

Preprint of the paper

"Una formulación aproximada mediante el Método de Elementos de Contorno para la solución de problemas en Teoría del Potencial"

F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro (1993)

En "Métodos Numéricos en Ingeniería", Sección: "Electromagnetismo", pp. 1566--1575;

F. Navarrina y M. Casteleiro (Editores); Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería SEMNI, Barcelona (ISBN: 84-87867-23-5)

<http://caminos.udc.es/gmni>

UNA FORMULACIÓN APROXIMADA MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN TEORÍA DEL POTENCIAL

F. Navarrina, I. Colominas y M. Casteleiro

*E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,
Universidad de La Coruña,
Campus de Elviña S/N,
15192 La Coruña,
ESPAÑA*

RESUMEN

El diseño de tomas de tierra para subestaciones eléctricas requiere el cálculo de la resistencia equivalente y la distribución de potencial en la superficie del terreno cuando se produce un cortocircuito [1]. Durante las dos últimas décadas se han propuesto diversos métodos de cálculo, la mayor parte de los cuales se fundamentan en ideas intuitivas como la superposición de fuentes puntuales de corriente o el promediado del error [2,3]. A pesar del importante avance que han supuesto estas técnicas, se han puesto de manifiesto algunas anomalías notables en su aplicación, tales como sus elevados requerimientos computacionales, los resultados poco realistas que se obtienen al aumentar la segmentación de los conductores, y la incertidumbre en su margen de error [3].

En este artículo se presenta una formulación 1D de Elementos de Contorno, que incluye como casos particulares a los métodos intuitivos más ampliamente utilizados en la actualidad. Las ideas sobre las que se fundamentan estos métodos se contemplan como simplificaciones adecuadas, introducidas en la formulación BEM con el objetivo de reducir el coste computacional. Todo ello permite explicar matemáticamente el anómalo comportamiento asintótico de esta clase de métodos, e identificar las fuentes de error, así como introducir elementos de orden superior con el fin de incrementar la precisión. Finalmente se presenta un ejemplo de aplicación a un problema real, utilizando nuevas técnicas de integración analítica que permiten reducir drásticamente los tiempos de computación.

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno físico que subyace a la disipación de corriente eléctrica en el terreno puede modelizarse mediante la Teoría Electromagnética de Maxwell [4]. Limitando el análisis a la respuesta electrocinética en estado estacionario, y despreciando la resistencia eléctrica de los electrodos que componen la toma de tierra (en general un sistema interconectado de conductores enterrados), el problema 3D asociado a la derivación de corriente puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -\boldsymbol{\gamma} \text{ grad } V, & \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } E, \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \quad \text{en } \Gamma_E, & V &= V_\Gamma \quad \text{en } \Gamma, & V &\longrightarrow 0 \quad \text{si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

donde E es el terreno y $\boldsymbol{\gamma}$ su tensor de conductividad, Γ_E es la superficie del terreno y \mathbf{n}_E su versor normal exterior, y Γ es la superficie de los electrodos [5,6].

Nuestro objetivo es calcular el potencial V y la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ en un punto arbitrario \boldsymbol{x} para un valor determinado del potencial de tierra V_Γ , que en lo sucesivo consideraremos unitario sin pérdida de generalidad.

En estos términos, y siendo \boldsymbol{n} el versor normal exterior a Γ , la densidad de corriente de pérdida σ que emana de un punto arbitrario de la superficie de los electrodos, la intensidad total de corriente que emana de la toma de tierra I_Γ y la resistencia equivalente del sistema R_{eq} (resistencia aparente del circuito electrodo-terreno) pueden escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^t \boldsymbol{n}, \quad I_\Gamma = \int \int_\Gamma \sigma \, d\Gamma, \quad R_{eq} = \frac{V_\Gamma}{I_\Gamma}. \quad (2)$$

En la práctica, la hipótesis de terreno homogéneo e isótropo puede considerarse aceptable [7], y el tensor $\boldsymbol{\gamma}$ puede sustituirse por un escalar γ (conductividad aparente). En el caso más general se considera que un modelo multi-capa permite representar aceptablemente la respuesta del terreno [7]. Puesto que las técnicas que se exponen en este trabajo pueden generalizarse a modelos multi-capa [8], nos ceñiremos en lo sucesivo a la hipótesis de uniformidad total. Así, el problema (1) se reduce a la ecuación de Laplace con condiciones de contorno mixtas [4], y finalmente —debido a la simetría, si se considera horizontal la superficie del terreno— a un Problema Exterior de Dirichlet [6].

Aunque esta clase de problemas ha sido rigurosamente estudiada [9], y puede obtenerse su solución frecuentemente mediante métodos numéricos estándar, la complejidad del contorno Γ introduce importantes dificultades adicionales en este caso, dado que el electrodo que constituye la toma de tierra en la mayor parte de las instalaciones está compuesto por una malla de conductores cilíndricos interconectados, enterrados horizontalmente o bien clavados verticalmente (picas), en los que la relación diámetro/longitud es relativamente pequeña ($\approx 10^{-3}$). Por ello, la discretización del dominio E es extremadamente difícil y compleja, lo que implica unos requerimientos de computación prohibitivos.

Por otra parte, los dos objetivos básicos de un sistema de toma de tierra son garantizar la seguridad humana (limitando el potencial de paso y el potencial de contacto), y preservar la integridad de los equipos y la continuidad del servicio (disipando las derivaciones de corriente en el terreno) durante situaciones de fallo [1,5,6]. Dado que para su diseño tan sólo se requiere calcular el potencial en la superficie del terreno Γ_E , y que la resistencia equivalente se obtiene fácilmente a partir de la densidad de corriente de pérdida en la superficie del electrodo (2), el Método de Elementos de Contorno parece una elección adecuada.

2. PLANTEAMIENTO VARIACIONAL

Aplicando la Identidad de Green [10] a (1), el potencial V en E puede escribirse en términos de la densidad de corriente de pérdida incógnita σ :

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma, \quad (3)$$

con el núcleo integral débilmente singular

$$k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}')} \right), \quad r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|, \quad (4)$$

donde $\boldsymbol{\xi}'$ es el punto simétrico de $\boldsymbol{\xi}$ con respecto a la superficie del terreno [5,6].

Dado que (3) se verifica también en Γ [5,6], la condición $V_\Gamma = 1$ conduce a la ecuación integral de Fredholm de primera especie en Γ

$$1 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma, \quad (5)$$

cuya solución es la densidad de corriente de pérdida σ .

La ecuación (5) puede ahora escribirse en la forma variacional más débil

$$\int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma} w(\boldsymbol{\chi}) \left[1 - \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right] d\Gamma = 0, \quad (6)$$

para todo miembro $w(\boldsymbol{\chi})$ de una clase adecuada de funciones de test en Γ .

2.1. Formulación en Elementos de Contorno

Dadas \mathcal{N} funciones de prueba $\{N_i(\boldsymbol{\xi})\}$ definidas en Γ y \mathcal{M} elementos 2D de contorno $\{\Gamma^\alpha\}$, la densidad de corriente de pérdida σ y la superficie de la toma de tierra Γ se pueden discretizar en la forma

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \quad \Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \Gamma^\alpha, \quad (7)$$

y puede escribirse la versión discretizada de (3)

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i V_i(\mathbf{x}), \quad V_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} V_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (8)$$

$$V_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma. \quad (9)$$

Finalmente, para un conjunto dado de \mathcal{N} funciones de test $\{w_j(\boldsymbol{\chi})\}$ definidas en Γ , la forma variacional (6) se reduce a un sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_{ji} \sigma_i = \nu_j, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad (10)$$

$$R_{ji} = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} R_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \nu_j = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \nu_j^\beta, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad (11)$$

$$R_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) \left[\int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right] d\Gamma, \quad (12)$$

$$\nu_j^\beta = \int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) d\Gamma. \quad (13)$$

Sin embargo, es obvio que las discretizaciones 2D requeridas para resolver estas ecuaciones en problemas reales obligarían a manipular un número extremadamente alto de grados de libertad. Teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes en (10) es llena, y que la integración 2D en (12) debe efectuarse dos veces sobre la superficie de cada uno de los electrodos, se justifica inmediatamente la necesidad de introducir algunas simplificaciones adicionales.

3. PLANTEAMIENTO VARIACIONAL 1D APROXIMADO

Para un punto genérico $\boldsymbol{\xi}$ en el contorno de una barra cilíndrica, sean $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ su proyección ortogonal sobre el eje de la barra, $\phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$ el diámetro (que se asume mucho más pequeño que la longitud de la barra) y $C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$ el perímetro circunferencial de la sección transversal en ese punto. Sea L el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados.

Si la densidad de corriente de pérdida se asume constante en la sección transversal, $\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$, podemos reescribir (3) en la forma

$$\widehat{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L} \left[\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \right] \widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL. \quad (14)$$

La hipótesis de uniformidad circunferencial parece ser bastante adecuada y no demasiado restrictiva, si tenemos en cuenta la geometría real de las tomas de tierra. Sin embargo, la condición de contorno $V = 1$ no puede ahora satisfacerse exactamente en todos los puntos, y (6) no puede verificarse, excepto en casos particulares donde efectivamente hay uniformidad circunferencial. Sin embargo, (6) puede satisfacerse si restringimos la clase de funciones de test exigiendo simetría circunferencial, esto es, $w(\boldsymbol{\chi}) = \widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\chi}})$, obteniendo:

$$\int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L} \widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \left[\pi\phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L} K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL = 0 \quad (15)$$

para todo miembro $\widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{\chi}})$ de una clase adecuada de funciones de test en L , donde

$$K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \int_{\boldsymbol{\chi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\chi}})} \left[\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) dC \right] dC. \quad (16)$$

De este modo se obliga a la condición de contorno $V = 1$ a satisfacerse en promedio en la sección transversal. De hecho, (15) puede considerarse como una forma variacional más débil de la ecuación de Fredholm de primera especie en L

$$\pi\phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L} K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL \quad \forall \widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L. \quad (17)$$

En esta formulación no se han tenido en cuenta ni los extremos ni las uniones de los conductores, por lo que es de esperar la aparición de ligeras anomalías localizadas en esos puntos, aunque los resultados globales no deberían sufrir perturbaciones significativas.

3.1. Formulación en Elementos de Contorno

Dadas n funciones de prueba $\{\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}})\}$ definidas en L y m elementos 1D de contorno $\{L^\alpha\}$, la densidad de corriente de pérdida $\widehat{\sigma}$ y el conjunto de ejes de los conductores L se pueden discretizar en la forma

$$\widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}), \quad L = \bigcup_{\alpha=1}^m L^\alpha, \quad (18)$$

y una versión discretizada de (14) puede escribirse como

$$\widehat{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{V}_i(\mathbf{x}), \quad \widehat{V}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^m \widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (19)$$

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \left[\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \right] \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL. \quad (20)$$

Finalmente, para un conjunto dado de n funciones de test $\{\widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}})\}$ definidas en L , (15) se reduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^n \widehat{R}_{ji} \widehat{\sigma}_i = \widehat{v}_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (21)$$

$$\widehat{R}_{ji} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \widehat{v}_j = \sum_{\beta=1}^m \widehat{v}_j^\beta, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; \quad (22)$$

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \left[\int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL, \quad (23)$$

$$\widehat{v}_j^\beta = \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) dL. \quad (24)$$

En comparación con la dada en **2.1**, en esta formulación 1D se reduce drásticamente el trabajo computacional requerido para resolver problemas reales. Sin embargo, debido fundamentalmente al coste de las integraciones circunferenciales en (20) y (23), es necesario introducir nuevamente ciertas simplificaciones para reducir los tiempos de cálculo bajo niveles aceptables.

3.2. Formulación en Elementos de Contorno 1D Simplificada

Una aproximación razonablemente precisa y sencilla para la integral interior en (20) puede escribirse en la forma

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \approx \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (25)$$

$$\widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad \widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\widehat{\boldsymbol{\xi}})}{4}}, \quad (26)$$

y, análogamente, para el núcleo (16) que interviene en (23)

$$K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \approx \int_{\boldsymbol{\chi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\chi}})} \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{k}(\boldsymbol{\chi}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) dC \approx \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (27)$$

$$\widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad \widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\widehat{\boldsymbol{\chi}} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) + \phi^2(\widehat{\boldsymbol{\chi}})}{4}}, \quad (28)$$

siendo sencillo verificar que estas aproximaciones son satisfactorias a menos que la distancia entre los puntos \mathbf{x} o \mathbf{x} (según sea el caso) y $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ sea del mismo orden de magnitud que los diámetros.

La selección de diferentes tipos de funciones de prueba y test conduce a diferentes formulaciones específicas. Así, con elementos de densidad de corriente constante, la Colocación Puntual se identifica con los métodos intuitivos más antiguos, basados en la idea de sustituir cada segmento de conductor por una “esfera imaginaria”; la formulación de Galerkin se identifica con una clase de métodos más recientes (APM) basados en la idea de que cada segmento de conductor se sustituye por una “línea de fuentes puntuales de corriente sobre la longitud del conductor” [3]; y los coeficientes (23) corresponden a “resistencias mutuas y propias” entre “segmentos de conductor” [3]. Obviamente, pueden derivarse formulaciones más avanzadas con elementos de mayor orden [5,6].

Los problemas encontrados con la aplicación de estos métodos [3,6,11] pueden explicarse ahora, desde un punto de vista matemáticamente riguroso, y se deben, básicamente, a que las aproximaciones (25) y (27) no son válidas cuando el tamaño de los elementos llega a ser comparable al diámetro del conductor, lo que introduce errores significativos en los coeficientes del sistema (21), incluidos los diagonales. Por otra parte, puesto que el error de la aproximación aumenta con el nivel de discretización, los resultados numéricos para discretizaciones finas no tienden a la solución de la ecuación integral (17) con el núcleo (16), sino a la solución de una ecuación integral distinta y mal condicionada con el núcleo aproximado por (27), y en todo caso a la solución de un problema diferente [11,12]. Ello explica la razón por la que se obtienen resultados poco realistas cuando aumenta la discretización [3], y se impide la convergencia [6]. No obstante, se ha observado que los resultados obtenidos con niveles de discretización normales son suficientemente precisos en la práctica [11].

En lo sucesivo nos referiremos a formulaciones de tipo Galerkin exclusivamente, donde la matriz del sistema (10) es simétrica y definida positiva [13], y utilizaremos las aproximaciones

$$\hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\gamma} \pi \phi^\alpha \int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL, \quad (29)$$

$$\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha} \approx \frac{\pi \phi^\beta \pi \phi^\alpha}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \hat{N}_j(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \left[\int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \hat{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL, \quad (30)$$

donde ϕ^α y ϕ^β representan el diámetro del conductor (que se supone constante) en los elementos L^α y L^β . Obviamente, (30) conduce a una matriz simétrica.

4. INTEGRACIÓN ANALÍTICA Y EFICIENCIA GLOBAL

El cálculo de las integrales restantes en (29) y (30) no es obvio. Debido al mal comportamiento de los integrandos no es posible utilizar cuadraturas de Gauss, y, aunque con un coste elevado, una cuadratura de Simpson compuesta adaptativa (utilizando la extrapolación de Richardson como estimador de error) parece ser la mejor elección numérica [5]. Recientemente [12,14] se han derivado fórmulas explícitas para calcular (29) en el caso de elementos de orden superior. También se han desarrollado las expresiones explícitas para las contribuciones (30) en los casos en que los elementos L^α y L^β son paralelos y perpendiculares.

Estas fórmulas generalizan a las obtenidas por otros autores para casos más simples [2]. La integración numérica no es excesivamente costosa en los restantes casos, puesto que las expresiones analíticas para (29) pueden sustituirse en (30) dando lugar a integrandos relativamente suaves.

Respecto al coste computacional global, para una discretización dada (m elementos de p nodos cada uno, y un total de n grados de libertad) debe generarse y resolverse un sistema lineal (21) de orden n . Dado que la matriz es simétrica, pero no vacía, su resolución requiere del orden de $O(n^3/3)$ operaciones. La generación de la matriz requiere del orden de $O(m^2p^2/2)$ operaciones, debido a las p^2 contribuciones del tipo (30) que han de ser calculadas para cada par de elementos, de las que aproximadamente la mitad se obtienen directamente por simetría. En problemas pequeños/medianos el mayor esfuerzo computacional se invierte en la generación de la matriz, en tanto que la resolución del sistema de ecuaciones es el factor predominante en problemas medianos/grandes. En este momento, el tamaño del problema más grande que es posible resolver (en un entorno de computación científica normal) está limitado por la capacidad de memoria para el almacenamiento de la matriz. Así, para un problema de 2000 grados de libertad, se precisan ya 16Mb, en tanto que los tiempos de generación de la matriz y resolución del sistema serían todavía aceptables y del mismo orden de magnitud (del orden de una hora en una estación de trabajo normal). Por otra parte, una vez obtenida la densidad de corriente de pérdida, el coste de calcular la resistencia equivalente (2) es despreciable. El coste adicional de obtener el potencial en un punto dado (normalmente en la superficie del terreno) por medio de (19) y (29) requiere sólo $O(mp)$ operaciones, ya que se dispone de fórmulas analíticas para (29). No obstante, si es necesario calcular potenciales en un gran número de puntos (dibujo de isolíneas) el tiempo de computación puede ser elevado.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación de Elementos de Contorno para el análisis de sistemas de tomas de tierra de subestaciones eléctricas. En el caso de problemas 3D, la introducción de una serie de hipótesis razonables permiten reducir la formulación general de Elementos de Contorno 2D a una formulación simplificada 1D con requerimientos computacionales aceptables. Algunos métodos intuitivos, ampliamente utilizados en la práctica, se identifican como casos particulares de esta formulación simplificada, lo que ha permitido explicar —desde un punto de vista matemáticamente riguroso— los problemas encontrados en su aplicación. Por otro lado, mediante la introducción de técnicas analíticas de integración es posible reducir drásticamente los requerimientos computacionales y desarrollar nuevas formulaciones más eficientes y precisas.

Como ejemplo de aplicación se presenta el análisis del sistema de tomas de tierra de la subestación E. R. Barberá (cercana a Barcelona), actualmente en fase de construcción. El plano y características de la instalación se presentan en la Figura 1, y los resultados obtenidos en la Figura 2. Cada barra se ha discretizado en un único elemento lineal. El modelo (408 elementos y 238 grados de libertad) requiere en la actualidad tan sólo 3 minutos de CPU en un ordenador Vax-4300/32Mb, debido a la utilización de técnicas analíticas de integración para barras paralelas y perpendiculares [14]. A la escala de toda la malla, los resultados no se modifican notablemente con discretizaciones más finas. En casos como éste, la utilización de elementos de mayor orden ofrece ventajas frente a la

de elementos de orden cero, ya que la precisión es mucho mayor para un número significativamente menor de grados de libertad.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el “Plan Nacional de Investigación y Desarrollo Eléctrico del Ministerio de Industria y Energía” del Gobierno Español, a través del Proyecto de Investigación OCIDE “Diseño de Tomas de Tierra Asistido por Ordenador”, Número TC0772 UPC-FECSA.

REFERENCIAS

1. SVERAK, J.G., DICK, W.K., DODDS, T.H. and HEPPE, R.H. – “Safe Substations Grounding. Part I”, *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **100** (9), 4281–90, (1981).
2. HEPPE, R.J. – “Computation of Potential at Surface Above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non-Uniform Current Distribution”, *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **98** (6), 1978–89, (1979).
3. GARRETT, D.L. and PRUITT, J.G. – “Problems Encountered with the Average Potential Method of Analyzing Substation Grounding Systems”, *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **104** (12), 3586–96, (1985).
4. DURAND, E. – “*Électrostatique*”, Masson, Paris, (1966).
5. MORENO, L. – “*Disseny Assistit per Ordinador de Postes a Terra en Instal·lacions Elèctriques*” (Tesina de Especialidad), E.T.S.I.C.C.P., Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona, (1989).
6. NAVARRINA, F., MORENO, L., BENDITO, E., ENCINAS, A., LEDESMÁ, A. and CASTELEIRO, M. – “Computer Aided Design of Grounding Grids: A Boundary Element Approach”, *Mathematics in Industry*, Matti Heiliö (Ed.), Kluwer Academic Pub., Spuiboulevard, 307–314, (1991).
7. SVERAK, J.G., et al. – “Safe Substations Grounding. Part II”, *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **101** (10), 4006–23, (1982).
8. SUNDE, E.D. – “*Earth Conduction Effects in Transmission Systems*”, Dover Pub., New York, (1968).
9. DAUTRAY, R. and LIONS, J.L. – “*Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*”, Vol. 6, Masson, Paris, (1988).
10. STAKGOLD, I. – “*Boundary Value Problems of Mathematical Physics*”, MacMillan Co., London, (1970).
11. COLOMINAS, I. NAVARRINA, F. and CASTELEIRO, M. – “A Validation of the Boundary Element Method for Grounding Grid Design and Computation”, *Int. Congress Num. Meth. Engrg. App. Sci.*, Concepción, (1992).
12. NAVARRINA, F. COLOMINAS, I. and CASTELEIRO, M. – “Analytical Integration Techniques for Earth Grid Computation by Boundary Element Methods”, *Int. Congress Num. Meth. Engrg. App. Sci.*, Concepción, (1992).
13. JOHNSON, C. – “*Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987).
14. COLOMINAS, I. NAVARRINA, F. and CASTELEIRO, M. – “Fórmulas Analíticas de Integración para el Cálculo de Tomas de Tierra mediante el Método de Elementos de Contorno (BEM)”, *II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, La Coruña, (1993).

1 Unidad = 10 m



DATOS

Resistividad del Terreno: $0.600 \Omega m$
Diámetro del Conductor: $1.285 cm$
Profundidad de Instalación: $0.800 m$
Potencial de Tierra: $1.000 V$

MODELO BEM 1D

Tipo de Elemento: Lineal
Número de Nodos: 238
Número de Elementos: 408

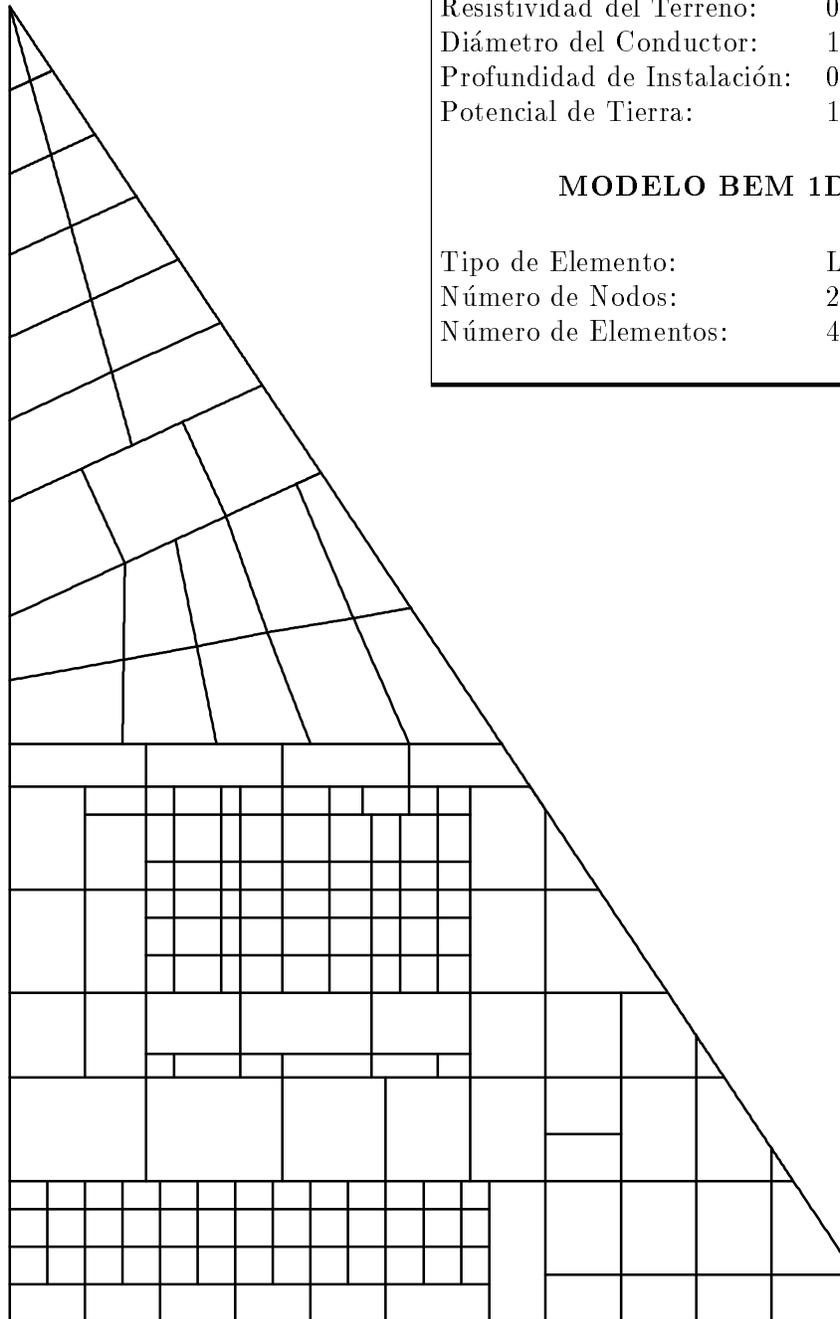


Figura 1.—Malla E. R. Barberá: Plano, características del problema y modelo numérico (1 elemento lineal por barra).

1 Unidad = 10 m

RESULTADOS

Corriente de Pérdida:	3.17703 A
Resistencia Equivalente:	0.31476 Ω
Tiempo de CPU:	205 seg
Ordenador:	VAX-4300

Curvas isopotenciales en superficie cada 0.02 V (regresadas cada 0.10 V).

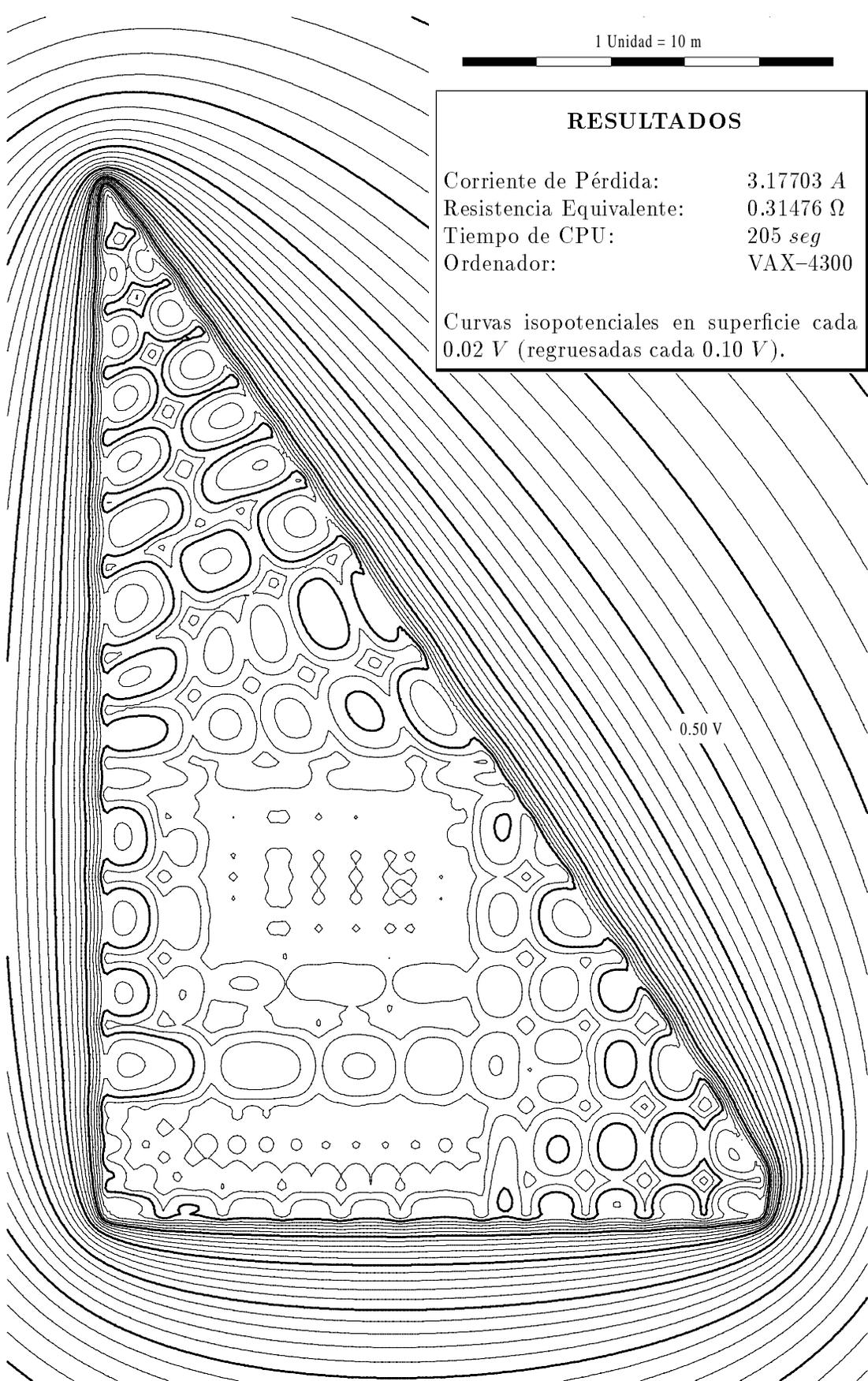


Figura 2.—Malla E. R. Barberá: Resultados obtenidos mediante el BEM (1 elemento lineal por barra, integración analítica entre barras paralelas y perpendiculares).