"Fórmulas analíticas de integración para el cálculo de tomas de tierra mediante el Método de Elementos de Contorno"

I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro (1993)

En "Métodos Numéricos en Ingeniería", Sección: "Métodos Numéricos", pp. 855--864; F. Navarrina y M. Casteleiro (Editores); Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería SEMNI, Barcelona (ISBN: 84-87867-23-5)

FÓRMULAS ANALÍTICAS DE INTEGRACIÓN PARA EL CÁLCULO DE TOMAS DE TIERRA MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO (BEM)

I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro

E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,
Universidad de La Coruña,
Campus de Elviña S/N,
15192 La Coruña,
ESPAÑA

RESUMEN

La resolución de problemas en Teoría del Potencial, y en particular, el cálculo de tomas de tierra en instalaciones eléctricas, ha adquirido nuevas perspectivas mediante la aplicación del Método de Elementos de Contorno [4,5]. Éste ha permitido la obtención de formulaciones generalistas que incluyen a los distintos procedimientos intuitivos de cálculo empleados hasta el momento [2,3].

El desarrollo de la formulación completa basada en el Método de Elementos de Contorno, y su discusión, pueden encontrarse en trabajos recientes [4,5,6], en tanto que en este artículo se presentan las técnicas de integración analítica desarrolladas para el tratamiento de sus ecuaciones discretizadas. En primer lugar se deriva el cálculo del potencial generado por un electrodo en un punto del espacio, que es la base para los cálculos de las contribuciones elementales (integrales) del sistema de ecuaciones lineales obtenido de la discretización del problema en elementos de contorno [6]. Estas contribuciones, que pueden interpretarse como medidas ponderadas de los potenciales generados por un electrodo sobre otro en el espacio, se analizan para distintas posiciones relativas características de los electrodos.

1. INTRODUCCIÓN

Sucesivas simplificaciones aplicadas a la formulación general de elementos de contorno [6] permiten reducir paulatinamente la complejidad del problema de cálculo de una toma de tierra. Finalmente, cada uno de los conductores cilíndricos que conforman la toma de tierra puede modelizarse mediante un segmento de recta en el espacio —el eje de la barra cilíndrica— definido por sus puntos extremos, y dotado de una propiedad geométrica adicional —el diámetro de la barra— que se tiene en cuenta en los cálculos.

El potencial generado por un electrodo en un punto del espacio $\boldsymbol{x}$ puede obtenerse como suma de las contribuciones de cada uno de los conductores que componen la toma de tierra [6]. De este modo, en la formulación simplificada 1D de elementos de contorno es preciso determinar términos de la forma

$$\widehat{V}_i^{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \frac{\phi^{\alpha}}{4\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^{\alpha}} \widehat{k}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})\, \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}})\; dL \tag{1}$$

donde $\widehat{V}_i^{\alpha}(\boldsymbol{x})$ es la contribución de la función de prueba i-ésima al potencial generado por el elemento recto L^{α} que forma parte del electrodo L (que ha sido discretizado en m elementos de contorno 1D $\{L^\alpha\}$) en un punto del espacio $\boldsymbol{x}$. $\{\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}})\}$ es un conjunto dado de n funciones de prueba definidas en L, ϕ^α es el diámetro del electrodo cilíndrico que se asume constante en cada elemento y γ es la conductividad aparente del terreno en el que se encuentra el sistema de tomas de tierra. Siendo $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ un punto de la recta L^α y $\widehat{\boldsymbol{\xi}}'$ su simétrico respecto a la superficie del terreno, el núcleo de integración $\widehat{k}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}})$ viene dado por

$$\widehat{k}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\widehat{r}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\widehat{r}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}}')}\right), \quad \widehat{r}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\left|\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right|^2 + (\phi^\alpha/2)^2} \tag{2}$$

Por otra parte, la discretización simplificada en elementos de contorno 1D del problema [6], conduce a un sistema lineal cuyos coeficientes son

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi\,\phi^\alpha\,\phi^\beta}{4\gamma}\left\{\int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}}\in L^\beta} \widehat{N}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}})\left[\int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}}\in L^\alpha} \widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}},\widehat{\boldsymbol{\xi}})\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}})\,dL\right]\,dL\right\} \tag{3}$$

donde $\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}$ es la contribución de la función de prueba i-ésima al potencial generado por el elemento L^α sobre otro elemento L^β de diámetro ϕ^β, promediado por la función de test j-ésima. En este caso el núcleo de integración $\widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}},\widehat{\boldsymbol{\xi}})$, siendo $\widehat{\boldsymbol{\chi}}$ un punto de la recta L^β, es

$$\widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}},\widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}},\widehat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}},\widehat{\boldsymbol{\xi}}')}\right), \; \widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}},\widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\left|\widehat{\boldsymbol{\chi}}-\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right|^2 + (\phi^\alpha/2)^2 + (\phi^\beta/2)^2} \tag{4}$$

2. FORMULACIÓN DEL POTENCIAL GENERADO POR UN ELECTRODO EN UN PUNTO DEL ESPACIO

2.1. Cálculo de la integral de línea en el electrodo

La línea de un elemento L^α queda perfectamente definida por las coordenadas cartesianas de sus puntos extremos $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1$ y $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_2$. Haciendo uso del punto medio $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_0$, la longitud $\mathcal{L}^\alpha$, y el versor director $\widehat{\boldsymbol{s}}^\alpha$ cualquier punto $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ del elemento se expresa como:

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}_0 + \xi\,\frac{\mathcal{L}^\alpha}{2}\,\widehat{\boldsymbol{s}}^\alpha; \qquad \widehat{\boldsymbol{\xi}}_0 = \frac{\widehat{\boldsymbol{\xi}}_2+\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1}{2}; \qquad \mathcal{L}^\alpha = |\widehat{\boldsymbol{\xi}}_2-\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1|; \qquad \widehat{\boldsymbol{s}}^\alpha = \frac{\widehat{\boldsymbol{\xi}}_2-\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1}{\mathcal{L}^\alpha} \tag{5}$$

para un valor del parámetro escalar ξ comprendido entre -1 y 1, (dominio de las funciones de forma isoparamétricas). Efectuando este cambio de la variable en la ecuación del potencial elemental (1) se obtiene

$$\widehat{V}_i^\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{\phi^\alpha\,\mathcal{L}^\alpha}{8\gamma}\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \widehat{k}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))\,\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))\;d\xi \tag{6}$$

Las funciones de prueba $\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ se denotarán, en lo sucesivo, como $\widetilde{N}_i(\xi)$ haciendo referencia a las funciones de forma comúnmente empleadas en elementos finitos, por lo que, teniendo en cuenta (2),

$$\widehat{V}_i^\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{\phi^\alpha\,\mathcal{L}^\alpha}{8\gamma}\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widetilde{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))}\,d\xi + \frac{\phi^\alpha\,\mathcal{L}^\alpha}{8\gamma}\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widetilde{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\boldsymbol{x},\widehat{\boldsymbol{\xi}}'(\xi))}\,d\xi \tag{7}$$

Por otra parte, el desarrollo en serie de potencias hasta el término de segundo grado de la función $\widetilde{N}_i(\xi)$ alrededor del punto μ permite expresar ésta en términos de valores conocidos de la función, su primera y segunda derivadas, como

$$\widehat{n}_{0i} = \widetilde{N}_i(\mu) - \mu \widetilde{N}_i'(\mu) + \frac{\mu^2}{2}\widetilde{N}_i''(\mu); \;\; \widehat{n}_{1i} = \widetilde{N}_i'(\mu) - \mu \widetilde{N}_i''(\mu); \;\;\; \widehat{n}_{2i} = \frac{1}{2}\widetilde{N}_i''(\mu)$$
$$\widetilde{N}_i(\xi) = \widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i}\,\xi + \widehat{n}_{2i}\,\xi^2 \tag{8}$$

2.2. Análisis geométrico

Sean p_0 la distancia del punto $\boldsymbol{x}$ a su proyección ortogonal sobre la dirección del electrodo; y q la distancia desde dicha proyección al punto medio $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_0$. La distancia desde cualquier punto $\boldsymbol{x}$ a un punto $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ del electrodo es igual a

$$|\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}| = \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2}\sqrt{\widehat{p}_0^2 + (\widehat{q} - \xi)^2}, \qquad \widehat{p}_0 = \frac{p_0}{\mathcal{L}^\alpha/2}\,, \qquad \widehat{q} = \frac{q}{\mathcal{L}^\alpha/2} \tag{9}$$

Analizando el primero de los sumandos integrales de (7), el término $\widehat{r}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ se puede escribir en términos de parámetros constantes para un elemento α y un punto $\boldsymbol{x}$ dados, siendo únicamente función de la variable escalar ξ. Es decir

$$\widehat{r}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi)) \;=\; \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2}\sqrt{\widehat{p}^2 + (\widehat{q} - \xi)^2}, \qquad \widehat{p}^2 \;=\; \widehat{p}_0^2 + \widehat{\phi}^2, \qquad \widehat{\phi} = \frac{\phi^\alpha/2}{\mathcal{L}^\alpha/2} \tag{10}$$

Mediante la substitución de las funciones (8) y la expresión de $\widehat{r}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ en el primer término de (7) se obtienen

$$\frac{\phi^\alpha\,\mathcal{L}^\alpha}{8\gamma}\int_{\xi=-1}^{\xi=1}\frac{\widehat{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))}\,d\xi \;=\; \frac{\phi^\alpha}{4\gamma}\int_{\xi=-1}^{\xi=1}\frac{\widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i}\;\xi + \widehat{n}_{2i}\;\xi^2}{\sqrt{\widehat{p}^2 + (\widehat{q} - \xi)^2}}\;d\xi. \tag{11}$$

Si se efectúa un cambio en la variable para facilitar la integración, esta expresión se reescribe como

$$\frac{\phi^\alpha\,\mathcal{L}^\alpha}{8\gamma}\int_{\xi=-1}^{\xi=1}\frac{\widehat{N}_i(\xi)}{\widehat{r}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))}\,d\xi \;=\; \frac{\phi^\alpha}{4\gamma}\left\{\left(\widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i}\,\widehat{q} + \widehat{n}_{2i}\,\widehat{q}^2\right)\int_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}}\frac{1}{\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2}}\,dt\right.$$
$$\left. +\;(\widehat{n}_{1i}\;+\;2\widehat{q}\,\widehat{n}_{2i})\int_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}}\frac{t}{\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2}}\,dt \;+\; \widehat{n}_{2i}\int_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}}\frac{t^2}{\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2}}\,dt\right\} \tag{12}$$

La resolución analítica de estas tres integrales conduce a las expresiones finales:

$$\frac{\phi^\alpha\,\mathcal{L}^\alpha}{8\gamma}\int_{\xi=-1}^{\xi=1}\frac{1}{\widehat{r}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))}\widehat{N}_i(\xi)\;d\xi \;=\; \frac{\phi^\alpha}{4\gamma}\,\Phi(\widehat{p}, \widehat{q}) \tag{13}$$
$$\Phi(\widehat{p}, \widehat{q}) \;=\; \mathcal{V}^{(0)}\;\varphi^{(0)} \;+\; \mathcal{V}^{(1)}\;\varphi^{(1)} \;+\; \mathcal{V}^{(2)}\;\varphi^{(2)}$$

$$\mathcal{V}^{(0)} = \widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i}\,\widehat{q} + \widehat{n}_{2i}\,\left(\widehat{q}^2 - (\widehat{p}^2/2)\right), \quad \mathcal{V}^{(1)} = \widehat{n}_{1i} + 2\,\widehat{q}\,\widehat{n}_{2i}, \quad \mathcal{V}^{(2)} = \widehat{n}_{2i}/2$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)} &= \operatorname{argsh}\left(\frac{1-\widehat{q}}{\widehat{p}}\right) + \operatorname{argsh}\left(\frac{1+\widehat{q}}{\widehat{p}}\right) \\
\varphi^{(1)} &= \sqrt{(1-\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2} - \sqrt{(1+\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2} \\
\varphi^{(2)} &= (1-\widehat{q})\,\sqrt{(1-\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2} + (1+\widehat{q})\,\sqrt{(1+\widehat{q})^2 + \widehat{p}^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

El cálculo se completa aplicando el resultado de la ecuación (13) al segundo término de los sumandos integrales de (7). Si se denominan $\widehat{p}$ y $\widehat{q}$ los parámetros geométricos de los puntos $(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$, y $\widehat{p}'$ y $\widehat{q}'$ los parámetros geométricos de los puntos $(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}')$, el potencial del elemento α se obtiene de

$$\widehat{V}_i^{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \frac{\phi^{\alpha}}{4\gamma}\left[\Phi(\widehat{p}, \widehat{q}) + \Phi(\widehat{p}', \widehat{q}')\right] \tag{15}$$

3. POTENCIAL DE DOS ELECTRODOS EN EL ESPACIO

3.1. Cálculo de las integrales de línea sobre los electrodos

La línea de un elemento L^{β} queda definida por las coordenadas cartesianas de sus puntos extremos $\widehat{\boldsymbol{\chi}}_1$ y $\widehat{\boldsymbol{\chi}}_2$. El punto medio $\widehat{\boldsymbol{\chi}}_0$, la longitud del elemento $\mathcal{L}^{\beta}$, y el versor director $\widehat{\boldsymbol{s}}^{\beta}$ permiten expresar un punto cualquiera $\widehat{\boldsymbol{\chi}}$ del elemento como

$$\widehat{\boldsymbol{\chi}} = \widehat{\boldsymbol{\chi}}_0 + \chi\,\frac{\mathcal{L}^{\beta}}{2}\,\widehat{\boldsymbol{s}}^{\beta}; \qquad \widehat{\boldsymbol{\chi}}_0 = \frac{\widehat{\boldsymbol{\chi}}_2 + \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1}{2}; \qquad \mathcal{L}^{\beta} = |\widehat{\boldsymbol{\chi}}_2 - \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1|; \qquad \widehat{\boldsymbol{s}}^{\beta} = \frac{\widehat{\boldsymbol{\chi}}_2 - \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1}{\mathcal{L}^{\beta}} \tag{16}$$

para valores del parámetro escalar χ comprendido entre -1 y 1, (dominio de las funciones de forma isoparamétricas). Introduciendo este cambio de variable $\widehat{\boldsymbol{\chi}}$, junto con el cambio de $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ de (5) en la expresión (3),

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi\,\phi^{\alpha}\,\phi^{\beta}\,\mathcal{L}^{\alpha}\,\mathcal{L}^{\beta}}{16\gamma}\left\{\int_{\chi=-1}^{\chi=1}\widehat{N}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi))\left[\int_{\xi=-1}^{\xi=1}\widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi), \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))\,d\xi\right]d\chi\right\} \tag{17}$$

Al igual que en el caso de $\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ en la ecuación del potencial (6), las funciones $\widehat{N}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi))$ se denotarán, en lo sucesivo, como $\widetilde{N}_j(\chi)$. Desarrollando en serie de potencias hasta el término de segundo grado de las funciones $\widetilde{N}_j(\chi)$ alrededor del punto δ, resulta

$$\begin{gathered}
\widehat{n}_{0j} = \widetilde{N}_j(\delta) - \delta\widetilde{N}_j'(\delta) + \frac{\delta^2}{2}\widetilde{N}_j''(\delta); \quad \widehat{n}_{1j} = \widetilde{N}_j'(\delta) - \delta\widetilde{N}_j''(\delta); \quad \widehat{n}_{2j} = \frac{1}{2}\widetilde{N}_j''(\delta) \\
\widetilde{N}_j(\chi) = \widehat{n}_{0j} + \widehat{n}_{1j}\,\chi + \widehat{n}_{2j}\,\chi^2
\end{gathered} \tag{18}$$

siendo $\widetilde{N}_j(\delta)$, $\widetilde{N}'_j(\delta)$ y $\widetilde{N}''_j(\delta)$ la función, primera y segunda derivadas evaluadas en el punto δ. Si se substituyen en (17) estas expresiones, las de (8) y el núcleo de integración (4) resulta

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi\phi^\alpha\phi^\beta\mathcal{L}^\alpha\mathcal{L}^\beta}{16\gamma}\Bigg\{ \int_{\chi=-1}^{\chi=1} & \left(\widehat{n}_{0j} + \widehat{n}_{1j}\,\chi + \widehat{n}_{2j}\,\chi^2\right) \\ & \Bigg[\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i}\,\xi + \widehat{n}_{2i}\,\xi^2}{\sqrt{\left|\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi) - \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi)\right|^2 + \left(\frac{\phi^\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\phi^\beta}{2}\right)^2}}\,d\xi \\ & + \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \frac{\widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i}\,\xi + \widehat{n}_{2i}\,\xi^2}{\sqrt{\left|\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi) - \widehat{\boldsymbol{\xi}}'(\xi)\right|^2 + \left(\frac{\phi^\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\phi^\beta}{2}\right)^2}}\,d\xi\Bigg]d\chi\Bigg\}\end{aligned} \tag{19}$$

Esta expresión es el resultado de la integración de unas integrales análogas a las del potencial (11) y por tanto puede hacerse uso de los resultados (14) y (15) redefiniendo de forma conveniente los coeficientes, es decir,

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi\,\phi^\alpha\,\phi^\beta\,\mathcal{L}^\beta}{8\gamma}\left\{\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) \,+\, \widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}'_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}'_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2)\right\} \tag{20}$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) = \int_{\chi=-1}^{\chi=1}\left(\widehat{n}_{0j} + \widehat{n}_{1j}\,\chi + \widehat{n}_{2j}\,\chi^2\right)\Phi(\widehat{p}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi)), \widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi)))d\chi \tag{21}$$

$$\widehat{p}^2(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi)) \;=\; \widehat{p}_0^2(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi)) + \widehat{\phi}^2, \qquad \widehat{\phi} = \frac{\sqrt{(\phi^\alpha/2)^2 + (\phi^\beta/2)^2}}{\mathcal{L}^\alpha/2} \tag{22}$$

$\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2)$ es la integración entre dos barras cilíndricas que se definen por las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de sus ejes. Así se analizará el primero de los sumandos de (20), y el segundo se considerará como la integración entre otras dos barras con coordenadas distintas (las de los puntos simétricos a $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1$ y $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_2$) y a la que se aplicarán los mismos resultados.

3.2. Análisis geométrico de dos rectas en el espacio

Dos rectas cualesquiera en el espacio siempre pueden orientarse, efectuando las oportunas traslaciones, de forma tal que el origen de coordenadas esté situado en el centro de una de las dos rectas y que por ella pase uno de los ejes cartesianos.

Sean la recta α aquella definida por los puntos extremos $(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2)$ y la recta β aquella definida por los puntos $(\widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2)$. Si se sitúa el origen en el centro de la recta α y se hace coincidir dicha barra con el eje Y, las rectas estarán definidas por unas nuevas coordenadas de sus puntos extremos referidos a este nuevo sistema que se denominarán $(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_2)$ y $(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2)$. Haciendo uso de las relaciones (5), las nuevas coordenadas de la recta α y el versor director son

$$\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_1 = (0, -\frac{\mathcal{L}^\alpha}{2}, 0), \qquad \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_0 = (0,0,0), \qquad \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_2 = (0, \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2}, 0), \qquad \widetilde{\boldsymbol{s}}^\alpha = (0,1,0)$$

A su vez, la recta β queda ahora definida por los nuevos puntos $(\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2)$ y caracterizada por las coordenadas del punto medio $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_0$ y el versor director $\widetilde{\boldsymbol{s}}^{\beta}$.

Las distancias p_0 y q (9) de un punto $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}$ de la recta β a un punto de la recta α son, en función de las coordenadas cartesianas de $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}$

$$p_0^2 \,=\, \widetilde{\chi}_{\beta x}^2 \,+\, \widetilde{\chi}_{\beta z}^2 \qquad q^2 \,=\, \widetilde{\chi}_{\beta y}^2 \tag{23}$$

y dado que cualquier punto de la recta β se puede determinar con (16), haciendo uso de (22), las distancias adimensionales $\widehat{p}$ y $\widehat{q}$ resultan

$$\widehat{p} \,=\, \lambda \left\{ \sqrt{\mathcal{C}^2 \,+\, 2\,\mathcal{D}\,\chi \,+\, \mathcal{E}^2\,\chi^2} \right\}, \qquad \widehat{q} \,=\, \lambda\,\{ \mathcal{A} \,+\, \mathcal{B}\,\chi \} \tag{24}$$

$$\lambda = \frac{\mathcal{L}^{\beta}}{\mathcal{L}^{\alpha}}, \qquad \mathcal{A} = \left(\frac{\widetilde{\chi}_{0y}}{\mathcal{L}^{\beta}/2} \right), \qquad \mathcal{B} = \widetilde{s}_y^{\beta}, \qquad \mathcal{D} = \left(\frac{\widetilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta}/2} \right) \widetilde{s}_x^{\beta} + \left(\frac{\widetilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta}/2} \right) \widetilde{s}_z^{\beta}$$

$$\mathcal{C}^2 = \left(\frac{\widetilde{\chi}_{0x}}{\mathcal{L}^{\beta}/2} \right)^2 + \left(\frac{\widetilde{\chi}_{0z}}{\mathcal{L}^{\beta}/2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(\phi^{\alpha}/2)^2 + (\phi^{\beta}/2)^2}}{\mathcal{L}^{\beta}/2} \right)^2, \qquad \mathcal{E}^2 = \widetilde{s}_x^2 + \widetilde{s}_z^2 \tag{25}$$

Estos coeficientes son la clave de todo el desarrollo que sigue a continuación ya que en ellos está contenida toda la información para calcular las distancias entre dos puntos de dos rectas α y β en cualquier disposición espacial.

3.3. Cálculo de las integrales elementales

La substitución en (21) de las fórmulas analíticas $\Phi(\widehat{p}, \widehat{q})$ deducidas en la ecuación del potencial (14) conduce a una expresión que es función únicamente de las funciones de forma y de los parámetros geométricos adimensionales $\widehat{p}$ y $\widehat{q}$, es decir,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) = & \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \left(\widehat{n}_{0j} + \widehat{n}_{1j}\,\chi + \widehat{n}_{2j}\,\chi^2 \right) \\
& \left\{ \left(\widehat{n}_{0i} + \widehat{n}_{1i}\,\widehat{q} + \widehat{n}_{2i} \left(\widehat{q}^2 - (\widehat{p}^2/2) \right) \right) \left[\operatorname{argsh}\left(\frac{t}{\widehat{p}} \right) \right]_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} \right. \\
& \left. + \left(\widehat{n}_{1i} + 2\,\widehat{q}\,\widehat{n}_{2i} \right) \left[\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2} \right]_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} + \frac{\widehat{n}_{2i}}{2} \left[t\,\sqrt{t^2 + \widehat{p}^2} \right]_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} \right\} d\chi
\end{aligned} \tag{26}$$

Si en este punto se substituyen las expresiones obtenidas en el apartado (3.2) para las distancias adimensionales, se reordenan los términos y se definen unos coeficientes que permitan separar los parámetros geométricos de las funciones de forma y de las integrales, (26) se reescribe como

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) \,=\, \sum_{u=0}^{u=2} \sum_{w=0}^{w=4} \mathcal{K}_w^{(u)}\, \varphi_w^{(u)} \tag{27}$$

donde los coeficientes $\mathcal{K}_w^{(u)}$ se calculan como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_0^{(0)} \\ \mathcal{K}_1^{(0)} \\ \mathcal{K}_2^{(0)} \\ \mathcal{K}_3^{(0)} \\ \mathcal{K}_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{n}_{0j} & 0 & 0 \\ \widehat{n}_{1j} & \widehat{n}_{0j} & 0 \\ \widehat{n}_{2j} & \widehat{n}_{1j} & \widehat{n}_{0j} \\ 0 & \widehat{n}_{2j} & \widehat{n}_{1j} \\ 0 & 0 & \widehat{n}_{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda\mathcal{A} & \lambda^2(\mathcal{A}^2 - \mathcal{C}^2/2) \\ 0 & \lambda\mathcal{B} & \lambda^2(2\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{D}) \\ 0 & 0 & \lambda^2(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{n}_{0i} \\ \widehat{n}_{1i} \\ \widehat{n}_{2i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_0^{(1)} \\ \mathcal{K}_1^{(1)} \\ \mathcal{K}_2^{(1)} \\ \mathcal{K}_3^{(1)} \\ \mathcal{K}_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{n}_{0j} & 0 \\ \widehat{n}_{1j} & \widehat{n}_{0j} \\ \widehat{n}_{2j} & \widehat{n}_{1j} \\ 0 & \widehat{n}_{2j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda\mathcal{A} \\ 0 & 2\lambda\mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{n}_{1i} \\ \widehat{n}_{2i} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathcal{K}_0^{(2)} \\ \mathcal{K}_1^{(2)} \\ \mathcal{K}_2^{(2)} \\ \mathcal{K}_3^{(2)} \\ \mathcal{K}_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{n}_{0j} \\ \widehat{n}_{1j} \\ \widehat{n}_{2j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\, \widehat{n}_{2i} \tag{28}$$

Como puede observarse, los coeficientes $\mathcal{K}_w^{(u)}$ se expresan como el producto de tres matrices (o vectores) que contienen de forma separada las funciones de forma del nodo j $(\widehat{n}_{0j}, \widehat{n}_{1j}, \widehat{n}_{2j})$, las propiedades geométricas de las dos rectas $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}^2, \mathcal{D}, \mathcal{E}^2, \lambda)$ y las funciones de forma del nodo i $(\widehat{n}_{0i}, \widehat{n}_{1i}, \widehat{n}_{2i})$.

Los términos $\varphi_w^{(u)}$ son los coeficientes integrales, y que en su forma más general se pueden escribir como las funciones w-ésimas siguientes

$$\begin{aligned} \varphi_w^{(0)} &= \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \chi^w \left[\operatorname{argsh}\left(\frac{t}{\widehat{p}}\right)\right]_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} d\chi \qquad w = 0,1,2,3,4 \\ \varphi_w^{(1)} &= \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \chi^w \left[\sqrt{t^2+\widehat{p}^2}\right]_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} d\chi \qquad w = 0,1,2,3,4 \\ \varphi_w^{(2)} &= \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \chi^w \left[t\,\sqrt{t^2+\widehat{p}^2}\right]_{t=-1-\widehat{q}}^{t=1-\widehat{q}} d\chi \qquad w = 0,1,2,3,4 \end{aligned} \tag{29}$$

Sean $\mathcal{I}\{m\}[a,b,c,d](x)$ y $\mathcal{J}\{m\}[a,b,c,d](x)$ primitivas genéricas tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\{m\}[a,b,c,d](x)\Big|_{x=-1}^{x=1} &= \int_{x=-1}^{x=1} x^m \ln\left(a+bx+\sqrt{x^2+2dx+c^2}\right) dx \\ \mathcal{J}\{m\}[a,b,c,d](x)\Big|_{x=-1}^{x=1} &= \int_{x=-1}^{x=1} x^m \sqrt{x^2+2dx+c^2}\, dx \end{aligned} \tag{30}$$

para valores dados de los parámetros a, b, c, d y del exponente $m \in \{0,1,2,3,4\}$.

Entonces los coeficientes integrales (29) pueden expresarse en la forma

$$
\begin{aligned}
\varphi_w^{(0)} &= \varphi_w^{(0)A} - \varphi_w^{(0)B} \\
\varphi_w^{(1)} &= \varphi_w^{(1)A} - \varphi_w^{(1)B} \\
\varphi_w^{(2)} &= (1-\lambda\mathcal{A})\,\varphi_w^{(1)A} - \lambda\mathcal{B}\,\varphi_{w+1}^{(1)A} + (1+\lambda\mathcal{A})\,\varphi_w^{(1)B} + \lambda\mathcal{B}\,\varphi_{w+1}^{(1)A}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_w^{(0)A} &=& \mathcal{I}\{w\}[a,b,c,d](x)\Big|_{x=-1}^{x=1} \\ \varphi_w^{(1)A} &=& \lambda\mathcal{J}\{w\}[a,b,c,d](x)\Big|_{x=-1}^{x=1} \end{array}\right\} \text{ con } \left\{\begin{array}{l} a=\left(\frac{1}{\lambda}-\mathcal{A}\right) \\ b=-\mathcal{B} \\ c^2=\mathcal{C}^2+\left(\frac{1}{\lambda}-\mathcal{A}\right)^2 \\ d=\mathcal{D}-\left(\frac{1}{\lambda}-\mathcal{A}\right)\mathcal{B} \end{array}\right. \\
&\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_w^{(0)B} &=& \mathcal{I}\{w\}[a,b,c,d](x)\Big|_{x=-1}^{x=1} \\ \varphi_w^{(1)B} &=& \lambda\mathcal{J}\{w\}[a,b,c,d](x)\Big|_{x=-1}^{x=1} \end{array}\right\} \text{ con } \left\{\begin{array}{l} a=-\left(\frac{1}{\lambda}+\mathcal{A}\right) \\ b=-\mathcal{B} \\ c^2=\mathcal{C}^2+\left(\frac{1}{\lambda}+\mathcal{A}\right)^2 \\ d=\mathcal{D}+\left(\frac{1}{\lambda}+\mathcal{A}\right)\mathcal{B} \end{array}\right.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

El objetivo es la obtención de expresiones analíticas de las primitivas genéricas $\mathcal{I}\{m\}[a,b,c,d](x)$ y $\mathcal{J}\{m\}[a,b,c,d](x)$ para los distintos valores del exponente $m \in \{0,1,2,3,4\}$ y de los parámetros $[a,b,c,d]$ que dependen de las propiedades geométricas de las dos rectas en el espacio. Se analizarán en primer lugar las dos disposiciones de barras más frecuentes, que son rectas perpendiculares ($\mathcal{B}=0$) y rectas paralelas ($\mathcal{B}^2=1$).

3.3.1 Cálculo de las Integrales Genéricas en el Caso de Barras Perpendiculares.

Las expresiones siguientes han sido desarrolladas pensando en facilitar la posterior implementación de la formulación, y en la medida de lo posible efectuando las menores operaciones que involucren funciones logarítmicas y trigonométricas. A tal fin, se han derivado fórmulas analíticas recurrentes, para lo que se han introducido las funciones $\widehat{\mathcal{I}}\{m\}[a,b,c,d](x)$, $\mathcal{I}_1\{m\}[a,b,c,d](x)$, $\widehat{\mathcal{I}}_1\{m\}[a,b,c,d](x)$, y $\mathcal{I}_2\{m\}[a,b,c,d](x)$, y los parámetros auxiliares $R^2 = c^2-d^2$ y $q^2=R^2-a^2$, obteniendo las expresiones

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}\{m\} &= \frac{1}{m+1}\left[x^{m+1}\ln\left(a+\sqrt{(x+d)^2+R^2}\right)-\widehat{\mathcal{I}}\{m+1\}\right] \\
\widehat{\mathcal{I}}\{m\} &= -a\mathcal{I}_1\{m\}+\mathcal{I}_2\{m\} \\
\mathcal{I}_1\{m\} &= \widehat{\mathcal{I}}_1\{m-1\}+d\widehat{\mathcal{I}}_1\{m-2\}-2d\mathcal{I}_1\{m-1\}-(d^2+q^2)\mathcal{I}_1\{m-2\} \\
\widehat{\mathcal{I}}_1\{m\} &= \frac{x^{m+1}}{m}\sqrt{(x+d)^2+R^2}-\left[\frac{2m-1}{m}\right]d\,\widehat{\mathcal{I}}_1\{m-1\}-\left[\frac{m-1}{m}\right]c^2\,\widehat{\mathcal{I}}_1\{m-2\} \\
\mathcal{I}_2\{m\} &= \frac{x^m}{m}+\left(\frac{d}{m-1}\right)x^{m-1}-2d\,\mathcal{I}_2\{m-1\}-(d^2+q^2)\mathcal{I}_2\{m-2\} \\
\mathcal{J}\{m\} &= \widehat{\mathcal{I}}_1\{m+2\}+2d\,\widehat{\mathcal{I}}_1\{m+1\}+c^2\,\widehat{\mathcal{I}}_1\{m\}
\end{aligned}
$$

En el Anexo 1 se incluyen las integrales que completan las fórmulas anteriores y que permiten iniciar los cálculos recurrentes.

3.3.2 Cálculo de las Integrales Genéricas en el Caso de Barras Paralelas.

En el caso de una disposicón paralela de las barras en el espacio, la resolución es más sencilla que en el caso de las perpendiculares. En este caso se han introducido las funciones $\widehat{\mathcal{I}}\{m\}[a,b,c,d](x)$, $\widehat{\mathcal{I}}_1\{m\}[a,b,c,d](x)$, y $\widehat{\mathcal{J}}\{m\}[a,b,c,d](x)$, y el parámetro auxiliar $R^2 = c^2 - d^2$, obteniendo las expresiones

$$\mathcal{I}\{m\} = \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^{m-j}\, \widehat{\mathcal{I}}\{j\}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}\{m\} = \frac{1}{m+1}\left[(x+d)^{m+1} \ln\left(b\,(x+d) + \sqrt{(x+d)^2 + R^2}\right) - b\,\widehat{\mathcal{I}}\{m+1\}\right]$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_1\{m\} = \frac{1}{m}\left[(x+d)^{m-1}\sqrt{(x+d)^2 + R^2} - (m-1)\,R^2\,\widehat{\mathcal{I}}_1\{m-2\}\right]$$

$$\mathcal{J}\{m\} = \sum_{j=0}^{j=m} \binom{m}{j} (-d)^{m-j}\, \widehat{\mathcal{J}}\{j\}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}\{m\} = \widehat{\mathcal{I}}_1\{m+2\} + R^2\,\widehat{\mathcal{I}}_1\{m\}$$

En el Anexo 2 se especifican las expresiones que inician la recurrencia.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado el desarrollo de la formulación de integración analítica para el cálculo de sistemas de tomas de tierra en instalaciones eléctricas basada en el Método de Elementos de Contorno, y se han derivado las expresiones para el cálculo de las contribuciones al potencial según la disposición de los electrodos que forman la toma de tierra en los casos más frecuentes (perpendiculares y paralelos). Asímismo se ha comprobado que las fórmulas obtenidas incluyen como caso particular al Método de Howe [1], propuesto por UNESA para la aplicación del Reglamento sobre Condiciones Técnicas y Garantías de Seguridad en Centrales Eléctricas, Subestaciones y Centros de Transformación.

Tanto en el caso de barras paralelas como el de perpendiculares la correcta implementación de esta formulación analítica simplifica notablemente las expresiones y el número de cálculos que se realizan. Ésta ha sido incorporada a un Sistema de Diseño Asistido por Ordenador para cálculo de tomas de tierra en subestaciones eléctricas obteniéndose unos excelentes resultados por cuanto al desaparecer casi por completo la integración numérica (sólo es necesaria en aquellos casos que las barras no sean ni paralelas ni perpendiculares) los tiempos de computación se reducen drásticamente [6].

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Departamento de Protecciones y Medidas de la *"Subdirección General de Producción Hidraúlica, Transporte y Transformación"* de UNIÓN FENOSA, así como por la UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA, en concepto de *Becas para realización de Tesis Doctorales.*

REFERENCIAS

1. UNESA – "Método de Cálculo y Proyecto de Instalaciones de Puesta a Tierra para Centros de Transformación conectados a Redes de Tercera Categoría", Comisión de Reglamentos del Comité de Distribución (1989).
2. HEPPE, R.J. – "Computation of Potential at Surface Above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non-Uniform Current Distribution", *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **98** (6), 1978–89, (1979).
3. GARRETT, D.L. and PRUITT, J.G. – "Problems Encountered with the Average Potential Method of Analyzing Substation Grounding Systems", *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **104** (12), 3586–96, (1985).
4. NAVARRINA, F. COLOMINAS, I. y CASTELEIRO, M. – "Analytical Integration Techniques for Earthind Grid Computation by BEM", *Int. Cong. Num. Met. Eng. App. Sci.*,Concepción, (1992).
5. COLOMINAS, I. NAVARRINA, F. y CASTELEIRO, M. – "A Validation of the Boundary Element Method for Grounding Grid Design and Computation", *Int. Cong. Num. Met. Eng. App. Sci.*, Concepción, (1992).
6. NAVARRINA, F. COLOMINAS, I. y CASTELEIRO, M. – "Una formulación aproximada mediante el Método de Elementos de Contorno para la solución de problemas en Teoría del Potencial", *II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, La Coruña, (1993).

ANEXO 1 : BARRAS PERPENDICULARES

$$\mathcal{I}\{0\} = (x+d)\ln\left(a+\sqrt{(x+d)^2+R^2}\right) - x - q\arctan\left(\frac{a(x+d)}{q\sqrt{(x+d)^2+R^2}}\right)$$

$$+a\ln\left(x+d+\sqrt{(x+d)^2+R^2}\right) + q\arctan\left(\frac{x+d}{q}\right)$$

$$\mathcal{I}_1\{1\} = -\frac{q}{a}\arctan\left[\frac{a(x+d)}{q\sqrt{(x+d)^2+R^2}}\right] + \ln\left[x+d+\sqrt{(x+d)^2+R^2}\right] - d\,\mathcal{I}_1\{0\}$$

$$\mathcal{I}_1\{0\} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a-\sqrt{(x+d)^2+R^2}}{a+\sqrt{(x+d)^2+R^2}}\right); \qquad \widehat{\mathcal{I}}_1\{1\} = \sqrt{(x+d)^2+R^2} - d\,\widehat{\mathcal{I}}_1\{0\}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_1\{0\} = \operatorname{argsh}\left(\frac{x+d}{R}\right); \qquad \mathcal{I}_2\{1\} = x - d\,\mathcal{I}_2\{0\} - q\arctan\left(\frac{x+d}{q}\right)$$

$$\mathcal{I}_2\{0\} = \frac{1}{2}\ln\left((x+d)^2+q^2\right)$$

$$\mathcal{J}\{0\} = \frac{1}{2}(x+d)\sqrt{(x+d)^2+R^2} + \frac{R^2}{2}\operatorname{argsh}\left(\frac{x+d}{R}\right)$$

ANEXO 2 : BARRAS PARALELAS

$$\mathcal{I}\{0\} = (x+d)\ln\left(b(x+d)+\sqrt{(x+d)^2+R^2}\right) - b\sqrt{(x+d)^2+R^2}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}\{0\} = \mathcal{I}\{0\}; \qquad \widehat{\mathcal{I}}_1\{1\} = \sqrt{(x+d)^2+R^2}; \qquad \widehat{\mathcal{I}}_1\{0\} = \operatorname{argsh}\left(\frac{x+d}{R}\right)$$

$$\mathcal{J}\{0\} = \frac{1}{2}\left[(x+d)\sqrt{(x+d)^2+R^2} + R^2\operatorname{argsh}\left(\frac{x+d}{R}\right)\right]$$