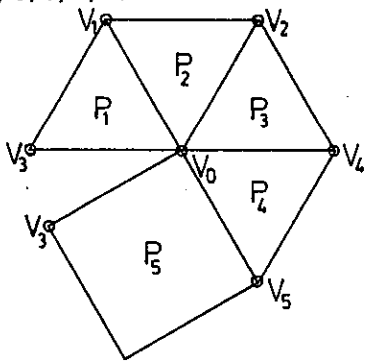
(3, 4, 3, 4) CO



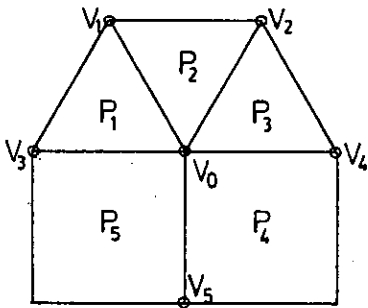
(3, 4, 4, 4) RCO



(3, 3, 3, 3, 4) CA

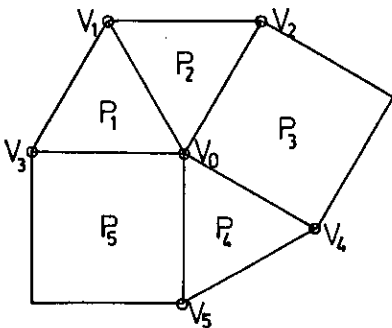


(3, 3, 3, 4, 4) MS



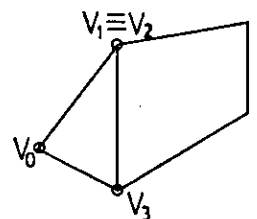
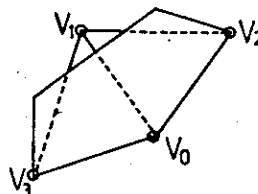
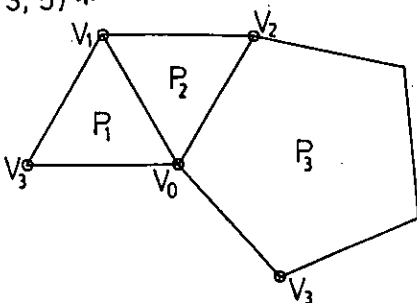
FORMA PLANA

(3, 3, 4, 3, 4) MS

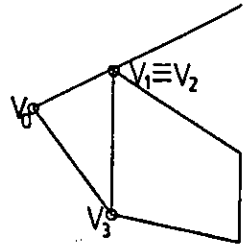
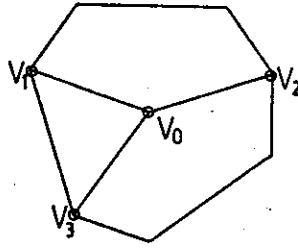
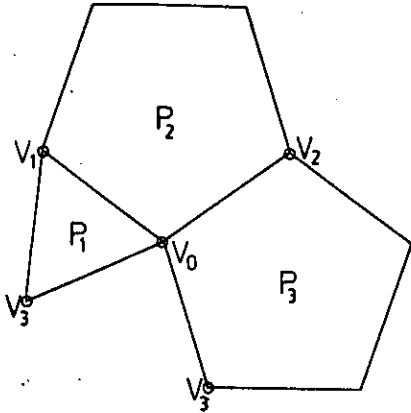


FORMA PLANA

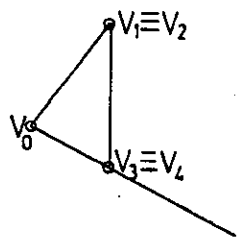
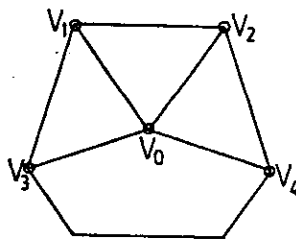
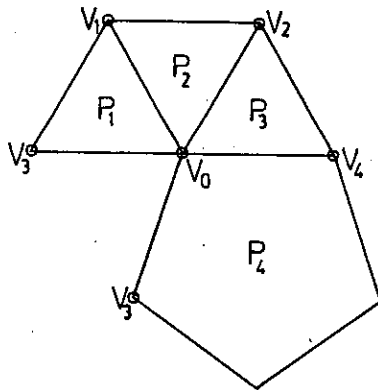
(3, 3, 5) *



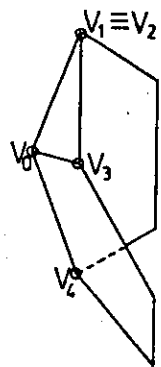
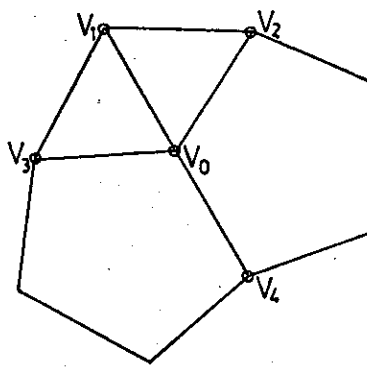
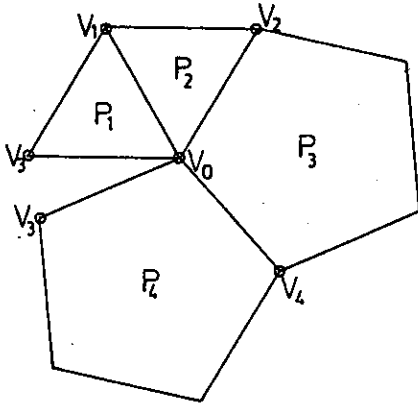
(3, 5, 5)*



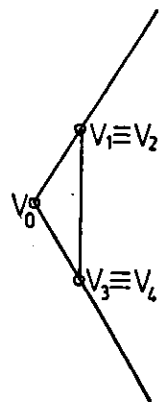
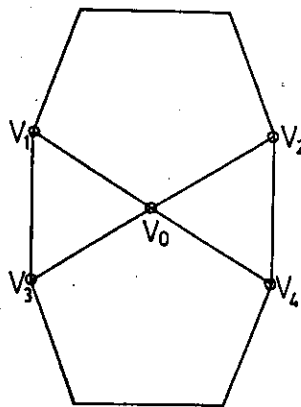
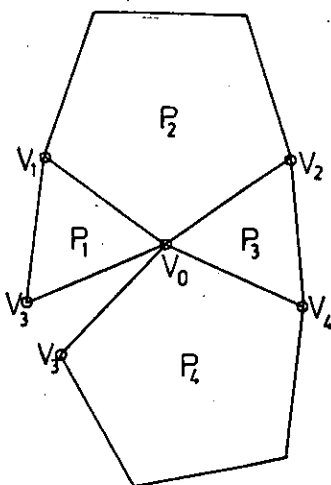
(3, 3, 3, 5) AP5



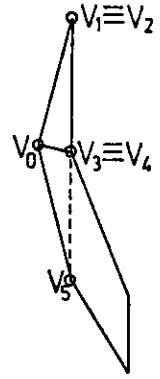
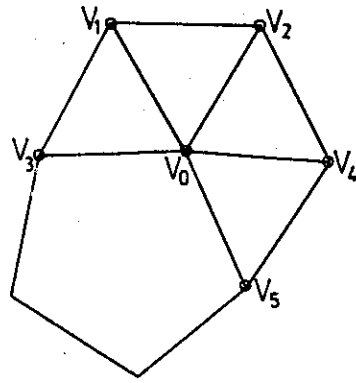
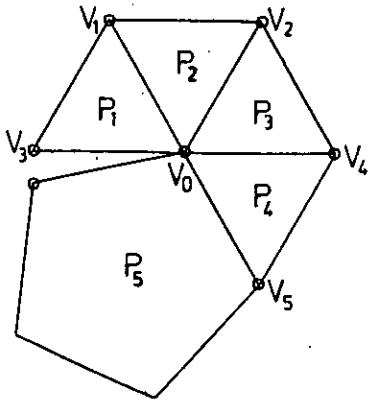
(3, 3, 5, 5)*



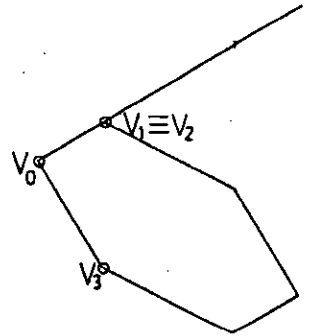
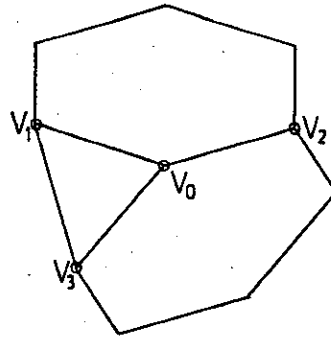
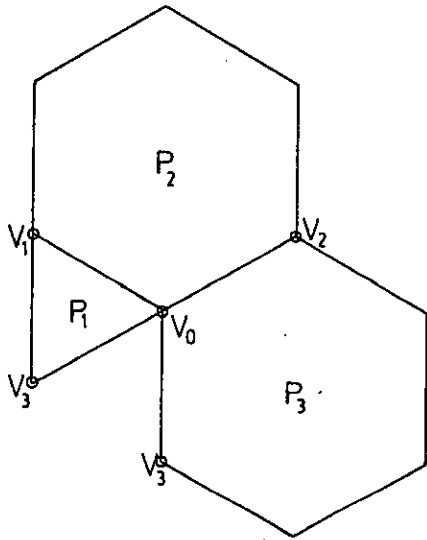
(3, 5, 3, 5) ID



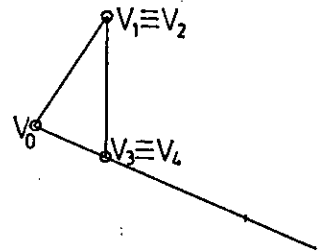
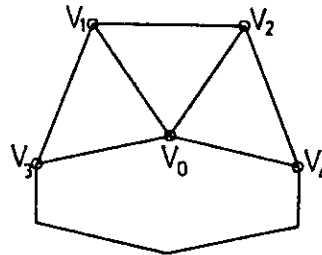
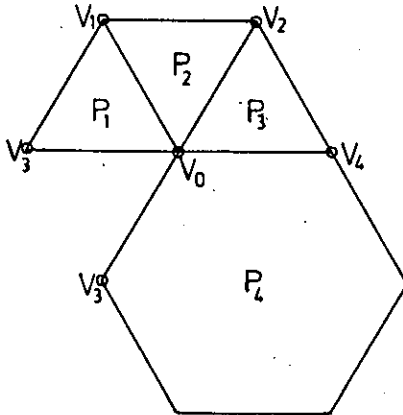
(3, 3, 3, 3, 5) DA



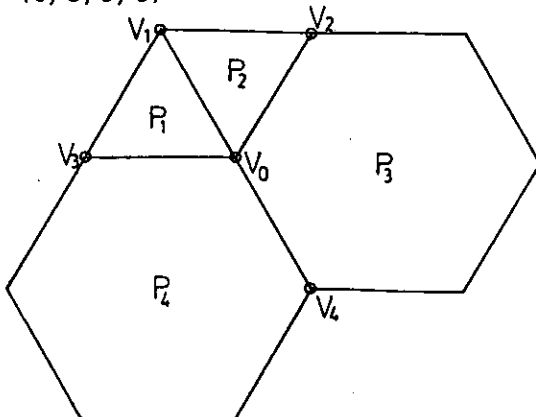
(3, 6, 6) TT



(3, 3, 3, 6) AP6

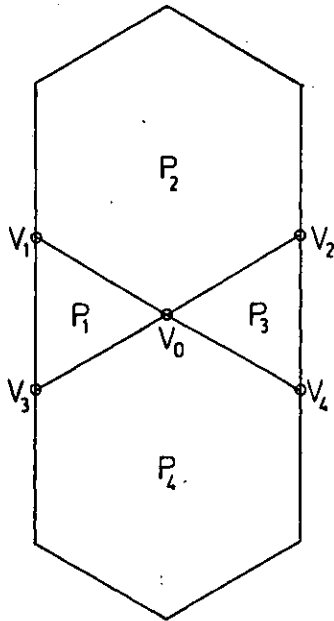


(3, 3, 6, 6)*



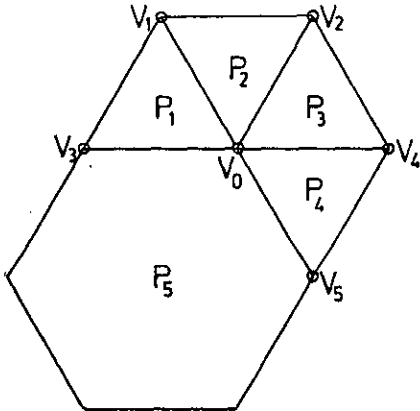
FORMA PLANA

(3, 6, 3, 6) MS



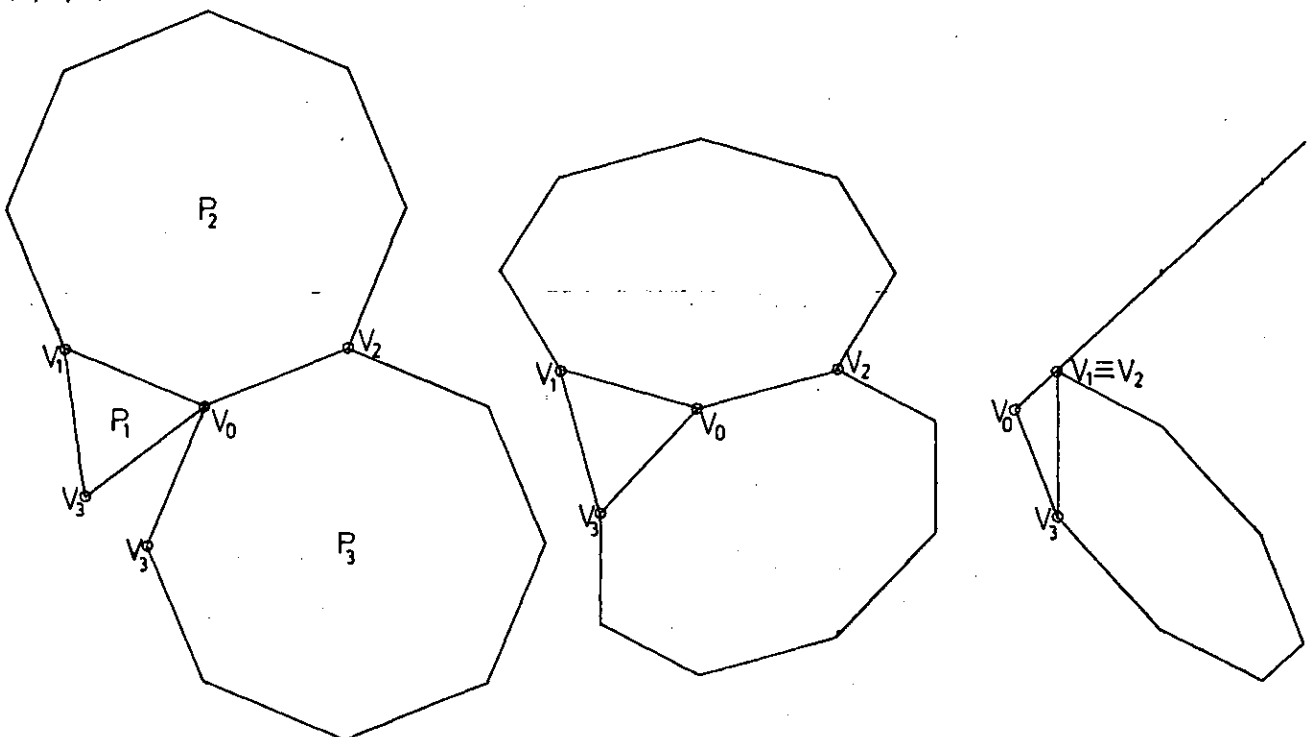
FORMA PLANA

(3, 3, 3, 3, 6) MS

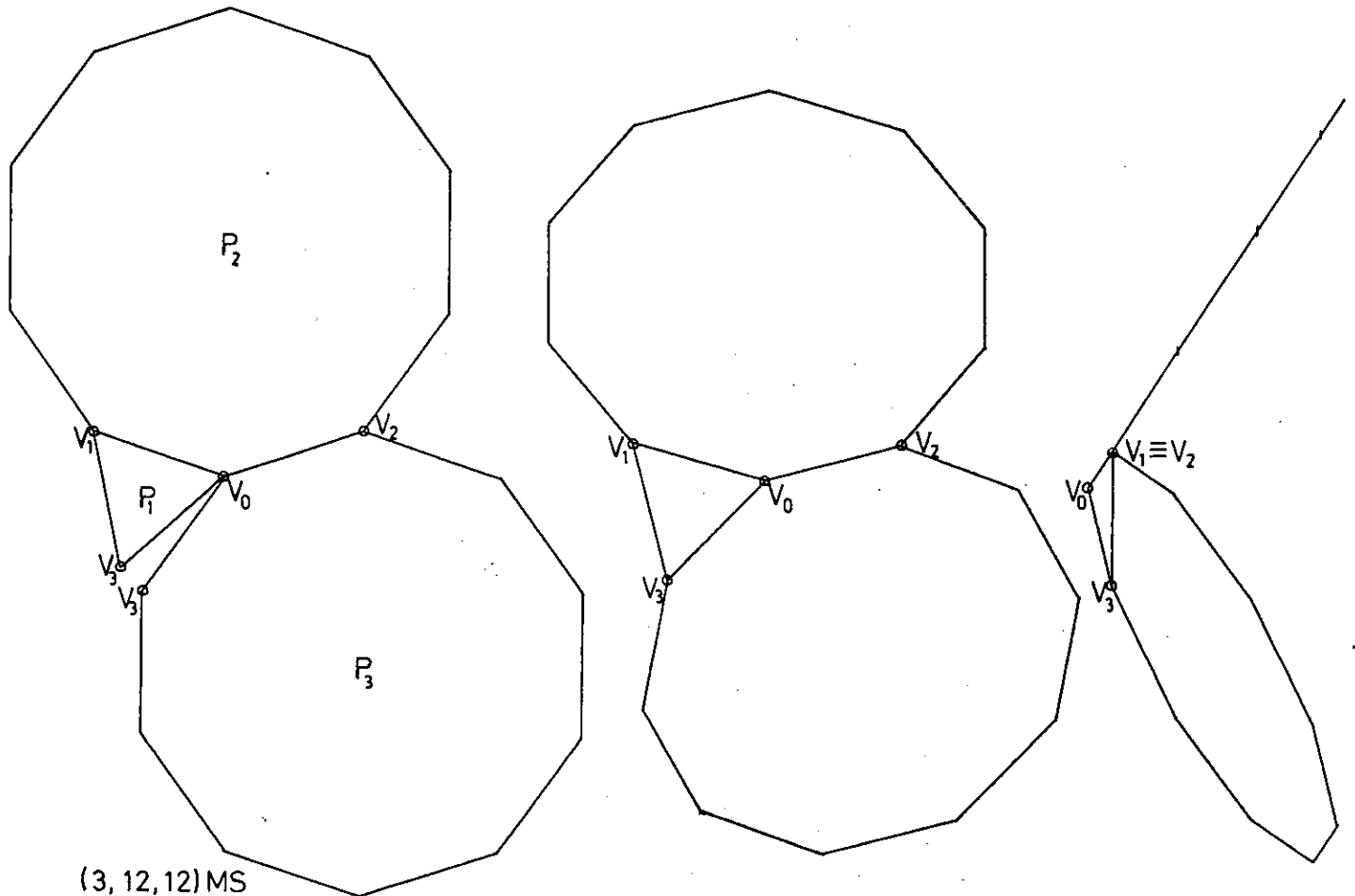


FORMA PLANA

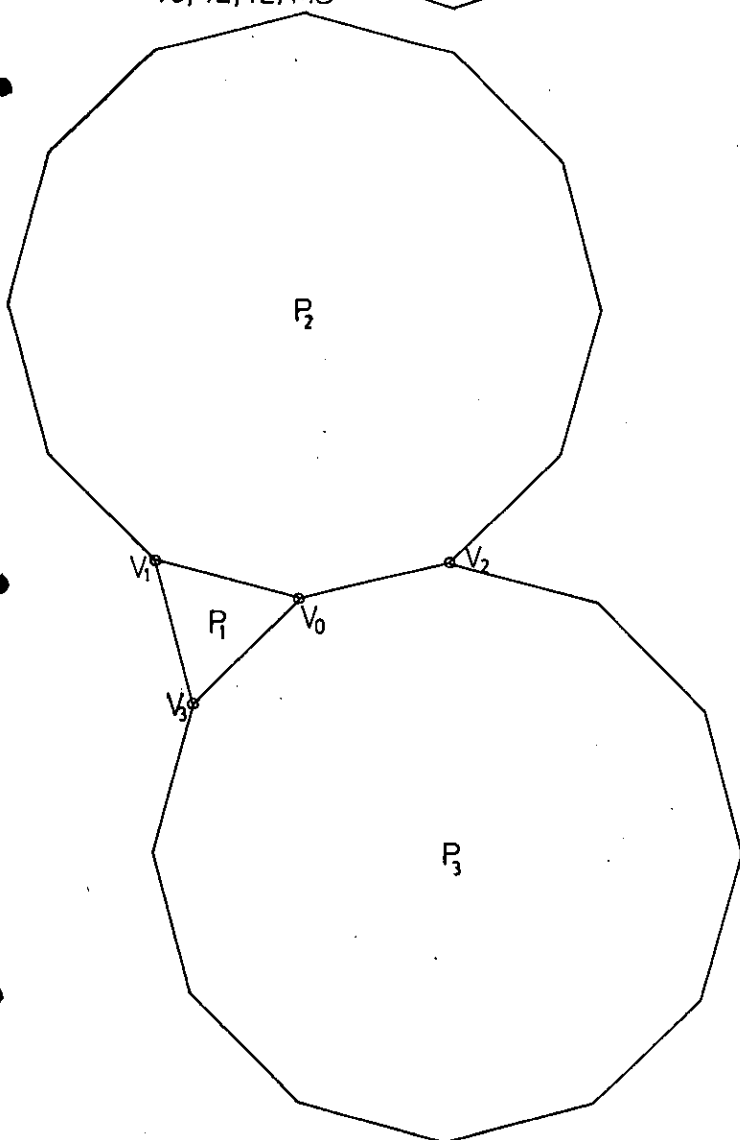
(3, 8, 8) CT



(3,10,10) DT

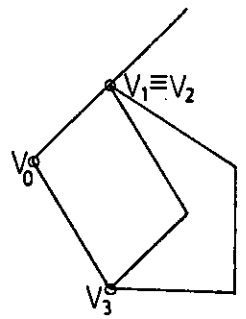
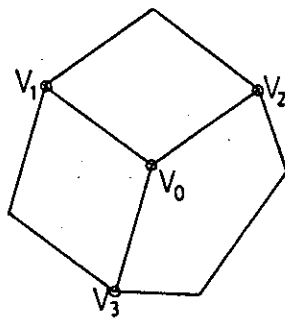
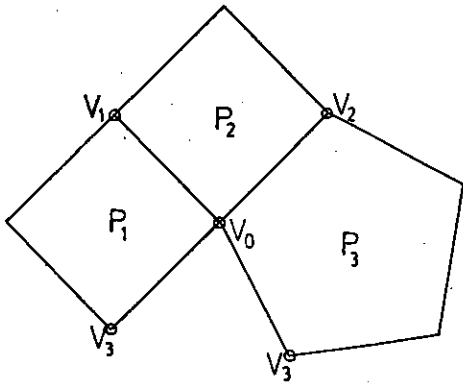


(3,12,12) MS

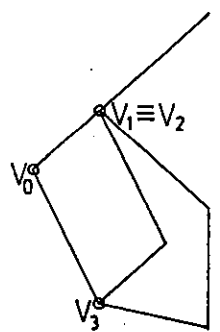
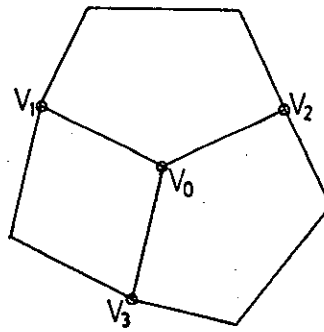
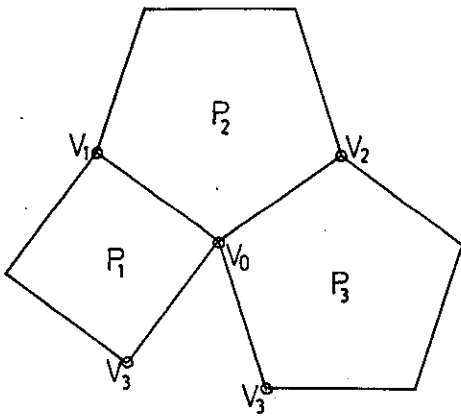


FORMA PLANA

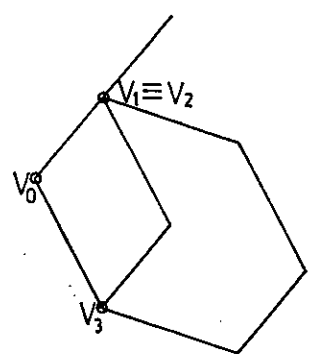
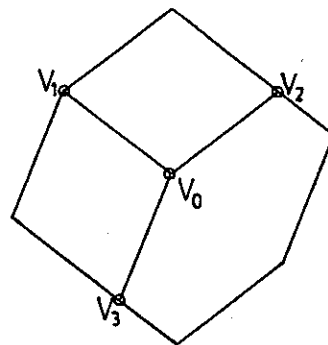
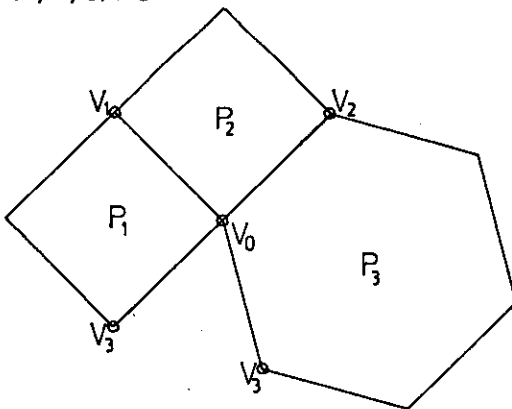
(4, 4, 5) P5



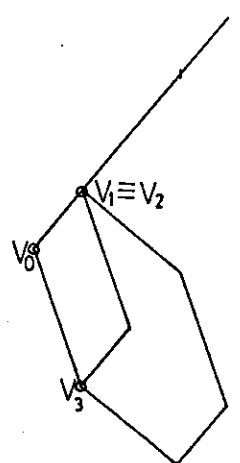
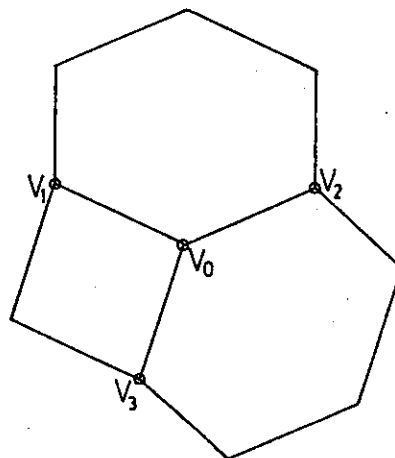
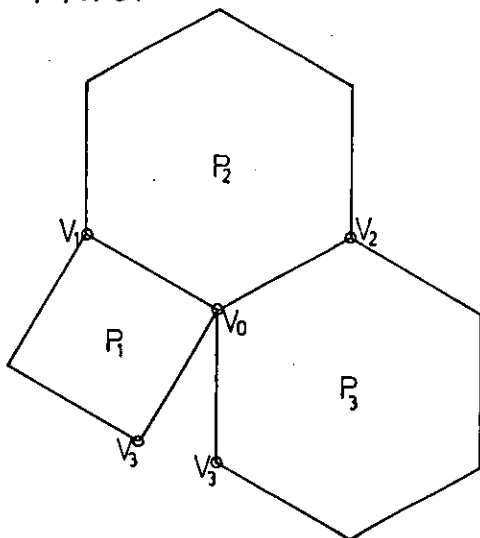
(4, 5, 5)*



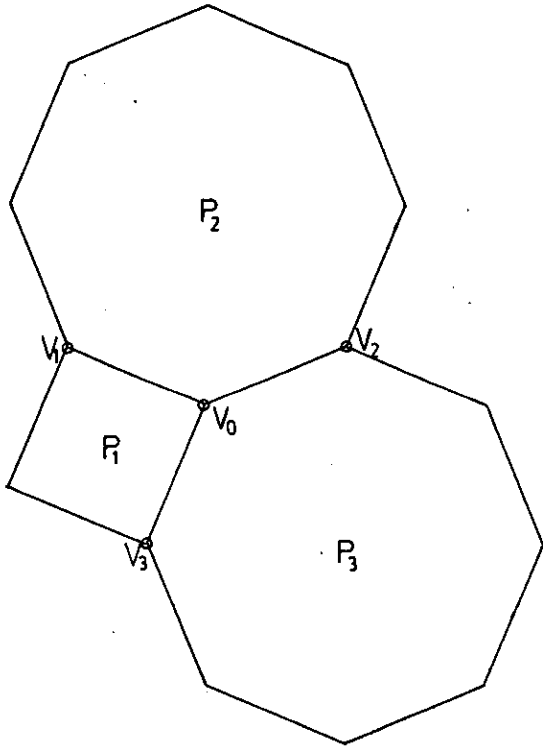
(4, 4, 6) P6



(4, 6, 6) OT

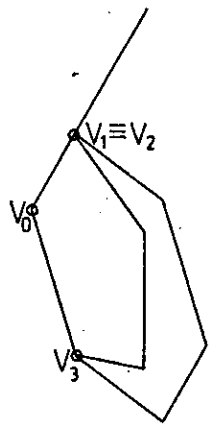
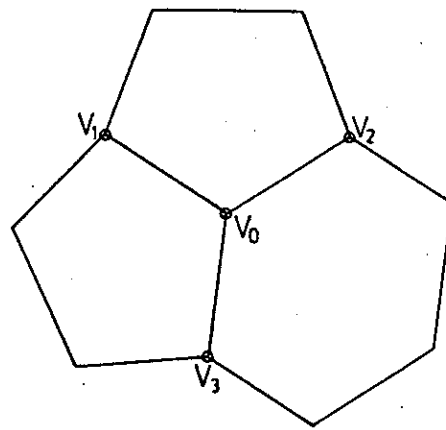
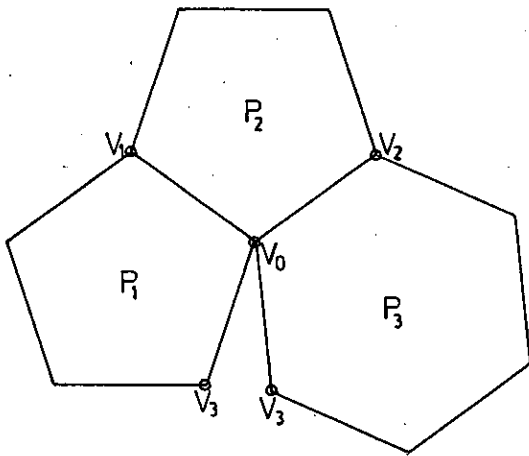


(4, 8, 8) MS

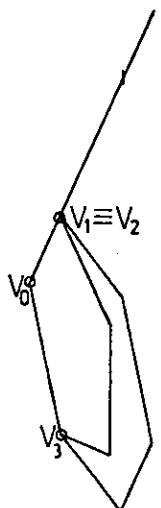
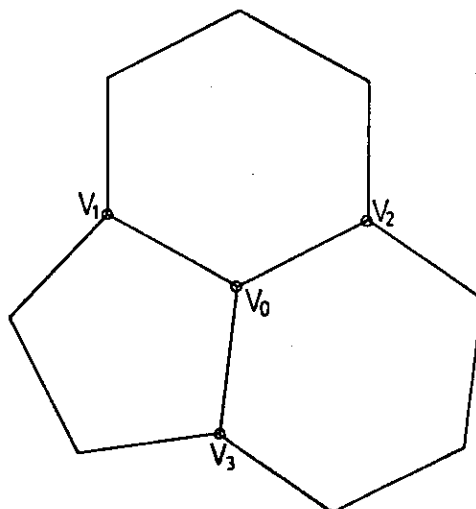
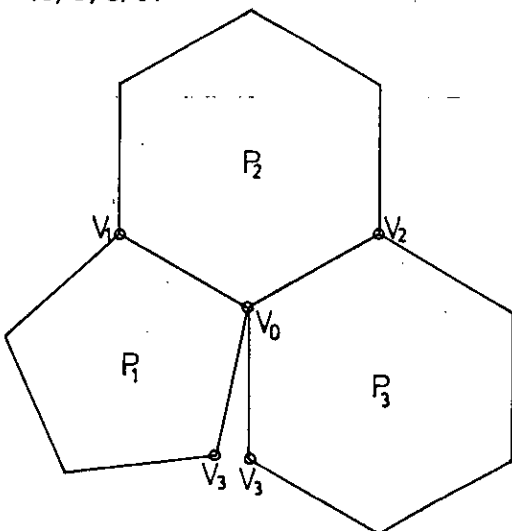


FORMA PLANA

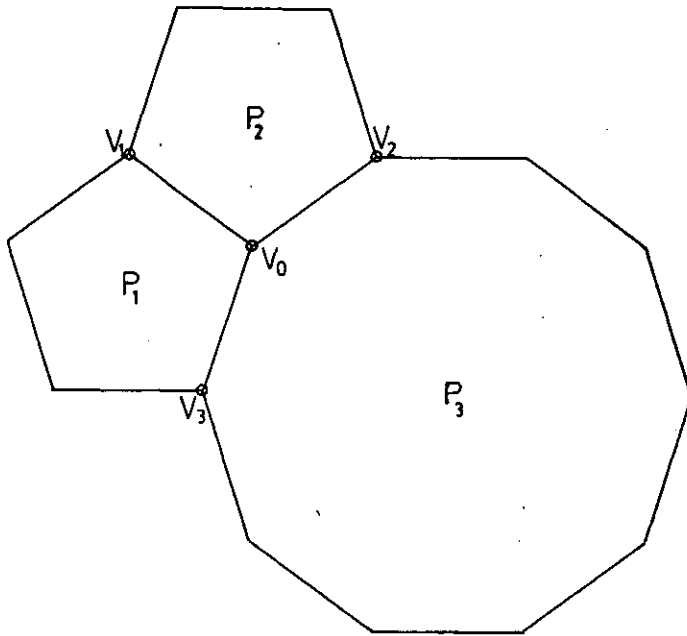
(5, 5, 6)*



(5, 6, 6) IT

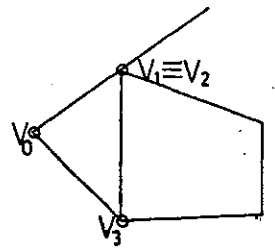
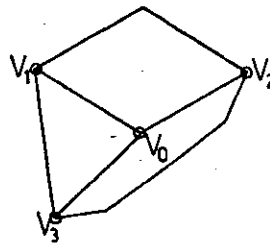
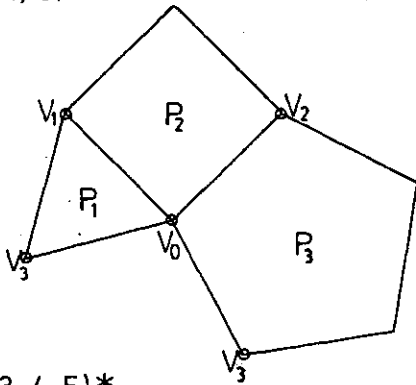


(5, 5, 10)*

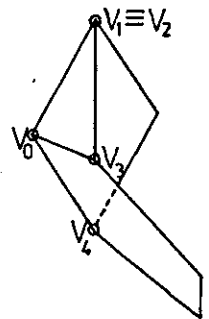
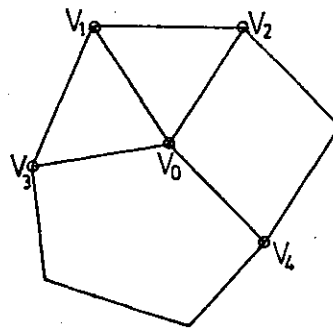
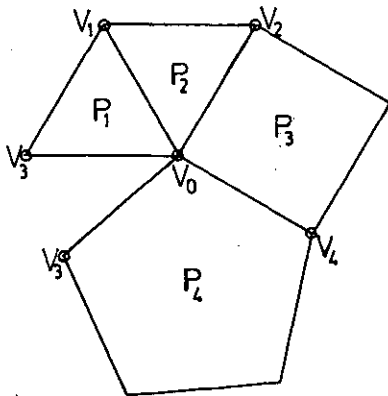


FORMA PLANA

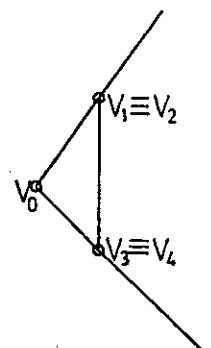
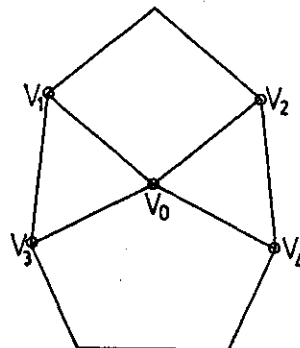
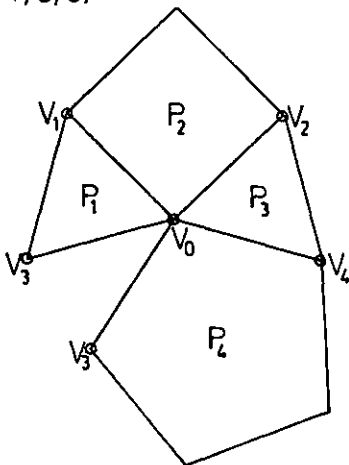
(3, 4, 5)*



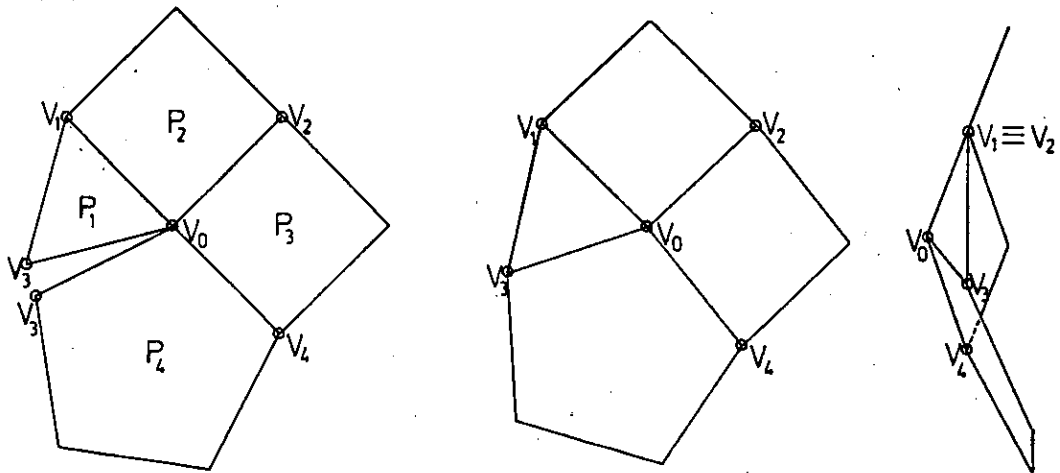
(3, 3, 4, 5)*



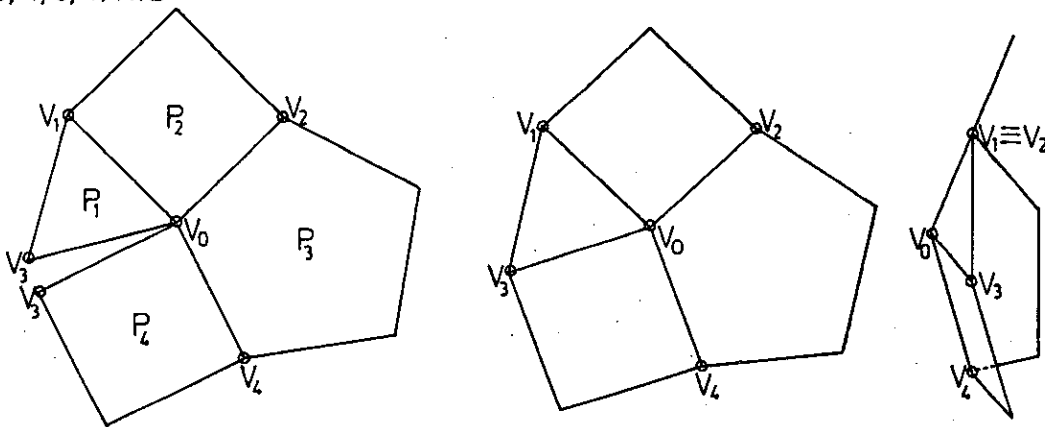
(3, 4, 3, 5)*



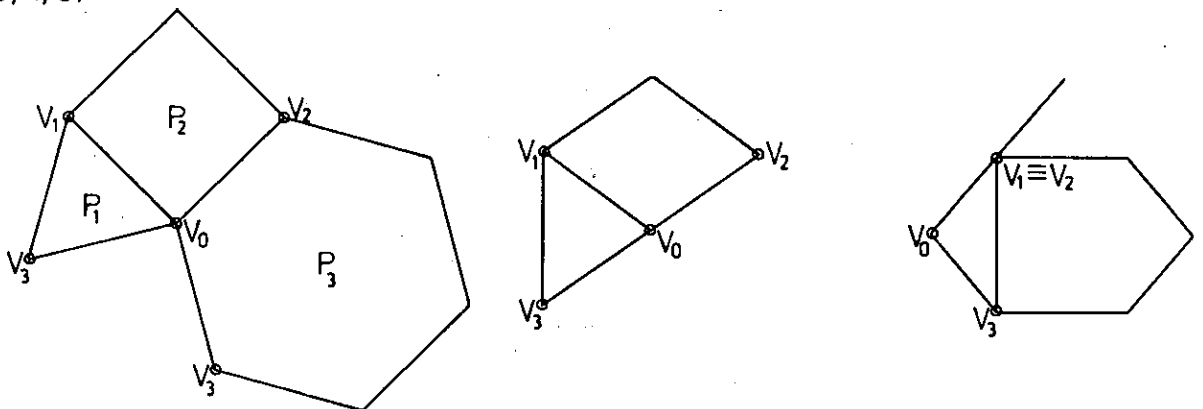
(3, 4, 4, 5)*



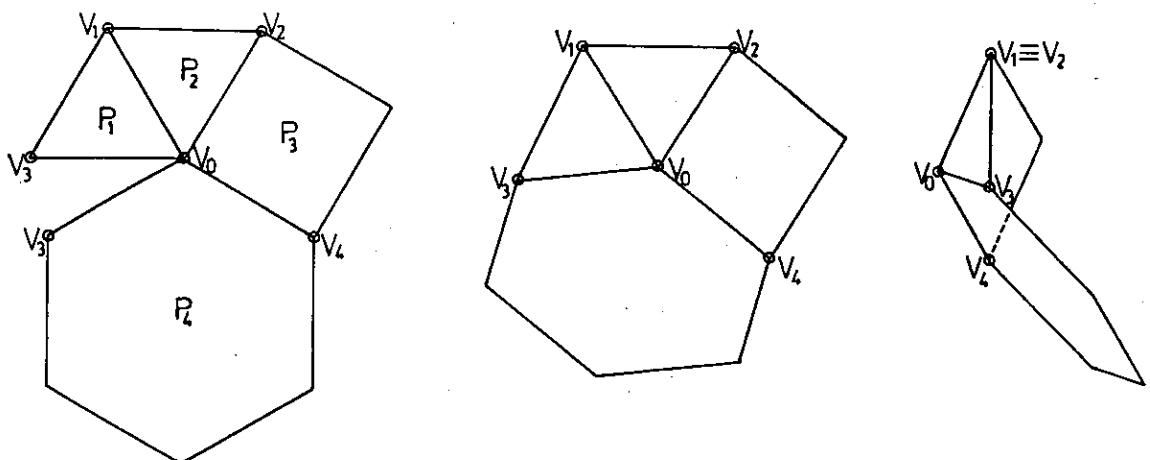
(3, 4, 5, 4) RID



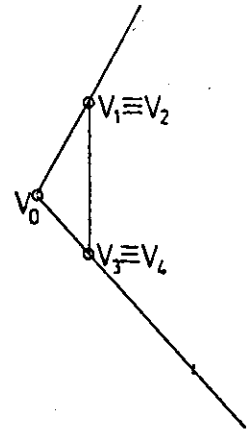
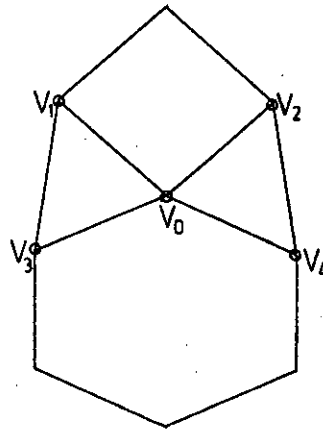
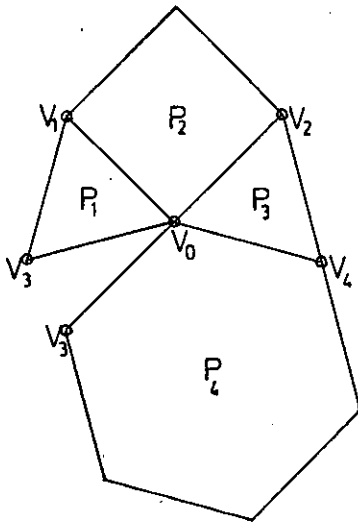
(3, 4, 6)*



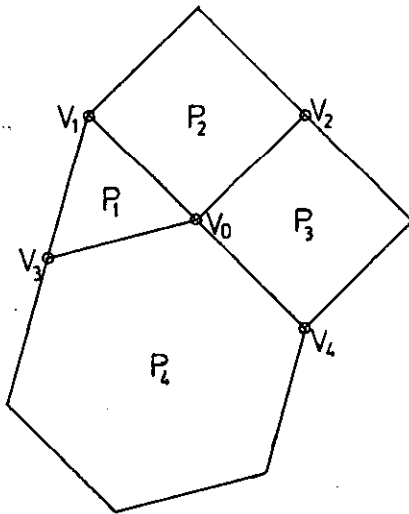
(3, 3, 4, 6)*



(3, 4, 3, 6)*

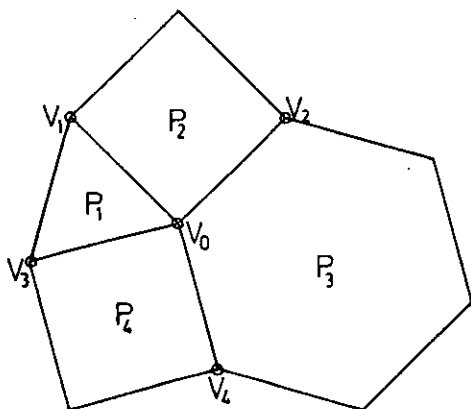


(3, 4, 4, 6)*



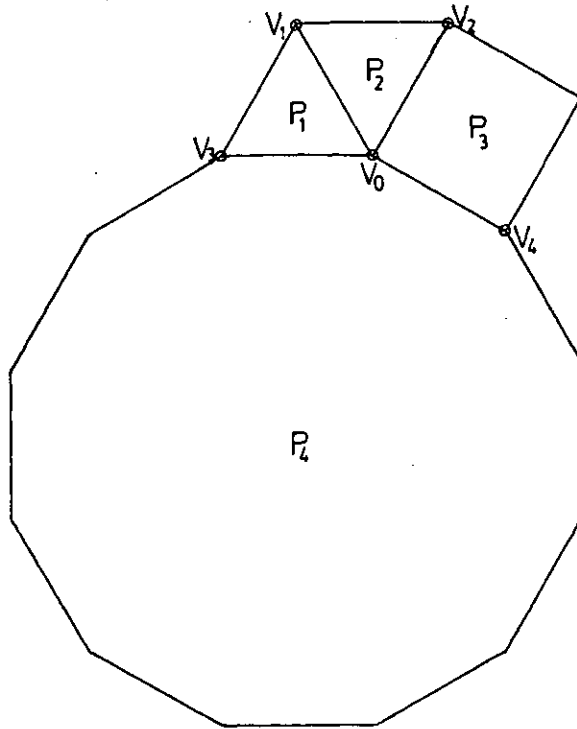
FORMA PLANA

(3, 4, 6, 4)MS



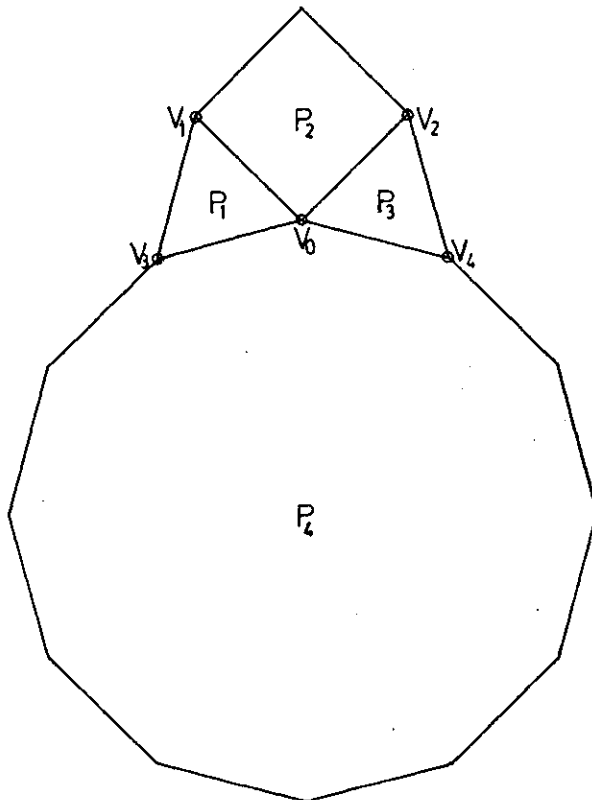
FORMA PLANA

(3, 3, 4, 12) *



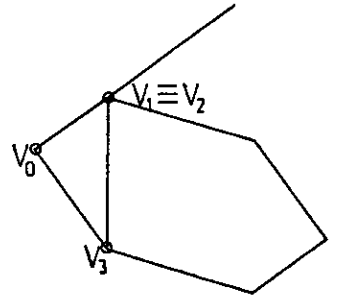
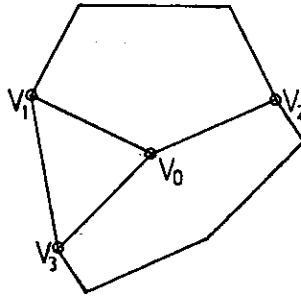
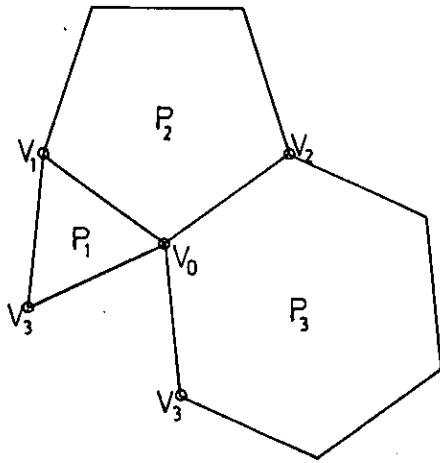
FORMA PLANA

(3, 4, 3, 12) *

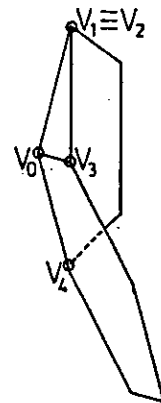
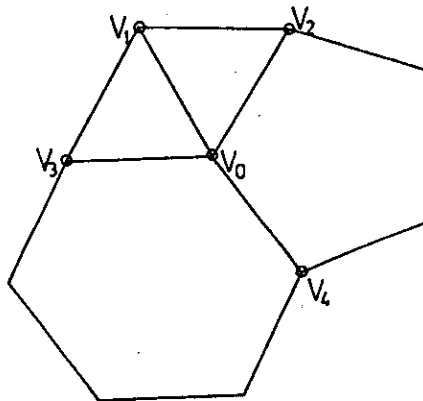
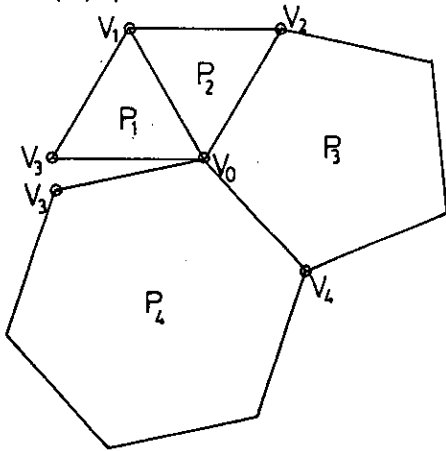


FORMA PLANA

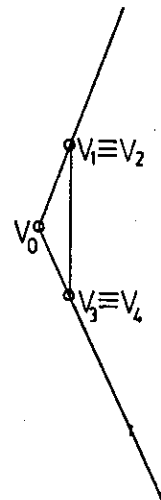
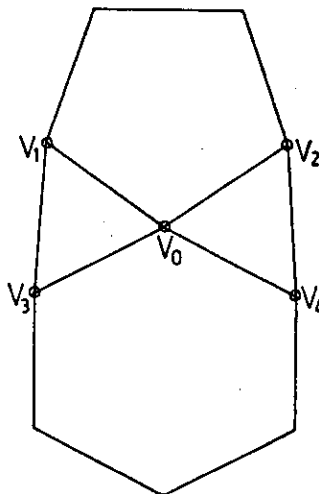
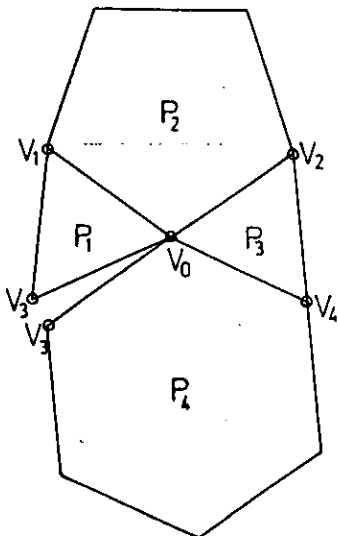
(3, 5, 6) *



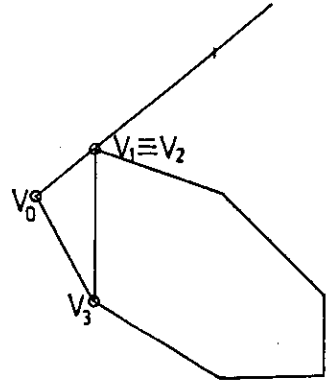
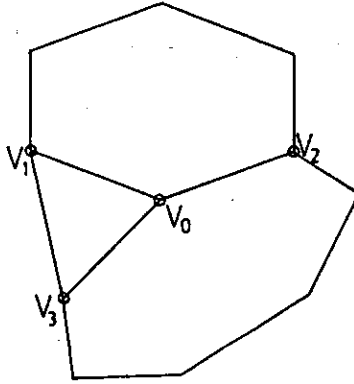
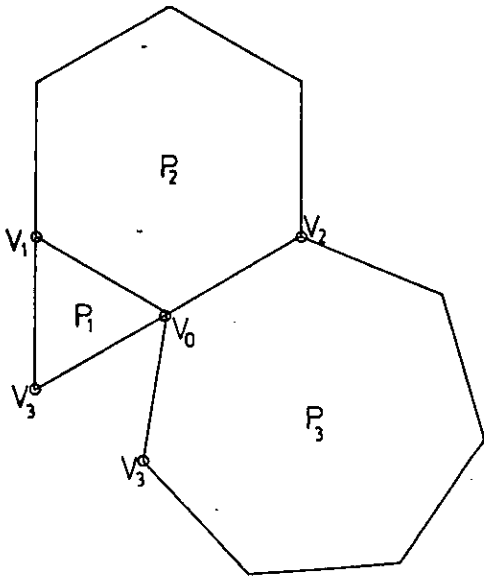
(3, 3, 5, 6) *



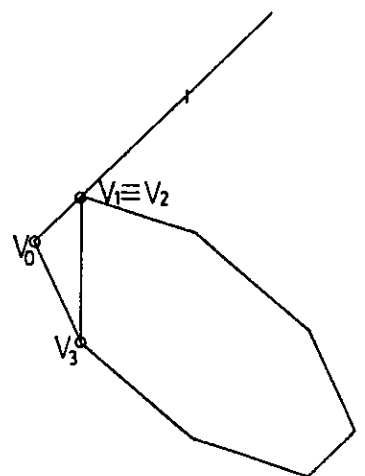
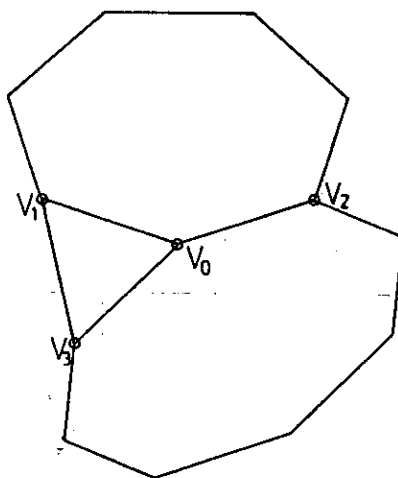
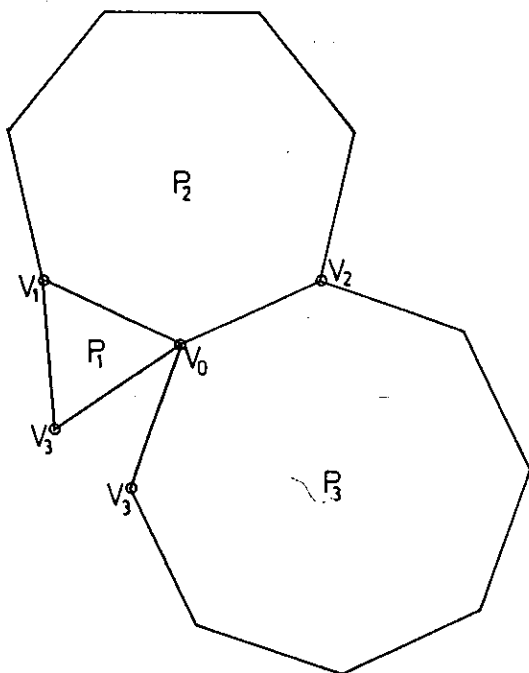
(3, 5, 3, 6) *



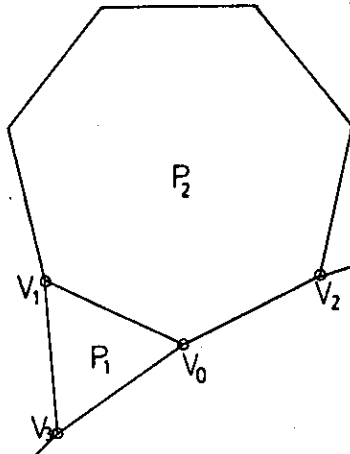
(3,6,7)*



(3,7,8)*

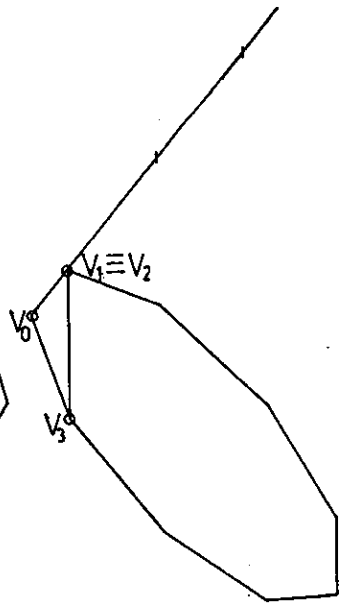
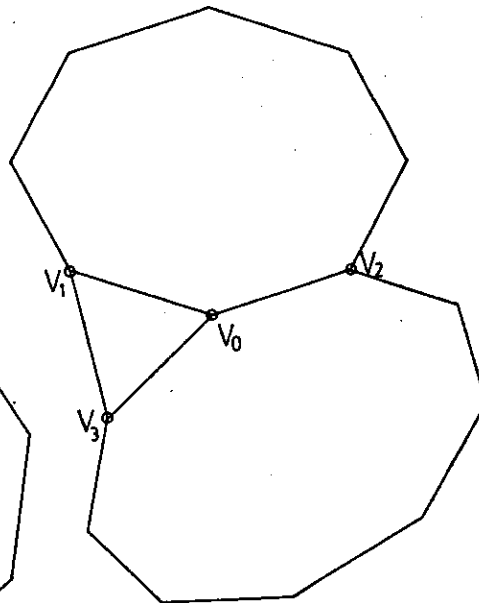
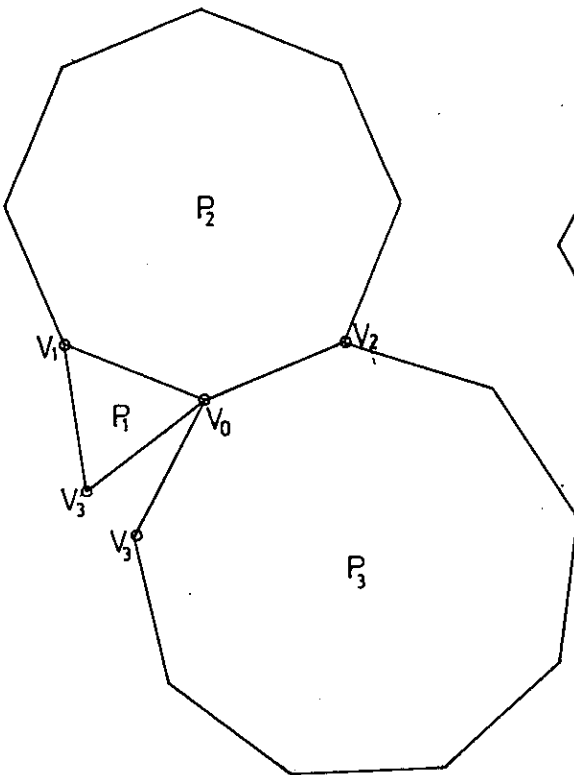


(3, 7, 42)*

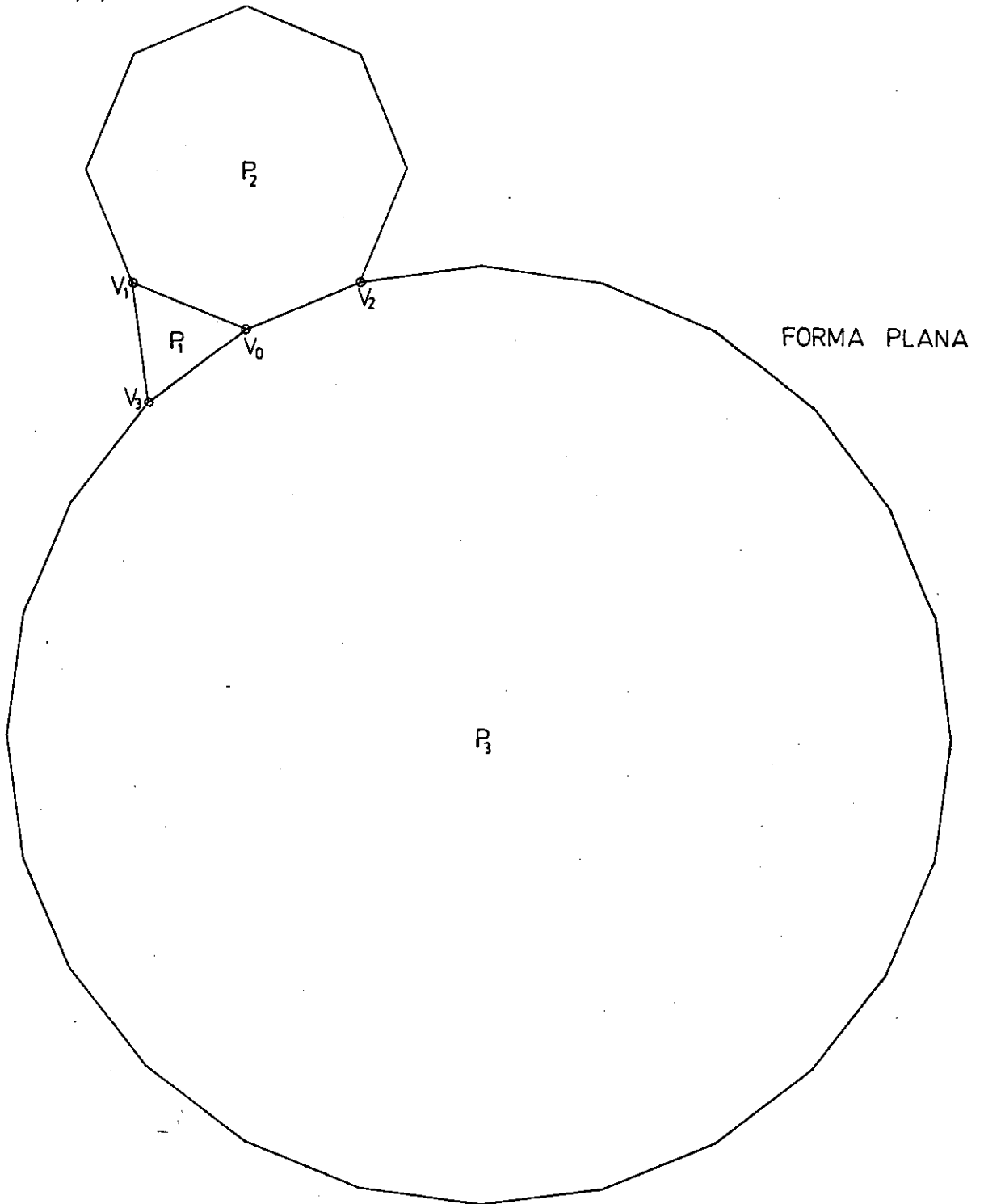


FORMA PLANA

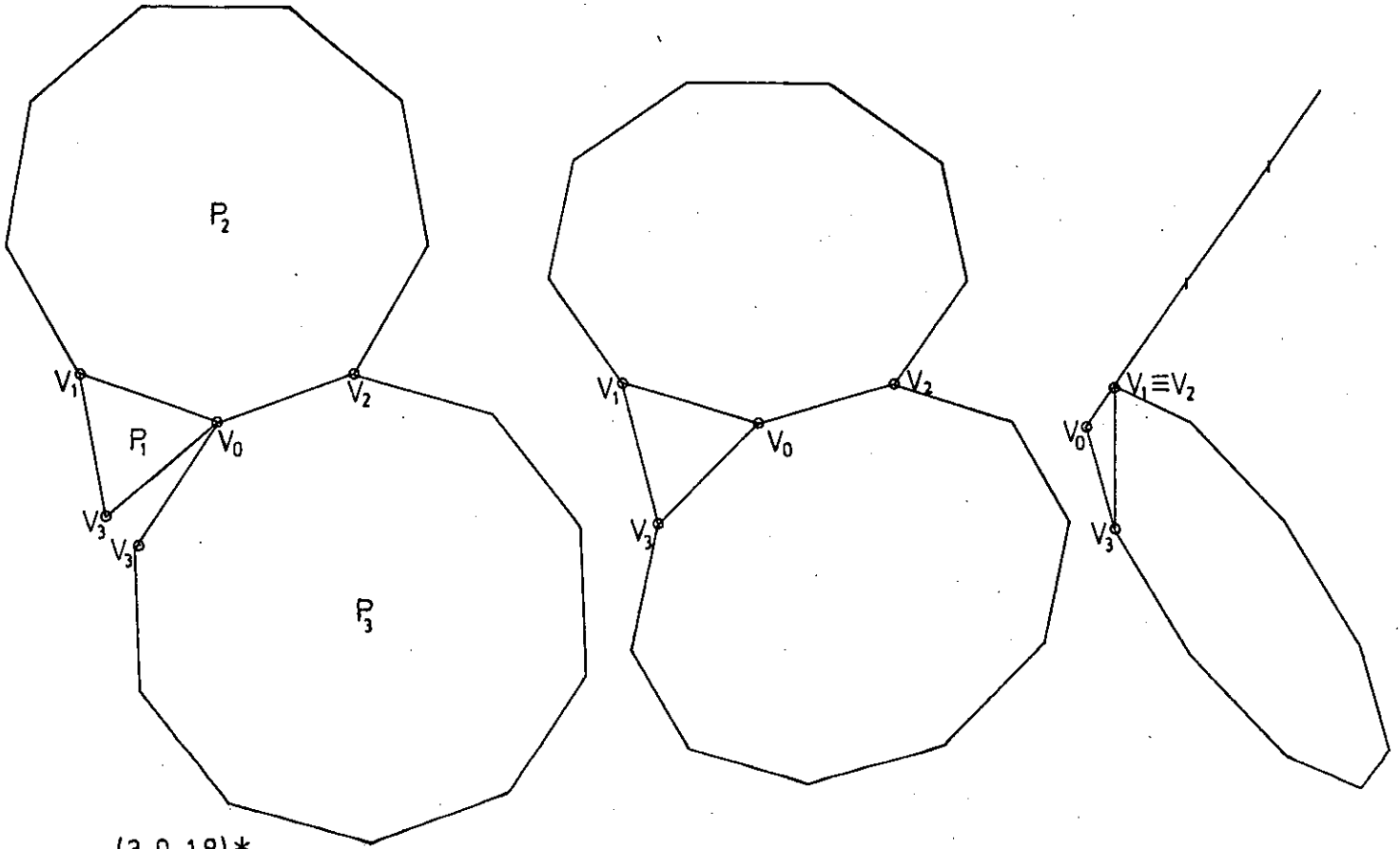
(3, 8, 9)*



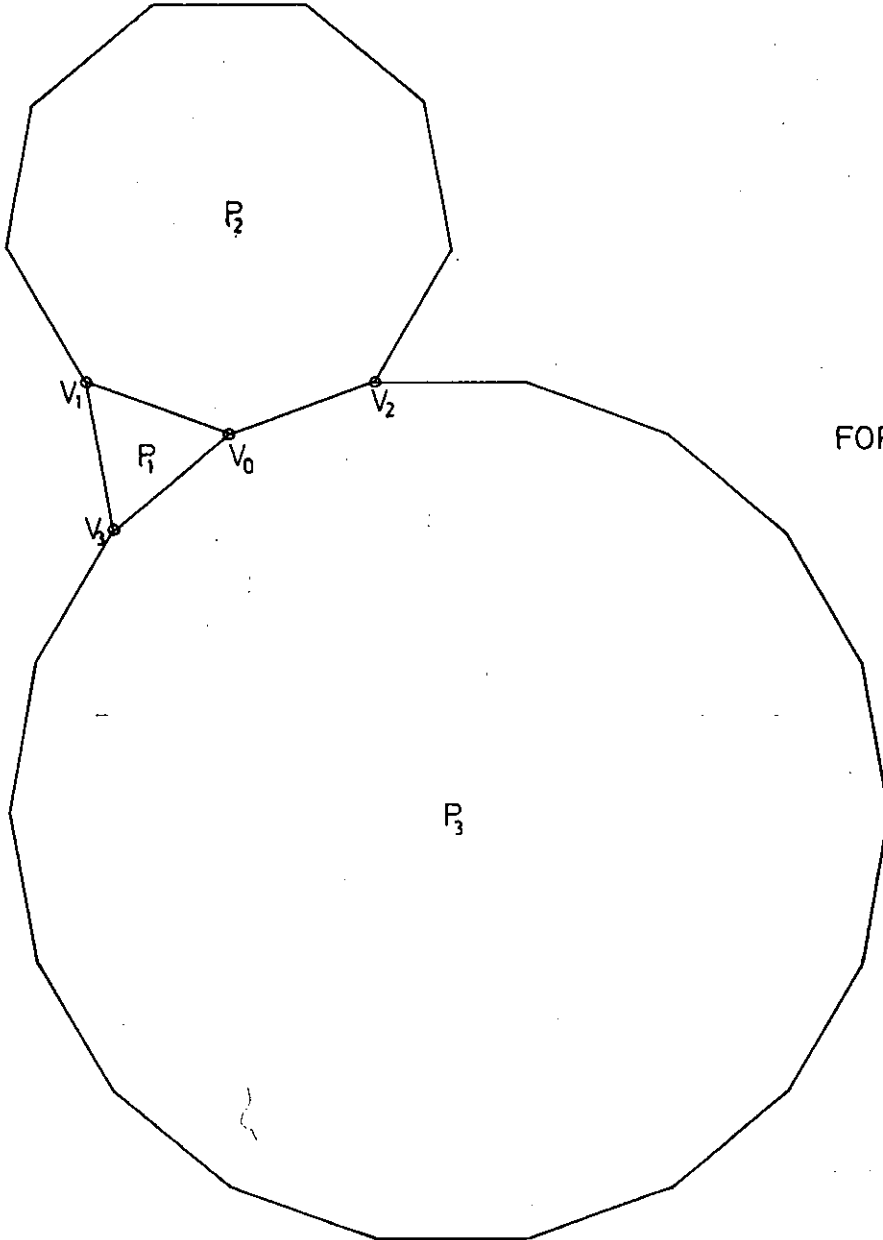
(3, 8, 24) *



(3, 9, 10)*

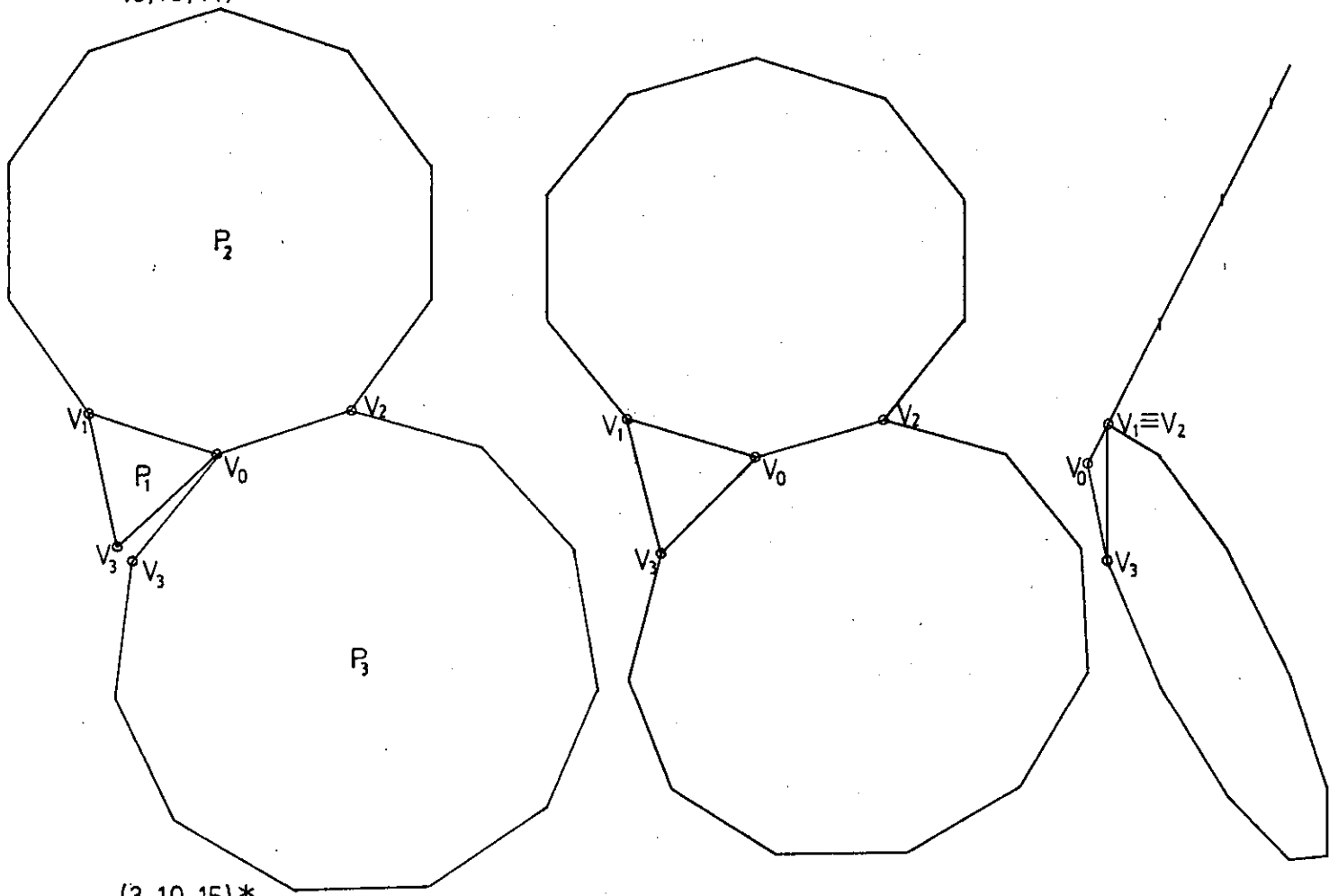


(3, 9, 18)*

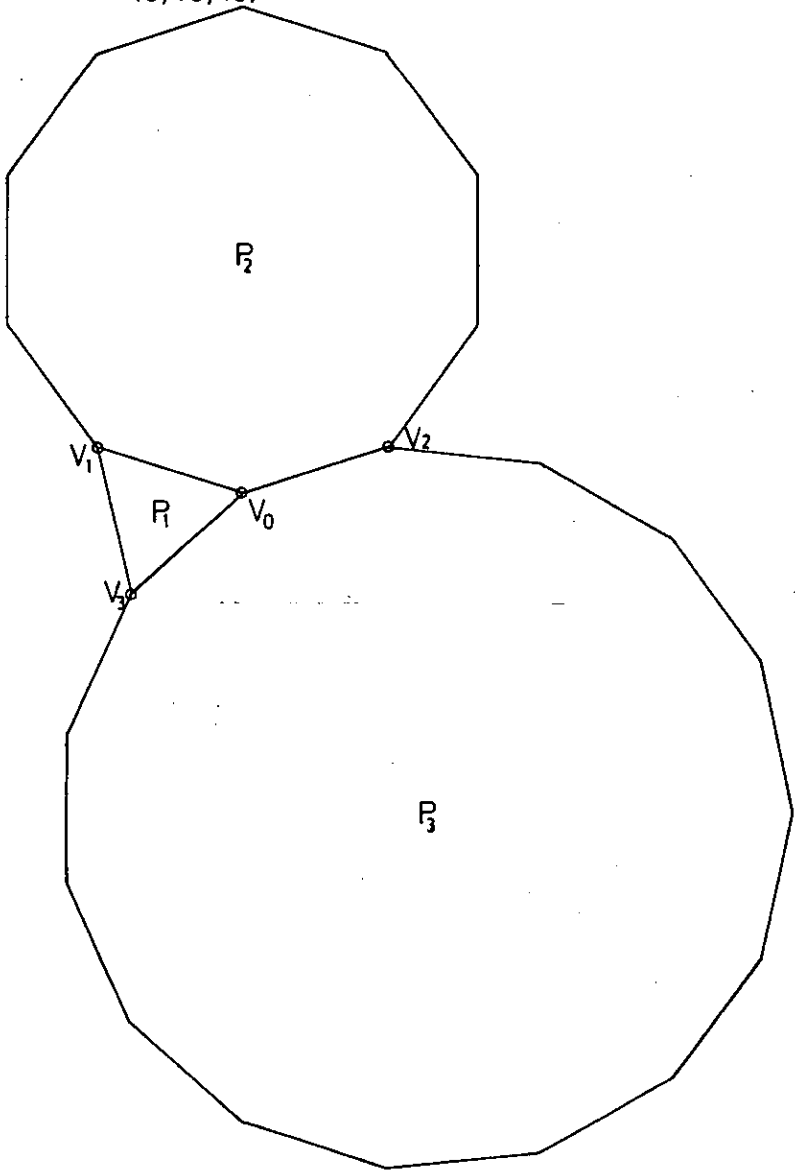


FORMA PLANA

(3,10,11)*

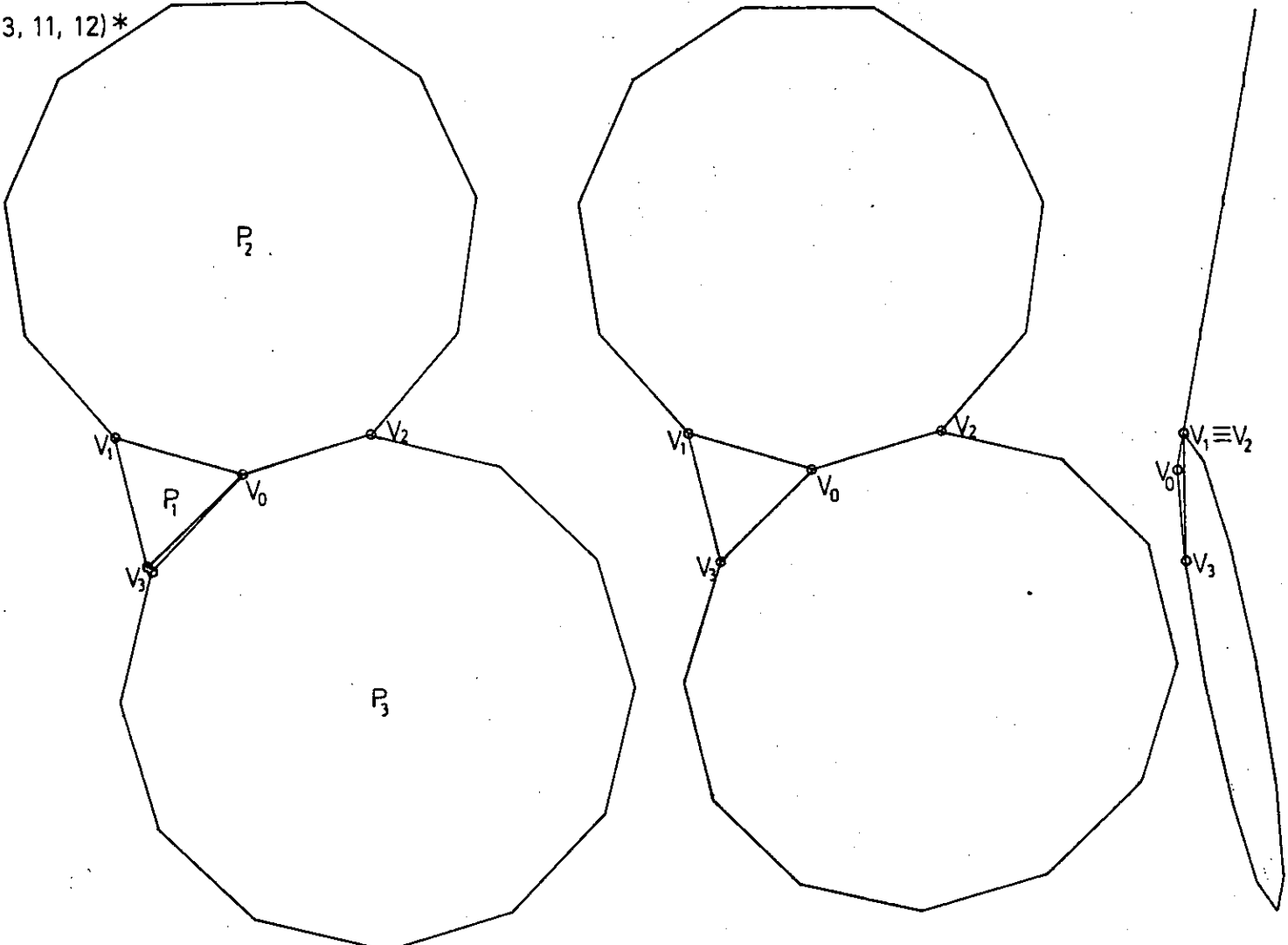


(3,10,15)*

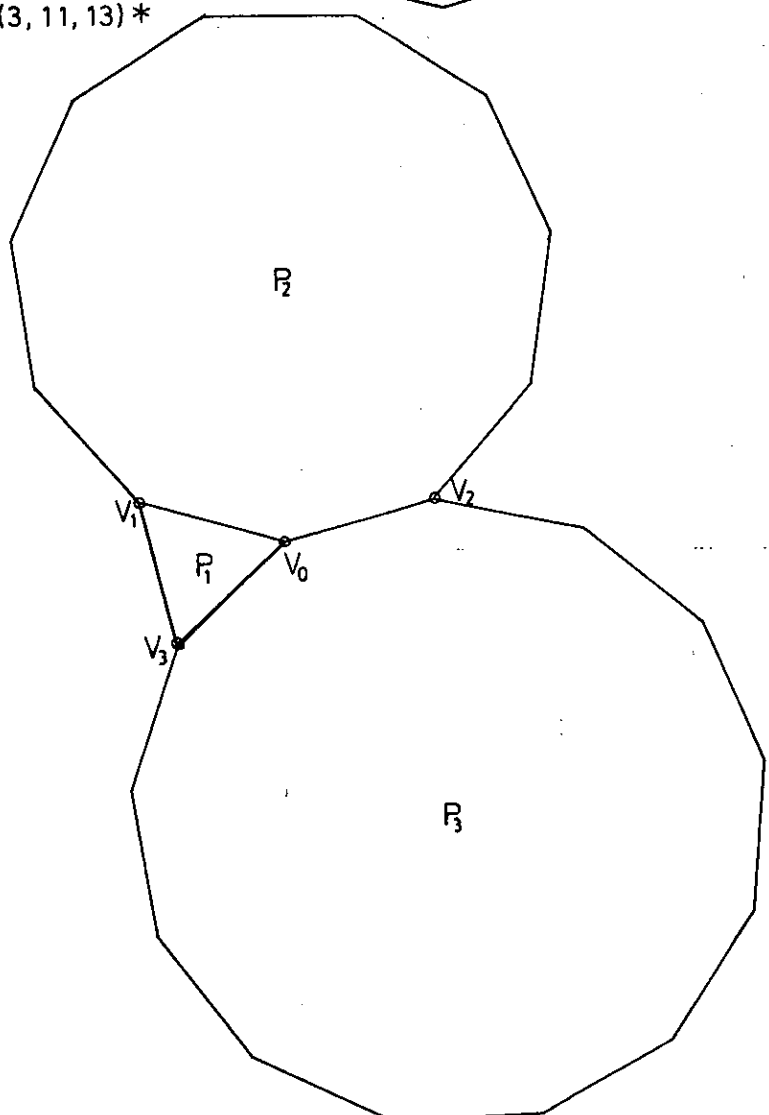


FORMA PLANA

(3, 11, 12)*

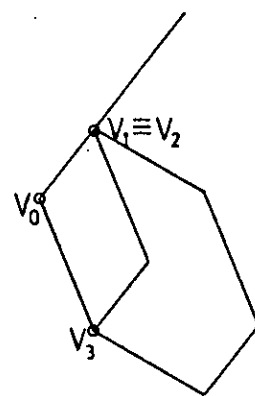
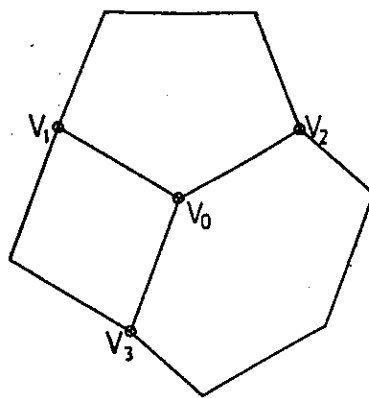
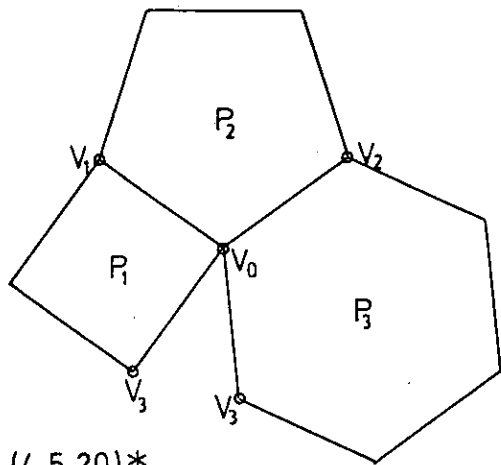


(3, 11, 13)*

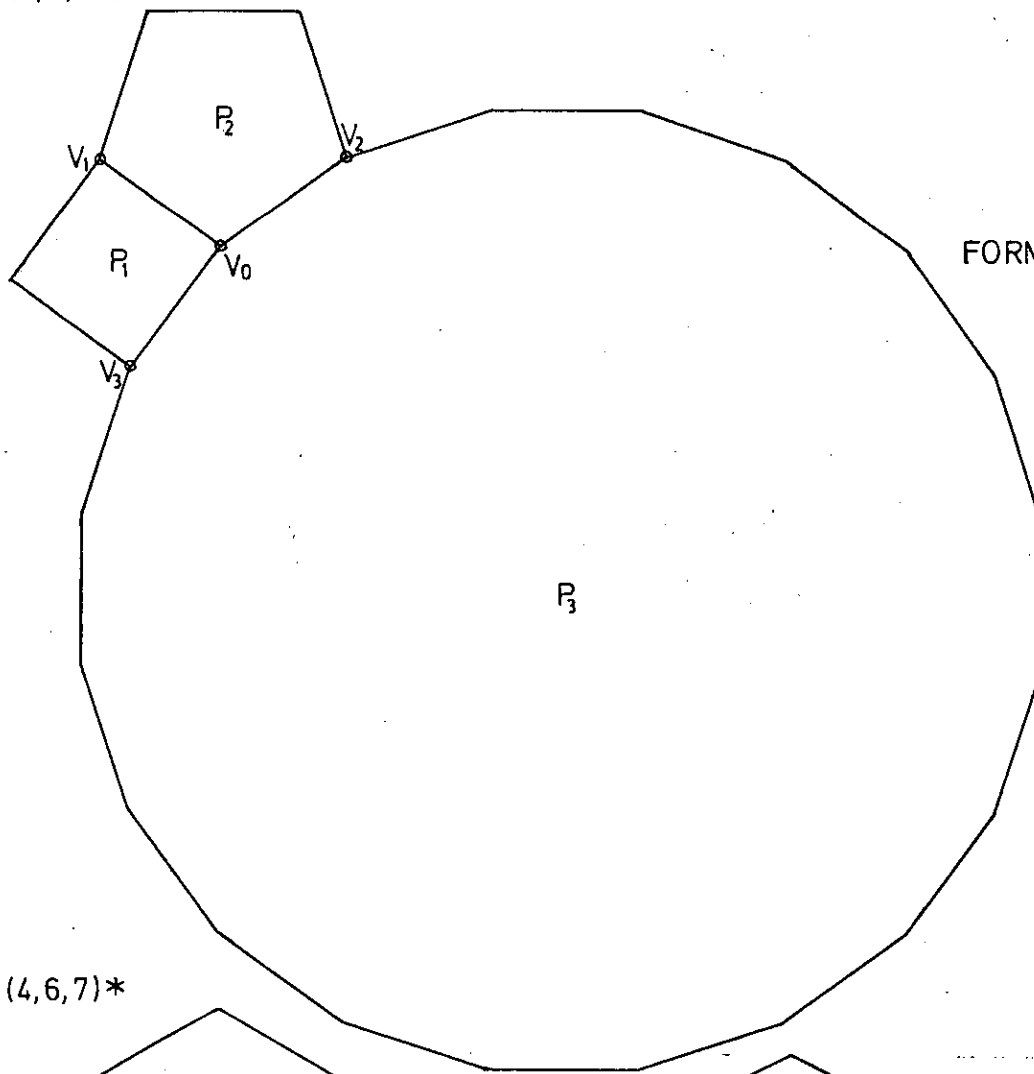


FORMA CASI PLANA
 $\delta_p = 25' 10,49''$

(4, 5, 6)*

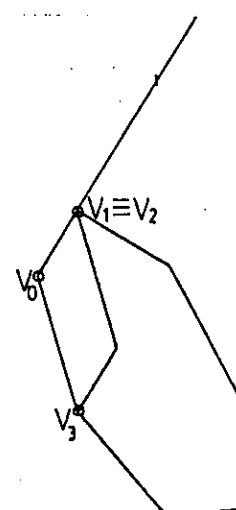
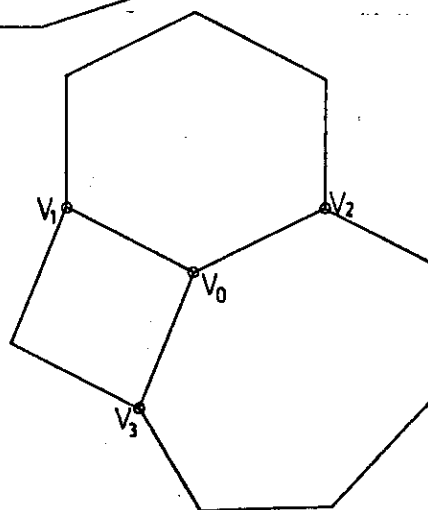
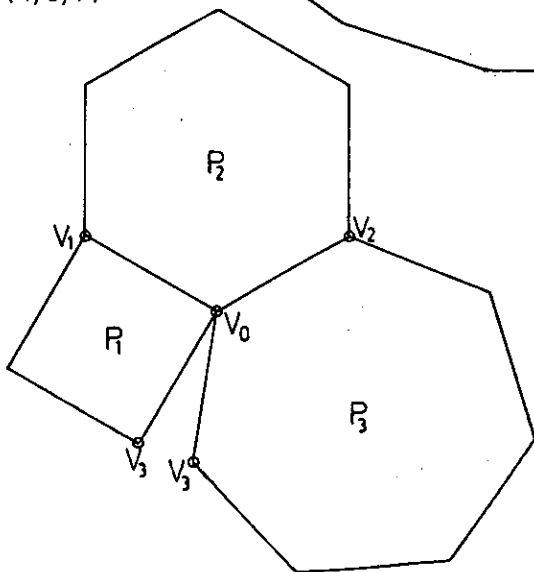


(4, 5, 20)*

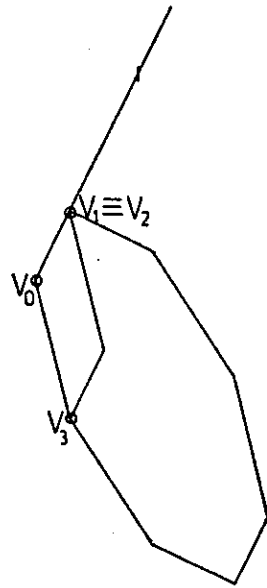
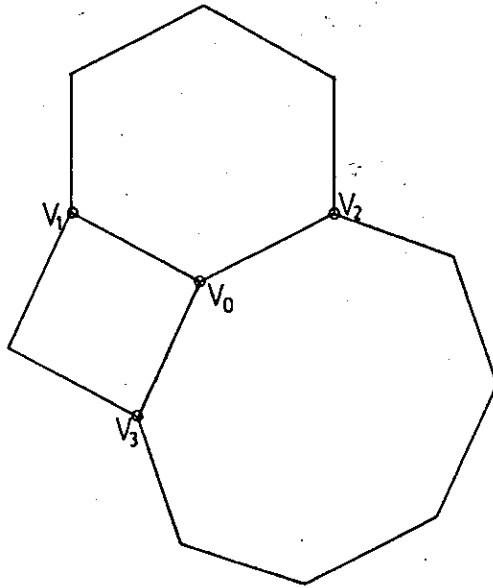
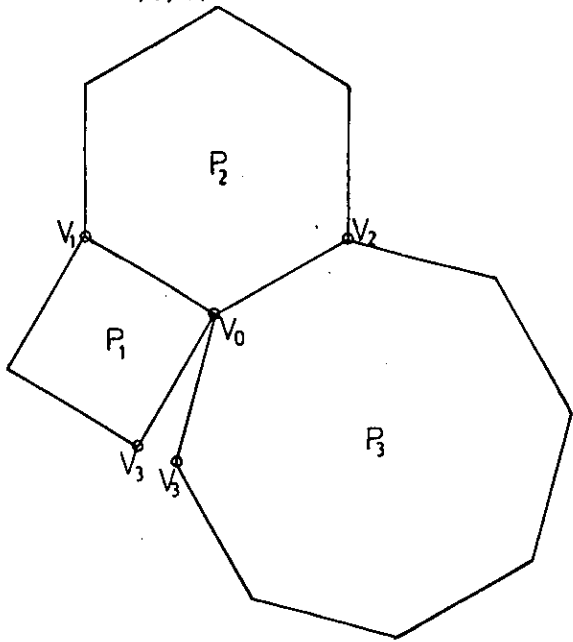


FORMA PLANA

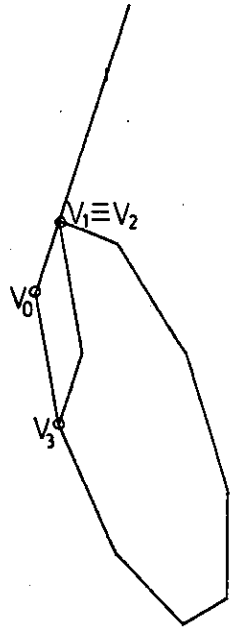
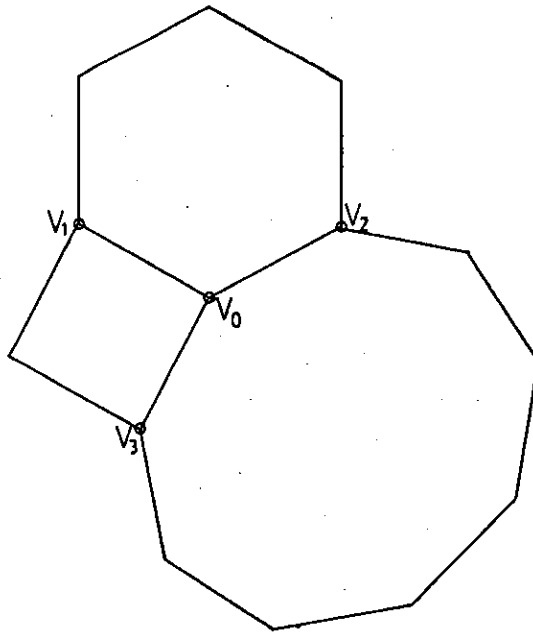
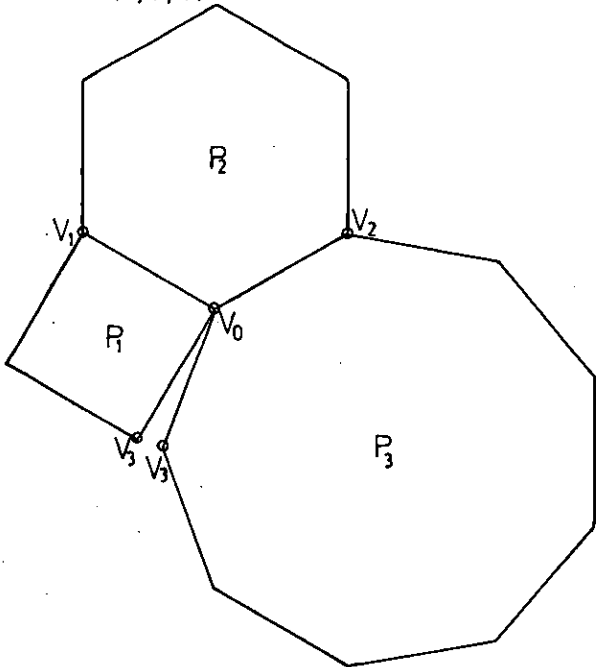
(4, 6, 7)*



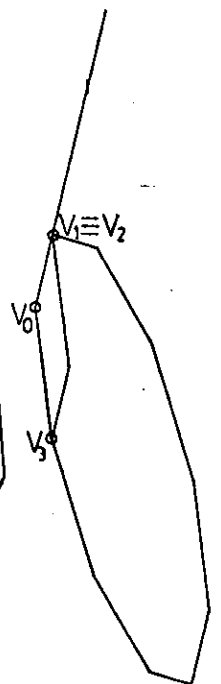
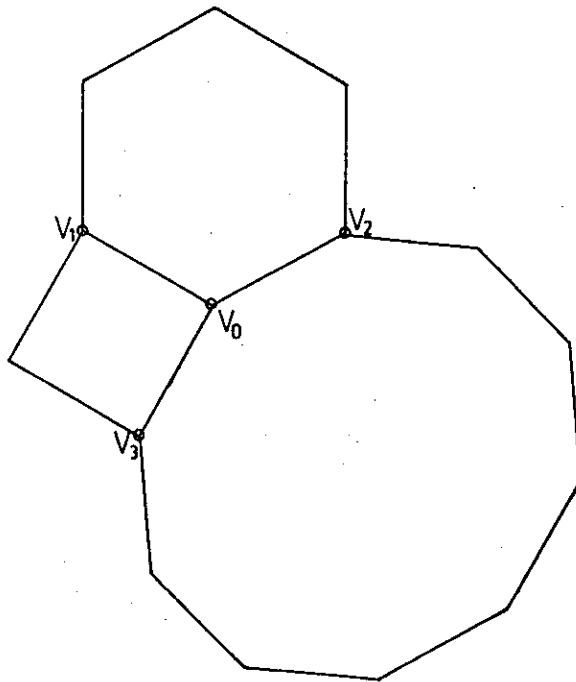
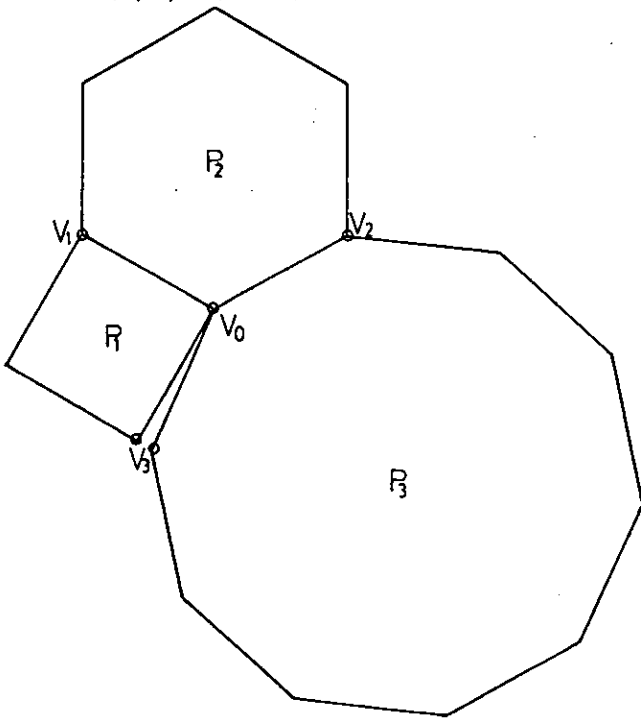
(4, 6, 8) GRCO



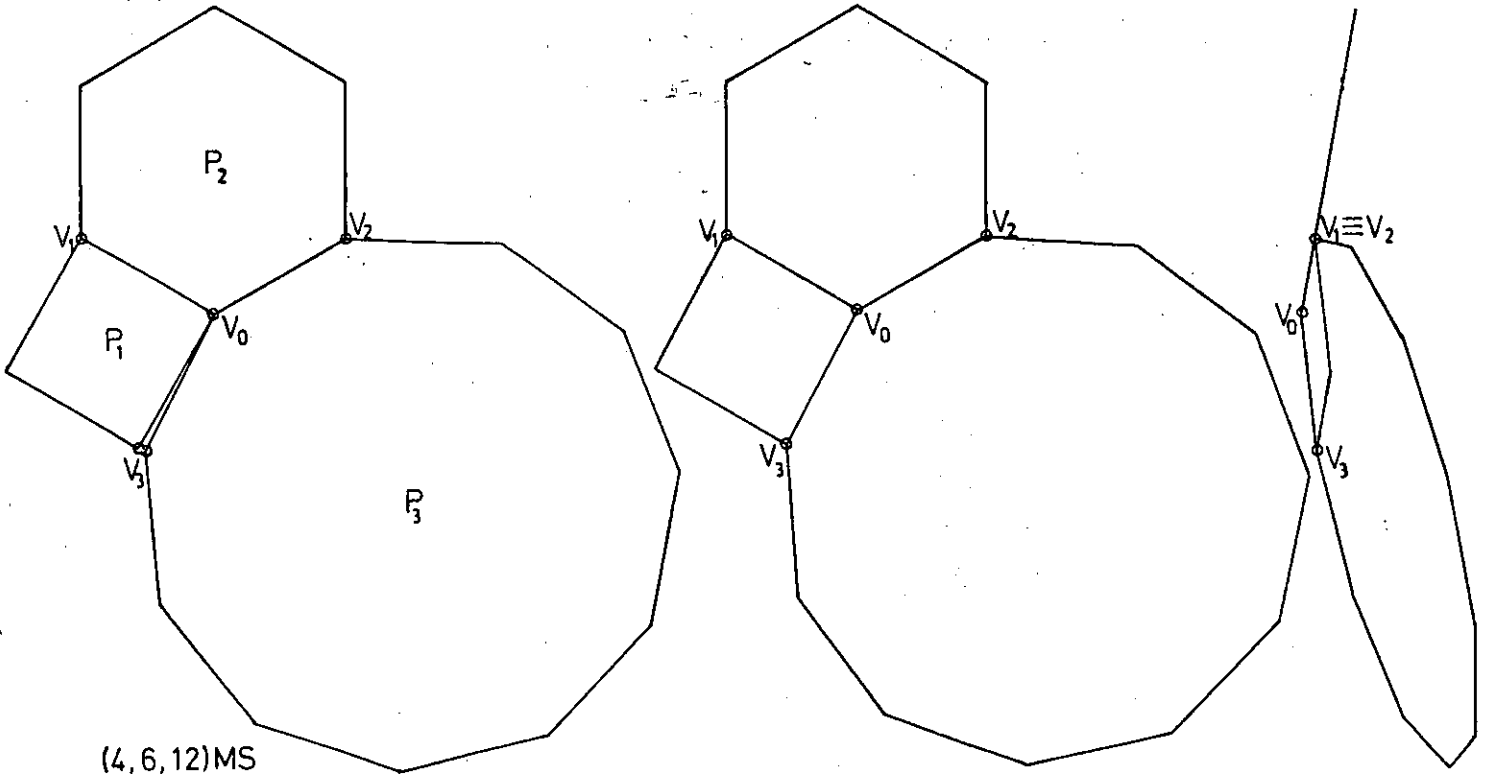
(4, 6, 9) *



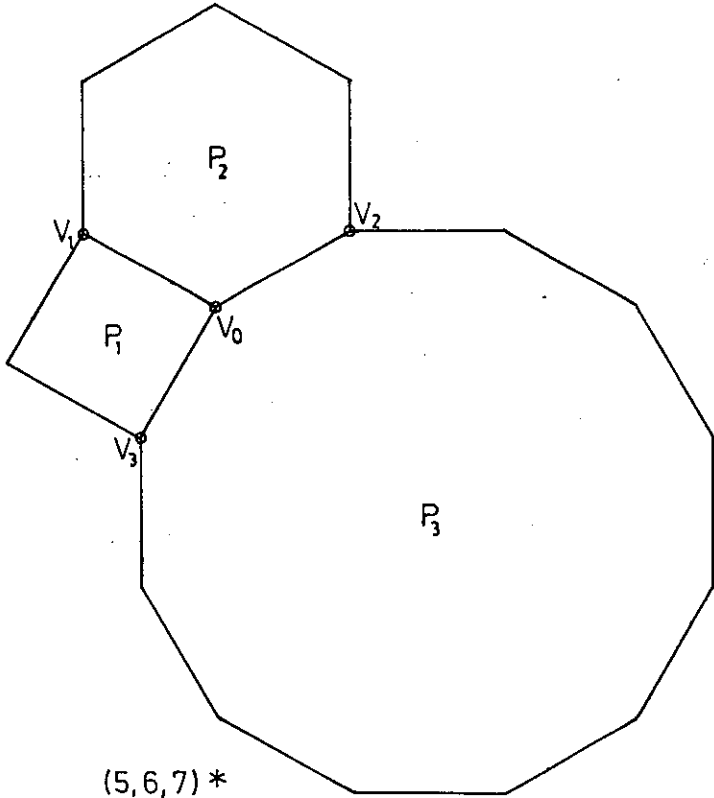
(4, 6, 10) GRID



(4, 6, 11)*

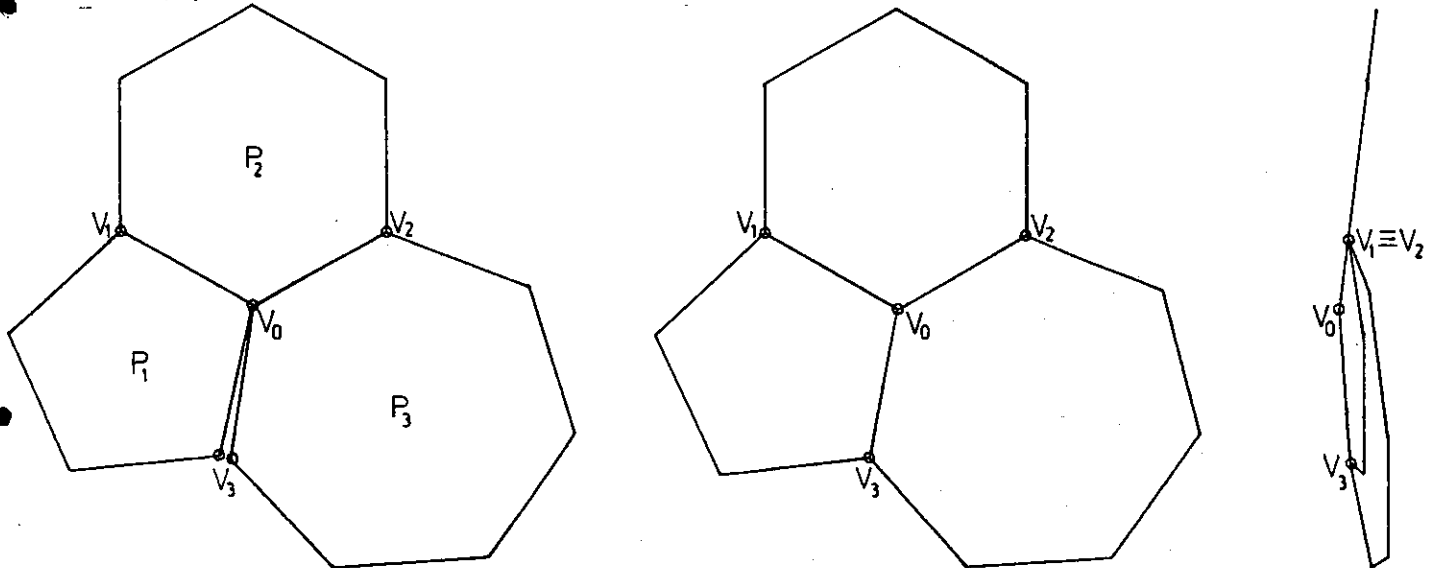


(4, 6, 12)MS



FORMA PLANA

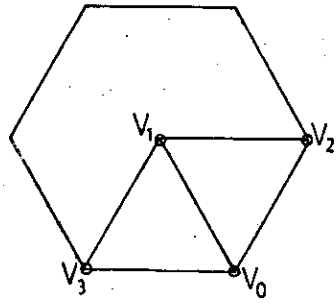
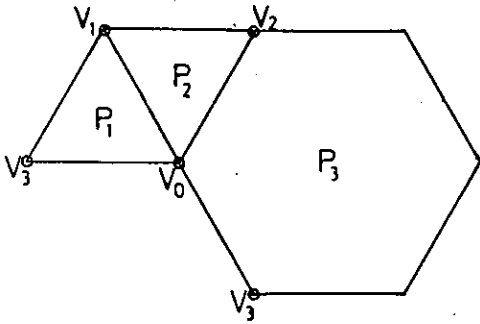
(5, 6, 7)*



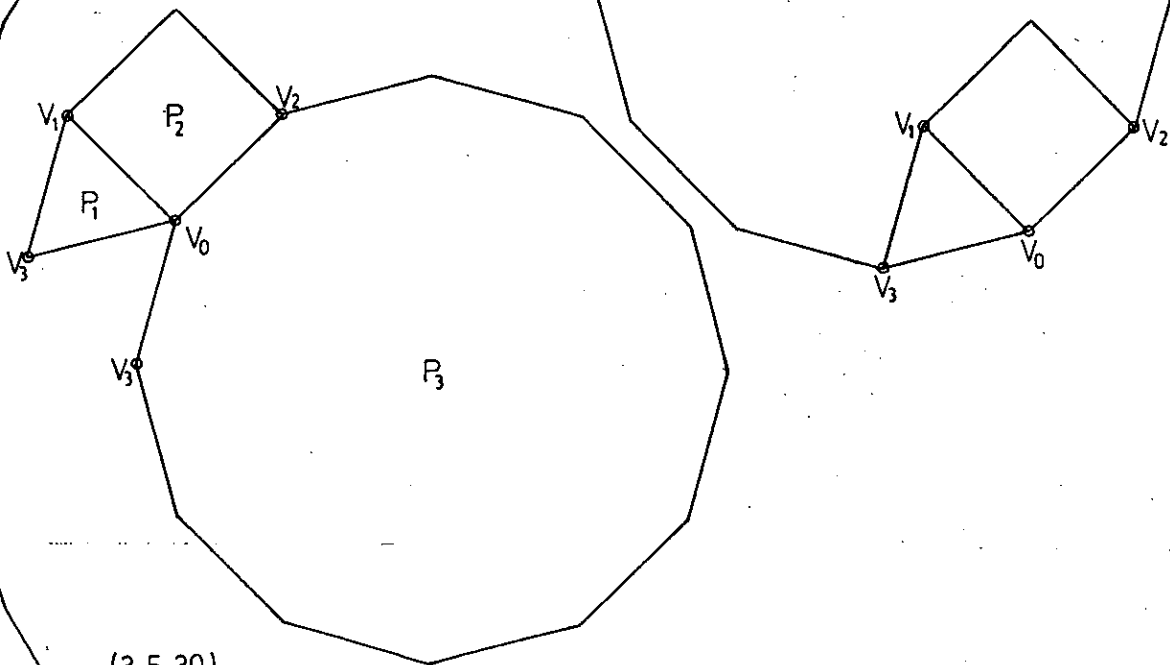
ANGULOS POLIEDROS QUE NO SEGREGAN NI CUBREN ESPACIO.

$$\epsilon_c = \epsilon_s = 0$$

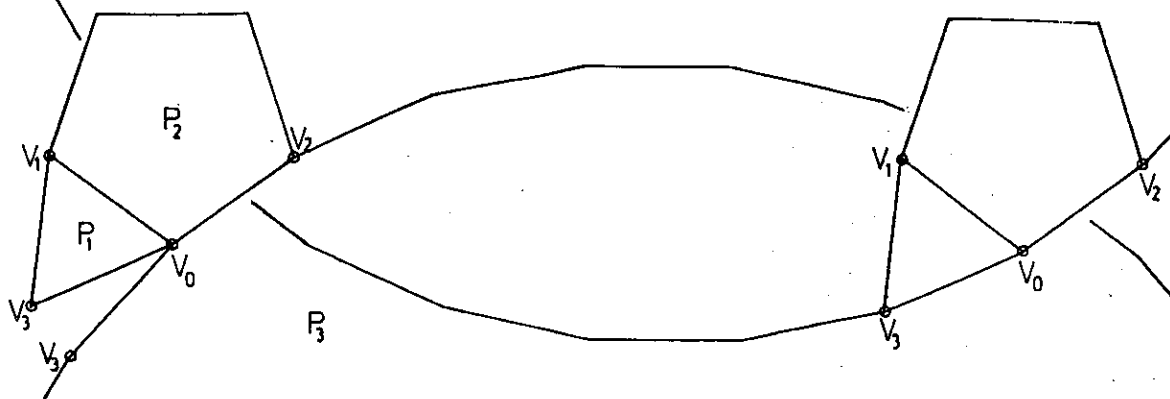
(3, 3, 6)



(3, 4, 12)



(3, 5, 30)



2. LAS REDES PLANAS

Dada una forma poliédrica plana, cualquier par de polígonos contiguos de la misma tiene en común una arista V_0V_i , $i \neq 0$. Los vértices V_0 y V_i son puntos simétricos respecto a la mediariz de V_0V_i , que constituye un eje de simetría del par de polígonos. Si disponemos en V_i polígonos simétricos, respecto a dicho eje, de los demás polígonos de la forma poliédrica, en dicho punto tendremos el vértice de una forma simétrica de la primera y con dos polígonos en común con ella, que será directamente igual si aquella era simétrica, y enantiomorfa si no lo era. Repitiendo lo mismo para todos los V_i convertiremos cada vértice en centro de una nueva forma poliédrica, directa o inversamente igual a la de vértice V_0 .

Pero habrá casos, como el del poliedro $(3, 10, 15)^*$ en que la colocación de un nuevo pentadecágono adosado a P_1 y P_2 en V_1 , que tendría en común con P_1 la arista V_1V_3 , no será posible porque en V_3 aparecería el poliedro $(3, 15, 15)$, que no puede existir porque la suma de los ángulos concurrentes superaría los 360° .

En otros casos, como el poliedro $(5, 5, 10)^*$, es perfectamente posible adosar un pentágono en V_1 otro en V_2 y otro más en V_3 , pero si intentamos adosar nuevos decágonos o pentágonos en los restantes vértices o en los nuevos que van apareciendo se hace patente que no es posible en todos los casos, por no ser simétricos los polígonos ya situados en los extremos de algunas aristas respecto a la mediatriz de la misma, condición necesaria para que pasen a formar parte las aristas contiguas a aquella de un mismo polígono regular.

Puede aún darse el caso, como ocurre en $(3, 3, 6, 6)^*$, de que sea posible repetir el poliedro en V_1 añadiendo allí dos exágonos, pero no en V_2 , donde, en cambio, es posible entonces colocar un triángulo. Pero entonces V_2 se ha convertido en vértice central de un poliedro diferente del existente en V_0 y V_1 , el $(3, 6, 3, 6)$.

En ninguno de los ejemplos anteriores es posible extender indefinidamente la red manteniendo la igualdad, directa o inversa, de todos los vértices. Son las formas irregulares que desde el principio hemos señalado con asterisco. Otras formas, como la $(4, 4, 4, 4)$, la $(3, 6, 3, 6)$ o la pareja de enantiomorfos $(4, 6, 12)$ y $(4, 12, 6)$, permiten la expansión indefinida, con vértices siempre iguales; las denominamos mosaicos, que serán regulares si son

iguales todos los polígonos y todas las aristas, y semirregulares, con dos o tres tipos de polígonos y de aristas, pero, desde luego, con un solo tipo de vértice.

2.1. LAS SIMETRÍAS DEL POLIGONO

Los polígonos regulares tienen siempre un centro de simetría por giro, del orden del número de lados del polígono. En los de número par de lados se da simetría central binaria, y no en los de número impar. Ello no es más que un caso particular de un enunciado general: un polígono pertenece a todos los grupos de simetría puntual (grupos de Leonardo) de orden dado por los divisores del número de lados. Así, un dodecágono tiene simetrías de orden 2, 3, 4, 6 y 12; por consiguiente, coincide consigo mismo al girarlo sobre su centro múltiplos de 180° , 120° , 90° , 60° , y 30° , que en definitiva lo son todos de 30° . Es decir: el dodecágono pertenece a los grupos de simetría central y del triángulo, del cuadrado y del exágono, pero no es cierta la proposición recíproca.

Como perteneciente a un grupo diedral, no sólo presenta el polígono coincidencias por giro, sino por simetría axial, con tantos ejes como número de lados tenga. Los polígonos de número impar de lados tienen un solo tipo de eje de simetría que contiene a un radio y a una apotema; los de número par de lados tienen dos tipos de ejes, conteniendo unos dos apotemas y otros dos radios opuestos (un diámetro).

2.2. SISTEMAS DE SIMETRIA

Consideremos los mosaicos regulares y semirregulares:

Regulares	Semirregulares		
(3,3,3,3,3,3)	(3,3,3,4,4)	(3,4,6,4)	(4,6,12)
(4,4,4,4)	(3,3,4,3,4)		(4,12,6)
(6,6,6)	(3,6,3,6)		
	(3,3,3,3,6)		
	(3,12,12)		
	(4,8,8)		

Podemos observar en ellos algunos datos de interés:

1º No aparecen más que polígonos de 3, 4, 6, 8 y 12 lados.

2º Los mosaicos pertenecen sólo a las siguientes combinaciones de polígonos: [3], [4], [6], [3, 4], [3,6], [3,12], [4,8], [3,4,6], [4,6,12].

Los mosaicos regulares asumen las simetrías de sus polígonos constituyentes: el centro de simetría puntual de cada polígono (P) es centro de simetría de todo el mosaico, y del mismo orden; un eje de simetría de un polígono es eje de todo el mosaico. Pero además aparecen nuevos elementos: los lados de los polígonos son ejes de simetría; los vértices (V) son centros de simetría

diedral, del orden del número de polígonos concurrentes; el centro de cada lado (L) es centro de simetría binaria.

Un mosaico regular tiene, pues, tres tipos de centro de simetría, y tres tipos de ejes. Si el poliedro de partida es $(n, n, \dots, n)_{(m \text{ veces})}$, de modo abreviado $(n)_m$, los centros serán (indicando el número entre paréntesis su orden de simetría diedral): $P(n)$, $L(2)$, $V(m)$. Los ejes serán: PL (apotema), PV (radio) y LV (lado). Como sabemos, el eje PL coincide con PV si n es impar, y podemos ver asimismo que PV coincide con LV si m es impar; en consecuencia, sólo si m y n son pares existen realmente tres tipos de ejes de simetría.

A los poliedros $(n)_m$ y $(m)_n$ los llamaremos duales.

Comparemos ahora la red del poliedro $(n)_m$ con la de $(m)_n$: en el primero tendremos los centros $P(n)$, $L(2)$, $V(m)$ y los ejes PL , PV , LV , dos de los cuales coincidirán si m o n son impares; para el segundo los centros $P'(m)$, $L'(2)$, $V'(n)$. El tipo de simetría puntual coincide para $P(n)$ y $V'(n)$, para $L(2)$ y $L'(2)$ y para $V(m)$ y $P'(m)$. Podemos intuir una correspondencia entre ambos poliedros, sin más que sustituir los centros P del primer mosaico por los vértices V' del segundo, los vértices V del primero por los centros P' del segundo y los centros de lado L del primero por los L' del segundo. Compruébese que ello es así para los tres mosaicos regulares (figura 2.1.).

El mosaico $(3)_6$ tiene como dual al $(6)_3$. Tenemos en el primero centros $P(3)$, $L(2)$ y $V(6)$, y ejes $PL=PV$ que consecutivamente pasan por la secuencia de centros $\dots VPLPVPLPV\dots$, y LV , pasando por la secuencia $\dots VLVL\dots$; en el segundo centros $V'(3)$, $L'(2)$, $P(6)$, y ejes $V'L'=V'P'$ que pasan sucesivamente por $\dots P'V'L'V'P'V'L'V'P'\dots$, y $L'P'$, que pasan por $\dots P'L'P'L'\dots$. Y la correspondencia es absoluta si vemos que $\frac{PL}{1} = \frac{LV}{1} = \frac{VP}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, y que $\frac{V'L'}{1} = \frac{L'P'}{\sqrt{3}} = \frac{P'V'}{2}$. Son las proporciones de un triángulo rectángulo mitad de un triángulo equilátero, de ángulos 30° , 60° , 90° .

El mosaico $(4)_4$ es dual de sí mismo. Si sustituimos entre sí P y V , dejando L en su lugar, obtendremos otra red de cuadrados, en la que los vértices ocupan los centros de la anterior, y viceversa, y los lados se cortan entre sí en sus mitades, L . Son centros $P(4)$, $L(2)$, $V(4)$, siendo P y V del mismo tipo, aunque con función diferente en la misma red. Los ejes PL y PV no coinciden, al ser par $n(=m)$ y habría tres tipos de ejes: PL (secuencia $\dots LPLP\dots$), PV (secuencia $\dots VPVP\dots$) y LV (secuencia $\dots VLVL\dots$), siendo, para el conjunto de ambas redes duales, equivalentes PL y LV . Quedan así dos tipos de eje $PL=LV$ y PV , y dos tipos de centro: $P(4)=V(4)$ y $L(2)$. Como es $\frac{PL}{1} = \frac{LV}{1} = \frac{PV}{\sqrt{2}}$, las proporciones del triángulo PLV son las del triángulo rectángulo isósceles, mitad de un cuadrado, de ángulos 45° , 45° , 90° .

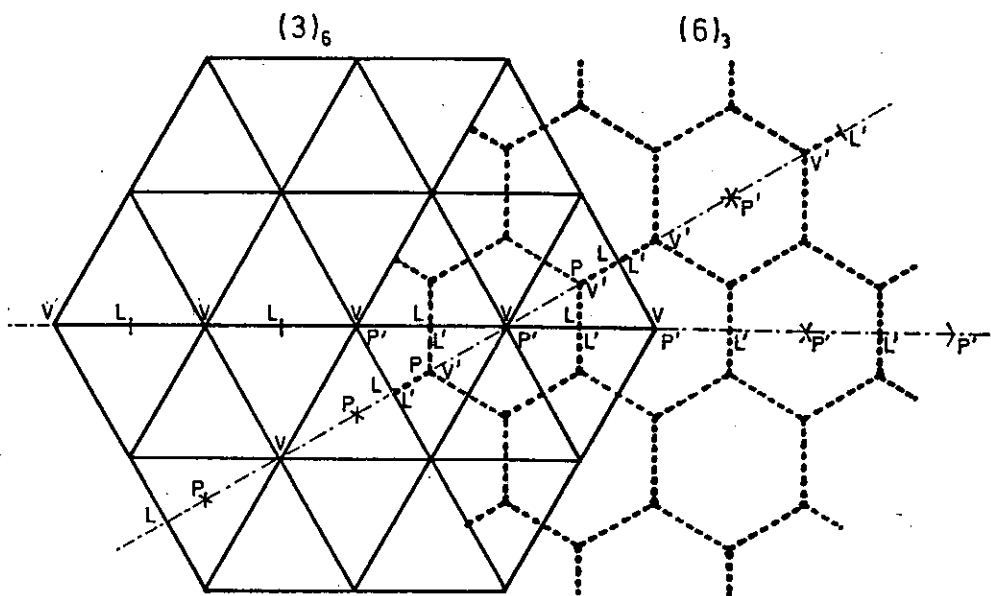


FIG 2.1.a

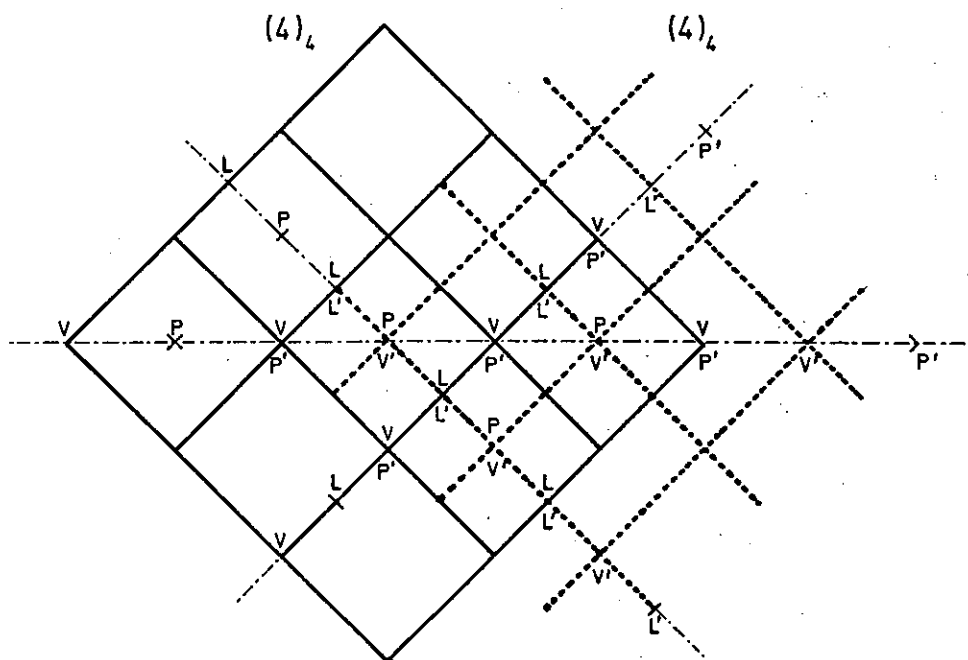


FIG 2.1.b

Tenemos, pues, en el plano, dos sistemas básicos de simetría, que comportan dos módulos triangulares PLV, correspondientes uno a la forma de la escuadra y otro a la del cartabón. Veremos que, salvo en un caso, que podemos considerar como un híbrido, también las redes semirregulares obedecen a estos módulos básicos.

2.2.1. SISTEMAS ANISOTROPOS

Llamaremos isótropa a una red cuando existan n direcciones del plano, $n > 1$, formando entre sí ángulos de $(180/n)^\circ = (\pi/n)\text{rad}$, en las que la estructura de la red tiene las mismas propiedades. Las dos redes básicas regulares triangular y cuadrada son claramente isótropas.

En cambio, el poliedro plano (3, 3, 3, 4, 4) (figura 2.2.) permite formar un mosaico compuesto por frisos sucesivos de triángulos y cuadrados, con centros P_4 y L_{44} binarios diedrales y L_{33} también binarios, pero cíclicos. Los ejes de simetría son de dos tipos, ortogonales entre sí, pero con separaciones y funciones diferentes. Unos ejes $\dots L_{34} P_4 L_{34} P_3 V L_{44} V P_3 L_{34} P_4 \dots$ sucesivamente constituidos por: paralela media de cuadrado, altura de triángulo, lado de cuadrado, altura de triángulo; y otros ejes $\dots P_4 L_{44} P_4 L_{44} \dots$, que sólo contienen paralelas medias de cuadrados. Los centros cíclicos L_{33} ocupan el centro de cada malla rectangular constituida por los centros diedrales $P_4 L_{44} P_4 L_{44}$. La proporción del rectángulo es: $\frac{P_4 L_{44} P_4 L_{44}}{1} = \frac{P_4 L_{44} P_4 L_{44}}{2 + \sqrt{3}}$.

Esta red, que no cumple la propiedad con que hemos definido la isotropía, es claramente una red anisótropa.

2.2.2. SISTEMAS ISOTROPOS

Todos los demás mosaicos semirregulares son isótropos: además, con alguna matización, responden a los dos sistemas de simetría que pueden construirse con los módulos básicos triangular y cuadrado que vimos en el apartado 2.2. Sobre un par de módulos semiequiláteros enantiomorfos se construyen los mosaicos siguientes:

(3, 6, 3, 6): utilizando como semilado de los polígonos la altura menor del triángulo $P_3 V P_6$.

(3, 12, 12): trazando la bisectriz del ángulo de 30° del triángulo $P_3 L_{12,12} P_{12}$ y siendo su intersección con el cateto opuesto V y los segmentos de perpendicular desde V a la hipotenusa y el otro cateto semilados de los polígonos.

(3, 4, 6, 4): inscribiendo un cuadrado en el triángulo $P_3 P_4 P_6$, con lados coincidentes con los catetos, los lados perpendiculares a ellos son semilados, y el vértice sobre la hipotenusa es V .

(3,3,3,4,4)

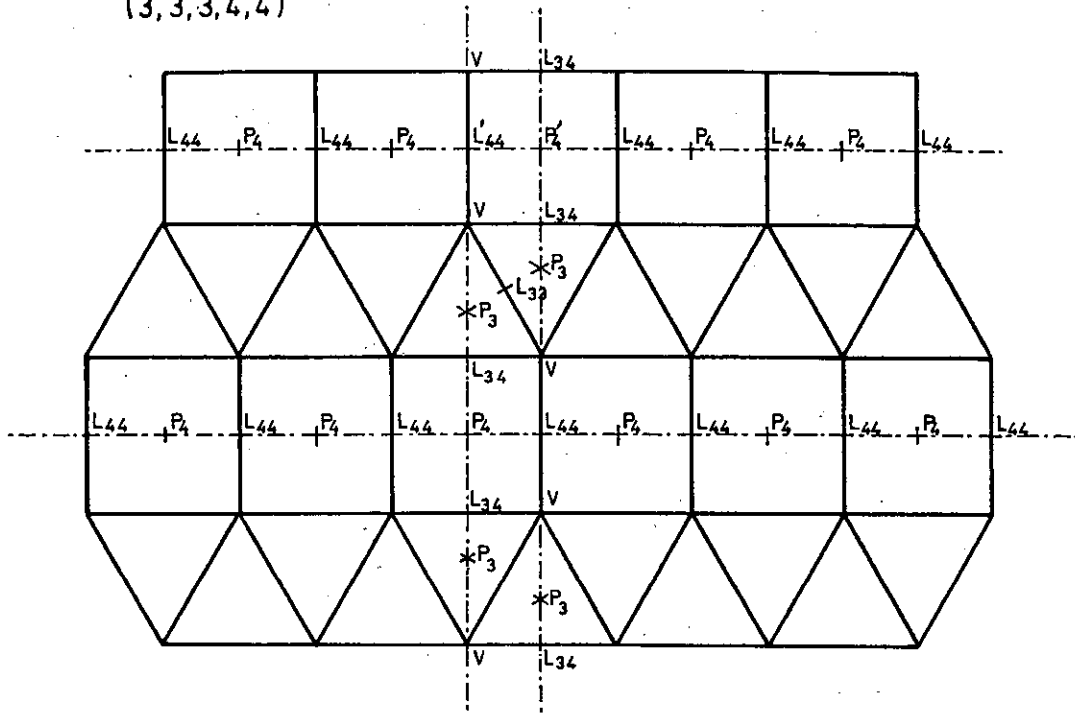


FIG 2.2.a

(3,3,4,3,4)

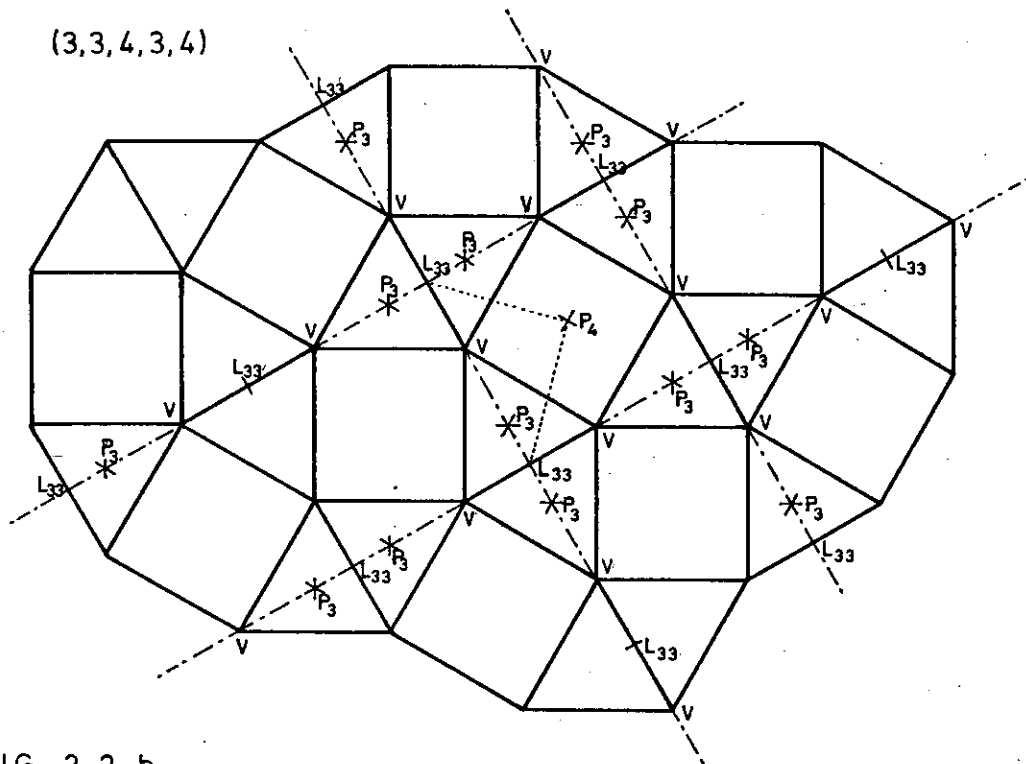


FIG 2.2.b

(4, 6, 12): el incentro del triángulo $P_4P_6P_{12}$ es V , y los radios de la circunferencia inscrita perpendiculares a sus lados son los semilados de los polígonos.

Usando un módulo equilátero completo $P_6P_3P_3$ se construye el mosaico:

(3, 3, 3, 3, 6): el vértice P_6 es centro de un exágono, y los vértices P_3 son centros de los triángulos que no tienen lados comunes con exágonos. El punto medio de dos P_3 , L_{33} , es mitad del lado común de dos triángulos limítrofes de exágonos.

Este mosaico carece de ejes de simetría, por lo que sus centros son cíclicos, no diedrales, y son: $P_6(6)$, $P_3(3)$, $L_{33}(2)$.

Existe en dos formas enantiomorfas, aunque el poliedro constituyente no lo es.

Usando un módulo semic cuadrado y su enantiomorfo se construyen los mosaicos siguientes:

(4, 8, 8): se traza la bisectriz de un ángulo de 45° ; su intersección con el cateto opuesto es V , y los segmentos de perpendicular desde V hasta la hipotenusa y el otro cateto son semilados.

(3, 3, 4, 3, 4): en el triángulo $P_4L_{33}L_{33}$, P_4 es el centro del cuadrado, L_{33} el centro del lado que separa dos triángulos.

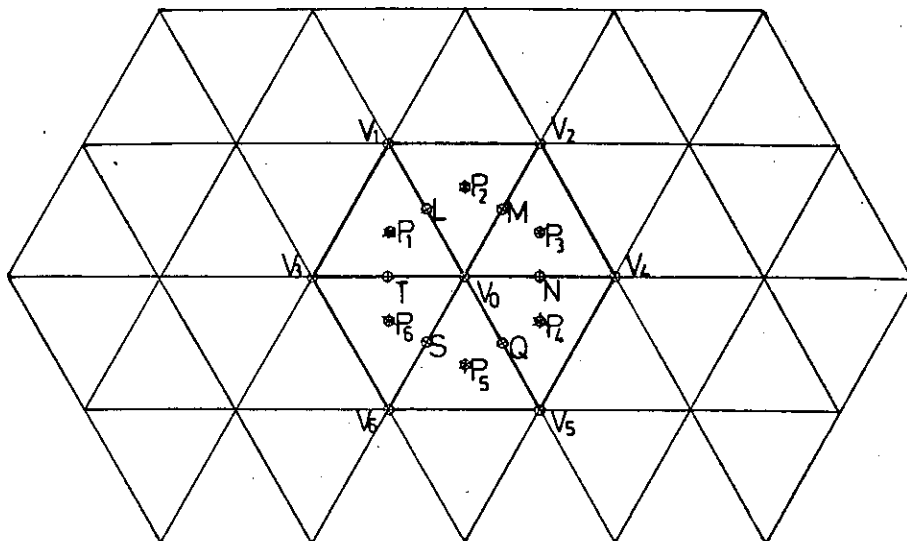
Hay un solo tipo de eje de simetría, en dos variedades ortogonales entre sí, lo que hace que sea un sistema isótropo. P_4 es un centro cíclico cuaternario, y L_{33} centro diedral binario. El eje de simetría responde a la secuencia $\dots VP_3L_{33}P_3VL_{33}VP_3\dots$, conteniendo sucesivamente un lado y dos alturas de triángulos (figura 2.2.).

2.3. MOSAICOS

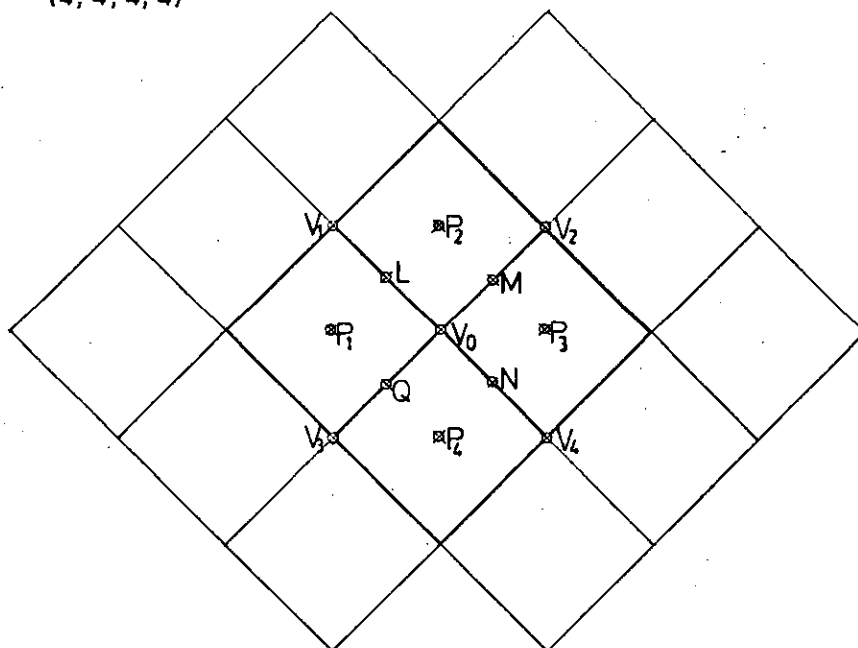
Sigue ahora la representación gráfica de los mosaicos de los que hemos hablado, acompañado cada uno de la red de ejes y centros de simetría asociados a estos mosaicos. De línea continua se indican ejes de simetría, que pasan por centros diedrales, y de trazo y punto se unen los centros cíclicos, que no contienen ejes de simetría. Se ha señalado en todas las redes un módulo para su mejor comprensión.

La notación empleada para los polígonos que rodean a un vértice es la del capítulo 1., pero en la red de ejes y centros de simetría se ha usado la seguida desde 2.2.1.: V es cualquier vértice, P_i el centro de un polígono de i lados, L_{ij} el punto medio del lado común a polígonos de i y j lados.

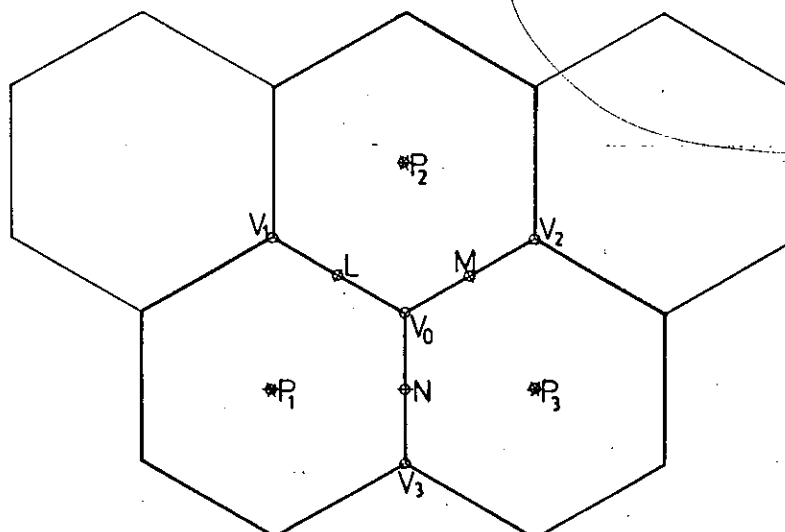
(3, 3, 3, 3, 3, 3)



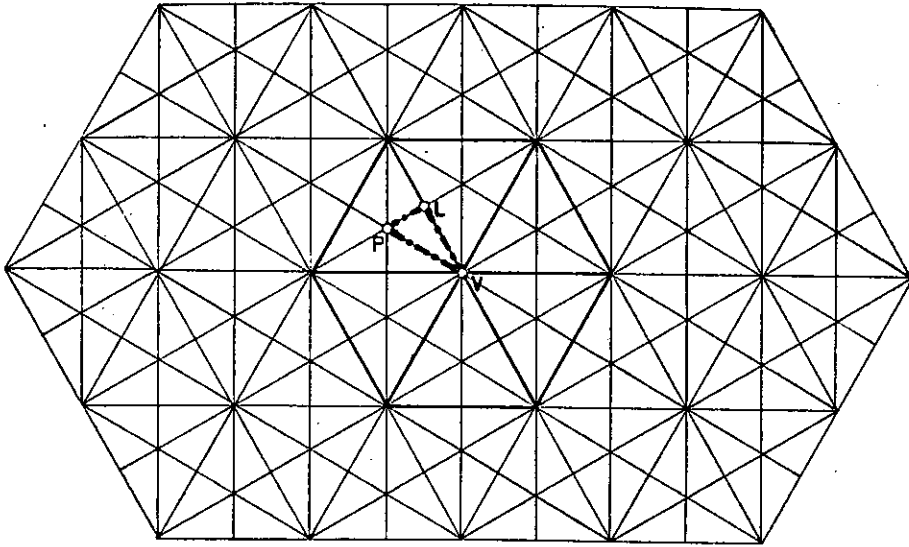
(4, 4, 4, 4)



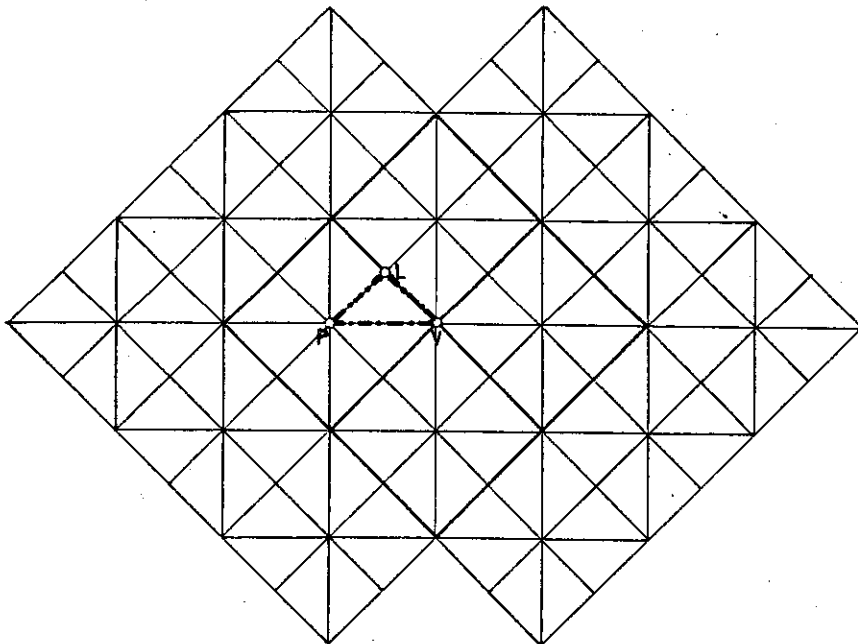
(6, 6, 6)



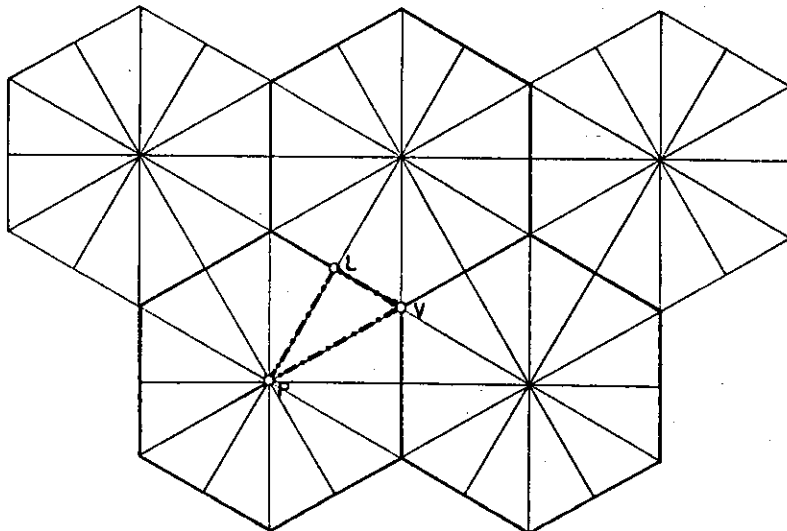
(3)₆



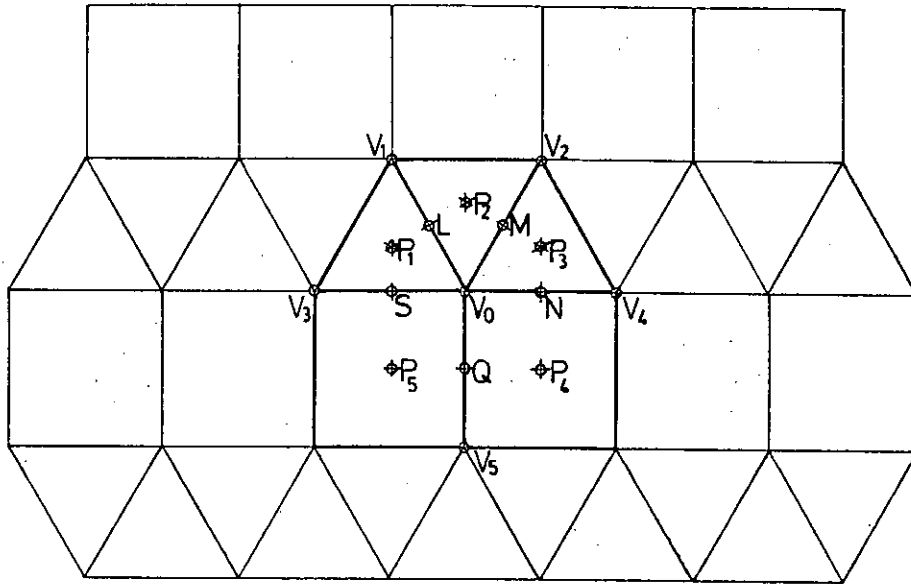
(4)₄



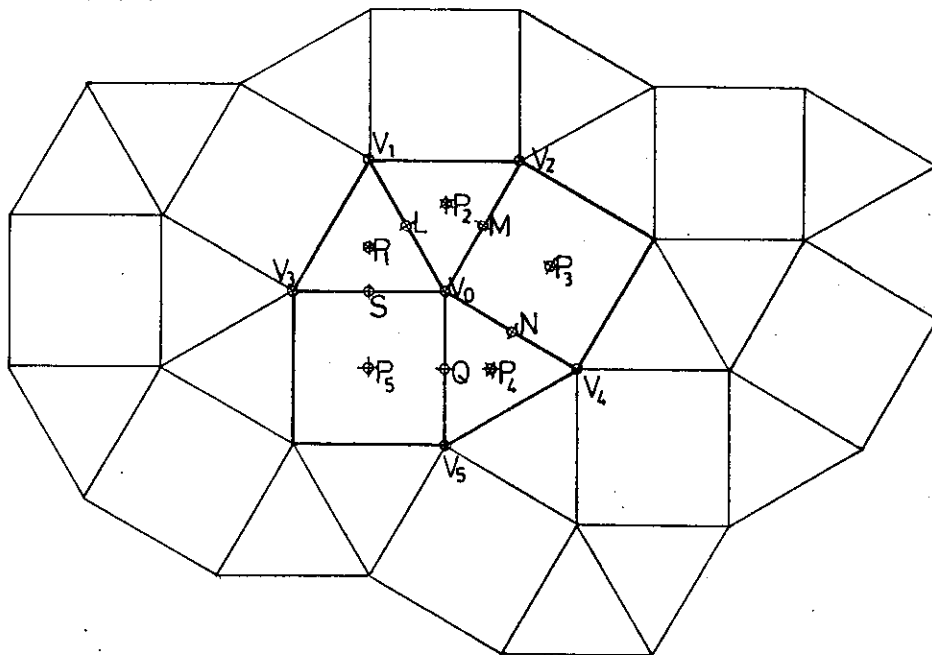
(6)₃



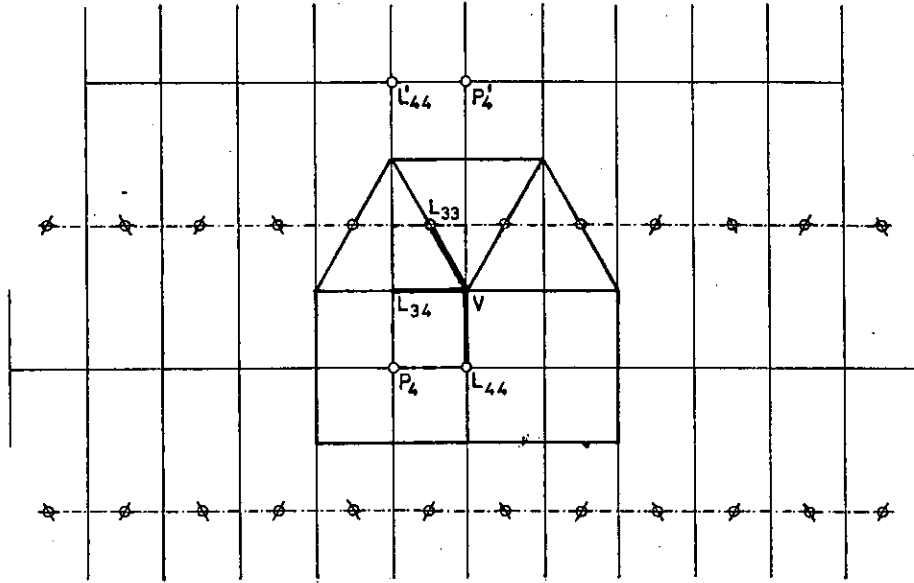
(3, 3, 3, 4, 4)



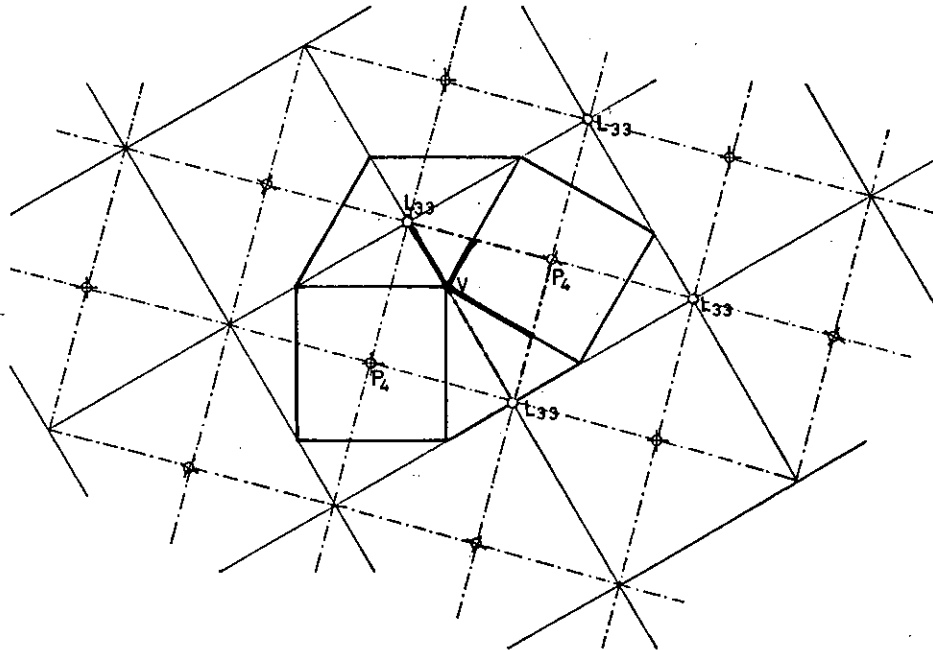
(3, 3, 4, 3, 4)



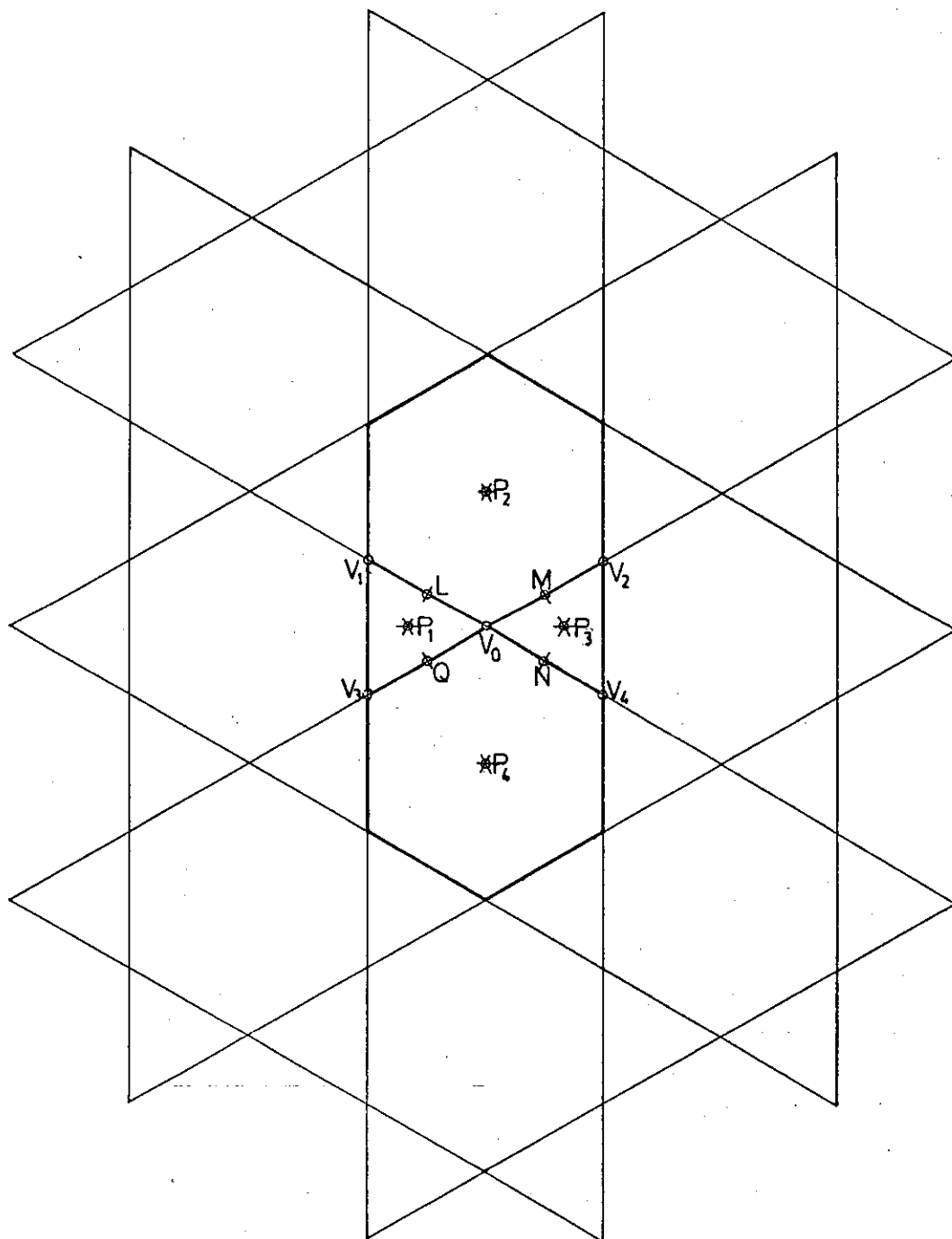
(3,3,3,4,4)



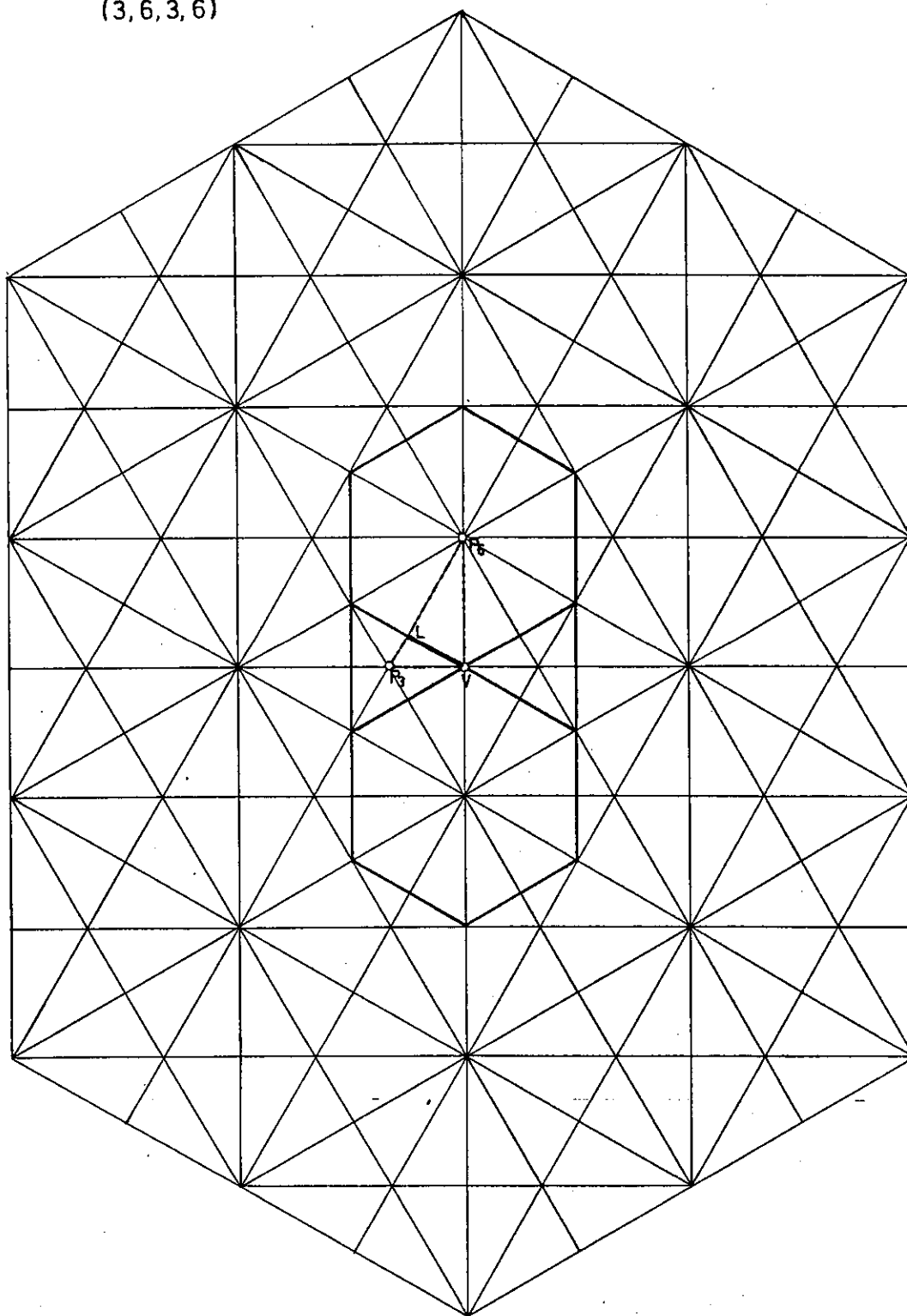
(3,3,4,3,4)



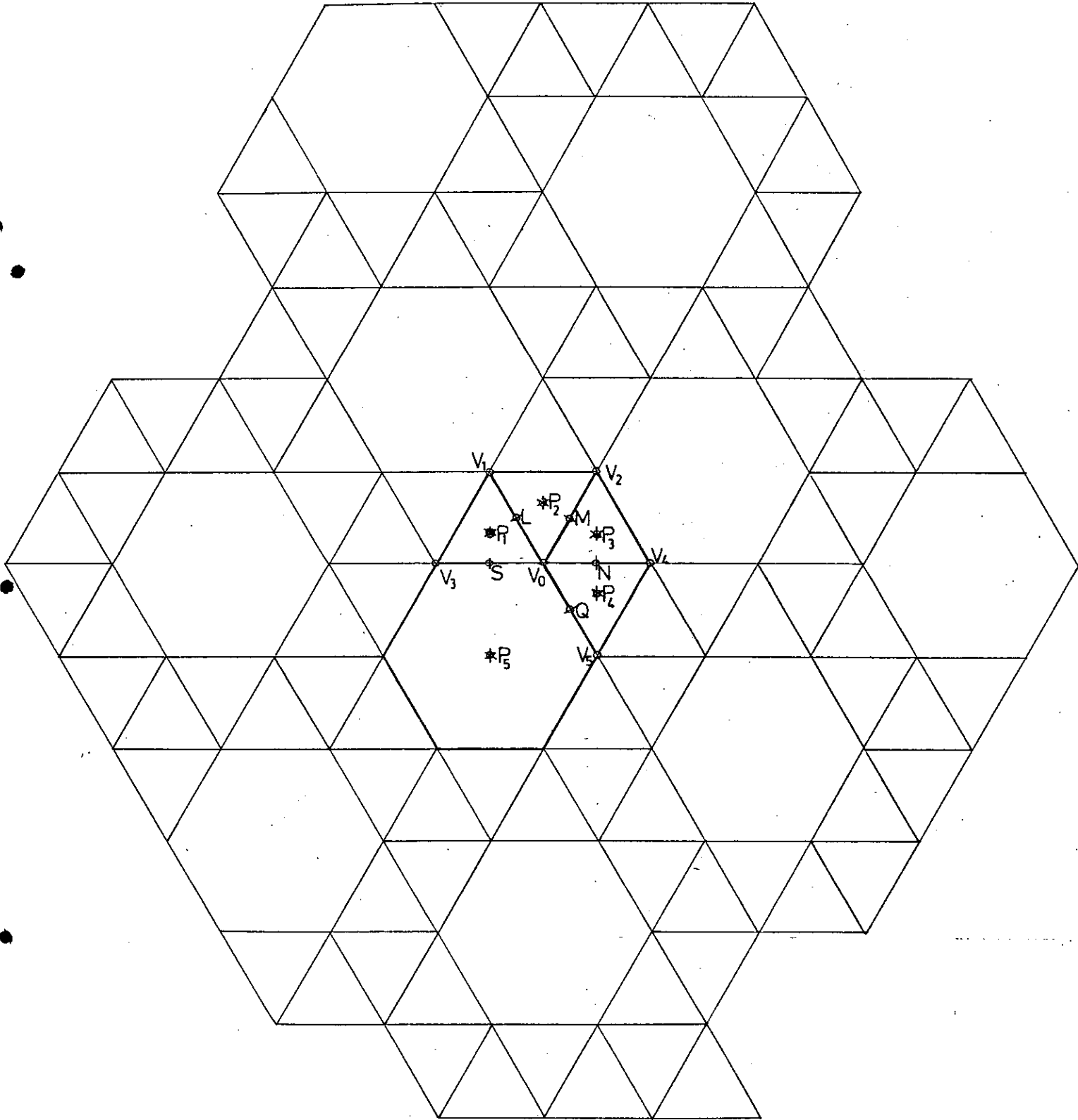
(3,6,3,6)



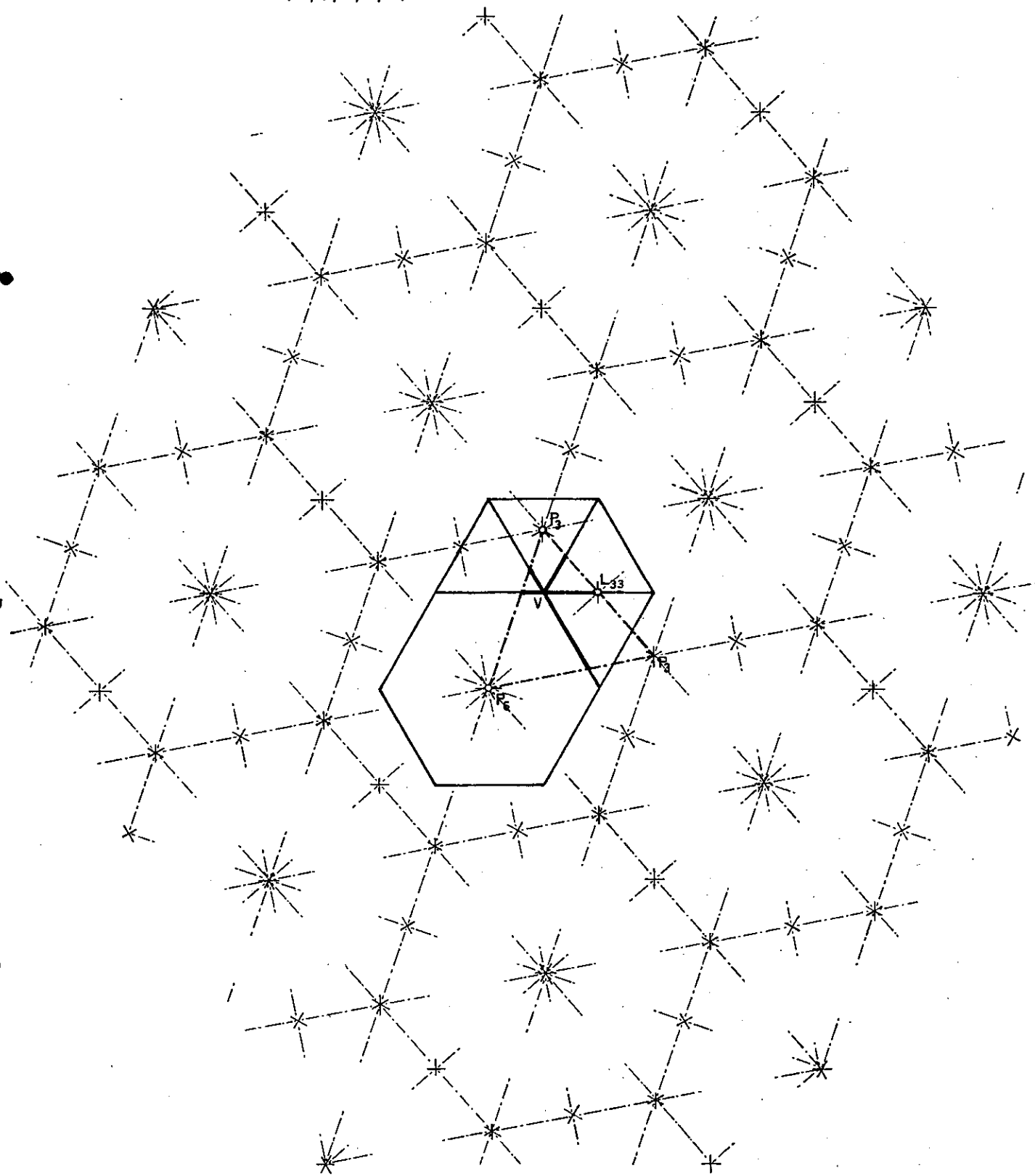
(3, 6, 3, 6)



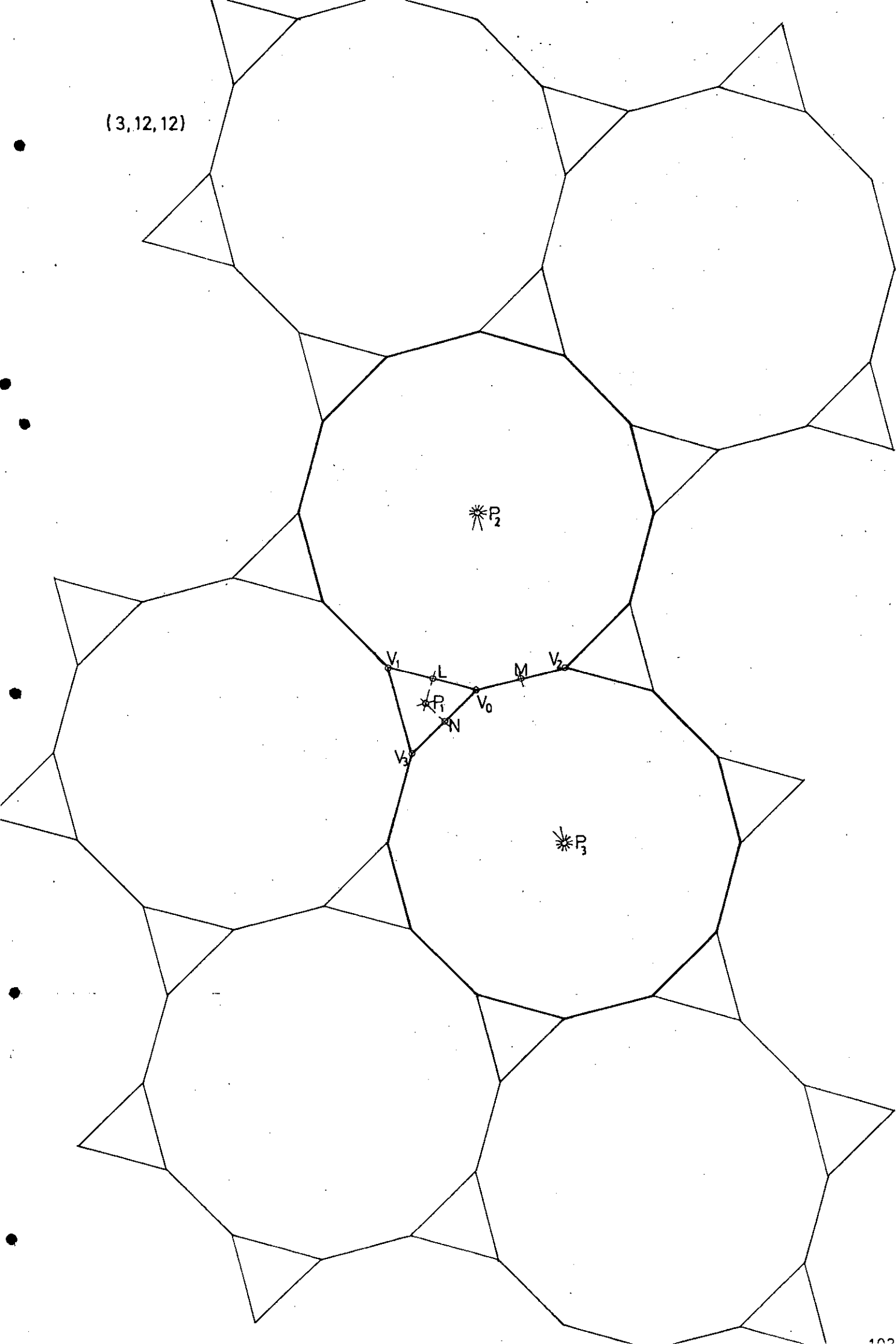
(3,3,3,3,6)



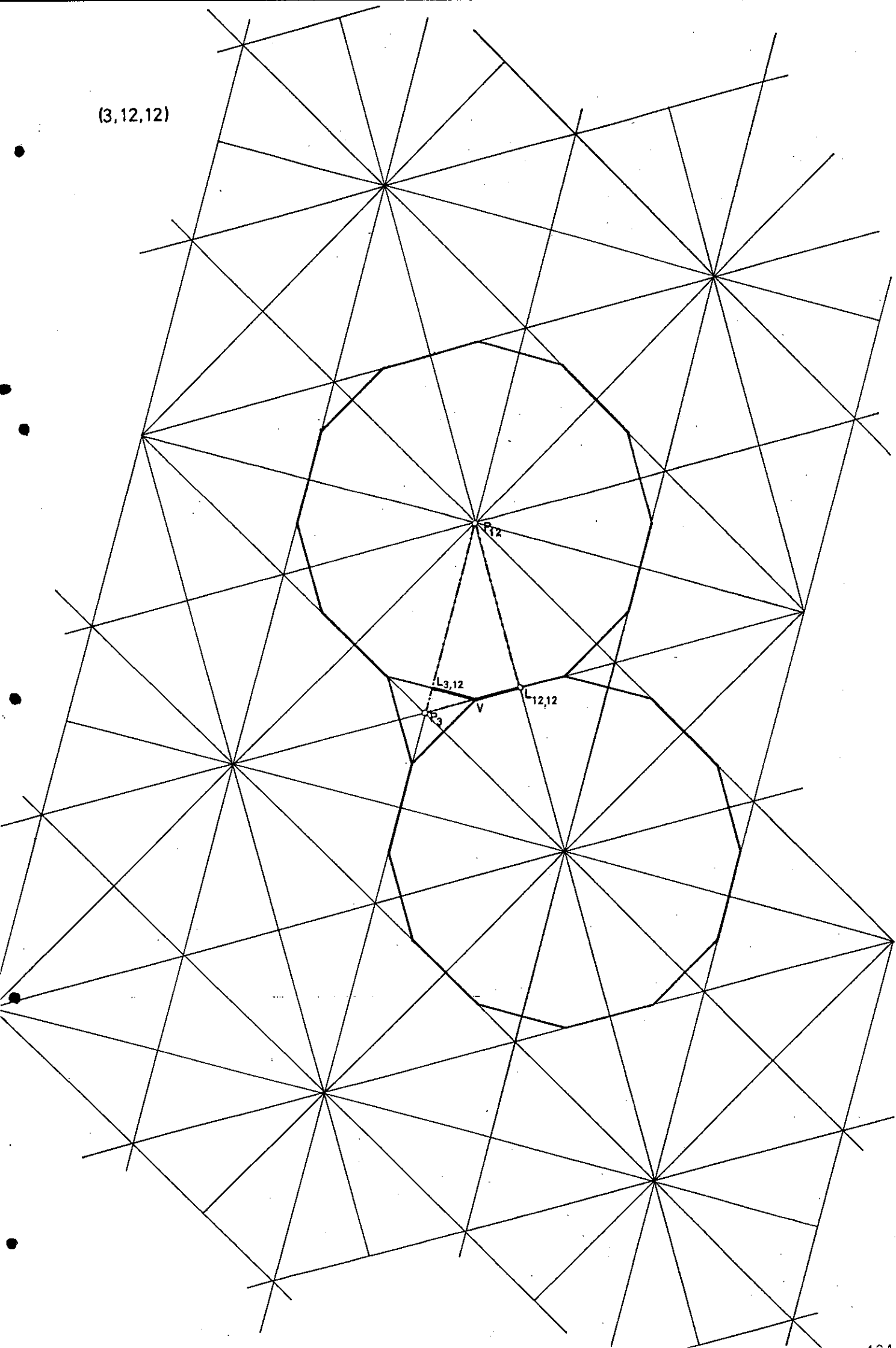
(3,3,3,3,6)



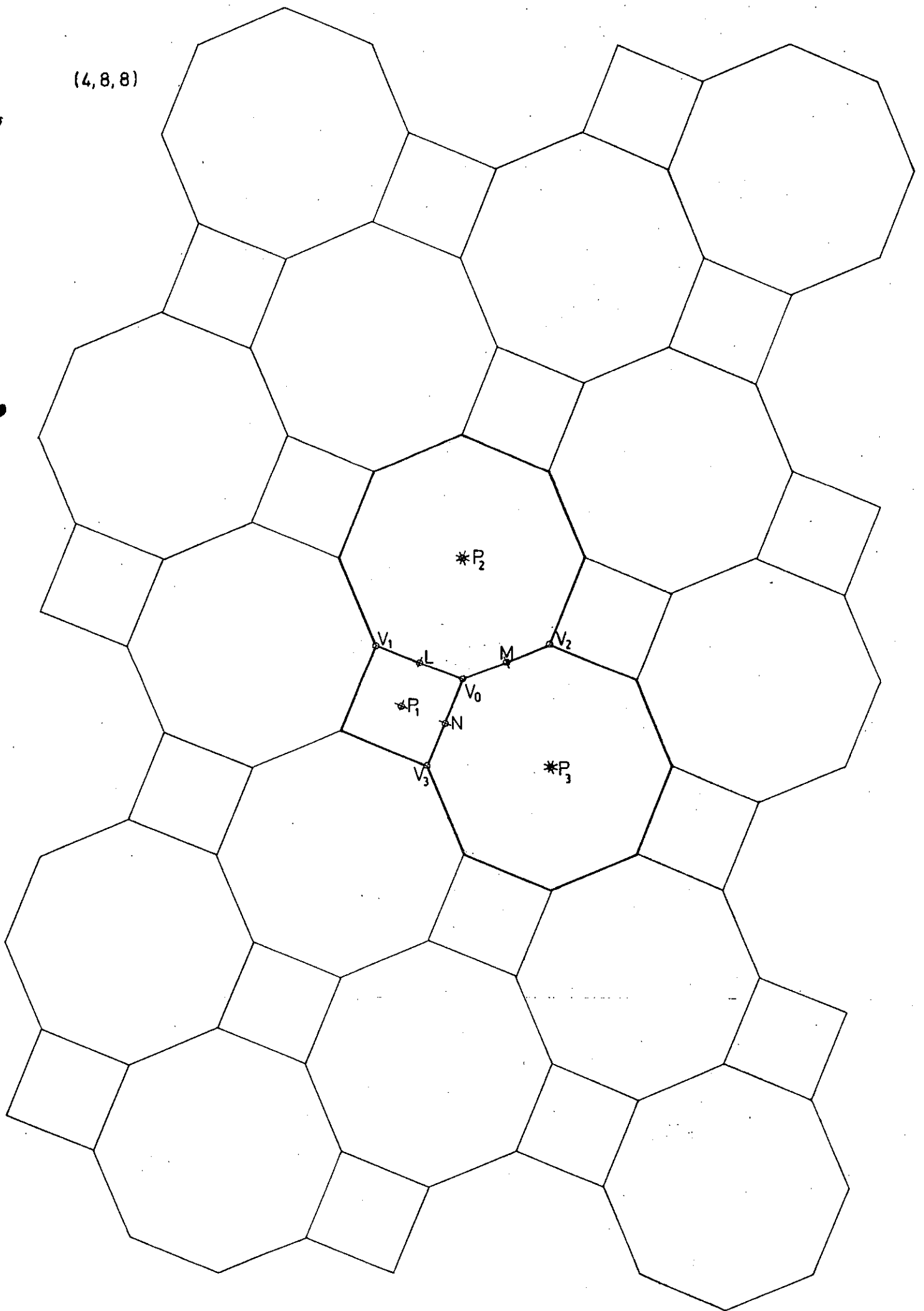
(3,12,12)



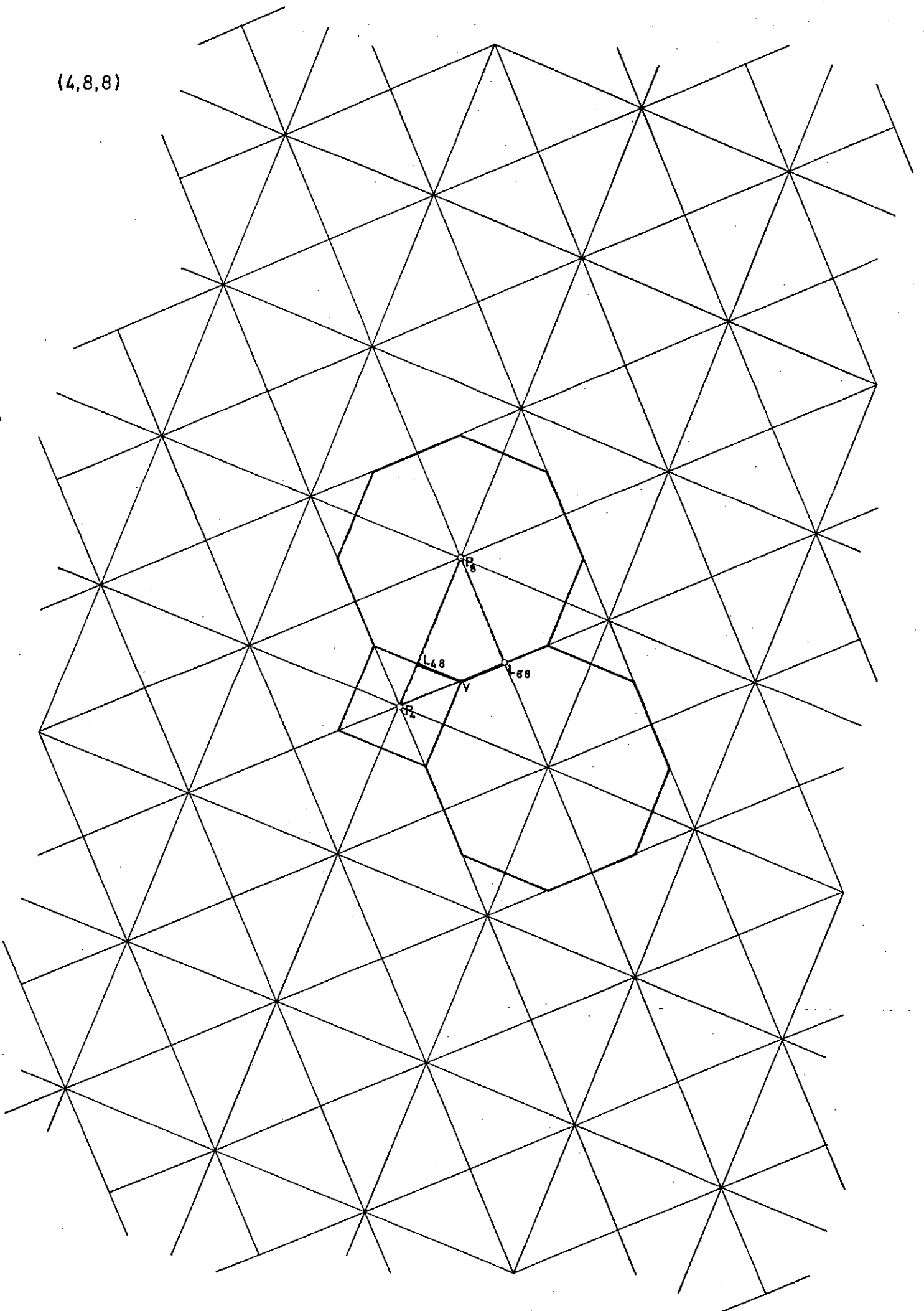
(3,12,12)



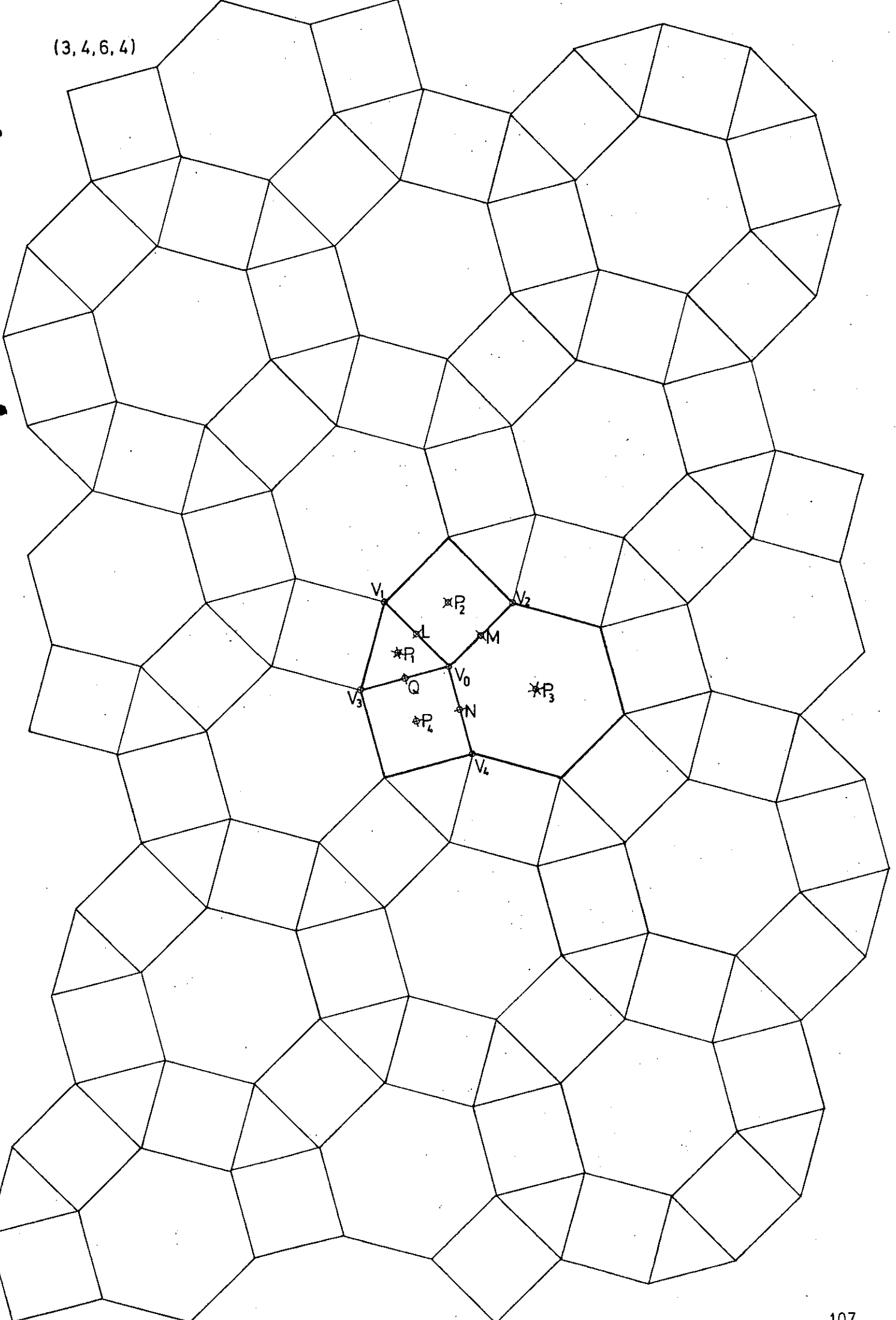
(4, 8, 8)



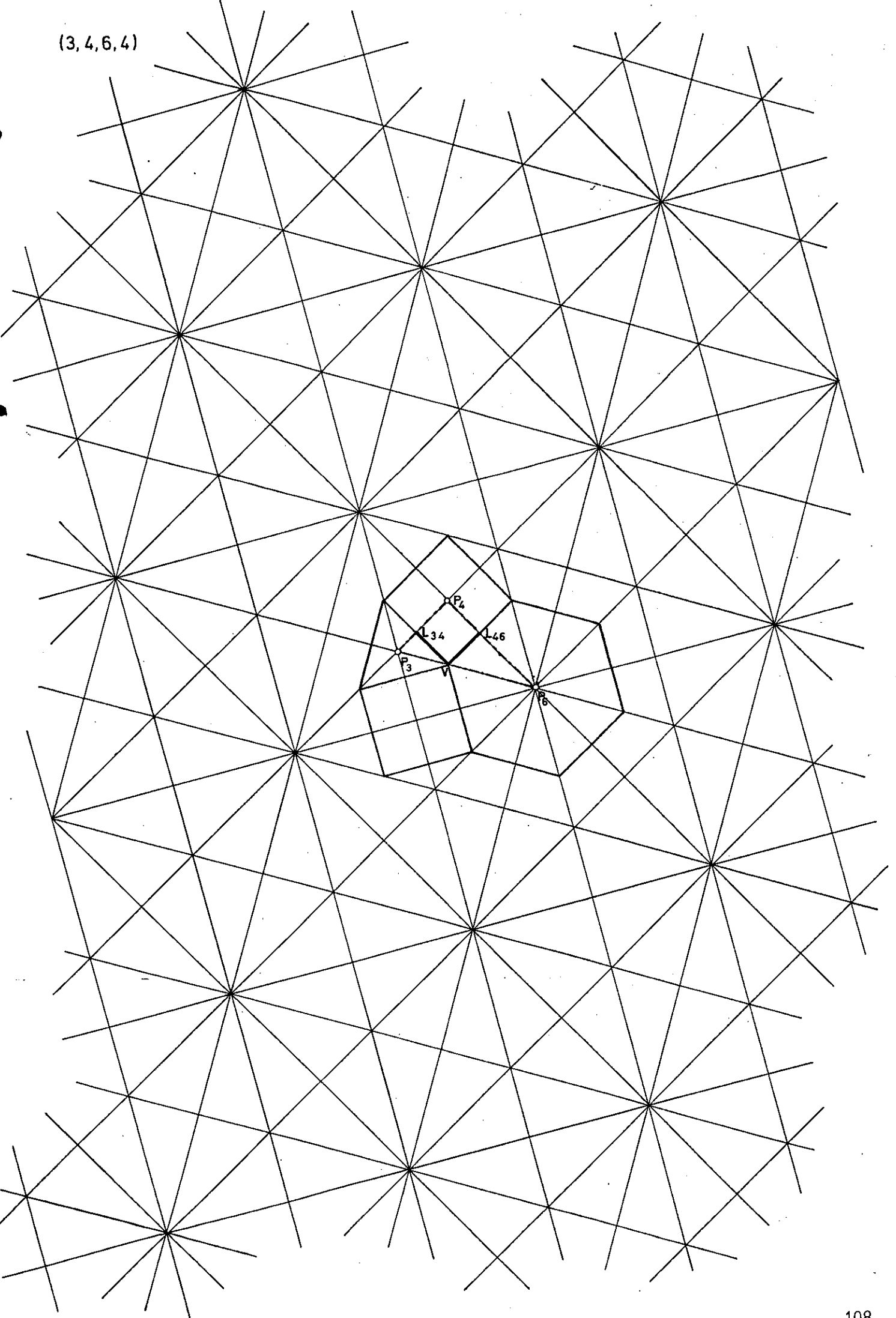
(4,8,8)



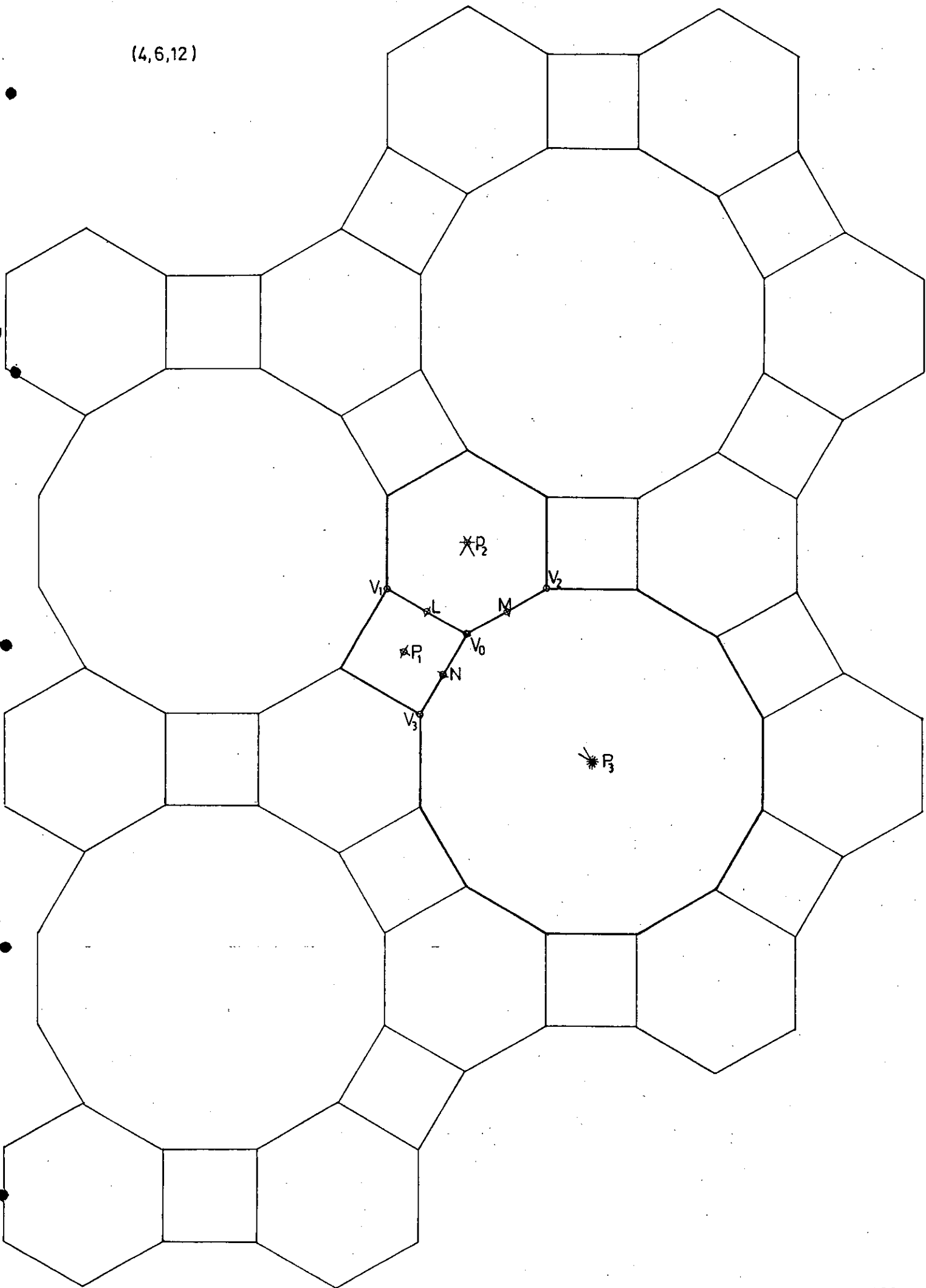
(3, 4, 6, 4)



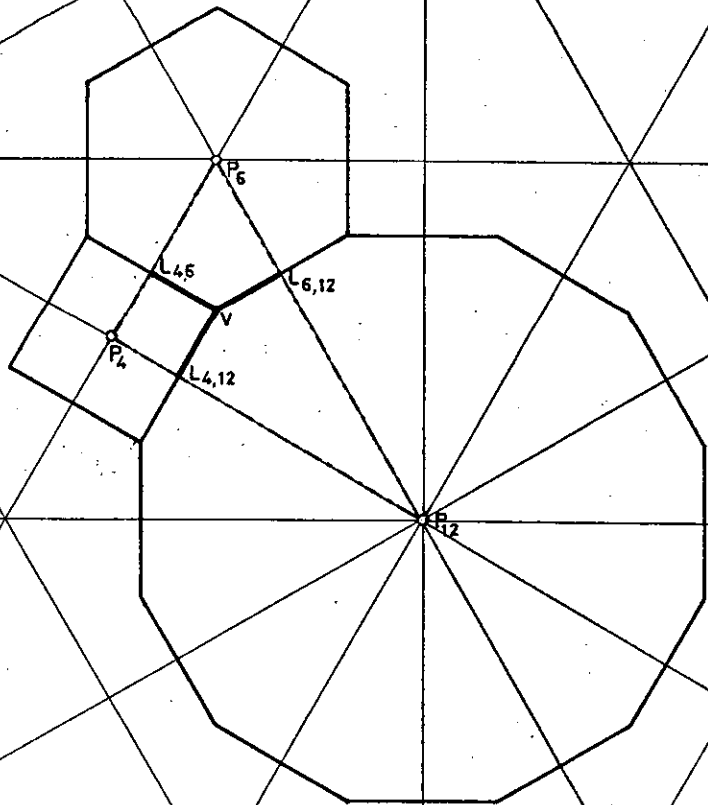
(3, 4, 6, 4)



(4,6,12)



(4, 6, 12)



3. FORMAS ABOVEDADAS

Dado un ángulo poliedro, un par de polígonos contiguos del mismo tienen una arista común V_0V_i , $i \neq 0$. Los vértices V_0 y V_i son simétricos respecto al plano medio normal a la arista (plano mediador de V_0V_i), que constituye un plano de simetría del par de polígonos. Disponiendo en V_i polígonos simétricos respecto a él de los demás polígonos del poliedro tendremos en ese punto el vértice de otro poliedro, simétrico del anterior, con el que comparte dos polígonos, que será directamente igual si aquél era simétrico, y enantiomorfo si no lo era. Repitiendo la operación en todos los V_i convertiremos cada vértice en centro de un nuevo ángulo poliedro, directa o inversamente igual al de vértice V_0 .

En algunos casos la figura obtenida, cuyos vértices se mantienen siempre sobre la esfera, no puede extenderse a menos que unos polígonos salten sobre otros, cortándose sus planos. Se trata entonces de poliedros irregulares, y son los marcados con un asterisco.

Otros ángulos poliedros permiten su multiplicación sobre la esfera, coincidiendo siempre las aristas de los polígonos vecinos hasta cubrirla totalmente ($\epsilon_c = 4\pi \text{rad}^2$). Son los poliedros regulares, si son iguales todas sus caras, y semiregulares, si tienen dos o tres tipos de polígonos.

3.1. SIMETRÍAS DEL POLIGONO EN EL ESPACIO

Además de los elementos de simetría (centro y ejes) que hemos visto en 2.1., existe otro eje, al que habíamos llamado ya eje normal, perpendicular por el centro al plano del polígono. El eje normal y cada uno de los demás ejes definen planos de simetría, y otro plano de simetría más es el del polígono, que contiene a todos los ejes, excepto el normal.

Considerado así, como poliedro regular de dos caras, coinciden sus simetrías con las de otros grupos isomorfos que veremos más adelante: los prismas.

3.2. SISTEMAS DE SIMETRÍA

Ciñámonos primeramente a los poliedros no planos, regulares y semirregulares:

Regulares:

(3,3,3)T	(3,3,3,3)O	(3,3,3,3,3)I
(4,4,4)C		
(5,5,5)D		

Semirregulares:

(3,4,4)P3	(3,3,3,4)AP4	(3,3,3,3,4)CA
(3,6,6)TT	...	(3,3,3,3,5)DA
(3,8,8)CT	(3,3,3,n)APn	
(3,10,10)DT	$n \rightarrow \infty$	
(4,4,5)P5	(3,4,3,4)CO	
...	(3,5,3,5)ID	
(4,4,n)Pn	(3,4,4,4)RCO	
$n \rightarrow \infty$	(3,4,5,4)RID	
(4,6,6)OT		
(5,6,6)IT		
(4,6,8)}	} GRCO en	
(4,8,6)}		
(4,6,10)}	} GRID en	
(4,10,6)}		

Observemos que:

- 1º Hay dos series de infinitos términos: (3,3,3,n)APn (antiprismas) y (4,4,n)Pn (prismas).
 - 2º Sólo aparecen polígonos de 3, 4, 5, 6, 8 y 10 lados, siempre que se prescinda de prismas y antiprismas.
 - 3º Prescindiendo de ambas series infinitas, los poliedros pertenecen a las siguientes combinaciones de polígonos: [3], [4], [5], [3,4], [3,5], [3,6], [3,8], [3,10], [4,6], [5,6], [3,4,5], [4,6,8], [4,6,10].
- Los poliedros regulares asumen elementos de simetría de los polígonos que los forman: en primer lugar sus ejes normales, y también los planos de simetría que contienen a estos ejes normales; aparecen, además, nuevos ejes de simetría que van del centro O de la esfera de los vértices a éstos, y de O a los centros de las aristas, L. Si el poliedro es del tipo $(n, n, \dots, n)_{(m \text{ veces})}$, abreviadamente $(n)_m$, tales ejes serán (indicando entre paréntesis su orden de simetría, siempre diedral): OP(n), OV(m) y OL(2). Los planos de simetría serán en principio de tres tipos: OPV, conteniendo el radio del polígono, OLP, conteniendo la apotema, y OLV, conteniendo el lado. Como sabemos, si n es impar coinciden en prolongación radio y apotema, y también los planos OPV y OLP, y si m es impar coinciden OPV y OLV. Sólo si m y n fuesen pares habría realmente tres tipos de planos de simetría, pero no lo son simultáneamente en ningún caso, y en consecuencia nunca hay tres

tipos de plano de simetría, mientras que pueden ser n y m impares a la vez, con la consecuencia de coincidir $OPV = OLP = OLV$, existiendo un solo tipo de plano.

De modo totalmente similar a lo visto en el plano para los centros P, V, L y los ejes PL, PV, LV , podemos concluir que los poliedros $(n)_m$ y $(m)_n$, llamados duales, tienen los mismos elementos de simetría.

El poliedro $(3)_3T$ es dual de sí mismo. Presenta los tipos de eje $OV(3)$, $OL(2)$, $OP(3)$, pero siendo P dual de V y del mismo orden hay en realidad dos tipos de eje: $P_iOV_j(3)$ y $L_iOL_j(2)$. Sus planos de simetría son del mismo tipo, pasando por la secuencia de vértices $P_iL_iP_kV_jL_jV_lP_i$. El centro del poliedro no es centro de simetría.

Los poliedros $(3)_4O$ y $(4)_3C$ son duales. Sus tipos de eje, señalando con ' los del segundo, son $OV(4) = OP'(4)$, $OL(2) = OL'(2)$, $OP(3) = OV'(3)$; de otra forma, $V_iOV_j(4) = P'_iOP'_j(4)$, $L_iOL_j(2) = L'_iOL'_j(2)$, $P_iOP_j(3) = V'_iOV'_j(3)$, manifestándose así que los elementos V_i, V_j , etc., son siempre simétricos respecto a O : El centro del poliedro es centro de simetría.

Los planos de simetría son de dos tipos: $V_iP_iL_iP_kV_jL_jV_lP_i$ = $P'_iV'_iL'_iV'_kP'_jV'_jL'_jV'_lP'_i$; $V_iL_iV_kL_jV_lV_i$ = $P'_iL'_iP'_kL'_jP'_jL'_jP'_lP'_i$. En el octaedro contiene el primer tipo radios y apotemas, y el segundo lados; en el cubo contiene el primer tipo radios y lados, y el segundo apotemas.

Finalmente, los poliedros $(3)_5I$ y $(5)_3D$, también son duales. Sus tipos de eje son $OV(5) = OP'(5)$, $OL(2) = OL'(2)$, $OP(3) = OV'(3)$; de otra forma $V_iOV_j(5) = P'_iOP'_j(5)$, $L_iOL_j(2) = L'_iOL'_j(2)$, $P_iOP_j(3) = V'_iOV'_j(3)$, con elementos V_i, V_j , etc., simétricos respecto a O , centro del poliedro que es centro de simetría.

Sólo existe un tipo de plano de simetría, que contiene aristas, radios y apotemas: $V_iP_iL_iP_kV_jL_jV_lV_i$ = $P'_iV'_iL'_iV'_kP'_jV'_jL'_jV'_lP'_i$.

La intersección de los planos de simetría con la esfera de los vértices produce círculos máximos que pasan por los correspondientes V_i , y por las proyecciones sobre la misma de los P_i, L_i . Dos planos se cortan en un eje de simetría definido por los puntos de la esfera comunes a ambos.

En las figuras 3.1., 3.2., 3.3. representamos estos planos para los tres sistemas poliédricos de simetría, del tetraedro, del cubo y del dodecaedro.

Podemos observar en estas figuras, que, al igual que en los mosaicos regulares planos, existe un elemento triangular (aquí triángulo esférico) que constituye el módulo cuya repetición permite el recubrimiento total de la esfera. Aquí el módulo es: para el sistema del tetraedro, el triángulo isósceles PLV , de ángulos $90^\circ, 60^\circ, 60^\circ$; su exceso esférico ($30^\circ = \pi/6$ rad) mide el espacio

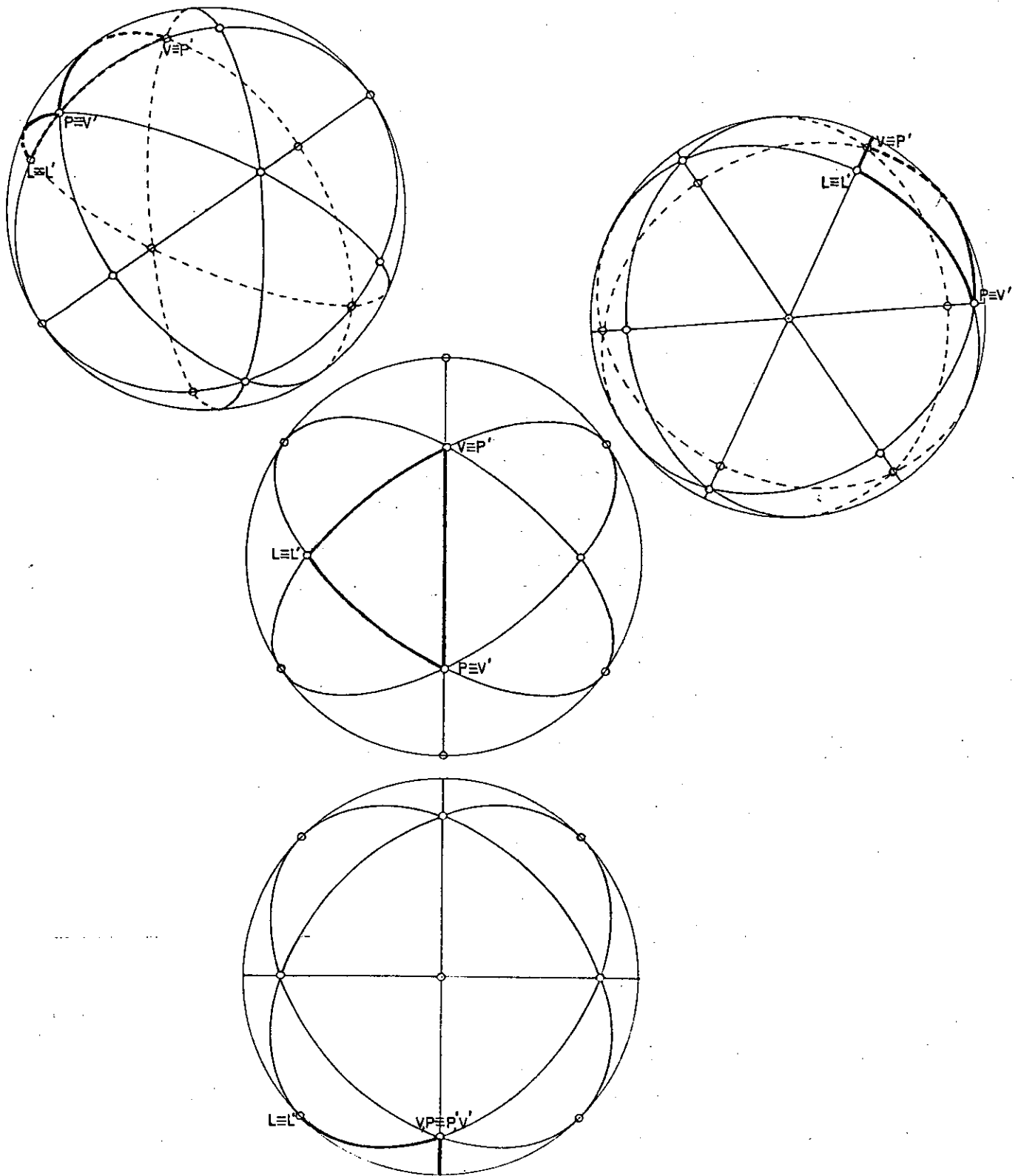


FIG 3.1.a

SISTEMA DEL TETRAEDRO
 MODULO $PLV \equiv V'L'P'$

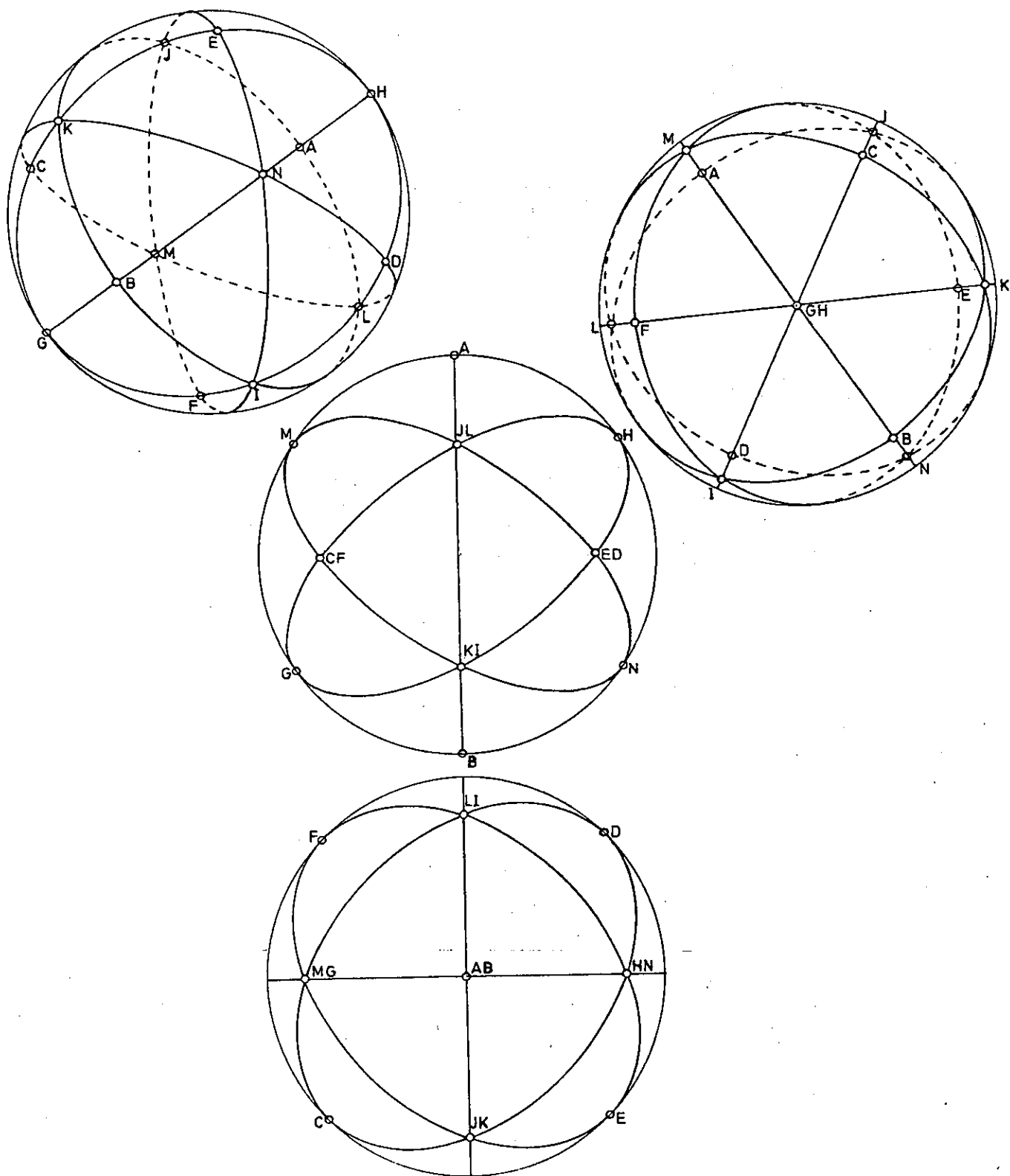


FIG 3.1.b.

SISTEMA DEL TETRAEDRO
PLANOS DE SIMETRIA

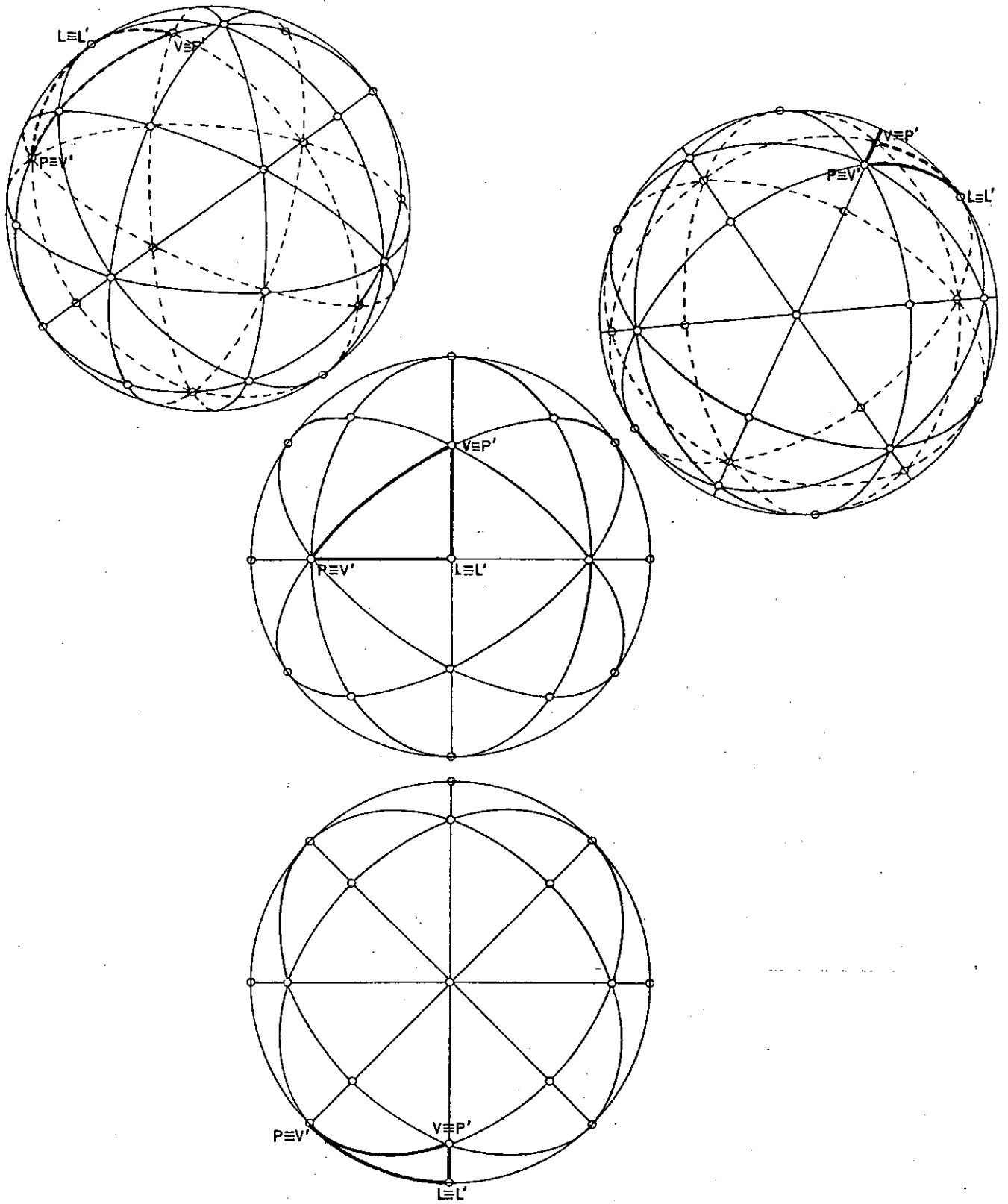


FIG 3.2.a

SISTEMA DEL CUBO
 MODULO $PLV \equiv V'L'P'$

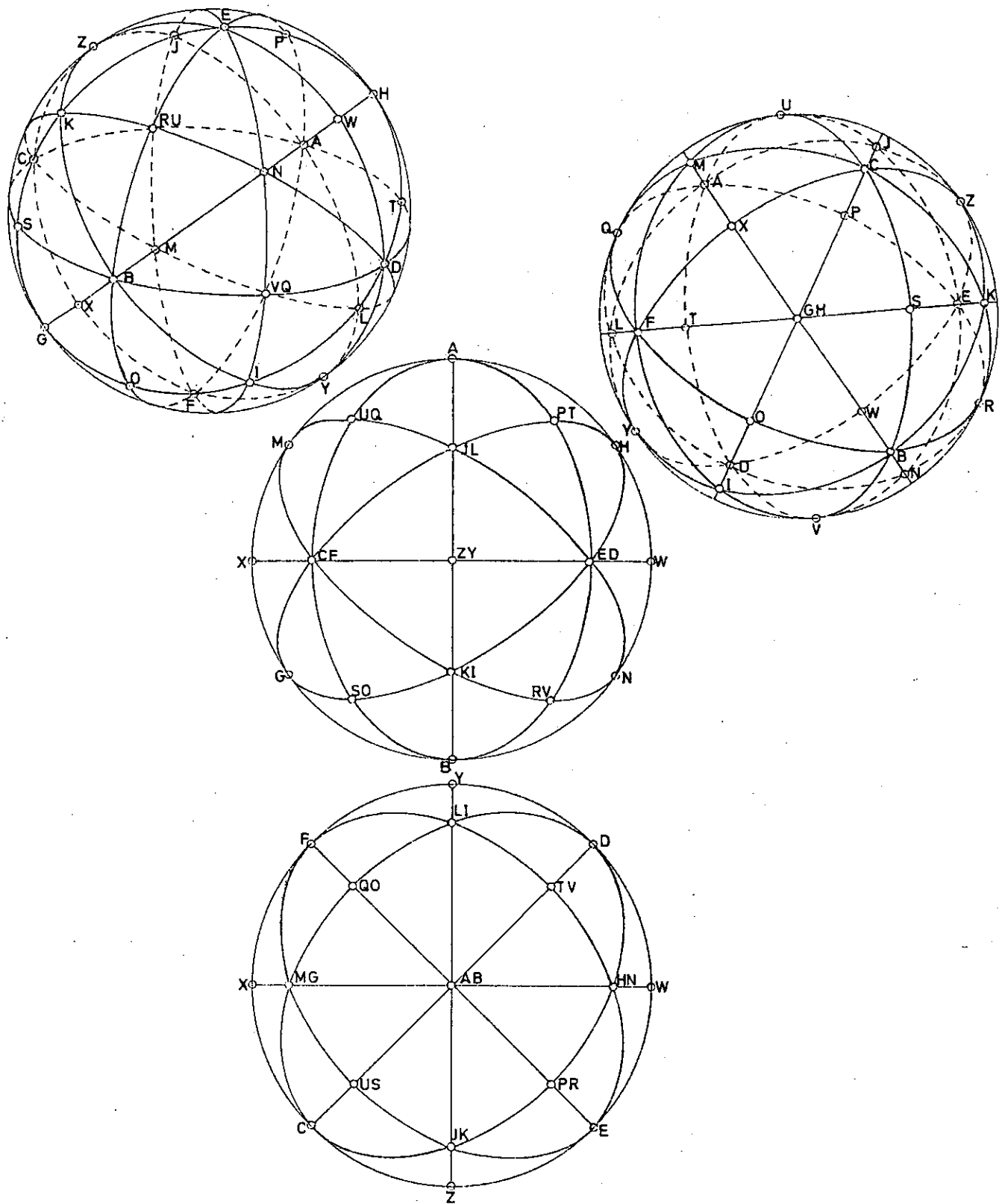


FIG 3.2.b

SISTEMA DEL CUBO
PLANOS DE SIMETRIA

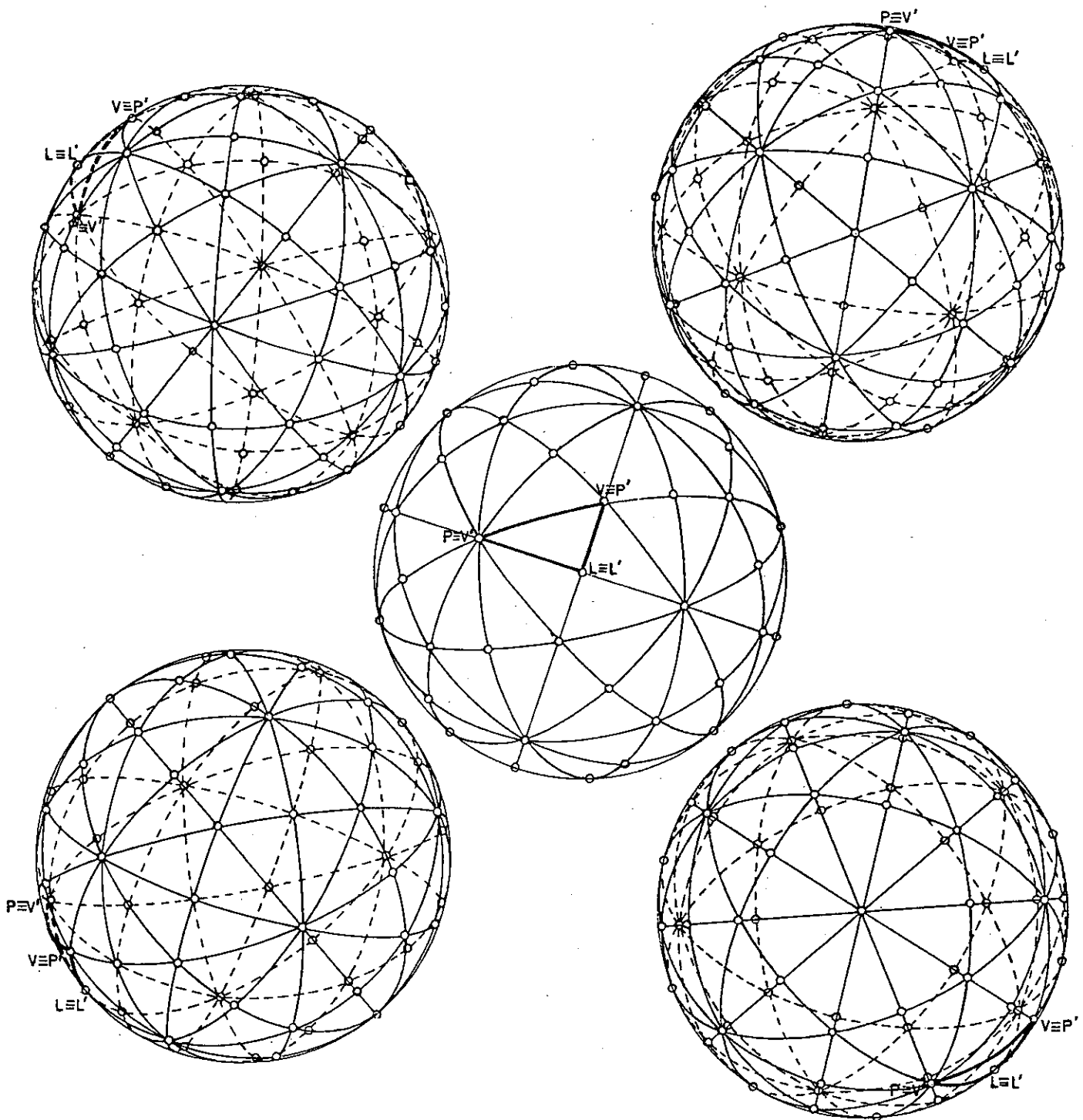


FIG 3.3.a

SISTEMA DEL DODECAEDRO
 MODULO $PLV \equiv V'L'P'$

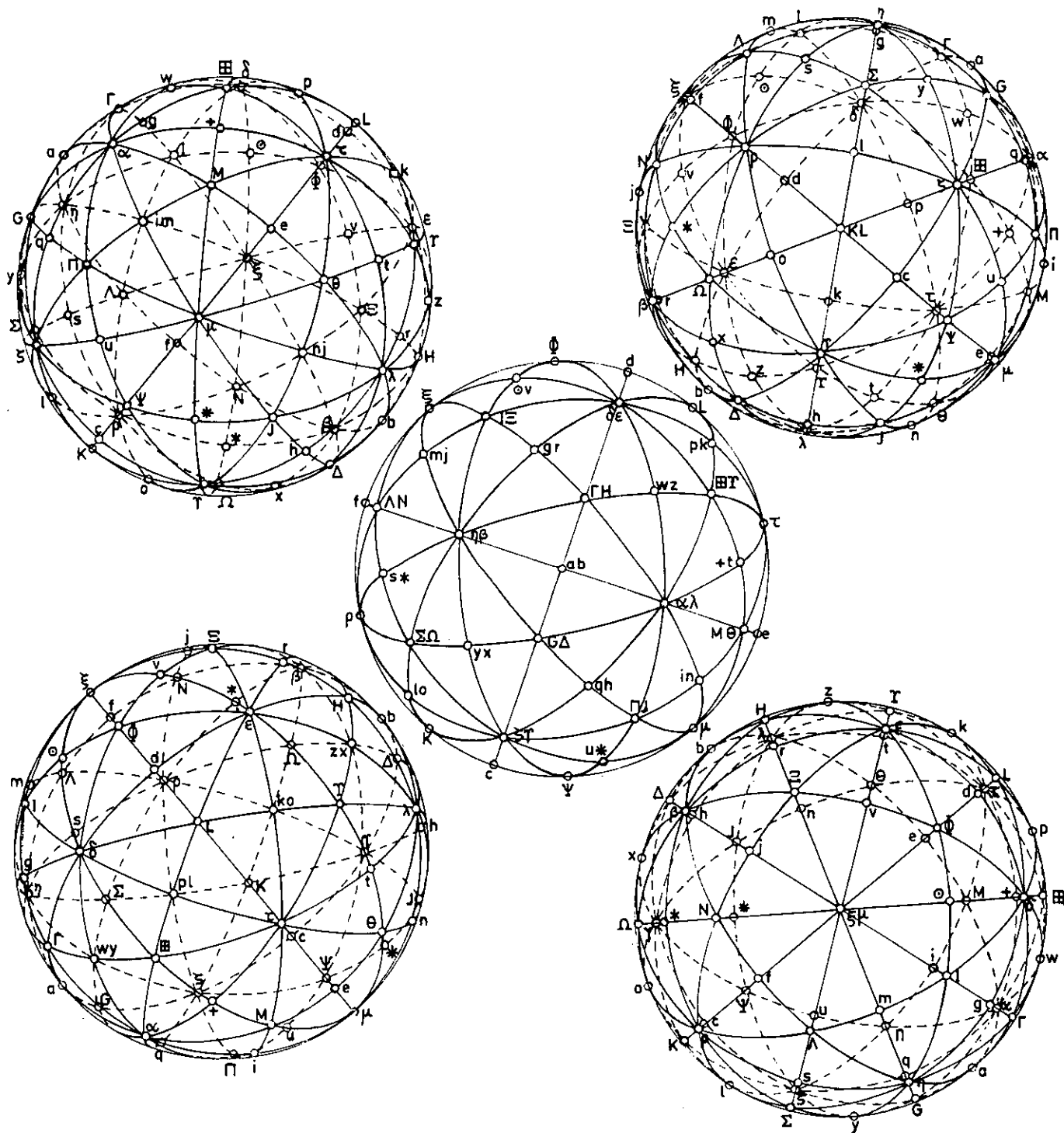


FIG 3.3. b

SISTEMA DEL DODECAEDRO
PLANOS DE SIMETRIA

cubierto por este módulo, $\pi/6 \text{ rad}^2 = 1/24 \text{ esf.}$

Para el sistema del cubo, el módulo es el triángulo PLV, de ángulos 90° , 60° , 45° ; su exceso esférico ($15^\circ = \pi/12 \text{ rad}$) corresponde a $\pi/12 \text{ rad}^2 = 1/48 \text{ esf}$ de espacio cubierto por el módulo.

En el sistema del dodecaedro, el módulo es PLV escaleno, de ángulos 90° , 60° , 36° ; exceso esférico $6^\circ = \pi/30 \text{ rad}$; espacio cubierto por el módulo $\pi/30 \text{ rad}^2 = 1/120 \text{ esf.}$

A continuación va un listado de ejes y planos de simetría, que, sobre la superficie esférica, podemos considerar como centros y círculos máximos de simetría, con lo que las formas planas del capítulo 2 son casos totalmente paralelos a éstos, salvo que en aquéllos el radio de la esfera de los vértices es $R = \infty$.

Sistema del tetraedro (figura 3.1.):

7 ejes de simetría, tres de ellos binarios: AB, CD, EF, cuatro ejes ternarios: GH, IJ, KL, MN.

6 planos de simetría: AHNBMG, AJKBIL, CGIDHJ, CKNDLM, EHLFGK, EJMFIN.

Sistema del cubo (figura 3.2.):

13 ejes de simetría, seis de ellos binarios: OP, QR, ST, UV, WX, YZ, cuatro ejes ternarios: GH, IJ, KL, MN, tres ejes cuaternarios: AB, CD, EF.

Obsérvese la coincidencia en los sistemas del tetraedro y del cubo de los ejes ternarios, mientras que los binarios del tetraedro se corresponden con los cuaternarios del cubo.

9 planos de simetría, de dos tipos:

Primer tipo, conteniendo aristas y diagonales de caras:

AHNBMG, AJKBIL, CGIDHJ, CKNDLM, EHLFGK, EJMFIN.

Segundo tipo, conteniendo paralelas medias de caras:

APERBOFQ, ATDVBCU, CXYDWEZ.

En el octaedro los planos del primer tipo contienen alturas de caras y los del segundo tipo contienen aristas.

Obsérvese que los planos del primer tipo coinciden con los del sistema del tetraedro.

Sistema del dodecaedro (figura 3.3):

31 ejes de simetría, 15 binarios, 10 ternarios y 6 quinaros:

Ejes binarios: ab, cd, ef, gh, ij, kl, mn, op, qr, st, uv, wx, yz, +*, *o.

Ejes ternarios: GH, IJ, KL, MN, ΓΔ, ΘΛ, ΞΠ, ΣΥ, ΦΨ, ΩΘ.

Ejes quinaros: αβ, γδ, εζ, ηλ, μξ, ρτ.

15 planos de simetría, todos ellos del mismo tipo:

aGzcγΔbHεddΓ, gΓαίμJhΔβjξI, mΛρογJhθτρδI, sΣζuμθtIενΞΛ, yGα+τΥzHρ*ρΣ,
cΨμετLdφξfρK, iMτκεΞjNρlςΠ, oKζααϖρLεηβΩ, uΠαωδφνΞβχγΨ, +Mμ*γΩ*NξοδΘ,
eθλβρNfΛηααM, κΥλhγKIΣηγδL, αΠμnλHrΞμηηG, wΘτλΔxQρςηΓ, *JλzeφθIηγςΨ.

En este sistema el elevado número de centros de simetría sobre la esfera agota el alfabeto, por lo que a los centros de aristas (correspondientes a ejes binarios) los hemos denotado con minúsculas latinas, completadas con los signos +, *, *, 0; a los centros quaternarios con minúsculas griegas, y a los centros ternarios con mayúsculas griegas y latinas, más el signo \boxplus . Podemos ver que los tres sistemas tienen en común los ejes ternarios GH, IJ, KL, MN, lo que corresponde al hecho de que en el dodecaedro podemos inscribir un cubo que comparta con él los correspondientes vértices y en ambos un par de tetraedros, cada uno de los cuales comparte con dodecaedro y cubo cuatro de ellos.

Asimismo se corresponden entre sí los planos de simetría del segundo tipo del sistema del cubo con algunos de los planos del sistema del dodecaedro, de igual modo que los del primer tipo coincidían con los del tetraedro, siendo la correspondencia:

$$ATDVBSCU = \varsigma \Sigma \zeta \mu \theta \tau \Upsilon \epsilon \nu \xi \Lambda$$

$$CXFYDWEZ = \upsilon \Pi \alpha \omega \delta \phi \nu \Xi \beta \chi \gamma \Psi$$

$$APERBOFQ = \omega \boxplus \tau \lambda \Delta \chi \Omega \rho \sigma \eta \Gamma$$

Queda de este modo clara la relación que guardan entre sí los tres sistemas. De los quince planos de simetría del dodecaedro o del icosaedro puede establecerse una correspondencia a los tres planos del segundo tipo de cinco cubos u octaedros. De los cuatro planos del primer tipo del cubo u octaedro, a los cuatro planos que comparten dos tetraedros duales entre sí. En sentido inverso un tetraedro se relaciona con un solo cubo, u octaedro, mientras un cubo u octaedro se relaciona con dos dodecaedros o dos icosaedros. Un dodecaedro o icosaedro tiene asimismo relación con cinco tetraedros; y cada tetraedro con dos dodecaedros o icosaedros.

Adjuntamos una tabla de los poliedros regulares en que se resume lo anteriormente dicho:

n	m	Poliedro	Caras	Aristas	Vértices	Centro de simetría	Ejes de simetría				Planos de simetría	
							II	III	IV	V	I	II
3	3	(3) ₃ T	4	6	4	no	3	4			6	
4	3	(4) ₃ C	6	12	8	sí	6	4	3		6	3
3	4	(3) ₄ O	8	12	6	sí	6	4	3		6	3
5	3	(5) ₃ D	12	30	20	sí	15	10		6	15	
3	5	(3) ₅ I	20	30	12	sí	15	10		6	15	

3.2.1. SISTEMAS ANISOTROPOS

Como vimos en 3.1., el polígono de n lados, en el espacio, tiene n ejes de simetría diedral binaria en su plano y otro eje, el normal, cortándose todos ellos en el centro del polígono, centro a su vez de una esfera circunscrita. Cada dos ejes determinan un plano de simetría.

Todos estos ejes, y el centro, los encontramos en la serie de poliedros semi-irregulares $(4, 4, n)P_n$, prisma de n caras laterales cuadradas y bases de n lados. centro O , eje normal n -ario P_nOP_n , y n ejes binarios perpendiculares al mismo, iguales P_4OL_4 si n es impar, y de dos tipos, P_4OP_4 , L_4OL_4 para n par.

Podemos definir una figura (o red) en el espacio como isótropa si existen m ejes, $m \geq 4$, en cuya dirección la figura (o red) presenta las mismas propiedades, y cada eje forma con l de los restantes ($l \geq 3$) ejes contiguos un mismo ángulo, menor que los que forma con los $m-l-1$ restantes. En caso contrario la red es anisótropa.

Los prismas que acabamos de ver no cumplen la definición propuesta: uno solo de los ejes, el normal, corta en su centro a dos n -gonos; el resto, a dos cuadrados. El eje normal es único, y forma ángulo recto con todos los demás; los demás ejes tienen cada uno dos ejes contiguos con ángulos iguales. La serie de los prismas la hemos comenzado con el elemento $(4, 4, 5)P_5$, pero de hecho incluye el $(3, 4, 4)P_3$; podemos considerar como prisma al poliedro regular $(4)_3C = (4, 4, 4)P_4$, pero su sistema es isótropo, porque en él cualquier eje P_iOP_j es normal.

La serie poliédrica semirregular $(3, 3, 3, n)AP_n$, antiprismas de $2n$ caras laterales, tiene asimismo centro O , eje normal diedral n -ario y n ejes binarios en un plano perpendicular al eje normal, pero éstos, a diferencia de los prismas, son ejes cíclicos, no diedrales, por lo que el plano que los contiene no es de simetría. El eje normal es P_nOP_n , y los ejes cíclicos, todos iguales, responden al trazado $L_{33}OL_{33}$.

La serie $(3, 3, 3, n)$ la hemos comenzado en $(3, 3, 3, 4)AP_4$, pero podemos considerar como antiprisma al poliedro regular $(3)_4O = (3, 3, 3, 3)AP_3$, pero que pertenece a un sistema isótropo, y en él cualquier eje P_iOP_j es normal. Ambas series son infinitas. Cuando $n \rightarrow \infty$, el radio de la esfera de los vértices crece indefinidamente, y las caras laterales tienden a formar franjas planas infinitas, de cuadrados en un caso y de triángulos en el otro, como las que existían en el sistema anisótropo plano $(3, 3, 3, 4, 4)$, emparentado con ambos (véase 2.2.1.).

3.2.2. SISTEMAS ISOTROPOS

Los demás poliedros semirregulares son isótopos, y, como ocurría en el plano (véase 2.2.2.), sus simetrías se corresponden esencialmente con los tres sistemas regulares estudiados en el apartado 3.2.

Para ver mejor el paralelismo con las formas planas, estudiaremos las proyecciones de los poliedros sobre la esfera de los vértices, sustituyendo las aristas por líneas geodésicas (arcos de círculo máximo).

Sistema del tetraedro:

El módulo básico es el triángulo rectángulo isósceles esférico PLV de ángulos 90° , 60° , 60° .

(3, 6, 6)TT: trazando el círculo máximo bisector de un ángulo de 60° se obtiene V como intersección con el lado opuesto, y mediante arcos de círculo máximo perpendiculares por V a los otros dos lados se obtienen los semilados de los polígonos del poliedro. Como este módulo es asimétrico, ha de utilizarse también su enantiomorfo.

Puede verse la gran semejanza de la figura con las formas planas (3, 12, 12) y (4, 8, 8).

Sistema del cubo:

Módulo básico: el triángulo esférico de ángulos 90° , 60° , 45°

(3, 4, 3, 4)CO: la altura geodésica construida sobre la hipotenusa del triángulo esférico da el semilado de los polígonos, con V en el ángulo recto. Como en el caso anterior y en los que siguen, se usará un módulo y su enantiomorfo.

Semejante a la forma plana (3, 6, 3, 6).

(3, 8, 8)CT: el círculo bisector del ángulo de 45° corta al lado opuesto del módulo en V. Los arcos de círculo ortogonales trazados desde V hasta los otros dos lados dan el semilado de los polígonos.

Semejante a las formas planas (3, 12, 12) y (4, 8, 8) y al poliedro

(3, 6, 6)TT.

(4, 6, 6)OT: el círculo bisector del ángulo de 60° corta al lado opuesto en V. Los arcos ortogonales trazados desde V hasta los otros dos lados dan los semilados de los polígonos.

Semejante a (3, 12, 12), (4, 8, 8), (3, 6, 6)TT y (3, 8, 8)CT.

(3, 4, 4, 4)RCO: El círculo bisector del ángulo de 90° corta al lado opuesto en V. Los arcos ortogonales trazados desde V hasta los otros dos lados son los semilados de los polígonos.

Semejante a la forma plana (3, 4, 6, 4).

(4, 6, 8)GRCO: el centro geodésico del círculo menor inscrito en el módulo básico es V (incentro: intersección de los círculos bisectores de los tres ángulos). Los arcos ortogonales hasta los lados del módulo son los semilados

de los polígonos.

Semejante a la forma plana (4, 6, 12).

Sistema del dodecaedro:

Módulo básico: el triángulo esférico de ángulos 90° , 60° , 36° .

(3, 5, 3, 5)ID: la altura geodésica construida sobre la hipotenusa del módulo es el semilado de los polígonos, con V en el ángulo recto.

Semejante a las formas (3, 6, 3, 6) y (3, 4, 3, 4)CO.

(3, 10, 10)DT: el círculo bisector del ángulo de 36° corta al lado opuesto del módulo en V. Los arcos de círculo máximo trazados desde V ortogonalmente hasta los otros dos lados del módulo son semilados de los polígonos.

Semejante a (3, 12, 12), (4, 8, 8), (3, 6, 6)TT, (3, 8, 8)CT y (4, 6, 6)OT.

(5, 6, 6)IT: El círculo bisector del ángulo de 60° corta al lado opuesto del módulo en V. Los arcos de círculo máximo trazados desde V ortogonalmente hasta los otros dos lados del módulo son semilados de los polígonos.

Semejante a (3, 12, 12), (4, 8, 8), (3, 6, 6)TT, (3, 8, 8)CT, (4, 6, 6)OT y (3, 10, 10)DT.

(3, 4, 5, 4)RID: El círculo bisector del ángulo de 90° corta al lado opuesto en V. Los arcos ortogonales desde V hasta los otros dos lados dan los semilados de los polígonos.

Semejante a (3, 4, 6, 4) y (3, 4, 4, 4)RCO.

(4, 6, 10)GRID: El centro geodésico del círculo menor inscrito en el módulo básico (incentro: intersección de los círculos bisectores de los tres ángulos) es V. Los arcos ortogonales desde V hasta los lados del módulo son los semilados de los polígonos.

Semejante a (4, 6, 12) y (4, 6, 8)GRCO.

Otros dos poliedros semirregulares pueden asociarse a los dos sistemas anteriores de simetría, con la salvedad de que sus ejes de simetría no son diedrales, sino cíclicos, careciendo de planos de simetría:

Asociado al sistema del cubo está el poliedro (3, 3, 3, 3, 4)CA, y asimilable al sistema del dodecaedro, el (3, 3, 3, 3, 5)DA. ambos poseen centro de simetría, carecen de planos de simetría y tienen ejes cíclicos. Ocupan en sus sistemas respectivos una posición similar a la de la forma plana (3, 3, 3, 3, 6) en el sistema equilátero plano, y, como en aquél caso, sus módulos son dobles, de ángulos 90° , 60° , 60° en el primer caso (módulo que coincide con el del sistema del tetraedro), y de 60° , 72° y 60° en el segundo. Aunque sus módulos isósceles no son enantiomorfos, y los ángulos poliedros de partida tampoco lo son, la figura contenida en el módulo es asimétrica, por lo que existe un par de enantiomorfos en ambos casos. Los dos poliedros existen en dos formas enantiomorfas, dado su carácter no diedral, siendo idénticos todos los módulos de cada una de ellas.

(3, 3, 3, 3, 4)CA tiene ejes $OP_4(4)$, $OP_3(3)$ y $OL_{33}(2)$.

(3, 3, 3, 3, 5)DA tiene ejes $OP_5(5)$, $OP_3(3)$ y $OL_{33}(2)$.

3.3. POLIEDROS

A continuación se representan las proyecciones sobre la esfera de los vértices (desde su centro 0) de los poliedros regulares y semirregulares isótopos, incluyendo proyecciones ortogonales según sus ejes de simetría y también las ortogonales a dos de ellos de distinto orden, perpendiculares a su vez entre sí, en todos aquellos casos en que las proyecciones sean diferentes.

Todas estas proyecciones se han relacionado unas con otras siguiendo el sistema diédrico europeo.

En los poliedros con simetría cíclica (cubo y dodecaedro achatados), los módulos triangulares que, agrupados en pares isósceles, componen la superficie esférica, no tienen sus lados en planos de simetría, como ocurre en los otros poliedros, de simetría diedral, pero los vértices de estos triángulos esféricos sí están en ejes de simetría, cíclica en estos casos.

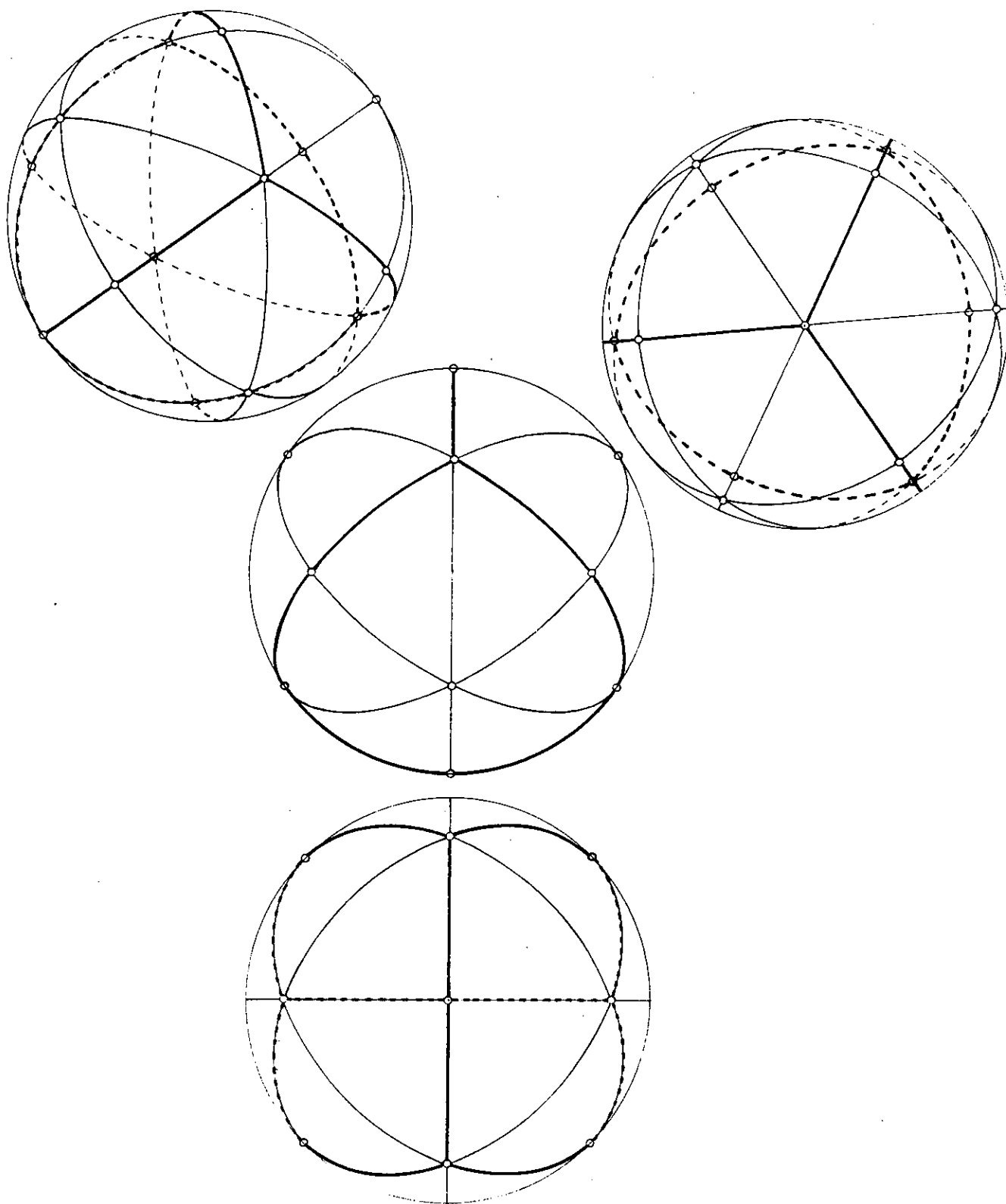
Además de los poliedros regulares y semirregulares de cada sistema hemos añadido los romboedros que comparten con ellos ejes y planos de simetría.

Las caras de estos poliedros se obtienen agrupando cuatro módulos triangulares alrededor de un ángulo recto, de modo que cada uno comparte con los otros tres el vértice rectángulo, centro de la cara, y los otros vértices con dos de los tres. Los ángulos de las caras del romboedro duplican a los ángulos agudos del módulo. Si éstos eran iguales (sistema del tetraedro) las caras del romboedro serán regulares: el romboexaedro resultante es un cubo.

Cuando los módulos son escalenos (sistemas del cubo y del dodecaedro) los ángulos en los vértices del romboedro son distintos, y las caras no son polígonos regulares. Tales romboedros (rombododecaedro y rombotriacontaedro), que hemos proyectado sobre la esfera de los vértices, al no ser regulares ni semirregulares, tienen los vértices en dos esferas diferentes, cuyos radios son $R_1 = \sqrt{OL^2 + LP^2}$ y $R_2 = \sqrt{OL^2 + LV^2}$, siendo L el centro de la cara y P y V los dos tipos de vértice. Aquí hemos proyectado los romboedros sobre una sola esfera, como los poliedros regulares y semirregulares.

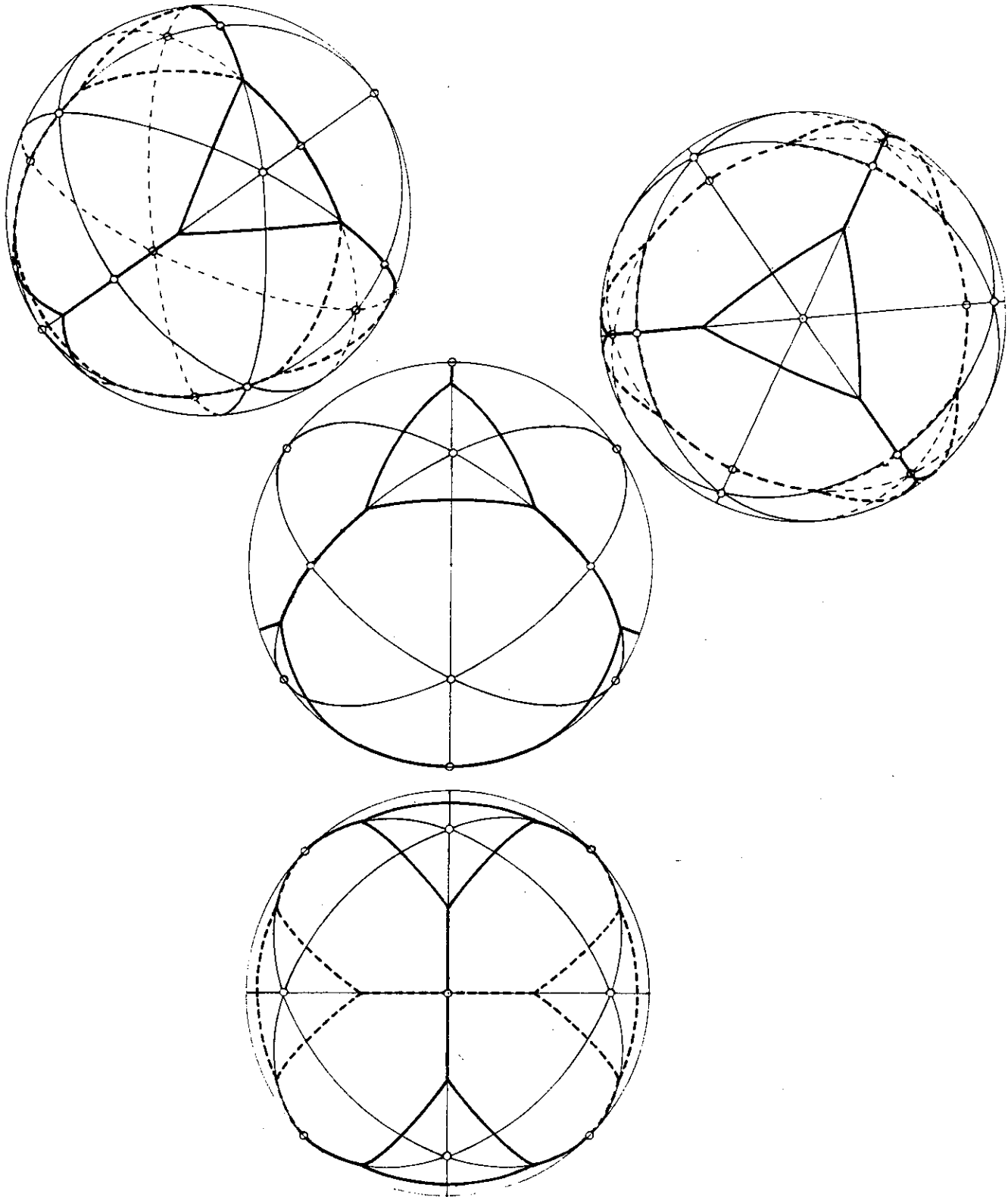
Así como los módulos que se agrupan en torno a un vértice P engendran la cara de un poliedro regular y los que rodean un vértice V la del poliedro dual, los situados alrededor de L forman la cara del romboedro del sistema.

SISTEMA DEL TETRAEDRO



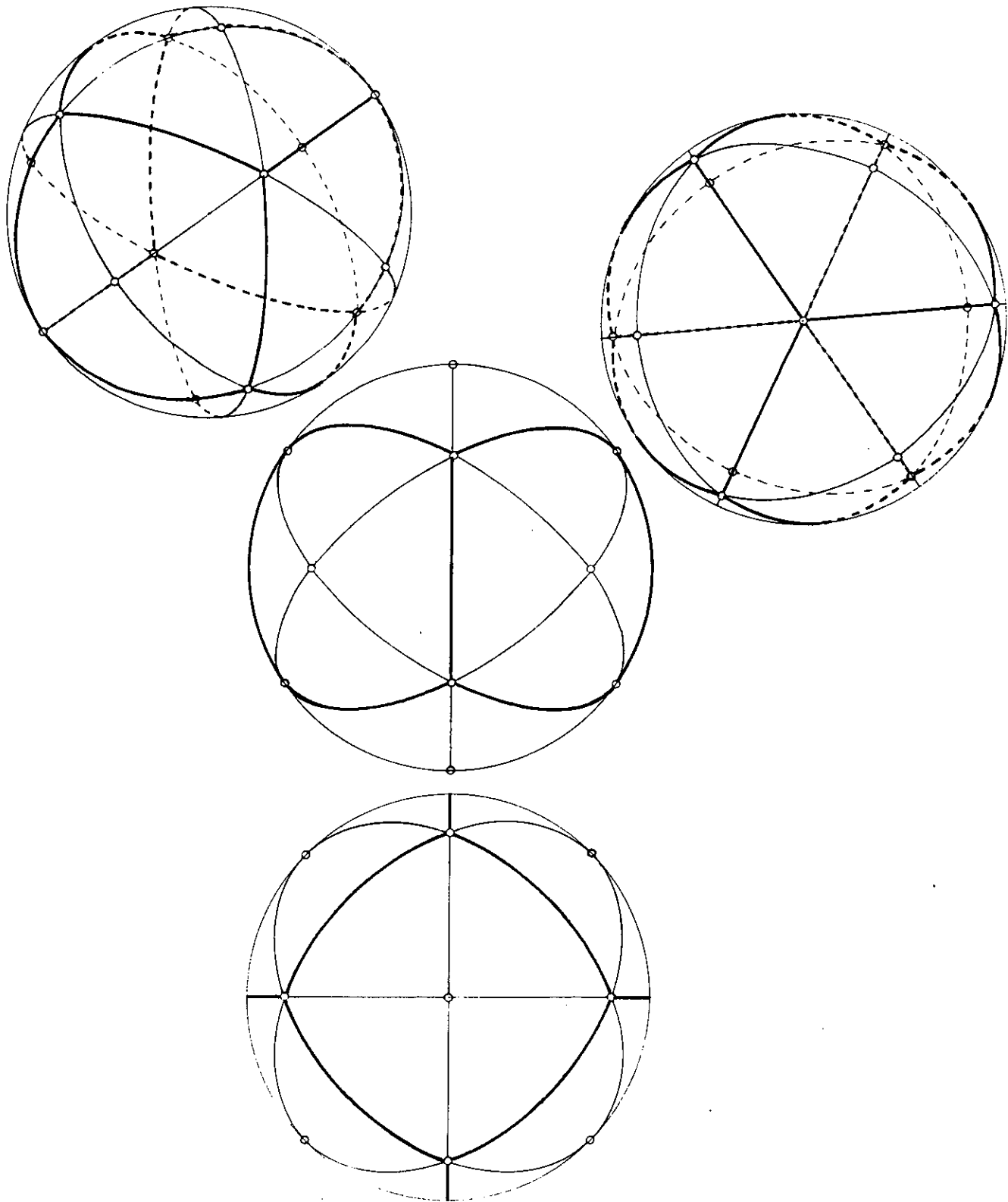
TETRAEDRO (3, 3, 3)

SISTEMA DEL TETRAEDRO



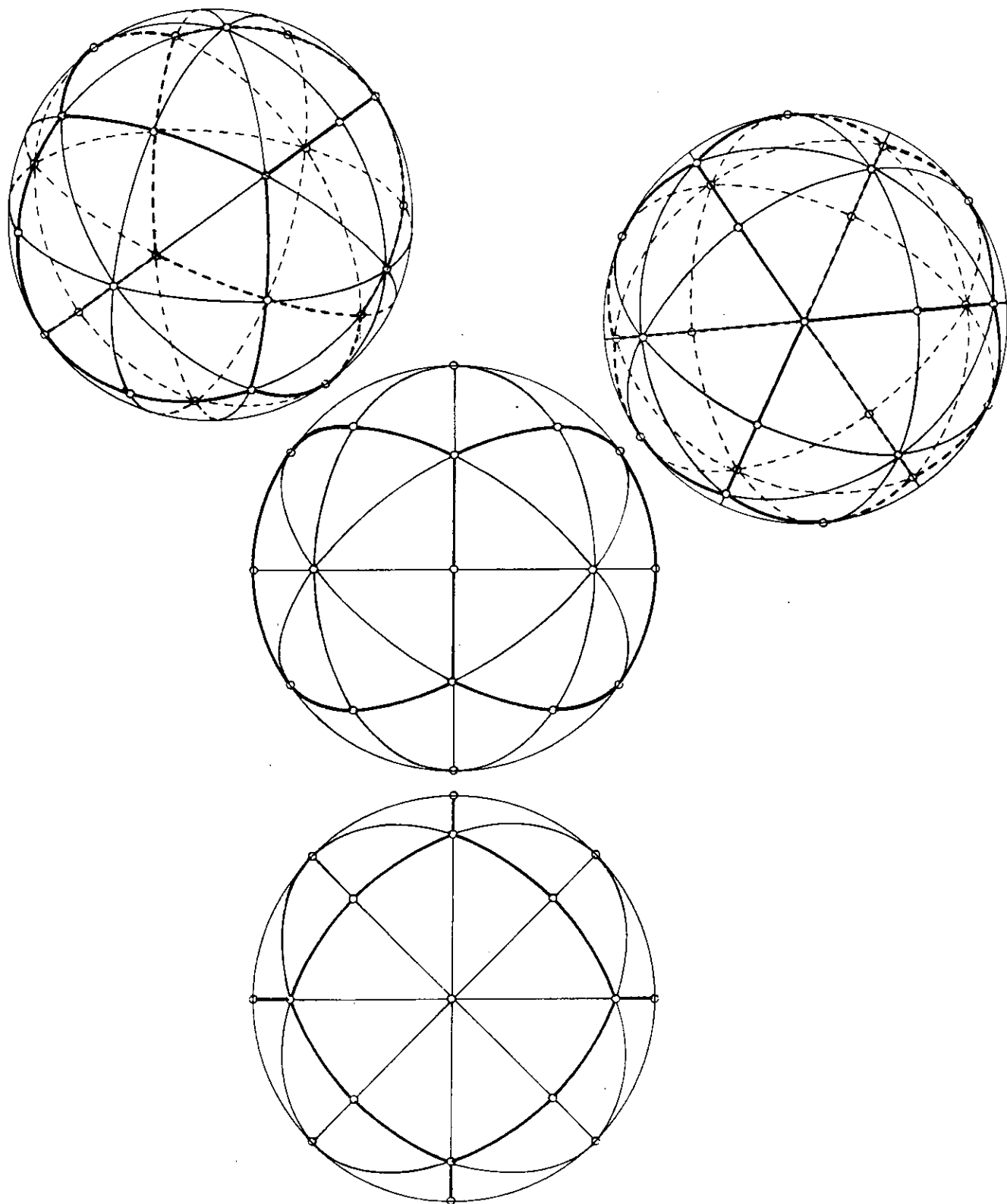
TETRAEDRO TRUNCADO (3, 6, 6)

SISTEMA DEL TETRAEDRO



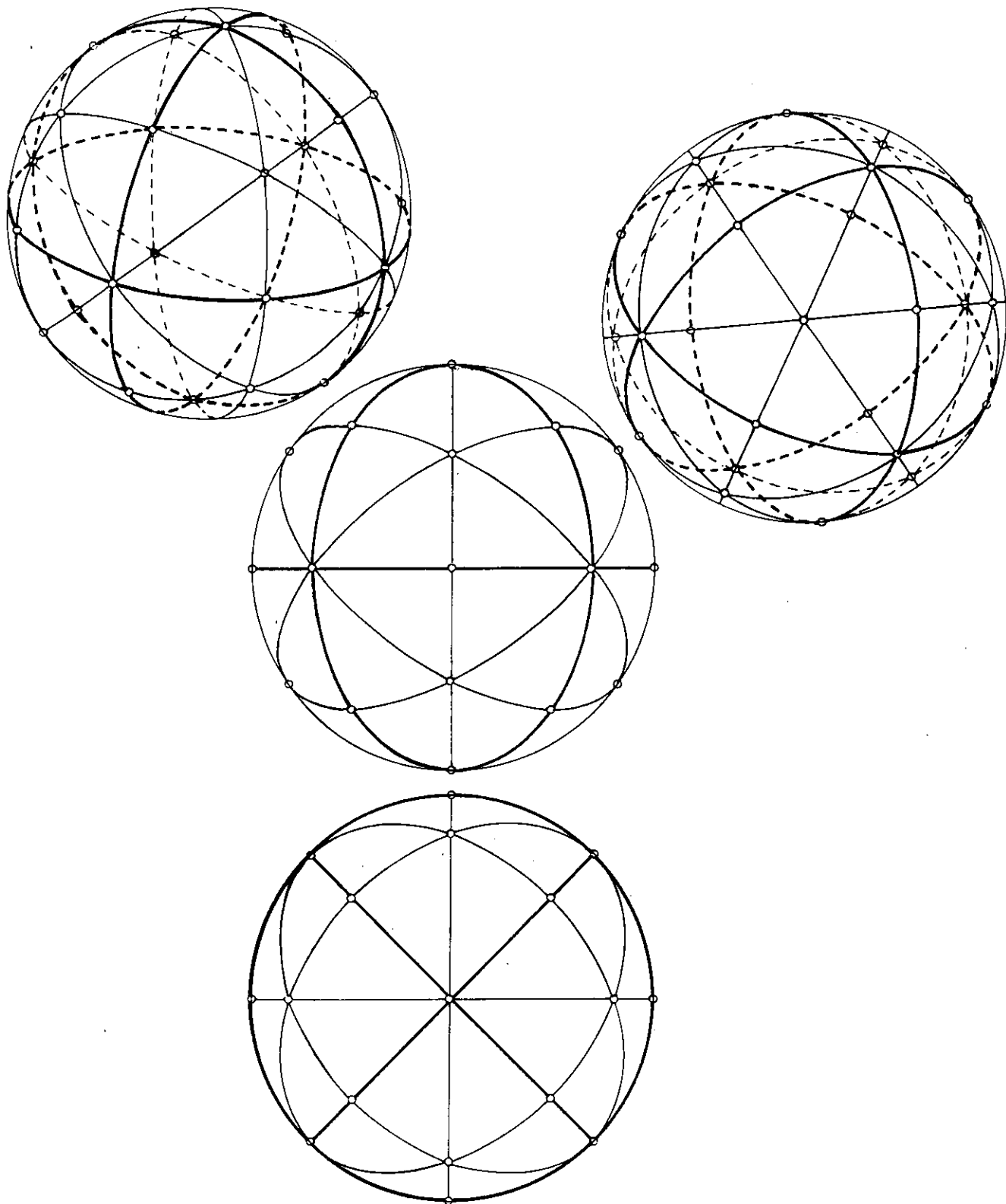
ROMBOEXAEDRO \equiv CUBO

SISTEMA DEL CUBO



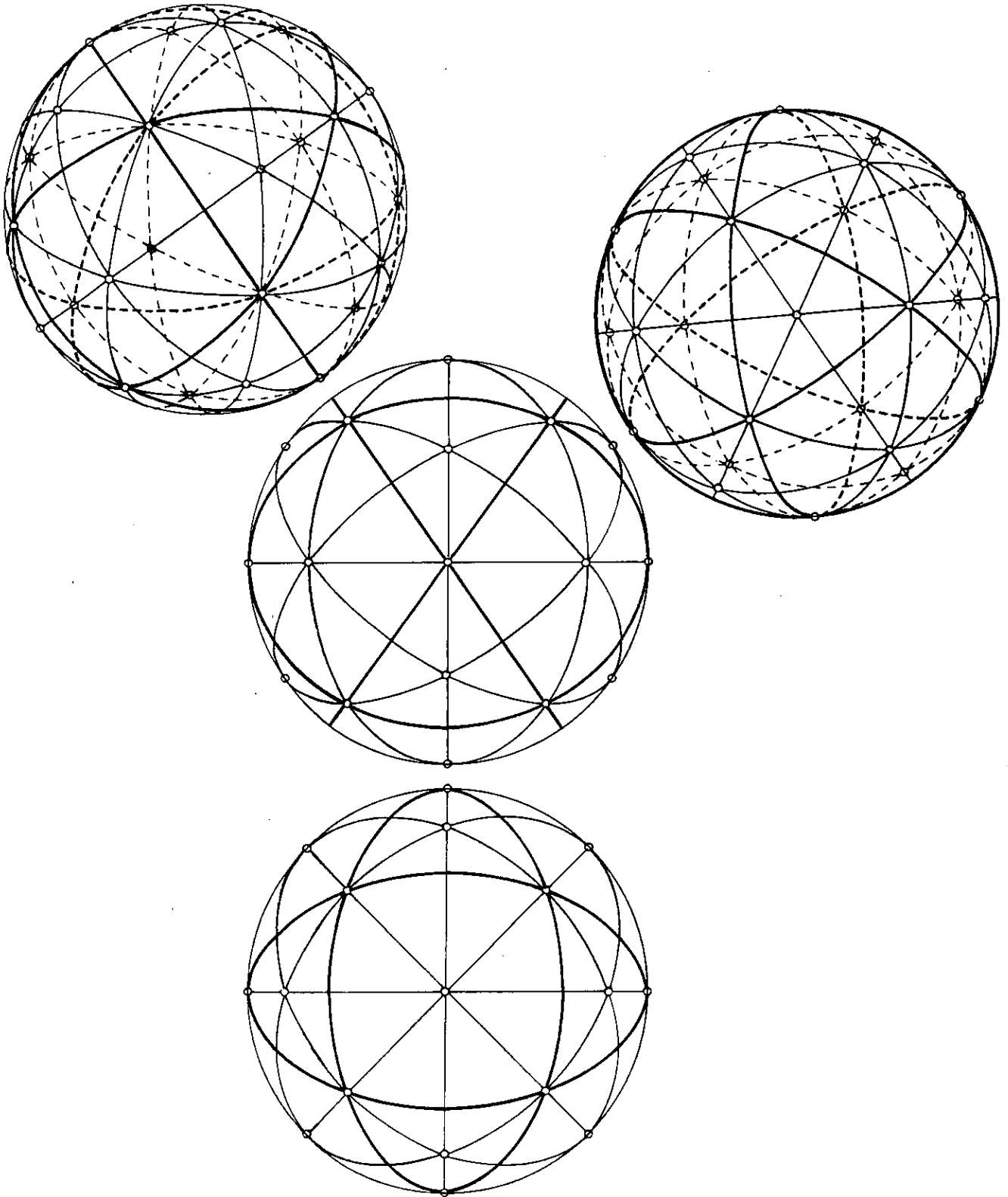
CUBO (4, 4, 4)

SISTEMA DEL CUBO



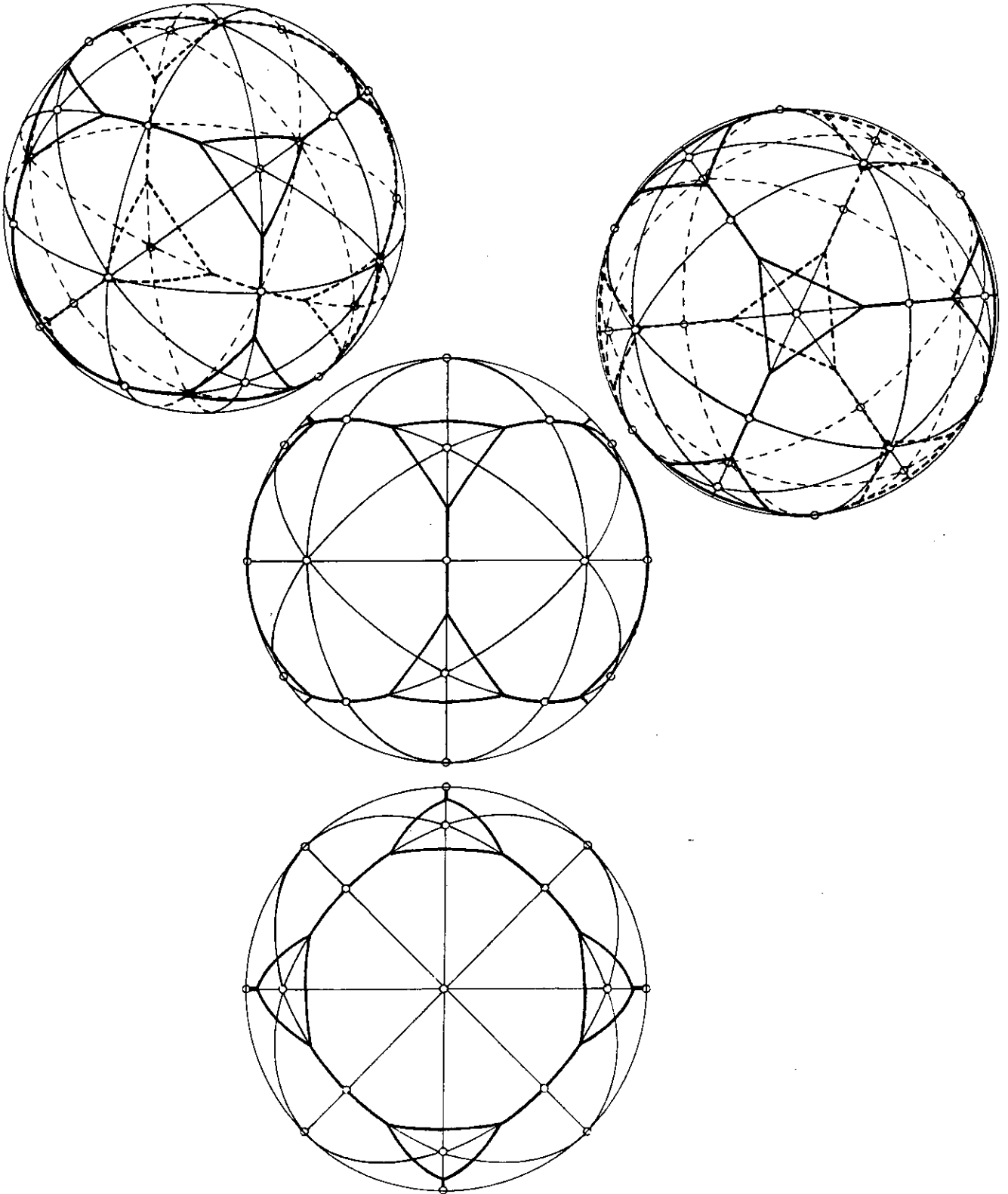
OCTAEDRO (3, 3, 3, 3)

SISTEMA DEL CUBO



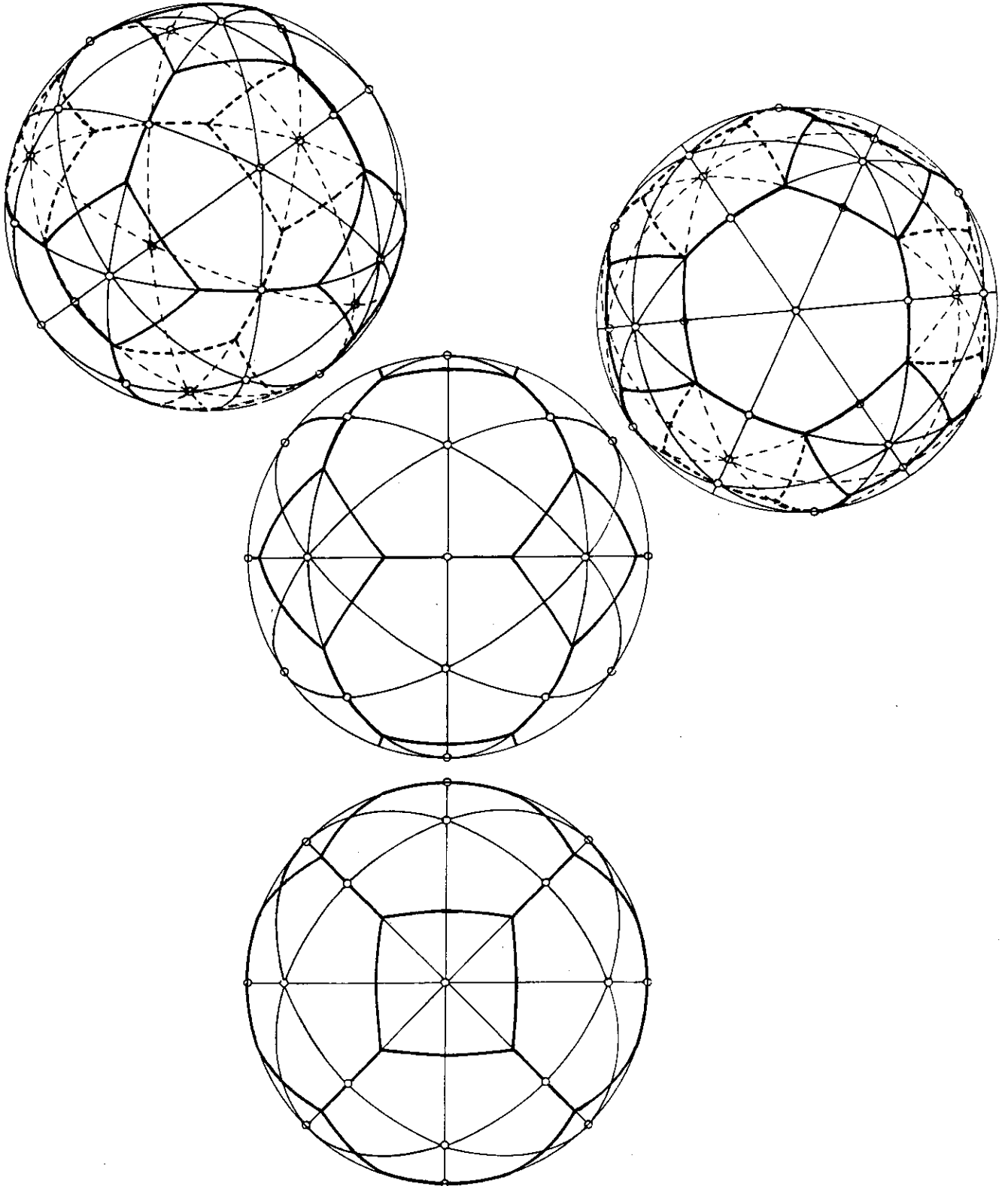
CUBOCTAEDRO (3, 4, 3, 4)

SISTEMA DEL CUBO



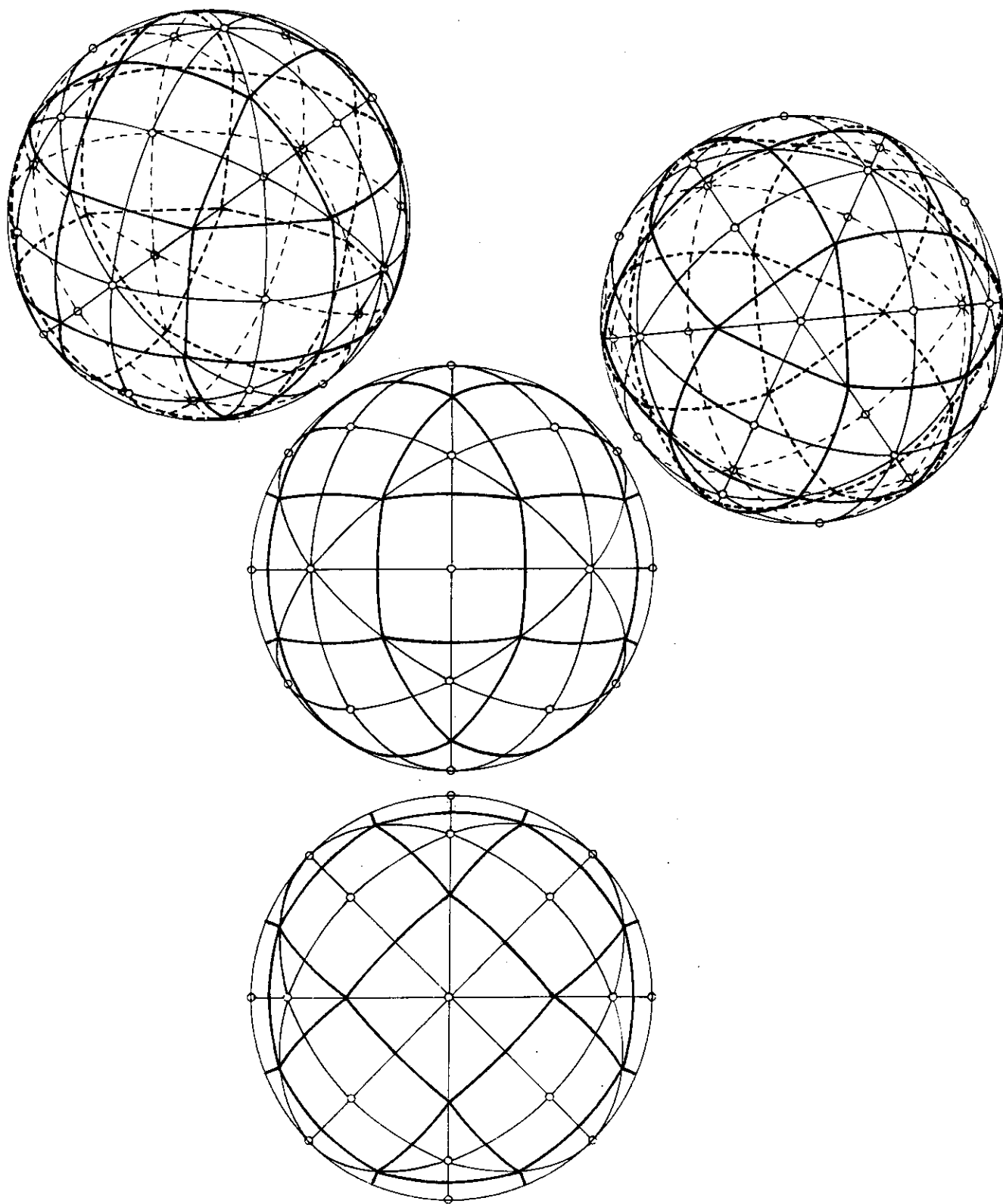
CUBO TRUNCADO (3, 8, 8)

SISTEMA DEL CUBO



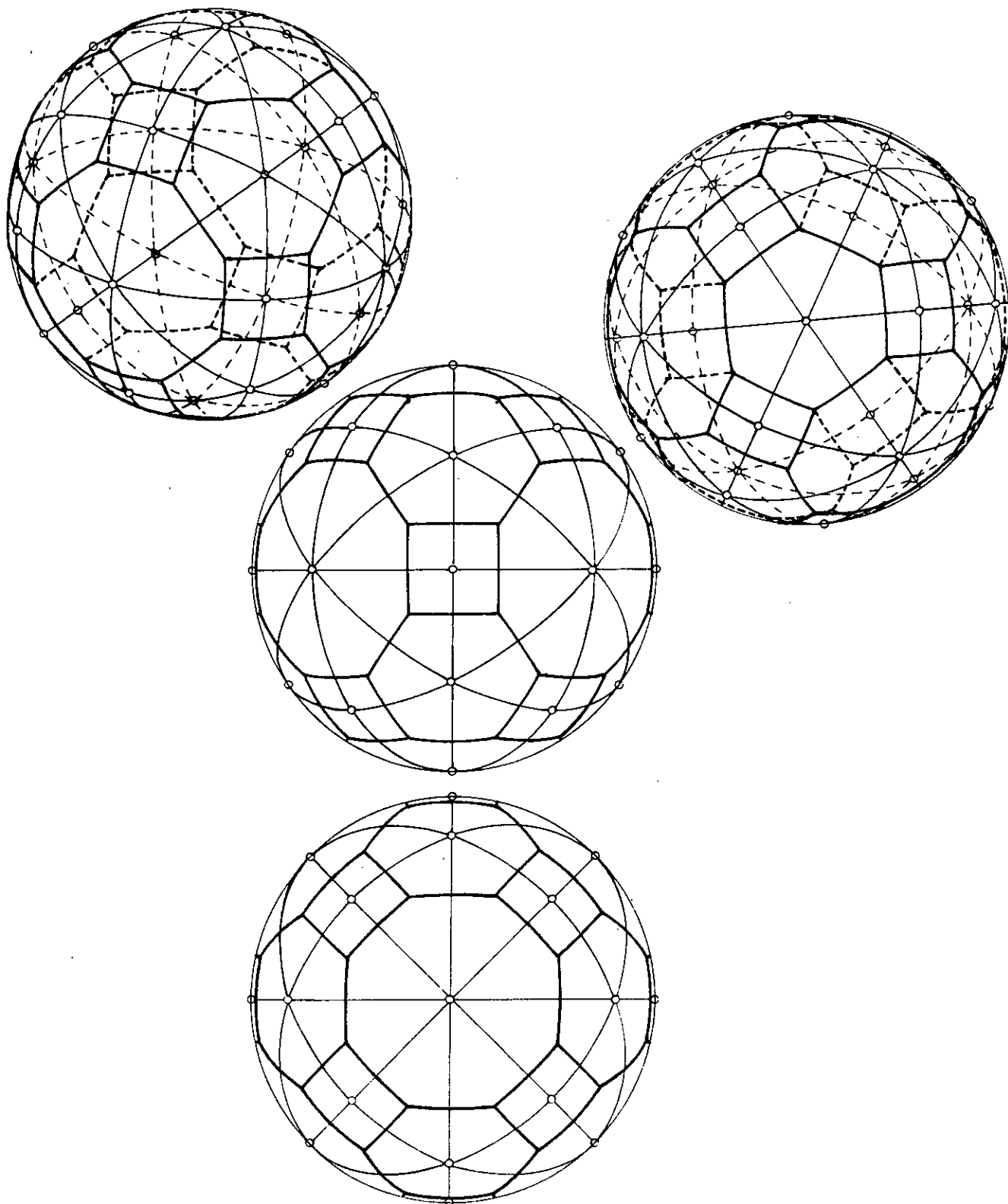
OCTAEDRO TRUNCADO (4, 6, 6)

SISTEMA DEL CUBO



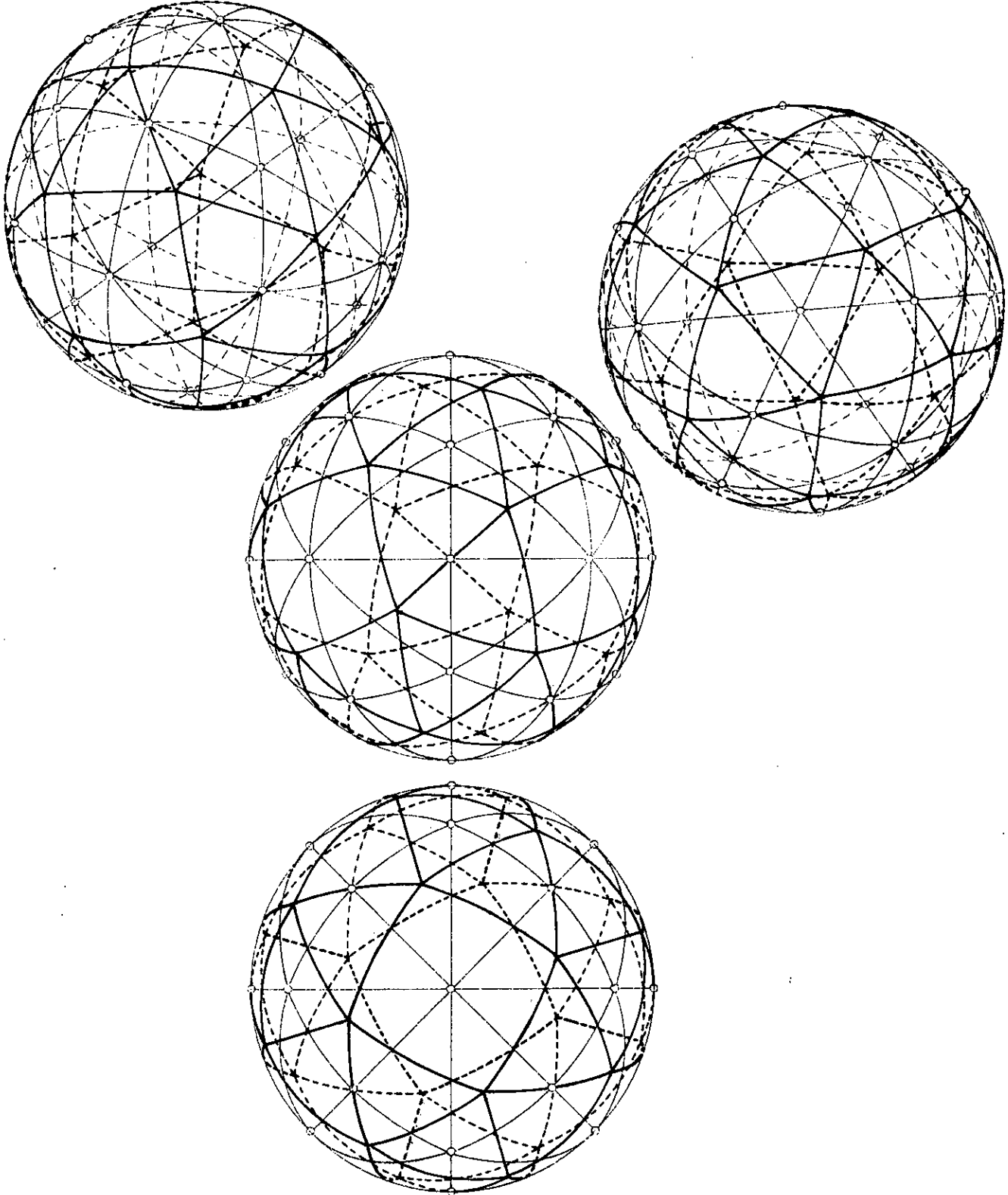
ROMBICUBOCTAEDRO (3, 4, 4, 4)

SISTEMA DEL CUBO



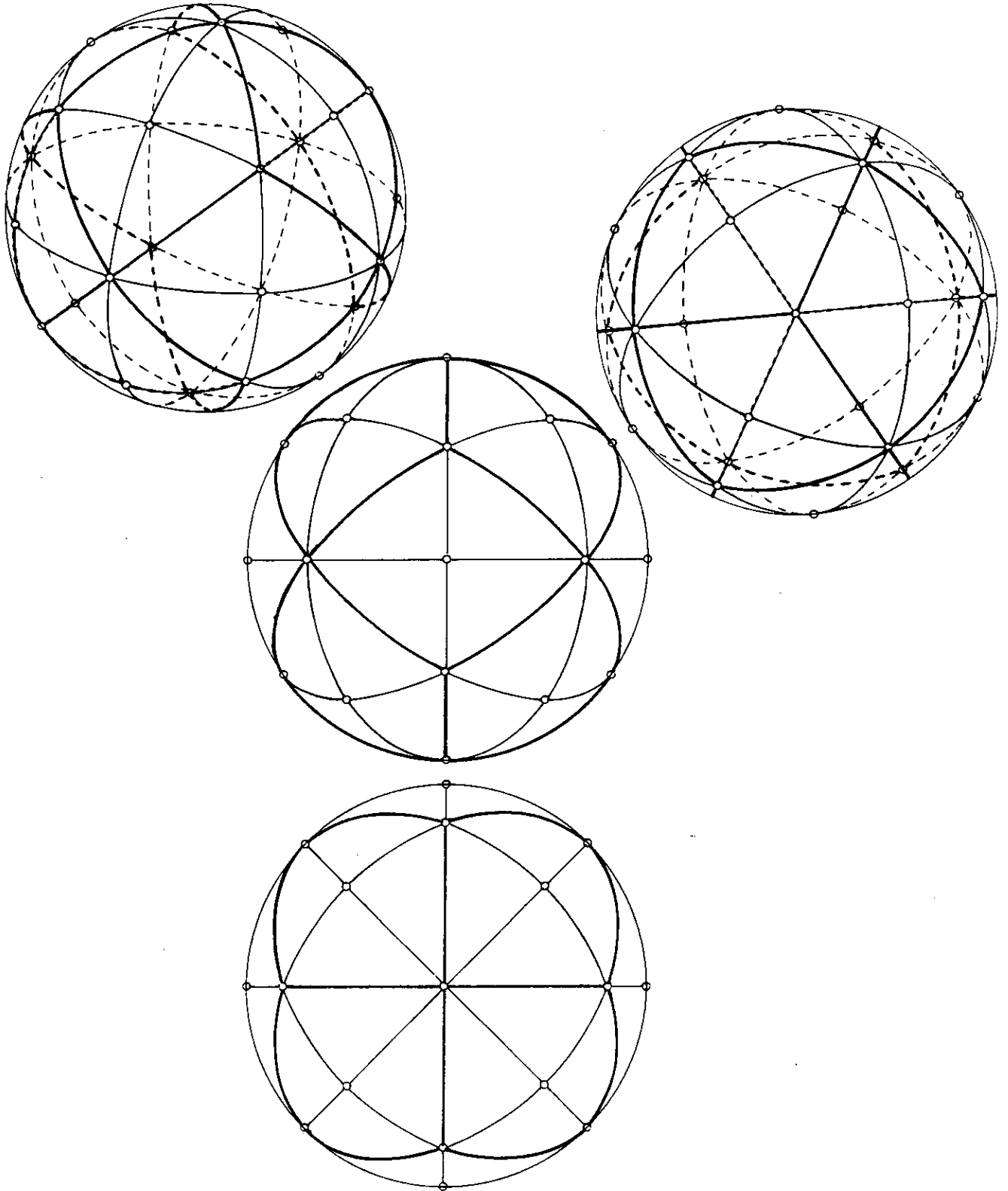
GRAN ROMBICUBOCTAEDRO (4, 6, 8)

SISTEMA DEL CUBO



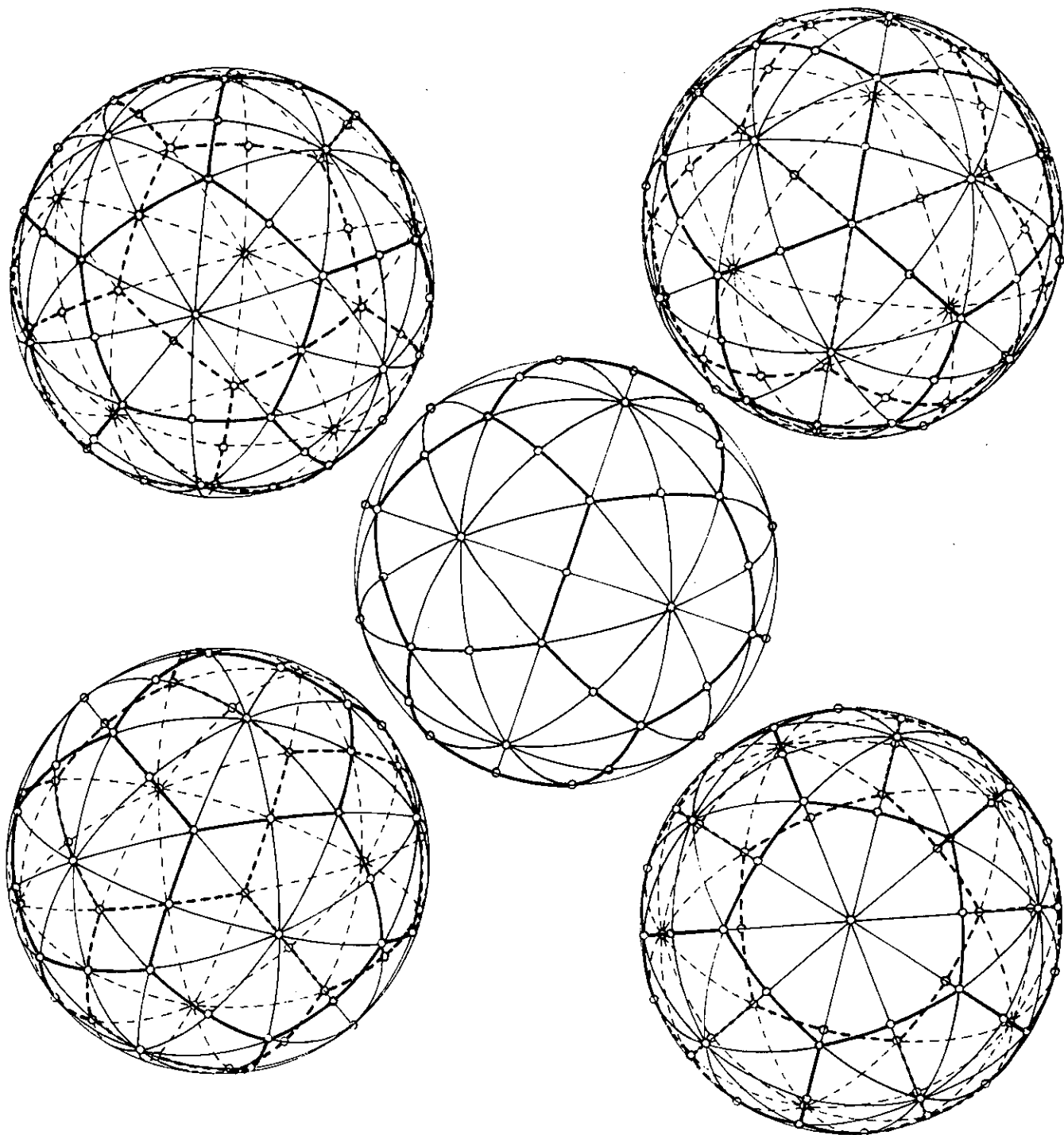
CUBO ACHATADO (3, 3, 3, 3, 4)

SISTEMA DEL CUBO



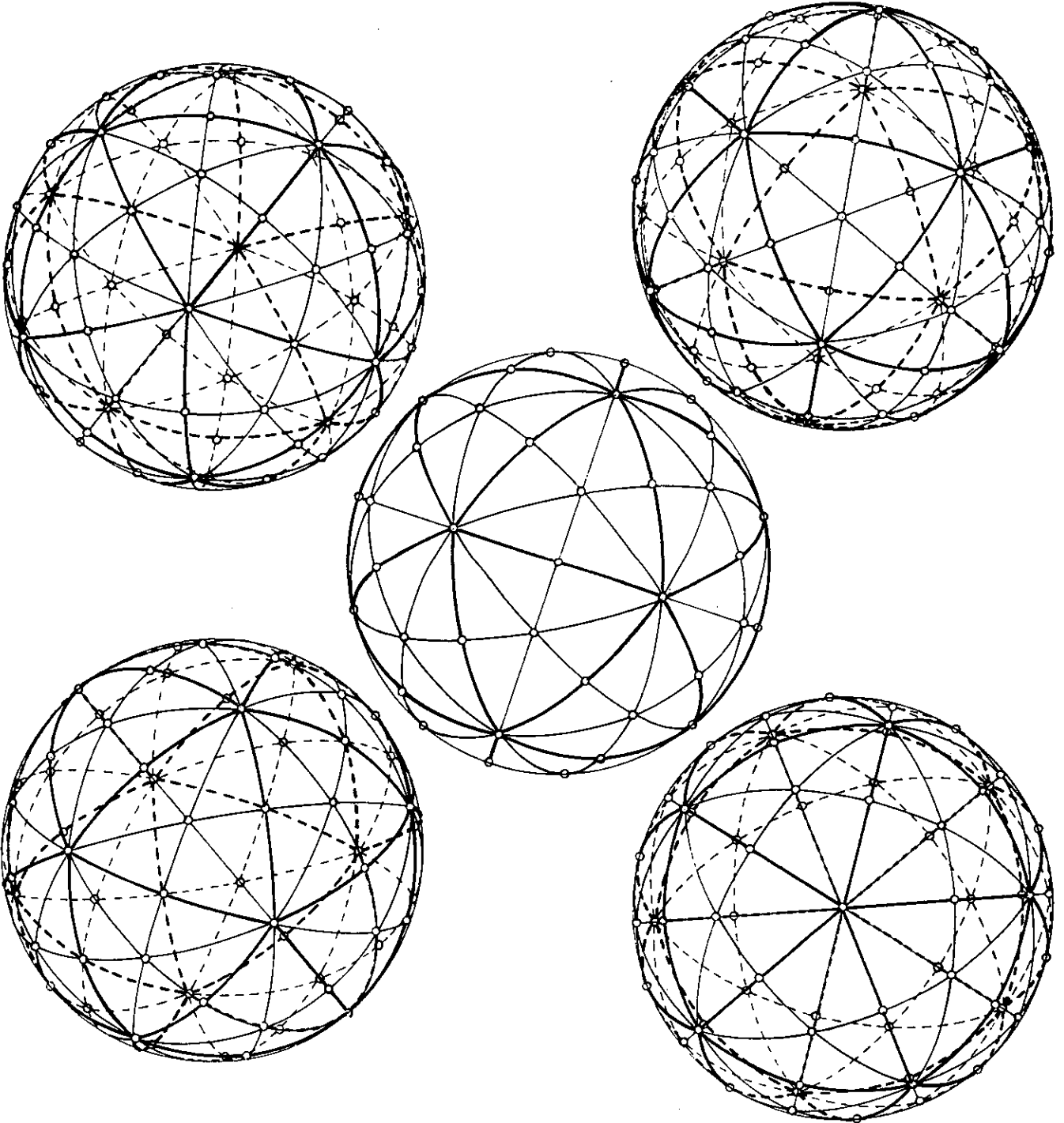
ROMBODODECAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



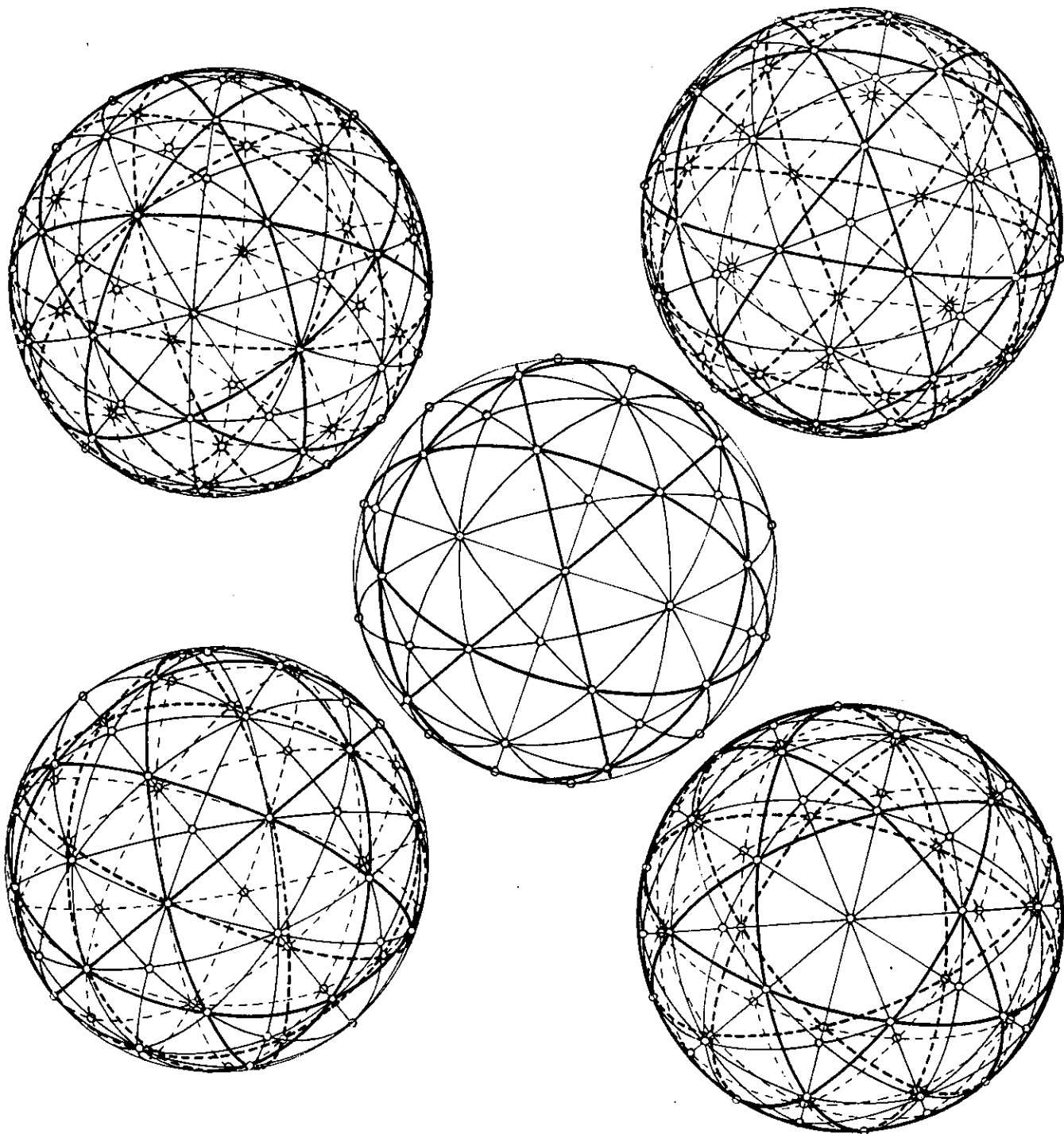
DODECAEDRO (5, 5, 5)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



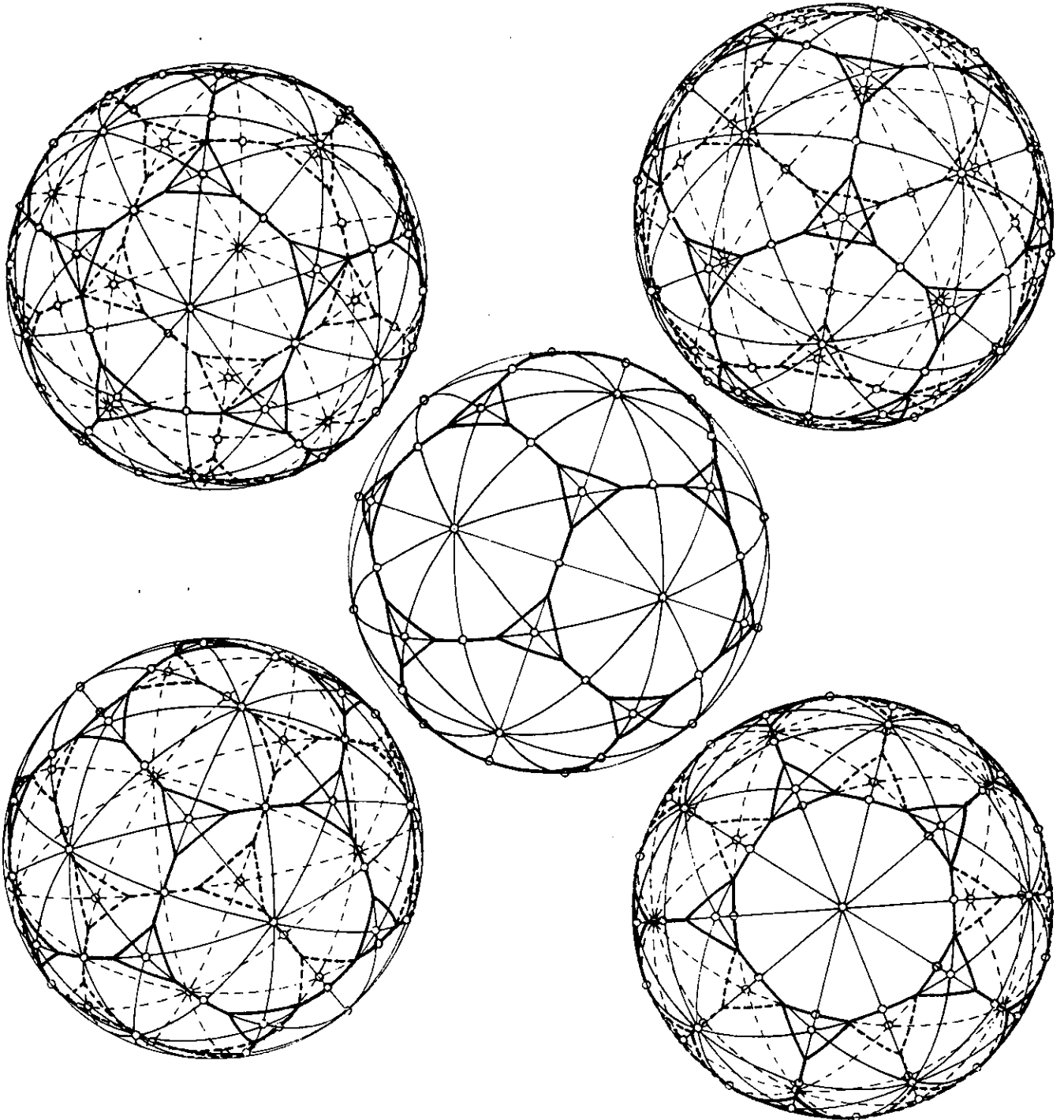
ICOSAEDRO (3, 3, 3, 3, 3)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



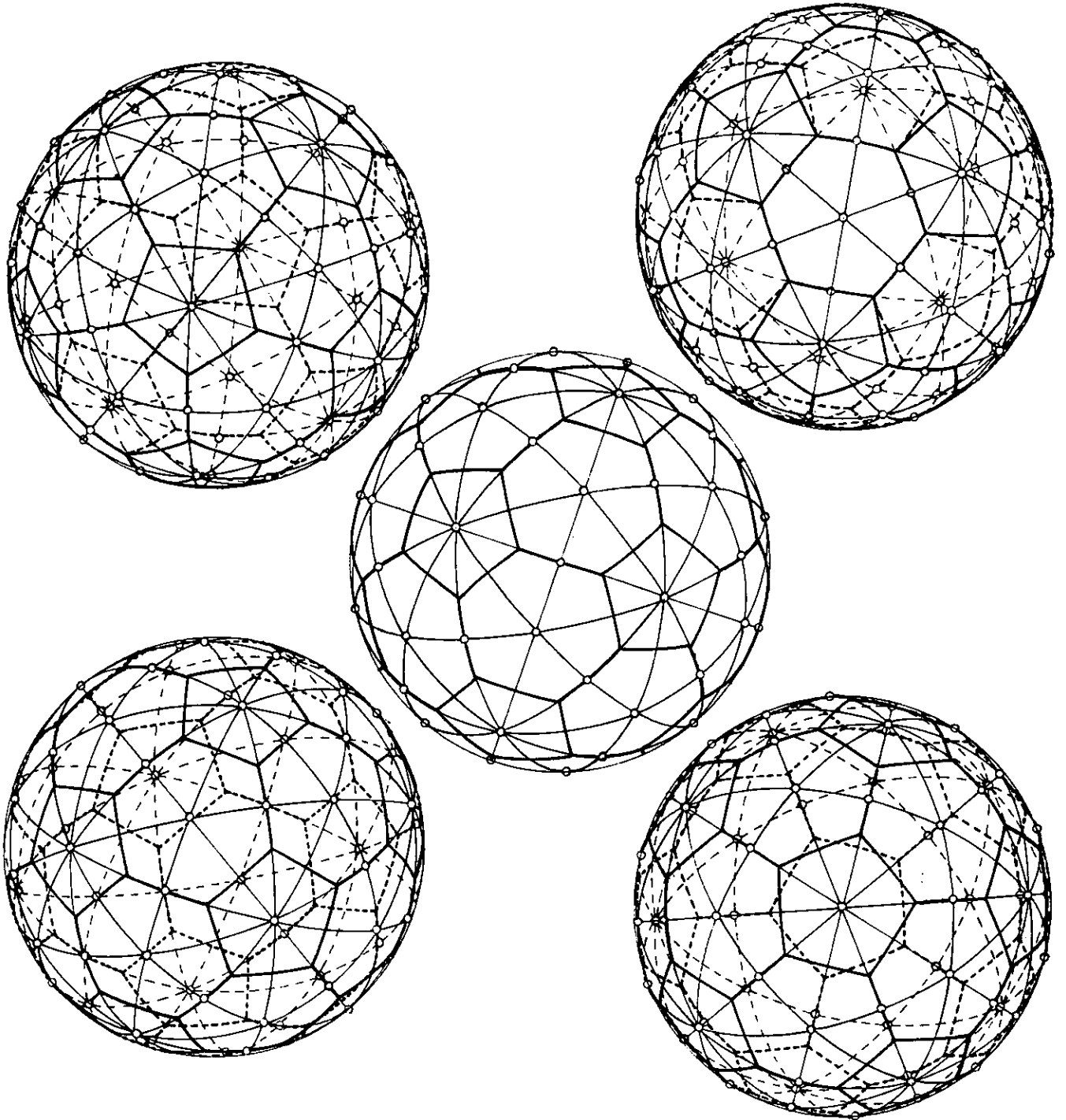
ICOSIDODECAEDRO (3, 5, 3, 5)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



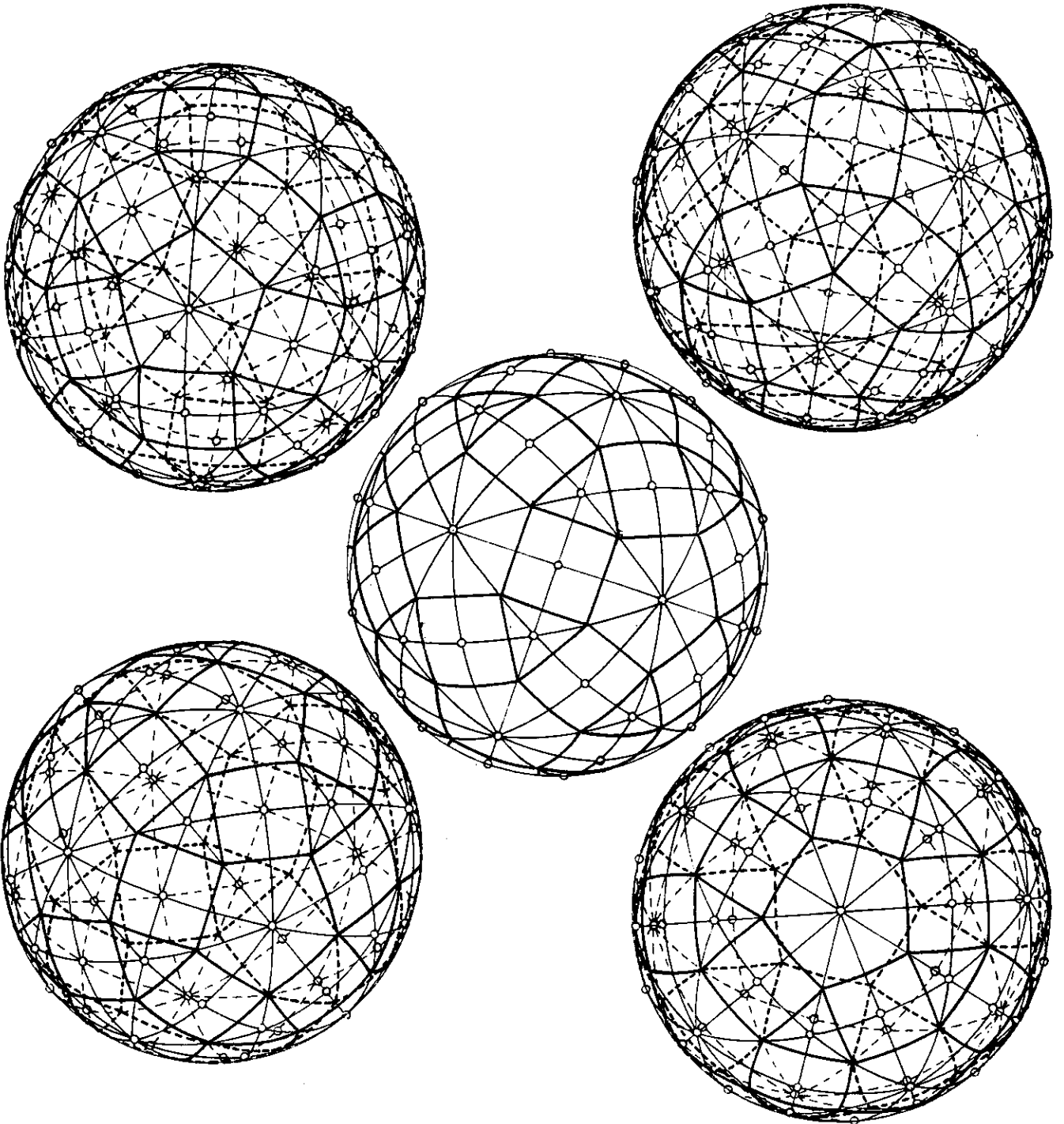
DODECAEDRO TRUNCADO (3, 10, 10)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



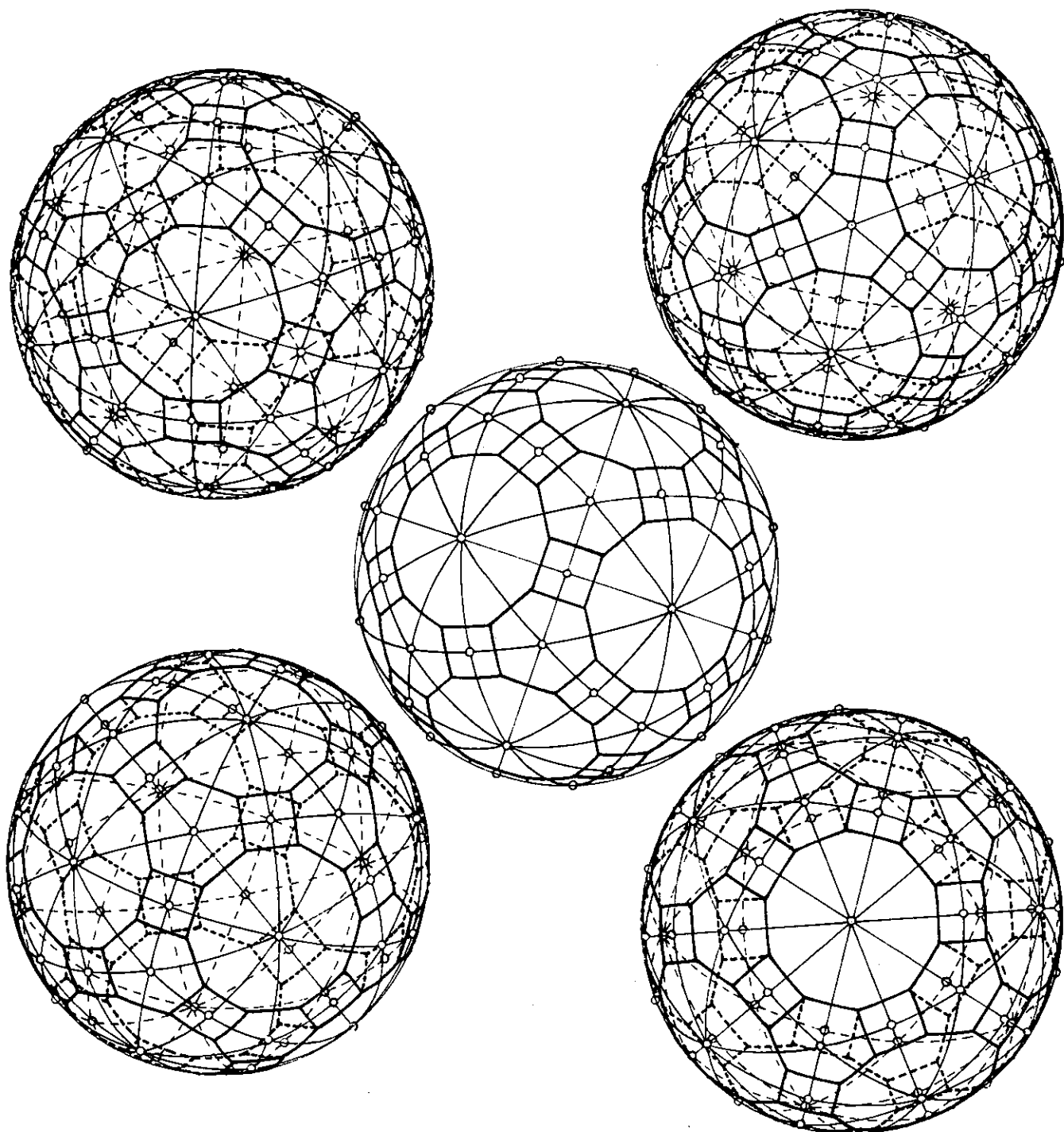
ICOSAEDRO TRUNCADO (5, 6, 6)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



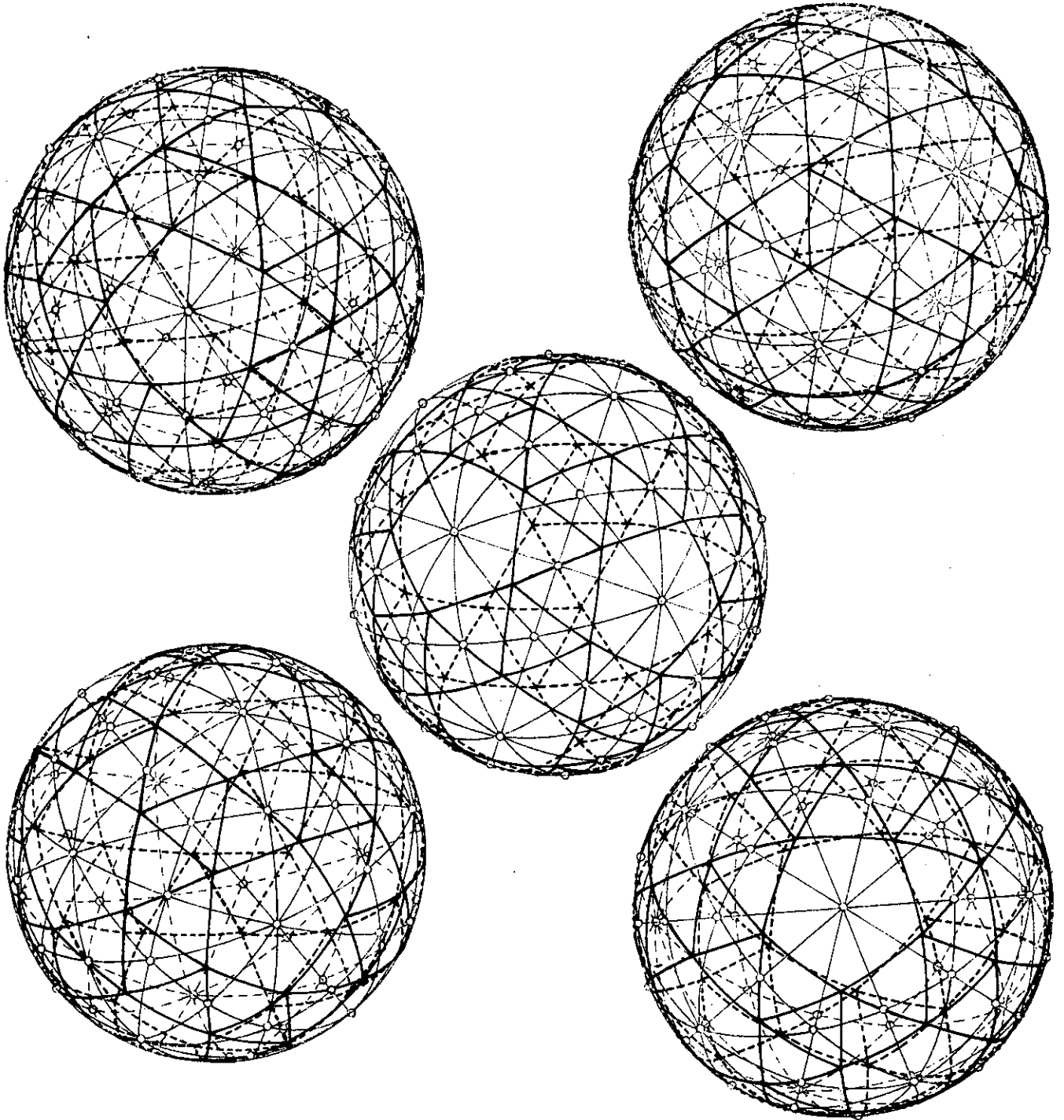
ROMBIICOSIDODECAEDRO (3, 4, 5, 4)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



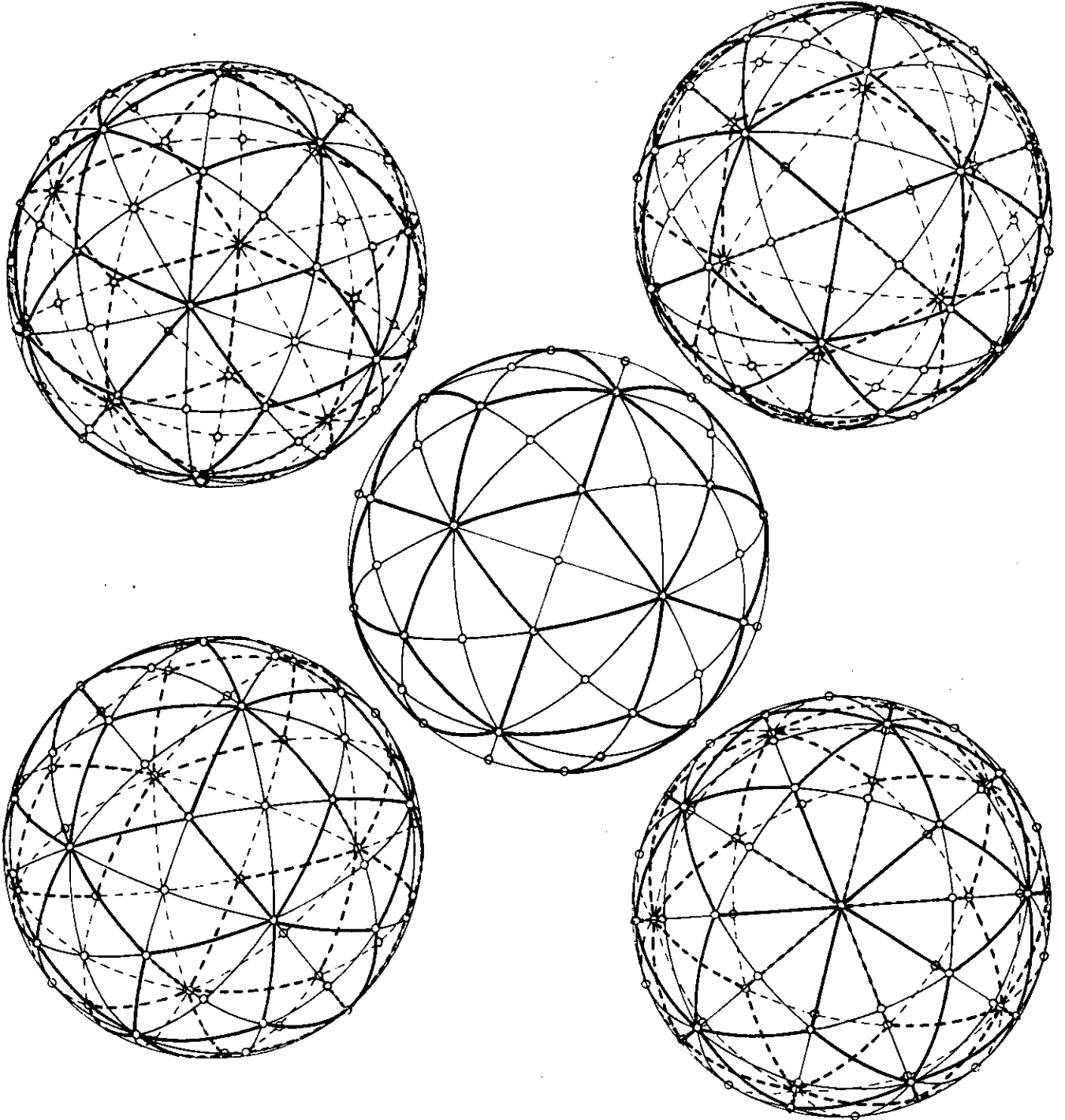
GRAN ROMBIICOSIDODECAEDRO (4, 6, 10)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



DODECAEDRO ACHATADO (3, 3, 3, 3, 5)

SISTEMA DEL DODECAEDRO



ROMBOTRIACONTAEDRO

4. COMPARTIMENTACION SUPERFICIAL DEL PLANO Y LA ESFERA

En los dos capítulos anteriores hemos visto por separado el recubrimiento total del plano y la superficie esférica mediante formas poliédricas no irregulares, que permiten para ello el uso de un único módulo triangular (o un par de enantiomorfos, si aquél era asimétrico). Veamos ahora conjuntamente estos repartos modulares para hacer patentes las coincidencias entre todos estos sistemas de simetría, con la diferencia entre ellos de ser finito el número de elementos sobre la esfera e infinito en los sistemas planos.

Comenzaremos una vez más con una lista de poliedros, excluyendo los irregulares y sin establecer diferencias entre planos y abovedados, regulares y semirregulares:

(3,3,3)T	(3,3,3,3)O	(3,3,3,3,3)I	(3,3,3,3,3,3)MR
(3,4,4)P3	(3,3,3,4)AP4	(3,3,3,3,4)CA	
(3,6,6)TT	...	(3,3,3,3,5)DA	
(3,8,8)CT	(3,3,3,n)APn	(3,3,3,3,6)MS	
(3,10,10)DT	$n \rightarrow \infty$		
(3,12,12)MS		(3,3,3,4,4)MS	
	(3,4,3,4)CO	(3,3,4,3,4)MS	
(4,4,4)C	(3,5,3,5)ID		
(4,4,5)P5	(3,6,3,6)MS		
...			
(4,4,n)Pn	(3,4,4,4)RCO		
$n \rightarrow \infty$	(3,4,5,4)RID		
	(3,4,6,4)MS		
(4,6,6)OT			
(4,8,8)MS			
(4,6,8)}			
(4,8,6)}	GRCO en		
(4,6,10)}			
(4,10,6)}	GRID en		
(4,6,12)}			
(4,12,6)}	MS en		
(5,5,5) D			
(5,6,6) IT			
(6,6,6)MR			

Algunas series podrían establecerse con diferente punto de partida; con ello algunos poliedros aparecerían en varios lugares.

Así, la serie de los prismas quedaría:

(4, 4, 3) P3
 (4, 4, 4) P4 = C
 (4, 4, 5) P5
 ...
 (4, 4, n) Pn
 n → ∞

Vemos que el cubo es un prisma. Análogamente el octaedro es el antiprisma (3, 3, 3, 3) AP3.

Y podríamos establecer otras series:

(4,6,6) OT	(3,6,6) TT	(3,3,3,3) O	(3,4,3,4) CO
(4,6,8) GRCO	(4,6,6) OT	(3,4,3,4) CO	(3,4,4,4) RCO
(4,6,10) GRID	(5,6,6) IT	(3,5,3,5) ID	(3,4,5,4) RID
(4,6,12) MS	(6,6,6) MR	(3,6,3,6) MS	(3,4,6,4) MS

Sin olvidar las conocidas correspondencias:

(3,3,3) T	(3,3,3) T	(3,3,3,3) O	(4,4,4) C
(4,4,4) C	(3,3,3,3) O	(4,4,4,4) MR	(4,4,4,4) MR
(5,5,5) D	(3,3,3,3,3) I		
(6,6,6) MR	(3,3,3,3,3,3) MR		

Como se ve, podemos colocar en más de un lugar a los poliedros regulares, y a otros, como el tetraedro truncado, el octaedro truncado y el cuboctaedro. Estas varias ordenaciones corresponden, como vamos a evidenciar, al papel diverso de estos poliedros en diferentes sistemas de simetría.

4.1. LOS ROMBOEDROS

En el capítulo 3 hemos visto tres romboedros ligados a los sistemas del tetraedro, el cubo y el dodecaedro. Hagamos notar que el del tetraedro es un cubo y el del cubo un dodecaedro, el rombododecaedro. Se debe ello a que las caras de los romboedros contienen a las aristas de los poliedros regulares de su sistema, que son diagonales suyas, y el número de caras del poliedro básico de un sistema es el de aristas del precedente: las seis caras del cubo corresponden a las seis aristas del tetraedro, y las doce caras del dodecaedro a las doce aristas del cubo.

También a los sistemas planos semiequilátero y semicuadrado se asocian redes rómbicas que se forman por el mismo procedimiento que en los sistemas esféricos: los cuatro triángulos que comparten un vértice rectángulo forman la cara de un rombo. En el sistema semiequilátero hay dos tipos de vértices, y se trata de rombos verdaderos. En el sistema semicuadrado los cuatro ángulos del rombo son iguales, y resulta ser un cuadrado, como ocurría a las

caras del rombohexaedro en el sistema del tetraedro.

Los lados de estos cuadrados forman ángulos de 45° con los de ambas redes duales, y su medida es $\sqrt{2}/2$ veces la de aquéllos.

En la figura 4.1. se han representado superpuestos los mosaicos duales y los romboedros planos de cada sistema.

De modo análogo, en las figuras 4.2.a, b, c están representadas para cada sistema las proyecciones en la esfera de los poliedros duales y del correspondiente romboedro.

4.2. LOS MÓDULOS DE LOS POLIEDROS ISÓTROPOS

Las figuras 4.3. muestran de modo sintético las semejanzas que se dan entre los poliedros análogos de los cinco sistemas isótopos. Los dos triángulos de la parte superior de cada una son los módulos triangulares de los sistemas planos, y los tres de la parte inferior son esféricos, equivalentes a $1/24$, $1/48$ y $1/120$ de esfera, respectivamente. Los triángulos de la izquierda son isósceles, lo que lleva a repeticiones de redes que no se dan en los de la derecha, escalenos.

En la figura 4.3.a aparecen los poliedros regulares básicos de cada sistema, y en 4.3.b sus duales; en ambos casos la semiarista corresponde a un cateto, y el vértice del poliedro coincide con el del ángulo agudo contiguo del módulo triangular.

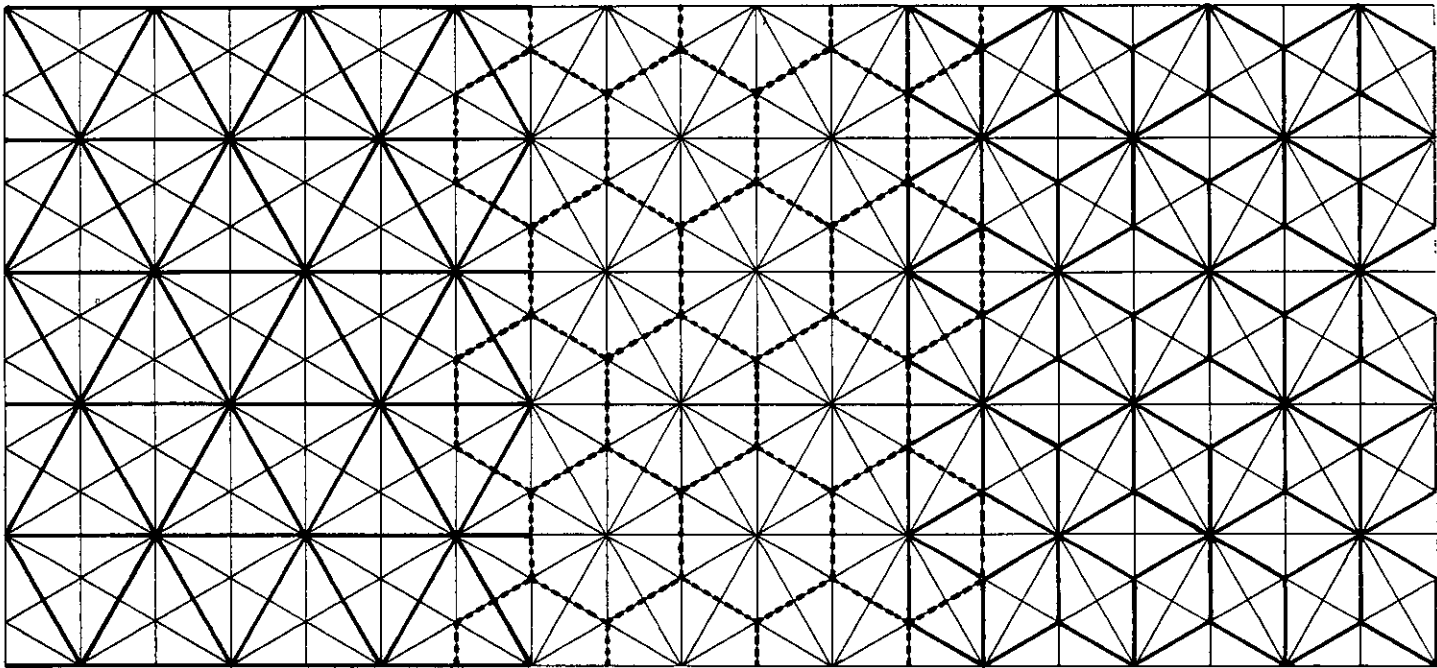
Figura 4.3.c: Romboedros; la arista es la hipotenusa y los dos tipos de vértice coinciden con sus extremos.

Figura 4.3.d: La altura correspondiente a la hipotenusa es la semiarista; el vértice de la red es el vértice rectángulo del módulo.

Figuras 4.3.e, f, g: vértice, la intersección de la bisectriz (recta o circunferencia máxima) de un ángulo con el lado opuesto; semiaristas, las distancias a los otros dos lados.

Figura 4.3.h: vértice, el incentro del triángulo; semiaristas, las distancias a los lados.

En la figura 4.3.i hemos agrupado algunas formas isótopas cuyos módulos no se ajustan tan fácilmente a la red correspondiente. Las dos formas de la izquierda mantienen cierta analogía entre sí, pero hay una analogía mucho mayor entre las tres formas de la derecha. Estas tres figuras son dobles módulos, y por lo tanto triángulos isósceles (equilátero el plano), aunque los fragmentos de caras y aristas en ellos contenidos son asimétricos, en correspondencia a su simetría no diedral. El doble módulo del sistema del cubo coincide con el módulo del sistema del tetraedro, por lo que este poliedro, cubo achatado, puede incluirse también en el sistema del tetraedro, siendo de notar cierta semejanza de este módulo con el del mosaico (3, 3, 4, 3, 4): en ambos una cara cuadrada, cuyo centro es cíclico, se halla rodeada de otros

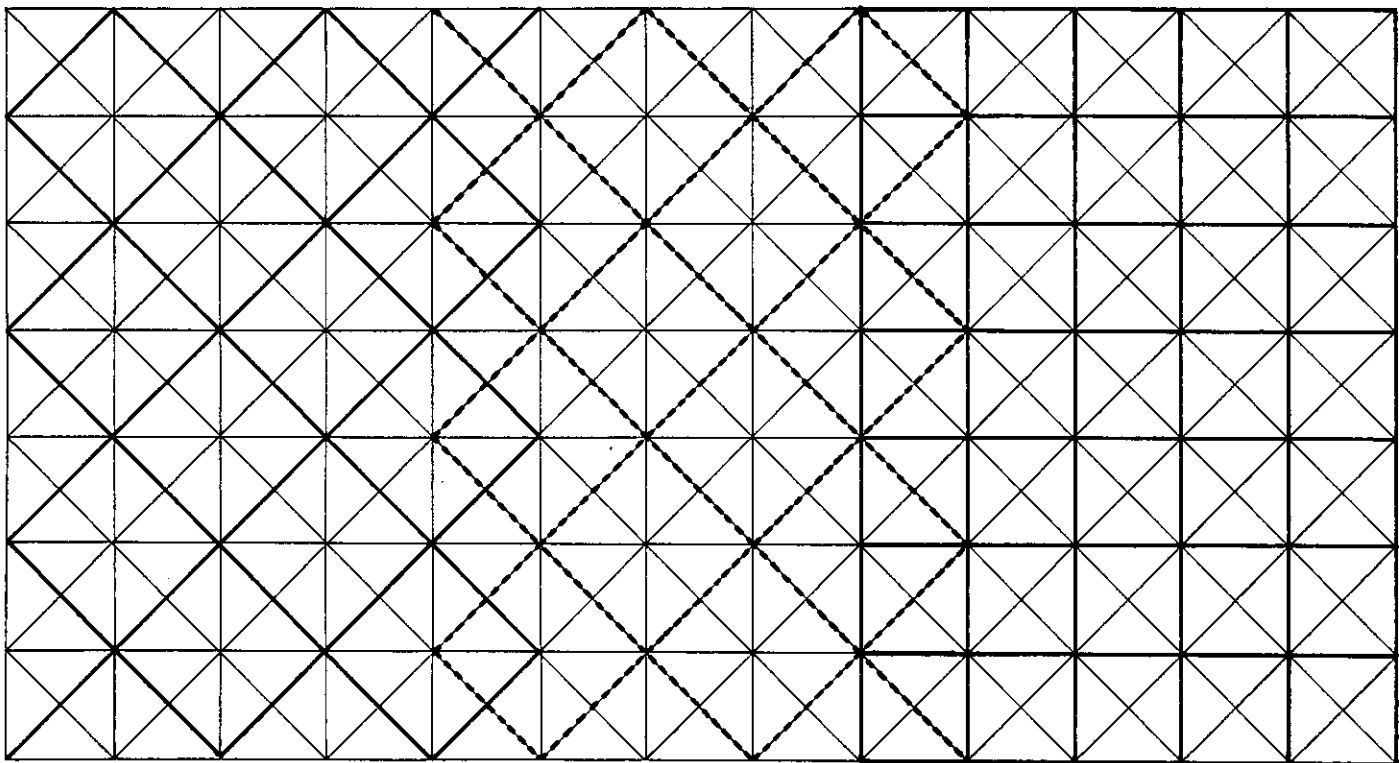


$(3)_6$

$(6)_3$

ROMBOEDRO

FIG 4.1.a



$(4)_4$

$(4)_4$
DUAL

ROMBOEDRO

FIG 4.1.b

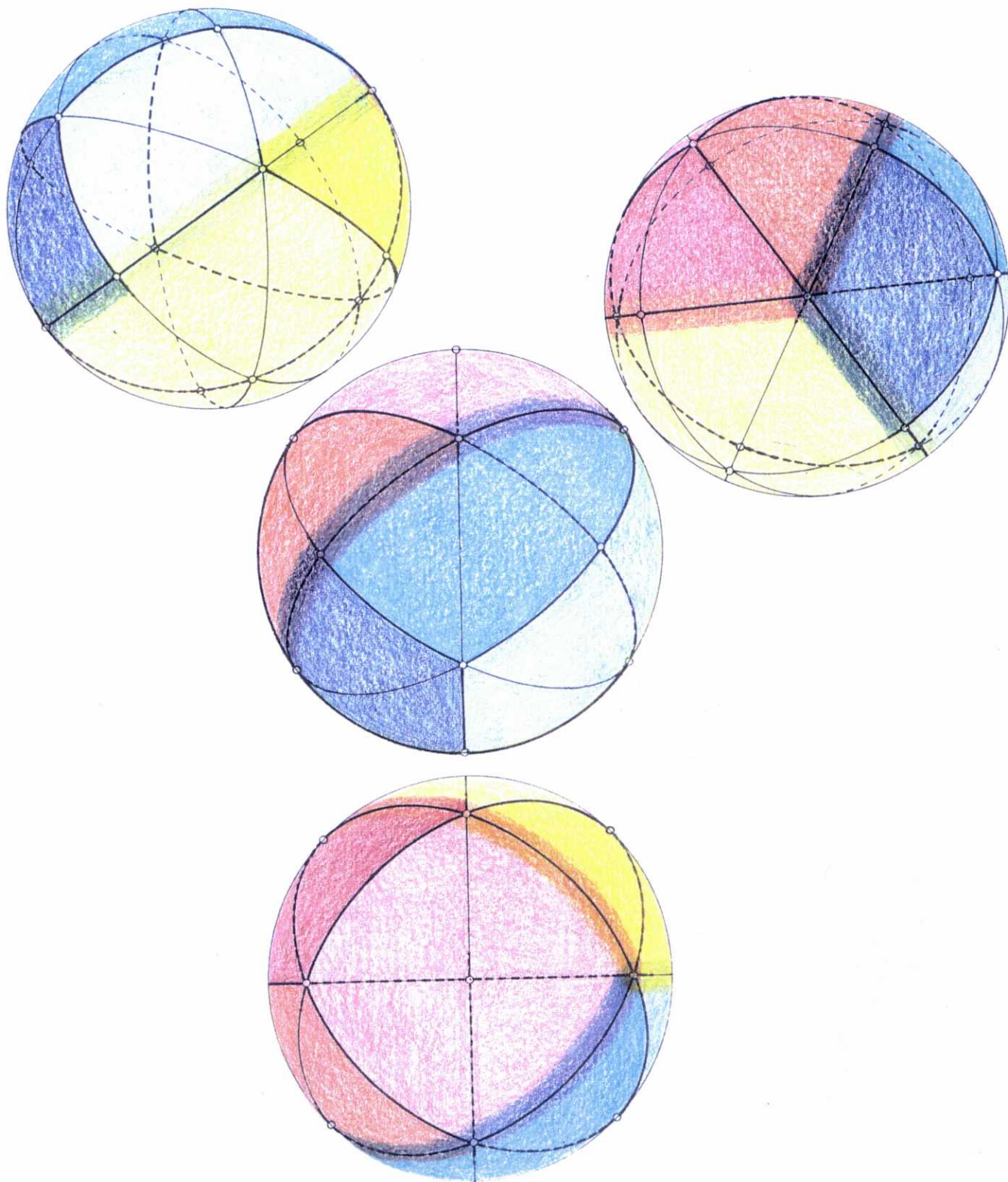


FIG 4.2.a SISTEMA DEL TETRAEDRO

$(3)_3$

$(3)_3$ DUAL

ROMBOEXAEDRO



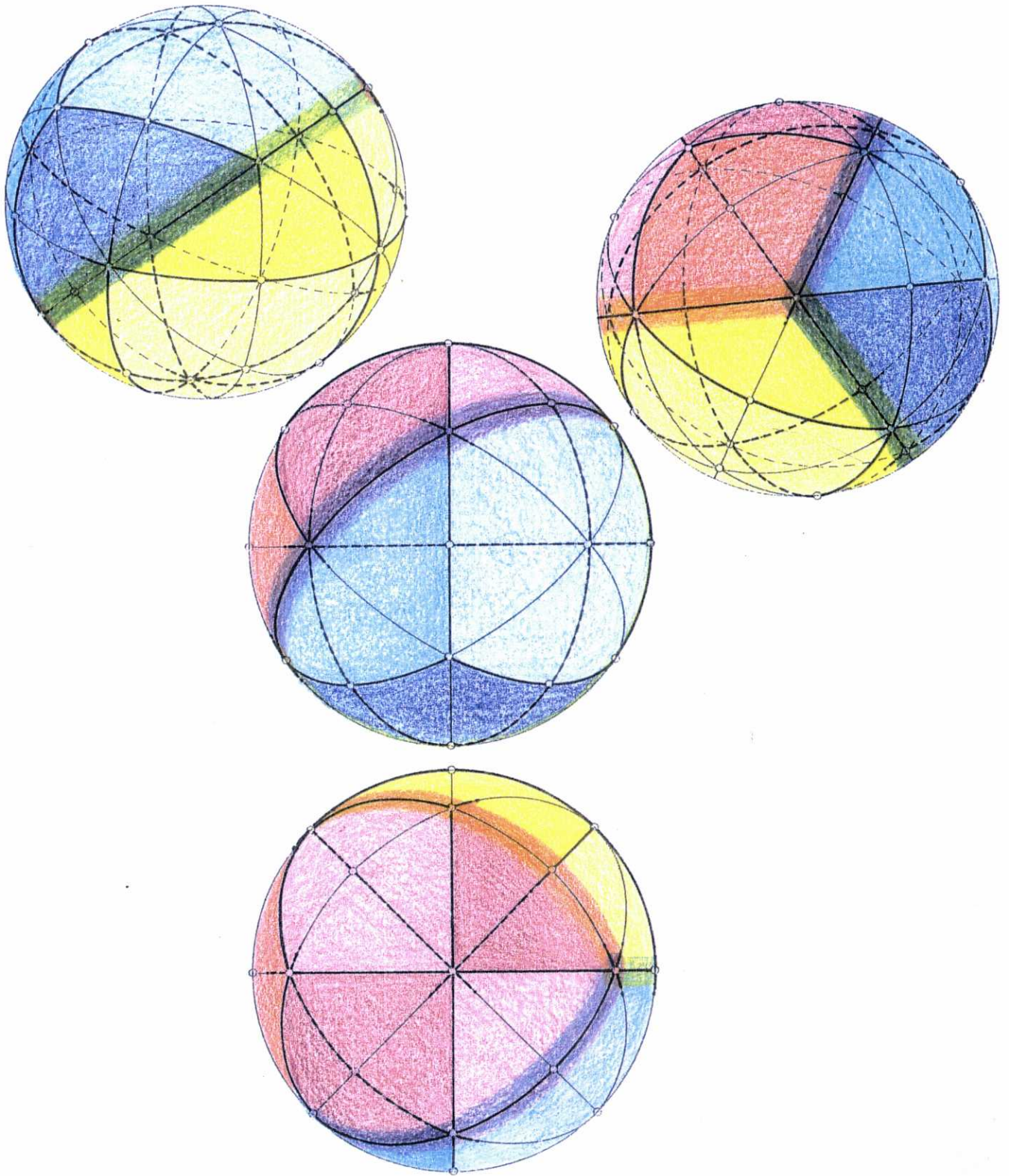


FIG 4.2.b SISTEMA DEL CUBO

$(4)_3$

$(3)_4$

ROMBODODECAEDRO



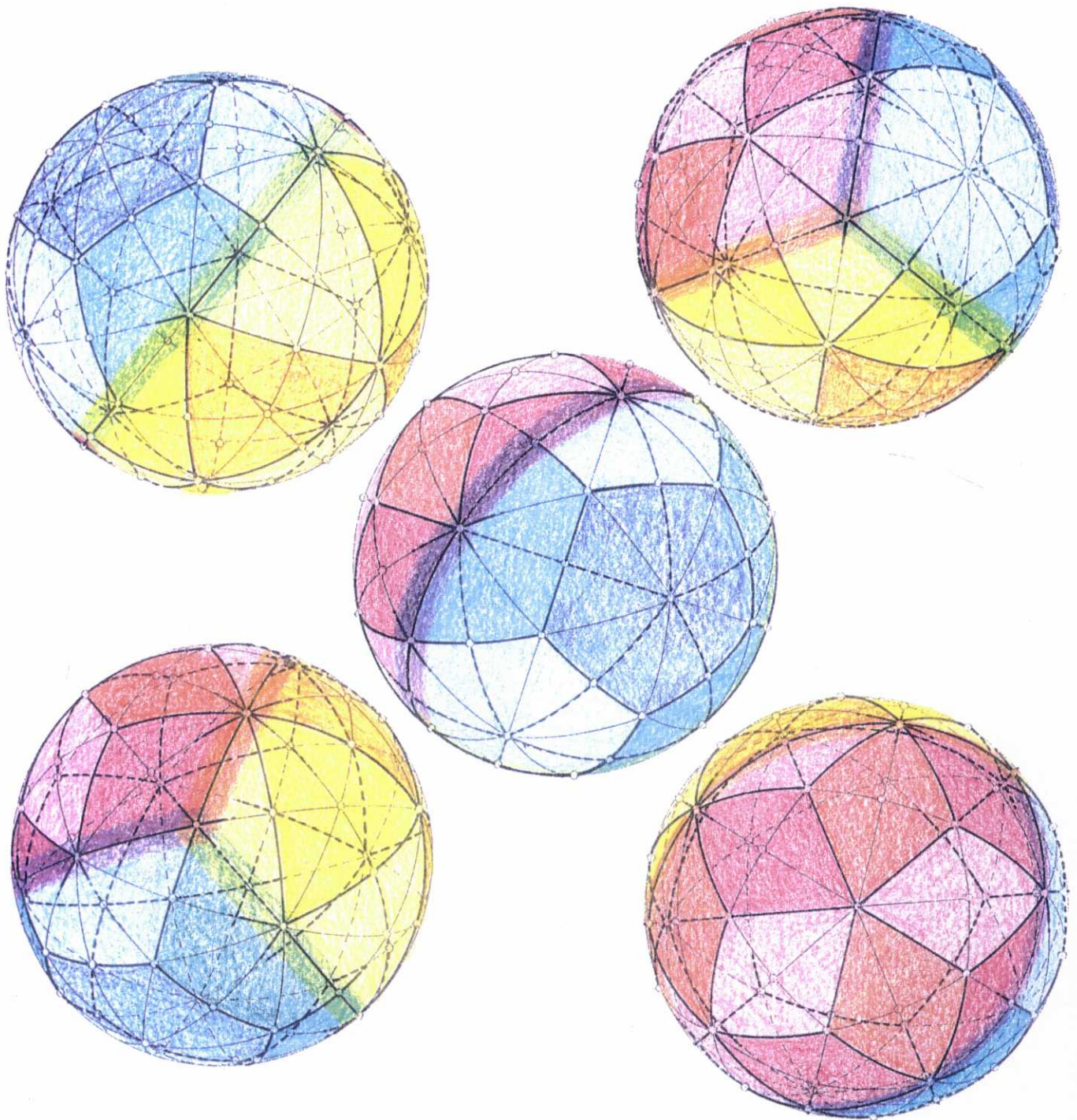


FIG 4.2.c SISTEMA DEL DODECAEDRO

$(5)_3$

$(3)_5$

ROMBOTRIACONTAEDRO



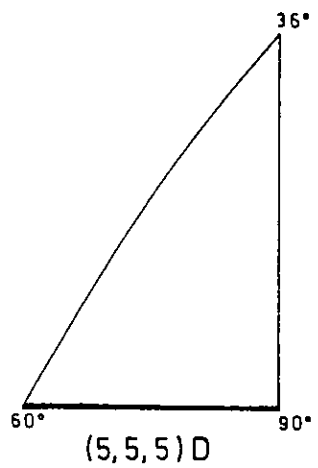
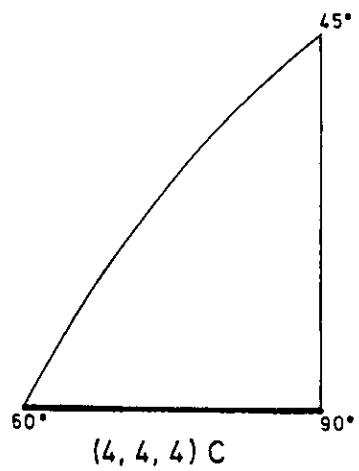
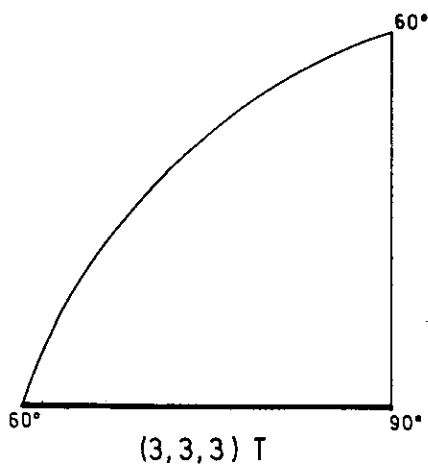
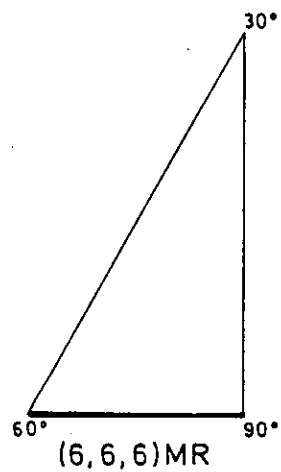
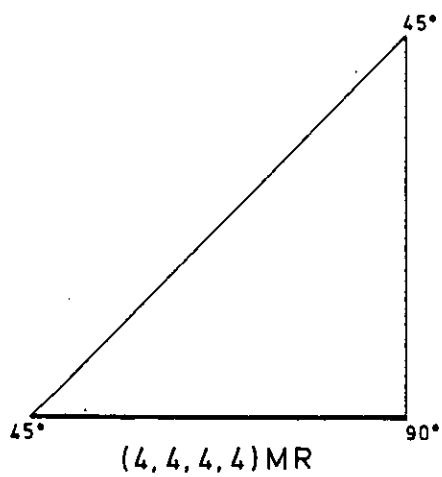


FIG 4.3.a POLIEDROS BASICOS

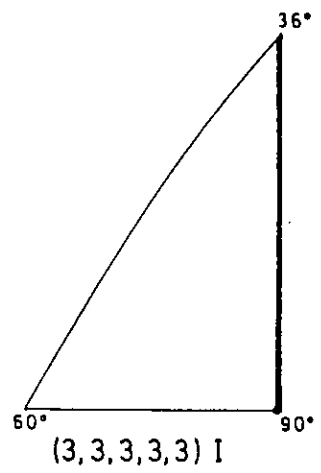
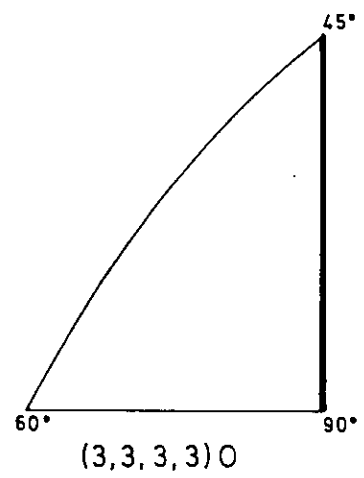
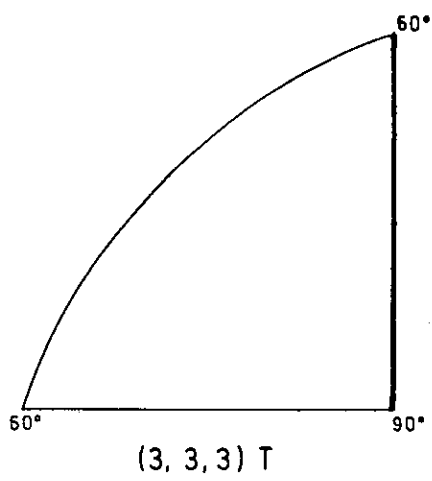
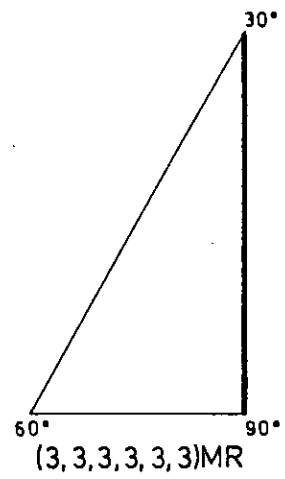
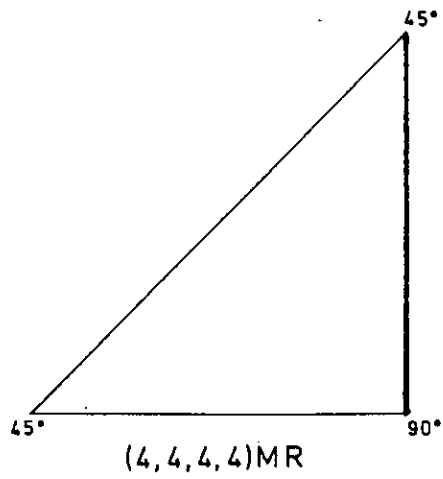


FIG 4.3.b POLIEDROS DUALES DE LOS BASICOS

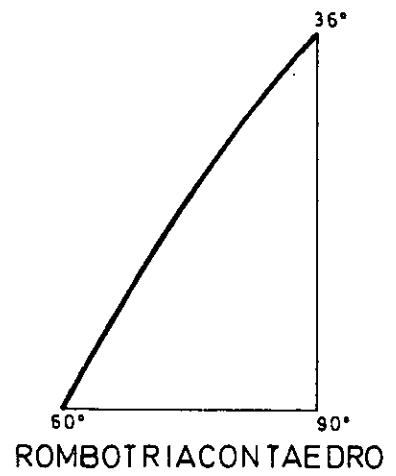
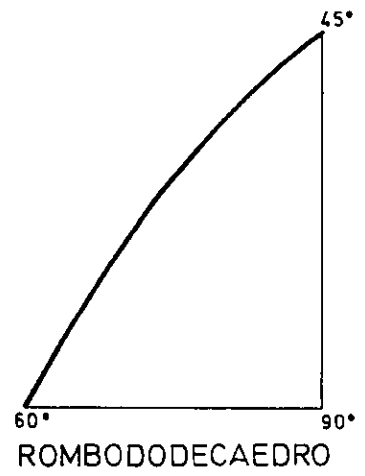
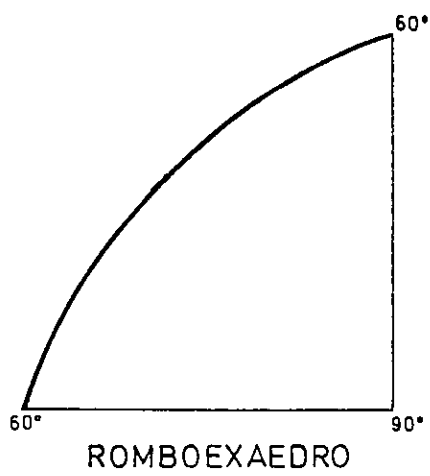
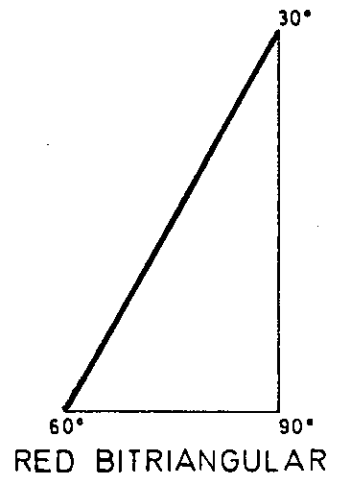
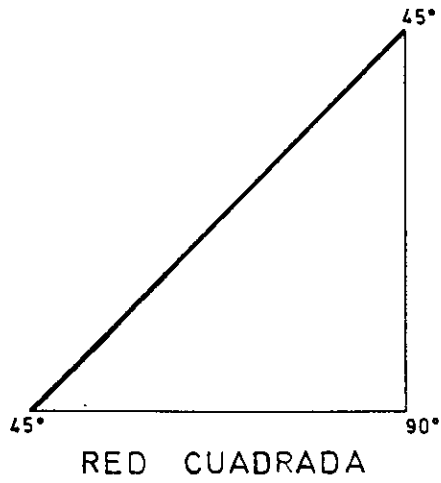


FIG 4.3.c ROMBOEDROS

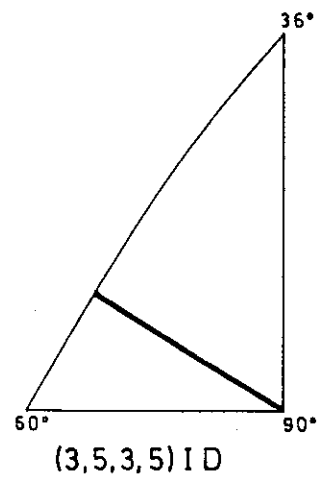
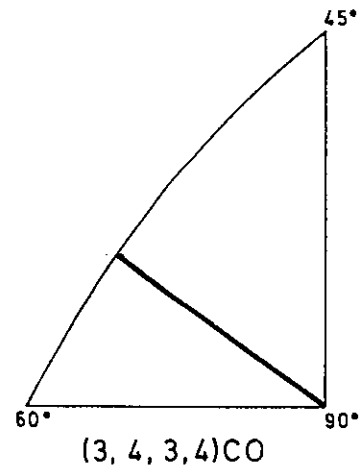
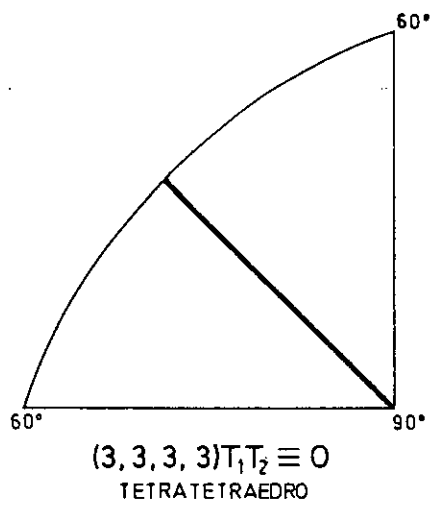
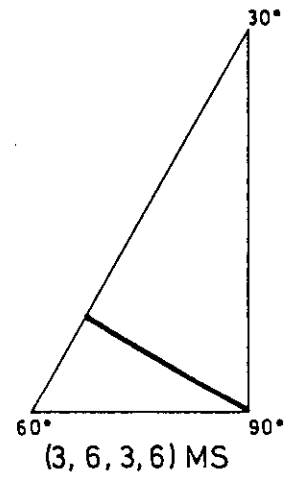
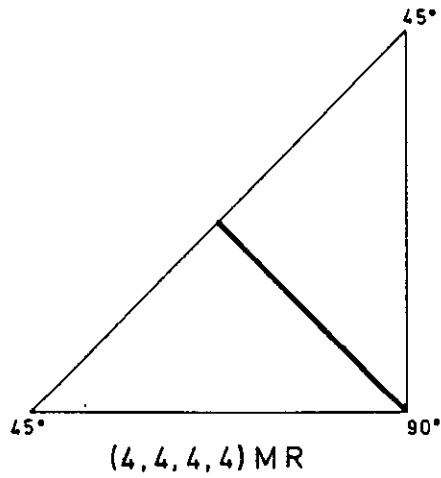


FIG 4.3.d TETRAEDROS (m, n, m, n)
POLIPOLIEDROS

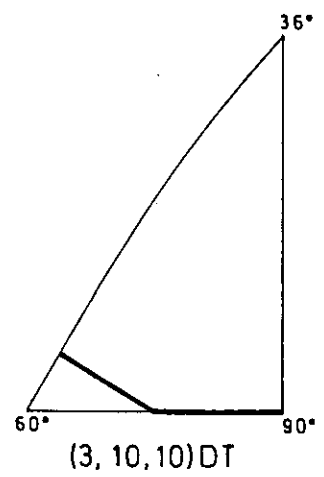
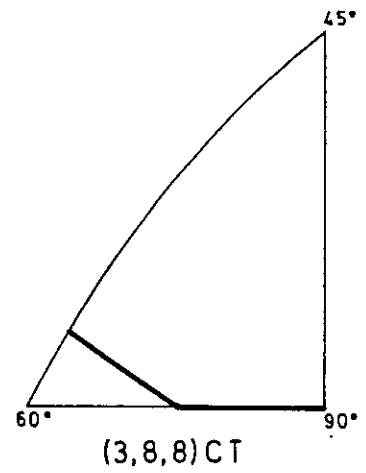
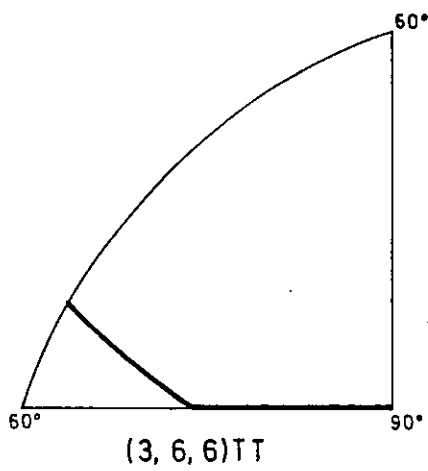
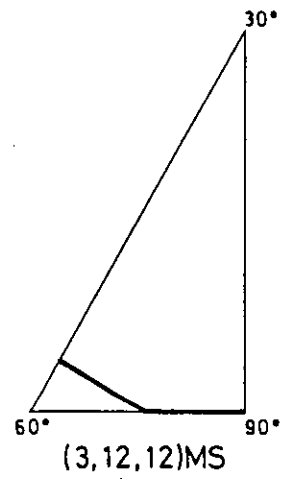
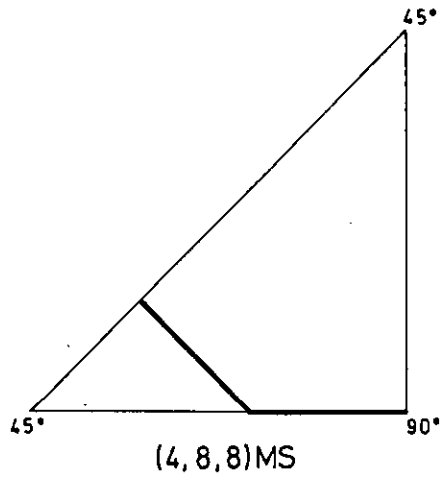


FIG 4.3.e POLIEDROS TRUNCADOS (m,n,n)

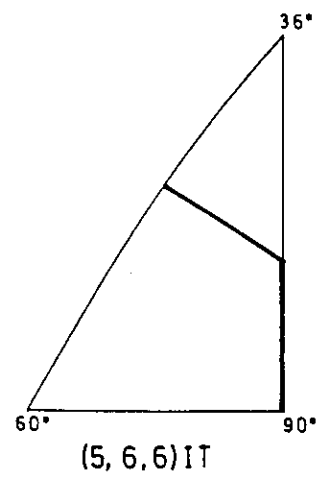
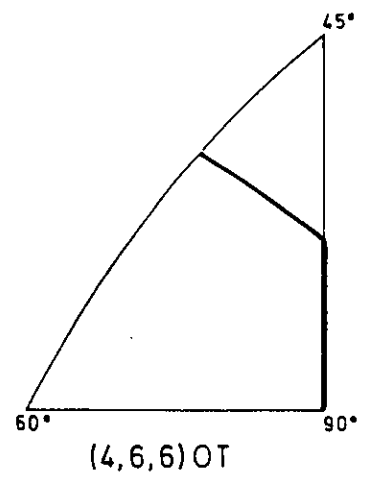
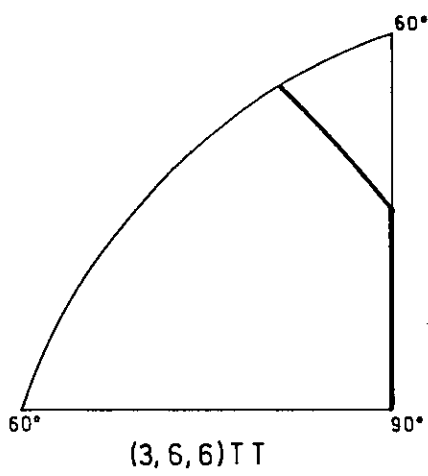
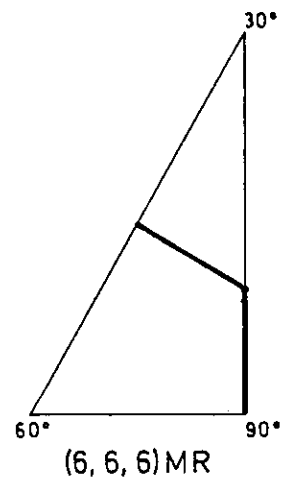
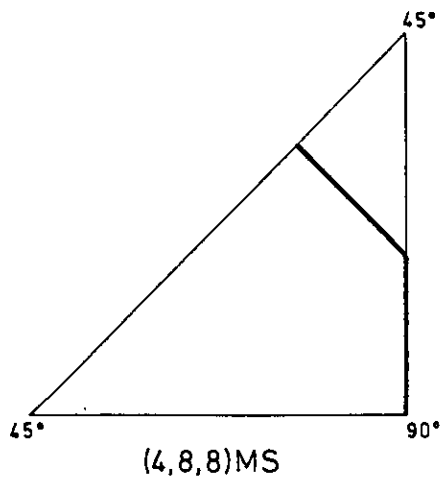


FIG 4.3.f POLIEDROS TRUNCADOS (m,n,n)

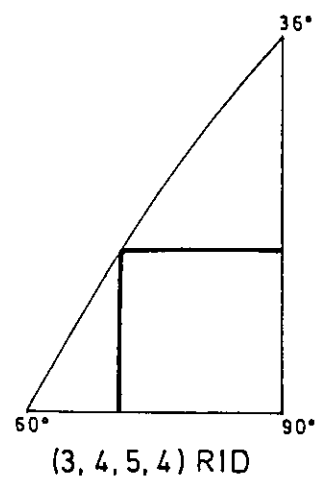
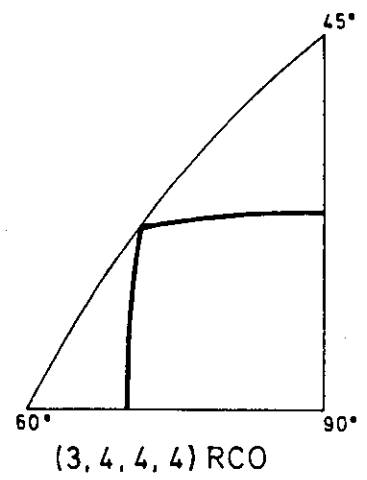
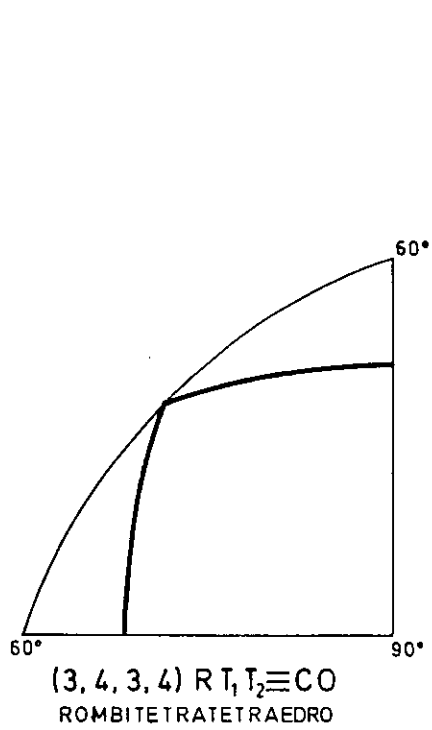
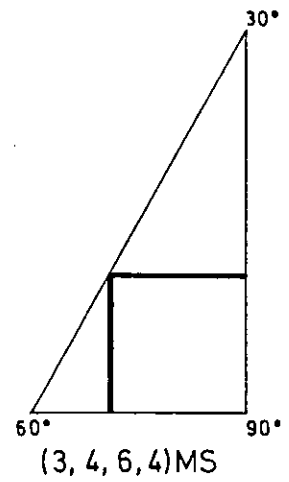
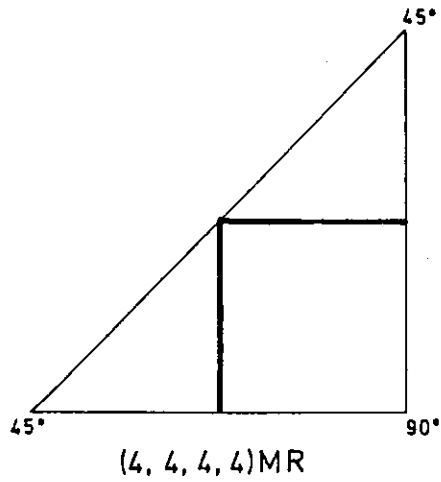


FIG 4.3.g TETRAEDROS (l,m,n,m)
ROMBIPOLIPOLIEDROS

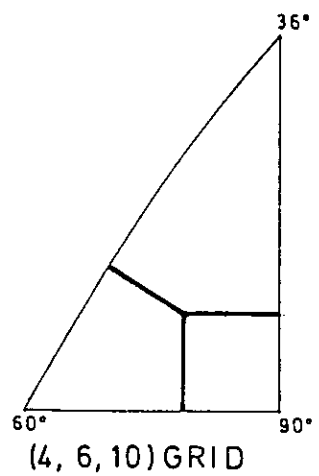
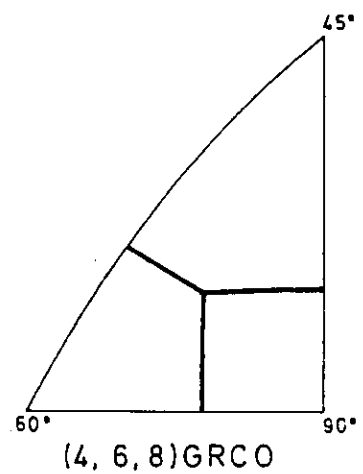
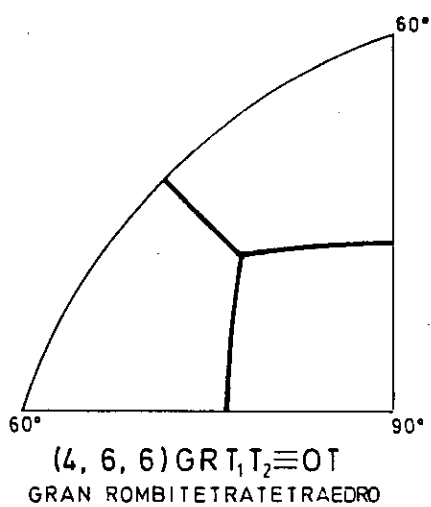
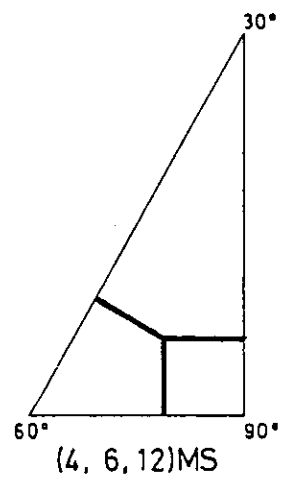
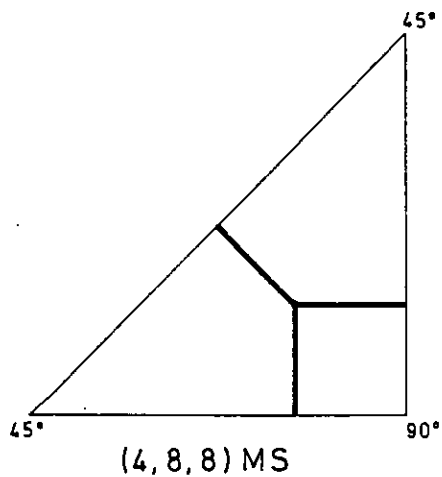


FIG 4.3.h TRIEDROS (l,m,n)
GRANDES ROMBIPOLIPOLIEDROS

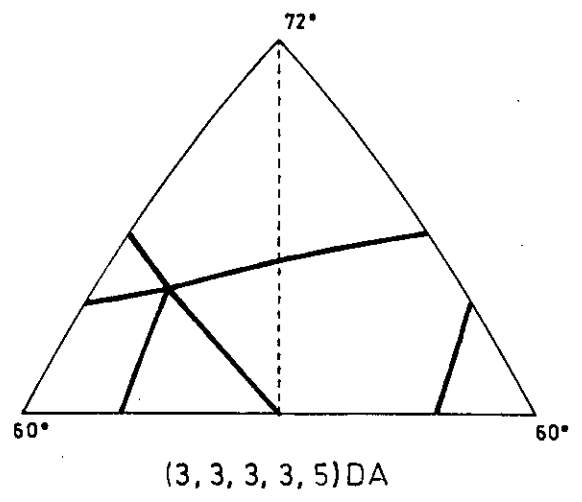
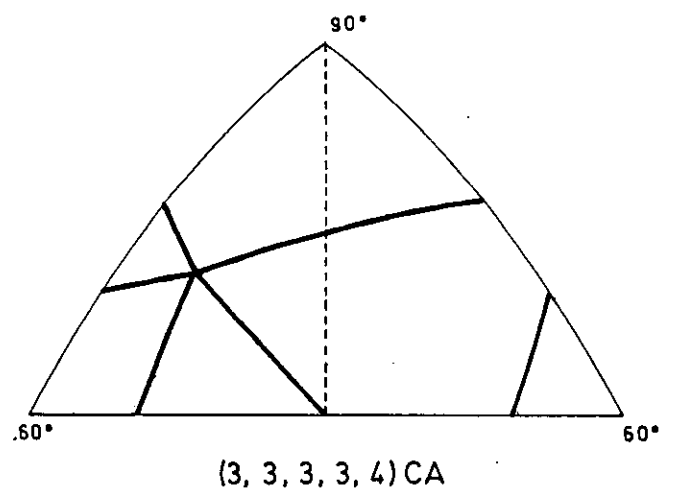
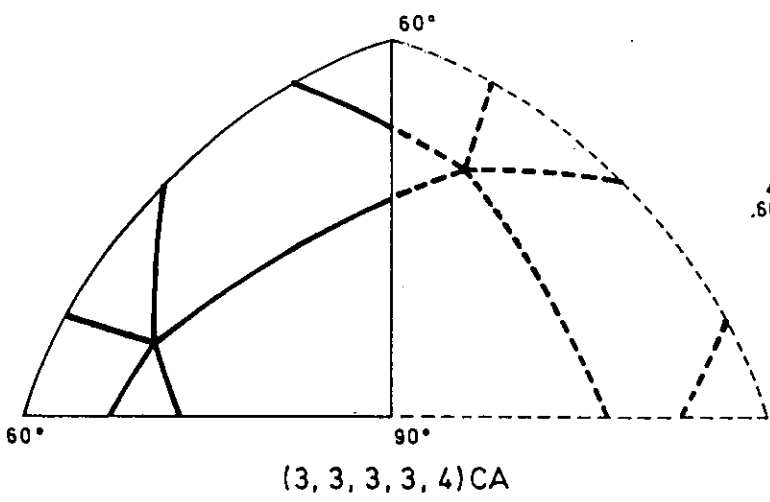
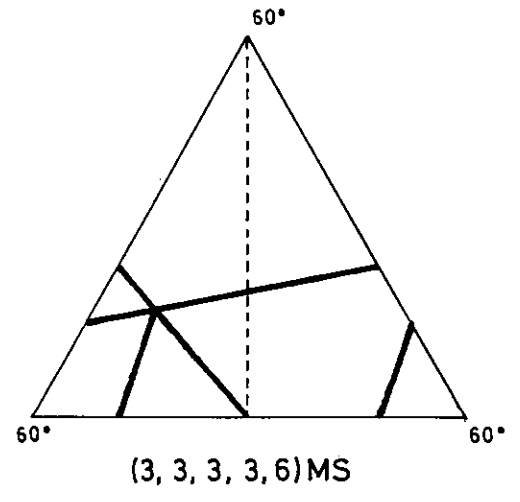
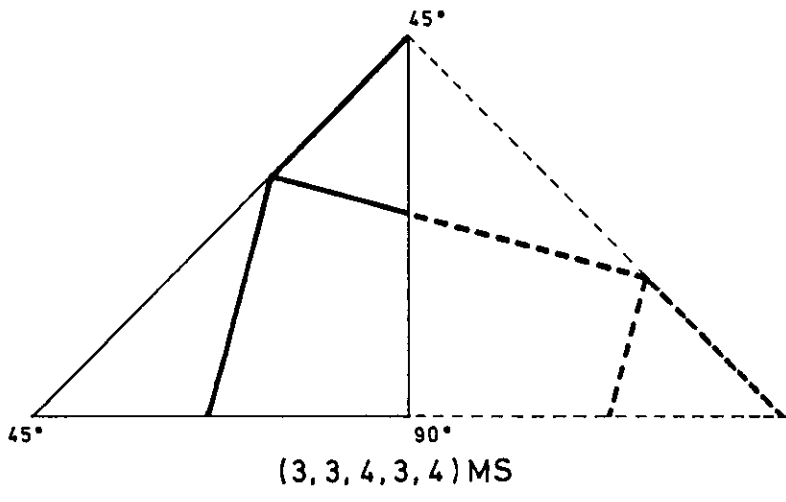


FIG 4.3.i PENTAEDROS
 POLIEDROS ACHATADOS

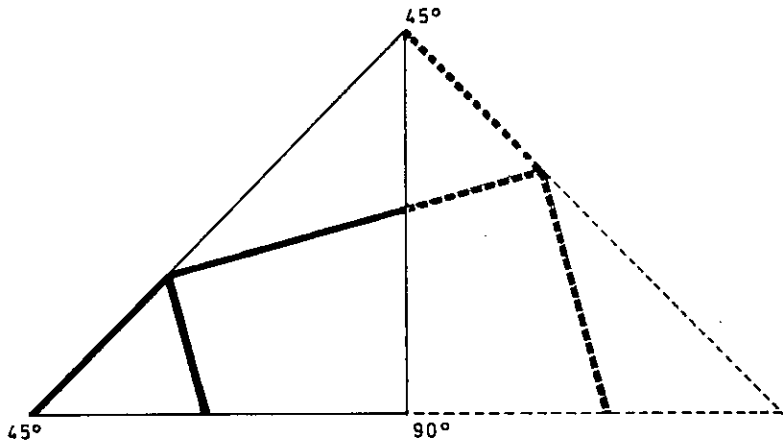
polígonos, coincidiendo cinco aristas por vértice, si bien en el mosaico éste no es un punto interior del módulo, desplazándose a su perímetro, y expulsando totalmente de él a dos fragmentos de arista, dejando a un tercero en posición fronteriza.

Si observamos el vértice superior de los tres módulos de la derecha, vemos que sus ángulos (60° , 72° , 90°) son respectivamente $1/6$, $1/5$ y $1/4$ del ángulo completo, por lo que al funcionar este vértice del doble módulo como centro cíclico aparecen en torno al mismo un exágono, un pentágono y un cuadrado, lo que ya sabíamos; fijémonos en que el doble módulo del sistema del tetraedro tiene en el vértice superior un ángulo de 120° , es decir, $1/3$ de ángulo completo, lo cual sugiere que en torno a él una figura análogo a las tres de la derecha tendría en el vértice superior el centro de un triángulo. Pero la figura correspondiente, $(3, 3, 3, 3, 3)$, a la que en este sistema llamaríamos tetraedro achatado (TA), tiene muchas más simetrías, y es ni más ni menos que el icosaedro.

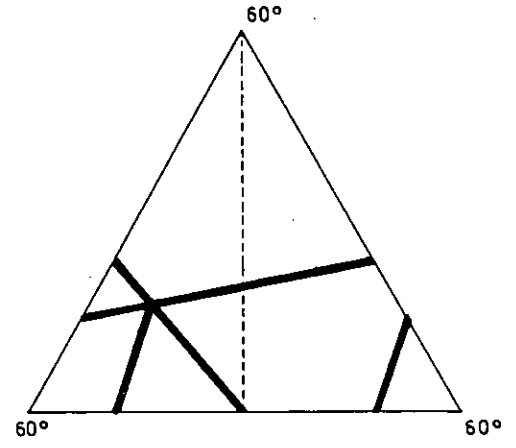
En la figura 4.3.j hemos representado este tetraedro achatado junto a sus congéneres de los otros sistemas esféricos y del sistema plano equilátero (podemos llamarlo más simplemente sistema triangular, reservando el término semiequilátero para los poliedros en que el módulo era la mitad).

Ahora el menos satisfactorio de los cinco módulos, en cuanto a su parentesco con los otros, es $(3, 3, 4, 3, 4)$. Pero reagrupemos de modo diferente las dos partes del módulo en las figuras de la izquierda (utilizando para $(3, 3, 4, 3, 4)$ un par de enantiomorfos), y observemos el resultado en la figura 4.3.k: el módulo doble, que ahora muestra claramente su simetría diedral, es muy semejante; arriba es un cuadrado; abajo, la cara de un rombododecaedro. De esta manera aparece una doble clasificación entre los módulos de estos poliedros: en los planos, módulos regulares; en los abovedados, no regulares; en los de simetría diedral, rombos, y en los cíclicos triángulos.

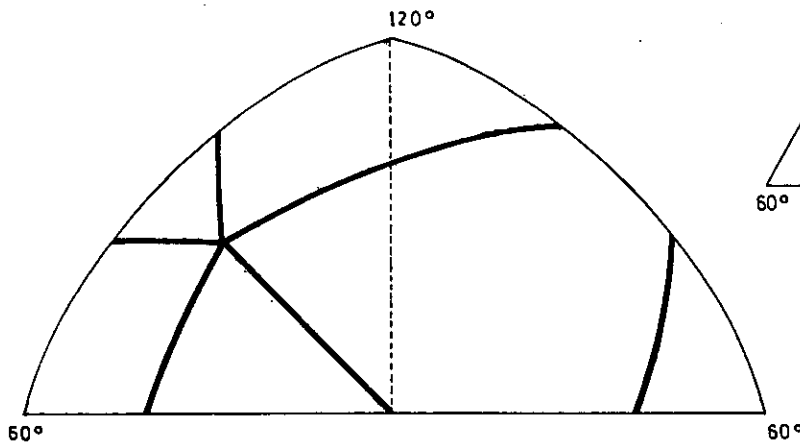
En la figura 4.4. hemos representado al icosaedro como tetraedro achatado, mostrando de nuevo la relación entre los correspondientes sistemas de simetría: de los quince ejes binarios del icosaedro, tres corresponden a un par de tetraedros; de los diez ejes ternarios, cuatro corresponden a un par de tetraedros (un tetraedro siempre los comparte con el tetraedro dual). En definitiva, estos ejes también son del sistema del cubo, que es el romboedro correspondiente.



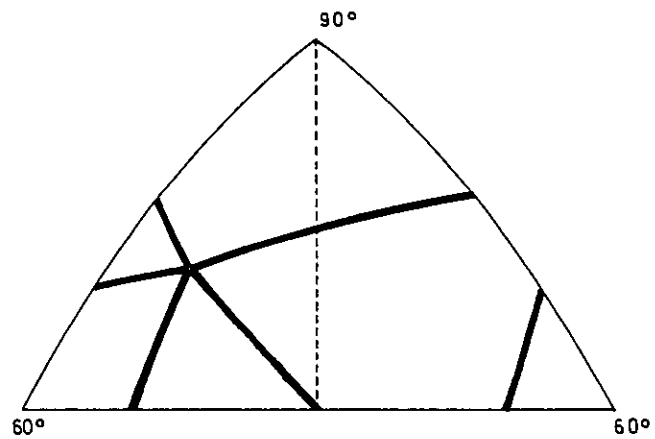
(3, 3, 4, 3, 4) MS



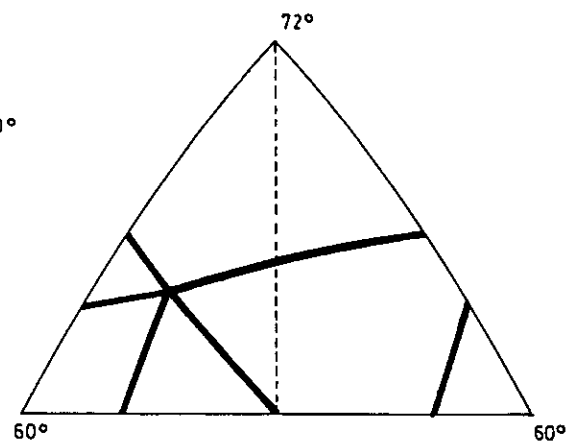
(3, 3, 3, 3, 6) MS



(3, 3, 3, 3, 3) TA \equiv I



(3, 3, 3, 3, 4) CA



(3, 3, 3, 3, 5) DA

FIG 4.3.j LOS POLIEDROS ACHATADOS

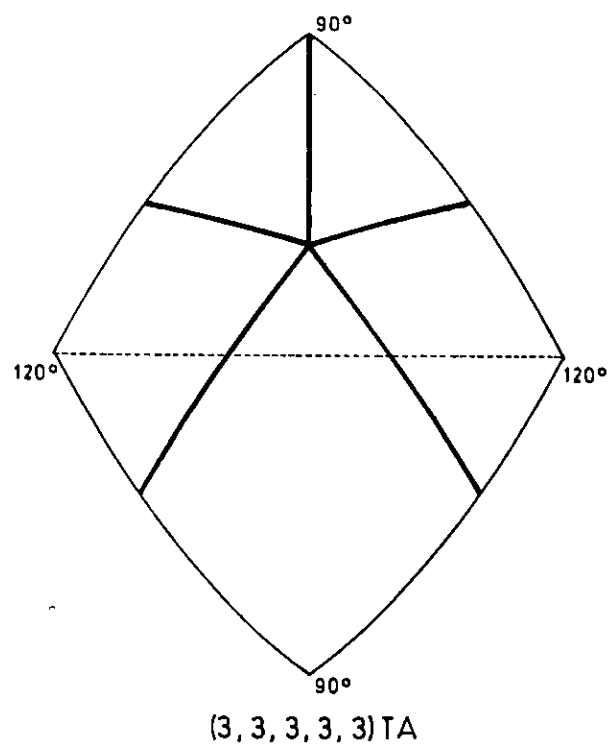
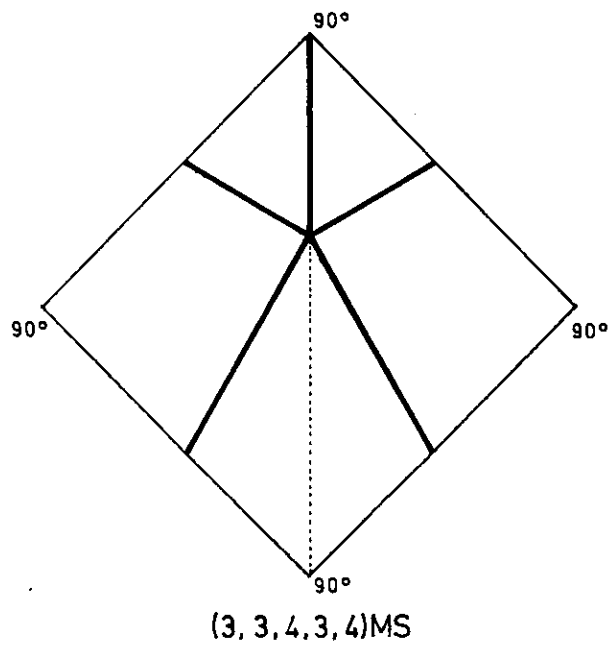


FIG 4.3.k POLIEDROS ACHATADOS CON SIMETRIA DIEDRAL

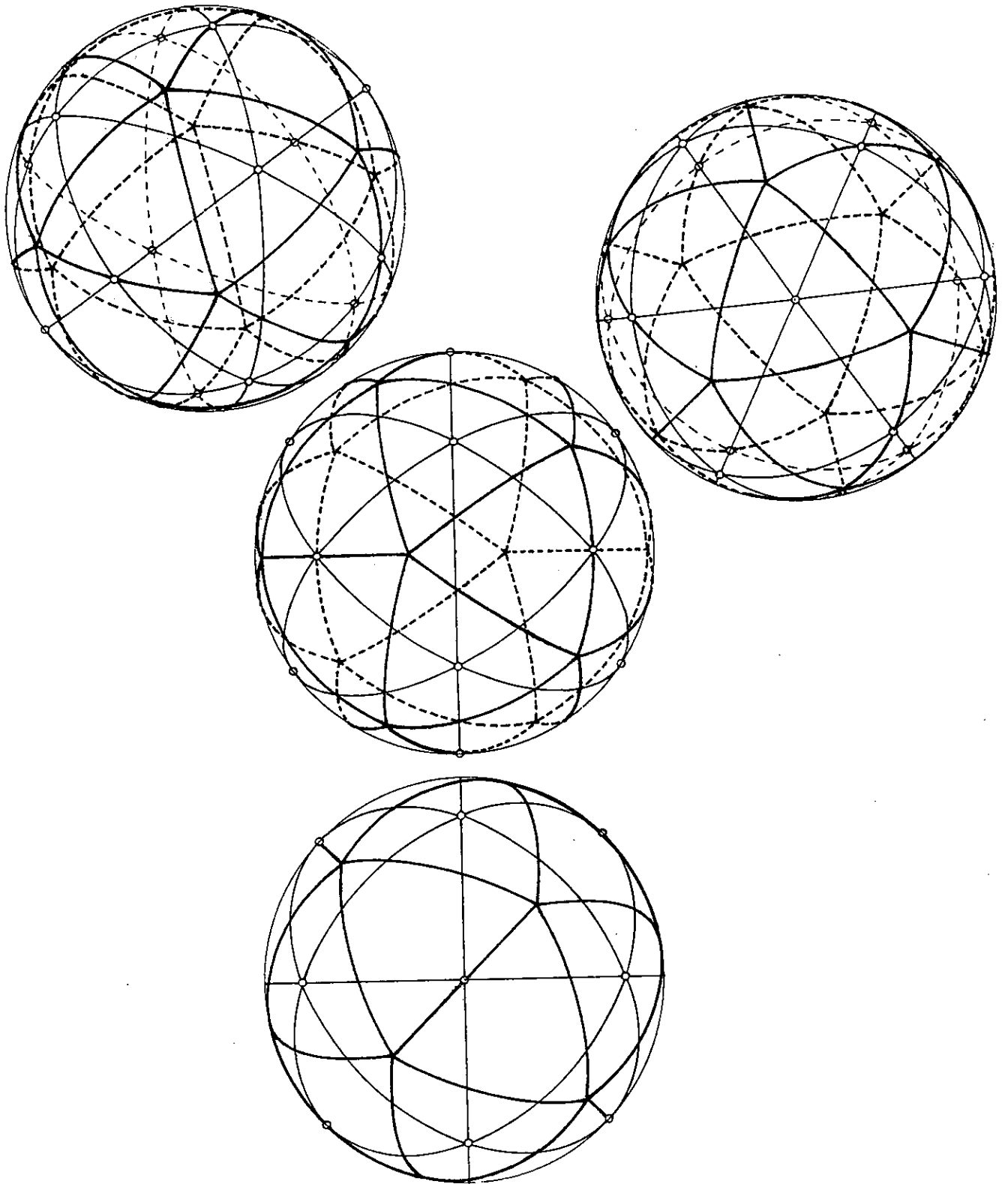


FIG 4.4. SISTEMA DEL TETRAEDRO
TETRAEDRO ACHATADO
ICOSAEDRO

4.3. LOS MÓDULOS DE LOS POLIEDROS ANISÓTROPAS

Veamos ahora qué ocurre con las formas poliédricas no isótropas.

En el único sistema plano (3, 3, 3, 4, 4) podemos obtener un módulo triangular dividiendo el rectángulo $P_4L_{44}P'_4L'_{44}$ por una diagonal, por ejemplo $P_4L_{33}P'_4$ (figura 4.5.). El módulo contiene fragmentos de arista que recuerdan bastante a los demás pentaedros que vimos en 4.2.; se parece a (3,3,4,3,4) en el vértice periférico y la arista compartida con el módulo vecino como frontera de ambos, y a los demás en el fragmento de arista cuyos extremos están en otros módulos.

La proporción que guardan entre sí los catetos del triángulo rectángulo es $2+\sqrt{3}$, y sus ángulos agudos son de 15° y 75° ; obsérvese que los ángulos de los triángulos y cuadriláteros en que las aristas dividen al módulo son siempre múltiplos de $\alpha = 15^\circ$.

Así como solamente hay un sistema anisótropo plano, los sistemas anisótropos abovedados son infinitos, existiendo uno para cada prisma o antiprisma. Como ejemplos hemos representado los poliedros P5 y AP5 (figura 4.7.) y sus módulos.

El módulo de un prisma (figura 4.6.a) es un triángulo esférico birrectángulo, por lo que su exceso esférico viene dado por el tercer ángulo, $180^\circ/n = \pi/n$ radianes, siendo n el número de lados de la base del prisma, lo que representa $1/4n$ esferas. Recuerda este módulo a los de las figuras 4.3.e, f, g: el vértice del poliedro es la intersección de la bisectriz de un ángulo con el lado opuesto, y las semiaristas son las perpendiculares trazadas desde él hasta los otros dos lados, contiguos a dicho ángulo.

El módulo de un antiprisma puede ser el mismo (figura 4.6.b), con vértice sobre uno de los lados iguales y semiaristas que van de él a los otros dos; también puede tomarse como módulo el de la figura 4.6.c, triángulo con dos ángulos suplementarios, siendo uno de sus lados arista del poliedro y la altura correspondiente al vértice obtusángulo otra semiarista.

Para el prisma el valor del ángulo β puede obtenerse por el procedimiento descrito en 1.2.13.1. (figura 1.2.4.), haciendo $a = b = 4$, $c = n$ (5 en este caso), $d_1 = d_2 = \sqrt{2}$, y d_3 es la semidiagonal mínima de la base del prisma (en este caso ϕ), y $\beta = 180^\circ - 2\delta_1 = 2\arcsen \frac{d_1}{\rho} = 2\arcsen \frac{\sqrt{2}}{\rho}$.

Para el antiprisma el ángulo γ se obtiene siguiendo el procedimiento de 1.2.13.2.2. (figura 1.2.6.) con $a = 3$, $b = n$ (5 en este caso), $d_1 = 1$, d_2 , para el pentágono, vale ϕ , y $\gamma = \widehat{V_1CV_2} = 2\arcsen \frac{d_1}{\rho} = 2\arcsen 1/\rho$.

En nuestro caso resulta ser $\gamma = 36^\circ$, y comprobamos con ello que el antiprisma pentagonal coincide con la faja ecuatorial que forman diez triángulos consecutivos de un icosaedro, que se completaría superponiendo a sus bases dos

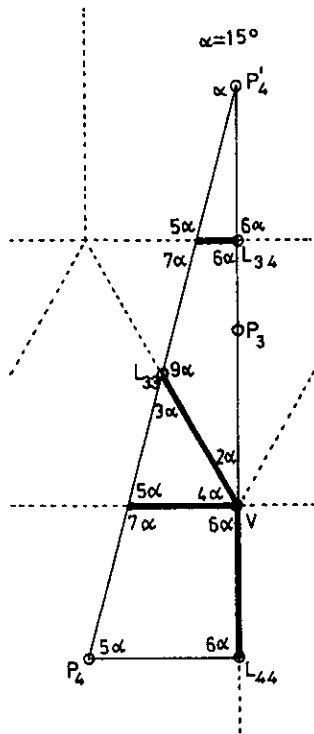


FIG 4.5. (3, 3, 3, 4, 4) MS

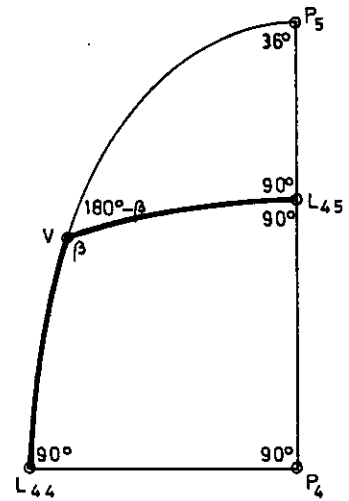


FIG 4.6.a (4, 4, 5) P5

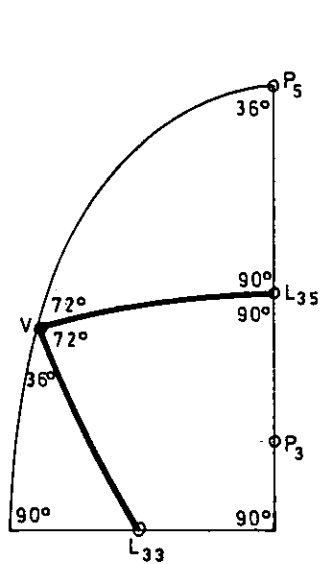


FIG 4.6.b (3, 3, 3, 5) AP5

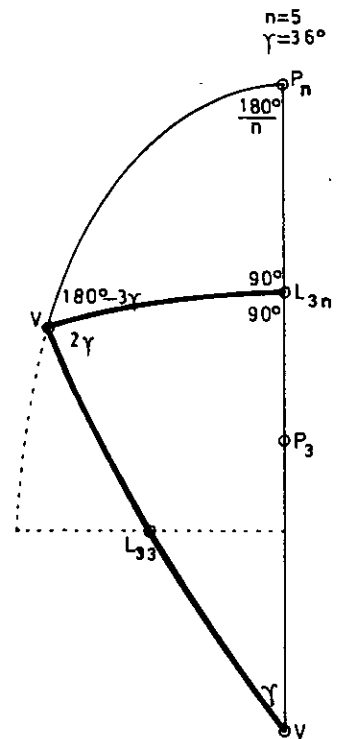


FIG 4.6.c (3, 3, 3, 5) AP5

MODULOS DE SISTEMAS ANISOTROPOS

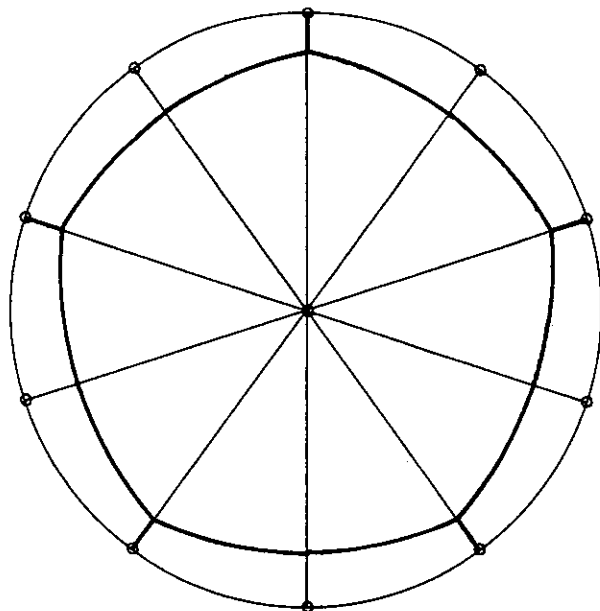
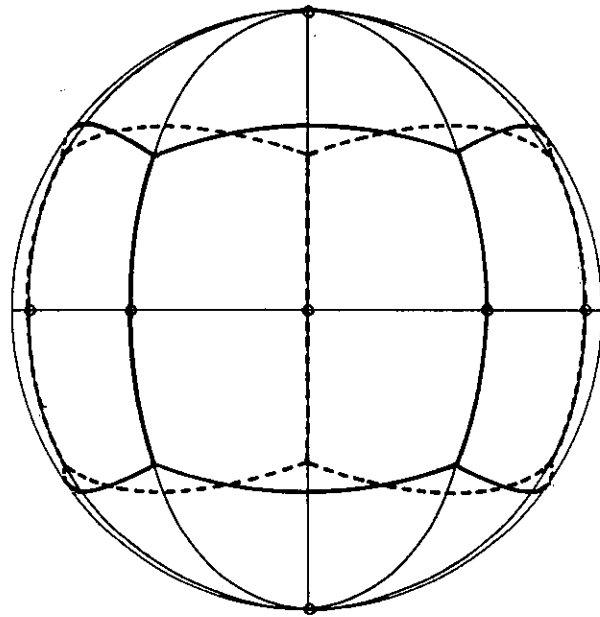


FIG 4.7.a PRISMA PENTAGONAL

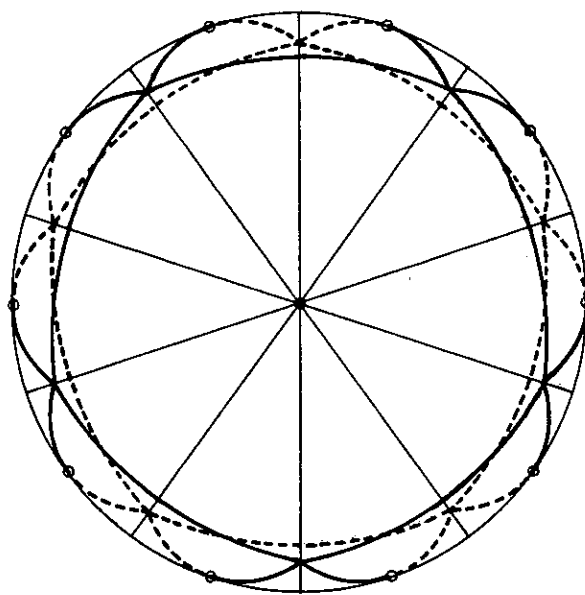
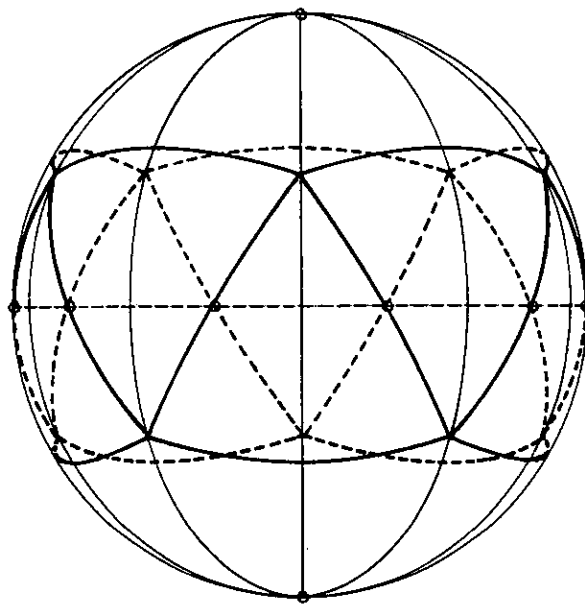


FIG 4.7.b ANTIPRISMA PENTAGONAL

pirámides pentagonales de caras equiláteras. Análogamente, AP3 es el octaedro, con un valor de $\gamma = 45^\circ$.

En cuanto a los prismas, sabido es que (4, 4, 4) P4 es el cubo, y también (4, 4, 8) P8 es la faja ecuatorial del poliedro (3, 4, 4, 4) C0.

5. POLIEDROS REGULARES DUALES Y ROMBOEDROS

Hasta ahora hemos centrado nuestra atención en la relación de los poliedros con el plano y la esfera. En el caso del plano éste coincidía con la propia superficie del poliedro, pero en el caso de la esfera de radio finito los planos que pasan por su centro determinan elementos diferentes sobre la esfera y sobre el propio poliedro. Sobre aquélla arcos de circunferencia máxima, sobre éste segmentos. En los poliedros regulares y semirregulares ambos tenían extremos comunes, que eran los vértices, pero en los romboedros con dos tipos de vértices éstos se hallaban sobre esferas diferentes. Vamos a presentar ahora, limitándonos a los tres sistemas abovedados isótropos, los poliedros fundamentales, no representando sus proyecciones sobre la esfera, sino directamente sus aristas rectas y sus caras planas, utilizando el sistema diédrico, del mismo modo que se hizo en 3.3.

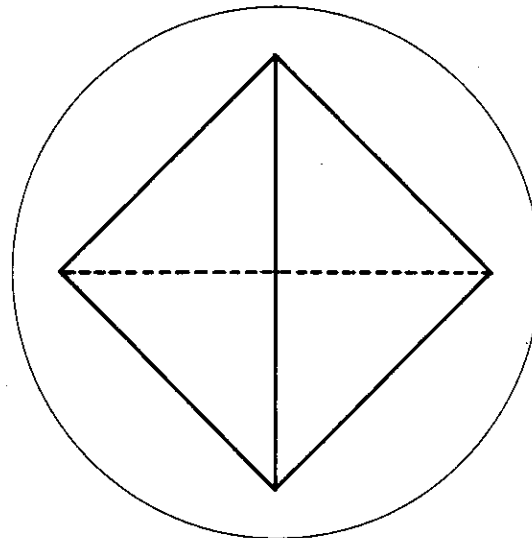
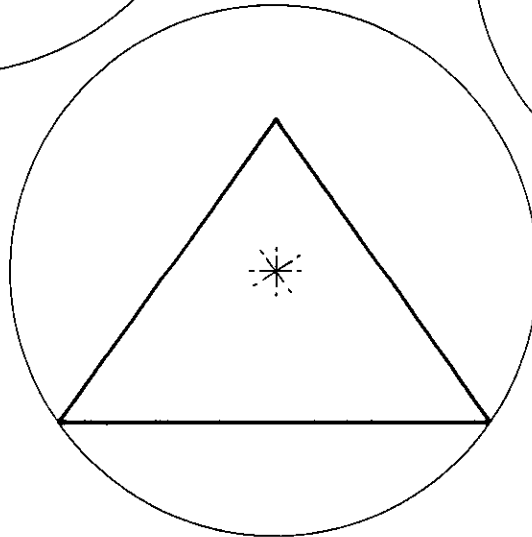
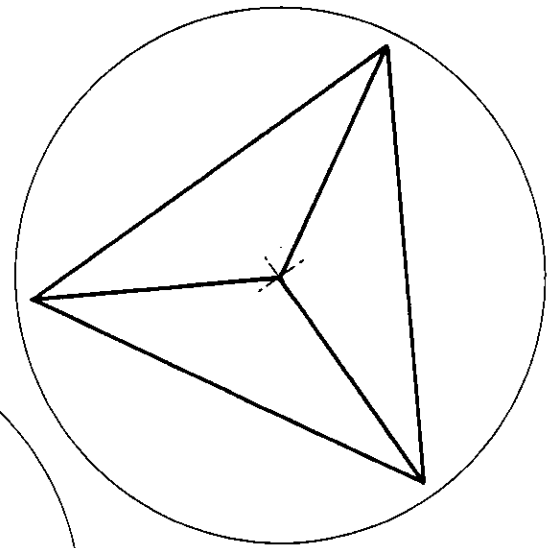
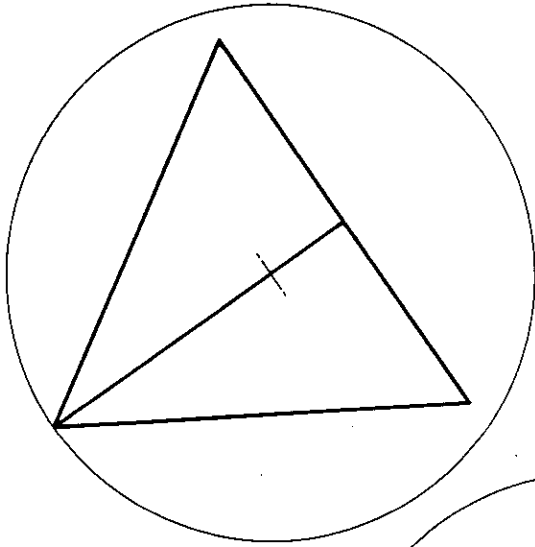
Para cada sistema hay dos poliedros duales entre sí. Coloquémoslos con sus centros y elementos de simetría coincidentes. Variando los radios de las esferas de los vértices, caras y aristas obtendremos infinitos poliedros homotéticos. Escojamos uno de cada clase haciendo iguales los radios de las correspondientes esferas de las aristas. Coincidirán entonces los centros L de éstas sobre dicha esfera. Estas aristas duales serán las diagonales de las caras del romboedro del sistema, cuyos planos serán tangentes a ella. Por consiguiente, la esfera de las caras del romboedro es la esfera de las aristas de los poliedros duales, que sin embargo no tendrán en común las esferas de vértices ni caras, salvo que ambos poliedros duales sean de la misma clase. Así, el romboedro tiene dos esferas de vértices, en común cada una con uno de los poliedros duales, y una esfera de las caras, que como hemos dicho es esfera de las aristas de ambos, coincidiendo las dos esferas de vértices en el sistema del tetraedro.

En las figuras que siguen hemos representado, para cada sistema, centro de las correspondientes esferas de sus vértices, sucesivamente el poliedro básico, el poliedro dual, el poliedro estrellado, no convexo, que forman conjuntamente (unión), y el poliedro que encierran ambos (intersección). En estos dos últimos casos aparecen como nuevos vértices los puntos L , y nuevas aristas que los unen. Entonces la esfera de las caras del romboedro, que era esfera de las aristas de los poliedros duales, surge como una tercera esfera de los vértices en la unión y como la única en la intersección. Además de estos cuatro poliedros (básico, dual, unión, intersección), hemos dibujado el romboedro del sistema (envolvente convexo mínimo de caras planas de todos ellos) y por último un diagrama plano que relaciona en cada proyección los vértices de tal romboedro.

Volvemos a ver que el tetraedro es dual de sí mismo, con lo que su romboedro es regular (romboexaedro = cubo). La intersección de ambos tetraedros es el octaedro (tetratetraedro), que también es regular. En los otros sistemas no ocurre así, apareciendo el par cubo y octaedro, con su rombododecaedro no regular y su intersección semirregular (cuboctaedro), y el par dodecaedro e icosaedro, con su rombotriacontaedro no regular y su intersección semirregular, el icosidodecaedro.

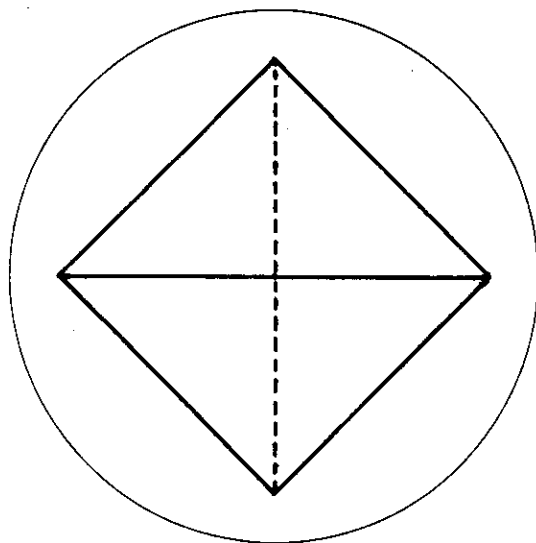
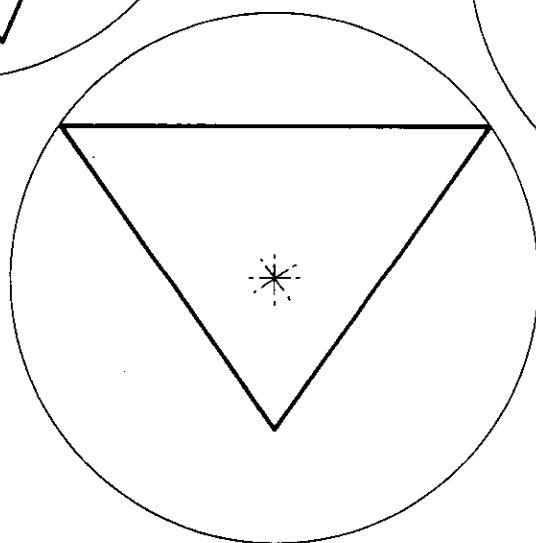
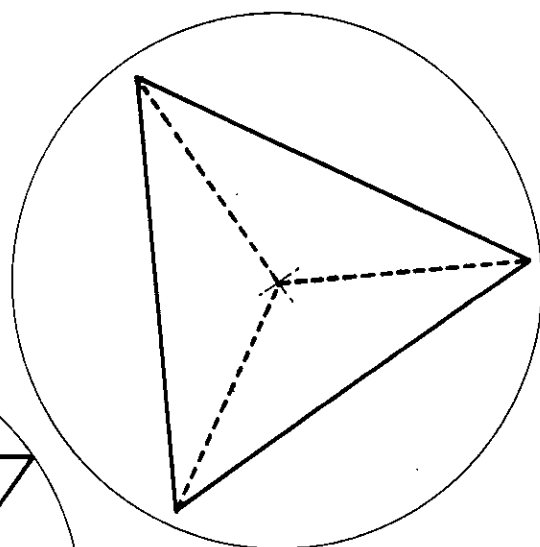
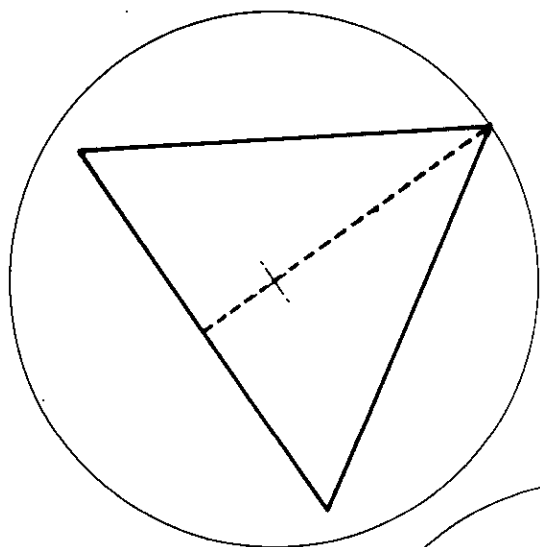
Aunque no los representamos en este lugar, podemos adelantar que los demás poliedros semirregulares de cada sistema (y de ahí sus nombres), son intersecciones de algunos de estos elementos, poliedro básico, dual y romboedro, estableciendo entre los radios de sus esferas una relación tal que coincidan sus intersecciones sobre otra esfera, y las distancias entre cada uno de estos vértices y los más próximos a él sean iguales.

SISTEMA DEL TETRAEDRO



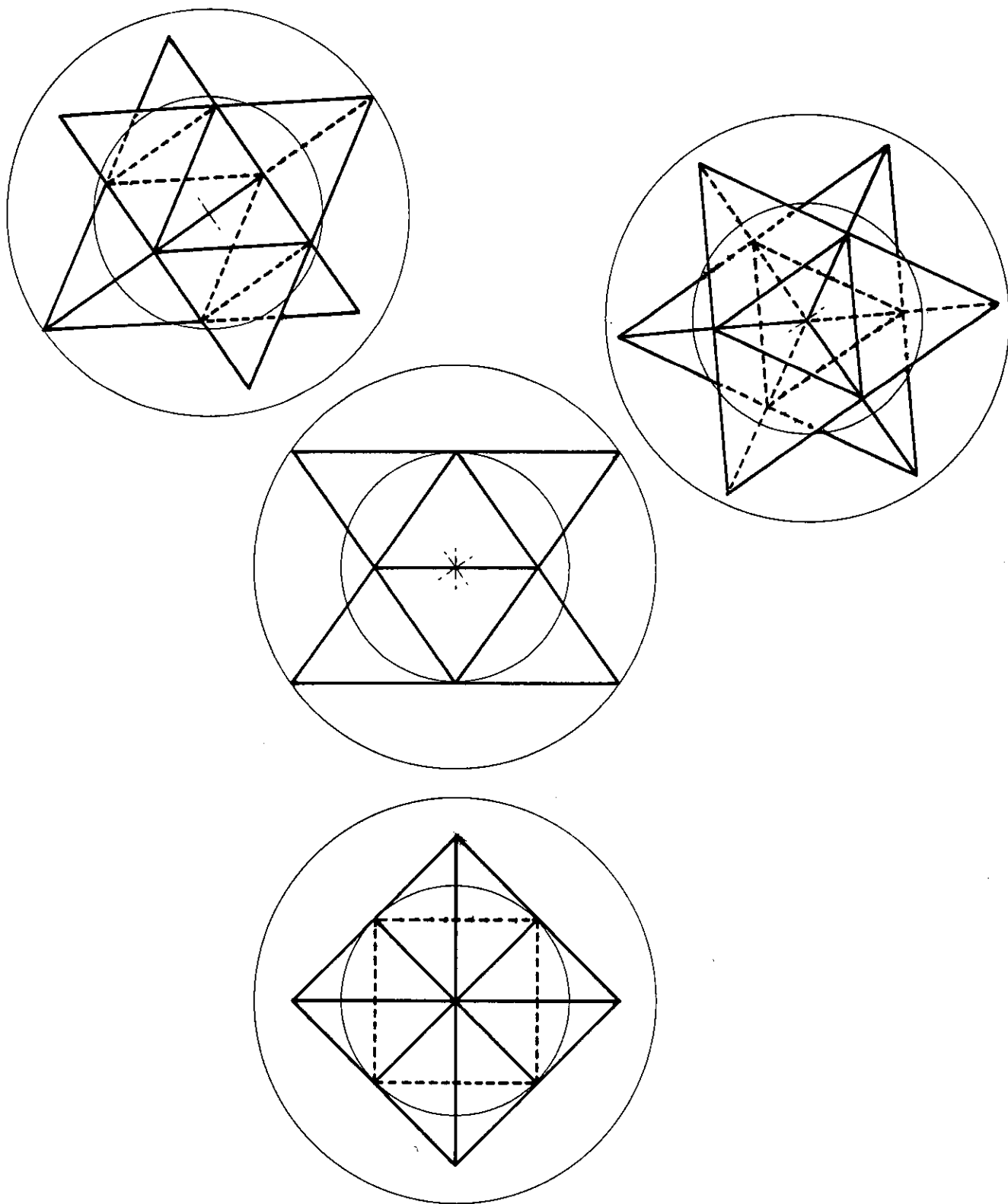
TETRAEDRO

SISTEMA DEL TETRAEDRO



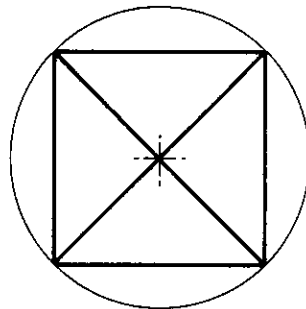
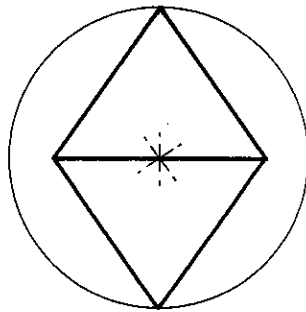
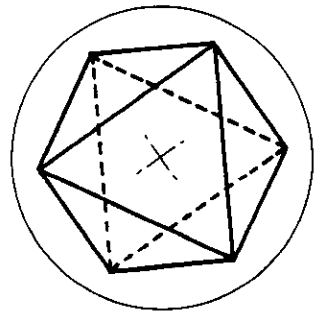
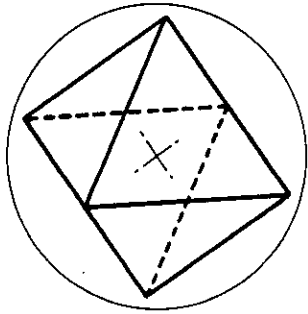
TETRAEDRO DUAL

SISTEMA DEL TETRAEDRO



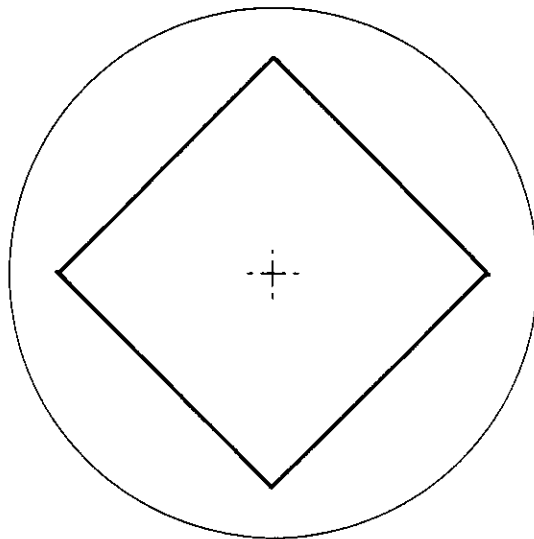
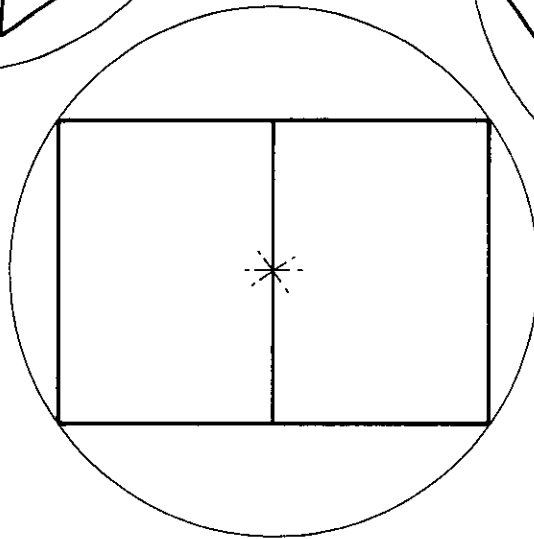
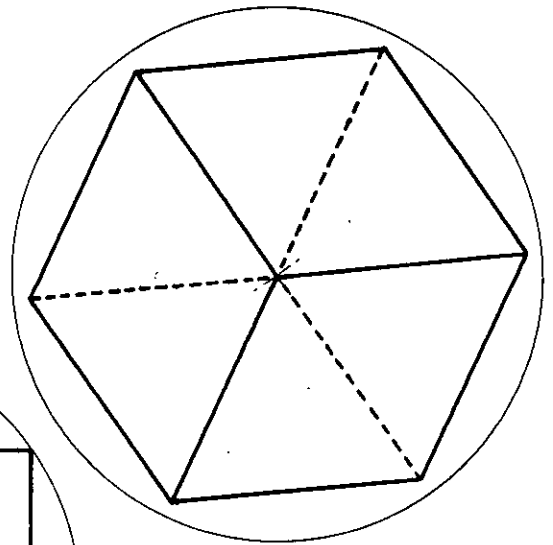
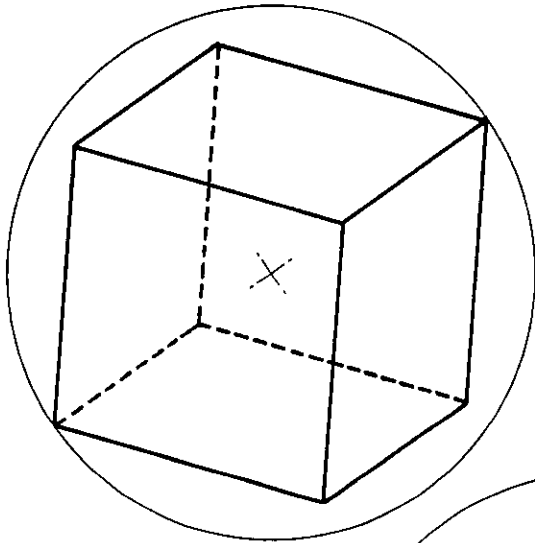
UNION DE TETRAEDROS DUALES

SISTEMA DEL TETRAEDRO



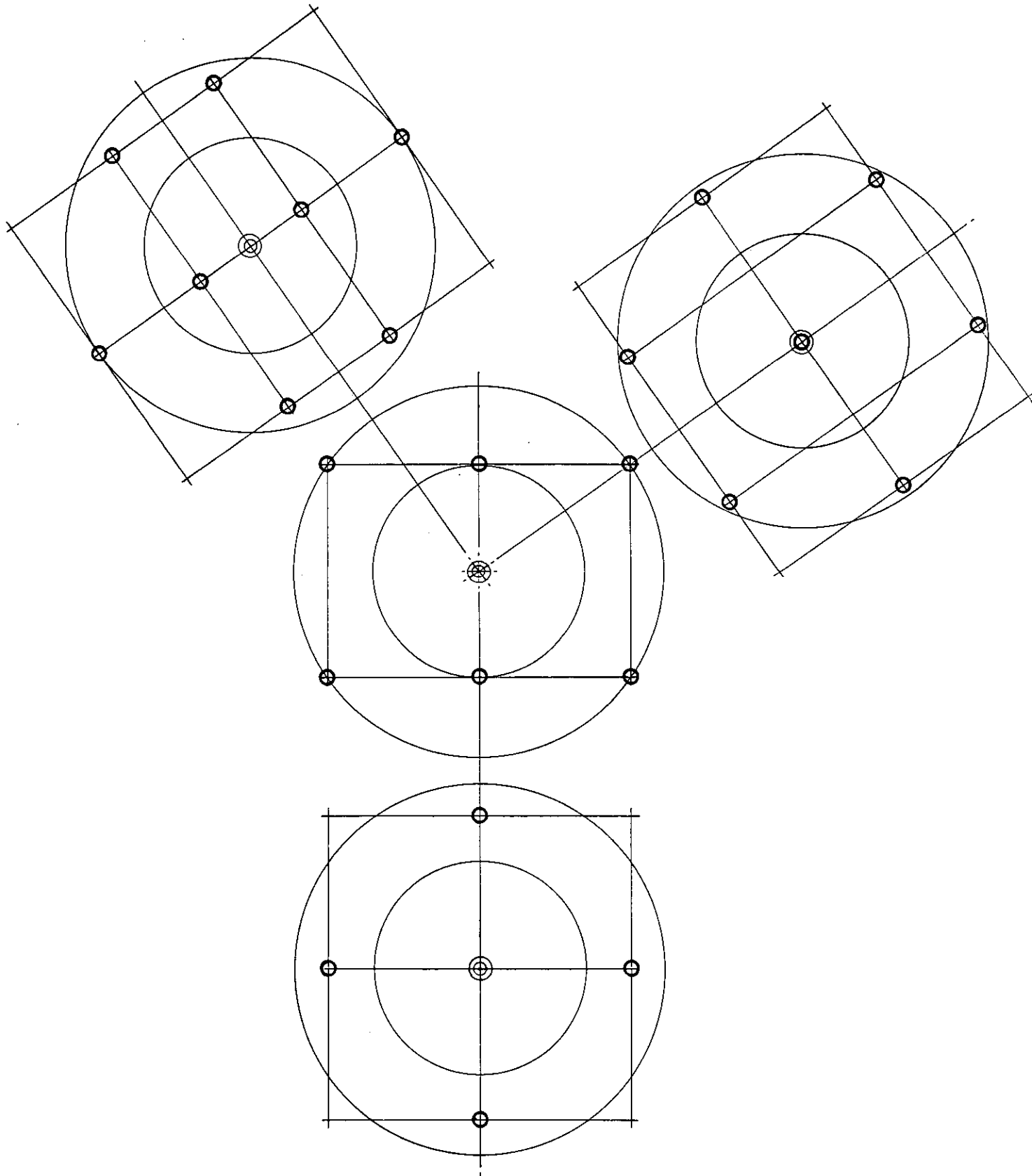
TETRAEDRO \equiv OCTAEDRO
INTERSECCION DE TETRAEDROS DUALES

SISTEMA DEL TETRAEDRO



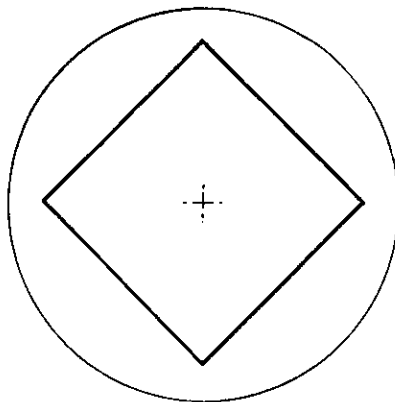
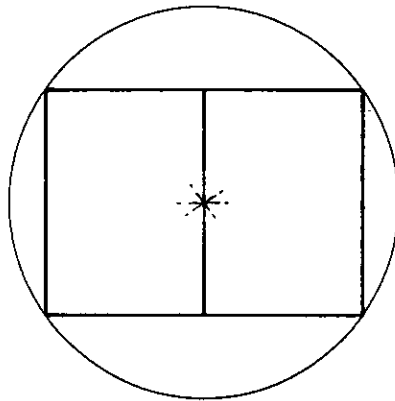
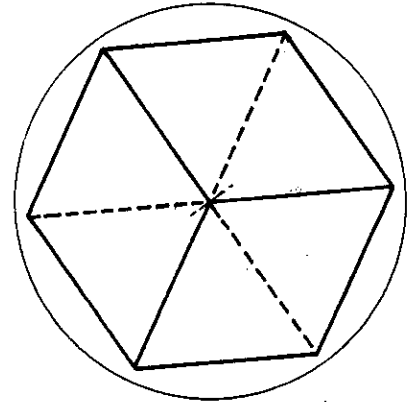
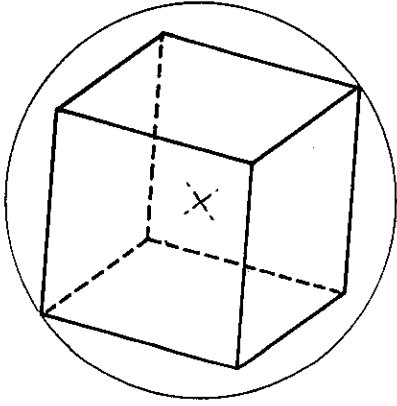
ROMBOEXAEDRO \equiv CUBO

SISTEMA DEL TETRAEDRO



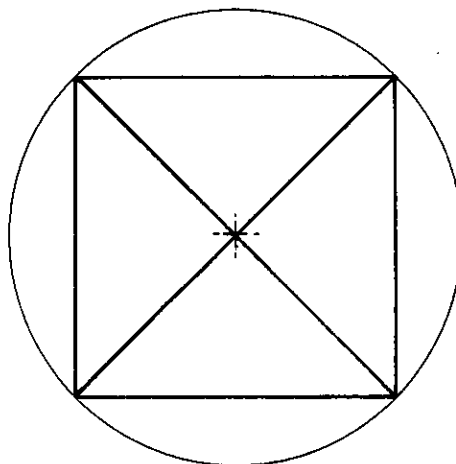
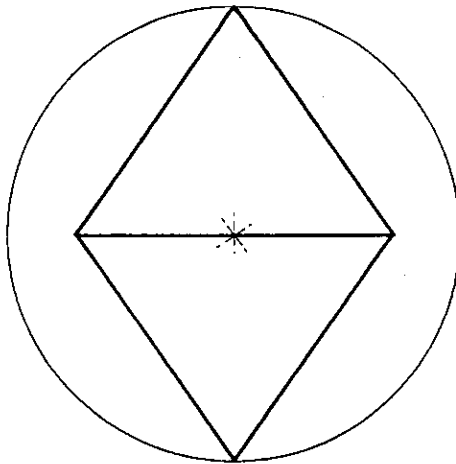
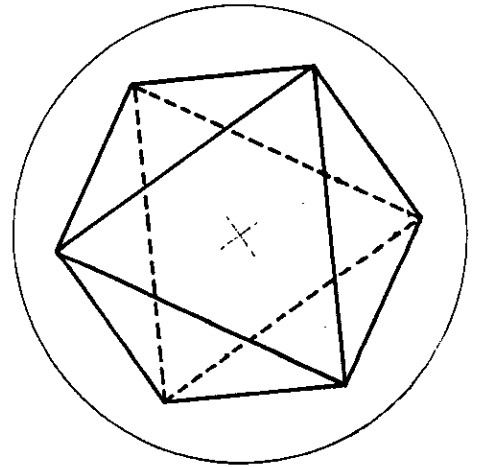
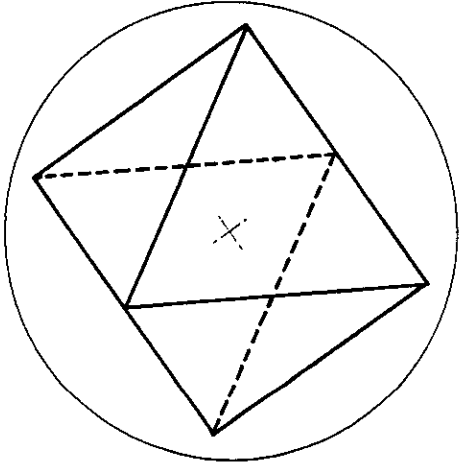
LOS VERTICES DEL ROMBOEDRO
VERTICES DE DOS TETRAEDROS DUALES

SISTEMA DEL CUBO



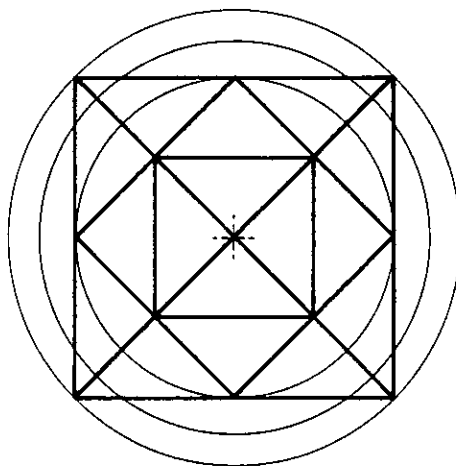
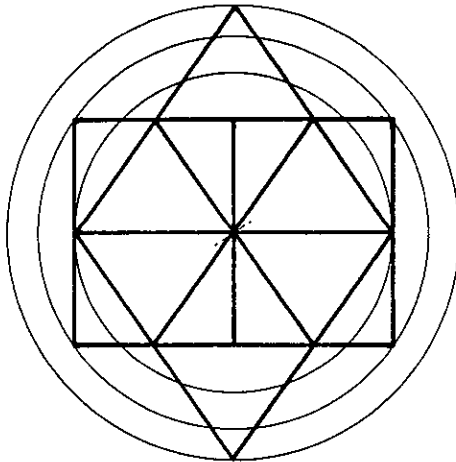
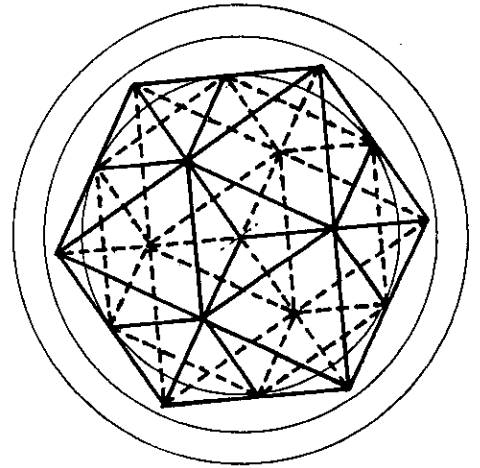
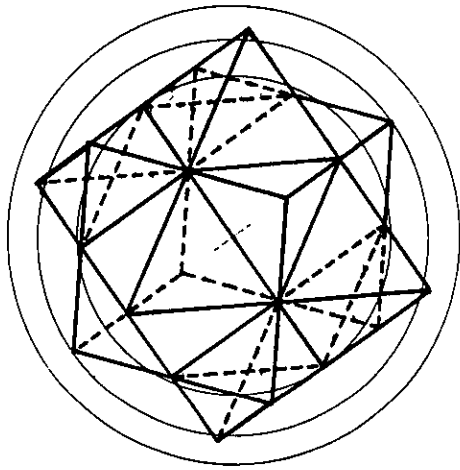
CUBO

SISTEMA DEL CUBO



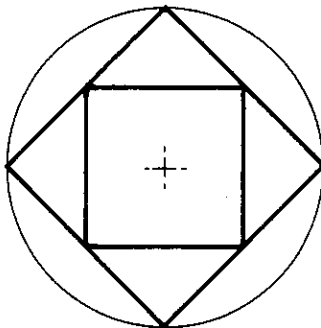
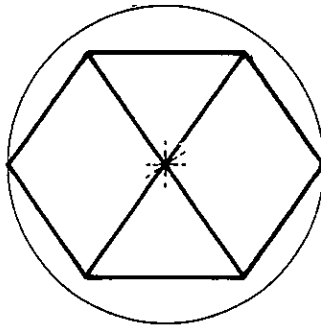
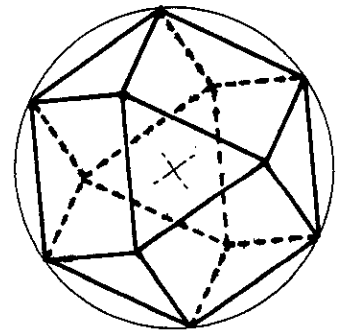
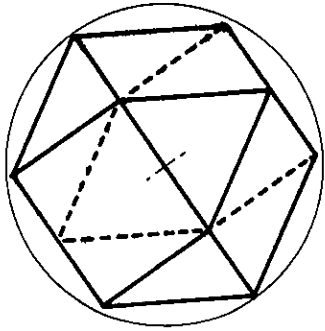
OCTAEDRO

SISTEMA DEL CUBO



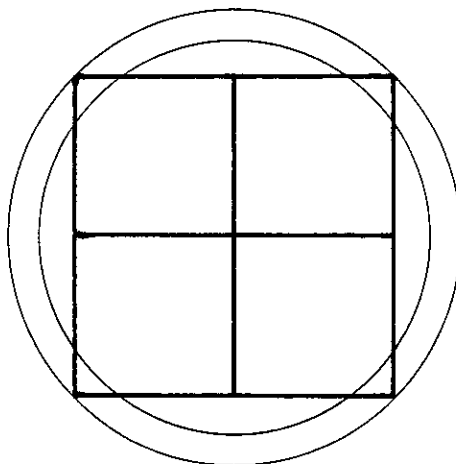
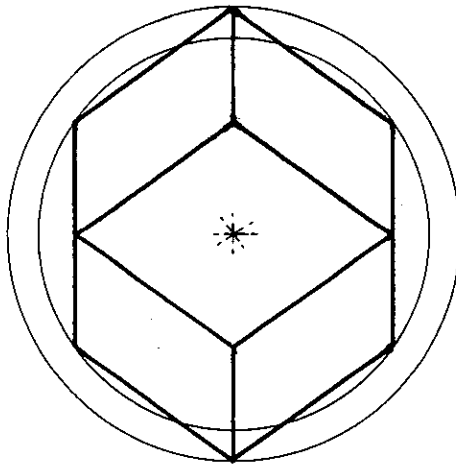
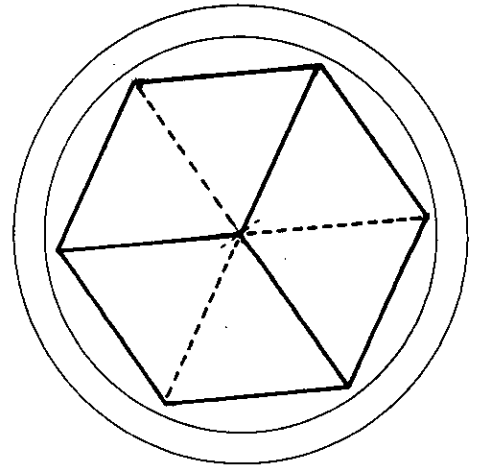
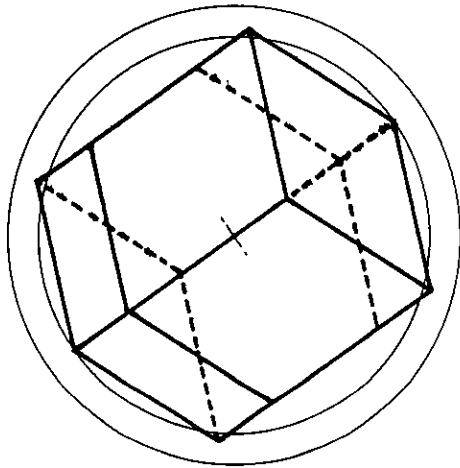
UNION DE CUBO Y OCTAEDRO

SISTEMA DEL CUBO



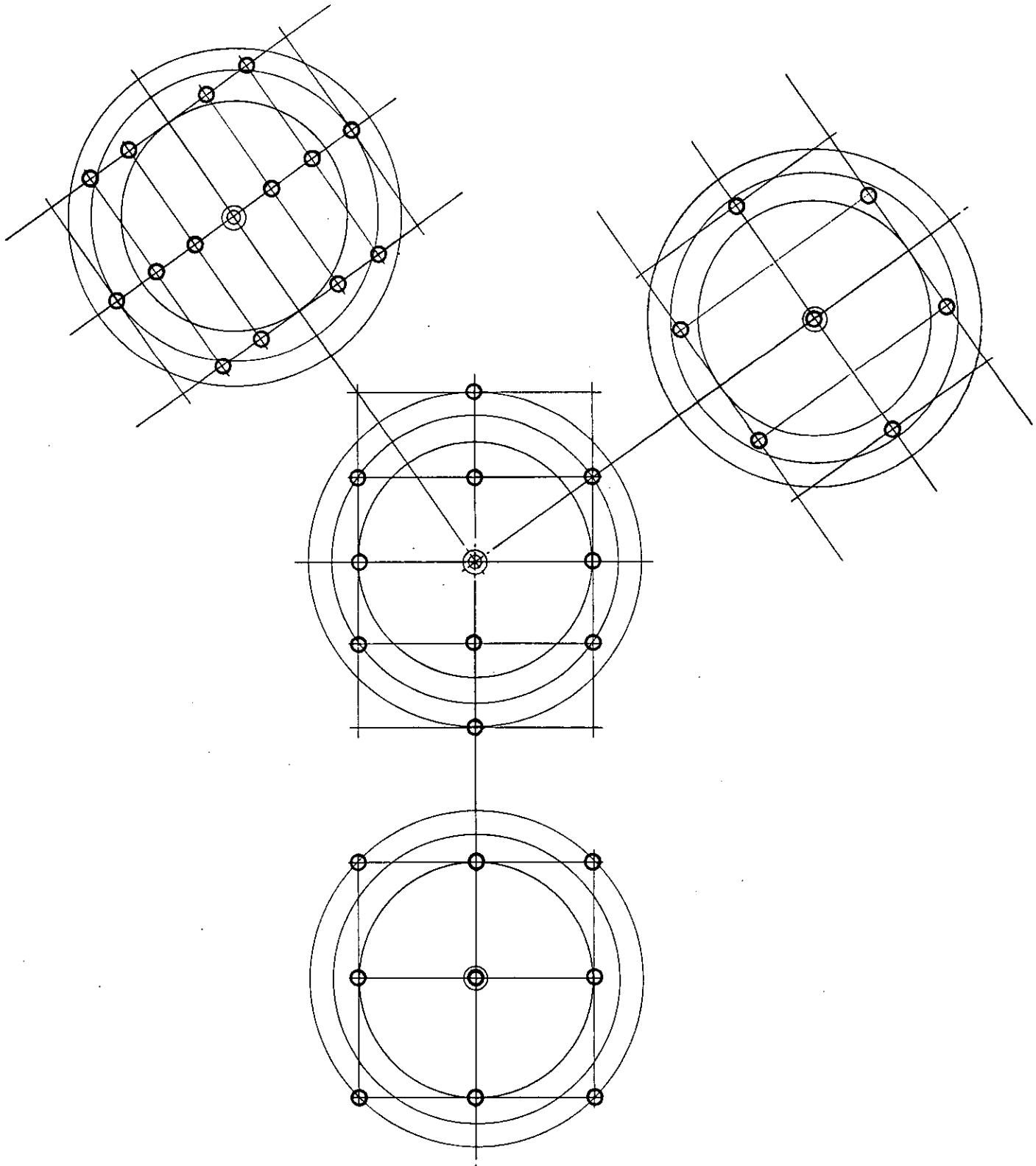
CUBOCTAEDRO

SISTEMA DEL CUBO



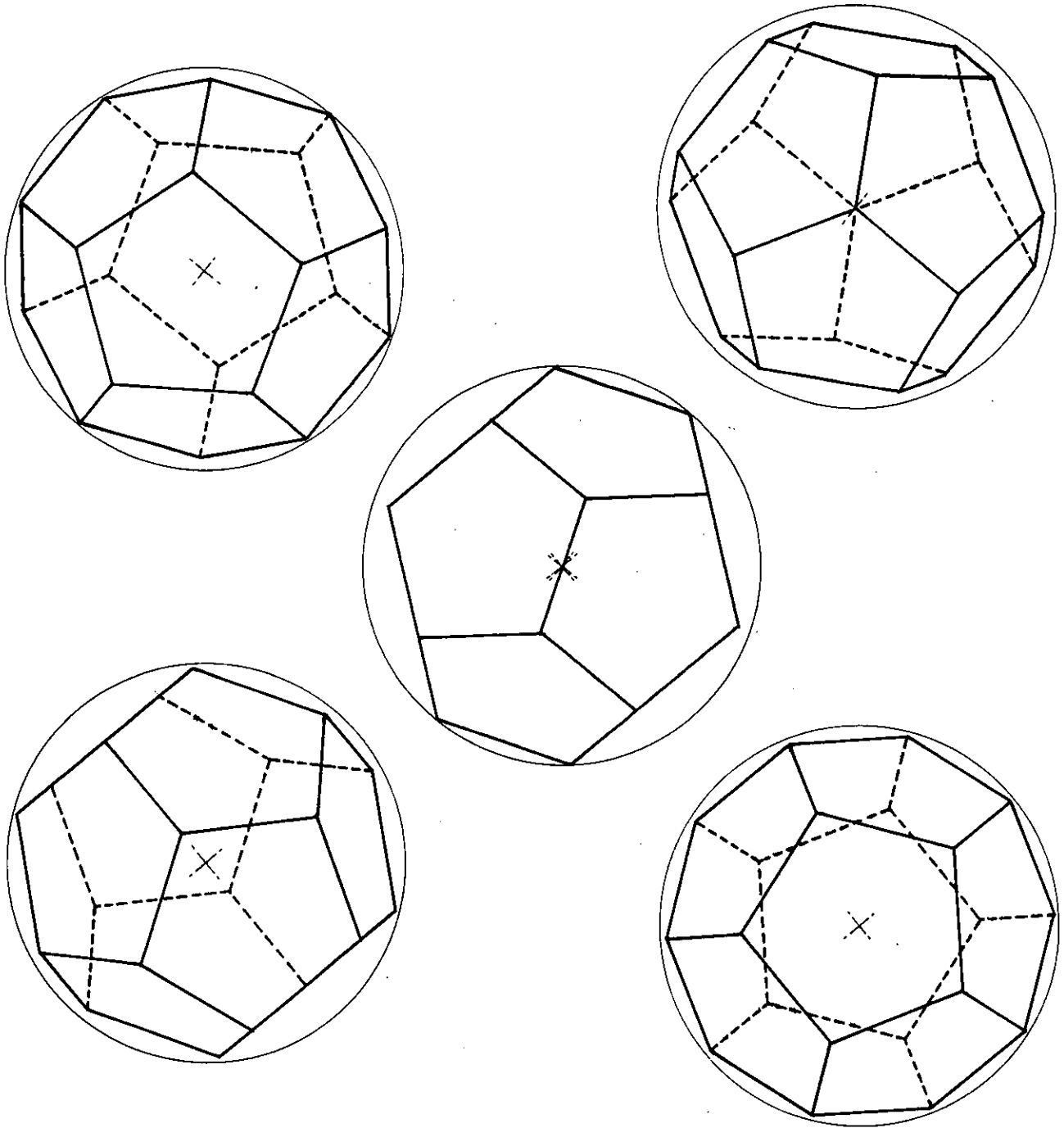
ROMBODECAEDRO

SISTEMA DEL CUBO



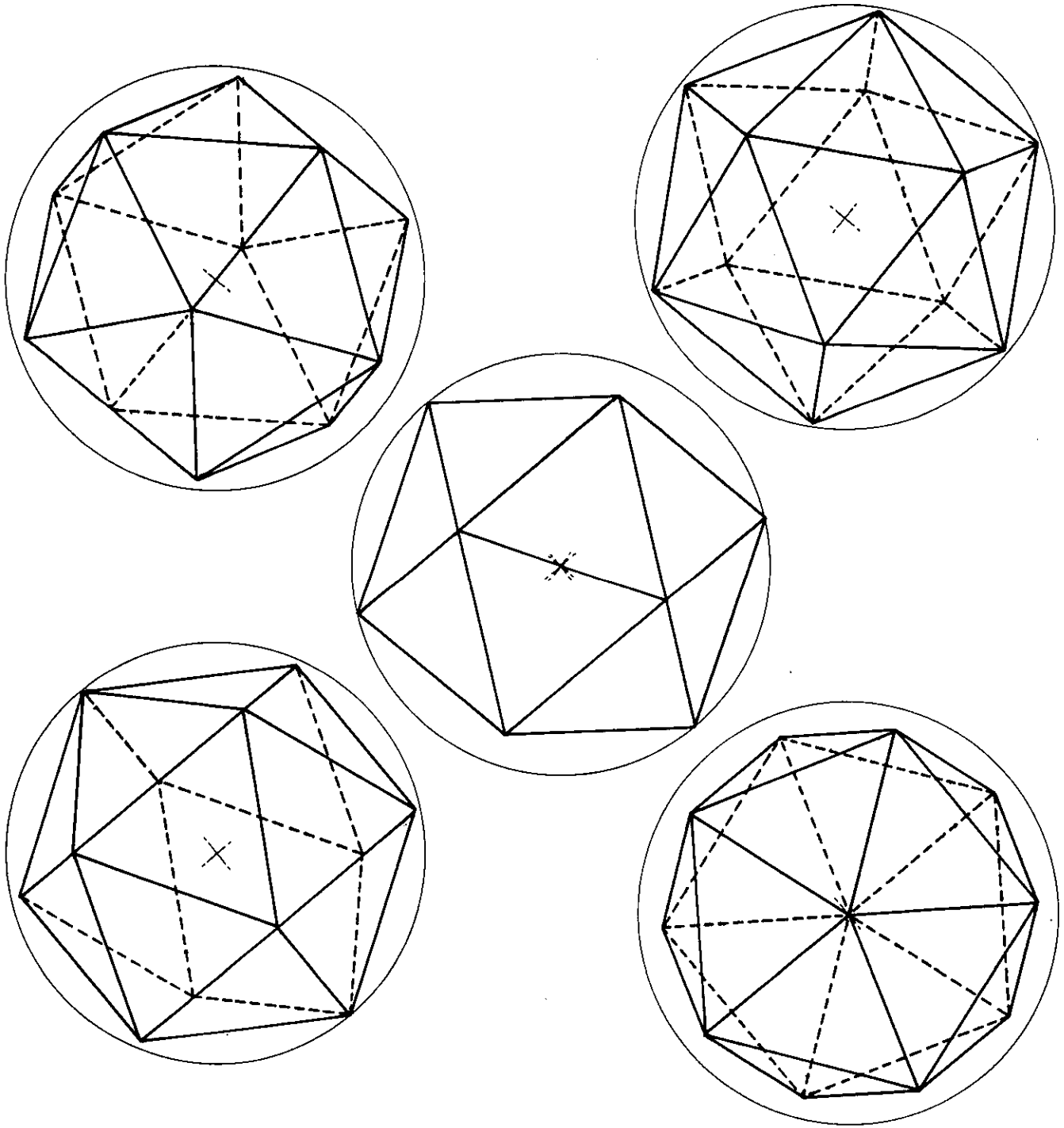
LOS VERTICES DEL ROMBOEDRO
VERTICES DEL CUBO Y DEL OCTAEDRO DUALES

SISTEMA DEL DODECAEDRO



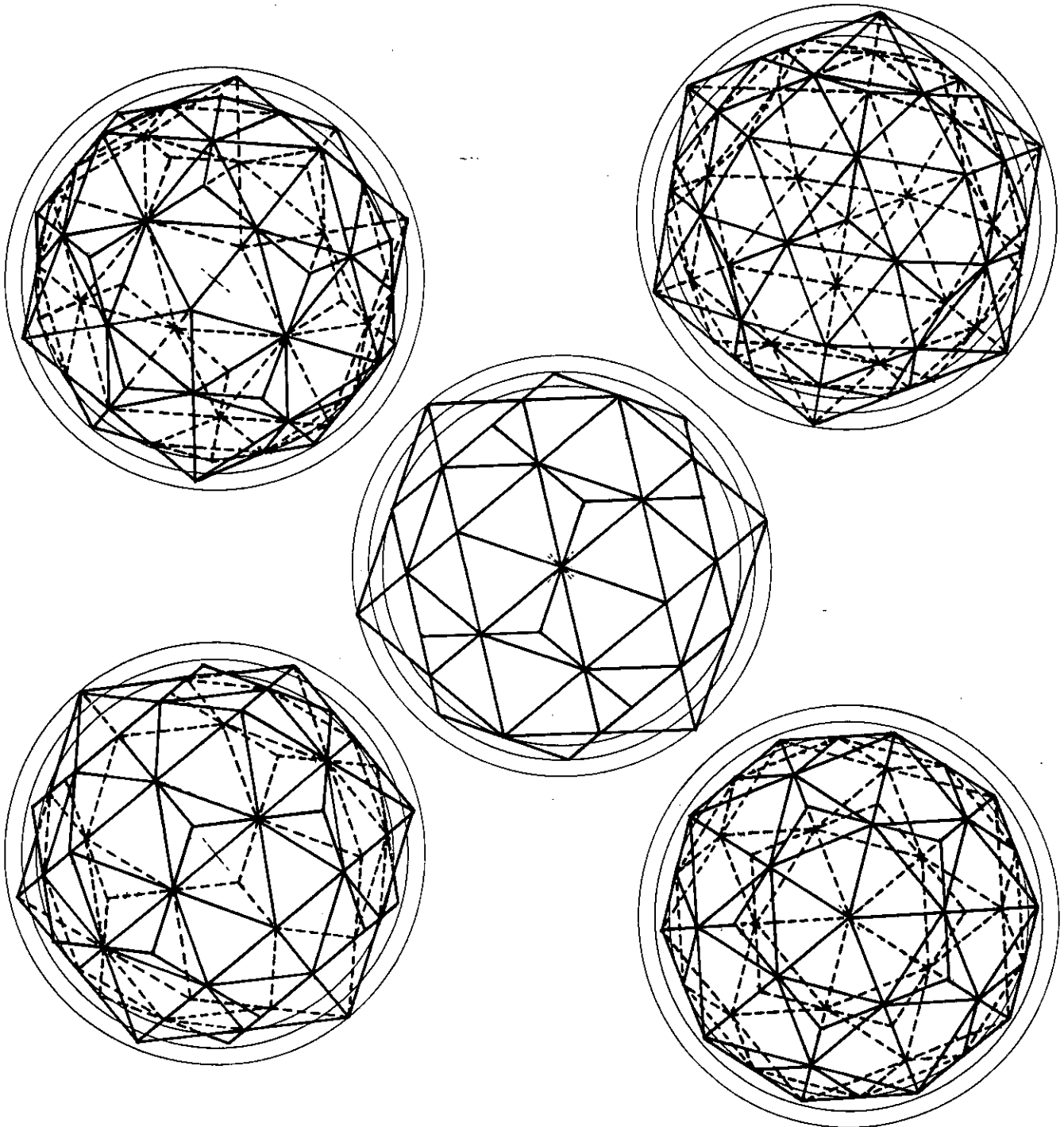
DODECAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



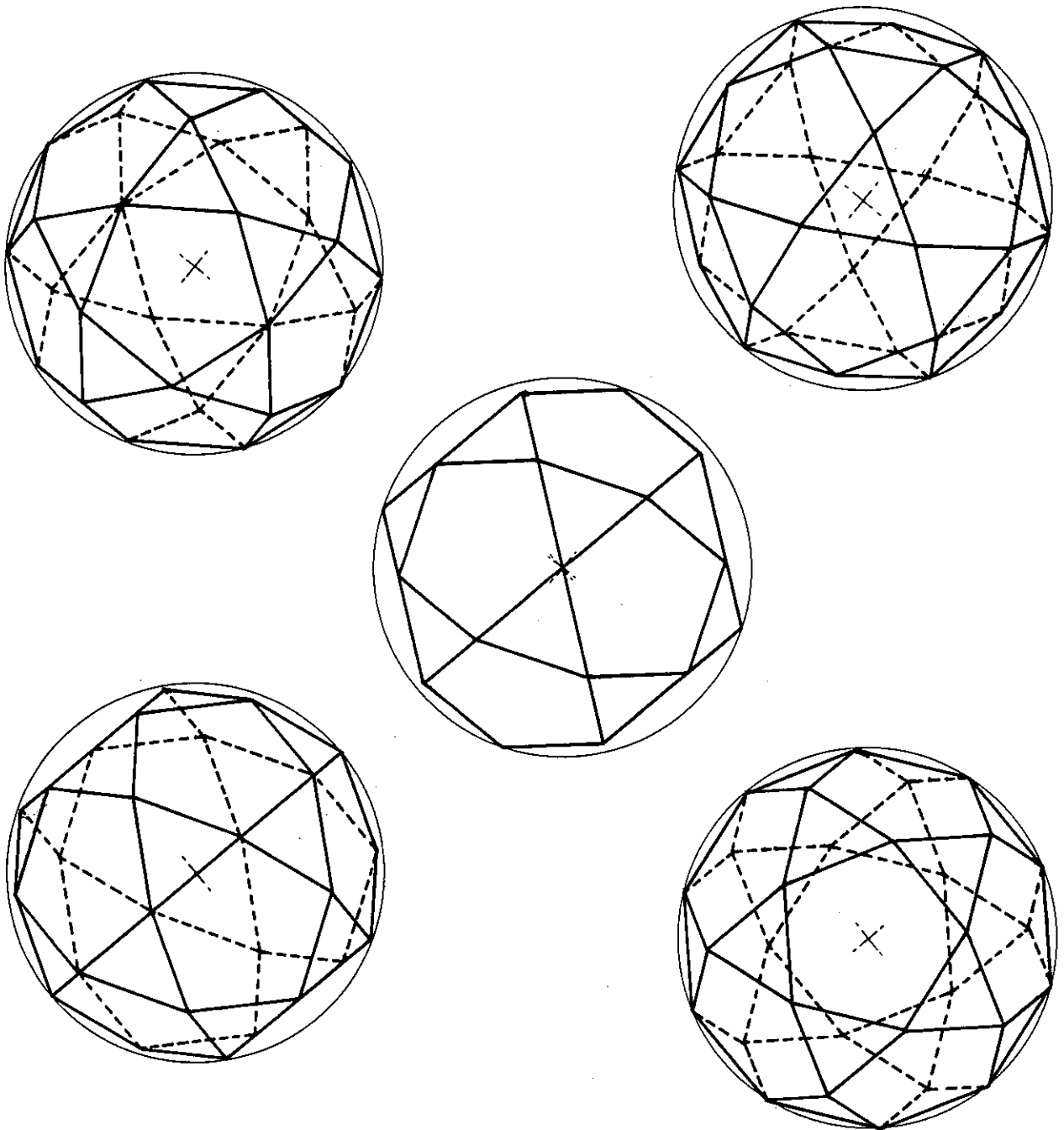
ICOSAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



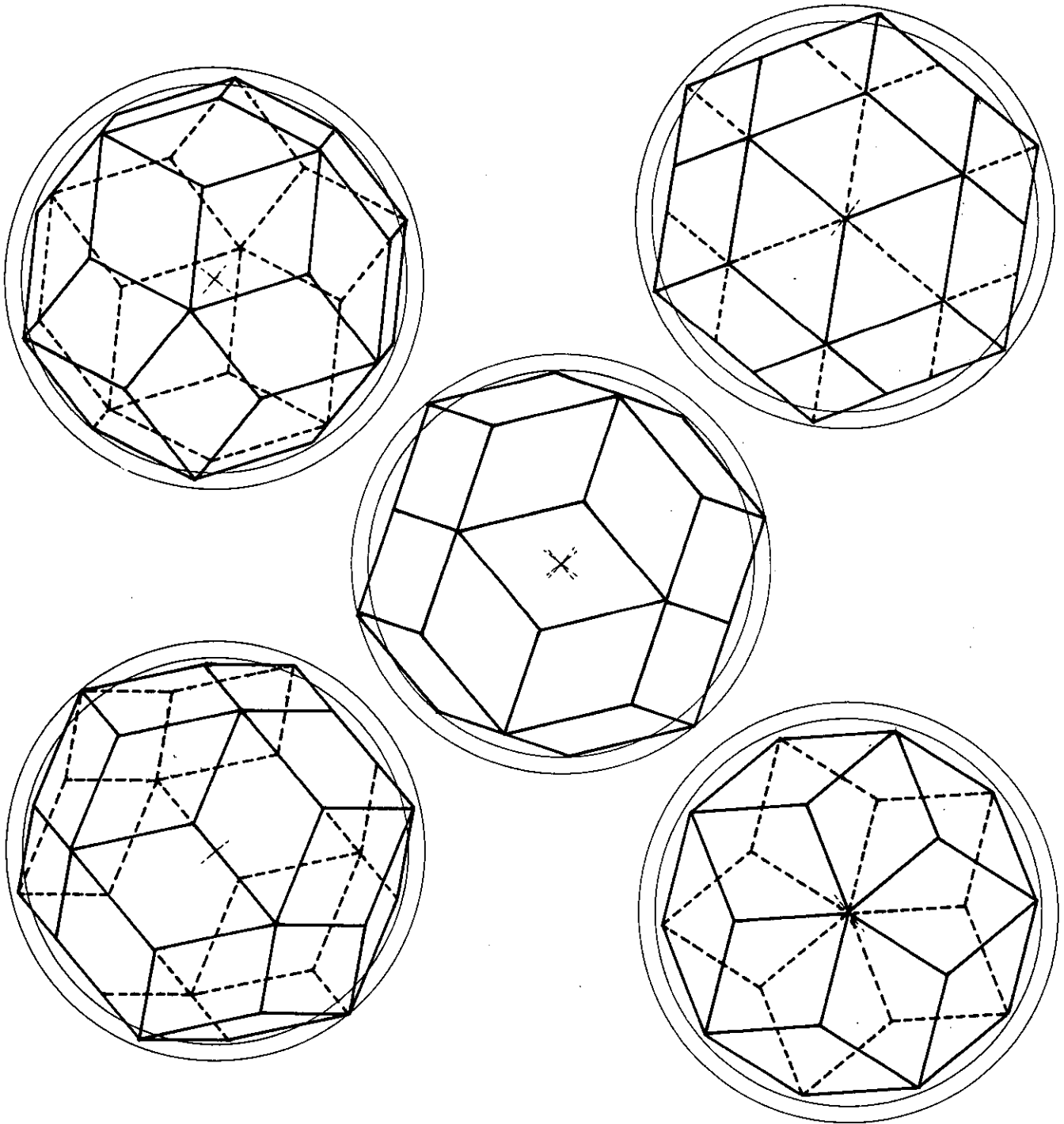
UNION DE DODECAEDRO E ICOSAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



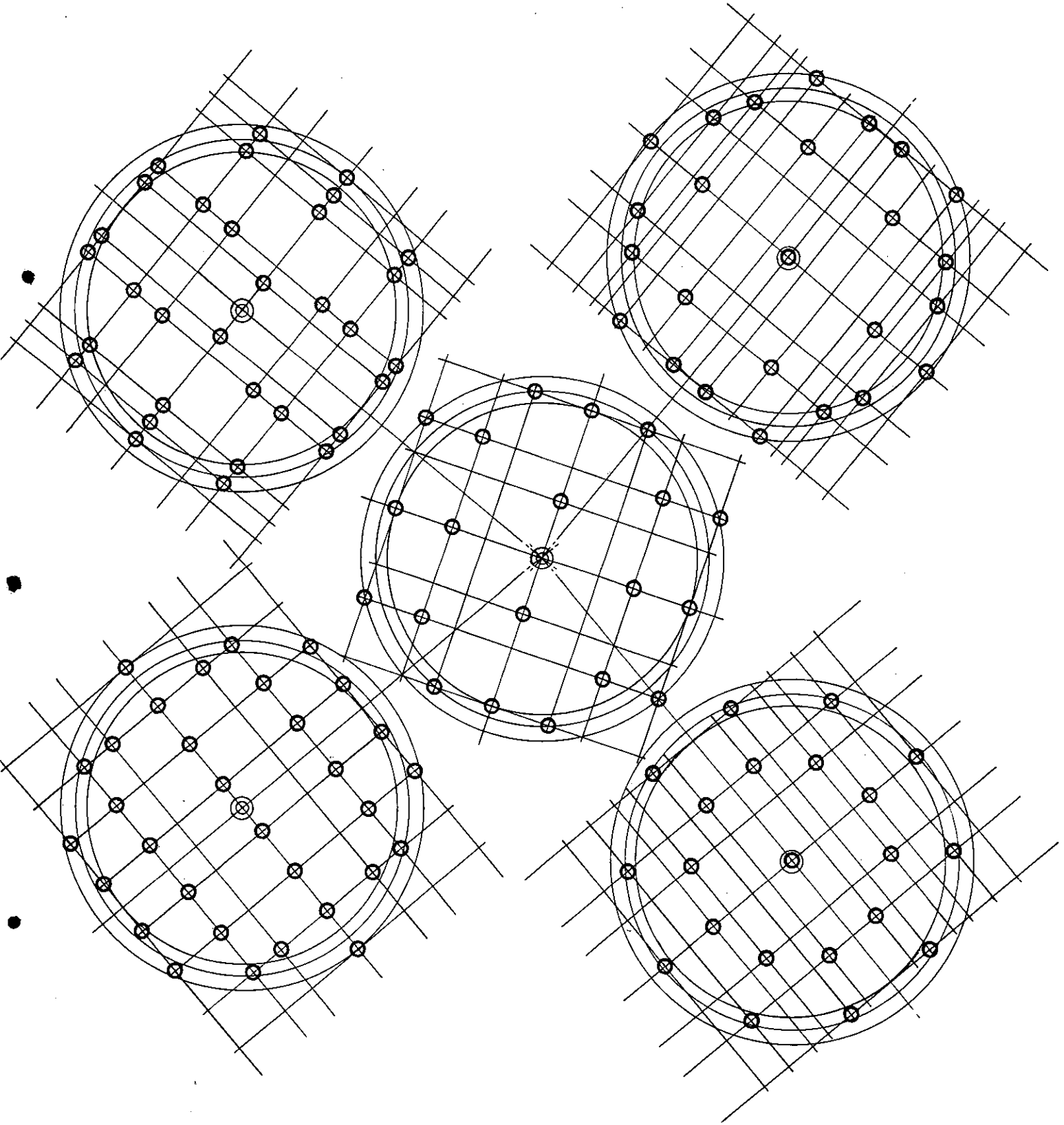
ICOSIDODECAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



ROMBOTRIACONTAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



LOS VERTICES DEL ROMBOEDRO

VERTICES DEL DODECAEDRO Y DEL ICOSAEDRO DUALES

6. POLIEDROS SEMIRREGULARES

Analicemos los sistemas isótopos de simetría, atendiendo a sus tipos de ejes:

Sistemas		Tipos de ejes				
Planos	Abovedados					
Cuadrado		II		IV		Autoduales
	Tetraedro	II	III			
	Cubo	II	III	IV		No autoduales
Dodecaedro	II	III		V		
Triang. eq.		II	III		VI	

Se observa inmediatamente que:

- Los ejes binarios son comunes a todos los sistemas, pasando siempre por el centro de las aristas, L , de los poliedros básico y dual, que es centro de la cara del romboedro.
- Los sistemas con dos únicos tipos de ejes son autoduales, esto es, el poliedro dual coincide en su forma con el básico. Un tipo de ejes es naturalmente binario, y el otro tipo coincide con el vértice o el centro de la cara.
- Los sistemas con tres tipos de ejes no son autoduales: si un eje no binario coincide con un vértice en un poliedro, pasa por el centro de una cara en el dual (eje normal del capítulo 1).
- Solamente el sistema plano autodual (cuadrado) carece de ejes ternarios. Veamos otra vez en una tabla los poliedros, clasificados por tipos y sistemas, incluyendo los correspondientes romboedros (página siguiente). Como se ve en dicha tabla, el sistema plano cuadrado presenta sólo tres formas diferentes, incluido el romboedro, y de ellas dos son semirregulares. El sistema del tetraedro tiene siete formas distintas, pero cinco de ellas las comparte con otros sistemas: cuatro con el cubo (rombohexaedro, que es un cubo, tetratetraedro, que es un octaedro, rombitetratetraedro, que es el cuboctaedro, y gran rombitetratetraedro, que es el octaedro truncado). Comparte también el tetraedro achatado, que es un icosaedro, con el sistema del dodecaedro. Quedan así como formas exclusivas del sistema el poliedro básico y uno semirregular, el tetraedro truncado.
- El sistema del cubo tiene nueve formas distintas, compartiendo como sabemos cuatro con el tetraedro; tiene así cinco poliedros exclusivos: de una parte el básico y el romboedro, y además tres semirregulares, el cubo truncado y los rombicuboctaedros grande y menor.

		Sistema (m,n)						
	Tipo de poliedro	Cuadrado (4,4)	Tetraedro (3,3)	Cubo (3,4)	Dodecaedro (3,5)	Triangular equilátero (3,6)		
I	Básico (n) _m P ₁	(4) ₄	(3) ₃ T ₁	(4) ₃ C	(5) ₃ D	(6) ₃		
II	Dual (m) _n P ₂	(4) ₄	(3) ₃ T ₂	(3) ₄ O	(3) ₅ I	(3) ₆		
III	Romboedro	Cuadrados (4) ₄	Romboexaedro (4) ₃ C	Rombododecaedro	Rombotriacontaedro	Rombos bitriangulares		
IV	Polipoliedro (m,n,m,n) ₁ P ₁ P ₂	(4,4,4,4)=(4) ₄	(3,3,3,3)T ₁ T ₂ =(3) ₄ O	(3,4,3,4)CO	(3,5,3,5)ID	(3,6,3,6)		
V	Básico truncado (m,2n,2n) ₁ P ₁ T	(4,8,8)	(3,6,6)T ₁ T	(3,8,8)CT	(3,10,10)DT	(3,12,12)		
VI	Dual truncado (n,2m,2m) ₂ P ₂ T	(4,8,8)	(3,6,6)T ₂ T	(4,6,6)OT	(5,6,6)IT	(6,6,6)=(6) ₃		
VII	Rombipolipoliedro (m,4,n,4)RP ₁ P ₂	(4,4,4,4)=(4) ₄	(3,4,3,4)RT ₁ T ₂ =CO	(3,4,4,4)RCO	(3,4,5,4)RID	(3,4,6,4)		
VIII	Gran rombipolipoliedro (4,2m,2n)	(4,8,8)	(4,6,6)GRT ₁ T ₂ =OT	(4,6,8)GRCO	(4,6,10)GRID	(4,6,12)		
IX	Achatado (3,3,m,3,n)	(3,3,4,3,4)	(3,3,3,3,3)T ₁ A=(3) ₅ I	(3,3,3,3,4)CA	(3,3,3,3,5)DA	(3,3,3,3,6)		

El sistema del dodecaedro tiene tambien nueve formas distintas de las que comparte una, el poliedro dual, icosaedro que es el tetraedro achatado, y las otras ocho son exclusivas, a saber: el poliedro básico, el romboedro y los seis semirregulares que posee en exclusiva.

El sistema triangular equilátero tiene ocho formas diferentes: los poliedros básico y dual, la red de rombos y cinco formas semirregulares.

En resumen encontramos veinte poliedros semirregulares isótropos, de ellos siete planos y trece abovedados. Los planos corresponden dos al sistema cuadrado y cinco al triangular equilátero. De los abovedados hay uno en exclusiva del sistema del tetraedro, dos compartidos por dicho sistema y el del cubo, cuatro exclusivos de este último y seis del sistema del dodecaedro. El único tipo que es semirregular en todos los sistemas es el básico truncado.

Por último observaremos que los dos sistemas planos son independientes, mientras que los tres abovedados comparten poliedros. Esta interrelación de los tres sistemas se manifiesta a través de las correspondencias entre caras y vértices de poliedros básicos y duales de todos ellos.

Las caras del octaedro corresponden a las de dos tetraedros duales, y las del icosaedro a las de diez tetraedros, perteneciendo cada una a dos de ellos. Como dos caras opuestas del icosaedro pertenecen siempre a tetraedros duales, es decir, a un mismo octaedro, se deduce que los diez tetraedros forman cinco octaedros, cuya intersección produce el icosaedro, perteneciendo cada cara de éste a dos octaedros, de modo correlativo a cómo la envolvente de cinco cubos da un dodecaedro, y en cada cubo se inscriben dos tetraedros.

Esta última relación entre dodecaedro, cubo y tetraedro podemos expresarla con más precisión aplicando la ley de dualidad de la geometría proyectiva: Los vértices del cubo corresponden a los de dos tetraedros duales y los del dodecaedro a los de diez tetraedros, perteneciendo cada uno a dos de ellos. Como dos vértices opuestos del dodecaedro pertenecen siempre a tetraedros duales, es decir a un mismo cubo, se deduce que los diez tetraedros forman cinco cubos cuya envolvente lineal es el dodecaedro, perteneciendo cada vértice de éste a dos cubos.

Los planos de las caras del icosaedro coinciden con los de los cinco octaedros y los diez tetraedros.

Por los vértices del icosaedro pasan las aristas de los cinco octaedros circunscritos.

Los vértices del dodecaedro coinciden con los de los cinco cubos y los diez tetraedros.

En las caras del dodecaedro están las aristas de los cinco cubos inscritos.

Por los vértices de cada oc-
taedro pasan las aristas de
los dos tetraedros circun-
critos.

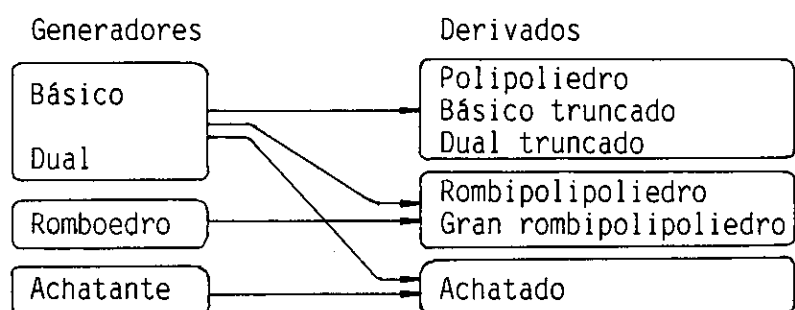
En las caras de cada cubo es-
tán las aristas de los dos te-
traedros inscritos.

6.1. POLIEDROS GENERADORES DE LOS SEMIRREGULARES

De las cuatro primeras filas del cuadro de poliedros regulares y semirregulares ya nos hemos ocupado en el capítulo 5. En él se ha visto que los polipoliedros resultan de la intersección de dos poliedros duales cuyas aristas se cortan por estar situadas en las caras de un mismo romboedro; los dos tipos de cara que tiene un polipoliedro en los sistemas no autoduales son cortados en su centro por los dos tipos de eje no binario, siendo dichos ejes, naturalmente, perpendiculares a las caras (ejes normales). Es obvio que en los sistemas autoduales, con un solo tipo de eje no binario, este poliedro es regular con todas las caras iguales.

Los dos tipos siguientes de poliedro, V y VI, poliedros truncados, coinciden con el tipo IV en que sus dos tipos de cara tienen como ejes normales a los dos tipos de ejes no binarios de simetría (en el sistema del tetraedro coinciden ambos tipos de eje en uno solo, que corta a dos caras opuestas de distinto tipo). Los planos en que se hallan las caras de un mismo tipo pertenecen a un poliedro del tipo básico, y los que contienen a las del otro tipo forman un poliedro dual. De esta manera, los poliedros truncados son, como los polipoliedros, intersección de poliedros duales, si bien ahora cada uno tiene sus aristas sobre un romboedro de diferente tamaño.

Los poliedros de los tipos VII y VIII, rombipolipoliedros, menores y grandes, respectivamente, tienen en común el hecho de que no sólo los ejes no binarios son ejes normales de caras, sino que también lo son los ejes binarios. De aquí se deduce inmediatamente que los planos de estas caras pertenecen a un romboedro. Por lo tanto, estos poliedros resultan de la intersección de un poliedro básico, otro dual y el romboedro del sistema correspondiente. Por último, los poliedros achatados tienen, desde luego, caras cuyos ejes normales son ejes de simetría no binarios, por lo que dichas caras coinciden con las de los poliedros básico y dual, pero presentan un tercer tipo de caras, pertenecientes a un poliedro no visto hasta ahora. Podemos dibujarlo para cada sistema abovedado eliminando las caras pertenecientes a los otros dos y prolongando las restantes hasta que se corten entre sí. Llamaremos a estos poliedros "achatantes", y contando con ellos podemos hacer el siguiente esquema:



Los poliedros achatantes presentan algunas novedades respecto a los estudiados hasta ahora.

6.2. POLIEDROS ACHATANTES

Sus caras, todas iguales, son pentágonos no regulares con aristas de tres tipos. Dos de ellas, contiguas, son de uno, y otras dos, también contiguas entre sí, de otro tipo. Del tercer tipo hay una sola arista en cada cara. Los vértices comunes a cada par de aristas iguales se hallan sobre un eje de simetría cíclica, que coincide con un eje de simetría no binaria del sistema. Cuando el sistema es autodual, con un solo tipo de eje de simetría no binario, son iguales cuatro aristas. La quinta arista es siempre desigual, y su centro está sobre un eje cíclico binario.

Como era de esperar, en los sistemas autoduales, con un solo tipo de eje de simetría no binario y cuatro aristas iguales, existen planos de simetría, y por tanto ejes diedrales, los binarios, y efectivamente, también los achatados resultantes tienen simetría diedral.

6.2.1. POLIEDROS ACHATANTES ABOVEDADOS

En el sistema del tetraedro se trata de un dodecaedro pentagonal, que apoya sus caras sobre las aristas del romboedro del sistema (romboexaedro=cubo) y ambos tienen ocho vértices comunes, si bien es claro que dadas sus caras no regulares no es el dodecaedro regular. En la figura 6.1.a se muestra este dodecaedro proyectado sobre la red esférica del sistema.

En el sistema del cubo es un poliedro de veinticuatro caras, un icositetraedro pentagonal, representado sobre la red esférica del sistema en la figura 6.1.b.

En el sistema del dodecaedro tenemos el exacontaedro pentagonal, de sesenta caras, cuya proyección esférica aparece en la figura 6.1.c.

6.2.2. POLIEDROS ACHATANTES PLANOS

Totalmente análogos a los abovedados son los poliedros del tipo VIII relacionados con los sistemas planos cuadrado (figura 6.2.a) y triangular equilátero (figura 6.2.b).

Naturalmente, aquí los ejes de simetría son perpendiculares al plano del poliedro, teniendo su reflejo en centros de simetría en el mismo, mientras que

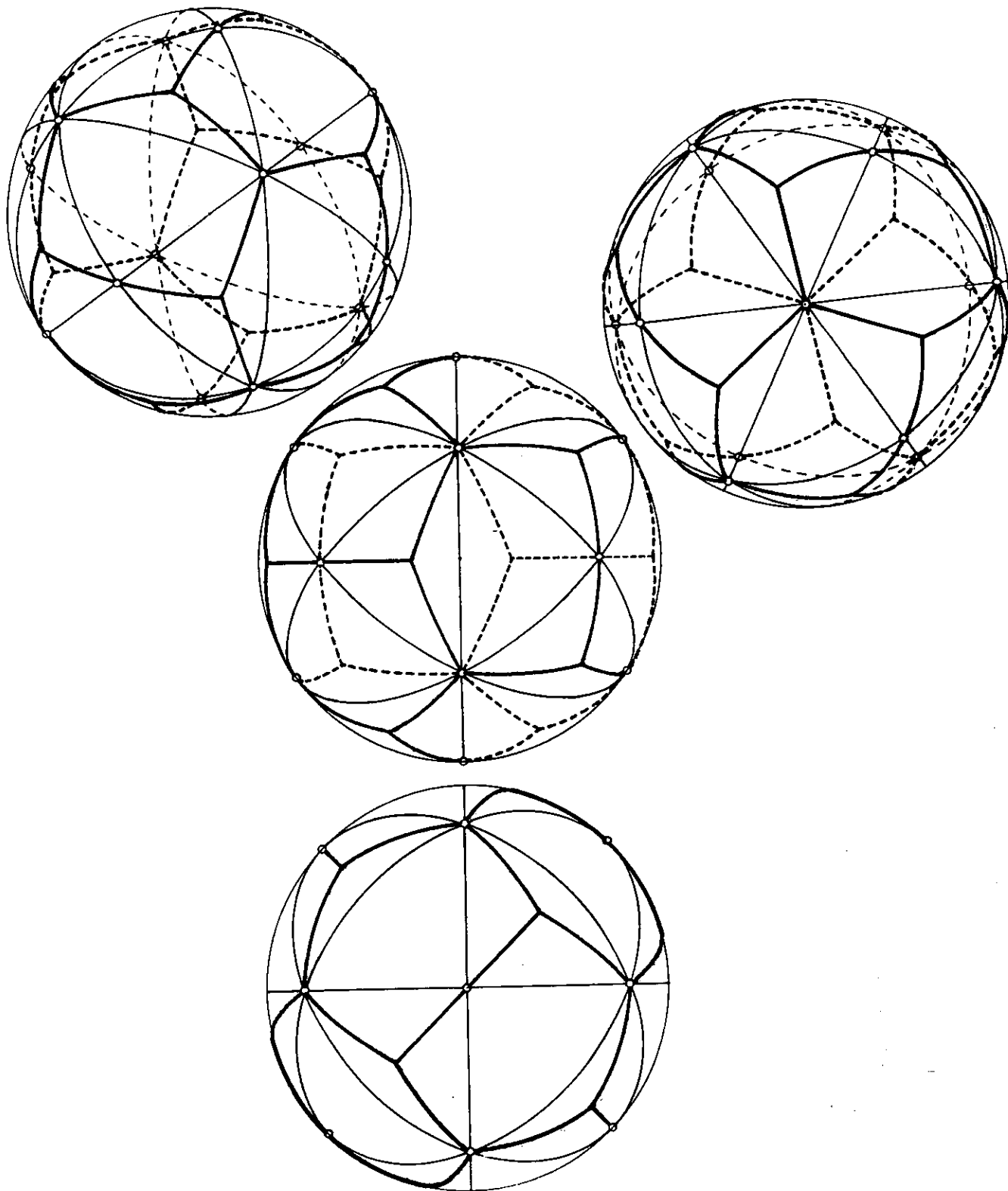


FIG 6.1.a SISTEMA DEL TETRAEDRO
DODECAEDRO PENTAGONAL

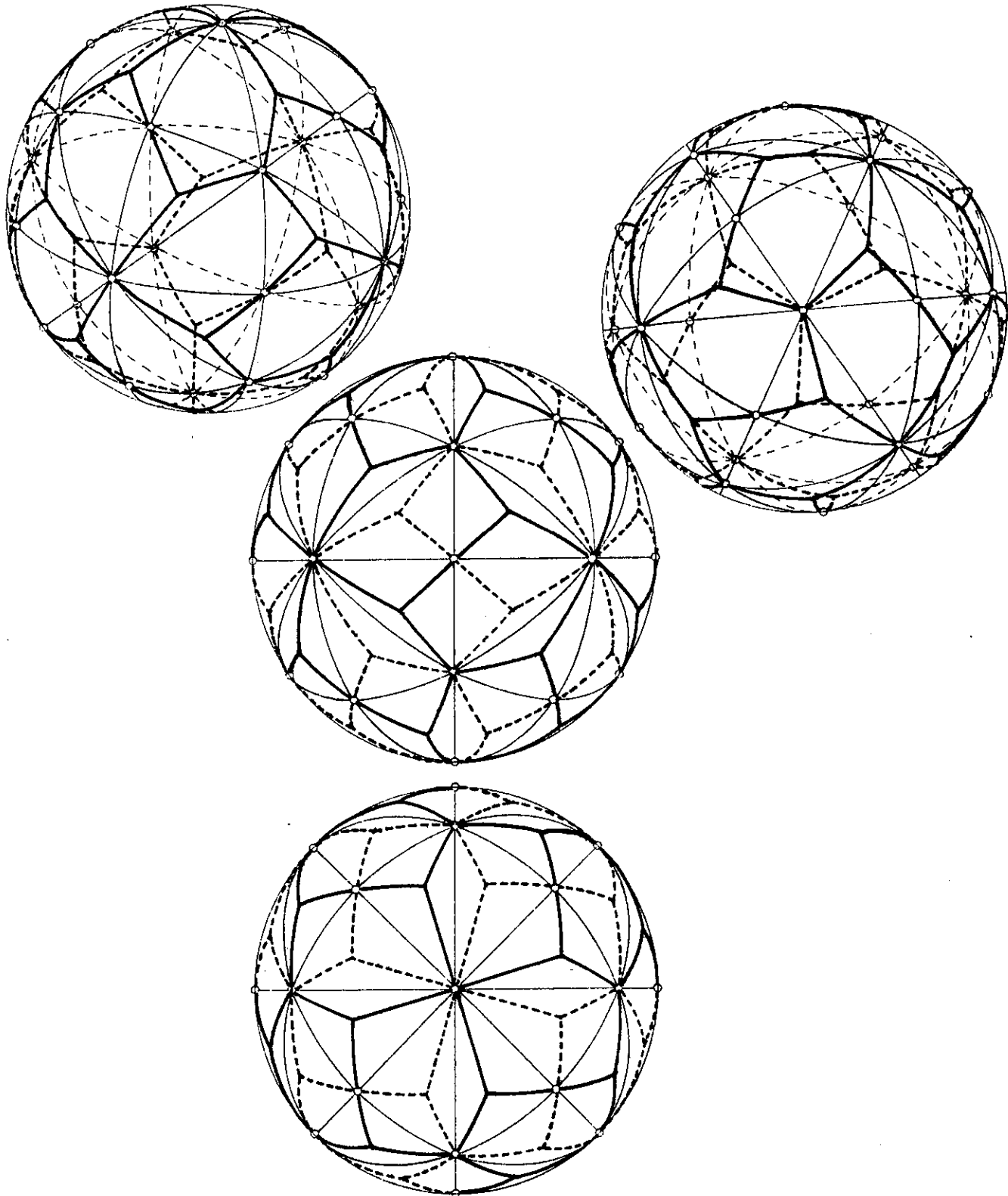


FIG 6.1.b SISTEMA DEL CUBO
ICOSITETRAEDRO PENTAGONAL

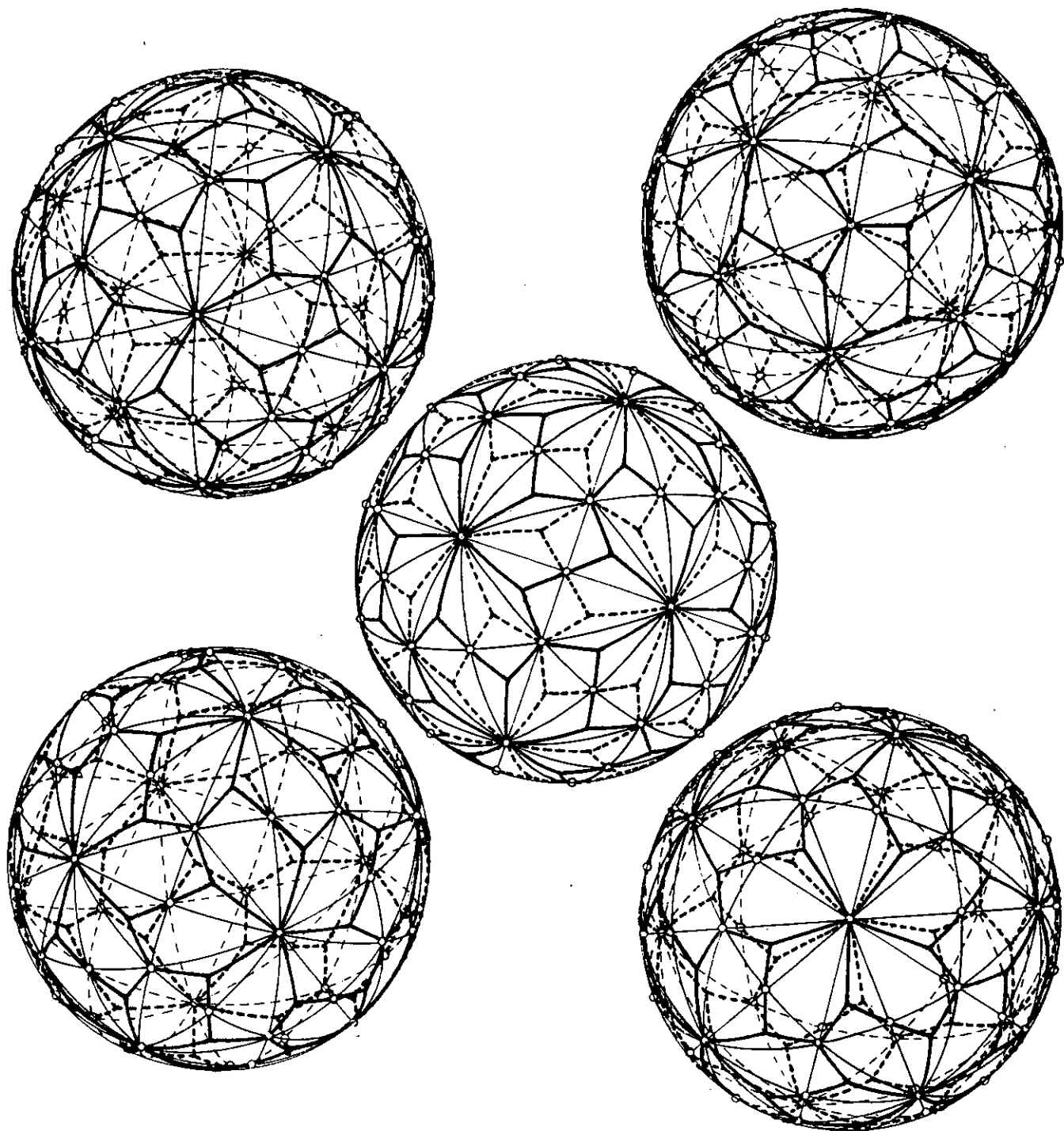
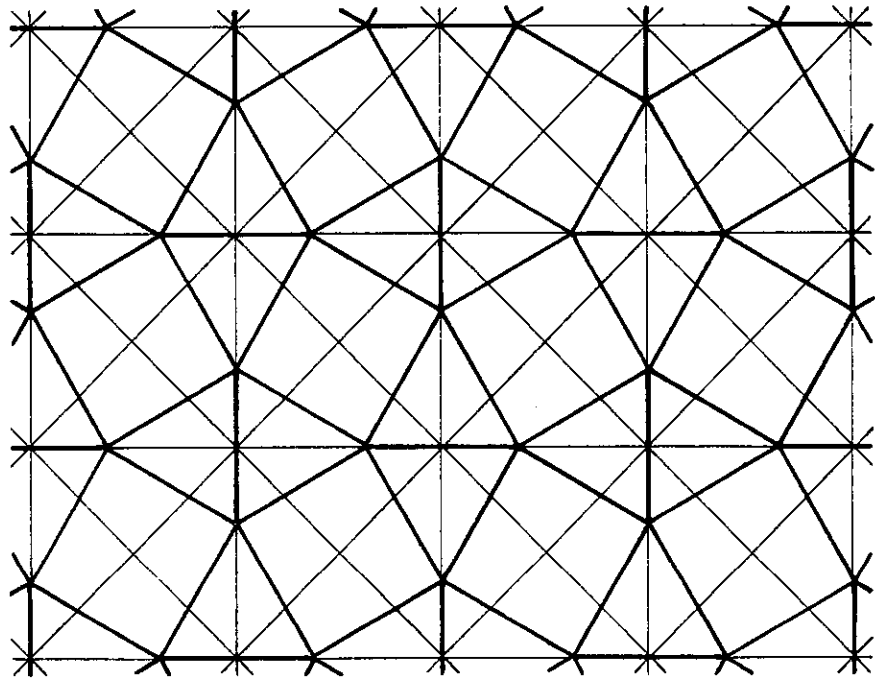
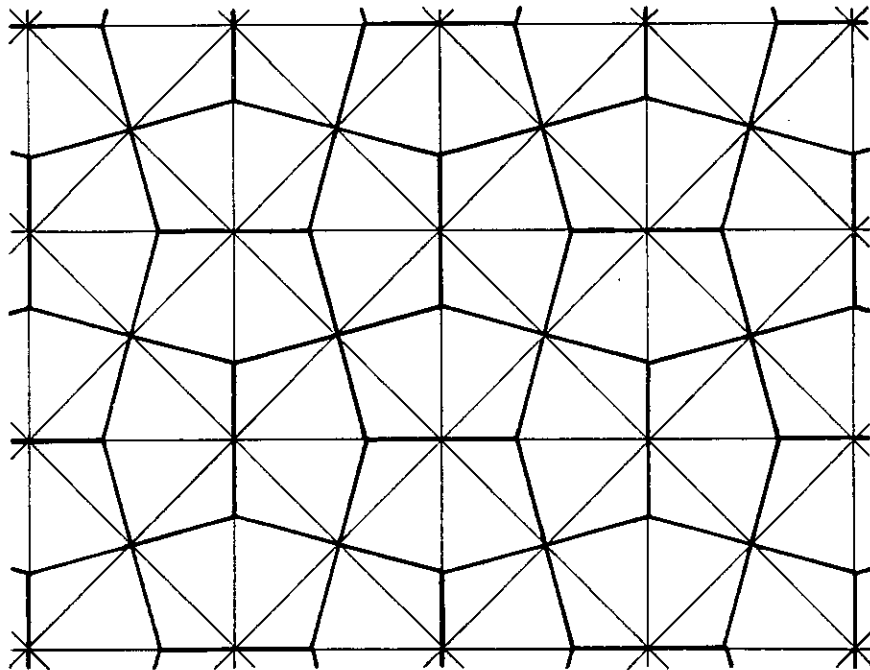


FIG 6.1.c SISTEMA DEL DODECAEDRO
EXACONTAEDRO PENTAGONAL

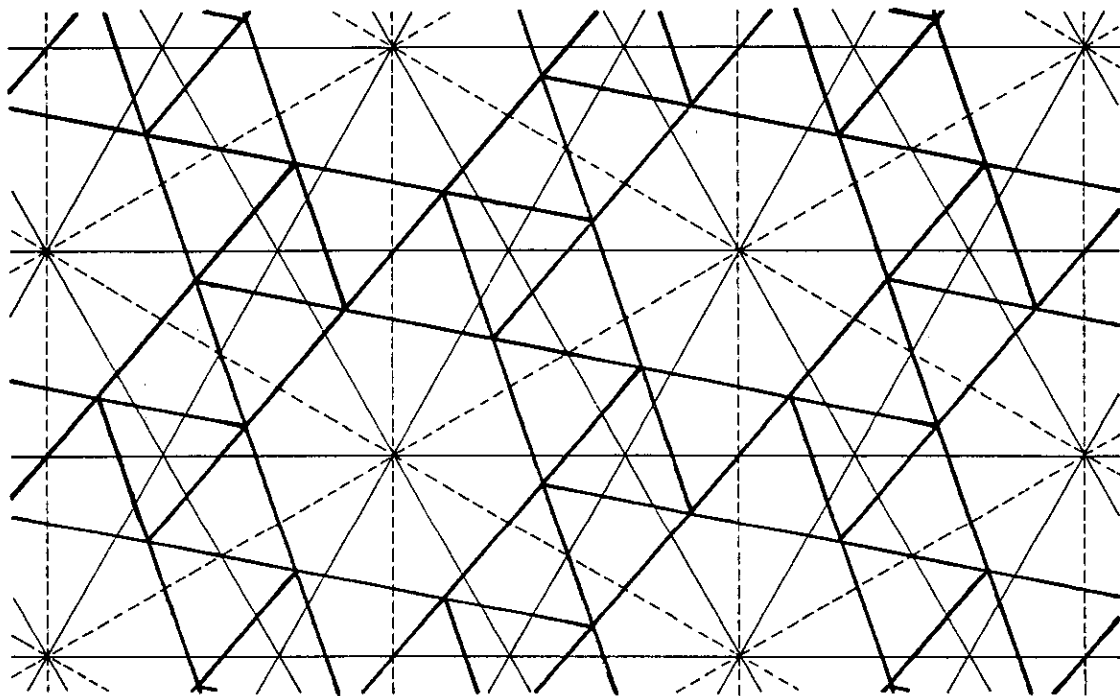


RED ACHATADA

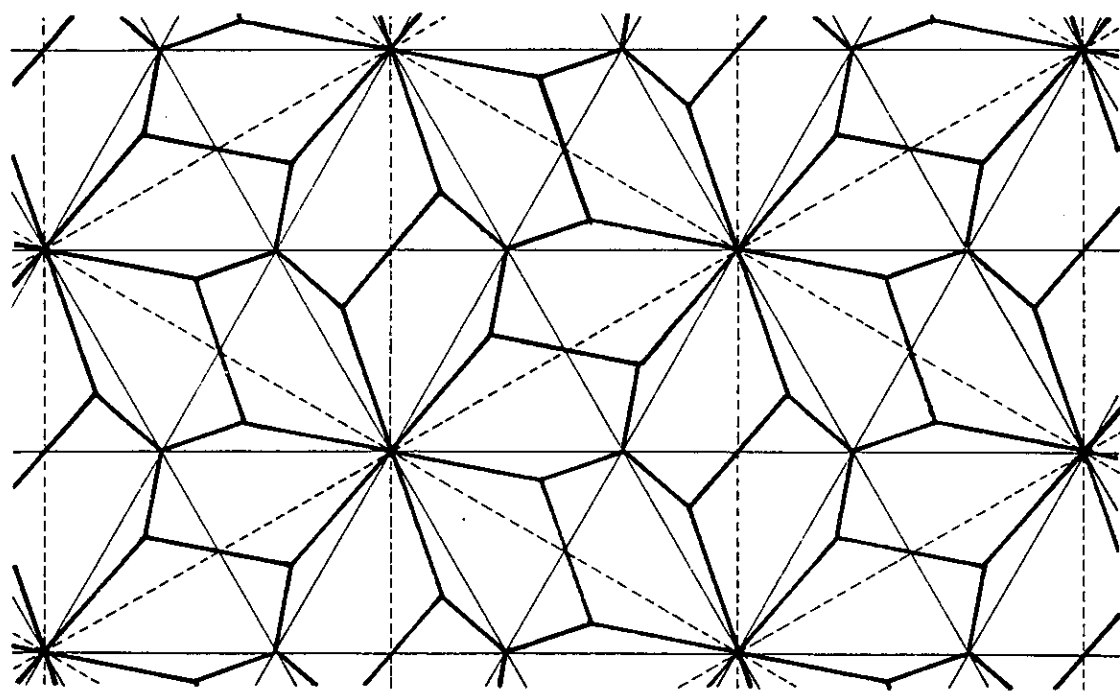


RED ACHATANTE

FIG 6.2.a SISTEMA CUADRADO

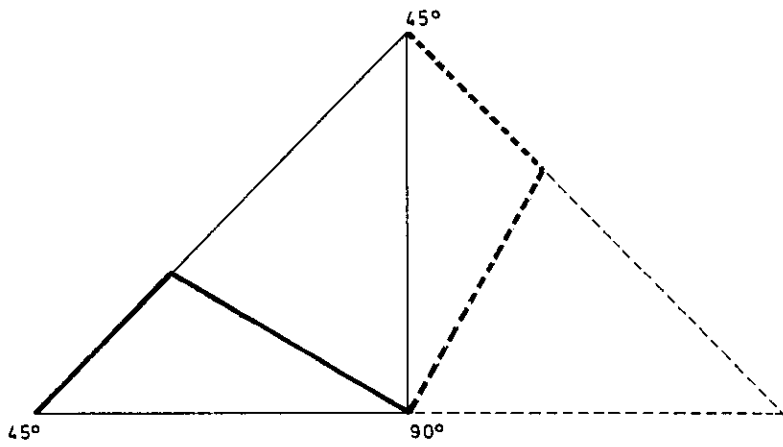


RED ACHATADA

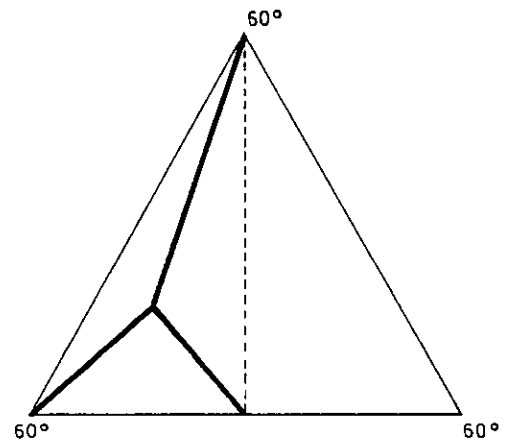


RED ACHATANTE

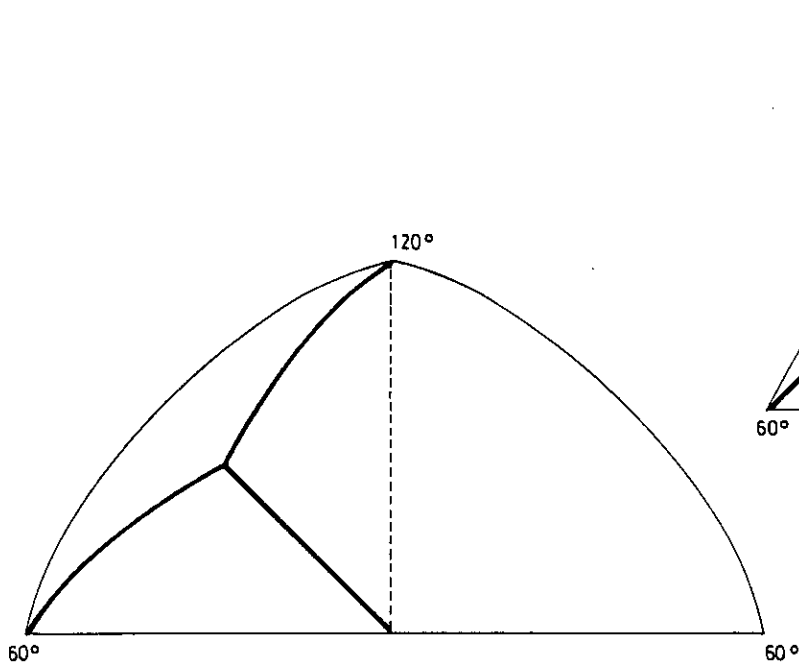
FIG 6.2.b SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO



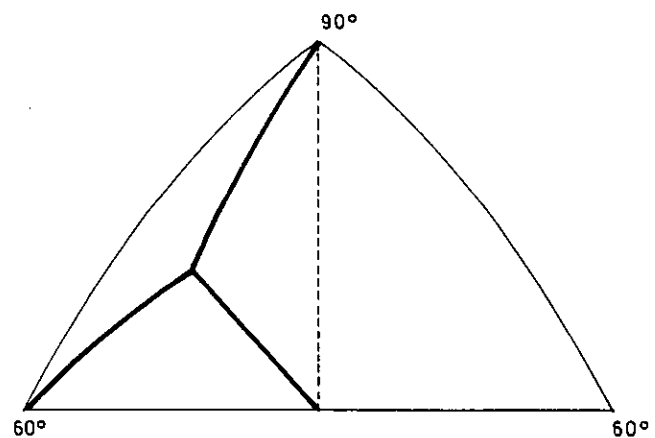
RED PENTAGONAL DIEDRAL



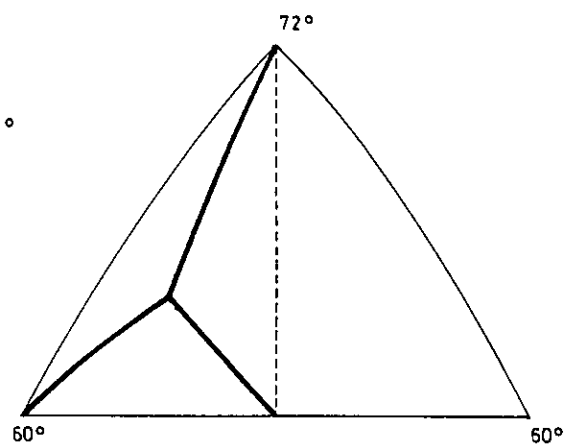
RED PENTAGONAL CICLICA



DODECAEDRO PENTAGONAL

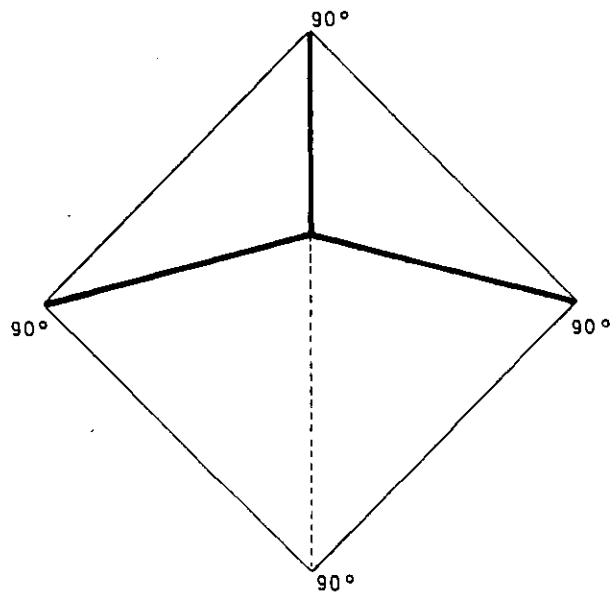


ICOSITETRAEDRO PENTAGONAL

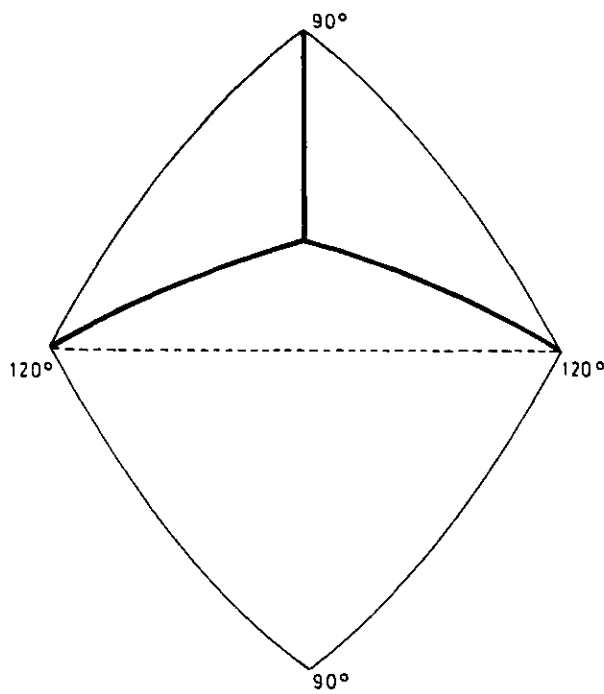


EXACONTAEDRO PENTAGONAL

FIG 6.3.a LOS POLIEDROS ACHATANTES



LA RED PENTAGONAL DIEDRAL



EL DODECAEDRO PENTAGONAL

FIG 6.3.b POLIEDROS ACHATANTES CON SIMETRIA DIEDRAL

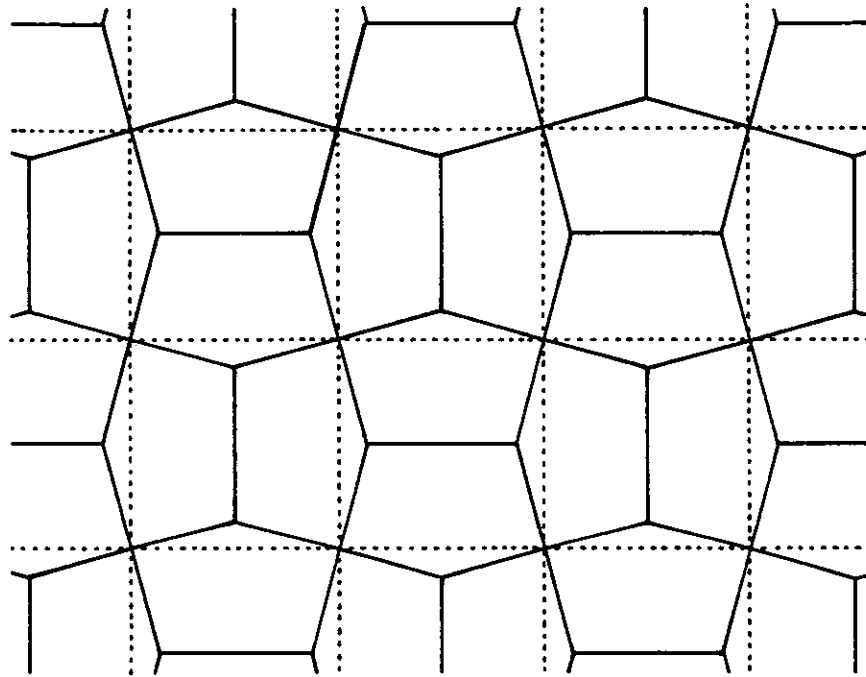


FIG 6.4.a SISTEMA CUADRADO
RED ACHATANTE Y ROMBOEDRO

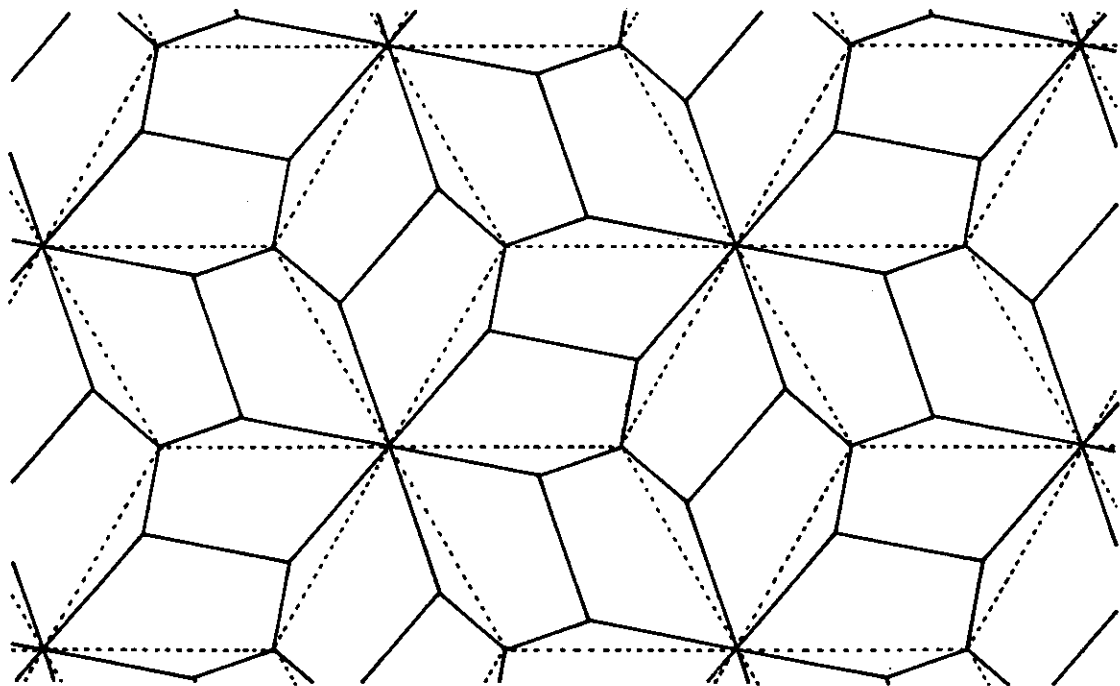


FIG 6.4.b SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO
RED ACHATANTE Y ROMBOEDRO

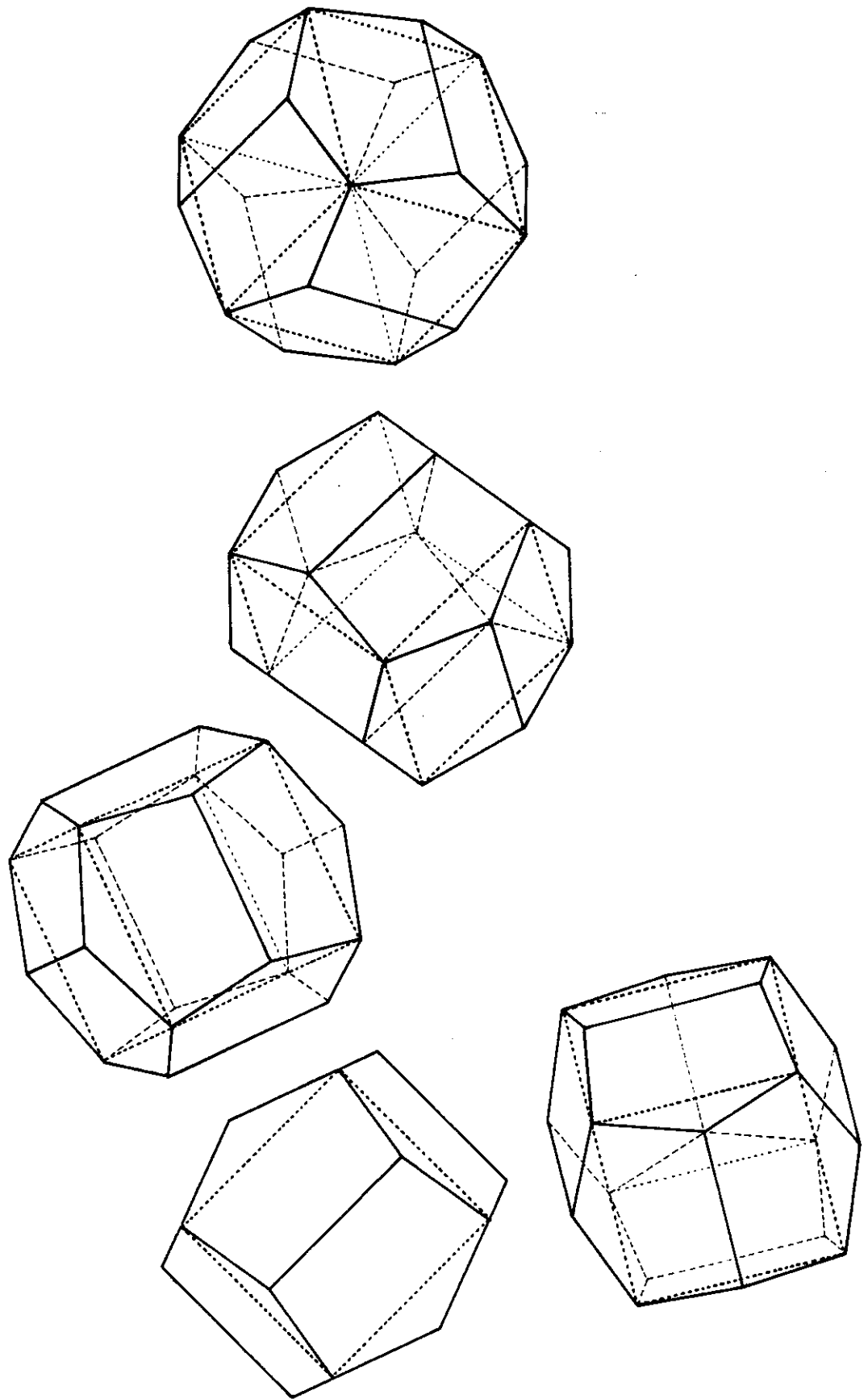


FIG 6.4.c SISTEMA DEL TETRAEDRO
DODECAEDRO PENTAGONAL Y ROMBOEXAEDRO

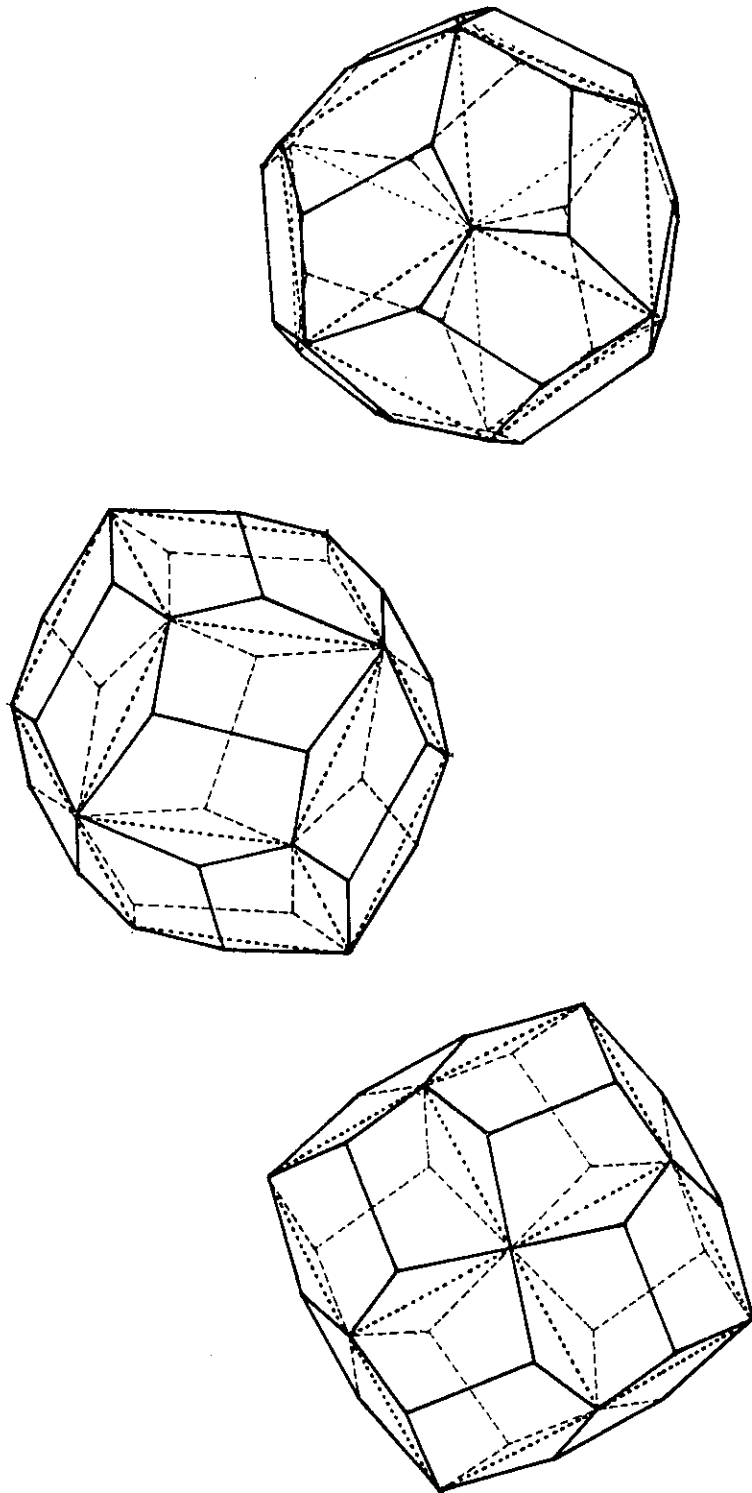


FIG 6.4.d SISTEMA DEL CUBO
ICOSITETRAEDROS PENTAGONAL Y TRIANGULAR

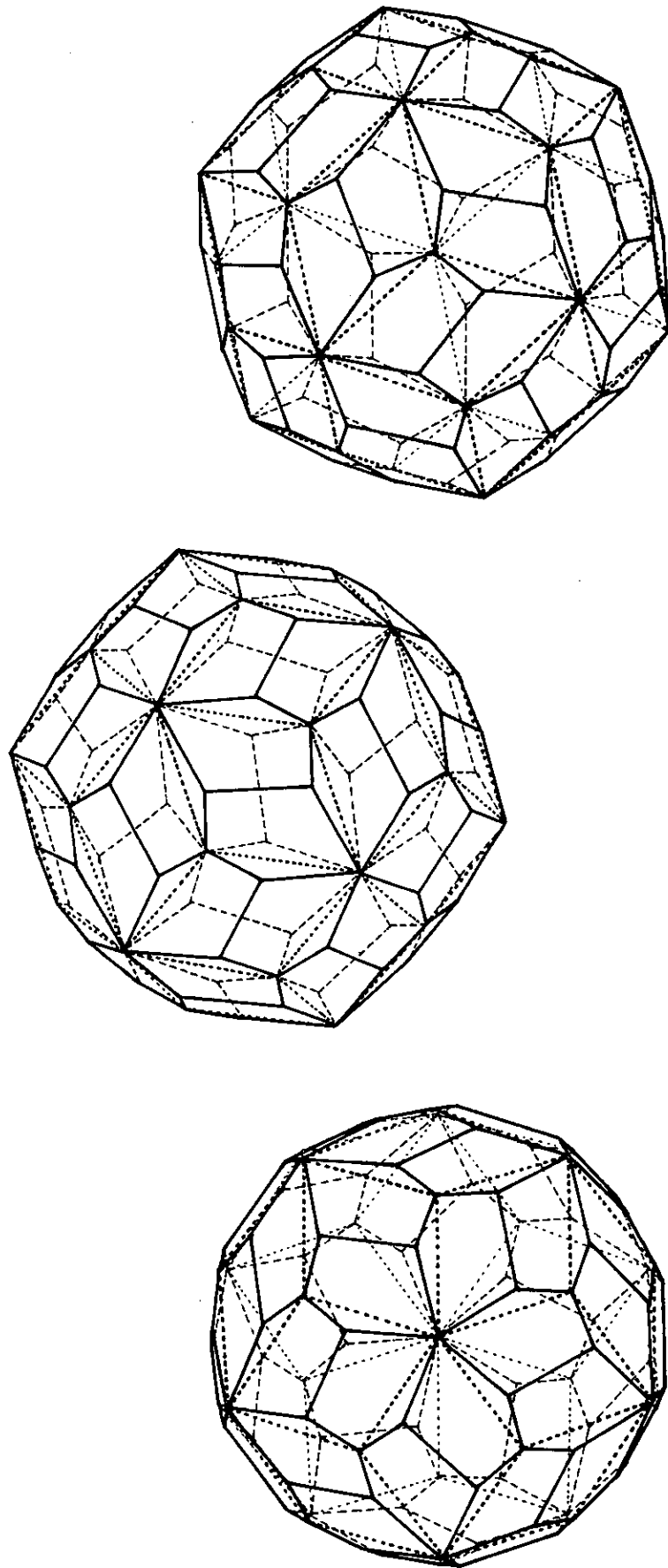


FIG 6.4.e SISTEMA DEL DODECAEDRO
EXACONTAEDROS PENTAGONAL Y TRIANGULAR

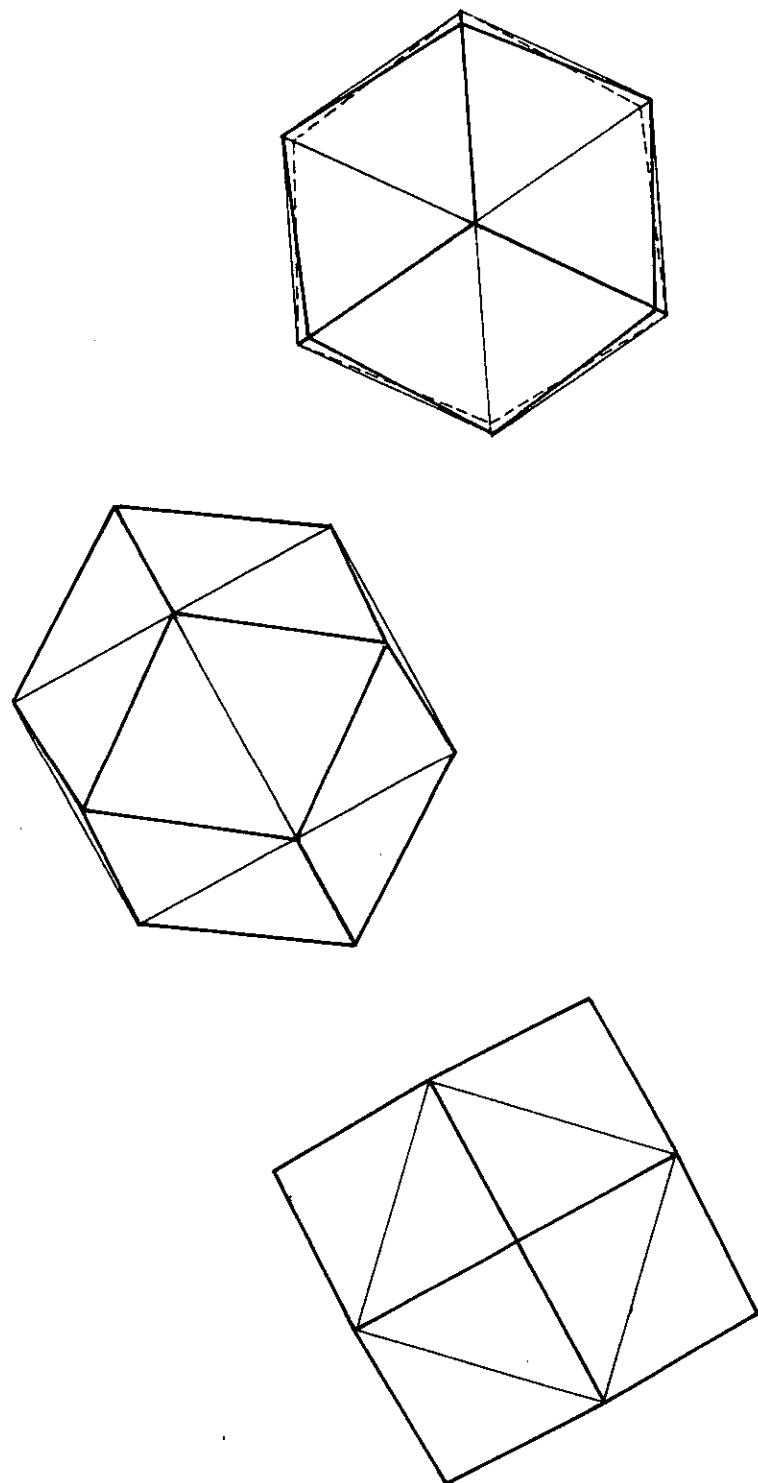


FIG 6.5.a ICOSITETRAEDRO TRIANGULAR

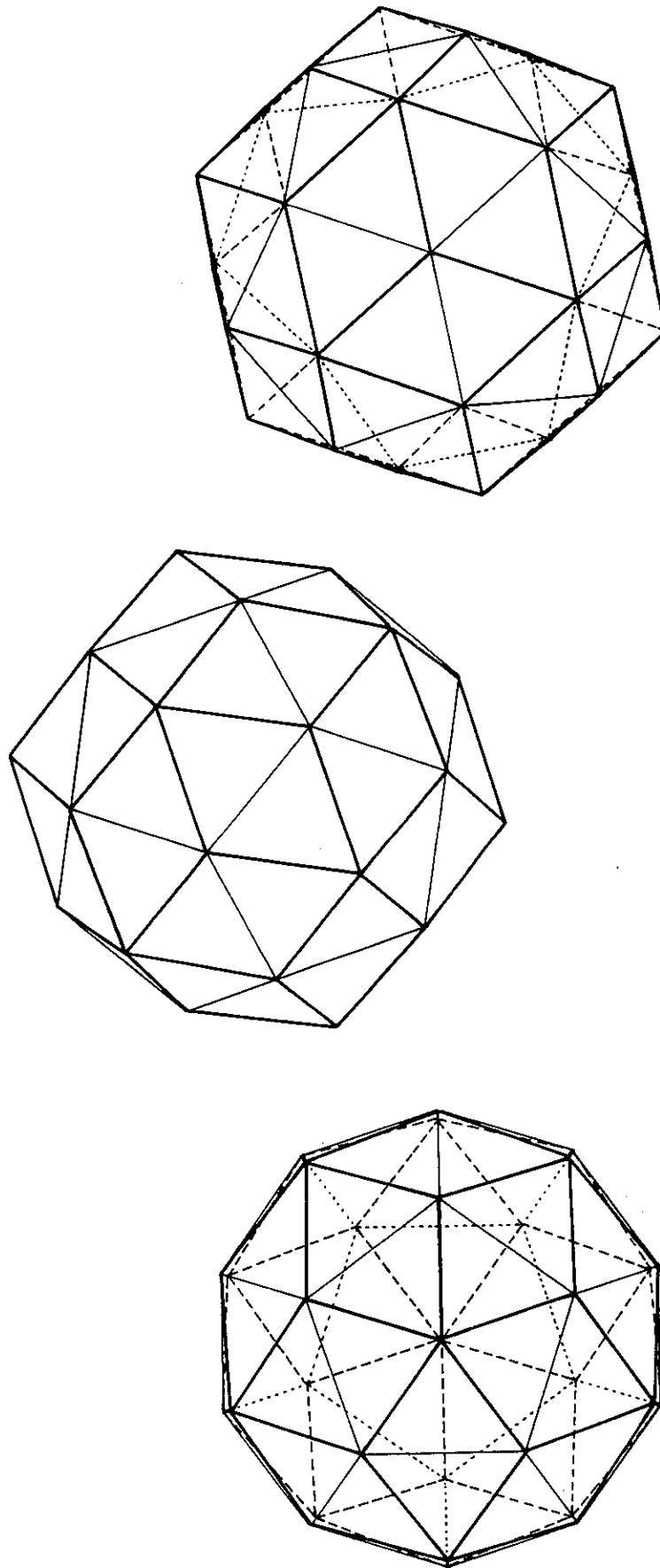


FIG 6.5.b EXACONTAEDRO TRIANGULAR

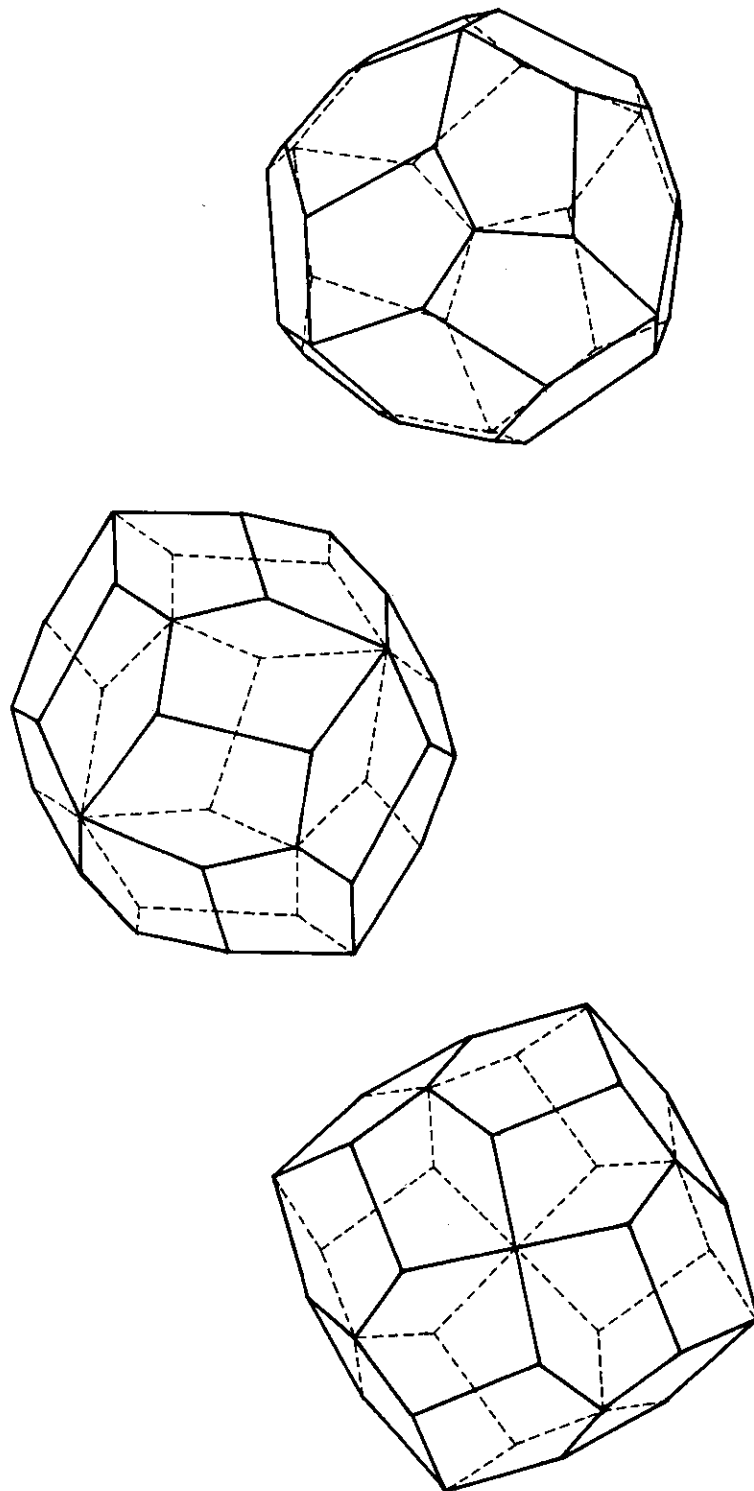


FIG 6.6.a ICOSITETRAEDRO PENTAGONAL

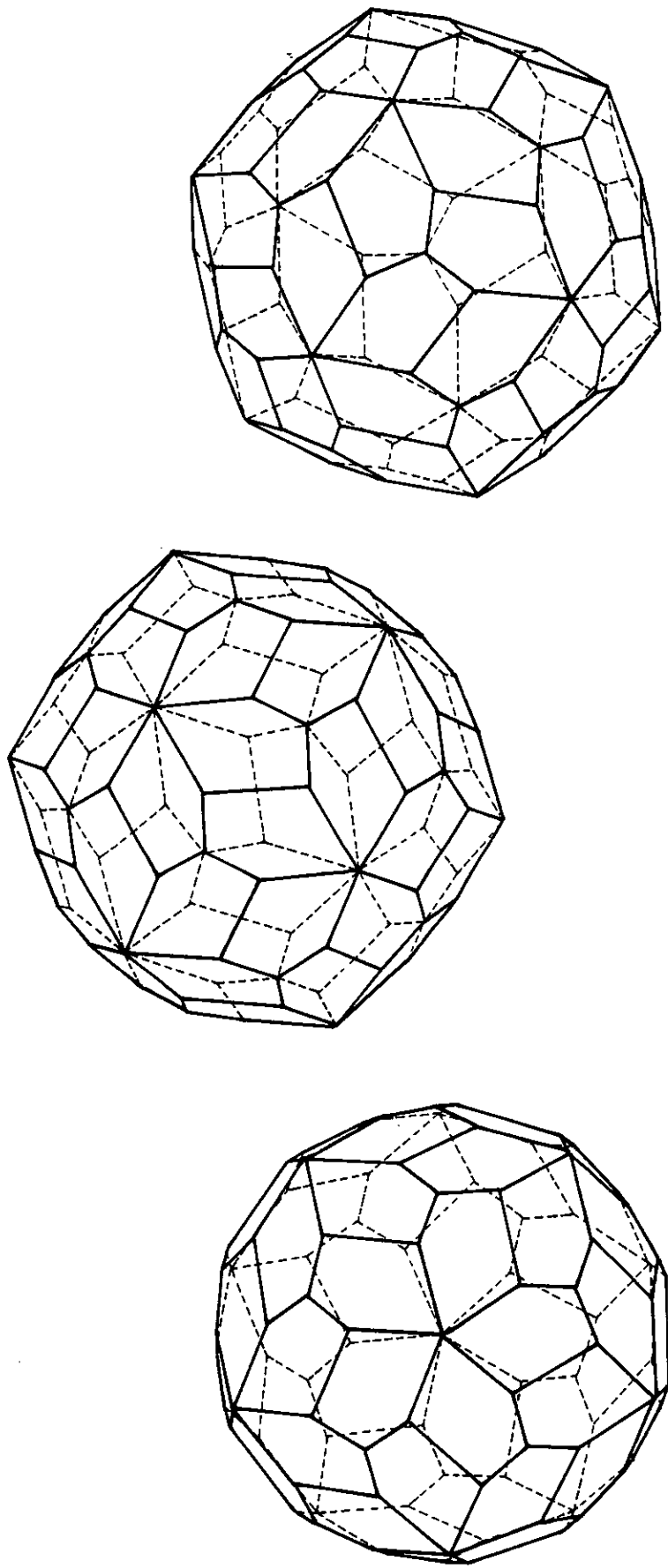


FIG 6.6.b EXACONTAEDRO PENTAGONAL

los planos de simetría normales al del poliedro, que sólo existen en el sistema cuadrado, tienen su correspondencia en los ejes de simetría del mosaico resultante.

6.2.3. LOS MODULOS DE LOS POLIEDROS ACHATANTES

En la figura 6.3. se ven los módulos de estos poliedros, ordenados como se hizo en la figura 4.3. para los achatados; 6.3.a se corresponde con 4.3.j (módulos triangulares), 6.3.b con 4.3.k (módulos rómbicos).

6.2.4. POLIEDROS ACHATANTES Y ROMBOEDROS

En 6.2.1. se ha visto que el dodecaedro pentagonal es envolvente del cubo (sus caras contienen a las aristas de éste), como el cubo era envolvente del tetraedro.

Se plantea entonces si los demás poliedros achatantes tienen la misma relación con los romboedros de sus sistemas respectivos.

En el sistema del tetraedro se obtienen las aristas del romboedro (cubo) trazando sobre las caras del achatante las diagonales que unen los vértices de éste correspondientes a las caras del achatado (figura 6.4.c). Efectivamente por este procedimiento se obtienen en los achatantes planos las correspondientes redes rómbicas (figura 6.4.a,b).

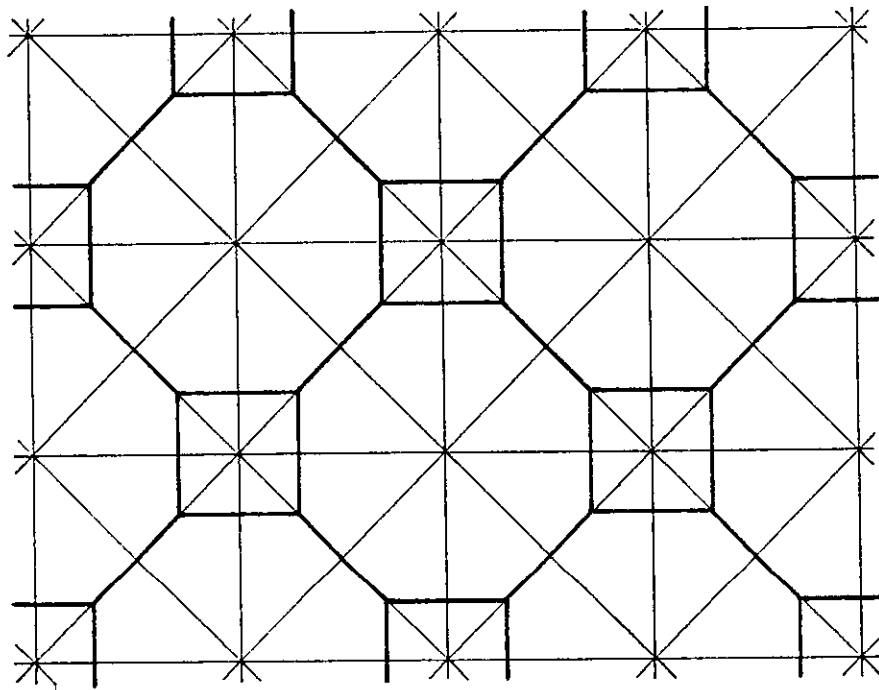
En apariencia, para los sistema del cubo y del dodecaedro se obtienen de modo semejante un rombododecaedro y un rombotriacontaedro (figura 6.4.d,e), pero un exámen atento revela que los rombos correspondientes no son planos, sino que se componen cada uno de dos triángulos no coplanarios, por lo que estos poliedros duplican sus caras, tratándose respectivamente de un icositetraedro y un exacontaedro, ambos triangulares (figuras 6.5.a y 6.5.b). En las figuras 6.6.a, b hemos dibujado, para mayor claridad, los poliedros achatantes de los sistemas del cubo y del dodecaedro, separadamente de los poliedros anteriores.

6.3. POLIEDROS SEMIRREGULARES

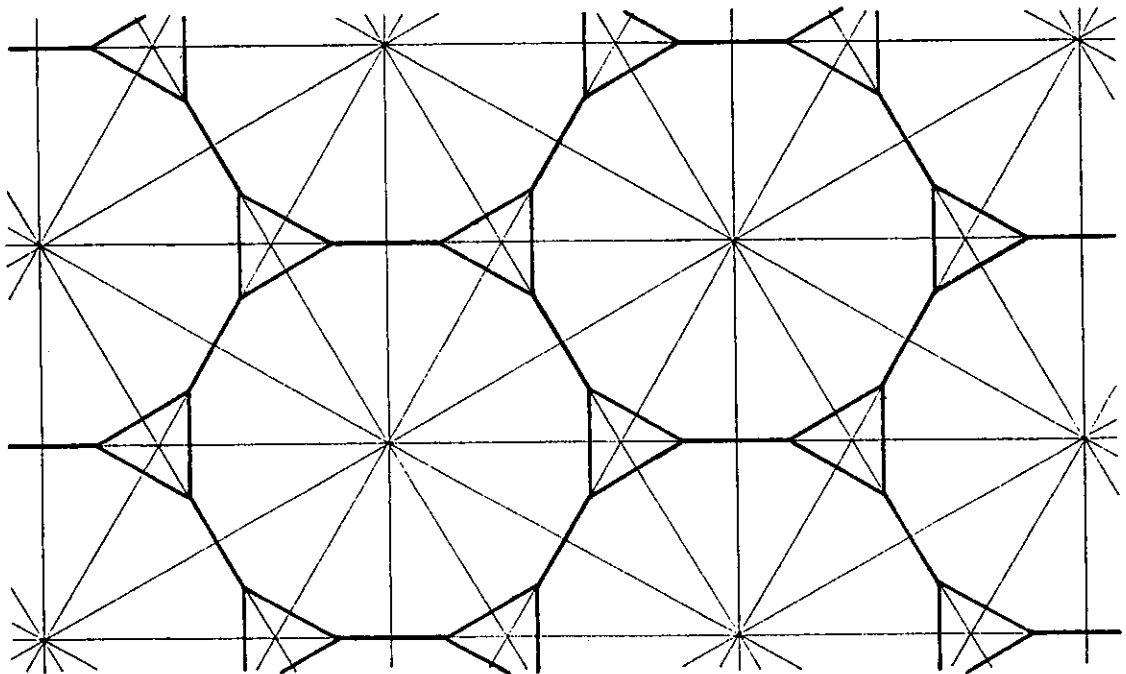
Para terminar este capítulo adjuntamos los poliedros de los cinco sistemas, representados los planos sobre la correspondiente red modular y los abovedados inscritos en el poliedro básico. No se incluyen en esta representación los poliedros regulares básico y dual ni los romboedros de cada sistema, pero sí aquellos poliedros regulares de otros sistemas que completan el sistema del tetraedro.

En la representación diédrica de los semirregulares abovedados se han incluido sólo tres vistas, proyectadas según la dirección de los tres tipos de ejes. En el sistema del tetraedro, con solo dos tipos, la tercera vista es ortogonal al plano que forman dos ejes de diferente tipo.

SISTEMA CUADRADO

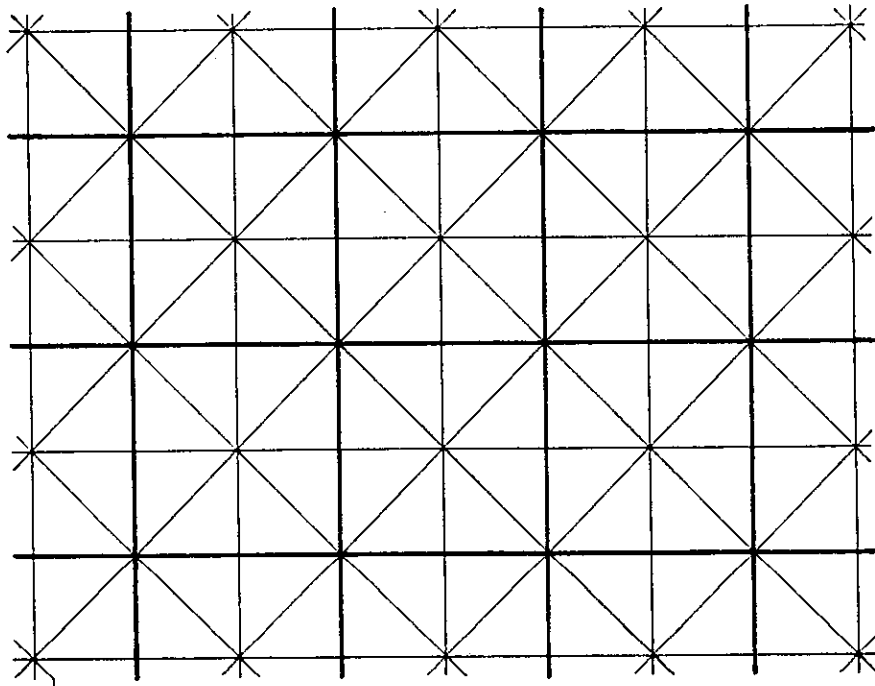


SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO

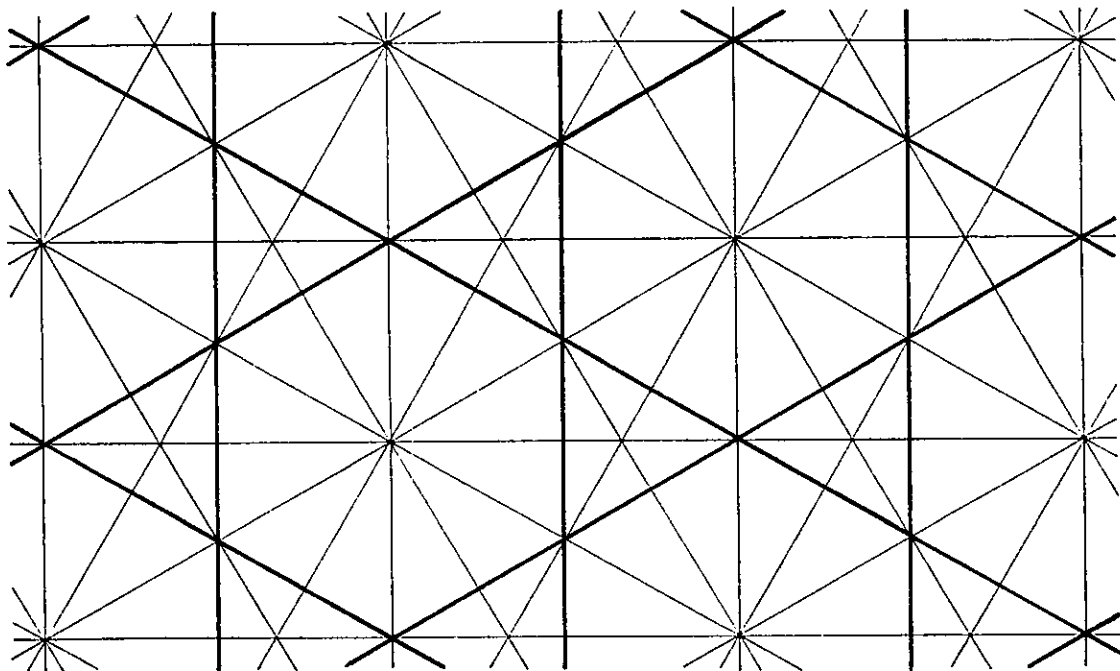


POLIEDROS TRUNCADOS BASICOS

SISTEMA CUADRADO

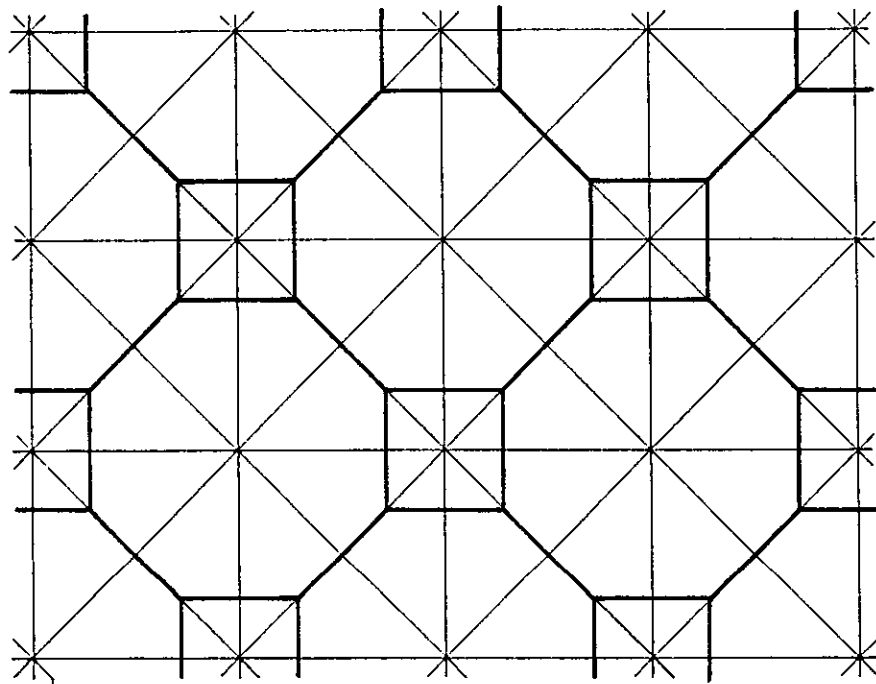


SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO

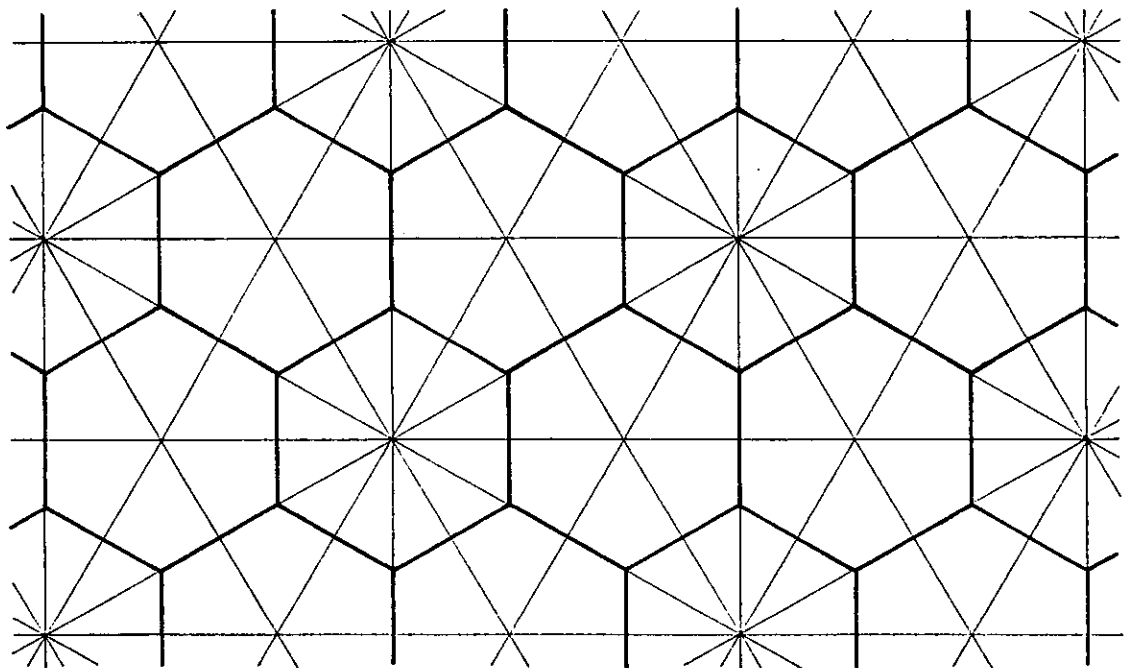


POLIPOLIEDROS

SISTEMA CUADRADO

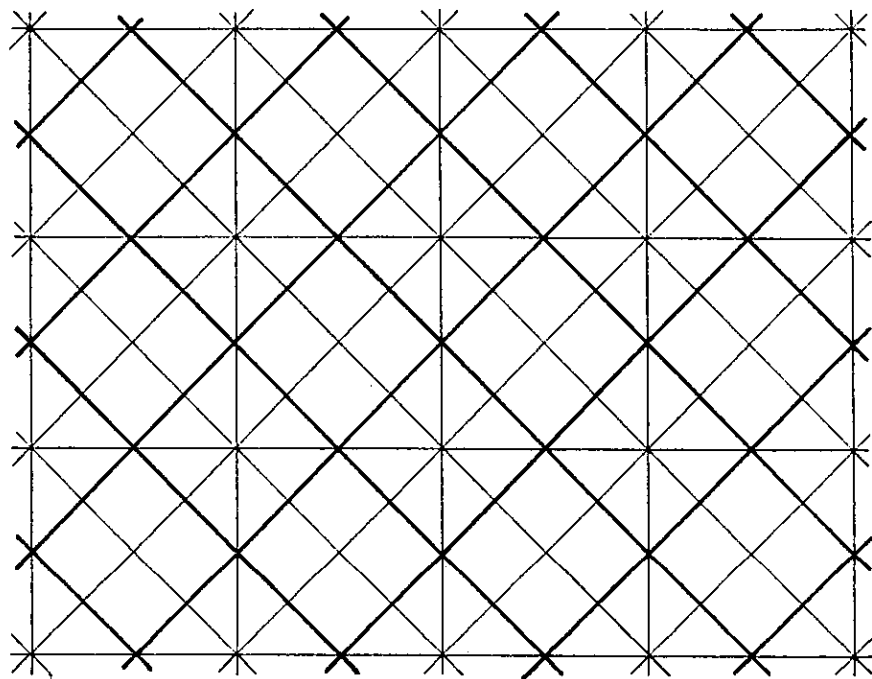


SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO

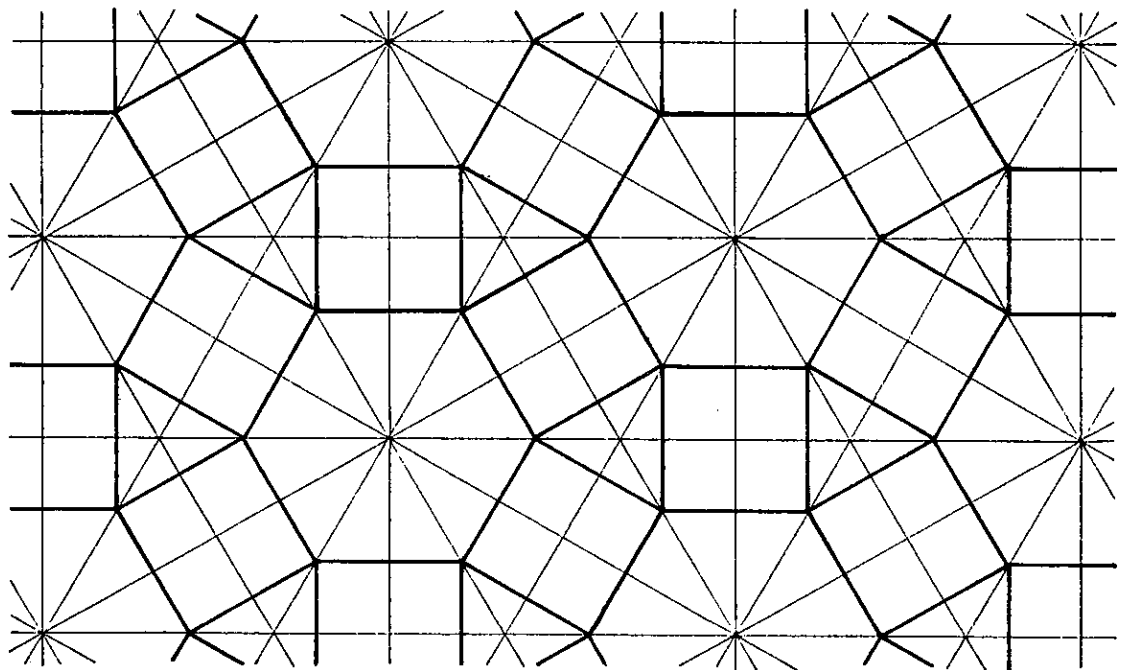


POLIEDROS TRUNCADOS DUALES

SISTEMA CUADRADO

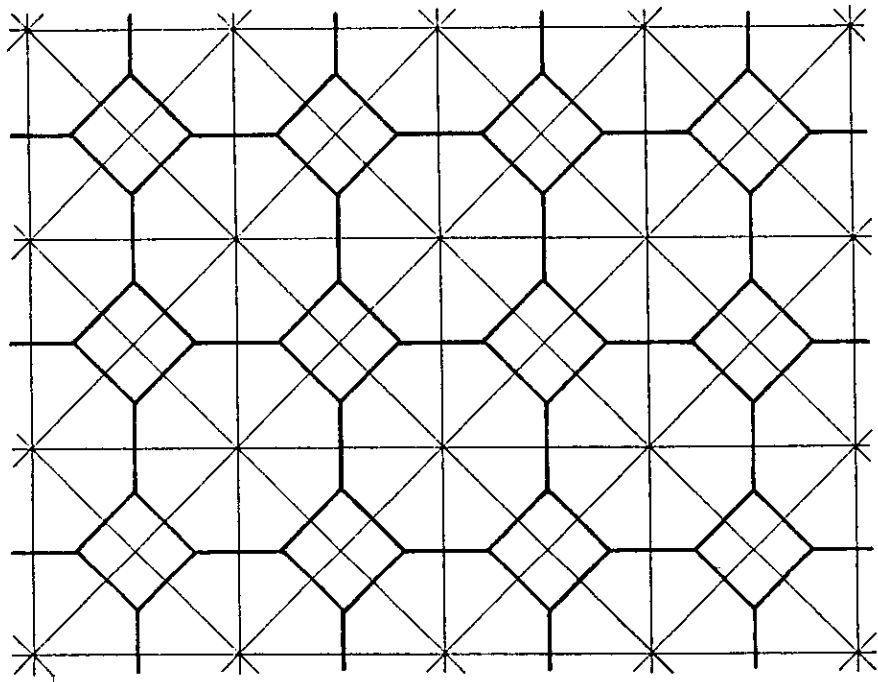


SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO

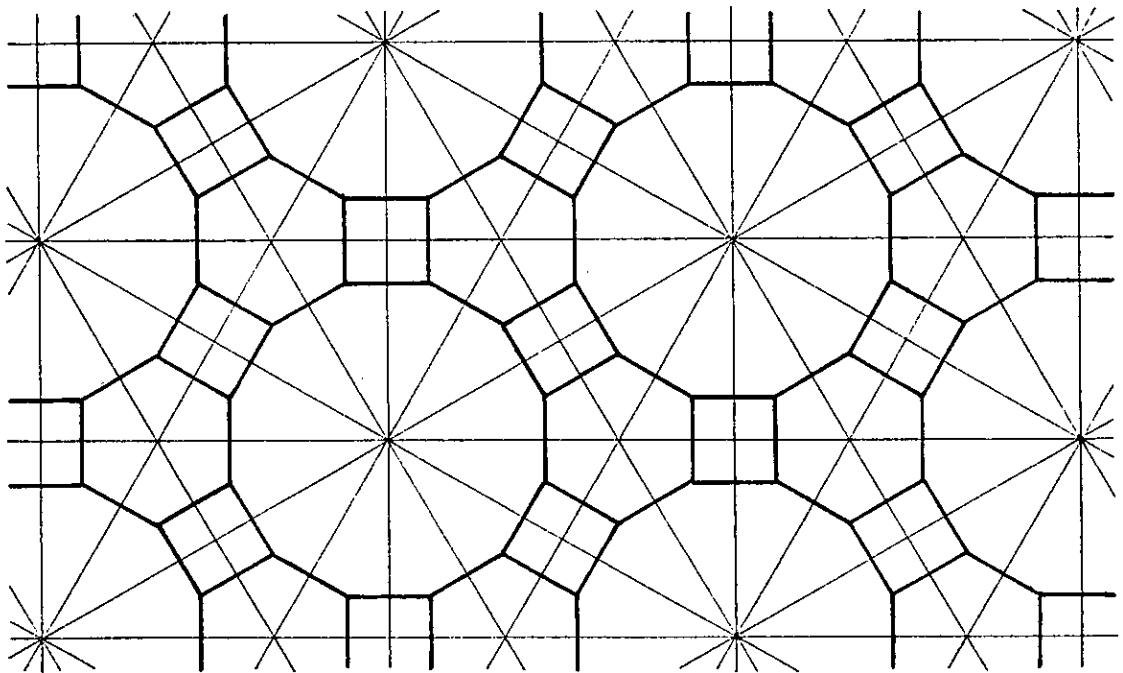


ROMBIPOLIPOLIEDROS

SISTEMA CUADRADO

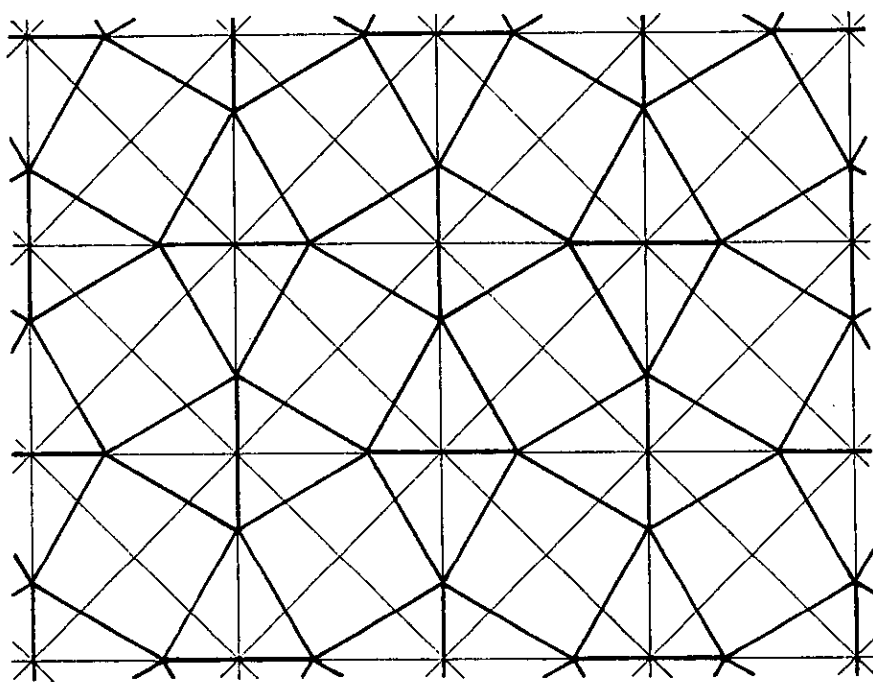


SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO

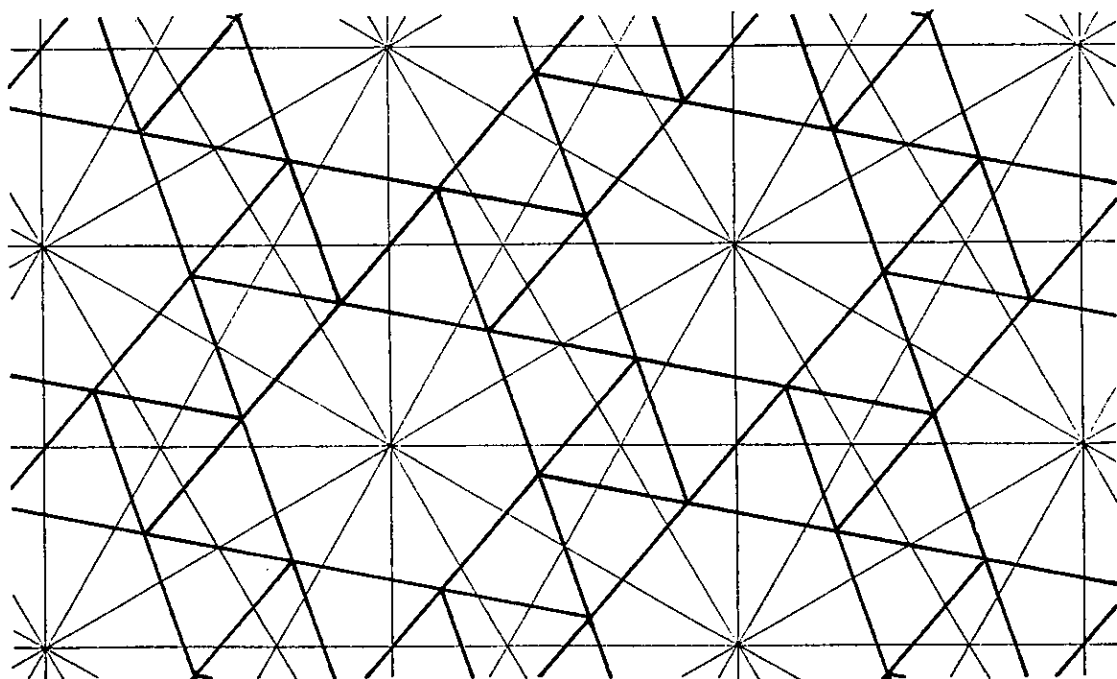


GRANDES ROMBIPOLIPOLIEDROS

SISTEMA CUADRADO

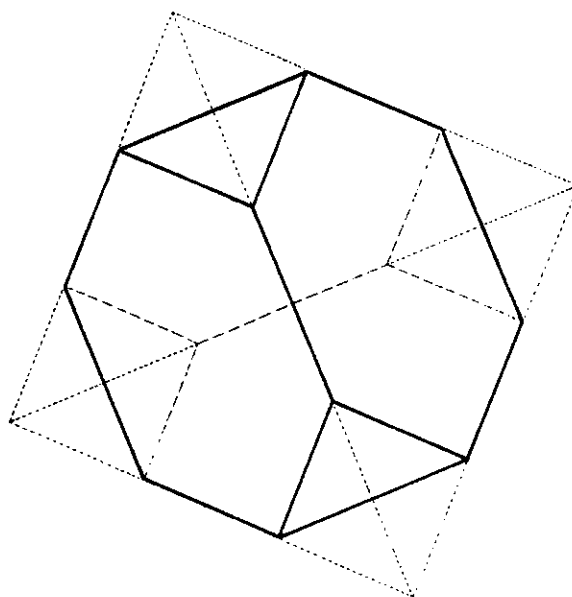
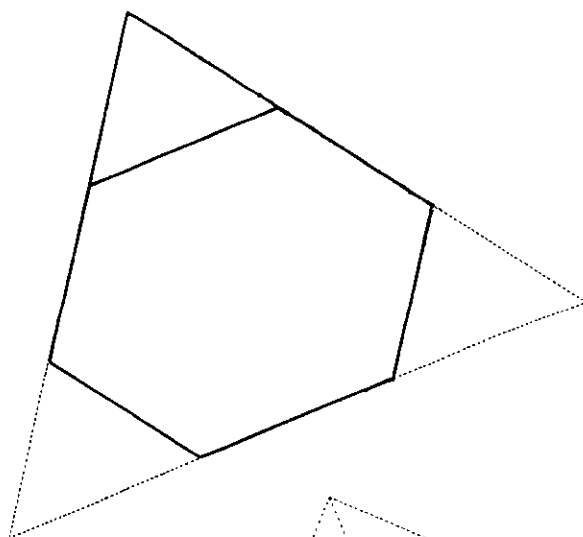
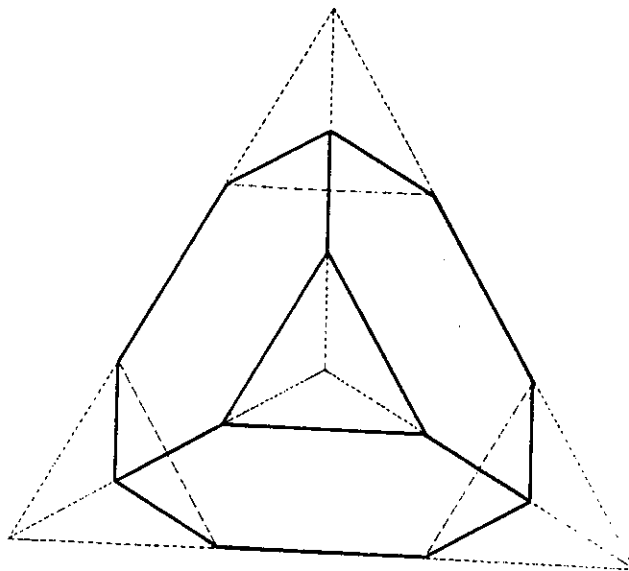


SISTEMA TRIANGULAR EQUILATERO



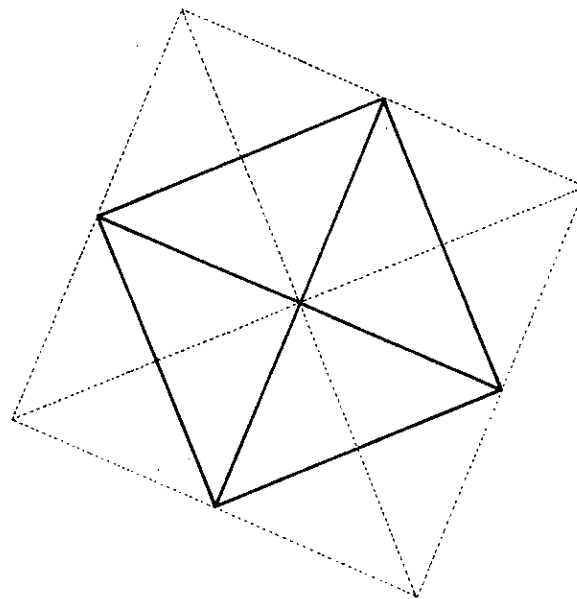
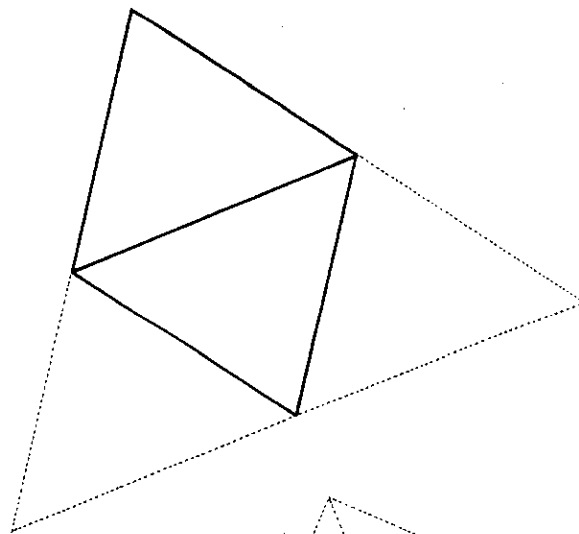
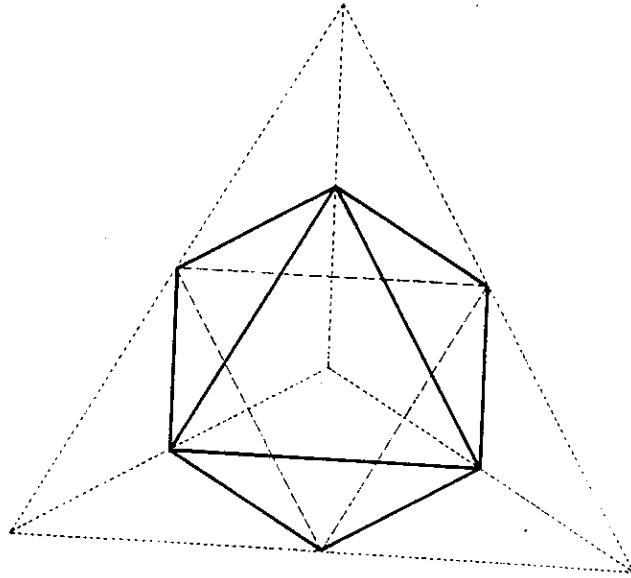
POLIEDROS ACHATADOS

SISTEMA DEL TETRAEDRO



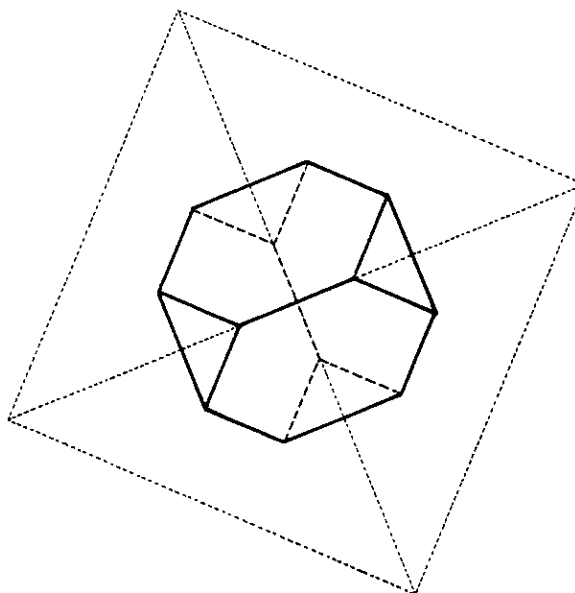
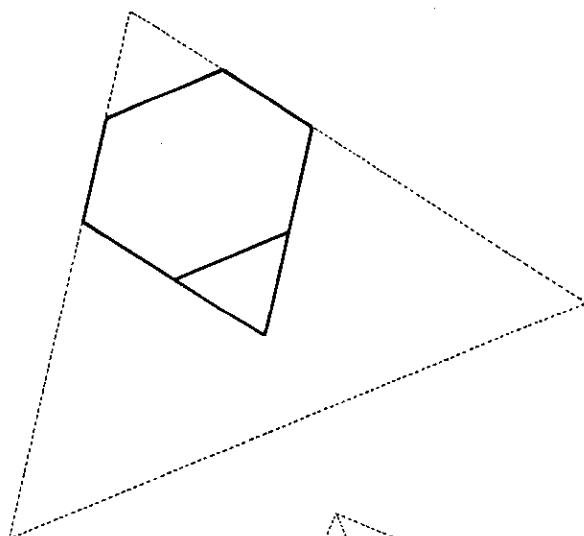
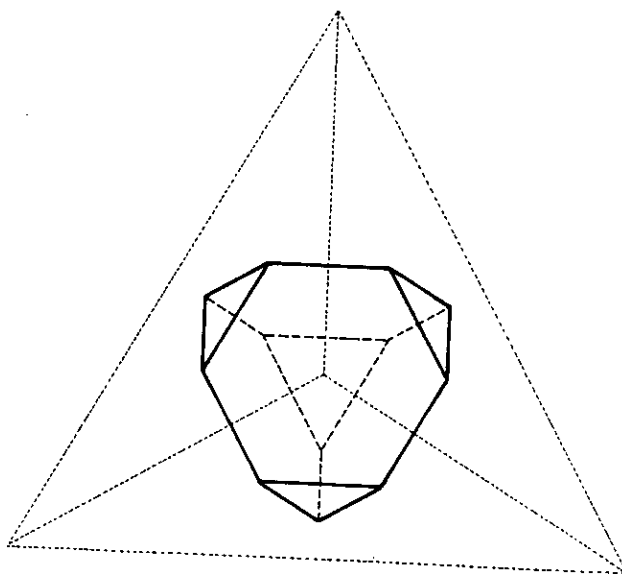
TETRAEDRO TRUNCADO

SISTEMA DEL TETRAEDRO



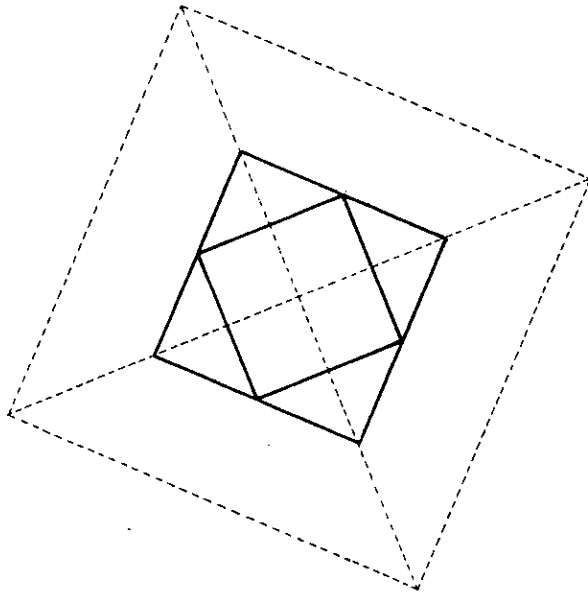
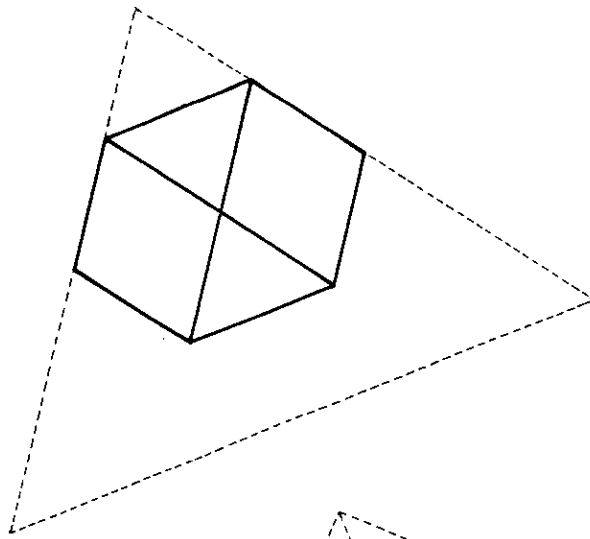
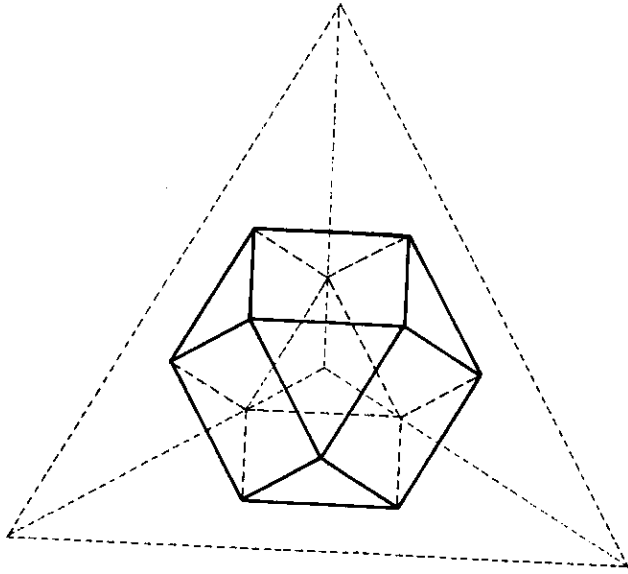
TETRATETRAEDRO (OCTAEDRO)

SISTEMA DEL TETRAEDRO



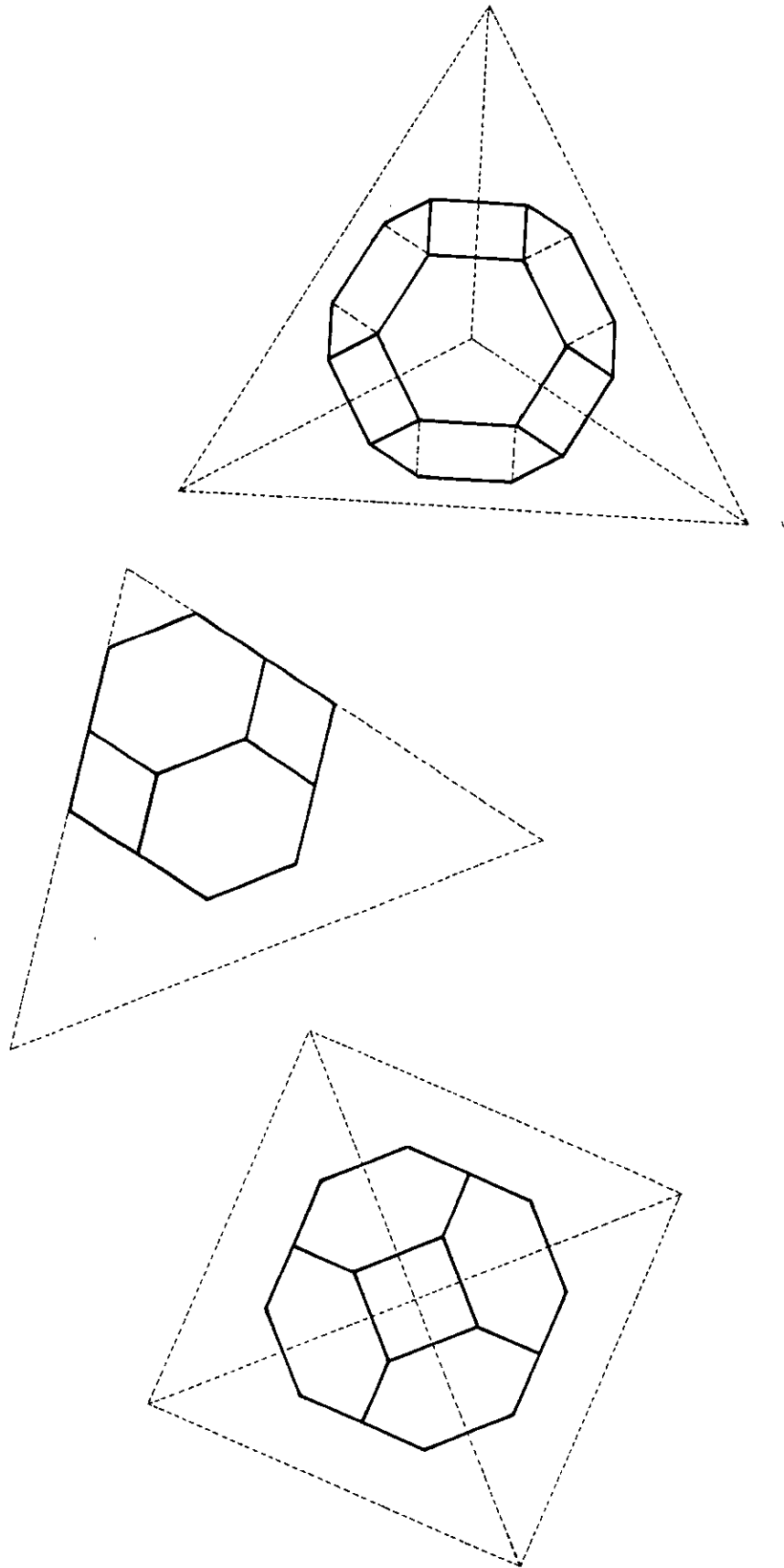
TETRAEDRO DUAL TRUNCADO

SISTEMA DEL TETRAEDRO



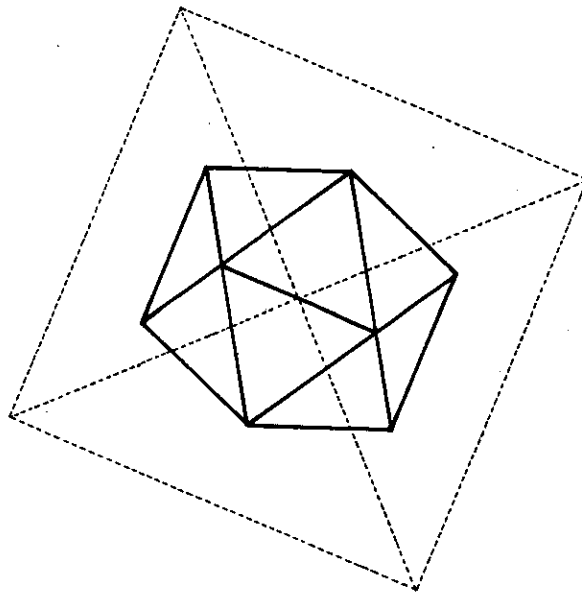
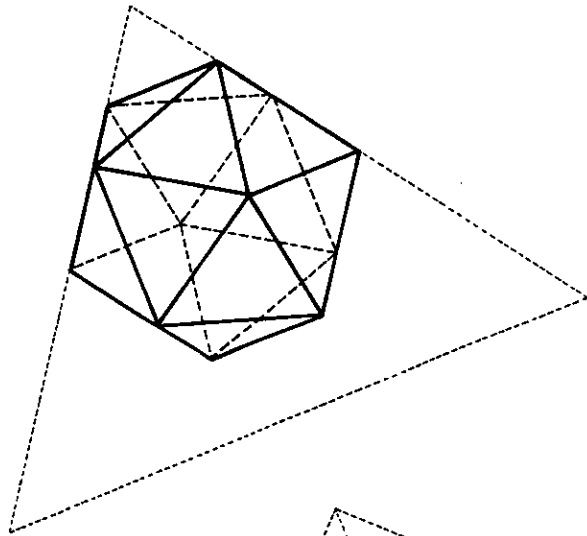
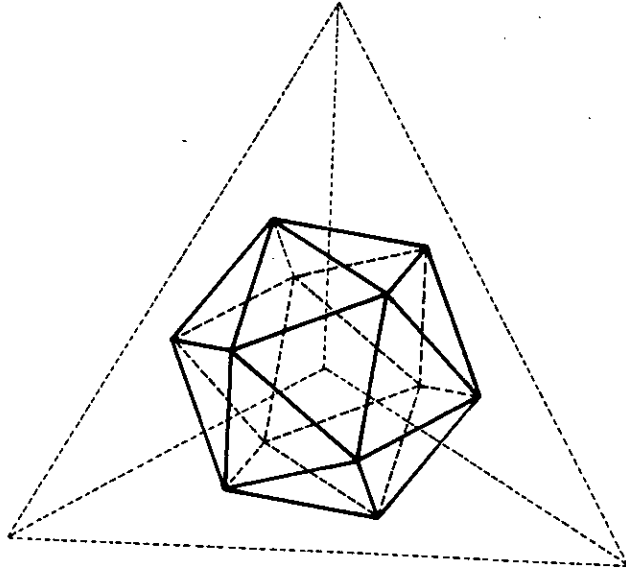
ROMBITETRAEDRO (CUBOCTAEDRO)

SISTEMA DEL TETRAEDRO



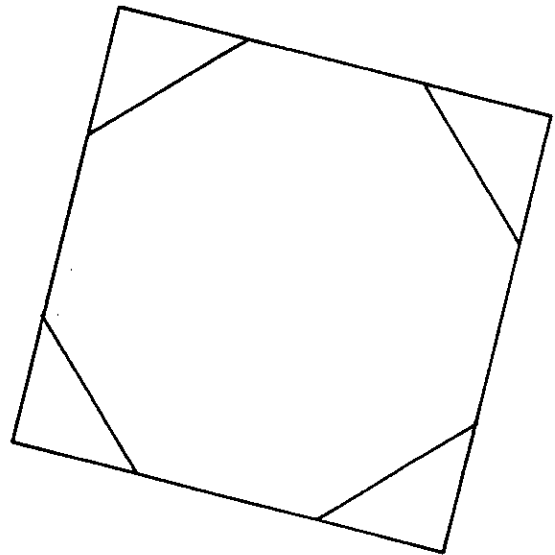
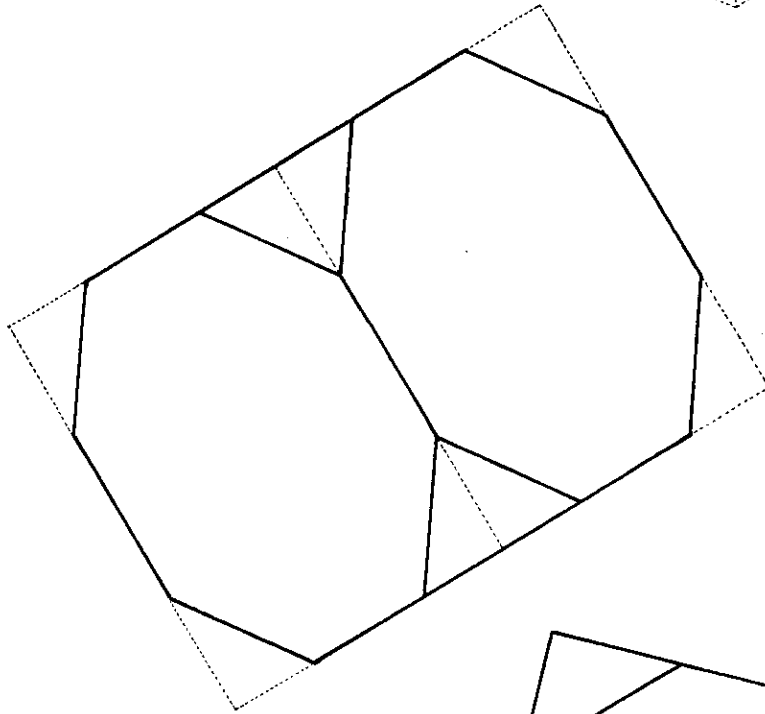
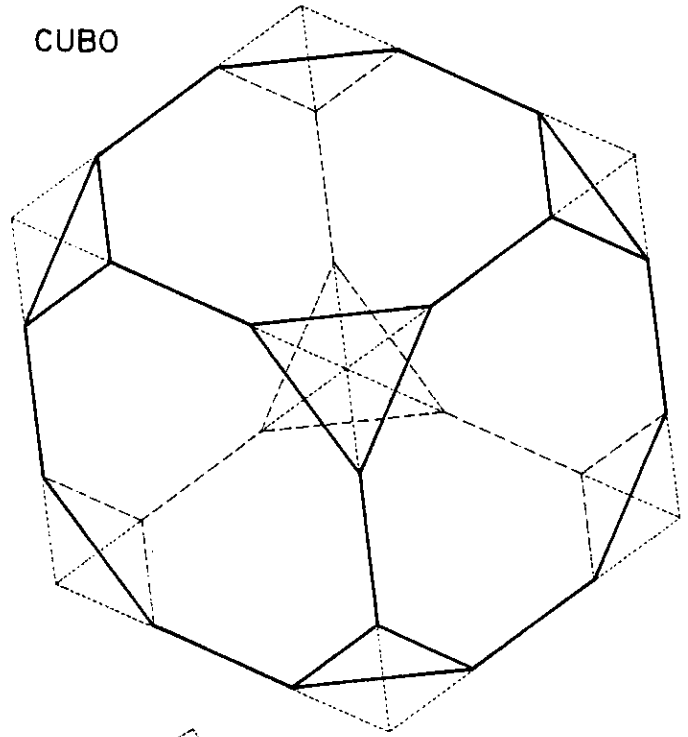
GRAN ROMBITETRATETRAEDRO (OCTAEDRO TRUNCADO)

SISTEMA DEL TETRAEDRO



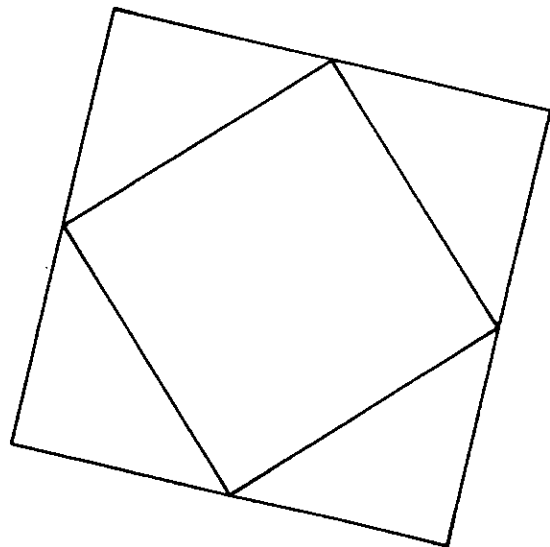
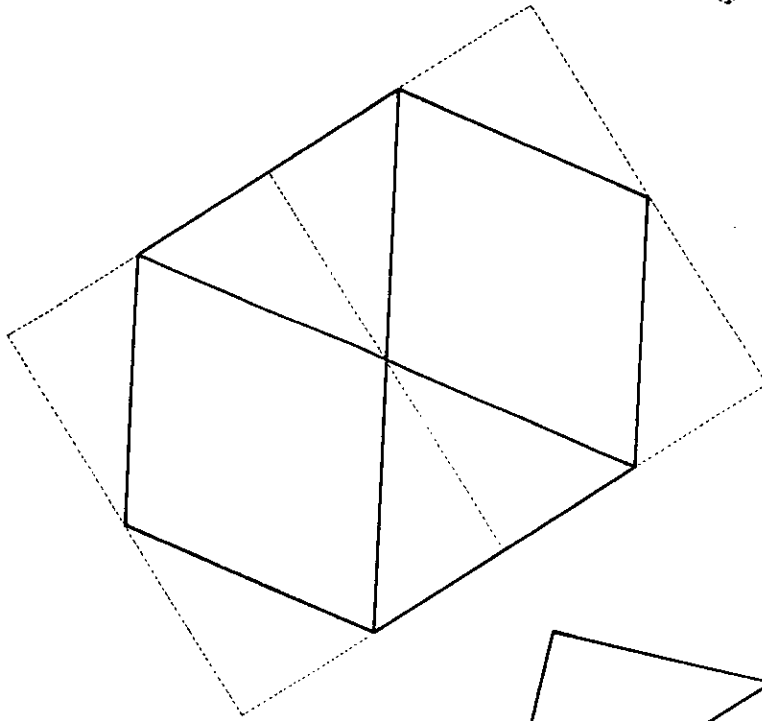
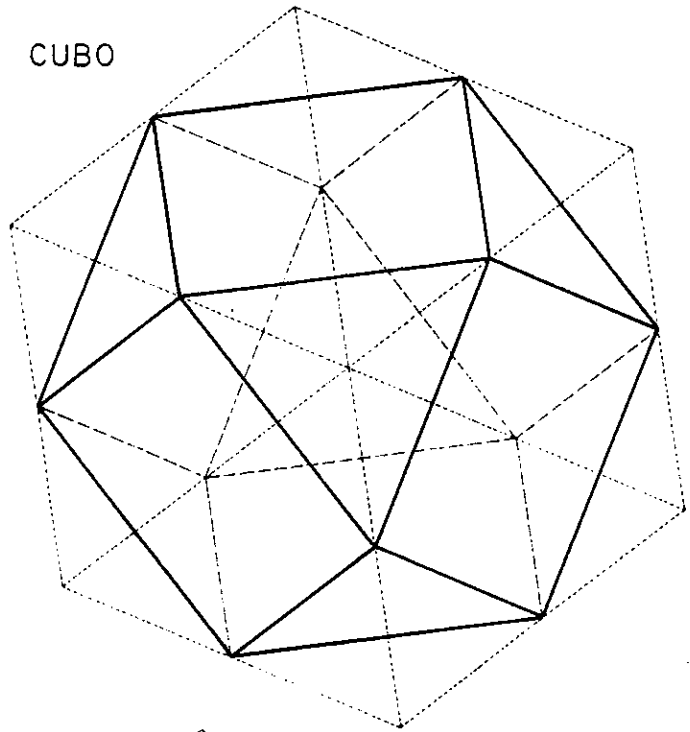
TETRAEDRO ACHATADO (ICOSAEDRO)

SISTEMA DEL CUBO



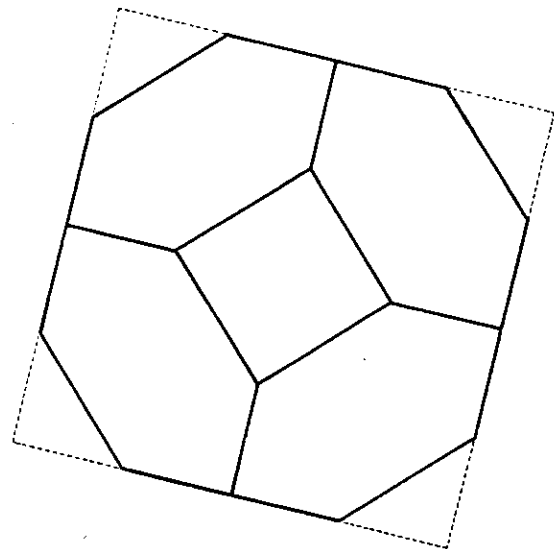
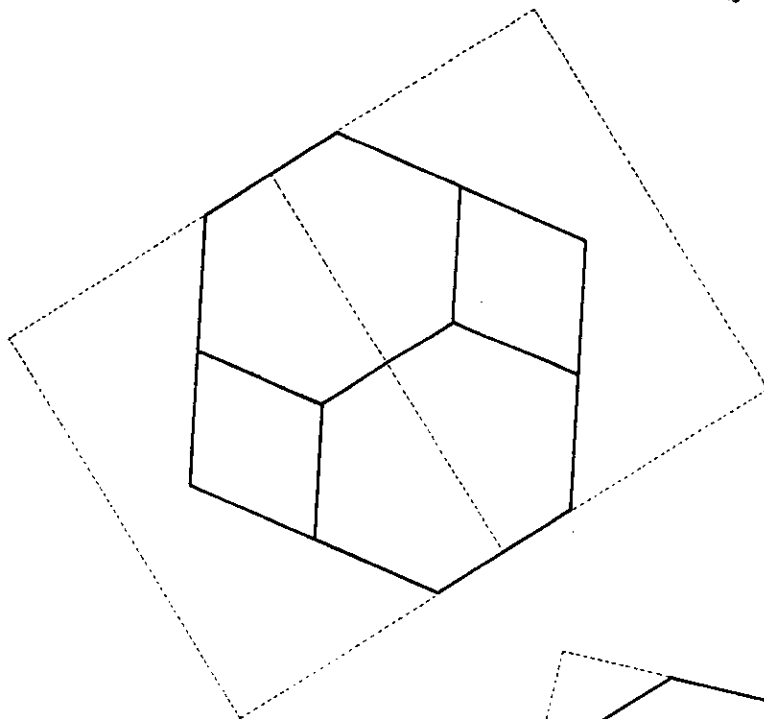
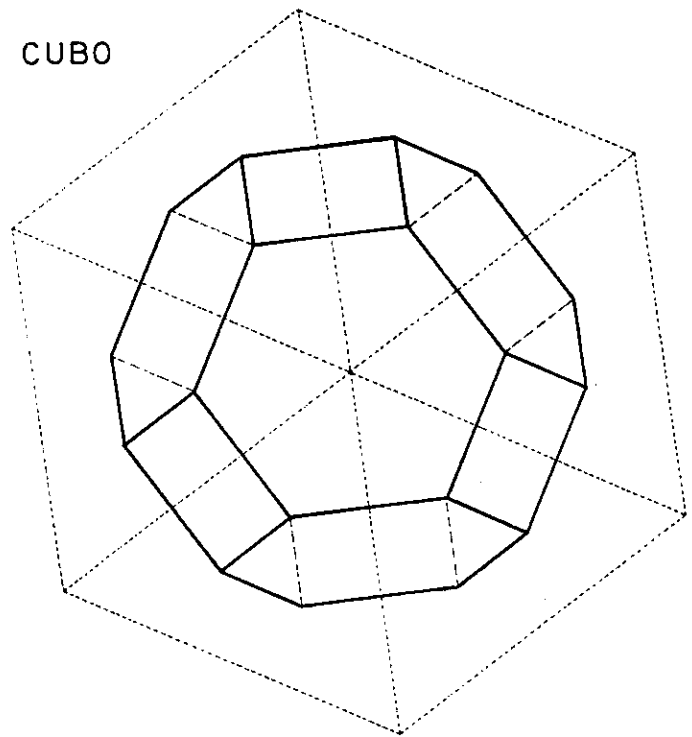
CUBO TRUNCADO

SISTEMA DEL CUBO



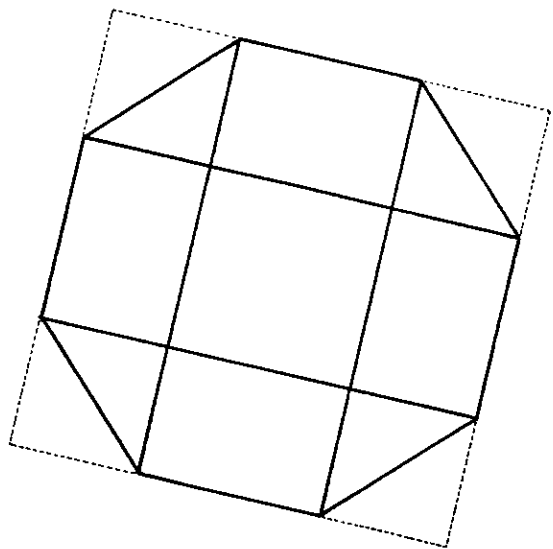
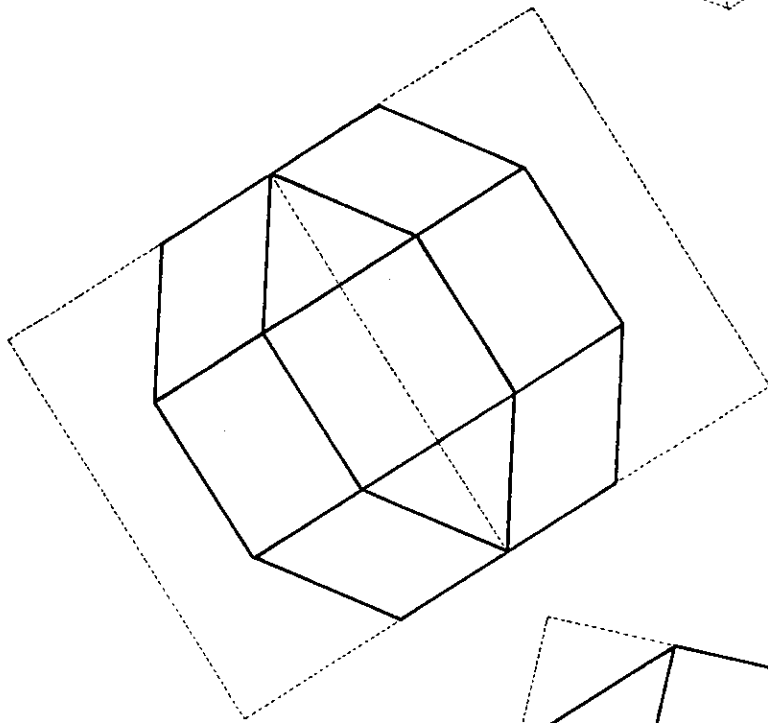
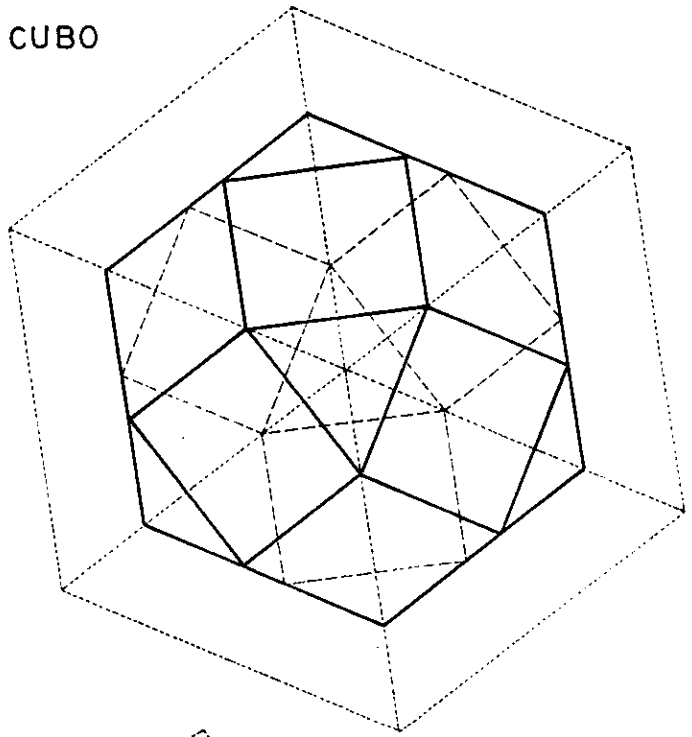
CUBOCTAEDRO

SISTEMA DEL CUBO



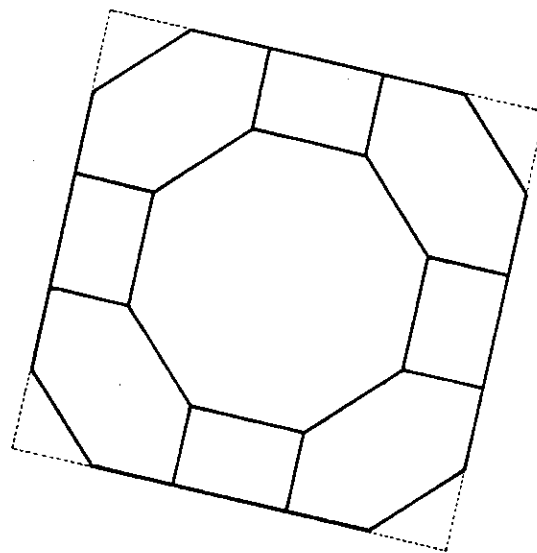
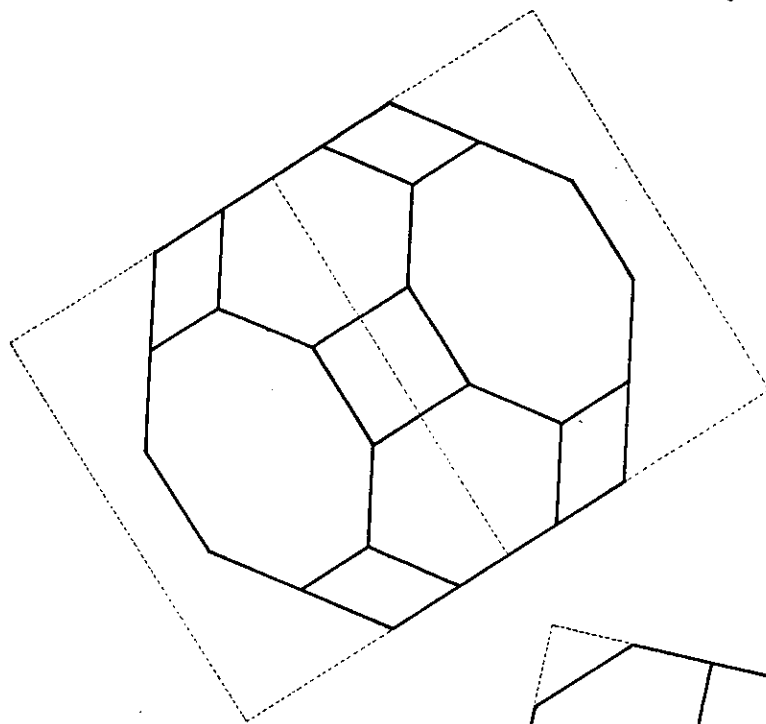
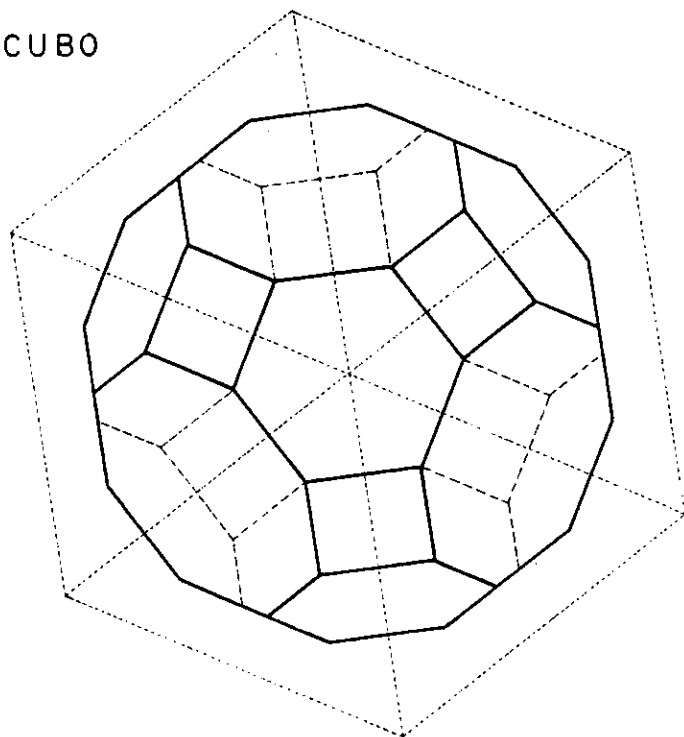
OCTAEDRO TRUNCADO

SISTEMA DEL CUBO



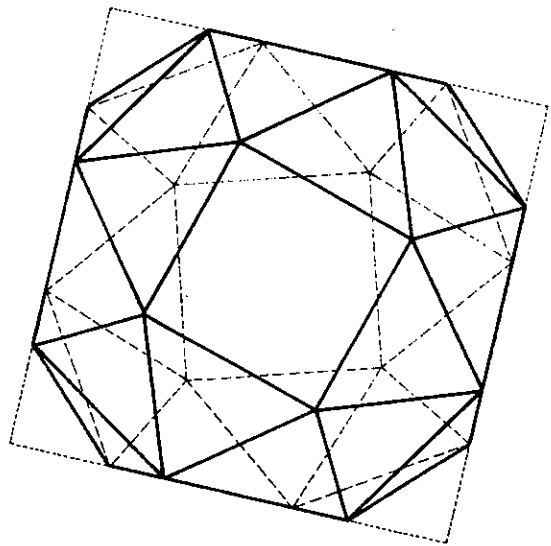
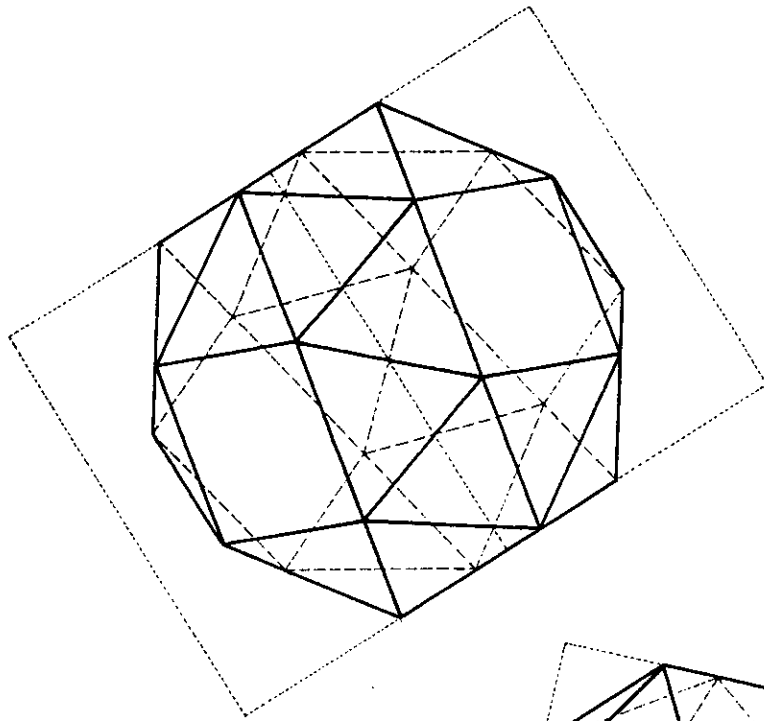
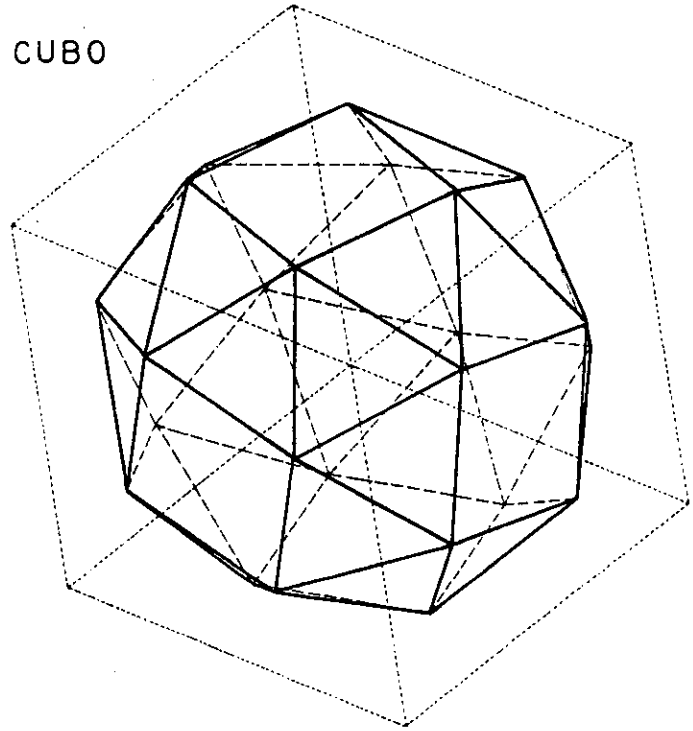
ROMBICUBOCTAEDRO

SISTEMA DEL CUBO



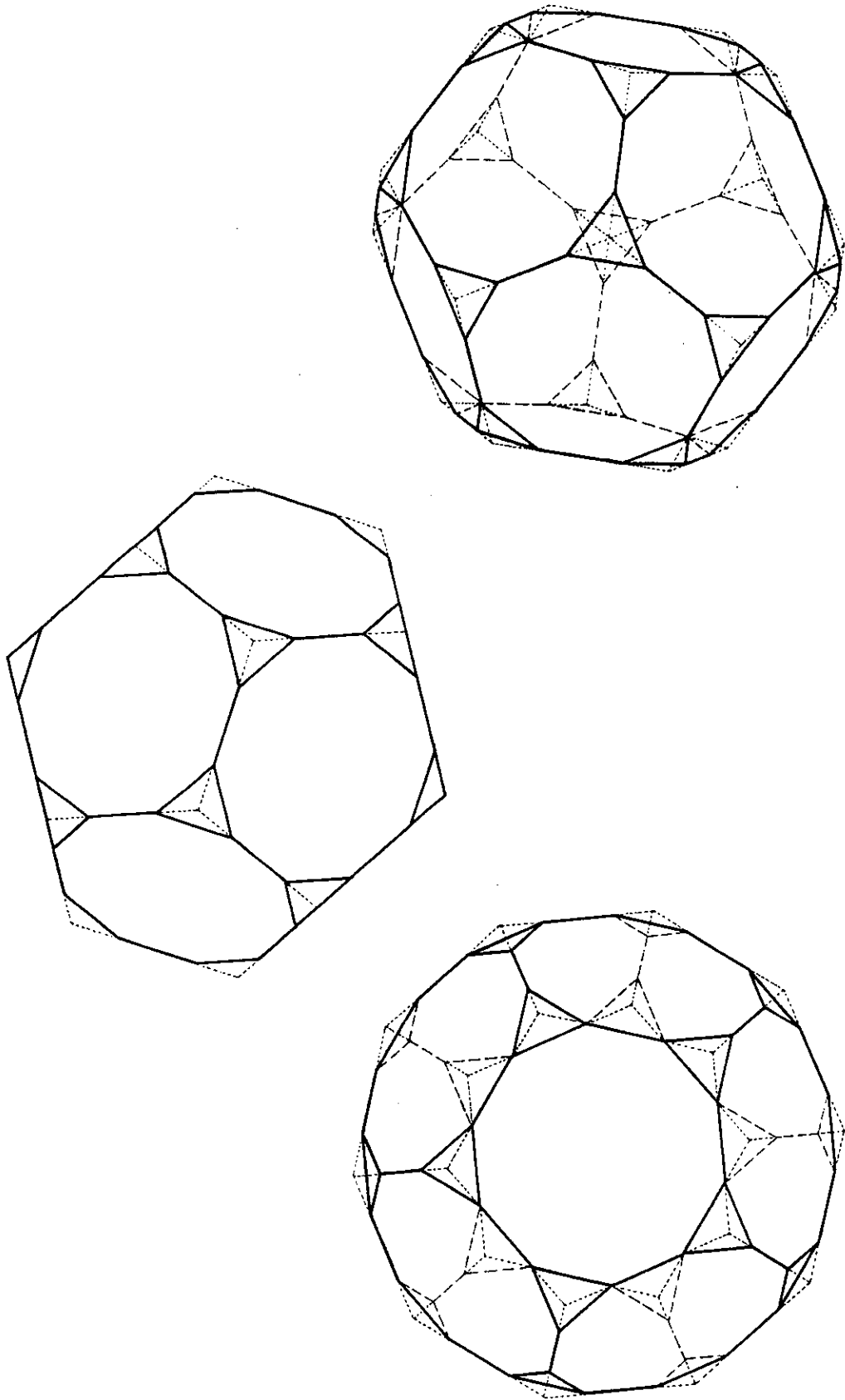
GRAN ROMBICUBOCTAEDRO

SISTEMA DEL CUBO



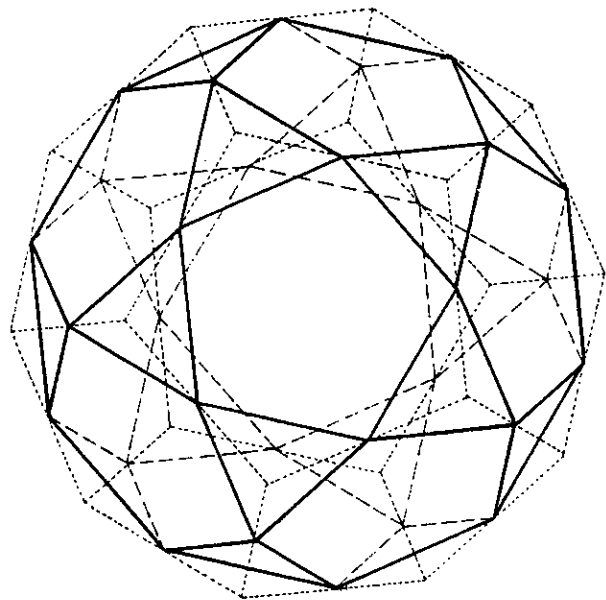
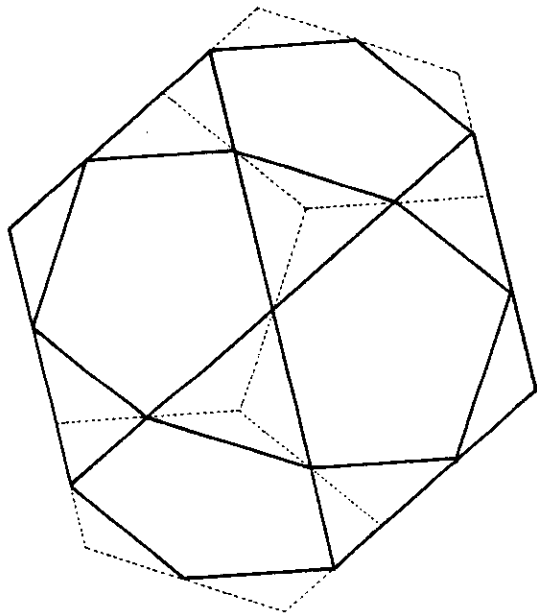
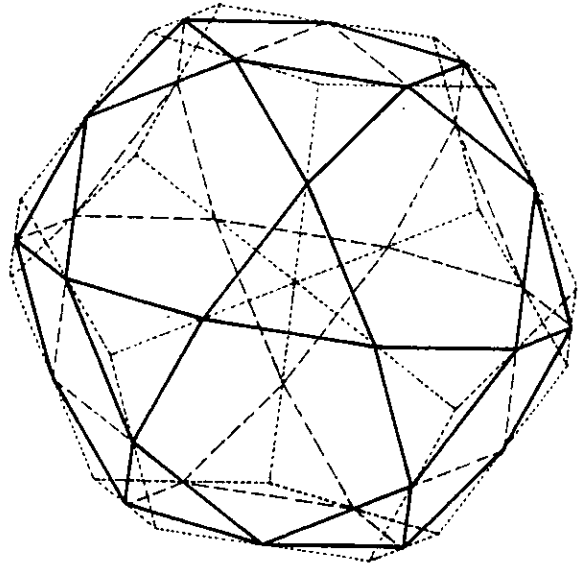
CUBO ACHATADO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



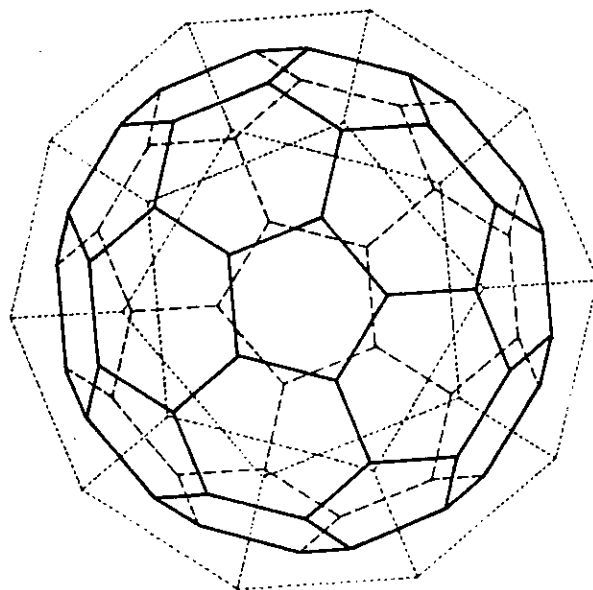
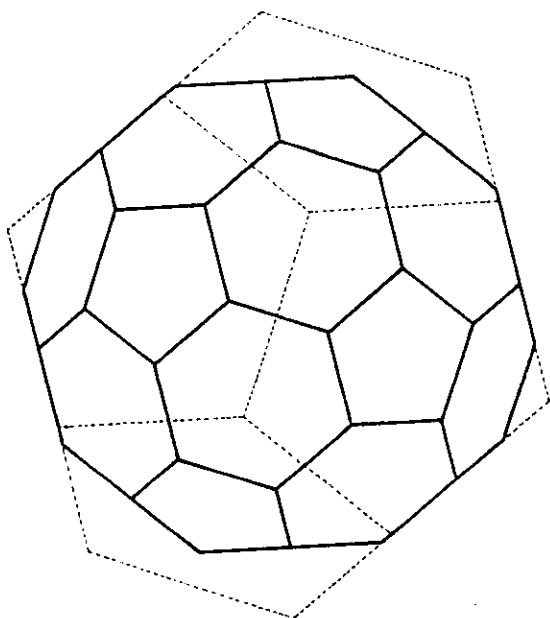
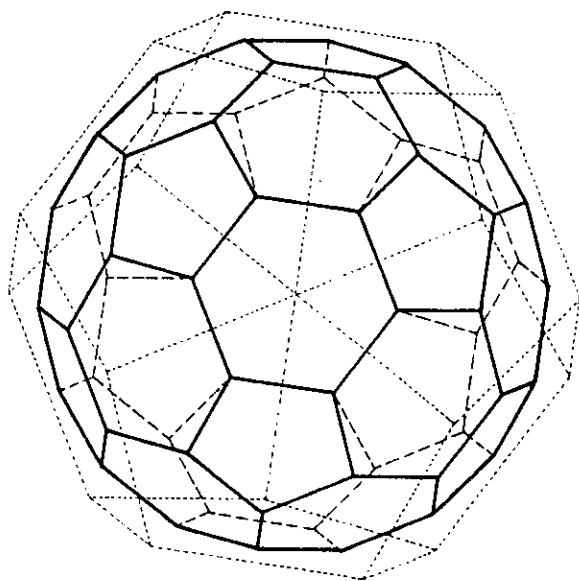
DODECAEDRO TRUNCADO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



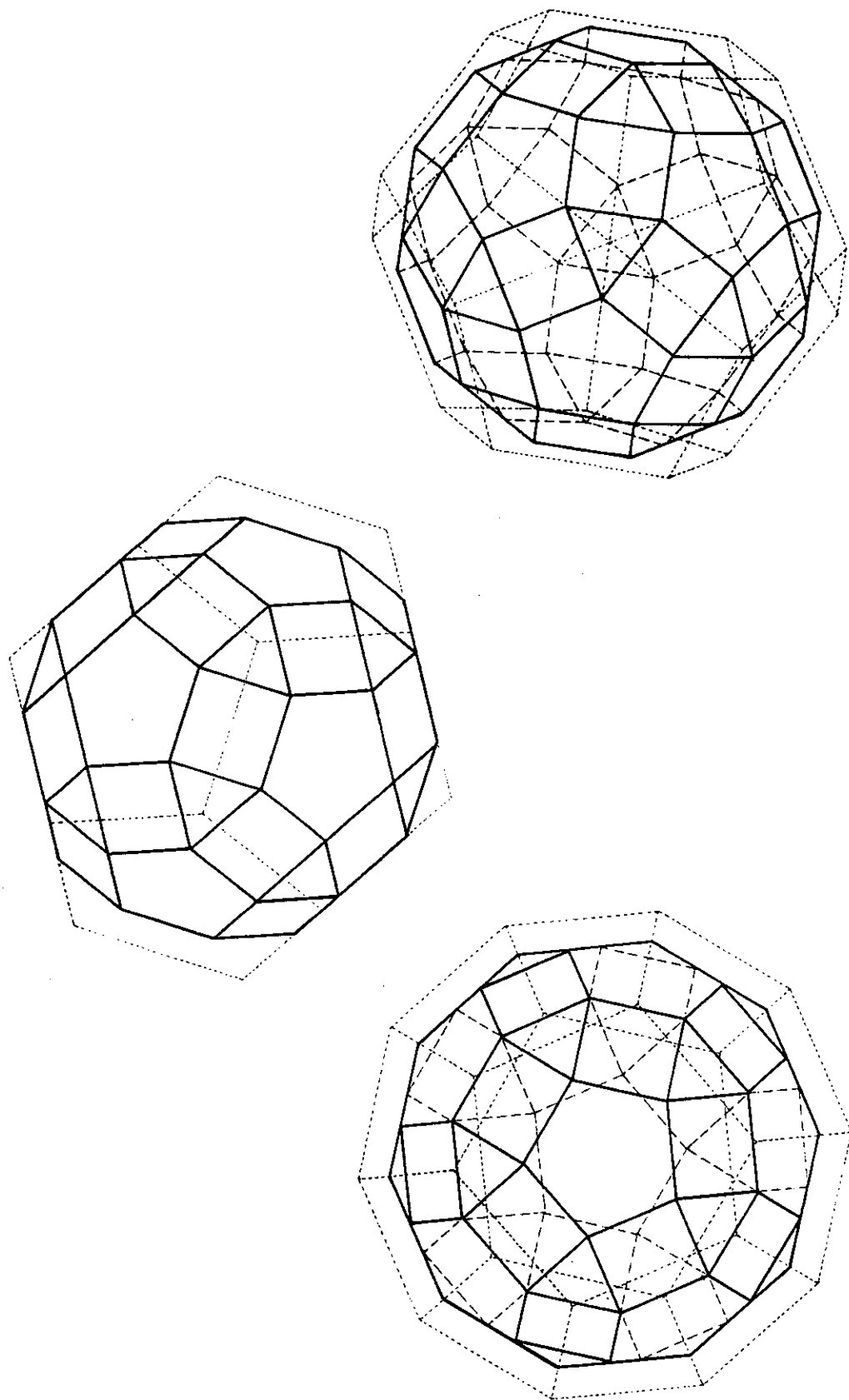
ICOSIDODECAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



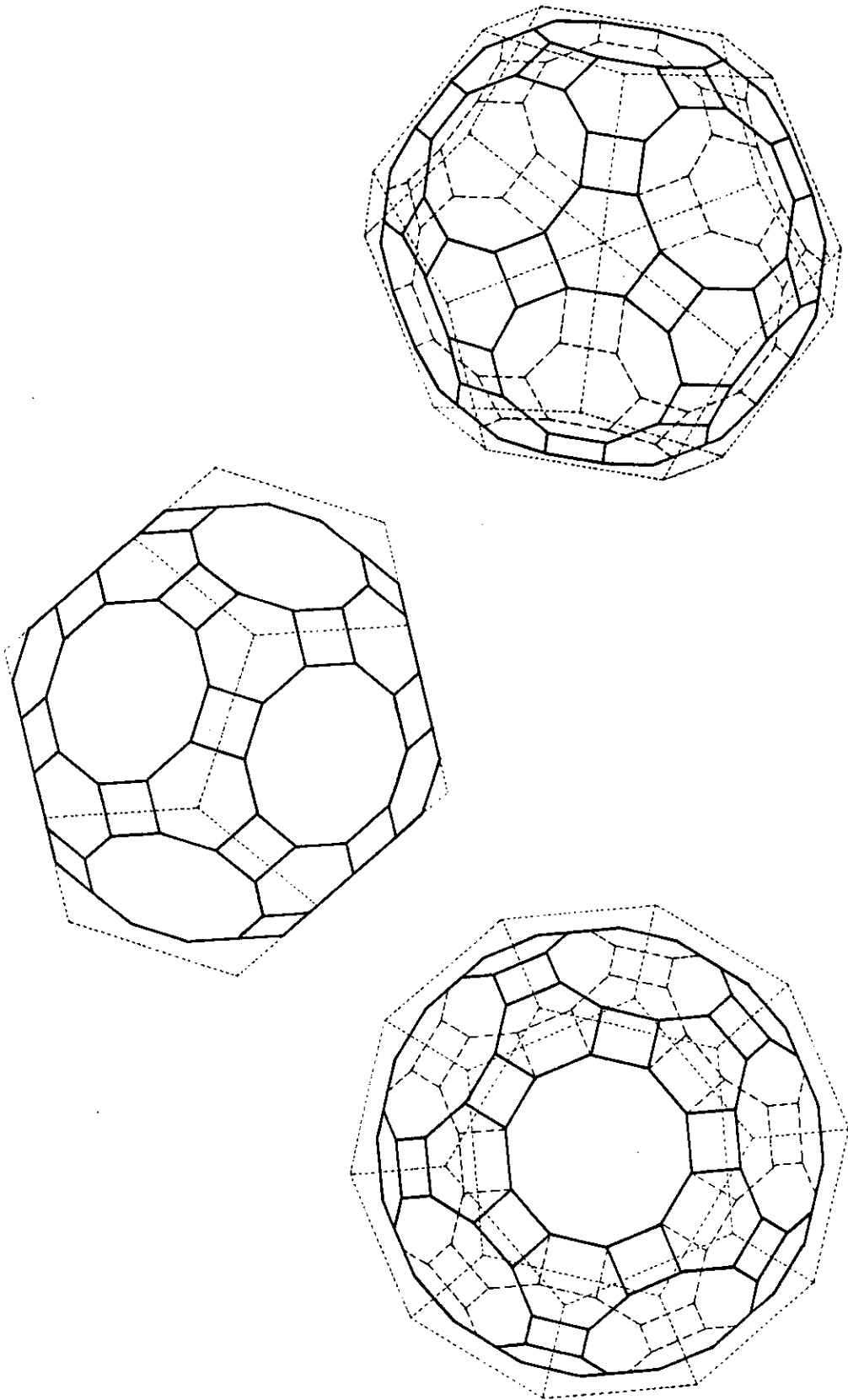
ICOSAEDRO TRUNCADO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



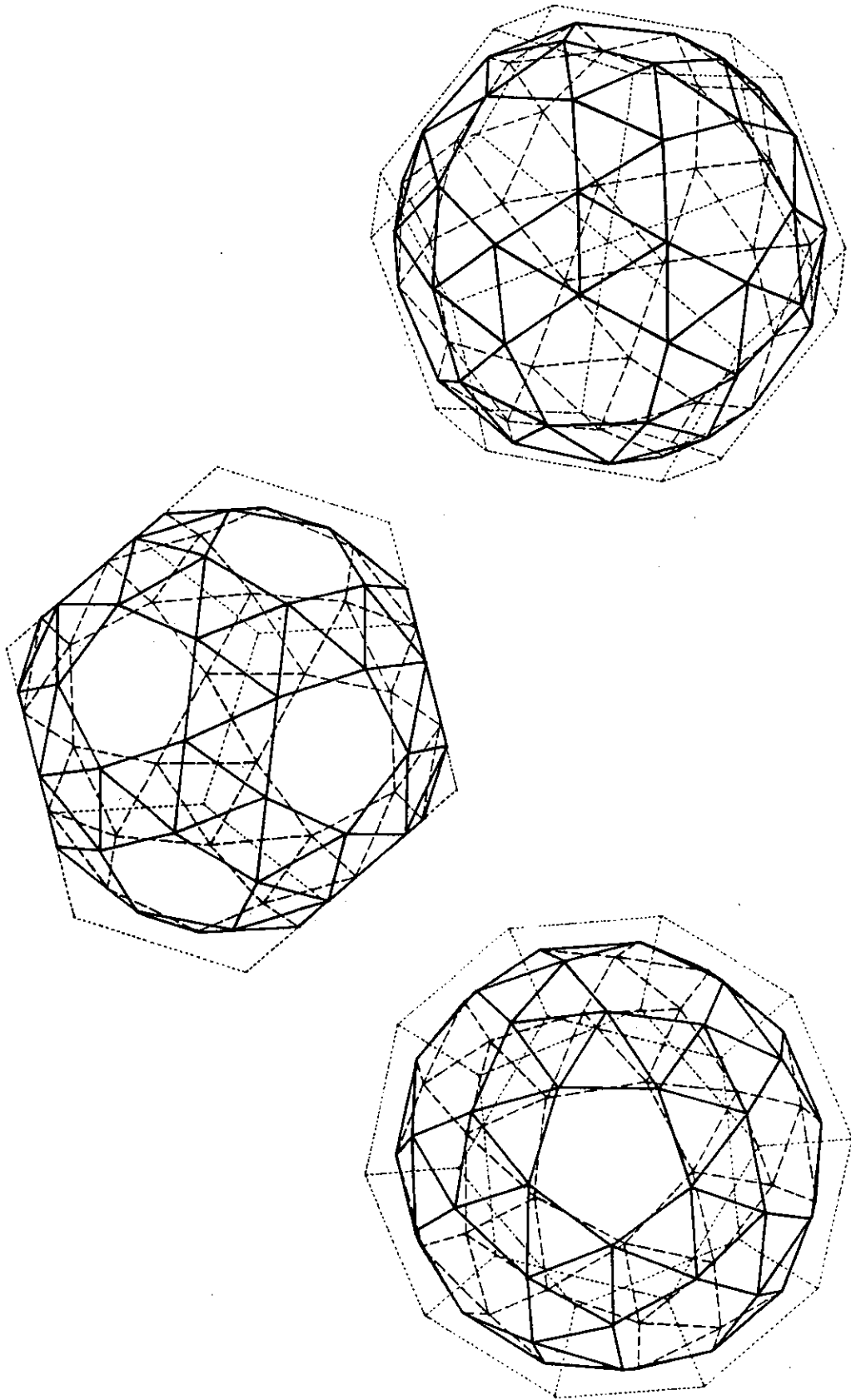
ROMBIICOSIDODECAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



GRAN ROMBICOSIDODECAEDRO

SISTEMA DEL DODECAEDRO



DODECAEDRO ACHATADO

UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Servicio de Bibliotecas



1700744466