

# Distribución Dinámica de Recursos vía Juegos Poblacionales y Modelos Dinámicos de Pago

Juan Martinez-Piazuelo

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona (España), [juan.pablo.martinez.piazuelo@upc.edu](mailto:juan.pablo.martinez.piazuelo@upc.edu)

Germán Obando

Universidad del Rosario, Bogotá (Colombia), [german.obando@urosario.edu.co](mailto:german.obando@urosario.edu.co)

Nicanor Quijano

Universidad de los Andes, Bogotá (Colombia), [nquijano@uniandes.edu.co](mailto:nquijano@uniandes.edu.co)

Carlos Ocampo-Martinez

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona (España), [carlos.ocampo@upc.edu](mailto:carlos.ocampo@upc.edu)

## Resumen

Este artículo se centra en resaltar la vasta utilidad de la teoría de juegos, en particular aquella basada en la vertiente dinámica evolutiva, dentro del modelado y control de sistemas dinámicos complejos y de gran escala. Concretamente, y a través de ejemplos claros y de aplicación real, se motiva el uso de las dinámicas poblacionales para el modelado de sistemas ciberfísicos, así como los modelos dinámicos de pago para complementar un sistema de control en lazo cerrado con restricciones (físicas y operacionales), cuyos objetivos se alinean con la distribución dinámica de recursos y el alcance de equilibrios generalizados de Nash.

**Palabras clave:** juegos evolutivos, distribución dinámica de recursos, equilibrios de Nash, modelos dinámicos de pago

## 1. Introducción

En el área de sistemas de control y automatización, los sistemas dinámicos de gran escala se han venido estudiando con más frecuencia. Existen múltiples técnicas que han sido desarrolladas para atacar los principales retos que emergen de estos sistemas, tales como la cantidad de información necesaria para su operación, los costos económicos y computacionales asociados para su análisis y síntesis de políticas de gestión (control), entre otros. Una de las maneras de modelar estos sistemas complejos de gran escala con múltiples decisiones y acciones, en la que los diferentes entes/controladores interactúan entre sí, es mediante el uso de modelado basado en teoría de juegos. Esta teoría estudia la interacción entre diferentes agentes (jugadores) que utilizan diversas estrategias mientras buscan maximizar su bienestar. En [1], los autores demuestran las conexiones entre

juegos, optimización y aprendizaje para el procesamiento de señales en red. Otros ejemplos similares se centran en la carga de vehículos eléctricos [9], la coordinación de redes de robots [10], problemas de control de pandemias [11], técnicas de aprendizaje por refuerzo [6], respuesta a la demanda [7], o manejo de recursos y regulación en sistemas de agua [12]. En todas estas aproximaciones, los autores atacan los problemas desde las perspectivas de juegos matriciales, continuos, diferenciales o dinámicos. Los juegos matriciales son los más conocidos sobre todo desde la perspectiva de la forma normal, en la cual la interacción simultánea entre jugadores se da de manera estática y cada jugador se puede ver de manera individual. Por otro lado, en los juegos continuos, los jugadores pueden escoger entre una infinidad de estrategias que varían en el tiempo. Ahora bien, los juegos dinámicos utilizan un mecanismo de aprendizaje que permite ajustar las acciones tomadas basado en la información de eventos pasados. Estos juegos se caracterizan por tres problemas fundamentales: i) cómo modelar el ambiente en el que los jugadores interactúan; ii) cómo modelar los objetivos que persiguen los jugadores; y iii) cómo especificar el orden en el que los jugadores toman las decisiones y qué tanta información tienen. En este caso, se asume que la interacción se da entre un gran número (desconocido) de jugadores, y lo que nos interesa estudiar es la proporción de individuos que terminan utilizando una estrategia u otra. Dentro de los juegos dinámicos se incluyen los juegos evolutivos, los cuales fueron desarrollados desde el punto de vista del comportamiento ecológico. Maynard-Smith y Price fueron los precursores en este concepto, al desarrollar las nociones de las estrategias evolutivamente estables [17]. Luego, para lograr ver el comportamiento dinámico y su relación con la parte genética, Taylor y Jonker desarrollan el modelo de los replicadores (*replicator dynamics*), el cual ha sido utilizado am-

pliamente en aplicaciones de ingeniería. Así mismo, aproximaciones de juegos evolutivos desde el punto de vista de sistemas económicos han sido desarrolladas en [24] mediante la introducción de los conceptos de protocolos de revisión y *mean dynamics*.

En este artículo, se muestran un par de ejemplos representativos de la distribución dinámica de recursos vía juegos poblacionales y modelos dinámicos de pago [21, 24]. El objetivo principal es destacar la utilidad y la idoneidad de estas técnicas de cara a modelar dinámicas de sistemas complejos de la ingeniería, así como en el diseño de estrategias de gestión y control siguiendo políticas particulares y sometiendo la solución a restricciones de carácter físico y operacional, así como de naturaleza local y global. En particular, el artículo se centra en presentar las nociones básicas de los juegos poblacionales y los modelos dinámicos de pago. Una vez el lector conoce la aproximación propuesta, el trabajo busca mostrar la utilidad de estas técnicas en dos problemas de ingeniería. El primer problema que se discute es la distribución de agua en sistemas multi-tanque. Una de las aplicaciones posibles de este problema radica en la prevención de inundaciones en redes de drenaje urbano. El segundo problema que se presenta compete a los mercados energéticos, lo cuales pueden verse como una competencia de Cournot. El objetivo es mostrar cómo resolver este problema desde la óptica de los juegos poblacionales y las dinámicas evolutivas.

Varios trabajos anteriores han contribuido a las nociones que presentamos en este artículo. Un resumen de los trabajos presentados hasta 2017 se presenta en [23]. Desde entonces, se han realizado aportes en términos de dinámicas distribuidas en tiempo continuo [3] y en tiempo discreto [13], así como la combinación con técnicas en sistemas híbridos [20]. Algunas aplicaciones en vehículos autónomos no tripulados [2] o combinando técnicas de control para aplicaciones en redes de agua [4, 19] han sido parte de los temas desarrollados últimamente. Recientemente, se han venido obteniendo resultados importantes en la relación de estas dinámicas poblacionales y los equilibrios generalizados de Nash [15, 16].

## 2. Juegos Poblacionales y Modelos Dinámicos de Pago

Considere un conjunto de  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  poblaciones, cada una compuesta por un número grande y constante de agentes que toman decisiones estratégicamente. A lo largo de este artículo, el conjunto de poblaciones se indexa por  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, N\}$ , el conjunto de estrategias disponibles para los

agentes de la población  $k \in \mathcal{P}$  se indexa por  $\mathcal{S}^k = \{1, 2, \dots, n^k\}$ , con  $n^k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ , y el total de agentes cada población  $k \in \mathcal{P}$  se modela como un continuo de masa  $m^k \in \mathbb{R}_{>0}$ . Así mismo, en cualquier instante de tiempo, la masa de agentes que selecciona la estrategia  $i \in \mathcal{S}^k$  en la población  $k \in \mathcal{P}$  está dada por  $x_i^k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Por lo tanto, los vectores  $\mathbf{x}^k = \text{col}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n^k}^k) \in \Delta^k$  y  $\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N) \in \Delta$  denotan las distribuciones estratégicas de la población  $k \in \mathcal{P}$  y de toda la sociedad, respectivamente. Aquí,  $\text{col}(\cdot)$  es la operación de concatenación en vector columna,  $n = \sum_{k \in \mathcal{P}} n^k$ ,  $\Delta^k = \{\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n^k} : \sum_{i \in \mathcal{S}^k} x_i^k = m^k\}$ , y  $\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \mathbf{x}^k \in \Delta^k, \forall k \in \mathcal{P}\}$ . En particular,  $\Delta^k$  es el conjunto de todas las posibles distribuciones estratégicas de la población  $k \in \mathcal{P}$ , mientras que  $\Delta$  es el conjunto de todas las posibles distribuciones estratégicas de toda la sociedad.

Bajo el esquema considerado, la distribución estratégica de cada población evoluciona en el tiempo siguiendo un proceso estocástico [24]. No obstante, dado que el número de agentes de cada población es grande, la evolución temporal de la distribución estratégica de la sociedad puede ser aproximada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (véase [21] o Sandholm [24, Capítulo 10]). Dicho sistema de ecuaciones diferenciales se denota como el modelo de dinámicas evolutivas (EDM, por sus siglas en ingles), y se define a continuación.

**Definición 1** *La evolución temporal de la distribución estratégica  $\mathbf{x}(t)$  se describe por un EDM de la forma*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \Delta,$$

donde  $\mathcal{V} : \Delta \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Lipschitz continua y  $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in \text{T}\Delta(\mathbf{x}(t))$ , para todo  $t \geq 0$  ( $\text{T}\Delta(\mathbf{x}(t))$  denota el cono tangente de  $\Delta$  en  $\mathbf{x}(t)$ ).

Con base en la Definición 1, el EDM puede verse como un sistema dinámico en tiempo continuo cuya entrada es el vector de pagos  $\mathbf{p}(t) = \text{col}(\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^N(t)) \in \mathbb{R}^n$ , con  $\mathbf{p}^k(t) = \text{col}(p_1^k(t), p_2^k(t), \dots, p_{n^k}^k(t)) \in \mathbb{R}^{n^k}$ , para todo  $k \in \mathcal{P}$ . Aquí,  $p_i^k(t) \in \mathbb{R}$  es el pago percibido por los agentes de la población  $k \in \mathcal{P}$  que seleccionan la estrategia  $i \in \mathcal{S}^k$  en el tiempo  $t$ . En general, el vector de pagos  $\mathbf{p}(t)$  es generado por un modelo de dinámicas de pago (PDM, por sus siglas en ingles) que se define de la siguiente forma [21].

**Definición 2** *El vector de pagos  $\mathbf{p}(t)$  es determinado por un PDM de la forma*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathcal{W}(\mathbf{q}(t), \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^d \\ \mathbf{p}(t) &= \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{x}(t)), \end{aligned}$$

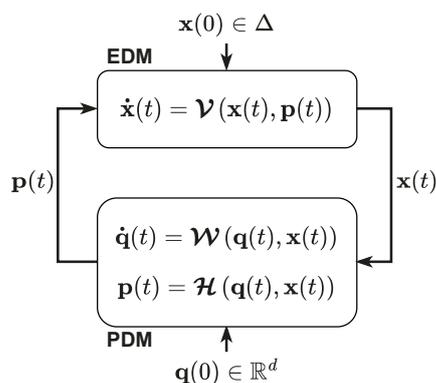


Figura 1: Sistema interconectado EDM-PDM.

donde  $\mathcal{W} : \mathbb{R}^d \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$  es Lipschitz continua, y  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable y Lipschitz continua.

Con base en la Definición 2, el PDM puede verse como un sistema dinámico en tiempo continuo cuya entrada es la distribución estratégica de la sociedad:  $\mathbf{x}(t) \in \Delta$ . De esta manera, el EDM y el PDM componen un sistema en lazo cerrado, llamado EDM-PDM y mostrado en la Figura 1.

De acuerdo con la Definición 1, la distribución estratégica de la sociedad ( $\mathbf{x}(t)$ ) pertenece al conjunto  $\Delta$  en todos los tiempos  $t \geq 0$ . Esta propiedad permite aplicar el esquema de juegos poblacionales en problemas de distribución dinámica de recursos, en los cuales ciertas cantidades de recursos  $m^1, m^2, \dots, m^N$ , deben ser distribuidas en una serie de alternativas (estrategias). Algunos ejemplos de aplicaciones incluyen la coordinación de carga de vehículos eléctricos [14], sistemas de agua [22], sistemas de respuesta a la demanda [26], entre otros. En este tipo de aplicaciones, típicamente se estudian las condiciones suficientes para garantizar la convergencia de  $\mathbf{x}(t)$  a un equilibrio de Nash (NE, por sus siglas en inglés). En palabras, un NE es una distribución estratégica  $\mathbf{x}^* \in \Delta$  tal que ningún agente puede mejorar su pago desviándose unilateralmente del equilibrio. Más formalmente, un NE se define de la siguiente manera.

**Definición 3** Un NE es una distribución estratégica  $\mathbf{x}^* \in \text{NE}$ , donde

$$\text{NE} = \left\{ \mathbf{x} \in \Delta : x_i^k > 0 \Rightarrow p_i^k = \max_{j \in \mathcal{S}^k} p_j^k, \forall k \in \mathcal{P} \right\}.$$

Por su parte, el PDM permite incluir dinámicas en la generación de los pagos  $p_i^k$ , para todo  $i \in \mathcal{S}^k$  y todo  $k \in \mathcal{P}$ . Como ilustraremos a continuación, debido a esto el PDM resulta útil para considerar las dinámicas del sistema a controlar durante el juego, o para incluir restricciones en los equilibrios

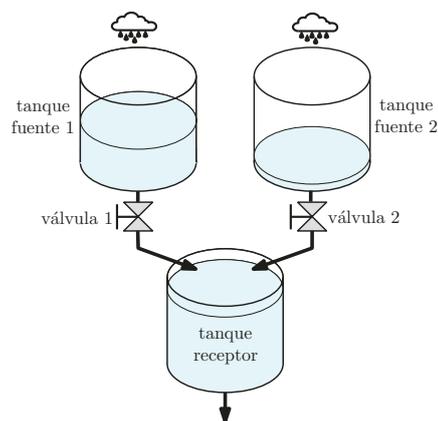


Figura 2: Sistema con tres tanques.

permitidos del juego.

### 3. Distribución de Agua en Sistemas Multi-Tanque

#### 3.1. El problema de los tanques

Considere un sistema que tiene tres tanques dispuestos en la configuración mostrada en la Figura 2. De estos tres tanques, dos son fuente y uno receptor. Cada tanque fuente recibe agua del exterior y la vierte al tanque receptor a través de una válvula cuya apertura puede graduarse. Además, el tanque receptor tiene un sumidero por el que evacúa, hacia el exterior del sistema, el agua que recibe de los tanques fuente. Finalmente, suponga que queremos que los tres tanques alberguen la misma cantidad de agua. Este sencillo problema que, de hecho, tiene aplicaciones relevantes en ingeniería, como es el caso de la prevención de inundaciones en redes de drenaje urbano (ver [19] para más detalles), nos servirá para explicar el uso de dinámicas poblacionales y modelos dinámicos de pago como mecanismo de control de sistemas.

#### 3.2. Aplicación de dinámicas poblacionales al problema de los tanques

Considere el escenario con  $N = 1$  (una única población de agentes), con  $m^1 = m = 1$  (masa unitaria, sin pérdida de generalidad), y con las tres estrategias que se describen en la Tabla 1 (esto es  $\mathcal{S}^1 = \mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ ). De esta forma, entre más agentes elijan la estrategia 1 ó 2, mayor será la apertura de la válvula 1 ó 2, respectivamente. Por otro lado, la estrategia 3 permite la posibilidad de operar con las válvulas 1 y 2 cerradas. Una vez definidas las estrategias del juego poblacional, se procede a determinar los pagos de dichas estrategias, teniendo en mente que el objetivo de control

Tabla 1: Estrategias para el problema de los tanques.

Estrategia	Descripción
1	incrementar la apertura de la válvula del tanque fuente 1 (válvula 1)
2	incrementar la apertura de la válvula del tanque fuente 2 (válvula 2)
3	no incrementar la apertura de ninguna de las válvulas

es que la cantidad de agua almacenada en cada tanque sea la misma. Una elección conveniente de las funciones de pago es que estas estén relacionadas con el volumen de agua alojado en cada tanque. Denotemos como  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  y  $q_3(t)$  el volumen de agua del tanque fuente 1, del tanque fuente 2 y del tanque receptor, respectivamente. Definamos los pagos así:  $f_i(t) = \beta q_i(t)$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Esto es, el pago de las estrategias 1 y 2 es directamente proporcional al volumen de agua de los tanques fuente 1 y 2, respectivamente. Además, el pago de la estrategia 3 es directamente proporcional al volumen de agua del tanque receptor. En todos los casos,  $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$  es la constante de proporcionalidad. Esta constante es, de hecho, un parámetro del controlador que estamos diseñando.

Las funciones de pago elegidas son coherentes con el objetivo de control buscado. Observe que, si por ejemplo la cantidad de agua alojada en el tanque 1 es mayor a las cantidades que albergan el tanque 2 y el tanque receptor, entonces será más rentable para los agentes elegir la estrategia 1, es decir, incrementar la apertura de la válvula 1. Esto hará que el agua del tanque 1 se desaloje y alcance el mismo nivel del agua de los otros dos tanques. La situación es similar con el tanque 2. Finalmente, si la mayor cantidad de agua está alojada en el tanque receptor, será más atractivo para los agentes elegir la estrategia 3. Esto provocará que las válvulas 1 y 2 se cierren, el tanque receptor no incremente más su volumen de agua y los tanques fuente 1 y 2 empiecen a alojar más líquido. Nuevamente, bajo estas condiciones, los tres tanques alcanzarán el mismo nivel de agua, cumpliendo así el objetivo de control buscado. La Figura 3 representa la situación descrita sobre cómo el problema de los tanques puede abordarse usando dinámicas poblacionales.

Dado que  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  y  $q_3(t)$  son los volúmenes de agua alojados en el tanque fuente 1, tanque fuente 2 y tanque receptor, respectivamente; y  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  son las proporciones de agentes que escogen cada una de las tres estrategias del juego, respectivamente; el problema de distribución dinámica de recursos en los tanques de agua puede ser abordado con el EDM-PDM caracterizado

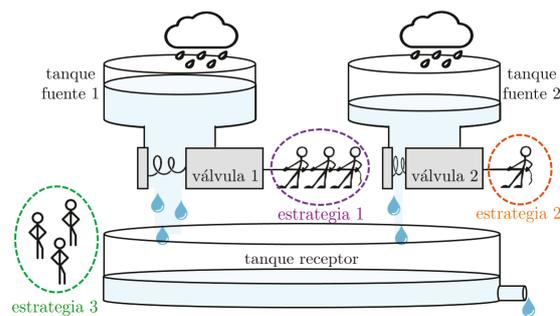


Figura 3: Analogía entre el problema de los tanques y un juego poblacional.

por<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \beta x_i(t) \left( q_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{S}} x_j(t) q_j(t) \right) \\ \dot{q}_1(t) &= r_1 - a_1 x_1(t) q_1(t) \\ \dot{q}_2(t) &= r_2 - a_2 x_2(t) q_2(t) \\ \dot{q}_3(t) &= a_1 x_1(t) q_1(t) + a_2 x_2(t) q_2(t) - a_3 q_3(t) \\ p_1(t) &= \beta q_1(t) \\ p_2(t) &= \beta q_2(t) \\ p_3(t) &= \beta q_3(t), \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ , con  $\mathbf{x}(0) \in \Delta$  y  $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^3$ ; y donde  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  son parámetros de los tanques; y  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  corresponden a la cantidad de lluvia que recibe el tanque fuente 1 y 2, respectivamente. En este caso  $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = \text{col}(\dot{x}_1^1(t), \dots, \dot{x}_n^N(t))$ , y es posible verificar que  $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in T\Delta(\mathbf{x}(t))$ , para todo  $t \geq 0$ . A manera de ilustración, la Figura 4 ilustra el esquema considerado para controlar el sistema de tres tanques usando dinámicas poblacionales y modelos dinámicos de pago.

### 3.3. Sobre el desempeño del sistema controlado

La estrategia de control basada en dinámicas poblacionales tiene dos grandes ventajas: es libre de modelo (note que para plantear el controlador descrito en la sub-sección anterior, en ningún momento se recurre a algún modelo que describa la dinámica del agua alojada en los tanques), y además, como se explica en [18], existe una teoría sólida que brinda garantías de que el objetivo de control se alcanza. Por cuestiones de espacio, no es posible abordar todos los detalles técnicos de la prueba de estabilidad del sistema controlado con dinámicas poblacionales<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Las dinámicas del sistema de tanques están basadas en el modelo de Muskingum [5].

<sup>2</sup>Una demostración formal de estabilidad para el sistema de los tanques estudiado en este artículo puede

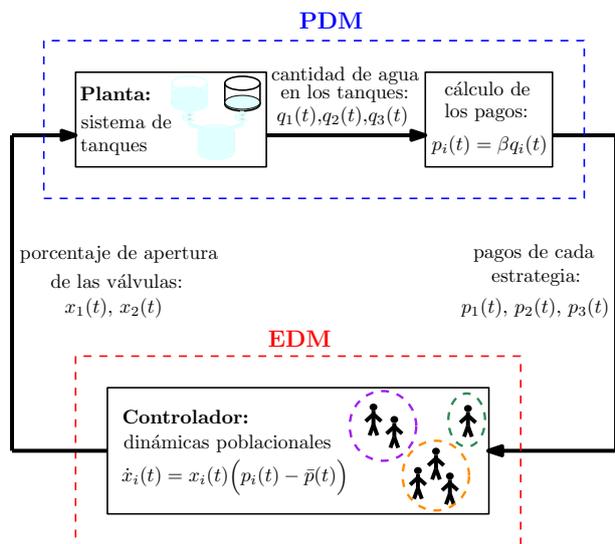


Figura 4: Sistema de tanques controlado con dinámicas poblacionales y modelo dinámico de pagos.

La Figura 5 muestra los resultados de simulaciones en las que se observa que, efectivamente, el agua en los tanques alcanza el mismo nivel cuando se aplica el controlador basado en dinámicas poblacionales que se describe en la sub-sección anterior. Para las simulaciones, se empleó  $\beta = 0,01$  como constante de proporcionalidad de las funciones de pago, y se emplearon los parámetros  $a_1 = a_2 = 0,1 \text{ s}^{-1}$ ,  $a_3 = 0,05 \text{ s}^{-1}$ ,  $r_1 = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $r_2 = 0,25 \text{ m}^3/\text{s}$ . En las simulaciones se observa que el sistema de los tres tanques controlado usando dinámicas poblacionales se comporta siguiendo la lógica empleada en la etapa de diseño. Por ejemplo, observe en la Figura 5.a, que desde el minuto 0 hasta el minuto 1, el tanque fuente 1 es el que aloja la mayor cantidad de agua. Esto hace que la función de pago asociada a abrir la válvula 1 sea alta, y por lo tanto el porcentaje de apertura de dicha válvula aumente durante todo el primer minuto de la simulación tal y como se muestra en la Figura 5.b. Asimismo, desde el minuto 1 hasta el minuto 2, es el tanque receptor el que está más cargado (ver Figura 5.a), por lo tanto es más rentable para los jugadores no abrir ninguna de las válvulas, y, como lo muestra la Figura 5.b., el porcentaje de apertura de las válvulas 1 y 2 decrece durante este segundo minuto de la simulación. El comportamiento descrito hace que los tanques alcancen el mismo volumen de agua, es decir, se logra el objetivo de control.

encontrarse en Obando et al. [19].

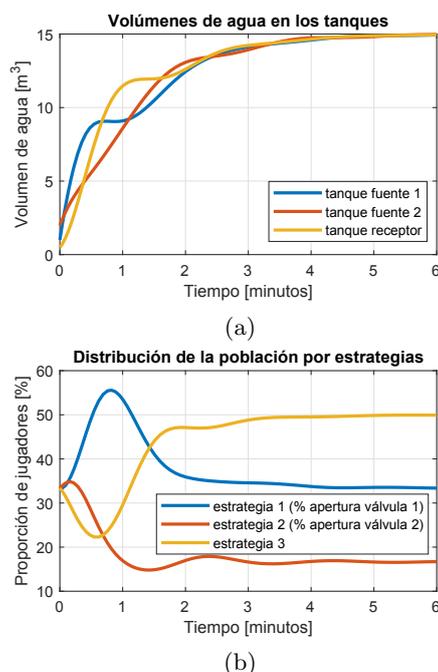


Figura 5: Simulación del sistema de tanques controlado con dinámicas poblacionales. (a) Volúmenes de agua en cada tanque. (b) Distribución de la población entre las estrategias del juego.

#### 4. Aplicación en Mercados Energéticos

Considere ahora un juego de mercado energético<sup>3</sup> donde  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  jugadores (sistemas de manejo de energía) compiten para comprar energía a lo largo de un horizonte de  $T \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  instantes de tiempo. En particular, empleamos  $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, N\}$  para denotar el conjunto de jugadores,  $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$  para denotar el horizonte de tiempo a considerar,  $\mathcal{S}^k \subseteq \mathcal{T}$  para representar el conjunto de instantes de tiempo en los que el jugador  $k \in \mathcal{P}$  compite, y  $m^k$  para denotar el total de energía que el jugador  $k$  requiere comprar a lo largo del horizonte. Además, se asume que  $|\mathcal{S}^k| = n^k \geq 2$ , para todo  $k \in \mathcal{P}$ , que  $\mathcal{T} = \cup_{k \in \mathcal{P}} \mathcal{S}^k$  (lo cual implica que  $n = \sum_{k \in \mathcal{P}} n^k \geq T$ ), y que para cada instante de tiempo  $i \in \mathcal{T}$  hay un límite superior sobre la energía disponible que se denota  $e_i \in \mathbb{R}_{>0}$ . Finalmente, se considera que cada sistema de manejo de energía tiene una función de utilidad  $\varphi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que busca maximizar (se asume que  $\varphi^k(\cdot)$  es concava y doblemente continuamente diferenciable para todo  $k \in \mathcal{P}$ ). En general, el valor de dicha función depende de las decisiones de los demás jugadores (por ejemplo, a través del

<sup>3</sup>Un juego de mercado energético puede verse como una competencia de Cournot, y varias aplicaciones de control pueden modelarse bajo dicha abstracción [8, 27, 28].

precio de la energía si este último incrementa con la demanda).

Para modelar el mercado energético descrito anteriormente como un juego poblacional, se propone la siguiente analogía. Cada jugador (sistema de manejo de energía) se modela como una población con masa  $m^k$  y conjunto de estrategias  $\mathcal{S}^k$ . De esta manera,  $x_i^k$  representa la energía a ser comprada por el jugador  $k \in \mathcal{P}$  en el instante de tiempo  $i \in \mathcal{S}^k \subseteq \mathcal{T}$ . Bajo esta analogía, cualquier distribución estratégica  $\mathbf{x} \in \Delta$  garantiza que todos los jugadores (poblaciones) compran exactamente la energía requerida. Por otro lado, las restricciones de energía disponible se pueden modelar como restricciones de la forma  $\sum_{k \in \mathcal{P}_i} x_i^k \leq e_i$ , para todo  $i \in \mathcal{T}$ , donde  $\mathcal{P}_i = \{k \in \mathcal{P} : i \in \mathcal{S}^k\}$  corresponde al conjunto de jugadores que compiten en el instante de tiempo  $i$ . Con esto en mente, la región factible del problema será

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbf{x} \in \Delta : \sum_{k \in \mathcal{P}_i} x_i^k - e_i \leq 0, \forall i \in \mathcal{T} \right\},$$

y se asume que  $\mathcal{X}$  es un conjunto no vacío.

El objetivo es entonces diseñar un PDM, de tal manera que se pueda llevar a la sociedad de agentes a un NE que cumpla las restricciones del problema (esto se conoce como un equilibrio generalizado de Nash). Es decir, llevar a la sociedad a una distribución estratégica  $\mathbf{x}^* \in \text{NE} \cap \mathcal{X}$  (bajo las suposiciones del problema se cumple que  $\text{NE} \cap \mathcal{X}$  es un conjunto no vacío y compacto).

Para estudiar el problema, consideramos entonces un EDM caracterizado por las dinámicas Smith [25], las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(t) &= \max(p_j^k(t) - p_i^k(t), 0) \\ \dot{x}_i^k(t) &= \sum_{j \in \mathcal{S}^k} x_j(t) \rho_{ji}(t) - x_i^k(t) \sum_{j \in \mathcal{S}^k} \rho_{ij}(t), \end{aligned}$$

para todo  $i, j \in \mathcal{S}^k$  y todo  $k \in \mathcal{P}$ , y con  $\mathbf{x}(0) \in \Delta$ . En este caso  $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = \text{col}(\dot{x}_1^1(t), \dots, \dot{x}_n^N(t))$ , y es posible verificar que  $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in \text{T}\Delta(\mathbf{x}(t))$ , para todo  $t \geq 0$ .

Por otro lado, para el PDM se proponen las dinámicas dadas por

$$\begin{aligned} g_j(t) &= \sum_{k \in \mathcal{P}_j} x_j^k(t) - e_j \\ \dot{q}_j(t) &= \max(g_j(t), 0) - q_j(t) \max(-g_j(t), 0) \\ p_i^k(t) &= \frac{\partial \varphi^k(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i^k} - q_i(t), \end{aligned}$$

para todo  $j \in \mathcal{T}$ , todo  $i \in \mathcal{S}^k$  y todo  $k \in \mathcal{P}$ , y con  $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^T$ . La intuición detrás del PDM propues-

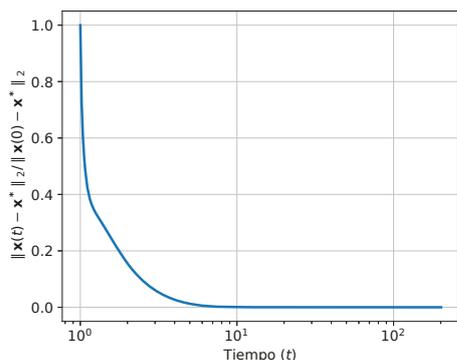
to está basada en ideas de optimización primal-dual (las variables  $q_j$  se interpretan como los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones  $g_j \leq 0$ ). En particular, note que  $\dot{q}_j(t) = 0$  si y sólo si  $g_j(t) \leq 0$  y  $q_j(t)g_j(t) = 0$ . Dichos requisitos corresponden a las condiciones de factibilidad del problema primal y de holgura complementaria, respectivamente. Además, es posible verificar que las dinámicas propuestas garantizan que  $q_j(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$  (condición de no negatividad de los multiplicadores de Lagrange).

Bajo las suposiciones del mercado energético, el EDM-PDM considerado garantiza la estabilidad asintótica del conjunto  $\text{NE} \cap \mathcal{X}$ . Este resultado está respaldado formalmente por Martínez-Piazuelo, Quijano y Ocampo-Martínez [16, Teorema 3].

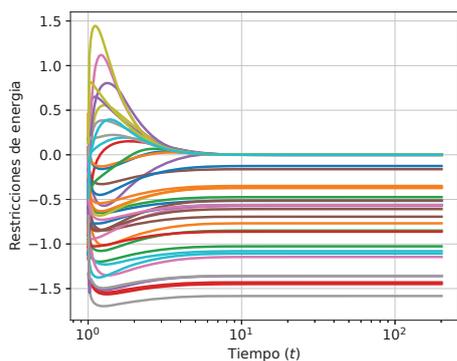
A manera de ilustración, considere el escenario con  $N = 20$ ,  $T = 40$ ,  $\mathcal{S}^k$  generado aleatoriamente,  $m^k \sim U[3, 4]$ , y  $e_i \sim U[2, 2.5]$ , para todo  $k \in \mathcal{P}$  y todo  $i \in \mathcal{T}$  (garantizando las suposiciones del problema). Además, para las funciones de utilidad se emplean funciones de la forma considerada en Martínez-Piazuelo, Quijano y Ocampo-Martínez [16, Sección 6]. Por referencia, la instancia considerada en la simulación resulta en un espacio dimensional con  $n = 403$ . En la Figura 6 se presentan los resultados de simulación para el escenario considerado. Efectivamente, se verifica que la sociedad converge asintóticamente a un NE en el cual se satisfacen todas las restricciones de energía del problema.

## 5. Conclusiones

Mediante dos casos de estudio bien conocidos y referenciados en la literatura, este trabajo ha mostrado cómo dos disciplinas científicas convergen de cara a resolver problemas de ingeniería de forma alternativa a como tradicionalmente se reportan sus soluciones. Es así como mediante el uso de la teoría de juegos evolutiva se desarrollan modelos y estrategias de control para sistemas de gran escala, en los que se determinan soluciones adecuadas de acuerdo con ciertas políticas de gestión y control establecidas y teniendo en cuenta las restricciones provenientes de las variables de los modelos y/o de la operación de los sistemas. Asimismo, este trabajo ofrece un completo conjunto de referencias en las que los autores han desarrollado y presentado con el rigor matemático correspondiente los resultados parcialmente usados aquí para la solución de los problemas de control descritos.



(a)



(b)

Figura 6: Simulación del mercado energético considerado. (a) Trayectoria del índice de desempeño  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|_2 / \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\|_2$ , donde  $\mathbf{x}^* \in \text{NE} \cap \mathcal{X}$ . (b) Trayectorias de las restricciones  $g_i(t) = \sum_{k \in \mathcal{P}_i} x_i^k(t) - e_i$ , para todo  $i \in \mathcal{T}$ .

**Agradecimientos**

Los autores agradecen al proyecto PID2020-115905RB-C21 (L-BEST) financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033. Juan Martínez-Piazuelo agradece a la Universitat Politècnica de Catalunya y al Banco Santander por el soporte financiero de su beca predoctoral FPI-UPC.

**English summary**

**Dynamic Resource Allocation via Population Games and Payoff Dynamics Models**

**Abstract**

This paper focuses on highlighting the vast usefulness of game theory, particularly that based on the evolutionary dynamic branch, within the modeling and control of complex and large-scale dynamic systems. Specifically, and through clear examples of real application, the use of population dynam-

ics for modeling cyber-physical systems is motivated, as well as dynamic payment models to complement a closed-loop control system with restrictions (physical and operational), whose objectives are aligned with the dynamic resource allocation and the reachment of generalized Nash equilibria.

**Keywords:** evolutionary game theory, dynamic resource allocation, Nash equilibria, payoff dynamic models

**Referencias**

- [1] Bacci, G., Lasaulce, S., Saad, W. y Sanguinetti, L. (2016), “Game theory for networks: A tutorial on game-theoretic tools for emerging signal processing applications”, *IEEE Signal Processing Magazine* **33**(1), 94–119.
- [2] Barreiro-Gomez, J., Mas, I., Giribet, J., Moreno, P., Ocampo-Martinez, C., Sanchez-Pena, R. y Quijano, N. (2021), “Distributed data-driven UAV-formation control via evolutionary games: Experimental results”, *Journal of The Franklin Institute* **358**, 5334–5352.
- [3] Barreiro-Gomez, J., Obando, G. y Quijano, N. (2017), “Distributed population dynamics: Optimization and control applications”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* **47**(2), 304–314.
- [4] Barreiro-Gomez, J., Ocampo-Martinez, C. y Quijano, N. (2017), “Dynamical tuning for multi-objective model predictive control based on population games”, *ISA Transactions* **69**, 175–186.
- [5] Chow, V. T. (1959), “Open-channel hydraulics. Caldwell”.
- [6] Gao, B. y Pavel, L. (2021), “On passivity, reinforcement learning, and higher order learning in multiagent finite games”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **66**(1), 121–136.
- [7] Genis Mendoza, F., Konstantopoulos, G. y Bauso, D. (2022), “Online pricing for demand-side management in a low-voltage resistive micro-grid via a stackelberg game with incentive strategies”, *IET Smart Grid* **5**(2), 76–89.
- [8] Grammatico, S. (2017), “Dynamic control of agents playing aggregative games with coupling constraints”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(9), 4537–4548.
- [9] Grammatico, S., Parise, F., Colombino, M. y Lygeros, J. (2016), “Decentralized convergence to nash equilibria in constrained determi-

- nistic mean field control”, *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(11), 3315–3329.
- [10] Jaleel, H. y Shamma, J. S. (2020), “Distributed optimization for robot networks: From real-time convex optimization to game-theoretic self-organization”, *Proceedings of the IEEE* **108**(11), 1953–1967.
- [11] Lee, W., Liu, S., Tembine, H., Li, W. y Osher, S. (2021), “Controlling propagation of epidemics via mean-field control”, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **81**(1), 190–207.
- [12] Lu, Z., Cai, F., Liu, J., Yang, J., Zhang, S. y Wu, S. (2022), “Evolution of water resource allocation in the river basin between administrators and managers”, *Hydrology Research* **53**(5), 716–732.
- [13] Martínez-Piauelo, J., Díaz-García, G., Quijano, N. y Giraldo, L. F. (2022), “Discrete-time distributed population dynamics for optimization and control”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* pp. 1–11.
- [14] Martínez-Piauelo, J., Quijano, N. y Ocampo-Martínez, C. (2021), “Decentralized charging coordination of electric vehicles under feeder capacity constraints”, *IEEE Transactions on Control of Network Systems (Early Access)*.
- [15] Martínez-Piauelo, J., Quijano, N. y Ocampo-Martínez, C. (2022a), “Nash equilibrium seeking in full-potential population games under capacity and migration constraints”, *Automatica* **141**, 110285.
- [16] Martínez-Piauelo, J., Quijano, N. y Ocampo-Martínez, C. (2022b), “A payoff dynamics model for generalized Nash equilibrium seeking in population games”, *Automatica* **140**, 110227.
- [17] Maynard-Smith, J. y Price, G. R. (1973), “The logic of animal conflict”, *Nature* **246**(5427), 15–18.
- [18] Obando, G., Poveda, J. I. y Quijano, N. (2016), “Replicator dynamics under perturbations and time delays”, *Mathematics of Control, Signals, and Systems* **28**(3), 1–32.
- [19] Obando, G., Quijano, N. y Ocampo-Martínez, C. (2022), “Decentralized control for urban drainage systems using replicator dynamics”, *IEEE Access* **10**, 56740–56762.
- [20] Ochoa, D. E., Poveda, J. I., Uribe, C. A. y Quijano, N. (2021), “Robust optimization over networks using distributed restarting of accelerated dynamics”, *IEEE Control Systems Letters* **5**(1), 301–306.
- [21] Park, S., Martins, N. C. y Shamma, J. S. (2019), “From population games to payoff dynamics models: A passivity-based approach”, *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* pp. 6584–6601.
- [22] Pashaie, A., Pavel, L. y Damaren, C. J. (2017), “A population game approach for dynamic resource allocation problems”, *International Journal of Control* **90**(9), 1957–1972.
- [23] Quijano, N., Ocampo-Martínez, C., Barreiro-Gómez, J., Obando, G., Pantoja, A. y Mojica-Nava, E. (2017), “The role of population games and evolutionary dynamics in distributed control systems”, *IEEE Control Systems Magazine* **37**(1), 70–97.
- [24] Sandholm, W. H. (2010), “Population games and evolutionary dynamics”.
- [25] Smith, M. J. (1984), “The stability of a dynamic model of traffic assignment—an application of a method of lyapunov”, *Transportation Science* **18**(3), 245–252.
- [26] Srikantha, P. y Kundur, D. (2017), “Resilient distributed real-time demand response via population games”, *IEEE Transactions on Smart Grid* **8**(6), 2532–2543.
- [27] Wang, Z., Liu, F., Ma, Z., Chen, Y., Jia, M., Wei, W. y Wu, Q. (2021), “Distributed generalized Nash equilibrium seeking for energy sharing games in prosumers”, *IEEE Transactions on Power Systems* **36**(5), 3973–3986.
- [28] Yi, P. y Pavel, L. (2019), “An operator splitting approach for distributed generalized Nash equilibria computation”, *Automatica* **102**, 111–121.



© 2022 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution CC-BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>).