

UNA NUEVA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS PARA LA OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA DE ESTRUCTURAS BASADA EN LA MINIMIZACIÓN DEL PESO CON RESTRICCIONES EN TENSIÓN

J. París*, F. Navarrina, I. Colominas y M. Casteleiro

Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería
Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
E.T.S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
Universidade da Coruña
Campus de Elviña 15192 A Coruña
e-mail: jparis, fnavarrina, icolominas, casteleiro@udc.es
web: <http://www.caminos.udc.es/gmni>

Palabras clave: Optimización Topológica, Método Elementos Finitos, Minimización del Peso, Restricciones en tensión

Resumen. *En este artículo se presenta una nueva formulación de Elementos Finitos para la Optimización Topológica de Estructuras. Los modelos tradicionalmente propuestos hasta el momento se basan en optimizar la distribución de una cierta cantidad de material de modo que la energía de deformación resultante sea mínima, es decir, se maximiza la rigidez de la estructura dada una cierta cantidad de material. En estas metodologías la formulación matemática es, en general, más sencilla que la propuesta en este artículo, aunque la solución puede perder su sentido físico (ya que no se comprueban las tensiones existentes en el material) e incluso puede no obtenerse la solución estructural de mínimo peso. El nuevo modelo que se presenta pretende obtener una solución más realista que minimice el peso de la estructura teniendo en cuenta que no se pueden superar las tensiones máximas que soportan los materiales empleados. Este modelo introduce, por tanto, muchas restricciones altamente no-lineales en tensiones que lo hacen más complejo desde un punto de vista matemático pero, por el contrario, no requiere de técnicas de estabilización de la solución ya que las restricciones se establecen en todos los elementos. El modelo es, en general, válido para cualquier modelo estructural formulado mediante el Método de Elementos Finitos. Como aplicación, se incluyen algunos ejemplos resueltos con la nueva formulación desarrollada.*

1 INTRODUCCIÓN

Desde que Bendsøe y Kikuchi [2] propusieron en 1988 las bases de la optimización topológica de estructuras se han llevado a cabo numerosas investigaciones en esta materia. Sin em-

bargo, prácticamente desde el inicio de estos estudios se ha planteado la obtención de estructuras óptimas con pocas restricciones y con una función objetivo más compleja por la mayor facilidad de resolución. El problema planteado de esta forma consiste, generalmente, en hallar la distribución óptima de un volumen de material fijado de modo que se maximice la rigidez global de la estructura. Este volumen inicial se establece como un porcentaje sobre el volumen máximo que puede contener la estructura. De este modo se tiene una única restricción que además es lineal y una función objetivo no lineal y compleja.

El modelo más usado para resolver este tipo de problema de optimización topológica es el denominado, en terminología anglosajona, SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalty*). En este modelo se asigna a cada elemento de la malla de Elementos Finitos una densidad relativa del material que forma dicho elemento. Esta densidad relativa varia, por tanto, entre 0 y 1 (vacío y lleno) y es constante para cada elemento de la malla. Estas densidades relativas de la malla serán las variables de diseño del problema de optimización y el volumen será la restricción.

Esta formulación del problema en máxima rigidez tiene grandes ventajas desde el punto de vista del cálculo pero, por el contrario, tiene también desventajas considerables. En general, este método está mal condicionado porque depende del grado de refinamiento de la malla (*mesh dependency*) y además es necesario disponer de técnicas de filtrado y suavizado para evitar que se produzcan disposiciones en damero. Además de estas técnicas también se suelen aplicar penalizaciones sobre las densidades intermedias en los elementos para obtener soluciones vacío-lleno o muy similares a éstas. Esto provoca que las soluciones obtenidas con estos planteamientos sean, generalmente, muy similares a estructuras de barras.

Por otra parte, desde el punto de vista de la optimización, estos planteamientos no son habituales en otras ramas de esta disciplina, como son la optimización estructural de formas o de dimensiones, porque carecen del sentido físico e ingenieril de que constan los planteamientos con restricciones en tensión o en movimientos. Además en estos planteamientos la función objetivo suele ser el peso de la estructura, que puede relacionarse directamente con el coste de la misma. Por tanto, la función objetivo en este caso también representa un factor muy importante desde el punto de vista de la ingeniería. Por todo ello presentamos una nueva formulación del problema de optimización topológica de estructuras basado en la minimización del peso y con restricciones en tensión de tipo local (MPRT).

2 ANÁLISIS DEL PROBLEMA

2.1 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Sea Ω^o un dominio en el espacio material originalmente ocupado por una estructura deformable. Bajo el efecto de unas cargas externas conocidas, la estructura se deforma y ocupa un dominio diferente Ω . Entonces, cada punto P^o en Ω^o se traslada a una nueva

posición P en el dominio Ω . Sean también \mathbf{r}^o y \mathbf{r} los vectores de coordenadas de los puntos P^o y P , respectivamente. El problema consiste en obtener los desplazamientos

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}^o) = \mathbf{r}(\mathbf{r}^o) - \mathbf{r}^o, \quad (1)$$

que son las claves para obtener tanto las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}^o)$ como las tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}^o)$. En elasticidad lineal y bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones, las expresiones correspondientes son

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2)$$

Sean las cargas externas $\mathbf{b}(\mathbf{r}^o)$ por unidad de volumen (de la estructura) en el dominio Ω^o , y $\mathbf{t}(\mathbf{r}^o)$ por unidad de área en la superficie Γ_σ^o . En estas condiciones, el problema estructural puede reescribirse como

$$\begin{aligned} & \text{Hallar } \mathbf{u} \in H_u \\ & \text{tal que } a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_\sigma^o} \quad \forall \mathbf{w} \in H_w \\ & \text{donde } a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \iiint_{\Omega^o} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \, d\Omega, \\ & (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} = \iiint_{\Omega^o} \mathbf{w}^T \mathbf{b} \, d\Omega, \quad (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_\sigma^o} = \iint_{\Gamma_\sigma^o} \mathbf{w}^T \mathbf{t} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

donde las funciones de prueba \mathbf{u} y las funciones de test \mathbf{w} se definen de forma que cumplan las condiciones de contorno esenciales (desplazamientos prescritos) y sus correspondientes condiciones de contorno homogéneas, respetivamente.

2.2 MODELO NUMÉRICO DE ELEMENTOS FINITOS

De forma general, no será posible obtener la solución exacta al problema planteado. Por ello, es necesario aproximar la solución a través de un planteamiento finito en los vértices de una malla previamente definida que represente de la forma más aproximada el espacio Ω_o .

Así, reemplazaremos los espacios de funciones H_u y H_w por sus respectivos subespacios de dimensión finita H_u^h y H_w^h . Sean, por tanto, \mathbf{u}^h y \mathbf{w}^h las funciones de prueba y de test discretizadas en los subespacios mencionados. Sea \mathbf{u}^p una función de prueba que satisface las condiciones de contorno esenciales. Sean también $\{\phi_i(\mathbf{r}^o)\}$ y $\{w_j(\mathbf{r}^o)\}$ dos bases convenientemente seleccionadas de los subespacios discretizados correspondientes a las funciones de prueba y de test H_u^h y H_w^h . Dichas bases verificarán las condiciones de contorno homogéneas del problema. Una vez realizadas estas modificaciones podemos reescribir el problema como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o) &= \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i, & \Phi_i(\mathbf{r}^o) &= \phi_i(\mathbf{r}^o) \mathbf{I}_3, \\ \mathbf{w}^h(\mathbf{r}^o) &= \sum_{j=1}^N \mathbf{W}_j(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\beta}_j, & \mathbf{W}_j(\mathbf{r}^o) &= w_j(\mathbf{r}^o) \mathbf{I}_3. \end{aligned} \quad (4)$$

En una formulación de Elementos Finitos como la empleada en este caso, la incógnita principal es el vector de movimientos α_i del punto i . Incluso la discretización del dominio Ω^o se realiza en base a estos mismos puntos

$$\Omega^o = \bigcup_{e=1}^{nelem} \mathbf{E}_e, \quad E_{e_1} \cap E_{e_2} = \emptyset \quad \forall e_1 \neq e_2, \quad (5)$$

siendo E_e los Elementos Finitos. Por otra parte, en mecánica de medios continuos es muy habitual emplear formulaciones de tipo Galerkin, tomando la misma base para definir las funciones de prueba y las funciones de test, esto es,

$$w_j(\mathbf{r}^o) = \phi_j(\mathbf{r}^o). \quad (6)$$

Aplicando esta formulación el problema inicial puede escribirse como

$$\begin{aligned} \text{Hallar } \boldsymbol{\alpha} &= \{\boldsymbol{\alpha}_i\}, \quad i = 1, \dots, N \\ \text{tal que } \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{ji} \boldsymbol{\alpha}_i &= \mathbf{f}_j, \quad j = 1, \dots, N \\ \text{donde } \mathbf{K}_{ji} &= a(\boldsymbol{\Phi}_j, \boldsymbol{\Phi}_i), \\ \mathbf{f}_j &= (\boldsymbol{\Phi}_j, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\boldsymbol{\Phi}_j, \mathbf{t})_{\Gamma_g} - a(\boldsymbol{\Phi}_j, \mathbf{u}^p). \end{aligned} \quad (7)$$

Los cálculos que son necesarios para obtener la solución del problema pueden ejecutarse de forma individual para cada elemento de la malla, con lo que el problema se simplifica de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji} &= \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}_{ji}^e, \\ \mathbf{f}_j &= \iint_{\Gamma_g^o} \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}_j^e, \end{aligned} \quad (8)$$

siendo las contribuciones de cada elemento

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}^e &= \iiint_{E_e} (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_i) \, d\Omega, \\ \mathbf{f}_j^e &= \iiint_{E_e} (\boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{b} - (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^p)) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Una vez hallada la solución $\boldsymbol{\alpha}$ al problema (7), se pueden calcular los valores aproximados de cualquier punto $\mathbf{r}^o \in \Omega^o$

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Phi}_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o) = \mathbf{L}\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o), \quad \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o). \quad (11)$$

3 FORMULACIÓN MPRT

3.1 ANÁLISIS ESTRUCTURAL CON DENSIDAD RELATIVA

La formulación se plantea de forma similar al problema sin densidad relativa y se comparan los resultados obtenidos en ambos casos. Por tanto, sea Ω^o el dominio ocupado por un material poroso. Sea también $\rho(\mathbf{r}^o)$ la densidad relativa del material (complementaria de la porosidad) en un punto \mathbf{P}^o de coordenadas \mathbf{r}^o .

Para una distribución de material dada, definida por el vector de densidades relativas $\rho(\mathbf{r}^o)$, habrá que calcular los movimientos (1) y, a partir de éstos, las deformaciones y tensiones asociadas a los mismos (2).

Asumiremos de nuevo la hipótesis de pequeños movimientos y pequeñas deformaciones. Sea $d\Omega$ el volumen de una región infinitesimal en el entorno de un punto P^o . Por definición, el volumen ocupado por el material poroso en esa región será $\rho(\mathbf{r}^o)d\Omega$. Ahora el problema (3) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 & \text{Dado} \quad \rho(\Omega^o) \\
 & \text{hallar} \quad \mathbf{u} \in H_u \\
 & \text{tal que} \quad a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_g^o} \quad \forall \mathbf{w} \in H_w \\
 & \text{donde} \quad a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \iiint_{\Omega^o} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \rho \, d\Omega, \\
 & \quad (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} = \iiint_{\Omega^o} \mathbf{w}^T \mathbf{b} \rho \, d\Omega, \quad (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_g^o} = \iint_{\Gamma_g^o} \mathbf{w}^T \mathbf{t} \, d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Obsérvese que, en comparación con el planteamiento original (3), las modificaciones se reducen a una simple incorporación de la porosidad en el cálculo de las integrales involucradas. En realidad, una vez que se han calculado los movimientos reales de la estructura, las tensiones y deformaciones se calculan de forma idéntica a como se realizan en el problema original, independientemente de la densidad relativa del material en cada punto. Como excepción hay que tener en cuenta que una densidad relativa nula hace que los movimientos carezcan de sentido dado que no existiría material en esta situación y, consecuentemente, tampoco se podría hablar de deformaciones ni de tensiones.

El cálculo de las tensiones, sin embargo, sí que reporta una mayor complejidad. Si se realiza el cálculo de forma directa se obtienen unos valores de tensión incorrectos dado que estos valores son promediados entre la parte porosa y la parte sólida. Sin embargo, las tensión real que soporta el material no es la promediada sino la efectiva que afecta sólo a la parte no porosa. Por lo tanto, si se pretenden analizar las tensiones en un subdominio finito hay que tener en cuenta que las tensiones reales son las efectivas, las que realmente soporta el material.

3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS CON DENSIDAD RELATIVA

Sea ρ_e la densidad relativa del elemento número e . Dicha densidad relativa se toma como constante para ese elemento. Sea ahora $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_e\}$ ($e = 1, \dots, n_{elem}$) el vector de

densidades relativas de los elementos de la malla. Como ya se ha comentado anteriormente las densidades relativas constituyen el conjunto de variables de diseño del problema de optimización. Para una densidad $\boldsymbol{\rho}$ dada, el cálculo a realizar es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Hallar } \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho}) \\ & \text{tal que } \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{ji}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_j(\boldsymbol{\rho}), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (13)$$

Nótese que los cálculos que es necesario efectuar pueden realizarse de forma independiente para cada elemento; por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}_{ji}^e(\rho_e), \\ \mathbf{f}_j(\boldsymbol{\rho}) &= \iint_{\Gamma_j^o} \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}_j^e(\rho_e), \end{aligned} \quad (14)$$

siendo las contribuciones elementales

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}^e(\rho_e) &= \iiint_{E_e} (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_i) \rho_e \, d\Omega, \\ \mathbf{f}_j^e(\rho_e) &= \iiint_{E_e} (\boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{b} - (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^p)) \rho_e \, d\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Una vez hallada la solución $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ del problema (13) puede calcularse la solución aproximada para cualquier punto $\mathbf{r}^o \in \Omega^o$

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Phi}_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\rho}), \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{L}\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}). \quad (17)$$

Si se compara el problema con densidad relativa (16) y (17) y el problema formulado sin densidad relativa (10) y (11) puede observarse que el cálculo de movimientos, deformaciones y tensiones se realiza de la forma habitual haciendo pequeños cambios.

Por esto si se pretende adaptar una formulación de elementos finitos ya existente para introducirla en un modelo de optimización basta con hacer pequeñas modificaciones en el cálculo de las contribuciones elementales teniendo en cuenta la densidad relativa de los mismos a la hora de realizar las integrales correspondientes.

La adaptación es aún más sencilla si, como es habitual, se asume que la densidad relativa es constante para cada elemento ya que sólo habrá que multiplicar los resultados de la integración en cada elemento por el valor de la densidad correspondiente. Además, el análisis convencional por elementos finitos sin tener en cuenta la porosidad (16) proporciona gran parte de los cálculos necesarios para hallar las derivadas de primer orden con respecto a

las variables de diseño. Las derivadas de segundo orden y superiores de estos términos son en consecuencia nulas para esta formulación. Si se establece algún tipo de penalización sobre las densidades intermedias ésto ya no será cierto. Tanto las derivadas de primer orden como las de segundo se emplearán en el modelo de optimización propuesto.

3.3 RESTRICCIONES EN TENSIÓN

Los valores de tensión $\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho})$ calculados mediante (16) y (17) son aproximaciones numéricas del tensor de tensiones real del material. Entonces la imposición de restricciones locales de tipo tensional puede plantearse como

$$\begin{aligned} g_j(\boldsymbol{\rho}) &= \hat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) - \hat{\sigma}_{max} \leq 0, \quad o \\ g_j(\boldsymbol{\rho}) &= \hat{\sigma}_{min} - \hat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) \leq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\hat{\sigma}_{max}$ y $\hat{\sigma}_{min}$ son los correspondientes límites superior e inferior. Si el material es poroso, como ocurre en este caso, el planteamiento anterior puede generalizarse sin más que multiplicar las expresiones anteriores por la densidad correspondiente de cada elemento.

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\rho}) &= [\hat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) - \hat{\sigma}_{max}] \rho(\mathbf{r}_j^o) \leq 0, \quad o \\ g(\boldsymbol{\rho}) &= [\hat{\sigma}_{min} - \hat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho}))] \rho(\mathbf{r}_j^o) \leq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

4 IMPLEMENTACIÓN DE LA FORMULACIÓN

Como ya se ha comentado anteriormente la adaptación de un programa de cálculo por el Método de los Elementos Finitos para la optimización topológica es muy sencilla a partir de una formulación convencional del método. Basta con hacer pequeñas modificaciones en el cálculo de las integrales a nivel elemental tanto de la matriz de rigidez como de las cargas por unidad de volumen aplicadas (normalmente el peso). Puede apreciarse en (15) que la única modificación a realizar es el producto del volumen de integración por su correspondiente valor de densidad relativa ρ_e

$$d\Omega_e(\rho_e) = \rho_e d\Omega_e^0 \quad (20)$$

que además es constante para cada elemento.

Una vez realizadas estas modificaciones los cálculos a realizar son los mismos que para el problema sin densidad relativa ((7),(8),(9))

4.1 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad para este problema se realiza por el método de la diferenciación directa a partir de la formulación general del Método de los Elementos Finitos

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (21)$$

donde \mathbf{u} es el vector de movimientos de los puntos de la malla, \mathbf{f} es el vector de cargas aplicadas y \mathbf{r} es el vector de reacciones que se producen para los grados de libertad coaccionados.

El objetivo del análisis de sensibilidad será el cálculo de las derivadas de las restricciones y de la función objetivo con respecto a las variables de diseño necesarias para el método de optimización que aplicaremos para resolver el problema. Para ello necesitamos, como paso previo, conocer las derivadas de los movimientos de la estructura con respecto a las variables de diseño. A partir de éstas ya podremos calcular las derivadas de las restricciones que necesitamos.

$$\frac{\partial(\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u})}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho_e} \quad (22)$$

Y realizando las operaciones oportunas, se obtiene

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} = -\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_e} + \frac{\mathbf{r}}{\partial \rho_e} \quad (23)$$

Obsérvese que el problema de resolver ahora el sistema de ecuaciones resultante es muy similar al del planteamiento inicial (20). La única diferencia es que en lugar de resolver un único problema habrá que resolver tantos problemas como variables de diseño tengamos dado que se calculan las derivadas con respecto a todas estas variables. Además la matriz del sistema una vez ensamblada es la misma que para la resolución de la estructura. Por ello es aconsejable utilizar un método de resolución de sistemas lineales como la factorización de Cholesky que permita almacenar la matriz factorizada evitando así repetir cálculos innecesariamente y calcularla sólo una vez para todo el proceso. Además para calcular derivadas de órdenes superiores el procedimiento será similar y habrá que resolver sistemas de ecuaciones similares.

El cálculo de las derivadas de las tensiones con respecto a las variables de diseño puede realizarse ahora a partir de (17) del siguiente modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_e} &= \frac{\partial(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \rho_e} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_e} &= \frac{\partial(\mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \rho_e} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_e} &= \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} - \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_e} \end{aligned} \quad (24)$$

El valor de la derivada de los movimientos con respecto a las variables de diseño se obtiene de (23). Los valores de $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ y $\boldsymbol{\sigma}_0$ corresponden a las deformaciones y tensiones iniciales que puede tener el material debido fundamentalmente a variaciones de temperatura. Normalmente, no tendremos en cuenta estos factores porque no estudiaremos los efectos térmicos. Una vez calculadas las derivadas de primer orden procedemos a calcular las derivadas de segundo orden. Este cálculo se realizará de forma direccional porque el cálculo de

forma general es prácticamente inabordable debido a la elevadísima capacidad de almacenamiento de datos y al tiempo de cálculo necesario.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s_i \partial s_j} = & - \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial s_i \partial s_j} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial s_i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_j} - \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial s_j} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} \\ & + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial s_i \partial s_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s_i \partial s_j} \end{aligned} \quad (25)$$

donde s_i y s_j son dos direcciones cualesquiera de modificación del diseño.

En este caso, una vez obtenida la dirección de avance hacia el óptimo se podrán calcular las derivadas de segundo orden. Además, podremos eliminar algunos los términos dado que son nulos:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s_i \partial s_j} = - \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial s_i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_j} - \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial s_j} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} \quad (26)$$

De modo similar se obtienen las derivadas de segundo orden de las restricciones a partir de (24), despreciando ya las posibles deformaciones o tensiones iniciales.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}}{\partial s_i \partial s_j} = \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s_i \partial s_j} \quad (27)$$

Por otra parte, la derivada de la función objetivo con respecto a las variables de diseño se obtiene de forma casi inmediata. Como el peso de cada elemento depende directamente de la densidad relativa del mismo, su derivada se puede hallar de forma sencilla.

Además con este método se pueden obtener todos los términos a nivel elemental y de forma independiente y ensamblarlos a medida que se van calculando hasta obtener el sistema de ecuaciones completo que habrá que resolver. Esto hace que sea aconsejable realizar tanto los cálculos para el análisis de sensibilidad como para los de resolución del problema estructural de forma conjunta evitando así repetir cálculos innecesariamente.

4.2 PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

El problema de optimización puede formularse de forma general

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \text{Coste}(\boldsymbol{\rho}) \\ & \text{sujeto a:} && \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\sigma}_i) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N_{rest} \\ & && 0 < \rho_{min} \leq \rho_i \leq 1, \\ & && \rho_{min} = 0.001 \quad (\text{normalmente}) \\ & \text{sabiendo que} && \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{r} \end{aligned} \quad (28)$$

En el problema de optimización establecemos una función objetivo de la forma

$$\text{Coste} = \sum_{i=1}^{N_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho_e)^{1/q} d\Omega \quad (29)$$

donde q es el factor de penalización de las densidades intermedias [14]. Si no se quieren penalizar estas densidades intermedias se tomará $q = 1$ y entonces la función objetivo a minimizar será el peso de la estructura.

Por otra parte, las restricciones se pueden plantear de diversas formas dependiendo del tipo de problema. En este caso, hemos planteado una restricción en tensión en el centro de cada elemento. La tensión de comparación empleada es la de Von Mises suponiendo que el material de la estructura es el acero, aunque podrían aplicarse otros criterios de comparación para distintos tipos de materiales. Por ejemplo, el criterio de Raghava o el criterio de Ishai podría emplearse para materiales con distinto límite tensional a compresión y a tracción [11].

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma^I - \sigma^{II})^2 + (\sigma^{II} - \sigma^{III})^2 + (\sigma^{III} - \sigma^I)^2]} \quad (30)$$

Además según se indica en la Norma NBE EA-95 [12] también se deben cumplir las siguientes restricciones

$$\sigma_{vm} - \sigma_e \leq 0, \quad \sigma^I - 2\sigma_e \leq 0 \quad \text{y} \quad -2\sigma_e - \sigma^{III} \leq 0, \quad (31)$$

4.3 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

El método utilizado para resolver el problema de optimización es el desarrollado en [1]. En este método se utiliza un algoritmo de Programación Lineal Secuencial (PLS) para obtener una dirección de avance hacia el óptimo con aproximación lineal. Si el problema fuera lineal bastaría con aplicar el método una sola vez pero como el problema es no lineal tenemos que aproximarnos a la solución óptima de forma iterativa resolviendo problemas linealizados. Para cada dirección de avance se calcula, mediante un algoritmo con aproximación cuadrática, el factor de avance y se actualiza el problema con las nuevas variables de diseño para proceder a repetir el proceso hasta que se encuentre el óptimo.

$$\begin{aligned} \text{Dado} \quad & \boldsymbol{\rho}^k \\ \text{obtener} \quad & \boldsymbol{\rho}^{k+1} = \boldsymbol{\rho}^k + \theta^k \mathbf{s}^k \end{aligned} \quad (32)$$

La función objetivo y las restricciones se linealizan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^k + \mathbf{t}^k) &\approx \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^k) + \nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^k) \mathbf{t}^k \\ \mathbf{G}_j(\boldsymbol{\rho}^k + \mathbf{t}^k) &\approx \mathbf{G}_j(\boldsymbol{\rho}^k) + \nabla \mathbf{G}_j(\boldsymbol{\rho}^k) \mathbf{t}^k \leq 0 \\ &j = 1, \dots, n_{rest} \end{aligned} \quad (33)$$

La dirección de modificación del diseño \mathbf{t}^k puede descomponerse como en (32) en un vector unitario \mathbf{s}^k y un factor de multiplicación θ^k

$$\mathbf{t}^k = \theta^k \mathbf{s}^k \quad (34)$$

El cálculo de la dirección de avance \mathbf{s} se lleva a cabo a través de tres métodos distintos dependiendo de la situación inicial de la que se parte. Así, si en el problema inicial no existen restricciones violadas tenemos un problema de minimización no restringida y la dirección de avance más apropiada es aquella que produzca el máximo descenso en la función objetivo. Ante esta situación se usa, por tanto, como dirección de avance la obtenida por el opuesto al gradiente de la función objetivo.

$$\mathbf{s}_i^k = -\frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \rho_i^k} \quad \text{si} \quad \rho_{min} < \rho_i^k < 1 \quad (35)$$

Por otra parte siempre hay que tener en cuenta que no se pueden incumplir las restricciones laterales (densidad relativa máxima y mínima) en ninguno de los métodos propuestos

$$\mathbf{s}_i^k = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \rho_i = \rho_{min} & \text{y} & \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \rho_i^k} > 0 \\ \rho_i = 1 & \text{y} & \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \rho_i^k} < 0 \end{cases} \quad (36)$$

Por el contrario, si existe algún punto en el que se superen las máximas tensiones permitidas será necesario calcular una dirección que evite esas restricciones y obtener una solución que, aunque no sea mejor que la anterior, sea válida.

$$\mathbf{s}_i^k = \sum_{j=1}^{Nrv} \mathbf{g}_j^k \frac{\partial \sigma_j(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \rho_i^k} \quad \text{si} \quad \rho_{min} < \rho_i^k < 1 \quad (37)$$

donde Nrv indica el número de restricciones violadas y $\mathbf{g}_j^k = \boldsymbol{\sigma}_j^k(\boldsymbol{\rho}^k) - \sigma_j^{max}$.

El problema planteado de esta forma tiene una convergencia muy lenta debido a que se produce el fenómeno de zig-zag. Una vez que la solución se aproxima al óptimo una dirección de avance según el gradiente hace que se viole alguna restricción y, por tanto, será necesario aplicar, en la siguiente iteración, el algoritmo de entrada hacia la región de diseño volviendo a un punto que se aleja del óptimo.

Por ello, es necesario efectuar unas relajaciones sobre las restricciones que permitan aplicar un algoritmo de optimización más efectivo cuando hay restricciones violadas pero no demasiado. Estas relajaciones se establecen definiendo un intervalo en el cual una restricción está activa pero no violada y, por tanto, no es necesario aplicar el algoritmo que busca la dirección de entrada hacia la región de diseño. En este caso, utilizaremos un algoritmo basado en el método Simplex para encontrar una dirección de avance que reduzca la función objetivo y que al mismo tiempo no viole las restricciones establecidas.

Una vez obtenida la dirección de avance se realiza el análisis de segundo orden para obtener el factor de avance. Se establece un valor mínimo del paso y a partir de éste se busca el factor de avance que minimiza la función objetivo sin violar las restricciones. El factor de avance se obtiene, por tanto, comprobando el valor de la función objetivo y de

las restricciones a intervalos de mínimo paso. El rango de valores posibles del factor de avance se obtiene a partir de las restricciones laterales que se imponen sobre las variables de diseño. El valor máximo es aquel que provoca que una variable que no alcanzaba el límite lateral inferior (elemento lleno) lo alcance en esta iteración y el valor mínimo es aquel que provoca que una variable que no alcanzaba el límite lateral superior (elemento vacío) lo alcance. Fuera de este rango aunque el factor de avance proporcionara una solución mejor no sería válida porque no tendría sentido físico.

Para realizar este cálculo es necesario conocer los valores de la función objetivo así como de las restricciones para la dirección de avance obtenida anteriormente. Para ello se realiza una aproximación cuadrática direccional, dado que ahora se conoce la dirección de avance, con lo que se simplifican mucho los cálculos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^{k+1}) &\approx \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}^k) + \frac{\partial F(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \mathbf{s}_k} \theta_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \mathbf{s}_k^2} \theta_k^2 \\ \mathbf{G}_j(\boldsymbol{\rho}^{k+1}) &\approx \mathbf{G}_j(\boldsymbol{\rho}^k) + \frac{\partial G_j(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \mathbf{s}_k} \theta_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_j(\boldsymbol{\rho}^k)}{\partial \mathbf{s}_k^2} \theta_k^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$j = 1, \dots, nrest$$

Las derivadas segundas direccionales se obtienen del análisis de sensibilidad de segundo orden según (26) y (27).

Una vez hallado el factor de avance se procede a actualizar la solución según (32) y a comprobar la convergencia. Si el problema ha convergido se para la ejecución y si no ha convergido se continua el proceso iterativo.

El problema habrá convergido si no hay restricciones violadas y el factor de avance es menor que un valor previamente definido. Esto supone que no se puede avanzar más hacia el óptimo y la solución obtenida ya es lo suficientemente aceptable como para despreciar una aproximación mayor. Si hay restricciones violadas y el factor de avance obtenido es nulo esto implica un error grave dado que no se obtiene una solución válida y no existe la solución optimizada porque es posible que ninguna de las soluciones posibles cumpla las restricciones impuestas. Además de estos controles de convergencia y no convergencia es aconsejable limitar el número de iteraciones máximas a realizar.

5 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En este trabajo se han estudiado dos ejemplos bidimensionales en tensión plana. Se utiliza este tipo de ejemplos dado que es muy fácil la interpretación física de las variables de diseño. Así, puede asimilarse la densidad del material con el espesor de la pieza y representar la estructura en tres dimensiones a pesar de que el cálculo se realiza en dos dimensiones.

En ambos casos se parte de una malla de elementos finitos rectangular y regular con longitud y altura predefinidos. Los ejemplos propuestos no tienen una aplicación práctica

inmediata pero son representativos del tipo de soluciones y de problemas que se pueden plantear con la formulación que se propone.

El primer ejemplo (figura 1) consiste en una viga de 40 m de luz y un canto de 15 m que se encuentra apoyada en ambos extremos y con el movimiento horizontal coaccionado. La viga está sometida a una carga puntual de $6 \cdot 10^5 \text{ kN}$ situada a una distancia del apoyo de $1/3$ de la luz y a su peso propio. El acero empleado tiene un límite elástico $\sigma_e = 230 \text{ MPa}$ y un módulo de Young $E_e = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. El valor del coeficiente de Poisson del acero es ($\nu = 0.3$). La densidad del acero se toma como $\gamma_{mat} = 76.5 \text{ kN/m}^3$. El modelo estructural consta de una malla de $36 \times 16 = 576$ elementos rectangulares de 8 nodos empleando $3 \times 3 = 9$ puntos de integración. Puede apreciarse que la solución obtenida se parece mucho a un arco (figura 7), que era la solución esperable desde el punto de vista estructural. El espesor representado en las figuras ha sido multiplicado por un factor para que pueda interpretarse de forma más sencilla la solución obtenida. El peso final de la estructura supone un 17.16 % del peso inicial.

El segundo ejemplo (figura 8) consiste en una viga de 40 m de luz y un canto de 1 m que tiene tres apoyos móviles articulados, dos en los extremos y el otro en el centro. La viga está sometida a una carga puntual de 10^4 kN situada en el punto medio de uno de los dos vanos de que consta la viga y a su peso propio. El acero empleado tiene un límite elástico $\sigma_e = 230 \text{ MPa}$ y un módulo de Young $E_e = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. La densidad del acero se toma como $\gamma_{mat} = 76.5 \text{ kN/m}^3$. El modelo estructural consta de una malla de $60 \times 12 = 720$ elementos rectangulares de 8 nodos empleando $3 \times 3 = 9$ puntos de integración. El peso final de la estructura supone un 24.49 % del peso inicial.

Los resultados obtenidos para estos ejemplos (figuras 7 y 14) son desde el punto de vista ingenieril correctos y, al contrario de lo que ocurre con las formulaciones de máxima rigidez, no proporcionan soluciones semejantes a estructuras de barras. Tanto la estructura en arco como la viga en doble T son diseños ya empleados habitualmente en el proyecto y cálculo de estructuras. Estos ejemplos confirman, por lo tanto, esos diseños ya utilizados con éxito en problemas reales. El arco obtenido corresponde claramente a la geometría antifunicular de las cargas aplicadas. Las secciones de la viga continua son prácticamente simétricas con respecto a su centro de gravedad dado que los apoyos no tienen coartado su movimiento horizontal. La disposición en doble T es la solución obtenida tanto para el centro del vano en que se aplica la carga puntual como para el apoyo central.

Con esta formulación, además de realizar la optimización del modelo, se realiza el cálculo estructural dado que se garantiza que las tensiones no superan un valor máximo establecido que puede obtenerse de Normas como la NBE-EA 95 [12]. Por otra parte, en el ámbito ingenieril el coste de la estructura y el volumen de material empleado están relacionados, por tanto, la solución obtenida será muy similar a la óptima en coste. Obsérvese que las soluciones obtenidas finalmente alcanzan reducciones de peso muy importantes, y en consecuencia, reducciones de coste también considerables.

6 CONCLUSIONES

- En este artículo presentamos una nueva formulación para la optimización topológica de estructuras basada en la minimización del peso con restricciones de tipo local en tensión.
- La formulación se plantea a partir de pequeñas modificaciones realizadas sobre un programa de Elementos Finitos integrado en el proceso de optimización expuesto.
- En general, la formulación no depende de parámetros artificiales y no requiere de técnica alguna de estabilización de la solución. Tampoco se penalizan las densidades intermedias, aunque podría hacerse, para obtener soluciones más reales que no se parecen, necesariamente, a estructuras de barras.
- Tanto la función objetivo como las restricciones tienen una clara interpretación física desde el punto de vista ingenieril.
- Pueden aplicarse con el mismo planteamiento otros tipos de restricciones (movimientos, frecuencias de vibración) así como analizar varios casos de carga simultáneamente.
- La formulación es desde el punto de vista matemático muy robusta. Sin embargo, el elevado número de restricciones provoca que desde el punto de vista numérico el problema se encuentre muy limitado dado que se requiere una gran capacidad de almacenamiento de datos (debido fundamentalmente al análisis de sensibilidad). Además, los métodos de optimización restringida que existen actualmente no funcionan correctamente cuando el número de restricciones es elevado.
- Las soluciones obtenidas parecen ser correctas desde el punto de vista ingenieril y la interpretación de todos los parámetros de la optimización también lo es.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia (proyectos n DPI2002-00297 y DPI20010556), por la Dirección Xeral de I+D de la Consellería de Innovación, Industria y Comercio de la Xunta de Galicia (proyectos PGIDIT03-PXIC118001PN y PGIDIT03-PXIC118002PN) y por becas de investigación de la Universidade da Coruña y de la Fundación de la Ingeniería Civil de Galicia.

REFERENCIAS

- [1] Navarrina F., "Una metodología general para optimización estructural en diseño asistido por ordenador" , Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, (1987).
- [2] Bendsøe M.P., Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1988); 71: 197–224.
- [3] Hernández S. Métodos de Diseño Óptimo de Estructuras. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, (1990).
- [4] Navarrina F., Casteleiro M. A general methodological analysis for optimum design. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, (1991); 31: 85–111.
- [5] Sigmund O. Design of material structures using topology optimization, DCAMM Report S.69, Department of Solid Mechanics, Ph. D. Thesis, DTU, Lyngby, (1994).
- [6] Bendsøe M.P. Optimization of structural topology, shape, and material. Heidelberg: Springer-Verlag, (1995).
- [7] Oñate E. Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos: Análisis estático y lineal, CIMNE, Segunda edición, (1995).
- [8] Yang R. J. Stress-based topology optimization, *Structural Optimization*; (1996); 12: 98-105.
- [9] Cheng G.D. y Guo X. ε -relaxed approach in structural topology optimization, *Structural Optimization*; (1997); 13: 258-266.
- [10] Ramm E., Maute K., Schwarz S. Adaptive topology and shape optimization. *Computational Mechanics: New trends and applications*, Proc. of the IV-World Conference on Computational Mechanics (CD-ROM), S. Idelshon, E. Oñate & E. Dvorkin (Eds.), Barcelona: CIMNE, (1998).
- [11] Topology optimization with different stress limits in tension and compression. *International report: Robotics and Automation*, Institute of Mechanics, Universidad de Liege, Liege, Bélgica, (1998).
- [12] Ministerio de Fomento. NBE EA-95 Estructuras de acero en edificación. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Fomento, (1998).
- [13] Navarrina F., López S., Colominas I., Bendito E., Casteleiro M. High order shape design sensitivity: A unified approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2000); 188: 681–696.

- [14] Muiños I. Optimización Topológica de Estructuras: Una Formulación de Elementos Finitos para la Minimización del Peso con Restricciones en Tensión. Proyecto Técnico, ETSICCP. A Coruña: Universidad de A Coruña, (2001).
- [15] Navarrina F., Tarrech R., Colominas I., Mosqueira G., Gómez-Calviño J., Casteleiro M. An efficient MP algorithm for structural shape optimization problems. Computer Aided Optimum Design of Structures VII, S. Hernández & C.A. Brebbia (Eds.), Southampton: WIT Press, (2001); 247–256.
- [16] Muiños I., Colominas I., Navarrina F., Casteleiro M. Una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión para la optimización topológica de estructuras. Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, E. Oñate, F. Zárata, G. Ayala, S. Botello & M.A. Moreles (Eds.), Barcelona: CIMNE, (2002); 399–408.
- [17] Navarrina F., Muiños I., Colominas I., Casteleiro M. Optimización Topológica de Estructuras: Una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. Métodos Numéricos en Ingeniería V (Libro y CD-ROM, ISBN: 84-95999-03-X), J.M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor & G. Bugada (Eds.), Barcelona: SEMNI, (2002).

7 FIGURAS

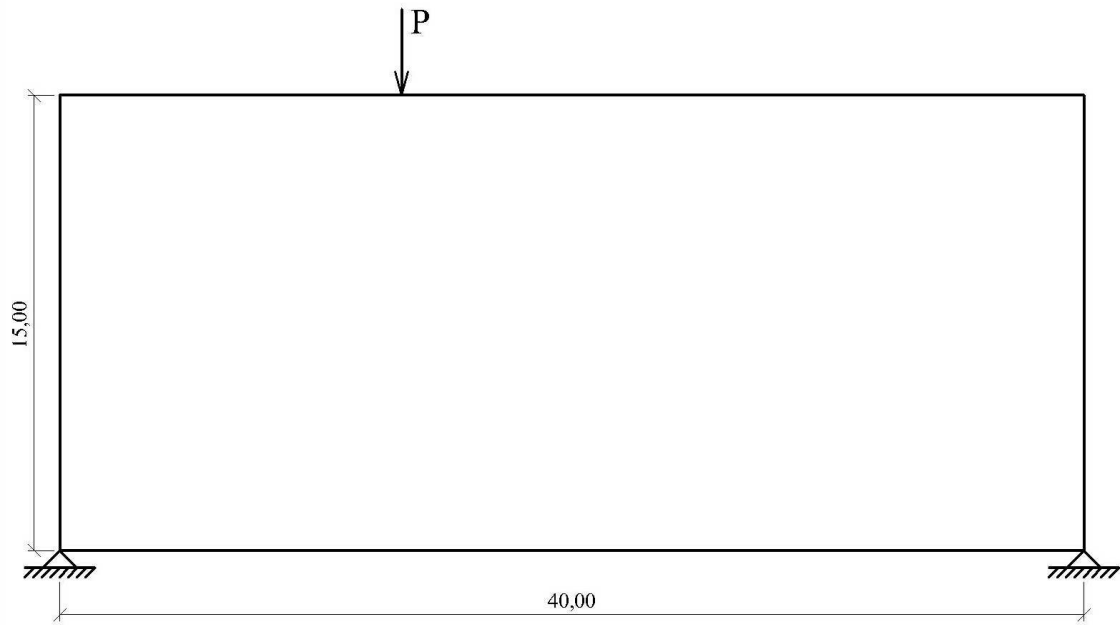


Figura 1: Planteamiento inicial de viga de gran canto (40x15 m)

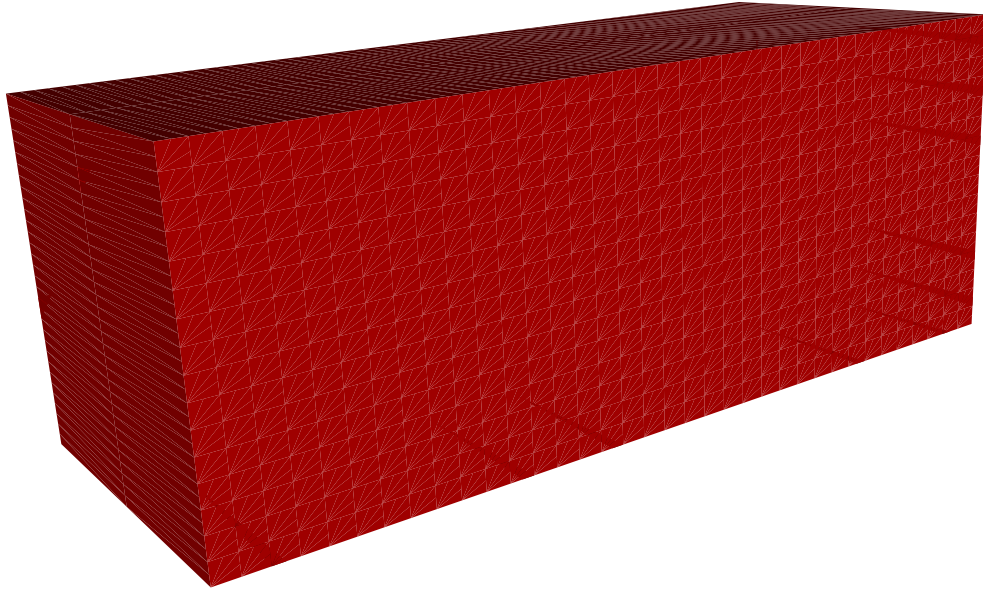


Figura 2: Solución básica inicial

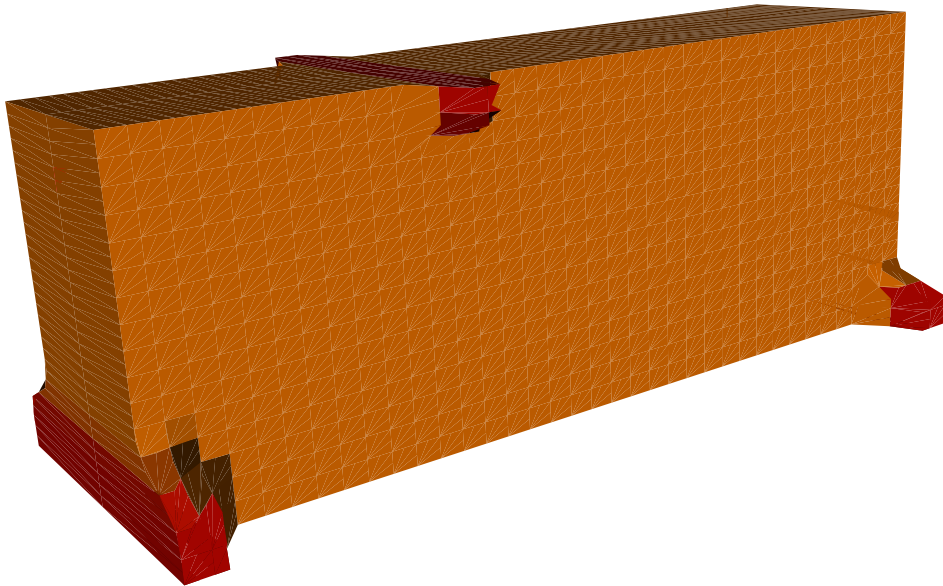


Figura 3: Iteración 10

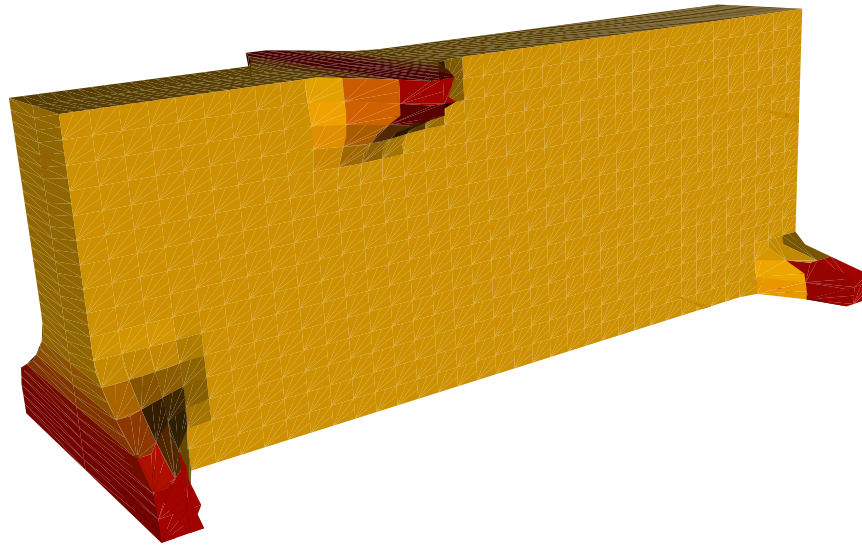


Figura 4: Iteración 20

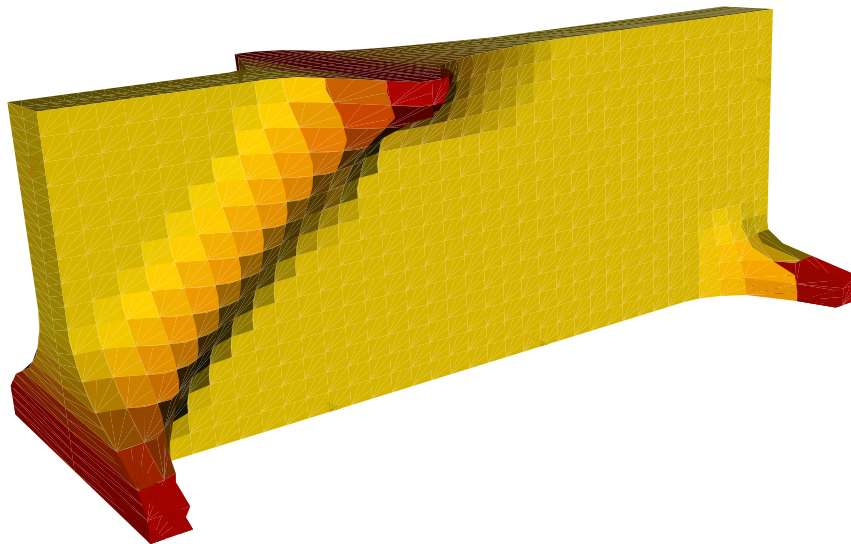


Figura 5: Iteración 35

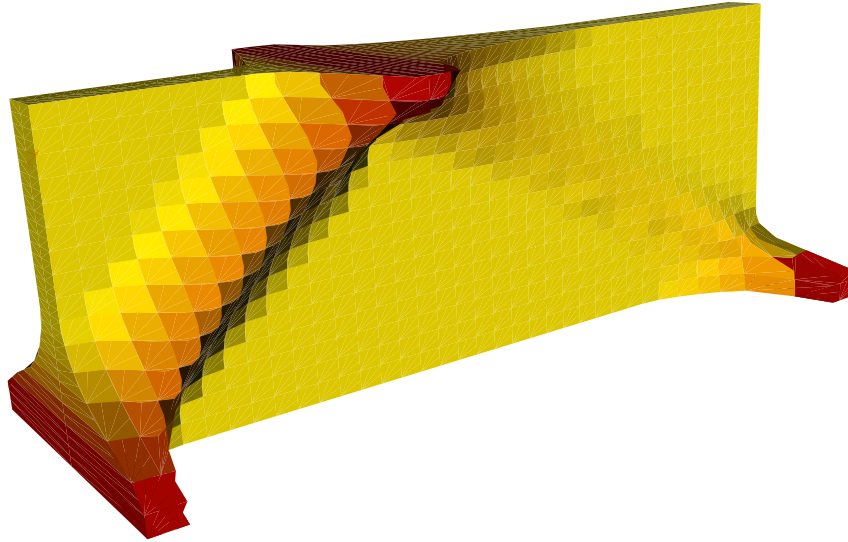


Figura 6: Iteración 50

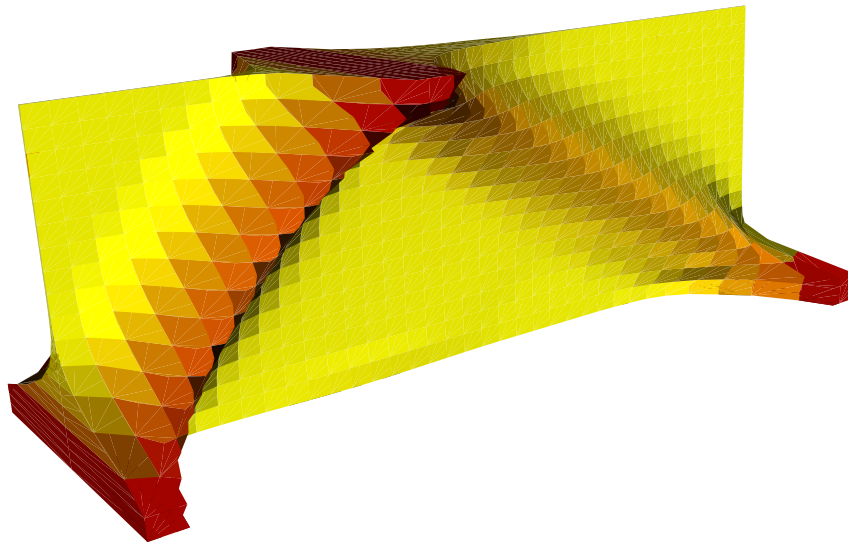


Figura 7: Solución optimizada. (Nota: Los apoyos no se optimizan para evitar efectos locales de concentración de tensiones)

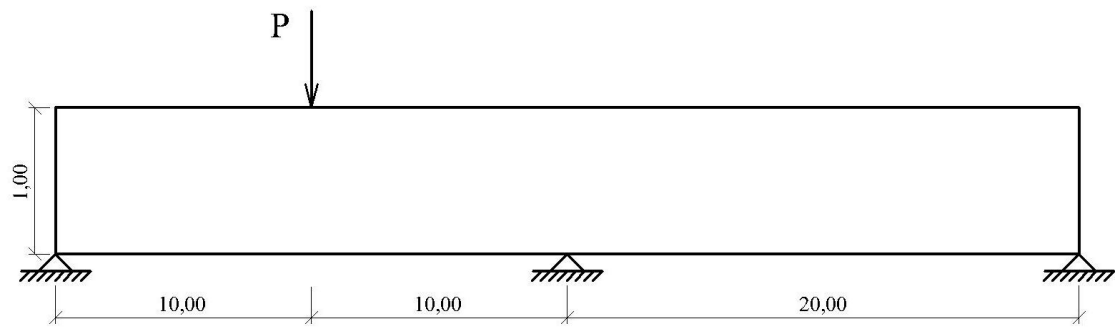


Figura 8: Planteamiento inicial de viga de 2 vanos

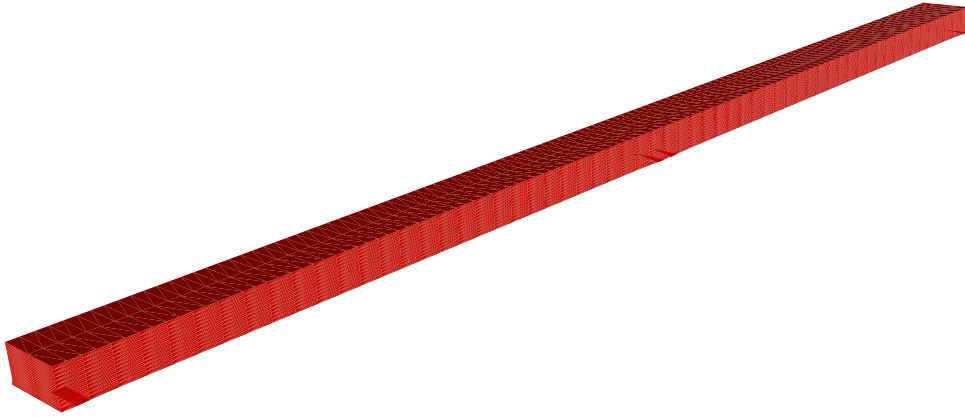


Figura 9: Solución básica inicial

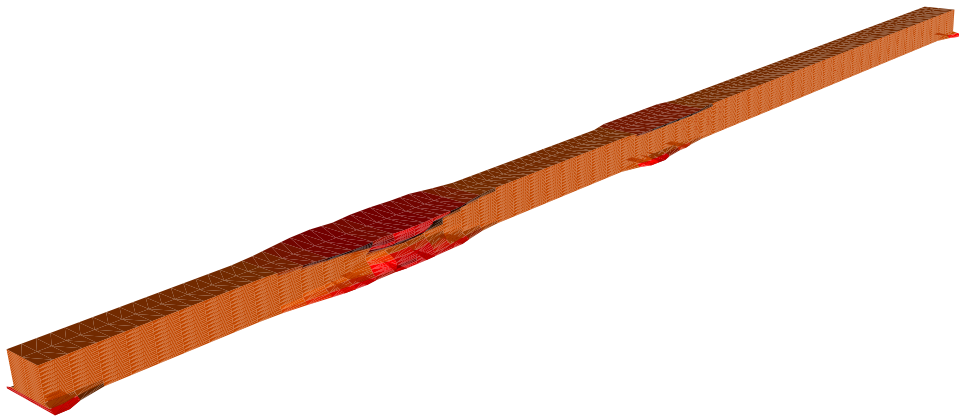


Figura 10: Iteración 5

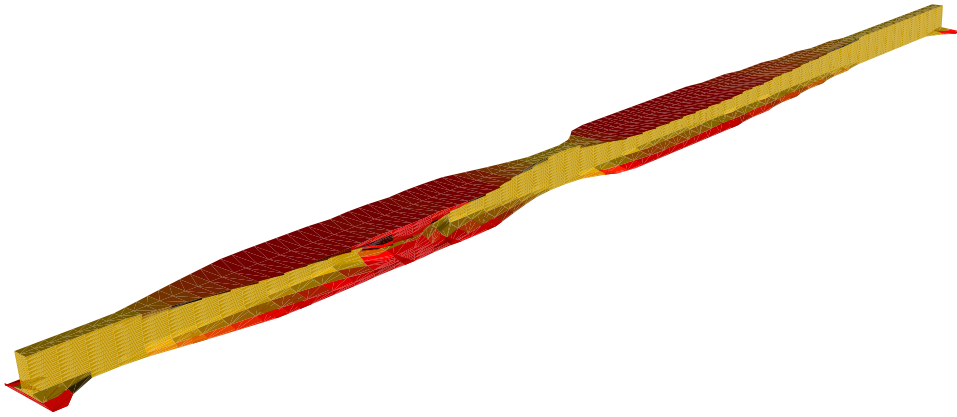


Figura 11: Iteración 10

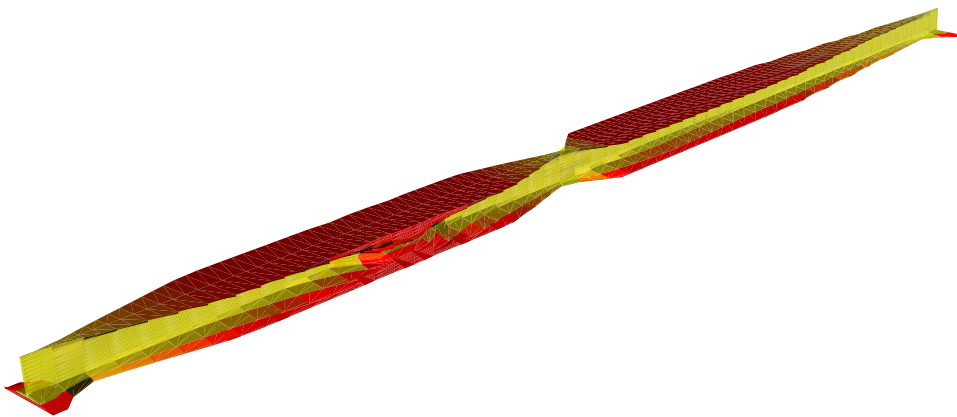


Figura 12: Iteración 20

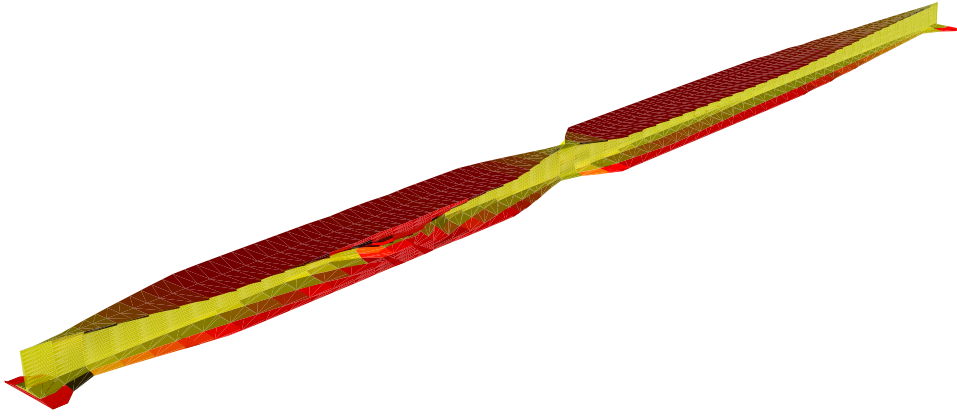


Figura 13: Iteración 30

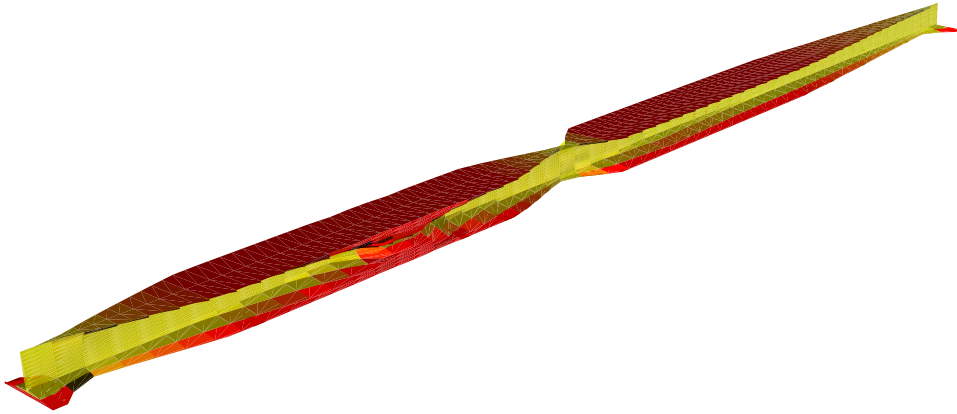


Figura 14: Solución optimizada. (Nota: Los apoyos no se optimizan para evitar efectos locales de concentración de tensiones)