

Preprint of the paper

"Desarrollo de una formulación basada en los métodos multiescala para la resolución de problemas de transporte convectivo-difusivos"

R, López-Jato, I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro (2002)

Proceedings del "V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería" (en CD-ROM).

Madrid, España.

DESARROLLO DE UNA FORMULACIÓN BASADA EN LOS MÉTODOS MULTIESCALA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE CONVECTIVO-DIFUSIVOS

Raquel López-Jato^{*}, Ignasi Colominas^{*}, Fermín Navarrina^{*} y Manuel Casteleiro^{*}

^{*} Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería, GMNI
Departamento de Métodos Matemáticos e de Representación,
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (ETSICCP),
Universidade da Coruña,
Campus de Elviña, 15192 La Coruña, España
e-mail: lopezr@iccp.udc.es, web: <http://caminos.udc.es/gmni>

Palabras clave: Convección-difusión, métodos estabilizados, multiescala

Resumen.

La resolución de la ecuación de convección-difusión mediante el Método de los Elementos Finitos con ponderación convencional tipo Galerkin presenta numerosas inestabilidades cuando la velocidad del fluido es elevada. Para la eliminación de estas oscilaciones, se han propuesto diferentes formulaciones alternativas a la de Galerkin. Los Métodos Multiescala tratan de justificar la adición de términos estabilizadores tomando como punto de partida la identificación de varias escalas en la solución de la ecuación diferencial.

1. INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos Finitos ha sido aplicado con éxito a un gran número de problemas de Mecánica Computacional. Sin embargo, la resolución de problemas de fluidos mediante este método presenta numerosas dificultades [7].

La ecuación del transporte por convección-difusión aúna dos procesos diferentes: el difusivo, descrito matemáticamente por la ecuación parabólica

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla \phi), \quad (1)$$

donde ϕ es la incógnita y K la difusividad del medio; y el convectivo, que aparece cuando el fluido está en movimiento. Este movimiento puede ser modelado por la ecuación hiperbólica

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

donde u es la velocidad de movimiento del fluido. Teniendo en cuenta estos dos procesos, la expresión que los rige de forma conjunta será la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (k \nabla \phi) \quad \text{en } \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$\phi = \phi_0 \quad \text{en } \Gamma_1; \quad \nabla \phi \cdot n = \gamma - a\phi \quad \text{en } \Gamma_2; \quad \phi(\Omega, 0) = f, \quad (4)$$

siendo Γ_1 , y Γ_2 diferentes partes del contorno Γ .

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

Al aplicar el Método de los Elementos Finitos haciendo uso de una formulación de Galerkin a la resolución de la ecuación del transporte por convección-difusión, se obtienen resultados satisfactorios cuando los términos difusivos son altos; sin embargo, cuando es el término convectivo el predominante, es decir, cuando el campo de velocidades es importante (números de Péclet elevados) aparecen numerosas inestabilidades en la solución numérica. Para la eliminación de estas oscilaciones en la solución, se han propuesto a lo largo del tiempo, formulaciones alternativas a la de Galerkin que intentan eliminar dichas oscilaciones en la solución numérica, o, al menos, reducirlas [8].

En este artículo se estudia una de estas formulaciones basada en los Métodos Multiescala aplicada a la resolución de la ecuación de convección-difusión en una dimensión. Especialmente se estudiarán y resolverán numéricamente problemas en los que la velocidad del fluido es importante en comparación con el término difusivo. Estos resultados se compararán con los resultados obtenidos al resolver dicha ecuación mediante formulaciones tipo Galerkin.

2. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS APLICANDO FORMULACIÓN TIPO GALERKIN

Para abordar numéricamente la resolución de la ecuación del transporte por convección-difusión aplicando el Método de los Elementos Finitos, es necesario transformar el problema inicial, continuo, en un problema discreto. Este proceso de discretización consta de dos partes. La primera de ellas consiste en obtener la forma débil a través del planteamiento de una formulación en residuos ponderados del problema. Una vez obtenida la forma débil, el segundo paso es la interpolación funcional de la solución.

2.1. Formulación en residuos ponderados del problema. Obtención de la forma débil.

La expresión en residuos ponderados del problema definido en (3) y (4) viene dada por

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot (k \nabla \phi) \right\} w d\Omega + \int_{\Gamma_2} \{ \nabla \phi \cdot n - \gamma + a\phi \} w_{\Gamma_2} d\Gamma_2 = 0, \quad \forall w, w_{\Gamma_2}$$

$$\phi = \phi_0 \text{ en } \Gamma_1, \quad (5)$$

donde el objetivo es encontrar la solución ϕ que verifique dicha ecuación integral.

La forma débil de este problema será la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \left\{ w \frac{\partial \phi}{\partial t} + w u \cdot \nabla \phi + k \nabla \phi \cdot \nabla w \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_2} a \phi k w d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \gamma k w d\Gamma_2, \quad \forall w$$

$$\phi = \phi_0 \text{ en } \Gamma_1, \quad (6)$$

2.2. Interpolación funcional

Una vez obtenida la forma débil del problema, el segundo paso es intentar obtener una solución numérica $\tilde{\phi}$ aproximada a la solución exacta del problema.

Previamente a esta aproximación, es necesario realizar una discretización del dominio estudiado, Ω , dividiéndolo en una serie de elementos

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots \cup \Omega_n$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j$$

Esta discretización del dominio es una de las características más representativas del Método de los Elementos Finitos. La aproximación a la solución se puede expresar como la suma de los productos de unas funciones de forma p_j por unos coeficientes ϕ_j , correspondientes a los valores nodales, que habrá que determinar

$$\phi \approx \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t) p_j(\mathbf{x}), \quad (7)$$

Al sustituir ϕ por $\tilde{\phi}$, la expresión de la forma débil (6) no se satisface para cualquier función w , por lo que impondremos que se verifique para un número "m" de funciones w_i

$$\int_{\Omega} \left\{ w_i \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + w_i u \cdot \nabla \tilde{\phi} + k \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla w_i \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_2} a \tilde{\phi} k w_i d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \gamma k w_i d\Gamma_2, \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, m$$

En el MEF, este número de funciones w_i se hace igual al número de componentes del espacio funcional de las funciones de prueba, de tal forma que

$$m = n$$

y en la formulación tipo Galerkin, las funciones de test w_i se definen como iguales a las de prueba o de forma p_i

$$w_i = p_i$$

Como resultado de este proceso se obtiene un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{B} \frac{d\phi}{dt} + \mathbf{A} \phi = \mathbf{c}, \quad (9)$$

donde

$$B_{ij} = \int_{\Omega_h} p_i p_j d\Omega_h, \quad i, j = 1, n$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_h} (u \cdot \nabla p_j) p_i d\Omega_h + \int_{\Omega_h} k \nabla p_j \cdot \nabla p_i d\Omega_h + \int_{\Gamma_{2h}} a k p_i p_j d\Gamma_{2h}, \quad i, j = 1, n$$

$$c_i = \int_{\Gamma_{2h}} \gamma k p_i d\Gamma_{2h}, \quad i = 1, n, \quad (10)$$

$$\phi = \phi_0 \text{ en } \Gamma_1, \quad (11)$$

$$\phi(\Omega, 0) = f$$

donde Ω_h son los elementos en que hemos dividido el dominio Ω y Γ_{2h} los contornos de dichos elementos.

En el caso de un problema unidimensional, con velocidad constante u y difusividad k constante, la expresión sería la siguiente

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} p_i u \frac{\partial p_j}{\partial x} + k \frac{\partial p_j}{\partial x} \frac{\partial p_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma_2} c k p_j p_i d\Gamma_2 \right] \phi_j =$$

$$= \int_{\Gamma_2} \gamma k p_i d\Gamma_2 ; \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

3. TÉCNICAS DE ESTABILIZACIÓN

A la vista de las importantes oscilaciones que presenta la solución numérica obtenida a partir de la aplicación del MEF con formulación convencional Galerkin, una de las primeras soluciones posibles para estabilizar el problema es utilizar un tamaño de elemento h más pequeño. Esta solución supondría un remallado, que se podrá abordar en caso de problemas unidimensionales, pero que sería demasiado costoso en el caso de dos o tres dimensiones. Por esta razón, para la eliminación de estas oscilaciones en la solución numérica, se han propuesto formulaciones alternativas a la de Galerkin: Método de la Difusividad Artificial(1982), Formulaciones Petrov-Galerkin(1982), Galerkin Least-Squares(1989)...

Existen a grandes rasgos tres formas de entender la estabilización. Los métodos más simples consisten en introducir un término difusivo adicional que aumente la simetría del problema propuesto. Una propuesta más general consiste en buscar la reducción de las oscilaciones obtenidas al aplicar el Método de los Elementos Finitos eligiendo unas funciones de test distintas a las de prueba. Por último tendríamos aquellas técnicas que consisten en estabilizar la solución añadiendo un término a la expresión (8) de la forma

$$\int_{\Omega_h} \mathcal{P}(w_h) \tau \mathcal{R}(p_h) d\Omega_h, \quad (13)$$

donde $\mathcal{P}(w_h)$ es un operador aplicado al espacio funcional w_h de las funciones de test, τ un parámetro y, $\mathcal{R}(p_h)$ el residuo de la ecuación diferencial

$$\mathcal{R}(p_h) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\phi} - \nabla \cdot (k \nabla \tilde{\phi}). \quad (14)$$

4. FUNDAMENTO DE LOS MÉTODOS MULTIESCALA

Como hemos visto en el punto anterior, las formulaciones alternativas a la de Galerkin para la estabilización de la solución numérica añaden básicamente un término más a la formulación. Los Métodos Multiescala son recientes [1], y tratan de explicar y justificar la adición de estos términos y proporcionar un fundamento teórico firme de las técnicas de estabilización.

El punto de partida de los Métodos Multiescala consiste en la identificación de varias escalas en la solución de la ecuación diferencial

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

De esta forma, el problema original se subdivide en dos problemas, y también su solución. De las dos partes en que se divide la solución ϕ , la primera de ellas, $\bar{\phi}$, se resolverá numéricamente mientras que ϕ' se calculará o estimará analíticamente. Se supone que ϕ' es la causante de las oscilaciones de la solución numérica, por lo que se intentará aislar, obteniendo una formulación únicamente en función de $\bar{\phi}$. Para abordar la resolución numérica de $\bar{\phi}$ se utilizará el Método

de los Elementos Finitos con una formulación convencional de tipo Galerkin, aunque en dicha formulación aparecerá, como resultado de la descomposición del problema en dos partes, un término más, que será el que se identificará como término estabilizador de la solución.

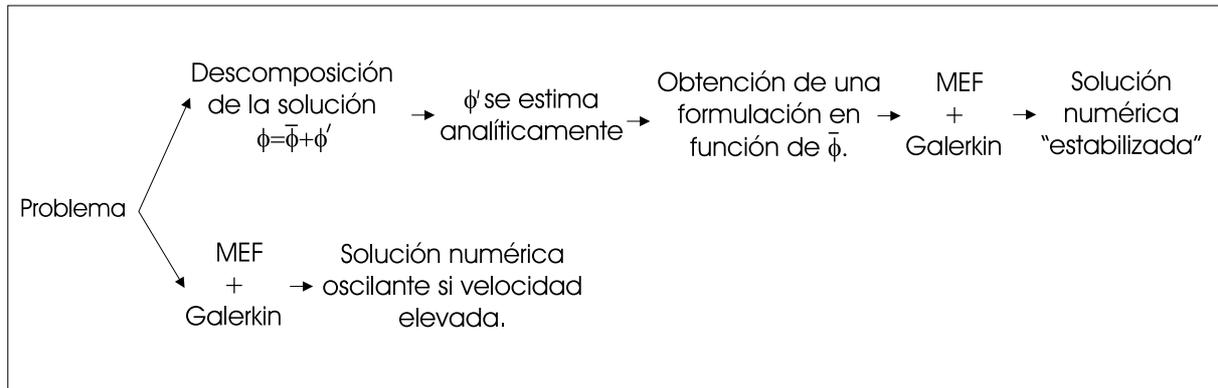


Figura 1. Esquema de aplicación del Método Multiescala

5. FORMULACIÓN DE LOS MÉTODOS MULTIESCALA

Consideraremos un problema genérico definido en el dominio Ω , con contorno Γ , el operador diferencial $M(\cdot)$ correspondiente a la ecuación diferencial y la condición de contorno siguientes,

$$M(\phi) = f \text{ en } \Omega$$

$$\phi = \phi_0 \text{ en } \Gamma \quad (15)$$

donde f es una función conocida.

Para la aplicación de los Métodos Multiescala es necesario definir la expresión en residuos ponderados del problema: encontrar ϕ que verifique la ecuación integral

$$\int_{\Omega} (M(\phi) - f) w \, d\Omega = 0 \quad \forall w$$

$$\phi = \phi_0 \text{ en } \Gamma \quad (16)$$

En este punto es donde introduciremos la descomposición de la solución en dos "escalas". Las funciones de peso o de ponderación también se descompondrán de forma análoga. Así

$$\begin{aligned}\phi &= \bar{\phi} + \phi' \\ w &= \bar{w} + w'\end{aligned}$$

por lo que la ecuación integral será la siguiente:

$$\int_{\Omega} (M(\bar{\phi} + \phi') - f)(\bar{w} + w') d\Omega = 0 \quad (17)$$

Las funciones \bar{w} y w' se definirán linealmente independientes, por lo que la expresión integral anterior se puede subdividir en dos problemas separados:

1. Problema A (\bar{w}).

$$\int_{\Omega} M(\bar{\phi})\bar{w} d\Omega + \int_{\Omega} M(\phi')\bar{w} d\Omega = \int_{\Omega} f\bar{w} d\Omega \quad \forall \bar{w} \quad (18)$$

2. Problema B (w').

$$\int_{\Omega} M(\bar{\phi})w' d\Omega + \int_{\Omega} M(\phi')w' d\Omega = \int_{\Omega} fw' d\Omega \quad \forall w' \quad (19)$$

Dado que el Método de los Elementos Finitos requiere la descomposición del dominio de definición del problema en subdominios, el segundo de los subproblemas se resolverá para cada elemento k en que se dividirá el dominio. Como hipótesis se asumirá que

$$\phi' = w' = 0 \quad \text{en } \Gamma'_k \quad (20)$$

donde Γ'_k serán los contornos de los elementos en que se divide el dominio Ω ,

$$\begin{aligned}\Omega' &= \bigcup_k \Omega_k \\ \Gamma' &= \bigcup_k \Gamma'_k\end{aligned}$$

de tal forma que

$$\phi' = \sum_k \phi'_k, \quad (21)$$

El problema B será, por lo tanto desarrollado para cada elemento y el resultado del desarrollo de la expresión B se introducirá en el problema A.

A nivel de cada elemento tendremos:

$$\int_{\Omega_k} M(\bar{\phi})w' d\Omega_k + \int_{\Omega_k} M(\phi')w' d\Omega_k = \int_{\Omega_k} fw' d\Omega_k, \quad \forall w' \quad (22)$$

o bien

$$\int_{\Omega_k} M(\phi')w' d\Omega_k = \int_{\Omega_k} fw' d\Omega_k - \int_{\Omega_k} M(\bar{\phi})w' d\Omega_k, \quad \forall w' \quad (23)$$

de modo que se obtiene una ecuación integral para cada elemento k , que corresponde a la siguiente ecuación:

$$M(\phi') = -M(\bar{\phi}) + f \text{ en } \Omega_k$$

$$\phi' = 0 \text{ en } \Gamma'_k \quad (24)$$

Esta ecuación se resolverá analíticamente por medio de las funciones de Green, y el resultado se introducirá en el problema A derivado de la descomposición integral

$$\phi'(k) = - \int_{\Omega_k} G (M(\bar{\phi}) - f) d\Omega_k = H_k(M(\bar{\phi}) - f) \quad (25)$$

donde G es la función de Green correspondiente al problema (24).

1. Problema A (\bar{w}).

$$\int_{\Omega} M(\bar{\phi})\bar{w} d\Omega + \int_{\Omega} M(\phi')\bar{w} d\Omega = \int_{\Omega} f\bar{w} d\Omega, \quad \forall \bar{w} \quad (26)$$

donde

$$M(\phi') = \sum_k M(H_k(M(\bar{\phi}) - f)) \quad (27)$$

Para la resolución numérica de esta última expresión integral se aplicará una resolución con ponderación convencional tipo Galerkin, aunque aparecerá, como consecuencia de la descomposición inicial del problema, un término más en la formulación, que será el término que contribuirá a la estabilización de la solución en el caso de problemas de transporte convectivo-difusivos con velocidad del fluido elevada.

Por lo tanto el esquema general de la formulación de los Métodos Multiescala será el siguiente,

$$0 = \text{Término de Galerkin} + \text{Término Multiescala}$$

6. APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DEL TRANSPORTE POR CONVECCIÓN-DIFUSIÓN EN UNA DIMENSIÓN.

En el caso de la ecuación del transporte por convección-difusión, el operador $M(\cdot)$ definido en el punto anterior constaría de dos partes, una parte convectiva y otra difusiva

$$M(\cdot) = M_{conv} + M_{dif}$$

$$u \frac{d\phi}{dx} - k \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\phi(x=0) = \phi_0 \quad ; \quad \phi(x=L) = \phi_L \quad (28)$$

Como se ha expuesto en el Apartado 3. Técnicas de estabilización, una de las formas de entender la estabilización es añadiendo un término más de la forma,

$$\int_{\Omega_h} \mathcal{P}(w_h) \tau \mathcal{R}(p_h) d\Omega_h, \quad (29)$$

donde el problema será encontrar un valor de τ adecuado para obtener una solución numérica en la que no existan oscilaciones para velocidades elevadas.

Si particularizamos el resultado obtenido de la aplicación de los Métodos Multiescala a la ecuación de convección- difusión en 1D obtenemos como término estabilizador el siguiente,

$$\int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} (-M^*(\bar{w})(s)) G(x, s) M(\bar{\phi})(x) dx ds \quad (30)$$

donde G es la función de Green correspondiente al problema de convección-difusión.

A partir de esta expresión deducida de la aplicación de los Métodos Multiescala, han ido apareciendo simplificaciones encaminadas a determinar un valor estimativo del parámetro τ .

En numerosos estudios [1, 3] se realiza una aproximación a la función de Green por medio de la Delta de Dirac de la siguiente forma,

$$G(x, s) \approx \tilde{G}(x, s) = \tau \delta(s - x) \quad (31)$$

Realizando esta aproximación se deduce un valor del parámetro τ en función de la función de Green correspondiente.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} (-M^*(\bar{w})(s)) G(x, s) M(\bar{\phi})(x) dx ds \approx \\ & \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} (-M^*(\bar{w})(s)) \tilde{G}(x, s) M(\bar{\phi})(x) dx ds = \\ & \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} (-M^*(\bar{w})(s)) \tau \delta(s - x) M(\bar{\phi})(x) dx ds = \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_k} (-M^*(\bar{w})(x))\tau M(\bar{\phi})(x)dx \quad (32)$$

Teniendo en cuenta la aproximación (31), el valor del parámetro τ se podría calcular a partir de la siguiente expresión

$$\int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} \tau \delta(s-x) dx ds \approx \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} G(x,s) dx ds \quad (33)$$

$$\tau = \frac{1}{h} \int_{\Omega_k} \int_{\Omega_k} G(x,s) dx ds \quad (34)$$

donde h es el tamaño típico del elemento.

En el caso que estamos estudiando, la ecuación del transporte por convección-difusión en 1D (28), la función de Green G correspondiente será la siguiente

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1(s)(1 - e^{-\frac{2x}{h}Pe}), & x \leq s \\ C_2(s)(e^{-\frac{2x}{h}Pe} - e^{-2Pe}), & x \geq s \end{cases} \quad (35)$$

con

$$\begin{cases} C_1(s) = \frac{1 - e^{-2Pe(1 - (\frac{x}{h}))}}{u(1 - e^{-2Pe})} \\ C_2(s) = \frac{e^{2Pe(\frac{x}{h})} - 1}{u(1 - e^{-2Pe})} \end{cases} \quad (36)$$

donde Pe es el número de Péclet de cada elemento

$$Pe = \frac{uh}{2k}$$

u : velocidad en el elemento

h : tamaño del elemento

k : difusividad del medio

7. EJEMPLOS DE APLICACIÓN EN 1D

El problema resuelto es el siguiente, correspondiente a la ecuación del transporte por convección-difusión en una dimensión, en ausencia de términos fuente y término reactivo, y para el caso estacionario. Por lo tanto resolveremos:

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L; \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(L) = \frac{u}{k}[\phi_L - \phi(L)]$$

El dominio considerado y las condiciones de contorno correspondientes se presentan en el siguiente esquema,

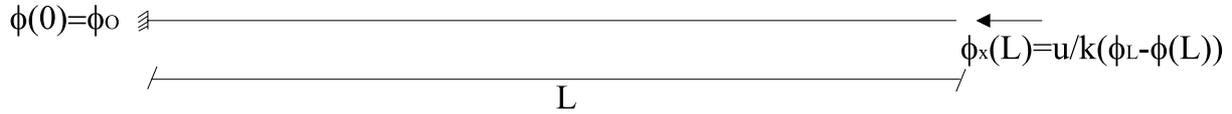


Figura 2. Esquema del problema resuelto

El primero de los ejemplos (Fig.3) corresponde a la resolución del problema antes descrito realizando una discretización del dominio de 21 nodos. Se presentan las soluciones obtenidas al utilizar Galerkin, Petrov-Galerkin y el Método Multiescala usando el parámetro de estabilización obtenido a partir de la función de Green correspondiente. En este caso, la solución exacta se ha calculado en igual número de puntos que la solución numérica.

En la segunda de las gráficas de la Figura 3 se han obtenido diferentes soluciones a partir de la formulación Multiescala anteriormente descrita. Únicamente se ha representado la zona final del dominio, $13 \leq x \leq 20$, ya que en el resto las diferencias entre la solución exacta, Petrov-Galerkin y Multiescala son prácticamente inapreciables. Las distintas soluciones Multiescala se han obtenido variando ligeramente el parámetro τ obtenido según (34). Se observa una evolución hacia la solución exacta de forma monótona. Este comportamiento es debido al aislamiento que se ha realizado de la escala resoluble analíticamente ϕ' .

Los parámetros utilizados en este ejemplo son los siguientes:

$$L = 20, \phi_0 = 2, \phi_L = 1, u = 10 \text{ y } k = 0,02 \\ Pe = 250$$

El segundo ejemplo resuelto (Fig.4) corresponde al mismo problema, para dos discretizaciones distintas, de 10 y 50 elementos, y dos velocidades, $u=0.1$ y $u=1$. Se presentan igualmente las soluciones obtenidas al aplicar una formulación convencional tipo Galerkin, la formulación estabilizada Petrov-Galerkin y la formulación Multiescala. Se presenta además la solución exacta del problema. En el caso de la Fig.4.d), se ha realizado una ampliación de la zona final del dominio, correspondiente a $8 \leq x \leq 10$, que es donde aparecen las oscilaciones más importantes.

En este caso los parámetros utilizados han sido los siguientes:

$$L = 10, \phi_0 = 2, \phi_L = 0,005 \text{ y } k = 0,09$$

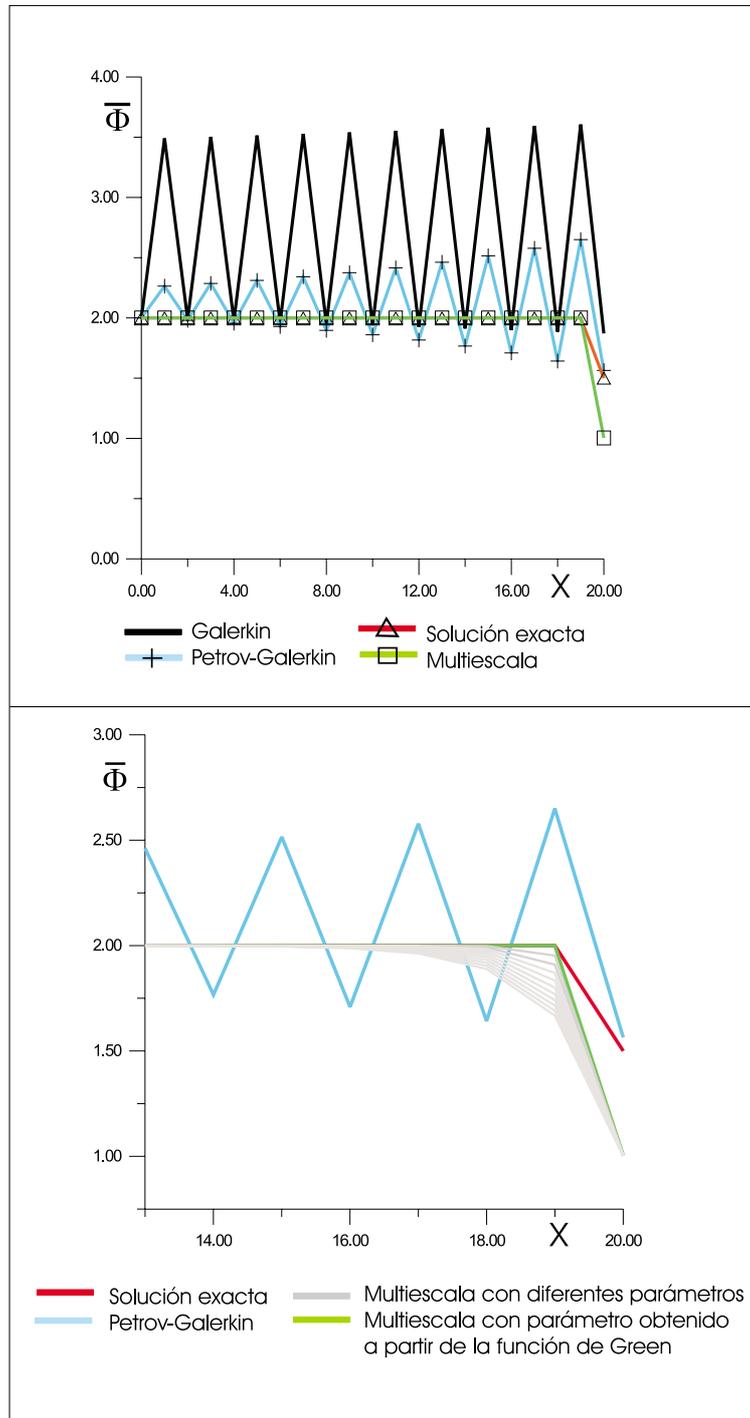


Figura 3. Soluciones obtenidas para $u=10$

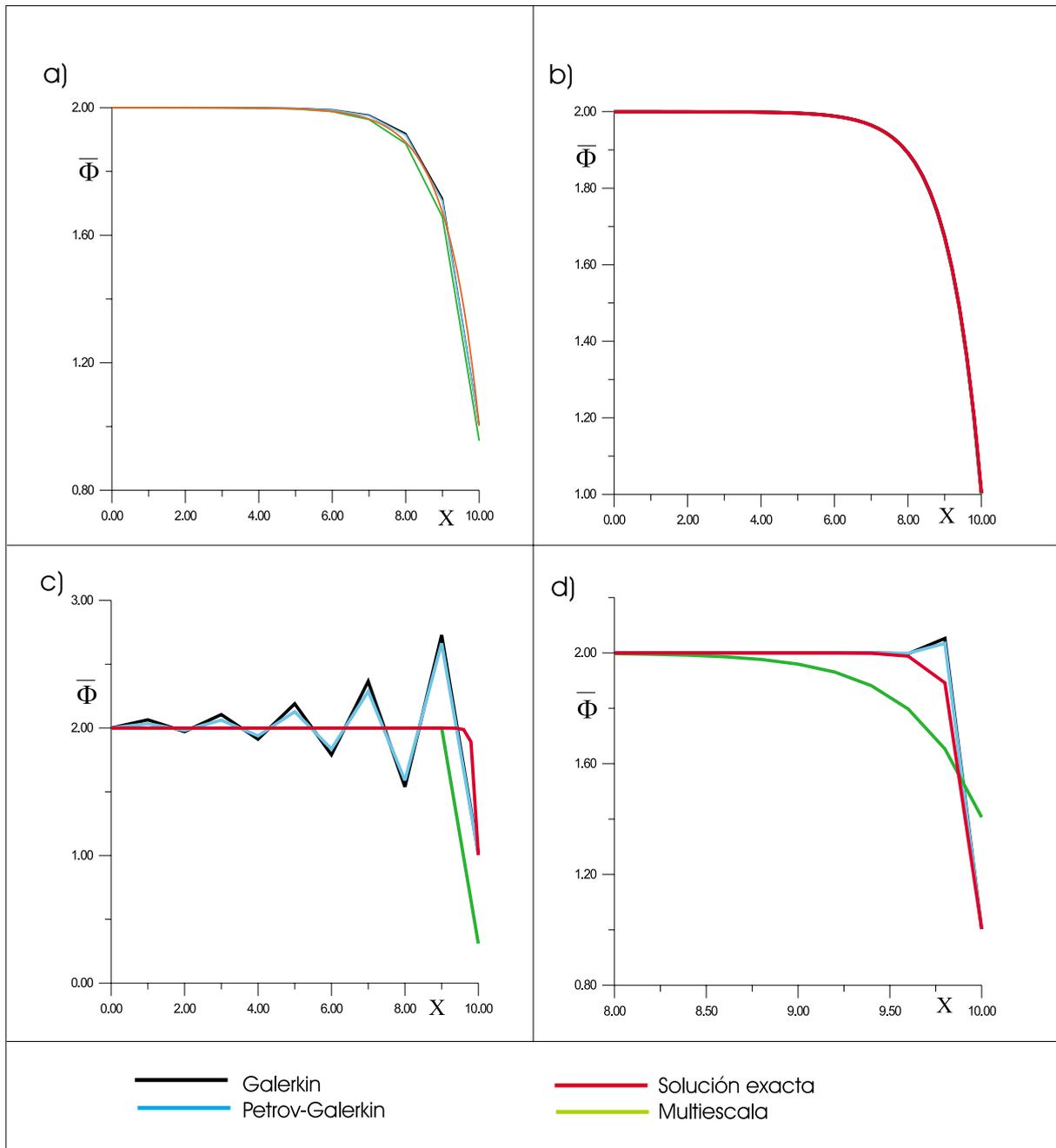


Figura 4. Soluciones obtenidas para a) $u=0.1$, 10 elementos, n° Péclet=0.55. b) $u=0.1$, 50 elementos, n° Péclet=0.11. c) $u=1$, 10 elementos, n° Péclet=5.5. d) $u=1$, 50 elementos, n° Péclet=1.1

8. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en 1D muestran una reducción importante de las oscilaciones obtenidas al aplicar una formulación convencional tipo Galerkin, o incluso, un método estabilizado como es Petrov-Galerkin. Además, en la evolución de la solución, se observa un cierto comportamiento monótono al acercarnos al valor del parámetro de estabilización obtenido a partir de la función de Green correspondiente. Dicha evolución se observa en la segunda gráfica de la Figura 3, en donde se han representado diferentes soluciones resultantes de la aplicación del Método Multiescala pero variando ligeramente el valor del parámetro obtenido a partir de la función de Green. Dicho comportamiento es debido a la identificación inicial de dos escalas en la solución principal, en donde la parte resoluble analíticamente ϕ' se supone responsable de las oscilaciones de la solución numérica.

Debe destacarse que estos resultados han sido obtenidos únicamente para la escala resoluble numéricamente ($\bar{\phi}$), de las dos partes en las que se dividía la solución ϕ del problema. Se ha adoptado además como hipótesis que ϕ' se anula en los contornos de los elementos.

9. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Secretaría Xeral de I+D de la Xunta de Galicia, y por la Universidade da Coruña mediante proyectos y becas de investigación.

REFERENCIAS

- [1] T.J.R. Hughes, *Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **127**, 387-401, (1995).
- [2] F. Brezzi, L.P. Franca, T.J.R. Hughes, A. Russo, $b = \int g$, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **145**, 329-339 (1997).
- [3] T.J.R. Hughes, G.R. Feijóo, Luca Mazzei, Jean-Baptiste Quincy, *The variational multiscale method- a paradigm for computational mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **166**, 3-24 (1998).
- [4] L.P. Franca, A. Russo, *Recovering SUPG using Petrov-Galerkin formulations enriched with adjoint residual-free bubbles*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **182**, 333-339 (2000).
- [5] K. Garikipati, T.J.R. Hughes, *A variational multiscale approach to strain localization-formulation for multidimensional problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **188**, 39-60 (2000).
- [6] K. Terada, N. Kikuchi, *A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engrg, **190**, 5427-5464 (2001).
- [7] G.F. Carey, J.T. Oden, *Finite Elements. Fluid mechanics. Volume VI*, Prentice Hall, (1981).
- [8] R. Codina, *Comparison of some Finite Element Methods for solving the Diffusion-Convection-Reaction Equation*, International Center for Numerical Methods in Engineering. Publication CIMNE, **101**, (1996).