

Filtro de Kalman para captura de movimiento con estimación de esfuerzos motores y reacciones en tiempo real

Manuel Pérez Soto

Directores: Urbano LUGRÍS ARMESTO
Javier CUADRADO ARANDA

Tesis doctoral



Programa Oficial de Doctorado en Ingeniería Naval e
Industrial

Ferrol, 2022

Dr. Urbano LUGRÍS ARMESTO, Doctor por la Universidad da Coruña, Dr. Javier CUADRADO ARANDA, Doctor por la Universidad de Navarra, certifican que la presente memoria, titulada *Filtro de Kalman para captura de movimiento con estimación de esfuerzos motores y reacciones en tiempo real*, ha sido desarrollada por Manuel Pérez Soto bajo su supervisión para optar al grado de Doctor por la Universidad da Coruña.

Ferrol, 2022.

Manuel Pérez Soto
Doctorando

Dr. Urbano LUGRÍS ARMESTO
Director

Dr. Javier CUADRADO ARANDA
Director

Agradecimientos

Se tiende a pensar que la defensa de una tesis doctoral es un mérito individual pero, nada más lejos de la realidad. Para poder llevar a cabo un proyecto así es necesario el apoyo y ayuda de muchas personas, sin las cuales este objetivo no sería más que un sueño.

Lo primero de todo, me gustaría agradecer a quienes me han guiado a lo largo de estos años y de quienes he tenido la oportunidad de aprender la inmensa mayoría de las cosas que sé, mis tutores Urbano y Javier. Por otro lado quiero agradecer a mis compañeros en el día a día del Laboratorio de Ingeniería Mecánica de la Universidade da Coruña por el gran ambiente de trabajo que crean, sin el cual todo sería mucho más aburrido y pesado: Miguel, Fran Mouzo, Daniel, Antonio, Alberto, Fran Glez., Borja, Lolo, Emilio, Álvaro, Sarath, Mario, Fran Bottero y Diego. Me gustaría dar especial mención a Florian, que ha sido mi compañero de batallas estos años, del que he aprendido muchísimo y que desde el primer día se preocupó que aprendiera tanto de la teoría, como su implementación a la práctica.

En el ámbito personal quiero agradecer a todos mis amigos de Valencia que aún desde la distancia han seguido apoyándome y haciéndome sentir como si no me hubiese ido nunca cada vez que volvía a casa. A toda la gente que he conocido aquí, por hacer mi estancia aquí la mejor experiencia posible, en especial a Ángel y Esteban.

Por último, agradecer a todos los miembros de mi familia su apoyo y comprensión durante estos años. Destacar especialmente a mis abuelas, Ledy y Dianora, a mis tíos Nani y Miguel así como a mis primos Luismi, Nanita, Juan y Marta por la paciencia que me han tenido, primero acogéndome en su casa y luego haciéndome sentir como un hijo/hermano más. Para finalizar, a quién a pesar de estar en la otra punta de España, los he sentido siempre cerca, y sin los cuales todo lo que he conseguido habría sido imposible. Gracias a mis padres Jesús y María Paola por ayudarme y aconsejarme siempre que lo he necesitado y a mi hermana Virginia, por ser mi mejor amiga y mi mayor apoyo siempre.

Resumo

O obxecto do presente traballo é o desenvolvemento dun método para realizar capturas de movemento mediante marcadores ópticos e placas de forza, de modo que se poida reconstruír e visualizar o movemento en tempo real, así como estimar valores derivados do mesmo, tales como esforzos motores e reaccións articulares.

Ter a posibilidade de capturar e reconstruír o movemento en tempo real pode ser útil por múltiples motivos: por unha banda, permitirá coñecer no momento se unha captura resultou válida, e, doutra banda, servirá para xerar aplicacións de *biofeedback* en tempo real para rehabilitación, deportes, videoxogos, etc., onde a entrada é o movemento do usuario capturado en tempo real.

Para conseguir todos estes obxectivos, desenvolverase un filtro de Kalman baseado nun modelo dinámico do sistema esquelético, que utilice como sensores os marcadores ópticos e as placas de forza.

Resumen

El objeto del presente trabajo es el desarrollo de un método para realizar capturas de movimiento mediante marcadores ópticos y placas de fuerza, de modo que se pueda reconstruir y visualizar el movimiento en tiempo real, así como estimar valores derivados del mismo, tales como esfuerzos motores y reacciones articulares.

Tener la posibilidad de capturar y reconstruir el movimiento en tiempo real puede ser útil por múltiples motivos: por un lado, permitirá conocer en el momento si una captura ha resultado válida, y, por otro lado, servirá para generar aplicaciones de *biofeedback* en tiempo real para rehabilitación, deportes, videojuegos, etc., donde la entrada es el movimiento del usuario capturado en tiempo real.

Para conseguir todos estos objetivos, se desarrollará un filtro de Kalman basado en un modelo dinámico del sistema esquelético, que utilice como sensores los marcadores ópticos y las placas de fuerza.

Abstract

The object of the present work is the development of a method to perform motion capture by means of optical markers and force plates, being able to reconstruct and visualize the movement in real time, as well as to estimate derivative values, such as motor efforts and joint reaction forces.

Having the possibility to capture and reconstruct the movement in real time can be useful for multiple reasons: on the one hand, it will allow to assess right away if a capture has been successful, and, on the other hand, will serve to generate real-time biofeedback applications for rehabilitation, sports, video games, etc., where the input is the movement of the user captured in real time.

In order to achieve these goals, a Kalman filter based on a dynamic model of the skeletal system, using the optical markers and force plates as sensors, will be developed.

Índice

Lista de Figuras	III
Lista de Tablas	V
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Estado del arte	2
1.2.1. Modelos en biomecánica	2
1.2.2. <i>Biofeedback</i>	6
1.2.3. Observadores de estado en biomecánica	6
1.3. Objetivos	9
1.4. Esquema de la tesis	9
2. Fundamentos teóricos del filtro	11
2.1. Dinámica de sistemas multicuerpo	11
2.1.1. Formulación dinámica	13
2.1.2. Integradores	14
2.2. Captura de movimiento	16
2.2.1. Captura basada en marcadores ópticos	17
2.2.2. Reconstrucción del movimiento	18
2.2.3. Medición de reacciones	19
2.3. Filtro de Kalman	20
2.3.1. Filtro de Kalman extendido (EKF)	21
3. Observadores de estado en biomecánica	27
3.1. Estimación de esfuerzos con observador cinemático	27
3.1.1. Modelo de planta	28
3.1.2. Modelo de observación	29
3.1.3. Dinámica inversa	30
3.2. Estimación de esfuerzos con observador dinámico	32
3.2.1. Ecuaciones del modelo multicuerpo	32
3.2.2. Integración	35
3.2.3. Implementación del filtro de Kalman	36
3.3. Validación del filtro	39
3.3.1. Modelo de doble péndulo bidimensional	39
3.3.2. Implementación del filtro	41
3.3.3. Metodología	42

Índice

3.3.4. Resultados	43
4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real	55
4.1. Filtro completo	55
4.1.1. Escalado del modelo	55
4.1.2. Parámetros inerciales	58
4.1.3. Seguimiento de marcadores	60
4.1.4. Definición del filtro dinámico	61
4.2. Resultados	65
4.2.1. Implementación a lenguaje compilado	73
5. Conclusiones	75
5.1. Futuros estudios	76
Referencias	77
Anexos	85
Anexo A. Resultados Benchmark	87

Lista de Figuras

1.1. Planos anatómicos	3
1.2. Modelo tridimensional del cuerpo humano	4
1.3. Modelo músculo–esquelético del tren inferior	4
1.4. Modelo bidimensional del cuerpo humano	5
1.5. Estimación de fuerzas de reacción del suelo durante movimientos asociados al deporte [35]	7
2.1. Configuración de marcadores ópticos	18
2.2. Planteamiento para la definición de la articulación del tobillo [58]	19
3.1. Modelo humano 3D: (a) Salida gráfica; (b) Modelo multicuerpo con articulaciones (puntos negros), marcadores (puntos blancos) y ejes locales de cada sólido	28
3.2. Posicionamiento de marcadores	30
3.3. Bucle predicción-corrección del Kalman cinemático	30
3.4. Ejemplo cadena abierta	35
3.5. Modelo de doble péndulo	40
3.6. Esfuerzos y sensores en el doble péndulo	41
3.7. Ejemplo de ruido generado para los marcadores virtuales: ruido de baja amplitud y alta frecuencia de las cámaras (arriba), y ruido de mayor amplitud y baja frecuencia simulando el movimiento de la piel (abajo)	44
3.8. Ángulos θ_1 y θ_2 del movimiento a analizar	45
3.9. Velocidades $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ del movimiento a analizar	46
3.10. Posición del marcador 3 del movimiento a analizar	46
3.11. Fuerzas F_x , F_y , T_2 y τ_1 del movimiento a analizar	47
3.12. Evolución de RMS del momento estimado en relación a la covarianza de la aceleración para el modelo <i>FCDI</i>	47
3.13. Evolución de RMS del par estimado en relación a la covarianza	48
3.14. Evolución de RMS de las posiciones estimadas en relación a la covarianza	48
3.15. Evolución de RMS de las velocidades estimadas en relación a la covarianza	49
3.16. Comparación estimación posiciones de <i>FCDI</i> con el <i>FD</i>	49
3.17. Comparación estimación posiciones de <i>FCDI</i> con el <i>FD</i>	50
3.18. Comparación estimación fuerza de <i>FCDI</i> con el <i>FD</i>	50
3.19. Comparación estimación fuerza de <i>FD</i> con <i>FDMC</i>	51
3.20. Comparación estimación fuerza de <i>FD</i> con <i>FDMC</i> con mala estimación de masas con restricción residual alta	52

Lista de Figuras

3.21. Comparación estimación fuerza de FD con $FDMC$ con mala estimación de masas con restricción residual baja	52
3.22. Evolución ángulo θ_1 y $\dot{\theta}_1$ con oclusión de marcadores	54
3.23. Estimación de fuerzas en caso de oclusión de marcadores	54
4.1. Desviación de los marcadores medidos por las cámaras (rojo) respecto a su posición en el modelo de referencia (verde). Izquierda: posiciones de referencia antes de la corrección. Derecha: posiciones locales tras la corrección	58
4.2. Diagrama de placa de fuerza	62
4.3. Secuencia a analizar	65
4.4. Ángulos de Euler de la cadera derecha	67
4.5. Derivadas de los ángulos de Euler de la cadera derecha	67
4.6. Momentos externos en plano el sagital de la pierna izquierda para captura de movimiento general	68
4.7. Fuerzas de residuo para captura de movimiento general	68
4.8. Secuencia de sentadilla	69
4.9. Ángulos de Euler en la rodilla derecha durante captura de sentadillas	69
4.10. Derivadas de los ángulos de Euler en la rodilla derecha durante captura de sentadillas	70
4.11. Momentos externos en el plano sagital de la pierna derecha para captura de sentadillas	70
4.12. Residuo para captura de sentadillas	71
4.13. Comparación de estimación de ángulos de Euler para la rodilla derecha durante sentadillas con pérdida de marcadores	72
4.14. Comparación de esfuerzos externos en la rodilla derecha durante sentadillas con pérdida de marcadores	72
4.15. Esfuerzos motores para salto en tobillo derecho	73

Lista de Tablas

3.1. Especificaciones Movimiento Análisis	45
4.1. Factores de escala independientes	57
4.2. Masas, posiciones locales de centros de gravedad y momentos de inercia de referencia asumidos en el modelo	59
4.3. Covarianzas definidas en el filtro	66
4.4. Relación entre tiempo de captura y tiempo de CPU en diferentes tipos de lenguaje	74
A.1. Especificaciones resultados <i>benchmark</i>	87
A.2. Resultados del doble péndulo en el filtro dinámico, para diferentes com- binaciones de integrador, matriz de propagación de estados y matriz de covarianza del ruido de planta	88
A.3. Comparación entre matriz de sensibilidad completa y simplificada	89

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

El movimiento humano ha sido objeto de estudio por parte de investigadores en biomecánica desde el siglo XVII, época de la que data el primer documento asociado al análisis del movimiento humano, "De motu animalium" de Borelli. No fue hasta el siglo XIX cuando los hermanos Weber hicieron un primer estudio donde describían las fases de la marcha humana y del movimiento del centro de masas durante la misma, siendo este el primer registro que se tiene de estudios en este ámbito. Desde ese momento, y con el avance de la tecnología, los análisis que se han podido realizar han ido aumentando progresivamente su complejidad y detalle.

Pero no fue hasta la década de 1970 cuando, con la creación de los métodos de dinámica de sistemas multicuerpo (DSM) [1] y la aparición de la simulación por ordenador, se dio un salto considerable en la investigación en este ámbito. Estos planteamientos de DSM permitían la simulación de todo tipo de máquinas, especialmente de vehículos, y la estimación del comportamiento de mecanismos sin la necesidad de construirlos. De esta manera, se podía simular y analizar el movimiento humano partiendo de unos modelos que avanzaban en complejidad, a la par que aumentaba la potencia computacional disponible.

De forma prácticamente paralela, surgieron los primeros filtros de Kalman. El primer filtro de Kalman [2] nació en 1960 con el objetivo de poder estimar valores no medibles dentro de un sistema lineal. En avance con su predecesor, el observador de Luenberger, este permitía una estimación óptima incluso trabajando con señales afectadas por ruido blanco. Fue tal su potencial, que sólo un año después Stanley F. Schmidt se interesó por el mismo para, posteriormente, implementarlo en la carrera espacial como parte del sistema de navegación del proyecto Apollo de la NASA.

El gran avance que supuso la creación del filtro de Kalman es la capacidad de estimar unos valores que no pueden obtenerse con sensor alguno en tiempo real. Esto es debido a su propia definición, ya que es un algoritmo recursivo, que depende exclusivamente de los inputs del instante de tiempo a calcular, de los estados en instantes previos y de una matriz de ganancia que el propio sistema es capaz de determinar en función de las covarianzas de los ruidos que afectan al sistema.

En la intersección de estos dos campos es donde encontramos la presente tesis. Con los avances tecnológicos de los que se dispone en la actualidad, y los avances en la estimación de estados, ya es posible hacer una simulación en tiempo real del movimiento del cuerpo

1. Introducción

humano. El presente documento tiene como objetivo el diseño y desarrollo de un observador que sea capaz no sólo de obtener una simulación del cuerpo humano en tiempo real, sino también un análisis, de forma que se obtengan pares articulares y reacciones externas.

Con esto se pretende obtener un filtro de Kalman que, introduciendo la dinámica, sea capaz de obtener una estimación de los pares motores en tiempo real. Debido a este nuevo planteamiento, se espera mejorar la robustez del sistema de captura en situaciones de oclusión o cruce de marcadores, ya que el sistema llevará implícito un cálculo dinámico. Además, se tendrá también una herramienta de rehabilitación basada en *biofeedback* notablemente más compleja y detallada que muchas de las conocidas en la actualidad.

1.2 Estado del arte

1.2.1 Modelos en biomecánica

Lo primero que hay que tener claro cuando se trabaja en el ámbito de la biomecánica es el término modelo. En resumidas cuentas, un modelo biomecánico es la representación matemática y física que se hace del cuerpo humano. Es decir, es una aproximación matemática que pretende estimar como se comportaría el cuerpo humano bajo unas condiciones de trabajo específicas. Estos modelos son los que posteriormente se utilizarán para la simulación mediante DSM.

Para estos modelos matemáticos deben hacerse una serie de simplificaciones, con el objetivo de tener modelos abordables. De lo contrario, se tendrían problemas difícilmente resolubles con la tecnología y conocimientos actuales. Algunas de las simplificaciones que se consideran generalmente para el diseño de estos modelos son:

- Los huesos son sólidos rígidos y homogéneos.
- Se suponen articulaciones sin fricción y teóricas perfectas.

Por lo que respecta a los esfuerzos que se pueden asociar a un movimiento, estos se dividirán básicamente en dos tipos:

- Fuerzas gravitacionales e inerciales: estas pueden ser gravitacionales, que son las asociadas al peso y actúan en el CM de cada sólido, o bien inerciales, asociadas a la distribución de masas y al movimiento de cada sólido del sistema.
- Fuerzas externas: fuerzas aplicadas al modelo, que serán las encargadas de generar el movimiento, o bien consecuencia de la interacción del sujeto con el medio:
 - Esfuerzos articulares: son los pares motores que provocan el movimiento del cuerpo. Estos pueden estar asociados a fuerzas musculares y de ligamento en modelos músculo–esqueléticos, o considerarse como pares externos provocados por el equivalente a un motor en modelos puramente esqueléticos.
 - Esfuerzos de reacción con el suelo: esfuerzos provocados por el contacto del modelo con el suelo.

Se definirán los diferentes planos anatómicos según se muestra en la Figura 1.1, que se resumen en tres planos principales [3]:

- Plano sagital: es el plano que pasa en dirección vertical por la sutura sagital del cráneo, y divide el cuerpo en sus lados izquierdo y derecho. En este plano se podrán encontrar la mayoría de movimientos de flexión y extensión articular.
- Plano transversal: es el plano que atraviesa horizontalmente el cuerpo, para dividirlo en tren superior e inferior. En este plano se pueden diferenciar los movimientos de rotación lateral y medial.
- Plano coronal: es el plano que pasa por la mitad de la cabeza y divide el cuerpo en anterior y posterior. En este plano se pueden apreciar los movimientos de abducción y aducción.

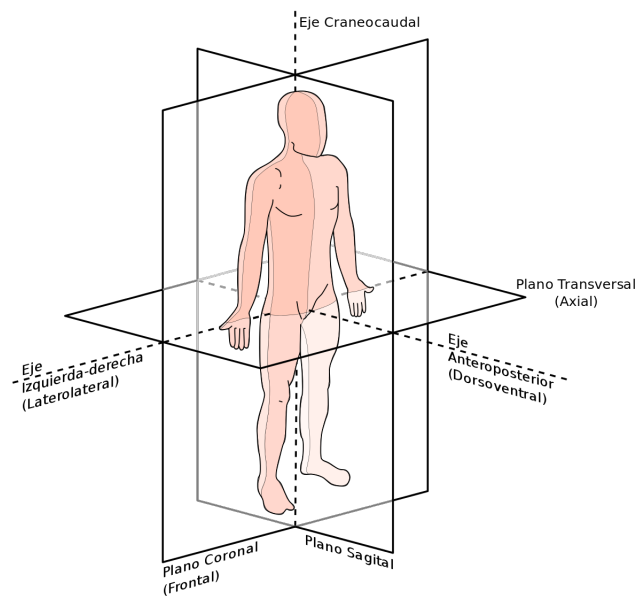


Figura 1.1: Planos anatómicos

1.2.1.1 Detalle del modelo

Los modelos biomecánicos se pueden dividir en varias ramas, en función del grado de detalle con el que se quiera trabajar. Las dos ramas más comunes son el modelado a nivel esquelético (Figura 1.2) y el modelado a nivel músculo–esquelético (Figura 1.3).

En una representación esquelética, se supone que los movimientos son producidos por pares externos aplicados a las articulaciones. Sin embargo, en el modelo músculo–esquelético, las fuerzas musculares son las que provocan los pares articulares. Este análisis muscular se puede abordar mediante diferentes modelos del complejo músculo–tendón, con diferentes grados de detalle y coste computacional [4, 5].

Como es lógico pensar, el coste computacional de este tipo de problemas es considerablemente alto, por lo que se busca optimizar el modelado lo máximo posible. Por esto se tiende a utilizar modelos basados en cadenas cinemáticas abiertas, de forma que sea posible hacer un desarrollo recursivo [6] o semirrecursivo [7], agilizando notablemente la resolución del sistema.

1. Introducción

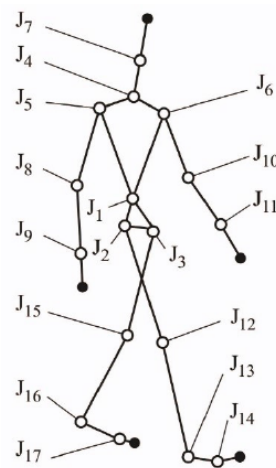


Figura 1.2: Modelo tridimensional del cuerpo humano



Figura 1.3: Modelo músculo–esquelético del tren inferior

Sea cual sea el planteamiento, se supondrá el esqueleto como un mecanismo formado por una serie de sólidos rígidos unidos entre sí mediante pares cinemáticos. La definición de este mecanismo dependerá del objeto a estudiar para cada caso, ya que los objetivos pueden ser variados, desde obtener una simulación lo más realista posible en tiempo real del cuerpo completo [8], a una simulación *offline* del tren inferior exclusivamente [9], pasando por el análisis de un modelo tridimensional del tren inferior [10].

Un modelo esquelético típico de cuerpo completo es el que parte de un sistema de 16 segmentos, unidos entre sí mediante articulaciones esféricas: pelvis, tronco, cuello, cabeza, brazos, antebrazos, manos, muslos, piernas y pies. Es frecuente agregar una articulación entre las falanges y los metatarsos en los pies, permitiendo así una representación más detallada de movimientos como la marcha.

La suposición de pares esféricos es una simplificación que no siempre es aceptable. Un ejemplo típico es la articulación del hombro, cuya modelización se suele reducir a una articulación esférica entre la caja torácica como un único sólido y el húmero del brazo correspondiente. Si el estudio lo requiere, existen modelos más complejos que permiten capturar la movilidad completa de la cintura escapular, aunque son bastante más complejos,

dado que implican el uso de cadenas cinemáticas cerradas [11].

Como norma general, se suele trabajar con modelos tridimensionales, con el objetivo de obtener resultados más precisos y acordes a la realidad. Sin embargo es frecuente encontrarse modelos bidimensionales dependiendo del movimiento que se pretenda analizar, ya que computacionalmente son más livianos y además su complejidad es considerablemente inferior. Por esto, es común encontrarse *benchmarks* de análisis bidimensional [12], ya que, además, una gran cantidad de movimientos cotidianos pueden reducirse de forma sencilla a un movimiento en alguno de los planos del cuerpo ya descritos en la Figura 1.1.

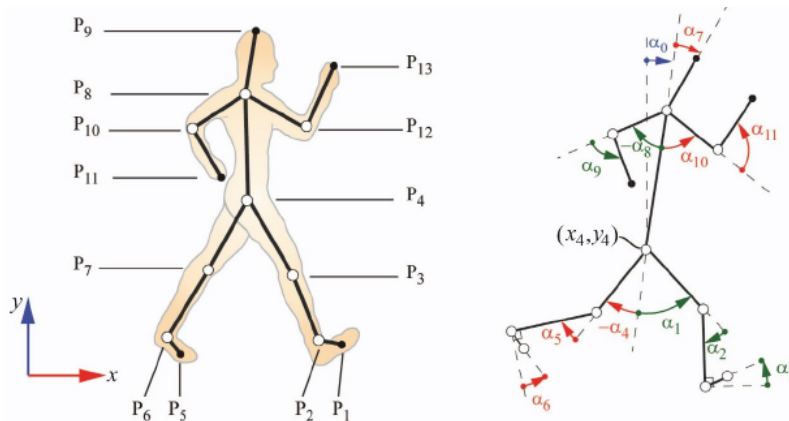


Figura 1.4: Modelo bidimensional del cuerpo humano

A la hora de definir el diseño de nuestro modelo, hay que diferenciar entre captura de movimiento, simulación de dinámica directa y análisis de dinámica inversa. El objetivo de la primera es esencialmente reproducir de la manera más exacta posible el movimiento grabado por el sistema de captura. La simulación de dinámica directa consiste en obtener el movimiento provocado en el modelo por unas fuerzas aplicadas determinadas. Por último, la dinámica inversa tiene como objetivo, conocida la cinemática del modelo, hacer una estimación de las fuerzas causantes de dicho movimiento. Los cálculos dinámicos para una captura se consideran aproximaciones, ya que encontramos numerosas fuentes de error que desviarán nuestra solución del valor real. Por un lado, tendremos fuentes de error que vendrán asociadas a problemas propios del proceso de captura [13, 14, 15]. A esto hay que añadirle, como mínimo, posibles errores de parametrización de masas e inercias de nuestro sistema [16, 17]. Además hay que tener en cuenta otros muchos factores relevantes inherentes a una estimación de dinámica inversa del cuerpo humano, como pueden ser la gestión de las fuerzas residuales del modelo [18], o bien la estimación de fuerzas en situaciones de indeterminación de apoyo durante el movimiento [19].

El modelado, por tanto, dependerá del objetivo que se desee. Primero, se debe determinar si se quiere una simulación o un análisis. Posteriormente definir el grado de detalle que se quiere obtener. Si se busca un resultado más exacto, se pueden utilizar modelos más complejos y precisos pero menos eficientes, o bien, si se busca una estimación en tiempo real, se tiene que llegar a un modelado que conlleve un compromiso entre precisión y eficiencia, de forma que el sistema funcione de la forma más rápida posible sin penalizar de forma significativa la precisión de los resultados.

1. Introducción

1.2.2 *Biofeedback*

Uno de los posibles objetivos del desarrollo de simulaciones biomecánicas en tiempo real es el *biofeedback*. El *biofeedback* se define como el proceso por el cual un individuo es capaz de recibir información de parámetros biológicos en tiempo real. Esta realimentación o *feedback* recibido por el sujeto se puede dividir principalmente en dos grandes grupos, información biomecánica e información fisiológica. Entenderemos como información biomecánica las medidas que se hagan que estén asociadas al movimiento (posiciones, velocidades o aceleraciones), al control postural o a las fuerzas producidas por el cuerpo. Este tipo de medida suele ser más compleja que la fisiológica, ya que un mismo sensor puede aportar a la vez tanto información postural, como asociada a la fuerza (las placas de fuerza) [20]. Por su parte la información fisiológica es la que viene como resultado de la medición directa de una función específica de algún sistema corporal (sistema neuromuscular, respiratorio o cardiovascular, principalmente) [21].

Algunas de las principales fuentes de medida mecánica son: *Inertial Measurement Units* (IMUs) [22], placas de fuerza [23], electrogoniómetros [24], unidades de presión de biorretroalimentación (PBU) [25] y sistemas basados en cámaras [26].

El *biofeedback* es una herramienta muy útil de cara a maximizar los beneficios en etapas de rehabilitación, ya que permite tanto al sujeto como al evaluador ser conscientes en tiempo real de lo que está sucediendo, de manera que se pueden detectar patologías o corregir malos hábitos con mayor eficiencia que sin esta tecnología [27, 28, 29].

1.2.3 Observadores de estado en biomecánica

La obtención de información biomecánica en tiempo real es un proceso complicado debido a que, al trabajar con seres vivos, se pretende ser lo menos intrusivo posible. Es por esto que se plantea la opción de utilizar observadores en biomecánica. Un observador no es más que un modelo matemático que nos permite hacer la estimación de medidas en tiempo real que, por complejidad o bien por incomodidad, no podrían ser obtenidas mediante sensorización.

Existen diferentes tipos de modelados para este tipo de estimaciones, como pueden ser los métodos de Monte Carlo o los *sliding mode observers*. Las secuencias de Monte Carlo o filtro de partículas es recomendable para sistemas altamente no lineales, sin embargo conlleva un considerable coste computacional [30], lo cual complica considerablemente su implementación en tiempo real. El observador más utilizado, y el que tendrá más relevancia a lo largo de la presente tesis, es el filtro de Kalman.

Un filtro de Kalman es un método matemático que permite, en sistemas lineales, estimar variables de estado no observables a partir de variables observables que contengan ruido blanco. La evolución de este tipo de filtros los ha llevado a establecerse como uno de los observadores más relevantes y utilizados ya que, haciendo ciertas modificaciones del filtro de partida, se obtienen numerosas formas de resolver también problemas no lineales [31].

Lo más frecuente es encontrar observadores aplicados a la biomecánica enfocados en la obtención de parámetros cinemáticos del modelo. Este tipo de filtros trabajan a partir de capturas de movimiento, bien sea mediante sistemas ópticos [8, 32] o bien sea utilizando sensores inerciales (IMUs) [33]. Es común encontrarse también con filtros diseñados para la estimación de las fuerzas de reacción del suelo, principalmente enfocados hacia la marcha

humana [34] aunque también enfocado hacia la práctica deportiva [35]. De esta manera, se podrían estimar valores de dinámica inversa sin la necesidad de placas de fuerzas [36].

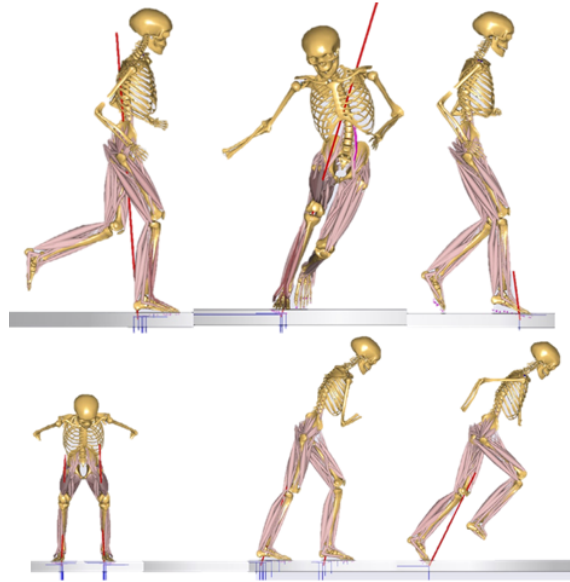


Figura 1.5: Estimación de fuerzas de reacción del suelo durante movimientos asociados al deporte [35]

1.2.3.1 Observadores de estado basados en DSM

El problema general que presentan los filtros comentados hasta ahora es que se tiene una estimación precisa solo de las posiciones y/o orientaciones. La estimación de sus derivadas no es exacta, por lo que abordar un problema dinámico utilizando estos datos no es del todo adecuado. Para resolver este tipo de problema, se crean observadores que incorporan sensores de fuerza/momento, a través de la dinámica de sistemas multicuerpo. De esta forma, a pesar de aumentar el coste computacional, se pueden obtener unos valores de velocidades y aceleraciones más precisos, incrementando considerablemente la precisión en los problemas dinámicos.

Una de las características que debe tener un filtro de Kalman es que su vector de estados debe estar formado por variables independientes entre sí, por lo que resulta necesario una definición del modelo multicuerpo que se acople a este planteamiento. Por esto lo más común es encontrarse con la resolución del planteamiento dinámico mediante el uso de formulaciones basadas en una transformación de velocidades, como la Matriz R [37], ya que es una forma relativamente sencilla de pasar de un modelado en coordenadas dependientes a un set de coordenadas mínimas.

En lo que respecta a la sensorización del sistema, por norma general, lo idóneo sería una sensorización a nivel de posiciones, ya que la estabilidad del filtro es inversamente proporcional al orden de la derivada que miden los sensores. Es decir, a mayor orden de la derivada en la función de sensores, mayor inestabilidad del filtro, lo que implica aumentar las covarianzas en el ruido de los sensores o disminuir el paso de tiempo con el fin de

1. Introducción

estabilizar el sistema [38, 39]. Como en la mayoría de los casos el paso de tiempo vendrá restringido por el hardware utilizado para la sensorización, para la estabilización del filtro se hace preciso el aumento de las covarianzas del modelo.

Debido a las no linealidades que presentan los problemas asociados a la DSM, es evidente la necesidad de la implementación de un filtro cuyas ecuaciones sean acordes a dicho problema. Es por esto que se hace preciso el desarrollo de un filtro extendido de Kalman (EKF)[40], o en su defecto de un UKF [41].

Como uno de los motivos principales de la implementación de observadores de estado es su utilidad en tiempo real, el UKF se descarta desde el principio, ya que se trata del filtro con mayor precisión y estabilidad, sin embargo, a su vez, es el filtro con un coste computacional más elevado, siendo este muy sensible a las dimensiones del problema a abordar [42]. Por otro lado existe la posibilidad de implementar el filtro conocido como errorEKF, cuya peculiaridad radica en que los estados del mismo, en lugar de ser los valores propios de las variables, son los errores obtenidos en la etapa de predicción en una simulación tradicional [43].

Una de las principales complicaciones y dificultades de la implementación práctica de un filtro es determinar las matrices de covarianza de los ruidos de planta y sensores. Es por esto que aparecen planteamientos de matrices de covarianza adaptativos capaces de dotar al filtro de una robustez considerable, manteniendo siempre unos resultados correctos. Sin embargo, la introducir este tipo de desarrollo aumenta el coste computacional de forma considerable, imposibilitando, al menos por el momento, su uso en aplicaciones en tiempo real [44].

1.2.3.2 Observadores de estado con estimación de fuerzas

Generalmente, para aplicar la dinámica de sistemas multicuerpo a observadores de estado, se asume que las fuerzas aplicadas en nuestro modelo son conocidas, bien sea porque son *inputs* del sistema, o bien porque son mediciones de los sensores disponibles [39]. Esto no puede ser siempre así, ya que hay numerosos casos donde la medición de fuerzas se hace considerablemente complicada y costosa, uno de los ejemplos más claros es la fuerza de contacto entre neumático y suelo en la automoción. De esta manera aparecen los primeros filtros cuyo objetivo, más allá de la estimación de estados cinemáticos, incluyen la estimación fuerzas de forma precisa.

Uno de los primeros filtros con estimación de fuerza se basaba en una discretización del sistema en numerosos submodelos donde se puede analizar cada uno de estos subsistemas por separado (*Subsystem Global Model Parametrization*) [45]. En este caso a pesar de obtener resultados en tiempo real, estos no son del todo precisos ya que propone utilizar sensores a nivel de velocidades y aceleraciones y, tal como se ha comentado previamente, este hecho puede inestabilizar considerablemente el filtro si las condiciones iniciales no son lo suficientemente precisas.

Como avance a este planteamiento, y con el objetivo de tener un filtro con mayor estabilidad, se desarrolla un observador en dos etapas para la estimación de fuerzas. Una primera etapa de cálculo cinemático [46], en el cual se obtendrán para un modelo la posición, velocidad y aceleración de sus variables. En una segunda etapa [47], estos valores cinemáticos serían los *inputs* para nuestra estimación de fuerzas. De esta manera se tendría un planteamiento en el cual se puede separar la cinemática de la dinámica, creando una

dependencia de esta segunda con respecto a la primera, pero no a la inversa. Con esta división en dos pasos se evita introducir las incertidumbres asociadas a la dinámica a la evolución cinemática del modelo, y se consigue un planteamiento considerablemente liviano.

Otro planteamiento de estimación de fuerzas utilizado en la bibliografía es a través de un errorEKF [48]. En este filtro, se tendrá como valores de estimación los errores cometidos en posiciones, velocidades y aceleraciones del sistema en coordenadas independientes, para posteriormente, proyectarlos a las coordenadas dependientes. Una vez se tiene el valor del error de estimación en coordenadas dependientes, se corrigen dichos valores, y se calcula la dinámica inversa del sistema.

1.3 Objetivos

El objetivo principal de la tesis es el desarrollo y validación de un filtro extendido de Kalman capaz de estimar los pares articulares del movimiento humano en tiempo real, utilizando captura óptica y placas de fuerza. Esto se ha dividido en los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar y estudiar la definición de un filtro que cumpla con los requisitos, es decir, que haga una estimación adecuada de los pares articulares partiendo de captura óptica y placas de fuerza, usando un modelo simplificado.
- Implementación y validación del filtro de Kalman con estimación de esfuerzos articulares del cuerpo humano.
- Optimización del filtro para su implementación en lenguaje compilado (C++).
- Pruebas de eficiencia y precisión.

1.4 Esquema de la tesis

El Capítulo 2 hace una introducción a la teoría necesaria para poder acometer y comprender el filtro que se desarrollará durante el resto del documento. Primero se hará una introducción a la teoría de los Sistemas Multicuerpo, con el fin de tener claros conceptos cruciales para entender el filtro desarrollado durante la tesis. A continuación se hará una breve introducción a la captura de movimiento mediante métodos ópticos, explicando la metodología tradicional de la reconstrucción de movimiento y se comentará brevemente las metodologías para la medición de reacciones. Por último, se hará una pequeña revisión a la teoría y metodologías desarrolladas hasta el momento para un filtro de Kalman, para entender las decisiones y aproximaciones realizadas durante el desarrollo del observador.

El Capítulo 3 se dividirá principalmente en dos apartados. En un primer apartado, se explicará el desarrollo y planteamiento utilizado para la definición del filtro. Posteriormente se planteará un *benchmark* basado en un modelo simple, para poder a partir del mismo desarrollar y obtener unas primeras aproximaciones para los planteamientos que se hagan. Este modelo será el de un doble péndulo, ya que se podría interpretar como la simplificación del cuerpo en tren inferior y superior. De esta manera, se podrán tener unos valores que nos

1. Introducción

permitan inferir el comportamiento del filtro de cara a su implementación en un modelo más complejo.

El Capítulo 4 se basará en la aplicación para la cual se ha desarrollado el filtro, para la captura de movimiento con estimación de esfuerzos en tiempo real del cuerpo humano. Se comentarán las asunciones y desarrollos que se tendrán en cuenta para la definición del filtro completo, así como las particularidades y diferencias que existen entre el planteamiento simplificado y el completo.

Por último, el Capítulo 5 expondrá las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del filtro, así como las futuras líneas de investigación a seguir derivadas del presente documento.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos del filtro

En esta tesis se presentará un filtro de Kalman que utiliza como planta un modelo multicuerpo completo del cuerpo humano, y como sensores un sistema de captura de movimiento óptico, junto con un par de placas de fuerza. Para esto se necesita estar familiarizado principalmente con tres ramas de conocimiento.

- Dinámica de sistemas multicuerpo
- Captura de movimiento
- Filtros de Kalman y estimación de estados

En este capítulo se presentarán las ecuaciones genéricas y nociones básicas de la dinámica de sistemas multicuerpo, para poder comprender la estrecha relación que liga esta rama de conocimiento con las otras dos comentadas a lo largo de esta tesis.

A continuación, se comentarán las generalidades de la captura de movimiento, para que se entienda, de manera sencilla y rápida ciertas asunciones y simplificaciones que se harán en el estimador de estados resultante de esta tesis.

Finalmente, se explicará la teoría básica de observadores, para ser capaces de entender todos los pasos dados en los Capítulos 3 y 4.

2.1 Dinámica de sistemas multicuerpo

Tal y como se ha comentado en la Sección 1.2.3.1, la implementación de un filtro Kalman basado en un modelo de Dinámica de Sistemas Multicuerpo requiere de la definición de un modelado específico del problema a resolver. Uno de los objetivos más frecuentes en los problemas de DSM es obtener una formulación que sea capaz de funcionar lo más próximo a tiempo real posible, por esto se han realizado numerosos trabajos cuyo objetivo radica en la obtención de formulaciones eficientes para poder llevar a cabo estos problemas [49].

Las principales variables a tener en cuenta para la definición del problema son el modelo, las coordenadas escogidas para definir el sistema, la definición de las ecuaciones del movimiento, y el integrador. Se entenderá como modelo, la estructura que tendrá nuestro mecanismo así como los pares articulares e interacciones que relacionarán nuestros sólidos, de forma que se pueda definir el resto del problema acorde al modelado del sistema.

2. Fundamentos teóricos del filtro

Uno de los puntos más importantes en la solución de un problema de Dinámica de Sistemas Multicuerpo es la definición de las coordenadas del modelo, ya que esto afectará tanto a la complejidad del modelado, como a la eficiencia del sistema.

Existen dos tipos de coordenadas para la definición de nuestro sistema, las independientes y las dependientes. Las primeras minimizan el número de coordenadas, ya que su número coincide con el de los grados de libertad del sistema y, por tanto, su uso tiende a reducir el coste computacional. Las dependientes, también conocidas como set de coordenadas expandido, sistematizan notablemente la definición del sistema. Sin embargo su uso conlleva la resolución de un problema de mayor dimensión. Además, debido a que se tienen más coordenadas que grados de libertad, se debe definir una serie de ecuaciones de restricción que relacionen estas variables.

Existe otra división entre tipos de coordenadas, independiente de la anterior, que también afecta a la eficiencia y/o complejidad del modelo. Se pueden definir las variables desde un planteamiento global, refiriendo todas las coordenadas a un mismo sistema de referencia, o desde uno topológico, definiendo las variables en función de la estructura de las cadenas cinemáticas del sistema.

Las coordenadas globales se utilizan para la definición de un sistema en coordenadas absolutas. Es un planteamiento que presenta una definición bastante sistemática, lo cual conduce a una metodología considerablemente más sencilla que la topológica. Siempre implica la utilización de un set de coordenadas extendido lo cual hace necesario añadir un vector de restricciones. Esto, sumado al sobredimensionamiento de las coordenadas, lo convierte en un sistema de coste computacional más elevado, especialmente en sistemas grandes con muchos grados de libertad.

Por su parte, en el planteamiento topológico, se tiene un sistema de coordenadas relativas, donde cada sólido dependerá del anterior de la cadena cinemática. Esto, si nos encontramos un problema de cadena abierta, conduce a un conjunto de coordenadas mínimas. En el caso de ser de cadena cerrada, nos obliga a romper la cadena cinemática en algún punto, transformándola en una abierta, a la que habrá que añadir las restricciones necesarias para tener el mismo comportamiento que en el caso cerrado [50]. Para la resolución de planteamientos topológicos se suelen utilizar métodos recursivos, que aumentan notablemente la eficiencia del modelo [51]. Uno de los problemas que se encuentran en este tipo de planteamientos es en la necesidad de un postproceso de los datos para poder hacer una gestión de la solución en coordenadas absolutas.

En esta tesis, se utilizará un método que combina el uso de coordenadas dependientes e independientes: el método de transformación de velocidades, también conocido como Matriz \mathbf{R} [52]. Este método parte de una definición simple y sistemática del sistema en coordenadas globales dependientes, para luego reducir el número de variables al mínimo a través de una matriz de transformación de velocidades \mathbf{R} . Se ha decidido utilizar este método porque el filtro de Kalman necesita trabajar en coordenadas independientes, pero requiere calcular derivadas de la aceleración respecto a todos los estados, y esto es extremadamente complejo en una formulación en coordenadas independientes. El uso de unas coordenadas intermedias, aunque algo menos eficiente, permite un cálculo relativamente sistemático de las derivadas.

2.1.1 Formulación dinámica

Una vez se han presentado los conceptos básicos, se van a presentar las ecuaciones relacionadas a la resolución de problemas DSM. Para un sistema cuyo estado está definido por un conjunto de variables dependientes \mathbf{q} , las ecuaciones del movimiento se pueden escribir de la siguiente manera [49] :

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (2.1)$$

$$\Phi = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

donde $\bar{\mathbf{M}}$ es la matriz de masas del sistema en coordenadas dependientes, $\Phi_{\mathbf{q}}$ es el jacobiano del vector de ecuaciones de restricción Φ y $\boldsymbol{\lambda}$ son los multiplicadores de Lagrange, que garantizan el cumplimiento de las restricciones definidas en el modelo. Por último, el vector $\bar{\mathbf{Q}}$ contiene las fuerzas aplicadas sobre las coordenadas \mathbf{q} del sistema.

Para un sólido cualquiera i , se puede definir un vector de velocidades $\dot{\mathbf{q}}_i$, tal que contenga la velocidad de un punto específico del sólido $\dot{\mathbf{r}}_{0i}$, y la velocidad angular del mismo $\boldsymbol{\omega}_i$. Utilizando esta definición de las velocidades del sólido, se pueden escribir las ecuaciones de Newton–Euler correspondientes:

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \bar{\mathbf{Q}}_i \quad (2.3)$$

En esta expresión, $\bar{\mathbf{M}}_i$ es la matriz de masas del sólido, y $\bar{\mathbf{Q}}_i$ es su vector de fuerzas generalizadas. Estos términos tienen, en el caso general, la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_i \tilde{\mathbf{g}}_i \\ \tilde{\mathbf{g}}_i & \mathbb{I}_{G_i} - m_i \tilde{\mathbf{g}}_i \tilde{\mathbf{g}}_i \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times m_i \mathbf{g}_i) \\ \mathbf{n}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbb{I}_{G_i} \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{g}_i \times [\mathbf{f}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times m_i \mathbf{g}_i)] \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde m_i es la masa del sólido i , \mathbf{g}_i es el vector que va desde el punto \mathbf{r}_{0i} al centro de masas del sólido, \mathbf{r}_{G_i} , $\tilde{\mathbf{g}}_i$ es su matriz antisimétrica correspondiente, \mathbb{I}_{G_i} es el tensor de inercia del sólido respecto a su centro de masas, y \mathbf{f}_i y \mathbf{n}_i son las fuerzas y pares externos aplicados al sólido, respectivamente, incluyendo las reacciones en los pares cinemáticos. Si el punto de referencia del sólido i coincide con su centro de masas ($\mathbf{r}_{0i} \equiv \mathbf{r}_{G_i}$), el vector \mathbf{g} se anula, y las expresiones anteriores se simplifican considerablemente:

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbb{I}_{G_i} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{n}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbb{I}_{G_i} \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Se puede definir un conjunto mínimo de variables independientes \mathbf{z} , tales que permitan determinar la posición del sistema de forma única. Ensamblando las velocidades $\dot{\mathbf{q}}_i$ de todos los sólidos del sistema en un vector de velocidades dependientes $\dot{\mathbf{q}}$, se pueden relacionar ambos conjuntos de variables a través de una matriz \mathbf{R} , dependiente de la posición:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \quad (2.8)$$

2. Fundamentos teóricos del filtro

Esta matriz representa una transformación de velocidades. Cada elemento R_{ij} de la matriz \mathbf{R} es el valor que toma la velocidad dependiente \dot{q}_i cuando la coordenada independiente z_j tiene velocidad unitaria, y el resto tienen velocidad nula. Para obtener las aceleraciones de las coordenadas dependientes, se deriva la expresión anterior:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \quad (2.9)$$

Sustituyendo estas aceleraciones en la ecuación (2.1), se obtiene:

$$\bar{\mathbf{M}}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (2.10)$$

que, premultiplicando por \mathbf{R}^T y reorganizando términos, conduce a:

$$\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + (\Phi_{\mathbf{q}}\mathbf{R})^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}) \quad (2.11)$$

Derivando la ecuación de restricciones (2.2) con respecto al tiempo, suponiendo que no existen restricciones reónomas (dependientes explícitamente del tiempo), se obtiene:

$$\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Si esta expresión se transforma a las coordenadas independientes \mathbf{z} , resulta que:

$$\Phi_{\mathbf{q}}\mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Las velocidades $\dot{\mathbf{z}}$ son independientes y pueden tomar cualquier valor, de modo que, para que esta ecuación se cumpla siempre, debe ocurrir que:

$$\Phi_{\mathbf{q}}\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

lo que significa que la matriz \mathbf{R} es el espacio nulo de $\Phi_{\mathbf{q}}$. Teniendo en cuenta este hecho, la ecuación (2.11) se transforma en:

$$\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}) \quad (2.15)$$

De aquí se deduce que la matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas, proyectados sobre las coordenadas independientes \mathbf{z} , serán:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}}\mathbf{R} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}) \quad (2.17)$$

lo que permite escribir las ecuaciones diferenciales del movimiento como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q} \quad (2.18)$$

2.1.2 Integradores

Las ecuaciones del movimiento (2.18) son altamente no lineales y normalmente muy complejas, de modo que se debe recurrir a integradores numéricos para su resolución. Debido a que la teoría en integradores es muy amplia y compleja, en el presente documento simplemente se comentarán los aspectos más básicos y necesarios para entender

las soluciones aquí planteadas. Para mayor detalle e información se puede acudir a la bibliografía [53].

Los integradores numéricos se basan en aproximar la solución de una ecuación diferencial (o un sistema de ecuaciones diferenciales) discretizando el tiempo en una serie de pasos. Por lo tanto, se suelen clasificar en función de cómo efectúan esta discretización: pueden ser de paso simple, si para avanzar un paso sólo dependen de valores del paso anterior, o de paso múltiple, si dependen de más instantes previos. Además, si el paso de tiempo es constante, el integrador será de paso fijo, y si no, será de paso variable. Estos últimos permiten ir ajustando el paso de tiempo, con el objetivo de mantener el error de integración dentro de unos límites determinados. Sin embargo, esto hace que el tiempo de CPU necesario también sea variable, lo que no es muy conveniente en aplicaciones de tiempo real: en estas aplicaciones, el tiempo invertido por el integrador en avanzar un paso debe ser menor que el propio paso Δt , y esta condición puede dejar de cumplirse si el paso se reduce demasiado.

También es relevante la distinción entre integradores explícitos e implícitos. Un integrador explícito es aquel que proporciona la solución para el instante siguiente como una función explícita de las variables y sus derivadas en instantes anteriores. Los implícitos, por su parte, dependen también de la solución y sus derivadas en algún instante posterior, lo cual conlleva resolver un sistema de ecuaciones no lineales para cada paso de tiempo. Esta solución se suele llevar a cabo mediante métodos iterativos. Los integradores explícitos son considerablemente más rápidos, al no tener que resolver el sistema no lineal en cada instante de tiempo, pero para tener una precisión aceptable suelen necesitar pasos de tiempo considerablemente más pequeños. Los integradores implícitos son más robustos, pero el tiempo de CPU que emplean por paso de tiempo no se puede determinar, dado que algunos pasos de tiempo necesitarán más iteraciones para resolver el sistema no lineal. Por este motivo, no se suelen usar en aplicaciones de tiempo real y, en caso de hacerlo, se limita el número de iteraciones para asegurar que se cumple el requisito de tiempo real, aunque la solución no haya convergido por debajo de la tolerancia especificada. Para el desarrollo del filtro se utilizarán tres integradores diferentes, todos ellos de paso simple y fijo, siendo dos de ellos explícitos y uno implícito.

El objetivo de un integrador numérico es obtener la solución $\mathbf{x}(t)$ de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias u ODEs (*Ordinary Differential Equations*) de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.19)$$

donde \mathbf{x} son las variables del sistema, también llamadas *estados*.

El integrador más sencillo es el Euler Adelante o *Forward Euler* (FE). Se trata de un integrador explícito, que estima los estados en el paso de tiempo $k + 1$, suponiendo que su derivada en el instante k se mantiene constante a lo largo de todo el paso de tiempo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \quad (2.20)$$

El segundo integrador considerado es el método de Heun. Este integrador es un integrador explícito, aunque usa una aproximación de los estados en el siguiente paso de tiempo, lo que lo acerca a los integradores implícitos. En primer lugar, se obtiene una estimación de \mathbf{x} en el instante $k + 1$, utilizando el integrador Euler Adelante:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \quad (2.21)$$

2. Fundamentos teóricos del filtro

Después, se utiliza $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ para calcular una aproximación de la derivada en $k + 1$, y se avanza un paso utilizando como derivada el valor medio entre esta última, y la derivada en el instante k :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, t_{k+1})] \quad (2.22)$$

Este método asume que la derivada de los estados, considerada constante a lo largo del paso de tiempo, tiene un valor intermedio entre el que toma en el instante k , y el que tendría en el instante $k + 1$ si la estimación $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ fuese correcta. En el integrador Euler Adelante, la precisión crece linealmente al reducir el paso de tiempo, mientras que en el método de Heun lo hace cuadráticamente. Como contrapartida, este último necesita evaluar la función (2.19) dos veces en cada paso de tiempo.

Por último, la regla trapezoidal es uno de los integradores numéricos más frecuentes y utilizados para la resolución de problemas diferenciales. Es un integrador implícito de paso simple, cuya hipótesis parte de que el resultado de la integral definida entre dos instantes k y $k + 1$ se puede obtener como la aproximación del área de la función lineal que pasa por dichos puntos. Es un integrador muy apropiado para problemas con rigideces elevadas, impactos o cambios de configuración. Su esquema es el siguiente:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1})] \quad (2.23)$$

Como se puede observar, este integrador es muy similar al método de Heun. La diferencia está en que la derivada de \mathbf{x} en el instante $k + 1$ se calcula utilizando el valor exacto de \mathbf{x}_{k+1} , en lugar de una aproximación. Esto provoca que el valor de \mathbf{x}_{k+1} aparezca en ambos lados de la ecuación, de modo que, dado que la función \mathbf{f} suele ser no lineal, se debe determinar por métodos iterativos. Este sistema de ecuaciones no lineales puede resolverse aplicando tanto una iteración de punto fijo como el método de Newton–Raphson. El segundo método converge más rápidamente, pero requiere el cálculo de la matriz Jacobiana de la función \mathbf{f} , lo que no siempre es fácil de obtener.

2.2 Captura de movimiento

La captura de movimiento es el proceso por el cual somos capaces de obtener una representación en un espacio virtual de un movimiento real, a partir del seguimiento de ciertos puntos clave en el espacio a lo largo del tiempo de captura [54]. Generalmente este tipo de técnicas se suelen utilizar para capturar el movimiento humano o, en algunos casos, para capturas de movimiento de máquinas o animales [55].

Este tipo de tecnología es utilizada en numerosos campos debido a su polivalencia. Es frecuente encontrarnos estas metodologías de trabajo en la industria del cine y del videojuego, para el diseño de movimientos de personajes en dichos campos, en el ámbito médico donde nos da un abanico notable de posibilidades, desde análisis del movimiento humano [56] hasta el posible desarrollo de aplicaciones de *biofeedback* enfocadas a la rehabilitación, o en el ámbito deportivo para, entre otras opciones, mejorar las prestaciones de deportistas de alto rendimiento [57].

Dependiendo del objetivo que se tenga con la reconstrucción del movimiento, puede ser interesante una simulación en tiempo real del mismo. Debido al avance tecnológico de las últimas décadas, cada vez es más frecuente encontrarnos programas capaces de hacer una

reconstrucción en tiempo real del movimiento. Sin embargo, no siempre es un requisito indispensable.

Las dos grandes tecnologías para la captura de movimiento, aunque existen otras, son la captura inercial y la óptica. La captura inercial utiliza sensores conocidos como "IMUs", del inglés *Inertial Measurement Unit*. Este tipo de sensores proporcionan una estimación de la orientación del sólido al que están asociados. Esto nos permite hacer una reconstrucción del movimiento de manera sencilla, mediante la colocación de un sensor de este tipo en cada uno de los sólidos móviles del cuerpo. Es un sistema muy extendido debido a sus numerosas ventajas: tiene un coste reducido, es portátil, la colocación de los sensores se efectúa de forma poco intrusiva para el sujeto y, además, permite una reconstrucción en tiempo real del movimiento, dado el bajo coste computacional que conlleva su implementación.

Sin embargo, la precisión de este tipo de metodología, aunque aceptable para algunas aplicaciones, es considerablemente peor que la obtenida mediante procedimientos de captura óptica. Dado que el ámbito de trabajo de esta tesis radica en el análisis del movimiento humano, se precisa de la mayor precisión y adaptabilidad posible, por lo que nos centraremos en la captura óptica de movimiento.

2.2.1 Captura basada en marcadores ópticos

La captura óptica de movimiento se basa en la colocación de marcadores ópticos en puntos anatómicos relevantes y previamente definidos, con el objetivo de, mediante el uso de cámaras, ser capaces de obtener la posición de cada uno de estos marcadores, para posteriormente reconstruir el movimiento.

Las cámaras suelen ser de tipo digital, basadas en "*Charged-Coupled Device*" (CCDs), que son sensores fotosensibles formados por células fotoeléctricas. Estas cámaras emiten un haz de luz infrarroja, que será reflejado por los marcadores ópticos, y captado por los sensores CCD, proporcionando así información de la ubicación de dicho marcador en el plano de proyección de la cámara.

Para hacer la reconstrucción de la posición tridimensional de cada uno de los marcadores, es necesario que al menos dos cámaras del sistema sean capaces de detectar su posición. Cada cámara genera una posición bidimensional del marcador. Uniendo la información de varias cámaras y conociendo un punto central como referencia, el software debe ser capaz de proporcionar una posición tridimensional precisa del marcador.

Una vez tenemos la estimación de la posición tridimensional de los diferentes marcadores a lo largo del tiempo, es necesario identificar cada uno de ellos. De esta manera, el programa será capaz de saber que debe hacer con la información que se tiene, ya que cada marcador irá asociado a su correspondiente punto anatómico. El paso siguiente es la reconstrucción del movimiento.

Los grandes problemas asociados a las cámaras que suelen aparecer en este tipo de capturas son la oclusión de marcadores, el cruce de marcadores y la aparición de ruidos de reflexión. La oclusión de marcadores se da cuando algún obstáculo impide que uno o varios marcadores sean captados por al menos dos cámaras. Esto significa que no se puede tener una posición tridimensional del mismo durante el tiempo que este hecho tenga lugar. Por su parte el cruce de marcadores viene provocado por la asociación de marcadores a puntos anatómicos equivocados. Esto suele ocurrir cuando hay dos marcadores cuya posición es cercana en alguna fase del movimiento. Por último, un ruido de reflexión es la aparición de

2. Fundamentos teóricos del filtro

elementos que, al igual que los marcadores, reflejan el haz de luz provocado por la cámaras y de cara al sistema, generan la posición de un marcador que realmente no existe.

En el postproceso, hay métodos ya estandarizados para solucionar dichos problemas, sin embargo, en el caso de necesitar una captura en tiempo real, este tipo de problemas deben abordarse durante la propia captura. Para ello aparecen métodos que permiten el correcto funcionamiento de la captura a pesar de aparecer alguno de estos inconvenientes [32]. Además, gran parte de las aplicaciones comerciales permiten especificar las dimensiones y geometría que tendrán los marcadores, de forma que, éste sea capaz de distinguir un marcador real de una reflexión provocada por un elemento externo.

Por otro lado encontraremos problemas asociados a la metodología de captura. Estos serán principalmente al desplazamiento relativo que sufrirán los marcadores con respecto a la posición teórica de partida. Este fenómeno, habitualmente conocido como *skin motion artifact*, será más preocupante a medida que aumente la posibilidad de movimiento relativo entre los marcadores y los huesos subyacentes. Por lo tanto, en un caso idóneo, los marcadores deberán ir colocados directamente sobre la piel, y en puntos lo más cercanos posible al hueso.

En este trabajo se utiliza un protocolo de captura de movimiento con 36 marcadores ópticos, situados a lo largo de todo el cuerpo como se muestra en la Figura 2.1.

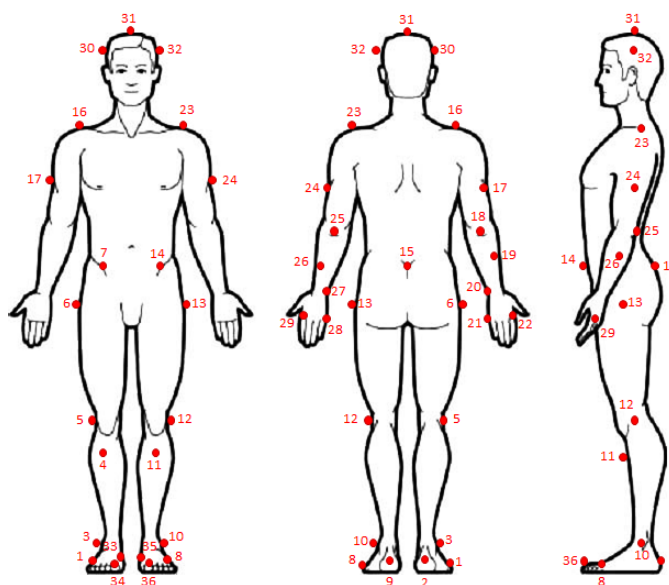


Figura 2.1: Configuración de marcadores ópticos

2.2.2 Reconstrucción del movimiento

El principal problema durante la captura cinemática por métodos ópticos es que se trata de determinar la posición del esqueleto a partir de marcadores y medidas superficiales, por lo que hay que predecir la posición interna del modelo. Tradicionalmente, para poder determinar la orientación interna del esqueleto, se suele proponer una metodología en tres pasos [58]:

1. Seleccionar 3 entidades no alineadas (marcadores o centros de articulaciones) para cada segmento a estimar.
2. Crear un sistema de referencia ortogonal (uvw) basado en dichas entidades.
3. A partir de este sistema de referencia, usar ecuaciones de correlación, basadas en medidas antropométricas, para estimar la posición de la articulación y la orientación del segmento.

Para entender el correcto funcionamiento del planteamiento, se explicará un caso sencillo: el caso de la determinación de la posición del tobillo a partir de los marcadores asociados al pie correspondiente. Para estimar la posición del tobillo, se deben colocar 3 marcadores en el pie, como se puede apreciar en la Figura 2.2. Con estos tres marcadores, se definirá un sistema de referencia auxiliar, con origen en el marcador 3. Los 3 marcadores formarán un plano, cuyo eje perpendicular será el vector w de nuestro sistema de referencia. El eje u será un vector que va desde el marcador 2 al 1. Finalmente el eje v se definirá como el producto vectorial de los dos anteriores. Con esto y las ecuaciones antropométricas, se puede obtener fácilmente la posición de la articulación del tobillo [58].

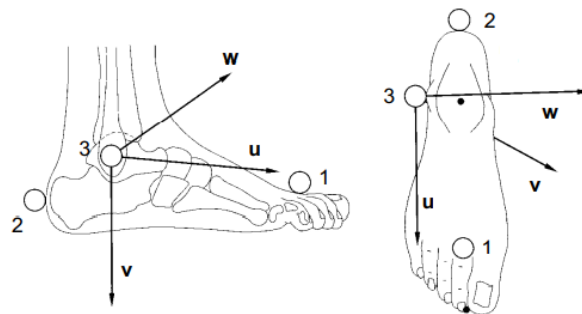


Figura 2.2: Planteamiento para la definición de la articulación del tobillo [58]

2.2.3 Medición de reacciones

Para poder obtener esfuerzos asociados al movimiento, se necesitará un equipo medidor de reacciones. Este tipo de sistemas, son conocidos como transductor de fuerzas. Existen numerosos tipos de transductores: galgas extensométricas, sensores piezoeléctricos, piezoresistivos o capacitivos entre otros. Pero todos parten del mismo principio, la fuerza aplicada generará una deformación, que provocará una señal eléctrica proporcional.

En este caso las fuerzas que se medirán son las fuerzas de interacción del sujeto con el suelo, mediante el uso de placas de fuerza, por lo que nos centraremos en dicha tecnología. Para poder tener una aproximación de todos los valores asociados a la reacción del suelo, es necesario hacer una estimación del centro de presiones de la placa.

La metodología de la estimación del centro de presiones de la placa dependerá del tipo de placa con la que se trabaje. Principalmente se encuentran dos grandes tipos de placa de fuerza en función su diseño [3]: las placas definidas mediante cuatro transductores triaxiales y las placas de soporte central. Las primeras, tendrán un transductor en cada esquina de la

2. Fundamentos teóricos del filtro

placa, de forma que con los valores obtenidos por cada uno de los transductores y, tomando momentos respecto al punto de aplicación de la fuerza, resulta sencillo conocer el centro de presiones de dicha placa. Las segundas tendrán un punto de rotación conocido y darán los momentos asociados al mismo por lo que planteando las ecuaciones de equilibrio de momentos respecto a dicho punto se puede obtener el centro de presiones.

2.3 Filtro de Kalman

Debido a la complejidad teórica que subyace bajo los planteamientos de los filtros de Kalman, se considera oportuno hacer una previa introducción a los mismos, para tener claros ciertos conceptos necesarios a lo largo de esta tesis. Un filtro de Kalman es un estimador de estados que, mediante la propagación de la media y las covarianzas de esos estados, es capaz de hacer una estimación a lo largo de un período de tiempo de dichos valores [30].

Los estimadores de estados son una serie de ecuaciones matemáticas que relacionan unos parámetros que se desean obtener, y no pueden ser obtenidos directamente por medio de sensorización, por medio de un modelo matemático y una serie de *inputs* al sistema. Dicho de otra forma, son una serie de ecuaciones matemáticas que nos relacionan los sensores, ruidos y constantes de un sistema con unos valores que se pretenden obtener. Normalmente, para definir un estimador de estados, se parte de un modelo matemático del sistema, que en el caso más general tiene la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{w}}, t) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{v}}, t) \quad (2.25)$$

donde \mathbf{x} es el vector de estados, \mathbf{u} son las entradas o *inputs* del sistema, \mathbf{y} el vector de salidas o *outputs* del sistema (que en nuestro caso serán los sensores, es decir, los marcadores ópticos y las placas de fuerza), y $\tilde{\mathbf{w}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}$ son dos vectores de ruido blanco Gaussiano, que afectan a la planta y a los sensores respectivamente.

Hay numerosas formas de hacer estimación de estados, tal y como se ha comentado en el Capítulo 1, pero en el presente documento nos vamos a centrar en las ecuaciones del filtro de Kalman [2], comentando sus diferentes variantes para poder hacer un diseño del mejor estimador posible para nuestro objetivo.

Cuando las funciones \mathbf{f} y \mathbf{h} que rigen el sistema son lineales, un filtro de Kalman tradicional será suficiente. Sin embargo, si alguna de ellas es no lineal, como ocurre en el presente trabajo, habrá que hacer uso de algún filtro diseñado para resolver esas no linealidades, como pueden ser el *Extended Kalman Filter* (EKF), o el *Unscented Kalman Filter* (UKF) [42]. Para este trabajo, entre estos dos filtros se ha considerado al EKF como el más adecuado, dado que, a pesar de que el UKF obtiene mejores resultados, su peso computacional es prohibitivo para aplicaciones de tiempo real.

Aunque existen filtros de Kalman basados directamente en las ecuaciones diferenciales continuas, como el filtro de Kalman–Bucy [59, 60], lo más común en la práctica es utilizar un planteamiento discreto, bien discretizando las ecuaciones del modelo continuo, o bien definiéndolas directamente en forma discreta [61]. Esto es así, principalmente, por dos motivos: por un lado, la integración numérica de las ecuaciones diferenciales se basa precisamente en discretizar el tiempo, y, por otro lado, los sensores suelen proporcionar las lecturas a intervalos regulares.

2.3.1 Filtro de Kalman extendido (EKF)

El filtro de Kalman extendido utiliza una versión linealizada de las ecuaciones del sistema para determinar las matrices de covarianza. Antes de proceder a la linealización de las ecuaciones, se realizará una simplificación: dado que el ruido de propagación $\tilde{\mathbf{w}}$ se supone de media cero y baja amplitud, es frecuente suponer que su efecto es aditivo, es decir, que cumple el principio de superposición. De este modo, la ecuación diferencial del sistema (2.24) se puede reescribir como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{0}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\tilde{\mathbf{w}} \quad (2.26)$$

donde la matriz de ganancia del ruido, \mathbf{G} , se define como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{w}}, t)}{\partial \tilde{\mathbf{w}}} \right|_{\tilde{\mathbf{w}}=\mathbf{0}} \quad (2.27)$$

De esta manera la función \mathbf{f} no dependerá del ruido del proceso, y tendrá la forma adecuada para poder implementarla en un filtro de Kalman.

Si las ecuaciones del sistema son no lineales, es necesario linealizarlas alrededor de un estado de referencia, mediante una expansión de primer orden en serie de Taylor de la ecuación 2.24:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, t)\delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, t)\delta \mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, t)\tilde{\mathbf{w}} \quad (2.28)$$

donde:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r \quad (2.29)$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_r \quad (2.30)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_r, \mathbf{0}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}, \mathbf{0}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_r} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, \tilde{\mathbf{w}}, t)}{\partial \tilde{\mathbf{w}}} \right|_{\tilde{\mathbf{w}}=\mathbf{0}} \quad (2.33)$$

La matriz \mathbf{F} es la denominada *matriz de sensibilidad*, que es determinante para definir la manera en que se propagan las covarianzas en el sistema, y la matriz \mathbf{B} es la matriz de ganancia de las entradas. En el caso lineal, este planteamiento da lugar a las ecuaciones clásicas de un sistema dinámico de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{w}} \quad (2.34)$$

Del mismo modo, si la función de observación (2.25) es no lineal, también debe ser linealizada. Para ello se define una matriz \mathbf{H} , que es la Jacobiana de \mathbf{h} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r} \quad (2.35)$$

2. Fundamentos teóricos del filtro

2.3.1.1 Matriz de propagación de estados

Para obtener un modelo del sistema en instantes de tiempo discretos, las ecuaciones del modelo continuo deben ser integradas en el tiempo a lo largo de cada intervalo. A partir del estado en un instante determinado k , y en ausencia de entradas \mathbf{u} y ruido $\tilde{\mathbf{w}}$, el estado en el instante siguiente $k + 1$ será el resultado de integrar en el tiempo la ecuación (2.24):

$$\mathbf{x}_{k+1}^H = \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \tau) d\tau \quad (2.36)$$

Esto sería la solución del sistema homogéneo. Para obtener la solución completa, habría que añadirle una solución particular, considerando las entradas del sistema. Pero la matriz de propagación de estados se define a partir de la solución del sistema homogéneo, por lo que no se considerará aquí la solución particular. Por definición, la matriz de propagación de estados es la matriz Φ_k tal que:

$$\mathbf{x}_{k+1}^H = \Phi_k \mathbf{x}_k \quad (2.37)$$

En el caso de sistemas no lineales, se puede definir como:

$$\delta \mathbf{x}_{k+1}^H = \Phi_k \delta \mathbf{x}_k \quad (2.38)$$

El cálculo de esta matriz es relativamente sencillo en sistemas *time invariant*, es decir, aquellos en los que la matriz de sensibilidad \mathbf{F} es constante. Para un paso de tiempo Δt , la matriz de propagación de estados de un sistema *time invariant* se puede obtener como [30, 59]:

$$\Phi_k = e^{\mathbf{F}\Delta t} \quad (2.39)$$

En este caso, la matriz \mathbf{F} no lleva subíndice por ser constante. La exponencial de la matriz $\mathbf{F}\Delta t$ se puede obtener a partir de una serie infinita, de la siguiente forma:

$$e^{\mathbf{F}\Delta t} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{F}\Delta t)^n}{n!} \quad (2.40)$$

En algunos casos, esta serie converge rápidamente, de modo que se puede truncar y calcular sólo unos pocos términos. Pero hay casos en que esto no ocurre, y hay que recurrir a otros métodos, como la expansión en series de Padé, métodos de descomposición, o a partir de la transformada inversa de Laplace [59].

En caso de que la matriz \mathbf{F} no sea constante, como suele ocurrir cuando es el resultado de linealizar las ecuaciones de un sistema no lineal, la matriz de propagación Φ_k debe calcularse por otros medios, como la diferenciación numérica de la ecuación (2.36), teniendo en cuenta que Φ_k también se puede interpretar como:

$$\Phi_k = \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}^H}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (2.41)$$

En sistemas lineales, los estados se propagan de un instante al siguiente utilizando directamente la ecuación (2.37), por lo que esta matriz debe ser lo más exacta posible. Sin embargo, en sistemas no lineales, la propagación de estados se lleva a cabo por integración numérica, y la matriz Φ_k sólo se utiliza como matriz de sensibilidades, de modo que se puede obtener de forma aproximada. Si el paso de tiempo es pequeño en comparación con las constantes de tiempo del sistema, una de las posibles aproximaciones es considerar que \mathbf{F} permanece constante a lo largo de un paso de tiempo, lo que permite calcular una aproximación de Φ_k utilizando los métodos ya comentados para sistemas *time invariant*.

2.3.1.2 Matriz de covarianza del ruido de planta

El vector de ruido de planta $\tilde{\mathbf{w}}$ se asume como ruido blanco, de modo que se podrá caracterizar por una matriz de PSD (*Power Spectral Density*) Σ^P tal que la autocorrelación de la señal será:

$$E [\tilde{\mathbf{w}}(t)\tilde{\mathbf{w}}(\tau)^\top] = \Sigma^P \delta(t - \tau) \quad (2.42)$$

donde $\delta(t - \tau)$ es la función delta de Dirac. Para trabajar con un modelo discreto, se debe transformar el ruido blanco continuo $\tilde{\mathbf{w}}$, convirtiéndolo en una secuencia discreta \mathbf{w}_k . El cálculo de la matriz de covarianza correspondiente Σ_k^P es bastante complejo en sistemas que no son *time invariant*, dado que implica integrales de convolución que incluyen la matriz de transición de estados Φ [59].

Del mismo modo que ocurría con la matriz de propagación, la matriz de covarianza discreta puede ser aproximada si el paso de tiempo es suficientemente pequeño. Según el procedimiento descrito por Van Loan para sistemas *time invariant* [62], se puede definir una matriz \mathbf{V}_k tal que, a partir de su exponencial, se pueden obtener tanto Σ_k^P como Φ_k .

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{G}\Sigma^P\mathbf{G}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^\top \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

siendo Σ^P la matriz de PSD definida para el ruido continuo. Nótese que, en este caso, la matriz de ganancia del ruido \mathbf{G} no lleva subíndices, por ser constante en sistemas *time invariant*. Si se calcula la exponencial de la matriz \mathbf{V}_k multiplicada por el paso de tiempo, se obtendrá [60]:

$$e^{\mathbf{V}_k \Delta t} = \begin{bmatrix} \Psi & \Phi_k^{-1} \Sigma_k^P \\ \mathbf{0} & \Phi_k^\top \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

de modo que la matriz de covarianza del ruido discretizado Σ_k^P se puede obtener directamente, multiplicando la traspuesta del bloque inferior derecho por el bloque superior derecho.

El esfuerzo computacional de calcular Σ_k^P por este método es bastante elevado, por lo que en la práctica se suelen utilizar métodos aproximados, como la solución propuesta por Gibbs [59]:

$$\Sigma_k^P \approx \Sigma_x^P \Delta t + \left(\mathbf{F} \Sigma_x^P + \Sigma_x^P \mathbf{F}^\top \right) \frac{\Delta t^2}{2} + \mathbf{F} \Sigma_x^P \mathbf{F}^\top \frac{\Delta t^3}{3} \quad (2.45)$$

donde:

$$\Sigma_x^P = \mathbf{G} \Sigma^P \mathbf{G}^\top \quad (2.46)$$

Esta aproximación es el resultado de aplicar la definición de Σ_k^P a partir de las integrales de convolución, pero utilizando únicamente los dos primeros términos de la expansión en serie de Φ_k , es decir, usando la ecuación (2.40) hasta $n = 1$. En algunos casos, es posible que sea suficiente con los dos primeros términos de la ecuación (2.45) y, en ocasiones, se puede incluso utilizar sólo el primero.

2.3.1.3 Matriz de covarianza del ruido de sensores

El vector de ruido de los sensores $\tilde{\mathbf{v}}$ también se asume como ruido blanco. De manera análoga a lo que ocurría con en ruido de planta, se caracterizará por una matriz de PSD Σ^S . Es frecuente considerar dicha matriz como una diagonal, si se supone que los sensores

2. Fundamentos teóricos del filtro

son independientes, de forma que cada elemento (i, i) de la diagonal contendrá la PSD del sensor i .

Es común encontrar las especificaciones de ruido de los sensores expresadas en forma discreta, considerando que el ruido es una secuencia aleatoria de media cero y varianza σ^2 . Si se toma una señal continua de ruido blanco $v(t)$, tal que su espectro tiene un valor constante Σ para todas las frecuencias, se puede obtener la varianza σ^2 del ruido discreto correspondiente como el área bajo la curva, teniendo en cuenta que, según el teorema de Nyquist, al muestrear una señal continua a una frecuencia determinada f_s , no se recoge todo el ancho de banda de la señal, sino únicamente la parte contenida entre $-f_s/2$ y $f_s/2$. Así, el área bajo la curva, es decir, la varianza del ruido discreto resultante, será:

$$\sigma^2 = 2 \frac{f_s}{2} \Sigma = \frac{\Sigma}{\Delta t} \quad (2.47)$$

Esta relación resultará útil más adelante, tanto para obtener la varianza de un ruido discreto a partir de la PSD del ruido continuo del que proviene, como para lo contrario. Así, se puede obtener la PSD que tendría un ruido continuo tal que, al ser muestreado a una frecuencia f_s , su varianza sea igual a σ^2 , simplemente multiplicando dicha varianza por el intervalo de muestreo $\Delta t = 1/f_s$.

2.3.1.4 Implementación del EKF

Una vez definidos todos los términos necesarios, se puede proceder a la implementación del filtro. El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, así que para avanzar un paso de tiempo, se debe conocer el estado en el instante actual, o mejor dicho su estimación $\hat{\mathbf{x}}_k$, y la matriz de covarianza del error de planta, \mathbf{P}_k . El valor en el instante inicial de esta matriz depende de la confianza que se tenga en la estimación de estados en ese instante, y normalmente se asigna a mano. El EKF sigue el esquema de predictor–corrector del filtro de Kalman tradicional. Pero, en este caso, el predictor no consiste en multiplicar los estados por la matriz de propagación Φ_k , dado que esta matriz sólo sirve para propagar *perturbaciones* de los estados, como se puede ver en la ecuación (2.28). Para avanzar un paso de tiempo y obtener la llamada estimación *a priori*, se deberá emplear en este caso un integrador numérico, que puede ser alguno de los mencionados en la Sección 2.1.2:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{0}, \tau) d\tau \quad (2.48)$$

Además, junto con los estados, hay que propagar la matriz de covarianza del error de planta, \mathbf{P}_k , mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^\top + \Sigma_k^P \quad (2.49)$$

Si los sensores proporcionan unas lecturas \mathbf{y}_{k+1} , el residuo de la medición, también conocido como *innovación*, será igual a:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-) \quad (2.50)$$

y tendrá la siguiente covarianza:

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^\top + \Sigma_{k+1}^S \quad (2.51)$$

La ganancia óptima del filtro, \mathbf{K}_{k+1} , será:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \quad (2.52)$$

De modo que la corrección realizada para obtener la estimación *a posteriori* es el producto de la ganancia del filtro por la innovación:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (2.53)$$

Finalmente, se aplica la corrección a la matriz de covarianza del error de planta:

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (2.54)$$

A partir de la estimación de los estados en el instante $k + 1$, se actualizará la matriz de propagación de estados Φ_{k+1} , utilizando alguno de los métodos descritos en la Sección 2.3.1.1, y, a continuación, la matriz de covarianza del ruido de planta Σ_{k+1}^P , tal como se describe en la Sección 2.3.1.2. Con toda esta información, se puede proceder a otro ciclo de predicción–corrección para avanzar al paso de tiempo siguiente, y así sucesivamente.

Capítulo 3

Observadores de estado en biomecánica

En el presente capítulo se expondrán las dos opciones consideradas para el desarrollo de un filtro de Kalman con el cual poder hacer una estimación de las esfuerzos motores del movimiento humano en tiempo real. Estas dos opciones parten de dos planteamientos basados en filtros de Kalman. Por un lado tendremos un filtro cinemático en el cual, posteriormente, se hará de manera paralela un cálculo de dinámica inversa con el fin de obtener dichos pares. El segundo planteamiento será el diseño y desarrollo de un filtro de Kalman dinámico. Este, al contrario que el anterior, tendrá asociada la dinámica del sistema dentro del algoritmo, por lo que no sería necesario un proceso de postproceso de los resultados obtenidos por el filtro, ya que el propio observador proporcionará los pares deseados.

Por último se compararán dichos modelos aplicados a un sistema sencillo, cuyo objetivo es validar el filtro dinámico, así como poder tomar decisiones de cara a la implementación del filtro dinámico en el modelo de humano completo, ya que este tiene una complejidad muy elevada y resulta interesante poder analizar su comportamiento en un sistema sencillo, en el mayor número de situaciones posibles.

3.1 Estimación de esfuerzos con observador cinemático

Uno de los factores más relevantes en la definición de un filtro de Kalman es el modelo asociado a la estimación. En el Laboratorio de Ingeniería Mecánica de la Universidad de A Coruña se desarrolló un filtro de Kalman cinemático para la estimación de posiciones y velocidades del cuerpo humano [32]. Este filtro se considera un filtro ya robusto y maduro, así que se partirá del mismo como base del filtro para la estimación de fuerzas.

El filtro comentado está basado en un sistema multicuerpo tridimensional formado por 18 segmentos anatómicos: dos pies, de los cuales se toman como un sólido independiente el segmento asociado a los metatarsos, dos piernas, dos muslos, pelvis, torso, cuello, cabeza, dos brazos, dos antebrazos y dos manos, todos unidos mediante pares esféricos entre sí, definiendo por tanto un modelo de 57 grados de libertad. El filtro tendrá un sistema de referencia donde el eje x vendrá definido por la dirección antero–posterior del cuerpo, el eje y por la medio–lateral y el eje z será la dirección vertical.

3. Observadores de estado en biomecánica

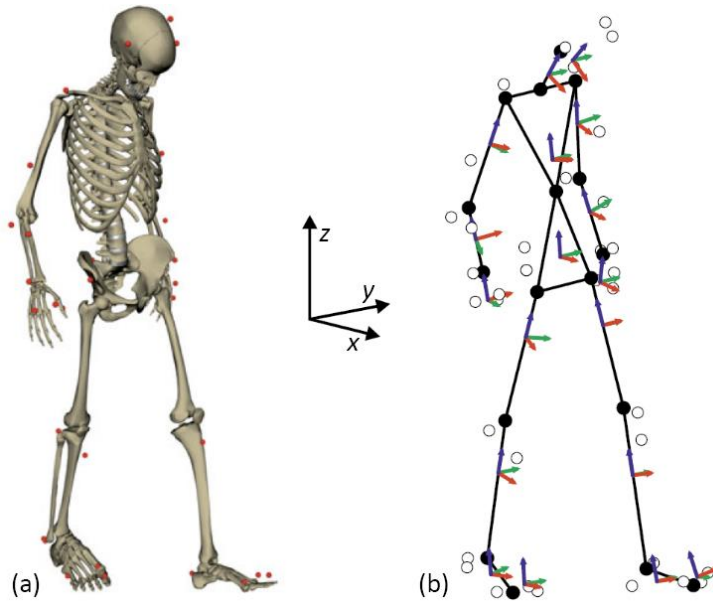


Figura 3.1: Modelo humano 3D: (a) Salida gráfica; (b) Modelo multicuerpo con articulaciones (puntos negros), marcadores (puntos blancos) y ejes locales de cada sólido

3.1.1 Modelo de planta

El filtro utiliza un modelo de planta puramente cinemático, en el cual los marcadores son los sensores del estimador de estados. Con el objetivo de reducir el número de marcadores, el par de unión entre el cuello y el torso se sustituye por una articulación de tipo cardan, mientras que la unión falanges–metatarso se modelizará con un par de revolución. De esta manera se pasará de un modelo de 57 grados de libertad a uno de 52. Dado que el filtro de Kalman necesita que las variables de su vector de estados sean independientes, se utilizarán por tanto un conjunto \mathbf{z} de coordenadas mínimas para ello. Estas serán la traslación del sólido base (3 componentes), las dos rotaciones relativas asociadas a los pares de revolución de los pies, las dos rotaciones relativas de la base del cuello y los 45 ángulos de Euler que representarán la orientación global del resto de sólidos.

A diferencia de lo mostrado en la Sección 2.3, donde se desarrolla un filtro discreto a partir de las ecuaciones del modelo continuo, en este caso se utilizará una metodología diferente, donde las ecuaciones del filtro ya se plantean directamente en su forma discreta. Concretamente, se utilizará el modelo DWNA (*Discrete White Noise Acceleration*) [61], en el que se supone que las aceleraciones se comportan como ruido blanco discreto. Según este modelo, las aceleraciones \mathbf{w}_k en cada intervalo de tiempo discreto son constantes a lo largo del mismo, y corresponden a una variable aleatoria de media cero y varianza σ_a^2 , de forma que entra en el filtro como ruido de planta. Si el estado del sistema \mathbf{x} comprende las posiciones y velocidades independientes \mathbf{z} y $\dot{\mathbf{z}}$, la propagación de estados toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k+1} \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \dot{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 \\ \mathbf{I}\Delta t \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \quad (3.1)$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma \mathbf{w}_k \quad (3.2)$$

3.1 Estimación de esfuerzos con observador cinemático

donde se identifica la matriz de propagación de estados Φ , que en este caso no lleva subíndice por ser constante, y la matriz de ganancia del ruido Γ . En este sistema discreto, la matriz de covarianza del ruido de planta se puede obtener, para cada grado de libertad i , como [61]:

$$\Sigma_i^P = \Gamma \sigma_{ai}^2 \Gamma^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \Delta t^4 & \frac{1}{2} \Delta t^3 \\ \frac{1}{2} \Delta t^3 & \Delta t^2 \end{bmatrix} \sigma_{ai}^2 \quad (3.3)$$

La matriz de covarianza total del sistema, Σ^P , se obtendrá ensamblando las matrices individuales de todos los GDL.

3.1.2 Modelo de observación

Una vez se tiene definida la base del filtro, es necesario definir la función de sensores o de observación, a partir de la cual hacer la corrección del estado después de la predicción. La función de sensores, por definición, son una serie de ecuaciones matemáticas que, a partir de los estados del sistema, son capaces de hacer una estimación del valor que medirían los sensores si fuesen perfectos. En este caso, la función de sensores será la estimación de la posición teórica de los marcadores para un valor dado de \mathbf{x} . Dentro de los estados \mathbf{x} , esta función sólo utiliza las posiciones \mathbf{z} , que a su vez incluyen la posición del primer sólido de la cadena cinemática, y los ángulos que definen la orientación absoluta de todos los sólidos.

Esta función de sensores se verá afectada por un ruido blanco \mathbf{v}_k , que en este caso sería la suma del ruido propio de las cámaras, más el desplazamiento provocado por el movimiento del marcador con respecto al hueso. Este último efecto no cumple las condiciones del ruido blanco Gaussiano, ya que tendrá un ancho de banda limitado, y presentará cierta correlación con el movimiento, así que este filtro no será óptimo en sentido estricto. Si se asume que todos los marcadores son afectados por el ruido de la misma manera, la matriz de covarianza del ruido Σ^S será una matriz con las varianzas de los sensores σ_s^2 en la diagonal.

La función de observación, que proporciona las posiciones de los marcadores a partir de los estados \mathbf{z} , se define de manera recursiva: la posición \mathbf{m}_i de cada marcador i vendrá relacionada con la posición de la articulación proximal del sólido b al que esté asociado, \mathbf{r}_b , la matriz de rotación del mismo, \mathbf{A}_b , y a la posición del marcador en los ejes locales del sólido, $\bar{\mathbf{m}}_i$:

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{r}_b + \mathbf{A}_b \bar{\mathbf{m}}_i \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_{b-1} + \mathbf{A}_{b-1} \bar{\mathbf{r}}_b \quad (3.5)$$

donde el vector $\bar{\mathbf{r}}_b$ representa las coordenadas de la articulación proximal del sólido b , en los ejes locales de su predecesor en la cadena cinemática. Las posiciones de todos los marcadores se pueden ensamblar en un vector, de forma que se obtiene una función de observación $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, con su correspondiente matriz Jacobiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$.

El hecho de que se utilicen ángulos absolutos para la definición de los sólidos simplifica notablemente tanto la obtención de la función de sensores como sus derivadas, ya que las matrices de rotación asociadas a cada sólido serán independientes entre sí, exceptuando las de los pares relativos ya comentados. La matriz de rotación de cada uno de los sólidos vendrá definida por la rotación de dicho sólido respecto a 3 ejes, por lo que será el producto

3. Observadores de estado en biomecánica

de la rotación con respecto a cada uno de estos ejes:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} \cos \gamma_b & -\sin \gamma_b & 0 \\ \sin \gamma_b & \cos \gamma_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_b & 0 & \sin \beta_b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_b & 0 & \cos \beta_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_b & -\sin \alpha_b \\ 0 & \sin \alpha_b & \cos \alpha_b \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

donde α_b , β_b y γ_b son los ángulos que definen la orientación del sólido b .

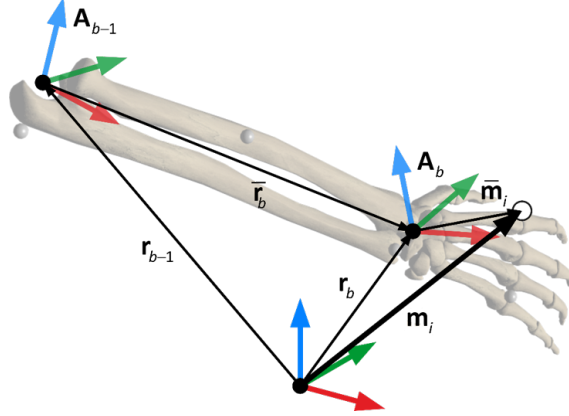


Figura 3.2: Posicionamiento de marcadores

De esta manera se puede plantear el filtro completo utilizando el método recursivo de predicción-corrección. Si se utilizan las ecuaciones definidas en el Capítulo 2, se tiene el siguiente planteamiento recursivo:

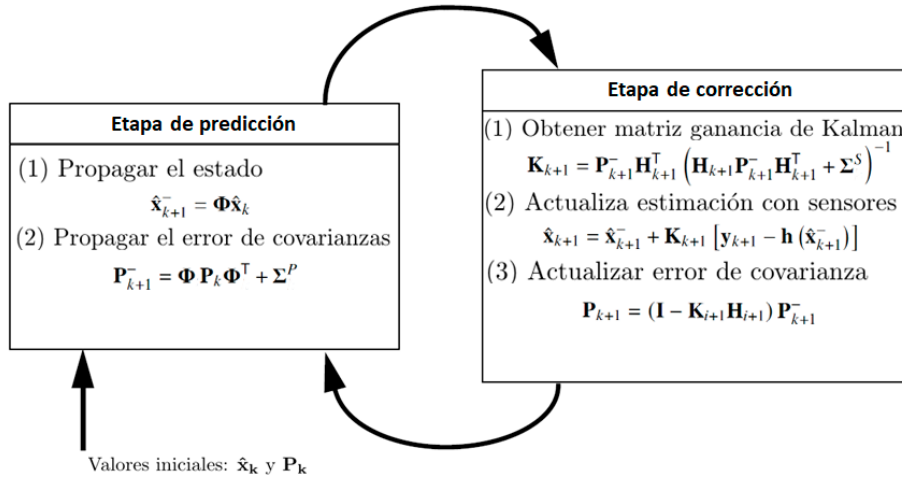


Figura 3.3: Bucle predicción-corrección del Kalman cinemático

3.1.3 Dinámica inversa

Para la resolución de un problema de dinámica inversa hace falta tanto tener resuelta la cinemática del problema, como disponer de un modelo dinámico del sistema. Para la

3.1 Estimación de esfuerzos con observador cinemático

obtención de la matriz de masas y los parámetros inerciales del sistema se utilizará un planteamiento basado en dos modelos antropométricos que se detallará más adelante, en la presentación del filtro dinámico de cuerpo completo.

Por lo que, centrándonos en la cinemática del sistema, una vez tenemos los valores estimados por el filtro de Kalman, tendremos las posiciones y velocidades de las coordenadas independientes de nuestro modelo multicuerpo. Como el objetivo es ir resolviendo la dinámica inversa en tiempo real, hay que ir calculando las aceleraciones sobre la marcha, usando diferencias finitas:

$$\ddot{\mathbf{z}}_{k+1} \approx \frac{\dot{\mathbf{z}}_{k+1} - \dot{\mathbf{z}}_k}{\Delta t} \quad (3.7)$$

La ecuación (2.18) se puede reescribir separando los esfuerzos que se quieren estimar del resto. Tal como está descrito el vector de fuerzas generalizadas \mathbf{Q} en la Sección 2.1.1, todas las fuerzas externas aplicadas al sistema van incluidas en el vector de fuerzas en coordenadas dependientes \mathbf{Q} . Si en este vector se incluye únicamente el peso propio de los sólidos, y se consideran los pares articulares y las reacciones externas como incógnitas, se puede reescribir el sistema de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}_g + \mathbf{Q}_e \quad (3.8)$$

donde el vector \mathbf{Q}_g contiene las fuerzas de inercia y el peso propio, y el vector \mathbf{Q}_e contiene el efecto sobre las coordenadas independientes \mathbf{z} de los pares articulares y los esfuerzos externos. Los esfuerzos expresados como fuerzas generalizadas asociadas a las variables independientes no resultan fáciles de interpretar, de modo que, para disponer de la información en un formato más utilizable, se define un vector de esfuerzos externos \mathbf{T}_e . Este vector contendrá los pares articulares, expresados para cada articulación en los ejes locales del sólido proximal. Además, incluirá las reacciones externas en los dos pies, y una fuerza y un momento residuales aplicados en la pelvis, para absorber los errores entre las reacciones netas medidas, y las calculadas por dinámica inversa [19, 63, 64]. Estos esfuerzos externos se transforman en fuerzas generalizadas a través de una matriz dependiente de la posición \mathbf{B} , de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{B}^T \mathbf{T}_e \quad (3.9)$$

La matriz \mathbf{B} es una transformación de velocidades, que convierte las velocidades independientes $\dot{\mathbf{z}}$ en un set de velocidades dependientes \mathbf{s} , definido de tal modo que las potencias virtuales de los esfuerzos \mathbf{T}_e sean equivalentes a las de las fuerzas originales \mathbf{Q}_e :

$$\mathbf{Q}_e^T \dot{\mathbf{z}}^* = \mathbf{T}_e^T \mathbf{s}^* \quad (3.10)$$

La transformación de velocidades será entonces:

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} \quad (3.11)$$

Esta matriz, al igual que el vector de esfuerzos externos \mathbf{T}_e , se puede dividir en dos partes: las filas \mathbf{B}_d , que corresponden al residuo y los pares articulares, que serán tantas como grados de libertad tiene el sistema, y las 12 que corresponden a los esfuerzos de contacto entre los pies y el suelo, \mathbf{B}_p . Así, se considerará que los esfuerzos de contacto en los pies serán iguales a los medidos por las placas de fuerza \mathbf{p} , y quedarán como incógnitas el

3. Observadores de estado en biomecánica

residuo y los pares articulares \mathbf{T}_d , que se pueden obtener resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{B}_d^T \mathbf{T}_d = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{Q}_g - \mathbf{B}_p^T \mathbf{p} \quad (3.12)$$

En resumen, este filtro consiste en ir estimando posiciones y velocidades mediante el filtro de Kalman cinemático ya existente, basado en un modelo de planta lineal y un modelo de sensores que utiliza los marcadores ópticos, calcular las aceleraciones mediante diferencias finitas, y resolver los esfuerzos articulares después de introducir las mediciones de las placas de fuerza en el sistema.

3.2 Estimación de esfuerzos con observador dinámico

Una vez se ha definido el primer planteamiento para la obtención de pares articulares en tiempo real, se va a explicar el segundo y más complejo de los dos. En este caso se va a desarrollar un filtro de Kalman que utiliza como planta el modelo de dinámica multicuerpo completo, basado en las ecuaciones del movimiento del sistema.

Las ecuaciones del movimiento se plantearán utilizando la formulación de transformación de velocidades o Matriz R, tal y como se ha comentado en el Capítulo 2, ya que el filtro de Kalman requiere que los estados del sistema sean variables independientes. Aunque esta formulación no es la más eficiente que existe en coordenadas independientes [65, 51], tiene una estructura que permite obtener las derivadas con relativa facilidad. Para nuestro modelo se propondrá una matriz \mathbf{R} definida por bloques, que se agruparán en subtérminos que se explicarán en el presente apartado.

Se comentarán también las diferentes variables y asunciones que se plantean de cara al desarrollo del filtro, su implementación al modelo matemático, así como las consecuencias que estas modificaciones pudieran tener en los resultados obtenidos por el observador.

3.2.1 Ecuaciones del modelo multicuerpo

Para la obtención de la matriz que relaciona las velocidades en coordenadas dependientes y las velocidades en coordenadas independientes el primer paso es definir las coordenadas con las que se desea trabajar. En este caso, como coordenadas dependientes intermedias $\dot{\mathbf{q}}$ se elegirá un conjunto similar al utilizado en las ecuaciones (2.6) y (2.7), con una diferencia: en lugar de elegir la velocidad del centro de masas y la velocidad angular en coordenadas globales, esta última se expresará en los ejes locales del sólido:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{G_i} \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Así, las expresiones de la matriz de masas y el vector de fuerzas tienen el mismo aspecto que cuando las velocidades angulares están expresadas en ejes globales:

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \bar{\mathbf{I}}_{G_i} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \bar{\mathbf{n}}_i - \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \times \bar{\mathbf{I}}_{G_i} \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.2 Estimación de esfuerzos con observador dinámico

con la diferencia de que, al estar $\bar{\omega}_i$ en ejes locales, el tensor de inercia $\bar{\mathbb{I}}_{G_i}$ será constante.

El conjunto de variables independientes \mathbf{z} será igual al utilizado en el filtro anterior, esto es, las tres componentes de la posición del sólido base, sus tres ángulos de orientación, y los ángulos θ_i que definen la orientación absoluta de cada sólido:

$$\theta_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Ensamblando todas las velocidades dependientes $\dot{\mathbf{q}}_i$ en un vector general $\dot{\mathbf{q}}$, se puede definir una matriz de transformación de velocidades \mathbf{R} , tal que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \quad (3.17)$$

Este planteamiento, con respecto al método semirrecursivo utilizado con anterioridad en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica [66], tiene como principal ventaja, y es el principal motivo por el cual se decide trabajar con este set de coordenadas, que tenemos unas ecuaciones más abordables de cara a la derivación, ya que el método semirrecursivo presenta una serie de ecuaciones cuya derivación es especialmente compleja. Teniendo en cuenta que el objetivo del presente documento es determinar la viabilidad del filtro, resulta conveniente primero hacer una aproximación abordable.

A continuación se describirán algunos términos que servirán para ensamblar la matriz \mathbf{R} por bloques. El primero es la velocidad de un punto de un sólido respecto a otro, expresado como producto de una matriz que depende de la posición, por un vector de velocidades extraídas de $\dot{\mathbf{z}}$. Como primer ejemplo, se tomará el centro de masas, suponiendo que el origen del sistema de coordenadas local del sólido es la articulación proximal. En este caso, el centro de masas tendrá una posición \mathbf{r}_{G_i} constante. La velocidad de ese punto en coordenadas absolutas es:

$$\dot{\mathbf{r}}_{G_i} = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{r}}_{G_i} \quad (3.18)$$

El segundo término de la ecuación (3.18), que es la velocidad del centro de masas respecto al origen, se puede reescribir en función de una matriz dependiente de la posición \mathbf{G}_i , tal que:

$$\dot{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{r}}_{G_i} = \mathbf{G}_i \dot{\theta}_i \quad (3.19)$$

siendo fácil demostrar que la matriz \mathbf{G}_i tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{G}_i = [\mathbf{A}_{\alpha_i} \bar{\mathbf{r}}_{G_i} \quad \mathbf{A}_{\beta_i} \bar{\mathbf{r}}_{G_i} \quad \mathbf{A}_{\gamma_i} \bar{\mathbf{r}}_{G_i}] \quad (3.20)$$

donde \mathbf{A}_α , \mathbf{A}_β y \mathbf{A}_γ son las derivadas de la matriz de rotación del sólido i respecto a sus ángulos α , β y γ correspondientes. Esto se puede hacer para cualquier punto del sólido. Otro caso que aparece en la matriz \mathbf{R} es la velocidad de la articulación proximal de un sólido j , respecto al origen del sólido anterior i en la cadena cinemática:

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{r}}_j \quad (3.21)$$

que implica la definición de una matriz \mathbf{J}_i^j análoga a la anterior:

$$\mathbf{J}_i^j = [\mathbf{A}_{\alpha_i} \bar{\mathbf{r}}_j \quad \mathbf{A}_{\beta_i} \bar{\mathbf{r}}_j \quad \mathbf{A}_{\gamma_i} \bar{\mathbf{r}}_j] \quad (3.22)$$

3. Observadores de estado en biomecánica

tal que:

$$\dot{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{r}}_j = \mathbf{J}_i^j \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (3.23)$$

Del mismo modo, si nos enfocamos en la velocidad angular del sólido, se necesita una matriz que relacione la derivada de los ángulos de Euler con la velocidad angular en ejes locales del sólido:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_i = \bar{\mathbf{W}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (3.24)$$

La velocidad angular en ejes locales se puede obtener a partir de la siguiente expresión, que proporciona la matriz antisimétrica asociada a la misma [67]:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{A}_i^\top \dot{\mathbf{A}}_i \quad (3.25)$$

Para la secuencia de rotaciones definida en la ecuación (3.6), se puede despejar una matriz dependiente de la posición $\bar{\mathbf{W}}_i$ tal que, multiplicada por $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$, proporcione la velocidad angular en coordenadas locales:

$$\bar{\mathbf{W}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \beta_i \\ 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \cos \beta_i \\ 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \cos \beta_i \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Una vez se tienen los términos necesarios para la matriz de transformación de un sólido, se necesita hacer el ensamblado de la matriz \mathbf{R} completa del modelo. En el caso de encontrarnos en un sólido que dependa de algún sólido anterior de la cadena, se tendrá que tener en cuenta la cadena cinemática en la relación de velocidades del modelo. Supóngase un mecanismo de 3 barras unidas mediante pares esféricos entre sí. En dicho mecanismo, la velocidad del centro de gravedad de la tercera barra de la cadena vendrá dado por:

$$\dot{\mathbf{r}}_{G_3} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{r}}_3 + \dot{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{r}}_{G_3} \quad (3.27)$$

Despejando en función de $\dot{\mathbf{r}}_0$ y de la derivada de los ángulos de Euler con respecto del tiempo, se puede escribir en forma matricial:

$$\dot{\mathbf{r}}_{G_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^2 & \mathbf{J}_2^3 & \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Aplicando el mismo razonamiento a todos los sólidos, se puede ensamblar la matriz \mathbf{R} de cualquier mecanismo. En el caso de la cadena de tres sólidos mencionada, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{G_1} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_{G_2} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_{G_3} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^2 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^2 & \mathbf{J}_2^3 & \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Con esta metodología resulta sencillo crear la matriz \mathbf{R} que relacione los valores entre coordenadas independientes y coordenadas dependientes de nuestro sistema. A

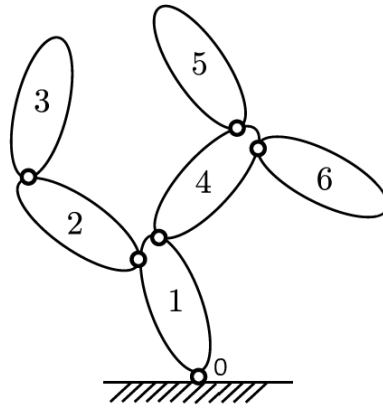


Figura 3.4: Ejemplo cadena abierta

continuación se utilizará como ejemplo la Figura 3.4, que es un modelo con diferentes ramificaciones, para que se vea con mayor claridad el planteamiento:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{G_1} \\ \bar{\omega}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_{G_2} \\ \bar{\omega}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_{G_3} \\ \bar{\omega}_3 \\ \dot{\mathbf{r}}_{G_4} \\ \bar{\omega}_4 \\ \dot{\mathbf{r}}_{G_5} \\ \bar{\omega}_5 \\ \dot{\mathbf{r}}_{G_6} \\ \bar{\omega}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^2 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^2 & \mathbf{J}_2^3 & \mathbf{G}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_4^5 & \mathbf{G}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J}_1^4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_4^6 & \mathbf{0} & \mathbf{G}_6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_6 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Todos los bloques de esta matriz tienen una estructura similar: los términos $\bar{\mathbf{W}}_i$ son todos iguales a la ecuación (3.26), y los términos \mathbf{G}_i y \mathbf{J}_i^j tienen la forma de las ecuaciones (3.20) y (3.22), respectivamente. Esto hace que sean muy sencillos de derivar de manera sistemática, teniendo en cuenta que las matrices de rotación se pueden ver como el producto de tres matrices, cada una dependiente de un ángulo, como se muestra en la ecuación (3.6). Esto resultará muy ventajoso a la hora de desarrollar las ecuaciones del filtro de Kalman.

3.2.2 Integración

Como se comentó en el Capítulo 2, el primer paso en el filtro de Kalman es el predictor, que consiste en integrar un paso de tiempo las ecuaciones diferenciales del sistema. En el caso del filtro de Kalman ordinario, este paso consiste simplemente en realizar el producto $\Phi_k \mathbf{x}_k$, que es la solución exacta, pero en sistemas no lineales se debe utilizar un integrador numérico. Para ello se propone resolver el modelo de dinámica de sistemas multicuerpo utilizando 3 integradores diferentes, para comparar su comportamiento dentro del filtro.

Como se trata de una resolución de sistema multicuerpo, y las ecuaciones diferenciales a resolver son de segundo orden, hay que tratar de acoplar la teoría de la integración numérica

3. Observadores de estado en biomecánica

a dicho tipo de ecuaciones. Para ello se recurre a un pequeño subterfugio matemático, de forma que para las ecuaciones presentadas en la Sección 2.1.2 se tendrá:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Teniendo esto en cuenta, las ecuaciones del integrador para *Forward Euler* en nuestro caso quedarán:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k + \dot{\mathbf{z}}_k \Delta t \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+1} &= \dot{\mathbf{z}}_k + \ddot{\mathbf{z}}_k \Delta t \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde:

$$\ddot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{Q}_k \quad (3.33)$$

En el caso del método de Heun, las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{z}}_k + \hat{\dot{\mathbf{z}}}_{k+1}) \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+1} &= \dot{\mathbf{z}}_k + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{z}}_k + \hat{\ddot{\mathbf{z}}}_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde los vectores $\hat{\dot{\mathbf{z}}}_{k+1}$ y $\hat{\ddot{\mathbf{z}}}_{k+1}$ se obtienen avanzando un paso con el *Forward Euler*. Y para la regla trapezoidal se tendrá:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{z}_k + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{z}}_k + \dot{\mathbf{z}}_{k+1}) \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+1} &= \dot{\mathbf{z}}_k + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{z}}_k + \ddot{\mathbf{z}}_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

En este caso, habrá que resolver las ecuaciones de forma iterativa para obtener \mathbf{z}_{k+1} y $\dot{\mathbf{z}}_{k+1}$, dado que aparecen en ambos lados de las ecuaciones: $\ddot{\mathbf{z}}_{k+1}$ es el resultado de aplicar la ecuación (3.33) en el instante $k + 1$, y los términos \mathbf{M}_{k+1} y \mathbf{Q}_{k+1} dependen de las posiciones y velocidades en ese instante.

3.2.3 Implementación del filtro de Kalman

Una vez se tiene definido el modelo multicuerpo, es necesario definir de forma consistente las variables y ecuaciones asociadas al filtro dinámico para la estimación de pares articulares. Debido a que el objetivo es hacer una estimación de pares motores, se propone aumentar el vector de estados del sistema, incorporando los esfuerzos motores y el residuo \mathbf{T}_d presentados en la Sección 3.1.3.

Una decisión importante es la determinación de la manera en la cual las fuerzas de reacción en el suelo actuarán dentro de nuestro sistema, ya que estas pueden entrar como sensor o como *input* dentro del modelo. Ambos planteamientos tienen sus ventajas e inconvenientes. La principal ventaja de introducir las fuerzas de placa como un *input* es que es el método más sencillo de resolver el problema, ya que simplemente se supondría que esto aporta unas fuerzas y momentos a nuestro modelo, y sólo sería necesario introducirlas durante la integración de las ecuaciones del sistema. Esto implica que los

3.2 Estimación de esfuerzos con observador dinámico

valores proporcionados por las placas se asumen como correctos, ignorando el ruido de la señal.

La otra opción que se considera es la introducción de las fuerzas de placa como un sensor del modelo. En este caso, al considerar las placas como sensores, el filtro de Kalman proporcionará una estimación de las reacciones teniendo en cuenta el ruido presente en la señal. Por otro lado, las dos placas de fuerza son sensores redundantes [19]. La matriz \mathbf{B} mostrada en la ecuación (3.9) no es cuadrada: si el sistema tiene n grados de libertad, la matriz \mathbf{B} tendrá $n + 12$ filas y n columnas, de modo que a partir de \mathbf{T}_e se pueden obtener las fuerzas generalizadas \mathbf{Q}_e equivalentes, pero el paso inverso es un sistema indeterminado con infinitas soluciones. La función que define los sensores, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, debe ser capaz de proporcionar el valor de los mismos en función únicamente de los estados del sistema, y esto no sería posible si los estados fuesen únicamente las posiciones \mathbf{z} , velocidades $\dot{\mathbf{z}}$ y esfuerzos sobre los grados de libertad \mathbf{T}_d . Por esto se propone introducir las reacciones de placa \mathbf{T}_p en el vector de estados. De esta manera, se tendrá que dichas reacciones aparecerán tanto en la función de sensores $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ como en el vector de estados de nuestro sistema. Finalmente, el vector de estados en el filtro dinámico resultará:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{T}_e \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

y tendrá dimensión $3n + 12$, siendo n el número de grados de libertad del modelo. Las reacciones con el suelo incorporadas a \mathbf{x} se definen según las coordenadas intermedias \mathbf{q} , de modo que serán la fuerza aplicada sobre el centro de masas de cada pie, y el momento alrededor del centro de masas, este último en ejes locales.

La matriz de propagación de estados Φ_k se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales del sistema, tal y como se ha explicado en el Capítulo 2:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}_g + \mathbf{B}^T \mathbf{T}_e \quad (3.37)$$

Despejando las aceleraciones, se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{Q}_g + \mathbf{B}^T \mathbf{T}_e \right) \quad (3.38)$$

De manera análoga a lo que se hace en el filtro cinemático mostrado en la Sección 3.1.1, se asume aquí que la derivada temporal de los esfuerzos externos, $\dot{\mathbf{T}}_e$, es una señal de ruido blanco Gaussiano $\tilde{\mathbf{w}}$ (continuo en este caso), lo que implica que estos esfuerzos se comportan como un proceso de Wiener. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales que gobernará la planta del filtro será:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{Q}_g + \mathbf{B}^T \mathbf{T}_e \right) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}} \quad (3.39)$$

Linealizando este sistema, obtenemos la matriz de sensibilidad \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{z}} & \ddot{\mathbf{z}}_{\dot{\mathbf{z}}} & \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}_e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3. Observadores de estado en biomecánica

y la matriz de ganancia del ruido \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{w}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

En la ecuación (3.40), el término $\ddot{\mathbf{z}}_z$ es el vector de aceleraciones del sistema, derivado con respecto a las posiciones, $\dot{\ddot{\mathbf{z}}}_z$ es la derivada del vector de aceleraciones con respecto a las velocidades y, por último, $\ddot{\mathbf{z}}_{T_e}$ es la derivada de las aceleraciones respecto a las fuerzas externas (incluyendo las placas):

$$\ddot{\mathbf{z}}_z = \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} = \left(\mathbf{M}^{-1} \right)_z \left(\mathbf{Q}_g + \mathbf{B}^T \mathbf{T}_e \right) - \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{K} - \left(\mathbf{B}^T \right)_z \mathbf{T}_e \right] \quad (3.42)$$

$$\dot{\ddot{\mathbf{z}}}_z = \frac{\partial \dot{\ddot{\mathbf{z}}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \quad (3.43)$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_{T_e} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{T}_e} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^T \quad (3.44)$$

donde la matriz \mathbf{K} es la matriz de rigidez del sistema:

$$\mathbf{K} = -\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} = -\mathbf{R}_z^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}) - \mathbf{R}^T [\bar{\mathbf{Q}}_z - \bar{\mathbf{M}} (\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}})_z] \quad (3.45)$$

La derivada de $\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}$ con respecto a \mathbf{z} se puede obtener aplicando la regla de la cadena:

$$(\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}})_z = (\mathbf{R}_{zz} \dot{\mathbf{z}}) \dot{\mathbf{z}} \quad (3.46)$$

donde \mathbf{R}_{zz} es un tensor de cuarto orden muy disperso.

Por su parte, la matriz \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento del sistema:

$$\mathbf{C} = -\frac{\partial \mathbf{Q}_g}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = -\frac{\partial \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}})}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = -\mathbf{R}^T [\bar{\mathbf{Q}}_z - \bar{\mathbf{M}} (\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}})_z] \quad (3.47)$$

Aquí, la derivada de $\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}$ con respecto a $\dot{\mathbf{z}}$ es igual a:

$$(\dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}})_{\dot{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{R}}_z \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_z \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}} = 2\dot{\mathbf{R}} \quad (3.48)$$

La derivada de la inversa de la matriz de masas se puede calcular aplicando la siguiente relación:

$$\left(\mathbf{M}^{-1} \right)_z = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_z \mathbf{M}^{-1} \quad (3.49)$$

donde \mathbf{M}_z es igual a:

$$\mathbf{M}_z = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{R}_z^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R}_z \quad (3.50)$$

La matriz de propagación de estados se aproximará según lo expuesto en la Sección 2.3.1.1, utilizando una expansión en serie de la exponencial de $\mathbf{F} \Delta t$. Si se retienen los dos primeros términos, la matriz de transición resulta:

$$\Phi_k \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \Delta t & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{z}}_z \Delta t & \mathbf{I} + \dot{\mathbf{z}}_z \Delta t & \dot{\mathbf{z}}_{T_e} \Delta t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_k \quad (3.51)$$

Y añadiendo el término de segundo orden, se obtiene:

$$\Phi_k \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \ddot{\mathbf{z}}_z \frac{\Delta t^2}{2} & \mathbf{I}\Delta t + \ddot{\mathbf{z}}_z \frac{\Delta t^2}{2} & \ddot{\mathbf{z}}_{T_e} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \ddot{\mathbf{z}}_z \Delta t + \ddot{\mathbf{z}}_z \ddot{\mathbf{z}}_z \frac{\Delta t^2}{2} & \mathbf{I} + \ddot{\mathbf{z}}_z \Delta t + (\ddot{\mathbf{z}}_z + \ddot{\mathbf{z}}_z \ddot{\mathbf{z}}_z) \frac{\Delta t^2}{2} & \ddot{\mathbf{z}}_{T_e} \Delta t + \ddot{\mathbf{z}}_z \ddot{\mathbf{z}}_{T_e} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_k \quad (3.52)$$

Del mismo modo, la matriz de covarianza del ruido de planta en forma discreta, Σ_k^P , se calculará de acuerdo a lo descrito en la Sección 2.3.1.2. La matriz continua Σ^P se asumirá como una matriz diagonal, con las PSD de los elementos del ruido de planta $\tilde{\mathbf{w}}$, que corresponden a las derivadas temporales de los esfuerzos externos $\dot{\mathbf{T}}_e$.

3.3 Validación del filtro

Cómo método de validación del filtro de Kalman con estimación de fuerzas a partir de marcadores ópticos, se plantea un problema de control con el fin de determinar su viabilidad. Para ello se desarrolla el planteamiento para un modelo conocido y sencillo, con el objetivo de ver posibles problemas de cara a su implantación en un modelo con mayor complejidad, así como hacer una primera aproximación a su viabilidad en tiempos de computación.

Para ello, se desarrolla el filtro para un doble péndulo bidimensional. Se utilizará un modelo de 2 barras rígidas unidas mediante un par de revolución. La segunda de ellas, a su vez, estará unida mediante un par de revolución al sistema fijo. En esta unión se supondrá la rotura de dicho par para crear el diagrama de sólido libre de dicha barra y aplicar un vector de fuerzas externas, que actuarán como par de revolución, y a su vez harán las veces de fuerzas obtenidas por las placas en el modelo completo. Ambas barras tendrán un par de marcadores, que harán las veces de marcador óptico, cuya posición es totalmente conocida en los ejes locales de cada una de las barras. De esta manera, tenemos la recreación de los sensores que se tendrían en el modelo del cuerpo humano completo.

Se crea un *benchmark* que resuelve este problema para los valores que se especifiquen de covarianza con 3 tipos de integradores, 2 modelos de covarianza de ruido, y 3 modelos de propagación. De esta manera, se podrá comprobar la robustez, eficiencia y precisión del modelo para numerosas formas de aplicación, de forma que se pueda obtener el mayor compromiso entre todas las opciones.

3.3.1 Modelo de doble péndulo bidimensional

Con el objetivo de asemejarlo lo máximo al planteamiento del modelo de cuerpo completo, se supondrá como punto inicial de la cadena cinemática el punto 0 (ver Figura 3.5), buscando una situación similar a la del modelo de cuerpo completo, que utiliza como inicio de la cadena cinemática la articulación lumbar, entre la pelvis y el tronco.

En este ejemplo, por tratarse de un sistema muy sencillo, se utilizarán como coordenadas intermedias \mathbf{q} las Coordenadas Naturales [49], en lugar de usar las de punto de referencia tal como se describe en la Sección 2.1.1. Por lo tanto, las posiciones dependientes \mathbf{q} corresponderán a las coordenadas x e y de los tres puntos del modelo:

$$\mathbf{q} = [x_0 \ y_0 \ x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2]^T \quad (3.53)$$

3. Observadores de estado en biomecánica

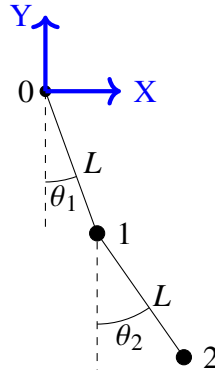


Figura 3.5: Modelo de doble péndulo

Usando estas coordenadas dependientes, se obtiene una matriz de masas $\bar{\mathbf{M}}$ y un vector de fuerzas $\bar{\mathbf{Q}}$ constantes. Para cada sólido i , tienen la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i}{3} & 0 & \frac{m_i}{6} & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{3} & 0 & \frac{m_i}{6} \\ \frac{m_i}{6} & 0 & \frac{m_i}{3} & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{6} & 0 & \frac{m_i}{3} \end{bmatrix} ; \quad \bar{\mathbf{Q}}_i = - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_i g}{2} \\ 0 \\ \frac{m_i g}{2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Los términos de los dos sólidos se pueden ensamblar para formar la matriz de masas $\bar{\mathbf{M}}$ y el vector de fuerzas $\bar{\mathbf{Q}}$ de todo el sistema:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{3} & 0 & \frac{m_1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{3} & 0 & \frac{m_1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{6} & 0 & \frac{m_1+m_2}{3} & 0 & \frac{m_2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{6} & 0 & \frac{m_1+m_2}{3} & 0 & \frac{m_2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{6} & 0 & \frac{m_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{6} & 0 & \frac{m_2}{3} \end{bmatrix} ; \quad \bar{\mathbf{Q}} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_1 g}{2} \\ 0 \\ \frac{(m_1+m_2)g}{2} \\ 0 \\ \frac{m_2 g}{2} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

que se utilizarán para obtener sus términos homólogos en coordenadas independientes, tal como se muestra en las ecuaciones (2.16) y (2.17).

Siguiendo la nomenclatura de la Figura 3.5, las coordenadas independientes serán:

$$\mathbf{z} = [x_0 \quad y_0 \quad \theta_1 \quad \theta_2]^T \quad (3.56)$$

En este caso, la matriz de transformación de velocidades resulta muy sencilla, y se puede definir directamente:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & L \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & L \sin \theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & L \cos \theta_1 & L \cos \theta_2 \\ 0 & 1 & L \sin \theta_1 & L \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

En una primera etapa, se generará un movimiento sintético para el péndulo, suponiendo que el punto 2 está unido siempre al sistema fijo mediante un par de revolución. Para

este movimiento, se resolverá la dinámica inversa, de modo que las fuerzas de reacción entre dicho punto y el suelo serán proporcionadas más adelante al sistema como sensores, haciendo las veces de los valores que proporcionarían las placas de fuerzas para nuestro sistema completo.

Como vector de esfuerzos externos para incluir en el vector de estados \mathbf{x} , se usarán los esfuerzos mostrados en la Figura 3.6:

$$\mathbf{T}_e = [\tau_1 \quad F_x \quad F_y \quad T_2]^T \quad (3.58)$$

por esto resulta necesario la definición de una matriz \mathbf{B} que nos relacione estos esfuerzos con las coordenadas independientes, tal y como se ha visto en la Sección 3.1.3. Aplicando el Principio de las Potencias Virtuales, se puede obtener la matriz \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & L \cos \theta_1 & L \sin \theta_1 & 0 \\ 1 & L \cos \theta_2 & L \sin \theta_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Con el objetivo de ampliar el abanico de posibilidades del *benchmark*, se propone la

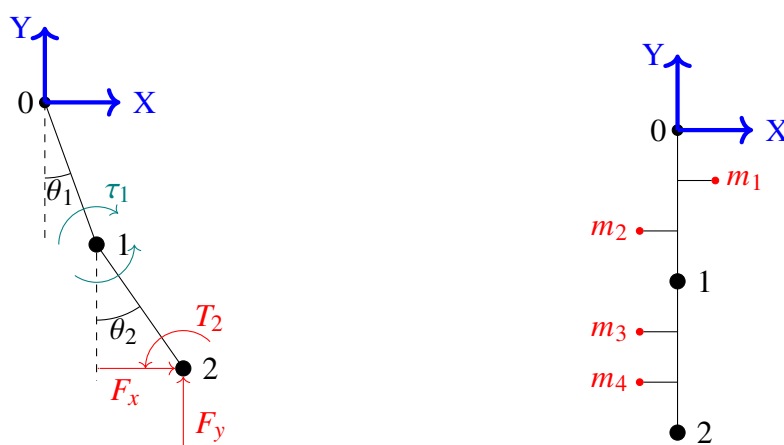


Figura 3.6: Esfuerzos y sensores en el doble péndulo

inclusión de las fuerzas de residuo como parte del vector de estado. Esto permite hacer el cálculo asumiendo que se tendrá un residuo, al igual que ocurre en el caso de aplicar la dinámica inversa tras el filtro cinemático, pero nos permite añadirle una covarianza al mismo. De esta manera se puede especificar al sistema cómo se pretende gestionar las incongruencias entre dinámica y cinemática. Si se especifica una varianza del residuo pequeña o nula, dichas incongruencias se repartirán entre el resto de fuerzas del sistema. Si se le especifica una covarianza mayor, las discrepancias entre modelos las absorberá dicho set de fuerzas. Esto afectaría a la matriz \mathbf{B} definida en la ecuación (3.59) añadiendo una matriz identidad $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ y un vector de ceros en las filas y columnas correspondientes.

3.3.2 Implementación del filtro

Según se definió en el apartado de presentación del filtro, el vector de estados vendrá definido por el vector de coordenadas independientes, su derivada con respecto al tiempo,

3. Observadores de estado en biomecánica

los pares articulares, y las fuerzas de reacción en el suelo:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{z}^\top \quad \dot{\mathbf{z}}^\top \quad \mathbf{T}_e^\top]^\top \quad (3.60)$$

La función de sensores incluirá las posiciones de los cuatro marcadores ópticos, y, en principio, todos los esfuerzos motores y reacciones:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [\mathbf{m}_1(\mathbf{z})^\top \quad \mathbf{m}_2(\mathbf{z})^\top \quad \mathbf{m}_3(\mathbf{z})^\top \quad \mathbf{m}_4(\mathbf{z})^\top \quad \tau_1 \quad F_x \quad F_y \quad T_2]^\top \quad (3.61)$$

La derivada por tanto de la función de sensores con respecto al vector de estados es la siguiente:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{z}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Esta disposición del filtro lleva a la necesidad de definición de las siguientes covarianzas:

1. σ_F^P desviación típica del ruido de planta para fuerzas (N)
2. σ_T^P desviación típica del ruido de planta para momentos (Nm)
3. σ_M^S desviación típica del ruido de marcadores (m)
4. σ_F^S desviación típica del ruido de sensores de fuerza (N)
5. σ_T^S desviación típica del ruido de sensores de momentos (Nm)

que se utilizarán para la definición de las matrices de covarianza de ruido de sensores Σ^S y de planta Σ^P , de forma que estas sean una matriz cuadrada cuya diagonal contenga las varianzas de la variable o el sensor correspondiente.

Para la validación del filtro, tal y como se ha mencionado se utilizarán varias formas de integración, de propagación de la función de planta y también de la propagación del ruido.

3.3.3 Metodología

Debido a que el objetivo del *benchmark* diseñado es obtener la máxima información posible acerca del comportamiento del filtro, es necesario tener una programación que permita hacer todas las modificaciones posibles en nuestro modelo de la forma más sencilla posible. Se partirá de una solución conocida del problema, a partir del movimiento sintético generado previamente. A los valores que se utilizarán como sensores, se les añadirá ruido blanco con media 0 y una varianza determinada, para posteriormente utilizar dichos ficheros como lecturas de sensores en la resolución mediante el filtro. De esta manera tenemos un valor de referencia conocido sobre el que poder comparar de forma fiable los resultados obtenidos en el *benchmark*.

Por lo que respecta a los sensores, se trata de emular en la medida de lo posible lo que finalmente se podría tener en el caso de aplicación deseado, por esto se utilizarán los siguientes sensores virtuales:

- 4 marcadores ópticos.
- Sensor de par en la articulación 1.

- Sensor de fuerza y momento en la unión del punto 2 con el suelo.

Hay que señalar que, con el objetivo de conocer mejor el comportamiento del modelo, la información aportada por los sensores de fuerza y par puede ser modificada de forma simple, activando o desactivando cualquiera de ellos en el filtro. De esta manera podremos hacer una evaluación sencilla de como funciona nuestro filtro ante cualquier combinación de sensores. La configuración estándar, que será la más parecida al caso real, es activar todo excepto el sensor de par en la articulación 1.

Para asemejar lo máximo posible los valores que utilizaremos en este modelo simplificado con lo que podríamos tener en la implementación del programa de captura del cuerpo completo, se calcularán las desviaciones típicas que nos proporciona el hardware que se utiliza en el set de capturas del Laboratorio de Ingeniería Mecánica de la Universidad da Coruña. El hardware en concreto consta de 18 cámaras "OptiTrack Flex 3", con su correspondiente software de calibración, y dos placas de fuerza "AMTI AccuGait". Este hardware nos proporcionará unas desviaciones típicas de $2 \cdot 10^{-5}$ m para los marcadores, y aproximadamente 0.3 N para las placas de fuerza.

Para aumentar el paralelismo entre nuestro modelo simplificado y el modelo completo, se decide simular el movimiento relativo de los marcadores con respecto a la piel también en este planteamiento. Para ello, a la posición teórica del marcador, además de añadir un ruido blanco de covarianza conocida, se le añadirá un ruido superpuesto de baja frecuencia (σ_{LF}). Esto se hará creando un vector de ruido blanco, el cual se pasará por un filtro de paso bajo. De esta forma, definiendo una frecuencia de corte se puede escalar este ruido a la covarianza que se desea obtener.

Para tener unos valores que puedan darse en la realidad, se analizarán una serie de capturas de movimiento de la base de datos del laboratorio para determinar las desviaciones típicas máximas que encontraremos en los diferentes marcadores. Se puede observar que en por norma general nos encontramos en valores próximos al medio centímetro, sin embargo, es frecuente encontrar algunas capturas donde algún marcador se desvía hasta valores próximos a los 2 centímetros. Por esto, se utilizará para la obtención de este ruido de baja frecuencia una covarianza de un centímetro, y además, se supondrá siempre una frecuencia de corte que será igual a la frecuencia de las rotaciones del movimiento.

3.3.4 Resultados

Con el objetivo de validar el filtro diseñado, se presentarán tres análisis diferentes dentro de esta sección de resultados. Para todos ellos se hará una comparación de los resultados obtenidos usando los dos métodos aquí presentados: el filtro dinámico (*FD*), y el filtro cinemático con una posterior resolución de la dinámica inversa (*FCDI*).

- El primer análisis simulará un movimiento que tratará de guardar cierta similitud con una situación real que podría encontrarse el filtro completo. Por esto se propone un movimiento cuyas amplitudes y velocidades sean equiparables a las que se podrían encontrar en una sentadilla en el plano coronal. En este caso, se compararán ambos planteamientos, determinando la mejor estimación posible que puede hacer cada uno de ellos. Se comentarán los resultados y se compararán tiempos de cálculo.
- El segundo análisis, tratará de comparar los resultados obtenidos para ambas consideraciones, cuando la estimación de masas no es correcta. De esta manera, con

3. Observadores de estado en biomecánica

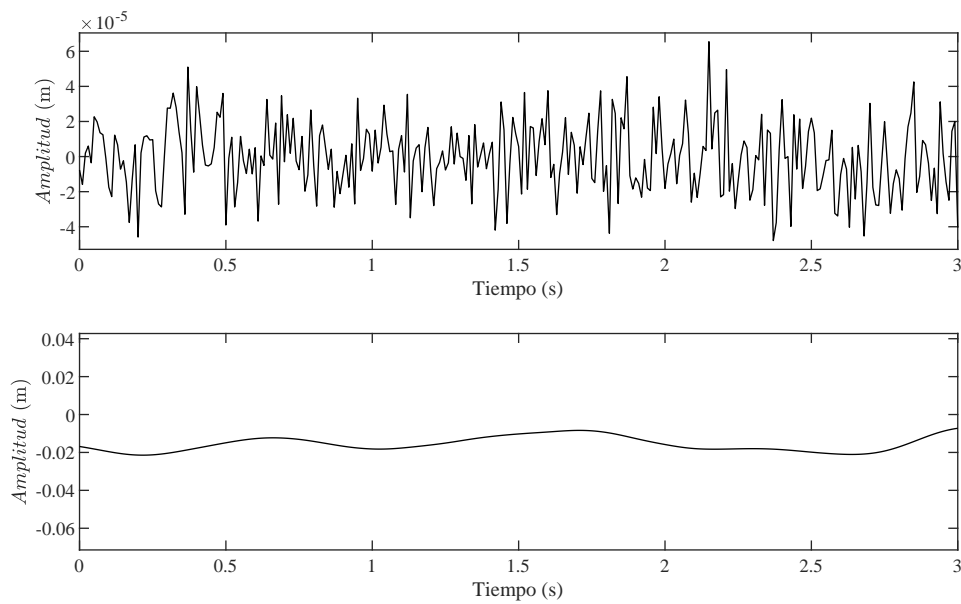


Figura 3.7: Ejemplo de ruido generado para los marcadores virtuales: ruido de baja amplitud y alta frecuencia de las cámaras (arriba), y ruido de mayor amplitud y baja frecuencia simulando el movimiento de la piel (abajo)

el mismo movimiento que el caso anterior, se modificarán las masas que utilizarán nuestros observadores y se verá cual de ellos funciona mejor en dichas circunstancias.

- Por último se simulará la pérdida de los marcadores asociados a una barra durante un número determinado de instantes de tiempo. Esto sería una situación equiparable a la que se daría durante una captura, debido a la oclusión de marcadores.

Las características del sistema, y los parámetros generales del movimiento de referencia generado, junto con las características de los ruidos artificiales introducidos en los sensores, se pueden ver en la Tabla 3.1. Se supondrá en todo momento, salvo que se indique lo contrario, que el FD trabajará con una covarianza de residuo de 10^{-3} N/Nm. De esta manera, se trata de aprovechar que se tiene un filtro donde está implementada la dinámica del movimiento, para reducir el residuo que haga la dinámica consistente con la cinemática. Además, se utilizará el filtro con las opciones más precisas posibles: calculando las matrices de propagación y covarianza según el método de Van Loan descrito en la Sección 2.3.1.2, y utilizando la regla trapezoidal con iteración de Newton–Raphson como integrador numérico.

El movimiento a analizar será el mostrado en la Figura 3.8, con el punto 2 fijo en el suelo. Al ser un sistema con un único momento sin sensor asociado (en la configuración por defecto se consideran sólo sensores en el punto 2), de ahora en adelante se asumirá, al hablar de esfuerzos estimados, que se hablará siempre de dicho momento τ_1 , ya que se asume que las otras 3 vendrán definidas por los sensores.

Se pretende encontrar las covarianzas de la aceleración en el filtro cinemático, y de los esfuerzos en el filtro dinámico, tales que minimicen el error de estimación de τ_1 en cada caso. Para un movimiento con las características definidas, se tiene una evolución del

Constantes físicas	
Masa 1 (kg)	50
Masa 2 (kg)	25
Longitud (m)	0.8
Movimiento	
Tiempo de simulación (s)	3
Amplitud de movimiento (rad)	0.9
Frecuencia de movimiento (Hz)	0.5
Características del ruido	
Desviación típica del ruido de las cámaras (m)	$2 \cdot 10^{-5}$
Desviación típica del ruido por <i>skin motion artifact</i> (m)	10^{-2}
Desviación típica del ruido de sensores de fuerza (N)	0.3
Desviación típica del ruido de sensores de par (Nm)	0.3

Tabla 3.1: Especificaciones Movimiento Análisis

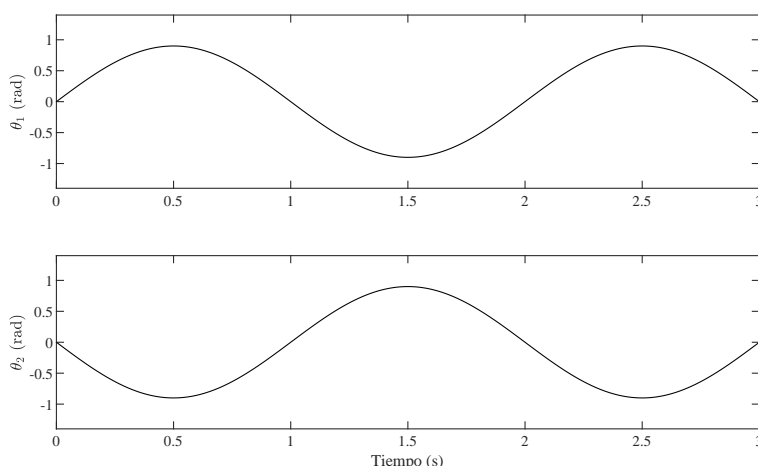


Figura 3.8: Ángulos θ_1 y θ_2 del movimiento a analizar

error en la estimación de fuerza en función de la covarianza de la aceleración del sistema con una forma asintótica (ver Figura 3.12). Por tanto, a partir de un valor determinado, el error cometido en la estimación de la fuerza no sufrirá una variación significativa. De esta manera se dejará la estimación del valor óptimo de esta covarianza en función de la evolución del error en posiciones y velocidades.

Como para posiciones y velocidades ocurre lo mismo, se utilizará el valor de obtenido en dicha asintota como valor de referencia con el cual se comparará el otro planteamiento.

Aplicando la misma metodología, para el *FD* se obtiene una evolución del error de la estimación de fuerzas en función de la covarianza definida (ver Figura 3.14) con una forma prácticamente asintótica, sin embargo, con una convergencia al valor notablemente posterior a lo que se apreciaba en la covarianza del modelo cinemático.

Como se puede apreciar, los valores de la covarianza para la estimación óptima de la

3. Observadores de estado en biomecánica

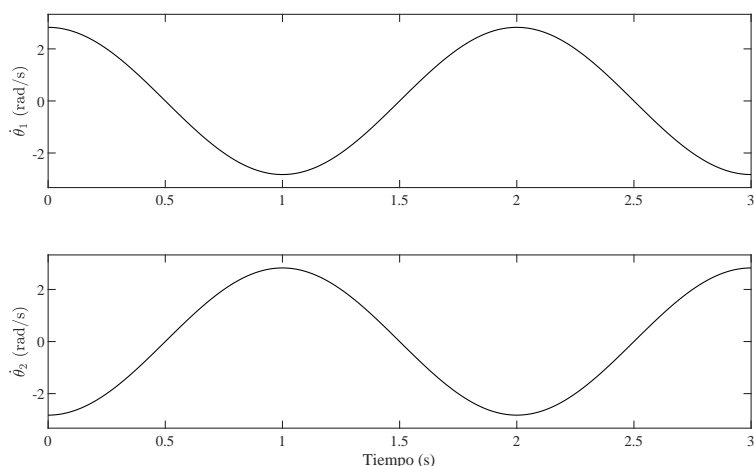


Figura 3.9: Velocidades $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ del movimiento a analizar

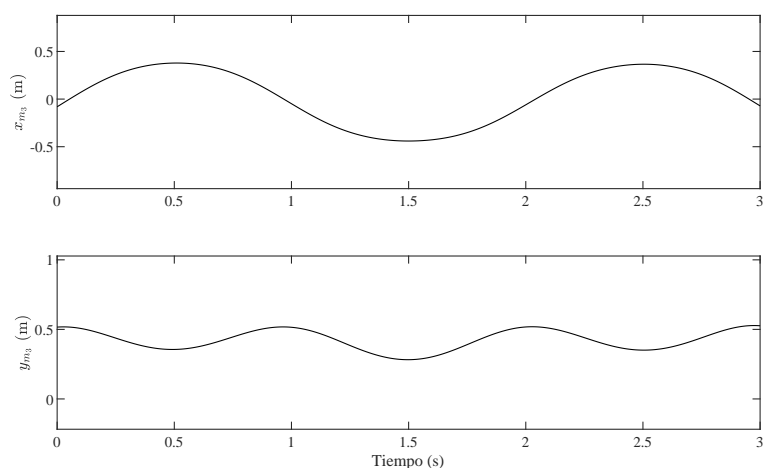


Figura 3.10: Posición del marcador 3 del movimiento a analizar

fuerza para este movimiento no son el mismo. Es lógico ya que la interpretación que se tiene en cada uno de ellos del movimiento es diferente. Queda por comprobar si el valor asociado a la mejor estimación de posiciones y velocidades en *FD* será el mismo que el asociado a la mejor estimación de fuerzas.

Como se puede observar, no hay un valor que proporcione una mejor estimación para todos los estados del sistema, sin embargo se aprecia que la tendencia a dicho valor está aproximadamente en valores comprendidos entre 500 y 1000 Nm de covarianza. Sin embargo, para los siguientes cálculos, vista la evolución de las curvas y el orden de magnitud que se maneja en ellas, se utilizará el valor de los presentados con una mejor estimación de fuerzas.

Una cosa relevante a señalar en este apartado es que el tiempo de cálculo no se tendrá en cuenta de manera absoluta sino relativa. Es decir, se podrán hacer una estimaciones de la relación de tiempos de cálculo que pueden tener ciertas condiciones de cara a la resolución

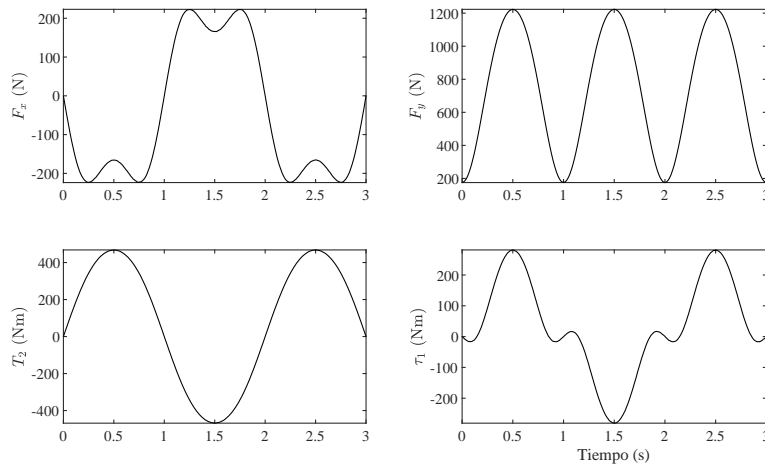


Figura 3.11: Fuerzas F_x , F_y , T_2 y τ_1 del movimiento a analizar

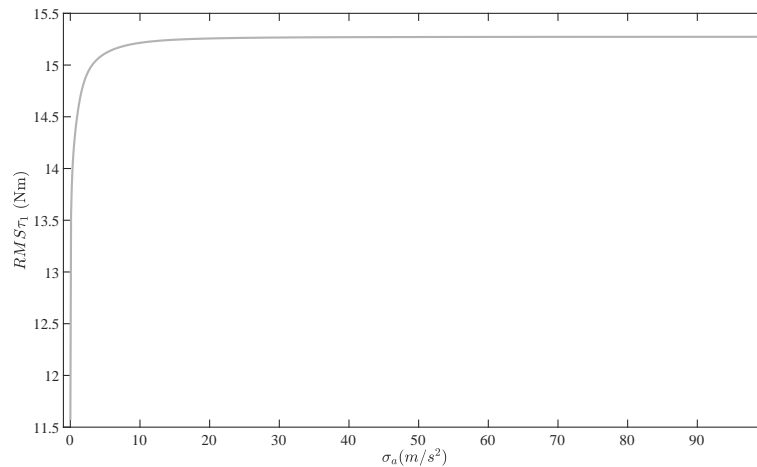


Figura 3.12: Evolución de RMS del momento estimado en relación a la covarianza de la aceleración para el modelo *FCDI*

del problema, sin embargo, al ser un modelo tan simplificado todos planteamientos actuarán por encima de tiempo real.

Sin embargo dado que comparten programación y solo cambia esta los apartados correspondientes, resulta lógico creer que de cara al modelo completo esta relación de tiempos se mantendrá en el mismo orden de magnitud.

Por tanto, una vez tenemos definidos los valores de covarianza que minimizarán nuestro error de estimación de fuerzas se podrán comparar ambos planteamientos (*FD* y *FCDI*). Al encontrarnos en el primer caso de estudio, será el único para el cual se presentarán todos los resultados obtenidos. A partir de este se comentarán exclusivamente los más relevantes, ya que para los demás se asumirá un comportamiento similar a lo ocurrido en este modelo.

Se comentarán los resultados comparados con el doble péndulo teórico ideal, para los cuales, en las gráficas se tendrá representado en negro el valor de referencia, en azul el

3. Observadores de estado en biomecánica

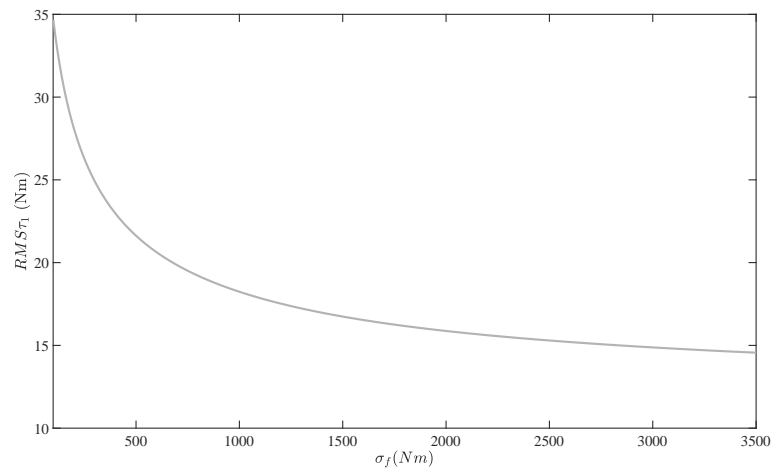


Figura 3.13: Evolución de RMS del par estimado en relación a la covarianza

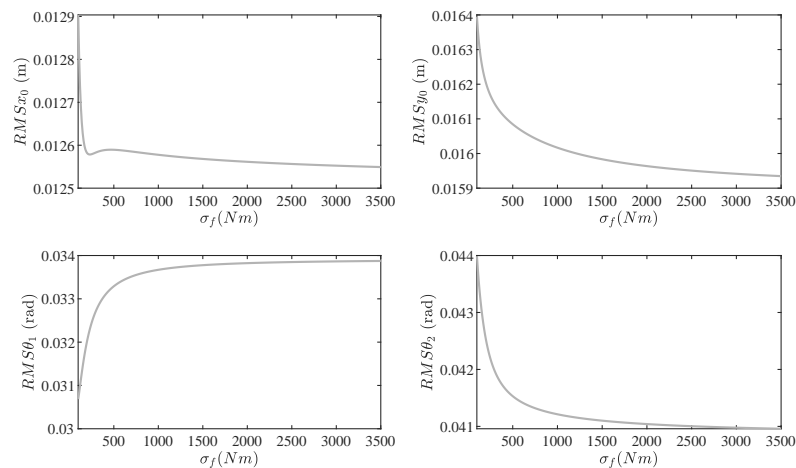


Figura 3.14: Evolución de RMS de las posiciones estimadas en relación a la covarianza

valor obtenido mediante *FCDI* y en naranja el valor obtenido usando *FD*.

En posiciones, se puede ver que la estimación que hacen ambos observadores son bastante similares, por lo que se puede decir que el resultado de *FD* es un resultado válido si se entiende que el del cinemático lo es. Se pueden apreciar pequeñas diferencias entre ambos resultados, esto se debe principalmente a que el *FD* resuelve el problema de forma que ajuste el error existente con la estimación de marcadores y las fuerzas que se están introduciendo en nuestro sistema. Sin embargo, *FCDI* no ajusta la posición del sistema en función de las fuerzas que introducen las placas ya que estas solo se tendrán en cuenta de cara a la resolución de la dinámica inversa.

En velocidades, por su parte, el filtro dinámico reduce notablemente el retraso que se produce en el cinemático. Se puede apreciar también una pequeña inestabilidad en la estimación de velocidades en los puntos de cambio de dirección, este hecho será consecuencia de la inercia del sistema y su resistencia a la modificación del movimiento.

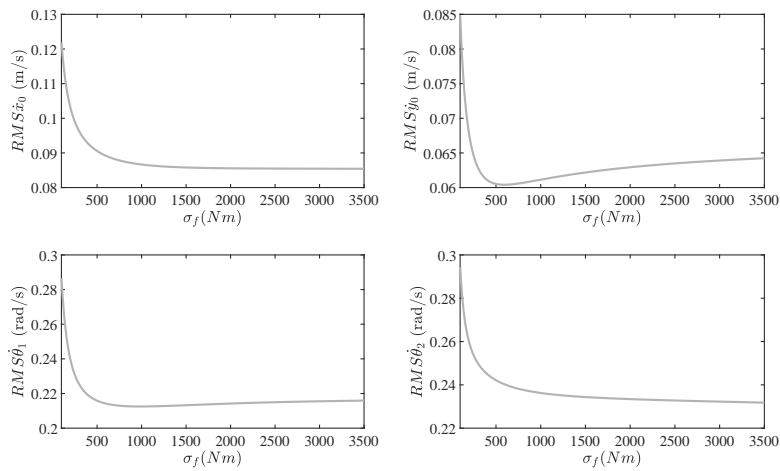


Figura 3.15: Evolución de RMS de las velocidades estimadas en relación a la covarianza

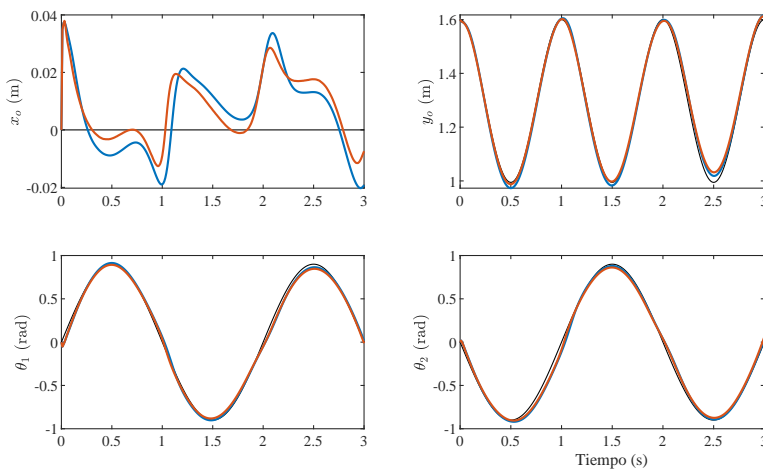


Figura 3.16: Comparación estimación posiciones de *FCDI* con el *FD*

Sin embargo, resulta razonable concluir que la estimación de las velocidades estimadas por el filtro dinámico mejoran las del filtro cinemático.

Para concluir con esta comparación, se comparará la estimación de fuerzas. Se puede apreciar que la estimación de fuerzas, en este caso particular, es mejor si se utiliza *FCDI*. Sin embargo, tras numerosos ensayos con diferentes movimientos, velocidades y configuraciones del observador no se puede determinar que un filtro estime mejor las fuerzas que el otro en condiciones ideales de trabajo. Es un proceso que dependerá de la generación del ruido y esto escapa de las manos del analista.

Se acaban de presentar los mejores resultados posibles proporcionados por *FD* y *FCDI* bajo las condiciones de 3.1. Sin embargo, es lógico pensar que bajo la suposición de un integrador implícito y cálculo exponencial, a pesar de para el modelo planteado se funciona por encima de tiempo real, el modelo completo no lo hará. Por esto se ejecutarán todas las combinaciones posibles entre integradores y planteamientos de propagación tanto de ruido

3. Observadores de estado en biomecánica

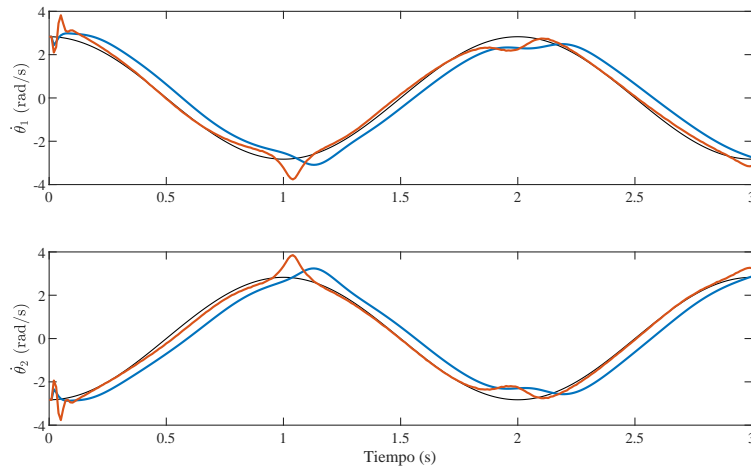


Figura 3.17: Comparación estimación posiciones de *FCDI* con el *FD*

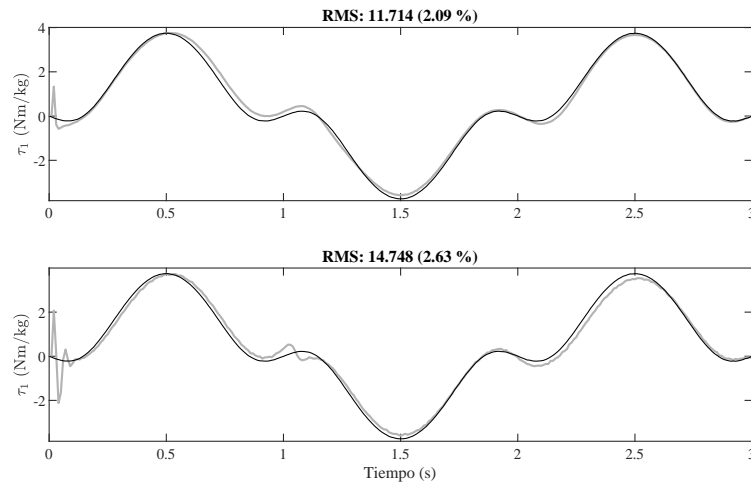


Figura 3.18: Comparación estimación fuerza de *FCDI* con el *FD*

como de planta explicados a lo largo de esta tesis. Para poder comparar la precisión de *FD* se lanza el filtro con el valor óptimo de sigma obtenido en la Figura 3.13.

El modelo con el cual se comparará será el utilizado para a la implementación del modelo completo, ya que tras numerosas pruebas para distintos movimientos y, tras su programación preliminar al modelo completo se observa que sistemáticamente proporciona unos resultados considerablemente precisos a la par que mantiene un coste computacional que permitirá su implementación en tiempo real.

Este modelo, que de aquí en adelante se llamará: filtro dinámico para modelo completo *FDMC* será la combinación de un integrador explícito de *Forward Euler* (3.32), propagación de estados con aproximación de la exponencial de segundo orden (3.51) y covarianza del ruido de planta aproximada (2.45), y se comparará con los modelos ya mencionados *FD* y *FCDI* para cada uno de los análisis.

Para el mismo movimiento y mismas condiciones de ruido, se propone modificar la

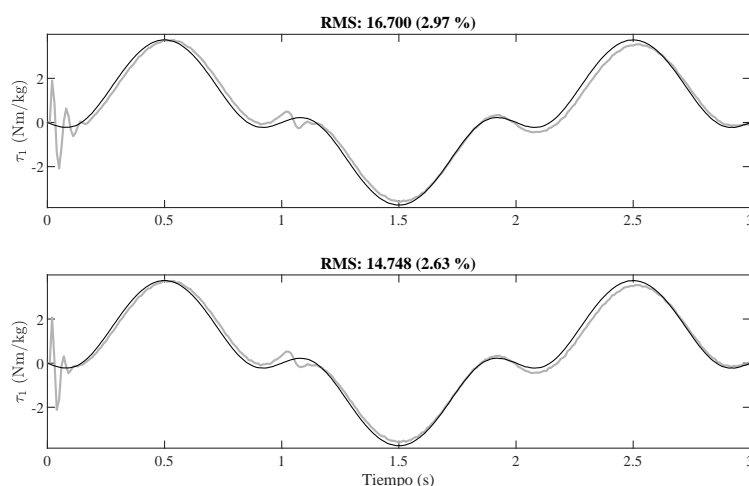


Figura 3.19: Comparación estimación fuerza de *FD* con *FDMC*

distribución de masas que supondrán los observadores para tratar de estimar en la mejor medida posible lo que ocurriría en una situación de trabajo real del filtro diseñado. Esto se propone ya que uno de los problemas más frecuentes y un tema a abordar y comentado en la bibliografía de los análisis biomecánicos, es la distribución de las masas y posiciones de los centros de gravedad de las diferentes partes del cuerpo.

En este documento, se distinguirá entre dos términos similares asociados a la masa del modelo: estimación y la distribución. La estimación será aquella asociada al modelo completo, es decir la masa total del sistema, sin embargo cuando se hable de distribución, nos referiremos a cómo esta masa estimada está distribuida entre los sólidos del modelo. En este caso, se supondrá una mala distribución de la masa, no así una mala estimación. Una mala estimación supone que la masa total del sujeto es errónea aunque esta puede ser correctamente distribuida. Por su parte la mala distribución supone que la distribución entre sólidos no es la adecuada. En este caso se supondrá una mala distribución exclusivamente, ya que, se considera que los valores aportados por las placas durante la fase de estimación de masas será lo suficientemente precisa como para considerar que la estimación total será correcta. Por tanto, todo el fallo en las masas vendrá introducido por el modelo de distribución elegido.

De esta manera, se compararán los resultados para la misma covarianza de fuerza con distintos valores asociados a la covarianza del residuo. Se observa que los valores de posición no variarán de forma significativa se hagan las modificaciones que se hagan en nuestros observadores, por lo que de aquí en adelante salvo comentario puntual, se asumirá que ambos filtros tienen resultados aceptables. Ocurrirá lo mismo con las fuerzas con sensor asociado, por lo que de ahora en adelante, para el modelo simplificado se comentará exclusivamente el valor de la fuerza τ_1 .

Por tanto, con el movimiento generado con los valores de la Tabla 3.1 y con los mismos valores de ruidos que los presentados hasta el momento se modificarán las masas de las barras, yendo a una situación para la cual gran parte de la masa 2, que en este caso sería el equivalente a las piernas, se encuentra en la barra 1 que hace las veces de torso. Se pasa por tanto de cincuenta a sesenta kilos en el torso y de veinticinco a quince en las piernas.

3. Observadores de estado en biomecánica

Con este error de estimación se lanzan ambos observadores tanto con un residuo restringido como con un residuo relativamente alto que permita al sistema dinámico hacer las modificaciones que considere necesarias.

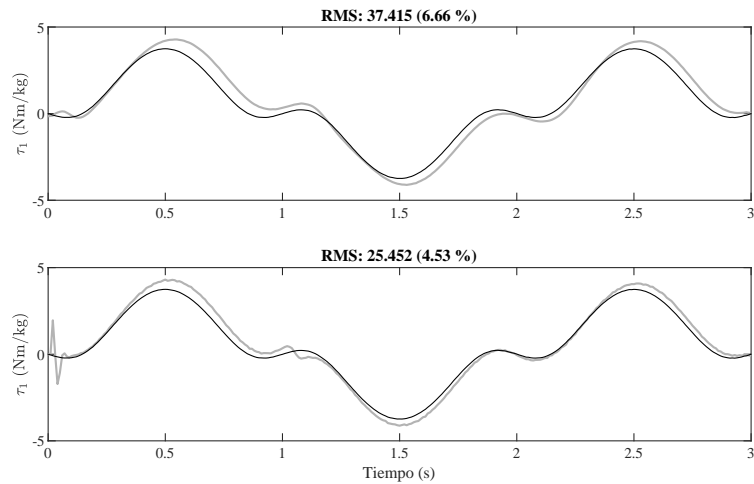


Figura 3.20: Comparación estimación fuerza de *FD* con *FDMC* con mala estimación de masas con restricción residual alta

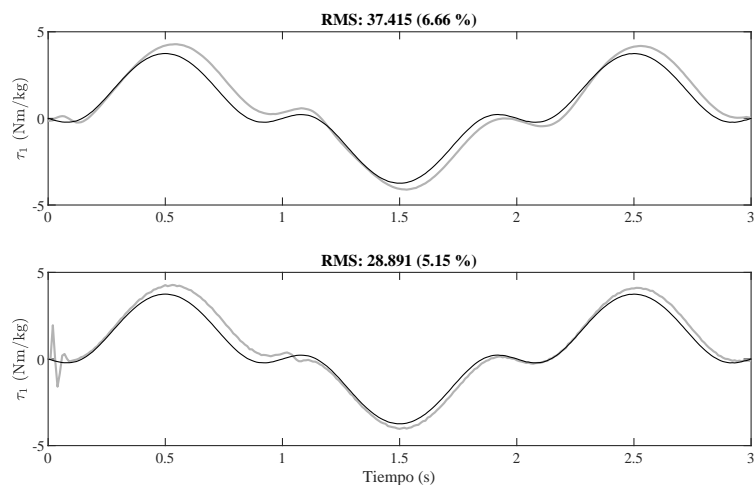


Figura 3.21: Comparación estimación fuerza de *FD* con *FDMC* con mala estimación de masas con restricción residual baja

Como se puede ver en las Figuras 3.20 y 3.21, el mero hecho de introducir la dinámica en el sistema, aunque se permita un residuo notablemente grande para nuestro observador, mejora notablemente la estimación de fuerzas cuando hacemos una mala distribución de la masas del sistema. Esto resulta lógico ya que se tienen como estados las propias fuerzas del sistema, además de un sensor de fuerza que aporta información dinámica fiable sistema en tiempo real. Además, se puede observar que el hecho de introducir mayor covarianza en el residuo genera una peor estimación del sistema. Esto es lógico ya que, bajo las mismas

condiciones de trabajo, si se aumenta la covarianza del residuo del sistema se indica que el residuo se puede alejar más de 0 y por tanto las fuerzas totales que aparecerán en nuestro sistema diferirán de las reales. Esto en el filtro cinemático es interesante porque estas fuerzas generan consistencia entre la cinemática y la dinámica pero en este caso, se puede estimar que el propio filtro con la dinámica implementada ya genera esa consistencia por lo que añadir más fuerzas genera incongruencias en el mismo.

El tercer estudio planteado supondrá la situación de pérdida de marcadores durante la captura. Para poder realmente determinar la robustez del filtro ante dicha situación, será necesario quitar marcadores de manera que haga nuestro sistema no observable, tal y como se explicará en detalle en el Capítulo 4. Por esto, y dado que tenemos marcadores redundantes en nuestro modelo, se propone quitar los dos marcadores asociados a la misma barra de forma que el sistema no sea observable. Además, con el objetivo de llevar a nuestro sistema a la situación más límite posible y verificar su robustez, se simulará la pérdida de marcadores en la zona crítica del movimiento. Además, se supondrá una oclusión de 300 ms, o lo que es lo mismo, 30 *frames*. Lo cual es una situación extrema en comparación con las habituales durante una sesión de captura.

Para el mismo movimiento que en los análisis previos se tiene una pérdida de los marcadores m_1 y m_2 durante los instantes de mayor velocidad del sistema. Como era de esperar, en una situación crítica como ésta *FD* presenta una robustez considerablemente mayor a la obtenida mediante *FCDI* ante la pérdida de la observabilidad del sistema.

En la Figura 3.22 se compara tanto velocidad, como posición asociados a la barra para la cual se pierden los marcadores durante los instantes de tiempo sombreados en gris. Se puede apreciar como la inercia introducida en el sistema dentro de la propia estimación, facilita la estabilidad del mismo a niveles de velocidad ya que la estimación de velocidad será considerablemente buena a lo largo de todo el movimiento. Por su parte, se puede ver que las posiciones estimadas por *FD* serán muy buenas a lo largo de todo el movimiento, incluso cuando aparecen esta pérdida de marcadores. Al contrario ocurre con el filtro cinemático, se puede ver que en la zona donde se producen estas pérdidas de sensores aparece un pico ya que el modelo continua con la propagación que tenía previa a la pérdida de los marcadores. No es hasta la recuperación de los sensores cuando el filtro vuelve a estabilizarse.

Esto llevado a la estimación de fuerzas del sistema, se puede observar como ambos filtros sufrirán en estas circunstancias para la estimación del par motor. A pesar de esto, si nos fijamos en la Figura 3.23 se puede observar como la estimación de *FD* tendrá un retraso inferior a la obtenida por el cinemático. Además es notablemente más estable ya que se puede ver en el primer intervalo de pérdida de marcadores, como a pesar de sufrir unos picos similares a la curva de *FCDI* es capaz de volver a converger a unos resultados adecuados en un intervalo de tiempo considerablemente menor al filtro cinemático.

Esto se debe a que al introducir la dinámica dentro del propio filtro, los sensores de fuerza continuarán guiando nuestra estimación de fuerza a pesar de haber perdido los sensores cinemáticos. Sin embargo en el *FCDI*, se modifica la cinemática drásticamente del movimiento, por lo que todas sus derivadas se verán afectadas consecuentemente sin posibilidad alguna de que un sensor que sea capaz de reconducir al sistema a la solución correcta hasta que se recupere la observabilidad del sistema.

3. Observadores de estado en biomecánica

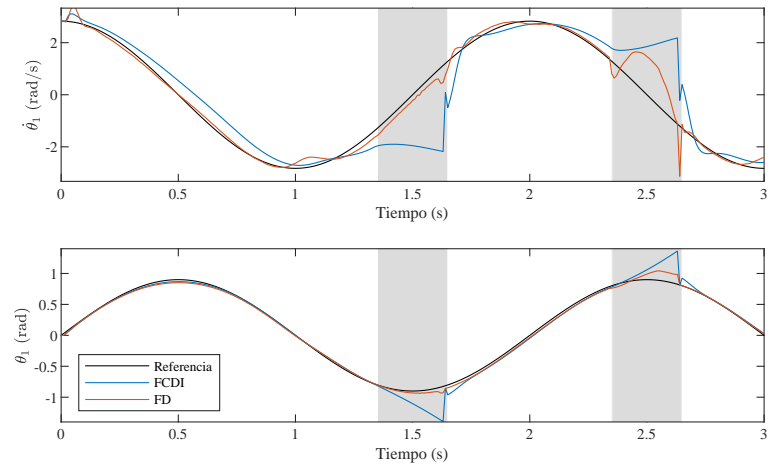


Figura 3.22: Evolución ángulo θ_1 y $\dot{\theta}_1$ con oclusión de marcadores

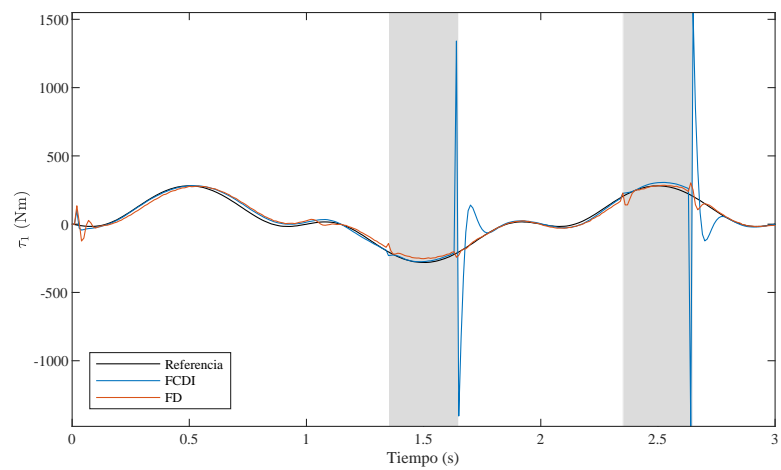


Figura 3.23: Estimación de fuerzas en caso de oclusión de marcadores

Capítulo 4

Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

Una vez presentado y validado el filtro dinámico para la estimación de pares articulares en tiempo real, en el presente capítulo se va a proceder a la implementación de dicho filtro para el objetivo para el cual fue diseñado, la estimación de pares motores en el movimiento humano en tiempo real.

Lo primero que se comentará en este capítulo es la manera de proceder en ciertos aspectos que se han dejado en el aire previamente, como pueden ser la estimación de los centros de masa de nuestro sistema, o el escalado necesario en toda captura de movimiento.

Posteriormente se comentarán los resultados, haciendo especial hincapié en las ventajas que tienen cada uno de los dos modelos de estimación planteados en el Capítulo 3.

4.1 Filtro completo

Una vez se ha validado el filtro para un modelo simplificado, el objetivo es llevar el mismo planteamiento a un modelo complejo del cuerpo humano. Al pasar de un modelo bidimensional conocido a un modelo tridimensional genérico, se tienen que hacer modificaciones con el objetivo de resolver problemas en este paso del proyecto. Sin embargo, el vector de estados y la función de sensores vendrán definidas de la misma manera que en el Capítulo 3.

4.1.1 Escalado del modelo

Una de las partes más importantes en la captura del movimiento es el escalado del modelo, ya que una mala aproximación puede hacer las innovaciones muy grandes, o bien alterar de forma significativa la integración del modelo multicuerpo a lo largo del tiempo. Cualquiera de estas opciones conduce a la misma situación: un filtro que no será capaz de converger a un resultado adecuado. En este documento se distinguirá entre dos maneras de obtener la escala del modelo: una pensada para postproceso, y otra para la implementación en tiempo real.

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

El escalado se lleva a cabo desde un modelo de referencia, con unas dimensiones determinadas. Para este modelo de referencia, hay unas dimensiones, como las posiciones de las articulaciones en los ejes del sólido proximal $\bar{\mathbf{r}}_b$, o las posiciones de los marcadores ópticos dentro de cada sólido $\bar{\mathbf{m}}_i$, ambas descritas en la Sección 3.1.2, que deben ser escaladas y ajustadas para que encajen lo mejor posible con los marcadores capturados por las cámaras.

En la práctica el resultado más cómodo sería utilizar un único factor de escala para todo el modelo, pero es necesario tener en cuenta que hacer esta posibilidad está lejos de ser aceptable, ya que cada sujeto presentará una diferente morfología y, por tanto, el factor de escala asociado a cada uno de los ejes deberá ser diferente. Pero usar tres factores de escala por cada sólido tampoco resulta práctico, porque, para poder escalar todos los sólidos en todas las direcciones, haría falta un gran número de marcadores. Por este motivo, se definirá un conjunto de factores de escala independientes, \mathbf{k}_i , que, a través de ciertas relaciones, proporcionarán los $3 \times n_b$ factores de escala dependientes \mathbf{k} (tres por cada uno de los n_b sólidos del modelo).

Para la obtención de los factores de escala, se plantea un problema de optimización, donde la función objetivo a minimizar es el error obtenido por los marcadores teóricos $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_i)$ con respecto a los reales \mathbf{m} , usando como variables de diseño los estados del sistema \mathbf{x} (de los que sólo se utilizarán las posiciones, \mathbf{z}), y los factores de escala independientes \mathbf{k}_i :

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{k}_i) = |\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_i) - \mathbf{m}| \quad (4.1)$$

En este problema de minimización, la función \mathbf{h} es la misma función de observación usada en el filtro de Kalman cinemático, pero aumentada para utilizar también como entradas los factores de escala independientes. Para resolverlo, se ha comprobado que el algoritmo que mejor funciona es el de Levenberg–Marquardt [68, 69], que es un método amortiguado para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales.

Para definir la relación entre los factores de escala independientes y los dependientes, se pueden distinguir tres tipos de sólidos:

- Sólidos con un factor de escala uniforme. En huesos largos, como el húmero, el conjunto cúbito-radio, el fémur y el conjunto tibia-peroné, los 3 ejes se escalarán según el mismo factor, ya que se supondrá que al ser huesos largos, el eje principal del mismo será el que determine el dimensionado del sólido en los otros dos ejes.
- Sólidos con dos factores de escala independientes. Para este caso encontraremos sólidos en los cuales se escalarán dos ejes de forma específica con sus respectivas escalas independientes, y el factor de escalado para el tercer eje se obtendrá como la media entre los otros dos. Un ejemplo de este tipo de escalado es el pie, ya que se toman como medidas relevantes tanto la longitud como la anchura, y se obtiene la altura a partir de estas dos. En este caso se utiliza este planteamiento ya que la obtención del escalado en el eje vertical del pie es considerablemente sensible a la precisión de la captura, siendo muy susceptible a errores en la colocación de los marcadores. De esta forma, se consigue un modelo considerablemente robusto y con una precisión adecuada.
- Sólidos con tres factores de escala independientes: En este caso encontraremos la unión pelvis-torso. Ambos sólidos tendrán 3 factores independientes para cada uno,

pero compartidos entre sí. Se supondrá que con los marcadores utilizados según el protocolo mostrado en la Figura 2.1, se pueden obtener las escalas independientes asociadas a los ejes mediolateral y vertical del torso, así como las de los ejes antero-posterior y mediolateral de la pelvis. Los restantes que quedan serán compartidos, ya que se utilizará la escala independiente del eje anteroposterior de la pelvis en el mismo eje del torso y, a la inversa con el dimensionado en el eje vertical.

Sólido	Segmento	k_x	k_y	k_z
1	Pelvis	1	2	3
2	Torso	1	4	3
3	Cuello	5	5	5
4	Cabeza	5	5	5
5	Brazo derecho	6	6	6
6	Antebrazo derecho	7	7	7
7	Mano derecha	7	7	7
8	Brazo izquierdo	8	8	8
9	Antebrazo izquierdo	9	9	9
10	Mano izquierda	9	9	9
11	Fémur derecho	10	10	10
12	Tibia derecha	11	11	11
13	Pie derecho	12	13	-
14	Fémur izquierdo	14	14	14
15	Tibia izquierda	15	15	15
16	Pie izquierdo	16	17	-
17	Dedos pie derecho	12	13	-
18	Dedos pie izquierdo	16	17	-

Tabla 4.1: Factores de escala independientes

En la Tabla 4.1 se puede ver qué factores de escala independientes se asocian a cada uno de los ejes locales de los sólidos del modelo. En aquellos en los que no hay un valor asignado, se entenderá que dicho factor de escala será el resultado de calcular la media entre los otros dos del mismo sólido, tal y como se ha comentado previamente.

Para una reconstrucción *offline* del movimiento, el procedimiento será el siguiente: conocidos los marcadores, utilizando el método tradicional de reconstrucción mencionado en la Sección 2.2.2, se obtendrá una primera aproximación de la postura del modelo \mathbf{z} para cada instante de la captura. Una vez se conoce esta orientación, y definiendo el número de factores de escala independientes, se resolverá el problema de optimización de forma global, utilizando como variables de diseño las posiciones en todos los instantes de tiempo, y un conjunto único de factores de escala independientes. De este modo, se obtienen para ese movimiento los valores óptimos de las escalas independientes que minimizan el error en los marcadores.

Debido a que en gran medida los errores asociados a los marcadores a lo largo de la captura van a ser constantes ya que son fruto de un mal posicionamiento de los marcadores con respecto al teórico ideal, se pretende reducir al mínimo estos errores corrigiendo la

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

posición en ejes locales de los marcadores para cada sesión de captura. De esta manera, una vez se tiene un *set* de escalas adecuado, se obtendrá la posición media de los marcadores reales en los ejes locales de los sólidos correspondientes, a lo largo de toda la captura, y se utilizará para corregir las posiciones de referencia de los marcadores $\bar{\mathbf{m}}_i$. De esta manera, se eliminará el error constante de posicionamiento de la captura. Así, se pasa de errores RMS de entre 10 y 15 mm a errores del orden de 5 mm (ver Figura 4.1).

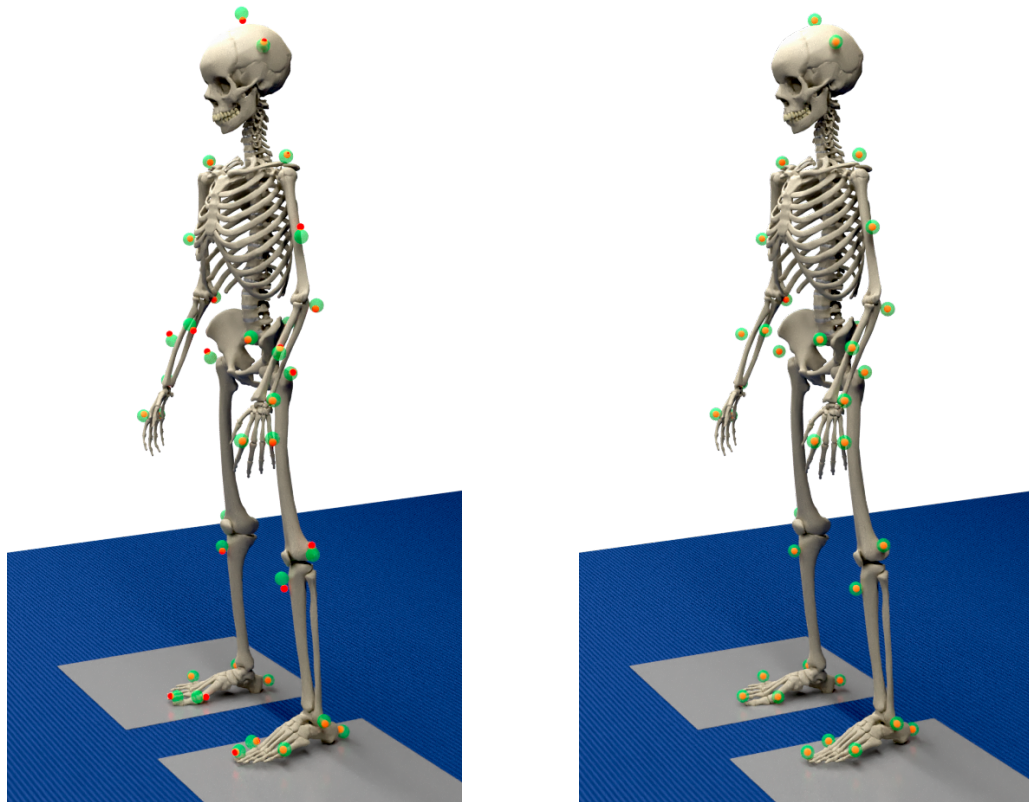


Figura 4.1: Desviación de los marcadores medidos por las cámaras (rojo) respecto a su posición en el modelo de referencia (verde). Izquierda: posiciones de referencia antes de la corrección. Derecha: posiciones locales tras la corrección

Para un funcionamiento en tiempo real, se actuará del mismo modo, pero resolviendo el problema de optimización en el primer instante de tiempo, guardando a continuación los factores de escala y las posiciones corregidas de los marcadores, que serán luego utilizadas en el filtro de Kalman.

4.1.2 Parámetros inerciales

Para la estimación de las masas e inercias de cada una de las partes del cuerpo, se plantea como primera opción el modelo de Dumas et al. [70], ya que es un modelo altamente conocido y utilizado en la estimación de parámetros inerciales para cálculos biomecánicos. Sin embargo, para utilizar únicamente dicho modelo, habría que hacer una serie de modificaciones en el tren superior, ya que el modelado de esta parte difiere notablemente del planteado en esta tesis. Para resolver este problema, se utilizará una combinación del modelo de Dumas con el planteado por Silva y Ambrósio [71, 72]. Para

4.1 Filtro completo

la mayoría de los segmentos, se usarán los parámetros de este último autor, pero para los centros de gravedad e inercias en ejes locales de los brazos, antebrazos, muslos, piernas, pies y dedos se utilizarán los datos de Dumas, escalados a las dimensiones del modelo de Silva. Los parámetros utilizados en el modelo de referencia se muestran en la Tabla 4.2. Por simplicidad, se consideran tensores de inercia diagonales, ignorando los productos de inercia.

Los ejes de referencia locales de cada sólido tendrán su origen en la articulación proximal correspondiente. Estos sistemas de referencia local irán alineados a los globales cuando el sujeto se encuentra de pie, mirando hacia la dirección positiva del eje x global, con los brazos estirados a lo largo del cuerpo y las palmas de las manos hacia dentro (ver Figura 3.1).

Sólido número	Parte del cuerpo	Masa (kg)	\bar{r}_G (m) $r_G^x/r_G^y/r_G^z$	Momentos de inercia ($10^{-2}kgm^2$) $I_{xx}/I_{yy}/I_{zz}$
1	Pelvis	14.200	0 / 0 / -0.211	26.220 / 13.450 / 26.220
2	Torso	24.950	0 / 0 / 0.101	24.640 / 37.190 / 19.210
3	Cuello	1.061	0 / 0 / 0.061	0.268 / 0.215 / 0.215
4	Cabeza	4.241	0.051 / 0 / 0.020	2.453 / 2.249 / 2.034
5	Brazo derecho	1.992	0.005 / 0.008 / -0.133	1.666 / 1.775 / 0.340
6	Antebrazo derecho	1.402	0.003 / -0.003 / -0.104	0.687 / 0.639 / 0.106
7	Mano derecha	0.489	0 / 0 / -0.093	0.148 / 0.146 / 0.067
8	Brazo izquierdo	1.992	0.005 / -0.008 / -0.133	1.666 / 1.775 / 0.340
9	Antebrazo izquierdo	1.402	0.003 / 0.003 / -0.104	0.687 / 0.639 / 0.106
10	Mano izquierda	0.489	0 / 0 / -0.093	0.148 / 0.146 / 0.067
11	Fémur derecho	9.843	-0.018 / -0.014 / -0.186	15.592 / 16.686 / 4.171
12	Pantorrilla derecha	3.626	-0.021 / -0.030 / 0.180	5.479 / 5.479 / 0.699
13	Pie derecho	1.093	0.050 / -0.005 / -0.033	0.090 / 0.430 / 0.430
14	Fémur izquierdo	9.843	-0.018 / 0.014 / -0.186	15.592 / 16.686 / 4.171
15	Pantorrilla izquierda	3.626	-0.021 / 0.030 / 0.180	5.479 / 5.479 / 0.699
16	Pie izquierdo	1.093	0.050 / 0.005 / -0.033	0.090 / 0.430 / 0.430
17	Dedos pie derecho	0.089	0.039 / 0.002 / -0.005	0.006 / 0.003 / 0.010
18	Dedos pie izquierdo	0.089	0.039 / -0.002 / -0.005	0.006 / 0.003 / 0.010

Tabla 4.2: Masas, posiciones locales de centros de gravedad y momentos de inercia de referencia asumidos en el modelo

A continuación, con el objetivo de tener todos los valores asociados al mismo modelo, hay que definir diversos factores de escala para poder relacionar entre sí dichos planteamientos. De esta manera, se definirá una serie de escalas constantes \mathbf{k}_{SL} , que relacionarán las dimensiones utilizadas por Silva con el modelo de referencia diseñado en el laboratorio.

Tras el escalado del modelo tal como se describe en la Sección 4.1.1, se dispone de un conjunto de escalas \mathbf{k} que relaciona el modelo diseñado en el laboratorio con las mediciones de los marcadores. Por lo tanto, resulta trivial la obtención del set de escalas \mathbf{k}_{MS} que relaciona el modelo de Silva con las mediciones de los marcadores:

$$k_{MS_j} = \frac{k_j}{k_{SL_j}} \quad j = 1, \dots, n_b \quad (4.2)$$

De esta manera se podrá aplicar el procedimiento utilizado en [71, 72], de forma que se defina una escala específica para masas k_m , un conjunto de escalas para longitudes \mathbf{k} , y otro

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

conjunto de escalas dependiente de las anteriores, asociadas a los momentos de inercia \mathbf{k}_I :

$$k_m = \frac{m}{m_S} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{k}_I = k_m \mathbf{k}_{MS}^2 \quad (4.4)$$

Donde m es la masa total del sujeto, y m_S es la masa total del modelo de referencia, que será constante, y viene definida por la suma de las masas de la Tabla 4.2.

4.1.3 Seguimiento de marcadores

Para el funcionamiento del filtro de Kalman en tiempo real, tanto sea el cinemático como el dinámico, se precisa asociar cada uno de los marcadores detectados por el sistema de captura con los diferentes marcadores definidos en nuestro modelo. Para ello, se utiliza un método sencillo pero capaz de resolver este problema para capturas en tiempo real.

Para arrancar el filtro, hay que realizar una primera asignación de marcadores. A partir de una pose de referencia, se puede deducir una asignación a partir de las posiciones relativas entre marcadores. Por ejemplo, los diez con la coordenada z más baja serán los de los pies, y de esos diez, los cinco más a la derecha corresponderán al pie derecho. Siguiendo esta lógica, se puede desarrollar un algoritmo sencillo que permita un etiquetado inicial de los marcadores.

Una vez identificados los marcadores, se ajusta el modelo ya previamente escalado a los marcadores medidos, realizando la misma optimización descrita en la ecuación (4.1), pero usando sólo las posiciones como variables de diseño. Como resultado de este proceso, se obtiene una primera posición del sistema, \mathbf{z}_0 , que será válida si el error de la función objetivo está por debajo de un umbral. En caso contrario, se considerará que el etiquetado de marcadores inicial era incorrecto, y se repite el proceso para el siguiente paso de tiempo, hasta que se tiene una solución válida. Si la solución es correcta, se comienza la iteración del filtro de Kalman.

Este problema de reordenación deberá ser resuelto para cada instante de tiempo, ya que las cámaras proporcionan las posiciones de los marcadores sin ningún orden determinado. Además, puede haber oclusiones o ruidos de reflexión. Pero, durante el funcionamiento del filtro, el procedimiento de etiquetado de marcadores es diferente, porque se dispone de una estimación de sus posiciones a partir de la evaluación de la función de observación:

$$\hat{\mathbf{m}}_{k+1} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-) \quad (4.5)$$

Por tanto, se diseña un algoritmo capaz de pasar de las posiciones de los marcadores desordenadas \mathbf{m}_{k+1}^* , proporcionadas por las cámaras de captura en crudo, a un vector \mathbf{m}_{k+1} , preparado para su implementación dentro del observador.

Este algoritmo se utilizará en un punto intermedio entre la predicción y la corrección del filtro. Una vez se tiene la estimación a priori de los estados $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$, estos se utilizarán para la predicción de la posición de marcadores $\hat{\mathbf{m}}_{k+1}$. En el caso ideal, estos deben coincidir con \mathbf{m}_{k+1} y es esto lo que permite la definición del algoritmo. Primero, se define una matriz de distancias al cuadrado:

$$\mathbf{D}_{ij} = (\hat{\mathbf{m}}_i - \mathbf{m}_j^*)^\top (\hat{\mathbf{m}}_i - \mathbf{m}_j^*) \quad (4.6)$$

donde $\hat{\mathbf{m}}_i$ contiene la posición estimada del marcador i , y el vector \mathbf{m}_j^* es la posición del marcador j proporcionado por las cámaras. Se van asignando marcadores medidos a los estimados más cercanos, de menor a mayor distancia. Para evitar asociaciones incorrectas, se define un radio de búsqueda máximo: si un marcador estimado no tiene uno medido correspondiente dentro de ese radio de búsqueda, se asumirá que dicho marcador se ha perdido en ese paso de tiempo. Así, cualquier marcador medido que no esté asociado a uno estimado se asumirá que es ruido de reflexión y será descartado.

Si un marcador se considera perdido, basta con poner a cero sus filas correspondientes en la matriz \mathbf{H} para que no tenga ningún efecto en el corrector. Esta es una manera eficiente de eliminar sensores, sin tener que cambiar el tamaño de las matrices del sistema en tiempo de ejecución.

4.1.4 Definición del filtro dinámico

El vector de estados parte de la misma premisa que el utilizado en el modelo bidimensional, es decir, estará formado por las posiciones, velocidades y esfuerzos externos asociados a los grados de libertad del modelo, además del valor de las reacciones en el suelo. Para el caso del modelo completo, se asumirán como esfuerzos a estimar: 6 componentes asociadas al residuo (fuerza y momento aplicados en la pelvis), 44 valores asociados a los esfuerzos motores en las articulaciones para generar el movimiento, y las 12 componentes asociadas a las reacciones en el suelo \mathbf{T}_p . Esto hace un total de 166 estados a resolver para cada instante de tiempo:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{z}^T \quad \dot{\mathbf{z}}^T \quad \mathbf{T}_e^T]^T \quad (4.7)$$

En dinámica de sistemas multicuerpo, es conocida la dificultad que implica la combinación de sólidos con masas de diferentes órdenes de magnitud en un mismo modelo. Esto dificulta la integración numérica de las ecuaciones, ya que los sólidos más ligeros introducen frecuencias elevadas en la dinámica [73]. Como se puede ver en la Tabla 4.2, los segmentos distales de los pies, correspondientes a los dedos, tienen inercias muy pequeñas. Cuando el pie está apoyado en el suelo, no se puede distinguir cómo se reparte la reacción entre los dos segmentos, de modo que incluir la dinámica de los segmentos distales no aporta información al estudio, pero introduce problemas de inestabilidad en el integrador numérico. Por este motivo, los dos grados de libertad correspondientes a los pares de revolución de estos dos sólidos se introducen en el sistema aplicando el filtro cinemático de la Sección 3.1, ignorando su dinámica. Su masas e inercias se incorporan al segmento proximal de los pies.

4.1.4.1 Reacciones en el suelo

De aquí en adelante, se distinguirán las fuerzas de placa como estado \mathbf{T}_p , que vendrán definidas en las coordenadas dependientes del sistema \mathbf{q} , y las fuerzas de placa como sensor \mathbf{p} , que estarán en ejes globales. Las primeras están definidas como una fuerza y un momento aplicados en el centro de cada pie, estando este último en ejes locales, de forma que se puedan aplicar directamente sobre las coordenadas intermedias \mathbf{q} . Las fuerzas medidas, por el contrario, se expresarán en coordenadas globales, incluyendo por cada placa una fuerza y un momento, aplicados en su centro.

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

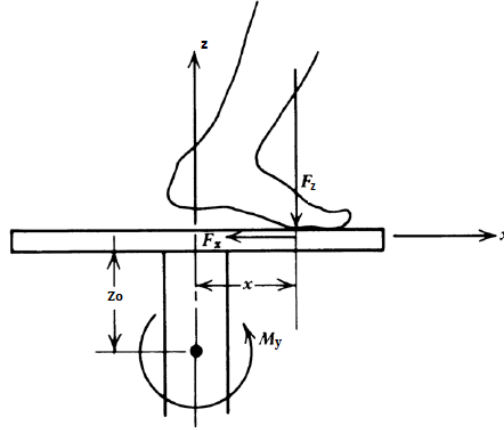


Figura 4.2: Diagrama de placa de fuerza

Para los sensores del sistema y se utilizarán los 36 marcadores ópticos \mathbf{m} (ver Figura 2.1), junto con las dos placas de fuerza \mathbf{p} . El vector de observación, por lo tanto, contendrá 120 valores: 108 asociados a los 36 marcadores ópticos, y 12 más asociados a las reacciones medidas por las placas. La posición global de los marcadores vendrá dada por una función dependiente de los estados \mathbf{h} , y que se ha definido anteriormente para el filtro cinemático. Por su parte, dado que las placas proporcionan la medición en ejes globales, hay que transformar la estimación de las reacciones del filtro, \mathbf{T}_p , para que se pueda comparar con las mediciones de los sensores:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

donde el vector $\hat{\mathbf{p}}$ contiene la estimación de las reacciones en los pies, $\hat{\mathbf{T}}_p$, transformada para que se pueda comparar directamente con las lecturas de los sensores.

Para poder asociar cada placa de fuerza a su pie correspondiente, es necesario conocer el centro de presiones donde actúa la fuerza de reacción de la placa. Dada una placa que proporciona un vector fuerza \mathbf{f}_p y un vector momento \mathbf{n}_p situados en su centro, el centro de presiones, en ejes locales de la placa, se obtiene como:

$$COP_x = \frac{-n_y}{f_z} \quad COP_y = \frac{n_x}{f_z} \quad (4.9)$$

Una vez se tiene definida la posición del centro de presiones se puede asociar cada una de las placas con el pie correspondiente mediante un algoritmo de detección de distancias similar al presentado para el cruce de marcadores. A continuación, se transformará la fuerza de los estados a las coordenadas globales del sistema para poder hacer una estimación de la innovación en cada instante de tiempo. Para una placa cualquiera p , midiendo las reacciones de un pie f :

$$\hat{\mathbf{p}}_p = \mathbf{D}_f^p \hat{\mathbf{T}}_f \quad (4.10)$$

donde los términos tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_p \\ \hat{\mathbf{n}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}}_p^f & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_f \\ \hat{\mathbf{n}}_f \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

siendo:

- $\hat{\mathbf{f}}_p$ la fuerza de placa estimada a partir de los estados.
- $\hat{\mathbf{n}}_p$ el momento de placa estimado a partir de los estados.
- $\tilde{\mathbf{r}}_p^f$ la matriz antisimétrica del vector que va del centro de la placa al centro de gravedad del pie.
- \mathbf{A}_f la matriz de rotación del pie.
- $\hat{\mathbf{f}}_f$ la fuerza sobre el centro de gravedad del pie en ejes globales (estado del sistema).
- $\hat{\mathbf{n}}_f$ el momento sobre el centro de gravedad del pie en ejes locales (estado del sistema).

Esta transformación de fuerzas generará una dependencia de la función de sensores asociada a las fuerzas con respecto a la posición. Por esto mismo, hay que definir la sensibilidad asociada a dicha relación para cada instante de tiempo:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{T}_d} & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{T}_p} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{T}_d} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{T}_p} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

que sustituyendo se obtiene:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_z \mathbf{T}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

De la misma manera que las posiciones y velocidades se propagan a lo largo del tiempo por medio de una integración, las fuerzas estimadas a posteriori del paso k se utilizarán como las fuerzas a priori del instante $k + 1$, de acuerdo a la ecuación (3.39).

Por lo que respecta a las covarianzas del sistema se decide dividir las covarianzas tanto de ruido de planta como las de ruido de sensores en fuerzas aplicadas en ejes principales del sistema y momentos. De esta manera se tiene un sistema con 8 covarianzas diferentes:

1. σ_H^R desviación típica de ruido de planta de las fuerzas horizontales (N)
2. σ_V^R desviación típica de ruido de planta de las fuerzas verticales (N)
3. σ_T^R desviación típica de ruido de planta de los momentos (Nm)
4. σ_H^P desviación típica de ruido de planta de las fuerzas horizontales en los pies (N)
5. σ_V^P desviación típica de ruido de planta de las fuerzas verticales en los pies (N)
6. σ_T^P desviación típica de ruido de planta de los momentos en los pies (Nm)
7. σ_M^S desviación típica del ruido de los marcadores (m)
8. σ_F^S desviación típica del ruido de los sensores de placa (N,Nm)

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

4.1.4.2 Simplificación del filtro

El filtro dinámico, en el modelo de humano completo, y utilizando la formulación dinámica aquí descrita, resulta demasiado pesado computacionalmente para su implementación en tiempo real. Como se puede ver en la ecuación 3.40, la matriz de sensibilidad del sistema \mathbf{F} depende de las derivadas de la aceleración con respecto a los estados del sistema. Derivar $\ddot{\mathbf{z}}$ con respecto a las posiciones tiene un coste computacional muy elevado, ya que, entre otras cosas, hay que calcular para cada instante de tiempo el tensor de cuarto orden \mathbf{R}_{zz} , y los productos en los que se encuentra implicado. A pesar de lo disperso que es el tensor, su cálculo tiene un coste lo bastante elevado como para impedir la implementación del filtro en tiempo real.

Por este motivo, se tratará de simplificar la matriz de sensibilidad, pero tratando de mantener la *observabilidad* del sistema. En teoría de sistemas lineales, se considera que un sistema es observable si, a partir de los *outputs* o sensores existentes, es posible determinar por completo el estado del sistema a lo largo de un tiempo finito. Para determinar si un sistema es observable, hay que ensamblar una matriz de observabilidad \mathcal{O} :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

donde n es la longitud del vector de estados. Si el rango de \mathcal{O} es igual a n , el sistema es observable. Esta prueba permitirá de forma sencilla determinar, por ejemplo, si un protocolo de marcadores es suficiente para la reconstrucción del movimiento, o si una cierta combinación de sensores de fuerza y momento permite hacer una estimación adecuada de los esfuerzos motores del sistema.

Según este criterio, el único bloque de derivadas que no se puede simplificar en la matriz de sensibilidad \mathbf{F} es $\ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}_e}$. Si se mantiene este bloque, y el resto de derivadas se consideran nulas, el sistema sigue siendo observable. Esto tiene sentido, ya que los marcadores dan información completa de la posición, y la relación entre posición y velocidad viene dada por la matriz identidad en la parte superior de \mathbf{F} . Si se anula el término $\ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}_e}$, no hay nada en el sistema que relacione los esfuerzos externos \mathbf{T}_e con la cinemática. Por tanto, con la simplificación que se propone, nuestra matriz \mathbf{F} quedaría definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}_e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Para esta versión simplificada, la matriz de propagación de estados de primer orden resulta:

$$\Phi_k \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}_e}\Delta t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_k \quad (4.16)$$

Y añadiendo el término de segundo orden, se obtiene:

$$\Phi_k \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}_e} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{T}_e}\Delta t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_k \quad (4.17)$$

Como se muestra en el Anexo A, esta aproximación tiene poco impacto en los resultados, permitiendo la ejecución del filtro en tiempo real sin penalizar en exceso la precisión.

4.2 Resultados

Para la obtención y validación de resultados del modelo completo se proponen dos tipos de captura. Cada una de ellas se usará con un objetivo. Una analizará el comportamiento y robustez del filtro para diferentes tipos de apoyo, variaciones del centro de presiones e impactos en placa como se puede ver en la Figura 4.3, ésta de aquí en adelante por simplicidad se conocerá como el movimiento general.



Figura 4.3: Secuencia a analizar

La segunda será una sentadilla, lo cual nos permitirá estimar el comportamiento de nuestro filtro ante posibles oclusiones de marcadores, grandes desplazamientos relativos entre la piel y los marcadores debido al gran rango movimiento que la sentadilla supone y además de estimar la sensibilidad del filtro ante fuerzas de estabilidad laterales durante un movimiento con doble apoyo.

Se realizan capturas con 8 sujetos: 4 hombres y 4 mujeres de 26.0 ± 6 años de edad y una masa de 67.375 ± 17.625 kilogramos, sin patologías previas.

Con el objetivo de tener un sistema genérico se propone una serie de covarianzas que vendrán relacionadas con la masa del sujeto, ya que al tratarse de covarianzas asociadas a la fuerza que puede introducir nuestro sistema para corregir los errores, estas deberán ser mayores en sujetos con una mayor masa. Por esto se propone un valor de referencia σ_i^0 y esta se multiplicará por un factor de escala asociado a la masa.

$$\sigma_i = \sigma_i^0 \frac{m}{100} \quad (4.18)$$

El objetivo que se tiene para estos ensayos es obtener un ajuste lo más genérico posible de forma que se consiga un compromiso entre eficiencia y precisión para cualquier sujeto y tipo de movimiento. Por esto, todos los resultados aquí propuestos se supondrán obtenidos de manera equiparable a la implementación como funcionaría el software de captura. Esto es, usando los valores proporcionados por el hardware sin ningún tipo de postproceso o corrección de señal. Para todos ellos se consigue un set de covarianzas y especificaciones, tal como se muestra en la Tabla 4.3, que reconstruye ambos movimientos de forma consistente y con una precisión aceptable.

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

Covarianzas del filtro de cuerpo humano completo		
Descripción	Símbolo	Valor
Ruido del residuo de las fuerzas horizontales (N)	σ_{H}^R	10
Ruido del residuo de las fuerzas verticales (N)	σ_{V}^R	10
Ruido del residuo de los momentos (Nm)	σ_{T}^R	5
Ruido de planta de los momentos de tren superior (Nm)	$\sigma_{T_S}^P$	5
Ruido de planta de los momentos de tren inferior (Nm)	$\sigma_{T_I}^P$	20
Ruido de planta de aceleración de los dedos de los pies (rad/s^2)	σ_{A}^P	10
Ruido de fuerzas horizontales de placa como estado (N)	$\sigma_{H_P}^P$	20
Ruido de fuerzas verticales de placa como estado (N)	$\sigma_{V_P}^P$	20
Ruido de momentos de placa como estado (Nm)	$\sigma_{T_P}^P$	20
Ruido de fuerzas de placa como sensor (N)	σ_{F}^S	20
Ruido de momentos de placa como sensor (Nm)	σ_{T}^S	20
Ruido de los marcadores (m)	σ_{H}^R	0.005

Tabla 4.3: Covarianzas definidas en el filtro

Para presentar los resultados de manera coherente y sencilla para el lector, ya que el análisis de estas capturas supondría numerosas gráficas y numerosos comentarios para cada uno de ellas, se analizará de manera separada cada movimiento para un sujeto, comentando los rasgos más relevantes que se encuentran en cada uno, y comparando los valores generales obtenidos para los dos planteamientos. Debido que, el objetivo es tener un filtro dinámico en tiempo real, se omitirá el cálculo del planteamiento *FD* y se utilizará exclusivamente el *FDMC* con la simplificación asumida en la ecuación (4.15).

Para el movimiento que hemos denominado como movimiento general, se presentan los resultados obtenidos para una captura de un varón de 32 años y 78 kilos de masa. Como se puede apreciar, la estimación para ambos observadores es muy similar, difiriendo en la rotación asociada al eje y en el momento de la elevación frontal máxima de dicha pierna. Este hecho, como es lógico, nos hace diferir en el ángulo de elevación de la pierna entre ambos casos. Siendo en todas las gráficas, el valor en negro el de *FDMC* y el valor gris el valor de *FCDI*.

Por lo que respecta a las velocidades, se puede apreciar como la implementación de un modelo dinámico, al igual que ocurre en el caso simplificado reduce el retraso generado por el filtro. Sin embargo, aparece un factor a tener en cuenta que en el caso ideal no encontrábamos, que es la inclusión de ruido a nivel de velocidades en nuestro sistema. Este hecho es normal si se tiene en cuenta que para cada instante de tiempo, al contrario de lo que ocurre en el filtro cinemático, la estimación de velocidades deberá ser consistente con la dinámica del sistema, lo cual hace esta aproximación más inestable. El hecho de obtener una estimación con ruido podrá suponer un problema para la estimación de fuerzas musculares según la metodología utilizada.

Se puede ver como *FDMC* proporciona unos pares articulares con menos ruido, cosa lógica ya que para cada instante de tiempo se están estimando posiciones, velocidades y fuerzas de manera que estas 3 seas consistentes entre sí, mientras que en *FCDI* las fuerzas serán consecuencia de la estimación de las otras dos. Este hecho a su vez, provoca un retraso en la estimación de fuerzas, que sin embargo será asumible.

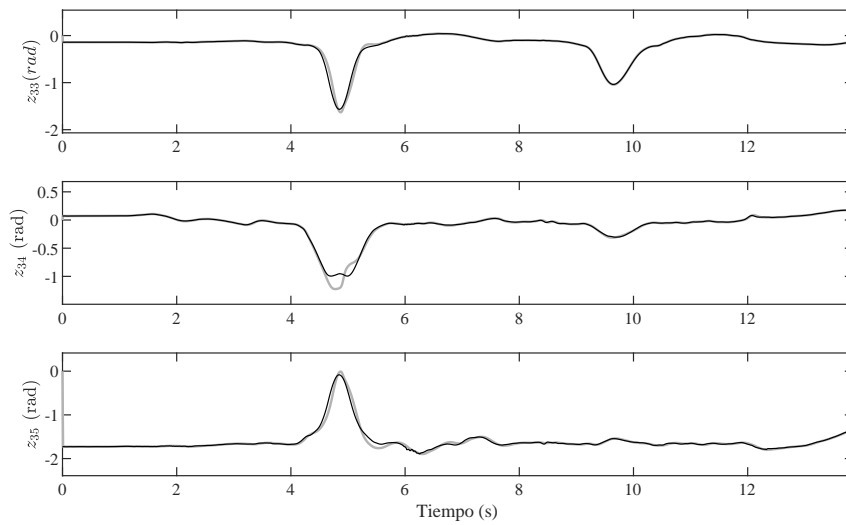


Figura 4.4: Ángulos de Euler de la cadera derecha

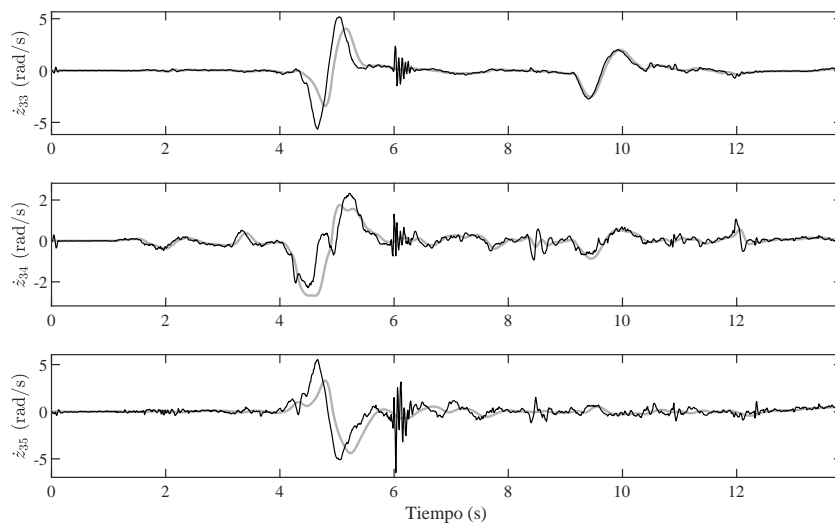


Figura 4.5: Derivadas de los ángulos de Euler de la cadera derecha

Otro indicio que nos hace creer que la estimación de *FDMC* es más precisa que la de *FCDI*, son los residuos que se obtienen para ese intervalo de tiempo. Se puede apreciar como durante la pérdida del sensor, el residuo crece notablemente en comparación con los valores que se estaban obteniendo con las dos placas activas en el caso de encontrarnos en el filtro cinemático, esto puede ser un indicio que el sistema debe introducir una fuerza para reconducir el estado.

Para el análisis de sentadillas, en posiciones y velocidades encontraremos una situación análoga al análisis del movimiento general. En este caso, se presentarán los resultados para una mujer de 22 años y 49.75 kilos de masa. Se comentarán los resultados obtenidos

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

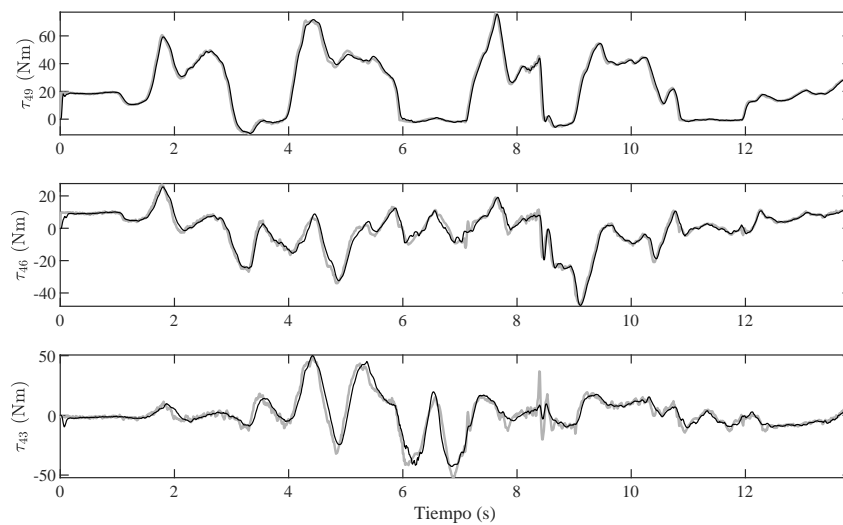


Figura 4.6: Momentos externos en plano el sagital de la pierna izquierda para captura de movimiento general

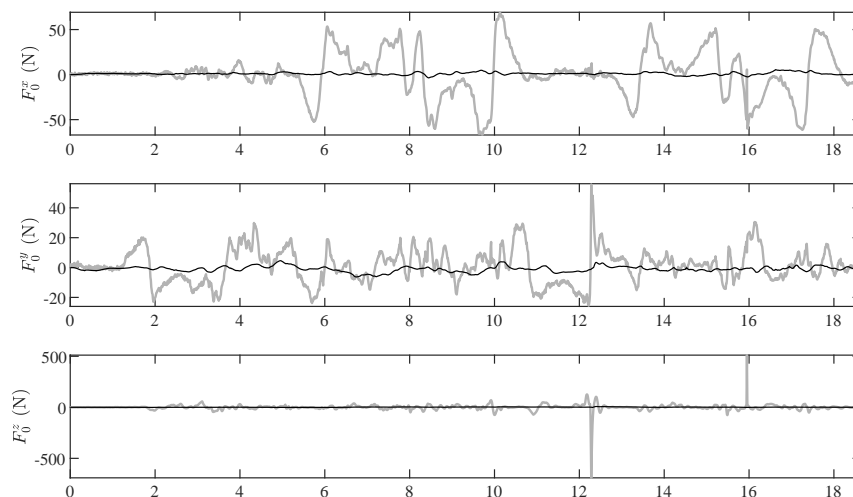


Figura 4.7: Fuerzas de residuo para captura de movimiento general

en la articulación de la rodilla ya que, es la articulación más relevante en este tipo de movimientos.

La estimación de posiciones del sistema, es al igual que para el movimiento general, muy similar a la obtenida para el filtro cinemático. En este caso, sin embargo, no encontramos una diferencia tan notable como aparecía en el caso anterior.

En las velocidades, se puede apreciar como se tienen unas velocidades notablemente más ruidosas que en el caso del movimiento general presentado anteriormente.

Por su parte, la estimación de pares articulares en el plano sagital en las articulaciones de tobillo, rodilla y cadera se obtiene un valor muy similar en ambos procedimientos.



Figura 4.8: Secuencia de sentadilla

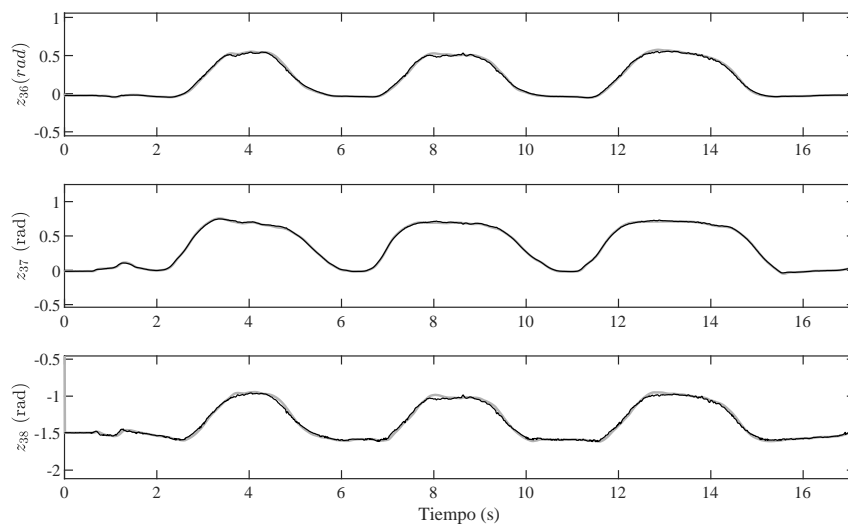


Figura 4.9: Ángulos de Euler en la rodilla derecha durante captura de sentadillas

En el caso del *FCDI* encontraremos unos pares articulares con más ruido mientras que para *FDMC* se tendrá un retraso mayor en la señal. Pero en ambos casos se tendrán unos resultados muy similares y considerablemente aceptables.

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

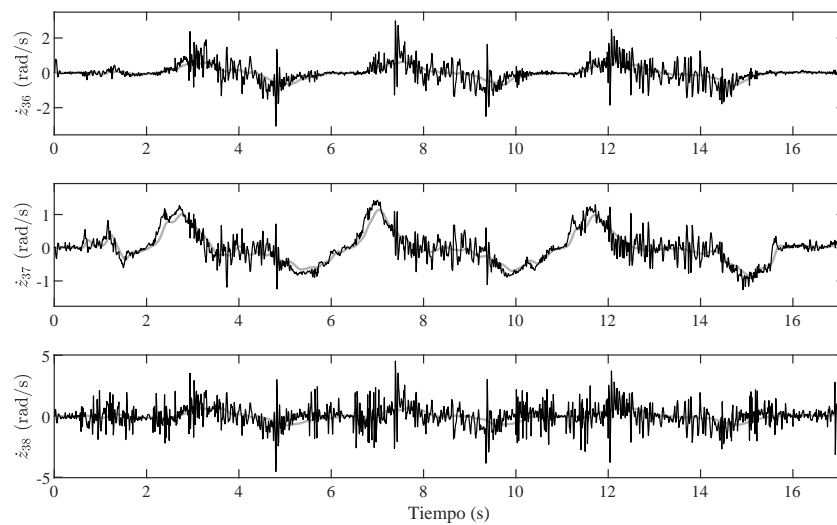


Figura 4.10: Derivadas de los ángulos de Euler en la rodilla derecha durante captura de sentadillas

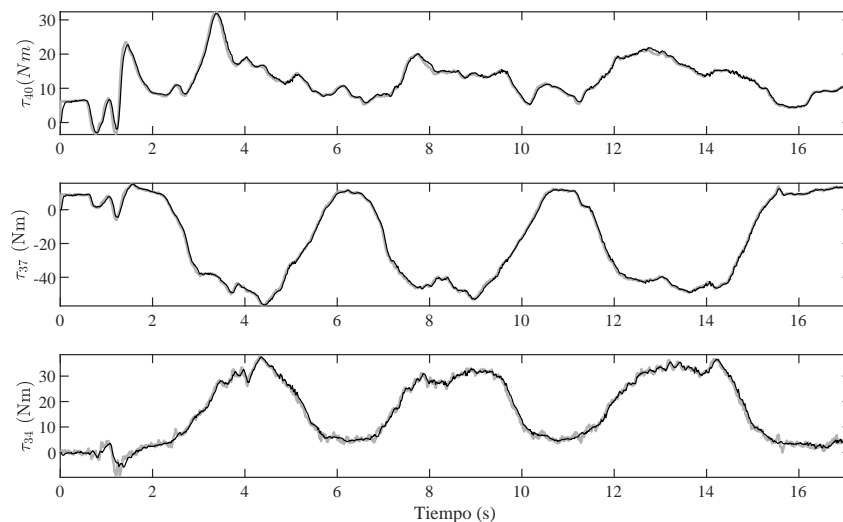


Figura 4.11: Momentos externos en el plano sagital de la pierna derecha para captura de sentadillas

Para este tipo de capturas hay que comentar que el modelado multicuerpo definido es muy sensible ante desplazamiento relativo de los marcadores, más concretamente el del marcador 15 (Figura 2.1). Esto se debe a que este tipo de movimiento genera una innovación muy alta en la estimación de dicho marcador. En el caso de usar un filtro cinemático esto no supone un problema excesivamente grande ya que únicamente tiene marcadores asociados a la posición. Sin embargo, en el caso de utilizar un filtro con la dinámica implementada, hay que tener en cuenta que las fuerzas de placa están aportando una información que, en función de la covarianza determinada de los marcadores, puede crear indeterminaciones en

la resolución de dicho problema.

En este tipo de movimiento, si nos fijamos en la comparación entre residuos se puede ver como los valores necesarios para la generación del movimiento son más pequeños que en el caso del movimiento general. Esto se deberá a que en todo momento se tienen ambos pies en los sensores de fuerza. De esta manera no hay ningún instante de tiempo en el cual la dinámica del sistema tenga que verse excesivamente compensada por el filtro.

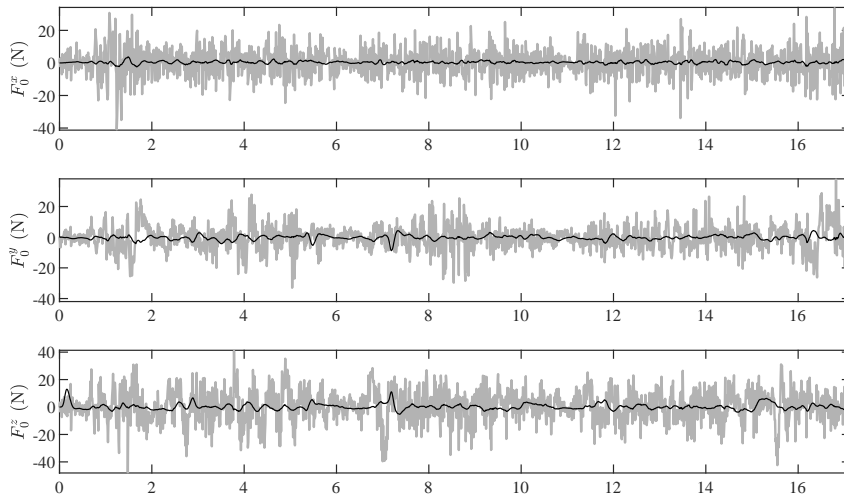


Figura 4.12: Residuo para captura de sentadillas

En el caso de encontrarnos con una captura de sentadillas, se supone una situación de oclusión de marcadores en la situación crítica del sistema, al igual que se hace en el *benchmark*, para comprobar la estabilidad del filtro. En este caso, se supone la pérdida de los marcadores asociados a la rodilla durante un periodo de 100 *frames*. Esto implica la obtención de un sistema no observable. Los resultados, pueden ver en la Figura 4.13, donde la línea negra representa la solución obtenida con todos los marcadores para el filtro cinemático, la línea azul es la estimación de los ángulos de Euler con pérdida de marcadores para *FCDI* y la naranja para *FDMC*. La zona en gris, al igual que lo que ocurre en el caso del doble péndulo, se asumirá el intervalo de tiempo para el cual se supone una pérdida de marcadores.

Como se puede apreciar, en cuanto a la posición del sistema, el filtro dinámico para este caso particular mejora la estimación del filtro cinemático. Se puede ver como al principio, tras la pérdida de los marcadores, este difiere de la misma manera que lo hace el cinemático, sin embargo a pesar de perder los marcadores es capaz de reconducir la curva a la situación obtenida en el caso sin dicha pérdida. Si comparamos las fuerzas estimadas con oclusión de marcadores con las obtenidas por el filtro dinámico para la captura sin este fenómeno (línea negra), se puede apreciar como en los instantes de pérdida y recuperación de los marcadores, el filtro dinámico sufre una fuerte desviación de los valores. Este hecho se debe a que en esos instantes el filtro dinámico, con el objetivo de reconducir la cinemática del sistema introduce unas fuerzas para compensar esta pérdida de información. Este hecho, permite tal y como se ha visto en la Figura 4.13 que los valores de las posiciones tiendan

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

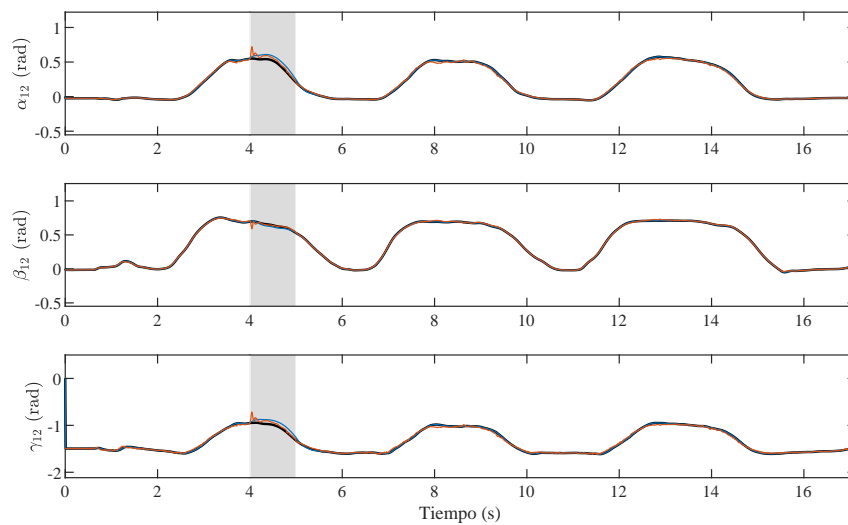


Figura 4.13: Comparación de estimación de ángulos de Euler para la rodilla derecha durante sentadillas con pérdida de marcadores

de nuevo a los resultados idóneos. Por lo que respecta al esfuerzo motor en el eje x de la articulación, es decir la fuerza de estabilidad lateral, ambos filtros diferirán de manera notable del valor obtenido sin oclusión de marcadores.

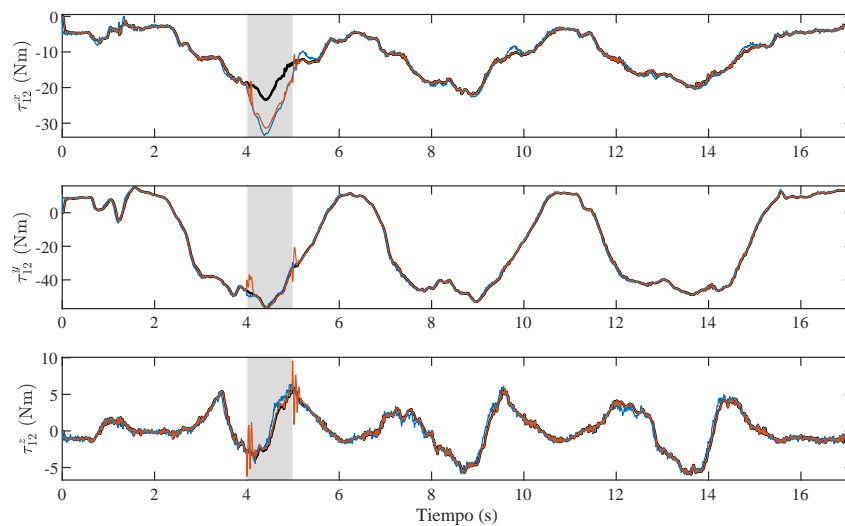


Figura 4.14: Comparación de esfuerzos externos en la rodilla derecha durante sentadillas con pérdida de marcadores

Es importante señalar que aquí se presentan los resultados para un caso particular de oclusión de marcadores. El hecho de asegurar categóricamente que el filtro dinámico para el cuerpo completo es más estable ante estas situaciones no es del todo preciso, ya que se han realizado numerosas pruebas con diferentes ruidos, marcadores ocluidos, tiempo de pérdida

de marcadores, momentos de oclusión y la robustez de cada uno de los filtros ante este fenómeno es muy relativa. Encontraremos situaciones donde el cinemático se convergerá a mejores estimaciones y otras en las que lo hará el dinámico. Generalmente, este segundo será más robusto en pérdida de marcadores en zonas de cambios de dirección y por tanto donde la inercia es más relevante en el sistema. Sin embargo, a su vez es notablemente más sensible al marcador ocluido, ya que al tener una relación entre cinemática y dinámica implementada en el filtro, los valores que proporciona deben ser coherentes con la dinámica del modelo, hecho que no ocurre en el filtro cinemático. Es decir, el filtro cinemático estimará las posiciones de manera totalmente independiente a las inercias, cosa que el filtro dinámico no puede hacer.

Por último, se propuso realizar una captura de salto para diversos sujetos con el objetivo de determinar los límites que encontraremos en *FDMC*. Al contrario de lo que ocurre en las anteriores capturas, con el set de covarianzas definido no se encuentra una consistencia para la reconstrucción de todas las capturas de salto realizadas.

Se consiguen reconstruir algunos saltos con el set de covarianzas definidos obteniendo los siguientes resultados para un salto de un hombre de 30 años y 85 kg de masa.

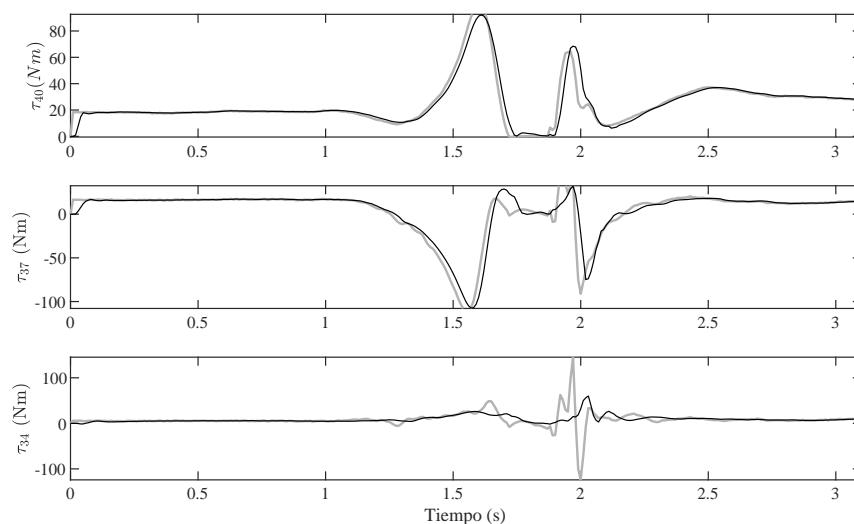


Figura 4.15: Esfuerzos motores para salto en tobillo derecho

Como se puede apreciar en la Figura 4.15 la estimación de los pares articulares para el tobillo derecho se mantiene bastante estable a pesar de la violencia del movimiento. Esto nos lleva a pensar que mediante un ajuste óptimo de las covarianzas del sistema, se puede obtener una robustez para este tipo de captura que actualmente no se tiene.

4.2.1 Implementación a lenguaje compilado

Con el objetivo de determinar la viabilidad de implementación del algoritmo en un programa de captura con representación gráfica en tiempo real, se propone pasar de lenguaje interpretado (en este caso Matlab) a lenguaje compilado (C) y analizar los tiempos de cálculo de cada algoritmo comparándolos con los obtenidos en lenguaje interpretado.

4. Observador de cuerpo completo con estimación de pares motores en tiempo real

Debido a la complejidad de implementación de este tipo de algoritmos en lenguaje compilado, se propone hacer una estimación de la reducción de tiempos de cálculo mediante una herramienta de generación automática de código compilado a partir de lenguaje interpretado (Matlab Coder). De esta manera, si la mejora no es sustancial, se reconsideraría la opción de traducir el código a lenguaje compilado.

Para los resultados presentados se utiliza un ordenador con un procesador AMD Ryzen 7 3700X, con 16 GB de memoria RAM. En la Tabla 4.4 se presenta la relación entre el tiempo real que dura la captura, y el tiempo de cálculo necesitado para su estimación. Por tanto, un número superior a uno significa que se está haciendo el cálculo por encima de tiempo real.

Para la obtención de estos resultados, se ejecuta la misma captura en 5 ocasiones y se obtiene la media entre los tiempos de cálculo. Como se puede apreciar, la relación mejora notablemente a pesar de no utilizar una programación optimizada real, ya que simplemente se utiliza la generación automática de código. En el caso del cinemático con dinámica inversa, este mejora en más de un 65% su relación de tiempos, mientras que el filtro dinámico mejora entorno a un 60% sus prestaciones.

Filtro	Interpretado	Compilado
Cinemático con dinámica inversa	1.99	3.29
Dinámico para modelo completo	1.51	2.41

Tabla 4.4: Relación entre tiempo de captura y tiempo de CPU en diferentes tipos de lenguaje

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente documento se ha desarrollado un *benchmark* de análisis para la validación de dos filtros de Kalman con estimación de reacciones y pares motores, planteados posteriormente para la captura de movimiento humano de cuerpo completo.

Se ha definido un filtro de Kalman basado en dinámica de sistemas multicuerpo, para el cual se ha desarrollado un modelo cuyas coordenadas independientes fueran las mismas que las del observador cinemático ya desarrollado en el laboratorio. Para la estimación cinemática se utiliza captura óptica. El vector de estados del filtro planteado está compuesto por posiciones, velocidades y fuerzas y momentos del sistema. Mientras que el vector de sensores está formado por marcadores ópticos y unas placas de fuerza. Para poder estimar correctamente los estados, se introduce como estado la fuerza de las placas, que por tanto actúa a la vez de sensor y de estado.

Se propone comparar el filtro con la dinámica implementada con la obtención de resultados en el caso de aplicar un filtro cinemático con un posterior postproceso para obtener, mediante dinámica inversa, las fuerzas asociadas al sistema. Se diseña un *benchmark* de estudio para analizar a fondo el comportamiento del filtro dinámico diseñado previa implementación al modelo completo.

Se comprueba que las posiciones estimadas por ambos planteamientos son prácticamente idénticas, por lo que, entendiéndose que el filtro cinemático utilizado hasta el momento es válido, las posiciones para el observador dinámico también lo serán.

Se ha podido comprobar como la estimación de fuerzas mediante la adición de la dinámica dentro del sistema de estimación no mejora de forma sustancial dicha aproximación, si se compara con un postproceso y aplicación de dinámica inversa después de una estimación cinemática.

Sin embargo, a pesar de no mejorar notablemente la estimación de fuerza, sí que mejora considerablemente la robustez del sistema de captura óptico ante pérdida de marcadores durante un período de tiempo. Esto se debe al hecho de agregar también la dinámica a nuestro sistema, por lo tanto, al tener una serie de sensores y estados asociados a la misma, crea un sistema que ante la pérdida de marcadores seguirá siendo guiado por la dinámica, reduciendo notablemente la inestabilidad en esas situaciones.

Por otro lado, se demuestra que este modelo de filtro reduce el retraso en la estimación de velocidades. Puede agregar ruido si las covarianzas no están ajustadas de manera precisa, pero se reduce notablemente el retraso en la estimación de velocidades.

En general, ante situaciones con errores de modelado, el filtro dinámico tiende a dar

5. Conclusiones

mejores estimaciones ya que todos los términos van asociados entre sí a raíz de la función de sensibilidad del sistema, que no es más que la derivada de las aceleraciones del mismo con respecto a los estados.

Se modifican ciertos algoritmos del programa de captura cinemático en tiempo real con el objetivo de reducir la sensibilidad del sistema ante el *skin motion artifact*, y se propone un nuevo modelado de estimación de masas, centros de gravedad e inercia para el modelo multicuerpo utilizado en el laboratorio.

Se compara la reconstrucción del movimiento humano con ambos planteamientos. Se comentan los resultados obtenidos, teniendo en cuenta que no se tiene un modelo de referencia como se tiene en el caso del doble péndulo, se propone una interpretación lógica, pero no categórica, de los resultados.

Se obtiene por tanto, una alternativa viable para la estimación de reacciones y esfuerzos motores en tiempo real para captura de movimiento mediante técnicas ópticas, pero que se encuentra en una etapa prematura de desarrollo, lejos de la robustez del filtro cinemático implementado y utilizado en el laboratorio.

5.1 Futuros estudios

El presente documento sirve como punto de partida para numerosos estudios futuros, ya que a partir del presente documento se proponen principalmente 3 ramas de progreso del mismo.

Por un lado se propone la adición de sensores a nivel de velocidad o aceleración para obtener una mejor estimación de las derivadas del sistema, creando así un sistema considerablemente más robusto. Habrá que tener en cuenta que la adición de estos sensores conllevará un aumento notable del coste computacional, ya que será necesario la implementación de la derivada de la función de sensores con respecto a los estados, lo que conlleva de por sí la adición de matrices y derivadas cuyo coste computacional es considerable, y que se tratan de evitar en el presente documento en la implementación del filtro del cuerpo humano completo.

Por otro lado se podría comenzar a estudiar la viabilidad en la estimación de fuerzas musculares en tiempo real. Para esto, quizá fuera necesario un estudio previo para la optimización del modelo multicuerpo, planteando un modelo recursivo o semi-recursivo. Aún así, en las primeras etapas de análisis, sería complicado meter modelos complejos musculares debido a su alto coste computacional.

Por último, se proponen modificaciones propias del modelado multicuerpo con el objetivo de obtener modelados cada vez más realistas, bien sea por la adición de un nuevo modelo de hombro, por ejemplo, o bien modificando el modelo de columna vertebral actual. De esta manera, se podrá obtener un sistema más realista y posiblemente más robusto, ya que no hay que olvidar que el modelado multicuerpo utilizado en la presente tesis está diseñado para el análisis de marcha, por lo que es considerablemente inestable ante ciertas situaciones y movimientos.

Referencias

- [1] Jens Wittenburg. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1977.
- [2] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, March 1960.
- [3] David A. Winter. *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. John Wiley & Sons, Hoboken, N.J, October 2009.
- [4] Florian Michaud, Mario Lamas-Rodríguez, Urbano Ligrís, and Javier Cuadrado. A fair and EMG-validated comparison of recruitment criteria, musculotendon models and muscle coordination strategies, for the inverse-dynamics based optimization of muscle forces during gait. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 18, January 2021.
- [5] Francisco Mouzo, Florian Michaud, Mario Lamas-Rodríguez, Urbano Ligrís, and Javier Cuadrado. Effect of Muscle Modeling in the Efficiency and Accuracy of the Forward-Dynamics Simulation of Human Gait. In Diego Torricelli, Metin Akay, and José L. Pons, editors, *Converging Clinical and Engineering Research on Neurorehabilitation IV*, pages 299–303, Cham, October 2022. Springer International Publishing.
- [6] Yujiang Xiang, Jasbir S. Arora, and Karim Abdel-Malek. Physics-based modeling and simulation of human walking: a review of optimization-based and other approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(1):1–23, July 2010.
- [7] Francisco Mouzo. *Análisis y simulación mediante dinámica directa de modelos multicuerpo humanos*. PhD thesis, Universidade da Coruña, 2018.
- [8] U. Ligrís, R. Vilela, E. Sanjurjo, F. Mouzo, and F. Michaud. Implementation of an Extended Kalman Filter for optical motion capture with real-time 3D visualization. In *The 5th Joint International Conference on Multibody System Dynamics, IMSD2018*, Lisbon, Portugal, 2018.
- [9] Daniel García-Vallejo and Werner Schiehlen. 3D-Simulation of human walking by parameter optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 82(4):533–556, April 2012.
- [10] Yi-Chung Lin and Marcus G. Pandy. Three-dimensional data-tracking dynamic optimization simulations of human locomotion generated by direct collocation. *Journal of Biomechanics*, 59:1–8, July 2017.

Referencias

- [11] Carlos Quental, João Folgado, Jorge Ambrósio, and Jacinto Monteiro. A multibody biomechanical model of the upper limb including the shoulder girdle. *Multibody System Dynamics*, 28(1):83–108, August 2012.
- [12] Rosa Pàmies Vilà, Josep Maria Font Llagunes, Urbano Lugrís Armesto, Francisco Javier Alonso, and Javier Cuadrado Aranda. A computational benchmark for 2D gait analysis problems. In *5th European Conference on Mechanism Science, EUCOMES 2014*, volume New Trends in Mechanism and Machine Science, pages 1–8, 2014.
- [13] Alberto Leardini, Lorenzo Chiari, Ugo Della Croce, and Aurelio Cappozzo. Human movement analysis using stereophotogrammetry: Part 3. Soft tissue artifact assessment and compensation. *Gait & Posture*, 21(2):212–225, February 2005.
- [14] Steven H. Collins, Peter G. Adamczyk, Daniel P. Ferris, and Arthur D. Kuo. A simple method for calibrating force plates and force treadmills using an instrumented pole. *Gait & Posture*, 29(1):59–64, January 2009.
- [15] James G. Richards. The measurement of human motion: A comparison of commercially available systems. *Human Movement Science*, 18(5):589–602, October 1999.
- [16] Rosa Pàmies-Vilà, Josep M. Font-Llagunes, Javier Cuadrado, and F. Javier Alonso. Analysis of different uncertainties in the inverse dynamic analysis of human gait. *Mechanism and Machine Theory*, 58:153–164, December 2012.
- [17] Guillaume Rao, David Amarantini, Eric Berton, and Daniel Favier. Influence of body segments’ parameters estimation models on inverse dynamics solutions during gait. *Journal of Biomechanics*, 39(8):1531–1536, January 2006.
- [18] Herre Faber, Arthur J. van Soest, and Dinant A. Kistemaker. Inverse dynamics of mechanical multibody systems: An improved algorithm that ensures consistency between kinematics and external forces. *PLOS ONE*, 13(9), September 2018.
- [19] Urbano Lugrís, Jairo Carlín, Rosa Pàmies-Vilà, Josep M. Font-Llagunes, and Javier Cuadrado. Solution methods for the double-support indeterminacy in human gait. *Multibody System Dynamics*, 30(3):247–263, October 2013.
- [20] Oonagh M. Giggins, Ulrik McCarthy Persson, and Brian Caulfield. Biofeedback in rehabilitation. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 10(1):60, June 2013.
- [21] Young-Shin Lee, Sea-Hyun Bae, Sung-Hee Lee, and Kyung-Yoon Kim. Neurofeedback Training Improves the Dual-Task Performance Ability in Stroke Patients. *The Tohoku Journal of Experimental Medicine*, 236(1):81–88, 2015.
- [22] Ilaria Carpinella, Davide Cattaneo, Gianluca Bonora, Thomas Bowman, Laura Martina, Angelo Montesano, and Maurizio Ferrarin. Wearable Sensor-Based Biofeedback Training for Balance and Gait in Parkinson Disease: A Pilot Randomized Controlled Trial. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, 98(4):622–630.e3, April 2017.

-
- [23] Yong-Jun Cha, Jung-Doo Kim, Yu-Ran Choi, Nan-Hyang Kim, and Sung-Min Son. Effects of gait training with auditory feedback on walking and balancing ability in adults after hemiplegic stroke: a preliminary, randomized, controlled study. *International Journal of Rehabilitation Research*, 41(3):239–243, September 2018.
- [24] Sang-Hyun Cho, Hwa-Kyung Shin, Yong-Hyun Kwon, Mi Young Lee, Young-Hee Lee, Chu-Hee Lee, Dong Suk Yang, and Sung-Ho Jang. Cortical activation changes induced by visual biofeedback tracking training in chronic stroke patients. *NeuroRehabilitation*, 22(2):77–84, January 2007.
- [25] F.R. Franca, T.N. Burke, E.S. Hanada, and A.P. Marques. Segmental stabilization and muscular strengthening in chronic low back pain - a comparative study. *Clinics*, 65(10):1013–1017, 2010.
- [26] B. Lange, C.-Y. Chang, E. Suma, B. Newman, A.S. Rizzo, and M. Bolas. Development and evaluation of low cost game-based balance rehabilitation tool using the Microsoft kinect sensor. pages 1831–1834, 2011.
- [27] Nancy Byl, Wenlong Zhang, Sophia Coo, and Masayoshi Tomizuka. Clinical impact of gait training enhanced with visual kinematic biofeedback: Patients with Parkinson’s disease and patients stable post stroke. *Neuropsychologia*, 79:332–343, December 2015.
- [28] Justin R. Davis, Mark G. Carpenter, Roger Tschanz, Simon Meyes, Daniel Debrunner, Juergen Burger, and John H. J. Allum. Trunk sway reductions in young and older adults using multi-modal biofeedback. *Gait & Posture*, 31(4):465–472, April 2010.
- [29] Michael Schwenk, Marwan Sabbagh, Ivy Lin, Pharah Morgan, Gurtej S. Grewal, Jane Mohler, David W. Coon, and Bijan Najafi. Sensor-based balance training with motion feedback in people with mild cognitive impairment. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, 53(6):945–958, 2016.
- [30] Dan Simon. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [31] Simon J. Julier and Jeffrey K. Uhlmann. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In *Proceeding of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/ Defence Sensing, Simulation and Controls*, volume Muti Sensor Fusion, Tracking and Resource Mangement II, pages 182–193, Orlando, Florida, 1997.
- [32] Javier Cuadrado, Florian Michaud, Urbano LUGRÍS, and Manuel Pérez Soto. Using Accelerometer Data to Tune the Parameters of an Extended Kalman Filter for Optical Motion Capture: Preliminary Application to Gait Analysis. *Sensors*, 21:427, January 2021.
- [33] Jesús Martínez del Rincon, Dimitrios Makris, Carlos Orrite Urunuela, and Jean-Christophe Nebel. Tracking Human Position and Lower Body Parts Using Kalman and Particle Filters Constrained by Human Biomechanics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 41(1):26–37, February 2011.

Referencias

- [34] S. Fakoorian, V. Azimi, M. Moosavi, H. Richter, and D. Simon. Ground Reaction Force Estimation in Prosthetic Legs with Nonlinear Kalman Filtering Methods. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 139(11), 2017.
- [35] S. Skals, M.K. Jung, M. Damsgaard, and M.S. Andersen. Prediction of ground reaction forces and moments during sports-related movements. *Multibody System Dynamics*, 39(3):175–195, 2017.
- [36] E. Recinos, J. Abella, S. Riyaz, and E. Demircan. Real-time vertical ground reaction force estimation in a unified simulation framework using inertial measurement unit sensors. *Robotics*, 9(4):1–12, 2020.
- [37] J. Cuadrado, J. Cardenal, and E. Bayo. Modeling and Solution Methods for Efficient Real-Time Simulation of Multibody Dynamics. *Multibody System Dynamics*, 1(3):259–280, September 1997.
- [38] Javier Cuadrado, Daniel Dopico, José Antonio Pérez, and Roland Pastorino. Influence of the sensed magnitude in the performance of observers based on multibody models and the extended kalman filter. In K. Arczewski, J. Frączek, and M. Wojtyra, editors, *Multibody Dynamics 2009, ECCOMAS Thematic Conference*, Warsaw, Poland, June 2009.
- [39] Javier Cuadrado, Daniel Dopico Dopico, Jose Perez, and Roland Pastorino. Automotive observers based on multibody models and the extended Kalman filter. *Multibody System Dynamics*, 27:3–19, April 2012.
- [40] Greg Welch and Gary Bishop. An Introduction to the Kalman Filter. *Proc. Siggraph Course*, 8, January 2006.
- [41] José Luis Torres-Moreno, José Luis Blanco-Claraco, Antonio Giménez-Fernández, Emilio Sanjurjo, and Miguel Ángel Naya. Online Kinematic and Dynamic-State Estimation for Constrained Multibody Systems Based on IMUs. *Sensors*, 16(3):333, March 2016.
- [42] Roland Pastorino, Dario Richiedei, A. Trevisani, and Javier Cuadrado. State estimation using multibody models and nonlinear Kalman filters. *Proceedings of the 2nd Joint International Conference on Multibody Systems Dynamics*, May 2012.
- [43] Emilio Sanjurjo, Miguel Ángel Naya, José Luis Blanco-Claraco, José Luis Torres-Moreno, and Antonio Giménez-Fernández. Accuracy and efficiency comparison of various nonlinear Kalman filters applied to multibody models. *Nonlinear Dynamics*, 88(3):1935–1951, May 2017.
- [44] Antonio J. Rodríguez, Emilio Sanjurjo, Roland Pastorino, and Miguel Á Naya. Multibody-Based Input and State Observers Using Adaptive Extended Kalman Filter. *Sensors*, 21(15):5241, January 2021.
- [45] Frank Naets, Roland Pastorino, Javier Cuadrado, and Wim Desmet. Online state and input force estimation for multibody models employing extended Kalman filtering. *Multibody System Dynamics*, 32, October 2013.

-
- [46] Ilaria Palomba, Dario Richiedei, and Alberto Trevisani. Kinematic state estimation for rigid-link multibody systems by means of nonlinear constraint equations. *Multibody System Dynamics*, 40(1):1–22, May 2017.
- [47] Ilaria Palomba, Dario Richiedei, and Alberto Trevisani. Two-stage approach to state and force estimation in rigid-link multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 1-2(39):115–134, October 2016.
- [48] Emilio Sanjurjo, Daniel Dopico, Alberto Luaces, and Miguel Ángel Naya. State and force observers based on multibody models and the indirect Kalman filter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 106:210–228, June 2018.
- [49] Javier Garcia de Jalon and Eduardo Bayo. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge*. Springer-Verlag, New York, NY, September 2011.
- [50] Antonio J. Rodríguez, Emilio Sanjurjo, Roland Pastorino, and Miguel Ángel Naya. State, parameter and input observers based on multibody models and Kalman filters for vehicle dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 155:107544, June 2021.
- [51] J. Cuadrado and D. Dopico. A Combined Penalty and Semi-Recursive Formulation for Closed-Loops in MBS. In *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Tianjin, China, 2004.
- [52] Javier Cuadrado, Daniel Dopico, Antonio Barreiro, and Emma Delgado. Real-time state observers based on multibody models and the extended Kalman filter. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23(4):894–900, April 2009.
- [53] Joe D. Hoffman and Steven Frankel. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, INC., New York, May 2001.
- [54] Alberto Menache. *Understanding Motion Capture for Computer Animation*. Morgan Kaufmann, Burlington, MA, December 2010.
- [55] Zsófia Pálya, Kristóf Rácz, Gergely Nagymáté, and Rita M. Kiss. Development of a detailed canine gait analysis method for evaluating harnesses: A pilot study. *PLoS One*, 17(3), 2022.
- [56] Urbano Ligrís, Jairo Carlín, Alberto Luaces, and Javier Cuadrado. Gait analysis system for spinal cord-injured subjects assisted by active orthoses and crutches. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 227(4):363–374, December 2013.
- [57] J.L. Sauer, J.J. Potter, C.L. Weisshaar, H.-L. Ploeg, and D.G. Thelen. Influence of gender, power, and hand position on pelvic motion during seated cycling. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 39(12):2204–2211, 2007.
- [58] C. L. Vaughan, Davis Brian L, and Jeremy C. O’Connor. *Dynamics of Human Gait, 2nd Ed*. Kiboho Publishers, Cape Town, South Africa, January 1992.

Referencias

- [59] Bruce P. Gibbs. *Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook*. John Wiley & Sons, 2011.
- [60] Mohinder S. Grewal and Angus P. Andrews. *Kalman Filtering: Theory and Practice with MATLAB*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, January 2015.
- [61] Yaakov Bar-Shalom, X. Rong Li, and Thiagalingam Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. John Wiley & Sons, April 2004.
- [62] C. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(3):395–404, June 1978.
- [63] A. D. Kuo. A least-squares estimation approach to improving the precision of inverse dynamics computations. *Journal of Biomechanical Engineering*, 120(1):148–159, February 1998.
- [64] Darryl G. Thelen and Frank C. Anderson. Using computed muscle control to generate forward dynamic simulations of human walking from experimental data. *Journal of Biomechanics*, 39(6):1107–1115, 2006.
- [65] F. Mouzo, U. Lugin, R. Pamies-Vila, and J. Cuadrado. Skeletal-level control-based forward dynamic analysis of acquired healthy and assisted gait motion. *Multibody System Dynamics*, 44(1):1–29, September 2018.
- [66] J. Cuadrado, D. Dopico, M. Gonzalez, and M. A. Naya. A Combined Penalty and Recursive Real-Time Formulation for Multibody Dynamics. *Journal of Mechanical Design*, 126(4):602–608, 08 2004.
- [67] Ahmed A. Shabana. *Computational Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, February 2001.
- [68] Kenneth Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2):164–168, 1944.
- [69] Donald W. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- [70] R. Dumas, L. Chèze, and J. P. Verriest. Adjustments to McConville et al. and Young et al. body segment inertial parameters. *Journal of Biomechanics*, 40(3):543–553, January 2007.
- [71] M. P. T. Silva and J. A. C. Ambrósio. Kinematic data consistency in the inverse dynamic analysis of biomechanical systems. *Multibody System Dynamics*, 8(2):219–239, 2002.
- [72] Silvia E. Rodrigo, Jorge A. C. Ambrósio, Miguel P. Tavares da Silva, and Osvaldo H. Penisi. Analysis of Human Gait Based on Multibody Formulations and Optimization Tools. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 36(4):446–477, November 2008.

-
- [73] Edda Eich-Soellner and Claus Führer. *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. Teubner, Stuttgart, 1998.

Anexos

Anexo A

Resultados Benchmark

En el presente anexo se detallan los valores y resultados del benchmark para la modelización del doble péndulo. La simulación se corre bajo los parámetros de la tabla A.1

Constantes Físicas	
Masa 1 (kg)	50
Masa 2 (kg)	35
Longitud (m)	0.8
Covarianzas de definición	
Desviación típica del ruido de markers (m)	0.001
Desviación típica del ruido de sensores de fuerza (N)	0.05
Desviación típica del ruido de sensores de par (Nm)	0.005
Covarianzas filtro Kalman	
Desviación típica del ruido de planta (N)	0.4
Desviación típica del ruido de planta (Nm)	0.4
Desviación típica del ruido de markers (m)	0.001
Desviación típica del ruido de sensores fuerza (N)	0.05
Desviación típica del ruido de sensores par (Nm)	0.05
Sensores	
Marcadores Ópticos	
Fuerza Horizontal placa	
Fuerza Vertical Placa	
Momento Placa	

Tabla A.1: Especificaciones resultados *benchmark*

La nomenclatura utilizada en la Tabla A.2 es la siguiente:

- FE: *Forward Euler*
- HE: método de Heun
- TF: regla trapezoidal con iteración de punto fijo
- TN: regla trapezoidal con iteración de Newton-Raphson

A. Resultados Benchmark

- PE: matriz de propagación de estados con aproximación de primer orden
- SE: matriz de propagación de estados con aproximación de segundo orden
- EX: matriz de propagación de estados con exponencial exacta
- CT: matriz de covarianza del ruido de planta aproximada en serie de Taylor
- VL: matriz de covarianza del ruido de planta según método de Van Loan

Resultados <i>benchmark</i>						
Integrador usado	Propagación estados	Covarianza ruido	RMS z	RMS \dot{z}	RMS F_e	Tiempo RT/CPU
FE	PE	CT	0.0261	0.1553	19.4465	47.7306
FE	PE	VL	0.0261	0.1627	19.5753	22.0392
FE	SE	CT	0.0261	0.1598	19.5131	46.2945
FE	SE	VL	0.0261	0.1651	21.8711	23.8323
FE	EX	CT	0.0261	0.1623	19.3495	35.9034
FE	EX	VL	0.0261	0.1664	21.5921	20.4209
HE	PE	CT	0.0261	0.1531	17.7505	45.9877
HE	PE	VL	0.0261	0.1551	16.7944	23.7618
HE	SE	CT	0.0261	0.1543	16.2570	44.6233
HE	SE	VL	0.0261	0.1552	16.0403	21.5970
HE	EX	CT	0.0261	0.1553	16.0879	34.2577
HE	EX	VL	0.0261	0.1559	15.9672	20.9438
TF	PE	CT	0.0261	0.1532	17.7547	34.0539
TF	PE	VL	0.0261	0.1552	16.7579	19.2930
TF	SE	CT	0.0261	0.1544	16.2760	34.1616
TF	SE	VL	0.0261	0.1553	16.0654	19.9932
TF	EX	CT	0.0261	0.1553	16.0974	27.8971
TF	EX	VL	0.0261	0.1560	15.9900	15.5171
TN	PE	CT	0.0261	0.1532	17.7547	23.4355
TN	PE	VL	0.0261	0.1552	16.7579	13.2081
TN	SE	CT	0.0261	0.1544	16.2760	22.5510
TN	SE	VL	0.0261	0.1553	16.0654	13.2316
TN	EX	CT	0.0261	0.1553	16.0974	14.4122
TN	EX	VL	0.0261	0.1560	15.9900	9.6676

Tabla A.2: Resultados del doble péndulo en el filtro dinámico, para diferentes combinaciones de integrador, matriz de propagación de estados y matriz de covarianza del ruido de planta

Como se puede apreciar, el error en la estimación de posiciones para todos los planteamientos del filtro dinámico es constante, algo lógico ya que la covarianza asociada a los marcadores no varía, y el sistema ajustará las fuerzas estimadas con el objetivo de obtener la mejor estimación posible.

En las velocidades se ve que el error será de un orden de magnitud relativamente constante para todos los modelos, y es notablemente peor estimación que la de posiciones. Este hecho se debe a que se tienen sensores a nivel de posiciones, pero no de velocidades ni aceleraciones, lo que hace que la estimación en este caso sea peor.

Por lo que respecta a la fuerza, se observa un salto considerable de precisión al pasar de un integrador sencillo como es el *Forward Euler* a cualquiera de los demás. Si embargo, cualquier otro integrador requiere dos o más evaluaciones de función en cada paso de tiempo, lo que los hace inviables para su uso en tiempo real en el modelo de cuerpo completo. Sin embargo, dentro de los integradores superiores al *Forward Euler* no existe una diferencia de precisión destacable entre el más simple, que es el método de Heun, y la regla trapezoidal resuelta por ambos métodos.

Si nos centramos en el tiempo de cálculo de cada estimación, se puede apreciar como el cálculo de la matriz de covarianza usando la exponencial de la matriz es notablemente más pesado, computacionalmente hablando, que el cálculo aproximando mediante la serie de Taylor, llegando a ser un 50% más lento que la aproximación.

Por último, se puede ver como para la obtención de los mismos resultados mediante la implementación de la regla trapezoidal, tendrán un coste notablemente superior si para cada instante de tiempo se debe calcular la derivada del sistema en lugar de hacer un problema de iteración de punto fijo, a pesar de que se necesita un menor número de iteraciones.

Como solución para el modelo completo, se utilizará la combinación de *Forward Euler* con aproximación de segundo orden para la matriz de propagación de estados, y matriz de covarianza aproximada mediante desarrollo en serie, dado que los resultados no varían en exceso y se consigue una eficiencia aceptable.

Partiendo de esta combinación, en la Tabla A.3 se compara la precisión obtenida utilizando la matriz de sensibilidad completa, con la obtenida utilizando la versión aproximada, despreciando las derivadas de la aceleración con respecto a posición y velocidad. En este caso, la diferencia de tiempos no es tan relevante como en el caso del modelo completo. Se puede ver que los resultados varían muy poco, y de hecho mejoran en el caso de la estimación de fuerzas.

Sensibilidad	RMS z	RMS \dot{z}	RMS F_e	Tiempo RT/CPU
Completa	0.0261	0.1598	19.5131	46.2945
Simplificada	0.0261	0.1684	18.8361	54.7290

Tabla A.3: Comparación entre matriz de sensibilidad completa y simplificada