

Modelado de un sistema háptico móvil basado en antenas flexibles

Haro-Olmo, María Isabel^{a,*}, Mérida-Calvo, Luis^{a,*}, Benftima, Salma^{a,b}, Gharab, Saddam^{a,c}, Feliu-Batlle, Vicente^c

^aInstituto de Investigaciones Energéticas y Aplicaciones Industriales, 13005 Ciudad Real, Universidad de Castilla-La Mancha.

^bUniversité de Tunis El Manar, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis,

LR11ES20 Laboratoire d'Analyse, Conception et Commande des systèmes, 1002, Tunis, Tunisie.

^cEscuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial, 13001 Ciudad Real, Universidad de Castilla-La Mancha.

To cite this article: Haro-Olmo, M.I., Mérida-Calvo, L., Benftima, S., Gharab, S., Feliu-Batlle, V. 2023. Modeling of a mobile haptic system based on flexible antennas. XLIV Jornadas de Automática, 605-610
<https://doi.org/10.17979/spudc.9788497498609.605>

Resumen

En los últimos años ha aumentado el interés en el desarrollo de sistemas de medición para robots móviles, entre los que se encuentran los sistemas táctiles basados en antenas sensoras bioinspiradas en los bigotes y antenas de animales e insectos. En este trabajo se estudia un robot móvil con este tipo de sistemas. En concreto, se desarrolla el modelo dinámico del conjunto plataforma móvil y antena sensora que conforman el robot, considerando el movimiento del conjunto comprendido en el plano y teniendo en cuenta el efecto de la gravedad. Para ello se aplica el principio de Hamilton, obteniendo las ecuaciones de movimiento para la plataforma móvil y el planteamiento del problema de condiciones de contorno para la antena. Posteriormente, mediante el análisis modal se llega a una solución única del modelo de la antena sensora, el cual se valida mediante el software *Adams* al definir unas trayectorias de referencia del robot a partir de sus limitaciones físicas.

Palabras clave: Robots móviles, Modelado, Vibraciones y análisis modal, Sistemas lagrangianos y hamiltonianos, Validación del modelo, Percepción y sensores

Modeling of a mobile haptic system based on flexible antennas

Abstract

In recent years, there has been a growing interest in the development of measurement systems for mobile robots, including tactile systems based on bioinspired sensor antennas, inspired by the whiskers and antennas of animals and insects. This work focuses on studying a mobile robot equipped with such systems. Specifically, a dynamic model for the mobile platform and sensor antenna that comprise the robot is developed, considering the planar motion of the system and taking into account the gravity effect. The extended Hamilton principle is applied to derive the equations of motion for the mobile platform, while the boundary-value problem is formulated for the antenna. Subsequently, by means of modal analysis, a unique solution for the sensor antenna model is obtained and validated using *Adams* software by defining reference trajectories for the robot, considering its physical limitations.

Keywords: Modeling, Lagrangian and Hamiltonian systems, Vibration and modal analysis, Model Validation, Mobile robots, Perception and sensing

1. Introducción

La tecnología háptica es un campo de estudio que comenzó a explorarse en los años 90 (Russell, 1992) y que en los últimos años ha sido objeto de estudio en la robótica para el desarrollo de diferentes sistemas de medición, como sistemas tipo bigotes (Sayegh et al., 2022) o tipo antena (Kaneko et al., 1998), con

el objetivo de realizar tareas de inspección y reconocimiento. Frente a otras tecnologías como sistemas de visión por cámaras o sensores de ultrasonidos, la tecnología háptica ofrece mejores resultados en tareas de inspección que han de realizarse en ambientes de mala visibilidad, debido a humo, humedad o partículas en suspensión.

*Autores para correspondencia: Luis.Merida@uclm.es, MIsabel.Haro@uclm.es
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Con el fin de realizar estas tareas se ha desarrollado un prototipo robótico que consiste en una plataforma móvil omnidireccional equipada con un sistema háptico robótico tipo antena (Fig.1). La plataforma está equipada con cuatro motores que conducen cuatro ruedas suecas (o tipo mecanum), dotando al sistema de capacidad de movimiento en los 3 grados de libertad del plano de forma independiente (sistema holonómico) (Mérida-Calvo et al., 2023). Sobre ella se equipa una antena robótica que consta de dos motores (2 grados de libertad) y un sensor de fuerzas. Este sistema de medición háptico ha sido desarrollado previamente en (Feliu-Batlle et al., 2017). El objetivo es realizar tareas de reconocimiento mientras el robot navega en un entorno determinado, desplazándose libremente mediante la plataforma y tomando mediciones hápticas con la antena.

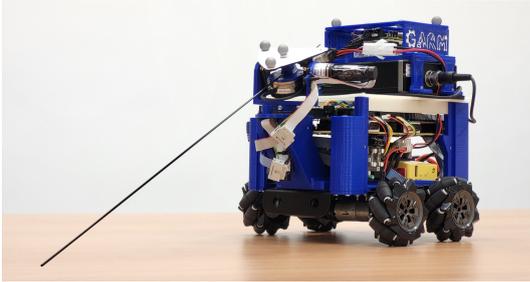


Figura 1: Plataforma móvil con sistema háptico

La antena que equipa el sistema es una varilla esbelta y ligera de fibra de carbono, con el objetivo de minimizar los esfuerzos que requieren sus motores para realizar movimientos rápidos y precisos. Debido a esta naturaleza flexible, cualquier movimiento de la misma induce vibraciones. Además, estas vibraciones se ven incrementadas cuando se suma el movimiento de la plataforma móvil, ya sea por un avance controlado o por una perturbación inducida por el perfil de las ruedas. Esta vibración implica imprecisión en el conocimiento de la posición del extremo de la varilla y, por tanto, dificulta las tareas de reconocimiento que se han de desarrollar. Por este motivo, resulta de vital importancia obtener un modelo que reproduzca el comportamiento de la antena con el objetivo de diseñar un control de posición, el cual permita el posicionamiento del extremo de manera precisa eliminando la vibraciones indeseadas.

La obtención del modelo dinámico de nuestra antena sensora es equivalente a la de un eslabón flexible que cuente con movimientos rígidos en la base. Para su obtención, distintas técnicas han sido estudiadas en la literatura, como se puede ver en (Subedi et al., 2020). Centrándonos en los estudios que obtienen el modelo del eslabón flexible teniendo en cuenta su naturaleza continua, algunos autores consideran un único movimiento rígido en uno de los extremos del eslabón. Por ejemplo, en (Bellezza et al., 1990; Mishra et al., 2015) se considera una rotación en la base, mientras que un movimiento de traslación es definido en (Zhu et al., 1997; Lu et al., 2013). En (Emam, 2010) definen que el eslabón está sujeto a ambos movimientos, una rotación y una traslación en la base. En (Tavasoli, 2017) estudian un problema similar al que se obtendrá en este artículo, donde consideran tres grados de libertad en la base del eslabón. Sin embargo, únicamente plantea el problema de condiciones de contorno de dicho eslabón, el cual tiene una masa en el ex-

tremo y está excitado por una fuerza distribuida. Por otro lado, en (Kumar and Pratiher, 2020) consideran el mismo número de grados de libertad e incluyen una masa en el extremo del eslabón. En su modelo estudian tanto la deflexión transversal como la axial. Sin embargo, consideran que el movimiento se produce en el plano horizontal, despreciando el efecto de la gravedad.

En este trabajo se desarrolla el modelo del conjunto que conforma la plataforma móvil con el sistema háptico. El movimiento considerado se comprende únicamente en el plano vertical, incluyendo el efecto de la gravedad. Este movimiento es una simplificación del sistema real, que como ya se ha comentado cuenta con 3 grados de libertad para la plataforma y 2 para el giro de la antena, pero sienta las bases para su futuro modelado. Para dicho desarrollo se aplica el principio de Hamilton, permitiendo obtener las ecuaciones de la dinámica de todo el sistema además de plantear las condiciones de contorno necesarias para resolver la ecuación en derivadas parciales (EDP) que modela la antena sensora. Posteriormente se resuelve esta EDP junto con las condiciones de contorno, a lo que también se le conoce como problema de condiciones de contorno.

2. Modelo dinámico

El esquema del conjunto plataforma-antena se representa en la Figura 2. Como ya se ha comentado, todos los movimientos del sistema se encuentran comprendidos en el plano. La plataforma móvil tiene masa M_b y se mueve en horizontal debido a una fuerza $F_a(t)$. Además, se considera que el movimiento en vertical aparecerá como una perturbación al sistema. Al tener en cuenta el efecto de la gravedad, aparece una fuerza de reacción entre el sistema y el suelo que se expresa como $F_r(t)$. Por otro lado, la antena sensora puede modelarse como un eslabón flexible que cuenta con longitud L , densidad lineal ρ y rigidez a la flexión EI , donde E es el modulo de Young que viene dado por el material e I es la inercia de la sección transversal. La antena está fijada en uno de sus extremos a un motor cuya inercia de rotación es J_m y que produce un par $\Gamma_m(t)$. La posición de este motor con respecto al centro de masa de la plataforma móvil viene dada por una distancia d y un ángulo α .

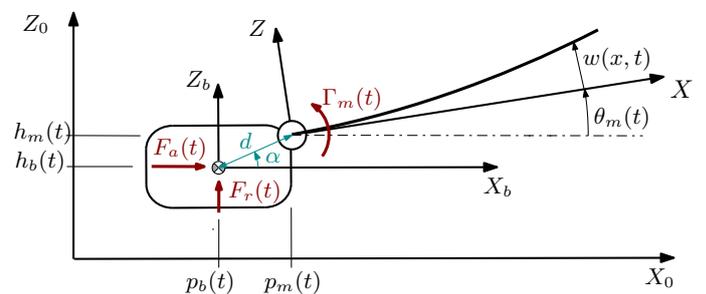


Figura 2: Esquema del sistema.

Asimismo, se consideran tres sistemas de coordenadas: un sistema inercial (X_0, Z_0) y dos sistemas no inerciales, (X_b, Z_b) y (X, Z) . El sistema inercial se define tal que Z_0 tiene el sentido contrario a la gravedad g . El sistema (X_b, Z_b) se fija a la plataforma móvil y su origen se define en el centro de masas de esta. En cambio, el origen del sistema (X, Z) se define en el

eje de giro del motor de la antena sensora y se hace coincidir el eje X con la posición de la antena sin deformar. La traslación horizontal de (X_b, Z_b) y (X, Z) con respecto a (X_0, Z_0) se definen como $p_b(t)$ y $p_m(t)$ respectivamente, y la traslación vertical como $h_b(t)$ y $h_m(t)$. El giro entre (X, Z) y (X_b, Z_b) , definido como $\theta_m(t)$, corresponde con el giro del motor de la base de la antena. Nótese que los ángulos positivos se definen en sentido antihorario.

Respecto al sistema (X, Z) , se define $w(x, t)$ como la deflexión del eslabón debida a su flexibilidad. Esta deflexión es la distancia de cualquier punto x del eslabón al sistema de referencia (X, Z) en el instante t . De este modo, el movimiento respecto del sistema (X, Z) se asemeja al producido en una viga empotrada en la base. Además, se realiza la hipótesis de que la deflexión de la antena $w(x, t)$ está descrita por la teoría de vigas de Euler-Bernoulli (Oñate, 2013) bajo las siguientes hipótesis:

1. El material del eslabón es isotrópico, homogéneo y con comportamiento elástico lineal.
2. La deflexión $w(x, t)$ es pequeña en comparación con x , de manera que $\arctan\left(\frac{w(x, t)}{x}\right)$ se aproxima como $\frac{w(x, t)}{x}$.
3. La deflexión lateral (producida fuera del plano vertical) se supone nula.
4. La sección transversal del eslabón permanece plana y perpendicular a su eje después de la deformación.

Además, debido a la primera hipótesis, se puede llevar a cabo un análisis de primer orden (Davison and Owens, 2012). De este modo, las fuerzas que actúan se consideran sobre el eslabón sin deformar y se aplica el principio de superposición. Además, no se consideran los rozamientos internos y externos del eslabón.

2.1. Obtención de la dinámica del sistema

A continuación, se obtienen las ecuaciones de movimiento que modelan el sistema al aplicar el principio de Hamilton (Meirovitch, 1967, 1997), el cual se expresa de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (1)$$

donde δW es la variación del trabajo producida por las fuerzas aplicadas, y δT y δV son, respectivamente, las variaciones de las energías cinética y potencial. Estas variaciones se obtienen con respecto a las siguientes coordenadas generalizadas: $p_b(t)$, $h_b(t)$, $\theta_m(t)$ y $w(x, t)$.

En primer lugar, para obtener la energía cinética, se definen los siguientes vectores con respecto al sistema de referencia (X_0, Z_0) :

$$\mathbf{r}_b(t) = \begin{bmatrix} p_b(t) \\ h_b(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_m(t) = \mathbf{r}_b(t) + d \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_m(t) \\ h_m(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_a(x, t) = \mathbf{r}_m(t) + x \begin{bmatrix} \cos(\theta_m(t)) \\ \sin(\theta_m(t)) \end{bmatrix} + w(x, t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta_m(t)) \\ \cos(\theta_m(t)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde $\mathbf{r}_b(t) \in \mathcal{R}^{2 \times 1}$ define la posición del centro de masas de la plataforma móvil, $\mathbf{r}_m(t) \in \mathcal{R}^{2 \times 1}$ indica la posición del origen de giro de la antena sensora y $\mathbf{r}_a(x, t) \in \mathcal{R}^{2 \times 1}$ define la posición de

un diferencial de la antena situado en un punto x con respecto al sistema de coordenadas (X_0, Z_0) .

De este modo, la energía cinética del sistema se obtiene al operar la siguiente expresión

$$T = \frac{1}{2} M_b \dot{\mathbf{r}}_m(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_m(t) + \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{\mathbf{r}}_a(x, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_a(x, t) dx \quad (5)$$

donde la derivada temporal se indica con $(\dot{\quad})$. Aquí, el primer término corresponde con la energía debida a la traslación de la plataforma móvil, el segundo término corresponde con la energía de rotación del motor de la antena sensora y el último se debe al propio movimiento de la antena.

En cuanto a la energía potencial, se define como la suma de dos componentes: una elástica, V_e , debida a la flexibilidad de la antena sensora y otra gravitatoria, V_g . Considerando la hipótesis de viga de Euler-Bernoulli, la energía potencial elástica del eslabón viene descrita por

$$V_e = \frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x, t) dx \quad (6)$$

donde (\prime) indica la derivada con respecto a la variable x del sistema de coordenadas (X, Z) .

Debido a la hipótesis de análisis de primer orden, la energía potencial gravitatoria se define con respecto a la viga sin deformar. De este modo, se tiene

$$V_g = g M_b h_b(t) + \int_0^L g \rho (h_b(t) + d \sin(\alpha) + x \sin(\theta_m(t))) dx \quad (7)$$

siendo el primer término el correspondiente a la plataforma móvil y el segundo al de la antena.

Por último, la variación del trabajo se define como

$$\delta W = F_a(t) \delta p_b(t) + F_r(t) \delta h_b(t) + \Gamma_m(t) \delta \theta_m(t) - \int_0^L g \rho \cos(\theta_m(t)) \delta w(x, t) dx \quad (8)$$

donde el trabajo que generan las fuerzas $F_a(t)$, $F_r(t)$ y el par $\Gamma_m(t)$ corresponden con los tres primeros términos. El último término refleja el trabajo que genera la gravedad con respecto al desplazamiento de la antena.

Al calcular la variación de las energías y aplicar la ecuación (1), se obtiene una ecuación dependiente de los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas $\delta p_b(t)$, $\delta h_b(t)$, $\delta \theta_m(t)$ y $\delta w(x, t)$, y de la derivada espacial $\delta w'(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\delta w(x, t)]$.

Por un lado, recurriendo a que los desplazamientos $\delta p_b(t)$, $\delta h_b(t)$ y $\delta \theta_m(t)$ son arbitrarios, la suma de sus coeficientes debe ser igual a cero. De este modo, se obtienen tres ecuaciones que modelan la dinámica de la plataforma móvil y del motor que mueve la antena:

$$\begin{aligned} & (M_b + \rho L) \ddot{p}_b(t) - \rho \int_0^L \ddot{w}(x, t) dx \sin(\theta_m(t)) \\ & - \rho \left(\frac{L^2}{2} \sin(\theta_m(t)) + \int_0^L w(x, t) dx \cos(\theta_m(t)) \right) \ddot{\theta}_m(t) \\ & - \rho \left(\frac{L^2}{2} \cos(\theta_m(t)) - \int_0^L w(x, t) dx \sin(\theta_m(t)) \right) \dot{\theta}_m^2(t) \\ & - \rho \int_0^L \dot{w}(x, t) dx \dot{\theta}_m(t) \cos(\theta_m(t)) = F_a(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & (M_b + \rho L) \ddot{h}_b(t) - \rho \int_0^L \ddot{w}(x, t) dx \cos(\theta_m(t)) + g(M_b + \rho L) \\
 & + \rho \left(\frac{L^2}{2} \cos(\theta_m(t)) - \int_0^L w(x, t) dx \sin(\theta_m(t)) \right) \ddot{\theta}_m(t) \\
 & - \rho \left(\frac{L^2}{2} \sin(\theta_m(t)) + \int_0^L w(x, t) dx \cos(\theta_m(t)) \right) \dot{\theta}_m^2(t) \\
 & - \rho \int_0^L \dot{w}(x, t) dx \dot{\theta}_m(t) \sin(\theta_m(t)) = F_r(t) \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(J_m + \rho \frac{L^3}{3} \right) \ddot{\theta}_m(t) + \rho \int_0^L x \ddot{w}(x, t) dx + g \rho \frac{L^2}{2} \cos(\theta_m(t)) \\
 & - \rho \left(\frac{L^2}{2} \sin(\theta_m(t)) + \int_0^L w(x, t) dx \cos(\theta_m(t)) \right) \ddot{h}_b(t) \\
 & + \rho \left(\frac{L^2}{2} \cos(\theta_m(t)) - \int_0^L w(x, t) dx \sin(\theta_m(t)) \right) \dot{h}_b(t) = \Gamma_m(t) \quad (11)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (9)-(10) corresponde con las ecuaciones de movimiento de la plataforma y la ecuación (11) con la del motor de la base de la antena.

Por otro lado, el desplazamiento virtual $\delta w(x, t)$ es arbitrario sobre el dominio $0 < x < L$. Así, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 EI w''''(x, t) + \rho (\ddot{w}(x, t) + x \ddot{\theta}_m(t) - \ddot{h}_b(t) \sin(\theta_m(t)) \\
 + \dot{h}_b(t) \cos(\theta_m(t))) = -g \rho \cos(\theta_m(t)) \quad (12)
 \end{aligned}$$

la cual es equivalente a la ecuación de la viga de Euler-Bernoulli. Además, se asume que $\delta w(x, t)$ o sus coeficientes son cero en los límites $x = 0$ y $x = L$, y que $\delta w'(x, t)$ o sus coeficientes son cero en $x = 0$ y $x = L$. Así, se obtienen las condiciones de contorno que permiten resolver la ecuación (12):

$$w(0, t) = 0; \quad w'(0, t) = 0 \quad (13)$$

$$w''(L, t) = 0; \quad w'''(L, t) = 0 \quad (14)$$

donde (13) corresponde con una condición de viga empotrada en la base de la antena y (14) con una de extremo libre. Al conjunto de ecuaciones (12)-(14) se le conoce como el problema de condiciones de contorno. La solución de este problema da como resultado un conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del tiempo que modelan el comportamiento de la antena sensora.

2.2. Resolución del problema de condiciones de contorno

A continuación, se aplica el análisis modal para sistemas continuos (Meirovitch, 1967) con el fin de obtener el modelo matemático del comportamiento de la antena sensora. Por tanto, en primer lugar se aplica el método de separación de variables y se resuelve el problema de autovalores.

Al aplicar el método de separación de variables, se asume que la deflexión se expresa como

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \phi_i(t) \quad (15)$$

donde $\psi_i(x)$ son conocidas como funciones características o modos normales de una viga y $\phi_i(t)$ son las funciones armónicas del tiempo. La solución de los modos normales se obtiene al resolver el problema de autovalores, obtenido al aplicar la relación (15) sobre las ecuaciones (12)-(14) e imponer que las excitaciones externas son nulas. Por tanto, el problema de autovalores es

$$EI \psi_i''''(x) - \omega_i^2 \rho \psi_i(x) = 0 \quad (16)$$

$$\psi_i(0) = 0; \quad \psi_i'(0) = 0 \quad (17)$$

$$\psi_i''(L) = 0; \quad \psi_i'''(L) = 0 \quad (18)$$

donde ω_i es la frecuencia de vibración que se obtienen a partir de la siguiente ecuación característica

$$1 + \cos(\beta L) \cosh(\beta L) = 0 \quad (19)$$

que se resuelve numéricamente y cuenta con infinitas soluciones $\beta_i^4 = \frac{\omega_i^2 \rho}{EI}$.

La solución general de la ecuación (16) es

$$\psi_i(x) = C_{1i} \sin(\beta_i x) + C_{2i} \cos(\beta_i x) + C_{3i} \sinh(\beta_i x) + C_{4i} \cosh(\beta_i x) \quad (20)$$

donde las constantes C_{1i} , C_{2i} , C_{3i} y C_{4i} se obtiene a partir de las condiciones (17)-(18) imponiendo que la solución de $\psi_i(x)$ sea no trivial. De este modo, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \psi_i(x) = C_{1i} [(\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)) (\sin(\beta_i L) - \sinh(\beta_i L)) \\
 - (\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)) (\cos(\beta_i L) - \cosh(\beta_i L))]
 \end{aligned}$$

donde la constante C_{1i} se calcula mediante la condición de ortonormalidad

$$\rho \int_0^L \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \Delta_{ij} \quad (21)$$

también expresada como

$$\frac{EI}{\omega_i^2} \int_0^L \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx = \Delta_{ij} \quad (22)$$

siendo Δ_{ij} la delta de Kronecker e $i, j = 1, 2, \dots, \infty$.

Una vez resulto el problema de autovalores, la solución de la ecuación (12) se obtiene mediante el teorema de expansión en forma de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas en función de $\phi_i(t)$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{ij} (\ddot{\phi}_i(t) + \omega_i^2 \phi_i(t)) = -\rho \int_0^L x \psi_j(x) dx \ddot{\theta}_m(t) \\
 - \rho \int_0^L \psi_j(x) dx (g \cos(\theta_m(t)) + \dot{h}_b(t) \cos(\theta_m(t)) - \ddot{h}_b(t) \sin(\theta_m(t)))
 \end{aligned} \quad (23)$$

siendo $i, j = 1, 2, \dots, \infty$.

Finalmente, el modelo dinámico de la antena se consigue truncando el número de modos de vibración a n . Así, definiendo los vectores $\boldsymbol{\phi}(t) = [\phi_1(t) \phi_2(t) \dots \phi_n(t)]^T$ y $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t) \psi_2(t) \dots \psi_n(t)]^T$ pertenecientes a $\mathfrak{R}^{n \times 1}$, se tiene

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{W} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{P} \mathbf{u}(t) \quad (24)$$

donde $\mathbf{I} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad y

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (25)$$

$$\mathbf{P} = \rho \int_0^L \begin{bmatrix} -x \boldsymbol{\psi}(x) & \boldsymbol{\psi}(x) & -\boldsymbol{\psi}(x) & -g \boldsymbol{\psi}(x) \end{bmatrix} dx \in \mathfrak{R}^{n \times 4} \quad (26)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_m(t) \\ \ddot{p}_b(t) \sin(\theta_m(t)) \\ \ddot{h}_b(t) \cos(\theta_m(t)) \\ \cos(\theta_m(t)) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{4 \times 1} \quad (27)$$

Como variables a medir del modelo se definen, el par de acoplamiento que se mide en la base de la antena

$$\Gamma_c(t) = -EIw''(0, t) = -EI\psi''(0)^\top \phi(t), \quad (28)$$

y el ángulo del extremo de la antena con respecto al sistema (X_0, Z_0)

$$\theta_t(t) = \theta_m(t) + \frac{w(L, t)}{L} = \theta_m(t) + \frac{1}{L}\psi(L)^\top \phi(t) \quad (29)$$

En conclusión, las ecuaciones (9)-(10) modelan el comportamiento dinámico de la plataforma móvil, (11) es la ecuación del motor que mueve la antena sensora y (24) es una aproximación del comportamiento de la antena, debido a que se trunca en n modos. El conjunto de estas cinco ecuaciones forman el modelo dinámico de nuestro sistema.

3. Validación del modelo

En este apartado se valida el modelo dinámico obtenido del robot. Con este objetivo, se compararan las respuestas del modelo calculadas mediante una simulación realizada en *Matlab* con los resultados obtenidos de una simulación realizada mediante el software *Adams*. Para ello, se emplean las características físicas reales de nuestro sistema descrito en la Sección 1, cuyas magnitudes se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Características del robot.

Parámetro	Cantidad	Unidades
M_b	3,50	kg
J_m	$3,68 \times 10^{-4}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
L	0,47	m
ρ	$4,7 \times 10^{-3}$	kg/m
E	$1,15 \times 10^{11}$	N/m ²
I	$7,54 \times 10^{-13}$	m ⁴

Nótese que la masa de la plataforma móvil M_b es varias veces superior a la masa de la antena sensora, que es ρL . Concretamente, la masa de la antena supone un 0,06 % de la masa de la plataforma móvil. Por este motivo, es posible hacer la hipótesis de que la dinámica de la antena sensora no afecta a la dinámica de la plataforma. Por tanto, las ecuaciones (9)-(10) pueden simplificarse tal que

$$M_b \ddot{p}_b(t) = F_a(t) \quad (30)$$

$$M_b \ddot{h}_b(t) + gM_b = F_r(t) \quad (31)$$

Ahora, el modelo dinámico está conformado por las ecuaciones (30)-(31) para la plataforma móvil, (11) para el motor de la antena y el conjunto de ecuaciones (24)-(29) para la antena sensora.

Para realizar las simulaciones es necesario definir unas señales de referencia para las entradas de nuestro modelo: $F_a^*(t)$, $F_r^*(t)$ y $\Gamma_m^*(t)$. Se definen de tal forma que las trayectorias que

realice el sistema sean lo más realistas posibles. En una tarea típica de navegación y reconocimiento háptico del entorno, el robot se desplazará horizontalmente ($p_b(t)$), con una aceleración y velocidad controladas. A su vez, realiza un barrido del espacio que tiene por delante con la antena mediante el motor de la misma ($\theta_m(t)$). Teniendo en cuenta las limitaciones físicas del equipo y las aceleraciones máximas que puede generar y soportar, se diseñan las referencias $p_b^*(t)$ y $\theta_m^*(t)$ de la Figura 3.

Partiendo de (30) es inmediato calcular $F_a^*(t)$ con la masa M_b y la segunda derivada de la trayectoria $p_b^*(t)$ generada. Por otro lado, no se define ninguna trayectoria de desplazamiento vertical del robot $h_b^*(t)$, ya que el robot no se encuentra actuado en dicha dirección y sólo se desplaza a lo largo del plano horizontal. Por lo tanto, el valor de $F_r^*(t)$ es la fuerza de reacción del suelo, tal y como se ha comentado anteriormente. Por último, definimos el par del motor de la antena $\Gamma_m^*(t)$ a partir de la ecuación (11) y la trayectoria $\theta_m^*(t)$. Para ello es necesario simplificar (11) despreciando la deflexión de la varilla $w(x, t)$, ya que no se conoce su valor, de manera que:

$$\begin{aligned} \Gamma_m^*(t) = & \left(J_m + \rho \frac{L^3}{3} \right) \ddot{\theta}_m^*(t) + g\rho \frac{L^2}{2} \cos(\theta_m^*(t)) \\ & + \rho \frac{L^2}{2} \left(\ddot{h}_b^*(t) \cos(\theta_m^*(t)) - \ddot{p}_b^*(t) \sin(\theta_m^*(t)) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

El movimiento vertical de la plataforma $h_b(t)$ se ve afectado por una perturbación externa provocada por el perfil de las ruedas omnidireccionales equipadas. Esta perturbación, $h_{b_{\text{pert}}}(t)$, puede asimilarse a una oscilación senoidal, cuya frecuencia depende de la velocidad $\dot{p}_b(t)$ y cuya amplitud se establece en 5 mm, de acuerdo con las dimensiones físicas del sistema.

Con todo esto, las referencias resultantes para el modelo $F_a^*(t)$, $\Gamma_m^*(t)$ y la señal de la perturbación externa $h_{b_{\text{pert}}}(t)$ se representan en la Figura 4.

Finalmente, las salidas de nuestro sistema y, por tanto, las medidas a comparar son el par de acoplamiento de la antena, $\Gamma_c(t)$ (28), y el ángulo del extremo de la antena con respecto al eje X_0 , $\theta_t(t)$ (29).

Como ya se ha comentado, la validez de este modelo se determina comparando estos resultados obtenidos mediante *Matlab* y *Adams* al considerar las referencias de la Figura 4. La comparativa entre ambos resultados para las salidas definidas, el par de acoplamiento y el ángulo del extremo de la antena, se reflejan en la Figura 5.

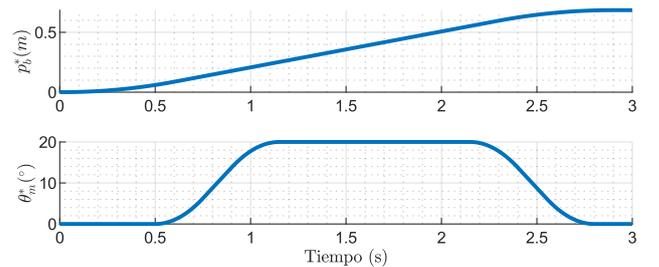


Figura 3: Referencias en posición del avance de la plataforma móvil $p_b^*(t)$ y barrido de la antena $\theta_m^*(t)$.

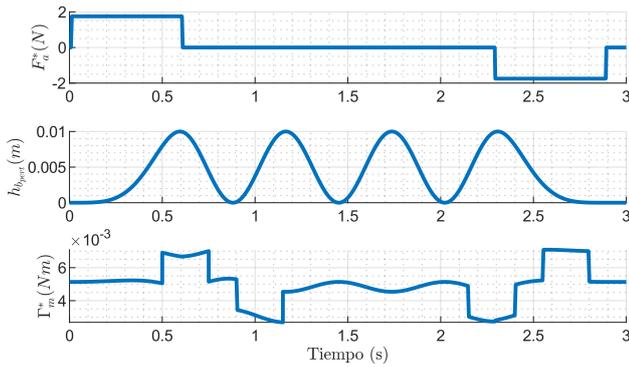


Figura 4: Referencias generadas para las entradas del sistema $F_a^*(t)$ y $\Gamma_m^*(t)$ y para la perturbación $h_{b_{pert}}(t)$.

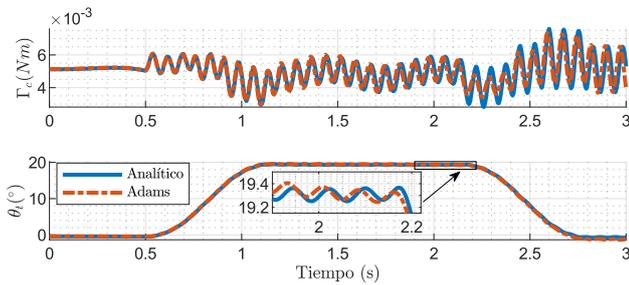


Figura 5: Comparación del par de acoplamiento $\Gamma_c(t)$ y ángulo del extremo de la antena $\theta_r(t)$ de las simulaciones.

Visualmente se puede apreciar que el resultado del modelo analítico obtenido en este trabajo sigue con mucha precisión la simulación realizada en *Adams*. Con el objetivo de medir cuantitativamente este ajuste, se calcula la raíz del error cuadrático medio (*RMSE*) de las señales, obteniendo un valor de $4,9 \times 10^{-4}$ N·m para el par de acoplamiento y de $3,4 \times 10^{-3}$ grados para el ángulo del extremo, ambos valores muy pequeños. Asimismo, se calcula la frecuencia de vibración del primer modo de la antena en ambas simulaciones con el fin de obtener el error entre ambas. Se compara únicamente el primer modo ya que es el más crítico el sistema. Así, se obtiene una frecuencia de 81,81 rad/s para el modelo analítico y de 82,67 rad/s para la simulación en *Adams*, con un error relativo de 1,04 % entre ambos.

Si bien estos resultados son muy buenos, es cierto que existen pequeñas diferencias entre ambos que merecen ser mencionadas. Éstas se deben a dos causas principales. En primer lugar, el modelo dinámico de la antena se ha obtenido truncando el número de modos de vibración a un valor finito n , lo cual limita la precisión del modelo. Y en segundo lugar, la simulación de *Adams* no es infinitamente precisa, ya que la flexión de la antena se simula segmentándola en un número finito de elementos, lo cual disminuye la precisión de los cálculos y, por ende, de los resultados.

4. Conclusiones

En este trabajo se presenta el desarrollo del modelo dinámico de un sistema robótico formado por el conjunto plataforma móvil-antena sensora al aplicar el principio de Hamilton. La validez del modelo desarrollado se ha demostrado comparando sus respuestas con una simulación realizada en el software

Adams. Para obtener dichas respuestas, se generan unas trayectorias de referencia de acuerdo con las limitaciones físicas del sistema.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del proyecto PID2019-11128RB-C21/AEI/10.13039/501100011033 y a la beca PRE2020-095222 financiados por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Referencias

- Bellezza, F., Lanari, L., Ulivi, G., 1990. Exact modeling of the flexible slewing link. In: Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation. pp. 734–739 vol.1. DOI: 10.1109/ROBOT.1990.126073
- Davison, B., Owens, G., 2012. Steel designers' manual. Wiley-Blackwell.
- Emam, S. A., Jun. 2010. Dynamics of a flexible-hub geometrically nonlinear beam with a tip mass. Journal of Vibration and Control 16 (13), 1989–2000. DOI: 10.1177/1077546309350187
- Feliu-Batlle, V., Feliu-Talegon, D., Castillo-Berrio, C. F., Apr. 2017. Improved object detection using a robotic sensing antenna with vibration damping control. Sensors (Basel, Switzerland) 17 (28406449), 852. DOI: 10.3390/s17040852
- Kaneko, M., Kanayama, N., Tsuji, T., 1998. Active antenna for contact sensing. IEEE Transactions on Robotics and Automation 14 (2), 278–291. DOI: 10.1109/70.681246
- Kumar, P., Pratiher, B., Jan. 2020. Position analysis and nonlinear phenomena of flexible manipulator with generic payload mounted on a moving base. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics 234 (2), 408–423. DOI: 10.1177/1464419320901389
- Lu, L., Chen, Z., Yao, B., Wang, Q., 2013. A two-loop performance-oriented tip-tracking control of a linear-motor-driven flexible beam system with experiments. IEEE Transactions on Industrial Electronics 60 (3), 1011–1022. DOI: 10.1109/TIE.2012.2188262
- Meirovitch, L., 1967. Analytical Methods in Vibrations. Macmillan series in applied mechanics. Macmillan.
- Meirovitch, L., 1997. Principles and Techniques of Vibrations. Prentice Hall.
- Mishra, N., Singh, S., Nakra, B. C., Jul. 2015. Dynamic analysis of a single link flexible manipulator using lagrangian-assumed modes approach. 2015 International Conference on Industrial Instrumentation and Control, ICIC 2015, 1144–1149. DOI: 10.1109/IIC.2015.7150920
- Mérida-Calvo, L., Rodríguez, A. S., Ramos, F., Feliu-Batlle, V., 2023. Advanced motor control for improving the trajectory tracking accuracy of a low-cost mobile robot. Machines 11 (1). DOI: 10.3390/machines11010014
- Oñate, E., 2013. Slender plane beams. euler-bernoulli theory. In: Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics: Volume 2. Beams, Plates and Shells. Springer Netherlands, pp. 2–3. DOI: 10.1007/978-1-4020-8743-1
- Russell, R., 1992. Using tactile whiskers to measure surface contours. In: Proceedings 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation. pp. 1295–1299 vol.2. DOI: 10.1109/ROBOT.1992.220070
- Sayegh, M.-A., Daraghma, H., Mekid, S., Bashmal, S., 2022. Review of recent bio-inspired design and manufacturing of whisker tactile sensors. Sensors 22 (7). DOI: 10.3390/s22072705
- Subedi, D., Tyapin, I., Hovland, G., 2020. Review on Modeling and Control of Flexible Link Manipulators. Modeling, Identification and Control 41 (3), 141–163. DOI: 10.4173/mic.2020.3.2
- Tavasoli, A., 2017. Robust adaptive boundary control of a perturbed hybrid euler-bernoulli beam with coupled rigid and flexible motion. International Journal of Control, Automation and Systems 15 (2), 680–688. DOI: 10.1007/s12555-015-0226-5
- Zhu, G., Ge, S., Lee, T., 1997. Variable structure regulation of a flexible arm with a translational base. In: Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 2. pp. 1361–1366 vol.2. DOI: 10.1109/CDC.1997.657649