

BASES DEL CALCULO NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DESPLEGABLES ESPACIALES

JUAN PEREZ VALCARCEL
 Profesor Titular de la E.T.S. de Arquitectura de La Coruña
 FELIX ESCRIG PALLARES
 Profesor Titular de la E.T.S. de Arquitectura de Sevilla

En un anterior artículo (1) publicado en este mismo Boletín se expusieron las bases del cálculo lineal de estructuras desplegables espaciales. En el mismo y en (2) se estudiaban los problemas de modulación y construcción de este tipo de estructuras y además se obtenían las matrices de rigidez que permitían el cálculo matricial de estas estructuras con completa generalidad.

El programa de ordenador desarrollado a partir de la teoría expuesta permitió resolver una amplia gama de casos particulares, que creemos de interés práctico y que han sido mostrados en algunos congresos. Así el caso de las estructuras desplegables en forma de sombrilla (3) o las bóvedas cilíndricas, con o sin pretensado de borde (4). Igualmente se ha aplicado a algunos otros tipos como las cúpulas prismáticas, aunque tales resultados aún no hayan sido publicados.

El cálculo lineal es, en líneas generales, satisfactorio y proporciona resultados fiables. No obstante es conveniente abordar el cálculo no lineal de estas estructuras por dos motivos:

a.- En general las estructuras desplegables tienen flechas grandes por lo que es preciso una aproximación no lineal que tenga en cuenta el efecto de las mismas.

b.- El efecto de la articulación central hace que la barra pueda alcanzar una curvatura relativamente fuerte por lo que es preciso tener en cuenta el momento flector producido por el esfuerzo axial. En consecuencia se hace preciso calcular la función de estabilidad de la barra y modificar adecuadamente la matriz de rigidez.

La solución más adecuada del problema consiste en plantear un cálculo iterativo con los siguientes pasos:

1.- Se calcula la estructura en hipótesis de comportamiento lineal.

2.- Con los esfuerzos obtenidos y en la posición deformada se calcula el valor de las fuerzas desequilibradas en los nudos. Para ello se tiene en cuenta que el cálculo de las fuerzas transversales en el nudo central (figura 1) debe hacerse considerando las funciones de estabilidad correspondientes a los axiles N_1 y N_2 de la barra.

3.- Se calcula una nueva estructura correspondiente a la anterior pero en posición deformada, sometida a un estado de cargas dado por las fuerzas desequilibradas anteriores y con la matriz de rigidez modificada por las funciones de estabilidad de las barras. Los desplazamientos obtenidos en esta iteración se acumulan a los anteriormente calculados.

4.- Se reitera el proceso haciendo nuevas iteraciones hasta que el valor de las fuerzas desequilibradas sea inferior a un límite prefijado.

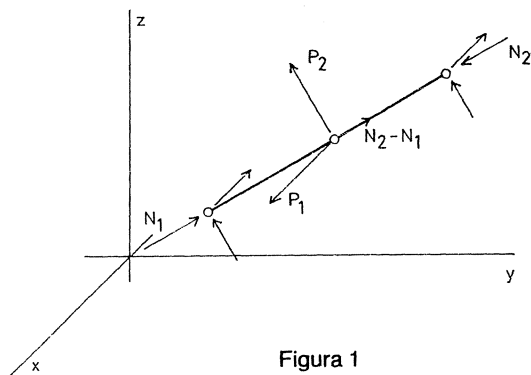


Figura 1

CALCULO DE LAS FUNCIONES DE ESTABILIDAD

Para poder aplicar el proceso señalado es preciso calcular las funciones de estabilidad puesto que la existencia de la articulación central, característica de estas estructuras, hace que los axiles sean normalmente distintos en ambos tramos y ello afecta considerablemente al comportamiento de la barra.

Son posibles cinco casos:

A.- BARRA SOMETIDA A DOS AXILES DE COMPRESION

Supongamos esa barra en posición deformada (figura 2). En este primer caso supondremos que los axiles son ambos de compresión. En todos los casos N_1 y N_2 serán los valores absolutos de los axiles.

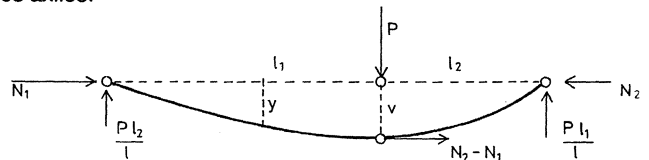


Figura 2

Considerando el efecto de los esfuerzos axiles los momentos en ambos tramos de la barra serán

$$M_1 = \frac{Pl_2}{l} x + N_1 y$$

$$M_2 = \frac{Pl_1}{l} (l-x) + N_2 y$$

Planteando las ecuaciones diferenciales de las deformadas en ambos tramos

$$EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = - \frac{Pl_2}{l} x - N_1 y$$

$$EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = - \frac{Pl_1}{l} (l-x) - N_2 y$$

y haciendo

$$p_1^2 = \frac{N_1}{EI} ; p_2^2 = \frac{N_2}{EI}$$

e integrando las ecuaciones diferenciales se obtiene

$$y_1 = C_1 \cos p_1 x + C_2 \sin p_1 x - \frac{Pl_2}{N_1 l} x$$

$$y_2 = C_3 \cos p_2 x + C_4 \sin p_2 x - \frac{Pl_1}{N_2 l} (l-x)$$

Las condiciones de contorno serán:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad y=0 \\ x=1 & \quad y=0 \\ x=1_1 & \quad y_1=y_2 \\ x=1_1 & \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} \end{aligned}$$

Y aplicando estas condiciones de contorno se obtiene para el valor de la flecha en la articulación central v (figura 2)

$$V = \frac{P_1 l_1^2 l_2}{3EI} \cdot 3 \cdot \frac{\left(\frac{P_2^2}{l_1} + \frac{P_1^2}{l_2} \right) \operatorname{th} P_1 l_1 \cdot \operatorname{th} P_2 l_2 - (P_2 P_1^2 \operatorname{th} P_1 l_1 + P_1 P_2^2 \operatorname{th} P_2 l_2)}{P_1^2 P_2^2 l_1 l_2 (P_1 \operatorname{th} P_2 l_2 + P_2 \operatorname{th} P_1 l_1)}$$

Comparando con el valor obtenido en la hipótesis lineal

$$V = \frac{P_1 l_1^2 l_2}{3EI}$$

vemos que en la hipótesis no lineal

$$V = \frac{P_1 l_1^2 l_2}{3EI} \cdot \Phi$$

Siendo Φ la función de estabilidad que en este primer caso tiene como valor

$$\Phi = 3 \cdot \frac{\left(\frac{P_2^2}{l_1} + \frac{P_1^2}{l_2} \right) \operatorname{th} P_1 l_1 \cdot \operatorname{th} P_2 l_2 - (P_2 P_1^2 \operatorname{th} P_1 l_1 + P_1 P_2^2 \operatorname{th} P_2 l_2)}{P_1^2 P_2^2 l_1 l_2 (P_1 \operatorname{th} P_2 l_2 + P_2 \operatorname{th} P_1 l_1)}$$

B.- BARRA SOMETIDA A DOS AXILES DE TRACCION

La barra deformada es idéntica a la figura 2 pero sometida a tracción en ambos tramos.

En este caso las ecuaciones diferenciales de ambos tramos de la elástica son

$$y_1 = C_1 \operatorname{ch} p_1 x + C_2 \operatorname{sh} p_1 x - \frac{P_1}{N_1 l} x$$

$$y_2 = C_3 \operatorname{ch} p_2 x + C_4 \operatorname{sh} p_2 x - \frac{P_1}{N_2 l} (l-x)$$

y aplicando las mismas condiciones de contorno que en el caso anterior se llegaría a la expresión de la función de estabilidad.

$$\Phi = 3 \cdot \frac{\left(\frac{P_2^2}{l_1} + \frac{P_1^2}{l_2} \right) \operatorname{th} P_1 l_1 \cdot \operatorname{th} P_2 l_2 + (P_2 P_1^2 \operatorname{th} P_1 l_1 + P_1 P_2^2 \operatorname{th} P_2 l_2)}{P_1^2 P_2^2 l_1 l_2 (P_1 \operatorname{th} P_2 l_2 + P_2 \operatorname{th} P_1 l_1)}$$

C.- BARRA SOMETIDA A COMPRESION EN UN TRAMO Y A TRACCION EN EL OTRO

Suponemos que el primer tramo está comprimido y el segundo traccionado. La deformada es similar a la figura 2 sin más que cambiar el sentido de N_2 .

En este caso las e, d, a ambos lados de la articulación central serán

$$y_1 = C_1 \operatorname{ch} p_1 x + C_2 \operatorname{sh} p_1 x + \frac{P_2}{N_1} x$$

$$y_2 = C_3 \operatorname{ch} p_2 x + C_4 \operatorname{sh} p_2 x + \frac{P_1}{N_2} (l - x)$$

Y con las mismas condiciones de contorno la función de estabilidad será

$$\varphi = 3 \cdot \frac{\left(\frac{p_2^2}{l_1} + \frac{p_1^2}{l_2} \right) \operatorname{th} p_1 l_1 \cdot \operatorname{th} p_2 l_2 + p_2 p_1^2 \operatorname{th} p_1 l_1 - p_1 p_2^2 \operatorname{th} p_2 l_2}{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot l_1 l_2 (p_1 \operatorname{th} p_2 l_2 + p_2 \operatorname{th} p_1 l_1)}$$

D.- BARRA SOMETIDA A COMPRESION EN UN TRAMO Y A UN AXIL NULO EN EL OTRO

Supongamos que la barra está sometida a una compresión en el primer tramo y que $N_2 = 0$ en el segundo. La deformada es similar a la de la figura 2.

En este caso las e, d, en ambos tramos de la elástica son

$$y_1 = C_1 \operatorname{ch} p_1 x + C_2 \operatorname{sh} p_1 x + \frac{P_2}{N_1} x$$

$$y_2 = - \frac{P_1}{6IEI} (l - x)^3 + C_3 x + C_4$$

Aplicando las mismas condiciones de contorno se obtendría como función de estabilidad

$$\varphi = \frac{p_1^2 l_1 l_2 \operatorname{th} p_1 l_1 - 3 \operatorname{th} p_1 l_1 + 3 p_1 l_1}{p_1^2 \cdot l_1^2 (\operatorname{th} p_1 l_1 + p_1 l_2)}$$

E.- BARRA SOMETIDA A TRACCION EN UN TRAMO Y A UN AXIL NULO EN EL OTRO

En este caso las e, d, en ambos tramos serían

$$y_1 = C_1 \cos p_1 x + C_2 \operatorname{sh} p_1 x + \frac{P_2}{N_1} x$$

$$y_2 = \frac{P_1}{6IEI} (l - x)^3 + C_3 x + C_4$$

y la función de estabilidad

$$\varphi = \frac{p_1^2 l_1 l_2 \operatorname{th} p_1 l_1 - 3 \operatorname{th} p_1 l_1 + 3 p_1 l_1}{p_1^2 \cdot l_1^2 (\operatorname{th} p_1 l_1 + p_1 l_2)}$$

COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES DE ESTABILIDAD CALCULADAS

Para la discusión de este problema es preciso estudiar aquellos valores que hacen nulo el denominador y en consecuencia hacen infinita la función de estabilidad, es decir hacen inestable la estructura. En rigor ésto debería hacerse con los e, d, exactos de las elásticas que modificarían ligeramente los valores calculados de las funciones de estabilidad. Sin embargo ésto es desaconsejable por dos motivos:

- Los cálculos son de tal complejidad que se hace prácticamente imposible obtener una expresión razonable de

- Cuando la función de estabilidad crece hasta aproximarse a la carga crítica de Euler las flechas (de por sí relativamente grandes) de la estructura se hacen tan importantes que se hace inutilizable puesto que no sería posible plegarla. Si queremos que el funcionamiento de plegado y desplegado sea correcto es preciso asegurarnos que estamos razonablemente lejos de las cargas críticas.

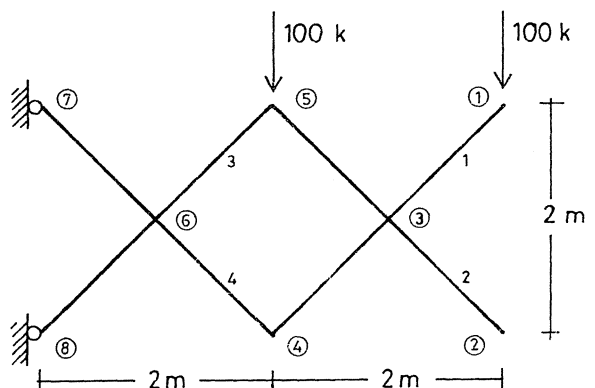
Para el estudio de las funciones de estabilidad tomaremos como referencia la carga N' que sería la de una barra sometida a una compresión uniforme y a una carga transversal. La deformada es similar a la de la figura 2 sin más que hacer $N_1 = N_2$.

En este caso la carga crítica sería

$$N = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

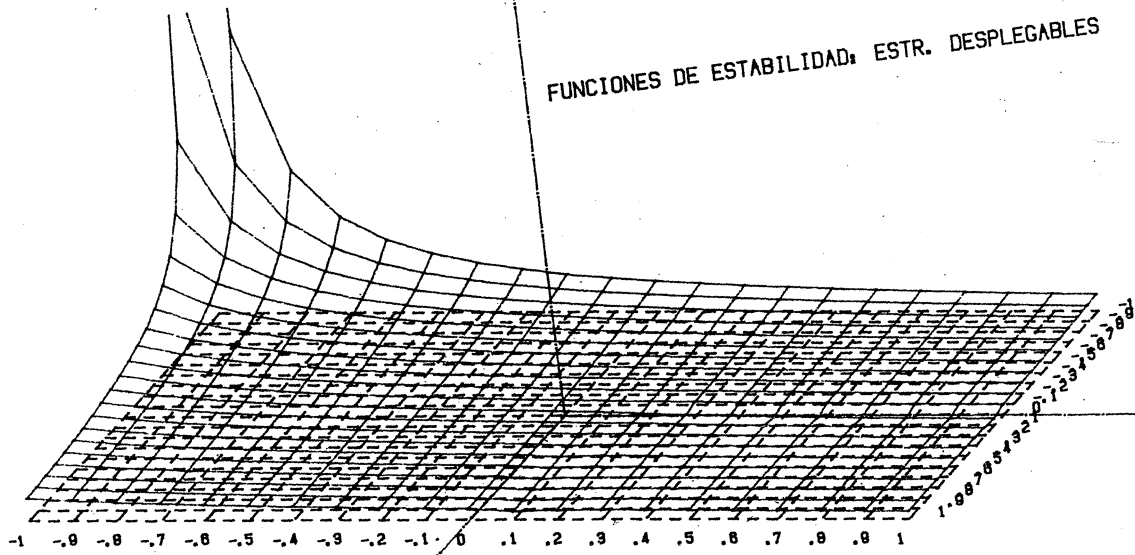
El comportamiento de las funciones de estabilidad en función de N' vendría dado por las figuras 3 y 4. En la figura 3 se representa el comportamiento para valores de N_1/N' y N_2/N' comprendidos entre -1,5 y 1,5 pudiéndose observar una zona de inestabilidad con valores negativos o infinitos. En la figura 4 puede observarse el comportamiento entre los límites -1 y 1 con mayor detalle. También puede observarse que según el valor de uno de los axiles, el otro puede superar la carga crítica N' correspondiente a la compresión uniforme.

EJEMPLO: Supongamos una estructura desplegable plana (figura 5).



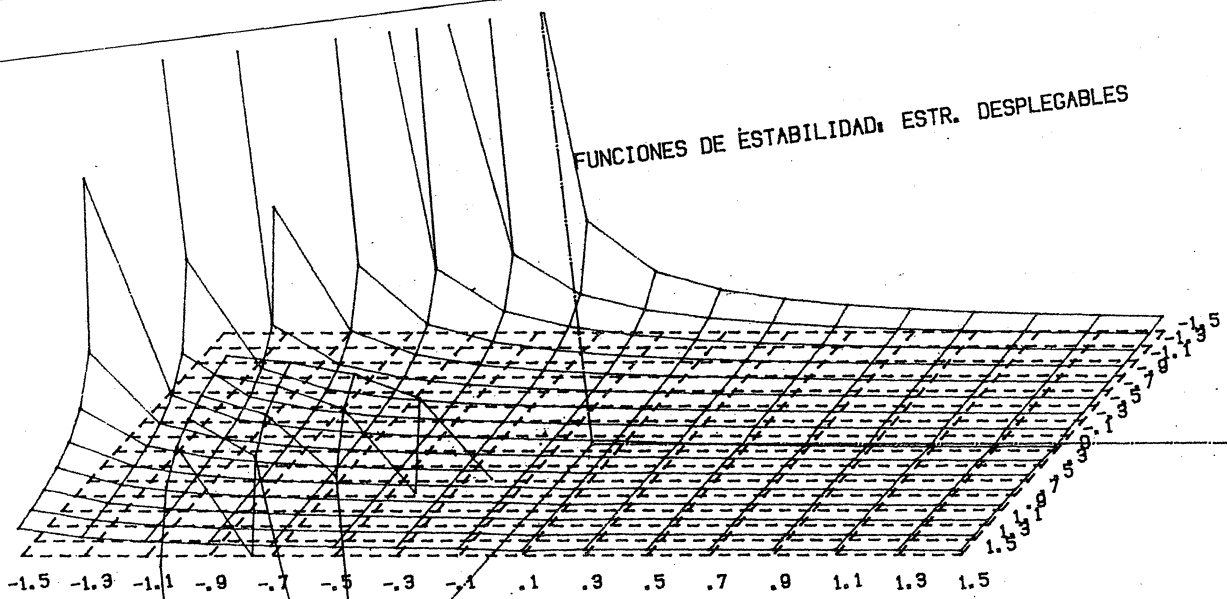
(Figura 5)

FUNCIONES DE ESTABILIDAD, ESTR. DESPLEGABLES



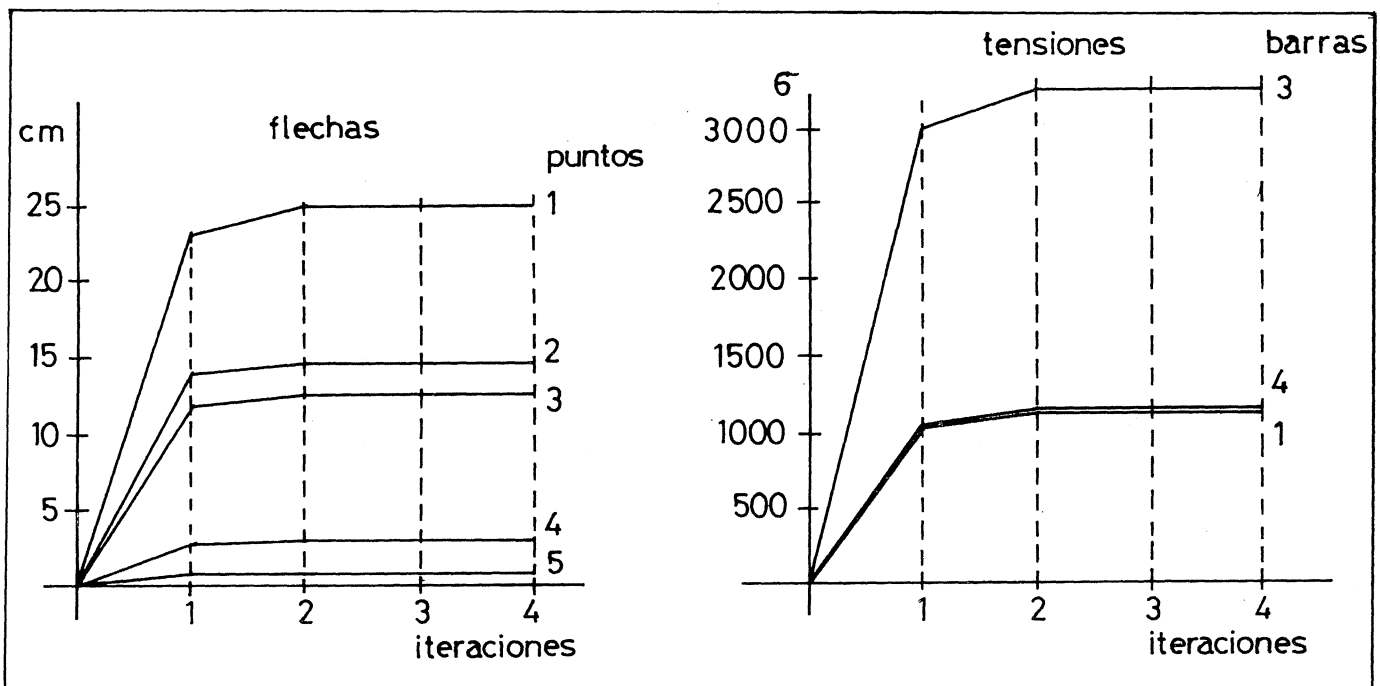
3

FUNCIONES DE ESTABILIDAD, ESTR. DESPLEGABLES



4

El comportamiento en las sucesivas iteraciones sería



CONCLUSIONES

- Tanto las flechas como las tensiones en las barras se estabilizan rápidamente. Prácticamente basta con dos iteraciones.
- La influencia de las grandes flechas es significativa aunque no excesiva (menos de un 10% en las flechas y alrededor de un 7% en tensiones).
- El efecto de las funciones de estabilidad es, en general, poco importante pero puede ser considerable para valores altos de la esbeltez de la barra.

Referencias

- (1) ESCRIG F. y P. VALCARCEL J. **Introducción a la geometría de las estructuras espaciales desplegables de barras**. Boletín Académico de la ETSA de La Coruña, Nº 3, feb. 1986.
- (2) ESCRIG F. y P. VALCARCEL J. **Analysis of Expandable Space Bar Structures**, Int. Symposium on Membrane Structures and Space Frames. IASS, Osaka 1986.
- (3) ESCRIG F. y P. VALCARCEL J. **Great Size Umbrellas solved with Expandable Bar Structures**. First International Conference on Lightweight Structures in Architecture. Sydney 1986.
- (4) ESCRIG F. y P. VALCARCEL J. **Curved Expandable Space Grids**. Non-Conventional Structures '87. Londres 1987.