

Búsqueda de equilibrios de Nash en juegos poblacionales bajo información parcial y su aplicación en juegos de congestión

Martinez-Piazuelo, J.^{a,*}, Ocampo-Martinez, C.^a, Quijano, N.^b

^aDepartamento de Control Automático, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.

^bDepartamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

To cite this article: Martinez-Piazuelo, J., Ocampo-Martinez, C., Quijano, N. 2023. Nash equilibrium seeking in population games under partial information and its application to demand response problems. XLIV Jornadas de Automática 317-322. <https://doi.org/10.17979/spudc.9788497498609.317>

Resumen

En este artículo, consideramos el marco de dinámicas evolutivas y juegos poblacionales. Para una clase de dinámicas evolutivas y una familia de juegos poblacionales contractivos, desarrollamos un método novedoso para la búsqueda distribuida de equilibrios de Nash bajo información parcial respecto a las decisiones de los demás agentes. La principal contribución es que establecemos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica del conjunto de equilibrios de Nash del juego poblacional subyacente. Además, ilustramos nuestros resultados teóricos en una aplicación numérica de un juego de congestión de gran escala.

Palabras clave: Teoría de juegos evolutivos, Optimización, Sistemas distribuidos, Sistemas dinámicos de gran escala, Juegos de congestión.

Nash equilibrium seeking in population games under partial information and its application to congestion games

Abstract

In this article, we take into account the evolutionary dynamics and the population games framework. For a class of evolutionary dynamics and a family of contractive population games, we develop a novel method for distributed Nash equilibrium seeking under partial information regarding the decisions of other agents. The main contribution is that we establish sufficient conditions to ensure the asymptotic stability of the underlying population game's set of Nash equilibria. In addition, we illustrate our theoretical results on a large-scale numerical application of a congestion game.

Keywords: Evolutionary game theory, Optimization, Distributed systems, Large-scale dynamical systems, Congestion games.

1. Introducción

Los juegos poblacionales proporcionan un marco para modelar el comportamiento estratégico de grandes poblaciones de agentes con capacidad de decisión (Hofbauer and Sigmund, 1998; Sandholm, 2010). Dependiendo de los protocolos que utilicen los agentes para actualizar sus estrategias, pueden surgir varias dinámicas evolutivas que nos permiten analizar y predecir el comportamiento esperado de la población. De esta forma, los juegos poblacionales son adecuados para modelar distintos escenarios de toma de decisiones multiagente. Algunos ejem-

plos son asignación dinámica de recursos (Pashaie et al., 2017; Quijano et al., 2017), redes de comunicación inalámbrica (Tembine et al., 2010), respuesta a la demanda (Srikantha and Kundur, 2017) y juegos de congestión Arcaç and Martins (2021), entre otros.

En el contexto considerado, los agentes toman sus decisiones con base en ciertas señales de pago que perciben durante su operación. En general, el pago percibido por cada agente es generado a partir de un mapa causal de las decisiones de todos los demás agentes. Es decir, los procesos de toma de decisión de

*Autor para correspondencia: juan.pablo.martinez.piazuelo@upc.edu
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

los múltiples agentes están acoplados entre sí por medio de las señales de pagos. En aplicaciones prácticas de juegos poblacionales, podemos pensar que las señales de pagos son generadas por una entidad de alto nivel denominada como *proveedor de pagos*. Por ejemplo, en problemas de tráfico vehicular, el proveedor de pagos sería la entidad que proporciona información de tráfico no local a los agentes (Jiang et al., 2015), mientras que en los problemas de respuesta a la demanda, el proveedor de pagos sería la compañía eléctrica que emite señales de coste sobre la demanda agregada del sistema (Srikantha and Kundur, 2017). Una limitación de la teoría disponible sobre juegos poblacionales es que a menudo se supone que las señales de pagos son proporcionadas por una entidad tipo oráculo que tiene información completa sobre las decisiones de todas las poblaciones de agentes. Evidentemente, tal suposición impone dificultades prácticas cuando las múltiples poblaciones están distribuidas geográficamente, o la difusión completa de información pudiera no ser factible. Para hacer frente a estas dificultades, en este trabajo consideramos que cada población tiene asociado su propio proveedor de pagos, y que este último puede observar únicamente las decisiones tomadas por los agentes de su propia población. Es decir, cada proveedor de pagos sólo tiene información parcial sobre las decisiones de toda la sociedad de agentes. No obstante, los proveedores de pagos de las múltiples poblaciones se comunican entre sí a través de una red (posiblemente no completamente conectada) para estimar la información no local relevante. De este modo, el marco considerado generaliza el enfoque convencional basado en un proveedor de pagos tipo oráculo y otorga más flexibilidad al diseño y al ámbito de aplicación de los juegos poblacionales.

Con base en la discusión previa, en este trabajo revisitamos los resultados más recientes en el contexto de juegos poblacionales bajo restricciones de información parcial (Martínez-Piazuelo et al., 2022a), y los aplicamos a un caso de estudio práctico considerando un juego de congestión de gran escala: la coordinación de carga de múltiples vehículos eléctricos. Adicionalmente, en contraste con nuestro trabajo previo en Martínez-Piazuelo et al. (2022a), en el presente artículo planteamos una modificación sobre los protocolos de revisión de los agentes, la cual incorpora un término de saturación que simplifica la aplicación práctica de la teoría. Una saturación similar se considera en Martínez-Piazuelo et al. (2022b), pero no bajo el contexto de juegos poblacionales con información parcial que se considera en este artículo.

El resto de este artículo está organizado como se describe a continuación. En la Sección 2 introducimos los conceptos preliminares del contexto de juegos poblacionales y dinámicas evolutivas y formulamos el problema a resolver. En la Sección 3 presentamos el método de solución al problema planteado. En la Sección 4 ilustramos la aplicación de la teoría presentada a un caso de estudio en el contexto de juegos de congestión de gran escala, y considerando el ejemplo particular de coordinación de carga de vehículos eléctricos. Finalmente, la Sección 5 concluye el artículo.

2. Definición del problema

En esta sección introducimos los conceptos de juego poblacional y dinámicas evolutivas, presentamos la definición de

equilibrio de Nash como solución del juego, y establecemos formalmente el problema a resolver: alcanzar un equilibrio de Nash en juegos poblacionales bajo información parcial.

2.1. Juegos Poblacionales y Dinámicas Evolutivas

Consideremos una sociedad con $P \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ poblaciones de agentes estratégicos con capacidad de decisión. Empleamos $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, P\}$ para denotar el conjunto que indexa las poblaciones y, para cada población $k \in \mathcal{P}$, decimos que $N^k \in \mathbb{Z}_{\gg 1}$ es el número total de agentes que pertenecen a la población k (aquí suponemos que N^k es grande y constante en el tiempo). Adicionalmente, usamos $\mathcal{S}^k = \{1, 2, \dots, n^k\}$, con $n^k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, para denotar el conjunto de estrategias disponibles para los agentes de la población k y, para cada $i \in \mathcal{S}^k$, decimos que $x_i^k \in [0, 1]$ es la proporción de agentes de la población k que eligen la estrategia i . Es decir, $N^k x_i^k$ es el número total de agentes que escogen la i -ésima estrategia en la población k . De lo anterior se deduce que la distribución estratégica de la población k viene dada por el vector $\mathbf{x}^k = \text{col}((x_i^k)_{i \in \mathcal{S}^k}) \in \Delta^k := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n^k} : \mathbf{1}_{n^k}^\top \mathbf{y} = 1\}$, mientras que la distribución estratégica de toda la sociedad está dada por $\mathbf{x} = \text{col}((\mathbf{x}^k)_{k \in \mathcal{P}}) \in \Delta := \prod_{k \in \mathcal{P}} \Delta^k = \Delta^1 \times \Delta^2 \times \dots \times \Delta^P$. Es decir, Δ^k es el conjunto de todas las posibles distribuciones estratégicas de la población $k \in \mathcal{P}$, mientras que Δ es el conjunto de todas las posibles distribuciones estratégicas de toda la sociedad.

En el marco considerado, la distribución estratégica de cada población evoluciona con el tiempo según el proceso de toma de decisiones estocástico que se describe a continuación.

Proceso de toma de decisiones. Durante su operación, cada agente revisa su estrategia en instantes de tiempo aleatorios que siguen una distribución exponencial con tasa $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Si en un instante de tiempo τ un agente con la estrategia $i \in \mathcal{S}^k$ en la población $k \in \mathcal{P}$ recibe una oportunidad de revisión, este agente cambia a la estrategia $j \in \mathcal{S}^k \setminus \{i\}$ con probabilidad $\min\{\max\{p_j^k(\tau) - p_i^k(\tau), 0\}, \alpha^k\}/R$, donde $p_i^k(\tau) \in \mathbb{R}$ es el pago percibido por los agentes con la estrategia $i \in \mathcal{S}^k$ en la población k en el instante τ , y $\alpha^k \in \mathbb{R}_{>0}$ es una constante de saturación que garantiza que $R \geq (n^k - 1)\alpha^k$, para todo $k \in \mathcal{P}$. Por otro lado, dicho agente permanece en la estrategia i con probabilidad $1 - \sum_{j \in \mathcal{S}^k} \min\{\max\{p_j^k(\tau) - p_i^k(\tau), 0\}, \alpha^k\}/R$. (note que la saturación impuesta por α^k garantiza que las probabilidades están bien definidas para todo tiempo τ y todo R).

Con base en el proceso de toma de decisiones descrito anteriormente, y dado que el número de agentes dentro de cada población es grande, la evolución temporal de la distribución estratégica de la sociedad puede aproximarse bien (véase (Sandholm, 2010, Capítulo 10) o Park et al. (2019)) mediante un modelo de dinámicas evolutivas (EDM, por sus siglas en inglés), tal como se define a continuación.

Definición 1. El EDM que describe la evolución temporal de la distribución estratégica $\mathbf{x}(t)$ está dado por

$$\rho_{ij}^k(t) = \min\{\max\{p_j^k(t) - p_i^k(t), 0\}, \alpha^k\} \quad (1a)$$

$$\dot{x}_i^k(t) = \sum_{j \in \mathcal{S}^k} x_j^k(t) \rho_{ji}^k(t) - x_i^k(t) \rho_{ij}^k(t), \quad (1b)$$

para todo $i, j \in \mathcal{S}^k$ y todo $k \in \mathcal{P}$, con $\mathbf{x}(0) \in \Delta$. Aquí, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el índice de tiempo continuo, $\mathbf{x}(t)$ es el valor de \mathbf{x} en el tiempo t , y $p_i^k(t) \in \mathbb{R}$ es el pago percibido por los agentes de la población k que eligen la estrategia i en el tiempo t .

Suposición 1. Cada población $k \in \mathcal{P}$ tiene asociada una entidad de alto nivel que informa a cada agente de la población el pago correspondiente a su estrategia escogida. Esta entidad de alto nivel se denomina como el proveedor de pagos de la población k .

Basándonos en la Definición 1 y la Suposición 1, el EDM puede considerarse como un sistema dinámico en tiempo continuo cuya entrada es el vector de pagos $\mathbf{p}(t) = \text{col}(\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^P(t)) \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathbf{p}^k(t) = \text{col}(p_1^k(t), p_2^k(t), \dots, p_{n^k}^k(t)) \in \mathbb{R}^{n^k}$, para todo $k \in \mathcal{P}$. En general, el vector $\mathbf{p}(t)$ es generado por el proveedor de pagos mediante un mapa causal a partir de la distribución estratégica de la sociedad, i.e., $\mathbf{x}(t)$ (Park et al., 2019).

A lo largo de este artículo consideramos a cada población $k \in \mathcal{P}$ como un (macro) jugador que participa en un juego con las demás poblaciones. Más concretamente, consideramos el escenario en el que cada población $k \in \mathcal{P}$ busca alcanzar una distribución estratégica $\mathbf{x}^k \in \arg \max_{\mathbf{x}^k \in \Delta^k} \psi^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{-k})$, donde $\mathbf{x}^{-k} = \text{col}(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{x}^{k+1}, \dots, \mathbf{x}^P)$ denota la distribución estratégica de todas las poblaciones distintas de k , y $\psi^k : \mathbb{R}_{\geq 0}^{n^k} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-n^k} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de utilidad local de la población k . Así pues, el juego poblacional considerado puede definirse en forma normal como $G = (\mathcal{P}, \{\Delta^k\}_{k \in \mathcal{P}}, \{\psi^k(\cdot)\}_{k \in \mathcal{P}})$. La cuestión clave a tener en cuenta, sin embargo, es que las entidades que toman las decisiones en el juego G no son las poblaciones en sí, sino los agentes que componen cada población.

Para el resto de este artículo imponemos la siguiente suposición sobre las funciones de utilidad del juego G .

Suposición 2. Para todo $k \in \mathcal{P}$, se cumple que:

1. $\psi^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{-k})$ es cóncava y dos veces continuamente diferenciable respecto a \mathbf{x}^k .
2. $\nabla_{\mathbf{x}^k} \psi^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{-k}) = \mathbf{g}^k(\mathbf{x}^k) - \mathbf{C}^{k\top} \mathbf{C} \mathbf{x}$, donde la función $\mathbf{g}^k : \mathbb{R}_{\geq 0}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}^{n^k}$ es contractiva en el sentido de que $(\mathbf{x}^k - \mathbf{y}^k)^\top (\mathbf{g}^k(\mathbf{x}^k) - \mathbf{g}^k(\mathbf{y}^k)) \leq 0$, para todo $\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n^k}$, y la matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{d \times n}$ es de la forma $\mathbf{C} = [\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{C}^P]$, con $\mathbf{C}^k \in \mathbb{R}^{d \times n^k}$ y $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Además, tanto $\mathbf{g}^k(\cdot)$ como \mathbf{C}^k son conocidas por el proveedor de pagos de la población k .

Vale la pena destacar que los juegos poblacionales que satisfacen la Suposición 2 surgen en varios escenarios. A continuación presentamos un ejemplo relevante para múltiples aplicaciones de ingeniería.

Ejemplo 1 (Juegos potenciales cóncavos cuadráticos).

Consideremos que cada población $k \in \mathcal{P}$ tiene una función de utilidad de la forma

$$\psi^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{-k}) = \mathbf{b}^{k\top} \mathbf{x}^k - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica y positiva semidefinida, y $\mathbf{b}^k \in \mathbb{R}^{n^k}$ es un vector n^k -dimensional arbitrario. Por la descomposición espectral de \mathbf{A} se tiene que $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$, donde $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^n$ es la matriz diagonal conformada por los valores propios de \mathbf{A} , y \mathbf{U} es la matriz cuyas columnas son los vectores propios correspondientes. Por ende, definiendo $\mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{U}$, se obtiene que $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\top \mathbf{C}$, de manera que $\nabla_{\mathbf{x}^k} \psi^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{-k}) = \mathbf{b}^k - \mathbf{C}^{k\top} \mathbf{C} \mathbf{x}$, donde $\mathbf{C}^k \in \mathbb{R}^{n^k \times n}$ es el k -ésimo bloque de \mathbf{C} . Así, la Suposición 2 se cumple con $\mathbf{g}^k(\mathbf{x}^k) = \mathbf{b}^k$ y $d = n$.

2.2. Solución del juego: equilibrios de Nash

Basándonos en el marco considerado, el problema técnico que estudiamos en este trabajo es la convergencia evolutiva a un equilibrio de Nash (NE, por sus siglas en inglés) del juego G , tal y como se define a continuación.

Definición 2. Un NE del juego G es una distribución estratégica $\mathbf{x}^* = \text{col}(\mathbf{x}^{1*}, \mathbf{x}^{2*}, \dots, \mathbf{x}^{P*}) \in \Delta$ tal que $\psi^k(\mathbf{x}^{k*}, \mathbf{x}^{-k*}) \geq \psi^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{-k*})$, para todo $\mathbf{x}^k \in \Delta^k$ y todo $k \in \mathcal{P}$. Aquí, $\mathbf{x}^{-k*} = \text{col}(\mathbf{x}^{1*}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)*}, \mathbf{x}^{(k+1)*}, \dots, \mathbf{x}^{P*})$. Si \mathbf{x}^* es un NE del juego G , entonces decimos que $\mathbf{x}^* \in \text{NE}(G)$.

Por la Suposición 2, se sostiene que un NE del juego G existe (Martínez-Piazuelo et al., 2022a, Lema 1). Además, según el EDM, la única forma de dirigir las distribuciones estratégicas $\mathbf{x}^k(t)$ hacia un NE del juego G es a través de las señales de pago $\mathbf{p}^k(t)$. Por lo tanto, la tarea consiste en diseñar proveedores de pago adecuados para garantizar la convergencia evolutiva de la distribución estratégica $\mathbf{x}(t)$ hacia un NE del juego G .

2.3. Búsqueda de un equilibrio de Nash bajo información parcial

En este artículo, consideramos que los múltiples proveedores de pagos se comunican a través de una red invariante en el tiempo y (posiblemente) no completa. Más formalmente, decimos que $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathbf{W})$ es el grafo dirigido de la red, donde \mathcal{P} es el conjunto de nodos (correspondientes a los proveedores de pagos de las múltiples poblaciones), $\mathcal{L} \subseteq \{(k, \ell) : k, \ell \in \mathcal{P}\}$ es el conjunto de enlaces de comunicación, y $\mathbf{W} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{P \times P}$ es la correspondiente matriz de adyacencia ponderada. Aquí, $w_{k\ell} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ denota el (k, ℓ) -ésimo elemento de \mathbf{W} , y se supone que $w_{k\ell} > 0$ si y sólo si el nodo k puede recibir información del nodo ℓ (por convención, $w_{kk} = 0$). Además, decimos que $\mathcal{N}^k = \{\ell \in \mathcal{P} : w_{k\ell} > 0\}$ es el conjunto de vecinos internos del nodo k , para todo $k \in \mathcal{P}$, e imponemos la siguiente suposición.

Suposición 3. El grafo \mathcal{G} está fuertemente conectado y es balanceado por pesos. Además, el proveedor de pagos de cada población $k \in \mathcal{P}$ conoce el número total de poblaciones P , así como la k -ésima fila y columna de \mathbf{W} .

El esquema considerado se sintetiza en la Figura 1. Es importante resaltar que los proveedores de pagos pueden observar directamente la distribución estratégica de su población asociada, pero no tienen acceso directo a la distribución estratégica de ninguna otra población. De esta forma, los proveedores de pagos sólo tienen acceso a información parcial respecto a la distribución estratégica de la sociedad. Por lo tanto, para juegos

como el del Ejemplo 1, donde las funciones de utilidad dependen de la distribución estratégica de toda la sociedad, los proveedores de pagos deben estimar la información no local por medio de la comunicación de ciertas variables auxiliares $\mathbf{q}^k(t)$ (definidas en la Sección 3) a través de la red. El problema a resolver radica entonces en diseñar los proveedores de pagos para garantizar la estabilidad asintótica del conjunto de equilibrios de Nash del juego, considerando las dinámicas evolutivas de la sociedad y las restricciones de información parcial impuestas. En resumen, el problema considerado es el definido a continuación.

Definición 3. *Considere un juego poblacional G y una sociedad de agentes caracterizada por el EDM de la Definición 1. El problema de búsqueda de un NE consiste en diseñar los proveedores de pagos de todas las poblaciones de manera que el conjunto $\text{NE}(G)$ sea asintóticamente estable bajo las dinámicas evolutivas de la sociedad.*

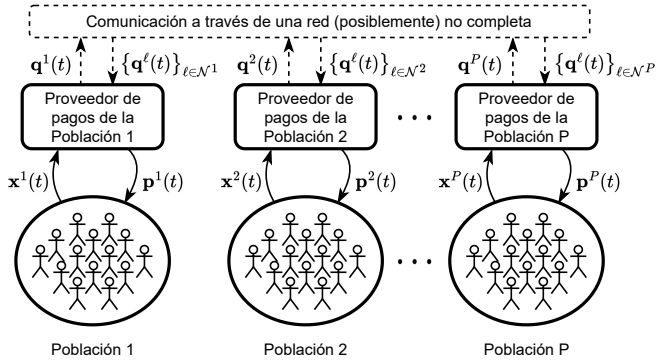


Figura 1: Esquema considerado. Note que los proveedores de pagos intercambian ciertas variables auxiliares $\mathbf{q}^k(t)$ (definidas en la Sección 3) a través de la comunicación por la red.

En la siguiente sección procedemos a describir el mecanismo distribuido propuesto para computar los pagos y garantizar la convergencia asintótica de la sociedad a un equilibrio de Nash del juego poblacional subyacente.

3. Método Propuesto

En este artículo, formulamos el proveedor de pagos de cada población $k \in \mathcal{P}$ como un sistema dinámico en tiempo continuo cuya salida $\mathbf{p}^k(t)$ corresponde a una estimación de $\nabla_{\mathbf{x}^k} \psi^k(\mathbf{x}^k(t), \mathbf{x}^{-k}(t))$. Además, para hacer frente a la restricción de información parcial considerada, en este trabajo diseñamos los proveedores de pagos basados en el algoritmo de consenso proporcional integral (Freeman et al., 2006). Más concretamente, el proveedor de pagos de cada población $k \in \mathcal{P}$ está caracte-

rizado por las dinámicas

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^k(t) = & -\mathbf{q}_1^k(t) - \sum_{\ell \in \mathcal{P}} w_{k\ell} (\mathbf{q}_1^k(t) - \mathbf{q}_1^\ell(t)) \\ & - \sum_{\ell \in \mathcal{P}} w_{\ell k} (\mathbf{q}_2^k(t) - \mathbf{q}_2^\ell(t)) + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \mathbf{C}^k \mathbf{x}^k(t), \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_2^k(t) = \sum_{\ell \in \mathcal{P}} w_{k\ell} (\mathbf{q}_1^\ell(t) - \mathbf{q}_1^k(t)), \quad (2b)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^k(t) = \frac{1}{\beta} \mathbf{g}^k(\mathbf{x}^k(t)) - \frac{P}{\sqrt{\beta}} \mathbf{C}^{k\top} \mathbf{q}_1^k(t), \quad (2c)$$

donde $\mathbf{q}_1^k(t), \mathbf{q}_2^k(t) \in \mathbb{R}^d$, y $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ es un parámetro de escalamiento¹ común para todas las poblaciones. En este modelo, el intercambio de información entre los distintos proveedores de pagos comprende los vectores $\mathbf{q}^k(t) = \text{col}(\mathbf{q}_1^k(t), \mathbf{q}_2^k(t)) \in \mathbb{R}^{2d}$, y dicho intercambio de información se rige por el grafo \mathcal{G} (véase la Figura 1). Por lo tanto, bajo las Suposiciones 1, 2, y 3, las dinámicas en (2) pueden implementarse localmente por cada proveedor de pagos.

Es importante destacar que la colección de las dinámicas de todos los proveedores de pagos es un sistema dinámico en tiempo continuo con entrada $\mathbf{x}(t)$ y salida $\mathbf{p}(t)$. Por lo tanto, la sociedad de agentes, caracterizada por (1), y los proveedores de pagos, caracterizados por (2), están interconectados en un lazo cerrado: la sociedad recibe $\mathbf{p}(t)$ y retorna $\mathbf{x}(t)$, y los proveedores de pagos reciben $\mathbf{x}(t)$ y retornan $\mathbf{p}(t)$ (ver Figura 1).

Bajo las Suposiciones 1, 2, y 3, los proveedores de pagos caracterizados por las dinámicas en (2) resuelven el problema de la Definición 3. Este resultado se establece formalmente en el Teorema 1, adaptado de (Martínez-Piazuelo et al., 2022a, Teorema 1).

Teorema 1. *Considere un juego poblacional G , una sociedad de agentes caracterizada por el EDM de la Definición 1, y un proveedor de pagos caracterizado por (2), para cada población $k \in \mathcal{P}$. Si las Suposiciones 1, 2, y 3 se cumplen, entonces el conjunto de equilibrios de Nash del juego G es asintóticamente estable bajo las dinámicas consideradas.*

Prueba: La demostración es inmediata siguiendo los argumentos en (Martínez-Piazuelo et al., 2022a, Sección III).

4. Ejemplo de aplicación: juego de congestión

Los juegos de congestión permiten abstraer múltiples aplicaciones de ingeniería relacionadas con la asignación dinámica de recursos. En este tipo de juegos se tiene un conjunto de poblaciones \mathcal{P} y un conjunto de posibles selecciones/estrategias $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, d\}$, con $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Cada elemento en \mathcal{S} tiene asociado un costo de congestión que incrementa con la cantidad de agentes que seleccionan dicho elemento. El objetivo de cada agente es entonces escoger un elemento de \mathcal{S} que corresponda con las preferencias/capacidades de su propia población y que minimice el costo de congestión, i.e., escoger un elemento que maximice la utilidad de su población. Más formalmente, decimos que cada población $k \in \mathcal{P}$ tiene asociado un subconjunto de

¹El parámetro β permite escalar el orden de magnitud de las variables y así mejorar la robustez numérica del método en caso de que sea necesario.

estrategias $\mathcal{S}^k \subseteq \mathcal{S}$, tal que $2 \leq n^k \leq d$. Así, empleamos \mathbf{G}^k para definir un grafo bipartito entre la población k y el subconjunto de \mathcal{S} que le corresponde. Por ejemplo, si hay un total de $d = 3$ estrategias y los agentes de la población k sólo pueden elegir las estrategias 1 y 3, entonces $\mathbf{G}^k = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]$, donde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ son la primera y tercera columna de la matriz identidad 3×3 , respectivamente. Por otra parte, usamos $\mathcal{A}^k = \{1, 2, \dots, N^k\}$ para denotar el conjunto que indexa los agentes de la población k , y empleamos $\mathbf{s}_a^k \in \{0, 1\}^{n^k}$ para representar la estrategia seleccionada del agente $a \in \mathcal{A}^k$ (es decir, si el agente a elige la estrategia $i \in \mathcal{S}^k$, entonces \mathbf{s}_a^k es la columna i -ésima de la matriz identidad $n^k \times n^k$). Finalmente, decimos que cada opción en $i \in \mathcal{S}$ tiene asociado un coeficiente de congestión $h_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y empleamos la matriz diagonal $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ para sintetizar los coeficientes de congestión. Con base en este planteamiento, los costos de congestión de las estrategias en \mathcal{S} están dados por

$$\mathbf{H} \sum_{k \in \mathcal{P}} \mathbf{G}^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}^k} \mathbf{s}_a^k \right).$$

De esta forma, el objetivo de la población k está capturado por

$$\min_{\{\mathbf{s}_a^k\}_{a \in \mathcal{A}^k}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}^k} \mathbf{s}_a^k \right)^\top \mathbf{G}^{k\top} \mathbf{H} \sum_{k \in \mathcal{P}} \mathbf{G}^k \left(\sum_{a \in \mathcal{A}^k} \mathbf{s}_a^k \right), \quad (3)$$

i.e., el objetivo es minimizar el costo de congestión percibido por los agentes de la población k . Cabe resaltar que (3) es un problema de optimización entera, puesto que las variables de decisión $\{\mathbf{s}_a^k\}_{a \in \mathcal{A}^k}$ corresponden a vectores con elementos binarios. Además, la función objetivo en (3) está acoplada con las decisiones de las demás poblaciones a través de los costos de congestión. Por lo tanto, resolver (3) simultáneamente para todas las poblaciones es un reto difícil cuando el número de agentes es grande.

Para resolver (3) empleando las dinámicas evolutivas estudiadas en este artículo, note que $N^k \mathbf{x}^k = \sum_{a \in \mathcal{A}^k} \mathbf{s}_a^k$, y que el problema (3) puede ser reescrito equivalentemente para cada población $k \in \mathcal{P}$ como

$$\min_{\mathbf{x}^k \in \Delta^k} \left(N^k \mathbf{x}^k \right)^\top \mathbf{G}^{k\top} \mathbf{H} \sum_{k \in \mathcal{P}} \mathbf{G}^k \left(N^k \mathbf{x}^k \right).$$

Adicionalmente, definiendo $\mathbf{C}^k = N^k \sqrt{\mathbf{H}} \mathbf{G}^k$, y reemplazando \min por \max , obtenemos que (3) se puede reescribir equivalentemente para cada población $k \in \mathcal{P}$ como

$$\max_{\mathbf{x}^k \in \Delta^k} \psi^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{-k}) := -\mathbf{x}^{k\top} \mathbf{C}^{k\top} \sum_{k \in \mathcal{P}} \mathbf{C}^k \mathbf{x}^k. \quad (4)$$

En este punto se puede comprobar que la función de utilidad $\psi^k(\cdot, \cdot)$ definida en (4) satisface la Suposición 2 con $\mathbf{g}^k(\mathbf{x}^k) = -\mathbf{C}^{k\top} \mathbf{C}^k \mathbf{x}^k$. Por lo tanto, los resultados de la Sección 3 pueden emplearse para resolver juegos de congestión de la forma (3), y bajo el escenario en el que los proveedores de pagos de las múltiples poblaciones están sujetos a restricciones de información parcial. A continuación presentamos un ejemplo de aplicación práctica.

Coordinación de carga de vehículos eléctricos

Suponga que un conjunto de poblaciones de vehículos eléctricos buscan coordinar sus procesos de carga para reducir

el impacto sobre la red de distribución eléctrica. Más precisamente, cada vehículo busca seleccionar un intervalo de tiempo durante el cual cargará su batería a una potencia constante dada, y el objetivo de cada vehículo es seleccionar un intervalo de tiempo que minimice el costo de congestión. Note que esto es una decisión de alto nivel, la cual se podría integrar con un segundo proceso de optimización en el que se computen potencias de carga variables entre los vehículos que han seleccionado el mismo intervalo de tiempo. Es decir, en un primer nivel se resuelve el problema de congestión para repartir el conjunto (grande) de vehículos entre los intervalos de tiempo, y posteriormente para cada grupo de vehículos que seleccionan el mismo intervalo de tiempo se podría resolver un segundo problema de optimización (empleando cualquier método apropiado) que compute potencias de carga variables, y considere por ejemplo los objetivos individuales de cada vehículo, e.g., costos de degradación de batería y precio de la energía.

En este contexto, el conjunto \mathcal{P} representa las poblaciones de vehículos, los agentes que toman decisiones corresponden a los controladores de carga de los vehículos, y \mathcal{S} representa los posibles intervalos de tiempo entre los cuales los agentes pueden escoger (por simplicidad tomamos $\mathcal{S}^k = \mathcal{S}$, para todo $k \in \mathcal{P}$). Adicionalmente, suponga que las distintas poblaciones de vehículos están distanciadas geográficamente y por ende no es práctico implementar un proveedor de pagos global para toda la sociedad. Bajo este supuesto resulta atractivo emplear el método distribuido de la Sección 3.

A manera de ilustración, consideramos el caso de cuatro poblaciones de vehículos y tres posibles franjas de carga, i.e., $P = 4$ y $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$. Para cada población $k \in \mathcal{P}$, asumimos un número aleatorio de vehículos N^k distribuido uniformemente entre 1000 y 2000. Adicionalmente, suponemos que los cuatro proveedores de pagos se comunican entre sí por medio de una red dada por un grafo de ciclo dirigido con pesos unitarios. Además, asumimos que los tiempos de revisión de las estrategias están caracterizados por relojes de Poisson con $R = 1 \text{ s}^{-1}$. Así mismo, como parámetros tomamos $\alpha^k = R/2$, para todo k , y $\beta = \max_{k \in \mathcal{P}} (N^k)^2$. Finalmente, los coeficientes de congestión h_1, h_2, h_3 son generados aleatoriamente con base en una distribución uniforme entre 0 y 10.

En la Figura 2 se evidencia la evolución temporal de la métrica de desempeño escogida

$$d_{\mathbf{x}^*}(t) = \frac{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|_2}{\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\|_2},$$

la cual corresponde a la distancia Euclidiana (normalizada) al NE del juego subyacente. En la gráfica superior de la Figura 2 se considera el valor esperado del comportamiento de la sociedad (dicho valor esperado se obtiene integrando numéricamente las ecuaciones diferenciales en (1) y (2)). Por otro lado, en la gráfica inferior de la Figura 2 se presenta el comportamiento exacto de la sociedad finita de agentes para la instancia considerada (este comportamiento se obtiene simulando explícitamente el proceso de toma de decisiones de la Sección 2.1 e integrando numéricamente la ecuación diferencial en (2)). En ambos casos se evidencia la convergencia asintótica al NE del juego poblacional subyacente. Por otro lado, la Figura 3 evidencia la evolución temporal de la distribución estratégica de una población particular seleccionada ($k = 1$). Aquí se puede evidenciar que

la población efectivamente llega a un punto de equilibrio, y que la evolución de la población finita corresponde cercanamente al valor esperado dado por el EDM de la Definición 1.

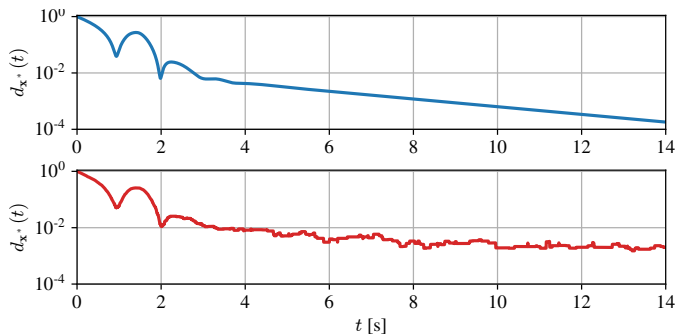


Figura 2: Resultados de simulación numérica para la instancia considerada. La gráfica superior considera el comportamiento en valor esperado de la sociedad dado por el EDM de la Definición 1, mientras que la gráfica inferior corresponde a la simulación explícita del proceso de toma de decisiones de la Sección 2.1. Para ambas simulaciones se emplea el mismo $\mathbf{x}(0) \in \Delta$ generado aleatoriamente y, sin pérdida de generalidad, se establece $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}_{2Pd}$.

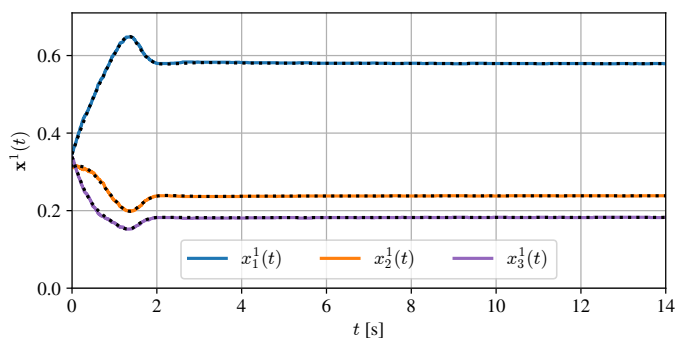


Figura 3: Evolución temporal de la distribución estratégica de la población $k = 1$. Las líneas sólidas corresponden a las proporciones exactas de agentes seleccionando cada una de las estrategias a lo largo del tiempo, mientras que las líneas punteadas presentan el valor esperado (con base en el EDM) de las proporciones correspondientes.

5. Conclusiones

En este artículo se ha revisitado el escenario de juegos poblacionales bajo restricciones de información parcial, y se han aplicado los resultados disponibles a un caso de estudio en el contexto de juegos de congestión de gran escala: la coordinación de carga de vehículos eléctricos. Adicionalmente, se ha incorporado una saturación a los protocolos de revisión de los agentes de manera que se pueda simplificar la aplicación práctica del método. Los trabajos futuros deberían extender los resultados a juegos más generales así como a otras dinámicas evolutivas y a redes de comunicación variantes en el tiempo.

Agradecimientos

Juan Martínez-Piazuelo agradece a la Universitat Politècnica de Catalunya y al Banco Santander, España, por la financiación de su beca FPI-UPC. Adicionalmente, los autores agradecen a los proyectos PID2020-115905RB-C21 (L-BEST) y TED2021-129927B-I00 (MASHED), financiados por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033 y por la European Union Next GenerationEU/PRTR, por financiar esta investigación. Finalmente, Nicanor Quijano agradece el proyecto BPIN 2021000100499, de la asignación para CTeI-SGR y Minciencias.

Referencias

- Arcak, M., Martins, N. C., 2021. Dissipativity tools for convergence to Nash equilibria in population games. *IEEE Transactions on Control of Network Systems* 8 (1), 39–50.
DOI: 10.1109/TCNS.2020.3029990
- Freeman, R. A., Yang, P., Lynch, K. M., 2006. Stability and convergence properties of dynamic average consensus estimators. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 338–343.
DOI: 10.1109/CDC.2006.377078
- Hofbauer, J., Sigmund, K., 1998. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press.
- Jiang, X., Ji, Y., Du, M., Deng, W., 2015. A study of driver's route choice behavior based on evolutionary game theory. *Computational Intelligence and Neuroscience* 2014, 47–47.
- Martínez-Piazuelo, J., Ocampo-Martínez, C., Quijano, N., 2022a. On distributed Nash equilibrium seeking in a class of contractive population games. *IEEE Control Systems Letters* 6, 2972–2977.
DOI: 10.1109/LCSYS.2022.3182625
- Martínez-Piazuelo, J., Quijano, N., Ocampo-Martínez, C., 2022b. Nash equilibrium seeking in full-potential population games under capacity and migration constraints. *Automatica* 141, 110285.
DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110285
- Park, S., Martins, N. C., Shamma, J. S., 2019. From population games to payoff dynamics models: A passivity-based approach. In: *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. pp. 6584–6601.
DOI: 10.1109/CDC40024.2019.9029756
- Pashaie, A., Pavel, L., Damaren, C. J., 2017. A population game approach for dynamic resource allocation problems. *International Journal of Control* 90 (9), 1957–1972.
- Quijano, N., Ocampo-Martínez, C., Barreiro-Gómez, J., Obando, G., Pantoja, A., Mojica-Nava, E., 2017. The role of population games and evolutionary dynamics in distributed control systems: The advantages of evolutionary game theory. *IEEE Control Systems Magazine* 37 (1), 70–97.
- Sandholm, W. H., 2010. *Population games and evolutionary dynamics*. MIT Press.
- Srikantha, P., Kundur, D., 2017. Resilient distributed real-time demand response via population games. *IEEE Transactions on Smart Grid* 8 (6), 2532–2543.
DOI: 10.1109/TSG.2016.2526651
- Tembine, H., Altman, E., El-Azouzi, R., Hayel, Y., 2010. Evolutionary games in wireless networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* 40 (3), 634–646.
DOI: 10.1109/TSMCB.2009.2034631