

INTRODUCCION A LA GEOMETRIA DE LAS ESTRUCTURAS ESPACIALES DESPLEGABLES DE BARRAS

Por FELIX ESCRIG. DR. ARQUITECTO*
 y JUAN B. PEREZ VALCARCEL DR. ARQUITECTO**
 *Jefe del Departamento de Estructuras de la E.T.S.A. de Sevilla
 **Jefe del Departamento de Estructuras de la E.T.S.A. de La Coruña

Las estructuras espaciales de barras han sido enormemente utilizadas en distintos campos de la tecnología desde principios de siglo. Su primer uso fue en técnicas aeroespaciales para obtener estructuras ligeras y fue a partir de 1930 cuando comenzó su utilización en estructuras de edificación, sobre todo para cubiertas de grandes luces. La complejidad de su cálculo las confinó en principio a diseños experimentales y solo con el advenimiento del computador electrónico se han convertido en tipología habitual de uso en el diseño. Las cubiertas planas de barras metálicas con varias capas de ellas y las cúpulas con una o más capas de barras, son bien conocidas y numerosas investigaciones han aportado soluciones particulares en la configuración de las barras y soluciones de nudos para definir unas estructuras con características bien precisas: MODULACION, RIGIDEZ y FORMA DEFINITIVA.

La modulación hace referencia al establecimiento de un reducido número de elementos que genera el conjunto por acumulación de ellos. La rigidez se refiere a la estabilidad geométrica que hace a la estructura capaz de resistir su propio peso y las cargas aplicadas sin otras deformaciones que las elásticas. Y la forma definitiva implica la definición formal y la constancia de las dimensiones que solo podrá variarse desmontando los módulos o elementos y emplazándolos con otra configuración. Esas estructuras reciben el nombre de «Espaciales de barras con nudos articulados» y en ellas todas las barras empiezan y terminan en una articulación y no admiten nudos intermedios.

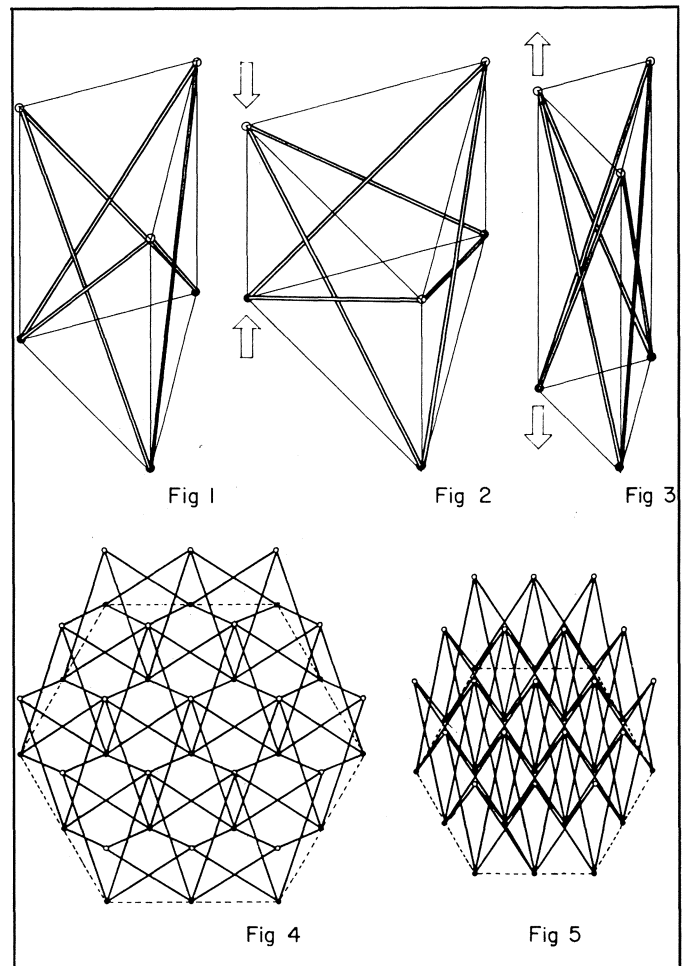
No se han utilizado hasta el momento de una forma práctica estructuras que permitan formas cambiantes o plegables y despletables. Y es sobre ellas que queremos hacer algunas consideraciones y sistematizar muchas de sus posibilidades.

Las estructuras espaciales que proponemos tienen una función resistente y por tanto serán rígidas y con forma geométrica definida. Pero ésta podrá cambiarse mediante el accionamiento de un dispositivo mecánico que, actuando localmente, tenga repercusiones en todo el conjunto.

Estas estructuras están formadas por barras que empiezan y terminan en una articulación pero que además llevan nudos intermedios que no impiden la continuidad de las piezas y tienen como misión agrupar las distintas barras que pasan por estos nudos intermedios, permitiéndoles unas con respecto a otras sin que puedan separarse.

El ejemplo más simple y conocido es el aspa; dos barras con un pasador intermedio que las une y pueden girar una con respecto a otra alineándose o poniéndose perpendicularmente. Existen también otras posibilidades tales como aspas espaciales con más de dos barras pasando por la articulación y no contenidas en un plano o aspas complejas en que algunas barras pertenezcan a la vez a más de una agrupación y por tanto con más de una articulación intermedia.

Las estructuras que proponemos se obtienen a partir de agrupaciones modulares de aspas espaciales simples o complejas que se añaden sucesivamente para formar una malla grande

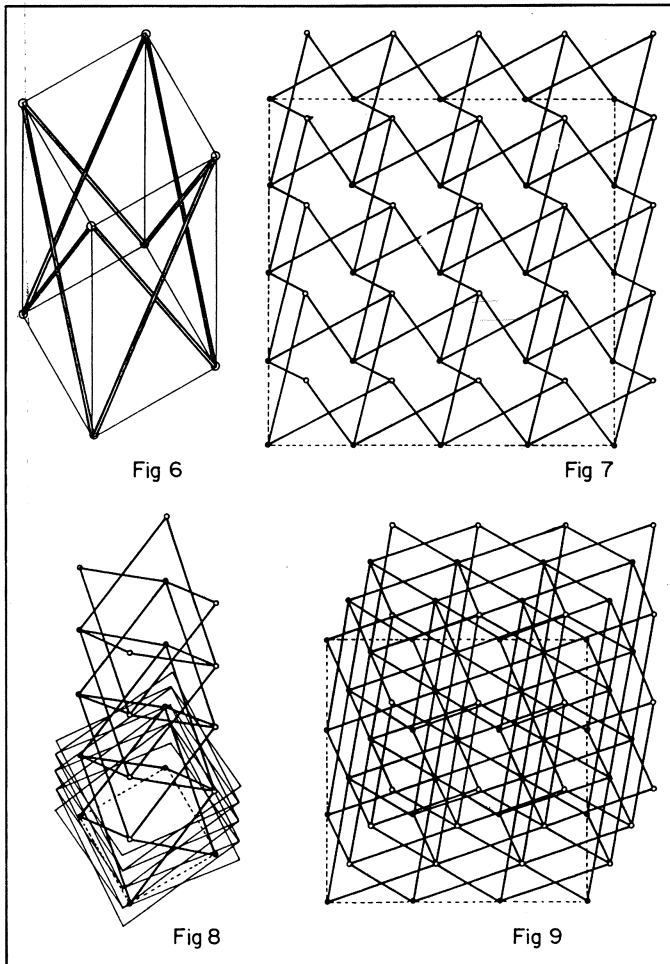


en el espacio. Y puesto que estas aspas tienen la movilidad propia de las agrupaciones de barras atravesadas por un pasador, los conjuntos formados con ellas tendrán la misma movilidad siempre que se garantice la compatibilidad geométrica del movimiento de unas con respecto a las otras.

Esta movilidad las hace inservibles como estructuras en ese estado puesto que actuarán como mecanismos cambiando de forma ante la actuación de cargas exteriores o peso propio. Pero para obtener rigidez pueden inmovilizarse en posiciones determinadas, por ejemplo, fijando la distancia entre dos nudos contiguos o alejados no unidos por barras comunes. Se pueden fijar simultáneamente varias parejas de nudos hasta conseguir rigidizar el conjunto. Los elementos rigidizadores pueden ser barras que actúan solo cuando un motor las acciona o un dispositivo mecánico las liga al conjunto.

Para comprender fácilmente la generación de un sistema plegable de barras imaginemos un prisma triangular regular en que sus lados y sus vértices son elementos ficticios que nos ayudan a definir una estructura constituida por barras que unen los vértices opuestos de cada una de las caras rectangulares. (Fig. 1). Obtendremos así un conjunto de tres aspas planas dispuestas espacialmente y formadas por dos barras cada una cruzándose en el centro de los rectángulos. Los vértices del prisma serán las uniones entre las distintas aspas.

Si se efectúa una presión sobre una base de este prisma triangular contra la otra, las aspas tenderán a abrirse de modo que las diagonales de las caras rectangulares tengan la misma longitud, la de las barras que forman las aspas; pero estos rectángulos cambiarán de proporción haciéndose más anchos y más bajos (Fig. 2). De esta forma obtenemos un prisma triangular regular diferente al anterior y caracterizado por una menor altura y unas bases triangulares de mayor dimensión. Si seguimos com-



primiendo, la cara superior del prisma llegará a coincidir con la inferior y el lado del triángulo será igual a la longitud de las barras mientras la altura será nula.

Si en lugar de acercar una base hacia la otra se separan entre sí, las bases se reducen a cambio de ganar altura el prisma (Fig. 3). El límite será aquel en que el prisma se eleve hasta una longitud igual a la de las barras y las bases se hagan mínimas, agrupándose en seis barras en forma de haz.

Colocando encadenadamente muchos prismas de estas características (Fig. 4) e iguales entre sí y en los que las barras que confluyen en cada vértice se unen con articulaciones espaciales, al aproximar las dos bases de un prisma se está obligando a que lo hagan todas las restantes, obteniéndose por tanto una estructura grande con capacidad para cambiar de forma (Fig. 5).

El sistema modular generado por prismas triangulares regulares está determinado por barras de igual longitud y con una articulación en su punto medio. Por su capacidad para llenar el espacio permite diseñar estructuras longitudinales, planas o volumétricas.

Si en lugar de un prisma triangular, escogemos uno cuadrado, por el mismo procedimiento, podremos plantear una estructura desplegable (Fig. 6) capaz de encadenarse a otras similares para dar un conjunto como el de la Fig. 7 y que, como el anterior, puede crecer longitudinal, superficial o volumétricamente (Fig. 8 y 9).

En el caso de prismas cuadrangulares hay otra forma de unir vértices opuestos con barras de igual longitud y que permite también crear estructuras modulares desplegables (Fig. 10). De este modo puede ensamblarse un nuevo conjunto con barras que se cruzan espacialmente cuatro a cuatro (Fig. 11).

Un tipo de módulo similar sólo podría ser posible en un pris-

ma triangular si partiéramos de un antiprisma como el de la Fig. 12 que también es capaz de llenar el espacio y por tanto de generar grandes estructuras (Fig. 13).

Realmente este proceso de generación sugiere que podrían utilizarse otros muchos tipos de módulos prismáticos regulares capaces de llenar el espacio por sí solos o con la colaboración de otros. Así, por ejemplo, en las Fig. 14 y 16 se muestran dos módulos pentagonales resueltos ambos con barras de igual longitud y articuladas en su punto medio y en las Fig. 16 y 17 dos módulos hexagonales también con barras de iguales características aunque no todos ellos son capaces de encadenarse hasta llenar espacio. Pero con ciertas restricciones podrían ser útiles.

En el caso de prismas poligonales superiores al triángulo es posible encontrar disposiciones más complejas con barras de igual longitud y más de una articulación intermedia y que también pueden utilizarse para modular el espacio (figs. 18, 19, 20 y 21).

Atendiendo a sus posibilidades de encadenamiento y a la compatibilidad entre movimientos de barras de distinta longitud pueden construirse conjuntos de elementos similares o diferentes.

Todo el planeamiento anterior es posible hacerlo también con módulos prismáticos irregulares o con otras formas poliédricas. Si partimos de prismas oblicuos (Fig. 22) obtendremos estructuras también oblicuas (Fig. 23). Si partimos de estructuras troncopiramidales (Fig. 24) obtendremos estructuras que se curvan en el espacio (Fig. 25).

En todos estos casos las barras pueden ser de longitudes iguales o diferentes y las articulaciones intermedias pueden ser únicas o múltiples y centradas o excéntricas. Las posibilidades para crear estructuras diferentes son muchas.

Las limitaciones se refieren únicamente al establecimiento de las condiciones de compatibilidad entre la geometría de cada uno de los nudos conectados. En un caso general, con un solo nivel (Fig. 26), para que sea posible el plegado y desplegado (Fig. 27) las longitudes de las barras que convergen en vértices opuestos deben cumplir la relación:

$$l_i + l'_i = k_{i+1} + k'_{i+1}$$

En un caso general con varios niveles (Fig. 28) las longitudes de las barras que convergen en vértices opuestos (A por ejemplo) deben cumplir la misma condición en cada uno de los niveles para que sea desplegable (Fig. 29). Es decir:

$$l + l' = k_{i+1} + k'_{i+1}$$

$$l_{\alpha} + l'_{\alpha} = k_{\alpha, i+1} + k'_{\alpha, i+1}$$

$$k'_i + l'_i = k_{\alpha} + l_{\alpha}$$

$$k'_{i+1} + l'_{i+1} = k_{\alpha, i+1} + l_{\alpha, i+1}$$

Y lo mismo en todos los conjuntos de barras que pasen en otras direcciones del espacio por el punto A. Todas estas condi-

ciones se establecerán también en los restantes puntos y estableceremos el sistema global de condiciones que debe cumplir el conjunto para que sea desplegable.

En cuanto a la rigidez de estas estructuras desplegables ya se ha observado que son formalmente inestables y que pueden tomar distintas configuraciones geométricas. La cual facilita precisamente el proceso de plegado y expansión. Para fijar su forma en posiciones determinadas es necesario introducir elementos que mantengan las dimensiones requeridas y ello se conseguirá mediante alguno de los siguientes procedimientos:

a) Introducción de un elemento que defina la separación de dos nudos opuestos (Fig. 30). Este elemento puede ser una barra, un cable, un tornillo o un gato hidráulico. Si se sitúan elementos de este tipo en varios puntos de la estructura, la rigidez aumenta.

b) Introducción de un elemento que una puntos alejados. En este caso una estructura como la representada en la Fig. 31 abierta, por peso propio, se estabilizará cuando el elemento adicional quede tensado.

c) Estabilización por anclaje de los apoyos a puntos fijos del exterior del sistema (Fig. 32).

d) Utilización de una cubierta textil o plástica que estabilice el conjunto abierto, al tensarse. Esta cubierta puede situarse uniendo puntos superiores, inferiores o por ambas capas a la vez (Fig. 33).

e) Diseño de nudos que permitan un giro limitado de las barras que concurren en ellos (Fig. 34).

f) Sistemas mixtos de varias de las posibilidades anteriores.

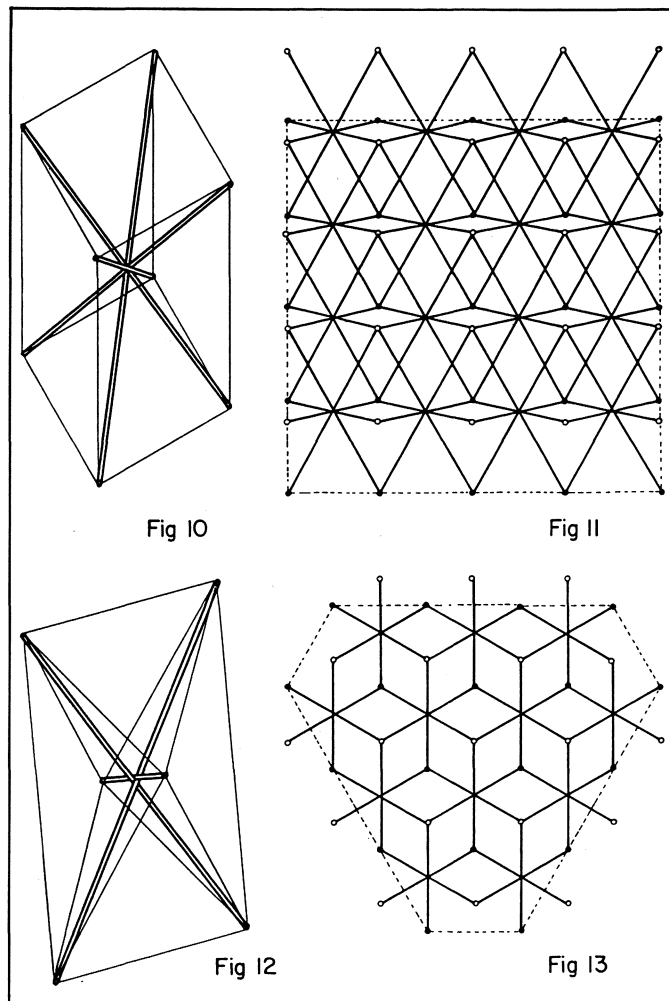
Con estas soluciones y algunas otras, podemos conseguir que las cerchas desplegables tomen una configuración estable. Sin embargo, habrá que estudiar otro tipo de rigidización lateralmente puesto que sólo si forman recuadros triangulados (Fig. 1 a 5) podrá evitarse la deformación como mecanismo.

En un caso como el de la Fig. 35, representación en planta del tipo reflejado en la Fig. 7, con la distancia entre nudos superiores e inferiores fija, pueden obtenerse configuraciones como las de la Fig. 36, 37 ó 38 en las que falta estabilidad angular. Esta estabilidad se conseguirá en la posición desplegada con el arriostramiento de algunos recuadros (Fig. 39 y 40) que habrá que elegir correctamente.

En general la estructura estará geoméricamente arriostrada si rigidizamos dos filas perpendiculares de recuadros, aunque a efectos resistentes haya que considerar condicionantes adicionales.

En un caso como el de la Fig. 42, representación en planta del tipo reflejado en la Fig. 10, la única deformación posible en planta, manteniendo las longitudes proyectadas sobre el plano horizontal de las barras, son las representadas en las Figs. 43 y 44. Con arriostrar un solo recuadro toda la estructura queda también arriostrada.

En un caso como el de la Fig. 13 existen tres grados de libertad que corresponden a las deformaciones expresadas en las Fig. 45 a 48.



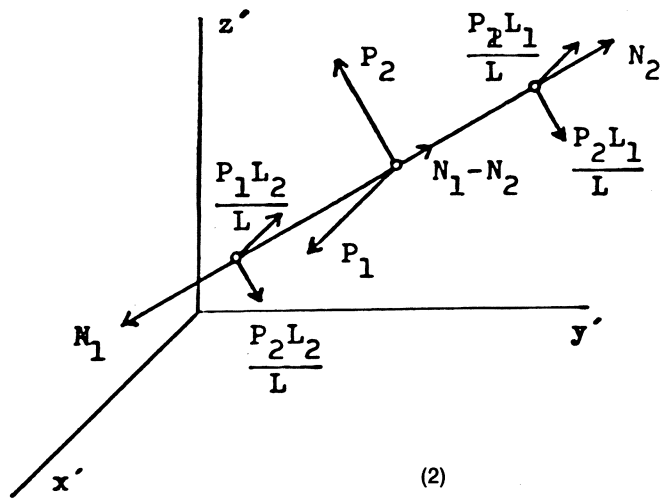
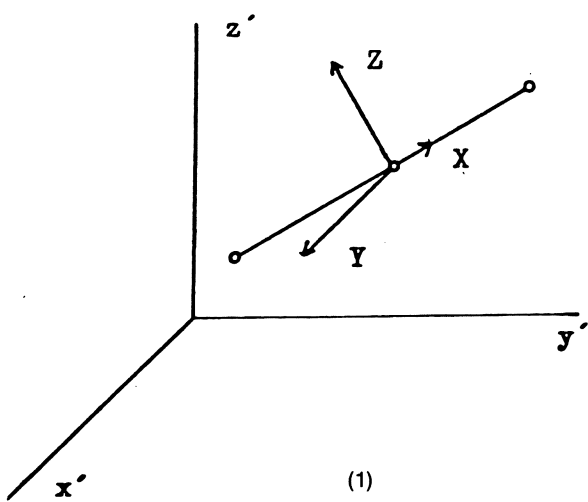
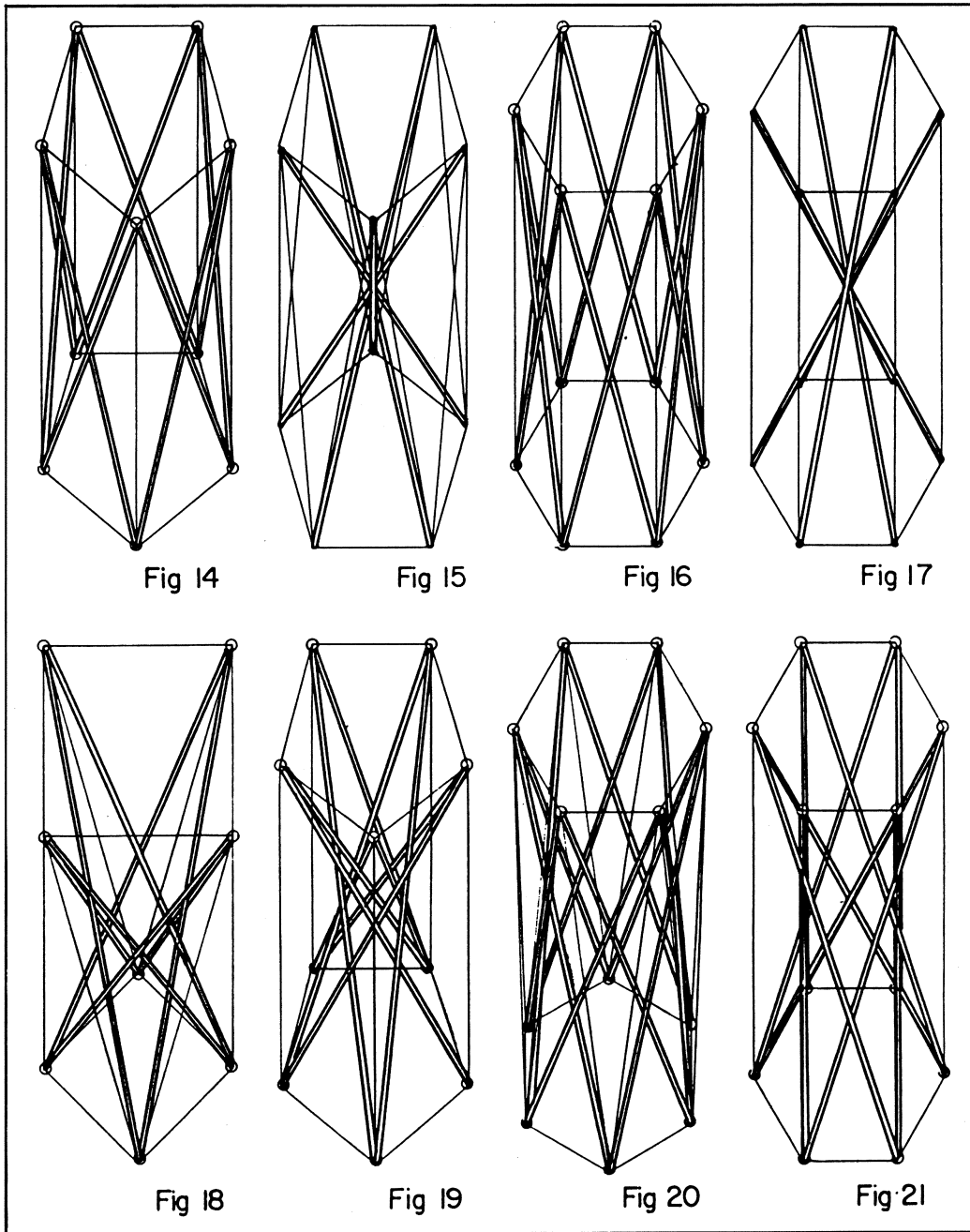
Como todas estas estructuras para su uso arquitectónico deberán acompañarse de una cubierta trabajando en tracción, en su posición desplegada, el arriostramiento está garantizado. Y cuando ello no sea así habrá que tomar las disposiciones necesarias.

EL CALCULO MATRICIAL DE LAS ESTRUCTURAS DESPLEGABLES ESPACIALES

La formulación matricial de las estructuras desplegables presenta ciertos problemas derivados del hecho de que sus piezas constituyentes son barras articuladas en sus extremos que tienen un apoyo central sobre otra pieza. Esto hace que los nudos centrales deban considerarse como articulados si estudiamos la interacción de una barra con la otra y empotrados si consideramos la barra como continua. Ninguno de los programas de ordenador habituales puede resolver este problema.

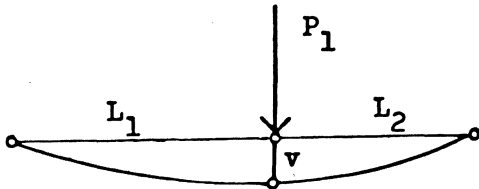
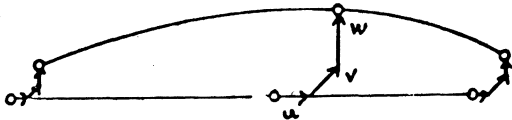
Sin embargo, es posible plantear unas ecuaciones matriciales que expresen el equilibrio de esta barra y en consecuencia formular un nuevo programa de ordenador capaz de calcular este tipo de estructuras. De esto tratará este estudio.

Una barra característica de estas estructuras se puede considerar articulada en sus extremos y apoyada en un punto interior. La reacción exterior debida a la barra que se articula sobre ella puede descomponerse en tres fuerzas X, Y, Z. De ellas la fuerza X, actuante según el eje de la pieza, modificará los valores de los axiles en los dos tramos de la barra y las fuerzas transversales Y, Z provocarán flexiones sobre la barra. El equilibrio total de la barra será (figura 2).



Es decir, que los cuatro esfuerzos N , N , P , y P_2 definen totalmente el equilibrio de la barra.

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS LOCALES



A efectos de esfuerzos axiales la respuesta de la barra será similar a la de una barra de una estructura de nudos articulados. En consecuencia, llamando u_1 al alargamiento del primer tramo de la barra y u_2 al del segundo.

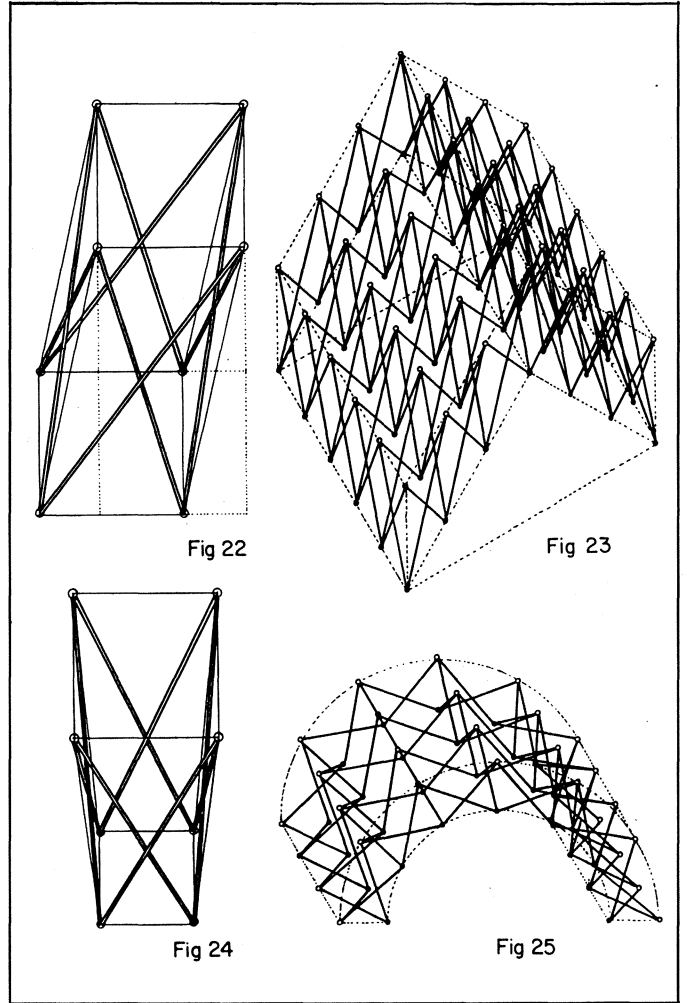
$$N_1 = \frac{E\Delta}{L_1} u_1 \quad N_2 = \frac{E\Delta}{L_2} u_2 \quad (1)$$

A efectos de las fuerzas transversales en el nudo central, suponemos la barra articulada en sus extremos y sometido a una carga trasversal sobre dicho nudo. En este caso

$$v = \frac{1}{E \cdot I_1} \frac{P_1 \cdot L_1^2 \cdot L_2^2}{3 \cdot L}$$

En consecuencia

$$P_1 = \frac{3 \cdot E \cdot I_1 \cdot L}{L_1^2 \cdot L_2^2} \cdot v$$



E igualmente
$$P_2 = \frac{3EI_2L}{L_1^2 L_2^2} w \quad (1)$$

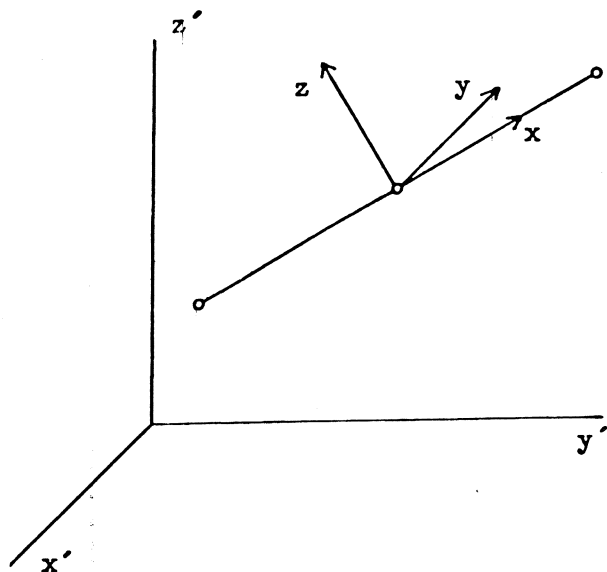
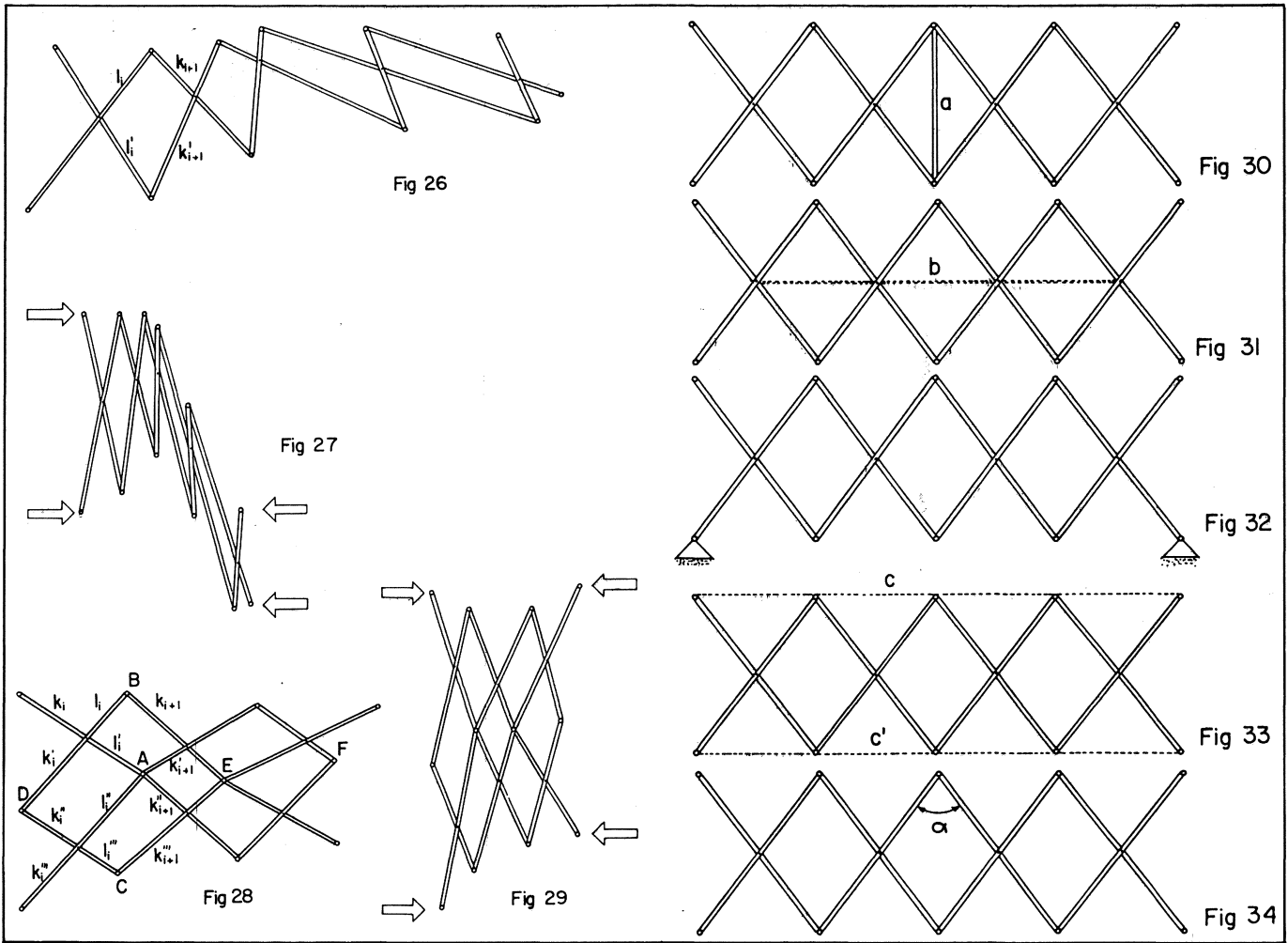
Y puesto en forma matricial

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E\Delta}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E\Delta}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI_1L}{L_1^2 L_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_2L}{L_1^2 L_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE COMPATIBILIDAD

Para definirla vamos en principio a definir una orientación de los ejes locales

- eje x.—lleva la dirección de la barra.
- eje y.—eje horizontal perpendicular al eje x.
- eje z.—eje perpendicular a los ejes x e y.



Este criterio es válido salvo para barras verticales en cuyo caso los ejes y z son ambos horizontales. Para resolver la ambigüedad se toma como eje z al eje horizontal que corta al eje vertical z' y como eje y al perpendicular a los otros dos ejes.

Los cosenos directores de los tres ejes serán:

- eje x ... (cos α_1 cos β_1 cos γ_1)
- eje y ... (cos α_2 cos β_2 cos α_2)
- eje z ... (cos α_3 cos β_3 cos α_3)

Y las relaciones que existen entre ellos serán:

$$\text{eje x ... } (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\text{eje y ... } \left(-\frac{\cos \beta}{\sin \gamma}, \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}, 0 \right)$$

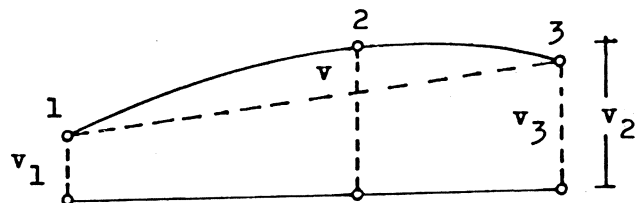
$$\text{eje z ... } \left(-\frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma}, -\frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma}, \sin \gamma \right)$$

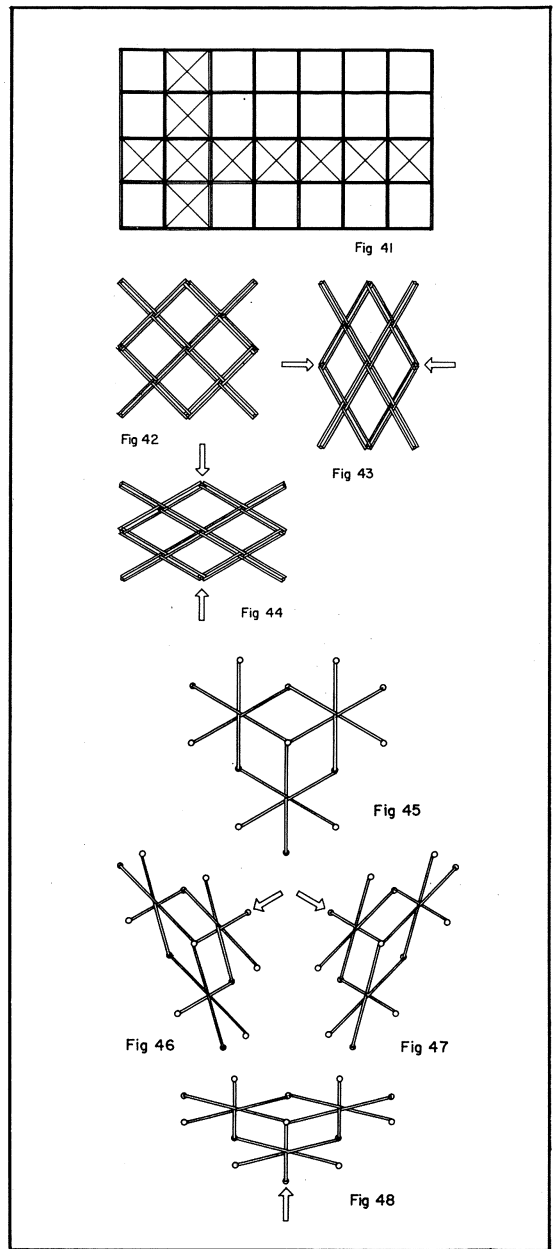
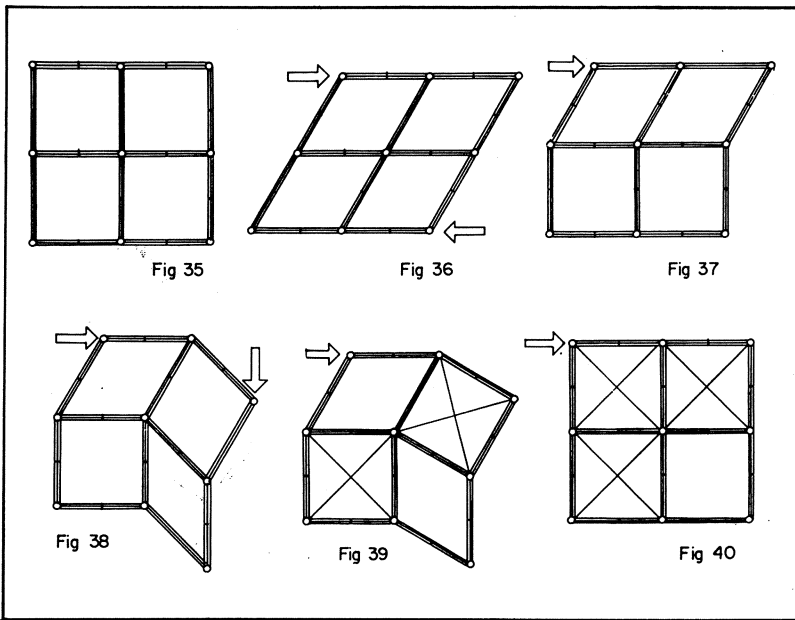
Poniendo los desplazamientos de la barra en función de los desplazamientos de los nudos.

$$u_1 = -x_1 \cos \alpha_1 - y_1 \cos \beta_1 - z_1 \cos \gamma_1 + x_2 \cos \alpha_1 + y_2 \cos \beta_1 + z_2 \cos \gamma_1$$

$$u_2 = -x_2 \cos \alpha_1 - y_2 \cos \beta_1 - z_2 \cos \gamma_1 + x_3 \cos \alpha_1 + y_3 \cos \beta_1 + z_3 \cos \gamma_1$$

Y para los desplazamientos transversales





$$V = -\frac{L_2 V_1}{L} + V_2 - \frac{L_1 V_3}{L}$$

$$V = -\frac{L_2 X_1 \cos \alpha_2}{L} - \frac{L_2 Y_1 \cos \beta_2}{L} - \frac{L_2 Z_1 \cos \gamma_2}{L} + X_2 \cos \alpha_2 + Y_2 \cos \beta_2 + Z_2 \cos \gamma_2 - \frac{L_1 X_3 \cos \alpha_3}{L} - \frac{L_1 Y_3 \cos \beta_3}{L} - \frac{L_1 Z_3 \cos \gamma_3}{L}$$

$$W = -\frac{L_2 X_1 \cos \alpha_3}{L} - \frac{L_2 Y_1 \cos \beta_3}{L} - \frac{L_2 Z_1 \cos \gamma_3}{L} + X_2 \cos \alpha_3 + Y_2 \cos \beta_3 + Z_2 \cos \gamma_3 - \frac{L_1 X_3 \cos \alpha_3}{L} - \frac{L_1 Y_3 \cos \beta_3}{L} - \frac{L_1 Z_3 \cos \gamma_3}{L}$$

Que puesto en forma matricial

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 & -\cos \beta_1 & -\cos \gamma_1 & \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha_1 & -\cos \beta_1 & -\cos \gamma_1 & \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ -\frac{L_2 \cos \alpha_2}{L} & -\frac{L_2 \cos \beta_2}{L} & -\frac{L_2 \cos \gamma_2}{L} & \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 & -\frac{L_1 \cos \alpha_2}{L} & -\frac{L_1 \cos \beta_2}{L} & -\frac{L_1 \cos \gamma_2}{L} \\ -\frac{L_2 \cos \alpha_3}{L} & -\frac{L_2 \cos \beta_3}{L} & -\frac{L_2 \cos \gamma_3}{L} & \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 & -\frac{L_1 \cos \alpha_3}{L} & -\frac{L_1 \cos \beta_3}{L} & -\frac{L_1 \cos \gamma_3}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

Planteando las ecuaciones anteriores en coordenadas globales

Ecuación de rigidez $\underline{P} = \underline{K} \cdot \underline{Z}$

Ecuación de compatibilidad $\underline{Z} = \underline{A} \cdot \underline{X}$

Ecuación de equilibrio $\underline{L} = \underline{A}' \cdot \underline{P}$

En consecuencia $\underline{L} = \underline{A}' \cdot \underline{K} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{S} \cdot \underline{X}$

Por tanto la matriz de rigidez en coordenadas globales será

$$\begin{bmatrix}
 a+m.k_1 & b+n.k_1 & c+o.k_1 & -a-m.k_3 & -b-n.k_3 & -c-o.k_3 & m.k_5 & n.k_5 & o.k_5 \\
 d+p.k_1 & e+q.k_1 & f+r.k_1 & -d-p.k_3 & -e-q.k_3 & -f-r.k_3 & p.k_5 & q.k_5 & r.k_5 \\
 a+g+m & b+h+n & c+i+o & -g-m.k_4 & -h-n.k_4 & -i-o.k_4 & & & \\
 d+j+p & e+k+q & f+l+r & -j-p.k_4 & -k-q.k_4 & -l-r.k_4 & & & \\
 g+m.k_2 & h+n.k_2 & i+o.k_2 & & & & & & \\
 j+p.k_2 & k+q.k_2 & & & & & & & \\
 l+r.k_2 & & & & & & & &
 \end{bmatrix}$$

siendo

$$k_1 = \frac{L_2^2}{L^2} \quad k_2 = \frac{L_1^2}{L^2}$$

$$k_3 = \frac{L_2}{L} \quad k_4 = \frac{L_1}{L} \quad k_5 = \frac{L_1 \cdot L_2}{L}$$

$$m = \frac{3EI_1 L}{L_1^2 L_2^2} \cos^2 \alpha_2 + \frac{3EI_2 L}{L_1^2 L_2^2} \cos^2 \alpha_3$$

$$n = \frac{3EI_1 L}{L_1^2 L_2^2} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \frac{3EI_2 L}{L_1^2 L_2^2} \cos \alpha_3 \cos \beta_3$$

$$o = \frac{3EI_1 L}{L_1^2 L_2^2} \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \frac{3EI_2 L}{L_1^2 L_2^2} \cos \alpha_3 \cos \gamma_3$$

Y los coeficientes serán

$$a = \frac{E\Delta}{L_1} \cos^2 \alpha_1$$

$$g = \frac{E\Delta}{L_2} \cos^2 \alpha_1$$

$$b = \frac{E\Delta}{L_1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1$$

$$h = \frac{E\Delta}{L_2} \cos \alpha_1 \cos \beta_1$$

$$c = \frac{E\Delta}{L_1} \cos \alpha_1 \cos \gamma_1$$

$$i = \frac{E\Delta}{L_2} \cos \alpha_1 \cos \gamma_1$$

$$p = \frac{3EI_1 L}{L_1^2 L_2^2} \cos^2 \beta_2 + \frac{3EI_2 L}{L_1^2 L_2^2} \cos^2 \beta_3$$

$$d = \frac{E\Delta}{L_1} \cos^2 \beta_1$$

$$j = \frac{E\Delta}{L_2} \cos^2 \beta_1$$

$$q = \frac{3EI_1 L}{L_1^2 L_2^2} \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \frac{3EI_2 L}{L_1^2 L_2^2} \cos \beta_3 \cos \gamma_3$$

$$e = \frac{E\Delta}{L_1} \cos \beta_1 \cos \gamma_1$$

$$k = \frac{E\Delta}{L_2} \cos \beta_1 \cos \gamma_1$$

$$r = \frac{3EI_1 L}{L_1^2 L_2^2} \cos^2 \gamma_2 + \frac{3EI_2 L}{L_1^2 L_2^2} \cos^2 \gamma_3$$

$$f = \frac{E\Delta}{L_1} \cos^2 \gamma_1$$

$$l = \frac{E\Delta}{L_2} \cos^2 \gamma_1$$

CALCULO DE ESFUERZOS

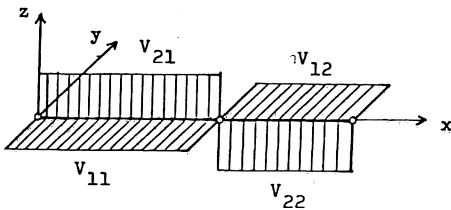
Hemos visto en las ecuaciones (2) y (3) las expresiones de los desplazamientos en coordenadas locales. En función de estos desplazamientos, que se calcularán al resolver el sistema de ecuaciones $L = S.X$ podremos calcular a partir de (1) los esfuerzos en las barras

$$N_1 = \frac{E.A}{L_1} u_1 \quad P_1 = \frac{3EI_1 L}{L_1^2 L_2^2} v$$

$$N_2 = \frac{E.A}{L_2} u_2 \quad P_2 = \frac{3.E.I_2.L}{L_1^2.L_2^2} .w$$

Generalmente es de mayor interés calcular los esfuerzos cortantes y los momentos flectores, que las propias fuerzas trasversales.

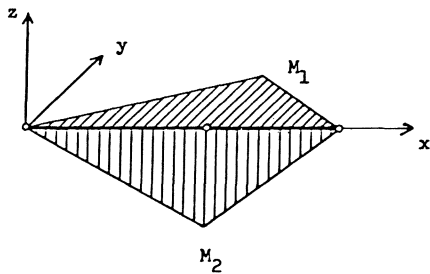
Esfuerzos cortantes



$$V_{11} = \frac{P_1 L_2}{L} \quad V_{12} = \frac{P_1 L_2}{L}$$

$$V_{21} = \frac{P_2 L_2}{L} \quad V_{22} = \frac{P_2 L_1}{L}$$

Momentos flectores



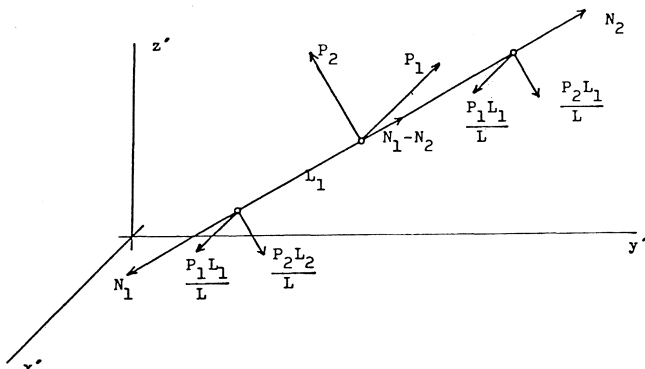
$$M_1 = \frac{P_1 L_1 L_2}{L}$$

$$M_2 = \frac{P_2 L_1 L_2}{L}$$

COMPROBACION DE RESULTADOS

Una vez resuelto el cálculo es preciso comprobar que todos los nudos están en equilibrio. Por tanto es preciso calcular las fuerzas que actúan en cada nudo en coordenadas globales.

Hemos visto que el equilibrio de cada barra era



Y en consecuencia las fuerzas que actúan en cada nudo tras proyectarlas sobre los ejes globales serán

$$x_1 = -N_1 \cos \alpha_1 - \frac{P_1 L_2}{L} \cos \alpha_2 - \frac{P_2 L_2}{L} \cos \gamma_3$$

$$y_1 = -N_1 \cos \beta_1 - \frac{P_1 L_2}{L} \cos \beta_2 - \frac{P_2 L_2}{L} \cos \gamma_3$$

$$z_1 = -N_1 \cos \gamma_1 - \frac{P_1 L_2}{L} \cos \gamma_2 - \frac{P_2 L_2}{L} \cos \gamma_3$$

$$x_2 = (N_1 - N_2) \cos \alpha_1 + P_1 \cos \alpha_2 + P_2 \cos \alpha_3$$

$$y_2 = (N_1 - N_2) \cos \beta_1 + P_1 \cos \beta_2 + P_2 \cos \beta_3$$

$$z_2 = (N_1 - N_2) \cos \gamma_1 + P_1 \cos \gamma_2 + P_2 \cos \gamma_3$$

$$x_3 = +N_2 \cos \alpha_1 - \frac{P_1 L_2}{L} \cos \alpha_2 - \frac{P_2 L_2}{L} \cos \alpha_3$$

$$y_3 = N_2 \cos \beta_1 - \frac{P_1 L_2}{L} \cos \beta_2 - \frac{P_2 L_2}{L} \cos \beta_3$$

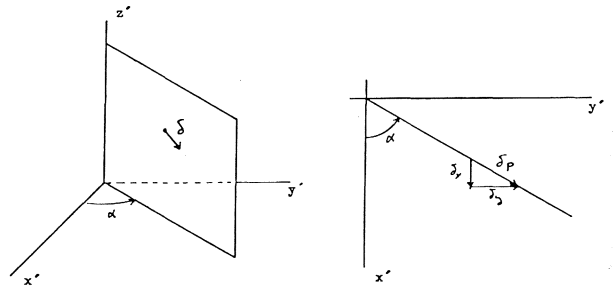
$$z_3 = N_2 \cos \gamma_1 - \frac{P_1 L_2}{L} \cos \gamma_2 - \frac{P_2 L_2}{L} \cos \gamma_3$$

Comprobando que las fuerzas totales en cada nudo, considerando la fuerza exterior y las barras que concurren en él, están en equilibrio, podremos comprobar la corrección de los cálculos efectuados.

CONDICIONES DE SIMETRIA

En general estas estructuras presentan un número relativamente importante de puntos y un ancho de banda considerable por las dificultades de su numeración. En consecuencia es importante tratar de reducir el número de elementos de las mismas, por aplicación de condiciones de simetría cuando ello sea posible.

En muchos casos la estructura tiene una simetría respecto a planos verticales que pasan por el eje z, que suponemos contiene a los puntos fijos. En estas condiciones es preciso plantear la condición de que los desplazamientos se produzcan según un plano vertical que forma un cierto ángulo con los ejes globales.



La condición será que la componente del desplazamiento, ortogonal al plano de simetría, sea nula

$$\delta x \sin \alpha - \delta y \cos \alpha = 0$$

$$\delta y = \delta x \tan \alpha$$

Al imponer esta condición la matriz de rigidez en coordenadas globales que, referida a estos desplazamientos, tiene la forma

$$\begin{vmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_x \\ \cdot \\ p_y \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{ii} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{ji} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_x \\ \cdot \\ \delta_y \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix}$$

se transforma en

$$\begin{vmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_x + p_y \cdot \text{tg} \alpha \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s'_{ii} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s'_{zi} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{ii} + s_{ij} \cdot \text{tg} \alpha + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + (s_{ij} + 2 \text{tg} \alpha s_{ji}) \text{tg} \alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -s_{ij} \text{tg} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{ji} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s'_{ni} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_x \\ \cdot \\ \delta_y \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{vmatrix}$$

siendo

$$s'_{ni} = s_{ni} + s_{nj} \cdot \text{tg} \alpha$$

$$s'_{in} = s_{in} + s_{jn} \cdot \text{tg} \alpha$$

CONSIDERACION DE LOS CABLES TENSORES

Este tipo de estructuras presenta ciertos problemas en cuanto a sus flechas, que pueden alcanzar grandes valores. Por otra parte su utilización arquitectónica exige un recubrimiento, generalmente textil, que pueda plegarse con las barras de la estructura y que quede tenso tras el desplegado. La resistencia a tracción de esta lámina textil mejora el comportamiento resistente del conjunto y disminuye las flechas, pero tiene el inconveniente de la escasa fiabilidad resistente de estas láminas textiles. Es pues preferible incorporar a dicha lámina cables de acero que trabajen como tensores.

Esta consideración introduce una complejidad nueva en el cálculo por dos razones: Es preciso formar y ensamblar las matrices de rigidez correspondiente a los cables y además hay que contemplar la posibilidad de que los cables pudiesen trabajar a compresión.

Para resolver la primera objeción es preciso calcular la matriz de rigidez correspondiente a los cables. Esto no presenta dificultades especiales puesto que es idéntica a la matriz de rigidez de las barras de mallas espaciales normales, problema ampliamente estudiado.

La matriz de rigidez en coordenadas globales es:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & -a & -b & -c \\ & d & e & & -d & -e \\ & & f & & & -f \\ \hline -a & -b & -c & a & b & c \\ & -d & -e & & d & e \\ & & -f & & & f \end{vmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} a &= \cos^2 \alpha & b &= \cos \alpha \cos \beta & c &= \cos \alpha \cos \delta \\ d &= \cos^2 \beta & e &= \cos \beta \cos \delta & f &= \cos^2 \delta \end{aligned}$$

siendo $(\cos \alpha \cos \beta \cos \delta)$ los cosenos directores de la barra.

Tras resolver el sistema de ecuaciones se puede obtener el esfuerzo axial sobre la barra en función de los corrimientos de los extremos

$$N_{ij} = \frac{EA}{L} (\cos \alpha (x_i - x_j) + \cos \beta (y_i - y_j) + \cos \gamma (z_i - z_j))$$

Para resolver la segunda objeción es preciso proceder por iteraciones, puesto que en principio no se conocen los cables que pudiesen trabajar a compresión y que en consecuencia deben ser eliminados de la estructura. Así pues en la primera iteración se supone que todos los cables trabajan a tracción y al calcular los esfuerzos se eliminan de la estructura todos los cables que trabajen a compresión. Se calcula de nuevo la estructura de la que se han eliminado dichos cables y se repite el proceso hasta que no quedan cables en compresión. Generalmente basta una iteración para conseguir este resultado.