

# DISMINUCIÓN DE LA VISCOSIDAD NUMÉRICA EN LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS CON TÉRMINO TURBULENTO

Jaime Fe<sup>1\*</sup>, Luis Cueto-Felgueroso<sup>1</sup>, Fermín Navarrina<sup>1</sup> y Jerónimo Puertas<sup>2</sup>

1: Grupo de Métodos Numéricos en la Ingeniería  
Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación  
Escuela T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad de A Coruña  
Campus de Elviña. 15071 A Coruña  
e-mail: {jfe,lcueto,fnavarrina}@udc.es, web: <http://caminos.udc.es/gmni>

2: Grupo de Ingeniería Hidráulica  
Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación  
Escuela T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad de A Coruña  
Campus de Elviña. 15071 A Coruña  
e-mail: [jpuertas@udc.es](mailto:jpuertas@udc.es)

**Palabras clave:** Aguas someras, viscosidad numérica, turbulencia.

**Resumen.** *Se presenta un modelo en volúmenes finitos para la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras con término turbulento. Tras mostrar el modo en que se discretizan las ecuaciones, se valida el modelo simplificado, es decir sin inclusión del término turbulento. A continuación se obtienen resultados tomando en consideración este término, para distribuciones uniformes de la viscosidad. Se describe luego el modo en que se ha reducido, por medio de un coeficiente, la viscosidad numérica producida por la discretización descentrada. Por último se comprueba la influencia del tamaño de malla en el valor admisible de este coeficiente.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Navier-Stokes constituyen un sistema hiperbólico de leyes de conservación no lineales, sin solución analítica, que gobierna el comportamiento de un fluido viscoso en tres dimensiones. En muchos flujos existentes en la naturaleza, como es el caso de rías y estuarios, las dimensiones horizontales son claramente predominantes. Si además la variación en la vertical de las componentes horizontales de la velocidad es pequeña y apenas existen aceleraciones verticales, con frecuencia puede describirse satisfactoriamente el flujo por medio de unas ecuaciones en dos dimensiones, un ejemplo de las cuales son las ecuaciones de aguas someras.

Las ecuaciones de aguas someras pueden resolverse numéricamente por medio de esquemas de primer orden, de implementación relativamente sencilla. En este tipo de esquemas se recurre con frecuencia al descentrado *upwind* que estabiliza el modelo a costa de introducir una cierta cantidad de viscosidad numérica, que puede llegar a ser del mismo orden de magnitud que la utilizada en los sumandos en derivadas segundas del término fuente. En el análisis de flujos de marcado carácter bidimensional, en los que dichos sumandos turbulentos tienen importancia, se hace necesario reducir esta viscosidad numérica.

Este trabajo se distribuye de la manera siguiente. En la sección 2 se resume el proceso de obtención de las ecuaciones de aguas someras y se enumeran las hipótesis utilizadas. En la sección 3 se describe la discretización de las ecuaciones, cuya forma simplificada -sin término turbulento- se valida en la sección 4. A continuación se discretiza el término turbulento (sección 5) y se analiza el efecto de su introducción en las ecuaciones, presentando un método para disminuir la viscosidad numérica (sección 6).

## 2. LAS ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS

Para la obtención de las ecuaciones de aguas someras, a partir de las de Navier-Stokes, se realiza en primer lugar un promediado en tiempo, descomponiendo las variables dependientes (velocidad y presión) en su promedio temporal y la fluctuación en torno a este promedio. Debido a estos valores de fluctuación aparecen unos términos nuevos, con dimensiones de tensión, que se denominan tensiones de Reynolds y que, por aplicación de la hipótesis de Boussinesq, que relaciona dichas tensiones con las derivadas de las componentes de la velocidad, se convierten en unos sumandos en derivadas segundas. Admitiendo una distribución hidrostática de presiones se sustituye la presión en función de la coordenada  $z$ , tras lo que se efectúa una integración en la vertical de las ecuaciones resultantes. En dicha integración, una parte de los sumandos en derivadas segundas se convierte en los términos de fricción, mientras que el resto constituye el denominado término turbulento. Para una detallada descripción de este proceso, ver [5].

### 2.1. Hipótesis

Se consideran fluidos incompresibles. Tomando el plano  $x, y$  como horizontal y el sentido ascendente del eje  $z$  como positivo, las principales hipótesis que conducen a la obtención de este sistema de ecuaciones son las siguientes:

- a) La pendiente del fondo es pequeña.
- b) La distribución de presiones se considera hidrostática.
- c) El movimiento principal de las partículas ocurre en planos horizontales.
- d) La distribución en la vertical de las componentes en  $x$  e  $y$  de la velocidad es prácticamente uniforme, lo que permite tomar para cada punto unos valores  $u$  y  $v$  que representan el promedio en la vertical de las componentes de la velocidad.

- e) Las fuerzas de masa que actúan son la gravedad en dirección vertical y la fuerza de Coriolis, en el plano horizontal.
- f) La aceleración vertical de las partículas es despreciable frente a la de la gravedad.
- g) La pérdida de energía por fricción en el fondo y los contornos, en flujo no permanente, puede evaluarse mediante fórmulas empíricas válidas para flujo permanente, como la de Manning.

## 2.2. El sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones de aguas someras se expresa en forma matricial como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \mathbf{G}, \quad (1)$$

siendo el vector de variables

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad (2)$$

los términos  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

y el término fuente

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ fvh + \frac{\tau_{sx}}{\rho} + gh(S_{0x} - S_{fx}) + S_{t1} \\ -fuh + \frac{\tau_{sy}}{\rho} + gh(S_{0y} - S_{fy}) + S_{t2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

La variable  $h$  representa el calado medido verticalmente;  $u$  y  $v$ , componentes de la velocidad, son realmente los promedios en la vertical de las medias temporales de las componentes horizontales de la velocidad;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $f$  es el coeficiente de Coriolis y  $\tau_{sx}, \tau_{sy}$  son las tensiones en la superficie debidas al viento.

$S_0$  se denomina pendiente geométrica y se calcula como el opuesto de la derivada de la cota del fondo respecto a  $x$  o  $y$ ; es decir, se toma positiva si el fondo desciende en el sentido de las  $x, y$  crecientes y negativa en caso contrario

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (5)$$

$S_f$  es la pendiente de fricción que vale, aplicando la fórmula de Manning,

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{4/3}}. \quad (6)$$

$R_h$  es el radio hidráulico, que suele tomarse igual a  $h$ . Por último,  $S_t$  es el término turbulento

$$S_{t1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right), \quad (7)$$

$$S_{t2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (8)$$

que cuantifica la disipación de energía debida a las interacciones turbulentas entre las partículas y se calcula a partir de las derivadas de  $u$  y  $v$ . El coeficiente  $\nu_t$  es la viscosidad turbulenta o de remolino.

Las expresiones (1)-(4) se conocen como ecuaciones de aguas someras en forma conservativa. Cuando estas ecuaciones se aplican a dominios no muy extensos no tiene apenas importancia el término de Coriolis. También suele despreciarse la influencia del viento, aunque en algunos casos, como estuarios de cierta magnitud, puede ser aconsejable su uso. También es frecuente prescindir del sumando turbulento. Se admite en este caso que las pérdidas de energía por turbulencia quedan representadas globalmente gracias al efecto de la pendiente de fricción  $S_f$ , con una adecuada elección del coeficiente de rozamiento.

### 3. DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

#### 3.1. Construcción de la malla de volúmenes finitos

Los volúmenes finitos utilizados en este trabajo se construyen a partir de una malla previa de triángulos. Dado el nodo  $I$ , se toman los baricentros de los triángulos que tienen a  $I$  como vértice común y los puntos medios de las aristas que confluyen en él. La frontera del volumen finito  $C_i$  se obtiene uniendo cada baricentro de triángulo con los puntos medios de las aristas de ese triángulo que confluyen en  $I$ ; estos, con los baricentros de los triángulos contiguos y así sucesivamente. La frontera de  $C_i$ , que se simboliza por  $\Gamma_i$ , se compone de medianas de triángulos (figura 1).

Dadas dos celdas  $C_i$  y  $C_j$ , se llama  $\Gamma_{ij}$  a la parte de frontera común a ambas.  $\Gamma_{ij}$  es la unión de los segmentos  $AM$  y  $MB$ , siendo  $A$  y  $B$  los baricentros de los triángulos de lado común  $IJ$  y  $M$  el punto medio de dicho lado. El conjunto de todos los nodos vecinos al  $I$  se representa por  $\mathcal{K}_i$ .

$\boldsymbol{\eta}_{ij}$  es el vector normal a  $\Gamma_{ij}$ , dirigido hacia el exterior de la celda  $C_i$ . Tiene distinto valor en  $AM$  y en  $MB$ .

$$\boldsymbol{\eta}_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{\nu}_1 & \text{en el segmento } AM, \\ \boldsymbol{\nu}_2 & \text{en el segmento } MB. \end{cases} \quad (9)$$

El módulo de  $\boldsymbol{\eta}_{ij}$  coincide con la longitud de la arista correspondiente. El vector  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}$  es el unitario de la misma dirección y sentido, cuyas componentes -en las que los subíndices  $i$  y  $j$  se sobreentienden- se representan por  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{ij}}{\|\boldsymbol{\eta}_{ij}\|} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T. \quad (10)$$

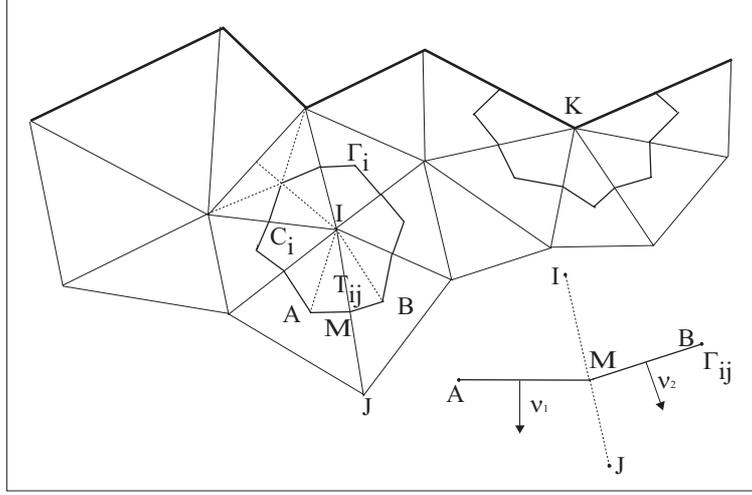


Figura 1: Construcción de los volúmenes finitos.

Se denomina subcelda  $T_{ij}$  a la unión de los dos subtriángulos de lados  $AM$  y  $MB$  y vértice común  $I$ . Cada uno de estos subtriángulos tiene como área

$$A_{ij1} = \frac{\|\nu_1\| d_{ijAM}}{2}, \quad A_{ij2} = \frac{\|\nu_2\| d_{ijMB}}{2}, \quad (11)$$

donde  $d_{ij}$  representa la altura de cada uno.

### 3.2. Integración de las ecuaciones

A continuación se aplica el método de volúmenes finitos a las ecuaciones de aguas someras, en cuyo término fuente no se tienen en cuenta el término de Coriolis ni la acción del viento. En una primera fase no se toma en consideración tampoco el término turbulento, por lo que la expresión (4) del término fuente se reduce a

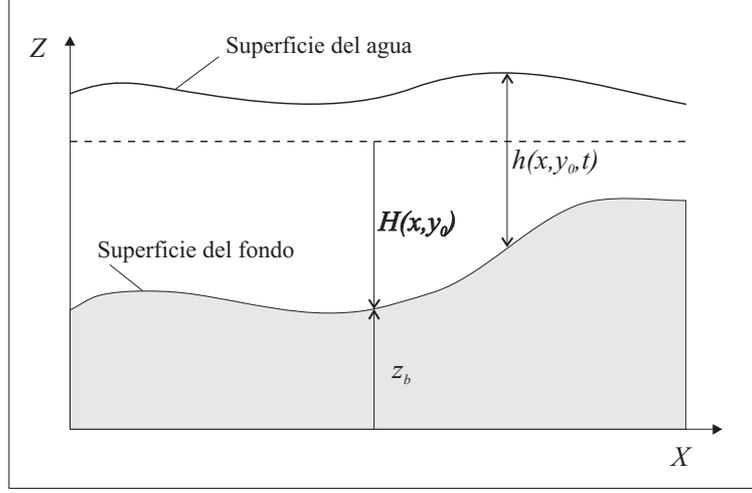
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

donde las pendientes geométricas se van a expresar en función de  $H$ , que representa la distancia al fondo desde un nivel de referencia fijo, con sentido positivo hacia abajo. En la figura 2 se representa una sección del dominio por un plano vertical  $y = y_0$ .

$$S_{0x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad S_{0y} = \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (13)$$

Utilizando la notación simbólica

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \mathbf{F}_2(\mathbf{U})), \quad (14)$$


 Figura 2: Representación de las variables  $H$  y  $h$ .

el sistema de ecuaciones (1) se puede escribir en forma más compacta

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G}, \quad (15)$$

siendo  $\nabla$  el operador  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$  y  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  la divergencia de  $\mathbf{F}$ .

Se calcula la integral de superficie en cada uno de los volúmenes finitos  $C_i$ , obteniendo

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA + \iint_{C_i} \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \iint_{C_i} \mathbf{G} dA. \quad (16)$$

La solución de la ecuación (1) se aproxima por medio de unos valores  $\mathbf{U}_i^n$ , constantes para cada celda  $C_i$  y cada instante de tiempo  $t_n$ , que se asignan al nodo  $I$  correspondiente a la celda. La derivada temporal se discretiza mediante el método de Euler hacia adelante

$$\left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right|_{C_i, t_n} \approx \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t}. \quad (17)$$

donde tanto  $\mathbf{U}_i^{n+1}$  y  $\mathbf{U}_i^n$  como  $\Delta t$  son constantes en la celda, por lo que pueden salir de la integral.

Se aplica el teorema de la divergencia al segundo sumando (término de flujo) de (16), convirtiendo la integral de superficie en otra de línea sobre  $\Gamma_i$ , que se descompone en un sumatorio de integrales a lo largo de cada una de las aristas  $\Gamma_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$

$$\iint_{C_i} \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl. \quad (18)$$

La integral de superficie del término fuente se descompone a su vez en una suma de integrales sobre las subceldas  $T_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$

$$\iint_{C_i} \mathbf{G} dA = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA. \quad (19)$$

De este modo, la ecuación (16) se convierte en

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA. \quad (20)$$

### 3.3. Definición del flujo discreto

Se utiliza ahora el  $Q$ -esquema de Van Leer, en la forma propuesta en [1] para expresar el sumatorio (18) en función de los valores de las variables en el nodo  $I$  y los  $N_j$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$ .

El producto escalar de  $\mathcal{F}$  por  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  se puede considerar un flujo  $\mathbf{Z}$  a través de un segmento de longitud unidad y vale

$$\mathbf{Z} = \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\alpha} \mathbf{F}_1 + \tilde{\beta} \mathbf{F}_2, \quad (21)$$

siendo  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  las componentes del vector unitario normal a la arista definido en (10).

Los  $Q$ -esquemas son una familia de esquemas descentrados *upwind*, en los que el flujo  $\mathbf{Z}$  en la arista  $\Gamma_{ij}$  se aproxima mediante un flujo numérico

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{U}_i^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) + \mathbf{Z}(\mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}(\mathbf{U}_Q^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})| (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n), \quad (22)$$

donde  $\mathbf{U}_i^n$  y  $\mathbf{U}_j^n$  representan los valores del vector de variables en los puntos  $I$  y  $J$ ;  $\mathbf{Q}$  es la matriz jacobiana del flujo

$$\mathbf{Q} = \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{U}} = \tilde{\alpha} \frac{d\mathbf{F}_1}{d\mathbf{U}} + \tilde{\beta} \frac{d\mathbf{F}_2}{d\mathbf{U}}; \quad (23)$$

la matriz  $|\mathbf{Q}|$  se obtiene como

$$|\mathbf{Q}| = \mathbf{X} |\boldsymbol{\Lambda}| \mathbf{X}^{-1}, \quad (24)$$

siendo  $|\boldsymbol{\Lambda}|$  la matriz diagonal de los valores absolutos de los autovalores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{X}$  la matriz cuyas columnas son los autovectores de  $\mathbf{Q}$ ;  $|\mathbf{Q}|$  se evalúa en el estado intermedio

$$\mathbf{U}_Q^n = \frac{\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_j^n}{2}. \quad (25)$$

Así pues, el segundo miembro de (20) se discretiza como

$$\sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl \approx \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n, \quad (26)$$

siendo  $\boldsymbol{\phi}_{ij}^n$  el flujo unitario discreto

$$\boldsymbol{\phi}_{ij}^n = \frac{(\tilde{\alpha} \mathbf{F}_1 + \tilde{\beta} \mathbf{F}_2)_i + (\tilde{\alpha} \mathbf{F}_1 + \tilde{\beta} \mathbf{F}_2)_j}{2} - \frac{1}{2} (\mathbf{X} |\boldsymbol{\Lambda}| \mathbf{X}^{-1})_{U_Q^n} (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n). \quad (27)$$

### 3.4. Definición de la fuente discreta

Siguiendo a Vázquez [8], se descentra la parte del término fuente que contiene la pendiente geométrica; esto es, se calcula su contribución subcelda a subcelda, multiplicada por un factor de descentrado. La pendiente de fricción se ha tratado de ambos modos, centrado y descentrado, obteniendo resultados muy similares, por lo que se calcula en el centro de cada celda. Entonces la fuente discreta bidimensional en cada subcelda  $T_{ij}$  se define como

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{X}(\mathbf{I} - |\boldsymbol{\Lambda}| \boldsymbol{\Lambda}^{-1})\mathbf{X}^{-1}\widehat{\mathbf{G}}_0 + \widehat{\mathbf{G}}_f, \quad (28)$$

donde  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}^{-1}$ ,  $|\boldsymbol{\Lambda}|$  y  $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$  dependen de  $(\mathbf{U}_Q^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})$ ,

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}), \quad (29)$$

$$\widehat{\mathbf{G}}_0 = \widehat{\mathbf{G}}_0(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) \quad (30)$$

y

$$\widehat{\mathbf{G}}_f = \widehat{\mathbf{G}}_f(\mathbf{U}_i^n). \quad (31)$$

Las matrices  $|\boldsymbol{\Lambda}|$ ,  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}^{-1}$  se han definido en el apartado anterior.  $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$  es la inversa de la matriz diagonal de los autovalores.  $\widehat{\mathbf{G}}_0$  aproxima la parte del término fuente que contiene la pendiente geométrica

$$\widehat{\mathbf{G}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \frac{H_j - H_i}{d_{ij}} \tilde{\alpha} \\ g \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \frac{H_j - H_i}{d_{ij}} \tilde{\beta} \end{pmatrix} \quad (32)$$

y  $\widehat{\mathbf{G}}_f$  aproxima la parte del término fuente que contiene la fricción, evaluada en el centro de cada celda

$$\widehat{\mathbf{G}}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_i^n (-S_{fx})_i^n \\ gh_i^n (-S_{fy})_i^n \end{pmatrix}. \quad (33)$$

$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  y  $d_{ij}$  toman los valores definidos por las expresiones (10) y (11) y las pendientes de fricción vienen dadas por (6). El sumatorio de la expresión (19) se expresa entonces en función de la fuente discreta como

$$\sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA \approx \sum_{j \in \mathcal{K}_i} A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n, \quad (34)$$

donde  $A_{ij}$  toma las expresiones dadas en (11) para cada uno de los subtriángulos que componen la subcelda  $T_{ij}$  y  $\boldsymbol{\psi}_{ij}^n = \boldsymbol{\psi}(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})$  se calcula a partir de (28).

### 3.5. Paso temporal

La expresión utilizada para el cálculo del paso temporal es

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{D_{ij}}{2(\sqrt{u^2 + v^2} + c)_{ij}} \right), \quad (35)$$

siendo  $D_{ij}$  las distancias entre el nodo  $I$  y sus vecinos. En algunos casos de fuerte pendiente se han producido inestabilidades, lo que ha obligado al uso de un coeficiente corrector de 0.8, obtenido por tanteo.

### 3.6. Algoritmo

Se ha obtenido, pues, una discretización hacia adelante de la derivada temporal y otras dos de los términos flujo y fuente, que se evalúan en el instante  $t_n$ . De esta manera (16) pasa a tomar la forma

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n, \quad (36)$$

de donde

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{A_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{K}_i} A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n - \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n \right). \quad (37)$$

La expresión anterior proporciona un método iterativo explícito en tiempo que permite calcular el valor del vector de variables  $\mathbf{U}$  en cada nodo  $I$  y en cada instante, a partir de los valores de las variables en el instante anterior, en el mismo nodo  $I$  y en los  $N_j$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$  que lo circundan.

## 4. VALIDACIÓN DEL MODELO SIMPLIFICADO

### 4.1. Canal con obstáculo en el fondo. Cambio de régimen

Para validar el modelo se muestra en primer lugar su capacidad de simular un cambio de régimen. Para ello se estudia el flujo sobre un obstáculo en régimen permanente. Se considera un canal de 25  $m$  de longitud y 1  $m$  de anchura, de sección rectangular, con un obstáculo de sección longitudinal parabólica en el fondo. La malla está formada por triángulos rectángulos de catetos de longitud 0.25  $m$ . Las cotas del fondo vienen dadas por

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{si } 8 < x < 12, \\ 0 & \text{en el resto del dominio.} \end{cases} \quad (38)$$

Se toma un coeficiente de Manning  $n = 0.01$ . En las paredes del canal se aplica la condición de deslizamiento lo que, unido a la simetría del dominio y de la malla, produce unos resultados prácticamente unidimensionales. Se resuelven dos casos:

- Flujo subcrítico. El caudal por unidad de ancho (caudal unitario) vale  $q = 4.42 \text{ m}^2/\text{s}$  y el calado fijado aguas abajo  $2 \text{ m}$ . El régimen es lento en todo el canal. En consecuencia debe producirse una disminución de calados al pasar el fluido por encima del obstáculo [3, pg. 35].
- Flujo transcrito con resalto hidráulico. El caudal unitario vale  $q = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$  y el calado aguas abajo  $0.33 \text{ m}$ . Debido al obstáculo se produce un cambio de régimen -de lento a rápido- sobre éste; a continuación, debido al calado -superior al crítico- impuesto aguas abajo, se produce un segundo cambio de régimen, de rápido a lento, por medio de un resalto hidráulico.

Las condiciones iniciales son las mismas en ambos casos: caudal nulo y superficie libre horizontal correspondiente al calado fijado aguas abajo. Los resultados -que coinciden con los obtenidos por [9]- se representan en la figura 3.

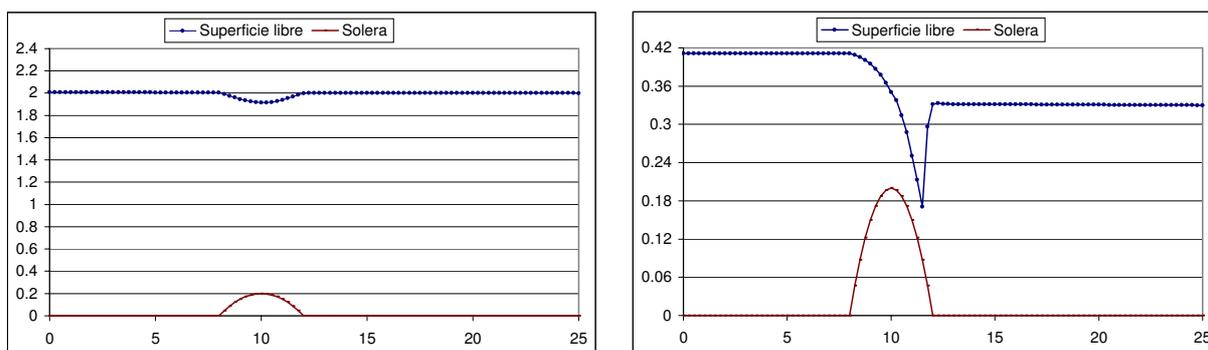


Figura 3: Paso sobre obstáculo a) sin cambio de régimen, b) con resalto hidráulico.

#### 4.2. Rotura de presa parcial asimétrica

Para mostrar el comportamiento del modelo en un caso bidimensional se utiliza el test de rotura de presa . El recinto es cuadrado, dividido en dos partes por medio de una pared. Como en el caso resuelto en [3, pg. 370] la brecha en la pared es parcial y asimétrica. El dominio tiene unas dimensiones de  $200 \times 200 \text{ m}^2$  con nodos cada  $5 \text{ m}$ . El rozamiento en el suelo se considera nulo y la condición en todo el contorno es la de deslizamiento. Se resuelven dos casos con las siguientes condiciones iniciales de calado:

- Calado aguas arriba  $H_1 = 10 \text{ m}$  y aguas abajo  $H_0 = 5 \text{ m}$ .
- Calado aguas arriba  $H_1 = 5 \text{ m}$  y aguas abajo  $H_0 = 0 \text{ m}$ .

En las dos hipótesis consideradas se obtienen buenos resultados. En la figura 4 a) se aprecia un frente de onda que, tras un tiempo de  $t = 7.1 \text{ s}$  alcanza el borde derecho del contorno.

En la figura 4 b) el frente de onda es claramente distinto, debido a la condición de suelo seco, y su velocidad de avance es inferior a la del caso anterior.

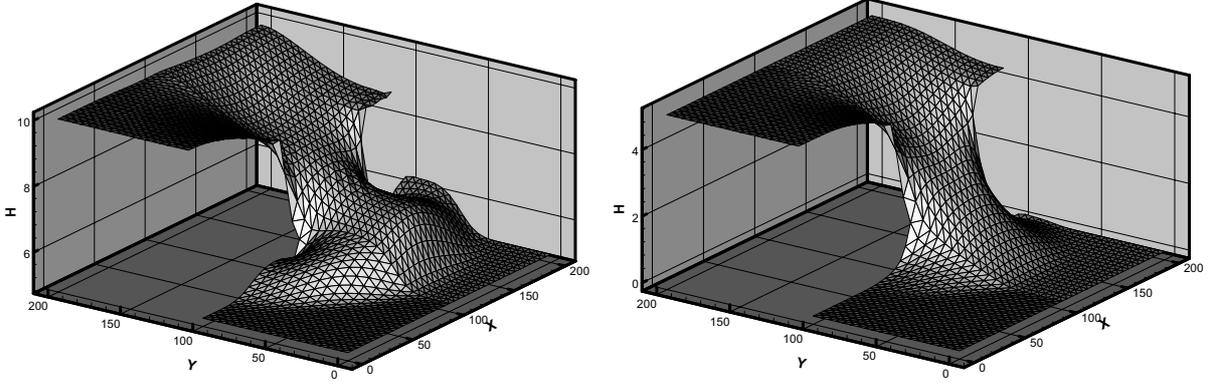


Figura 4: Rotura de presa,  $t = 7.1$  s. a)  $H_1/H_0 = 2$ , b)  $H_0 = 0$ .

## 5. EL TÉRMINO FUENTE TURBULENTO

En la sección 2, se ha hecho notar que, al utilizar las ecuaciones de aguas someras, habitualmente no se toman en consideración los términos que contienen derivadas segundas de  $u$  y  $v$  respecto a  $x$  e  $y$ , estimándose entonces su efecto por medio de la pendiente de fricción. Como ya se ha indicado y comprobado con algunos ejemplos, al resolver estas ecuaciones se obtienen resultados muy próximos a la realidad, siempre que se cumplan determinadas hipótesis. No debe olvidarse, sin embargo, que prescindir de los sumandos en los que aparece la viscosidad cinemática turbulenta, supone ignorar unas pérdidas de energía localizadas, función de las variaciones de  $u$  y  $v$ , que pueden tener importancia en la descripción de fenómenos de naturaleza bidimensional.

En este apartado se van a tomar en consideración los sumandos  $S_{t1}$  y  $S_{t2}$  del término fuente, de expresiones (7) y (8). Se trata de discretizar la integral de superficie, extendida a cada celda  $C_i$ , de estos términos. Estas integrales pueden expresarse como

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \iint_{C_i} S_{t1} dA \\ \iint_{C_i} S_{t2} dA \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \iint_{C_i} \nabla \cdot \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x}, \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) dA \\ \iint_{C_i} \nabla \cdot \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right], 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA \end{array} \right\}. \quad (39)$$

Como ya se hizo en 3.2, se aplica el teorema de la divergencia en cada celda y se descomponen las integrales sobre la frontera  $\Gamma_i$  en un sumatorio de integrales a lo largo de cada

una de las aristas  $\Gamma_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$ . Se obtiene así

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x}, \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) \cdot (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) dl \\ \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right], 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) dl \end{array} \right\}. \quad (40)$$

### 5.1. Obtención de las derivadas parciales en la arista de cada celda

En la expresión (40) aparecen las derivadas parciales de las variables  $u$  y  $v$  respecto a  $x$  e  $y$ , cuyos valores hay que calcular en las aristas de las celdas. Estas derivadas se van a obtener a partir de los valores promedio de  $\nabla u$  y  $\nabla v$  en las celdas contiguas. En [5] se han calculado también a partir de las derivadas direccionales de  $u$  y  $v$  respecto a la dirección perpendicular a la arista obteniendo resultados similares, aunque de menor calidad.

Las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  en cada arista  $\Gamma_{ij}$  se obtienen como componentes del gradiente de estas magnitudes en la arista. Para ello se procede como sigue.

Para aproximar el valor del gradiente de una magnitud escalar  $m$  en  $\Gamma_{ij}$  se toma la semisuma de sus valores promedio en cada una de las celdas  $C_i$  y  $C_j$ , de arista común  $\Gamma_{ij}$ . Por su parte, el promedio del gradiente de  $m$  en una celda  $C_i$  se calcula como

$$\overline{\nabla m}_i = \frac{1}{A_i} \iint_{C_i} \nabla m dA. \quad (41)$$

A su vez, la integral de superficie de  $\nabla m$  en la celda  $C_i$  resulta de la siguiente relación, que se demuestra en [5, pg. 216].

$$\iint_{C_i} \nabla m dA = \int_{\Gamma_i} m \mathbf{n} dl, \quad (42)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario a cada arista. Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{n} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\alpha} \mathbf{i} + \tilde{\beta} \mathbf{j} \quad (43)$$

y

$$\overline{\nabla m}_i = \left( \frac{\partial m}{\partial x} \right)_i \mathbf{i} + \left( \frac{\partial m}{\partial y} \right)_i \mathbf{j}, \quad (44)$$

donde  $\mathbf{i}$  es el unitario en la dirección del eje  $x$  e  $i$  el índice de la celda, se pueden obtener directamente los promedios de las derivadas parciales de  $m$  en  $C_i$

$$\left( \frac{\partial m}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} m \tilde{\alpha} dl = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} m \tilde{\alpha} dl, \quad (45)$$

$$\left( \frac{\partial m}{\partial y} \right)_i = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} m \tilde{\beta} dl = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} m \tilde{\beta} dl. \quad (46)$$

Es decir, para cada arista  $\Gamma_{ij}$ , se estiman primero los valores de  $u$  y  $v$  en ella como semisuma de los valores en los nodos  $I$  y  $J$ . Luego se obtienen los promedios de las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  en cada celda, a partir de los valores estimados para las aristas, mediante

$$\left(\overline{\frac{\partial m}{\partial x}}\right)_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \frac{m_i + m_j}{2} \tilde{\alpha} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\|, \quad m = u, v, \quad (47)$$

$$\left(\overline{\frac{\partial m}{\partial y}}\right)_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \frac{m_i + m_j}{2} \tilde{\beta} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\|, \quad m = u, v, \quad (48)$$

Una vez obtenidos los valores en  $C_i$  y  $C_j$ , se calcula su semisuma. Expresando abreviadamente los promedios, en las celdas  $C_i$  y  $C_j$ , de las derivadas parciales de  $u$  en el instante  $t_n$  como

$$u_{xi}^n = \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_{i,t_n}, \quad u_{xj}^n = \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_{j,t_n}, \quad (49)$$

$$u_{yi}^n = \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_{i,t_n}, \quad u_{yj}^n = \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_{j,t_n}, \quad (50)$$

y haciendo lo mismo para  $v$ , la integral discretizada del término fuente turbulento por unidad de longitud de arista,  $\widehat{\mathbf{G}}_t$ , es ahora

$$\widehat{\mathbf{G}}_t = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\nu_{ti} + \nu_{tj}}{2} \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \left( 2 \frac{u_{xi}^n + u_{xj}^n}{2} \tilde{\alpha} + \frac{v_{xi}^n + v_{xj}^n}{2} \tilde{\beta} + \frac{u_{yi}^n + u_{yj}^n}{2} \tilde{\beta} \right) \\ \frac{\nu_{ti} + \nu_{tj}}{2} \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \left( \frac{v_{xi}^n + v_{xj}^n}{2} \tilde{\alpha} + \frac{u_{yi}^n + u_{yj}^n}{2} \tilde{\alpha} + 2 \frac{v_{yi}^n + v_{yj}^n}{2} \tilde{\beta} \right) \end{array} \right\}. \quad (51)$$

donde se ha supuesto que los valores de  $\nu_t$  son distintos, en general, en cada punto pero constantes a lo largo del tiempo. Por fin, la integral de superficie en  $C_i$  del término turbulento (39) se aproxima por una expresión análoga a la (34)

$$\sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA \approx \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\psi}_{vij}^n, \quad (52)$$

siendo  $\boldsymbol{\psi}_{vij}^n$  la fuente discreta turbulenta que toma la expresión (51).

## 5.2. Algoritmo

El algoritmo (37), con la inclusión del sumando turbulento, se convierte en

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{A_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{K}_i} (A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n + \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\psi}_{vij}^n) - \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n \right). \quad (53)$$

## 6. VALIDACIÓN DEL MODELO CON TÉRMINO TURBULENTO

### 6.1. Flujo en una cavidad. Primeros resultados

Para comprobar la eficacia de la introducción del término turbulento se utiliza el problema conocido como flujo en una cavidad (*cavity flow*). El *cavity flow* es banco habitual de pruebas de las ecuaciones de Navier-Stokes con número de Reynolds no superior a 10000, valor por encima del cual la solución estacionaria deja de ser estable [10]. No se han encontrado en la bibliografía resultados experimentales pero existen abundantes resultados numéricos y numerosas comparaciones entre ellos.

Las ecuaciones de aguas someras proceden de las de Navier-Stokes, pero tienen diferencias respecto a ellas: la integración en la vertical, la ausencia de la variable presión, sustituida por el calado  $h$ , y las hipótesis simplificadoras enumeradas en 2. Pese a ello el análisis de los resultados de este test va a ser de utilidad para conseguir el objetivo propuesto.

El problema consiste en determinar el campo de velocidades en un recinto cuadrado de dimensiones  $1 \times 1 \text{ m}^2$ . Se emplea una malla de cálculo de  $81 \times 81$  nodos. Los elementos son triángulos rectángulos isósceles, cuyos catetos miden  $1.25 \text{ cm}$ . Las condiciones de contorno, de tipo Dirichlet, son: en el lado superior (incluidos los extremos)  $u = 1$ ,  $v = 0$ ; en los otros tres lados,  $u = v = 0$  (condición de no-deslizamiento).

Los resultados dependerán del número de Reynolds  $Re$  utilizado. Tomando para las escalas de velocidad y longitud los valores  $V = 1$  y  $L = 1$ , resulta para  $Re$  el valor

$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{1}{\nu}, \quad (54)$$

lo que va a permitir, variando el valor de la viscosidad impuesta, simular los diferentes números de Reynolds para los que se desea probar el modelo.

Se resuelve en primer lugar un ejemplo sin viscosidad y otros dos con valores de  $\nu$  de  $0.0025$  y  $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ , que corresponderían a números de Reynolds de 400 y 100 respectivamente. En la figura 5 puede verse la representación de las líneas de corriente en los casos  $\nu = 0$  y  $\nu = 0.01$  y en la figura 6 la comparación de las componentes  $u$  de la velocidad en  $x = 0.5$ , para los tres casos calculados.

Se observa que la diferencia entre los distintos casos es muy inferior a la que cabría esperar. La causa de este resultado se encuentra en la elevada difusión numérica inherente a los métodos de primer orden, que impide apreciar el efecto de una diferencia entre valores de la viscosidad de 0.01.

### 6.2. Reducción de la viscosidad numérica

Para el cálculo de los valores del flujo discreto en el contorno de cada celda (3.3), se ha recurrido a los  $Q$ -esquemas de Van Leer. Como es sabido, el descentrado *upwind* estabiliza el esquema a costa de introducir una cierta cantidad de difusión numérica.

Una manera [2] de hacer menos difusivo el esquema es reducir todo lo posible el término de descentrado, siempre que se mantenga la estabilidad. Esto puede lograrse por medio

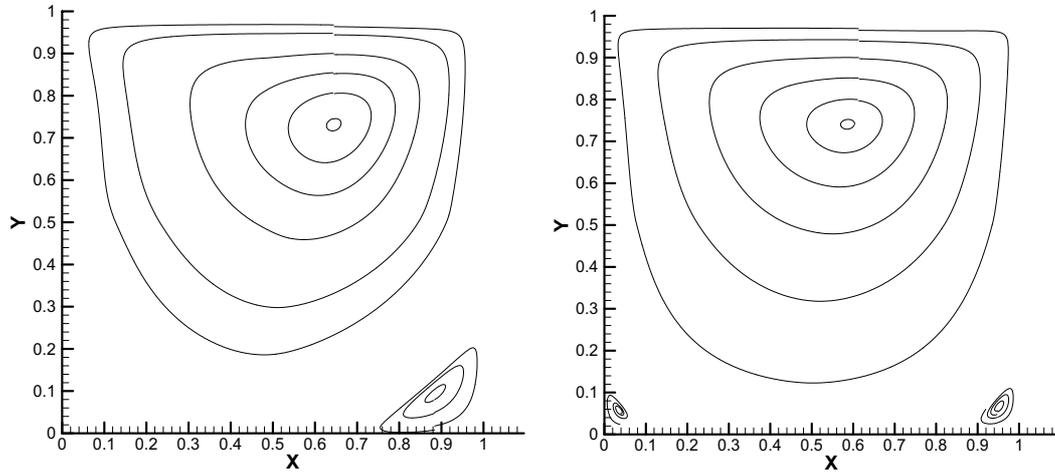


Figura 5: Líneas de corriente con a) viscosidad nula, b)  $\nu = 0.01$ .

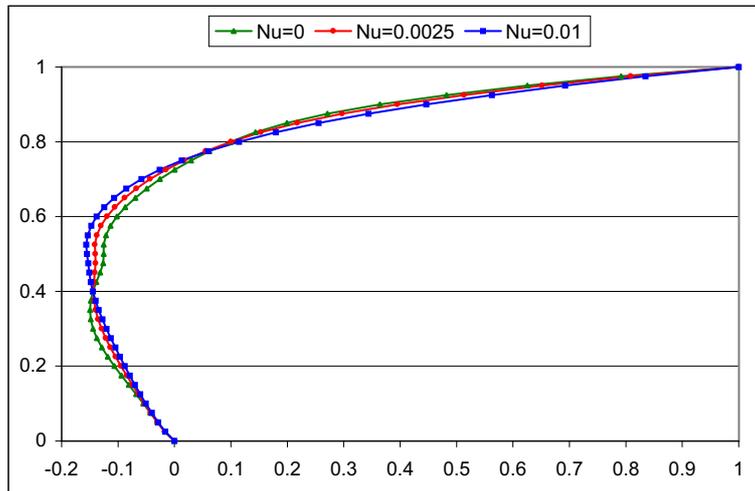


Figura 6: Sección central para distintas viscosidades.

de un coeficiente de descentrado  $c_d$ , de modo que la expresión (22) se convierte en

$$\phi_{ij} = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{U}_i^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) + \mathbf{Z}(\mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})}{2} - c_d \frac{1}{2} |\mathbf{Q}|_{U_Q} (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n), \quad 0 \leq c_d \leq 1. \quad (55)$$

Si  $c_d = 0$  se trata de un esquema centrado. Si  $c_d = 1$  la reducción del descentrado es nula. Lin *et al.* [6] (citados por [2]) han utilizado con éxito valores de  $c_d = 0.1$  en cálculos acústicos. En el modelo LES descrito en [2], se han necesitado valores menores (0.03-0.05), para obtener buenos resultados. Esto tiene un coste computacional pues, como afirma este autor y se comprueba en el siguiente apartado, el mínimo valor de  $c_d$  necesario para la estabilidad disminuye con el tamaño de malla.

Tras realizar distintas pruebas, el valor más adecuado para  $c_d$  con la malla de  $81 \times 81$  nodos ha resultado ser 0.03. Se muestran, en este caso, las velocidades en la sección central obtenidas con tres valores de  $\nu$  (figura 7) así como las líneas de corriente (figuras 8-10).

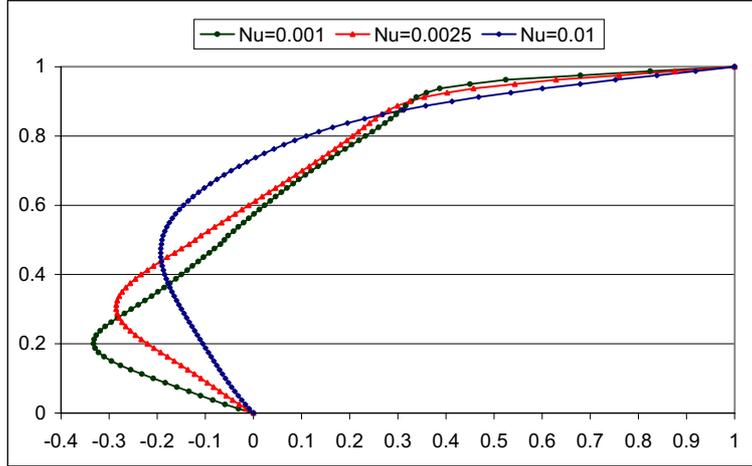


Figura 7:  $c_d = 0.03$ . Sección central para distintas viscosidades

### 6.3. Comparación de las posiciones de los centros.

En la tabla 1 se comparan las coordenadas del centro del remolino principal con las referidas por distintos autores [4, 7]. Se puede destacar lo siguiente:

- Para  $Re = 100$  los resultados del presente modelo quedan en posición intermedia entre los demás.
- Para  $Re = 400$  el centro del remolino se desplaza ligeramente hacia arriba y a la derecha, en comparación con la mayor parte de los resultados de referencia.
- Para  $Re = 1000$  el centro del remolino se encuentra encima y a la derecha de los demás resultados, aunque muy ligeramente.

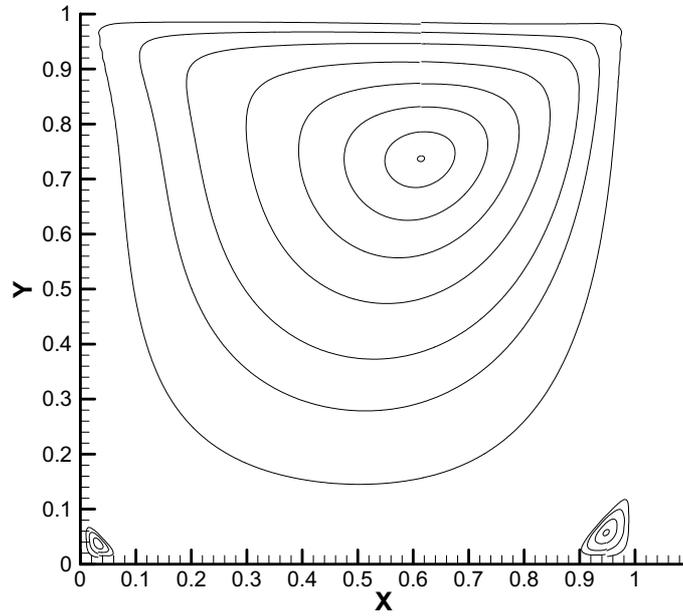


Figura 8:  $\nu = 0.01$  ( $Re = 100$ ). Líneas de corriente.

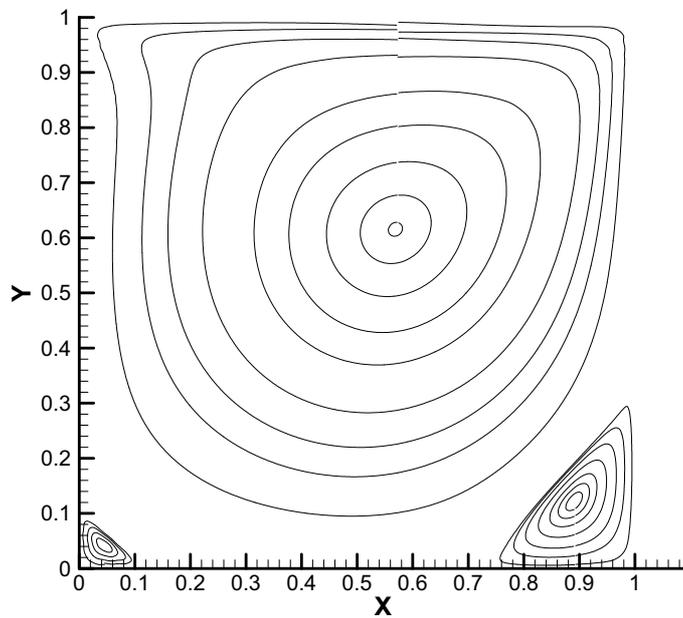
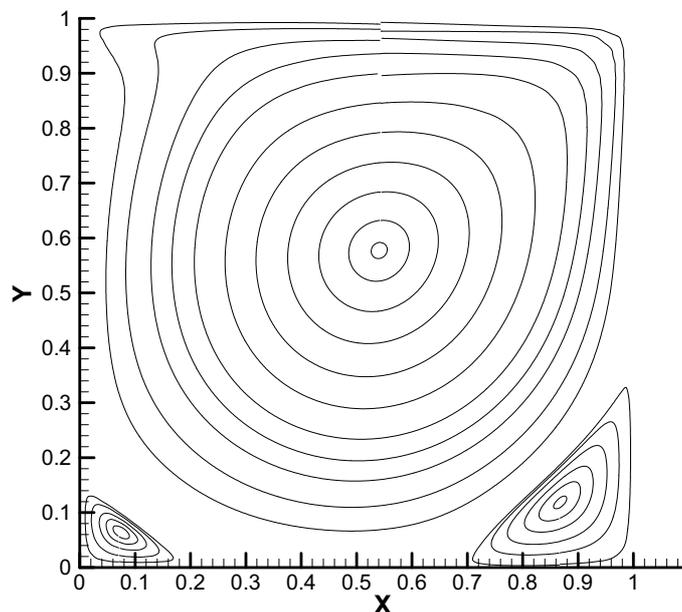


Figura 9:  $\nu = 0.0025$  ( $Re = 400$ ). Líneas de corriente.


 Figura 10:  $\nu = 0.001$  ( $Re = 1000$ ). Líneas de corriente.

Nº Reynolds	Referencia	$x_c$	$y_c$
$Re = 100$ ( $\nu = 0.01$ )	Burggraaf (1966)	0.62	0.74
	Tuann & Olson (1978)	0.61	0.722
	Donnea & Huerta (2002)	0.62	0.74
	Sahin & Owens (2003)	0.6189	0.7400
	Actual	0.615	0.737
$Re = 400$ ( $\nu = 0.0025$ )	Burggraaf (1966)	0.560	0.620
	Ozawa (1975)	0.559	0.614
	Tuann & Olson (1978)	0.506	0.583
	Donnea & Huerta (2002)	0.568	0.606
	Sahin & Owens (2003)	0.5536	0.6075
Actual	0.569	0.615	
$Re = 1000$ ( $\nu = 0.001$ )	Ozawa (1975)	0.533	0.569
	Goda (1979)	0.538	0.575
	Donnea & Huerta (2002)	0.540	0.573
	Sahin & Owens (2003)	0.5335	0.5639
	Actual	0.541	0.577

Tabla 1: Coordenadas del centro del remolino principal.

Por otro lado, observando las figuras 8-10, se aprecia que al aumentar la viscosidad el centro del remolino se desplaza hacia arriba y hacia la derecha. Esto ayuda a interpretar el hecho de que, respecto a los valores de referencia, el centro del remolino se desplace hacia arriba y a la derecha al disminuir la  $\nu$ : la viscosidad numérica introducida por el

descentrado (aunque reducida por el uso de  $c_d$ ) es fija, por lo que su importancia relativa crece al disminuir la  $\nu$  impuesta; es decir, el comportamiento va siendo más difusivo.

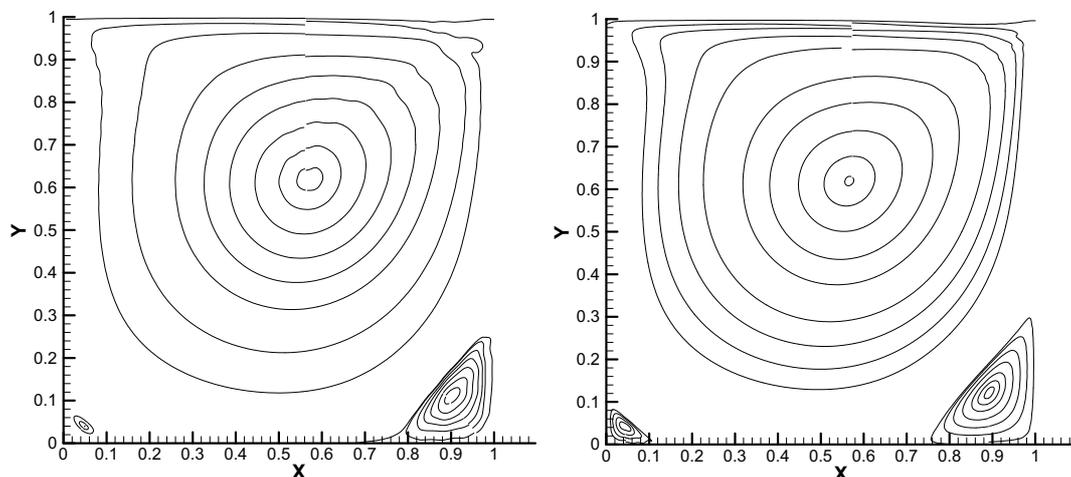


Figura 11:  $\nu = 0.0025$ . a)  $c_d = 0.015$ , malla 41 x 41. b)  $c_d = 0.010$ , malla 81 x 81.

Se comprueba por último la afirmación hecha al principio del apartado: el mínimo valor de  $c_d$  necesario para la estabilidad disminuye con el tamaño de malla, lo que significa que una malla más fina permite utilizar menores valores de  $c_d$  sin que aparezcan inestabilidades, mejorando así los resultados. En la figura 11 se representan las líneas de corriente obtenidas con  $\nu = 0.025$ : en a) la malla utilizada es de 41 x 41 nodos y  $c_d = 0.015$ ; en b) se ha utilizado una malla de 81 x 81 nodos con  $c_d = 0.01$ . En el segundo caso los tres remolinos se forman mejor y las líneas de corriente prácticamente no sufren las inestabilidades del primero, a pesar de haber sido calculadas con un valor menor del coeficiente.

## 7. CONCLUSIONES

Se ha obtenido un modelo numérico para las ecuaciones de aguas someras con término turbulento, mostrando que la toma en consideración de dicho término permite representar flujos viscosos. Sin embargo, la difusión numérica producida por el descentrado *upwind* impide apreciar el efecto de los distintos valores introducidos para la viscosidad. Por ello es importante que el método sea lo menos difusivo posible con el fin de que la viscosidad numérica no interfiera con la impuesta, falseando los resultados. La aplicación de un coeficiente al sumando de descentrado del término de flujo produce una eficaz reducción de esta difusión o viscosidad numérica.

## 8. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la DXID-CIIC de la *Xunta de Galicia* (Proyectos PGIDT01PXI11802PR y PGIDIT03PXIC118001PN), por la *Consellería de Pesca e Asuntos Marítimos* de la *Xunta de Galicia* (Proyecto Lombos del Ulla), por la

SGPI–DGI del Ministerio de Ciencia y Tecnología del Gobierno de España (Proyecto DPI-2002-00297) y por ayudas de investigación de la Universidad de A Coruña y de la Fundación de la Ingeniería Civil de Galicia.

## REFERENCIAS

- [1] A. Bermúdez, A. Dervieux, J. Desideri and M.E. Vázquez, *Upwind schemes for the two dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. Vol. **155**, pp. 49–72 (1998).
- [2] T. Bui, *A parallel, finite-volume algorithm for large-eddy simulation of turbulent flows*, NASA/TM-1999-206570, Dryden Flight Research Center, Edwards, California (1999).
- [3] M.H. Chaudhry, *Open channel flow*, Prentice Hall, New Jersey (1993).
- [4] J. Donea and A. Huerta, *Finite element methods for flow problems*, John Wiley & Sons, Chichester, England (2003).
- [5] J. Fe, *Aplicación del método de volúmenes finitos a la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras con incorporación de los esfuerzos debidos a la turbulencia*, Tesis doctoral, Universidad de A Coruña (2005).
- [6] S. Lin, Y. Chen, and S. Shih, *Numerical study of MUSCL schemes for computational aeroacoustics*, AIAA-97-0023, January (1997).
- [7] M. Sahin and R.G. Owens, *A novel fully implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem-Part I: High Reynolds number flow calculations*, Int. j. numer. methods fluids **42**, pp. 52–77 (2003).
- [8] M.E. Vázquez, *Estudio de esquemas descentrados para su aplicación a las leyes de conservación hiperbólicas con términos fuente*, Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela (1994).
- [9] M.E. Vázquez, *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, J. Comput. Phys. Vol. **148**, pp. 497–526 (1999).
- [10] P. Vellando, J. Puertas and I. Colominas, *SUPG stabilized finite element resolution of the Navier-Stokes equations. Applications to water treatment engineering*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. Vol. **191**, pp. 5899–5922 (2002).