ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 41-1 (2023), 43-61
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5546
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Comparación de resoluciones algebraicas con y sin tablas de problemas de edades

A Comparison of Algebraic Resolutions of Age Problems Using and Without Using Tables

Carlos Soneira
Departamento de Pedagogía y Didáctica, Universidade da Coruña, A Coruña, España
carlos.soneira@udc.es

RESUMEN • En el contexto de la resolución algebraica de problemas de edades, este trabajo estudia las similitudes y diferencias en la construcción del modelo de problema, los errores en las ecuaciones y los procesos subyacentes a estos, dependiendo de si se usan o no tablas. Mediante técnicas de interpretación cualitativa se analizó el discurso, los gestos y las producciones escritas de ocho pares de estudiantes de secundaria. Se obtuvo que cuando usaron tablas construyeron siempre un modelo de problema, mientras que cuando no en ocasiones usaron una estrategia sintáctica. Los errores en las ecuaciones fueron análogos en ambas formas de resolución –con y sin tablas– y la traducción fragmentada del lenguaje natural al algebraico fue un proceso subyacente a ellos en ambas formas.

PALABRAS CLAVE: Educación secundaria; Lenguaje algebraico; Resolución algebraica; Tabla.

ABSTRACT • This article studies the similarities and differences, when algebraically solving age problems, in the construction of the problem model, and the errors in the equations and its underlying processes, depending on whether the solver uses, or not, tables. The discourse, gestures, and written outputs of eight pairs of secondary school students were analysed by means of qualitative techniques. The results show that as long as students used tables, they managed to construct a problem model, but when they did not, in some cases they conducted a merely syntactic strategy. The errors in the equations were analogous in both solving approaches –with and without using tables– and the fragmented translation from the natural to the algebraic language was an underlying process to the errors in both.

KEYWORDS: Secondary education; Algebraic language; Algebraic solving; Table.

Recepción: septiembre 2021 • Aceptación: enero 2023 • Publicación: marzo 2023

Soneira,C. (2023). Comparación de resoluciones algebraicas con y sin tablas de problemas de edades. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(1), 43-61.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5546

INTRODUCCIÓN

La resolución algebraica de problemas –formulando ecuaciones que expresen la estructura del problema– ocupa un lugar importante en el currículum de la Educación Secundaria en España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). Es más, constituye una de las formas de acceso al álgebra escolar (Bednarz et al., 1996) y una fuente de significado para el simbolismo algebraico (Kieran, 2007). Sin embargo, la resolución algebraica de problemas verbales es difícil para los estudiantes (Kieran, 2007). Una dificultad está en entender las relaciones matemáticas expresadas en el texto (Kintsch, 1998), pero muchos estudiantes sí las entienden y las representan mal en lenguaje algebraico (Stacey y MacGregor, 2000).

Por ello, la traducción del lenguaje verbal al algebraico al resolver problemas suscita interés entre los investigadores (Cerdán, 2010; Clement, 1982; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Kaput, 1989; Rellensmann et al., 2017; Sanjosé et al., 2009). Para facilitar la transición a la resolución algebraica se han diseñado varias propuestas de instrucción. Destacamos el escalonamiento de los pasos que hay que seguir (Filloy, Puig y Rojano, 2008), con el que se obtuvieron buenos resultados en problemas de ciencias (Sanjosé et al., 2009); aunque, según otras investigaciones, a la larga los estudiantes tienden a no proceder secuencialmente y los errores reaparecen (Soneira, González-Calero y Arnau, 2018). Arnau y Puig (2013) basan su propuesta en el uso de la hoja de cálculo, pero en el caso de los llamados «problemas de edades», los resultados fueron negativos al testar la transferencia a la resolución con lápiz y papel.

Otras propuestas usan representaciones intermedias menos abstractas como paso intermedio, arguyendo que una progresión suave hacia las ecuaciones reporta mejores resultados (Ding y Li, 2014; McNeil y Fyfe, 2012). De hecho, el uso de representaciones intermedias se enseña como método de resolución en varios países (Ding et al., 2019; Ng y Lee, 2009). Sin embargo, el uso de estas representaciones no siempre se asocia con mejores resultados (Ainsworht, 2006; Rellensmann et al., 2017), y centrarse en características visuales de la representación puede inhibir estrategias más generales de resolución e inducir a errores (Bieda y Nathan, 2009). Con algunos tipos de problemas, como los de edades, los diagramas de cinta tampoco lograron tasas de éxito altas (Ng y Lee, 2009).

Precisamente, los problemas de edades suelen resolverse algebraicamente en la educación secundaria –tema tratado en la literatura (Bloedy-Vinner, 1996; Filloy et al., 2010)– y en el sistema educativo español es común usar una tabla como representación intermedia. La disposición espacial de la tabla aportaría un recurso visual adicional para entender la estructura del problema e induciría a proceder más secuencialmente al formular ecuaciones, aunando potencialidades de otras propuestas. Sin embargo, estudios previos no hallaron diferencias significativas en la tasa de error entre la resolución con y sin tablas (Soneira, 2022).

Ante tal situación, este trabajo pretende comparar los procesos de resolución algebraica de problemas de edades con y sin tablas en estudiantes de secundaria, centrándose en los fenómenos desencadenantes de errores. Los resultados permitirían explicar por qué el uso de tablas no siempre mejora la tasa de éxito y valorar el modo de utilizarlas.

CONTEXTO TEÓRICO

El rol de los sistemas de signos

Este trabajo sigue la idea de que en la actividad matemática la cognición está vinculada al uso de signos (Duval, 2017), siendo estos medios de objetivación con los que el sujeto expresa intenciones, adquiere conciencia estable y actúa sobre constructos mentales en el contexto de una tarea concreta (Radford, 2003). Así, su significado emerge de las tareas en las que median, y su uso está condicionado por la meta de la tarea. Además, las tareas matemáticas escolares se sitúan en una comunidad que establece unos significados y formas de uso «institucionales» de los signos (Arzarello et al., 2009). Al participar en esas tareas, el individuo desarrolla su significado e interpretación personal, que puede no coincidir con los institucionales (Ernest, 2006).

Asimismo, en la actividad matemática lo relevante no son los signos aislados, sino los sistemas de signos con estructuras semántico-sintácticas propias (Duval, 2017; Filloy, Rojano y Puig, 2008). Tales sistemas pueden estar formados por signos propios de las matemáticas (por ejemplo, lenguaje algebraico), por signos no exclusivos de las matemáticas (como el lenguaje natural) o por combinar signos de distintos sistemas en una disposición espacial determinada (por ejemplo, en tablas en problemas de edades). Estos son ejemplos de sistemas con una estructura semántico-sintáctica socialmente acordada, pero los sujetos pueden crear sistemas idiosincráticos combinando signos y estructuras de otros sistemas (Filloy, Rojano y Puig, 2008).

Por otra parte, la objetivación en matemáticas implica varios sistemas entrelazados, incluyendo gestos, tono de voz y cadencia del habla (Radford, 2003; Radford et al., 2007). Así, en tareas que incluyen la producción de expresiones algebraicas –expresiones en simbolismo algebraico–, los gestos y la cadencia de habla del sujeto desvelan el significado personal de las expresiones algebraicas (Radford et al., 2007).

Siguiendo estas ideas, los análisis en este trabajo se basan en que, si la cognición en matemáticas se realiza mediante signos, el análisis de su producción y transformación durante la realización de una tarea permite estudiar los procesos cognitivos que tienen lugar.

La resolución de problemas verbales

Nathan et al. (1992) proponen un modelo para el proceso de comprensión y resolución de problemas verbales con tres componentes interrelacionados: el texto-base, el modelo de situación y el modelo de problema. El texto-base es la red de proposiciones que representa el significado que puede extraerse exclusivamente del texto, sin añadir nada no explicitado. Esa red suele ser incompleta, y para dotarla de coherencia el sujeto debe integrarla con su conocimiento personal del mundo real construyendo un modelo de situación. Este expresa las relaciones entre los eventos y agentes del problema y, a partir de él, se construye el modelo de problema, que es un constructo puramente matemático que expresa su estructura algebraica. Además, el modelo de problema es un constructo mental, que el sujeto puede representar externamente o no. Considérese el siguiente ejemplo:

> *Problema P2.* En la familia vecina, la abuela Gertrudis tiene 60 años más que su nieto Rigoberto. Dentro de 12 años, la edad de Gertrudis será 4 veces la de Rigoberto. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Un modelo de situación incluiría a dos personajes de los que hallar la edad, y que existe una relación entre las edades en el presente y otra en el futuro. Además, incluye el conocimiento personal de que la abuela es mayor que el nieto, que el tiempo pasa igual para ambos, un rango para la diferencia entre sus edades y otro para las edades presentes de cada uno. Un modelo de problema incluiría que la edad presente de Gertrudis es 60 más la presente de Rigoberto, que la edad futura de cada personaje se calcula sumando 12 a la edad presente correspondiente y que la edad futura de Gertrudis es 4 multiplicado por la futura del nieto. Esta interpretación es la única considerada correcta en este artículo porque en el lenguaje natural «Dentro de 12 años» afecta a las edades de ambos personajes y a su relación multiplicativa, aunque algún resolutor podría interpretar que la edad futura de la abuela será cuatro veces la actual del nieto.

La identificación de estos constructos parte de la comprensión del texto (Sanjosé et al., 2009) y, según Kintsch (1998), durante la lectura, en cuanto el sujeto identifica una pieza semántica significativa, la procesa e integra en una red proposicional en la memoria de trabajo. Tal integración se realiza en ciclos progresivos. Además, para construir un modelo de problema, el sujeto realiza sucesivas transformaciones sobre su representación mental del texto de partida.

La resolución algebraica y el uso de tablas

La resolución algebraica consiste en representar el modelo de problema en una o varias ecuaciones y luego resolverlas. El proceso puede descomponerse formalmente en una secuencia de pasos llamada método cartesiano (Filloy, Puig y Rojano, 2008):

1. Leer analíticamente el enunciado del problema para reducirlo a una lista de cantidades y relaciones entre cantidades.
2. Escoger una cantidad que se va a designar por una letra (o varias cantidades que van a ser designadas con letras diferentes).
3. Representar las otras cantidades con expresiones algebraicas que describen las relaciones aritméticas entre esas cantidades y otras previamente designadas con una letra o una expresión algebraica.
4. Escribir una ecuación (o tantas independientes como letras en el paso 2) igualando dos expresiones algebraicas no equivalentes (escritas en los pasos 2 y 3) que designen la misma cantidad.
5. Transformar la ecuación en una forma canónica.
6. Resolver la ecuación.
7. Interpretar el resultado de la ecuación en términos del problema.

La lectura analítica (paso 1) consiste en inferir la red de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas, esto es, construir un modelo de problema. Del paso 2 al 4 se realiza un cambio de sistema de signos desde el lenguaje natural al algebraico, pudiendo pasar por uno intermedio. Cada cambio constituye una submeta de la tarea, ergo condiciona el procesamiento del enunciado durante su lectura (Kintsch, 1998; Radford, 2003).

Por otra parte, los pasos del método serían seguidos secuencialmente por un resolutor ideal, pero eso no es frecuente en resolutores reales. Es común que estos comiencen a escribir la ecuación (paso 4) sin completar antes un modelo de problema (paso 1). Además, hay estudiantes que siguen la estrategia sintáctica –traducir directamente y manteniendo su orden cada grupo de palabras clave a simbología algebraica– sin construir el modelo de problema (Clement, 1982; Ding et al., 2019). Esto suele llevar a ecuaciones incorrectas porque los lenguajes verbal y algebraico tienen estructuras semántico-sintácticas diferentes.

Producir ecuaciones a partir del enunciado verbal resulta difícil a los estudiantes (Duval, 2017; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Kieran, 2007) y a veces necesitan representaciones intermedias (Duval, 2017). De hecho, en el sistema educativo español es común iniciar a los estudiantes en la resolución algebraica de problemas de edades usando una tabla como representación intermedia.

Estas tablas incluyen un encabezado para cada fila y columna donde se indica en lenguaje natural el nombre de un protagonista o un momento temporal (figuras 1, 2 y 3). El procedimiento habitual consiste en: leer comprensivamente el texto del enunciado; esbozar una tabla según el modelo de situación construido a partir de la lectura; escribir en cada celda una expresión algebraica que represente la edad del protagonista en el momento temporal indicado por los encabezados de fila y columna; cuando toda celda contiene una expresión, basarse en ellas para escribir fuera de la tabla una ecuación o sistema; y resolver la ecuación o sistema. El formato de estas tablas y el modo de usarlas los introduce explícitamente el profesorado, y puede incluso figurar en el libro de texto, por lo que tendrían así carácter institucional en el sentido de Arzarello et al. (2009).

Errores de resolución y sus desencadenantes

Las dificultades para producir ecuaciones a partir del enunciado verbal se evidencian en los errores de los estudiantes. Aunque su catálogo es amplio, se describen a continuación algunos recurrentes (Cerdán, 2010). La polisemia de la letra consiste en asignarle a una misma letra dos cantidades diferentes, bien en una misma ecuación o en ecuaciones o etapas de resolución distintas (Filloy, Rojano y Puig, 2008; Stacey y McGregor, 2000). El error de inversión consiste en escribir las letras con una relación inversa a la expresada en el enunciado (Clement, 1982), y el error por operación equivocada consiste en escribir una operación diferente a la indicada en el enunciado. El de información extra consiste en añadir símbolos superfluos e incorrectos (Molina et al., 2017).

Estos errores se ilustran con el *Problema P2*. Un sistema correcto sería:

$$g = r + 60;$$

$$g + 12 = 4 \cdot (r + 12)$$

con g, r para las edades presentes respectivas de Gertrudis y Rigoberto.

Un ejemplo de polisemia de la letra r sería $g = r + 60; g + 12 = 4 \cdot r$, si la letra r designase la edad presente en la primera ecuación, y la futura, en la segunda. Ejemplos de error de inversión multiplicativo y aditivo serían, respectivamente, $4 \cdot (g + 12) = r + 12$ y $g + 60 = r$. Un ejemplo de operación equivocada sería $g = r \cdot 60$, y uno de información extra $g = r + 60 + 4y$.

Estos errores pueden clasificarse en tres grandes tipos. En concreto, según Molina et al. (2017), los dos primeros derivan de las características del simbolismo algebraico, el tercero, de la aritmética, y el último se refiere a la compleción del enunciado.

Analizar las ecuaciones escritas permite detectar errores, pero un mismo error puede derivar de procesos cognitivos diferentes. Puede que el resolutor use una estrategia sintáctica (véase tabla 1), con lo que no construye un modelo de problema (por ejemplo, Ding et al., 2019). Pero hay al menos otras dos posibilidades no excluyentes entre sí: construir un modelo de problema correcto mentalmente y cometer errores al expresarlo en ecuaciones; o construir un modelo de problema incorrecto mentalmente (Soneira, González-Calero y Arnau, 2018). Para paliar el error, habría que actuar sobre los procesos cognitivos que lo causan, de ahí que este trabajo analice el proceso de resolución.

Objetivos

El objetivo general es comparar los procesos de resolución algebraica de problemas de edades cuando se usan tablas y cuando no. Se concreta en dos específicos:

1. Identificar los puntos en común y las diferencias en los procesos realizados por estudiantes de 4.º de la ESO para construir y expresar el modelo de problema.
2. Caracterizar los procesos que subyacen a la comisión de errores en cada caso.

MÉTODO

Muestra

En una fase preliminar participaron 3 clases de 4.º de la ESO (de 15 a 16 años) de dos institutos públicos, de la opción de enseñanzas académicas. De esos grupos se seleccionaron individuos con unos resultados académicos en matemáticas medios o medio-bajos (nivel concordante con la opinión del profesorado), por centrarse el interés en los resolutores no ideales. Según el profesorado, los participantes resolvían algebraicamente problemas de edades desde 2.º de la ESO. El profesorado se centraba en el uso de tablas con el procedimiento descrito en la sección 2.3 hasta que el dominio del lenguaje algebraico permitiese plantear las ecuaciones directamente a partir del texto.

Se aplicó una prueba escrita inicial consistente en la resolución de problemas para identificar el nivel en matemáticas de los estudiantes y a aquellos con las mismas tendencias en cuanto al uso o no de tablas. A partir de ahí y del criterio del profesorado, y descartando a los que dejaron en blanco todos los problemas de edades, se preseleccionaron 28 estudiantes para participar en un estudio por pares. Tras dar su consentimiento por escrito, 8 pares de estudiantes, cada par con ambos miembros de la misma clase, fueron analizados.

Procedimiento

Se estudiaron cualitativamente ocho casos, analizando vídeos donde pares de estudiantes resuelven problemas en voz alta en el encerado. Según Peräkylä (2005), el agrupamiento por pares permite un conocimiento intrasubjetivo de las intenciones y los razonamientos, así como una recogida de información más rica. Además, Schoenfeld (1985) recomienda agrupar por pares porque los resolutores pueden alterar sus razonamientos debido al entorno experimental, pero al resolver por pares el fenómeno de «reconocimiento de ignorancia compartida» reduce esas alteraciones. Por esto mismo, los pares eran de sujetos de la misma clase, y las intervenciones del investigador se redujeron a tomar notas, instar al par a hablar en caso de no verbalizar el pensamiento, o a hablar más alto si resultaba necesario.

Dentro de un estudio más amplio sobre la resolución de problemas verbales, cada par participó en una única sesión de entre 40 y 70 minutos con 6 problemas –P1 a P6–, de los que P2 y P5 son de edades y el resto de otros temas. En la sección 2.2 figura P2. El enunciado de P5 es como sigue:

> *P5*. La edad de Marta es 5 veces la de su hija Julia. Calcula la edad de cada una sabiendo que dentro de 10 años la edad de Marta será solamente el triple de la de Julia.

La dificultad de la traducción a ecuaciones es similar en todos excepto P1 y P6 (véase nota en la tabla 4). En todos los casos, el par se situó delante del encerado y se le entregó una hoja con el enunciado del problema que había que resolver. Cuando indicaban haber terminado o no ser capaces de continuar, se les entregaba el siguiente. Las instrucciones fueron: *i*) empezar a resolver leyendo el enunciado en voz alta; *ii*) hablar suficientemente alto para ser oídos; *iii*) informar a su pareja de sus pensamientos y acciones.

Para evidenciar más claramente las similitudes y diferencias entre la resolución con y sin tablas, se ilustra el análisis con un mismo problema (*Problema P2*).

Codificación

Usando técnicas de interpretación de datos inspiradas en los trabajos de Radford (2000) y Radford et al. (2007), se realizó un análisis conjunto del discurso, lo escrito en el encerado, los gestos, el ritmo del habla, la entonación y la mirada. En concreto, partiendo de un esquema preliminar de categorías basado en el marco teórico, primero se transcribieron los diálogos y se realizó una codificación abierta para dividirlos en partes que, conteniendo una idea o un proceso, fuesen comprensibles por sí mismas. A continuación, se realizó una primera categorización de esos procesos e ideas observados. Posteriormente, esta se refinó incorporando primero información sobre las producciones escritas, los gestos y la mirada en cada momento del diálogo, y luego la relativa al tono de voz y las pausas en el habla. Después, todos los recursos expresivos fueron interpretados conjuntamente guiándose por los objetivos de investigación y el marco teórico, lo que provocó cambios en la categorización. El profesorado de los estudiantes actuó primero como panel de expertos validando estos procedimientos. Después, según avanzaba la codificación, valoraba la verosimilitud de las categorías emergentes sobre la base de su experiencia en el aula.

Los análisis se realizaron a partir del diálogo completo correspondiente a un problema, además de cada frase e incluso cada palabra por separado. Se prestó especial atención a determinar si los resolutores incidían o no en las mismas (sub)categorías cuando usaban tablas que cuando no, y a los recorridos que devienen en errores en cada caso. Será la descripción de las categorías lo que desvele los procesos subyacentes tras cada error.

La tabla 1 contiene las categorías finales jerarquizadas y su descripción general, y las tablas 2 y 3, sus subcategorías y los fenómenos tomados como evidencia de la categoría correspondiente. La definición y la descripción detallada se exponen en la sección Resultados.

Tabla 1.
Categorías y su descripción general

Categoría	*Descripción*
C1. Construcción de ecuaciones	Escritura de ecuaciones o expresión de esa intención.
C2.1 Traducción fragmentada C2.2 Traducción no fragmentada	Interrupción de la lectura o comentario sobre el enunciado para traducir parte de él a lenguaje algebraico, retomando la lectura en un punto posterior. Lo contrario de lo anterior.
C3.1 Construcción de modelo de problema C3.2 Estrategia sintáctica	Inferencia de la estructura algebraica del problema. Traducción directa de cada grupo de palabras clave a simbología algebraica manteniendo su orden y sin tener en cuenta el significado.
C4 Escritura de ecuaciones	Escritura de ecuaciones con letras.
C5 Revisión	Evaluación de la solución propuesta.

Tabla 2.
Subcategorías 1

C3.1 Construcción de modelo de problema	C3.2 Estrategia sintáctica
Relectura de representación escrita previa Uso de la estructura de la tabla Interpretación idiosincrásica de la tabla Comentarios y transformaciones de producciones escritas propias	
C3.1.1 Modelo de problema incorrecto C3.1.2 Modelo de problema correcto	

Tabla 3.
Subcategorías 2

C4 Escritura de ecuación (o ecuaciones)	
Ecuación correcta	Error de inversión Polisemia de la letra Operación equivocada Información extra
C5 Revisión	
Alusión a compatibilidad con modelo de situación Interpretación fragmentada de ecuación Uso del lenguaje aritmético para testar el modelo de problema Sustitución de valores en las ecuaciones Detección de errores	

RESULTADOS

Se muestran, a continuación, los análisis de extractos de resoluciones que ilustran las categorías, el recorrido por estas y la emergencia de errores. La definición y la descripción de cada categoría (véanse, además, tablas 1, 2 y 3) se incluyen en los propios análisis. En ocasiones, una categoría abarca muy pocas líneas de diálogo o se refleja mediante los gestos, la mirada y la cadencia del habla en una sola línea; en otras, abarca un diálogo extenso y la realización de representaciones escritas. Es también frecuente que en los diálogos se intercalen varios procesos e ideas en pocas líneas, lo que concuerda con que los resolutores reales tienden a recorrer los pasos del método cartesiano de manera no secuencial.

Caso 1. Rosa y Luz

El extracto comienza cuando Rosa (R) y Luz (L) han representado en el encerado la tabla de la figura 1 y L ha sugerido borrar «+ 60» en la celda [1,2].

	Presente	Dentro de 12 años
x Gertrudis	y + 60	4(y+ 60)
Rigoberto y		

Fig. 1. Tabla al inicio del extracto de R y L.

L1. R: ¡Ah, no! Sería más 12. Porque tú ahora tienes 15, dentro de cuatro años vas a tener 15 más cuatro. […]

L2. L: Vale, ahora piénsalo así: Imagínate que esto no existiese, esta parte de aquí, ¿vale? (señala la columna completa encabezada por «Presente»). Dentro de 12 años, ¿vale? (señalando «Dentro de 12 años» en la tabla), solamente dentro de 12 años. ¿Para qué vuelves a poner lo de más 12 cuando ya sabemos que es dentro de 12 años? (señalando el encabezado de la segunda columna).

El extracto comienza con R expresando que para ella el paso del tiempo debe indicarse en la expresión de la celda [1,2]. Sin embargo, para L, la letra *y* en la celda [1,2] actúa como un deíctico –expresión que cambia de significado dentro de un mismo texto–. En efecto, L expresa explícitamente en L2 con verbalizaciones acompañadas de gestos que, para ella, el encabezado «Dentro de 12 años» hace redundante escribir «+12» en las expresiones algebraicas de las celdas de esa columna, luego la letra *y* cambia su significado en esa columna. Esta interpretación personal de L de las tablas causó un error por la polisemia de la letra, aunque a lo largo de la resolución R expresó varias veces su discrepancia con esa interpretación de la tabla (véase L1).

Caso 2. Tomás y Bruno

Extracto 1 de Tomás y Bruno

Tomás (T) lee el enunciado completo en voz alta y Bruno (B) escucha. A continuación, comienza el siguiente diálogo:

L1. T: Bueno, Rigoberto es *x* (B escribe Rigoberto). Rigoberto sería *x*, y Gertrudis sería… *x* más 60 (T mira alternativamente lo que escribe B y la hoja; B escribe «=> *x*» y «Gertrudis => *x* + 60», figura 2). Esto es «ahora» ... (mirando lo escrito por B; después T escribe «Ahora») y dentro de 12 años (leyendo; escribe línea vertical y luego «+ 12 años», figura 2; luego mira la hoja) esto sería... (mira la hoja). Gertrudis será cuatro veces la de Rigoberto (leyendo, después mira «Rigoberto => *x*» en la tabla, figura 2).

L2. B: O sea, cuatro *x* (señalando la celda [1,2]).

L3. T: Sí (escribe «G → *4x*» en la tabla). Y cuántos años tiene cada uno (mirando la hoja; luego alza la vista hacia la tabla). Bueno, y esto sería *x* + *12* (escribe «R= *x* + 12», figura 2).

Ahora	**+ 12 años**
Gertrudis => x + 60	**G → 4x**
Rigoberto => x	**R = x + 12**

Fig. 2. Tabla al final del extracto 1 de T y B.

Al leer el enunciado, ambos dan por sentado que usar una tabla con estructura 2 x 2 y encabezados es adecuado. Su tabla parece admitir deícticos, con *x* para las edades presente y futura del nieto.

Hacen una traducción fragmentada del lenguaje natural a la tabla, interrumpiendo la lectura para incorporar en la tabla cada componente de información en cuanto la procesan y retomando la lectura en la siguiente. Por ejemplo, T en L1 verbaliza «Dentro de 12 años» solo una vez, interrumpe la lectura para escribir y verbaliza otro sintagma antes de retomar la lectura en «cuatro veces». Escriben en la tabla teniendo en cuenta la menor cantidad posible de sintagmas susceptible de traducirse a lenguaje algebraico como una relación aritmética, aunque eso conlleve perder información esencial y representar relaciones incorrectas en el contexto del problema. Por ejemplo, «la edad de Gertrudis será 4 veces la de Rigoberto» puede traducirse como la expresión incorrecta $4{\cdot}x$ sin tener en cuenta el sintagma «dentro de 12 años» que llevaría a escribir $4{\cdot}(x + 12)$. A esto puede contribuir también el que la información omitida «+ 12» se incluya en el encabezado de la columna y la tabla admita deícticos (véase Caso 1).

Extracto 2 de Tomás y Bruno

Este extracto es continuación del anterior.

L4. B: Pues a ver, mmh... (mirando pensativo la tabla). ¿Y cómo se hace esto? Yo ese no lo sé hacer... (T también mira pensativo la tabla) Gertrudis... pero ¿cómo es la pregunta? ¿Cuántos años tiene cada uno? ... Sí...
L5. T: Cuántos años tiene cada uno ahora.
L6. B: Ahora, o sea... eh... aquí hay que encontrar yo creo, eh... (mira con atención la tabla), $4x$ ... (pausa, señala $4x$ en la tabla) menos 12 (pausa de 17 segundos pensativo mirando la tabla) es igual a x más 60 (pausa, señala «$x + 60$» en la tabla, mira a T como pidiendo su opinión) porque si te dice que tiene el cuádruple... ¡no! para, para, para; x es Rigoberto... (señala la celda [2,1] en la tabla).
[…]
L7. B: Claro, $4x$. Ponemos... cuatro x menos 12 igual a x más 60 (mientras escribe «$4x - 12 = x + 60$» fuera de la tabla).
L8. T: Sí.
L9. B: Y hay que resolver esto.

A continuación, resuelven correctamente la ecuación $4x – 12 = x + 60$, incorrecta por polisemia de la x, y obtienen valores 24 *y* 84 para las edades respectivas del nieto y la abuela. Aceptan el resultado como correcto sin hacer una revisión, puede que por ser compatible con el modelo de situación.

No mostraron dudas mientras completaban la tabla, sino al plantear una ecuación una vez completada esta. De L4 a L8 ambos señalan partes de la tabla mientras hablan, e intercalan en la escritura y verbalización intervalos en los que miran pensativos dicha tabla. Esto sugiere que la usan para construir un modelo de problema y la ecuación que lo representa. Es plausible que de L6 a L7 el argumento de B sea: «si por la segunda columna de la tabla dentro de 12 años la edad de Gertrudis será $4x$ (señala "$4x$" en la segunda columna), entonces ahora es $4x-12$, y como en virtud de la primera columna su edad ahora es $x + 60$ (señala $x + 60$ en la tabla), entonces $4x – 12 = x + 60$».

El uso de la tabla no impidió un error en la ecuación por una x polisémica, que podría proceder de la admisión de deícticos en la tabla (x en la figura 2) o de un error en la celda [1,2] debido a la traducción fragmentada de componentes aisladas de L1 a L2.

Caso 3. Simón e Íñigo

Tras leer el enunciado Simón (S) e Íñigo (I) realizan una traducción fragmentada (véase Caso 2) a la tabla idiosincrásica –la edad futura de la abuela se representa en las celdas [1,2] y [2,2]– de la figura 3.

	Ahora	Dentro 12 años
Ger	x	x + 12
Rig:	x - 60	4x – 240*

Fig. 3. Tabla completa de Simón e Íñigo. *Proviene de 4·(x-60).

No mostraron dudas al producir la tabla de la figura 3 a partir del texto (pese al error), pero sí al plantear una ecuación a partir de la tabla una vez que las cuatro celdas contenían una expresión.

Finalmente, plantean la ecuación incorrecta $x + 12 = 4x - 240$ y la resuelven obteniendo las soluciones incorrectas 84 y 24 como edades presentes. El extracto de diálogo comienza durante la fase de revisión, tras calcular en el encerado $4{\cdot}84 - 240 = 96$.

L1. S: Pero esto (señala el 96) te da (coloca el dedo sobre x + 12 en la tabla) la edad que tiene Gertrudis dentro de 12 años.
L2. I: Claro, eso es de 84. Si le sumas a 84, a 12, 84, 96, la edad de Gertrudis.
L3. S: Eso la edad de Gertrudis (señala «x + 12» en la tabla) dentro de 12 años.
L4. I: Claro.
L5. S: Pero como aquí (señala «4x – 240» en la tabla) te dice que es la edad del nieto, cuatro veces, o sea sería, 24 más 12, que serían treinta y… 36… por cuatro.
L6. I: 36 por cuatro... (S calcula en el encerado) 144.
L7. S: Entonces no nos da (pensativo).

La verbalización y los gestos en L5 indican que usando el lenguaje aritmético (operando sobre números en vez de letras) S es capaz de construir y evaluar un modelo de problema correcto, aunque la ecuación producida no lo sea. Entonces, el error no se debe a la falta de capacidad para construir un modelo de problema correcto ni a la lectura fragmentada del texto, pues, de ser así, dado que tras resolver el sistema no realizan más lecturas, el error también debería cometerse al usar el lenguaje aritmético. El error se debería a la traducción fragmentada del lenguaje natural a las expresiones algebraicas, que se traslada de la tabla a la ecuación.

Caso 4. Mar y Rui

El extracto comienza tras leer Mar (M) el enunciado y Rui (R) permanecer escuchando. Pasan del enunciado a las ecuaciones sin usar tablas.

L1. M: Pon x, y (R escribe x e y en el encerado) x edad Gertrudis, y edad Rigoberto (R escribe «x: edad Gertrudis»; «y: edad Rigoberto») vale, Gertrudis tiene 60 años más que Rigoberto (R también lee la hoja) y ... x menos 60 es igual a y (pausa, R escribe «x - 60 = y»). Entonces... dentro de (leyendo) 12... entre paréntesis (pausa, gesto ordenando escribir. R escribe «12 (»), la edad de Gertrudis será 4 veces la de Rigoberto. Entonces, 12, x, es igual (pausa más larga para mirar la hoja, R borra el «(» y escribe «12x =») a 12 (pausa) más cuatro y (mirando la hoja, R completa $12x = 12 + 4y$, pone una llave indicando un sistema con las dos ecuaciones). ¿Así? (Ambos miran alternativamente la hoja y las ecuaciones) Tiene 60 años más... sí, yo creo que sí (R asiente).

Resuelven correctamente el sistema incorrecto y descartan la solución por ser negativa. Retomamos el extracto cuando tienen escrito en el encerado el sistema $y + 60 = x$, $12x = 12 + 4y$.

L2. M: Dentro de 12 años, la edad de Gertrudis (pausa, al leer «Gertrudis» pronuncia más despacio, eleva el tono de voz y señala con el rotulador «12x») será igual (pausa, mira la hoja y señala el «=») a la edad (mirando la ecuación y señalando «12 + 4y») a 4y ... sí, este está bien. A ver... es que tiene que dar positivo.

Comienzan a resolver el sistema, pero antes de terminar lo descartan al anticipar que dará negativo. Detectan el error de operación equivocada y aceptan como válida la solución del sistema incorrecto $x = y + 60$, $12 + x = 12 + 4y$.

Este par realiza una traducción fragmentada aislando componentes del texto traducibles mediante una única relación aritmética, evidenciada en L1 por las pausas en la lectura y las verbalizaciones, y cuando retoma la lectura justo después de la última componente representada. No siguen una estrategia sintáctica porque al pasar al lenguaje algebraico varían la sintaxis del texto, con un «12» a ambos lados del «=». Construirían un modelo de problema correcto a nivel mental, pues en L1, tras verbalizar «dentro de 12 años», M ordena escribir un paréntesis, y después otro 12 a la derecha de este, conque sabría que la relación multiplicativa se refiere a las edades futuras.

Sin embargo, aunque la relación «dentro de 12 años» se represente dos veces, igualmente se traduciría de manera aislada. En efecto, las pausas en la verbalización en L1 y L2, y el hecho de que en L2 «dentro de 12 años» solo se verbalice una vez, indicarían que una vez que M sabe que la relación se establece en el futuro interrumpe el procesamiento de la información para representar el «12 +» a ambos lados del «=» y así descargar la memoria de trabajo. El procesamiento se reiniciaría en «cuatro veces», de forma desligada del «12 +» ya descargado de la memoria de trabajo, lo que desencadenaría el error en la ecuación.

Caso 5. Ana y Bea

Ana (A) y Bea (B) no usaron tablas. El extracto comienza tras leer B el enunciado y A escucharla y escribir «Gertrudis (x); Rigoberto (y)».

> L1. B: En la familia [...] nieto. (Relee la primera frase del enunciado). Vale, x es igual a *60y* (escribe «x = 60 y»), no, más y (corrige a «$x = 60 + y$»). Vale, dentro de doce años, la edad de Gertrudis (leyendo, pausa, gesto ascendente-descendente con la mano, terminando el movimiento y elevando el tono de voz en «Gertrudis») será (leyendo, pausa, asiente con la cabeza, mismo gesto con la mano) cuatro veces la de Rigoberto (pausa, asiente con la cabeza, mismo gesto con la mano y ascenso de tono de voz). Vale, eh... (mirando el encerado) x (pausa, gesto ascendente-descendente con la mano) más 12 (pausa, mismo gesto con la mano) es igual (pausa, asiente con la cabeza, mismo gesto con la mano) a cuatro y (pausa, mismo gesto con la mano. Instantes después A escribe «$x + 12 = 4y$»).

Resuelven correctamente el sistema incorrecto y obtienen $x = 84$, $y = 24$. Revisan la solución substituyendo los valores *84* y *24* en las ecuaciones y dan la solución por válida. En la primera parte de L1, cada pausa en el discurso de B, acompañada del gesto descendente con la mano, se corresponde con un componente del texto traducible con un solo símbolo algebraico o una sola relación aritmética. En la segunda parte de L1 se repiten las mismas pausas y gestos con la mano, correspondiéndose con la verbalización de la traducción al lenguaje algebraico de los componentes anteriores. Esta correspondencia en las pausas, junto con la traducción $x + 12 = 4y$, manteniendo la sintaxis del lenguaje natural, indica que B usa una estrategia sintáctica para escribir las ecuaciones, sin evidencias de construcción de un modelo de problema y cometiendo una polisemia de la y. Posteriormente, realizaron una revisión del sistema sustituyendo las letras por las soluciones halladas, sin detectar el error.

Respecto a los seis problemas, todos los pares construyeron siempre modelos de problema, excepto Ana y Bea, que lo hicieron en P1, pero siguieron una estrategia sintáctica de P2 a P6. La tabla 4 resume los resultados más destacados sobre el proceder de los pares de los Casos 1 a 5 de P1 a P6.

Tabla 4.
Resumen de resultados en los problemas P1-P6 para los Casos 1 a 5

Par	*Resultados*
R y L	En los dos problemas de edades, para L las tablas admiten deícticos y para R no. Traducción fragmentada de P1 a P6, que lleva a ecuaciones incorrectas (errores de polisemia, inversión, información extra). En P1, P3 y P5, tras detectar errores en la revisión por incompatibilidad con modelo de situación, R corrige a L haciendo traducción no fragmentada, y obtienen ecuaciones correctas.
T y B	Traducción fragmentada solo en P2 y P6, con ecuación incorrecta en P2. En P1 y de P3 a P6, ecuaciones correctas. En P5 existen dificultades para escribir ecuaciones una vez completada la tabla.
S e I	Traducción fragmentada siempre que conduce a errores (polisemia, inversión, operación equivocada, información extra). Detectan errores por incompatibilidad con modelo de situación. En P1, S corrige mediante traducción no fragmentada y obtiene la ecuación correcta. De P2 a P5 acaban desistiendo o con nuevos errores no detectados.
M y R	Traducción fragmentada excepto en P1, P4 y P5, con ecuaciones correctas en ellos y en P6. En P3, R corrige a M mediante traducción no fragmentada y obtiene la ecuación correcta. Solo revisan en P1.
A y B	Estrategia sintáctica con traducción fragmentada de P2 a P6 que lleva a ecuaciones incorrectas de P2 a P5 (polisemia, inversión, información extra). Revisiones sustituyendo valores y con interpretación fragmentada de ecuaciones sin detectar errores. En P1, traducción parcialmente fragmentada por grupos de componentes y ecuación correcta.

Nota: Solo en P1 y P6 una traducción fragmentada podía llevar a ecuaciones correctas. P1 y P6 fueron resueltos incorrectamente, respectivamente, por un solo par.

Sobre el resto de los pares, uno no usó tablas en los problemas de edades y los otros dos sí, pero en los tres casos la traducción fragmentada llevó a errores de inversión, polisemia o información extra, pese a construir un modelo de problema correcto. No se detectaron fenómenos diferentes a los vistos en los casos 1 a 5.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo analiza las diferencias y similitudes, en función de si se usan o no tablas, en la resolución algebraica de problemas de edades por estudiantes de 4.º de la ESO con rendimiento académico medio o medio-bajo en álgebra.

En cuanto al uso de tablas, pese a ser un sistema de signos institucional en el sentido de Arzarello et al. (2009), la interpretación personal de los estudiantes no siempre coincidió con la institucional, tal y como ocurre con otros sistemas (Ernest, 2006). Para algunos estudiantes, las letras en las expresiones algebraicas dentro de las tablas eran deícticos, siendo modificado su significado por el encabezado de la columna (por ejemplo, en el Caso 1). Sería un caso particular de la influencia del lenguaje natural al interpretar otros sistemas de signos (Kaput, 1989), que podría desencadenarse por combinar los lenguajes natural y algebraico en la propia tabla (véase L2 de Luz). Esta admisión de deícticos en la tabla provocó errores por letras polisémicas en las ecuaciones (Caso 2). Entonces, el uso de tablas puede suponer una dificultad en sí mismo, igual que ocurre con otras representaciones auxiliares que requieren un aprendizaje específico (Ainsworth, 2006; Rellensmann et al., 2017). Además, aunque la manifestación del error por letras polisémicas en las ecuaciones sea como en otros contextos (Cerdán, 2010; Filloy, Puig y Rojano, 2008; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Molina et al., 2017; Stacey y MacGregor, 2000), cuando se usan tablas su interpretación personal podría ser un desencadenante añadido.

Sobre las diferencias en la resolución en función de si se usan tablas o no, los estudiantes que las usaron construyeron un modelo de problema apoyándose en la disposición espacial de la tabla. En efecto, en todos esos casos, los estudiantes escrutaban y señalaban con gestos la tabla durante sus verbalizaciones y mientras reflexionaban. Además, hacían comentarios relacionando el enunciado verbal y las expresiones en la tabla y modificaban estas a lo largo de la resolución. Este uso de las tablas tiene rasgos comunes con el de los dibujos esquemáticos en problemas de modelización, pues para realizar el dibujo es necesario saber qué elementos intervienen en el problema y, a su vez, el dibujo muestra las relaciones entre esos elementos (Rellensmann et al., 2017). Algo similar ocurre con los diagramas de cinta en problemas aritméticos y algebraicos (Ng y Lee, 2009). Cuando no usaron tablas, en ocasiones también pudieron construir un modelo de problema (véase Caso 4), pero en otras aplicaron la estrategia sintáctica (Caso 5). Esto concuerda con lo reportado por Ding et al. (2019) sobre el mayor uso de la estrategia sintáctica cuando no se usan representaciones intermedias, y por Ding y Li (2014), Duval (2017) o Kieran (2007) sobre la utilidad de estas para dar significado al simbolismo algebraico. Una explicación sería que la reflexión durante la resolución –parafraseo del enunciado, comentarios sobre este, producciones escritas– y el tiempo de resolución fueron mayores cuando se usaron tablas, pues eso coincidiría con los efectos, detectados por Neuman y Schwarz (2000) en problemas de mezclas, de las explicaciones dadas por el resolutor a sí mismo a partir de la tabla.

No obstante, en el estudio de Neuman y Schwartz (2000), las dificultades de los resolutores con las tablas se concentraban en el paso del lenguaje natural a la tabla, mientras que en el presente estudio se encontraron al pasar de la tabla a la ecuación. En efecto, salvo Rosa y Luz (Caso 1), que negociaron el significado de las letras en la tabla debido a sus distintas interpretaciones personales de esta, el resto de los pares apenas necesitó diálogo para acordar su estructura o las expresiones algebraicas que había que incluir en ella. Las dudas y modificaciones de escrituras previas se concentraron al plantear la ecuación una vez que cada celda contenía ya una expresión (por ejemplo, en los casos 2 y 3). Una explicación sería que en el estudio de Neuman y Schwartz (2000) las ecuaciones obtenidas a partir de la tabla solo tenían letras a la izquierda del signo igual. Además, los problemas de edades podrían tener características específicas que dificultan su resolución, pues usando hojas de cálculo (Arnau y Puig, 2013) o diagramas de cinta (Ng y Lee, 2009) con estos problemas también se obtuvieron peores resultados que con otros.

Sobre los fenómenos observados en ambas formas de resolución, con y sin tablas, por una parte, algunos pares no aludieron al modelo de situación mientras planteaban la ecuación, pero en todos los casos solo aceptaron como correctas aquellas soluciones incorrectas compatibles con un modelo de situación plausible. Esto también ocurrió en los casos en los que siguieron una estrategia sintáctica, corroborando lo apuntado por Sanjosé et al. (2009) sobre lo relativamente fácil que resulta construir un modelo de situación comparado con construir un modelo de problema a partir de él.

Por otra parte, también se detectó, tanto en resoluciones con tablas como sin ellas, un fenómeno de traducción fragmentada del lenguaje natural al algebraico, construyendo el modelo de problema a medida que se traducía. Durante la relectura del enunciado, en cuanto los estudiantes retoman una componente de la oración traducible con un único símbolo o relación aritmética, interrumpían la lectura para representarla algebraicamente, y retomaban el proceso en la siguiente componente. Esto provocó errores en las expresiones algebraicas, pues al retomar la traducción del enunciado los estudiantes dejaban de tener en cuenta componentes anteriores ya representadas pero que afectaban a la representación de las siguientes (por ejemplo, en el extracto 1 del Caso 2 con tablas, o en los casos 4 y 5 sin tablas).

Existen varias explicaciones plausibles de la traducción fragmentada. Una sería que producir expresiones algebraicas es una meta de la tarea en cualquier resolución algebraica, por lo que condiciona la lectura del enunciado (Kintsch, 1998), orientándola a esa meta inmediata. Otra sería que, para hacer la traducción, han de cargarse en la memoria de trabajo las proposiciones verbales que se van a traducir, las reglas del lenguaje algebraico y los símbolos que se emplearán, con todos esos elementos interaccionando entre sí. Según Phan et al. (2017), la cantidad de elementos que interaccionan al mismo tiempo es lo que determina la carga cognitiva, y solo los resolutores con buen dominio del lenguaje algebraico podrían movilizar sus reglas y símbolos como un único elemento, sin saturar la memoria de trabajo (Phan et al., 2017). Esto es coherente con que la traducción fragmentada al lenguaje aritmético no causó errores (por ejemplo, en el Caso 3), pues dada su edad los estudiantes dominarían este lenguaje. Todo en conjunto justificaría que muchos estudiantes puedan resolver problemas aritmética pero no algebraicamente (Stacey y McGregor, 2000). La tendencia a la traducción fragmentada al álgebra en resolutores no expertos se explicaría también porque las personas tienden a usar la estrategia con la que prevén una menor carga cognitiva (Uesaka y Manalo, 2012). Una forma de reducir la carga de la resolución algebraica sería reducir el número de elementos que interaccionan tomando la menor cantidad posible de componentes verbales que traducir en cada momento.

Acerca de los errores, sus manifestaciones en las ecuaciones (polisemia de la letra, error de inversión, operación equivocada, información extra) se identifican con las catalogadas en la literatura (por ejemplo, Cerdán, 2010; Clement, 1982; Molina et al., 2017) y fueron análogas en las resoluciones con y sin tablas.

Sobre los procesos subyacentes tras esos errores, en los pares que no usaron tablas, el error provino a veces de aplicar la estrategia sintáctica sin construir un modelo de problema (Caso 5), mientras que los que las usaron construyeron siempre un modelo de problema y, cuando además revisaron la solución, mostraron que el modelo era correcto a nivel mental (por ejemplo, en el Caso 3). Usando el lenguaje aritmético con valores concretos, expresaron sin dificultad modelos de problema correctos y detectaron el error en las ecuaciones (Caso 3). En cambio, los pares que no usaron tablas solo detectaron aquellas soluciones erróneas incompatibles con el modelo de situación (Caso 4). No obstante, cabe destacar que la traducción fragmentada al lenguaje algebraico fue un proceso subyacente tras los errores en las ecuaciones tanto con tablas (casos 2 y 3) como sin ellas (casos 4 y 5). Esto es fundamental, pues hace que el uso de tablas no palíe errores con este origen, lo que afectaría principalmente a los tipos de errores más ligados a la coordinación entre lenguajes. Según la clasificación de Molina et al. (2017), serían los derivados de las características del simbolismo algebraico y los relativos a la compleción del enunciado. Esto explicaría en parte lo duradero de las dificultades de los estudiantes con la resolución algebraica (Kieran, 2007), pues los errores derivados de las características del simbolismo algebraico son los más persistentes (Molina et al., 2017).

Como implicaciones didácticas, estos resultados muestran que emplear tablas es útil para construir el modelo de problema y evitar la estrategia sintáctica en resolutores no expertos, en línea con lo reportado por Ding et al. (2019) y Ng y Lee (2009) para otras representaciones auxiliares. Sin embargo, también indican la pertinencia de reforzar el dominio del lenguaje algebraico y de explicitar sus diferencias estructurales con el lenguaje natural y las consecuencias de la traducción fragmentada. Esto incluye el convenio de uso de las tablas y la interferencia con el lenguaje natural en cuanto a la admisión de deícticos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación PGC2018-096463-BI00 del Programa Estatal de Generación de Conocimiento y Fortalecimiento Científico y Tecnológico del Sistema de I+D+i, financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades y la Agencia Estatal de Investigación.

REFERENCIAS

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*, 183-198. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(3), 49-66. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.967

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 97-109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.

Bieda, K. N. y Nathan, M. J. (2009). Representational disfluency in algebra: evidence from student gestures and speech. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 637-650. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0198-0

Bloedy-Vinner, H. (1996). The analgebraic mode of thinking and other errors in word problem solving. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 105-112). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, *4*(3), 99-110. https://doi.org/10.30827/pna.v4i3.6164

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30. https://doi.org/10.2307/748434

Ding, M., Chen, W. y Hassler, R. S. (2019). Linear quantity models in US and Chinese elementary mathematics classrooms. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 105-130. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570834

Ding, M. y Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: The distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics*, *87*, 103-121. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9558-y

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking - The Registers of semiotic representations*. Springer International Publishing.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 67-101. https://doi.org/10.1007/s10649-006-6423-7

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3), 327-342. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3746

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Springer.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems Dealing with Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(1), 52-80. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.1.0052

Kaput, J. J. (1989). Toward a theory of symbol use in Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-196). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Information Age Publishing.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension. A paradigm for cognition*. Cambridge University Press.

McNeil, N. M. y Fyfe, E. R. (2012). «Concreteness fading» promotes transfer of mathematical knowledge. *Leaning and Instruction*, *22*(6), 440-448. https://doi.org/10.1016/j.leaminstruc.2012.05.001

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, 169-546.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1137-1156.
https://doi.org/10.1007/s10763-016-9739-5

Nathan, M. J., Kintsch, W. y Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction*, *9*(4), 329-389.
https://doi.org/10.1207/s1532690xci0904_2

Neuman, Y. y Schwarz, B. (2000). Substituting one mystery for another: the role of self-explanations in solving algebra word-problems. *Learning and Instruction*, *10*, 203-220.
https://doi.org/10.1016/S0959-4752(99)00027-4

Ng, S. y Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 282-313.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0282

Peräkylä, A. (2005). Analysing talk and text. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (pp. 869-886). SAGE Publications.

Phan, H. P., Ngu, B. H. y Yeung, A. S. (2017). Achieving optimal best: Instructional efficiency and the use of cognitive load theory in mathematical problem solving. *Educational Psychology Review*, *29*(4), 667-692.
https://doi.org/10.1007/s10648-016-9373-3

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 237-268.
https://doi.org/10.1023/A:1017530828058

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.
https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L., Bardini, C. y Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(5), 507-530.
https://doi.org/10.2307/30034963

Rellensmann, J., Schukajlov, S. y Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*, 53-78.
https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J. J. y Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de traducción algebraica. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 169-184. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3729

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Soneira, C. (2022). The Use of Representations when Solving Algebra Word Problems and the Sources of Solution Errors. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(5), 1037-1056. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10181-2

Soneira, C., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2018). Indexical Expressions in Word Problems and their Influence on Multiple Referents of the Unknown. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(6), 1147-1167. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9824-4

Stacey, K. y MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149-16. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Uesaka, Y. y Manalo, E. (2012). Task-Related Factors that Influence the Spontaneous Use of Diagrams in Math Word Problems. *Applied Cognitive Psychology*, *26*(2), 251-260. https://doi.org/10.1002/acp.1816

A Comparison of Algebraic Resolutions of Age Problems Using and Without Using Tables

Carlos Soneira
Departamento de Pedagogía y Didáctica, Universidade da Coruña, A Coruña, España
carlos.soneira@udc.es

The algebraic solving of word problems is a relevant topic in secondary education, but students face difficulties when posing the equations that represent the problem structure. Indeed, errors in the resulting equations, such as the polysemy of the letter, reversal errors, wrong operation, or extra information, are widespread. What is more, the same error can be triggered by different cognitive process. On the one hand, the solver can follow a syntactic strategy and translate the words of the verbal statement into symbols in algebraic language, preserving the order of the meaningful pieces of information without inferring the network of relationships between the known and unknow quantities –the problem model. On the other hand, the solver may construct a valid problem model in their mind, but make errors when expressing it into equations.

Using auxiliary representations as a bridge between the natural and the algebraic languages has been proposed as way to ease the access to the algebraic solving. Particularly, in the case of the called age problems, tables –tabular configurations with headings for rows and columns specifying a character and a point in time, as well as an expression in algebraic language in each cell representing the corresponding age– are widely used. Even more, it is common for the format and way of using such tables to be explicitly taught in the classroom, which means that the tables become a sign system with socially shared rules. However, prior research has not found a significative difference in the rate of successful solutions depending on whether the solver uses tables or not.

In this article, the performances of eight pairs of secondary school students in speaking-aloud problem sessions were analysed. Their discourse, written inscriptions in the blackboard, gestures, tone of voice, and pauses in speech, were analysed together. The performances in which students used tables were compared with those in which they did not.

The aims were to identify the commonalities and the differences in the construction and expression of the problem model, and to determine the processes underlying errors in each case.

The results showed that as long as the students used tables, they constructed a correct problem model by relying on both the table and the problem statement. When they did not, however, they sometimes mentally constructed a correct problem model, but in other cases followed a syntactic strategy. This was the main difference between both solving procedures. However, the errors in the equations were the same in both procedures, and so did the origin of the errors: the fragmented translation from the natural to the algebraic language. Specifically, students tended to stop the processing of the problem statement when they identified a piece of information which could be translated by means of just one algebraic symbol or a single arithmetic relationship, and to restart the process only after having written the corresponding symbol. This caused that they no longer considered parts of the statement which they had already translated, but which –according to the structural rules of the natural language– did modify the meaning of other parts of the statement not yet translated. Moreover, the fragmented translation seemed to cause errors just when the target of the translation was the algebraic language, because when translating to the arithmetic language errors were not made. This suggests that using the algebraic language may overload the students' working memory and that they download the already translated information to make room for the structural rules of the algebraic language and the remaining pieces of information.

Furthermore, the results showed that students may use tables as an idiosyncratic sign system which admits deictic expressions –as in natural language–, which in turn causes errors when translating to the algebraic language. This could pose an additional difficulty linked to the use of tables.