

Comparación de técnicas de control LQR y Borroso en un Sistema Bola y Barra

Manuel Barraza

ETS Ingenieros Industriales, Madrid, Centro de Automática y Robótica (UPM-CSIC),
m.barraza@alumnos.upm.es

Fernando Matía

ETS Ingenieros Industriales, Madrid, Centro de Automática y Robótica (UPM-CSIC),
fernando.matia@upm.es

Basil Mohammed Al-Hadithi

ETS Diseño Industrial, Madrid, Centro de Automática y Robótica (UPM-CSIC),
basil.alhadithi@upm.es

Resumen

En este trabajo se utilizaron dos controladores, un controlador moderno óptimo LQR con observador de estados y un controlador inteligente Borroso Proporcional Derivativo (FPD), aplicados a un sistema bola y barra, con el propósito de posicionar la bola en la barra. Los controladores han sido diseñados en el entorno MATLAB-Simulink conectados en tiempo real con un Arduino. Para la comparación se utilizó el índice de desempeño ISE (integral del error al cuadrado). Se puede decir que con diferentes técnicas usadas, estos controladores tienen el mismo desempeño.

Palabras clave: Borroso FPD, Sistema Bola y Barra, LQR, Observador de Estados.

1. Introducción

El sistema bola y barra [13], así como otros sistemas, surgen en esa búsqueda de aprender temas de control, este sistema se encuentra en los subactuados, ya que cuenta con dos grados de libertad y un solo actuador. El proceso principal es balancear una bola de acero sobre una barra y llevarla a una posición deseada, balancear la bola de acuerdo a ciertos criterios de control o que la bola represente el comportamiento de un sistema dado.

Se implementaron dos controladores, uno óptimo que requiere el modelo del sistema y un controlador borroso que no requiere el modelo del sistema.

El controlador óptimo usado fue el LQR con observador de estados [3, 11, 12]. En el diseño se estima un estado virtual, para esto se utiliza un observador de estado, este estado se utiliza en el controlador para anular los efectos de las perturbaciones e incertidumbre del sistema, cuando se diseña el controlador LQR, se utiliza el modelo más simple, lo que evita un modelado preciso del sistema. Cualquier término no lineal y parámetro

desconocido se puede considerar como perturbación interna o externa, por eso se considera un modelo linealizado del sistema bola y barra.

El controlador borroso FPD [1, 5, 6, 7, 9] es una alternativa atractiva a los controladores clásicos o modernos existentes, para el diseño de sistemas de control no lineales, ya que proporciona un método heurístico mediante reglas Si-Entonces que se asemeja a la inteligencia humana. En el control borroso nos centramos en obtener información y comprensión intuitiva de como controlar mejor el proceso en lugar de obtener el modelo del sistema.

Los controladores que se diseñaron, se implementaron en Simulink y se trabajó con la librería *Simulink Support Package for Arduino Hardware*, esto permitió realizar pruebas en tiempo real. Con el fin de validar los controladores LQR con observador y borroso, el desempeño de los controladores se evaluará con el índice de desempeño ISE, criterio de la integral del error al cuadrado.

Este trabajo se centrará en el diseño e implementación. La organización del trabajo es la siguiente, en la sección 2 se describe el sistema y se obtiene el modelo matemático, en la sección 3 se diseña el controlador LQR con observador de estado, en la sección 4 se diseña el controlador borroso. Se obtienen los resultados en la sección 5 y finalmente, se presentan algunas conclusiones.

2. Sistema Bola y Barra

Se diseñó un sistema bola y barra, para realizar pruebas de diferentes controladores, como lo muestra la siguiente figura 1.

2.1. Descripción del sistema

La barra en el centro está conectada a una bisagra de un grado de libertad, este giro de la barra será el ángulo α . El servomotor está conectado a la

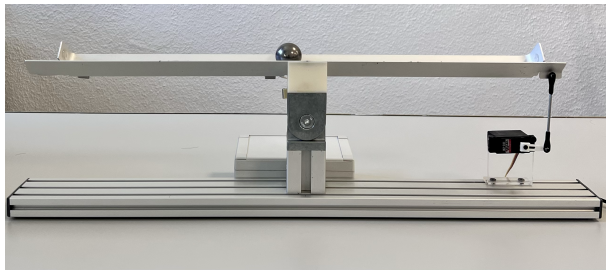


Figura 1: Vista frontal Bola y Barra.

barra a través de un enlace con varilla y rótula, el cambio de ángulo del servomotor es θ , el sensor de presión resistivo que mide la posición de la bola x_b está pegado a la barra.

2.2. Diagrama de cuerpo libre

Se coloca una bola sobre una barra, ver figura 2, la bola rueda a lo largo de la barra. Una bisagra está unida en el centro de la barra. A medida que el brazo del servomotor gira en un ángulo θ , el ángulo de la barra α aumenta o disminuye. Este es un sistema sub-actuado, cuando se cambia el ángulo de la posición horizontal, la gravedad hace que la bola ruede a lo largo de la barra. Se diseñarán dos controladores a este sistema para manipular la posición de la bola.

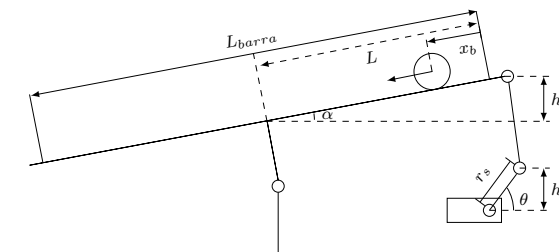


Figura 2: Diagrama cuerpo libre Bola y Barra.

2.3. Modelo matemático

La segunda derivada del ángulo de entrada α afecta en realidad a la segunda derivada de x_b . Sin embargo, ignoraremos esta contribución. La ecuación lagrangiana [2] del movimiento de la bola viene dada entonces por lo siguiente:

$$\left(\frac{J}{r_b^2} + m\right) \ddot{x}_b + mgsin(\alpha) - mx_b\dot{\alpha}^2 = 0 \quad (1)$$

el ángulo de la barra α es muy pequeño, una aproximación lineal a esta condición se convierte en, $sin(\alpha) \approx \alpha$ y $\dot{\alpha} = 0$. Entonces:

$$\left(\frac{J}{r_b^2} + m\right) \ddot{x}_b = -mga \quad (2)$$

Por lo tanto, la función de transferencia será:

$$\frac{X_b(s)}{\alpha(s)} = -\frac{mg}{\left(\frac{J}{r_b^2} + m\right) s^2} \left[\frac{m}{rad}\right] \quad (3)$$

La función de transferencia del servomotor se puede aproximar como una función de primer orden en la forma que se indica a continuación:

$$\frac{\Theta(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m}{\tau s + 1} \quad (4)$$

Cuando el motor se alimenta con 4.8v la velocidad es de 0.19sec/60°, $K_m = 1$ y $\tau = 0.19/5$ reemplazando en (4), se obtiene:

$$\frac{\Theta(s)}{V_m(s)} = \frac{1}{0.038s + 1} \quad (5)$$

El polo del servomotor está en $s = -26.31$, su dinámica es más rápida que los polos en el origen del sistema, por lo tanto, este polo se puede desestimar.

Finalmente, la relación entre θ y α se puede aproximar como lineal mediante la siguiente ecuación.

$$\alpha = \frac{r_s}{L} \theta \quad (6)$$

Expresando como función de transferencia:

$$\frac{\Theta(s)}{\alpha(s)} = \frac{L}{r_s} \quad (7)$$

Los valores utilizados en el modelo matemático se ven en la tabla 1.

Tabla 1: Especificaciones Bola y Barra

Nombre especificación	Valor	Unidad
Masa bola (m)	0.111	Kg
Radio bola (r_b)	0.015	m
Brazo servomotor (r_s)	0.023	m
Longitud barra (L_{barra})	0.5	m
Longitud barra bisagra (L)	0.25	m
Momento de inercia (J)	9.99e-6	Kgm^2
Ángulo de movimiento barra (α)	± 0.096	rad
Ángulo de movimiento servomotor (θ)	$\pm \pi/3$	rad

3. Diseño de controlador LQR con observador de estados

Para el diseño del controlador es necesario obtener el modelo de sistema, este debe estar en ecuaciones de estado de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{8}$$

3.1. Controlador LQR

El controlador LQR se diseñará para un sistema linealizado dado en la ecuación (8). La ley de control LQR es en esencia una acción de control proporcional, que se debe determinar calculando los componentes de la matriz [8].

$$u = -Kx(t) \tag{9}$$

$$K = R^{-1}B^T P \tag{10}$$

Esto se calcula minimizando la función de coste J .

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{11}$$

En la ecuación (10) P , es resuelta por la ecuación de Ricatti.

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P \tag{12}$$

Una forma de obtener Q es $Q = C^T C$, y R debe ser definida positiva. La ecuación (12) solo se puede resolver si el sistema es controlable y observable, por lo tanto, antes se debe comprobar que el sistema cumpla con estas dos condiciones, se sustituye esta matriz P en la ecuación (10), La matriz K resultante es una matriz óptima.

3.2. Observador de estados

Se trabajará con un observador de estados en lazo cerrado, la dinámica del observador:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \tag{13}$$

Para determinar el término de corrección L se tiene que encontrar los polos del sistema controlado, esto se determina calculando los valores propios de $A - BK$, y como criterio el estimador sea unas 4 a 10 veces más rápido que el polo más lento. luego se calcula una matriz de ganancia de realimentación de estado L que logra las ubicaciones deseadas de los polos de lazo cerrado P [4].

Para minimizar el error en estado estacionario se agregará un pré-compensador estático:

$$K_0 = -(C(I - (A + BK)^{-1})B)^{-1} \tag{14}$$

al agregar un observador al controlador LQR se puede determinar la señal de control, quedando de la siguiente manera:

$$u = ref \cdot K_0 - K\hat{x} \tag{15}$$

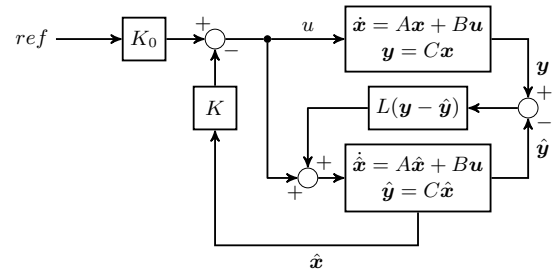


Figura 3: Controlador LQR con observador de estados.

4. Diseño de controlador Borroso

Se utilizará un controlador borroso tipo Mamdani FPD normalizado, tendrá dos entradas, una será el error $e(t)$ que es la diferencia entre la referencia y la posición de la bola, y el cambio en el error $ce(t)$. La salida será la acción de control u . Para las entradas se utilizaron funciones de pertenencia triangulares, ver figura 4. Para la salida del controlador se utilizaron siete funciones de pertenencia tipo singleton. El universo de discurso del error es $e=[-1,1]$ y la derivada del error es $ce=[-1,1]$, siendo la salida $u = \{-1, -0.8, -0.5, 0, 0.5, 0.8, 1\}$ esto se puede ver en las figuras 4 y 5.

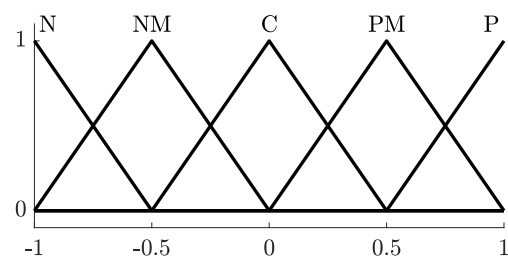


Figura 4: Funciones de pertenencia triangulares de entrada e y ce.

4.1. Método de inferencia borrosa

Se entiende por inferencia borrosa la interpretación de las reglas del tipo SI-ENTONCES con el fin de obtener las conclusiones de las variables lingüísticas de salida [10]. Como operadores lógicos se utilizaron, para Y el producto, para la im-

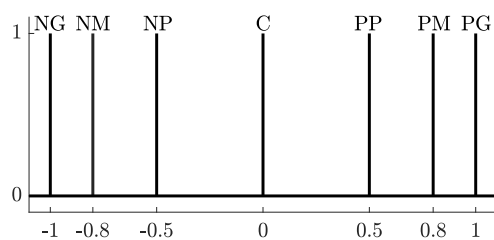


Figura 5: Funciones de pertenencia singleton de salida.

plicación se usará el producto y en la agregación se usa la suma.

4.2. Base de reglas

La base de reglas del controlador se puede representar en una tabla ver tabla 2. Las etiquetas lingüísticas son: N=Negativo, NP=Negativo Pequeño, NM=Negativo Medio, NG=Negativo Grande, C=Cero, P=Positivo, PP=Positivo Pequeño, PM= Positivo Medio, PG=Positivo Grande.

Tabla 2: base de reglas en forma de tabla.

	e	N	NM	C	PM	P
ce						
N		NG	NG	NM	NP	C
NM		NG	NM	NP	C	PP
C		NM	NP	C	PP	PM
PM		NP	C	PP	PM	PG
P		C	PP	PM	PG	PG

4.3. Desborrosificación

Se procede al cálculo del valor numérico de la conclusión. Para ello existen varios métodos, el método de desborrosificación que se utilizara será el centro de gravedad.

4.4. Constantes del controlador borroso

Las constantes multiplican al valor de entrada o salida. Se utilizarán tres constantes, dos en la entrada y una en la salida. La constante que multiplica al error será k_p y está dividida por el error máximo (e_{max}) del sistema. Para el cambio error será k_d , la cual está dividida por cambio en el error máximo (ce_{max}). Se divide por los valores máximos conocidos en la entrada, porque el universo de discurso de entrada es unitario. En la salida el valor máximo que va al actuador

es (u_{max}). Esto se hace para no realizar cambios constantemente en el universo de discurso y así facilitar la sintonía de parámetros del controlador.

Tabla 3: Constantes del controlador.

variable	constante
e	$\frac{k_p}{e_{max}}$
ce	$\frac{k_d}{ce_{max}}$
u	u_{max}

5. Resultados obtenidos

Los resultados se obtuvieron desde Simulink aplicando las técnicas de control mencionadas anteriormente, esto se validó en el sistema bola y barra real.

5.1. Controlador LQR con observador de estados

El modelo de la bola y barra se obtiene de la subsección 2.3.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.644 \end{bmatrix} \theta$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix}$$

La matriz del controlador K se calcula mediante las ecuaciones (10) y (12), utilizando las matrices del sistema A y B , y las matrices de ponderación definidas $Q = [1 \ 0; 0 \ 0]$ y $R = 0.001$, se obtiene:

$$K = [31.62 \quad 9.91]$$

Para el término de corrección del observador L , se obtiene como se mencionó en la subsección 3.2.

$$polos = [-3.19 + i3.19 \quad -3.19 - i3.19]$$

Como criterio se usó el de 10 veces más rápido quedando en -32, se usaron como prueba dos ubicaciones de polos deseados $P = [-2 \ -32]$ y $P = [-4 \ -32]$. Con esto, se calcula una matriz de ganancias de realimentación de estado dando como resultado:

$$L_1 = [34 \quad 64]^T$$

$$L_2 = [36 \quad 128]^T$$

El pré-compensador estático, se calcula usando la ecuación (14) quedando $K_0 = 31.62$.

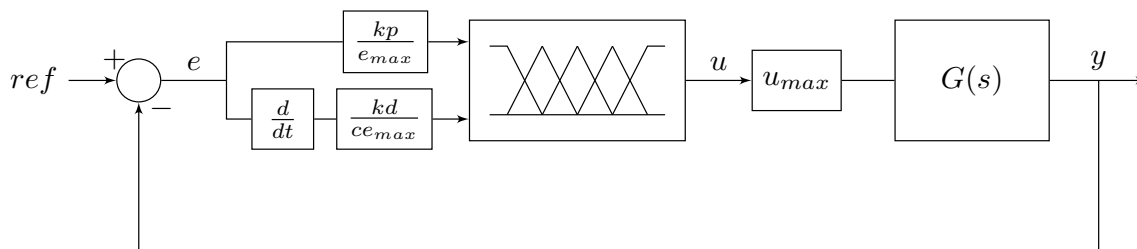


Figura 6: Controlador borroso.

Se realizaron dos pruebas con los valores calculados para el controlador, ver figura 3, en una prueba se usó en $L = L_1$ y en la otra $L = L_2$.

El resultado del controlador LQR con observador de estados se puede ver en la figura 7. El cambio en la referencia está marcado en color negro, el controlador con término de corrección $L_1 = [34 \ 64]^T$ está marcado en color marrón y el controlador con término de corrección $L_2 = [34 \ 64]^T$ en color azul.

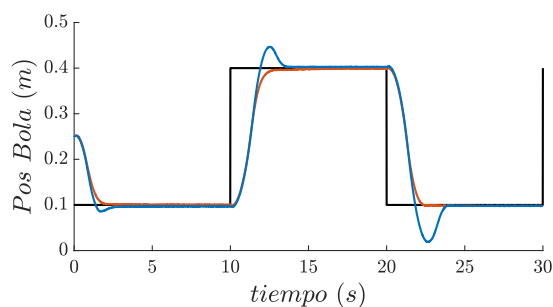


Figura 7: Posición Bola.

5.2. Controlador Borroso

Se aplicó el controlador borroso proporcional derivativo visto en la subsección 4.4. El error máximo que puede obtener del sistema, es la diferencia entre la referencia y la posición de la bola, ver tabla 1. El largo de la barra es 0.5 m entonces $e_{max} = 0.5$. Se realizó una prueba de escalón $\theta = 60^\circ$ ángulo máximo del servomotor, donde se determinó $ce_{max} = 0.43$. La salida es el ángulo máximo del actuador será $u_{max} = 60^\circ$, k_p y k_d se determinaron heurísticamente dando $k_p=2.75$ y $k_{d1}=19$ para disminuir el tiempo de pico se utilizó $k_{d2}=13$, reemplazando en la tabla 3, se obtiene las constantes ver tabla 4, finalmente estos valores se pasan al controlador ver figura 6.

El resultado de pasar estas constantes al controlador, se puede ver en la figura 8, el cambio en la referencia está marcado en color negro, cuando se

Tabla 4: Constantes del controlador.

variable	constantes 1	constantes 2
e	5.5	5.5
ce	44	30
u	60	60

utilizaron las constantes 1, la posición de la bola se graficó en color marrón y cuando se utilizaron las constantes 2 la posición de la bola se graficó en color azul.

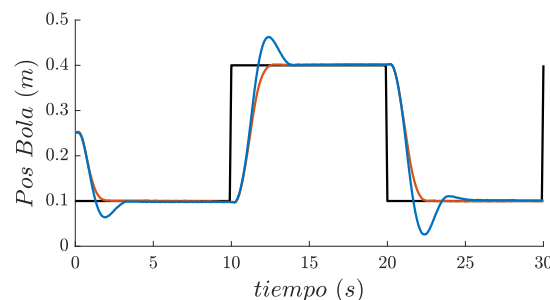


Figura 8: Posición Bola.

5.3. Comparación de resultados

Para comparar los resultados de los controladores, se utilizó el índice de desempeño ISE (criterio de la integral del error al cuadrado). Se usa con frecuencia cuando se implementa entradas determinísticas tipo escalón. De acuerdo a las gráficas, la referencia cambia de 0.1 m a 0.4 m. Por este motivo, se dividirá en dos tramos, el primer tramo de [0-10] segundos, y el segundo tramo de [10-20] segundos, ver tabla 5.

Tabla 5: índice de desempeño ISE.

controlador	ISE tramo 1	ISE tramo 2
LQR L_1	0.0169	0.0916
LQR L_2	0.0159	0.0944
Borroso kd_1	0.0162	0.0926
Borroso kd_2	0.0165	0.0914

6. Conclusiones

En este trabajo se mostraron los resultados obtenidos, demostrando que los dos controladores estabilizan el sistema de forma eficiente. En la tabla 5 se separó por tramos el índice de desempeño ISE, las diferencias son mínimas, se puede decir que tienen el mismo desempeño con diferentes técnicas de control usadas.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i “Asistencia Personal Cognitiva para Entornos Sociales (ACOGES)”, referencia PID2020-113096RB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

English summary

Comparison of LQR and Fuzzy Control Techniques in a Ball and Beam System

Abstract

In this work, two controllers; an optimal LQR controller with a state observer and a Fuzzy Proportional Derivative (FPD) intelligent controller, were applied to a ball and beam system to position the ball on the beam. The controllers have been designed in the MATLAB-Simulink environment, connected in real time with an Arduino. We used the ISE (integral squared error) performance index for comparison. It can be said that the both proposed techniques have the same performance.

Keywords: Fuzzy FPD, Ball and Beam System, LQR, State Observer.

Referencias

- [1] Amjad, M., Kashif, M., Abdullah, S., and Shareef, Z. (2010). Fuzzy logic control of ball and beam system. In *2010 2nd International Conference on Education Technology and Computer*, volume 3, pages V3–489. IEEE.
- [2] Bolívar-Vincenty, C. G. and Beauchamp-Báez, G. (2014). Modelling the ball-and-beam system from newtonian mechanics and from lagrange methods. In *Twelfth LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology*, volume 22, page 24.
- [3] Choudhary, M. and Kumar, G. N. (2016). Eso based lqr controller for ball and beam system. *IFAC-PapersOnLine*, 49(1):607–610.
- [4] Kautsky, J., Nichols, N. K., and Van Dooren, P. (1985). Robust pole assignment in linear state feedback. *International Journal of control*, 41(5):1129–1155.
- [5] Lee, C.-C. (1990). Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. i. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, 20(2):404–418.
- [6] Matia, F., Jimenez, A., Galan, R., and Sanz, R. (1992). Fuzzy controllers: Lifting the linear-nonlinear frontier. *Fuzzy Sets and Systems*, 52(2):113–128.
- [7] Matía Espada, F. (1994). *Análisis y diseño de sistemas de control de procesos basados en lógica borrosa*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid.
- [8] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna (Vol. 5a Edición)*. Madrid, España: PEARSON EDUCACIÓN SA.
- [9] Osinski, C., Silveira, A. L. R., Stiegelmaier, C., Bergamini, M. G., and Leandro, G. V. (2018). Control of ball and beam system using fuzzy pid controller. In *2018 13th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)*, pages 875–880. IEEE.
- [10] Pérez, R. M. (2010). Sistemas de inferencia basados en lógica borrosa: Fundamentos y caso de estudio. *Revista de investigación de Sistemas e Informática*, 7(1):91–104.
- [11] Rai, A., Suman, S. K., Kumar, A., and Yadav, S. (2021). Impact of control stability using lqr and pole-placement for ball and beam system. In *2021 5th International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS)*, pages 543–547. IEEE.

- [12] Soni, R. et al. (2018). Optimal control of a ball and beam system through lqr and lgg. In *2018 2nd International Conference on Inventive Systems and Control (ICISC)*, pages 179–184. IEEE.
- [13] Wang, W. (2007). Control of a ball and beam system. *Adelaide: The University of Adelaide*.



© 2022 by the authors.
Submitted for possible
open access publication
under the terms and conditions of the Creative
Commons Attribution CC-BY-NC-SA 4.0 license
([https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
deed.es](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es)).