

Análisis de identificabilidad aplicado a un sistema de transferencia de calor

Javier Sanz-Bermejo, Edgar Ramirez-Laboreo, Carlos Sagues
 Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas (DIIS) e
 Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A),
 Universidad de Zaragoza, Zaragoza 50018, Spain,
 (e-mail: fjsanz@unizar.es, ramirlab@unizar.es, csagues@unizar.es)

Resumen

La identificabilidad es una propiedad esencial de los modelos dinámicos cuyo estudio debe ser abordado antes de iniciar cualquier procedimiento de estimación paramétrica. Sin embargo, este análisis generalmente ha sido ignorado en la literatura con unas pocas excepciones, como por ejemplo en el estudio de los sistemas biológicos. En este trabajo, se estudia la identificabilidad estructural de un sistema de transferencia de calor, con el fin de destacar la importancia de este análisis y animar a los investigadores a tenerlo en cuenta. Con este propósito, primero se presenta un modelo de parámetros concentrados basado en la analogía térmica-eléctrica. Después, se analiza la identificabilidad del modelo haciendo uso del teorema del isomorfismo local. A continuación, se presenta el análisis correspondiente a dos posibles escenarios distintos, en uno de ellos el estado se mide completamente mientras que en el otro sólo se dispone de medidas parciales. En el primer escenario se demuestra que la estructura paramétrica propuesta es identificable, lo que permite estimar los parámetros del sistema empleando datos experimentales. El segundo escenario se corresponde con una situación no identificable, y sirve de ejemplo de lo que podría ocurrir si esta propiedad no es analizada.

Palabras clave: Identificabilidad estructural, modelado térmico de caja gris, modelo de parámetros concentrados.

1 Introducción

La reducción del consumo de energía se ha convertido en uno de los principales problemas a resolver por el ser humano. La mayor parte de la energía consumida, tanto en el ámbito doméstico como en el industrial, está ligada en gran medida a los procesos térmicos, tales como los sistemas de calefacción o ciertos electrodomésticos. Además de adoptar buenos hábitos de consumo, una de las claves para reducir el consumo de energía consiste en mejorar la eficiencia de estos sistemas. En este sentido, la construcción de mod-

elos dinámicos es probablemente una de las herramientas más útiles para mejorar la eficiencia de cualquier sistema. La construcción de un modelo orientado a la mejora energética es, sin embargo, un proceso crítico que depende de una serie de factores, tales como el grado de detalle del modelo o la información empleada en el proceso de construcción. Por un lado, el modelo desarrollado debe de ser lo suficientemente detallado como para capturar la dinámica de todas las variables de interés. Por otro lado, también debe ser lo suficientemente sencillo como para poder realizar simulaciones poco costosas computacionalmente que permitan su uso en algoritmos de estimación, control u optimización.

Una posibilidad es construir modelos totalmente basados en datos experimentales. Sin embargo, esto puede conducir a comportamientos incompatibles con los principios físicos del sistema y, por tanto, a dinámicas inesperadas. Este enfoque de modelado se conoce generalmente como “black-box”, y busca obtener una relación matemática entre las entradas y salidas del sistema sin tener en cuenta la física del problema. En [1], por ejemplo, se emplean estructuras de caja negra para modelar la dinámica de la temperatura de edificios a diferentes escalas. Otro ejemplo de modelo de caja negra se puede ver en [2], donde una estructura ARMAX basada en regresiones lineales se emplea para modelar la temperatura del aire de un horno de convección con resultados muy precisos. Estos modelos son capaces de predecir con precisión únicamente la dinámica de las variables que hayan sido registradas durante las pruebas experimentales. Por lo tanto, no pueden emplearse para obtener información sobre otras variables de interés, incluidas aquellas que no pueden medirse directamente. En el extremo opuesto se encuentran los modelos puramente teóricos, que pueden no ser capaces de captar algunas características específicas de cada sistema. En la literatura, este enfoque de modelado se le conoce como “white-box”, y requiere un completo conocimiento de los principios físicos que gobiernan el sistema, así como de los valores de todas las propiedades y parámetros del mismo. En la literatura pueden encontrarse varios ejemplos de esta forma de modelización.

En [3], se desarrolla un modelo para analizar la distribución térmica en una sartén durante un proceso de cocción por inducción utilizando técnicas computacionales basadas en el método de los elementos finitos. Un segundo ejemplo es [4], donde se construye un modelo para un horno eléctrico con el objetivo de predecir la temperatura del aire en un proceso industrial. Aunque en ambos casos se obtienen resultados muy precisos, los elevados requisitos computacionales del método de los elementos finitos hacen que estos modelos no sean adecuados para los procesos de optimización desde el punto de vista de la eficiencia energética.

Teniendo en cuenta lo anterior, la solución óptima es probablemente un modelado híbrido entre los dos propuestos anteriormente, es decir, modelos basados en principios básicos cuyos parámetros se caracterizan a partir de observaciones del sistema a modelar. Este enfoque de modelado se llama “*grey-box*”. Algunos ejemplos de aplicación pueden verse en [5] y [6], donde se propone un modelo de caja gris para predecir el comportamiento térmico transitorio de un horno eléctrico. En estos trabajos, se adopta un modelo de parámetros concentrados basado en la analogía térmica-eléctrica con el objetivo de construir un modelo de bajo orden orientado al control. Los resultados obtenidos son validados experimentalmente, con resultados aparentemente buenos. Otro ejemplo de esta técnica de modelado se puede encontrar en [7], donde se presenta una nueva metodología analítica para obtener modelos reducidos para la modelización térmica de edificios. Los resultados experimentales muestran que esta técnica presenta una precisión comparable a la de modelos más detallados con un coste computacional mucho menor.

El modelado de caja gris requiere de procedimientos de identificación con el fin de estimar el conjunto de parámetros parcial o totalmente desconocidos. Tanto si los parámetros a estimar tienen un significado físico como si el modelo se emplea para predecir la dinámica de las variables de estado que no pueden medirse directamente, en ambos casos es esencial llevar a cabo un análisis preliminar de la identificabilidad de la estructura paramétrica propuesta. La falta de identificabilidad da lugar a una variedad de problemas, como la obtención de parámetros sin sentido físico o la falta de convergencia de los algoritmos de optimización utilizados en la estimación paramétrica. Cuando un modelo resulta ser no identificable, el análisis de identificabilidad también proporciona información útil para resolver la ambigüedad estructural, por ejemplo modificando el marco experimental o añadiendo determinados supuestos. A pesar de la importancia de la identificabilidad, el análisis de esta

propiedad se ha ignorado en la mayoría de los trabajos sobre modelos dinámicos, especialmente en el ámbito de los sistemas de transferencia de calor. Uno de los pocos ejemplos que sí ha tenido en cuenta el estudio de esta propiedad es [8], en este trabajo se lleva a cabo un análisis de identificabilidad para un modelo de caja gris de un horno eléctrico adoptando un enfoque algebraico basado en el algoritmo de Ritt [9]. No obstante, tal y como el autor explica, este método no puede aplicarse en cualquier estructura paramétrica, su implementación encuentra dificultades si el número de parámetros y variables desconocidas supera la decena.

La principal contribución de este trabajo consiste en resaltar el papel que desempeña la propiedad de identificabilidad en la construcción de modelos dinámicos de caja gris. Dada su relevancia en la mejora de la eficiencia energética, se centran los esfuerzos en un sistema de transferencia de calor. Sin embargo, las ideas propuestas son completamente aplicables a cualquier otro modelo dinámico construido a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias. En primer lugar, se presenta un modelo dinámico de caja gris basado en una estructura de parámetros concentrados. Este tipo de modelo permite reproducir fielmente la dinámica de los principales componentes del sistema sin grandes necesidades computacionales. A pesar de ser un modelo lineal de orden reducido, presenta una estructura no lineal con respecto a los parámetros. La identificabilidad se estudia usando el teorema del isomorfismo local. En nuestra experiencia, esta técnica ofrece una mayor robustez y flexibilidad con respecto a otros métodos, ya que se puede aplicar a más sistemas sin dar lugar a expresiones algebraicas inmanejables. Se presentan dos análisis para dos escenarios diferentes, uno en el que el estado completo es medido y otro en el que sólo se dispone de medidas parciales. En el primer caso se demuestra la identificabilidad paramétrica, lo que nos permite asegurar que es posible estimar los parámetros utilizando únicamente datos experimentales. El segundo caso corresponde a una situación no identificable, y este hecho nos permite ilustrar algunos problemas que se pueden dar si esta propiedad no es analizada.

2 Modelo dinámico

El modelo de caja gris presentado se basa en la analogía existente entre los sistemas térmicos y eléctricos, con el propósito de proporcionar una información más profunda sobre el comportamiento intrínseco del sistema. En este trabajo, se desarrolla un sistema de transferencia de calor (Fig. 1) compuesto por tres elementos prin-

cipales, cada uno de ellos modelados como condensadores térmicos C_1 , C_2 y C_3 . La potencia calorífica es generada directamente en el condensador C_1 . El modelo propuesto adopta un enfoque de parámetros concentrados. Este enfoque de modelado proporciona una estimación significativa de las principales temperaturas del sistema, a pesar de simplificar las ecuaciones de transferencia de calor. Esta simplificación de las ecuaciones de transferencia de calor conlleva necesidades computacionales menores, lo que permite realizar un mayor número de simulaciones en un menor tiempo. Si el modelo resulta ser identificable, puede emplearse para extraer información adicional sobre el sistema térmico, como los flujos de calor o la energía almacenada. Una estructura de parámetros concentrados modela cada elemento del sistema como un condensador térmico interconectado con otros a través de resistencias térmicas. Además, cada elemento puede verse afectado por temperaturas (en este caso la temperatura ambiente, T_{amb}) o flujos de calor externos. Aplicando un balance de energía a cada nodo, se obtiene el conjunto de ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema térmico,

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \frac{(T_2 - T_1)}{R_2} + \frac{(T_{amb} - T_1)}{R_1} + p, \quad (1)$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_2} + \frac{(T_3 - T_2)}{R_4} + \frac{(T_{amb} - T_2)}{R_3}, \quad (2)$$

$$C_3 \frac{dT_3}{dt} = \frac{(T_2 - T_3)}{R_4}, \quad (3)$$

donde T_1 , T_2 , y T_3 son, respectivamente, las temperaturas de los elementos 1, 2, y 3. Como se ha indicado, la potencia calorífica p entra al sistema directamente a través del primer componente, modelado por un condensador C_1 . Por lo tanto, se puede interpretar como el elemento que transforma otro tipo de energía (química, eléctrica, etc.) en calor. Este componente presenta conexiones térmicas directas con el ambiente y con el segundo componente, que se modelan respectivamente mediante las resistencias R_1 y R_2 .

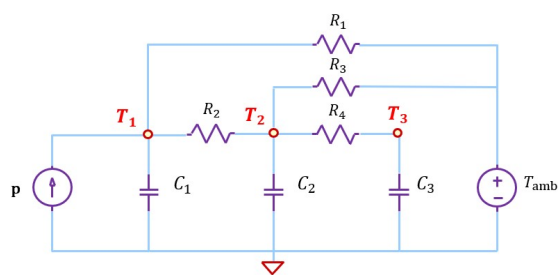


Figura 1: Representación esquemática de la estructura de parámetros concentrados.

El segundo componente, modelado por el condensador C_2 , se conecta térmicamente con el ambiente y con el tercer componente, el cual es modelado por el condensador C_3 . Estas conexiones son modeladas, respectivamente, por las resistencias R_3 y R_4 . Las variables de estado seleccionadas para el modelo son las temperaturas de los tres elementos,

$$x = (T_1 \quad T_2 \quad T_3)^T, \quad (4)$$

y, por tanto, la representación del espacio de estados del sistema es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\theta(x, u) = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{T_1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{T_2}{C_1 R_2} + \frac{p}{C_1} + \frac{T_{amb}}{C_1 R_1} \\ \frac{T_1}{C_2 R_2} - \frac{T_2}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + \frac{T_3}{C_2 R_4} + \frac{T_{amb}}{C_2 R_3} \\ \frac{T_2}{C_3 R_4} - \frac{T_3}{C_3 R_4} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

donde u hace referencia a la entrada del sistema, compuesta por la potencia calorífica p y por la temperatura ambiente T_{amb} ,

$$u = (p \quad T_{amb})^T, \quad (6)$$

y θ es el vector de parámetros, dado como

$$\theta = (R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3)^T. \quad (7)$$

Como comentario final, es importante destacar que el modelo dinámico obtenido, a pesar de ser lineal con respecto a las variables de estado y a la entrada, es no lineal con respecto a los parámetros. De hecho, el propósito de elegir este sistema es demostrar que aparentemente modelos simples pueden presentar en realidad una estructura paramétrica con varias no linealidades. Probablemente sea una de las razones por las que la propiedad de identificabilidad sea obviada tan a menudo en la literatura.

3 Identificabilidad

La identificabilidad estructural es una propiedad teórica que depende exclusivamente de la parametrización del modelo, asumiendo medidas libres de ruido y errores, y es esencial para la construcción de cualquier modelo a partir de procesos de identificación. Existen varias definiciones de identificabilidad en la literatura [9–11]. Estas definiciones se clasifican principalmente en dos categorías: local y global. En [12] se lleva a cabo una completa revisión de la identificabilidad con el objetivo de unificar todas las definiciones y conceptos relacionados con esta propiedad. En este

trabajo, la identificabilidad global y estructural será analizada desde un punto de vista algebraico.

Consideremos el modelo previamente presentado como un modelo dinámico de entrada afín,

$$\Sigma_\theta : \begin{cases} \dot{x}(t) = \phi_\theta(x(t)) + g_\theta(x(t))u(t) \\ y(t) = h_\theta(x(t)) \\ x(t_0) = x_0(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

donde $x(t) \in H \subseteq \mathbb{R}^n$ es el estado, $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ es la entrada, $y(t) \in \Psi \subseteq \mathbb{R}^p$ es la salida y $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^\ell$ es el vector de parámetros. La dinámica del sistema Σ_θ y el estado inicial $x_0(\theta)$ definen un mapa de entrada-salida de la forma

$$IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))} : \{u(t)\} \mapsto \{y(t)\}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (9)$$

tal que para cada entrada admisible, $u(t) \in [t_0, t_f]$, el sistema devuelve una salida $y(t)$ definida en el mismo intervalo temporal, cumpliendo con la condición inicial dada. El sistema (8) se dice que es global y estructuralmente identificable si existe una relación de uno a uno entre el conjunto de posibles valores del vector de parámetros y el conjunto de posibles mapas de entrada-salida. Es decir, si se cumple que

$$IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))} = IO_{(\Sigma_{\tilde{\theta}}, x_0(\tilde{\theta}))} \iff \tilde{\theta} = \theta. \quad (10)$$

En otras palabras, el sistema es global y estructuralmente identificable si no es posible encontrar dos conjuntos paramétricos distintos que den lugar al mismo mapa de entrada-salida. Si esto se cumple, los parámetros que definen el mapa de entrada-salida pueden ser estimados teóricamente a partir de medidas de $u(t)$ e $y(t)$.

Los métodos propuestos en la literatura para evaluar la identificabilidad estructural siguen cuatro líneas principales: método directo [13], método de igualar la salida [11], método de álgebra diferencial [9] y el método del teorema del isomorfismo local [14], este último se emplea en este trabajo. Este método fue propuesto por S. Vadja y H. Rabitz en [14], se basa en ideas de geometría diferencial aplicadas a la teoría de sistemas, es más robusto que el resto de métodos y permite evaluar de forma sencilla la identificabilidad de sistemas del estilo de (8). La idea general de este método consiste en partir de dos conjuntos de parámetros independientes θ y $\tilde{\theta}$, y estudiar qué relaciones deben darse entre estos conjuntos para que den lugar al mismo mapa de entrada-salida, suponiendo la misma estructura algebraica paramétrica (8). Si se llega a la conclusión de que ambos conjuntos deben ser idénticos, se habrá demostrado la implicación (10). De lo contrario, se habrá demostrado lo opuesto y, por lo tanto, el sistema no será identificable.

La representación $(\Sigma_\theta, x_0(\theta))$ del mapa $IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))}$ es mínima si no existe otro modelo con menos estados que dé lugar a una representación del mismo mapa, es decir que el sistema sea observable y controlable. Asumiendo que $(\Sigma_\theta, x_0(\theta))$ y $(\Sigma_{\tilde{\theta}}, x_0(\tilde{\theta}))$ son representaciones mínimas, el teorema del isomorfismo local establece que son representaciones del mismo mapa si y sólo si son isomórficas.

$$IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))} = IO_{(\Sigma_{\tilde{\theta}}, x_0(\tilde{\theta}))} \iff \exists \varphi : x = \varphi(\tilde{x}) \quad (11)$$

Es decir, existe un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $V \in H$ tal que

$$\phi_\theta(\varphi(\tilde{x})) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}} \phi_{\tilde{\theta}}(\tilde{x}), \quad (12)$$

$$g_\theta(\varphi(\tilde{x})) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}} g_{\tilde{\theta}}(\tilde{x}), \quad (13)$$

$$h_\theta(\varphi(\tilde{x})) = h_{\tilde{\theta}}(\tilde{x}), \quad (14)$$

$$x_0(\theta) = \varphi(x_0(\tilde{\theta})), \quad (15)$$

$$\text{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}} = n, \quad (16)$$

para todo $\tilde{x} \in V$. En otras palabras, si es posible encontrar un difeomorfismo entre los espacios de estado de las dos representaciones, entonces el teorema establece que ambas representaciones corresponden al mismo mapa de entrada-salida. Si, además, la existencia del difeomorfismo está condicionada por una relación de igualdad entre los conjuntos paramétricos, entonces el sistema es global y estructuralmente identificable.

3.1 Caso I - Medición completa del estado

En el supuesto de que todas las variables se puedan medir, es decir, $y = (T_1 \ T_2 \ T_3)^\top$, y una vez que se comprueba que el sistema es observable y controlable de acuerdo con la teoría de Kalman, el método del estado del isomorfismo local es aplicado al modelo presentado en la Sección 2. Tenga en cuenta que por simplicidad algebraica, las inversas de las resistencias y de las capacidades son empleadas, es decir, $G_i = R_i^{-1}$ y $B_i = C_i^{-1}$. La resolución del difeomorfismo cumpliendo con las condiciones (12)-(16), da lugar a una serie de relaciones del estilo $\alpha_i(\theta) = \alpha_i(\tilde{\theta})$ entre los parámetros θ y $\tilde{\theta}$. Estas relaciones son las siguientes:

$$\alpha_i(\theta) : \begin{cases} \alpha_1(\theta) = B_1 \\ \alpha_2(\theta) = B_1(G_1 + G_2) \\ \alpha_3(\theta) = B_1G_2 \\ \alpha_4(\theta) = B_2G_2 \\ \alpha_5(\theta) = B_2G_4 \\ \alpha_6(\theta) = B_2(G_2 + G_3 + G_4) \\ \alpha_7(\theta) = B_3G_4 \end{cases} \quad (17)$$

El conjunto de ecuaciones $\alpha_i(\theta) = \alpha_i(\tilde{\theta})$, $i = 1..7$, implica que $\theta = \tilde{\theta}$. Por lo tanto, el modelo es global y estructuralmente identificable si el estado completo es medido.

3.2 Caso II - Medición parcial del estado

En la práctica no siempre es posible medir el estado completo. Como ejemplo, se asume que únicamente se dispone de medidas de la temperatura T_1 , es decir $y = T_1$. Se verifica que la representación del mapa es mínima, es decir, el sistema es observable y controlable midiendo una sola variable. Entonces, el método del isomorfismo local es aplicado al modelo presentado en la Sección 2, con el fin de encontrar un difeomorfismo que cumpla las condiciones establecidas arriba (12)-(16). La resolución de este difeomorfismo da lugar a un conjunto de relaciones del tipo $\beta_i(\theta) = \beta_i(\tilde{\theta})$, con β_i como sigue:

$$\beta_i(\theta) : \begin{cases} \beta_1(\theta) = B_1 \\ \beta_2(\theta) = B_1(G_1 + G_2) \\ \beta_3(\theta) = B_1B_2G_2^2 \\ \beta_4(\theta) = B_2(G_2 + G_3 + G_4) \\ \beta_5(\theta) = B_2G_4 \\ \beta_6(\theta) = B_3G_4 \end{cases} \quad (18)$$

En este caso, el conjunto de ecuaciones $\beta_i(\theta) = \beta_i(\tilde{\theta})$, $i = 1..6$, no implica $\theta = \tilde{\theta}$. Por lo tanto, el modelo no es global y estructuralmente identificable midiendo únicamente T_1 . A pesar de este hecho, este análisis de identificabilidad proporciona información útil para convertir al modelo en identificable. Tenga en cuenta que, suponiendo conocido el valor de cualquier parámetro el sistema B_2 , B_3 , G_1 , G_2 , G_3 , o G_4 , se convierte en identificable.

4 Resultados y discusiones

4.1 Caso I - Medición completa del estado

En el caso de que se dispongan medidas del estado completo, es decir, $y = (T_1 \ T_2 \ T_3)^T$, el análisis de identificabilidad visto en la Sección 3.1, ha demostrado que el modelo propuesto es identificable. Por lo tanto, se propone un proceso de identificación paramétrica para determinar el valor de los parámetros desconocidos del modelo visto en la Sección 2 a partir de datos experimentales del sistema. Tenga en cuenta que los datos experimentales se han procesado mediante un filtro de media móvil con el objetivo de eliminar en la medida de lo posible el ruido que afecta a las mediciones. Este proceso de identificación paramétrica consiste en caracterizar un modelo a partir de observaciones (datos de entradas y salidas) obtenidos directamente del sistema dinámico que se pretende

modelar. El proceso de estimación paramétrica requiere establecer un criterio que exprese la precisión del ajuste del modelo obtenido con respecto a los datos experimentales. En este trabajo se emplea a tal efecto una suma ponderada de los errores cuadráticos medios de las tres temperaturas (T_1 , T_2 y T_3). Es decir, consiste en encontrar la solución del problema de optimización planteado a continuación:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Omega} \int_{t_0}^{t_f} (y(t) - y_m(t))^2 dt \quad (19)$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = f_{\theta}(x(t), u_m(t)) \quad (20)$$

$$y(t) = h_{\theta}(x(t)) \quad (21)$$

$$x(t_0) = (T_0 \ T_0 \ T_0)^T \quad (22)$$

donde $u_m(t)$ e $y_m(t)$ son la entrada y salida experimentales, respectivamente, y $x(t_0)$ es el estado inicial equivalente a la temperatura ambiente en el instante inicial, $T_0 = T_{\text{amb}}(t_0)$.

Excepto para algunos casos específicos, no existen métodos analíticos para identificar modelos basados en procesos físicos debido a la estructura intrínseca que presentan. Por esta razón, se emplean métodos no lineales para determinar el valor óptimo de los parámetros. En este trabajo, se emplea la función *fmincon* del software matemático MATLAB para resolver el problema de optimización formulado arriba. En concreto se emplea el algoritmo de la región de confianza debido a que es aplicable a la mayoría de las funciones de error y presenta una convergencia más rápida y fiable dado que tiene en cuenta el degradado de la función de coste. Los principales resultados numéricos se incluyen en la Tabla 1, donde se muestra los errores de cada temperatura así como la correspondiente tasa de ajuste para los parámetros óptimos θ^* con respecto a las medidas experimentales. El ajuste de las temperaturas, para el conjunto de parámetros óptimo θ^* , se muestra en las Figs. 2, 3, y 4. A la vista de los resultados, se puede extraer una serie de conclusiones. En primer lugar, el modelo consigue un excelente rendimiento, esto se debe a que se basa en los mismos principios que gobiernan el sistema real. En segundo lugar, el proceso de identificación paramétrica realiza un buen trabajo.

Tabla 1: Errores de la identificación paramétrica

Temperatura	RMSE (°C)	T_m ^a (°C)	$\frac{\text{RMSE}}{T_m}$
T_1	2.15	105.96	2.03 %
T_2	2.06	88.5	2.33 %
T_3	1.89	88.65	2.13 %

^a T_m : Temperatura media (°C)

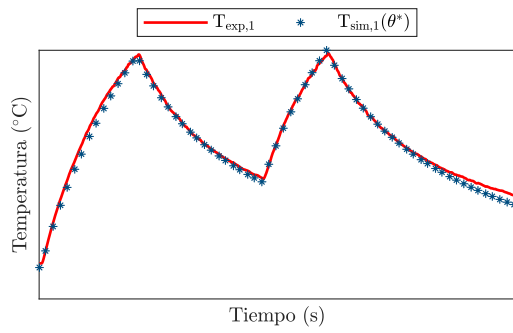


Figura 2: Evolución temporal de la temperatura T_1 .

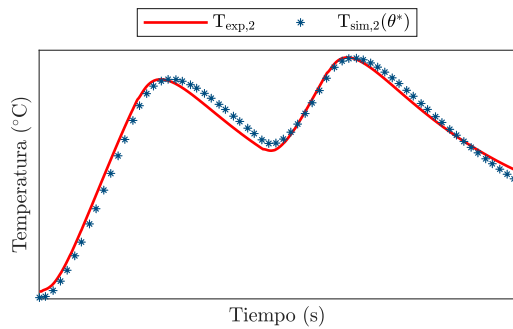


Figura 3: Evolución temporal de la temperatura T_2 .

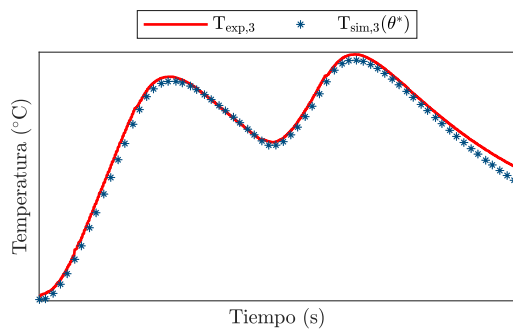


Figura 4: Evolución temporal de la temperatura T_3 .

Finalmente, en relación a los resultados obtenidos del análisis de identificabilidad estructural, se puede concluir que existe un único conjunto paramétrico óptimo θ^* que dé lugar al mismo mapa de entrada-salida.

4.2 Caso II - Medición parcial del estado

En el caso de medir únicamente una temperatura, $y = T_1$, el problema de identificación paramétrica se aborda desde otra perspectiva diferente. En este sentido, se pretende demostrar los resultados obtenidos en la Sección 3.2. Con este fin, se manipulan las ecuaciones (18) para encontrar dos conjuntos paramétricos distintos que den lugar al mismo mapa de entrada-salida de la temperatura

medida. Estos conjunto paramétricos distintos se denominan θ_A y θ_B .

La dinámica del modelo introducido en la Sección 2 se simula para los dos conjuntos paramétricos distintos, θ_A y θ_B . Los resultados de simulación son representados en Figs. 5, 6, y 7. En vista de los resultados, existen al menos dos conjuntos paramétricos distintos que dan lugar al mismo mapa de entrada-salida de la temperatura medida, esto es, se verifica que el modelo es no identificable midiendo únicamente T_1 . Por lo tanto, no hay garantías de que los parámetros estimados tengan un significado físico.

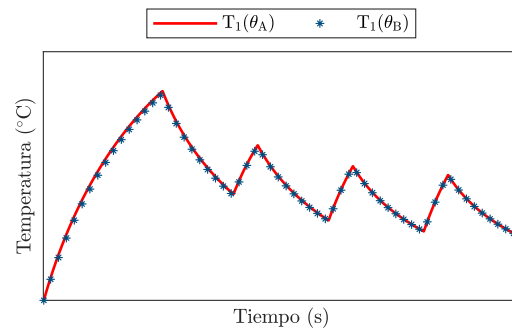


Figura 5: Evolución temporal de la temperatura simulada T_1 para los conjuntos paramétricos θ_A y θ_B .

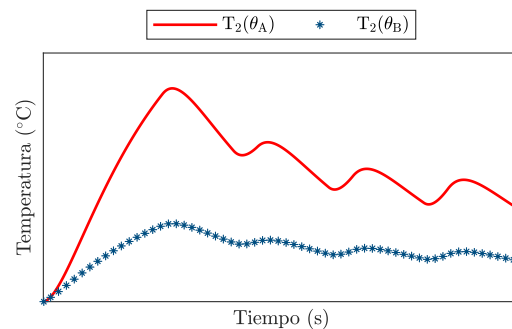


Figura 6: Evolución temporal de la temperatura simulada T_2 para los conjuntos paramétricos θ_A y θ_B .

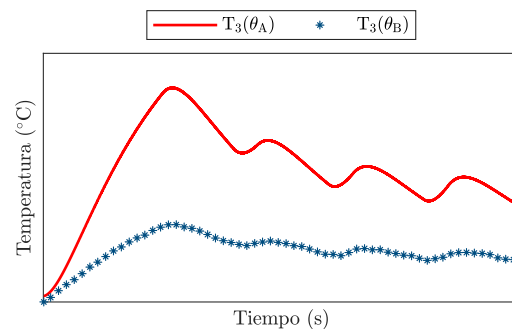


Figura 7: Evolución temporal de la temperatura simulada T_3 para los conjuntos paramétricos θ_A y θ_B .

5 Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un estudio de identificabilidad de un sistema de transferencia de calor debido a su importancia en términos de eficiencia energética. Este sistema térmico ha sido analizado para dos situaciones diferentes. En la primera situación, se ha demostrado que el sistema es identificable siempre y cuando todas las temperaturas sean medidas. Este hecho asegura la existencia de un único conjunto paramétrico para cada posible dinámica del sistema. En otras palabras, debido a los excelentes resultados obtenidos del proceso de identificación, se puede asegurar que el conjunto de parámetros estimados corresponde con el conjunto del sistema real. La precisión del ajuste refleja el excelente rendimiento conseguido por el modelo de caja gris. Este tipo de modelo, lineal y de bajo orden, permite reproducir en detalle la dinámica de todas las temperaturas sin necesidad de grandes requerimientos computacionales, lo que es apropiado desde el punto de vista de la eficiencia energética.

En el segundo escenario, se demuestra que el sistema no es identificable si sólo se mide la temperatura T_1 . Un ajuste paramétrico puede conducir a un modelo que refleje correctamente la dinámica de la temperatura medida, pero no hay garantías de que los parámetros estimados tengan sentido físico. Además, el modelo no puede emplearse para predecir el resto de temperaturas.

Los resultados obtenidos en este trabajo se pueden generalizar para cualquier modelo dinámico con entrada afín, bien sea lineal o no lineal con respecto a los parámetros. En general, se concluye que la identificabilidad es un requerimiento esencial que debe ser necesariamente evaluado antes de iniciar cualquier proceso de identificación paramétrica para la construcción de un modelo dinámico de caja gris. Además, el marco experimental disponible para la construcción del modelo debe ser tenido en cuenta, debido a que puede modificar en gran medida la identificabilidad del modelo.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado en parte por el Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España – Unión Europea, bajo el proyecto RTC-2017-5965-6, en parte por el Gobierno de Aragón – Unión Europea, bajo el proyecto DGA.FSE T45.20R, y en parte por la Fundación Ibercaja - Universidad de Zaragoza, bajo el proyecto JIUZ-2021-TEC-05.

Referencias

- [1] A procedure for modeling buildings and their thermal zones using co-simulation and system identification, Royer, Sullivan and Thil, Stéphane and Talbert, Thierry and Polit, Monique, *Energy and Buildings*, 78, 231–237, 2014, Elsevier.
- [2] Air temperature transfer function of a convection oven, Unklesbay, Kenneth and Boza-Chacon, Alejandro and Unklesbay, Nan, *Food Control*, 8, 1, 39–43, 1997, Elsevier.
- [3] Thermal analysis of a cooking pan with a power control induction system, Cabeza-Gil, I and Calvo, B and Grasa, J and Franco, C and Llorente, S and Martinez, MA, *Applied Thermal Engineering*, 180, 115789, 2020, Elsevier
- [4] Characterization and CFD modelling of air temperature and velocity profiles in an industrial biscuit baking tunnel oven, Mirade, Pierre-Sylvain and Daudin, Jean-Dominique and Ducept, Fabrice and Trystram, Gilles and Clément, J, *Food research international*, 37, 10, 1031–1039, 2004, Elsevier
- [5] Dynamic model for convective heating of a wet brick during energy characterisation of domestic electric ovens, Lucchi, M and Suzzi, N and Lorenzini, M, *Applied Thermal Engineering*, 161, 114117, 2019, Elsevier
- [6] Control-oriented low-order models for the transient analysis of a domestic electric oven in natural convective mode, Lucchi, M and Lorenzini, M, *Applied Thermal Engineering*, 147, 438–449, 2019, Elsevier
- [7] Lumped parameter models for building thermal modelling: An analytic approach to simplifying complex multi-layered constructions, Ramallo-González, Alfonso P and Eames, Matthew E and Coley, David A, *Energy and Buildings*, 60, 174–184, 2013, Elsevier
- [8] Thermal modeling, analysis and control using an electrical analogy, Ramírez-Laboreo, Edgar and Sagüés, Carlos and Llorente, Sergio, *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*, 505–510, 2014, IEEE
- [9] On global identifiability for arbitrary model parametrizations, Ljung, Lennart and Glad, Torkel, *Automatica*, 30, 2, 265–276, 1994, Elsevier
- [10] Parametrizations of linear dynamical systems: Canonical forms and identifiability,

- Glover, Keith and Willems, Jan, IEEE Transactions on Automatic Control, 19, 6, 640–646, 1974, IEEE
- [11] Identification of parametric models from experimental data, Walter, Eric and Pronzato, Luc and Norton, John, 1, 2, 1997, Springer
- [12] A priori identifiability: An overview on definitions and approaches, Anstett-Collin, Floriane and Denis-Vidal, Lilianne and Millérioux, Gilles, Annual Reviews in Control, 50, 139–149, 2020, Elsevier
- [13] An easy to check criterion for (un) indentifiability of uncontrolled systems and its applications, Denis-Vidal, Lilianne and Joly-Blanchard, Ghislaine, IEEE Transactions on Automatic Control, 45, 4, 768–771, 2000, IEEE
- [14] State isomorphism approach to global identifiability of nonlinear systems, Vajda, Sándor and Rabitz, Herschel, IEEE Transactions on Automatic Control, 34, 2, 220–223, 1989, IEEE



© 2022 by the authors.
Submitted for possible
open access publication
under the terms and conditions of the Creative
Commons Attribution CC-BY-NC 4.0 license
(<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>).