

Sensibilidad del Predictor de Smith respecto de pequeñas desviaciones en la identificación del retardo: un enfoque gráfico

Gonzalo, A.^a, Romeo, A.^{b,*}

^aEscuela de Ingeniería y Arquitectura, Universidad de Zaragoza, C/ María de Luna, nº3, 50018, Zaragoza, España.

^bDepartamento de Informática e Ingeniería de Sistemas, Universidad de Zaragoza, C/ María de Luna, nº1, 50018, Zaragoza, España.

To cite this article: Gonzalo, A., Romeo, A. 2023. Sensitivity of Smith Predictor Performance to time-delay estimation error: a graphical approach. XLIV Jornadas de Automática, 311-316. <https://doi.org/10.17979/spudc.9788497498609.311>

Resumen

Algunas de las técnicas más empleadas en el control de sistemas con retardos puros incorporan un modelo de la planta con la finalidad de cancelar su dinámica. En condiciones ideales (esto es, con el modelo de la planta perfectamente identificado), dichas técnicas permiten obtener buenas prestaciones de control. En la presente contribución se analiza el impacto que tienen los pequeños errores en la estimación del retardo sobre las prestaciones del control basado en el Predictor de Smith (PS). El análisis, que se ceñirá a las condiciones de estabilidad, se basará en la aplicación del criterio de Nyquist, empleando por consiguiente un razonamiento eminentemente gráfico. Se abarcará una casuística de sistemas con retraso puro que incorporará las dinámicas más comunes de primer y segundo orden. Para cada caso de estudio, se analizará su comportamiento en condiciones ideales (con el retardo y la dinámica de la planta perfectamente identificados), para analizar a continuación el impacto que supone en estabilidad la introducción de una pequeña desviación en la identificación del retardo. En una mayoría de casos, es posible formalizar las condiciones de estabilidad como una restricción sobre las ya existentes en condiciones ideales. En la contribución se reflexionará acerca de la aplicabilidad de dichas restricciones a los diversos sistemas bajo estudio.

Palabras clave: Sistemas con retardos, Identificación con fines de control, Sistemas lineales.

Sensitivity of Smith Predictor Performance to small time-delay estimation errors: a graphical approach

Abstract

The most used techniques for controlling dead time systems, take into account the plant model in order to cancel its dynamics. In ideal conditions (i.e. using a perfect plant model), these techniques provide good control performances. In this work we analyze the sensitivity of Smith Predictor Performance to small time-delay estimation errors. Our analysis will be based on the Nyquist stability criterion, reasoning consequently in a graphical fashion. We will cover a set of dead time systems that include common first and second order dynamics. For each of them, we will compare the stability conditions for the ideal controller case, with the obtained assuming small time-delay estimation errors. For most cases, it is possible to deduce stability conditions based on the time-delay magnitude, its estimation error and system time constants. The applicability of these stability conditions will be discussed.

Keywords: Systems with time-delays, Identification for control, Linear systems.

1. Introducción

A mediados del S. XX O.J. Smith (Smith, 1957) propuso una técnica de control de sistemas con retardos, que incorporaba un modelo de la planta en el bucle de realimentación interno

(Figura 1). La principal ventaja de esta técnica, denominada como *Predictor de Smith (PS)*, es la expulsión efectiva del retardo de la ecuación característica del sistema en bucle cerrado, convirtiendo el problema de diseño del control para un sistema

*Autor para correspondencia: romeo@unizar.es
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

con retardos en otro más sencillo, en el que el control se diseña sin tener en cuenta el retardo.

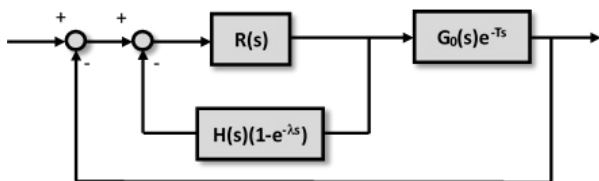


Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema con retraso puro controlado por medio del Predictor de Smith.

Tomando como punto de partida la Figura 1, Nótese que en el caso de que la predicción se base en una estimación perfecta del modelo de la planta, tanto en lo concerniente al retardo ($\lambda = T$), como en lo concerniente a la dinámica ajena al mismo ($H(s) = G_0(s)$), el modelo del sistema global quedará como: $F(s) = (R(s)G_0(s))/(1 + R(s)G_0(s))e^{-Ts}$, lo que supone *de facto* la expulsión del retardo del bucle de control. El cálculo del corrector primario $R(s)$ podrá por consiguiente venir determinado por la dinámica deseada y por la dinámica de la planta ajena al retardo.

Desde su aparición, diferentes variaciones sobre la versión primigenia del PS han puesto el foco en diversos aspectos del control, como su robustez ante perturbaciones (Watanabe and Ito, 1981), (Huang et al., 1990), su simplicidad de parametrizado (Hägglund, 1996), su aplicación a procesos inestables (Astrom et al., 1994), (Zhang and Sun, 1996), además de variaciones para sistemas multivariables y para el dominio discreto (Normey-Rico and Camacho, 2007).

Dado que el PS incorpora un modelo de la planta con la finalidad de cancelar su dinámica, sus prestaciones dependen fuertemente de la bondad de su estimación. Esta cuestión ha sido abordada por diferentes autores:

En (Palmor and Powers, 1985) se analiza la estabilidad práctica del PS para sistemas internamente estables, utilizando un enfoque basado en el criterio de estabilidad de Nyquist. Para ello, utiliza la función de transferencia de bucle cerrado del caso ideal (es decir: suponiendo una identificación de la planta perfecta) y de la llamada "función de ignorancia", que recoge los errores en la estimación de la planta, tanto en lo relativo al retardo, como en lo relativo a la dinámica ajena al mismo.

En (Michiels and Niculescu, 2014) se obtiene la condición necesaria para asegurar la estabilidad práctica del PS, para sistemas internamente estables ante pequeños errores en la identificación del retardo de la planta. El razonamiento está basado en el espectro esencial de las soluciones de la ecuación característica del sistema. En el mismo trabajo se establece también la condición suficiente para la estabilidad, mostrando que, incluso para aquellos sistemas que cumplen la condición necesaria, existen valores suficientemente grandes del retardo, para los que un error significativamente importante en su estimación comporta inestabilidad.

En (Hajdu and Insperger, 2014) se muestra mediante *diagramas de estabilidad* (Stépán, 1989), la dependencia de la estabilidad del PS respecto de errores en la identificación de diferentes parámetros de una planta de 2º orden, desde los parámetros de $R(s)$, hasta los parámetros de $G_0(s)$, pasando por el retardo T . La obtención de dichos diagramas está basada en las

fórmulas de Stépán.

En el presente trabajo, se extiende el análisis basado en el criterio de estabilidad de Nyquist realizado en (Palmor and Powers, 1985), corroborando las condiciones necesarias allí establecidas para la estabilidad práctica, y estableciendo la condición suficiente para la estabilidad del PS respecto de pequeñas desviaciones en la estimación del retardo para diferentes casos para los que, debido a su condición de sistemas estrictamente propios, cumplen siempre la condición necesaria. A diferencia de los trabajos realizados en (Michiels and Niculescu, 2014) y en (Hajdu and Insperger, 2014), la argumentación empleada en la obtención de las expresiones que establecen la condición suficiente de estabilidad es eminentemente gráfica.

1.1. Metodología de estudio

Se supondrá en todo momento sistemas dinámicos lineales e invariantes estables con retardos puros estáticos, que vienen descritos por una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = G_0(s)e^{-Ts} \quad (1)$$

Donde $G_0(s)$ recogerá la parte de su dinámica ajena al retardo. Se estudiarán diferentes casos de entre las dinámicas de $G_0(s)$ de primer y segundo orden más habituales. Para cada caso de estudio, se propondrá una estructura de control como la mostrada en la figura 1. En primer lugar se asumirá la identificación perfecta del sistema. En dichas condiciones ideales, se comprobará cómo el predictor de Smith consigue que el retardo no afecte a la estabilidad del sistema controlado, lo que permite independizar el diseño de $R(s)$ de la existencia y magnitud de dicho retardo. Dado que se analizará dicha cuestión por medio del criterio de Nyquist, deberá obtenerse la función de transferencia de la cadena directa del sistema controlado, que en el caso general responderá a la siguiente expresión:

$$CD(s) = \frac{R(s)G_0(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G_0(s) - R(s)G_0(s)e^{-Ts}} \quad (2)$$

Señalar que, pese a que la ecuación característica de $CD(s)$ es trascendente, es posible sustituir el término exponencial por medio de una aproximación de Padé de un orden suficiente (el necesario para que el DN se preserve en las zonas de interés). Ello permitirá seguir hablando en términos de polos y ceros de $CD(s)$, lo que resulta imprescindible para poder aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist.

Analizada la bondad del PS ideal, se planteará el impacto que tienen en sus prestaciones los errores en la identificación de la planta. En esta contribución se va a abordar únicamente el análisis de la influencia de pequeñas desviaciones en la identificación del retardo, por lo que supondremos $H(s) = G_0(s)$ y $\lambda = T + \delta$, donde δ representa la desviación en la estimación del retardo. En estas circunstancias, la función de transferencia en bucle abierto adoptará la siguiente expresión:

$$CD(s) = \frac{R(s)G_0(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G_0(s) - R(s)G_0(s)e^{-(T+\delta)s}} \quad (3)$$

Del análisis de estabilidad realizado, podrán derivarse para cada caso de estudio restricciones en el diseño de $R(s)$, con el fin de asegurar la estabilidad práctica. Las restricciones recopiladas serán recogidas de manera resumida en el apartado de conclusiones.

El artículo está organizado de la siguiente forma: primero se abordará un caso para el que la función de transferencia en bucle cerrado para el caso ideal presenta el mismo orden en el numerador que en el denominador (función propia, pero no estrictamente propia). El análisis de dicho caso permitirá comprender el problema, amén de corroborar la condición necesaria para la estabilidad establecida en (Palmor and Powers, 1985). A partir de ahí, se tratarán varios casos sencillos para los que la función de transferencia en bucle cerrado para el caso ideal es estrictamente propia, cumpliéndose siempre por tanto la citada condición necesaria para la estabilidad. Para dichos casos se establecerá la condición suficiente para la estabilidad asumiendo la existencia pequeños errores en la identificación del retardo.

2. Un primer caso práctico: $R(s)G_0(s)$ con una dinámica de primer orden completo

Supóngase un sistema con retraso puro, para el que $R(s)G_0(s)$ exhibe una dinámica de primer orden completo:

$$R(s)G(s) = R(s)G_0(s)e^{-Ts} = K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau_p s} e^{-Ts} \quad (4)$$

Nótese que la expresión anterior puede emerger de diferentes combinaciones de $R(s)$ y $G_0(s)$. Podría por ejemplo tratarse de un control proporcional aplicado a una planta de primer orden completo, pero también de un control proporcional derivativo aplicado a una planta de primer orden básico.

Considerando una estrategia básica de control por realimentación, el diagrama de Nyquist (DN) del sistema partirá de K con fase 0° , mientras que a frecuencias altas, el módulo tenderá a un valor fijo ($K\tau_c/\tau_p$), con una fase siempre decreciente que tiende a $-\infty$, lo que supone describir repetidamente una circunferencia en torno al origen de radio $K\tau_c/\tau_p$. Dado que el DN intersecta el semieje negativo de abscisas, valores suficientemente elevados de ganancia pueden llegar a inestabilizar el sistema. La figura 2 ilustra el DN para $\tau_c = 0,5$, $\tau_p = 1$ y $T = 1$, con 2 valores diferentes de K (1 y 10 respectivamente). Como puede apreciarse, el sistema con el controlador de ganancia $K = 10$ no es estable. El ciclo límite es en este caso, una circunferencia de radio $0,5K$ centrada en el origen.

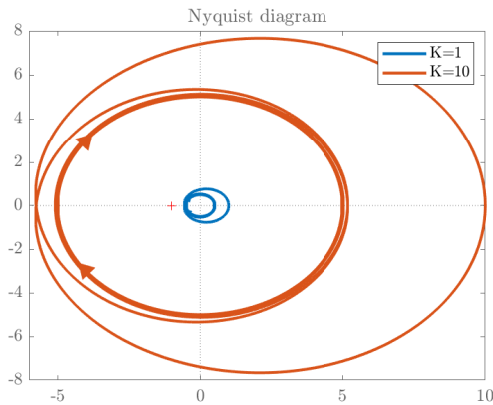


Figura 2: Diagrama de Nyquist del sistema para $K=1$ y $K=10$.

2.1. Control con un Predictor de Smith ideal

Supóngase que para el caso que nos ocupa se emplea una estructura de control basada en el predictor de Smith, en la que se ha identificado correctamente el sistema, tanto en lo concerniente al retardo ($\lambda = T$), como en lo concerniente a la dinámica ajena al retardo ($H(s) = G_0(s)$). La particularización de (2) al caso que nos ocupa quedará como sigue:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K + (\tau_p + \tau_c K)j\omega - K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}} \quad (5)$$

La presencia del término $e^{-Tj\omega}$ como factor en el numerador afecta únicamente a la fase, provocando que a altas frecuencias, la fase del DN tienda a $-\infty$. En cambio, su presencia en el denominador como sumando, ocasiona que el módulo a elevadas frecuencias presente oscilaciones entre dos valores extremos. Del límite a altas frecuencias de (5), se deduce que dichos valores extremos se dan respectivamente para frecuencias múltiplos impares (módulo mínimo) y pares (módulo máximo) de π/T :

$$|CD(j\omega)|_{\omega=(2n-1)\pi/T} = \frac{K\tau_c}{\tau_p + 2K\tau_c} \quad (6)$$

$$|CD(j\omega)|_{\omega=(2n)\pi/T} = \frac{K\tau_c}{\tau_p} \quad (7)$$

Las frecuencias a las que se dan esos valores de módulo mínimo y máximo son respectivamente, $(2n-1)\pi/T$ y $(2n)\pi/T$, por lo que a frecuencias elevadas, dichos valores extremos de módulo se dan siempre para sendos puntos del eje de abscisas. Por otro lado, (6) revela que, por muy elevada que sea la ganancia del controlador, el mínimo valor de módulo estará acotado por $1/2$, lo que permite asegurar que, para un sistema de primer orden completo con retraso puro, controlado un PS ideal, no existen valores positivos de K que inestabilicen el sistema.

Lo anterior se ilustra en la figura 3. Allí se muestra el DN para un sistema de primer orden completo con $\tau_c = 0,5$, $\tau_p = 1$ y $T = 1$, controlado mediante un PS ideal, para 2 valores diferentes de K (1 y 10 respectivamente). Como puede apreciarse, la estabilidad está asegurada en ambos casos. Obsérvese que el punto de corte del DN cuando se encuentra en su ciclo límite para $K = 10$, es $-11/5$.

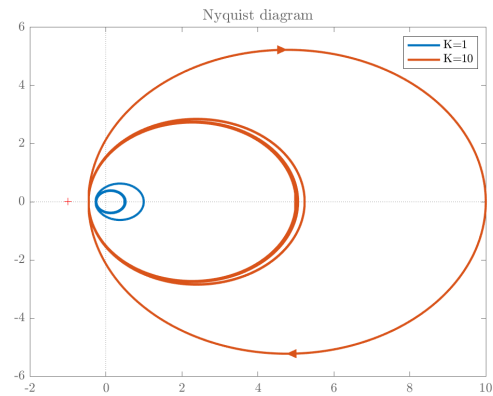


Figura 3: DN del sistema controlado mediante un PS ideal, para $K=1$ y $K=10$.

2.2. Influencia de pequeños errores en la identificación del retardo

Asumiendo un error en la identificación del retardo ($\lambda = T + \delta$, donde δ representa la desviación en la estimación del retardo), la particularización de (3) al caso de estudio es:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K + (\tau_p + \tau_c K)j\omega - K(1 + \tau_c j\omega)e^{-(T+\delta)j\omega}} \quad (8)$$

Al igual que sucedía en el caso del *PS* ideal, La presencia del término $e^{-(T+\delta)j\omega}$ en el denominador como sumando, ocasiona que el módulo a elevadas frecuencias presente oscilaciones entre los mismos dos valores extremos mostrados en (6) y (7). La diferencia es que dichos valores extremos se alcanzan a frecuencias múltiplo de $\pi/(T + \delta)$, en lugar de a frecuencias múltiplo de π/T . Ello tiene como consecuencia que el mínimo y máximo de módulo a altas frecuencias ya no se den con argumentos múltiplos de π , si no que se darán para $\frac{T}{\delta} + 1$ diferentes valores de argumento que abarcan la circunferencia completa, haciendo que el *DN* adopte una forma lobulada como la mostrada en la figura 4. En ella se ilustra el *DN* para una particularización del sistema de primer orden completo que nos ocupa ($\tau_c = 0,5$, $\tau_p = 1$ y $T = 1$), controlado mediante un *PS* con $K = 10$ y con un error de identificación del retardo del 5% ($\delta = 0,05$). Puede apreciarse cómo el valor máximo de módulo de cada lóbulo ($K\tau_c/\tau_p$) se da en 21 fases diferentes que cubren los 4 cuadrantes.

Como consecuencia, para asegurar la estabilidad ya no basta con que el mínimo de módulo esté por debajo de la unidad, sino que el referido valor máximo también deberá estarlo. Ello se traduce en una restricción sobre la ganancia del controlador primario:

$$K < \frac{\tau_p}{\tau_c} \quad (9)$$

La expresión (9) corrobora lo establecido en (Palmor and Powers, 1985) como condición necesaria para la estabilidad práctica del *PS*.

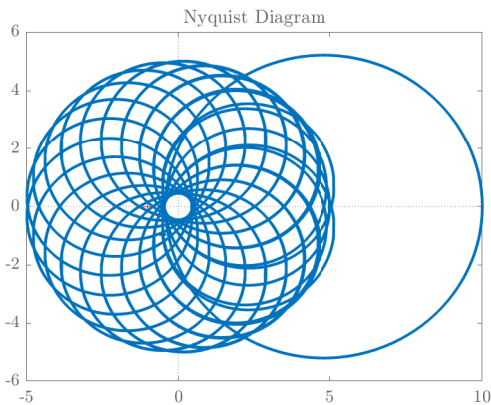


Figura 4: Diagrama de Nyquist del sistema controlado mediante un *PS* para $K=10$, asumiendo un error de identificación del retardo del 5%.

Nótese que (9) asume que el máximo de un lóbulo corta en el semieje negativo de abscisas, lo que únicamente tiene lugar

cuando $(\frac{T}{\delta} + 1)/2$ es un número entero. El error cometido cuando dicha circunstancia no se dé, será tanto menor cuanto mayor sea el número de lóbulos. La figura 5, obtenida para un error de identificación de T del 50%, muestra cómo ninguno de los 3 lóbulos que presenta el *DN* tiene su máximo cerca del semieje negativo de abscisas, por lo que (9) proporciona una estimación pesimista del límite superior de K que asegura la estabilidad.

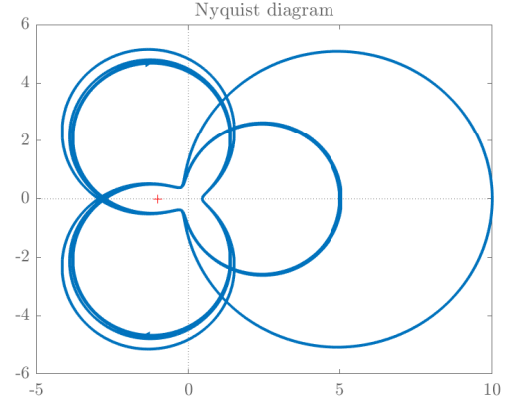


Figura 5: Diagrama de Nyquist del sistema controlado mediante un *PS* para $K=10$, asumiendo un error de identificación del retardo del 50%.

3. Segundo caso práctico: $R(s)G_0(s)$ con dinámicas de primer orden estrictamente propias

En esta sección van a tratarse dinámicas para las que la función de transferencia en bucle cerrado del *DN* ideal son estrictamente propias. En dichos casos, la condición necesaria para la estabilidad establecida en la ecuación (Palmor and Powers, 1985) se cumple siempre. Consideremos sendos sistemas para los que el producto $R(s)G_0(s)$ sea:

$$R_1(s)G_{01}(s) = \frac{K}{1 + \tau s} e^{-Ts} \quad (10)$$

$$R_2(s)G_{02}(s) = \frac{K}{s} e^{-Ts} \quad (11)$$

Como en el caso analizado en la sección 2, las estrategias básicas de control por realimentación hacen que el *DN* intersece el semieje negativo de abscisas, por lo que valores suficientemente elevados de la ganancia del controlador primario pueden inestabilizar el sistema.

3.1. Control con un Predictor de Smith ideal

Supóngase que se emplea una estructura de control basada en el predictor de Smith, en la que se ha identificado correctamente el sistema ($\lambda = T$ y $H(s) = G_0(s)$). La particularización de (2) a los dos casos de estudio quedará:

$$CD_1(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega - Ke^{-Tj\omega}} \quad (12)$$

$$CD_2(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{j\omega + K - Ke^{-Tj\omega}} \quad (13)$$

La presencia del término $e^{-Tj\omega}$ en el denominador, provoca que el módulo a elevadas frecuencias presente oscilaciones,

que se reflejan en el DN en forma de lóbulos, cuyo tamaño va decreciendo conforme aumenta la frecuencia. De (12) y (13) puede deducirse fácilmente que el módulo a altas frecuencias tiende a cero, presentando oscilaciones entre valores extremos que se dan respectivamente para frecuencias múltiplos impares (módulo mínimo) y pares (módulo máximo) de π/T . Las ecuaciones (14) y (15) muestran dichos módulos máximo y mínimo para el caso concreto de una dinámica de primer orden simple:

$$|CD_1(j\omega)|_{\omega=(2n)\pi/T} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad (14)$$

$$|CD_1(j\omega)|_{\omega=(2n-1)\pi/T} = \frac{K}{\sqrt{(1 + 2K)^2 + \tau^2\omega^2}} \quad (15)$$

Dichos valores extremos de módulo se dan para sendos puntos del eje de abscisas. La expresión (15) revela que, para las frecuencias en las que el DN corta en el semieje negativo de abscisas ($\omega = (2n - 1)\pi/T$), el módulo está acotado por $0,5(K/(1 + 2K))$, de forma que en el DN nunca alcanzará el punto crítico, por muy elevada que sea la ganancia. En la figura 6 se ilustra el DN para sendos sistemas de primer orden simple ($\tau = 1$ y $T = 1$) e integrador puro ($T = 1$), controlados mediante un PS ideal, para $K = 10$. Como quedada demostrado, la estabilidad está asegurada por muy grande que sea K .

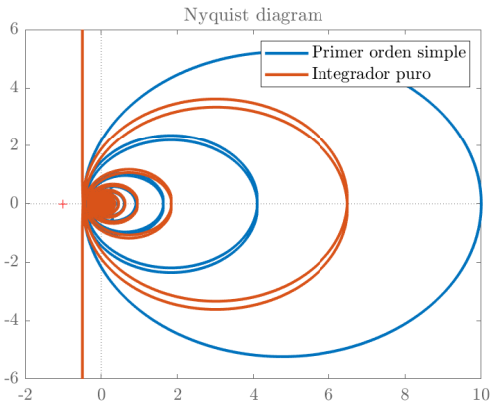


Figura 6: Diagrama de Nyquist de un sistema de primer orden simple y de un integrador puro controlados mediante un PS ideal, para $K=10$.

3.2. Influencia de pequeños errores en la identificación del retardo

Asumiendo un error en la identificación del retardo ($\lambda = T + \delta$), las funciones de transferencia en bucle abierto quedarán:

$$CD_1(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega - Ke^{-(T+\delta)j\omega}} \quad (16)$$

$$CD_2(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{j\omega + K - Ke^{-(T+\delta)j\omega}} \quad (17)$$

Los valores extremos para cada uno de los lóbulos siguen siendo los mismos mostrados en (14) y (15), sólo que ahora se alcanzan a frecuencias múltiplo de $\pi/(T + \delta)$, en lugar de a frecuencias múltiplo de π/T : $\omega = (2n - 1)\pi/(T + \delta)$ y $\omega = (2n)\pi/(T + \delta)$ respectivamente. Ello determina que los

máximos de módulo a altas frecuencias se vayan dando para T/δ diferentes valores de argumento, cubriendo la circunferencia completa. La figura 7 ilustra el DN para una particularización de cada uno de los sistemas que nos ocupan (primer orden simple con $\tau = 1$ y $T = 1$ e integrador puro con $T = 1$), controlados ambos mediante un PS con $K = 10$ y con un error de identificación del retardo del 5%. Puede apreciarse cómo cada DN describe lóbulos de tamaño decreciente, cuyos máximos se dan en un rango de fases que cubre los 4 cuadrantes.

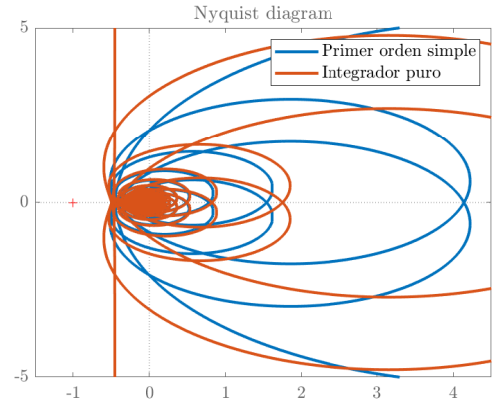


Figura 7: DN de un sistema de primer orden simple y de un integrador puro controlados mediante un PS para $K=10$, asumiendo un error de identificación del retardo del 5%.

Dado que la frecuencia para la cual se dan los máximos es $\omega = 2n\pi/(T + \delta)$ y que en 360° se dan $T/\delta + 1$ lóbulos, el menor valor de n para el cual se da un máximo en el semieje negativo de abscisas puede estimarse de manera precisa para el caso del integrador puro, pues su aporte a la fase va a ser siempre de -90° , independientemente de la frecuencia. En tales circunstancias, el número de lóbulos necesario para alcanzar el semieje negativo de abscisas es $(\frac{T}{\delta} + 1)/4$. Para el caso del sistema de primer orden simple, hay que contemplar además la aportación a la fase del término $K/(1 + \tau j\omega)$. No obstante, en el caso habitual de que el retardo no sea muy grande con relación a la dinámica de $G_0(s)$, y considerando una desviación en la estimación del retardo pequeña con relación al propio retardo, dicho aporte de fase puede considerarse aproximadamente de -90° , por lo que el número de lóbulos necesario puede considerarse el mismo que para un integrador puro. Sustituyendo el valor de n en la expresión de la frecuencia a la que se dan los máximos, la frecuencia para la que el primer máximo de lóbulo se da en el semieje negativo de abscisas es de $\omega = \frac{\pi}{2\delta}$.

Sustituyendo dicho valor de frecuencia en (14) y considerando que el módulo máximo en el caso del integrador puro es $|CD_2(j\omega)|_{\omega=(2n)\pi/T} = K/\omega$, pueden establecerse sendas restricciones sobre los valores positivos de K que hacen a los sistemas bajo estudio estables, a diferencia de lo que sucedía con los respectivos PS ideales, para los que no había restricción alguna.

$$K \leq \sqrt{1 + \left(\frac{\tau\pi}{2\delta}\right)^2} \quad (18)$$

$$K \leq \frac{\pi}{2\delta} \quad (19)$$

Se ha comprobado mediante simulación la validez de (18) para errores de estimación de T pequeños (un 5%). En dichas circunstancias, se ha obtenido una buena precisión en la determinación de K_{max} (diferencias por debajo del 5% respecto del valor observado experimentalmente) para valores de retardo de hasta 8τ . Se ha validado igualmente (19) para distintos valores de δ , fijando un valor de $T = 1$. Se ha obtenido K_{max} con una buena precisión, para valores de δ de hasta el 25% de T . En cualquier caso, la precisión del razonamiento esgrimido exige que $(\frac{T}{\delta} + 1)/4$ sea un número entero. En otros casos, (18) y (19) subestiman el límite superior de la ganancia que asegura la estabilidad, ya que el corte con el semieje negativo de abscisas no se dará en un máximo de lóbulo, incrementando algo el margen de ganancia del sistema. Como ejemplo que ilustra la utilidad de las expresiones obtenidas, la figura 8 muestra la influencia del error de estimación del retardo para el caso del sistema de primer orden simple ($\tau = 1$ y $T = 1$) con $K=25$. Los valores máximos de K resultantes de aplicar (18) para los valores de δ mostrados son, respectivamente: 157,1, 31,4 y 15,7, lo que hace a este último caso inestable con el valor de K empleado.

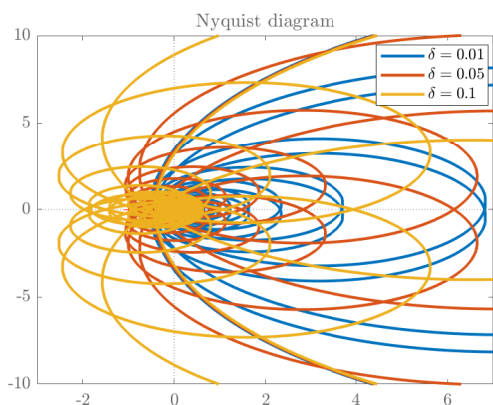


Figura 8: Influencia de el error de estimación del retardo para $K=25$. Sistema de primer orden simple

4. Conclusiones

Es conocida la facilidad con la que los sistemas estables con retardos puros pueden inestabilizarse al aplicárseles técnicas básicas de control en bucle cerrado, a poco que se eleve la ganancia del controlador. En un plano puramente teórico, las estrategias de control basadas en la predicción de la respuesta del sistema, como el *Predictor de Smith*, consiguen resolver el problema, permitiendo un diseño del regulador primario como si tal retardo no existiese. Sin embargo, los errores en la estimación de dicho retardo pueden restringir muy apreciablemente el rango de ganancias del controlador que asegura la estabilidad del sistema. En determinadas situaciones, basta incluso con un error de estimación infinitesimal para que ello ocurra.

En el presente artículo se han obtenido expresiones para el límite superior de la ganancia del bucle abierto para una casuística de dinámicas sencillas con retardo puro. En algunos casos (por ejemplo, para los sistemas de primer orden simple),

las expresiones han sido obtenidas asumiendo que la magnitud del retardo está limitada con relación al resto constantes de tiempo que exhibe el sistema, siendo además su error de estimación relativamente pequeño en comparación con la magnitud del propio retardo. Se han validado mediante simulación las expresiones obtenidas, obteniendo buena precisión en un amplio rango de valores, tanto del retardo como de los errores en su estimación. La casuística abordada queda recogida en la tabla 1, que incluye las dinámicas de primer orden analizadas, así como sendas dinámicas adicionales de primer y segundo orden (integrador con un cero y 2º orden con cero), cuyo razonamiento es muy similar al mostrado con detalle en los apartados 2 y 3.

| RG_0 | $\frac{K}{1+\tau s}$ | $\frac{K(1+\tau_c s)}{1+\tau_p s}$ | $\frac{K}{s}$ | $\frac{K(1+\tau_c s)}{s}$ | $\frac{K(1+\tau_c s)}{(1+\tau_p s)^2}$ |
|-----------|---|------------------------------------|-----------------------|---------------------------|--|
| K_{max} | $\sqrt{1 + \left(\frac{\tau\pi}{2\delta}\right)^2}$ | $\frac{\tau_p}{\tau_c}$ | $\frac{\pi}{2\delta}$ | $\frac{1}{\tau_c}$ | $\frac{1 + \left(\frac{\tau_p\pi}{2\delta}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau_c\pi}{2\delta}\right)^2}}$ |

Tabla 1: Ganancia máxima que asegura la estabilidad del PS para los casos analizados.

Referencias

- Astrom, K., Hang, C., Lim, B., 1994. A new smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (2), 343–345.
DOI: 10.1109/9.272329
- Hajdu, D., Insperger, T., 12 2014. Demonstration of the sensitivity of the smith predictor to parameter uncertainties using stability diagrams. *International Journal of Dynamics and Control* 4.
DOI: 10.1007/s40435-014-0142-1
- Huang, H.-P., Chen, C.-L., Chao, Y.-C., Chen, P., 1990. A modified smith predictor with an approximate inverse of dead time. *Aiche Journal* 36, 1025–1031.
- Hägglund, T., 1996. An industrial dead-time compensating pi controller. *Control Engineering Practice* 4 (6), 749–756.
URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066196000652>
DOI: [https://doi.org/10.1016/0967-0661\(96\)00065-2](https://doi.org/10.1016/0967-0661(96)00065-2)
- Michiels, W., Niculescu, S.-I., 2014. *Smith predictor for stable systems: Delay sensitivity analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, Ch. 11, pp. 285–300.
URL: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611973631.ch11>
DOI: 10.1137/1.9781611973631.ch11
- Normey-Rico, J. E., Camacho, E. F., 2007. *The Smith Predictor*. Springer London, London, pp. 131–163.
URL: https://doi.org/10.1007/978-1-84628-829-6_5
DOI: 10.1007/978-1-84628-829-6_5
- Palmor, Z. J., Powers, D. V., 1985. Improved dead-time compensator controllers. *AICHE Journal* 31 (2), 215–221.
URL: <https://aiche.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/aic.690310207>
DOI: <https://doi.org/10.1002/aic.690310207>
- Smith, O., 1957. Closer control of loops with dead time. *Chemistry Engineering Progress* 53 (5), 217–219.
- Stépán, G., 1989. *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. Pitman research notes in mathematics series. Longman Scientific & Technical.
URL: <https://books.google.es/books?id=1aFhQgAACAAJ>
- Watanabe, K., Ito, M., 1981. A process-model control for linear systems with delay. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (6), 1261–1269.
DOI: 10.1109/TAC.1981.1102802
- Zhang, W., Sun, Y., 1996. Modified smith predictor for controlling integrator/time delay processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research* 35, 2769–2772.