

# GENERACION DE PERSPECTIVAS CURVILINEAS CON ORDENADOR

Por JESUS PERAITA

Profesor de la E.T.S. de Arquitectura de Madrid

## 1.—INTRODUCCION

La proyección de formas espaciales sobre superficies cilíndricas o esféricas permite obtener las llamadas «perspectivas curvilineas», caracterizadas por el hecho de que los segmentos rectos de la forma representada se transforman en segmentos curvos.

Este tipo de perspectivas ha sido, en general, muy poco estudiado. En ocasiones se han obtenido, incluso, conclusiones incorrectas.

Entre los autores que más han analizado este tema destacan Barre y Flocon (1968) que basan sus teorías en lo que denominan la «ley fundamental de la percepción visual» según la cual «la misma magnitud parece más pequeña a medida que se aleja del observador». A partir de este axioma, esencialmente correcto, y mezclando conceptos poco asimilados de percepción visual con nociones de física relativista, desarrollan una teoría con la que intentan convencernos de la legitimidad y superioridad incondicionales de la perspectiva esférica sobre la tradicional (lineal).

Otros autores, incluso de la talla de Panofsky (1924), han tocado también el tema llegando asimismo a conclusiones erróneas y sin fundamento.

Afortunadamente, Pirenne en su «Optics, Paintings and Photography» (1970) demuestra la falsedad de todos estos planteamientos. En esta obra Pirenne analiza en detalle los mecanismos perceptivos que entran en juego cuando se observa una perspectiva desde posiciones indebidas, introduciendo así el factor subjetivo en la apreciación de una representación plana del espacio tridimensional.

A pesar de todo es indudable que las perspectivas curvilineas tienen un interés elevado, en tres aspectos distintos y fundamentales:

—Como sistema de representación pueden dar una idea clara de la disposición y relación espacial mutua de los objetos en un campo muy amplio alrededor del observador. Recuerda a los objetivos de «ojo de pez» o grandes angulares de focal corta. Son más bien «sistemas de información» que de representación. Pero su utilidad es innegable.

—Las perspectivas curvilineas son un camino sencillo e intuitivo para abordar el estudio de geometrías no euclidianas más complejas, y por lo tanto más interesantes, que las obtenidas mediante transformaciones proyectivas lineales. Véase el libro «Euclidean and Non-Euclidean Geometries» de M. Greenberg (1980).

—El aspecto más importante de este tipo de perspectivas radica en sus posibilidades como estímulos para el estudio de algunos procesos de percepción visual espacial. ¿Cómo es posible que autores de la talla de Panofsky o de Barre y Flocon no hayan sabido explicar con corrección las deficiencias que, en ocasiones, se observan en las perspectivas lineales tradicionales? ¿Por qué una perspectiva esférica puede parecer aceptable, es decir «realista», en determinadas condiciones?

Pirenne (Op. cit.) nos da algunas pistas al analizar ciertos mecanismos complejos del sistema visual. Cita una conclusión muy interesante de La Gournerie (1859) según la cual «al mirar un cuadro dibujado en perspectiva (...) las deformaciones que se dan cuando el ojo está en posición equivocada se vuelven más evidentes cuando la perspectiva es correcta». Esto implicaría que

una perspectiva «continuamente incorrecta», es decir en la cual las incorrecciones no se presentan de forma localizada y aislada, admitiría más tolerancia en su observación que una perspectiva lineal perfecta. Y esas condiciones se dan en la perspectiva esférica.

Estimamos que éste es un campo de investigación con un gran futuro.

El estudioso del tema se enfrenta sin embargo con la gran dificultad de generación de perspectivas curvilineas, incluso de figuras elementales.

Para simplificar esta generación presentamos unas rutinas de ordenador que permiten obtener proyecciones tanto cilíndricas como esféricas, con una extraordinaria facilidad y precisión.

## 2.—METODO DE CALCULO

### 2.1.—Generalidades

Supondremos siempre que el centro de proyección es el punto de intersección del eje del cilindro con el plano de referencia horizontal, o el centro de la esfera, según corresponda.

Los ejes X y Z definen el plano horizontal. El sentido positivo del eje X es «hacia la derecha» y el del Z «hacia adelante». El eje Y es vertical y su sentido positivo es «hacia arriba». Las figuras 2.1.a y 2.1.b muestran la relación entre estos ejes y las superficies de proyección. El radio de ambas superficies se denominará «R».

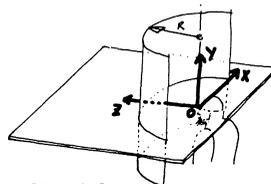


fig. 2.1.a

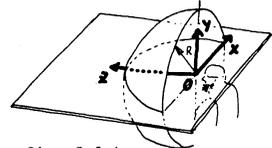


fig. 2.1.b

El cilindro se desarrollará sobre el plano tangente a lo largo de la generatriz más alejada en dirección Z. La esfera se proyectará sobre el plano XOY. Esta proyección es ortogonal. Podrían estudiarse otro tipo de proyecciones de la perspectiva esférica, pero no se presentan por no alargar esta exposición.

### 2.2.—Perspectiva de un punto

#### 2.2.1.—Proyección cilíndrica (fig. 2.2.1.a)

Se supone el cilindro desarrollado sobre el plano  $\Omega$ . El punto  $P^*$  es la proyección de  $P(X, Y, Z)$  sobre el cilindro, y los puntos  $P'$  y  $P''$  son sus proyecciones sobre el horizontal.

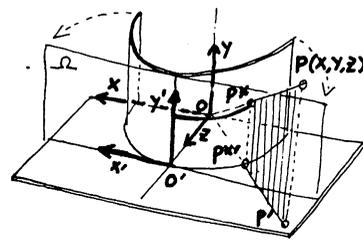


fig. 2.2.1.a

Las coordenadas de P\* en el sistema X', Y' del plano Ω una vez desarrollado el cilindro, son:

X' = Longitud del arco O', P\*

Y' = Altura P\*, P\*

y de las figuras 2.2.1.b y 2.2.1.c se deduce,

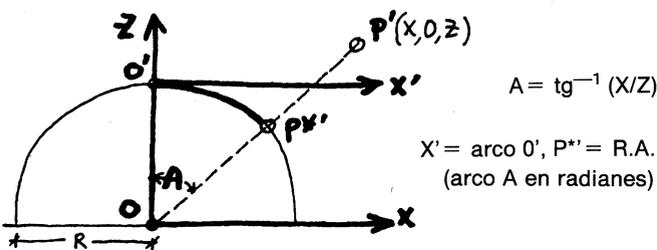


fig. 2.2.1.b

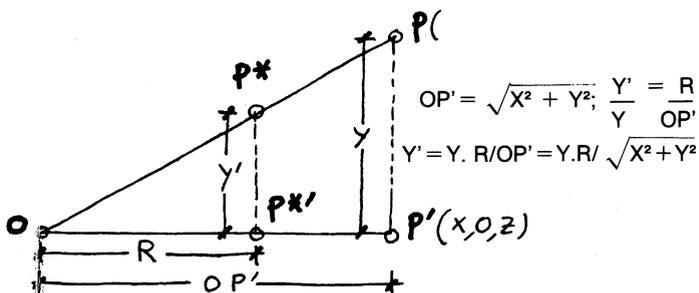


fig. 2.2.1.c

### 2.2.2.—Proyección esférica (fig. 2.2.2.)

La esfera se proyecta ortogonalmente sobre el plano XOY. Designaremos X' e Y' a las coordenadas de la proyección.

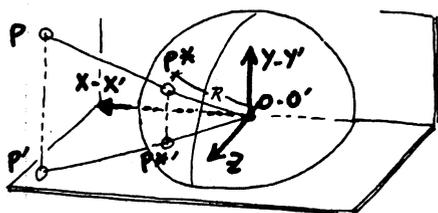


fig. 2.2.2.

Por semejanza de los triángulos OPP' y OP\*P\*\*, se tiene:

$$\frac{X'}{R} = \frac{X}{D} \text{ e } \frac{Y'}{R} = \frac{Y}{D} \text{ siendo } D = OP = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

por lo tanto

$$X' = R \cdot X / \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

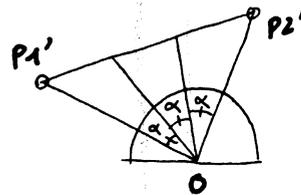
$$Y' = R \cdot Y / \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

### 2.3.—Perspectiva de un segmento P1, P2

Examinando las figuras A-2 y B-2 de los apéndices, que corresponden a proyecciones sobre un cilindro y una esfera de radio grande en relación con las dimensiones del objeto, se ve que, en el entorno de un punto de la superficie se puede tomar como válida la proyección sobre el plano tangente.

Por lo tanto, si se descompone el segmento P1, P2 en una serie de segmentos infinitesimales, las proyecciones de sus extremos se pueden unir con líneas rectas. La poligonal obtenida estará inscrita en la curva perspectiva real. Aumentando el número de divisiones se puede alcanzar tanta aproximación como se desee.

Esta división de P1, P2 puede ser arbitraria. Sin embargo, si se quiere que los lados de la poligonal perspectiva (que son proporcionales al ángulo subtendido por los extremos del segmento elemental correspondiente) tengan una longitud uniforme, habrá que procurar que esos ángulos tengan un valor constante a lo largo del segmento P1, P2.



Para lograr esta división se considera el ángulo P1', O, P2' formado por las proyecciones de P1 y P2 sobre el horizontal y el origen O (centro de proyección). Este ángulo se divide en un número entero de partes N y se calculan sucesivamente las coordenadas (X, Y, Z) de cada punto intermedio P, así como las (X\*, Y\*) de su perspectiva P\*.

Si el segmento P1, P2 está contenido en un plano visual vertical, no se puede aplicar el procedimiento anterior.

En tal caso, si se trata de proyección cilíndrica, la perspectiva de P1, P2 coincidirá con una generatriz y por lo tanto basta hallar las perspectivas de P1 y P2 y unir las con un segmento de recta.

Si se trata de proyección esférica, el segmento se divide en un número de partes iguales (10 en el programa) y se hallan las perspectivas de los puntos intermedios. Este método es susceptible de mejoras.

### 3.—PROGRAMAS Y EJEMPLOS

En el apéndice A se incluye el listado del subprograma de proyección cilíndrica y cuatro ejemplos de perspectivas obtenidas con los datos y el programa «driver» del apéndice C. En cada figura se detallan los desplazamientos globales aplicados a los datos antes de hacer la proyección.

Todos los programas están escritos en BASIC 2.0 de la Serie 200 de Hewlett - Packard, pero son fácilmente adaptables a cualquier otro lenguaje.

En los subprogramas no se realiza ninguna operación de dibujo lo que evita su dependencia de los dispositivos físicos de salida gráfica que pudieran emplearse.

Quiero agradecer a Hewlett - Packard Española su colaboración al facilitar los equipos necesarios para el desarrollo de este trabajo, y en particular a Juan Pablo Rubio (SEO HP-MAD) sus comentarios y sugerencias.

(Comunicación presentada en las «Jornadas de Expresión Gráfica Arquitectónica». La Coruña, febrero, 1984).

APENDICE A -I- : PROGRAMA

```

1010 SUB Cil_line21(X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2,Radio,Inc_angular,Mua_puntos,I_cil(),Y_cil(),Error)
1020
1030 !
1040 !
1050 !      SURPROGRAMA 'Cil_line21'
1060 !      VERSION 2.1 31/01/84
1070 !      ARCHIVO 'CILLINE21'
1080 !      AUTOR: Jesus Peraita
1090 !
1100 !
1110 !      -----
1120 !      GENERA LA PERSPECTIVA CILINDRICA DE UN SEGMENTO
1130 !      (CILINDRO DESARROLLADO)
1140 !      -----
1150 !
1160 ! FUNCION:
1170 ! -----
1180 ! Genera los vectores 'I_cil()' e 'Y_cil()' con las abscisas
1190 ! y ordenadas, respectivamente, de los puntos correspondientes
1200 ! al desarrollo de la proyeccion del segmento (X1,Y1,Z1)-
1210 ! (X2,Y2,Z2) sobre un cilindro de radio 'Radio'.
1220 ! Estas coordenadas estan en 'escala absoluta'. La rutina de
1230 ! dibujo tendra que aplicar los factores de escalado oportunos.
1240 !
1250 !
1260 ! VARIABLES:
1270 ! -----
1280 !
1290 ! -PARAMETROS DE ENTRADA:
1300 ! X1,Y1,Z1 = Coordenadas punto origen (P1)
1310 ! X2,Y2,Z2 = Coordenadas punto extremo (P2)
1320 ! Radio = Radio del cilindro de proyeccion.
1330 ! Inc_angular = Incremento angular maximo, en proyeccion
1340 ! sobre el plano horizontal (plano XOZ),
1350 ! entre puntos intermedios del segmento.
1360 ! Valor MINIMO: 1 GRADO
1370 ! Valor MAXIMO: 10 GRADOS
1380 !
1390 ! -PARAMETROS DE SALIDA:
1400 ! Mua_puntos = Numero de puntos considerados en el segmento
1410 ! (P1,P2), incluyendo los puntos P1 y P2.
1420 ! Es tambien el NUMERO DE ELEMENTOS de los
1430 ! vectores I_cil() e Y_cil()
1440 ! Valor MINIMO: 2
1450 ! Valor MAXIMO: 100
1460 ! I_cil() = Vector con las abscisas de los 'Mua_puntos'
1470 ! puntos perspecticos del segmento (P1,P2),
1480 ! incluyendo X1 en primer lugar y X2 en ultimo
1490 ! lugar.
1500 ! Y_cil() = Igual que 'I_cil()', con las ordenadas.
1510 ! Error =Codigo de error en el subprograma:
1520 ! 0 -> NO HAY ERROR
1530 ! 1 -> RADIO INCORRECTO
1540 ! 2 -> INCREMENTO ANGULAR INCORRECTO
1550 ! 3 -> NUMERO DE PUNTOS INCORRECTO
1560 !
1570 !
1580 ! VARIABLES INTERMAS:
1590 ! -----
1600 !
1610 ! Long_arco = Longitud del desarrollo de la seccion recta
1620 ! del cilindro para un angulo unidad.
1630 ! Long_proy1 = Longitud del radio vector (O,P1').
1640 ! Long_proy2 = Longitud del radio vector (O,P2').
1650 ! Long_segmet = Longitud de (P1,P2).
1660 ! Ang_proyec = Angulo (P1',O,P2') formado por el origen
1670 ! y las proyecciones de P1 y P2 sobre el
1680 ! plano horizontal.
1690 ! Denom = Denominador en la formula del coseno de
1700 ! 'Angulo_p1'. Es cero si el segmento esta
1710 ! contenido en un plano visual vertical.
1720 ! Angulo_p1 = Angulo (O,P1',P2') formado por el radio
1730 ! vector (O,P1') y la proyeccion (P1',P2') del
1740 ! segmento.
1750 ! Mua_interval = Numero de intervalos angulares (de valor
1760 ! maximo 'Inc_angular') en 'Ang_proyec'.
1770 ! Inc_ang_real = Incremento angular real.
1780 ! X_delta = Diferencia de abscisas entre dos puntos
1790 ! del segmento a distancia unidad (3D).
1800 ! Y_delta = Idem. para coordenada Y.
1810 ! Z_delta = Idem. para coordenada Z.
1820 ! Punto = Contador del bucle de proceso.
1830 ! Valor INICIAL: 1
1840 ! Valor FINAL : Mua_puntos
1850 ! Angulo = Angulo subtendido por el eje OZ y la proyec-
1860 ! cion horizontal del punto considerado (P).
1870 ! I_actual = Coordenada X del punto considerado (P).
1880 ! Y_actual = Coordenada Y del punto considerado (P).
1890 ! Z_actoal = Coordenada Z del punto considerado (P).
1900 ! Ang_actual = Angulo formado por el radio vector (O,P1') y

```

PROYECCION CILINDRICA

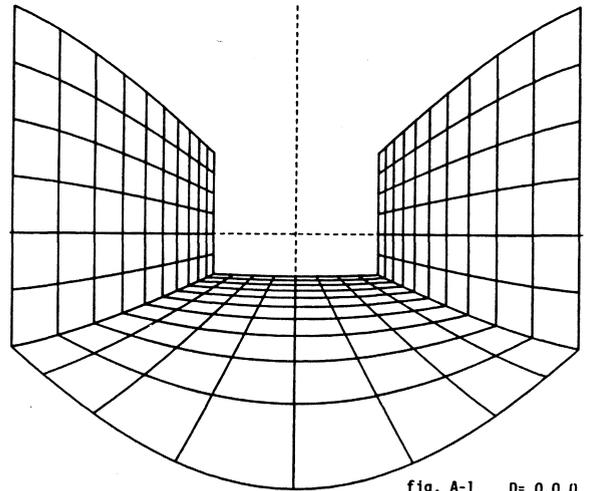


fig. A-1 D= 0,0,0

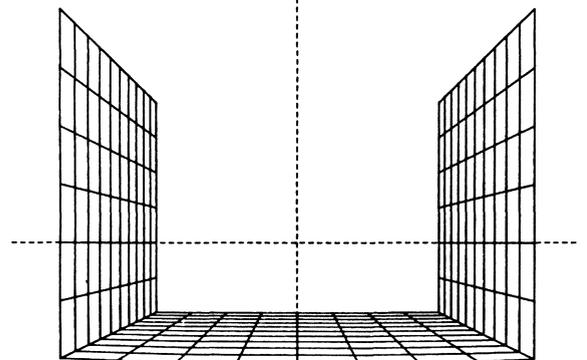


fig. A-2 D= 0,0,300  
ESCALA x 3.33

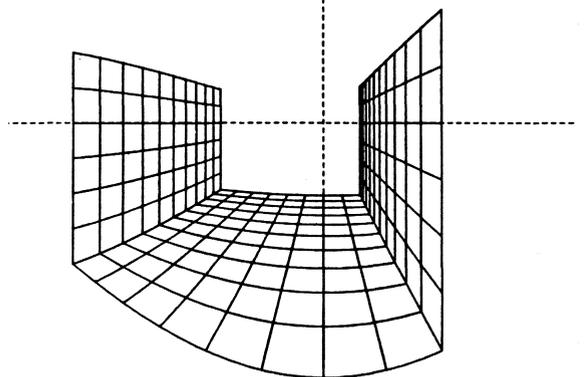


fig. A-3 D= -50,-50,50

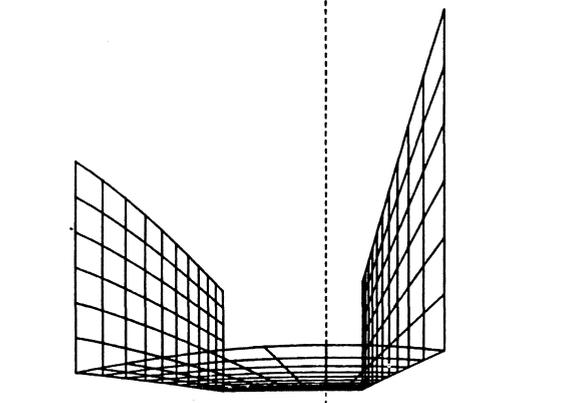


fig. A-4 D= -50,25,50

```

1910 ! el (0,P').
1920 ! Long_actual = Longitud (P1,P) del subsegmento considerado.
1930 !
1940 !
1950 ! *****
1960 !
1970 OPTION BASE 1
1980 !
1990 ! INICIALIZA
2000 ! -----
2010 !
2020 DEG
2030 Error=0
2040 Num_puntos=0
2050 MAT X_cil= (0)
2060 MAT Y_cil= (0)
2070 !
2080 ! COMPRUEBA RADIO DEL CILINDRO
2090 ! -----
2100 !
2110 IF Radio<=0 THEN
2120 Error=1 ! RADIO DEL CILINDRO INCORRECTO
2130 GOTO Final
2140 !
2150 END IF
2160 !
2170 ! COMPRUEBA INCREMENTO ANGULAR
2180 ! -----
2190 !
2200 IF Inc_angular<1 OR Inc_angular>10 THEN
2210 Error=2 ! INCREMENTO ANGULAR INCORRECTO
2220 GOTO Final
2230 !
2240 END IF
2250 !
2260 ! CALCULA CONSTANTES DEL SEGMENTO Y ANGULOS
2270 ! -----
2280 !
2290 Long_arco=Radio*P1/180
2300 Long_proy1=SQRT(X1^2+Z1^2)
2310 Long_proy2=SQRT(X2^2+Z2^2)
2320 Long_segment=SQRT((X2-X1)^2+(Y2-Y1)^2+(Z2-Z1)^2)
2330 Ang_proyec=ACS(DROUND((Z1*Z2+X1*X2)/(Long_proy1*Long_proy2),10))
2340 Denom=DROUND(SQRT((Z2-Z1)^2+(X2-X1)^2)*Long_proy1,10)
2350 !
2360 IF Denom<>0 THEN
2370 Angulo_p1=180-ACS(DROUND((Z1*(Z2-Z1)+X1*(X2-X1))/Denom,10)) ! SEGMENTO INCLINADO
2380 ELSE
2390 Angulo_p1=0 ! SEGMENTO EN PLANO VISUAL VERTICAL
2400 END IF
2410 !
2420 !
2430 Num_interval=INT(Ang_proyec/Inc_angular+1)
2440 Num_puntos=Num_interval+1
2450 Inc_ang_real=Ang_proyec/Num_interval
2460 !
2470 X_delta=(X2-X1)/Long_segment
2480 Y_delta=(Y2-Y1)/Long_segment
2490 Z_delta=(Z2-Z1)/Long_segment
2500 !
2510 X_actual=X1 ! SE EMPIEZA CON EL PUNTO 'P1'
2520 Y_actual=Y1
2530 Z_actual=Z1
2540 Ang_actual=0
2550 !
2560 !
2570 ! BUCLE DE CALCULO
2580 ! -----
2590 !
2600 FOR Punto=1 TO Num_puntos
2610 !
2620 Angulo=ATN(X_actual/Z_actual)
2630 !
2640 X_cil(Punto)=Long_arco*Angulo
2650 Y_cil(Punto)=Y_actual*Radio/SQRT(X_actual^2+Z_actual^2)
2660 !
2670 IF Num_puntos<>2 THEN ! SEGMENTO VERTICAL ?
2680 Ang_actual=Ang_actual+Inc_ang_real ! NO VERTICAL
2690 Long_actual=Long_proy1*SIN(Ang_actual)/SIN(180-(Angulo_p1+Ang_actual))
2700 !
2710 X_actual=X1+X_delta*Long_actual
2720 Y_actual=Y1+Y_delta*Long_actual
2730 Z_actual=Z1+Z_delta*Long_actual
2740 ELSE ! SI VERTICAL
2750 X_actual=X2 ! EXTREMO DE SEGMENTO VERTICAL
2760 Y_actual=Y2
2770 Z_actual=Z2
2780 END IF
2790 !
2800 NEXT Punto
2810 !
2820 Final:
2830 SUREND

```

## PROYECCION ESFERICA

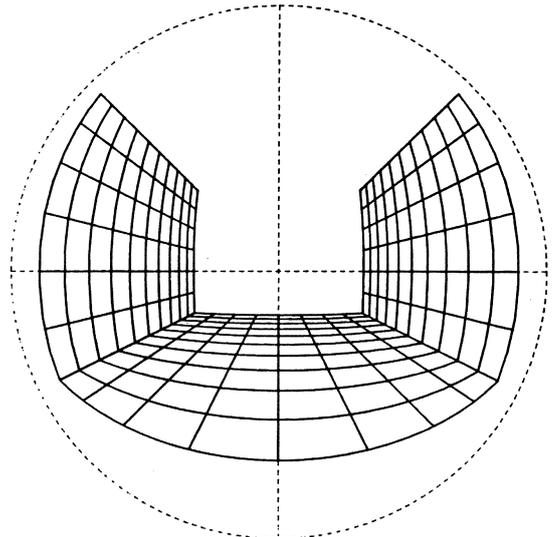


fig. B-1 D= 0,0,0

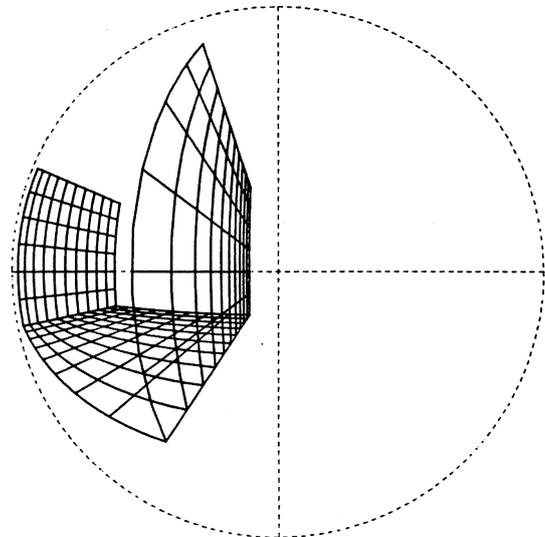


fig. B-3 D= -135,0,0

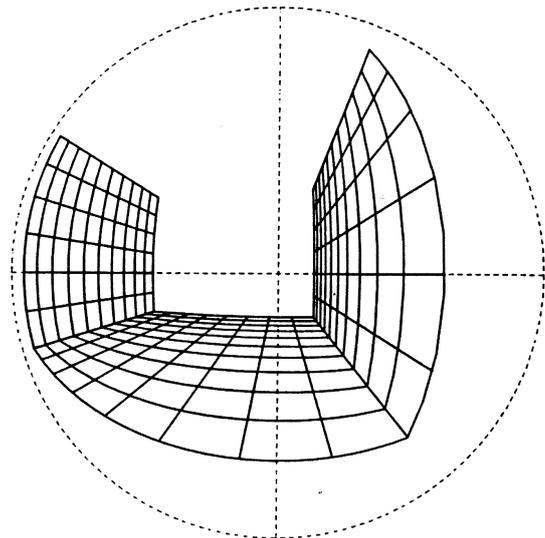


fig. B-4 D= -60,0,0