"GEOMETRIA FABRORUM" O LA ANTITESIS DE LAS TEORIAS SOFISTICADAS

Por JOSE A. RUIZ DE LA ROSA
Profesor Titular de la E.T.S. de Arquitectura de Sevilla

El arquitecto actual dispone de amplios conocimientos a la hora de proceder a la ideación y ejecución de sus proyectos, pero como es evidente pensar, no siempre ha ocurrido así.

La teoría de la proporción en arquitectura recoge un amplio abanico de hipótesis donde destacan con preferencia las dedicadas a los trazados reguladores, a las teorías del número, o las basadas en cuestiones místicas, esotéricas o románticas, quizás porque "... un secreto que nunca se revela, encantaba al espíritu de esos investigadores poéticos" (1).

Hasta fechas recientes, las especulaciones planteadas parecen pasar por alto el contexto cultural en que tales hechos se desarrollaron; tarea por otro lado nada fácil pues en la mayoría de los casos, las intenciones de los arquitectos de aquellas épocas no nos constan en absoluto, y el conocimiento que se tiene de su contexto es bastante fragmentario. Pero es posible rastrear pistas que ayuden a recomponer el cuadro y sitúen los medios de control formal en una más justa dimensión.

A modo de ejemplo, centremos nuestra atención en la epistemología medieval, a mi entender, pasada por alto en teorías como la de Kerrich sobre el "vesica piscis" (2), o las de Moessel basadas en la "segmentación polar del círculo" (3), "ad quadratum" de Lund (4), las combinaciones áureas de Maillard (5) o las teorías dinámicas de Hambidge (6), por no extendernos más; todas ellas vigentes en fechas recientes.

La ciencia matemática de los últimos siglos del Imperio Romano de occidente se reducía casi exclusivamente a los Elementos de Euclides en el campo de la geometría, y a las enseñanzas de la escuela pitagórica en la aritmética, más inclinadas a considerar el valor simbólico de los números y sus combinaciones que a los problemas de cálculo. Eran pocos los que podían dedicarse a su estudio, que desde luego estaba fuera del alcance de los artesanos y de la mayoría de los arquitectos. De manera que, en la decadencia romana y luego durante la Edad Media, coexisten dos saberes matemáticos independientes, el de los hombres de estudio y el de los artesanos: dos líneas separadas, entre las que sin embargo habrá contactos y aportaciones mutuas, y que ejercerán en cada momento diferente influencia sobre la arquitectura.

En el siglo III, Pappus de Alejandría establece por primera vez la distinción entre una mecánica teórica y otra práctica. En su "Synagōgē" (7), obra sobre geometría griega que gozó de gran autoridad en su tiempo, dice:

> "... los "mēchanikós" de la escuela de Heron dicen que la mecánica puede dividirse en una parte "teórica" y otra "manual"; la teórica (tó men logikón) está compuesta de geometría, aritmética, astronomía y física; la manual (tó de cheirourgikón) por los trabajos del metal, construcción, carpintería y arte de la pintura, y la ejecución práctica de estos asuntos". (8).

El texto es importante para nosotros porque, al apoyarse en Herón de Alejandría (9), gran experto en estereometría y bóvedas, la mecánica práctica puede estar recogiendo la tradición de los conocimientos de la arquitectura. Por otra parte, es posible que todavía en aquel momento una misma persona pudiera abarcar el nivel teórico del erudito y el práctico del artesano: un arquitect según el modelo vitruviano.

La línea de la teoría continuó en los siglos IV y V con autores como Servio o Apollinar, que citan y alaban a Vitruvio, o como Martianus Capella que, en su trabajo enciclopédico antecedente de otros medievales, sistematizó las artes liberales del "trivium" (gramática, retórica y dialéctica) y del "quadrivium" (aritmética, geometría, astronomía y música). En este momento puede ya afirmarse que los dos campos, el de la ciencia teórica y el de sus aplicaciones a los oficios, están claramente separados.

Merecen especial mención tres eminentes personajes que, en los primeros siglos de la Edad Media, continúan la tradición científica de los anteriores: Boecio, Casiodoro e Isidoro de Sevilla. Boecio (480-525) transmitió al medievo buena parte de la ciencia antigua en sus trabajos sobre geometría y aritmética (10), una reelaboración de los de Euclides, Nicómaco y Ptolomeo, con alguna aportación procedente de los agrimensores romanos. Su base filosófica, platónico-pitagórica, le llevó a considerar el número como fundamento de todas las cosas, y las proporciones como base de las teorías estéticas.

Casiodoro (490-583) recoge también conocimientos científicos y artísticos grecorromanos (11): inicia una nueva sistematización del "trivium" y el "quadrivium"; cita el tratado de arquitectura de Vitruvio y, al igual que Boecio, considera el número y las proporciones

NOTAS

(1) FRANKL, P., **The secret of the mediaeval masons**, Art. Bulletin, 27., nº 1, 1945, p. 47.

(2) KERRICH, T., **Observations on the Use of the Mysterious Figure, called Vesica Piscis, in the Architecture of the Middle Ages, and in Gothic Arquitecture**, en Archaeologia, XIX, 1821, pp 353 a 368 y lam. XX a XXXIV.

(3) MOESSEL, E., Vom Geheimnis der Form und der Urform des Seins, 1938, pp. 127 ss / Die Proportion in Antike und Mittelalter, 1926.

(4) LUND, F.M., Ad quadratum, Études des bases géométriques de l'architecture religieuse dans l'antiquité et au moyen âge découvertes dans la Cathédrale de Milan, 1922 / GHYCA, M.C., Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes, pp. 209 ss (cita, p. 218).

(5) MAILLARD, E., **Eglises du XXe au XVe siècle**, en Cahiers du nombre d'or, III, 1964.

(6) HAMBIDGE, J., The elements of dynamic symmetry.

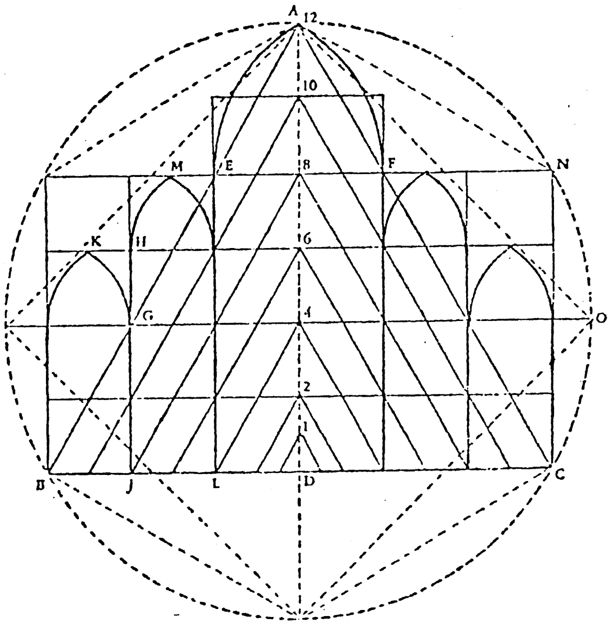
(7) PAPPUS DE ALEJANDRIA, **Sinagoge mazematique**. Resumen de conocimientos hasta su época (finales del s. IV) con ciertas aportaciones personales; escrita en ocho libros, algunos perdidos, trata de: aritmética, proporción, poliedros (regulares y semirregulares), análisis geométrico y mecánica; esta última era la ciencia que recogía conocimientos teóricos del quadrivium y la física, y manuales de los oficios y artes, con el fin de dar respuestas a las nuevas necesidades de la construcción e ingeniería. Los titulados en esta "ciencia" eran denominados "mēchanikós", profesionales erudito-prácticos muy cotizados. / Cfr., Enciclopedia Universal Ilustrada, p 1089 / DOWNEY, G., **Byzantine Architects: their training and methods**, en Byzantion, 18, 1946-48, pp. 106-107.

(8) DOWNEY, ibid: The mechanicians (mēchanikós) of Heron's shool say that mechanics can be divided into a "theorical" and a "manual" part (tò mèn logikón) is composed of geometry, arithmetical, astronomy and physics, the manual (tò dé cheirourgikón) of work in metals, construction, carpentering and the art of painting, and the practical execution of these matters".

(9) HERON DE ALEJANDRIA, matemático griego de finales del s. II a. C., es el autor de ciertos escritos sobre geometría, hoy mutilados y conocidos por extractos como los editados por Hultsch, Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae, Berlín, 1864. De su obra sobre mecánica, solo se conservan algunos fragmentos editados también por Hultsch, Berlín, 1877 / Cfr., Colerus, E., Breve Historia de las Matemáticas, tomo 1, p. 96 / Enciclopedia Universal Ilustrada, p. 1248.

(10) ANICIO MANLIO TORCUATO SEVERINO, BOECIO, autor de "De consolatione arithmeticae" y "geometria Euclidis a Boethio in latinum translata", esta última localizada en varios manuscritos del XI y XII. Ambas obras junto con "De institutione musicae" fueron coleccionadas por Freidlein, Leipzig, 1867, y publicadas por Paul en 1872 / En las obras de Música y Aritmética es donde se descubre una estética detallada de la proporción / Cfr., Cervera Vera, L., El códice de Vitruvio hasta sus primeras versiones impresas, pp. 32-34 y 144 ss / Bryune, E., Estudios de Estética Medieval, vol. 1, pp. 13-43.

(11) FLAVIO MAGNO AURELIO SENATOR, CASIODORO, **Institutiones divinarum et saecularium litterarum.** Introducción al estudio de la teología y compendio de las siete artes liberales; se incluye por primera vez los términos "racional" e "irracional" / Cfr., CERVERA VERA, L., op. cit. (10), pp. 34-37 y 148 ss / LOPEZ GONZALEZ, S., Ciencia y técnica en la Edad Media. Aspectos de la Geometría medieval, p. 84 / BRUYNE, E., op. cit. (10), vol. 1, pp. 44-83.



como fundamento de la belleza y la armonía: "numerus est qui cuncta disponit".

Isidoro (570-636) es posiblemente el compilador más importante de su época; en sus "Etimologías" (12) recoge conocimientos de las artes liberales junto a otros sobre ciencia, técnica, historia o religión. La aritmética sigue una línea eminentemente teórica y erudita de Nicómaco a Boecio, Casiodoro e Isidoro, alejada como hemos dicho de las aplicaciones de los oficios; tal como la define Isidoro, solo concierne a "la disciplina de los números" unida al misticismo estético derivado de la filosofía agustiniana (13). Pero la geometría de Isidoro, una compilación incompleta de Euclides con pocas demostraciones y numerosos errores, ha experimentado una cierta regresión. Fontaine nos presenta al sabio sevillano impreciso en la definición de las figuras planas y sobre todo, en la explicación de los sólidos euclídeos (14):

> "... la terminología y la presentación rudimentaria de figuras permiten intuir aquí la influencia de técnicas empiristas..." (15).

Para confirmar por nuestra parte esta apreciación, veamos una construcción que aparece en todos los tratados, la fórmula para construir una escuadra. En Vitruvio (IX, pref.) se sigue la tradición culta procedente de Egipto: la escuadra es un triángulo de lados proporcionales a 3, 4 y 5:

> "namque si sumantur regulae tres, e quibus una sit pedes tres, altera pedes quatuor, tertia pedes quique, (...) deformabunt norma emendatam".

En Faventino ("De diversis fabricis", XXVIII) se sustituye la tradición culta por otra distinta, la que Fontaine llama de los artesanos empiristas: la fórmula exacta del triángulo egipcio es reemplazada por otra que se basa en una relación numérica aproximada:

> "Sumantur autem tres regulae ita ut duae sint pedibus binis et tertia habeat pedes duos uncias decem. (...) Sic fiet perite norma composita".

La escuadra es ahora un triángulo isósceles, con lados de 24 pulgadas (dos pies) y 34 pulgadas (dos pies y diez pulgadas) en el que se toma la razón 34/24 como valor de la raiz de dos, relación entre la diagonal del cuadrado y su lado. Isidoro (XIX, 18, 1) recoge esta tradición artesanal y emplea casi las mismas palabras que Faventino:

> "Componitur autem ex tribus regulis, ita ut duae sint binum pedum, tertia habeat pedes duos uncias decem (...) Id erit norma".

Así pues la ciencia helénica, que en occidente fué decayendo lentamente y en Bizancio se mantuvo sin especial progreso, pasó también a paises más al oriente donde se fundió con otras aportaciones, como la hindú. Asimilada por la cultura del Islam, se difundió en escuelas donde se enseñaban juntos los Elementos y el Almagesto. En el siglo IX, al-Khuwarizmi (16) recoge el sistema hindú de numeración decimal (fig. 1), "... diez signos simbólicos independientes de cualquier lenguaje concreto..." (17) y métodos operativos ágiles (18) (algoritmos, como hoy los llamamos en honor de aquel gran matemático). Poco después, al-Carchi introduce el concepto de número irracional, y al-Farabi realiza su inmenso trabajo de clasificación de las ciencias (19). Y ya en el siglo XII al-Chaijami establece una nítida separación entre aritmética y geometría:

> "... desde el punto de vista formal, la máquina pensante contenida en el álgebra y la aritmética fué claramente reconocida por ellos (aunque no descubierta) y librada del lastre de la geometría" (20).

(12) ISIDORO DE SEVILLA, **Etimologías** / Educado en la escuela fundada por San Leandro en Sevilla, donde se impartía el "trivium" y el "quadrivium". Esta obra, reúne, ordena y sistematiza todo el saber de su época; tan solo entre 1470-1529 se efectuaron más de diez reimpresiones / Cfr., CERVERA VERA, L., op. cit. (10), pp. 36 ss. y 150 ss. / BRUYNE, E., op. cit. (10), vol. 1, pp. 84-119.

(13) ISIDORO, **Liber Numerorum quae in sacra scriptura occurrunt**; interpretación mística de los números bíblicos / Cfr., Enciclopedia Universal Ilustrada, tomo 28, p. 2063 / Sobre aritmética y aritmología: FONTAINE, J., **Isidore de Sevilla et la culture classique dans l'Espagne Wisigothique**, pp. 369-393.

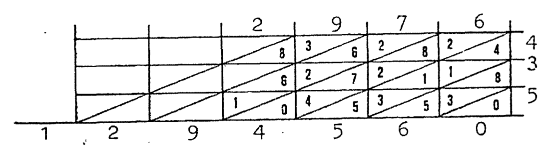
(14) Los sólidos euclídeos quedan reducidos a: esfera, cubo, cono, pirámide, y ciclindro, tras la eliminación del prisma.

(15) FONTAINE, J., op. cit. (13), p. 402: "...la terminologie et la présentation rudimentaire des figures laissent deviner ici l'influence de techniciens empiristes...".

(16) ABÛ 'ABD ALLÂH MUHAMMAD B. MÚSÂ, AL-HUWÂRIZMÎ, (s. IX), escribió un tratado de probable influencia babilónica e iraní: **Kitâb al-muhtasar fî hisab al-gabr (algebra) wa-al-muqâbala**; y una aritmética de la que se conserva una traducción latina: **Algoritmi de numero indorum**; así como un tratado de geometría / Cfr., MIELI, A., **Panorama general de la Historia de la Ciencia II. El mundo Islámico y el Occidente Medieval Cristiano**, p. 55 /LEWIS, B., et al, **Encyclopédie de l'Islam,** tomo IV, pp. 1101-1103 (Vernet, J.) / COLERUS, E., op. cit., (9), pp. 119 ss. / LOPEZ GONZALEZ, S., op. cit. (11), p. 87: "Son los primeros momentos de acoplamiento entre la Geometría y el Algebra, aunque tal mecanismo era empleado entre los griegos pero exclusivamente para la obtención de propiedades numéricas, nunca como herramienta de resolución de un problema de tipo general".

(17) COLERUS, E., op. cit. (9), p. 125.

(18) Ya sabemos que los griegos y romanos multiplicaban o dividían mediante productos parciales, p.e. 320 × 47 = (300 × 40) + (20 × 40) + (300 × 7) + (20 × 7). Para números más complejos o fracciones, el sistema resultaba arduo y difícil, solo para virtuosos. La Aritmética posicional hindú aprovecha las ventajas de su regla "fulmínea" de multiplicación, que también opera sobre productos parciales pero con otra sistemética: 2976 × 435 se resuelve haciendo que algoritmo y posición se ocupen de todo / Cfr., COLERUS, E., op. cit. (9), pp. 129-130.



(19) ABÛ NASR MUHAMMAD, AL FÂRÂBÎ, fue autor de **Ihsâ al-ulum**, o libro de la estadística de las ciencias, del que se conocen diversas versiones medievales; también de monografías sobre lógica, física, metafísica, ética y política / Cfr., LEWIS, B., et al, op. cit. (16), pp. 797-800 / MIELI, A., op. cit. (16), p 97.

(20) COLERUS, E., op. cit. (9), p. 136.

Esta cultura matemática se enseñaba en la España musulmana de los siglos XI y XII. Mediada esta última centuria, Raimundo, obispo de Toledo (1126-1151), fundó la famosa escuela de traductores (21) para verter al latín los textos antiguos que ahora podían leerse en árabe, y que habían estado perdidos para Europa. La aportación de la escuela, junto con la de otros estudiosos, supuso un extraordinario enriquecimiento para la ciencia medieval, al recuperar los conocimientos del mundo clásico. En el campo de la geometría, esto sería luego esencial para el desarrollo del gótico.

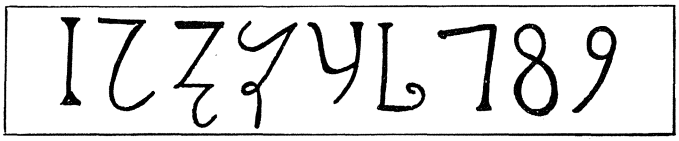


Fig. 1.– Primer ejemplo conocido de nuestras cifras. Manuscrito español de 976.

En la práctica de los oficios se seguían también los principios de la geometría euclídea de regla y compás, transmitida asistemática y fragmentariamente por tradición oral dentro de los gremios, con algún apoyo de naturaleza métrica.

> "El hombre ha encontrado a través de la utilización de la geometría (...) basada en el círculo, un método perfecto para diseñar sin recurrir a complicados cálculos matemáticos, de tal modo que tras el desarrollo de las matemáticas (sistema decimal) este método, completo en sí mismo, permaneció inalterado" (22).

La síntesis realizada por la ciencia musulmana desarrolló al máximo las posibilidades de la geometría aplicada a los oficios de la construcción:

> "Especialmente las investigaciones de carácter geométrico que los estudiosos musulmanes llevaron a gran refinamiento (...) son para nosotros interesantes porque sus resultados son visibles a través de la amplia aplicación que de ellos hicieron los arquitectos islámicos (...) en sus edificios se sustituyeron las figuraciones humanas, desaconsejadas por el Corán, por la decoración geométrica de carácter naturalista o totalmente abstracta..." (23).

Bajo los intrincados diseños de yeserías, mocárabes o alicatados hay unas fórmulas geométricas sencillas, auxiliadas en algunos casos por reglas numéricas del tipo de la que vimos en Faventino para la construcción de la escuadra. Como iremos viendo, estas reglas tienen estrecha relación con las empleadas en Europa y el Próximo Oriente en el trazado de edificios de planta central; asimilados por el mundo islámico, estos antiguos procedimientos debieron seguir en uso para la traza de algunos edificios y se desarrollaron para su aplicación a diferentes tipos de ornamentación.

> "... estas arquitecturas de apariencia tan caprichosa constituyen en esencia una geometría construida: únicamente una ley simple podía establecer el orden en la complejidad de sus dibujos". (24).

Pero en el siglo XI centroeuropeo continuaban mal conocidos los tratados científicos griegos. La correspondencia (h. 1025) entre Regimbold de Colonia y Radolf de Lieja (25) tratando de demostrar el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo, prueba todavía buscada años más tarde por Francon de Lieja, demuestra que el nivel de conocimientos en geometría había decaído considerablemente respecto de la obra de Euclides, cuyo conocimiento se tenía a través de las obras de Boecio, Casiodoro e Isidoro, y de la multitud de copias incompletas que de los Elementos circulaban en la Alta Edad Media. Antes de las traducciones del árabe, solo cabe citar la "Geometría Gerberti" (26), del siglo X, que aun con sus limitaciones fué de gran ayuda para los estudiosos de la época.

El siglo XII asiste al importantísimo acontecimiento de la traducción del árabe al latín de los Elementos de Euclides y otros textos por Gerardo de Cremona y Adelardo de Bath (27). La amplia y comentada versión de Adelardo fué la de mayor difusión, a pesar de algunas omisiones y alteraciones del original. La tradición continuó en el siglo XIII con la versión de Campano de Novara (28). En cuanto a la propia ciencia árabe, Dominicus Gundissalinus (Gundisalvo) tradujo en 1140 la obra de al-Farabi (29), y en 1145 Robert de Chester hizo lo mismo con el "Algebra" de Al-Khuwarizmi (30).

La vieja distinción de Pappus de Alejandría entre teoría y práctica vuelve a aparecer en el siglo XII en la "Practica Geometriae" (1125-1130) de Hugo de San Víctor:

(21) GIMPEL, J,. **Sciencie et techniques des maîtres maçons du XIII siècle**, en Techniques et Civilisations, II, 5-6, 1953, p. 148 / La escuela de Toledo es el centro de traductores más importante de Europa, donde judíos, cristianos, musulmanes y mozárabes, emplearon una lengua común. Entre sus componentes cabe destacar a Gundisalvo y Juan de Sevilla (peninsulares), y Gerardo de Cremona y Roberto de Chester (extranjeros) / Cfr., RIERA PALMERO, J., **Ciencia y técnica en la Edad Media**. La transmisión del saber médico greco-árabe en la Europa latina medieval, pp. 35 ss.

(22) ISSAM EL-SAID, Y PARMAN, A., **Geometric concepts in Islamic Art. p. 3:** "Man has found through the utilization of geometry (meaning literally land measure), based on the circle, a perfect method to shape areas without resorting to complicated mathematical calculations such that, after the development of mathematics (the decimal system), this method, complete in itself, remained unaltered".

(23) VAGNETTI, L., **L'Architetto nella storia di occidente**, p. 136: "Specialmente le richerche di carattere geometrico, che gli studiosi mussulmani portarono a grande reffinatezza (...) sono per noi interessanti perché i loro risultati sono visibili attraverso l'amplia applicazione che gli architetti islamici (...), sostituendo nei loro edifici la figurazione umana, sconsigliata del Corano, con la decorazione geometrica di carattere naturalistico o totalmente astratto..."

(24) CHOISY, A. **Historia de la Arquitectura**, p. 388.

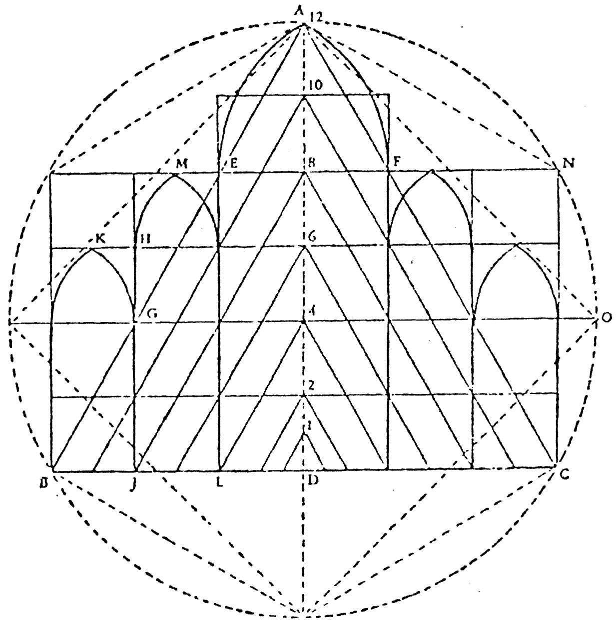
(25) GIMPEL, J,. op. cit. (21), p. 148 / Cfr., TANNERY, P., y CLERVAL, **Une correspondance d'écolâtres du XI siècle**, en Notices et extraits des manuscrits de la Bib. Nat. et autres Bib., XXXVI, pto. 2, 1901.

(26) GERBERTO DE REIMS, **Geometria Gerberti**. Su obra matemática ha sido publicada por Bubnov: **Gerberti Opera Mathematica,** Berlín, 1899 / Cfr., MIELI, A., op. cit. (16), pp. 192 ss / SHELBY, L.R., **"The geometrical Knowledge of mediaeval master masons"**, en Speculum, XLVII, nº 3, 1972, p. 400.

(27) GERARDO DE CREMONA (h. 1175), traduce los Elementos del texto árabe de Ishaq ibn Hunain, y otras traducciones de los comentarios a los Elementos de Abdulbaqui; la versión arábiga del libro X de Pappus, obra de Al-Dimishqui; el Almagesto de Ptolomeo y la obra de trigonometría de Al-Zarqali. Como se ve, solo recurre a textos árabes /ADELARDO DE BATH, también recurre a textos del árabe y cita a Boecio y Nicómano. Se le atribuyen tres versiones de los Elementos: a) basada en la redacción de Al-Hajjaj, muy literal; b)más reflexiva que demostrativa, alejada del espíritu original griego, pero de mayor proyección que las otras por sus comentarios; c) denominada "editio specialis" con helenismos y arabicismos / Cfr., MURDOCH, J.E., **The medieval Euclid: salient aspects of the translations of the Elements by Adelard of Bath and Campanus of Novara**, en Revue de Synthèse, LXXXIX, 1968, pp. 67-74 / GIMPEL, J., op. cit. (21), p. 148 / RIERA PALMERO, J., op. cit. (21), p. 36.

(28) CAMPANO DE NOVARA parece basarse en la versión de Adelardo, para realizar su traducción de los Elementos / Cfr., MURDOCH, J.E., op. cit. (27), p. 69.

(29) DOMINICUS GUNDISSALINUS, **Alpharabi vetustissimi aristotelis interpretis opera omnia...** / Cfr., BARON, R., **Sur l'introduction en Occident des termes "geometria theorica et practica"**, en Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications, vol. VIII, 1955, pp. 298-302 / La diferencia



"Omnis geometrica disciplina aut theorica est, id est speculativa, aut practica, id est activa. Theorica siquidem est, quae spatia et intervalia dimensionum rationabilium sola rationis speculatione investigat; practica vero est, quae quibusdam instrumentis agitur et ex aliis alia proportionaliter conjiciendo dijudicat" (31).

Geometría teórica es la que investiga los espacios e intervalos de las dimensiones mediante la sola especulación racional. Geometría práctica es la que lo hace por medio de instrumentos. El contenido de la geometría práctica es para San Víctor:

"Huic practice tria videntur genera attributa: altimetria, planimetria, cosmimetria, in quibus tamen omnibus maxime linearum dimensionem vestigat. Et ad altimetriam quidem pertinet ea porrectio, quae sursum et deorsum fit; ad planimetriam autem illa, quae fit ante et retro, dextrorsum et sinistrorsum; ad cosmimetriam vero ea, quae in circunferentia constant" (32).

Es decir, un tratado de la medida, que en principio no tiene relación alguna con el mundo de los oficios: "la escolástica no supo otorgar al trabajo manual su justo lugar..." (33), considerado por la élite intelectual del XII como social y culturalmente inferior, "algo adecuado solo para plebeyos e hijos de pobres" (34). La distinción entre geometría teórica y práctica no deja de ser en de San Víctor un ejercicio intelectual, y el diferenciar entre altimetría o medida de magnitudes verticales, planimetría o medidas en horizontal y cosmimetría o medidas en la circunferencia, es una clasificación meramente académica, probablemente sin mayor relación con problemas reales. No obstante, hay que subrayar el carácter esencialmente métrico que se atribuye a la geometría práctica, porque nos va a ayudar luego a distinguir la arquitectura que se apoya en esta línea de pensamiento de la que surge de la tradición de los oficios. En "Didascalicon", otra obra de Hugo de San Víctor, se siguen manteniendo en muy parecidos términos los mismos conceptos.

"Geometria tres habet partes, planimetriam, altimetriam, cosmimetriam. Planimetria planum metitur, id est longum et latum, et extenditur ante et retro, dextrorsum et sinistrorsum. Altimetria altum metitur et extenditur sursum et deorsum; nam et mare altum dicitur, id est, profundum, et arbor alta, id est, sublimis. Cosmos mundus interpretatur, et inde dicta est cosmimetria, id est, mensura mundis. Haec metitur sphaerica, id est globosa et rotunda, sicut est pila et ovum, unde etiam a sphaera mundi propter excellentiam dicta est cosmimetria, non quia tantum de mundi mensura agat, sed quia mundi sphaera nter omnia sphaerica dignior sit" (35).

Lo mismo ocurre con la obra de Gundisalvo (36): una geometría teórica basada en "operatio", "scientia" e "inventio", que se define como la que "abstrae intelectualmente su objeto del universo sensible y en definitiva la esencia que lo distingue de cualquier otro", y una "geometría práctica que considera lo que es largo, ancho, grueso, redondo, recto, sin ocuparse del color u otros accidentes inherentes al objeto" (37). Hay una pequeña variación respecto de San Víctor, al dividir la geometría práctica en altimetría, planimetría y "profundimetría", término para el que no aporta una clara definición. En "De divisione philosophiae" volverá a "cosmimetría", definiéndola como medida de los sólidos:

"Species quoque pratice sunt tres: altimetria, planimetria, cosmimetria. Scientia enim, qua considerat lineas, superficies et corpora in altum, altimetria dicitur, scilicet sciencia de mensura alicuius planiciei; qua vero in profundum, dicitur cosmimetria quasi sciencia de mensura solidi" (38).

- de este autor con Gerardo de Cremona que también traduce a Al-Farabi (h. 1230), es la consideración de los términos "teórico" y "práctico", que Gerardo en su versión más tardía no recoge.

(30) GIMPEL, J., op. cit. (21), p. 148.

(31) HUGO DE SAN VICTOR, **Geometria Practicae**, MS lat., Paris, Maz. 717, fol. 41 rb; Munich, clm 13021, fol 202 vb / Cfr., BARON, R., op cit. (29), p. 298 /BRUYNE, E., op. cit. (10), vol. 2.

(32) BARON, R., **Note sur les variations au XII[e] siècle de la triade géométrique: Altimetria, Planimetria, Cosmimetria**, en ISIS, vol. XLVIII, 1975, p. 30 / San Víctor legitima desde el punto de vista etimológico estas definiciones: "Hinc namque altimetria dicta est, quod sublime siue profundum vestigat, propterea quod, sicut mutuato nomine nonnunquam sublime profundum dicitur, sic vicissim aliquando et profundum altum soleat appellari, quemadmodum altum mare et celum profundum dicere solemus. Convenient sane pro eo, quia omne, quod a summo deorsum siue ab imo sursum in longinquum tenditur, idem ipsum conuerso ordine attentum altum pariter et profundum inuenitur. Planimetria appellata uidetur, quando porrectionem secundum planum persequitur. Cosmimetria ab eo, quod est cosmus, nomem accepit. Cosmus enim grece mundus dicitur, et inde cosmimetria dicta est quasi mensura mundi, ea videlicet, que circumferentiam metitur, quam in ambitu celestis spere et reliquorum circulorum celestium, necnon im globo terre, multorum etiam aliorum, que natura in orbem disposuit, consideramus".

(33) LE GOFF, J., Los intelectuales de la Edad Media, p. 141.

(34) KOSTOF, S., el al, El Arquitecto: Historia de una profesión, p. 82.

(35) HUGO DE SAN VICTOR, Didascalicon, PL 176.757 AB, ed. Buttimer, Washington, 1939 / Cfr., BARON, R., op. cit. (30), p. 31.

(36) DOMINICUS GUNDISSALINUS, De divisione philosophiae, y op. cit. (29) / Cfr. BARON, R., op. cit. (32), p. 32. Se apoya en Baur, L., Domincus Gundissalinus. De divisione philosophiae, Munich, 1903 / SHELBY, L. R., op. cit. (26), p. 400 / BRUYNE, E., op. cit. (10), vol. 2.

(37) BARON, R., op. cit. (29), p. 300: "... abstrait intellectuellement son objet de l'univers sensible et en définit l'essence en la distinguant de toute autre." ... "La géométrie pratique considère ce qui est long, large, épais, rond, droit, san s'occuper de la couleur on des autres accidents qui peuvent être inhérents à l'objet..."

(38) BARON, R., op. cit. (32), p. 32. Sobre la transcripción de Baur.

(39) SHELBY, L.R., op. cit. (26), p. 404.

(40) BEAUJOUAN, G., **Le symbolisme des nombres à l'époque romane**, en Cahiers Du Civilization Médiévale, vol. IV, nº 2, 1961, pp. 162-163. Los nueve modos de interpretación son: Secundum: 1) ordinem positionis; 2) qualitatem compositionis; 3) modum porrectionis; 4) formam dispositionis; 5) computationem; 6) multiplicationem; 7) partium aggregationem; 8) multitudinem; 9) exagerationem.

(41) Ibid. pp. 166-169: A) secundum generationem: A.1) Per aggregationem: a) continua, b) intercalaris, c) circoncisa; A.2) Per partitionem; A.3) Per multiplicationem. B) Secundum se: B.1) Secundum signa: a.1) ordinem, a.2) quantitatem, a.3) officium, a.4) dignitatem, a.5) positionem, b.1) a forma, b.2) a mysterio, b.3) ab ordine; B.2) Secundum officium sollempne; B.3) Secundum proprietatem. C) Secundum Compositionem. D) Secundum habitudinem: D.1) L'ordo; D.2) proportio; D.3) affinitas: a) continentie, b) inherentie, c) denominationis, d) obviationis, e) compositionis.

(42) PEREZ GOMEZ, A., Génesis y superación del funcionalismo en arquitectura, p. 32.

Mientras para de San Víctor la geometría práctica es solo métrica, para Gundisalvo tiene además la finalidad de enseñar a hacer, a construir, y sus agentes son los mensores y artesanos, "scientia de ingeniis" que la aplican en sus oficios por medio de instrumentos. Asistimos al primer reconocimiento de la existencia de una "geometria fabrorum" cuya tradición se remonta al menos a los tiempos de Herón de Alejandría, y habría venido transmitiéndose desde entonces en el seno de los gremios. Así lo reconoce Shelby (39).

En este momento, la aritmética se nos presenta más bien como aritmología en diversas obras que estudian el simbolismo de los números. En ellos se han basado numerosas hipótesis sobre el empleo de los números en el arte medieval, casi siempre especulaciones románticas cautivadas por el aspecto esotérico de la cuestión, más que por su rigor científico. La complejidad y oscuridad de textos tales como "Prenotationes elucidatoriae de scriptoris et scriptoribus sacris" del mismo Hugo de San Víctor, donde se ofrecen hasta nueve modos de interpretar el valor místico de los números que aparecen en las Escrituras (40); o de la "Analytica numerorum" de Eudes de Morimon; o del "De sacramentis numerorum" de Guillermo de Auberive, continuado por Godofredo de Auxerre; o de la obra de Theobaldus Lingonensis, cuyo esfuerzo de codificación de los símbolos le lleva a fijar "quatuor modi quibus significationes numerorum aperiuntur" (41), no nos permiten aceptarlos más que como indicaciones generales que, en algunos casos, pudieran haber influido en la elección de dimensiones en algunos edificios, pero de ningún modo como instrumentos de control sistemático de las formas en arquitectura.

> "La epistemología medieval permanece limitada, como es bien sabido, por la afirmación de la revelación. La teología es la ciencia de ciencias, el último peldaño del saber" (42).

La "Practica geometricae" escrita en 1220 por Leonardo Pisano (43) sigue en la línea de la de Hugo de San Víctor, escrita en latín y dirigida evidentemente hacia personas con formación en las artes liberales: "... este tipo de soluciones no son las usadas por los agrimensores, que prefieren proceder de acuerdo al método ordinario (vulgarem)" (44). Solo comenzarán a aparecer obras escritas en lengua vulgar avanzado el siglo XIII, dirigidas no solo a personas cultas (45) sino también a maestros de los oficios, como la anónima "Pratike de Geometrie", en dialecto picardo, que contiene cuestiones tanto de agrimensura como de astronomía (46), lo mismo que un manuscrito en la misma lengua y conservado en la biblioteca de Sainte Géneviève, de marcada orientación práctica (47):

> "Para la mente educada que dominaba el quadrivium, privilegio normalmente de los clérigos, la geometría era una ciencia teórica unida a las otras tres Artes Liberales, la astronomía, la música y la aritmética. La geometría aplicada del albañil corriente quedaba en un plano mucho más humilde, pero era, a pesar de ello, la versión del mismo idioma que usaban los intelectuales". (48).

También en dialecto picardo está escrito el "Cuaderno de Notas" de Villard d'Hônnecourt, un maestro cantero del XIII (49). La obra, anotada posteriormente por un anónimo "Magister 2", parece seguir la tradición constructiva de los gremios. Es un conjunto asistemático de dibujos, textos y fórmulas del oficio, probable guión para la enseñanza oral, completamente diferente de los tratados de geometría que hemos venido comentando, y es el único testimonio que se conserva del siglo XIII, de lo que hemos venido llamando "geometria fabrorum". Su contenido,en el que nos detendremos más adelante, se basa, según proclama el propio autor, en "la técnica del dibujo tal como lo enseña y requiere el arte de la geometría" (fol. 1v). Una anotación de Magister 2 se refiere a la "técnica de las formas". Es decir, que en esta "geometría constructiva", como la denomina Shelby, se toman los necesarios conocimientos de geometría teórica no como un valor en sí, sino como instrumento para control de las formas a construir. Además, su naturaleza no es de carácter métrico, como la geometría definida por Hugo de San Víctor o Gundisalvo, sino que consiste en construcciones con regla y compás a las que finalmente se dará un tamaño real. Como luego veremos, las construcciones de Villard se relacionan más con las trazas de edificios tardorromanos, bizantinos e islámicos de planta central y con las fórmulas ornamentales islámicas, que con los conceptos de mensuración de la geometría práctica proclamada por los autores contemporáneos. Tenemos, pues, varias evidencias de esta tradición gremial geométrica, que más tarde se va a confirmar con los tratados tardogóticos de maestros canteros alemanes que rompen con el secreto de sus logias, o con el tratado de carpintería mudéjar de López de Arenas. Y esta tradición es, como también tendremos ocasión de comprobar, de raíz diferente a la que se aplica a la arquitectura monacal, de naturaleza predominantemente métrica y modular.

> "La geometría de la regla y del compás, la geometría de los polígonos regulares, (...) es usada como guía de la arquitectura medieval para obtener resultados prácticos de tipo técnico pero de una gran belleza ornamental, que sorprende por la escasez de recursos empleados" (50).

(43) LEONARDO DE PISSA, Fibonaci (1170-1240), se había educado en Argelia donde descubrió las ventajas del sistema decimal respecto al romano y del empleo de las cifras hindúes respecto al recurso del ábaco. En 1202 publica su "Liber Abaci" donde recoge su famosa serie, en 1220 un "Liber geometriae" y en 1225 "Flos super solutionibus quaestionum ad numerum et ad geometrian vel ad utrumque pertinentes" y un "liber quadratorum". Su "Practica geometriae", aplica el álgebra a la solución de problemas geométricos, algo novedoso en occidente. Este nuevo camino abierto, solo prosperaría dos siglos más tarde / Cfr., LOPEZ GONZALEZ, S., op. cit. (11), pp. 92 ss. / MIELI, A., op. cit. (16) pp. 261 ss.: "La matemática de Leonardo era muy superior a la comprensión de sus contemporáneos cristianos". / Para la edición completa de sus obras: Boncompagni, Roma, 1857-1862.

(44) BRANNER, R., **Jean d'Orbais and the Cathedral of Reims**, en Art. Bulletin, XLIII, 1961, pp. 131-132. Cita la ed. de Boncompagni: "...this sort of solution is not used by surveyors, who prefer to proceed according to the ordinary (vulgarem) method".

(45) MIELI, A., op. cit. (16), pp. 218-219: "El tránsito del siglo XII al XIII, en el campo intelectual general, se caracteriza especialmente: 1) por la constitución definitiva de las universidades; 2) por la creación de algunas órdenes monásticas, las de los dominicos y la de los franciscanos, que participaron activamente en la investigación filosófica y teológica y en la enseñanza en las Universidades; 3) por la separación cada vez más acentuada entre la teología y la filosofía (...) y 4) el total conocimiento del verdadero Aristóteles, con su influencia (...) en los sectores más propiamente científicos, que, con Albertus Magnus y San Tommaso d'Aquino, vienen a formar parte casi de las doctrinas oficiales de la Iglesia" / Cfr. BRUYNE, R., op. cit. (10), vol. 3.

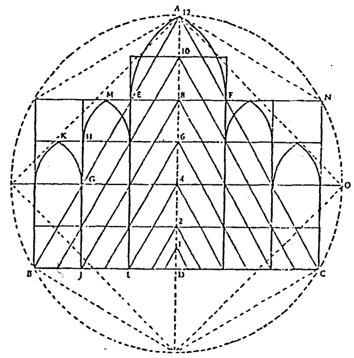
(46) SHELBY, L.R., op. cit. (26), p. 405.

(47) GIMPEL, J., op. cit. (21), p. 149).

(48) KOSTOF, S., et al, op. cit. (34), p. 83.

(49) VILLARD d'HÔNNECOURT (1175-1240), El cuaderno de notas, Bibliothèque Nationale, Paris, ms, fr. 19093 / BUCHER, F., Architector. The Lodge Books and Sketchbooks of Medieval Architects, vol. 1, pp. 15-193.

(50) LOPEZ GONZALEZ, S., op. cit. (11), p. 89.



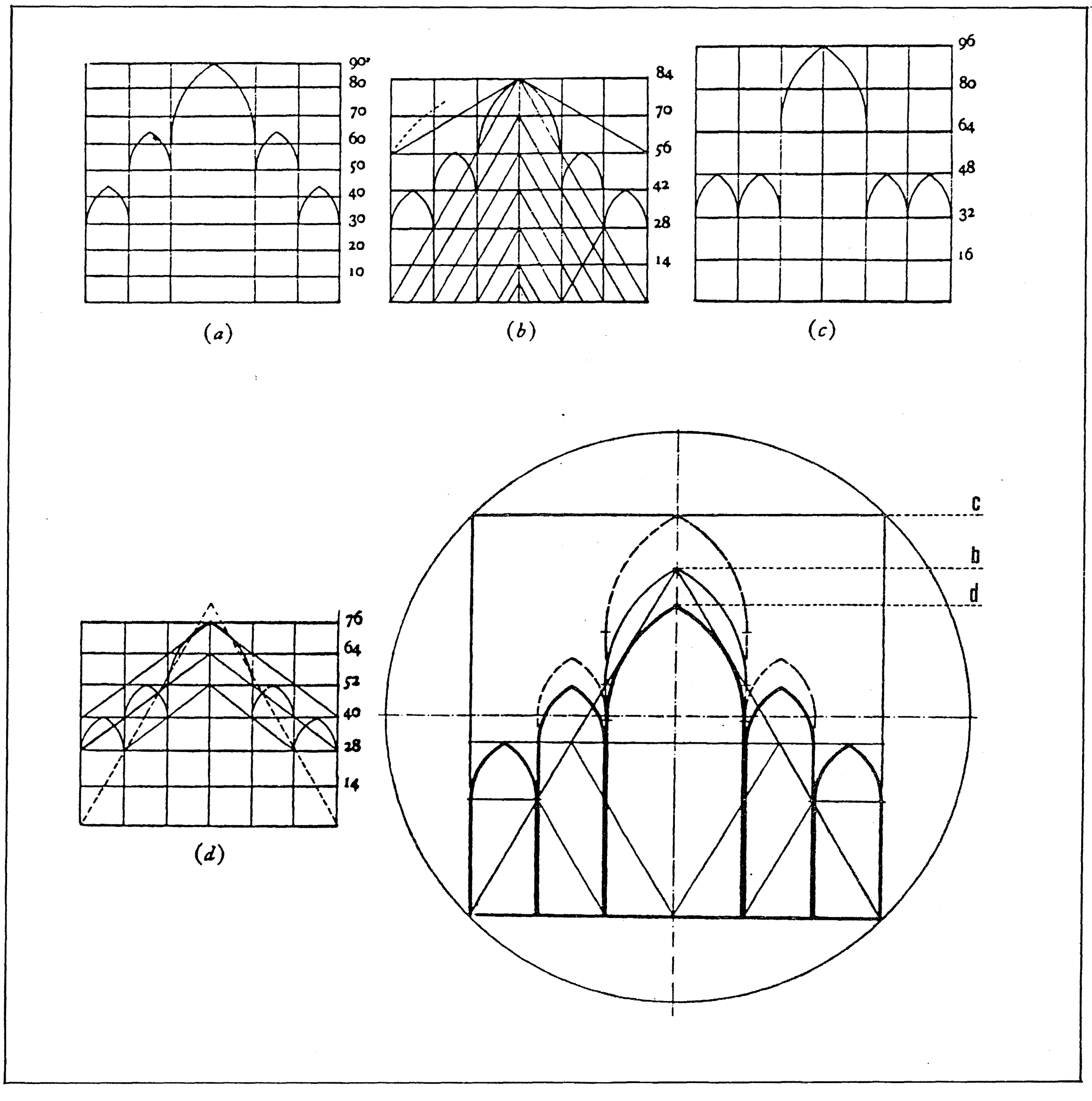
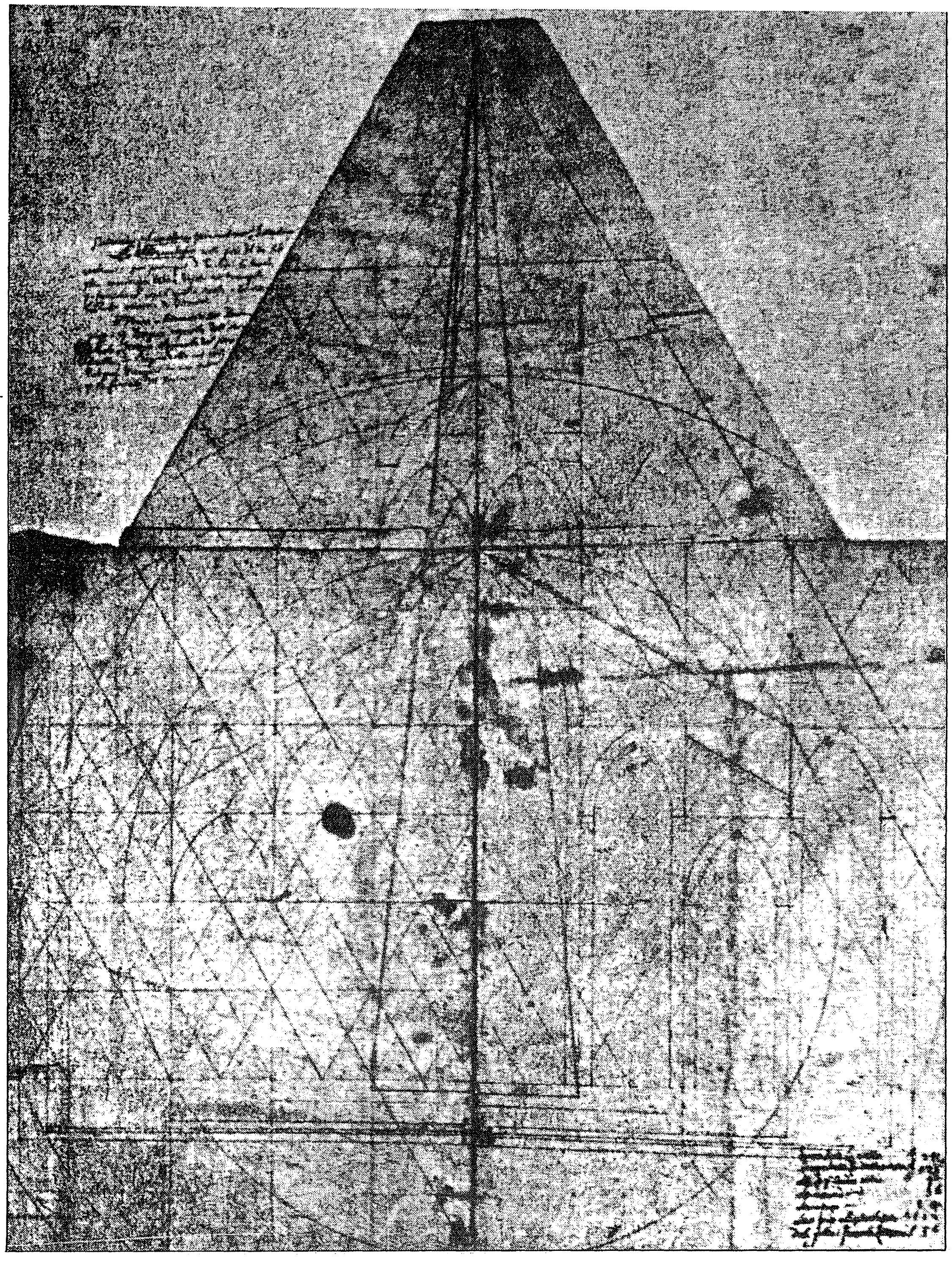


Fig. 2.– Diseños consecutivos para la Catedral de Milán: a) ad quadratum (Antº deVicenzo, 1390); b) ad triangulum (Annas de Firimburg, 1391); c) propuesta de H. Parler reconstruida por los textos (1392); d) resultado final: hasta cota 28 propuesta de Stornaloco y resto triángulos pitagóricos. Las tres últimas propuestas superpuestas (Du Colombier). Acotación propia.



La complejidad creciente de los edificios góticos dará una preponderancia cada vez mayor a los métodos de la "geometria fabrorum", capaces de coordinar a través de una serie de fórmulas basadas en construcciones geométricas sencillas la totalidad de los elementos y detalles de la construcción. Al no estar ligadas a dimensiones concretas, las fórmulas son trazados proporcionales que ligan unos elementos con otros con independencia de la unidad métrica empleada en cada edificio, y tienen el carácter universal de aquella arquitectura. Sin que se abandonen del todo los métodos métricos de control de la arquitectura monacal de la Alta Edad Media, la "geometria fabrorum" será el instrumento de control más importante en el gótico. Los gremios de canteros son, en efecto, los artífices principales de la arquitectura de la Baja Edad Media. Y su influencia solo decaerá con los cambios en el modo de concebir la arquitectura que introducirá el renacimiento.

Las limitaciones del control métrico de la forma arquitectónica harían imposible la concepción y ejecución coordinada de un edificio gótico, pero también el método geométrico tenía sus limitaciones. Y era necesario, cuando el problema se salía de lo habitual, recabar otras ayudas. Tal fué el caso del asesoramiento de Stornaloco en la construcción de la catedral de Milán (51). Concebido inicialmente el edificio con una sección "ad quadratum", pronto se vió que, con una anchura total de noventa y seis codos, iba a resultar más alto de lo conveniente y bastante arriesgado en su estabilidad. Tras larga controversia se resuelve construir "ad triangulum", con menor altura y mayor seguridad (fig. 2). Para nosotros es operación sencilla el cálculo de la altura de un triángulo equilátero del que se conoce la base, pero a finales del siglo XIV era necesaria la concurrencia de un experto matemático para el manejo del irracional raíz de tres. Además había que fijar alturas parciales: no solo la altura de clave de bóvedas de la nave central, sino también las de las naves laterales, alturas de impostas, etc., y los cálculos debían hacer manejables esas magnitudes con la unidad de medida empleada. Para este cometido se llamó Stornaloco.

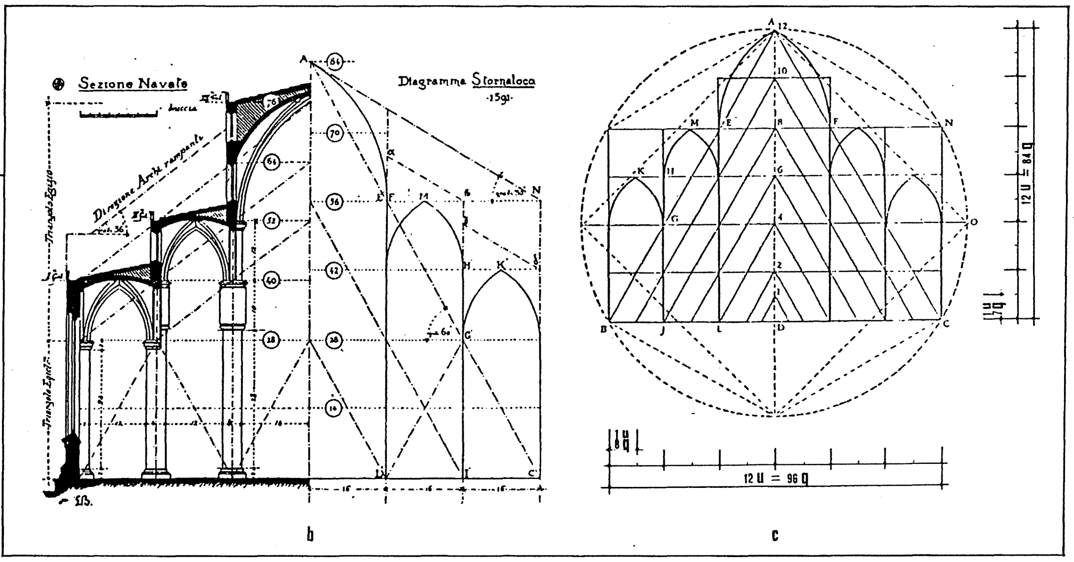


Fig. 3.– Esquema original del proyecto de Stornaloco para el alzado del Duomo milanés. Comparación del esquema con construcción final. Restitución del esquema según Frankl.

Realmente, las raíces cuadradas se calculaban de manera aproximada con ayuda de una tabla de cuadrados y de la fórmula de Leonardo Pisano: $N = (N+n^2) / 2n$, donde n es el mayor número entero cuyo cuadrado es menor de N, el número cuya raíz se desea (52); la fórmula va bien cuando se trata de números altos. Los árabes obtenían buenos resultados, incluso para números pequeños, buscando en la tabla de cuadrados un número cuyo cuadrado se aproximara lo más posible a 100N, o a 10.000N, y dividiéndolo por 10 o 100, según el caso (53). Pero ésto requiere el uso de una numeración decimal, y aunque ésta era conocida ya en la Europa del siglo XIV, su uso no estaba muy extendido ni sus posibilidades bien comprendida, y se seguía con la numeración romana.

El informe que suministró Stornaloco junto con un esquema de la sección del templo (fig. 3), ha llegado hasta nosotros a través de sucesivas copias. Con números romanos y sin signos aritméticos, la fórmula que contiene la transcripción de Beltrami resulta ininteligible:

> "Erit ergo linea AD quae est altitudo summitatis eclexie radix DC DCC MXX / XXVII sesãra / quia trigesime, quod est aliquid minus de LXXXVIIII" (54).

La clave de las bóvedas de la nave central debía pues situarse a "algo menos de ochenta y cuatro" codos sobre el suelo; redondeando a ochenta y cuatro, las alturas de los puntos intermedios se fijaban en 14, 28, 42, 56 y 70 codos, que resultaban divisores manejables. La interpretación de la fórmula y su discusión detallada constituyen un magistral trabajo de Panofsky, al que remitimos al lector.

Es evidente que si el manejo de irracionales era tan penoso para un matemático, no es probable que formara parte de los conocimientos de los artesanos, ni aún de los maestros canteros, cuyo nivel de formación era inferior. Cualquier regla numérica de control de proporciones tenía que basarse en números enteros sencillos, como los de la recomendación de Stornaloco, y en relaciones racionales simples. La deducción de sofisticadas relaciones con ayuda de conocimientos matemáticos que hoy tenemos pero que no estaban al alcance de aquellos artífices, que con frecuencia apoya ciertas teorías, debe ser vista con sospecha. No es científicamente correcto hacer atribución gratuita de conocimientos no comprobados, cuando además hay explicaciones más sencillas: las rebuscadas proporciones que se extraen al analizar ciertos edificios son debidas a veces a falta de rigor metodológico; en las investigaciones más escrupulosas, se trata casi siempre de las proporciones implícitas en las construcciones geométricas, y el cantero no era siempre consciente de estarlas empleando.

En la Edad Media, como hemos querido mostrar, existe un distanciamiento entre la ciencia teórica y la de los oficios, apoyándose éstos en ciertos rudimentos de la geometría euclídea y en procedimientos empíricos largamente elaborados, leyes en definitiva muy simples que, paso a paso, les permitían generar y coordinar formas tan complejas como lo son, por distintas razones, una iglesia gótica o una carpintería musulmana. Que las reglas del oficio, los fundamentos de la "geometria fabrorum", fueran simples no quiere decir que su aplicación creadora fuera fácil. De hecho, el aprendizaje gremial era largo y penoso, y solo algunos alcanzaban el grado de maestro.

(51) Anales de la Catedral de Milán. Publicación completa en : Annalli della fabbrica del Duomo di Milano dall'origine fino al presente, Milán, 1877-1885 / Cfrr., FRANKL, P., **The secret of the mediaeval masons**, que incluye **An explanation of Stornaloco's formula** de PANOFSKY, E., en Art. Bulletin, 27.1, 1945, pp. 46-65 / ACKERMAN, J., **Ars sine scientia nihil est: Gothic theory of Architecture at the Cathedral of Milan**, en Art Bulletin, 31, 1949, pp. 84-111 / CASTELLANO, A., **Dal tardo gotico al primo Rinascimento: alcune osservazioni su progetto, disegno e cantiere,** en Costruire in Lombardia, (AAVV), pp. 57 ss.

(52) Arquimedes había ofrecido en su momento fórmulas más exactas que ésta medieval de Pisano. P.e., $3 = 265/153 = 1,732026$.

(53) Para un valor N=3, según propuesta de Pisano $3 = 3+1^2) / 2 = 2$; para números bajos es poco aproximada. Según el método árabe, suponiendo una mayoración de 10^2, para N = 3 se obtiene: $300 = (300+17^2) / 2 \times 17 = 17,3235$ y minorando por 10, $n/10 = 1,73235$.

(54) FRANKL, P., y PANOFSKY, E., op. cit. (51), pp. 53-54: "Por tanto la línea AD, que es la altura del punto más alto de la Iglesia, será la raíz 600 700 1020 (27) sesãra porque es un treintavo, lo que es algo menor que 84".

PROCEDENCIA DE LAS ILUSTRACIONES

Fig. 1.– MIELI, A., Panorama general de la Historia de la Ciencia, p. 193.

Fig. 2.– ACKERMAN, J,. **Ars sine sciencia nihil est**, p. 89 / DU COLOMBIER, P., **Les chantiers des Cathédrales**, p. 92.

Fig. 3.– CASTELLANO, A., **Costruire in Lombardia** p. 61 / FRANKL, P., "The secret of the Mediaeval masons", p. 59 / ACKERMAN, J., "Ars..." fig. 4.