UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Facultade de Economía e Empresa

Trabajo de fin de grado

Una aproximación topológica a la elección social

Alexander Abasolo Piñeiro

Tutores: María José Pereira Sáez

David Mosquera Lois

Grado en Economía

Curso académico 2022/23

Trabajo de Fin de Grado presentado en la Facultade de Economía e Empresa
de la Universidade da Coruña para la obtención del Grado en Economía

Resumen

El problema de encontrar una regla de elección social que respete la unanimidad, el anonimato y la independencia de alternativas irrelevantes en un espacio de preferencias determinado ha estado dominado por el Teorema de Imposibilidad de Arrow.

Se establecerán los criterios que debe cumplir una Regla de Elección Social exigibles de manera natural y se enunciará el resultado de Arrow por el cual se establece que no es posible dar una Regla de Elección Social que no sea dictatorial.

Más tarde se procederá a introducir nociones de topología combinatoria tales como símplices, complejos simpliciales que necesitaremos para dar una demostración topológica del Teorema de Arrow. Todo esto irá acompañado de ejemplos o ilustraciones. Finalmente, usando las nociones mencionadas anteriormente, desarrollaremos un caso con dos agentes y tres alternativas adaptado a un contexto económico con la intención de facilitar su comprensión. Por último, detallaremos una demostración del Teorema de Imposibilidad de Arrow con herramientas de la topología combinatoria.

Palabras clave: Elección Social, Teorema de Imposibilidad de Arrow, Complejos simpliciales.

Número de palabras: 11.123

Abstract

The problem of finding a social choice rule that respects unanimity, anonymity, and the independence of irrelevant alternatives in a given preference space has been dominated by Arrow's Impossibility Theorem.

The criteria that a Social Election Rule must comply with naturally enforceable will be established and the result of Arrow will be enunciated by which it is established that it is not possible to give a Social Election Rule that is not dictatorial.

Later we will proceed to introduce notions of combinatorial topology such as simplics, simplicial complexes that we will need to give a topological proof of Arrow's Theorem. All this will be accompanied by examples or illustrations. Finally, using the aforementioned notions, we will develop a case with two agents and three alternatives adapted to an economic context with the intention of facilitating its understanding. Finally, we will detail a possible proof of Arrow's Impossibility Theorem with combinatorial topology tools.

Keywords: Social Choice, Arrow's Impossibility Theorem, Simplicial complexes.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de Elección Social considera la posibilidad de combinar las preferencias de los individuos de una sociedad en una decisión común que los represente. Esto consiste en proporcionar una regla que sea capaz de tomar decisiones colectivas en el caso de que las preferencias de los agentes no coincidan. Según el Nobel de Economía A. Sen, el objeto de estudio de la teoría de la elección social son "las relaciones entre los objetivos de política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de la sociedad" [Sen, 1970].

Uno de los principales resultados en este ámbito es el Teorema de Imposibilidad de Arrow. Según este teorema, bajo los axiomas de dominio universal, eficiencia de Pareto e independencia de alternativas irrelevantes, si hay al menos dos individuos y tres alternativas para escoger, la única regla de elección social es de carácter dictatorial. De esta forma, en caso de no admitir a un dictador, resulta imposible proporcionar una regla de elección social con las condiciones previamente mencionadas.

En este trabajo vamos a demostrar topológicamente el Teorema de Imposibilidad de Arrow. Se usarán herramientas propias de la topología combinatoria, en concreto, complejos simpliciales, para demostrar el Teorema de Imposibilidad de Arrow para el caso de dos individuos y tres oportunidades.

Esta demostración topológica del Teorema de Imposibilidad es novedosa debido a que no se usan matemáticas avanzadas y simultáneamente proporciona una idea geométrica e intuitiva sobre la imposibilidad. Del caso de dos individuos y tres alternativas se deriva la imposibilidad para cualquier finito $n \geq 2$ y $X \geq 3$ [Rajsbaum and Raventós-Pujol, 2022].

En el capítulo 2 haremos una introducción del problema de la Elección Social, siguiendo la referencia de A. Villar [Villar, 1996], así como un ejemplo que exponga el objeto del problema la elección social. Se explicarán los criterios mínimos que debe cumplir una función de bienestar social como: dominio universal, unanimidad, eficiencia informacional, pareto indiferencia y anonimato. Todos estos conceptos irán acompañados de breves ejemplos que facilitarán su comprensión. Así, mencionaremos la regla de elección social y los principios que debe verificar, posteriormente, se citará el Teorema de Imposibilidad de Arrow.

Después, se incluirá un breve repaso del desarrollo histórico del problema, con la finalidad de mostrar la evolución del enfoque del mismo. El trabajo aportado por Arrow en 1963 [Arrow, 1963] afrontaba el problema desde un enfoque combinatorio, debido a que sólo contempló la versión discreta del conjunto de preferencias. La siguiente parada será un breve repaso de las vías de escape que se intentaron al Teorema de Imposibilidad con modificaciones en los axiomas como se comenta en la referencia de A. Villar [Villar, 2012]. Para finalizar el capítulo 2, repasaremos el enfoque topológico del problema mencionando las aportaciones de Chichilnisky, que considera un espacio de preferencias continuo, y Baryshnikov, el cual expuso la posible manera de pasar de un modelo discreto de elección social a un complejo simplicial. También se comentará los trabajos de Aumann, Eckmann y la relevancia de la perspectiva topológica en el ámbito de elección social.

El Capítulo 3 estará dedicado a definir y mostrar conceptos matemáticos siguiendo la referencia de Munkres [Munkres, 1984] con la finalidad de poder utilizarlos posteriormente, así ya estaremos familiarizados con su contenido. Empezaremos definiendo independencia geométrica de puntos con un ejemplo breve y conciso.

La anterior definición será necesaria para la siguiente noción, el símplice. En este apartado, con la intención de que sea más visual e intuitivo su comprensión, mostraremos más ejemplos acompañados de ilustraciones.

El siguiente concepto que se definirá será complejo simplicial geométrico finito, el cual es una combinación de símplices de diferentes dimensiones, también citaremos otras definiciones necesarias para poder profundizar en la materia. Mostraremos varios ejemplos de diferentes posibilidades tanto de complejos simpliciales como de conjuntos que no lo sean, así podremos asentar mejor el concepto.

El último concepto que se definirá en este capítulo será el complejo simplicial abstracto. También mostraremos una serie de ejemplos que estarán acompañados de ilustraciones para finalmente comentar en unas breves líneas la relación que existe entre complejo simplicial geométrico y abstracto.

Finalmente, el Capítulo 4, estará dedicado a la demostración del Teorema de Imposibilidad de Arrow con topología combinatoria, más concretamente, complejos simpliciales. Para esta parte del trabajo, usaremos como referencia el trabajo de Baigent [Baigent, 2011] donde muestra la perspectiva topológica de Baryshnikov que presentó en 1997 [Baryshnikov, 1997]. Para ello necesitaremos introducir previamente los conceptos de nervio y recubrimiento.

La demostración que explicaremos es para el caso de dos individuos y tres oportunidades. Adaptaremos este caso a un contexto económico con el objetivo de facilitar la comprensión. Empezaremos estableciendo el espacio de todos los posibles órdenes de preferencias estrictas sobre el conjunto de las alternativas, $\mathcal{P}$. A continuación daremos un recubrimiento de $\mathcal{P}$ para el que calcularemos el complejo simplicial que forma su nervio $\mathcal{N}(\mathcal{P})$; análogamente puede construirse el nervio de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, al que denotaremos $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$. La posibilidad de que dar una regla de elección social es equivalente a la existencia de una aplicación $f\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ verificando unas ciertas condiciones, pero, de existir f, induciría una aplicación simplicial entre los complejos $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ y $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ pero veremos que esto implicaría que uno de los dos agentes es un dictador.

Al final, se mencionarán unas conclusiones sobre la utilidad de la combinatoria en el ámbito de elección social.

Capítulo 2

Elección social

2.1. Teoría de Elección Social

La principal cuestión que se plantea en esta teoría se refiere a la posibilidad de derivar los objetivos de responsables políticos como la agregación de preferencias de los agentes en la economía de forma satisfactoria. A. Villar señala que "el objeto de la Teoría de la Elección Social es el estudio de las relaciones entre los objetivos de política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de la sociedad" [Sen, 1970].

Podemos afirmar que la Teoría de Elección Social centra su interés en la obtención de unas reglas de agregación de preferencias de los individuos, es decir, "una búsqueda de criterios de agregación de preferencias individuales en preferencias sociales" [Villar, 1996]. A continuación, como conceptos fundamentales de este proceso podemos señalar los siguientes:

- Con el término **sociedad** nos referimos a una agrupación de diferentes individuos que se enfrentan a un problema de decisión que les afecta de forma colectiva.
- Los elementos del conjunto de diferentes posibilidades sobre las cuales se aplica la elección son las **alternativas sociales**.
- El **criterio de elección social** es el procedimiento de valoración social mediante el cual se agregan las preferencias individuales de todos los agentes.

Por otro lado, el diseño de una regla de elección social requiere especificar los siguientes elementos:

- El **dominio de la regla**, es decir, qué información admitiremos como *input* de nuestra regla.

- El **rango** de la regla, que determina las propiedades de coherencia que ha de tener la valoración social de alternativas.
- Las **propiedades de comportamiento**, es decir, como varía la valoración social con las valoraciones individuales.

Establecidas estas nociones, podemos expresar el objeto de la Teoría de Elección Social como el siguiente problema: “Dada una sociedad y un conjunto de alternativas sociales, se trata de estudiar qué procedimientos de valoración social se derivan de agregar las preferencias de los individuos de acuerdo con ciertos requisitos"[Villar, 1996].

Una vez definido el conjunto de principios que se han de respetar en la agregación de preferencias de los agentes se pueden obtener diferentes reglas de elección social -especificación del dominio, propiedades de comportamiento de la regla de elección y rango-.

Planteamos a continuación un ejemplo sencillo que servirá de referencia para entender el objeto del problema que se trata. Consideremos una sociedad compuesta por tres agentes (I, II y III) y con tres alternativas sociales que son A, B y C. El objetivo consiste en estudiar si es posible determinar una elección social a partir de las preferencias de los tres agentes. En la tabla se recogen las ordenaciones/elecciones de cada uno de los individuos.

	Agente I	Agente II	Agente III
La mejor opción	A	B	C
Opción intermedia	B	C	A
La peor opción	C	A	B

Tabla 2.1: Preferencias de los agentes

Se puede observar que en cierto sentido las ordenaciones de estos tres agentes son incompatibles: para el Agente I A es preferido a B; por otra parte, para el Agente II, B es preferido a A y finalmente, para el Agente III, A es preferido a B. Es decir, no es posible obtener una ordenación social entre A y B que respete las tres preferencias individuales.

Como criterio de agregación de las preferencias de los individuos de esta sociedad podríamos fijar la decisión por mayoría, es decir, una alternativa será concluida socialmente preferida a otra si es preferida por la mayoría de los individuos.

El problema que surge al seguir el criterio mayoritario para determinar la elección social es que no se consiguen ordenar las alternativas debido a la falta de transitividad. En efecto, podemos observar que la opción A es preferida a B por la mayoría de los individuos (agentes I y III) al tiempo que B es preferida a C también por la mayoría (agentes I y II) de donde tendríamos que A es preferida a C, pero este resultado no coincide con el criterio mayoritario ya que la mayoría de los agentes (agentes II y III) prefieren a C sobre A. Para comprender mejor esta dificultad, observamos a continuación algunos aspectos del problema:

- La imposibilidad de elección social se debe a que la regla de elección de la mayoría no es transitiva, es decir, no permite dar una ordenación de las alternativas para la sociedad, como puede verse en el ciclo de valoración que se genera A preferible a B, B preferible a C, pero C preferible a A.

- El problema no existiría si los agentes tuvieran unas preferencias diferentes, por ejemplo, si el Agente III ordenase las alternativas de la siguiente manera, B preferible a A y A preferible a C. Por tanto, la falta de transitividad que se produce debida a que las preferencias individuales ordenan de una particular forma las alternativas.

- Para la valoración social solo se tendrá en cuenta la ordenación de las alternativas por parte de los agentes y no la distancia a la que se encuentran las diferentes preferencias. Es decir, solo influye la ordenación pero no la "intensidad" de las preferencias.

- La regla de decisión mayoritaria respeta la unanimidad, es decir, si resulta que todos los agentes prefieren un alternativa por encima de otra, la regla de elección mayoritaria para el conjunto de agentes valora ambas alternativas de la misma forma. Por ejemplo, en el caso de que todos los agentes prefieran la alternativa A a la B y la alternativa B a la C, el orden de la regla de decisión mayoritaria también establecería que A es preferida a B y B preferible a C.

- Este ejemplo está constituido con equidad; es decir, todas las opiniones tienen el mismo valor. En el caso de que la elección social se fijase a partir de las preferencias personales de un determinado agente, entonces ya no se plantearía el problema de la falta de transitividad, el orden de las alternativas lo escogería quien ostentase ese poder. La regla de decisión social sería de **tipo dictatorial**.

Estos puntos resultan vitales para determinar posibles reglas de agregación de preferencias. El primer punto está relacionado con las propiedades de coherencia de la regla de elección social. Los siguientes dos puntos se refieren al dominio, las preferencias individuales que se consideran aptas. Por un lado, está la posibilidad de admitir o no todas las posibles clasificaciones y, por otro, la cantidad de información utilizable, es decir, si la regla depende solamente de las ordenaciones individuales o también de la intensidad de preferencia.

Para finalizar, los últimos dos puntos hacen alusión a la sensibilidad de la regla de decisión con respecto a las preferencias de los individuos. El penúltimo punto es comúnmente conocido como la **uniformidad**: si todos los individuos valoran las alternativas de una misma manera, entonces la regla de elección social lo hará de esa determinada manera. Finalmente, el último punto, se refiere a la propiedad de **anonimato** por la cual lo relevante es el orden de las preferencias y no quién las determina, con la idea de que el procedimiento de agregación tenga carácter democrático, evitando la concentración de poder en una única persona.

2.1.1. El modelo

Se entiende por **espacio de preferencias** el conjunto X de alternativas sociales, que puede estar compuesto de objetos muy diversos dependiendo el problema que se trate. Este espacio será de total y libre acceso para la sociedad compuesta por m individuos, que detonaremos a su vez mediante el conjunto de índices $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$.

A continuación, mostraremos un ejemplo con el que ilustrar los conceptos que vamos introduciendo. Supongamos que van a celebrarse las elecciones estatales para escoger al presidente de un país en el que la sociedad está compuesta por cuatro agentes que deberán escoger entre cuatro partidos políticos que etiquetamos como x, y, z, t; así, el espacio de preferencias de la sociedad sería $X = \{x, y, z, t\}$ y el conjunto de individuos $m = \{1, 2, 3, 4\}$.

Las preferencias individuales están definidas mediante funciones de utilidad: $u_i \colon X \to R$, $1 \leq i \leq 4$ que describen la forma en que valora cada uno de los 4 agentes las alternativas de X. Por tanto, si $u_i(x) \geq u_i(y)$ significa que para el i-ésimo agente la alternativa x resulta ser mejor o igual que la alternativa y. Definimos la función vectorial: $u \colon X \to \mathbb{R}^m$, que proporciona el vector de utilidades de los agentes para cada alternativa social. Se llamará U al conjunto de todas las posibles configuraciones del tipo $u : X \to \mathbb{R}^m$. Dada una alternativa $x \in X$, escribiremos: $u(x) = [u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)]$, es decir, $u(x)$ es el vector de valoraciones de la alternativa x por parte de los m individuos de la sociedad.

A continuación, expondremos el problema de elección: Dada una sociedad $M = \{1, 2, \dots, m\}$ y un conjunto de alternativas sociales X, se trata de obtener una valoración social de las alternativas de X a partir de la información contenida en los vectores de utilidad $u \colon X \to \mathbb{R}^m$. Es decir, se busca una valoración social R que sea función de las utilidades de cada agente $R = F(u)$, donde u es el vector de las funciones de utilidad individuales, F es la regla de elección social (la función de agregación del conjunto de preferencias de cada individuo en una preferencia social) y, finalmente, R es la ordenación social de las alternativas.

En la siguiente sección se comentarán diversas propiedades y elementos de la regla de elección social que puedan cumplirse de manera universal.

2.1.2. Regla de Elección Social

A continuación, se mencionarán las bases de las Reglas de Elección Social. Buscaremos definir ciertas propiedades que tengan aplicabilidad universal, así cuando se llegue al problema de Elección Social habrá determinado una “Constitución”, es decir, un conjunto de reglas que son capaces de aplicarse a diferentes grupos de agentes con cualesquieran sean las preferencias individuales.

Empezamos comentando el ejemplo de la Tabla 2.1. Aquí se muestra que el método de decisión mayoritaria incumple la propiedad de ordenación, es decir, es incapaz de ordenar las diferentes alternativas, lo cual deriva en la introducción de un ciclo de preferencias que impide alcanzar un resultado. Así, Arrow demostró que no hay ninguna regla que sea capaz de ajustar las propiedades que requiere el método de votación mayoritaria que evite la generación de ciclos de preferencias.

Es importante distinguir dos conceptos diferentes. Por un lado, la Función de Bienestar Social es una regla de elección social que determina una ordenación de forma transitiva y completa de las alternativas. Por otro, una Función de Elección Social proporciona como elección social un elemento del espacio de preferencias.

A continuación, se mencionarán las propiedades que la Función de Bienestar Social deberá cumplir, estableciendo de esta manera unos criterios mínimos.

1. Dominio Universal: la regla de elección social deberá admitir cualquier tipo de preferencias individuales.

Esta propiedad describe que la Regla de Elección Social será aplicable a cualquier conjunto de agentes admitiendo todas las posibles combinaciones de preferencias individuales, es decir, la regla debe estar definida en $u \subseteq U$.

2. Unanimidad: si todos los agentes prefieren la alternativa x antes que la y, entonces, la regla de elección social debe ordenar las alternativas del mismo modo. Es decir, x resulta ser valorada socialmente mejor que y.

Por ejemplo, si todos los agentes que constituyen la sociedad prefieren el color rojo por delante del color verde, entonces, el color rojo ha de ser socialmente preferido al verde, en este caso sí se respeta la propiedad de unanimidad.

3. Anonimato: esta propiedad corresponde con una condición de carácter democrático, el único elemento a valorar son las alternativas de los agentes, excluyendo la identidad del agente. Es decir, resulta indiferente qué agente expresa todas las preferencias que se contemplan, siendo únicamente relevante el orden de sus preferencias.

Por tanto, si se comparasen dos circunstancias en las que se han intercambiado las preferencias de algún agente por las preferencias de otro agente, la valoración social no debe alterarse. En el caso de la regla dictatorial no se cumple la propiedad de anonimato debido a que sí importa qué agente defina sus preferencias individuales las cuales decidirán las preferencias sociales. Sin embargo, sí cumple el Principio de Pareto.

El caracter dictatorial es un concepto importante y contrario al anonimato. Una Función de Bienestar Social es dictatorial si existe algún individuo i tal que en la sociedad para cualquier posible configuración de preferencias y para todo par de alternativas sociales $\{x, y\}$, x es socialmente preferido a y si y sólo si el individuo i valora x mejor que y, a pesar de las preferencias del resto de la sociedad. Así, la Regla de Elección Social es dictatorial si las preferencias de un único individuo determinan la preferencia social, es decir, una regla de elección social es dictatorial cuando responde a los deseos de un único individuo de la sociedad.

Por ejemplo, si el individuo A escoge la alternativa x por delante de y, es decir, x mejor que y, entonces la regla de elección social resultaría en que su preferencia individual sería la preferencia socialmente admitida lo cual transmite que x es socialmente mejor que y. En caso de que cambiase de opinión el individuo A derivaría en una diferente preferencia social, es decir, si alterase su preferencia individual definiendo que y es mejor que x, entonces la regla de elección social establecería que y sería socialmente preferido a x.

4. Eficiencia informacional: la valoración social de las alternativas x e y requiere únicamente la forma en qué valoran los agentes x en relación a y, prescindiendo de cómo ordenar el resto de elementos del espacio de preferencias.

Esta propiedad muestra la información mínima que necesita la regla de elección social. La comparación entre x e y no requiere saber la manera en que valoran los individuos las alternativas x e y con relación a una tercera alternativa. De ahí que a esta propiedad también se le denomina Independencia de Alternativas Irrelevantes.

En consecuencia, en caso de que las preferencias individuales experimenten una alteración de u a $u\prime$ pero no cambien el orden de x con respecto a y, entonces la ordenación social obtenido tanto por u como para $u\prime$ ordenará del mismo modo a las preferencias x e y.

5. Pareto Indiferencia: esta propiedad establece que si las utilidades de dos alternativas x e y son iguales, entonces x e y son indiferentes, es decir, si ambas proporcionan la misma utilidad, x e y están declarada socialmente indiferentes.

Por lo tanto, como acabamos de explicar, a pesar de que el criterio mayoritario aparentemente sea un método sencillo para agregar las preferencias individuaes resulta que, en general, esta regla no es capaz de proporcionar un orden social de las alternativas. Esto es un caso particular de lo que Arrow probó al demostrar que no hay ninguna regla capaz de agregar las preferencias individuales que satisfaga las propiedades que se requerirían de manera natural.

A continuación, una vez establecidos los conceptos anteriores, estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Imposibilidad de Arrow.

2.1.3. El Teorema de Imposibilidad de Arrow

Consideremos una sociedad formada por $n \geq 2$ agentes que tienen que elegir entre al menos tres alternativas. Se trata de proponer una ordenación común de las diferentes alternativas a partir de las ordenaciones fijadas por cada uno de los individuos de la sociedad. Cada individuo prefiere una ordenación concreta y el objetivo es proponer un mecanismo general (al que llamamos **Regla de Elección Social**) que a partir de los órdenes individuales porporcione un orden de preferencia para el conjunto de la sociedad. Esta Regla de Elección Social debe verificar los siguientes principios:

- La ordenación de las alternativas sociales debe obtenerse a partir de las preferencias de cada uno de los agentes perteneciente a la sociedad.
- Aplicabilidad universal, es decir, el mecanismo debe funcionar para cualquier posible combinación de preferencias individuales de los agentes.
- El argumento de la regla de elección social debe ser el conjunto de las ordenaciones individuales de las alternativas, excluyendo de esta manera el concepto de intensidades de preferencias o comparaciones interpersonales de utilidad.
- La regla debe funcionar de acuerdo con los siguientes criterios: a) respeto de la *unanimidad,* es decir, si todos los individuos prefieren la alternativa x a la y, entonces socialmente x debe ser mejor que y; b) carácter democrático o *no dictatorial,* de modo que las preferencias sociales no puedan derivarse exclusivamente de la preferencias individuales de uno solo de los agentes y, finalmente, c) eficiencia informacional, también conocida como *Independencia de Alternativas Irrelevantes,* por la que la valoración a nivel social de las alternativas x e y sólo depende de las valoraciones individuales de dichas alternativas y no de cómo se ordenen el resto de las posibilidades.

Arrow demostró que si la sociedad está formada por dos o más agentes que eligen entre al menos tres alternativas, entonces no es posible construir una regla que cumpla todas estas condiciones.

- **Teorema de Imposibilidad de Arrow**: "No existe ninguna forma de obtener una ordenación social a partir de las ordenaciones individuales, que resulte de aplicabilidad universal, que respete la unanimidad, que no sea dictatorial y que sea informacionalmente eficiente" [Arrow, 1963].

Este teorema es probablemente el resultado más influyente en el campo moderno de la Teoría de Elección Social. En realidad, lo que Arrow probó es que si pedimos que el procedimiento de agregación respete la independencia de alternativas irrelevantes, la unanimidad y el anonimato, entonces la única regla posible es la dictatorial. A raíz de la formulación del Teorema de Imposibilidad se ha intentado de múltiples maneras buscar alternativas o vías de escape para solucionar el problema de Elección Social, modificando diferentes elementos o requisitos con vistas a encontrar alguna solución.

El enfoque más común y que ha dado lugar a muchas aportaciones a la Teoría de Elección Social, es el de los autores que estudian los posibles criterios de agregación, eliminando o añadiendo axiomas desde perspectivas diferentes. Sin embargo, en este trabajo nos centraremos más bien en los autores que han estudiado este teorema empleando herramientas propias del ámbito de la topología.

Recogemos a continuación de manera sucinta los diferentes estudios surgidos a partir de la Paradoja de Arrow, centrándonos fundamentalmente en el enfoque topológico.

2.2. Evolución histórica

La Teoría de Elección Social considera la posibilidad de combinar las preferencias de los individuos de una sociedad en una decisión común que los represente. Como se comentó al inicio del presente capítulo la idea consiste en proporcionar una regla para tomar decisiones colectivas cuando las elecciones de los individuos no coinciden. Según el Nobel de Economía A. Sen, el objeto de estudio de la teoría de la Elección Social son "las relaciones entre los objetivos de política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de la sociedad" [Sen, 1970].

En esta sección realizaremos un recorrido por las principales aportaciones al desarrollo de la Teoría de la Elección Social derivadas del estudio del Teorema de Imposibilidad de Arrow. Nos centraremos especialmente en los autores que han enfocado el problema desde un punto de vista topológico.

2.2.1. El enfoque de Arrow

El matemático y economista estadounidense Kenneth Joseph Arrow (1921-2017), que recibió el premio Nobel de Economía en 1972 junto con John Hicks, estableció el teorema de imposibilidad en su tesis doctoral *Social Choice and Individual Values* (1950). Como ya se ha comentado, su objetivo era el de tratar de proporcionar un mecanismo de agregación de las preferencias individuales en preferencias sociales respetando ciertos criterios racionales que no parecen ser demasiado exigentes.

Este autor considera que el conjunto de preferencias es discreto y la elección de cada individuo se establece dando una relación de orden sobre las distintas posibilidades del conjunto de preferencias (preórdenes de un cierto conjunto). En este contexto, Arrow trata de construir una función de bienestar social y da una demostración de naturaleza combinatoria de la imposibilidad de su existencia. Prueba que, bajo determinados axiomas que surgen de manera natural (dominio universal, eficiencia de Pareto e independencia de alternativas irrelevantes), si hay al menos dos individuos que poner de acuerdo entre tres o más alternativas, entonces el único sistema de elección posible es una dictadura [Arrow, 1963].

Por lo tanto, si no se admite a un dictador, no hay posibilidad de proporcionar una regla de elección social con las características previamente mencionadas.

2.2.2. Vías de escape

Una vez formulado el Teorema de Imposibilidad de Arrow 2.1.3 muchos autores se embarcaron en busca de vías de escape estudiando posibles modificaciones de los axiomas.

A. Villar menciona en [Villar, 2012] a algunos de estos autores repasando brevemente las posibilidades que surgen a medida que se modifican las propiedades exigidas por Arrow, exceptuando el respeto por la unanimidad que se valora un requisito indispensable.

Las vías de escape que surgieron suponían una relajación de los requisitos de ordenación social, sustituyendo la transitividad por una propiedad más débil, la casi-transitividad. Esta trata de que la relación de preferencia estricta sea transitiva, pero no necesariamente la indiferencia. Esta casi-transitividad fue compatible con la noción de racionalidad social apareciendo la aciclicidad, cuya propiedad establece la ausencia de ciclos de preferencia estricta.

En el capítulo III. 4 del libro de A. Villar [Villar, 2012] se muestra que la casi-transitividad y la aciclicidad vinieron acompañados de una sucesión de relajaciones e intervenciones ocasionando complicaciones a la hora de evitar el cumplimiento del Teorema de Arrow.

Sin embargo, se demostró que sí es posible construir reglas de decisión social no dictatoriales capaces de ordenar consistentemente las alternativas sociales satisfaciendo los principios de dominio universal y respeto de la unanimidad, gracias a la renuncia del principio de eficiencia informacional.

2.2.3. El enfoque de topológico

Décadas posteriores al establecimiento del Teorema de Imposibilidad, a principios de los años 80, la matemática y economista G. Chichilnisky introdujo el enfoque topológico del problema considerando el espacio de preferencias como un espacio topológico no necesariamente discreto [Chichilnisky, 1980].

Tradicionalmente, la teoría de la elección social estudiaba el caso de un conjunto de preferencias finito y discreto, lo cual provocaba que su estudio fuera llevado a cabo en el campo de la combinatoria. Sin embargo, hay muchos casos en los que surge de manera natural considerar el conjunto de alternativas como un conjunto continuo. Chichilnisky desarrolló la estructura para estudiar la teoría de la elección social para un conjunto continuo de alternativas, usando argumentos topológicos, obtuvo resultados análogos al Teorema de Imposibilidad de Arrow [Chichilnisky, 1980].

En paralelo a las condiciones exigidas por Arrow, los axiomas que esta autora impone para dar una regla de elección social son los de continuidad, unanimidad y anonimato. Emplea técnicas propias del ámbito de la topología algebraica para probar que, bajo estas hipótesis, para los espacios de preferencias más habituales (aquellos que topológicamente se pueden clasificar como CW-complejos parafinitos), es posible construir una regla de elección social si y sólo si el espacio de preferencias es contráctil, es decir, un espacio que es posible deformar a un punto de manera continua.

Un hito importante en la elaboración de esta teoría fue la unificación de los enfoques combinatorio y topológico. Esta tarea la realizó Y. M. Baryshinkov, quien percibió la convergencia de ambas vías al probar que el teorema de Arrow es una consecuencia de la no-contractibilidad de las esferas. Este autor expone la posible manera de pasar de un modelo discreto de elección social a un complejo simplicial dotado de una topología no trivial [Baryshnikov, 1997].

De esta manera, el modelo resultante será posible estudiarlo con herramientas topológicas unificando ambos teoremas de imposibilidad. En el reciente trabajo de S. Rajsbaum y A. Raventós se explora la relación entre los dos enfoques a través de una fusión de topología tanto Combinatoria como Algebraica [Rajsbaum and Raventós-Pujol, 2022].

El trabajo de Aumann y Eckmann

Nótese que la existencia de funciones de elección social en un espacio topológico había sido previamente estudiada por G. Aumann [Aumann, 1944], pero con el nombre de n-medias (topológicas). Este mismo nombre es el que había usado en los años 50 el matemático suizo B. Eckmann [Eckmann, 1954] (véase también [Eckmann, 2004]) para obtener previamente el mismo resultado que Chichilnisky, aún cuando en su primer artículo Eckmann no nombra las funciones de elección social. Posteriormente, gracias a los trabajos desarrollados por Chichilnisky en la Teoría de Elección Social, se concluyó que la n-media generalizada de Eckmann resultaba ser precisamente una Función de Elección Social. En [Eckmann, 2004] se afirma que "la existencia de un modelo de elección social en un espacio de preferencias es un problema topológico, incluso un problema homotópico".

A partir de estos trabajos S. Weinberger [Weinberger, 2004] probó que, si no se requiere que el espacio de preferencias sea finito, es posible encontrar ejemplos espacios no contráctiles en los que existe una regla de elección social.

Relevancia de la perspectiva topológica

El enfoque topológico de la paradoja de elección social ha despertado interés desde sus inicios hasta la actualidad. En [Lauwers, 2000] se recoge un resumen detallado en el que se analizan con detalle los modelos de Arrow y Chichilnisky. Buscando resolver la paradoja y estudiar su adecuación al ámbito económico, muchos autores han analizando la conveniencia de incluir o no los diferentes requisitos exigidos en el modelo topológico. Por ejemplo, en [Le Breton and Uriarte, 1990] se discute la topología elegida. Los estudios de N. Baigent [Baigent, 2011] y L. Lauwers [Lauwers, 2009] proporcionan un enfoque crítico sobre la conveniencia de exigir o no la continuidad de las reglas de elección social. En el trabajo de C.D. Horvat [Horvath, 2001] se muestra que no es necesario que el espacio de preferencias tenga una estructura de CW-complejo para poder da una regla social. Más aún, en este caso, ni siquiera es un requisito que el espacio sea contráctil. Por ejemplo, entre los números racionales, $\mathbb{Q}$, basta tomar como función de elección social la media aritmética. El resultado que establecieron Chichilnisky y Heal en [Chichilnisky and Heal, 1983] es para sociedades con un número finito de agentes; este resultado se extendió para un *continuum* de agentes en [Candeal et al., 1997].

Desde que Arrow estableció su teorema de imposibilidad, ha habido numerosos intentos de redefinir los requisitos adecuados para proporcionar una regla de elección social. El enfoque topológico aporta una nueva visión ya que, como alternativa al análisis de las condiciones que debe verificar la función de agregación, propone investigar las propiedades topológicas del espacio de preferencias [Chia, 2015]. Para los espacios de preferencias más habituales, el ser contráctil es condición necesaria y suficiente para que exista una regla de elección social. Sin embargo, como afirmó Horvat, "incluso en el caso no contráctil, la estructura local del espacio puede permitir la existencia de funciones de elección social parciales" [Horvath, 2001]. Por tanto, una nueva vía de escape al teorema de imposibilidad consiste en buscar subconjuntos del espacio de preferencias en los que sí es posible dar una regla de elección social. J. Carrasquel, G. Lupton y J. Oprea [Carrasquel et al., 2018] propusieron tratar de medir el menor número de piezas en las que es necesario dividir el espacio de preferencias de modo que en cada una de las piezas pueda proporcionarse una regla de agregación local. Además, estos autores señalaron el paralelismo entre la construcción de reglas de elección social y un famoso invariante topológico, la complejidad topológica. En [Baigent, 2011] introdujeron el concepto de *complejidad social* para dos individuos.

Introducimos en el próximo capítulo las nociones básicas de topología combinatoria que necesitamos para establecer una demostración sencilla del Teorema de Imposibilidad de Arrow desde esta perspectiva.

Capítulo 3

Complejos simpliciales

Presentamos en este capítulo los conceptos de topología combinatoria necesarios para demostrar el teorema de Arrow desde esta perspectiva. Introducimos una serie de nociones junto con ejemplos dirigidos a ilustrarlas siguiendo el libro de Munkres [Munkres, 1984].

3.1. Independencia geométrica de puntos

Para poder establecer el concepto de símplice necesitamos introducir previamente la noción de puntos geométricamente independientes que ilustraremos con un ejemplo.

Definición 3.1. Sea $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^m$. Decimos que son *geométricamente independientes* si para cualesquiera escalares $\{t_i\}_{i=0}^n \subseteq \mathbb{R}$ satisfaciendo las ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0,$$

entonces $t_i = 0$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$.

Observación 3.2. De esta forma, decimos que los puntos $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ son geométricamente independientes si los vectores $\{a_1 a_0, a_2 a_0 ..., a_n a_0\}$ son linealmente independientes [Rotman, 1988].

Observación 3.3. Puesto que en $\mathbb{R}^2$ solo hay dos direcciones independientes, en caso de que el conjunto de puntos genere más de dos vectores, dichos vectores serán linealmente dependientes.

Ejemplo 3.4. Consideremos un conjunto formado por cuatro puntos distintos $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ en $\mathbb{R}^2$. En tanto que no existen tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, la Observación 3.2 garantiza que en ningún caso los puntos $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ pueden ser geométricamente independientes.

3.2. La noción de símplice

Antes de introducirnos a la noción de complejo simplicial daremos la siguiente definición (véase [Munkres, 1984]):

Definición 3.5. Sea $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ $n+1$ puntos geométricamente independientes en $\mathbb{R}^m$. Definimos el *n-símplice σ generado por* $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ y lo denotamos por $\sigma = [a_0, ..., a_n]$ al conjunto de puntos:

$$\{x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \quad \text{donde} \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1\}.$$

A continuación, mostraremos varios ejemplos que ilustran la definición anterior donde podremos identificar piezas elementales como puntos, aristas y triángulos, entre otros, formando finalmente un tetraedro.

Observación 3.6. De ahora en adelante, cuando mencionemos un punto y un vértice se entenderá que se trata de lo mismo.

Ejemplo 3.7. Veamos a continuación cómo es el símplice generado en función del número de puntos que se consideren.

1. Comenzamos por el caso $n = 0$ en $\mathbb{R}^2$, es decir, el punto $\{a_0\} \in \mathbb{R}^2$. Este punto genera el símplice que expresamos como $\sigma = [a_0]$. Es fácil ver que verifica la Definición 3.5 ya que, como $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ y sólo hay un escalar, entonces $t = 1$ y el único elemento del símplice es el propio punto. Como podemos observar en la Figura 3.1, se trata de un 0-símplice formado por un solo vértice.

2. Consideremos ahora $n = 1$. Es decir, dos puntos distintos $\{a_0, a_1\}$ en $\mathbb{R}^2$. Al símplice que generan ambos puntos lo denotamos por $\sigma = [a_0, a_1]$ y puede verse como el segmento de recta que une a_0 y a_1 ya que, como $t_0 + t_1 = 1$, entonces $t_1 = 1 - t_0$ y se verifica la Definición 3.5. A este 1-símplice le llamaremos *arista* y puede verse su representación en la Figura 3.1. Podemos expresarlo como todos los $x \in \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$x = ta_0 + (1 - t)a_1$$

   con $0 \leq t \leq 1$; es decir, σ es la arista que une a_0 y a_1.

3. Cuando $n = 2$, tendremos un conjunto de puntos $\{a_0, a_1, a_2\}$ en $\mathbb{R}^2$. Esta colección de puntos genera el símplice $\sigma = [a_0, a_1, a_2]$. Formarán parte del símplice todos los

$x \in \mathbb{R}^2$ de la forma $x = t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2$ con $t_i \geq 0$ y $t_0 + t_1 + t_2 = 1$. Es decir, si los puntos a_0, a_1 y a_2 no están alineados, el 2-símplice $\sigma = [a_0, a_1, a_2]$ es el triángulo determinado por los tres puntos y la cara encerrada dentro del mismo, como puede observarse en la Figura 3.1.

Ilustramos en la siguiente Figura la representación de los tres primeros símplices vistos como ejemplos.

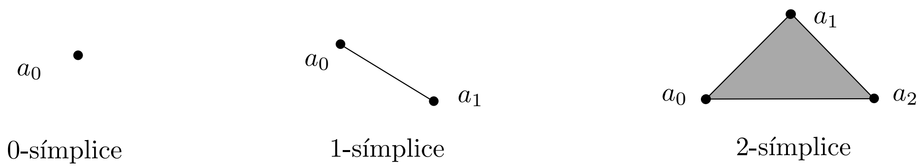


Figura 3.1: 0-símplice, 1-símplice y 2-símplice

4. Finalmente, mostraremos un último ejemplo de símplice correspondiente a $n = 3$, es decir, cuatro puntos $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ geométricamente independientes. Podemos pensar en este 3-símplice $\sigma = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ como en el tetraedro con vértices a_i, $0 \leq i \leq 3$ que observamos a continuación.

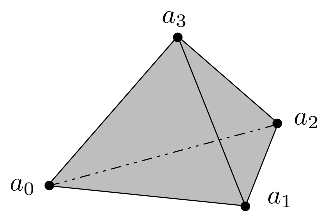


Figura 3.2: 3-símplice

La independencia geométrica de los puntos es relevante porque en el caso de que no lo sean no habrá ni arista ni interiores de triángulos que unan los vértices (0-símplices) y, de esta forma, no se podrían llevar a cabo los ejemplos expuestos hasta el momento.

3.3. Complejo simplicial geométrico finito

Introduciendo la materia, diremos un complejo simplicial geométrico finito es una estructura matemática formada por la combinación de símplices de diferentes dimensiones se utiliza para representar y estudiar objetos geométricos.

Definición 3.8. Dado un símplice $\sigma = [a_0, ..., a_n]$ diremos que $\{a_0, ..., a_n\}$ son *vértices* de σ. Cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, ..., a_n\}$ es una *cara* de σ (véase [Munkres, 1984]).

Ejemplo 3.9. El símplice $\sigma = [a_0, a_1, a_2]$ tiene diversas caras que son las siguientes: el propio 2-símplice $[a_0, a_1, a_2]$, sus aristas $[a_0, a_1]$, $[a_0, a_2]$, $[a_1, a_2]$ y, por último, los vértices $[a_0]$, $[a_1]$, $[a_2]$.

Disponemos ahora de las herramientas necesarias para introducir el concepto de complejo simplicial, que asumiremos a partir de ahora como finito (véase [Munkres, 1984]).

Definición 3.10. Un *complejo simplicial geométrico finito* en $\mathbb{R}^m$ es una colección finita K de símplices en $\mathbb{R}^m$ tales que verifican las siguientes condiciones:

(i) Si σ es un símplice de K y τ es una cara de σ, entonces τ es un símplice de K.

(ii) La intersección de dos símplices de K o es el vacío o es una cara de ambos.

Nótese que la segunda condición nos indica que los símplices que integran el complejo simplicial deben pegarse de forma adecuada a través de caras que también formen parte del complejo simplicial.

Definición 3.11. Sea K un complejo simplicial geométrico finito en $\mathbb{R}^m$. Al máximo de las dimensiones de sus símplices le llamamos *dimensión* de K.

En particular, un n-símplice es un complejo simplicial geométrico finito de n-dimensional.

Recogemos a continuación una serie de ejemplos de complejos simpliciales que nos ayuden a comprender mejor los conceptos que acabamos de introducir. Asumiremos que todos los puntos son geométricamente independientes en estos ejemplos.

Ejemplo 3.12. 1. Un primer ejemplo muy sencillo es el de un 0-símplice $[a_0]$. Es inmediato comprobar que $K = \{[a_0]\}$ verifica las dos condiciones de la Definición 3.10.

2. Consideremos ahora la colección $K = \{[a_0], [a_1], [a_2], [a_0, a_1], [a_1, a_2]\}$. Las caras de las aristas $[a_0, a_1]$ y $[a_1, a_2]$ son los vértices $[a_0], [a_1], [a_2] \in K$. Además, las posibles intersecciones entre símplices de K o bien son vacías, o son un vértice también de K. Por tanto, K es un complejo simplicial. Lo representamos en la Figura 3.3.

3. Con este mismo conjunto de vértices, podemos construir ahora otro complejo simplicial, también de dimensión 1. Tomamos ahora K$= \{[a_0], [a_1], [a_2], [a_0, a_1], [a_1, a_2], [a_0, a_2]\}$. Como obervamos en la Figura 3.4, el relleno del triángulo está excluido.

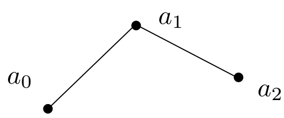


Figura 3.3: Complejo simplicial de dimensión 1

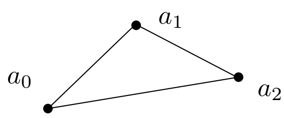


Figura 3.4: Triángulo

4. En el siguiente caso, también con tres vértices, obtenemos un complejo 2-dimensional:

$$K = \{[a_0], [a_1], [a_2], [a_0, a_1], [a_1, a_2], [a_0, a_2], [a_0, a_1, a_2]\}$$

Como se observa en la Figura 3.5, esta vez el complejo contiene 2-símplice, $[a_0, a_1, a_2]$.

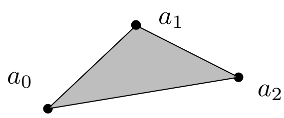


Figura 3.5: Triángulo relleno

5. Mostraremos a continuación un ejemplo donde haya dos triángulos que tengan una cara en común, una arista, y de modo que el interior de uno de los triángulos sí está en el complejo mientras que el del otro no. Tomamos el complejo simplicial:

$$K = \{[a_0], [a_1], [a_2], [a_3], [a_0, a_1], [a_0, a_1], [a_0, a_2], [a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_2, a_3], [a_0, a_1, a_2]\}$$

que puede visualizarse en la Figura 3.6.

6. En este ejemplo mostaremos dos triángulos donde uno está encima de otro. Tendremos una colección de símplices K que no cumple la condición [ii] de la Definición 3.10, por lo tanto, no se considera un complejo simplicial:

$$K = \{[a_0], [a_1], [a_2], [a_3], [a_4], [a_5], [a_0, a_1], [a_0, a_2], [a_1, a_2], [a_3, a_4], [a_3, a_5], [a_4, a_5], [a_0, a_1, a_2], [a_3, a_4, a_5]\}$$

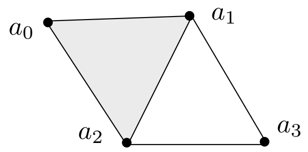


Figura 3.6: Intersección de triángulos

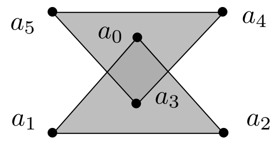


Figura 3.7: Dos triángulos

que representamos en la siguiente Figura 3.7.

7. Finalmente, en la Figura 3.8 representamos tres colecciones de símplices de las que sólo la primera es un complejo simplicial. La figura de la izquierda está formada por símplices de dimensiones 0, 1 y 2 que verifican la Definición 3.10. Es decir, forma un complejo simplicial de dimensión 2. Sin embargo, las otras dos no forman complejos simpliciales, en efecto, la pieza central no verifica la condición (i) ya que uno de los vértices que es cara del segmento no está en la colección de símplices. En la figura de la derecha, se incumple la condición (ii) debido a que la intersección de dos de sus caras no es vacía pero tampoco es un símplice.

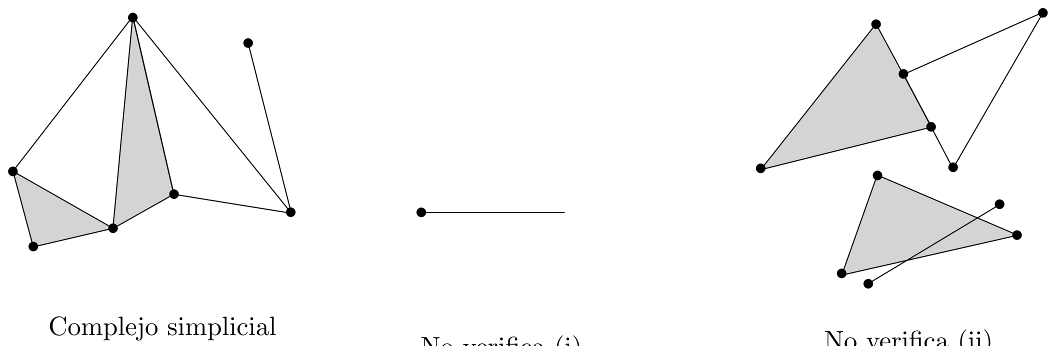


Figura 3.8: Comparativa

Los anteriores ejemplos 3.12 nos han servido para estudiar los complejos simpliciales junto a ilustraciones. Por tanto, seguiremos avanzando en la materia y daremos paso a los complejos simpliciales abstractos.

3.4. Complejos simpliciales abstractos

A continuación, definiremos el nuevo concepto de *complejo simplicial abstracto* S y posteriormente expondremos unos ejemplos.

Definición 3.13. Sea V un conjunto finito y S una colección finita de subconjuntos no vacíos de V llamados *símplices abstractos*, tal que si A (símplice de S) es un elemento de S, también lo es todo el subconjunto no vacío de A [Munkres, 1984].

Nótese que a partir de ahora no distinguiremos entre el vértice $v \in V$ y el 0-símplice $\{v\} \in S$. Una subcolección de S que es en sí mismo un complejo simplicial se dice que es un *subcomplejo simplicial* de S.

Definición 3.14. Sean dos complejos simpliciales de S y K llamados *isomorfos* si hay una correspondencia biyectiva f que lleve el conjunto de vértices de S en el conjunto de vértices de T de modo que $\{a_0, \dots a_n\} \in S$ si y solo si $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in T$.

Definición 3.15. Sea K es un complejo simplicial geométrico. La colección de subconjuntos de vértices correspondientes a los símplices de K se denomina *esquema de vértice* de K y constituye un complejo simplicial abstracto finito.

Observación 3.16. Sin embargo, se debe mencionar que es necesario que se cumpla la Definición 3.14 para que haya una relación entre los vértices de los complejos simpliciales, es decir, el conjunto de vértices tanto del complejo simplicial geométrico como el complejo simplicial abstracto deben tener el mismo conjunto de vértices V.

De esta forma procedemos a citar lo siguiente.

Teorema 3.17.
1. *Cada complejo simplicial abstracto S es isomorfo al esquema de vértice del complejo simplicial K.*
2. *Dos complejos simpliciales son isomorfos si y sólo si sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.*

Definición 3.18. Si un complejo simplicial abstracto S es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K, se dice que K una *realización geométrica* de S. Está únivocamente determinado salvo isomorfismo lineal.

A continuación, una vez citadas las definiciones y teoremas mostraremos unos ejemplos.

Ejemplo 3.19. Consideremos el complejo simplicial abstracto:

$$S = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_0, a_1\}\}$$

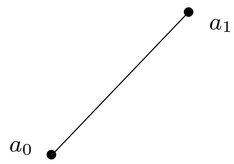


Figura 3.9: Realización geométrica de complejo simplicial abstracto S

Representamos su realización geométrica en la Figura 3.9.

Ejemplo 3.20. Consideremos el complejo simplicial abstracto finito S:

$$K = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$$

Representamos su realización geométrica en la Figura 3.10.

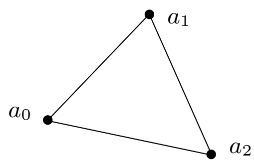


Figura 3.10: Realización geométrica de complejo simplicial abstracto S

Ejemplo 3.21. En este ejemplo, daremos el paso de introducir la parte interna del complejo simplicial abstracto finito S con el mismo conjunto de símplices V del anterior ejemplo, es decir, introducir su cara, cuyo elemento señalamos como el último de K. Se observan todos los símplices del complejo simplicial geométrico e identificamos el subconjunto $V = \{a_0, a_1, a_2\}$. Un claro ejemplo en este caso es $[a_0, a_1, a_2] \in K$ correspondiéndose con $\{a_0, a_1, a_2\} \subseteq V$ el cual coincide con el conjunto de vértices V. Debido a este proceso que hemos aplicado en este y en los anteriores ejemplos obtenemos el esquema de vértices de K:

$$K = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_0, a_1, a_2\}\}$$

De esta manera, se observa y se comprende que el complejo simplicial abstracto S con el mismo esquema de vértices que el complejo simplicial geométrico, así escogiendo un conjunto de puntos linealmente independientes del complejo simplicial asbtracto S aplicamos la *realización geométrica*. Se debe mencionar que es suficiente con escoger un espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, comentaremos que a diferencia del anterior ejemplo, la dimensión de este complejo simplicial abstracto S es 2 gracias a la incorporación de la cara en K.

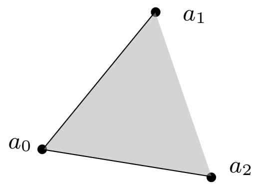


Figura 3.11: Realización geométrica de complejo simplicial abstracto S

Sin embargo, la próxima figura que se expone es realización geométrica del complejo simplicial abstracto S.

Ejemplo 3.22. En este ejemplo, usaremos la mezcla de ejemplos anteriores usando el mismo el conjunto de vértices V del complejo simplicial abstractos S. Se observan todos los símplices del complejo simplicial geométrico e identificamos el subconjunto $V = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$. Un ejemplo en este caso es $[a_0, a_1, a_2] \in K$ correspondiéndose con $\{a_0, a_2, a_3\} \subseteq V$, similar al ejemplo anterior, la diferencia ahora resulta que no cubre todo el conjunto V y no contiene $\{a_1\}$. Llevando a cabo este proceso que se ha aplicado, obtenemos el siguiente esquema de vértices de K:

$$K = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_0, a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\}\}$$

Así observamos que el complejo simplicial abstracto S con el mismo esquema de vértices que el complejo simplicial geométrico, escogiendo un conjunto de puntos linealmente independientes del complejo simplicial abstracto S aplicando la *realización geométrica.* Sin embargo, para la realización geométrica escogeremos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Por otro lado, en este ejemplo se determina la dimensión 2 de este complejo simplicial abstracto igual que el anterior penúltimo ejemplo.

La realización geométrica que surge de este ejemplo se muestra en la siguiente figura.

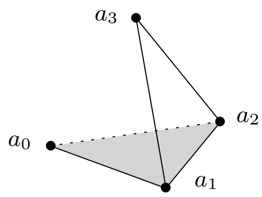


Figura 3.12: Realización geométrica de complejo simplicial abstracto S

Ejemplo 3.23. Consideremos el complejo simplicial abstracto:

$$S = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \{a_6\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\},$$

$$\{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}, \{a_4, a_5\}, \{a_5, a_6\}, \{a_0, a_1, a_3\}, \{a_0, a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_0, a_2, a_3\},$$
$$\{a_2, a_3, a_4\}, \{a_3, a_4, a_5\}\}$$

Representamos su realización geométrica en la Figura 3.13.

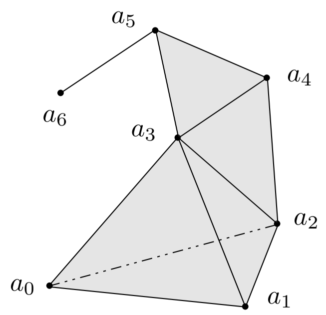
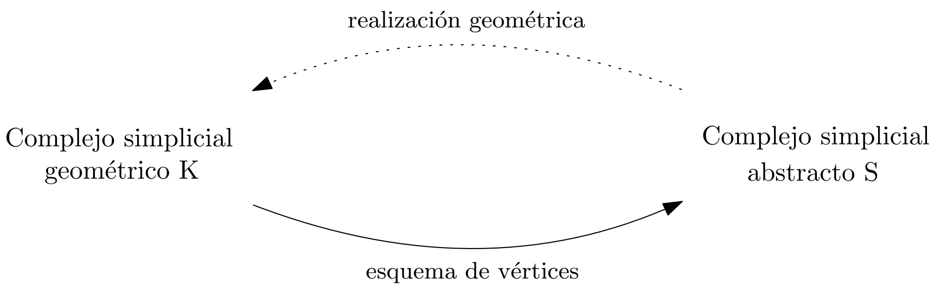


Figura 3.13: Realización geométrica del complejo simplicial abstracto S

En conclusión, dado un complejo simplicial abstracto S, es posible realizarlo geométricamente como un complejo simplicial geométrico K. Y, recíprocamente, a todo complejo simplicial geométrico K, podemos asociar un complejo simplicial abstracto S definido como el esquema de vértices de K. Resumimos la relación entre los complejos simpliciales geométricos y abstractos en la Figura 3.4.



Capítulo 4

Una demostración topológica del Teorema de Imposibilidad

A lo largo de este capítulo, seguiremos como referencia la publicación de Baigent [Baigent, 2011] que esboza la idea de Baryshnikov desde la perspectiva topológica para el caso de dos individuos y tres oportunidades. A la hora de desarrollar este caso será necesario definir herramientas tales como nervio y recubrimiento.

4.1. La perspectiva topológica de Baryshnikov

Los siguientes conceptos se estudiarán para poder formular el resultado de Arrow de modo que podamos probarlo empleando argumentos topológicos.

Definición 4.1. Dada una colección P de subconjuntos en un espacio X se dice que P recubre X, o que P es un *recubrimiento* de X, si la unión de los elementos de P coincide con X [Munkres, 2000].

A continuación, seguiremos con la definición de nervio.

Definición 4.2. [Munkres, 1984] Sea P recubrimiento de X una colección de subconjuntos del espacio X. Se define el *nervio* de P, $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ como el complejo simplicial abstracto cuyos vértices son elementos de P y sus símplices subcolecciones finitas $\{P_1, \ldots, P_n\}$ de P tales que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset$$

A continuación, consideremos el caso de dos individuos $m = \{1, 2\}$ y tres oportunidades x, y, z, es decir, un espacio de alternativas $X = \{x, y, z\}$.

Aplicaremos el caso anterior en un contexto económico donde los individuos serán dos directivos de una empresa los cuales tendrán tres alternativas diferentes en las que invertir: Letras del Tesoro (T), acciones (A) y bienes inmuebles (I). El nuevo espacio de alternativas quedaría definido por $X = \{T, A, I\}$.

Se establece el conjunto de preferencias estrictas entre las tres alternativas obteniendo la siguiente Tabla 4.1 con todas las posibles configuraciones.

1	2	3	4	5	6
T	T	A	A	I	I
A	I	T	I	T	A
I	A	I	T	A	T

Tabla 4.1: Espacio de preferencias $\mathcal{P}$

En ella identificamos cada una de las ordenaciones con el número de la cabecera de cada columna de la tabla. Obsérvese que T es estrictamente preferido a A en las columnas 1, 2 y 5 puesto que T se halla en filas superiores a las de A. El subconjunto formado por estas tres preferencias lo denotaremos como $(TA+)$.

En el caso contrario, A estrictamente preferido a T, denotamos por $(TA-)$ al subconjunto de preferencias en las que T se posiciona estrictamente por debajo de A, con esta nomenclatura $(TA-) = (AT+)$. Representamos en la Tabla 4.2 los subconjuntos que ordenan cada posible par de alternativas de una determinada manera.

$(TA+)$	$(AT+)$	$(AI+)$	$(IA+)$	$(TI+)$	$(IT+)$
1	3	1	2	1	4
2	4	3	5	2	5
5	6	4	6	3	6

Tabla 4.2: Colección de subconjuntos de $\mathcal{P}$

Como puede observarse en la Tabla 4.2, la unión de todos los subconjuntos de preferencias contiene todas las posibles ordenaciones del espacio de alternativas.

Según la Definición 4.1, podemos afirmar que estos subconjuntos forman un recubrimiento del conjunto de preferencias estrictas sobre el espacio de alternativas $X = \{T, A, I\}$. Por otro lado, el nervio de un recubrimiento forma un complejo simplicial abstracto a partir de los subconjuntos de $\mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ denota el conjunto de todas las preferencias estrictas sobre las alternativas. La colección $\mathcal{P}$ de todos los subconjuntos de la Tabla 4.2 son: $(TA+)$,

$(AT+)$, $(AI+)$, $(IA+)$, $(TI+)$ y $(IT+)$, los cuales trataremos como vértices.

Observación 4.3. La interpretación de la Tabla 4.2 se representa en la Figura 4.1 donde los números indican las preferencias en común entre vértices, dando lugar a las aristas e interiores de los triángulos.

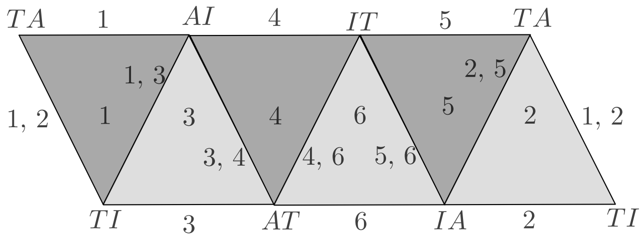


Figura 4.1: Símplices del nervio de $\mathcal{P}$

Las aristas que conectan dos vértices significan que los subconjuntos de preferencias tienen al menos una preferencia en común. Por ejemplo, consideremos el subconjunto $(TI+)$ resulta que la intersección de $(AI+)$ y $(TI+)$ contiene a las preferencias 1 y 3 como se observa en los números de la Figura 4.1. Sin embargo, si nos fijamos en los subconjuntos $(AI+)$ e $(IA+)$, su intersección es vacía, de modo que no habrá ninguna arista conectando ambos vértices.

Observación 4.4. La notación en la Figura 4.1 se abrevia suponiéndose para todos los vértices el signo $(+)$, por ejemplo, $(AI+)$ se abreviará a (AI).

El interior de un triángulo conecta tres vértices (subconjuntos de preferencias), indicando que tienen al menos una preferencia en común. Por ejemplo, los vértices $(AI+)$, $(TI+)$ y $(AT+)$ en la Tabla 4.2 tienen una intersección no vacía ya que tienen un elemento en común, la preferencia 3, esto representa el interior de un triángulo ($2-$símplice) visto como área gris en la Figura 4.1.

Mientras que las aristas están determinadas por uno o dos subconjuntos de preferencias, los interiores de los triángulos (o caras) vienen dadas únicamente por una preferencia.

Como puede observarse en la Figura 4.1 las aristas del extremo izquierdo y derecho coinciden, es decir, son la misma arista, la que une TA con TI, de modo que para representar adecuadamente el complejo simplicial geométrico debemos identificar ambas aristas. Para pegar las aristas $[TA, AI]$ necesitamos doblar el resto de los símplices obteniendo la figura que representamos a continuación.

La Figura 4.2 se obtiene uniendo vértices, aristas y algunos triángulos como se requiere en la Definición 3.10 de un complejo simplicial. El complejo simplicial que se muestra en la

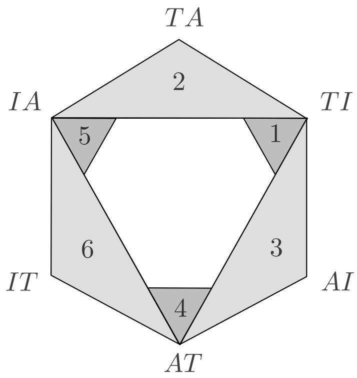


Figura 4.2: Nervio de $\mathcal{P}$

Figura 4.2 es el nervio de $\mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ denota el conjunto de todas las preferencias estrictas sobre las alternativas.

A continuación, mostraremos la Tabla 4.3 que representa $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ para para dos individuos y tres alternativas.

Para el par de alternativas T y A, $(TA, +, +)$ denota el subconjunto de pares de preferencias estrictas en $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, en las que los dos directivos prefieren estrictamente T que A.

Denotaremos por $(TA, +, -)$ el subconjunto de pares de preferencias en $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ por las que el primer directivo prefiere la alternativa T que A y el segundo directivo prefiere A a T.

Finalmente, $(TA, -, -)$ denota el subconjunto de pares de preferencias estrictas en $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ donde ambos directivos prefieren estrictamente A a T. La misma notación se empleará para los otros pares de alternativas.

La unión de todos estos subconjuntos de pares de preferencias contiene el conjunto de todos los pares de preferencias, cubriendo así el espacio $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Mediante un proceso análogo al ya explicado para construir el nervio de recubrimiento $\mathcal{N}(\mathcal{P})$, es posible construir el nervio del recubrimiento de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$.

En la Tabla 4.3 cada subconjunto $(TA, +, +), (TA, +, -) \dots (TI, -, +), (TI, -, -)$ es un vértice. En caso de que cualquier par de estos subconjuntos tengan un par ordenado de preferencias en común, se unirán los vértices correspondientes mediante una arista. A mayores, se determinan los interiores con más de dos vértices conectados.

En la Tabla 4.3 las columnas y las filas se corresponden con las preferencias estrictas y cada celda representa los subconjuntos de pares de preferencias y sus relaciones.

En base a esta información, podemos determinar todos los posibles símplices del nervio $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ de este recubrimiento de pares de preferencias ordenadas. Por ejemplo,

	T A I	T I A	A T I	A I T	I T A	I A T
T	$(TA,+,+)$	$(TA,+,+)$	$(TA,+,-)$	$(TA,+,-)$	$(TA,+,+)$	$(TA,+,-)$
A	$(AI,+,+)$	$(AI,+,-)$	$(AI,+,+)$	$(AI,+,+)$	$(AI,+,-)$	$(AI,+,-)$
I	$(TI,+,+)$	$(TI,+,+)$	$(TI,+,+)$	$(TI,+,-)$	$(TI,+,-)$	$(TI,+,-)$
T	$(TA,+,+)$	$(TA,+,+)$	$(TA,+,-)$	$(TA,+,-)$	$(TA,+,+)$	$(TA,+,-)$
A	$(AI,-,+)$	$(AI,-,-)$	$(AI,-,+)$	$(AI,-,+)$	$(AI,-,-)$	$(AI,-,-)$
I	$(TI,+,+)$	$(TI,+,+)$	$(TI,+,+)$	$(TI,+,-)$	$(TI,+,-)$	$(TI,+,-)$
T	$(TA,-,+)$	$(TA,-,+)$	$(TA,-,-)$	$(TA,-,-)$	$(TA,-,+)$	$(TA,-,-)$
A	$(AI,+,+)$	$(AI,+,-)$	$(AI,+,+)$	$(AI,+,+)$	$(Az,+,-)$	$(AI,+,-)$
I	$(TI,+,+)$	$(TI,+,+)$	$(TI,+,+)$	$(TI,+,-)$	$(TI,+,-)$	$(TI,+,-)$
T	$(TA,-,+)$	$(TA,-,+)$	$(TA,-,-)$	$(TA,-,-)$	$(TA,-,+)$	$(TA,-,-)$
A	$(AI,+,+)$	$(AI,+,-)$	$(AI,+,+)$	$(AI,+,+)$	$(AI,+,-)$	$(AI,+,-)$
I	$(TI,-,+)$	$(TI,-,+)$	$(TI,-,+)$	$(TI,-,-)$	$(TI,-,-)$	$(TI,-,-)$
T	$(TA,+,+)$	$(TA,+,+)$	$(TA,+,-)$	$(TA,+,-)$	$(TA,+,+)$	$(TA,+,-)$
A	$(AI,-,+)$	$(AI,-,-)$	$(AI,-,+)$	$(AI,-,+)$	$(AI,-,-)$	$(AI,-,-)$
I	$(TI,-,+)$	$(TI,-,+)$	$(TI,-,+)$	$(TI,-,-)$	$(TI,-,-)$	$(TI,-,-)$
T	$(TA,-,+)$	$(TA,-,+)$	$(TA,-,-)$	$(TA,-,-)$	$(TA,-,+)$	$(TA,-,-)$
A	$(AI,-,+)$	$(AI,-,-)$	$(AI,-,+)$	$(AI,-,+)$	$(AI,-,-)$	$(AI,-,-)$
I	$(TI,-,+)$	$(TI,-,+)$	$(TI,-,+)$	$(TI,-,-)$	$(TI,-,-)$	$(TI,-,-)$

Tabla 4.3: Colección de subconjuntos $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$

$(TA,-,-)$ y $(TI,+,+)$ están conectados por una arista puesto que están presentes en al menos una celda de la tabla. $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ y $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ son los nervios requeridos para la prueba de Baryshnikov de Teorema de Arrow.

La parte final de la demostración no la escribiremos formalmente debido a la complejidad técnica que requiere. La idea consiste en lo que exponemos a continuación.

Recordemos que el problema es construir una regla de elección social para dos agentes que tienen que elegir entre tres alternativas. El espacio de preferencias $\mathcal{P}$ recoge todas las posibles ordenaciones estrictas de dichas alternativas. Por tanto, buscaremos construir una función continua $f : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ que respete la uniformidad y la independencia de alternativas irrelevantes.

Una vez construimos los complejos simpliciales $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ y $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$, podemos asignar a $f : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ una aplicación simplicial $F : \mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \to \mathcal{N}(\mathcal{P})$. Esto es posible precisamente por el hecho de que se respeta la Independecia de las Alternativas Irrelevantes.

Además, algunas de las imágenes quedan completamente determinadas al exigir que se verifique Pareto.

Para que F sea una aplicación simplicial debe llevar vértices de $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ en vértices de $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ y caras de $\mathcal{N}(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ en caras de $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ según $f : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$.

Por último, utilizando el concepto de grado de un lazo, se tiene que F induce una aplicación $F^* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que permite comprobar que si se respetan los axiomas entonces necesariamente uno de los dos agentes ha de ser un dictador.

Una vez establecida la demostración no es difícil ver que de este caso se deriva el Teorema de Imposibilidad de Arrow para cualquier número finito de agentes $n \leq 2$ y de alternativas $|X| \leq 3$ [Rajsbaum and Raventós-Pujol, 2022].

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo, después de recordar el objeto de estudio de la Teoría de la Elección Social, se han introducido nociones de topología combinatoria, concretamente complejos simpliciales, como instrumento para dar una demostración sencilla del Teorema de Imposibilidad de Arrow. Con esto se prueba que que no se da una elección social que respete las condiciones de unanimidad, anonimato e Independencia de Alternativas Irrelevantes, sin que haya un dictador. Estas herramientas de la topología nos han servido para hacer una posible demostración del Teorema de Imposibilidad aplicada al caso de dos individuos que han de elegir entre tres alternativas, el cual hemos adaptado a un contexto económico. Además, la topología combinatoria ayuda a identificar ciclos de preferencias en este ámbito, es decir, situaciones en las que no se pueden encontrar una preferencia colectiva consistente o una ordenación completa de las alternativas.

Concluimos entonces que la topología nos proporciona herramientas matemáticas útiles para la comprensión de los sistemas de votación y las preferencias sociales, ayudando a identificar problemas y diseños de sistemas más justos y eficientes.

Bibliografía

[Arrow, 1963] Arrow, K. (1963). Social choice and individual values. John Wiley & Son.

[Aumann, 1944] Aumann, G. (1944). Über Räume mit Mittelbildungen. volume 119, pages 210–215.

[Baigent, 2011] Baigent, N. (2011). Chapter Eighteen - Topological Theories of Social Choice. In Arrow, K. J., Sen, A., and Suzumura, K., editors, *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 2 of *Handbook of Social Choice and Welfare*, pages 301–334. Elsevier.

[Baryshnikov, 1997] Baryshnikov, Y. M. (1997). Topological and discrete social choice: in a search of a theory. volume 14, pages 199–209. Springer, Berlin/Heidelberg.

[Candeal et al., 1997] Candeal, J. C., Chichilnisky, G., and Induráin, E. (1997). Topological aggregation of preferences: the case of a continuum of agents. volume 14, pages 333–343.

[Carrasquel et al., 2018] Carrasquel, J., Lupton, G., and Oprea, J. (2018). Topological Complexity, Robotics and Social Choice. volume 05, pages 1–15. MFO.

[Chia, 2015] Chia, W. H. (2015). The topological approach to social choice. unpublished.

[Chichilnisky, 1980] Chichilnisky, G. (1980). Social choice and the topology of spaces of preferences. volume 37, pages 165–176. Elsevier (Academic Press), San Diego, CA.

[Chichilnisky and Heal, 1983] Chichilnisky, G. and Heal, G. (1983). Necessary and sufficient conditions for a resolution of the social choice paradox. volume 31, pages 68–87.

[Eckmann, 1954] Eckmann, B. (1954). Räume mit Mittelbildungen. volume 28, pages 329–340. European Mathematical Society (EMS) Publishing House, Zurich.

[Eckmann, 2004] Eckmann, B. (2004). Social choice and topology: a case of pure and applied mathematics. volume 22, pages 385–393. Elsevier, Munich.

[Horvath, 2001] Horvath, C. D. (2001). On the topological social choice problem. volume 18, pages 227–250.

[Lauwers, 2000] Lauwers, L. (2000). Topological Social Choice. volume 40, pages 1–39. Elsevier (North-Holland), Amsterdam.

[Lauwers, 2009] Lauwers, L. (2009). The topological approach to the aggregation of preferences. volume 33, pages 449–476.

[Le Breton and Uriarte, 1990] Le Breton, M. and Uriarte, J. R. (1990). On the robustness of the impossibility result in the topological approach to social choice. volume 7, pages 131–140.

[Munkres, 1984] Munkres, J. R. (1984). Elements of Algebraic Topology. pages 1–16. Addison-Wesley Publishing Company.

[Munkres, 2000] Munkres, J. R. (2000). Topology. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

[Rajsbaum and Raventós-Pujol, 2022] Rajsbaum, S. and Raventós-Pujol, A. (2022). A distributed combinatorial topology approach to arrow's impossibility theorem. In *Proceedings of the 2022 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, PODC'22, pages 471–481. Association for Computing Machinery.

[Rotman, 1988] Rotman, J. J. (1988). An Introduction to Algebraic Topology. pages 52–63. Springer.

[Sen, 1970] Sen, A. (1970). Collective Choice and Social Welfare.

[Villar, 1996] Villar, A. (1996). Curso de microeconomía avanzada. pages 231–259. Antoni Bosch.

[Villar, 2012] Villar, A. (2012). Microeconomía. pages 52–63. Mc Graw Hill.

[Weinberger, 2004] Weinberger, S. (2004). On the topological social choice model. volume 115, pages 377–384.