

Preprint of the paper:

"A BEM formulation for computing grounding transferred potentials"

I. Colominas, J. Gómez-Calviño, F. Navarrina, M. Casteleiro (2002)

Proceedings del "II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas". Guanajuato, México.

<http://caminos.udc.es/gmni>

UNA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA EL CÁLCULO DE POTENCIALES TRANSFERIDOS POR REDES DE TIERRA

**I. Colominas, J. Gómez Calviño,
F. Navarrina, M. Casteleiro**

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos
Universidad de La Coruña
Campus de Elviña
15071 La Coruña, España
e-mail: colominas@iccp.udc.es*

Resumen. El objetivo de este artículo es presentar una formulación numérica basada en el Método de Elementos de Contorno para abordar un problema común en la ingeniería eléctrica como la existencia de potenciales transferidos por redes de tierra en grandes instalaciones eléctricas.

Palabras clave: Elementos de Contorno, BEM, Teoría de Potencial

1 Introducción

Los sistemas de tomas de tierras de las instalaciones eléctricas tienen la finalidad de garantizar la integridad de los equipos eléctricos a la vez que aseguran la continuidad del suministro de electricidad, y salvaguardar que una persona que se encuentre en las proximidades de la instalación no pueda sufrir una descarga eléctrica peligrosa. Para estos fines, la resistencia equivalente del sistema de tierras debe ser lo suficientemente baja para permitir que las corrientes de fallo se disipen principalmente en el terreno a través del sistema de tierras, en tanto que las mayores diferencias de potencial entre puntos que una persona pueda contactar deben ser inferiores a determinados límites máximos establecidos por las normativas de seguridad, tales como las tensiones “de malla”, “de paso” y “de contacto”.¹

Los primeros métodos propuestos en la década de los sesenta para el cálculo y análisis de este tipo de instalaciones estaban basados en consideraciones de tipo práctico o en ideas intuitivas.² El avance que supuso disponer de esas técnicas fue notable, a pesar de la constatación de numerosos inconvenientes: sus limitaciones en cuanto al número máximo de conductores de la red de tierras, su disposición y el tamaño de la instalación a proteger,¹ los elevados requerimientos computacionales, los resultados poco realistas que se obtienen al incrementar la discretización de los electrodos, y la incertidumbre en el margen de error.³

Los autores del presente artículo han desarrollado en los últimos años una formulación numérica basada en el método de elementos de contorno para el análisis de redes de tierra con modelos de terreno isótropo y homogéneo. Ello ha permitido identificar muchos de los métodos intuitivos empleados en la práctica como casos particulares de esta formulación general.^{4,5} Así se ha podido explicar matemáticamente el comportamiento asintótico anómalo de esos métodos, se han establecido las fuentes de error y cómo subsanarlas y se han propuesto nuevas formulaciones numéricas más eficientes y precisas para la resolución de este tipo de problemas.^{4,5} Por otra parte, esta formulación se ha aplicado con éxito al análisis de tomas de tierra reales de grandes instalaciones eléctricas con un coste computacional perfectamente asumible tanto en tiempo de cálculo como de requerimientos de memoria.^{4,6} En fechas recientes, se ha establecido una generalización de esta formulación de elementos de contorno para el análisis de redes de tierra en terrenos estratificados, tanto vertical como horizontalmente,^{7,8} pudiendo resolver casos de gran interés práctico en la ingeniería eléctrica.

En este trabajo se presenta una formulación numérica que permite abordar un problema de gran envergadura en este ámbito de la ingeniería como es la existencia de potenciales transferidos en una instalación de puesta a tierra. La transferencia de potenciales entre la zona puesta a tierra y puntos exteriores de la misma a través del terreno hacia conductores enterrados (tales como raíles, tuberías o circuitos de comunicación) puede producir serios problemas de seguridad en las instalaciones de puesta a tierra y en su entorno.¹ A continuación se resume brevemente la formulación numérica empleada y se presenta el análisis de un problema de potenciales transferidos haciendo uso de la geometría real de una red de tierras.

2 Modelo matemático del problema físico

El punto de partida para la obtención de un modelo matemático del problema de la disipación de corriente eléctrica en un terreno son las ecuaciones del Electromagnetismo de Maxwell.⁹ Si se restringe el estudio a la obtención de la respuesta electrocinética en estado estacionario,^{1,5} y se considera despreciable la resistencia eléctrica interna de los electrodos que forman la red de tierras (y en consecuencia, el potencial se asume constante en la superficie de los electrodos), las ecuaciones del modelo matemático vienen dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\gamma} \operatorname{grad}(V) \text{ en } E; \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \text{ en } \Gamma_E; \quad V = V_\Gamma \text{ en } \Gamma; \quad V \rightarrow 0, \text{ si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1)$$

donde E denota el terreno, $\boldsymbol{\gamma}$ su tensor de conductividad, Γ_E la superficie del terreno, \mathbf{n}_E su versor normal unitario exterior y Γ la superficie de los electrodos.⁵ Así, cuando el electrodo de tierra adquiere un potencial V_Γ (también llamada “sobretensión de tierra”), de la solución del (1) resultan el potencial V y la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ en cualquier punto \mathbf{x} . Y conocida ésta se pueden obtener la densidad de corriente de pérdida σ que emana de un punto de la superficie de los electrodos Γ ($\sigma = \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}$, siendo \mathbf{n} el versor normal exterior a Γ), la resistencia equivalente del sistema y la intensidad total de corriente.⁵

La consideración de un determinado tipo de modelo de terreno conduce a distintas formulaciones, más o menos complejas dependiendo del modelo considerado. Aunque las técnicas descritas en el presente trabajo se pueden extender a modelos de terreno más sofisticados, como por ejemplo los modelos de terrenos en varias capas,^{7,8} en este artículo en el que abordamos el estudio de los potenciales transferidos por redes de tierras se considerará el modelo más sencillo, esto es un modelo de terreno homogéneo e isótropo. Así, el tensor $\boldsymbol{\gamma}$ se puede sustituir por una conductividad escalar aparente γ que en la práctica se determina experimentalmente.¹ Por otra parte, si se asume que la superficie del terreno es horizontal (hipótesis muy empleada en la práctica en la mayor parte de los métodos y técnicas para el análisis de tierras, atendiendo al hecho de la nivelación y regularización que se realiza durante la fase constructiva de la instalación de las tierras), la simetría permite reescribir el problema (1) en términos del Problema Exterior de Dirichlet: $\Delta V = 0$ en E , $V = V_\Gamma$ en Γ y Γ' , donde la imagen Γ' es la simétrica de Γ respecto de la superficie

del terreno, y V cumple condiciones normales en ∞ .^{4,5} Aplicando la Identidad de Green a este problema se obtiene la siguiente expresión integral para el potencial en cualquier punto $\mathbf{x} \in E$:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}'|} \quad (2)$$

siendo $\boldsymbol{\xi}'$ el simétrico de $\boldsymbol{\xi}$ con respecto a la superficie del terreno.^{4,5}

Por otra parte, la expresión integral (2) se verifica también sobre la superficie de los electrodos Γ en la que el valor del potencial es conocido (la “sobretensión de tierra” V_Γ). Es decir, la densidad de corriente de pérdida σ satisface la ecuación integral de Fredholm de primera clase definida en Γ

$$V_\Gamma = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \boldsymbol{\chi} \in \Gamma. \quad (3)$$

La resolución de esta ecuación integral es fundamental, dado que a partir de la densidad de corriente de pérdida σ se obtienen directamente parámetros muy importantes en el diseño de tomas de tierra (la resistencia equivalente y la intensidad total que fluye), en tanto que haciendo uso de la expresión integral (2) se puede calcular también el potencial en cualquier punto del terreno o de su superficie (y por tanto determinarse también los valores de las tensiones de malla, de paso y contacto que caracteriza una instalación de tierras).

Así, si imponemos que la ecuación integral (3) se satisfaga en el sentido de residuos ponderados, la siguiente identidad integral

$$\int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma} w(\boldsymbol{\chi}) \left[V_\Gamma - \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right] d\Gamma = 0, \quad (4)$$

debe satisfacerse para todos los miembros $w(\boldsymbol{\chi})$ de una determinada clase de funciones de test definidas en Γ .⁴ Dado que la incógnita del problema está definida en el contorno del dominio, parece obvio que una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno sea la mejor elección para resolver esta forma variacional.⁵

3 Formulación numérica de elementos de contorno

El punto de partida del desarrollo de la formulación numérica lo constituye la discretización de la densidad de corriente de pérdida σ y

la superficie de los electrodos Γ , dados un conjunto de \mathcal{N} funciones de prueba definidas en Γ , un conjunto de \mathcal{M} elementos de contorno 2D y un conjunto de \mathcal{N} funciones de test definidas en Γ .^{4,5} Así, si se denomina σ^h a la densidad de corriente de pérdida aproximada obtenida de la discretización de σ , se tiene:

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) \approx \sigma^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \sigma_i^h. \quad (5)$$

Sustituyendo σ^h en (2) y (4), se obtienen las versiones discretizadas del potencial y de la ecuación integral, obteniéndose una solución aproximada al problema mediante la resolución del sistema

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_{ji} \sigma_i^h = \nu_j, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (6)$$

como es usual en los modelos numéricos basados en Método de Elementos de Contorno y en el Método de los Elementos Finitos.^{4,5} No obstante, el cálculo de los coeficientes R_{ji} requiere integrar dos veces en dominios bidimensionales (la superficie de los electrodos Γ) y la matriz del sistema es llena, siendo además muy elevado el número total de grados de libertad cuando se analiza un problema de interés práctico. Por todo ello, se hace necesario introducir hipótesis adicionales que permitan reducir la complejidad del problema.⁴

Los autores han propuesto en los últimos años una formulación numérica de elementos de contorno 1D (“BEM1D”), resultante de asumir que la densidad de corriente es uniforme a lo largo del perímetro de la sección transversal de los conductores, no tener en cuenta los efectos de disipación de corriente en los extremos y uniones entre los conductores de la red de tierras, y aproximar las distancias que intervienen en los núcleos integrales en términos de las distancias entre las proyecciones de los puntos sobre el eje de los electrodos. De hecho esta hipótesis es consecuencia de integrar mediante una cuadratura de Newton-Cotes las integrales circunferenciales que se obtienen al introducir la hipótesis de uniformidad circunferencial de la densidad de corriente de pérdida.^{4,5} Tras la aplicación de estas hipótesis, el cálculo de los coeficientes de la matriz del sistema resultante requiere ahora integrar dos veces en dominios unidimensionales (los ejes de los electrodos), siendo el número total de grados de libertad mucho menor que en el modelo 2D.

La diferente selección de tipos de funciones de prueba y de test en el planteamiento numérico 1D permite desarrollar formulaciones específicas, e identificar los métodos intuitivos y de tipo práctico empleados en el cálculo de tierras como casos particulares de la formulación general de elementos de contorno, con lo que es posible explicar desde un punto de vista matemáticamente riguroso los problemas encontrados con la aplicación de estos métodos.^{4,10} El resultado es una formulación numérica rigurosa y bien fundamentada con unos requisitos computacionales perfectamente asequibles, tanto en tiempo de computación como en memoria, para el análisis y diseño de sistemas de puesta a tierra de grandes instalaciones eléctricas.⁴⁻⁶

4 Cálculo de potenciales transferidos y Ejemplo

En este apartado se presenta una formulación para el cálculo de potenciales transferidos en una instalación de toma de tierra. Denominaremos “malla activa” a la que está conectada a la instalación eléctrica en fallo y adquiere la sobretensión de tierra en el momento de la descarga, y a través de la cual se produce la derivación y disipación de la corriente de fallo en el terreno. El objetivo de este estudio es averiguar si la presencia de un sistema conductor (como puede ser la presencia de unos raíles semienterrados) en las proximidades de una malla de tierra activa afecta de algún modo a la distribución de potenciales en el terreno. Es decir, se pretende estudiar si puede ignorarse o no este segundo “sistema de tierras pasivo” cuando se analiza la disipación de la corriente a través de la toma de tierra activa.

En el apartado anterior se ha explicado que cuando tiene lugar una descarga, el sistema de toma de tierra activo adquiere un valor del potencial igual a la “sobretensión de tierra” V_T . Sin embargo, la existencia de otro sistema conductor próximo a éste provoca cambios en la distribución del potencial en el terreno, aunque no haya conexión eléctrica entre ambos sistemas conductores, dado que las propiedades conductoras del terreno cambian de una forma importante en la zona del mismo cercana a esos elementos conductores en los que no se produce descarga efectiva. Al tratarse de un sistema muy conductor los electrodos que forman el sistema pasivo adquirirán un potencial (inferior a la sobretensión de tierra) creando un efecto de homogeneización de la distribución del potencial en las inmedia-

ciones de la malla pasiva. Aunque se trate de un efecto que tendrá una influencia local y que obviamente será menor cuanto más alejados se encuentren de la red de tierras activa, es esencial su análisis por cuanto se modifican de forma notable las distribuciones de potencial en la superficie del terreno y por tanto pueden aparecer puntos donde se produzcan gradientes de potencial peligrosos que en principio no serían esperados.

Para verificar estas aseveraciones calcularemos el sistema de toma de tierra de la malla activa en dos situaciones: **a)** si no existe ningún otro sistema conductor próximo a la malla activa, y **b)** si existen otros elementos conductores próximos a la malla activa (obviamente sin conexión eléctrica directa entre ambos).

El análisis del caso **a)** se puede llevar a cabo por aplicación directa de la formulación numérica BEM1D previamente expuesta.

La situación **b)** es más complicada de calcular dado que inicialmente la malla activa adquiere una sobretensión de tierra fija y conocida (V_{Γ}), pero en el sistema de electrodos pasivo el potencial es también constante pero desconocido. El análisis de este tipo de problemas en el que existen varios sistemas de tierra desconectados entre sí se puede realizar mediante la superposición de estados elementales. El estado final es el siguiente: la malla activa con una sobretensión de tierra igual a V_{Γ} y el sistema pasivo con una sobretensión desconocida (igual a una fracción λ del aumento de tensión de la malla activa). Los dos estados elementales en que se éste se descompone son: **estado 1)** la malla activa con una sobretensión de tierra igual a 1 V y el sistema pasivo a 0 V; **estado 2)** la malla activa con una sobretensión de tierra igual a 0 V y el sistema pasivo a 1 V. Si se aplica ahora la formulación BEM1D a cada estado elemental se pueden determinar las intensidades totales que fluyen por unidad de voltaje de cada uno de los dos sistemas de tierra. El estado final se obtiene de la suma de los estados elementales, ponderando el estado **1)** por V_{Γ} y el estado **2)** por el factor λV_{Γ} . Finalmente, este valor λ y la intensidad total que fluye del sistema de tierras (I_G) se obtienen sin más que imponer que la descarga eléctrica se produce sólo en la malla activa.⁴

La metodología que se propone se ha aplicado al análisis del efecto que producirían unos raíles de ferrocarril próximos a la malla de tierras de una subestación eléctrica. Con el fin de mostrar la aplicabilidad de esta técnica a un problema práctico se ha elegido la geometría de la red de tierras real que se muestra en la figura adjunta (esquema

A): es una malla formada por 408 conductores cilíndricos de diámetro constante (12.85 mm) enterrados a una profundidad de 80 cm (las dimensiones de la red de tierras es de $145 \times 90 \text{ m}^2$). La figura B muestra la distribución de potenciales en la superficie del terreno cuando tiene lugar una derivación de corriente al terreno a través de dicha malla considerando un modelo de terreno isótropo y homogéneo de resistividad $60\Omega \text{ m}$.

Seguidamente se analiza el mismo problema pero considerando la existencia de dos raíles de 130 m en las proximidades de la red de tierras, como se muestra en el esquema C. Estos raíles actúan como un sistema conductor pasivo que adquiere un determinado nivel de potencial cuando se produce la descarga en la red de tierras (corresponde a la situación **b**) de la exposición previa). En la figura D se muestra la distribución de potenciales en la superficie del terreno tras el análisis y superposición de estados elementales. Las diferencias en las resistencias equivalentes del sistema de tierras en ambas situaciones son poco significativas (0.336Ω frente a 0.312Ω), así como también las tensiones de paso y contacto en la zona cubierta por la malla de tierras. Nótese sin embargo la importante diferencia en los potenciales en la superficie del terreno en la zona ocupada por los raíles: tal y como se preveía, la presencia de este sistema pasivo origina una homogeneización de los valores del potencial en la superficie del terreno en sus inmediaciones; si se comparan las figuras B y D pueden observarse también zonas de gradientes de potencial mucho mayores en determinadas regiones del terreno donde no eran esperados (de hecho se constatan tensiones de paso diez veces superiores en un mismo punto entre un caso y otro).

5 Conclusiones

En este artículo se ha revisado el modelo matemático del fenómeno físico que subyace a la disipación de corriente eléctrica en un terreno a través de una toma de tierra y se han resumido los aspectos más sobresalientes de la formulación numérica de elementos de contorno desarrollada por los autores para el análisis de este tipo de problemas. Asimismo, se ha presentado una formulación numérica que por primera vez permite calcular y cuantificar los efectos debidos a los potenciales transferidos en una instalación eléctrica por la presencia de

elementos conductores enterrados en las proximidades de una toma de tierra.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SGPICT del Ministerio de Ciencia y Tecnología (#1FD97-0108), así como por la Secretaría Xeral de I+D de la Xunta de Galicia y por la Universidad de La Coruña mediante proyectos y becas de investigación.

REFERENCIAS

- [1] IEEE Std.80, *IEEE Guide for safety in AC substation grounding*. New York, 1999.
- [2] R.J. Heppe, Computation of potential at surface above an energized grid or other electrode, *IEEE T. PAS* **98** (1979) 1978-1988.
- [3] D.L. Garrett, J.G. Pruitt, Problems encountered with the APM of analyzing substation grounding systems, *IEEE Tr. Power Appar. Systems* **104** (1985) 3586-3596.
- [4] I. Colominas, *Cálculo y D.A.O. de tomas de tierra en instalaciones eléctricas: Una formulación numérica basada en el Método de Elementos de Contorno*. Tesis Doctoral, La Coruña, 1995.
- [5] I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro, A BEM numerical approach for grounding grid computation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **174**, (1999), 73-90.
- [6] M. Casteleiro, L.A. Hernández, I. Colominas, F. Navarrina, *Sistema TOTBEM de DAO de tomas de tierra de instalaciones eléctricas*. ETSICCP, La Coruña, 1994.
- [7] I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro, A numerical formulation for grounding analysis in stratified soils, *IEEE Tr. Power Delivery*, (1999) [en prensa].
- [8] I. Colominas, J. Gómez-Calviño, F. Navarrina, M. Casteleiro, Comp. Analys. of Earthing Syst. in Horizontally/Vertically Layered Soils, *Electric Power Systems Resear.*, **59**, (2001), 149-156.
- [9] E. Durand, *Électrostatique*. Masson, Paris, 1966.
- [10] F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, Why do computer methods for grounding analysis produce anomalous results?, *IEEE Tr. Power Delivery*, (2000) [en prensa].

