

Preprint of the paper

"Aplicación de una Formulación Numérica de Elementos Finitos para el Estudio de Problemas de Transporte Convectivo en Zonas Portuarias"

C. A. Figueroa, I. Colominas, G. Iglesias, F. Navarrina, M. Casteleiro (1999)

En "Métodos Numéricos en Ingeniería" (en CD-ROM), Parte III: "Convección-Difusión".

R. Abascal, J. Domínguez, G. Bugeda (Editores); Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería CIMNE, Barcelona. (ISBN: 84-89925-45-3)

<http://caminos.udc.es/gmni>

APLICACIÓN DE UNA FORMULACIÓN NUMÉRICA DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL ESTUDIO DE TRANSPORTE CONVECTIVO EN ZONAS PORTUARIAS

C.Alberto Figueroa, Ignasi Colominas, Gregorio Iglesias, Fermín Navarrina
y Manuel Casteleiro

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de La Coruña
Campus de Elviña. 15192 La Coruña, España
e-mail: colominas@iccp.udc.es, página web: <http://www.udc.es/caminos/dmmr/>

Palabras clave: Transporte por convección-difusión, Método de Elementos Finitos

Resumen. *La ecuación diferencial del transporte por convección-difusión permite modelizar un gran número de procesos de interés en la ingeniería. Así, fenómenos como el estudio de la distribución de temperaturas en una pieza mecánica, la evolución de la concentración de una sustancia en un medio poroso, o la dispersión de un contaminante en un medio fluido son descritos eficazmente por dicha ecuación. En este artículo se estudia un problema de dispersión de un contaminante debido a un vertido accidental en un área portuaria determinada. Primeramente se resuelve un problema de difusión pura, en el cual se supone que el fluido está en reposo en todo el dominio. Posteriormente, se resuelven problemas con convección, a partir de un campo de velocidades conocido. Se comprobará que si la velocidad es elevada aparecen oscilaciones espúreas en ciertas partes del dominio, y se apuntará el origen de dichas oscilaciones, así como los distintos esquemas propuestos para la estabilización de las formulaciones numéricas.*

1 INTRODUCCIÓN

La ecuación diferencial del transporte por convección-difusión describe eficazmente multitud de procesos de interés en ingeniería. Algunos fenómenos modelizados adecuadamente por dicha ecuación son el flujo de agua en acuíferos; la simulación de la explotación de reservas de petróleo y gas; la transferencia de calor y masa en procesos de ingeniería química y nuclear, etc.

En este artículo se estudiará un fenómeno que puede ser descrito también mediante la ecuación del transporte por convección-difusión, como es la dispersión de un contaminante debido a un vertido accidental del mismo en una determinada zona portuaria.

El estudio de este tipo de procesos resulta de gran interés para el diseño de políticas de protección del entorno costero, puesto que disponer de una herramienta que permite predecir las consecuencias del vertido de un determinado contaminante posibilita el diseño de los sistemas de protección y de respuesta frente a este tipo de acciones agresivas tan frecuentes en la costa.

Los problemas que se estudiarán en este artículo serán los correspondientes a un dominio plano, puesto que se considera que la concentración de la sustancia vertida no varía en la vertical de una determinada columna de agua. Estas simplificaciones son frecuentes en procesos en ingeniería costera^{1,2}, en los que la escala vertical del fenómeno es despreciable frente a la horizontal (ej., aproximaciones de *shallow water*).

Se estudiarán tanto problemas de difusión pura como problemas con convección cada vez más importante, con el objetivo de comprobar cómo a medida que el parámetro definido por el número de Péclet aumenta, se llegan a producir oscilaciones en la solución numérica del problema obtenida mediante el Método de los Elementos Finitos con ponderación de tipo Galerkin. Se propondrán también formulaciones alternativas para la estabilización de estas oscilaciones, basándonos en trabajos que en la actualidad estamos desarrollando.

2 MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA FÍSICO

El fenómeno físico de la dispersión de una determinada sustancia en un medio fluido se puede analizar haciendo uso de la ecuación diferencial del transporte por convección-difusión. De este modo, para un dominio Ω en el que existe un campo de velocidades \mathbf{u} y un tensor de difusividades isótropo \mathbf{K} conocidos, la evolución de la concentración ϕ de la sustancia se describe mediante la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales³

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (k \nabla \phi) \quad \text{en } \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

junto con unas determinadas condiciones de contorno e iniciales

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \Gamma_1 ; \quad \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = q \text{ en } \Gamma_2 ;$$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \gamma - a\phi \text{ en } \Gamma_3 ; \tag{2}$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{x} \in \Omega ,$$

siendo Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 las distintas partes del contorno en donde se imponen las condiciones definidas en (2), de manera que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma$. γ , k , a , q y $f(\mathbf{x})$ son en general funciones o datos conocidos que pueden depender de la posición y del tiempo.

El dominio Ω del problema a estudiar será la zona del espejo de agua del puerto de La Coruña, según se puede apreciar en la figura 1.

Es necesario acotar de alguna forma un dominio que es semi-infinito. Para ello, se ha optado por trazar un arco que parta desde el extremo del dique de abrigo hasta el extremo del muelle de la Dársena de Oza. Este arco determina por tanto el contorno en mar abierto, que habrá que tratar con especial cuidado⁴.

La solución al problema planteado en (1) y (2) se realizará mediante una formulación de Elementos Finitos, puesto que presenta enormes ventajas frente a otros esquemas del tipo de los de diferencias finitas a la hora de tratar dominios y condiciones de contorno complejas.⁵ Considerando lo anterior, se realiza una discretización del dominio mediante la malla de elementos finitos representada en la figura 2.

Esta malla ha sido elaborada mediante el programa GEN4U⁶, y presenta las siguientes características:

Número de elementos: 2499.

Número de nodos por elemento: 4.

Número total de nodos: 2692.

Como se puede apreciar en la figura 2, se han introducido algunas modificaciones con respecto al dominio real representado en la figura 1. Estos cambios se han realizado con el fin de mejorar las características geométricas de la malla, y se justifican por el tamaño de la discretización realizada, buscando evitar ángulos que pueden ocasionar jacobianos problemáticos. De esta forma, se han modificado los siguientes elementos: los dos espigones situados entre la Dársena de la Marina y la Antedársena y los pantalanes del muelle de petroleros. La supresión de estos últimos elementos ni siquiera constituye una simplificación del dominio sino que, al ser éstos estructuras diáfanas, permiten el paso del agua, por lo que a efectos del flujo es como si no existiesen.

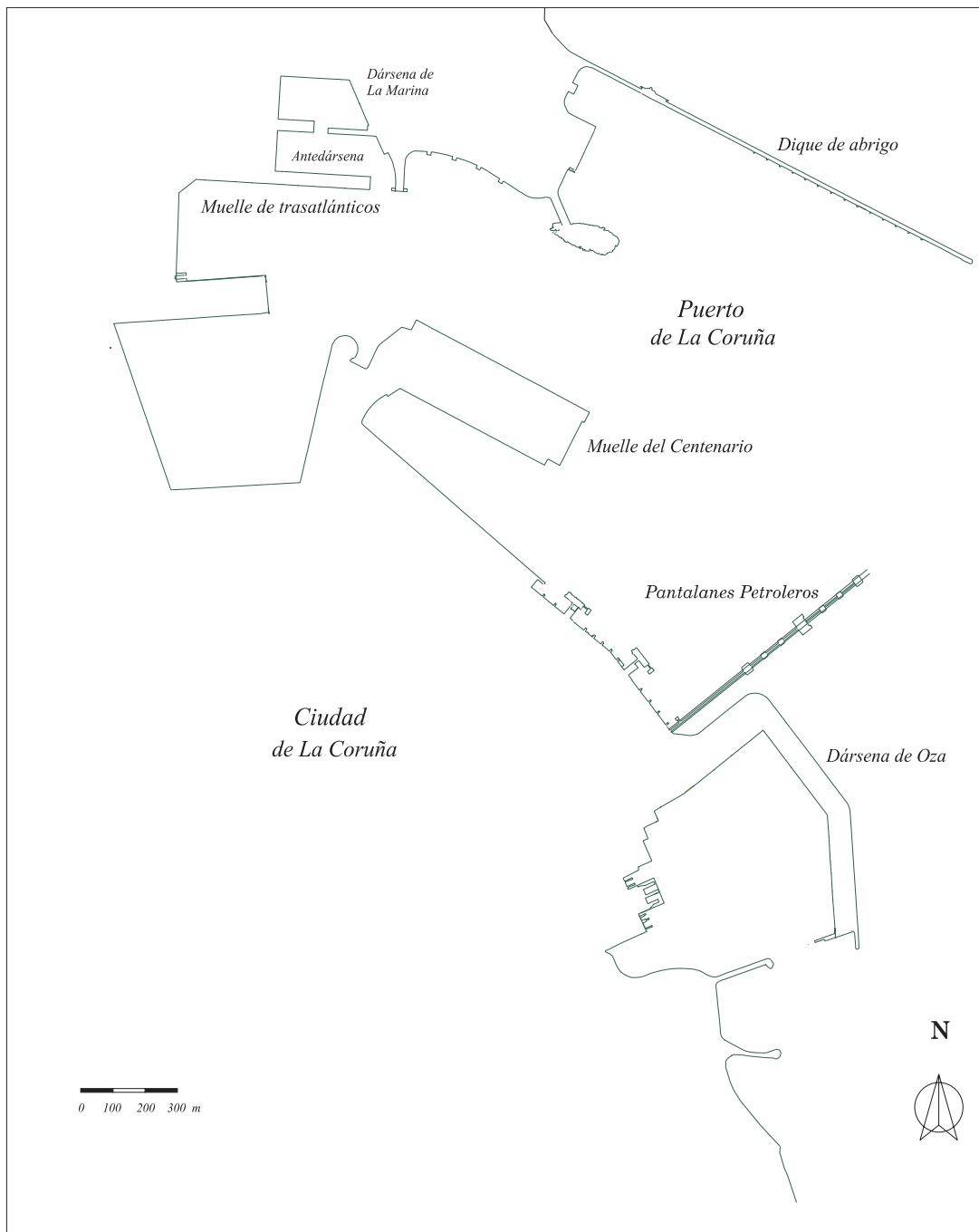


Fig. 1.- Dominio del problema constituido por los muelles y el contorno en mar abierto del Puerto de La Coruña.

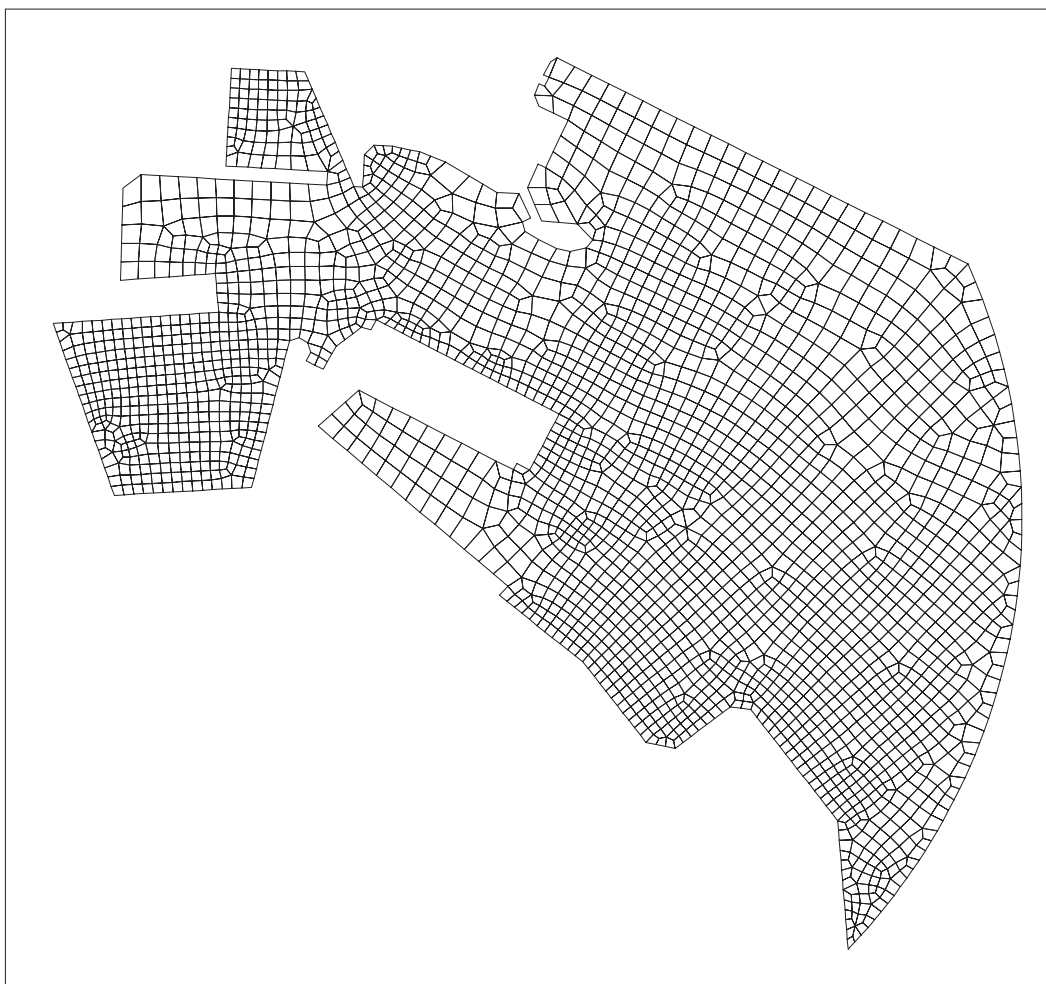


Fig. 2.-Discretización del dominio mediante una malla de elementos finitos cuadrangulares.

3 DEFINICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Una vez definido el dominio y su discretización en elementos finitos, a continuación debemos especificar las condiciones de contorno definidas en la expresión (2). Los elementos situados en los contornos de la figura 2 se dividirán en tres tipos, según el tipo de condiciones que se les aplica, siendo esta división la siguiente:

- a) Elementos situados en las alineaciones de los muelles (Γ_1). Sobre éstos se impondrá que el flujo perpendicular a los mismos es nulo. Esta condición supone que no existe ganancia ni pérdida de concentración de sustancia a través de los mismos. Así pues,

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (3)$$

- b) Elementos situados en la zona en donde se realiza el vertido de contaminantes (Γ_2). La inyección de contaminante en una determinada porción del contorno se puede expresar mediante condiciones muy distintas. Sin embargo, para en este caso se elegirá una condición bastante sencilla, consistente en aplicar una condición Neumann en la que se prescriba el valor de flujo de contaminante vertido al agua. De esta forma, se hace:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = q \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (4)$$

- c) Elementos situados en el contorno en mar abierto (Γ_3). Ésta es la zona más delicada a la hora de imponer una condición realista. La condición que se debe establecer en este contorno definido artificialmente debe ser tal que reproduzca los efectos del resto del dominio del cual se ha prescindido⁷. En este caso, lo que hace 'el resto del océano' sobre las aguas del puerto es 'suavizar' o desempeñar el papel de una válvula de escape por la que se evita que la concentración de una sustancia en el interior del área portuaria se crezca cada vez más hasta llegar a ser infinita.

Existen varias alternativas para reproducir este fenómeno⁵, pero para este caso, nos hemos decidido por imponer una condición de contorno que no resulte demasiado compleja. Por ello, hemos estimado oportuno imponer una condición mixta en la que se prescribe un flujo proporcional a la diferencia entre la función solución y un determinado valor. Esta condición se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \gamma - a\phi \quad \text{en } \Gamma_3 \quad (5)$$

en donde γ y a son valores reales conocidos que en principio se considerarán constantes en el tiempo. De esta forma, si la función incógnita ϕ es en principio nula y el parámetro γ es positivo, se está produciendo un flujo saliente que se anula en el momento en que el producto $a\phi$ adopta el valor γ que se está fijando. Lo lógico es adoptar un valor reducido para este parámetro, puesto que de esta forma se está imponiendo que la concentración de contaminantes sea reducida en la zona próxima al contorno en mar abierto, situación que se produce de hecho en la realidad.

En la figura 3 se resumen el tipo de condición aplicada en cada contorno según lo comentado anteriormente.

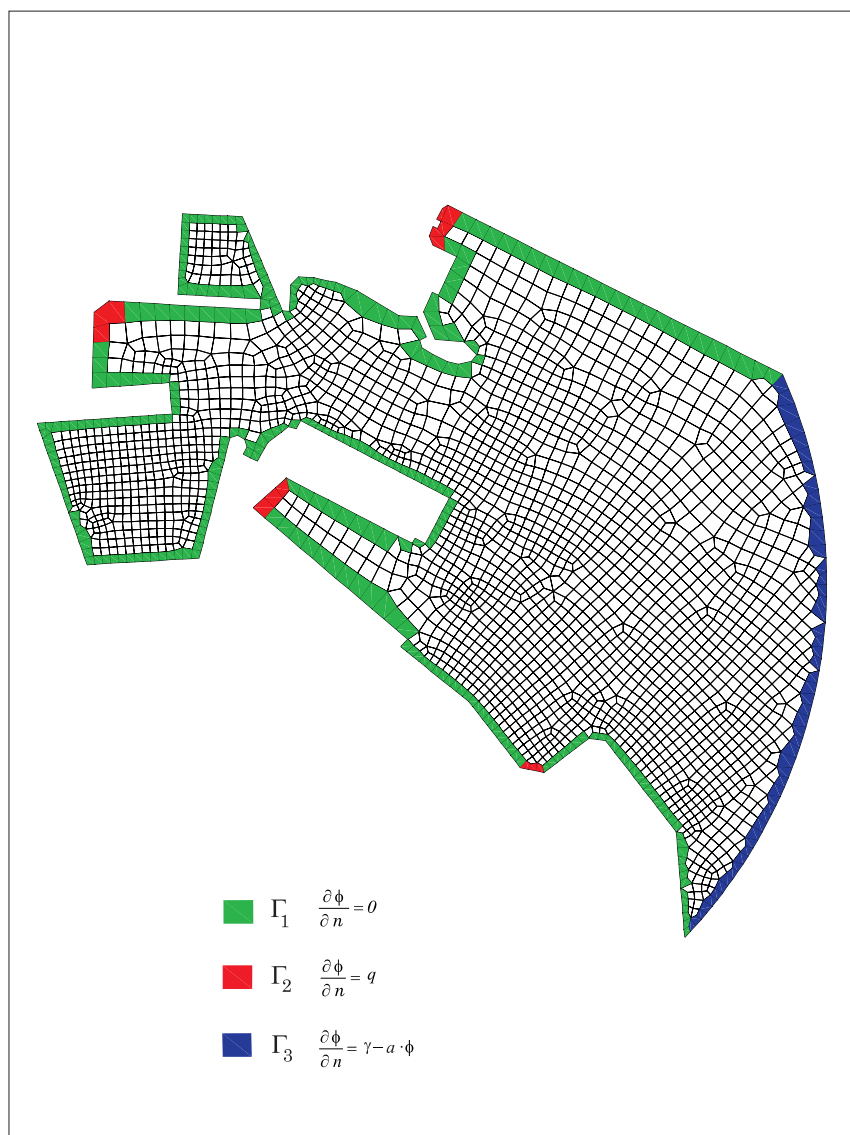


Fig. 3.-Condiciones de contorno para un caso de vertido accidental de una misma sustancia en cuatro puntos de la zona del puerto de La Coruña.

4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

4.1 Resolución de un problema de difusión pura

Una vez definido el dominio, la ecuación diferencial y el tipo de condiciones de contorno a emplear, se procede a resolver un problema de difusión pura en el que se calcula la evolución temporal de los estados transitorios correspondientes a un cuádruple vertido de contaminante, según lo descrito en la figura 3. El motivo de resolver un caso

en el que existan múltiples vertidos puntuales es el de trabajar con un problema más complejo, con el objetivo de verificar el buen funcionamiento del código desarrollado.

A continuación se definen los parámetros característicos del proceso que se han empleado en este problema. Conviene aclarar en este punto que no se ha realizado ningún análisis dimensional para asignar los valores numéricos a cada uno de los parámetros definidos a continuación. Ninguno de ellos tiene por tanto un significado físico. Para trabajar con valores realistas de estos parámetros hubiese sido necesario realizar una campaña de captación de datos experimentales. Sin embargo, al no ser éste el objetivo de este trabajo, nos hemos decantado por adoptar unos valores numéricos arbitrarios. Conviene destacar sin embargo, que si se hubiesen utilizado valores con significado físico para estos parámetros hubiese sido posible determinar magnitudes como el tiempo que se invierte en alcanzar un estado estacionario, o la intensidad de la concentración ϕ que se está calculando. Una vez aclarado esto, se adoptan los siguientes valores para los distintos parámetros intervinientes en este problema de difusión pura:

- Difusividad $k = 10 \quad \forall \Omega$
- Número de Péclet $Pe = 0 \quad \forall \Omega$ (convección nula)
- Condiciones de contorno en Γ_2 :

1. Zona arranque dique de abrigo

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 5 \quad (6)$$

2. Zona arranque muelle de trasatlánticos

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 5 \quad (7)$$

3. Zona interior muelle del Centenario

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 5 \quad (8)$$

4. Zona pantalán petrolero

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 40 \quad (9)$$

- Condiciones de contorno en Γ_3 :

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \gamma - a\phi = 5 - 0.5\phi \quad (10)$$

- Condición inicial:

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (11)$$

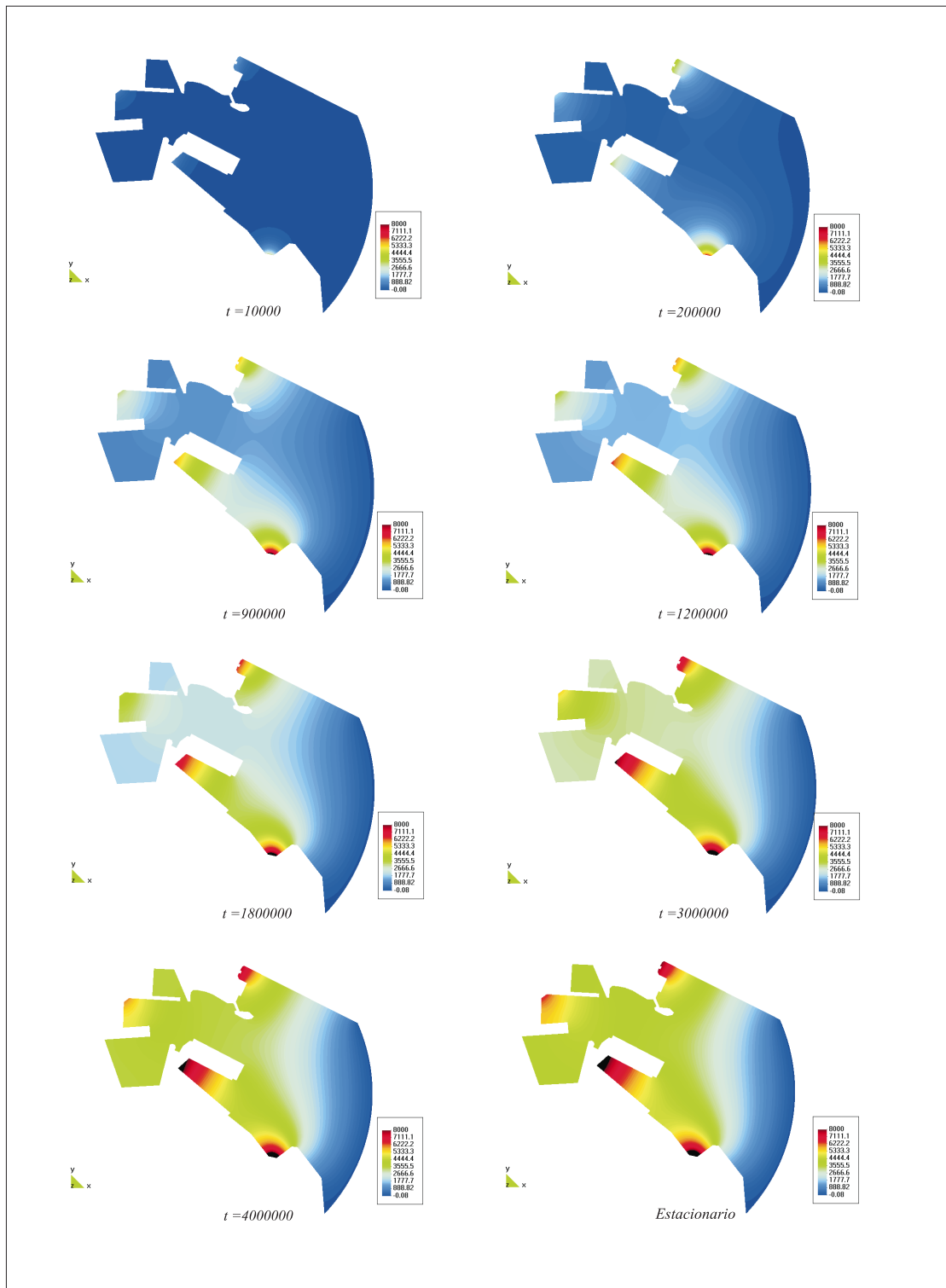


Fig. 4.-Problema de difusión pura: evolución temporal para un caso de vertido accidental de una misma sustancia en cuatro puntos de la zona del puerto de La Coruña.

El código de elementos finitos que hemos desarrollado ha sido verificado exhaustivamente en problemas en una, dos y tres dimensiones con solución analítica⁷. La bondad de los resultados obtenidos en todos los casos nos ha permitido disponer de una herramienta fiable con la que hemos calculado los estados transitorios que aparecen en la figura 4. Por tanto, a la luz de la verificación previa del código y de lo obtenido en el cálculo del problema definido en (1),(6) – (11), se puede asegurar que los resultados son razonables y concuerdan con los esperados. Un análisis de los mismos nos permite concluir que, en efecto, se producen las mayores concentraciones de contaminante en las zonas cercanas a los puntos de vertido, siendo éstas más elevadas cuanto más encerradas resulten dichas zonas. Se puede apreciar que es necesario introducir un flujo de contaminante mucho mayor en las zonas abiertas (ver condición de contorno (9)) para conseguir una concentración similar a otras zonas más encerradas sometidas a una inyección de contaminante menor. Asimismo, se verifican de igual modo las condiciones de contorno impuestas en el contorno abierto.

La aplicación y consiguiente integración de las condiciones impuestas en el contorno se ha realizado haciendo uso del teorema de Gauss-Binnet^{8,14}, con el que es posible desarrollar procedimientos de integración numérica muy sencillos y altamente eficientes que no dependen ni de la dimensión del espacio de coordenadas materiales ni de la dimensión del espacio de coordenadas de referencia. Es por lo tanto un procedimiento válido para calcular contribuciones independientemente de la dimensión del problema y de la dimensión de los elementos empleados.

Una vez presentado este ejemplo puramente difusivo, pasaremos a resolver problemas en los que esté presente también la convección, debido a que ésta situación responde a situaciones mucho más realistas de las condiciones que se pueden dar en un área portuaria, en donde siempre existirán convección en el agua debido a corrientes, acción del viento, etc.

4.2 Resolución de un problema de transporte con convección débil

A continuación se estudiará un problema de transporte en el que estén presentes procesos convectivos. Para ello, es necesario contar en primer lugar con un campo de velocidades $\mathbf{u}(x, y, t)$ conocido. Estos datos, al igual que ocurría anteriormente con los valores de difusividades y flujos en el contorno, se obtendrían en la práctica a partir de medidas experimentales (currentímetros) o bien a partir de los valores obtenidos mediante otro código de ordenador suficientemente validado. Sin embargo, para este ejemplo el campo se definirá de forma analítica sin más que imponer que se verifique la condición de incompresibilidad (ver figura 5):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{12}$$

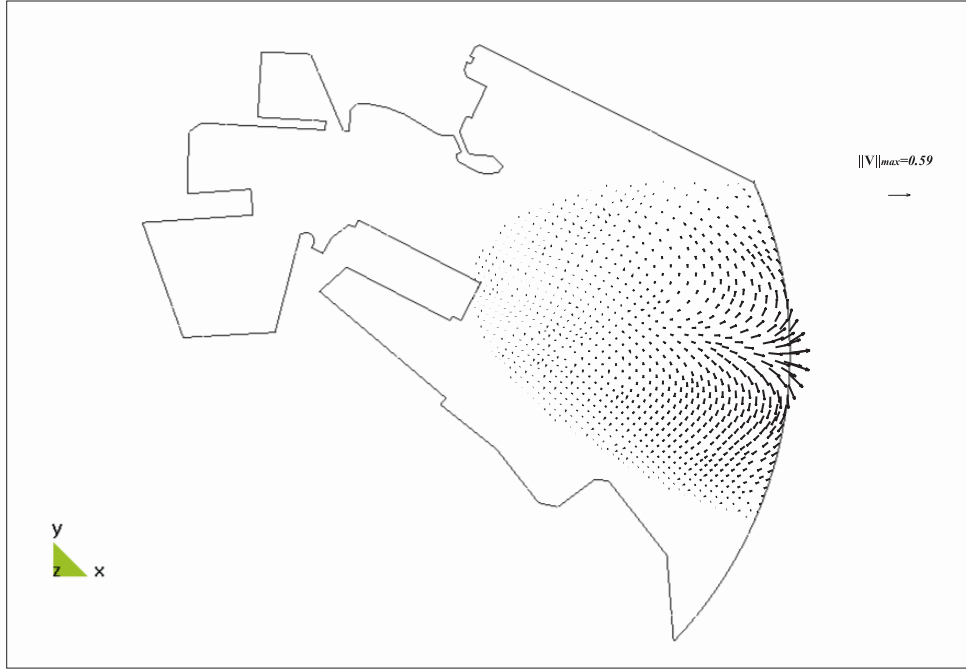


Fig. 5.-Campo de velocidades empleado para la resolución de los casos en presencia de convección

El campo vectorial definido analíticamente y representado en la figura 5 se ha elegido por simplicidad constante en el tiempo.

Una vez considerado esto, a continuación se presentan los resultados obtenidos para un problema con los siguientes parámetros definitorios del proceso:

- Difusividad $k = 10 \quad \forall \Omega$.
- Número de Péclet máximo $Pe = 1.9$, asumiendo como dimensión característica del elemento la semisuma de sus diagonales.
- Condiciones de contorno en Γ_2 (ahora se realizará un único vertido puntual, una vez comprobado el buen funcionamiento del código para varios vertidos):

- Zona pantalán petrolero

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 5 \quad (13)$$

- Condiciones de contorno en Γ_3 :

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \gamma - a\phi = 5 - 0.5\phi \quad (14)$$

Al igual que en el problema anterior, los valores numéricos de cada uno de los coeficientes se han adoptado sin realizar ningún tipo de análisis dimensional, y por tanto no poseen sentido físico. Los resultados obtenidos para el estado estacionario

del problema así definido se representan en la figura 6, en donde se comparan dichos resultados con los obtenidos para el mismo problema en ausencia de convección.

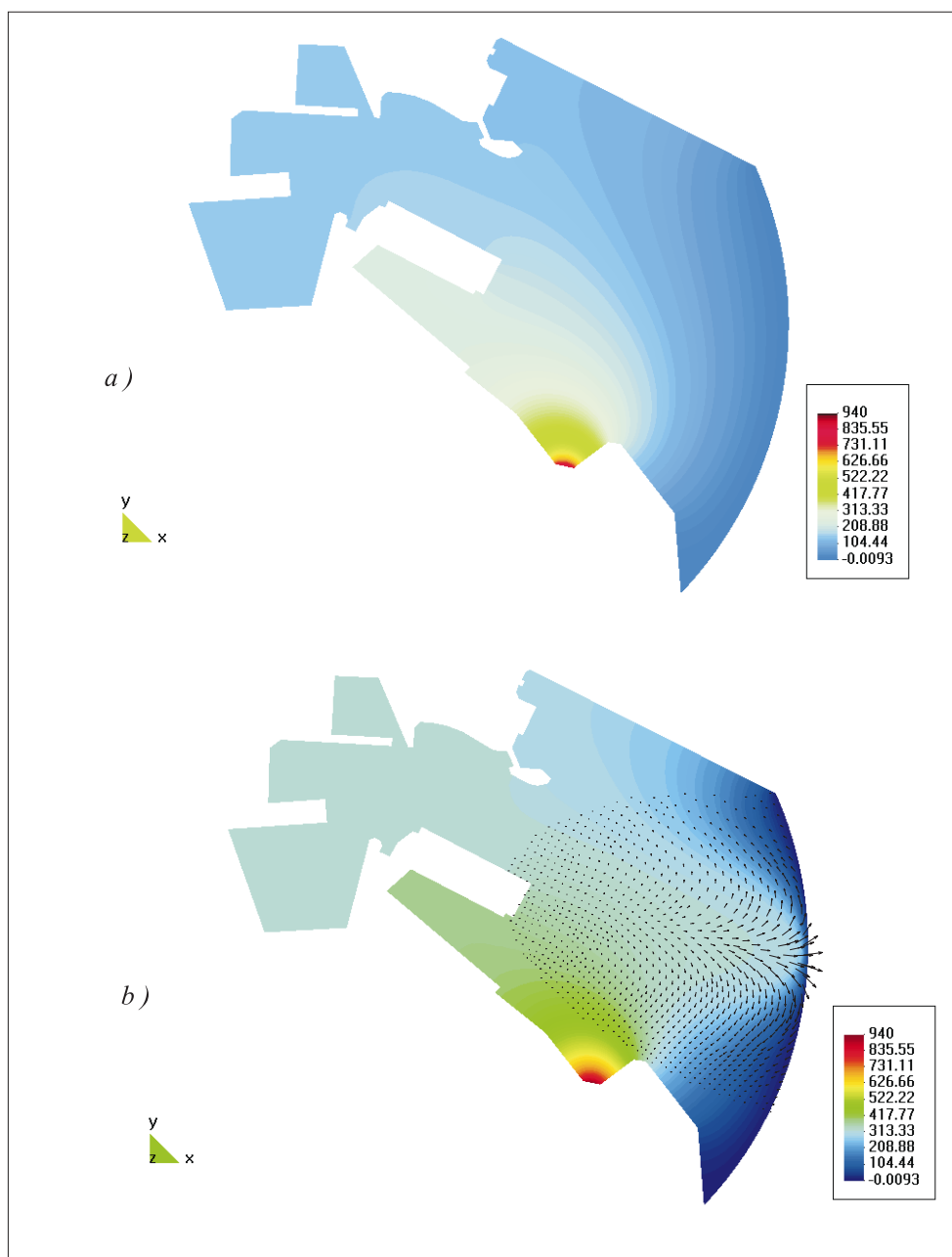


Fig. 6.-a) Solución al problema de difusión pura para el caso de único vertido accidental en la zona del puerto de La Coruña. **b)** Solución al problema de convección-difusión (número de Péclet máximo $Pe = 1.9$) para un único vertido accidental en la zona del puerto de La Coruña.

Como se puede observar, la presencia de la convección modifica sensiblemente la distribución de concentraciones de contaminante. Así, se aprecia un incremento generalizado del valor de la concentración en todo el dominio debido a la aportación convectiva al transporte total. De igual modo, se observa cómo en las zonas más encerradas como en el muelle del Centenario, la concentración de sustancia es también mayor, debido al arrastre que ésta experimenta ocasionado por el campo de velocidades. Se observa asimismo que en las zonas cerca del contorno el mar abierto en donde la velocidad es prácticamente nula los resultados son similares al problema de difusión pura. Se puede apreciar fácilmente una aureola en la distribución de concentraciones que coincide sensiblemente con la zona en la que el campo de velocidades es distinto de cero.

4.3 Resolución de un problema de transporte con convección fuerte

A continuación se resolverá un problema muy similar al anterior, con la salvedad de que el máximo número de Péclet existente en los elementos del dominio es ahora mucho mayor que antes. De esta forma, se está intentando resolver un problema en el que la influencia de la convección es muy importante. Este tipo de problemas, tal y como está ampliamente referenciado en la bibliografía^{9,10,3} y como se verá a continuación, presentan un marcado carácter oscilatorio a medida que la convección se hace mayor, si se utiliza un esquema de ponderación de tipo Galerkin. Para este problema se utiliza el mismo campo de velocidades descrito en la figura 5, siendo en este caso los parámetros empleados para definir el problema los siguientes:

- Difusividad $k = 1 \quad \forall \Omega$.
- Número de Péclet máximo $Pe = 19$, asumiendo como dimensión característica del elemento la semisuma de sus diagonales.
- Condiciones de contorno en Γ_2 :
 - Zona pantalán petrolero

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 5 \quad (15)$$

- Condiciones de contorno en Γ_3 :

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \gamma - a\phi = 5 - 0.5\phi \quad (16)$$

Los resultados correspondientes al estacionario del problema anterior se encuentran en la figura 7. Como se puede apreciar fácilmente, existen unas marcadas oscilaciones en los resultados ofrecidos por la aproximación numérica a la solución en las zonas de mayor convección. Por lo demás, en el resto del dominio, los resultados son los esperados: el efecto de la convección es mucho más importante que el de la difusión, y por tanto las

concentraciones en la mayor parte del dominio son superiores a las que se obtenían en el problema de la figura 6, debido a este transporte de carácter eminentemente convectivo. Además, y al igual que ocurría en el anterior problema, las concentraciones apenas varían con respecto a las del problema difusivo en las zonas del dominio próximas al contorno en mar abierto en donde el campo de velocidades es prácticamente nulo.

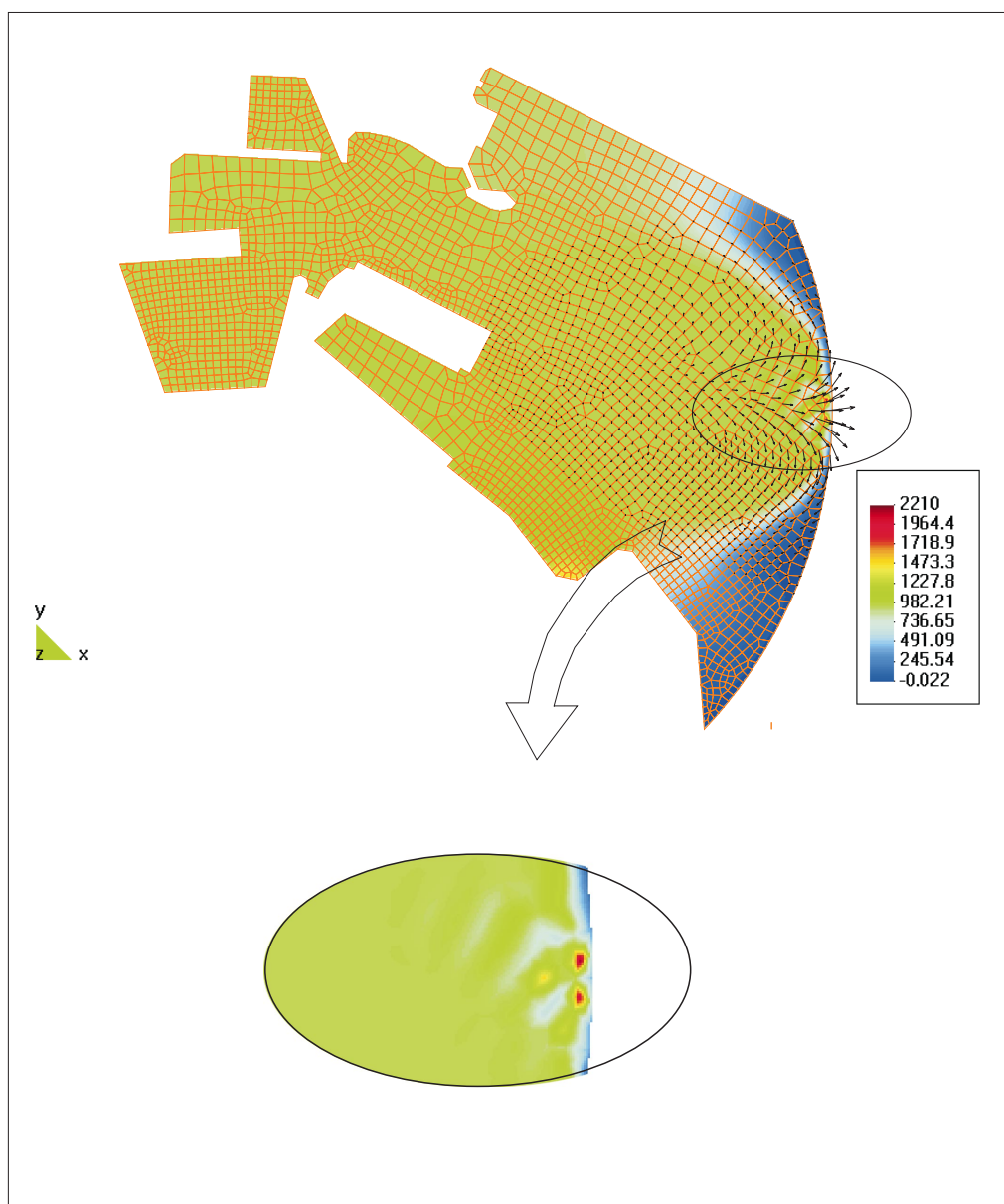


Fig. 7.-Solución al problema de convección-difusión (número de Péclet máximo $Pe = 19$) para un único vertido accidental en la zona del puerto de La Coruña. Abajo, detalle de la zona en donde se producen oscilaciones importantes en la solución numérica, coincidente con la zona de máxima convección.

La aparición de estas oscilaciones pone de manifiesto lo poco adecuado que resulta utilizar esquemas de ponderación de tipo Galerkin para la resolución de problemas predominantemente convectivos. Existen formulaciones alternativas^{7,11,12,13} para la estabilización de este tipo de oscilaciones. Los autores estamos desarrollando en la actualidad una metodología³ para la determinación de los parámetros de estabilización en formulaciones de tipo Petrov-Galerkin, habiendo conseguido ya unos resultados ciertamente prometedores en los problemas resueltos.

7 CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado distintos ejemplos de problemas de transporte convectivo-difusivo en una zona portuaria. Se han discutido el tipo de condiciones más adecuadas para imponer en cada zona del contorno y se han resuelto problemas puramente difusivos en primer lugar y posteriormente con convección cada vez más elevada. Se ha podido observar que a medida que el número de Péclet aumenta, se acaban produciendo oscilaciones en la solución numérica obtenida mediante el Método de los Elementos Finitos con un esquema de ponderación de tipo Galerkin.

Se ha puesto de manifiesto^{3,7,10,11} la poca idoneidad de las formulaciones convencionales de Galerkin para la resolución de problemas convectivamente dominantes, y se han propuesto la utilización de otros esquemas para estabilizar dichas formulaciones. En la actualidad los autores estamos trabajando en el desarrollo de una formulación basada en esquemas de ponderación tipo Petrov-Galerkin para la estabilización de este tipo de problemas³.

REFERENCIAS

- [1] Espino M. (1994): *Estabilización de la superficie libre en la solución de ecuaciones Shallow-water por elementos finitos. Aplicaciones Oceanográficas*, Tesis Doctoral. UPC. Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental.
- [2] Pascual J.R. (1988): *Un modelo numérico de circulación horizontal producida por el viento y la marea en la ría de Arosa (Galicia, NW de España)*, Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Ciencias Físicas.
- [3] Figueroa C.A., Colominas I., Mosqueira G., Navarrina F. y Casteleiro M. (1999): *Desarrollo de una formulación numérica basada en el M.E.F. para la estabilización de problemas de transporte por convección-difusión*, Actas del "IV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones", SEMNI, Sevilla.
- [4] Hermsilla F. (1996): *Estudio de la Dispersión de Contaminantes en el mar mediante el M.E.F.*, Tesina de Especialidad. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, UPC.
- [5] García M. (1990): *Contribución al Estudio de la Circulación Marina mediante el Método de los Elementos Finitos*, Tesis Doctoral. UPC. Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental.

- [6] Sarrate J. (1996): *Modelización numérica de la interacción fluido-sólido rígido: Desarrollo de algoritmos, generación de mallas y adaptabilidad*, Tesis Doctoral. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, UPC..
- [7] Figueroa C.A., Colominas I. (1998): *Aplicación del Método de los Elementos Finitos en problemas de mecánica de fluidos: estudio, resolución y técnicas de estabilización de la ecuación del transporte por convección-difusión*, Research Report. E.T.S.I.C.C.P. Universidad de La Coruña.
- [8] Navarrina F., López-Fontán S., Colominas I., Bendito E. and Casteleiro M. (1999): *High Order Shape Design Sensivity: A Unified Approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (en prensa).
- [9] Carey G. F. and Oden J. T. (1986): *Finite Elements. Fluid Mechanics. Volume VI*, Prentice-Hall.
- [10] Codina R. (1989): *Dues formulacions numèriques per al problema de flux incompressible*, Tesina de Especialidad. Universitat Politècnica de Catalunya.
- [11] Codina R. (1996): *Comparison of Some Finite Element Methods for Solving the Diffusion-Convection-Reaction Equation*, Publication CIMNE No. 101.
- [12] Oñate E. (1998): *Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151, 233-265.
- [13] Codina R. (1997): *On Stabilized Finite Element Methods for Linear Systems of Convection-Diffusion-Reaction Equations*, Publication CIMNE No. 126.
- [14] Juanes R. (1997): *Un código para la modelización tridimensional de flujo y transporte. Desarrollo y aplicación de un código de elementos finitos para la resolución de las ecuaciones de flujo, transporte de solutos reactivos y transporte de calor en medios porosos y fracturados tridimensionales*, Research Report. E.T.S.I.C.C.P. Universidad de La Coruña.