Estudio comparativo de metodologías de resolución de problemas en la mejora del rendimiento en matemáticas en estudiantes del último ciclo de educación primaria

Autora: Milagros del Pilar Ramos López

Tese de doutoramento UDC / 2022

Directores: Mar Rodríguez Romero/Enrique de la Torre Fernández

Programa de doutoramento en Equidade e Innovación Educativa

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

MARÍA DEL MAR RODRÍGUEZ ROMERO, PROFESORA TITULAR DE LA UNIVERSIDADE DA CORUÑA DEL DEPARTAMENTO DE PEDAGOXÍA Y DIDÁCTICA DA FACULTADE DE CIENCIAS DA EDUCACIÓN.

ENRIQUE DE LA TORRE FERNÁNDEZ, PROFESOR TITULAR DE LA UNIVERSIDADE DA CORUÑA DEL DEPARTAMENTO DE PEDAGOXÍA Y DIDÁCTICA DA FACULTADE DE CIENCIAS DA EDUCACIÓN.

CODIRECTORES DE LA TESIS PRESENTADA POR:

Dña. Milagros del Pilar Ramos López

Titulada: Estudio comparativo de metodologías de resolución de problemas en la mejora del rendimiento en matemáticas en estudiantes del último ciclo de educación primaria.

HACEN CONSTAR QUE:

DICHA TESIS REÚNE LOS REQUISITOS TEÓRICOS, CIÉNTIFICOS Y METODOLÓGICOS QUE DEBE TENER UN TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE ESTA ÍNDOLE, DANDO SU VISTO BUENO PARA LA LECTURA Y DEFENSA PARA OBTER O TÍTULO DE DOUTOR.

A Coruña, 24 de marzo de 2022

Enrique de la Torre Fernández Facultade de Ciencias da Educación - Campus de Elviña - s/n 15071 A Coruña
Telf.:881014602/ Correo: enrique.torref@udc.es
Mar Rodríguez Romero Facultade de Ciencias da Educación – Campus de Elviña- s/n 15071 A Coruña
Telf: 981167000/ ext: 1721. Correo: mar.rromero@udc.es

AGRADECIMIENTOS

A Dios y a la Virgen.

A mi madre, a toda mi familia y al Dr. Pérez por su cariño y apoyo.

A mis directores Mar y Enrique, por su ayuda y guía constante, por sus aportes, consejos y paciencia. ¡Muchas gracias por todo!

A los miembros de las instituciones educativas que aceptaron el reto de ser observados e investigados, especialmente a las y el docente y a las y los estudiantes de quinto grado de Educación Primaria. ¡Gracias por su trabajo, por su sinceridad y colaboración!

A la Universidad de Piura y a la Fundación Carolina.

A todas las personas que puedan leer este trabajo, por darse un tiempo para hacerlo.

A A Coruña, por su calor humano. ¡Graciñas!

Resumo

Nesta investigación abordamos o ensino das matemáticas e a resolución de problemas matemáticos en quinto de Educación Primaria en dúas realidades diferentes en diversos aspectos (Piura-Perú e A Coruña-España). Na procura de coñecer in situ a situación concreta partimos dun estudo de caso múltiple, que nos permite estudar o que é único e específico de cada situación, establecendo unha relación directa cos informantes, a través de observacións, formas de ensinar, de pensar, etc. Isto permite expoñer un relato complexo e detallado da realidade estudada, a través das vivencias e experiencias da poboación investigada.

Como conclusión xeral, apreciamos que o ensino das matemáticas considera a resolución de problemas matemáticos como un aspecto propio. Os problemas propostos levan principalmente ao uso das matemáticas coñecidas, permitindo aos estudantes reforzar os seus coñecementos; así como introducir novos coñecementos. A priori, poderiamos pensar que os problemas matemáticos ocuparían un lugar destacado no ensino das matemáticas; porén, a realidade amosa que o ensino das matemáticas baséase fundamentalmente no ensino expositivo con certas visuais de traballo centradas no alumnado como xestor do propio proceso de ensino-aprendizaxe.

.

Resumen

En esta investigación nos aproximamos a la enseñanza de la matemática y a la resolución de problemas matemáticos en quinto grado de Educación Primaria de dos realidades distintas en diversos aspectos (Piura-Perú y A Coruña-España). En la búsqueda por conocer *in situ* la situación específica, partimos de un estudio de caso múltiple, que nos permite estudiar lo singular y propio de cada situación estableciendo una relación directa con los informantes, a través de observaciones, formas de enseñar, pensar, etc. Esto posibilita exponer un relato complejo y detallado de la realidad estudiada, a través de las vivencias y experiencias de la propia población investigada.

Como conclusión general apreciamos que la enseñanza de la matemática considera la resolución de problemas matemáticos como un aspecto propio. Los problemas propuestos conducen, principalmente, a usar la matemática conocida, permitiendo que el estudiantado refuerce los conocimientos; así como introducir un conocimiento nuevo. A priori, podríamos pensar que los problemas matemáticos ocuparían un lugar destacado en la enseñanza de las matemáticas; no obstante, la realidad muestra que la enseñanza de la matemática se fundamenta, principalmente, en una enseñanza docente expositiva con ciertos destellos de trabajo centrado en el alumnado como gestor del propio proceso de enseñanza – aprendizaje.

Abstract

In this research we approach the teaching of mathematics and the resolution of mathematical problems in the fifth grade of Primary Education in two different realities in various aspects (Piura-Peru and A Coruña-Spain). In the search to know the specific situation in situ, we start from a multiple case study, which allows us to study what is unique and specific to each situation, establishing a direct relationship with the informants, through observations, ways of teaching, thinking, etc. . This makes it possible to expose a complex and detailed account of the reality studied, through the experiences and experiences of the population under investigation

As a general conclusion, we appreciate that the teaching of mathematics considers the resolution of mathematical problems as its own aspect. The proposed problems mainly lead to the use of known mathematics, allowing students to reinforce their knowledge; as well as introduce new knowledge. A priori, we might think that mathematical problems would occupy a prominent place in the teaching of mathematics; however, reality shows that the teaching of mathematics is mainly based on expository teaching with certain glimpses of work centered on students as managers of the teaching-learning process itself.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de Figuras

INTRODUCCIÓN

El presente estudio está centrado en la enseñanza escolar de las matemáticas de seis aulas de Quinto grado de Educación Primaria de dos realidades diferentes: A Coruña (España) y Piura (Perú). La investigación trata de aproximarnos a esta realidad educativa desde una perspectiva del estudio de casos. Con este enfoque pretendemos recoger las singularidades del escenario a través de la interacción docente – estudiante – matemáticas escolares en el desarrollo de las clases y de los productos que generan. Para lograr recoger las particularidades del contexto, nos hemos apoyado en el empleo de diversas fuentes y técnicas de recogida de datos, que nos ayudan a contrastar las distintas formas del fenómeno estudiado. De esta manera, ahondamos en la realidad de la enseñanza de la matemática desde dos perspectivas diferentes: docentes y estudiantes, para posteriormente rescatar los temas más relevantes relacionados con la enseñanza de la matemática y el papel de los problemas matemáticos dentro de ella.

La investigación está estructurada en dos partes: el marco teórico y el marco empírico. La primera parte del estudio está organizada en dos capítulos:

El primer capítulo nos aproxima brevemente al concepto de problema matemático, partiendo del uso que se le da en los textos escolares y analizando las diferentes ideas y características expresadas por distintos expertos y expertas sobre el tema. Ligado a lo anterior, el capítulo expone el tratamiento de los problemas matemáticos en la escuela, su importancia y aplicación, así como su justificación en los currículos nacionales de Perú y España, resaltando su importancia y carácter transversal. Un cuarto apartado se centra en la habilidad para la resolución de problemas, en la que hacen hincapié los currículos escolares, y las características que la integran, que van más allá del uso de fórmulas matemáticas y de la repetición mecánica de soluciones a problemas similares. La definición de problema matemático y la habilidad en la resolución colocan las distintas propuestas de problemas matemáticos en distintos niveles, por lo que un quinto apartado del capítulo expone los distintos tipos de problemas matemáticos (escolares) que se han logrado identificar, cada cual con una exigencia mayor y más asociada a la definición ideal de problema matemático. Finalmente, el capítulo cierra con un tema que es pertinente exponer, como es el de la percepción de los problemas matemáticos y su resolución, ya que de ella dependerá en gran medida la conducta frente a las distintas propuestas denominadas como problemas matemáticos.

El segundo capítulo, de esta primera parte, ahonda en los métodos y estrategias de resolución de problemas. Si bien, existe cierto uso de ambos términos para nombrarlos indistintamente, desde esta investigación se asocia método con procedimiento y por ende con las fases en la resolución de problemas, expuestas por diferentes autores y autoras, mientras que las estrategias agrupan cuestiones más específicas, asociadas a acciones concretas de cómo actuar en cada fase o, específicamente, en la fase asociada a la configuración de un plan.

La segunda parte de este trabajo está formado por dos capítulos, que se corresponden con el tercero y cuarto capítulos.

El primer capítulo de la segunda parte consta de la presentación del estudio de casos múltiple como metodología de investigación, rescatando su importancia al dar consistencia a cada caso propuesto debido a que estos pueden ser comparados entre sí, pero recalcando su carácter instrumental en la presente investigación. Asimismo, se describe el desarrollo de la investigación, desde una primera fase de revisión literaria y elaboración de material de apoyo para el trabajo docente durante la recogida de datos hasta la elaboración del informe final, pasando por la selección de casos y la entrada al campo que son descritos en los puntos siguientes del capítulo. El apartado referido a la selección de los casos detalla la técnica seguida en base a la accesibilidad de los colegios y de los docentes, partiendo de los colegios de A Coruña por ser la zona en la que se inicia la entrada al campo, mientras que el apartado sobre la entrada en el campo describe los pasos seguidos, desde la coordinación con los directores o con quienes estos delegan hasta el contacto con los docentes y el alumnado. Los últimos apartados del capítulo se refieren a la técnica de recogida de datos, que incluye la observación participante y el material discursivo, el análisis de documentos y el del espacio; el análisis de datos, tomando en cuenta a Stake (2007) y Flick (2004), criterios de calidad, reflexibilidad y cuestiones éticas.

El segundo capítulo muestra los hallazgos, mediante la configuración narrativa de cada caso considerando los estilos de enseñanza docente y el tratamiento de los problemas matemáticos, los métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por el o la docente, así como los usados por el alumnado, sobre la construcción del conocimiento matemático y la capacidad de resolución de problemas. Al finalizar se exponen afinidades y diferencias entre ellos.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación relacionadas con la enseñanza de la matemática. Este apartado es completado con las futuras líneas de investigación.

Una parte importante de la investigación son los anexos, que incluyen el material elaborado para el profesorado, las hojas de aplicación para el alumnado, las sesiones observadas y analizadas, así como la síntesis temática de cada una y los memos interpretativos de las sesiones observadas y de las hojas de aplicación.

JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

Al darnos cuenta de un hecho que resalta sobre los demás surgen preguntas de diferente índole: ¿qué, cómo, cuándo y dónde? El hecho puede ser positivo o negativo. El primero está asociado a un acierto y el segundo con un problema. Desde el campo de la presente investigación la pregunta que guía nuestro trabajo surge a partir de un problema asociado a la dificultad que tienen los y las estudiantes para resolver problemas matemáticos que se les plantea en la escuela. La matemática siempre se ha considerado una materia importante en la educación básica regular y la resolución de problemas matemáticos ha ido adquiriendo más importancia. En las aulas de clase o en los cuadernos de trabajo siempre se programa más de una actividad que implique la resolución de problemas; sin embargo, los resultados muestran que el alumnado tiene dificultad para enfrentarse con éxito a los mismos. Una cuestión fundamental para los alumnos y las alumnas de enseñanza básica es que la matemática (y la resolución de problemas) se aprende "practicando", "estudiando", "saliendo a la pizarra", "atendiendo"; no obstante, los y las estudiantes se agotan al resolver problemas. No son constantes y pronto se cansan de esta actividad: "ya la saben" o "no la entienden". Para unos esta actividad consiste en pensar; para otros, en aplicar cálculos. En cualquiera de los casos se sigue un proceso que les permite intentar una solución que puede ser acertada o no. El alumnado de quinto grado de cualquier escuela tiene experiencia en resolución de problemas, en mayor o menor medida de acuerdo con las políticas implementadas en la institución y la labor del profesor o la profesora; después de varios años de educación primaria o básica, alumnos y alumnas han aprendido una forma de entender los problemas matemáticos y de enfrentarse a ellos que guían su actuación. Este hecho y su nivel de apertura hacia la actividad, influye en su capacidad de resolución de problemas.

Las escuelas seleccionadas para realizar la investigación pertenecen a dos realidades diferentes geográficamente. Tres están ubicadas en Piura (Perú), por ser el lugar residencia permanente de la investigadora y tres en A Coruña (España), por ser el lugar de estudios doctorales, en el marco del cual se realiza esta tesis. La enseñanza de las matemáticas en estas instituciones educativas se basa en los lineamientos curriculares del momento, tanto a nivel de contenidos como metodológicos. En el sistema educativo peruano, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular – proceso de articulación – (2005) considera como finalidad del área de Matemática en Educación Primaria:

> el desarrollo del pensamiento lógico – matemático a través de la adquisición de una cultura matemática que proporcione recursos para la vida; esto implica habilidades y destrezas cognitivas para desarrollar aprendizajes más complejos como el aprender a pensar y aprender a aprender, promoviendo la participación consciente y activa de los estudiantes en la construcción de nuevos conocimientos con una actitud de reflexión – acción abierta, de análisis crítico y con capacidad de adaptación a las necesidades emergentes de la sociedad. (p. 122)

La finalidad expuesta conlleva la necesidad de aprender matemática para entender el mundo, desenvolverse en él, interactuar con los demás, resolver problemas y desarrollar pensamiento lógico – matemático. Por ello, a través de este documento, la enseñanza de la matemática plantea como propósitos el desarrollo del razonamiento y la demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas; este último exige que los docentes propongan situaciones que sean auténticos desafíos para cada estudiante, suscitando en ellos la actitud de interactuar y responsabilizare por su solución, desde la observación y comprensión del problema, pasando por la organización datos, el análisis, la formulación de hipótesis, entre otros, hasta su verificación y explicación; valorando tanto los resultados obtenidos (producto) como la matemática generada (proceso). Años más tarde, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (2009) reafirma estas ideas, dándole a la Resolución de Problemas la característica de proceso transversal, a partir del cual se formulan las competencias del área; este proceso "implica que los estudiantes manipulen los objetos matemáticos, activen su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione y mejore su proceso de pensamiento al aplicar y adaptar diversas estrategias matemáticas en diferentes contextos" (p.187), resaltando la importancia de las interacciones cotidianas del aprendiz con su entorno inmediato y con los objetos que lo conforman y contribuyendo al desarrollo de otras capacidades y a la conexión de las ideas matemáticas con necesidades y actividades propias del estudiante y con otras áreas del currículo.

Actualmente, el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB, 2016), no dista mucho de aquellos, dado que centra las competencias matemáticas en la resolución de problemas; específicamente, el Programa Curricular de Educación Primaria (2016) propone la resolución de problemas como enfoque del área de Matemática, entendida aquella como el dar solución a retos, desafíos, dificultades u obstáculos para los cuales no se conoce, en primera instancia, las estrategias o caminos de solución:

> Al plantear y resolver problemas, los estudiantes se enfrentan a retos para los cuales no conocen de antemano las estrategias de solución, esto les demanda desarrollar un proceso de indagación y reflexión social e individual que les permita superar las dificultades u obstáculos que surjan en la búsqueda de la solución. En este proceso, construyen y reconstruyen sus conocimientos al relacionar y reorganizar ideas y conceptos matemáticos que emergen como solución óptima a los problemas, que irán aumentando en grado de complejidad. (p.231)

En el sistema educativo español, la Ley Orgánica de Educación (2006) propone como objetivo asociado a la matemática "Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana." (p.23), el objetivo asocia la competencia matemática a la resolución de problemas con conocimiento matemático y su aplicación en la vida ordinaria. El Decreto 130/2007, de 28 de junio, por el que se establece el currículo de la educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia establece que la competencia matemática implica "una disposición favorable y de manera progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.) que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y en el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento" (p. 11.673); su desarrollo y perfeccionamiento en la educación obligatoria, en general, se logrará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen espontáneamente a una amplia gama de situaciones, comunes en otros campos de conocimiento y del entorno cotidiano.

En ambas realidades, la enseñanza matemática toma en cuenta el desarrollo de la capacidad de razonamiento, la resolución de problemas y su aplicación a situaciones cotidianas. Siguiendo el planteamiento, las matemáticas escolares han de trascender una enseñanza netamente teórica ya que busca que los conocimientos específicos se puedan aplicar a contextos ordinarios y que el estudiante sea un ciudadano proactivo ante situaciones con índole matemática. Sin embargo, en las escuelas, las matemáticas siguen siendo una materia que no logra calar fehacientemente ya que los resultados obtenidos no son alentadores. En la realidad peruana, un estudio previo (Ramos, 2005) nos permitió observar que las alumnas y los alumnos del nivel primaria no son capaces de enfrentar con éxito las exigencias matemáticas propuestas para su año de estudio; en todos los años los alumnos y las alumnas evidenciaron insuficiente disposición y capacidad para resolver problemas, que se agudizaba con el avance de los grados. Dicho estudio también evidencia que los errores más frecuentes en la resolución de problemas matemáticos se relacionan con la incapacidad para comprender las situaciones propuestas, teniendo una mayor aceptación los problemas de primer tipo siempre que conlleven aplicación directa de las operaciones aritméticas. La realidad expuesta, de manera parcial, nos llevó a pensar en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas que se realiza en las escuelas y al tratamiento particular de la resolución de problemas dentro de este proceso a fin de conocer cómo es que se llegan a estos resultados y si es posible revertirlos.

Por otro lado, como docente de futuros profesores de Primaria, durante muchos años, he observado que los futuros maestros de este nivel no gustan de enseñar matemáticas en la escuela, porque las perciben difíciles, decantándose por la enseñanza de “letras” y no de “números”; son pocos quienes deseando ser profesores de primaria, lo hagan para enseñar matemáticas. El futuro alumno universitario con gusto por las matemáticas (o disgusto por las letras) se decanta por seguir carreras de “números” y en el campo de la enseñanza, la carrera de profesor en matemática. No obstante, las escuelas privadas, con más frecuencia, buscan docentes de secundaria, en matemática, para enseñar en los últimos grados de primaria a fin de centrar su enseñanza en el dominio de los contenidos matemáticos (no sucede lo mismo con los colegios públicos para los que enseñar en Primaria exige un título en dicho nivel). En un estudio realizado por Mato y de la Torre (2009), se encontró que “a mayor incremento de conocimientos hay un cambio favorable de las actitudes” (p. 298).

Realizar los estudios doctorales en la ciudad de A Coruña (España) nos lleva a reflexionar sobre la enseñanza de la matemática en primaria en dicha ciudad, considerando que son dos realidades distintas e iguales a la vez. Diferentes, porque geográficamente se encuentran a miles de kilómetros de distancia, en continentes distintos socioculturalmente; asimismo, distintos estudios señalan que Perú está entre los países de América Latina con peor rendimiento académico. Arias (2005) afirmaba:

> Actualmente, el Perú ocupa el último lugar de Latinoamérica en rendimiento escolar en matemáticas. Según las estadísticas internacionales, hay una relación directa entre el desarrollo de los países y el rendimiento escolar: a mayor pobreza, menor rendimiento. La mayoría de escolares egresan del colegio sin haber adquirido habilidades básicas de cálculo mental, técnica operativa, razonamiento matemático ni geometría. Ello porque se obliga a los escolares a memorizar definiciones y a aplicar fórmulas mecánicamente, sin comprender lo que están haciendo; de modo que sólo se consigue aburrimiento y desmotivación. La metodología de enseñanza carece de una secuencia organizada y coherente. (p.208)

La realidad posterior no es muy diferente. En un estudio sobre el efecto de los procesos escolares en el rendimiento en Matemática y las brechas de rendimiento debido a diferencias socioeconómicas de los estudiantes peruanos, León y Youn (2016) aseveraban que diferentes evaluaciones (internacionales, regionales y nacionales) han expuesto que los estudiantes peruanos presentan deficiencias serias en el aprendizaje de las matemáticas; en base a los datos de Pisa 2012, concluye que las variables contextuales y el nivel socioeconómico tienen un peso importante en el rendimiento matemático de los estudiantes; de ello se decanta que las escuelas que cuentan con mejores insumos escolares, un clima disciplinario dentro del aula y buena relación con los docentes actúan positivamente en el rendimiento.

A partir del problema de investigación expuesto, la pregunta de investigación es: ¿qué tratamiento se da al planteamiento y resolución de problemas matemáticos en el aula, en dos realidades sociogeográficamente diferentes, y cómo influyen en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática?

La pregunta formulada es compleja pues incluye diferentes aspectos: métodos, estrategias, niveles de comprensión. Para contestarla nos trazamos el siguiente objetivo general:

Describir e interpretar los estilos de enseñanza de las matemáticas y su relación con la resolución de problemas matemáticos en el aula de quinto de primaria.

Este objetivo se desagrega en los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar el estilo de enseñanza de los docentes de quinto grado de educación primaria respecto al tratamiento de los problemas matemáticos.
- Describir los métodos y estrategias usados por los docentes en la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos.
- Describir los métodos y estrategias usados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.
- Relacionar el tratamiento de problemas matemáticos en clase, la construcción y producción de conocimiento matemático y la capacidad de resolución de problemas de los alumnos de quinto grado de educación primaria.

“La resolución de problemas matemáticos siempre ha sido el corazón de la actividad matemática. Su evolución histórica revela la plena relación que ha tenido esta actividad con la enseñanza-aprendizaje de la propia Matemática” (Sigarreta, Rodríguez y Ruesga, 2006, p. 53). Asimismo, Broitman (1998) afirmaba, años atrás, que siempre se ha evaluado en los estudiantes su capacidad para resolver problemas sin que se aprecie que la escuela se haya responsabilizado completamente por ello. Partiendo de las palabras anteriores, el primer objetivo específico busca identificar y definir la forma cómo los docentes organizan la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en el aula a fin que los y las estudiantes desarrollen destrezas oportunas que les permita enfrentarse con éxito a los problemas que se les planteen.

Asociado a lo anterior, la actividad de resolución de problemas, como tal, transita por una serie de acciones que permiten enfrentar el problema para solucionarlo. Estas acciones se materializan en pasos y estrategias que permiten enfrentarse con éxito (o no) a la situación problemática y resolverla. Si el proceso es seguro y exitoso, se dice que el alumno o la estudiante tienen la capacidad de resolver problemas. Distintos autores y autoras hablan de las fases en la resolución de problemas. Polya (1989), uno de los gestores, hace referencia a cuatro fases que caracterizan a los resolutores exitosos; por otro lado, Chemello, Agrasar y Crippa (2010) mencionan que la capacidad de resolución de problemas implica una serie de acciones entre las que considera fundamental reflexionar previamente sobre la respuesta a una pregunta planteada frente a algún tipo de desafío, adelantando la misma, lo que le permitirá decidir qué tipo de información se usará como dato. Por ello, se hace necesario, como plantean el segundo y tercer objetivos, detallar los métodos y estrategias usados por los docentes y alumnado en la resolución de problemas matemáticos que se proponen en el aula.

El éxito del proceso de enseñanza - aprendizaje depende, tanto de la correcta definición y determinación de sus objetivos y contenidos, como de los métodos que se aplican para alcanzarlos. A partir de los mencionados objetivos, el cuarto objetivo pretende relacionar el tratamiento de problemas matemáticos en clase, la construcción de conocimiento matemático y la capacidad de resolución de problemas del alumnado de quinto grado de primaria.

CAPÍTULO 1. LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA ESCUELA

La actividad de resolución de problemas forma parte de la actividad matemática en el aula en el nivel de Educación Primaria; así se observa en las distintas políticas nacionales como en los libros de texto y actividades que usan los estudiantes y maestros para desarrollar en los primeros las competencias matemáticas necesarias para su nivel de estudios. La propuesta de problemas en el aula es un indicador del valor que tienen en la gestión del proceso de enseñanza – aprendizaje, por ello, es necesario saber qué es y qué se entiende por problema matemático; puesto que su concepto orienta en el tipo de propuesta didáctica, y viceversa; generando, a partir de la misma, características asociadas a su forma de presentación, estructura, elementos, entre otros, lo que conlleva una percepción y creencias sobre los mismo, y la actividad a partir de ellos, que tendrán cierta responsabilidad en la actitud de los estudiantes hacia la matemática y el proceso de resolución de problemas matemáticos.

1.1.Conceptualización: los problemas matemáticos

El Diccionario de la Lengua Española (DLE, 2018) define la palabra *problema* como cuestión, proposición o conjunto de hechos no claros y que ofrecen dificultad. Asimismo, también consigna como tal a una situación para la que su respuesta ha de obtenerse mediante métodos científicos. Desde el punto de vista matemático, el diccionario establece la diferencia entre dos tipos de problemas: *problema determinado* como aquel con una solución o más de una en número fijo, y *problema indeterminado* cuyo número de soluciones es indefinido. Al referirnos a *problema(s),* hablamos de situación(es), dificultad(es) y solución(es).

Almodóvar y García (2009) distinguen entre *ejercicio* y *problema*: los primeros se visualizan inmediatamente como actividades que implican trabajar directamente con el contenido matemático y los segundos como situaciones que involucran dicho contenido. Los ejemplos siguientes, extraídos del documento (p.61), materializan esta idea:

Ejercicios:

1. Calcula: 2.160:72
2. Completa cada hueco con una cifra:

   89.756.148 > ☐1.003.126

3. Ordena de mayor a menor cada grupo:

   6.100.250, 6.102.089, 7.006.112, 7.008.000

4. Escribe:

   El mayor número par cuya cifra 8 tenga un valor de 80.000.000 U.

5. Escribe el valor en unidades de la cifra 7 en cada número:

   72.093.476

Problemas:

1. Marisa compró 16 m de cordón rojo y el triple de metros de cordón azul. Cada metro de cordón le costó 3€. ¿Cuánto pagó en total?
2. En un almacén hay 125 cajas de 16 zumos de manzana cada una y 80 cajas de 12 zumos de piña cada una. ¿Cuántos zumos hay en el almacén? ¿Cuántos zumos de manzana hay más que zumos de piña?
3. Juan ha comprado en rebajas 9 juegos de ordenador por 261€. Si cada juego por separado costaba 30€. ¿Cuánto se ha ahorrado Juan en total?

El Ministerio de Educación de Chile (2010) distingue entre *preguntas sobre conocimientos* y *preguntas sobre resolución de problemas*. Ejemplos al respecto son los siguientes:

- Preguntas sobre conocimiento de números enteros, decimales y fracciones (p.12):

1. Observa la siguiente tabla

Ingreso medio mensual de hombres y mujeres con estudios universitarios
($ de octubre de 2003)

Mujeres	Hombres	Diferencia
489.000	800.000	-311.000

Fuente *INE*, Informe de brechas de ingreso, periodo 2001-2003

En la tabla anterior, -311.000 indica que en promedio:

A. las mujeres con estudios universitarios reciben $ 311.000 menos que los hombres con estudios universitarios.
B. los hombres con estudios universitarios reciben $ 311.000 menos que las mujeres con estudios universitarios.
C. las mujeres con estudios universitarios reciben $ 311.000
D. los hombres con estudios universitarios reciben $ 311.000

2. ¿Qué número es equivalente a 2/25? (p.13)
   a) 0,2
   b) 0,8
   c) 0,08
   d) 12,5

- Preguntas sobre resolución de problema:

1. En una fábrica de pañales desechables, 12 máquinas producen 3 600 pañales en una jornada de trabajo. Se agregan 4 máquinas idénticas, que producen la misma cantidad de pañales que las anteriores. ¿Cuántos pañales se podrán hacer ahora en una jornada de trabajo? (p.18)
   a) 1 200
   b) 2 700
   c) 4 800
   d) 10 800
2. Una porción de 30 g de cereal para el desayuno contiene 7,5 mg de fósforo, que equivale a 15% de la dosis diaria recomendada.
   ¿Cuántos mg de fósforo corresponden a la dosis diaria recomendada? (p.19)
   A. 4,5 mg
   B. 6,6 mg
   C. 50 mg
   D. 200 mg

El término *problema matemático* a partir de los ejemplos anteriores, propios del ámbito escolar, se refiere a situaciones cotidianas en las que se destaca cierta información numérica y en las que se plantea un interrogante que se responde usando, de forma directa o indirecta, la información presentada. Otras ideas que se desprenden hacen referencia a “una situación que plantea una cuestión matemática”, “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo” o a “una situación matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos". Estas ideas forman parte de las definiciones que tanto Vila y Callejo (2005, p. 73) como Campistrous y Rizo (2013, p. 3) y Alonso (2001, p.52), respectivamente, expresan sobre qué es un problema matemático; sin embargo, las ideas de estos autores se complementan con otra que se deduce: la información presentada no permite encajar todas las piezas y responder inmediatamente a la pregunta, por lo que su actuación frente al mismo implica: establecer relaciones, operar, investigar e incluso, en el caso de Vila y Callejo, afectos.

La idea que subyace en los ejemplos es la conceptualización tradicional de problema como "enunciado verbal contextualizado" (Alfaro y Barrantes, 2008, pág. 95). No obstante, Pérez, Álvarez y Breña (2016), a través de la recopilación de diferentes definiciones sobre problema matemático, reflexionan sobre su concepto, exponiendo que "en las definiciones del concepto de problema matemático se evidencian tres tendencias fundamentales: sobredimensionamiento de elementos psicológicos, énfasis en la presencia de relaciones matemáticas y la integración de los elementos psicológicos con los propiamente matemáticos" (p. 26). La primera, asociada al carácter subjetivo de su resolución, la segunda al objeto en sí y a tercera establece una fusión de ambos. Las definiciones de Albarran, Labarrere y Puig (como se citó en Pérez, Álvarez y Breña, 2016), son un ejemplo de definición de problema que resalta, respectivamente, cada una de las tendencias anteriores: "Tarea con cierto grado de complejidad que debe resolver el escolar para la cual no existe, no se conoce o es difícil aplicar un algoritmo de solución, lo que requiere busque dentro de los conocimientos que posee los que le sirven para encontrar la vía para resolverlo"(p.27), "un problema matemático es una narración lacónica en la que el valor de algunas magnitudes está implícita y se necesita hallar otro valor de la magnitud, dependiente de los valores ya dados, con los cuales mantiene determinadas relaciones que se señalan en las condiciones."(p. 29) y "Un problema escolar de matemática es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que este desea abordar y para lo cual no ha producido sentido." (p.30). Como se puede observar, las definiciones ponen énfasis en aspectos que consideran importantes, no solo desde el punto de vista del conocimiento y actividad matemática, sino que consideran la percepción y disposición del resolutor.

"Los ejercicios en matemática… coadyuvan a la comprensión (insight) del tópico matemático abordado en la actividad, así como a desarrollar las habilidades matemáticas asociadas a los algoritmos y procedimientos vinculados a dicho tópico" (Míguez, 2003,

p. 146). Desde este punto de vista, los ejercicios se desprenden de su carácter repetitivo y se acerca a la idea de actividad constructiva y comprensiva; no obstante, tomando como referencia las definiciones expuestas, los ejemplos propuestos como problemas se asocian directamente a la definición arraigada de ejercicio y parcialmente a la de problema ya que para que se catalogue como tal debe contemplar otros elementos. OECD (como se citó en MECD, 2014, p.7) indica que "los problemas son situaciones sin una solución obvia. Si no hay que pensar, no hay problema". Nótese que en los llamados 'ejercicios', la respuesta si bien no es obvia, sí se puede llegar a ella aplicando lo conocido previamente, ya que suelen seguir el mismo patrón. Además, el Ministerio de Educación de Chile (2010, p.10) nombra los problemas expuestos como problemas rutinarios entendiendo los mismos como "aquellos en los cuales la estrategia de resolución es conocida por el estudiante, lo que le permite resolverlos en forma inmediata"[1], característico de los ejercicios escolares. En ambos casos se plantean con la seguridad de que las respuestas serán dadas sin mayor dificultad puesto que los resolutores tienen las herramientas pertinentes: contenidos, procedimientos y experiencia con situaciones similares.

Mazur (2008) hace una distinción entre *problema* y *pregunta* y expresa que "los problemas y las preguntas son cosas distintas" (p.35) ya que las últimas se plantean con la seguridad de que las respuestas serán dadas fácilmente, mientras que de los primeros se espera que, para dar la respuesta, haya previamente cierto trabajo mental. La conjetura de Poincaré (también llamada hipótesis de Poncaré[2]) y el clásico teorema de Pitágoras, son ejemplo que el autor propone para vislumbrar el concepto de problema. Los mejores problemas son provocaciones, acción recíproca con sus elementos a un nivel más profundo. Su distinción se asocia al grado de complejidad y novedad de la actividad propuesta.

> … un problema es una situación real o ficticia que reta la comprensión conceptual, y no solamente los conocimientos de un tema tratado en la actividad de aprendizaje de matemática; exige una reestructuración en la manera de abordar

---

[1] Respecto a los problemas propuestos manifiesta que "Resolver problemas rutinarios de proporcionalidad es un desempeño que puede corresponder tanto a Nivel Intermedio como a Nivel Avanzado, dependiendo de la comprensión conceptual requerida para su resolución. Para alcanzar el Nivel Intermedio, los estudiantes deben ser capaces de resolver problemas rutinarios de proporcionalidad directa que requieren cálculos con números naturales. Para alcanzar el Nivel Avanzado, deben además ser capaces de resolver problemas que involucren el concepto de porcentaje, lo que presenta un mayor nivel de complejidad".

[2] Tras su comprobación en el 2003 por el matemático Grigori Perelman.

> la situación planteada y de los límites de los procedimientos conocidos, y busca generar conexiones sobre conocimientos variados.
>
> Un problema no tiene condición temporal, se puede resolver rápidamente, o no conseguírsele nunca su solución. (Míguez, 2003, p.147)

Para el autor anterior, la condición de resolverse rápidamente no aleja al problema de su naturaleza, sino que esta se encuentra en el reto que significa, que aleja al resolutor de su estado de confort. Los ejemplos propuestos por Mazur como problemas matemáticos establecen claramente una diferencia entre estos y los problemas matemáticos escolares de los libros de texto o de las evaluaciones aplicadas, aunque aquellos se hayan propuesto, alguna vez dentro de clase. Los problemas matemáticos, en sentido amplio, generan soluciones matemáticas a distintas cuestiones y la creación de nuevo conocimiento matemático, mientras que en los problemas escolares el conocimiento y la forma (o formas) de resolverlo está previamente determinados (de antemano se sabe la solución o soluciones al mismo), aunque no siempre las y los estudiantes son capaces de llegar a la solución, aun cuando ya hayan tenido cierta experiencia con ellos. No obstante, para el autor, el problema mismo, si es realmente bueno, es una invitación a extender la imaginación, no descartando que los buenos problemas escolares pueden poseer estas características.

Reconocer en el ámbito escolar los ejemplos expuestos como problemas matemáticos no es reciente. Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006) afirman que textos matemáticos escolares, más antiguos a la época del griego Herón, considerado por muchos autores como el primero en incluir en sus trabajos ejercicios con texto, eran de dos tipos: de tablas y de problemas; proponiendo dentro del segundo grupo el siguiente problema, similar a algunos problemas escolares: “En una pirámide el lado tiene 140 codos y la inclinación es de 5 palmos y 1 dedo por codo. ¿Cuál es la altura?” (p.54), el cual se ha hallado en un papiro egipcio de mediados del milenio anterior y que puede considerarse como un modelo aplicado a problemas matemáticos actuales.

Lira y Rencoret (1994), no utilizan la palabra *problema* sino *situación* o *situaciones de aplicación* que se deben resolver aplicando el conocimiento matemático propuesto (previo análisis, verbalización y representación gráfica, si son necesarios), pero que siguen la misma estructura y esencia de los anteriores. Los siguientes son ejemplos de problemas que se exponen en el texto indicado:

Problema 1:

En un concurso, Juan contestó 5 respuestas correctas y 9 respuestas incorrectas. Si por cada respuesta correcta gana 2 475 puntos y por cada respuesta incorrecta pierde 673 puntos, ¿cuántos puntos tiene Juan al finalizar el concurso? (p.82)

$$5(2475) – 9(673) = 12375 – 6057 = 6300$$

Problema 2:

En el estante hay 20 libros; 5 libros están escritos en inglés, 8 libros están escritos en francés y el resto está escrito en alemán. Escribir la fracción que corresponde a los libros escritos en alemán. (p.6)

$$5+8=13$$

$$20-13=7$$

$$7/20$$

Los *problemas* o *situaciones* problemáticas propuestos en un proceso de enseñanza-aprendizaje escolar se pueden entender como una cuestión concreta, tanto en su contexto como en el proceso de solución; tareas concluyentes, planteadas intencionalmente, a partir de una pregunta o acción formulada cuyo propósito es lograr que el estudiante se enfrente matemáticamente a dichas cuestiones y pueda resolverlas, lo que implicaría: reconocer la situación, vislumbrar lo que se pide y la matemática involucrada, así como actuar a partir de ello. Este actuar puede ser reiterativo, para ejercitar (cuando los problemas siguen un mismo patrón), o constructivo, para crear (cuando el problema rompe los esquemas conocidos). En cualquier caso, aparecen como enunciados con características específicas, validados por otros como problemas matemáticos escolares. En el ámbito escolar, la definición de problema equivale a la expresada por Díaz y Poblete (2001) quienes manifiestan que:

> Un problema corresponde a una situación en donde el alumno intenta responder a una pregunta hecha o realiza una tarea determinada, a la vista de su experiencia y con informaciones que le son proporcionadas, en algunos casos, explícitamente; además, le es realmente necesario buscar un medio para responder a la pregunta; y

> debe recurrir a la matemática o a las habilidades intelectuales frecuentemente usadas para lograrlo (p.35).

Más allá de las definiciones del diccionario y de las actividades propuestas en los libros de texto o de demostración, como problemas matemáticos, a partir de ejemplos concretos, cuyo primer objetivo es contextualizar, aplicar, reforzar y/o comprender un conocimiento matemático, la idea de problema matemático ha ido afinándose a través de las ideas vertidas por diferentes autores quienes brindan definiciones y significados diferenciados acerca de qué entienden por problema, en el ámbito matemático y en el escolar o didáctico, de forma que se pueda precisar mejor su naturaleza. “Un problema matemático es considerado comúnmente como una situación en la que es necesario superar un obstáculo para llegar a un resultado o meta” (Espinoza, 2011, p.19). Salvador (2013) define un problema matemático como “una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo” (p.3). Nótese que la segunda definición amplía y precisa la misma, haciendo explícito el desconocimiento de la forma de resolver el problema; por ello, teniendo en cuenta estas definiciones, para que una situación se considere problema debe presentar obstáculos y además quien se enfrente al mismo no debe conocer inmediatamente el camino de solución. Los problemas matemáticos que se proponen con la finalidad de aplicar directamente un procedimiento, estrategia o forma de solución, se excluyen de la esencia misma de un problema como tal (ya que dejaría de serlo aunque el contexto sea otro). La idea de desconocer la vía de resolución (no solo el resultado) es constante en las definiciones de problema y/o problema matemático. En la tabla 1 se exponen las definiciones o ideas de problema o problema matemático que diferentes autores han expuesto a lo largo del tiempo:

Tabla 1. Diferentes definiciones de problema/problema matemático

Definición	Autor
“tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.”	Polya, 1962 (como se citó en Pino y Blanco, 2008, p 65.)

Newell (1972) sostiene que un problema se define como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere.	Newell, 1972 (como se citó en Mendoza, 2018, p.207)
"un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente"	Simon, 1978 (Como se citó en Godino y Batanero, 2009, p.7)
"una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución"	Charles y Lester, 1982 (Como se citó en Díaz y Roa, 2014, p.3)
“Un problema es una situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución. El conocimiento relevante de esa persona tiene que ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema.”	Kantowski, 1980 (Como se citó en Contreras, 2009, p.41)
“es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que lo conducirá con certeza a la solución.”	Kantowski, 1981 (Como se citó en Contreras, 2009, p. 41)
“es la búsqueda consciente, con alguna acción apropiada, para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar”.	Pólya, 1982 (como se citó en Villalobos Fuentes, 2008, p.38)
Chi y Glaser (1983) observan que un problema es como una situación en la cual un individuo actúa con el propósito de alcanzar una meta utilizando para ello alguna estrategia en particular.	Chi y Glaser, 1983 (como se citó en Irazoque, 2005, p. 279)

"El problema puede ser definido como cualquier situación, que produce por un lado un cierto grado de incertidumbre y, por otro lado, una conducta tendiente a la búsqueda de su solución".	Palacios y Zambrano, 1993 (como se citó en Sigarreta y Torres, 2003, p. 211)
"toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla. La vía de pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer realizar la transformación".	Campistrous y Rizo, 1996 (como se citó en Sigarreta y Torres, 2003, p. 211)
"Un problema es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo. Este objetivo no se puede alcanzar con el repertorio comportamental actual del organismo; éste debe de crear nuevas acciones o integraciones."	Penagos-Corzo y Aluni (2000, p.4)
Una definición de problema matemático. La que hace referencia a que el alumno conoce de dónde se parte y a dónde debe llegar, pero la vía de solución es desconocida. Para que constituya un problema el alumno debe estar motivado, es decir, debe tener interés en resolverlo.	Prieto, Gonzáles y Gonzáles (2003, p.1).
Desde los postulados de la Psicología se estudiaron las definiciones trascendentales en este campo. Es lícito mencionar las dadas por Rubinstein (1965), Leontiev (1986) y González (1995). El análisis de las definiciones establecidas por estos psicólogos encarna dos características comunes: en todo verdadero problema el sujeto desconoce la vía de solución y al posicionarse frente al problema mismo adopta un carácter activo.	Almira y Arias (2003, p.14)

Un problema no se define por características de la tarea, sino más que nada por la interacción entre las demandas de la tarea y las habilidades de la persona que los resuelve… Por tanto, un problema es una situación que implica un no saber, o bien, una incompatibilidad entre dos ideas. Desde ya, también debe existir una necesidad por resolverlo, pues si no, no sería un problema, y, por lo tanto, este tiene que tener un carácter de obstáculo para alcanzar una meta, que es su resolución.	Nápoles (2005, p. 2-4)
Un problema exige mucho más que la aplicación rutinaria de algoritmos o fórmulas. Esta es una de las características que permiten distinguir un problema de un mero ejercicio de aplicación	Juidías y Rodríguez (2007, p. 261)
… un verdadero problema exige más que la aplicación inmediata de una fórmula o algoritmo… situaciones que se resuelven mediante un proceso razonado mediante el que se dan oportunidades a los alumnos para que cuestionen, experimenten, hagan conjeturas y ofrezcan explicaciones; a la vez que va desarrollando competencias básicas como: la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información, competencias digitales y la comunicación lingüística.	Barrantes y Zapata (2010, p. 80)
Para establecer las características distintivas de los problemas de matemáticas desde la psicología nos basamos en los siguientes autores: Ball (1970); Perales (1984); González (1995); Pozo, Postigo y Gómez (1995), todos ellos sostienen que un problema es una situación desconocida que demanda la realización de ciertas acciones,	Granados y Expósito (2011, p.39)

también es cualquier situación que produce incertidumbre, al cual se le desconoce la vía de solución y necesita de la actividad del estudiante.	
Un problema se define como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce la acción necesaria para resolverlo; asimismo, es un episodio en el cual, un sujeto actúa con el propósito de alcanzar una meta, utilizando para ello alguna estrategia en particular.	Acosta y Boscán (2012, p. 181)
…problema es un estado tolerable de incertidumbre con respecto a un interrogante lanzado al intelecto y que éste acepta como un reto, cuya respuesta no se sabe de antemano, en parte porque la información disponible y accesible que hace inteligible la incógnita se presenta en apariencia incompleta y con inconsistencias y en consecuencia se convierte en una tarea del intelecto llegar a un estado final caracterizado por la supresión sistemática y gradual de la perplejidad e inconformidad que causan las lagunas e inconsistencias de la información que configuran el interrogante.	Minotta-Valencia (2014, p.167)
Un *problema* es un desafío, reto o dificultad a resolver y para el cual no se conoce de antemano una solución.	Ministerio de Educación del Perú (2015, p.14)
La definición de problema matemático va más allá de un ejercicio matemático, supone de un cierto nivel de complejidad que requiere todo un plan para resolverlo, más que la aplicación de un algoritmo ya conocido.	Pérez Ortiz, J.L (2016, p. 22).

Desde la perspectiva de la didáctica de la matemática, un problema matemático puede entenderse como una oportunidad o estrategia para que el estudiante resuelva situaciones propias de su entorno que tienen cierto grado de dificultad.	González (2018, p. 29)

Las definiciones expuestas resaltan, en su mayoría la dificultad y el desconocimiento de la vía de solución al problema; no obstante, algunas hacen evidente la exigencia de cierta actividad intelectual. Otra de las ideas que podría desprenderse de las definiciones expuestas es su carácter subjetivo, asociado al deseo de querer resolver el problema y disponerse a ello. Según Schrock (como se citó en Pino y Blanco, 2008):

> Hay tres criterios que un problema debe cumplir: (1) el alumno debe aceptar que estará implicado en el problema; (2) debe tener cierto grado de obstrucción y no poseer un método para solucionar de inmediato el problema y (3) debe explorar activamente el problema en busca de una solución. (p.65).

Las ideas anteriores se corresponden con las propuestas por Juidías y Rodríguez (2007) como características de problemas matemáticos al diferenciarlos de los ejercicios de aplicación:

- El individuo se ve expuesto ante una dificultad para la que no tiene un remedio inmediato.
- El individuo se implica en su solución.
- Requiere utilizar de modo estratégico los procedimientos previamente conocidos. Las técnicas automatizadas pueden ser necesarias, pero no son suficientes para llegar a la solución.
- Supone al individuo una demanda cognitiva de alto nivel.
- La determinación de la información relevante es una pieza clave en la resolución del problema (p.261)

De acuerdo con las ideas expuestas por estos autores, un problema involucra reconocimiento – acción – obstrucción – solución, lo que implica cierto grado de empatía (compromiso) por parte de quien se compromete a resolverlo. Ya no basta que otros lo validen como problema matemático, sino que es importante la revalidación de quien se enfrenta al problema. Alfaro y Barrantes (2008) añaden la idea de dificultad percibida/sentida por el resolutor (no manifiesta por otros) a la definición de problema, amparándose en diferentes autores:

> Para Schoenfeld (1985) la dificultad de definir el término *problema* está en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Charnay (1994) dice que un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; el problema se da solo si el alumno percibe una dificultad, en ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro. En un sentido parecido se pronuncia Callejo (1994), citada por Remesal (1999), cuando señala que un problema es una situación cuya solución no es inmediatamente accesible al sujeto dado que no cuenta con un algoritmo que la resuelva de manera inmediata, esto implica que es un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo. (p.86)

Asociando a los términos iniciales (ejercicio, problema y pregunta), los ejercicios y las preguntas no serían problema, propiamente, puesto que el algoritmo que los resuelve no es obstáculo para llegar a la solución ya que está presente directamente, en el primer caso, e indirectamente, en el segundo (si es que conoce el camino). Basta con que el alumno los aplique. Se entiende que la dificultad (o el problema) estaría en identificar la matemática en la situación extramatemática.

Reconocer y enfrentarse a una tarea (matemática) que se considere problema (matemático), sea simple o complejo, implica pensar antes y después de actuar, un pensamiento ordenado que no lleva inmediatamente a la respuesta, sino que implica cierto grado de actuación, estructuración y reestructuración interna, cierto bloqueo. No tiene una estructura única de presentación, más bien es la esencia de la misma que lleva a definirla como problema. Saber cómo se hace algo (tener el proceso) no ofrece dificultad, por tanto no se concibe como problema (aunque tenga el rótulo). En la actividad matemática escolar no toda actividad o tarea es un problema matemático; ha de estar integrada por actividades o procesos simples y otros complejos, como parte de un todo. Las tareas planteadas han de ser consecuencia de la actividad misma. No obstante, en la escuela, las tareas matemáticas no surgen de la actividad matemática propuesta, sino que se proponen (imponen) a propósito de ella.

1.2. La resolución de problemas matemáticos en la escuela

Para G. Polya (1992), un profesor o profesora de matemáticas tienen una gran oportunidad, esto porque:

> Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello. (p.5)

Toda clase o sesión de matemática en la escuela incluye la propuesta de problemas o situaciones problemáticas. Los textos escolares contienen este tipo de actividades con la finalidad de introducir un tema y/o resolver lo que se plantea; de esta manera se contextualiza el conocimiento matemático y/o se practica y comprueba el aprendizaje adquirido. Al referirnos a los problemas matemáticos asociamos a este término otros que no le son ajenos: resolución de problemas, planteamiento de problemas y solución del problema. Según Stanic y Kilpatrick (1988), (como se citó en Vilanova, 2003, p. 503):

> Los problemas han ocupado un lugar central en el currículum matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas, no. Sólo recientemente los que enseñan Matemática han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial... El término "resolución de problemas" se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes concepciones

> sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular.

Los problemas matemáticos tienen presencia en las escuelas y en la actividad escolar de los estudiantes, pero aún hay una brecha grande entre los cambios esperados con esta inclusión y lo que en realidad ocurre en el desarrollo de las clases, con su tratamiento. Producto de una investigación, Vázquez (2015), expone que las prácticas docentes en los primeros grados de primaria, independientemente de varios factores (contexto, tipo de organización de la institución, antigüedad en el sistema y tipo de contratación), recurren a menudo a transmitir información y a un control casi total sobre lo que sucede en el aula y debe hacer el alumnado, dejando poca oportunidad para que los y las estudiantes aprendan construyendo las matemáticas. Sigarreta, Locia y Bermudo (2011), aprecian que:

> Una de las características que existe actualmente en el aula es la mecanización del discurso matemático, donde los estudiantes no descubren el conocimiento, no crean hipótesis, conjeturas o generan ideas originales y creativas de los objetos matemáticos. Una vertiente de esta mecanización, es la algoritmización de los procedimientos para resolver problemas (p.28).

Ciertamente, los problemas matemáticos están en el aula y en la actividad escolar de los estudiantes; sin embargo, su presencia no es la deseable por quienes esperan de ello otro tipo de tratamiento. Para Sorando (2013) “Las matemáticas escolares siguen ofreciendo… algunos problemas clásicos, pero absurdos… En realidad no se trata de verdaderos problemas, sino de ejercicios con los que se espera que el alumnado aplique rutinas adquiridas” (p.73). Alconchel y Matarraña (2012, p.1) ante la pregunta: “¿Por qué no se proponen en los libros de texto, en clase de matemáticas, en general, problemas “verdaderos”?”, se responde:

> Fácil. Porque en muchos casos no sabemos resolverlos. Nos faltan matemáticas para ello. O los cálculos se complican demasiado. Así que habitualmente nos dedicamos a resolver problemas (relativamente sencillos) por pura gimnasia mental (lo cual, por otra parte, está muy bien), pero que no nos sirve para nada (salvo, en algunos casos, para pensar mejor, lo cual no está nada mal, por cierto).

> Lo curioso es que muchos problemas “verdaderos” sí sabemos plantearlos, pero nos falta la maquinaria adecuada para hacernos con la solución.

La resolución de problemas es una actividad inherente a la actividad matemática en la escuela y no se desliga de ésta. El Informe Cockcroft (Como se citó en Sánchez, 2003) enfatizaba, hace más de 30 años, la utilidad de las matemáticas en la medida en que pueden ser aplicadas a una situación concreta. Desde entonces, el interés por incorporar este aspecto en la escuela y en el campo de investigación de la Didáctica de la Matemática ha ido creciendo. No obstante, la capacidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos se ha puesto en tela de juicio en los distintos exámenes aplicados cada cierto tiempo (PISA, ECE[3]); aun cuando se pueden observar mejoras particulares, el nivel mostrado dista mucho de lo ideal. Los resultados nos llevan a pensar que existe una ruptura entre la competencia matemática asociada a la capacidad para resolver problemas que plantean los exámenes y la gestión de los problemas en la escuela, que puede estar en el tipo de problemas propuestos, en la metodología usada o en su tratamiento dentro y fuera del aula. Si bien, las investigaciones (Pifarré y Sanuy, 2001; Álvarez, Alonso y Gorina, 2012; Muñoz y Lasalle, 2002, Mato-Vásquez, Espiñeira y López-Chao, 2017) muestran formas distintas de potenciar la resolución de problemas en el aula en los distintos niveles escolares, la situación real se aparta mucho de estos casos concretos.

En el nivel de Educación Primaria, el papel esencial de los problemas matemáticos se ha centrado en su propuesta para aplicar conocimiento matemático aprendido: conceptos, algoritmos, fórmulas, estrategias. Desde esta perspectiva, los problemas se plantean como un medio para situar la matemática en contextos reales, concretos u ordinarios que permitan familiarizar al estudiante con su contenido y darle sentido. Para lograr cierta experiencia en la resolución de problemas, se genera una enseñanza a partir de enunciados con características similares de forma que los alumnos no tengan inconvenientes al resolverlos. Esta forma de proceder dista mucho de lo que es la actividad de resolución de problemas como parte de la actividad matemática propiamente. Difícilmente a través de estos problemas se hace evidente la construcción de conocimiento matemático o la resolución auténtica y personal de un problema, al menos de manera consciente e inmediata.

---

[3] Evaluación Censal de Estudiantes (ECE). Esta evaluación consiste en la aplicación de pruebas estandarizadas a estudiantes de segundo grado para medir cuánto han aprendido en matemática y comprensión lectora. La prueba la aplica cada año el Ministerio de Educación peruano (MINEDU).

Los problemas matemáticos se proponen para ser resueltos en el aula (como parte de la clase) y/o fuera de ella (como tarea). Una clase o sesión de aprendizaje, tiene diferentes momentos que se resumen en tres: inicio, medio y final, que pueden ser nombrados de la siguiente manera: motivación, básico – practico y evaluación. En la clase de matemática, los problemas matemáticos se proponen en cualquiera de estos momentos para contextualizar/motivar, descubrir y aplicar, respectivamente. Los problemas propuestos como tarea cumplen el tercer objetivo: aplicar, añadiendo los de reforzar y adquirir experiencia; en menor medida, construir.

Como motivación, el problema permite contextualizar. Desde esta perspectiva, el problema es visto como medio para otros fines (por ejemplo, mostrar el valor de la matemática en la vida diaria o lúdica del niño), y la resolución de problemas no es vista como una meta en si misma de manera que, por lo general, no se llega a resolver el mismo. En este caso, el docente presenta la situación, cuestiona a los alumnos sobre la misma (¿Qué nos dice el problema?, ¿qué pregunta?, ¿es fácil responder la pregunta?, ¿qué datos tengo?) y, esperando que no tengan las herramientas para resolverlo, se les introduce en el tema y se explica la importancia de este nuevo concepto para resolver el problema. Se confía que el alumno comprenda el proceso y lo aplique en otras situaciones similares.

En el segundo momento de la clase (básico – práctico), lo esencial es el nuevo conocimiento. Si la clase es tradicional, el valor del problema desaparece pues los docentes se centran en explicar el nuevo conocimiento que permitirá resolverlo. Si la sesión se centra en construir con los estudiantes el nuevo conocimiento, el problema sirve de nexo conector con aquel. No obstante, si la sesión consiste en capacitar en la resolución de problemas, este es visto como habilidad a ser desarrollada o como un contenido más que hay que aprender para poder usar. La fase práctica plantea nuevos problemas esencialmente iguales; es decir, cuya estructura y planteamiento parte del supuesto que la solución se realiza de la manera recientemente conocida. La fase de evaluación, permite corroborar y valorar el aprendizaje. En esta fase, los problemas siguen el mismo formato anterior. El tratamiento de situaciones matemáticas diferentes se propone en el rincón de matemática, un espacio físico que contiene diferente material matemático y al que el alumno puede acudir en cualquier momento; sin embargo, este espacio no se potencia. En el aula, la interacción con el problema puede ser individual, en pares o grupos pequeños. Por lo general, es individual.

Respecto a la propuesta de los problemas como tareas para la casa (luego de haber resuelto algunas situaciones similares en clase y de haber adquirido el contenido matemático que permitirá resolverlo), busca la aplicación de lo aprendido a situaciones nuevas (parecidas), centrándose en un tratamiento individual (no grupal) ni dirigido por el maestro, cuya evaluación recae en el docente y se basa en un producto final (que contiene un proceso y la solución). Se puede exponer o no. Visto desde este ángulo, es suficiente conocer el método de resolución de problemas para poder resolver la situación. Basta identificar la vía (el procedimiento), la misma que puede ser ubicada a partir de la propuesta textual del problema, si es que este sigue un patrón conocido o mediante las relaciones establecidas entre los datos; en este caso, se necesita un análisis más minucioso de la situación.

Las formas expuestas de trabajar la resolución de problemas en el aula nos conducen a identificar dos planteamientos diferentes: aprender a resolver problemas y aprender resolviendo problemas. Para Contreras (2009), estas formas son complementarias:

> Aprender a resolver problemas conlleva el aprendizaje de herramientas heurísticas que tienen sentido en sí mismas, pero aprender matemáticas no es sólo aprender heurísticos. A través de algunos ejemplos pondré de relieve que resolviendo problemas se construye tanto conocimiento procedimental como conceptual. (p.75)

Estas ideas se corresponden con las de Alsina (2006, ¿Qué implica un buen uso de los problemas en clase de matemáticas?, párr. 4) quien señala dos enfoques claramente diferenciados de entender el uso de los problemas en la clase de matemáticas: los problemas son un recurso para aprender matemática y los problemas como contenido a enseñar. Desde la primera perspectiva, los problemas "estimulan el pensamiento y el razonamiento, es decir, se conciben como una herramienta que facilita que el alumno aprenda a pensar, que es la verdadera actividad matemática. Se prioriza la actividad heurística de la persona". Lo expuesto por el autor es distinto a plantear un problema para una motivación inicial o una contextualización, puesto que busca que a través de su capacidad de pensamiento se genere una auténtica actividad matemática. Desde la segunda, "requieren una respuesta almacenada previamente en la memoria, es decir, se conciben como un bloque de contenido matemático que debe ser enseñado y memorizado. Se prioriza la actividad mecánica de la persona". Esta actividad mecánica es necesaria, pero no suficiente; y debe apoyar a la anterior, para que aquella fluya sin distractores de esta naturaleza.

Por su parte, Codina y Rivera (2001), citando a NCTM (2000) manifiesta que la implementación de la resolución de problemas en las escuelas aún está en sus primeros pasos; sin embargo, "como metodología, es un recurso a través del cual se desea generar los contenidos de enseñanza y es considerada como parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas y no como parte aislada de los programas instruccionales." (p.126). Desde este punto de vista, la resolución de problemas no se centra en ser un medio de aplicación de contenido matemático sino un recurso para generar conocimiento nuevo. No obstante, en las aulas reales, llegar a este nivel de trabajo es un proceso lento, que lucha contra el tiempo real, asignado en las programaciones.

Considerando la definición del DLE (2018), *Resolución*, del latín *resolutĭo, -ōnis*, significa *acción y efecto de resolver o resolverse*; la palabra *Resolver*, del latín *resolvĕre*; de *re*, y *solvĕre*, soltar, desatar, tiene, entre otros, los siguientes significados: *desatar una dificultad o dar solución a una duda* y *hallar la solución de un problema*. La resolución de problemas conlleva un producto, un final (la solución) que implica, necesariamente, un proceso, aunque este no se plasme de manera explícita en la definición. Para resolver un problema se pasa por un proceso de resolución que finaliza en la solución del mismo. Es importante el resultado, pero este sin el proceso no dice nada de cómo se llegó a él: está vacío. No obstante, el procedimiento puede ser conocido por el alumnado como producto o como proceso. En el primer caso, el o la estudiante recibe la forma de resolver un problema y puede ser capaz de reproducirla; en el segundo, la construye a partir de los conocimientos previos. Una de las formas comunes de interactuar con los problemas matemáticos en el aula de primaria es a partir de tres pasos: *datos*[4], *operación y respuesta*. El primero implica leer el problema y extraer los datos del mismo, tanto conocidos (explícitos en el problema) como desconocidos (lo que debe hallar para resolver el problema); este paso depende del nivel de comprensión obtenido con el problema, que a su vez está asociado al tipo de problema propuesto. El segundo paso busca relacionar esos datos con una operación aritmética que puede ser simple o compleja, o a través de fórmula (de áreas, principalmente, o ecuaciones, reglas de tres, etc.), Finalmente, la solución o

---

[4] También llamado raciocinio. Esta forma de enfrentarse a los problemas está escrita en diferentes libros, como por ejemplo Ayer soñé con Valparaíso: crónicas porteñas de Manuel Peña Muñoz; o en Dos veces por semana de Giovanna Pollarolo. También en el Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las matemáticas en Antioquía 2012 – 2015. Usar una u otra palabra genera una visión distinta a la actividad matemática propiamente. La palabra "raciocinio" se asocia a razonar, pensar, inferir, etc.; "datos" a cierta información concreta que por lo general, está presente en el enunciado del problema.

respuesta involucra el resultado final de la operación u operaciones ejecutadas y la respuesta propiamente. D'Amore (2000) hace referencia a la escolarización del saber y de las relaciones y su efecto en el aprendizaje de las matemáticas, refiriéndose a la:

> .. incapacidad de los estudiantes para asumir sus responsabilidades respecto su propio comportamiento. Se conjetura que esto depende de varios factores vinculados con el rechazo del estudiante a la elección de su manera de aprender, dejando la responsabilidad de dicha elección a la institución escolar y al maestro (p.321).

Acto que, de acuerdo con el autor, se da casi siempre en el Nivel Primaria. En este contexto, los alumnos son aprendices receptivos de un conocimiento que, saben, deben conocer y aplicar: si las circunstancias son iguales, la comprensión y aplicación se refuerza; si el contexto cambia, puede generar un bloqueo que, si los estudiantes no asumen protagonismo y responsabilidad en su participación, no lograrán atravesar y se conformarán con manifestar "*no puedo*" o "*no me han enseñado*", esperando que el docente, u otro compañero, les muestre cómo hacerlo ya que en aquél o éste, han delegado esa responsabilidad. Asimismo, cuando aplican un conocimiento aprendido, sus respuestas suelen ser directas: "*porque así es*", "*porque me ha enseñado el maestro*", "*porque sí*". Cuando se conoce el camino, resulta sencillo seguirlo; cuando no, hay que pensarlo. Al saber el alumno cuál debe ser su conducta esperada, la puede reproducir de manera más o menos automática sin necesidad de poner a funcionar su aparato cognitivo (por ejemplo, se aprende una definición de memoria sin necesidad de saber lo que significan las palabras en ellas). La o el alumno actuará como ejecutando una orden pero sin poner a funcionar su razonamiento y juicio personal.

Los contrastes expuestos, la crítica al estado de confort respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje, lleva a asumir que se debe buscar otras formas de enfrentar los problemas matemáticos, fundamentado en su esencia misma. No basta con decir que los problemas y las matemáticas son importantes o que "*sirven para que no me engañen con las cantidades*". En el ámbito de la investigación educativa asociada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los distintos autores buscan mejorar el proceso de resolución de problemas en los y las estudiantes para lo cual trabajan sobre las estrategias de enseñanza y de aprendizaje. Sigarreta, Locia y Bermudo (2011) proponen una estrategia metodológica de carácter heurístico que favorece los procesos de resolución de problemas matemáticos, mejorando la habilidad de resolver problemas y los procesos metacognitivos de los estudiantes, permitiendo poner en acción su propia capacidad y actividad intelectual que le permita, entre otros, la amalgama de los conocimientos nuevos con los ya existentes en su bagaje y el desarrollo de operaciones intelectuales. Se busca que el alumno descubra, piense y cree y asuma responsabilidad en el proceso de resolución de un problema.

Guirles (2004) manifiesta que es importante tener en cuenta la tipología y dificultad de los problemas para poder trabajarlos y adecuarlos a un ciclo u otro de primaria, propone ampliar la gama de problemas formulados en el aula y permitir a los estudiantes plantear sus propios problemas y soluciones. Asimismo, para este autor, los pequeños proyectos matemáticos son un método de trabajo que sirve para darle significado y utilidad a los conocimientos matemáticos; se visualizan como herramientas de aprendizaje matemático que favorecen el diálogo, la elaboración, la comunicación matemática y la toma de decisiones que, en la medida que permitan mayor capacidad de actuación a los alumnos, favorecerán el aprendizaje.

González (2000) habla sobre la evaluación de un programa de Iniciación a las Matemáticas basado en la Resolución de Problemas para estudiantes del Primer Ciclo de Educación Primaria. Desde el punto de vista metodológico, son elementos importantes del programa: prestar más atención a los procesos que a los resultados, lo cual implica volver sobre ello a través del análisis y autoreflexión de lo realizado; el diálogo con otros como base para la construcción del conocimiento matemático, las unidades de aprendizaje con una estructura cíclica o repetitiva, y el profesor como mediador en dicho proceso, entre otros.

Desde la misma perspectiva, Múnera (2009) hace referencia a situaciones problemas que permiten la construcción de conceptos matemáticos. En este sentido, las situaciones problema se constituyen "en espacios para generar y desarrollar procesos de pensamiento que permitan la construcción sistemática de relaciones matemáticas; además de darle otra dinámica a la interacción entre estudiantes, conocimientos matemáticos y el profesor" (Introducción, párr.2). En esta dinámica, el alumno se propone conocer por sí mismo, interactúa con el conocimiento, con el profesor y con sus compañeros, haciendo la clase más dinámica y el conocimiento matemático, también.

De acuerdo a las investigaciones y propuestas descritas, el rol de maestro ha cambiado: ya no debe dictar (e imponer) la temática en cuestión siguiendo una metodología de enseñanza tradicional como única estrategia, sino permitir que los estudiantes participen directamente de la generación de soluciones propias a las distintas cuestiones, a partir de sus conocimientos adquiridos y aun cuando aquellas impliquen necesidad de conocimiento matemático nuevo, el mismo que se puede ir construyendo en la medida que se responsabilice por el proceso. Para ello, el maestro debe considerar diferentes aspectos del alumno: intereses, motivaciones, capacidades, comportamientos, etc. como punto de partida, y dejar espacios para que los aprendices expresen sus ideas, expliquen los procesos seguidos para resolver un problema, den opiniones, escuchen a sus compañeros e intervengan a partir de ello, ampliando o considerando otro punto de vista; el maestro debe creer en las capacidades de los alumnos, generar en los estudiantes la confianza en sus habilidades y vincular los nuevos conocimientos y los anteriores.

El maestro sabe que la situación debe cambiar, pero no sabe cómo; no obstante, también busca recetas que le permitan el cambio de metodología. Sin embargo, el día a día muestra que adoptar estas formas de enseñanza exige tiempo, espacio que se ve afectado por los compromisos que el maestro debe cumplir (como lo programado en la sesión o en la unidad) y que se manifiestan a través de productos (resolver una suma o un problema matemático específico, por ejemplo). El tratamiento actual de la matemática escolar se decanta en la trasmisión de procesos específicos que permitan llegar directamente a un producto (generado a partir de ellos), de forma que ante situaciones similares sea capaz de reconocer lo que tiene que hacer. En su ejecución, la matemática escolar prepara, generalmente, para enfrentarse a situaciones matemáticas concretas, aprendidas en clase a través de la propuesta del docente; no obstante, promover la capacidad de pensar y construir es menos desarrollada; tiene un carácter más aplicativo y su aprendizaje se basa en ello. Si bien, las evaluaciones en matemáticas buscan indagar sobre la capacidad del estudiante para resolver problemas matemáticos, muchas veces se precisa una capacitación aparte sobre el tema, la misma que si bien, sigue la propuesta de González (2000) sobre estructura cíclica, la misma es más expositiva que interactiva.

1.3. La resolución de problemas en los currículos nacionales de Perú y España

El papel que desempeña la resolución de problemas en la elaboración de los conocimientos matemáticos se revela a partir de considerar el aprendizaje de la Matemática, no como la apropiación de un conjunto acabado de resultados teóricos y procedimientos que deben ser aplicados posteriormente en la resolución de ejercicios y problemas, sino como un proceso activo que requiere de

> discusiones, conjeturas y pruebas, a partir de las cuales pueden desarrollarse nuevas ideas matemáticas (González, 2006, p.12).

Hoy en día, los distintos currículos escolares suscriben la importancia de la resolución de problemas como parte de la actividad del hombre y de la actividad matemática en el aula. En el sistema peruano, las Rutas de Aprendizaje (MINEDU, 2015)[5] exponen que la forma de aprender matemática es a través de un enfoque cuyo centro es la resolución de problemas, que conlleva promover formas de enseñanza y aprendizaje a partir del planteamiento de problemas en diversos contextos, que les permita construir (y no solo aplicar) conocimiento matemático a partir de la resolución de los mismos, propuestos a través de situaciones que le dan sentido. De esta manera:

> La resolución de problemas como enfoque orienta y da sentido a la educación matemática, en el propósito que se persigue de desarrollar ciudadanos que “actúen y piensen matemáticamente” al resolver problemas en diversos contextos. Asimismo, orienta la metodología en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática[6]. (p.13)

Paralelamente, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular peruano (MINEDU, 2009) señala como uno de los propósitos de la Educación Básica Regular al 2021 el “desarrollo del pensamiento matemático y de la cultura científica y tecnológica para comprender y actuar en el mundo” (p.21), indicando que “El razonamiento lógico, el aprendizaje de conceptos matemáticos, los métodos de resolución de problemas…son desarrollos imprescindibles para los estudiantes… El desarrollo del pensamiento matemático… contribuyen decisivamente al planteamiento y resolución de problemas” (p.25). Centrándose en el área de Matemática, este documento plantea que “… las capacidades explicitadas para cada grado involucran los procesos transversales de Razonamiento y demostración, Comunicación matemática y Resolución de problemas, siendo este último el proceso a partir del cual se formulan las competencias del área en los tres niveles” (p.186). Ello no es ajeno a lo que planteaba el Diseño Curricular Nacional

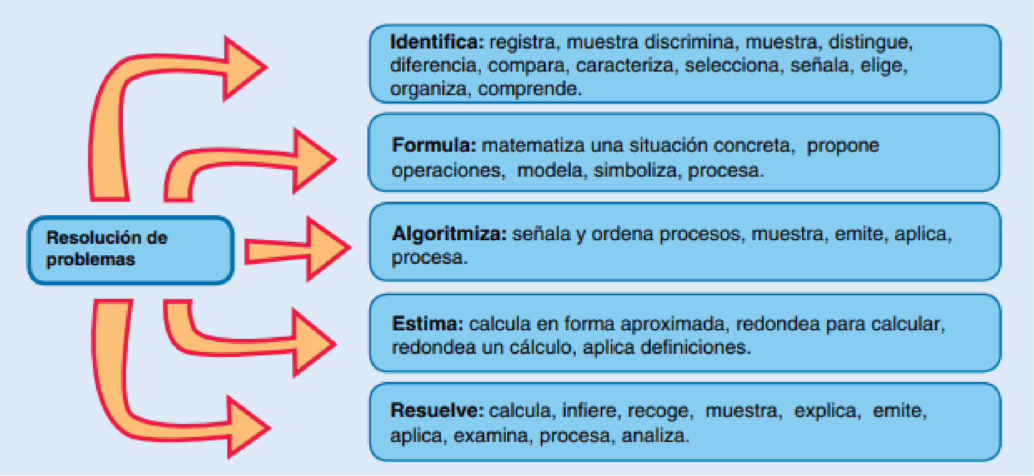
---

[5] Orientaciones pedagógicas y didácticas para una enseñanza efectiva de las competencias de cada área curricular.

[6] Actuar y pensar matemáticamente implica construir modelos, usar estrategias y generar procedimientos para la resolución de problemas, apelar a diversas formas de razonamiento y argumentación, realizar representaciones gráficas y comunicarse con soporte matemático

– proceso de articulación – peruano (MINEDU, 2005)[7] que considera que se aprende matemática para saber acerca del mundo y actuar con acierto en él y con los sujetos que lo conforman, ya sea en situaciones simples o con cierto nivel de complejidad, desarrollando pensamiento lógico - matemático. Por ello, la enseñanza de la matemática, en el marco de la Educación Básica Regular peruana, se planteaba como propósitos el desarrollo de los procesos transversales mencionados. Desde la Resolución de Problemas, este documento busca que el estudiante interactúe con los objetos matemáticos, activando su capacidad mental y ejercitando su creatividad, a través de procesos de reflexión; es decir, asumiendo más protagonismo en el proceso mismo de enseñanza – aprendizaje y haciendo explícito aquello que pueda logra. Esto es posible con una actuación de los y las docentes que oriente al estudiantado a la interacción con situaciones desafiantes que les permita asumir iniciativa observando, organizando datos, analizando, etc., poniendo en funcionamiento estrategias que le permitan resolver el problema, lo cual conlleva pensar no solo en la solución sino en el proceso que la generó. El papel de la o el docente como guía y orientador u orientadora es clave. Todo ello, vinculará al estudiante con la realidad, lo que le permitirá aplicar una actitud más significativa, comprometida, crítica, razonada y actual. Gráficamente, el documento, indica que la resolución de problemas implica las siguientes capacidades:

Figura 1. *Capacidades que implican la resolución de problemas*



Fuente: Diseño Curricular Nacional - Proceso de Articulación - 2005. pág. 123.

---

[7] En el momento de realizar el trabajo de campo estaba vigente el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular – Proceso de Articulación 2005. A partir de 2009 entró en vigencia el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular, fruto del anterior.

Actualmente, como parte del perfil de egreso de la Educación Básica, “el estudiante interpreta la realidad y toma decisiones a partir de conocimientos matemáticos, que aporten a su contexto” para lo cual “busca, sistematiza y analiza información para entender el mundo que lo rodea, resolver problemas y tomar decisiones relacionadas con el entorno…” (MINEDU, 2016, p.15). De esta manera, la actividad de resolución de problemas, de acuerdo a las normas peruanas, es básica, trascendiendo las aulas escolares para hacerse efectiva en la vida cotidiana a fin de lograr ciudadanos competentes al enfrentarse a diversas situaciones que requieran conocimiento matemático, sean estas sencillas, que abarquen un área o campo de estudio, o complejas, que abarquen más. De ahí que la propuesta de problemas matemáticos se materializa en situaciones del contexto.

Por su parte, el currículo español actual LOMCE (BOE, 2014) como la LOE (BOE, 2006) señalan como uno de sus objetivos de la educación primaria desarrollar en los niños y niñas las capacidades que les permitan “Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana” (BOE, 2014, p. 19354; BOE 2006, p. 17168). Asimismo, se indica que:

> Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados (BOE, 2014, p. 19386).

Se entiende que la competencia matemática radica en la habilidad para utilizar y relacionar el conocimiento matemático y sus formas de expresión y razonamiento, tanto a nivel matemático como de la vida diaria; ya sea para generar, producir, interpretar y ampliar conocimiento asociado, como para resolver problemas relacionados con la vida que le permita comprender mejor la realidad. En ambas propuestas y realidades, los problemas matemáticos son fundamentales en la gestión de la enseñanza de las matemáticas, los mismos que pueden plantearse en situaciones matemáticas, propiamente, como de la vida diaria.

1.4.Habilidad para la resolución de problemas

Al referirse a lo esencial de la actividad matemática, muchos autores han insistido, en diferentes épocas, en que ‘hacer matemáticas’ es básicamente ‘resolver problemas’, que resolver problemas dista mucho de repetir conceptos o procedimientos, sino que está en la línea de construir conocimiento matemático, buscarlo y utilizarlo. La capacidad de resolver problemas es personal. De acuerdo al Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular peruano (MINEDU, 2009), el proceso de Resolución de problemas pone énfasis en el aprendiz, en lo que él puede hacer con los objetos matemáticos a partir de su interacción con los mismos, la misma que ha de llevarlo a activar su propia capacidad mental, ejercitando su capacidad creativa, reflexionando y perfeccionando su proceso de pensamiento al aplicar y adaptar lo que sabe en diferentes situaciones. La capacidad para plantear y resolver problemas trasciende la propia área, y permite el desarrollo de capacidades diversas, propias de áreas curriculares diferentes; por otro lado, permite conectar las ideas matemáticas con el bagaje del aprendiz. Ferrer (2000), en la misma línea que resalta el papel del estudiante para desarrollar la habilidad para la resolución de problemas, indica que:

> La habilidad para resolver problemas matemáticos es la construcción y dominio, por el alumno, de los modos de actuar y métodos de solución de problemas utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos, en calidad de instrumentos y las estrategias de trabajo heurístico para la sistematización de esos instrumentos en una o varias vías de solución. (p. 58)

Dado el carácter creativo de la propia construcción, esta habilidad no se puede formar a partir de la repetición irreflexiva de acciones ya elaboradas por otros sin tomar en cuenta cómo se han asimilado y el nivel de significación que éstas tienen para los alumnos. La repetición rutinaria es una conducta autómata, sin reflexión. La *habilidad* para resolver problemas matemáticos es lo opuesto y supone la capacidad y disposición para actuar libre, interesada y concienzudamente frente a situaciones problemáticas que requieren de conocimiento matemático; es decir, el conocimiento y la experiencia que dispone a alguien para hacer frente a cualquier situación. Si observamos que un alumno o alumna resuelve un problema matemático propuesto, suponemos que tiene la habilidad para ello (sabe hacerlo); esto se corrobora si nos damos cuenta que puede resolver otros problema matemático propuesto en la escuela, en el libro de texto o en cualquier otro escrito. No obstante, ello requiere ir más allá de observar una conducta final, que no evidencia reflexión, relación, crítica, metacognición, entre otros; es importante observar el proceso que, en última instancia nos informa sobre la habilidad. La habilidad para resolver problemas implica diseñar, esbozar, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos utilizando una variedad de métodos y estrategias (originales, en el sentido de haber surgido de la creación *in situ* de la situación problemática planteada o enfrentada). La definición trasciende el producto elaborado o respuesta a la pregunta del problema, y realza la actividad personal de quien se enfrenta a la situación y la resuelve, es todo ese proceso de resolución.

En este proceso, la idea que se tiene de problema y la experiencia con los mismos predisponen hacia una u otra forma de actuación. Para Fernández (2006), tomando en cuenta lo que más de 400 estudiantes entre 9 y 12 años expresaron como concepto de problema y contrastando estas ideas con sus formas de actuar en la resolución de los mismos, hay cinco clases de alumnos: aquellos que identifican *problema* con una forma de presentación específica, que contienen operaciones "camufladas" o "escondidas"; quienes admiten que un *problema* ayuda a pensar; otros que entienden *problema* como una serie de operaciones complicadas; un cuarto grupo define el problema de manera específica (con un ejemplo) o indicando su función práctica (en su actuar estos niños solo hacen bien lo que saben hacer, repitiendo aquello que han aprendido). Por último, pertenecen al quinto grupo aquellos alumnos para los que la palabra problema es sinónimo de complejo y los anula hasta tal punto que se resisten a intentar un planteamiento de solución en función del problema y se limita a esbozar cualquier operación o producto, tenga relación o no con la situación planteada[8]. En cuatro de los casos, la asociación se hace directamente con las operaciones (dándole mayor importancia a estas); en el restante con una habilidad que le permite reflexionar su estrategia. En este caso, la meta no es la operación u operaciones propiamente, sino la situación que conduce a trabajar sobre la misma, identificando y contrastando diferentes maneras de representar, explorar y resolver los problemas; es decir, aquello que involucre pensar matemáticamente.

---

[8] Fernández Bravo nombra dichas clases de la siguiente manera: a) Acomodación operativa con necesidad de solución, b) reflexión operativa, c) sustitución de contenido, d) imitación de iniciativas y e) negación consciente.

Schoenfeld (como se citó en Santos, 2008, sección de Sobre los principios y caracterización de la resolución de problemas, párr.3) establece sobre el tema:

> Aprender a pensar matemáticamente –involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas "tácitas de juego".

La capacidad de pensar interviene en la habilidad para resolver problemas, es inherente a ello. Tomando en cuenta la categorización de Fernández (2006), frente a un problema matemático escolar o una gama de ellos, existen dos tipos de estudiantes o alumnos: los que se enfrentan al problema y lo resuelven (encuentran una solución correcta) y aquellos que no. En el primer caso, encontramos a los niños exitosos; y en el segundo, a los novatos. No obstante, los niños exitosos pueden ser auténticamente exitosos o parcialmente exitosos; los primeros actúan con experticia y de manera reflexiva frente a cualquier problema buscando soluciones adecuadas, mientras que los segundos muestran seguridad ante situaciones similares a aquellas que ya han podido resolver. Lachat (2008), manifiesta que las investigaciones han revelado que hay diferencias entre los resolutores expertos y los novatos en el proceso de resolución de problemas. La autora indica que los estudios demuestran que los resolutores expertos dedican más tiempo a conocer los problemas, muestran más capacidad de representación, que les permite clasificar el problema; esto permite que su estructura de conocimiento sea más ordenada y jerarquizada; además presenta un mejor nivel de desempeño. Lo expuesto pone énfasis en la etapa de comprensión del problema para una buena propuesta de solución. Por su parte, los novatos se centran en conocimientos aislados sin establecer relaciones auténticas; guían su proceso de resolución, principalmente, a través de rasgos superficiales del problema planteado, recuperando esquemas de resolución a partir de elementos concretos: ve el problema desde fuera, sin involucrase realmente. En este caso, el novato tiene más éxito en problemas similares por su estructura externa (siendo 'experto' en ello); mientras que el experto, trasciende en algún momento las características superficiales, involucrándose en la esencia misma del problema. Ambos tienen diferente nivel de competencia y habilidad frente a la resolución de problemas. Schoenfeld (como se citó en Santos, 2008, sección La investigación, párr. 1) presenta las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas:

> (a) el conocimiento o recursos básicos que incluye definiciones, hechos, fórmulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema; (b) estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc. (c) las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo… y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo y,… (d) las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas.

Obsérvese que las dimensiones expuestas abarcan diferentes aspectos del ser humano, como los conocimientos y las estrategias, que siempre han sido tomados en cuenta; y, no menos importante, lo que el aprendiz pueda pensar sobre lo que hace y siente, que ha cobrado más notoriedad en las propuestas. La *Habilidad* para la resolución de problemas involucra una serie de habilidades que, adquiridas y desarrolladas como un todo organizado, permiten actuar con eficacia y eficiencia frente a la situación problemática planteada. Cada una de ellas prepara para la siguiente e incluso la puede generar. Ferrer (2000) hace referencia a que la habilidad para resolver problemas se estructura a través de otras habilidades que denomina habilidades matemáticas básicas. Por ejemplo, la autora señala que para formar la habilidad general: “Resolver problemas geométricos de construcción, de cálculo y de demostración en triángulos y cuadriláteros, utilizando la relación de igualdad de triángulos” (p.77), son necesarias habilidades matemáticas básicas asociadas al conocimiento y dominio de triángulos y cuadriláteros, tal como se consigna en la habilidad general, en situaciones intra y extramatemáticas. Nótese que la habilidad propuesta hace explícito el conocimiento matemático necesario. Si bien estas habilidades matemáticas se consideran básicas, para su formación son necesarias otras que las facilitan y que de acuerdo a la autora se consideran elementales. Algunos ejemplos de estas, para el caso propuesto conducen a:

- Construir triángulos iguales aplicando los movimientos del plano.
- Construir mediatrices, bisectrices, alturas y medianas en triángulos.
- Demostrar propiedades de las diagonales en los paralelogramos.
- Generalizar relaciones entre los cuadriláteros convexos.
- Comparar superficies aplicando el concepto de superficies equivalentes.
- Calcular el área del triángulo.
- Denotar figuras geométricas.
- Calcular longitudes de lados de triángulos y cuadriláteros (p.77)

No se puede resolver problemas matemáticos (o de cualquier otra índole) con solo comprender un texto escrito que plantee una situación problemática, aunque esto ayude a contextualizar la matemática involucrada; se necesita más. Definitivamente, si el texto hace explícito más información matemática, si esta no se domina, la comprensión disminuye. Para Brousseau (como se citó en de Castro, 2011) se hace matemática solo cuando se interactúa con problemas, pero advierte que resolver problemas es solo una parte del trabajo. De ahí que el proceso de "hacer" matemáticas es más que una asociación entre palabra clave y operación, cálculos y deducciones o identificación de problemas tipo que conduzcan a la solución; involucra otros aspectos como la observación de patrones, la prueba de hipótesis. La capacidad para resolver problemas implica que el alumnado manipule objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione y mejore su proceso de pensamiento. Esto exige que el o la estudiante observe, organice datos, analice, formule hipótesis, reflexione, experimente, empleando diversas estrategias, verifique y explique las estrategias utilizadas al resolver el problema, plantee preguntas u otros problemas. Por lo tanto, para resolver problemas el alumnado ha de actuar con independencia, eficacia y eficiencia frente a cualquier situación, de forma que, en primer lugar, pueda enfrentarse a la misma con la seguridad de poder seguir un camino viable y encontrar la solución (o soluciones) requerida. Sin embargo, más allá de resolverlo, la habilidad para resolver problemas ha de despertar en el aprendiz el gusto por la actividad matemática, que conduce a que pueda pensar en ella más allá d haber resuelto un problema y a propósito de ello.

La habilidad para resolver problemas matemáticos está en estrecha relación con las habilidades matemáticas y con habilidades de pensamiento; no obstante, el problema en cuestión, generalmente, se presenta al estudiante desde el exterior (a través de la propuesta del docente o del libro de texto) y el alumno debe comprenderlo para poder abordarlo correctamente. Esto nos conduce a reconocer la importancia de habilidades de comprensión lectora para un óptimo encuentro con el problema: si el alumno evidencia dificultades de comprensión, su capacidad de resolución se verá limitada. La comprensión es un proceso mediante el cual el lector, en interacción con el texto que lee, obtiene un significado, derivado de sus experiencias previas acumuladas (Pérez Zorrilla, 2005); comprender el texto de un problema matemático implica práctica en ello: a más experiencia, mejor capacidad de comprensión. Rosales y Salvo (2013), con relación a la primera acción frente a un problema matemático, indican que:

> Para resolver un problema, lo primero que debe hacer el estudiante es leerlo, lo cual implica realizar la comprensión lectora necesaria, misma que se define como la capacidad para producir conocimiento a partir de la lectura; no se trata sólo de entender qué se dice, sino crear más información, misma que el sujeto interpreta, infiere y recrea a partir de lo que ha leído. (p.21)

Con estas ideas, las autoras expresan que la comprensión lectora no se circunscribe a comprender un texto, explicándolo con sus propias palabras, sino que a partir de ello, trascienda lo que el texto le hace explícito. Romero (2012) encuentra “una correlación significativa entre la comprensión lectora y la resolución de problemas matemáticos, siendo la primera variable básica para que los niños comprendan el enunciado de un problema matemático” (p. 62).

La forma de presentar un problema matemático dirige el camino hacia un grado de comprensión lectora u otro; de esta manera, los problemas textuales basados en palabras clave directamente asociadas con una operación aritmética básica, por ejemplo, exigen del lector un nivel elemental de comprensión, mientras que los problemas planteados sin hacer referencia a dichas palabras, o que las incluyen, pero no funcionan como tal, requieren niveles superiores. Si la escuela se basa en formas de enseñanza que implican reproducción de patrones (a través del reconocimiento de palabras clave), los estudiantes actuarán en consonancia; sin embargo, si la escuela se empeña en generar situaciones que permitan crear, el alumno intentará producir a partir de lo que sabe. En este caso, es importante la comprensión del problema como elemento primordial a partir del cual se puede identificar rápidamente la forma de resolverlo o en su defecto intentar otra forma. Los métodos escolares que no obvian la comprensión lectora logran un mejor enfrentamiento a cualquier tipo de problemas, que aquellos basados en la identificación inmediata de la palabra clave conducente a la reproducción de una forma aplicada en situaciones parecidas. El éxito de los primeros está en las relaciones que puedan establecer de manera personal a partir de los datos propuestos directa e indirectamente, mientras que el logro de los segundos está en la similitud de la nueva situación con la situación modelo o inicial, lo cual a largo plazo no necesita una comprensión de la situación propiamente más sí un reconocimiento de la misma como parte de un prototipo aprendido[9]. La comprensión lectora se muestra como un elemento importante y significativo en los procesos mentales que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos (Toboso, 2004; Beltrán y Repetto, 2006; Bastiand, 2012; Fernández, 2013).

Hacer referencia a la habilidad de comprensión lectora como una habilidad que influye la *habilidad* de resolución de problemas nos conduce a pensar que la habilidad para resolver problemas inicia en la comprensión del mismo, lo que marcará el tránsito por cada fase de la resolución de problemas: comprender el problema, seleccionar un plan, ejecutar algoritmos y evaluar la solución.

1.5.Tipos de problemas matemáticos

La clasificación de los problemas matemáticos en el ámbito escolar es diversa. No hay un único criterio. En la escuela, si partimos de la idea de que toda actividad matemática que ofrece dificultad puede catalogarse como problema, podemos incluir los llamados ejercicios u operaciones dentro del tipo de problemas matemáticos, sin necesidad de plasmar dicha operación, fórmula o ecuación en una situación cotidiana, en un texto o en un contexto ordinario. Una operación puede ser novedosa y ofrecer dificultad. No obstante, las operaciones propuestas como ejercicios tienen como finalidad practicar en el uso de las mismas. Consecuentemente, un problema matemático escolar que implique una traducción conocida, busca ejercitar al estudiante en la solución de cierto tipo de problemas; al reconocer su forma de solución, estas situaciones no ofrecen dificultad al estudiante; tampoco implican crear nuevas formas de solución (excepto si

---

[9] Los comúnmente denominados problemas tipo suelen desarrollarse correctamente con un nivel de comprensión mínima (o literal).

ese es el propósito). "Un ejercicio es un problema si y sólo si la vía de solución es desconocida por la persona" (Llivina, 1999, p. 48).

Aparece en las líneas anteriores la idea de problema escolar. Campistrous y Rizo (2013) expresan que los problemas escolares:

> Tienen características específicas en cuanto a que por lo general son situaciones didácticas que asumen, en mayor o menor grado, una forma problémica cuyo objetivo principal es la fijación o aplicación de los contenidos de una asignatura dada (conceptos, relaciones y procedimientos), y que aparecen regularmente en el contexto de los programas que se quieren trabajar. Estos problemas escolares son tipificados, en mayor o menor medida, y para su solución se desarrollan procedimientos más o menos rutinarios (p. 3).

Los problemas escolares tienen fines didácticos y por ello su propuesta es intencional y prefijada. Una vez definido lo que es un problema matemático, en el ámbito escolar, su clasificación depende de la diferencia que se reconozca entre, al menos, dos problemas. Las diferencias pueden ser externas o internas, tanto en relación al sujeto que resuelve como al problema en cuestión. Las diferencias externas están asociadas a la forma de presentación del problema o al ambiente en el que el sujeto lo resuelve, mientras que las internas se asocian tanto a los contenidos involucrados como a la actitud o capacidad de quien se enfrenta al problema.

1.5.1. Problemas aritméticos, algebraicos, geométricos, estadísticos

Con frecuencia se denominan los problemas matemáticos en correspondencia con la rama de la Matemática en la cual se aplican los contenidos o los recursos para resolver el problema; de esta manera tenemos problemas aritméticos, algebraicos, geométricos, estadísticos, entre otros. En la enseñanza primaria, los problemas aritméticos son ampliamente utilizados y se considera así a aquellos cuya vía principal de solución es la aplicación de las propiedades de los números o de las operaciones básicas con los mismos; sin embargo, existen problemas que para resolverse se pueden aplicar recursos de uno u otro campo. Fernández (2001), apoyándose en diversos autores, encuentra diferentes ideas sobre la distinción entre problema aritmético y algebraico, por ello indica que para Palarea y Socas (1995), la distinción depende del sistema de representación seleccionado para resolver el problema; asimismo, añade que la distinción de Lesh, Post y Behr (1987), se centra en cómo se actúa ante un problema algebraico, indicando que en este tipo, primero se describe y luego se calcula; por otro lado, nombrando a Kieran (1992) y Stacey (1995), manifiesta que estos consideran problemas algebraicos a "aquellos que implican relaciones matemáticas en las que el signo "=" no es sinónimo de efectuar una operación aritmética, sino un signo de equilibrio entre el miembro que está a su izquierda y el que está a su derecha. Ambos miembros contienen cantidades que se operan aritméticamente." (p.140). No obstante, la línea que separa un problema algebraico de uno aritmético no está clara para los expertos, de acuerdo al autor.

Echenique (2006) indica que con los problemas geométricos "se trabajan… diferentes formas y elementos, figuras bidimensionales y tridimensionales, orientación y visión espacial, los giros…" (p.39). Esta autora, clasifica los problemas en seis grupos: problemas aritméticos, geométricos, de razonamiento lógico, de recuento sistémico, razonamiento inductivo y de azar y probabilidad; estos últimos permiten predecir con cierto rigor, presentándose en muchos casos a través de juegos o situaciones. Por su parte, Sanabria (2009) califica los problemas geométricos como los más difíciles "quizá porque no hay un camino trazado para resolverlos" (p.1) y porque los procesos cognitivos y metacognitivos involucrados, se encuentran en una variedad de estos problemas. No obstante, distingue, dentro de esta área, entre ejercicios y verdaderos problemas; considerando dentro de los primeros calcular un área o deducir la semejanza entre dos triángulos; resaltando que en estas situaciones, las conductas son automatizadas, mientras que en los verdaderos problemas, se requiere de procesos de reflexión.

1.5.2. Problemas determinados e indeterminados

Una segunda clasificación de los problemas matemáticos está asociada a la cantidad de soluciones del problema. De acuerdo con esto, un problema matemático es *determinado* o *indeterminado*. Lorente (s.f.), hace referencia a esta clasificación al decir que "En su libro, Diofanto no establece ninguna distinción entre los problemas determinados e indeterminados, en estos últimos sólo da una de las infinitas soluciones. En el problema indeterminado siguiente se ve como usa el mismo método para resolverlo que en el problema determinado anterior" (sección Época Helenistica, párr.11)[10]. De esta forma, si el problema tiene una solución o varias en número fijo el problema es

---

[10] Los problemas plantean: Calcular dos números, tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208 y calcular dos números tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado del otro da siempre como resultado un cuadrado perfecto.

determinado, mientras que, si tiene un indefinido número de soluciones, el problema es indeterminado[11], lo cual se corresponde con la definición dada por el Diccionario de lengua española. Sin embargo, Miranda Sánchez (2021) define como problemas determinados aquellos para los que “existe una manera de resolver un ejercicio…mientras que, si se tiene varios métodos de dar solución, se está frente a un problema indeterminado” (pág. 24), centrándose en las vías de solución más que en el número de soluciones. En la escuela primaria abundan los problemas con una solución, destacando una manera para resolverlos, mientras que los que requieren varias soluciones o vías para ello se trabajan en menor medida.

1.5.3. Problemas verbales y no verbales

Los problemas matemáticos escolares se presentan a los estudiantes como situaciones verbales sobre algún hecho cuantitativo que se produce en el mundo real. Esta característica (verbal) los puede diferenciar de los llamados *ejercicios* que se presentan como operaciones para ser resueltas. Los problemas verbales llevan al aula escenarios de la vida real con situaciones que plantean una pregunta o actividad, la misma que puede ser respondida o ejecutada usando conocimiento matemático, con lo cual le da al alumno la oportunidad de poner en práctica lo aprendido en el aula. Al no presentar directamente la traducción matemática, como lo hace el planteamiento de una operación, son una herramienta importante para enseñar a razonar. Carpenter y Moser (1983, como se citó en Casajus, 2005) manifiestan que los problemas verbales podrían utilizarse como elementos de apoyo para desarrollar conceptos asociados a las operaciones aritméticas simples, incluso antes de incidir en el aprendizaje del cálculo, que podrían iniciarse a partir de aquellos. Apoyándose en esta idea, muchos docentes utilizan los problemas matemáticos como situaciones introductorias en sus clases, de tal manera que permiten ubicar una actividad matemática en una situación propuesta; en estos casos, los contextos no ofrecen dificultad, sino que esta se encuentra en lo que se debe hacer (por ejemplo, problemas verbales para introducir u operar con fracciones). Autores como Lago y Rodríguez (1999, como se citó en Canseco y Franco, 2002) expresan que los problemas verbales son situaciones matemáticas muy relevantes para el alumno ya que consisten en “descripciones verbales de algún evento cuantitativo que se produce en el mundo real”

---

[11] En *El Reino interior de Rubén Darío y Crimen Amoris de Verlaine* también se hace referencia a este tipo de problemas: “… En realidad, esta indeterminaci6n ante las cuestiones más difíciles, ¿no es análoga al problema indeterminado de la matemática, aquel que puede tener indefinido número de soluciones, y que, por lo tanto, es infinitamente más complejo que el problema determinado, aqué1 que no puede tener sino una solución?”.

(p.2), lo que lo convierte en un medio ideal para motivar a los escolares en el aprendizaje de un concepto o habilidad particular a través de escenarios conocidos y/o motivadores. Este tipo de problema, que se presenta de manera verbal, puede expresarte a través de la vía oral o escrita. Consta de un texto con una o varias oraciones, algunas con contenido matemático.

Gallardo (2001) hace referencia a las multiplicaciones con cifras desconocidas como problemas *no verbales* "con formato común pero muy diferentes unos de otros en cuanto al proceso requerido para su resolución" (p.4), ya que considera que este tipo de multiplicaciones puede definirse como verdaderos problemas matemáticos por contener características comunes a ellos, por ejemplo, el no existir ningún procedimiento automático o predeterminado que permita resolverla de manera segura e inmediata. Fundamentándose en diferentes autores (Puig, 1996; Carrillo, 1998), Gallardo afirma que estos problemas no verbales se pueden clasificar de *aritméticos* por el contexto en el que se desarrollan; *de hallar* y no de demostrar, *de búsqueda* y no de aplicación; *puros* por estar inmersos en un contexto matemático, *estructurados* por estar bien formulados y por tener que diseñar el resolutor el procedimiento de solución y *cerrados* por ser precisos en su planteamiento y en su solución, aunque admitan varias respuestas correctas. Con estas palabras, el autor, nos muestra distintos tipos de problemas y nos indica que un problema puede pertenecer a diferentes tipos.

Por otra parte, Arteaga y Guzmán (2005) definen los problemas verbales como "aquellos que se plantean de manera oral o escrita, en forma de enunciados" (p.1). La mayoría de los problemas verbales se caracterizan por tres componentes:

- Una situación o historia que lo engloba de principio a fin; aunque este componente, a menudo, no es esencial para la solución misma del problema; de hecho, en los problemas simples, sujetos a una palabra clave y datos numéricos directamente relacionados, basta con identificar aquella para plantear la operación que pueda resolver el problema (o responder a la pregunta).
- Información o datos para resolver el problema. A veces se incluye información irrelevante que un resolutor inseguro puede usar para la solución.

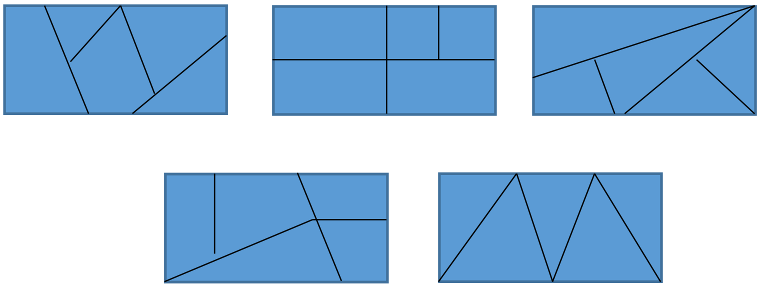
- La pregunta sobre una cuestión matemática (una cantidad, por lo general), para la que hay que encontrar respuesta, a través de la conjugación de la información. Puede plantearse cono actividad propiamente, sin una interrogante.

No obstante, Jimeno (2012) manifiesta que los problemas verbales generan muchos contratiempos a los estudiantes, quienes pueden haber aprendido a reconocer y resolver una operación propuesta directamente, pero no por ello aplicarlas a situaciones concretas. Las ideas de la autora destacan la diferencia entre dominar una operación y proponerla a partir de una situación, lo cual requiere otro tipo de habilidades (previas).

Si consideramos la idea de problema verbal como aquel expresado a través de palabras, los siguientes ejemplos, podrían catalogarse como problemas verbales:

Problema 1: "Camilo tiene 5 reglas más que Rodrigo. Camilo se compra algunas más. Ahora Camilo tiene 13 reglas más que Rodrigo. ¿Cuántas reglas se ha comprado Camilo?" (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998, p. 536).

Problema 2: Formados rectángulos iguales: Con todas las piezas, construye cinco rectángulos del mismo tamaño[12].



Si bien, ambos problemas hacen uso de la palabra para poder transmitir lo que se espera del estudiante, el segundo evidencia un cierto vacío en el texto que no se percibe en el primero[13]. Nótese que, en el segundo caso, la información que no presenta el texto, se puede extraer de las piezas (algunas, como las del segundo rectángulo puede dar información de la medida del mismo, puesto que se aprecia más sencillo de armar un rectángulo a partir de ellas). Este segundo ejemplo, se asocia a las actividades lúdicas o dinámicas.

---

[12] Para efectos de presentación, los rectángulos se muestran armados.

[13] El vacío se refiere a la falta de información que conduzca a la solución del problema. En el primer caso, la solución del problema necesita un dato que el enunciado no expresa directamente, pero que brinda la información necesaria para poder acceder a él. En el caso de los rectángulos, la información está en las piezas.

1.5.4. Ejercicios, problemas e historias

Blanco (1993), tomando en cuenta las aportaciones de realizadas por Butts (1980), Charles y Lester (1982) y Borassi (1986)[14], propone una clasificación de problemas que distingue entre ejercicios, problemas e historias: 1) Ejercicios de reconocimiento; 2) Ejercicios algorítmicos o de repetición; 3) Problemas de traducción simple o compleja; 4) Problemas de procesos; 5) Problemas sobre situaciones reales; 6) Problemas de investigación matemática; 7) Problemas de puzles; 8) Historias matemáticas. Estas últimas, esconden intencionalmente en su propuesta ciertos problemas matemáticos que estimulan el interés por conocer y resolver. Nótese que el autor establece subclases de ejercicios y problemas de acuerdo a su función. Los ejercicios de reconocimiento se orientan al conocimiento teórico, mientras que los ejercicios algorítmicos buscan que los estudiantes se ejerciten en la forma de resolver una operación; estos son muy frecuentes en las clases de matemáticas.

Las siguientes clases, el autor las identifica como problemas, con características distintas, de acuerdo a su nivel de complejidad en la resolución; de esta manera, los problemas de traducción se contextualizan en una situación concreta y su solución supone traducir a lenguaje matemático aquello que se expresa en el problema; la traducción puede ser simple o compleja. Los problemas de proceso difieren de los anteriores puesto que requieren de pensar en su solución, ya que esta no es tan inmediata (no hay una traducción propiamente), formándose juicios sobre la posibilidad de encontrar varios caminos para encontrar la solución, mostrando imaginación e ingenio. Los problemas sobre situaciones reales basan su propuesta en hechos reales (que el estudiante puede vivir o conocer) que requieren de conocimiento matemático, para encontrar la solución, visualizándose la matemática como una herramienta que permite comprender la situación y darle sentido. Los problemas de investigación matemática se contextualizan en el área (intramatemáticos) y su solución, al requerir de habilidades investigativas, no es inmediata ya que implica conceptos difíciles y un alto conocimiento matemático. Los puzles son problemas que muestran el aspecto lúdico de la matemática; pueden resolverse no necesariamente, mediante procesos matemáticos. Finalmente, las historias

---

[14] Borasi (1986) clasifica los problemas en *ejercicios, problemas verbales, enigmas, prueba de una conjetura, problemas de la vida real, situaciones problemáticas y situaciones* (p. 134). Butts (1980), desde el punto de vista del nivel de creatividad o tipo de actividad necesarios para atacarlos, los jerarquiza en ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de búsqueda y situaciones problemáticas. Finalmente, Charles y Lester (1982)

matemáticas se encuentran en narraciones que con intención matemática o no, requieren de conocimiento matemático para su comprensión.

A continuación se expone un ejemplo de cada categoría, extraídos de Blanco (2003, p. 1 – 8), excepto uno de ellos, que corresponde a otro autor. De acuerdo a la descripción, el lector podrá identifica a qué clase corresponde cada uno, pues no se enumeran, necesariamente, siguiendo el orden expuesto anteriormente:

a) Resolver la ecuación $x2-3x-5=0$

b) $3+7>2+5$. ¿Verdadero o falso?

c) En un club de ajedrez hay 15 miembros. Si cada uno juega una partida contra cada uno de los demás miembros, ¿cuántas partidas podrán jugarse?

d) En una reunión hay 49 personas, doble número de mujeres que de hombres y el número de niños es el cuádruplo del número de hombres. Hallar cuántos hombres, mujeres y niños hay en la reunión.

e) Queremos cambiar las baldosas de dos clases y del pasillo del colegio. ¿cuántas baldosas necesitaremos?, ¿podremos hacer una estimación del costo?

f) Probar que si los tres términos de una progresión aritmética es 36, el término del medio vale 12.

g) Dividir un triángulo obtusángulo en triángulos acutángulos.

h) Había una vez, hace mucho tiempo, un pastor que tenía una oveja – empezó el hombre –. Como solo tenía una, no necesitaba contarla: si la veía, es que la oveja estaba allí; si no la veía, es que no estaba, y entonces iba a buscarla… Al cabo de un tiempo, el pastor consiguió otra oveja. La cosa ya era más complicada, pues unas veces las veía a ambas, otras veces solo veía una, y otras ninguna… (Frabetti, 2000, p.11).

1.5.5. Problemas abiertos y cerrados

La forma de enunciar el problema facilita o no la solución del mismo, puesto que puede hacer evidentes o no los pasos que conduzcan a su solución; sin embargo, en la escuela se aprecian problemas cuya solución no solo es evidente sino que es única. En el campo de las ciencias, Garret (1988) hace referencia a los problemas "abiertos" y "cerrados" describiéndolos de la siguiente manera:

> Problemas cerrados son aquellas situaciones que tienen bien solo una respuesta o más de una, pero igualmente correctas. El resolvente sabe generalmente cuándo ha llegado a una respuesta y, como sabemos que hay una respuesta a la que llegar, entonces es posible *solucionar* estas situaciones...
>
> Hay, por otro lado, situaciones para las que puede haber varias respuestas de las que ninguna de ellas sea correcta o equivocada en términos absolutos, sino simplemente la más adecuada para un conjunto dado de circunstancias… Estas situaciones abiertas carecen de una solución definida y solamente pueden ser resueltas… (p.226)

Perales (1993) clasifica los problemas en "abiertos" y "cerrados" atendiendo a la naturaleza del enunciado y a las características del proceso de resolución e indica que los problemas cerrados contienen toda la información necesaria y se resuelven mediante el empleo de un algoritmo, mientras que los problemas abiertos "implican la existencia de una o varias etapas en su resolución que deben ser aportadas por el solucionador mediante la acción del pensamiento productivo" (p.171). En ambos casos, nombran de igual manera a problemas con connotaciones diferentes: mientras que en el primer caso el problema cerrado se asocia a la solución o soluciones correctas del problema, en el segundo al proceso de solución, que es específico. Para el caso de los problemas abiertos, el primer autor nos dice que no se puede hablar de soluciones correctas sino adecuadas, y el segundo hace referencia de procesos más complejos y personales.

En el campo de la Matemática, Silver (como se citó en Noda, 2000; Ayllón, 2012) nos dice que el término "abierto" se usa para aquellos problemas que están sin resolver. No obstante, aclara que en el momento en que alguien encuentre una solución se suscita la clausura del problema; de esta manera un problema abierto se puede transformar en cerrado en cuanto se halle la solución al mismo. Nótese que la característica se asocia a una falta de solución y no al proceso ni al tipo de soluciones. Noda (2000) y Ayllón (2012) añaden que, en Educación Matemática, la idea de problema abierto se usa con diferentes significados, que se asocian a los expuestos anteriormente: excepto el último: cuando el problema genera a) respuestas e interpretaciones diferentes; b) distintos métodos de solución y c) otros problemas o generalizaciones. Bertoglia (como se citó en Sigarreta y Arias, 2003, p.17) hace referencia a la lógica al referirse a este tipo de problemas:

> Problemas Cerrados: La solución se deduce de forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema y que resulta suficiente para encontrar la respuesta correcta. El resolutor dispone de toda la información, solo necesita integrarla aplicando los recursos de la lógica; por ello suelen llamarse "problemas de inferencias lógicas".
>
> Problemas abiertos: El resolutor necesita ir más allá de la información recibida, utilizándola de manera y/o modificando los significados atribuidos a los elementos del problema.

La propuesta de anterior se asocia, parcialmente, a la Perales (1993), por cuanto la información es suficiente en los problemas cerrados. Por otra parte, Piñeiro, Pinto y Díaz-Levicoy (2015) relacionan un problema abierto y uno cerrado con su estructura, denominándolos problemas de estructura abierta y problemas de estructura cerrada y afirmando que los primeros no tienen una propuesta estándar ni clara en su presentación y que los datos no son suficientes, mientras que en los cerrados, sí, determinándose su solución a partir de los datos expuestos. En la actualidad se enfatiza la importancia de los problemas abiertos en clase por cuanto permiten que los estudiantes desarrollen diferentes capacidades y actitudes frente a su resolución. Para Verani (s.f), los problemas abiertos no solo admiten diversas formas de solución y/o diferentes respuestas sino que resalta el que se propongan con poca información, permitiendo a los estudiantes formular nuevas preguntas y construir estrategias personales de resolución. De acuerdo a las características, los problemas abiertos permiten un mejor trabajo matemático que los problemas cerrados por cuanto la conducta del estudiante durante el proceso de resolución no es mecánica o automática, sino reflexiva e, incluso, creativa.

A continuación, se propone al lector un ejemplo de problemas abiertos y otro de problemas cerrados, propios de la escuela Primaria, de acuerdo a las características antes mencionadas. Evidentemente no se incluye ningún teorema por la complejidad del mismo:

1. Encuentra el volumen de un prisma rectangular que tiene una altura de 3,5 m, una profundidad de 2,7 m y una anchura de 3,8 m.
2. Plantea una situación que implique calcular el volumen de un prisma rectangular con el fin de resolverla.

1.5.6. Problemas bien estructurados y mal estructurados

Otra clasificación considera los problemas bien estructurados, problemas mal estructurados y estructurados que requiere pensamiento productivo. Nótese que Piñeiro, Pinto y Díaz-Levicoy (2015), distinguen los problemas abiertos y cerrados como problemas de estructura abierta y de estructura cerrada, según su propuesta esté bien o mal estructurada o definida. Estas denominaciones, asociadas a su estructura, se aprecian en Reitman (1965), Simon (1973) y Frederiksen (1984) (citados por Noda, Hernández y Socas, 1999 y Ayllón, 2012). En la escuela, la mayoría de los problemas propuestos son del primer tipo, pues requieren soluciones inmediatas, por ello, su estructura no ofrece una dificultad significativa y los docentes suelen construirlos de determinada manera; este tipo de problemas busca, principalmente, hacer evidentes conceptos matemáticos y permitir que los estudiantes los reconozcan en la situación. Ayllon (2012) indica que los problemas bien estructurados presentan “la información necesaria para resolverlo, las reglas para encontrar la solución correcta son claras y tienen criterios definidos para verificar la solución” (p.35). Asimismo, afirma que un problema mal estructurado se puede convertir, a lo largo de su resolución, en problema bien estructurado. Ching y Chía (como se citó en Romero y García, 2008) establecen las características de los problemas bien y mal estructurados, las mismas que se exponen en la siguiente tabla, para una mejor comparación:

Tabla 2. Características de los problemas bien y mal estructurados

Bien estructurados	Mal estructurados
▪ Sus soluciones son convergentes (o afines).	▪ Sus soluciones son múltiples (o variadas).
▪ Las reglas y principios que permiten su solución son limitados (y no precisa más).	▪ Los conceptos, reglas y principios necesarios para la solución no son claros, con lo cual se amplía la gama.

▪ Sus soluciones se basan en procesos lógicos y algorítmicos	▪ Permiten distintas vías o formas de llegar a la solución (requiere de procedimientos heurísticos).
▪ Se circunscriben dentro de criterios precisos y limitados.	▪ Se aprecian menos criterios definidos, con lo cual son menos manejable y se tiene que pensar más en su resolución.
▪ Se conocen todos los elementos y procesos necesarios para resolverlos.	▪ Una o varias partes de la situación propuesta no están claramente especificados.
	▪ Lo anterior desprende que la información requerida para resolverlo no se hace evidente en el planteamiento del problema.
	▪ Asimismo, convergen distintas disciplinas (lo que lo vuelve más complejo).

Aunque los autores no lo hacen explícito, los problemas bien estructurados exponen en el texto la información necesaria para resolverlo, de forma que el resolutor no debe buscarla más allá de lo que el planteamiento le muestra, así como que su campo de acción es limitado (una sola disciplina). De acuerdo a las características expuestas, es evidente que la actitud y aptitud del o la estudiante frente a cada tipo de problemas es distinta, las habilidades cognitivas son diferentes y más complejas cuando los problemas están mal estructurados ya que su propuesta es compleja y su proceso de solución no es evidente. No obstante, se considera que estos presentan un mayor reto ya que implica mayor reflexión, reto que solo puede ser visualizado por un buen resolutor y, en menor medida por un resolutor novato o con pocos recursos cognitivos y metacognitivos.

1.5.7. Problemas bien y mal definidos

La clasificación de problemas en bien definidos y mal definidos ha sido acuñada por diversos autores, esta clase se asocia, en algunos casos, a los problemas bien o mal estructurados. Para Salvat (1990), en los problemas bien definidos, está claro cuál es el contenido del estado final, por lo que se espera que los sujetos que se enfrenten al problema deben obtener el mismo estado final para que se considere resuelto, mientras que en los problemas mal definidos se conoce el estado inicial pero no se puede determinar un único estado final. Noda (2000) comparte la idea anterior al decir que en el primer caso es evidente el objetivo o estado final del problema considerándose resuelto cuando el sujeto logra alcanzar el objetivo; en el segundo caso, no sucede lo mismo puesto que en los problemas mal definidos, no hay acuerdo sobre aquello, cuya definición forma parte del problema.

Castro (2002), en la misma línea, indica que un problema bien definido tiene tanto los estados (inicial y final), como los operadores a aplicar para pasar de un estado a otro, bien definidos; es decir, todo ello se visualiza correctamente en el problema; si esto no sucede, si alguno de estos aspectos es confuso, se habla de problema mal definido. En los problemas bien definidos, que son los que se pueden observar en un proceso de enseñanza – aprendizaje que busca que los estudiantes apliquen conocimiento matemático específico, quien resuelve recibe toda la información necesaria para resolverlos quedando establecidos claramente en la propuesta, la solución o el camino para alcanzarla; en los problemas mal definidos no sucede lo mismo, y el resolutor ha de pensar en muchos aspectos, desde el primer contacto con el problema. Basoredo (2009) asocia la resolución de problemas bien definidos con la aplicación de destrezas y los problemas mal definidos con la de habilidades, dado que los primeros admiten soluciones algorítmicas, predecibles y probadas, mientras que para resolver problemas mal definidos se debe recurrir a procedimientos heurísticos y a distintas soluciones hasta encontrar la más eficaz.

Por otro lado, Miró (2003) distingue entre problemas bien definidos y situaciones. Para este autor, los primeros son fáciles de comprender e inteligibles por su claridad y precisión al formularlos, propuestos por los docentes para ayudar a sus estudiantes a resolver problemas; sin embargo, poco probables que se identifiquen con los problemas que un estudiante pueda encontrarse en la vida diaria, para los que el autor utiliza la palabra ‘situaciones’, las mismas que pueden tener las características de los problemas mal definidos o mal estructurados, pero que el autor define como “ambiguas e imprecisas, a menudo explicadas verbalmente en lenguaje no técnico, con incongruencias y contradicciones” (p. 21), por lo que el plan de solución no está claro y será un reto planificarlo.

Como se puede observar, la clasificación propuesta considera, básicamente, dos elementos: la información y la estructura del problema, siendo los problemas mal definidos los que despiertan el pensamiento creativo, puesto que no brindan todo lo necesario para resolverlos y es el resolutor quien debe idear un plan que le permita, en primer lugar, dar sentido al problema y, luego, buscar una solución. Tanto los problemas bien estructurados como los bien definidos son los que generalmente se plantean en el aula y los problemas mal estructurados y los mal definidos, los que se encuentran en la vida diaria.

1.5.8. Problemas rutinarios y no rutinarios

En el colegio, las actividades propuestas a los estudiantes suelen buscar que el alumno descubra un conocimiento o practique y se familiarice con uno ya adquirido. Este objetivo no es ajeno a la actividad de resolución de problemas matemáticos escolares. La mayoría de problemas matemáticos escolares de suma de fracciones o de volúmenes, por ejemplo, tienen la característica de ser resueltos aplicando una regla, fórmula u operación específicas; suelen ser directos por cuanto la traducción del lenguaje ordinario al matemático es inmediata; otros problemas, sin embargo, necesitan de cierta invención y originalidad por parte del estudiante. Estas características se observan en los distintos problemas descritos en los apartados anteriores. Sin embargo, se contempla otra forma de clasificar los problemas que absorben dichas características. A estos se les llama Rutinarios y No Rutinarios. El término ‘rutinario’ es acuñado por Rittel y Webber (1973, citados por Sánchez, Osollo y Martínez, 2010), quienes oponen al mismo, el término ‘complicado’ (problemas rutinarios y problemas complicados, tame y wicked, respectivamente). Para estos autores, estos últimos “son incompletos, contradictorios y sus requerimientos son variables. Las soluciones de estos problemas frecuentemente son difíciles de alcanzar e incluso de reconocer debido a la compleja interdependencia entre una gran cantidad de variables” (p. 56), por lo que los rutinarios no cumplen con dichas características. Díaz y Poblete (2001), indican sobre los problemas no rutinarios que “pertenecen a una categoría superior de análisis e intentan encontrar la solución a situaciones de contexto que no se han practicado” (p.36), por lo que se corresponden con los ‘complicados’ del autor anterior.

Jiménez (2008) asocia los problemas que describen escenarios en los que hay que relacionar con una operación aritmética las cantidades que aparecen en el planteamiento con problemas rutinarios, a los que identifica como estereotipados. De este tipo, se encuentran una variedad en los libros de texto. En el ámbito empresarial, los problemas rutinarios son aquellos que ocurren con cierta frecuencia y para los cuales ya hay una solución definida (por la experiencia alcanzada). Trasladado al ámbito escolar, los problemas rutinarios son aquellos que se proponen con cierta reiteración y son fáciles de resolver pues se reconocen inmediatamente en su estructura y en su forma de abordar, aunque el contexto no sea siempre el mismo. Los problemas rutinarios son aquellos en los que la estrategia de resolución es conocida por el estudiante, dado que son situaciones parecidas a otras, lo que le permite resolverlos en forma inmediata. Los problemas no rutinarios, por su parte, son aquellos en los cuales la propuesta es distinta en esencia y por tanto, su abordaje inmediato sufre un estancamiento ya que la estrategia de resolución no es conocida por el estudiante, lo que implica que este debe idearla (sin embargo, tiene las herramientas para hacerlo).

En los problemas rutinarios, los datos y la incógnita se identifican claramente y el camino para obtener la solución se deduce sin dificultad; sin embargo, en los problemas no rutinarios, la información proporcionada puede ser insuficiente, incluir datos que sobran, las estrategias de resolución son diversas; pueden existir distintas soluciones o bien no tener ninguna solución viable. Este tipo de problema aleja del estado de confort al estudiante pues lo lleva a pensar en los distintos aspectos del problema y su solución ya que el proceso seguido con los problemas rutinarios no le permiten resolver inmediatamente el problema, aunque en un primer momento pueda intentarlo. Para Piñeiro, Pinto y Diaz-Levicoy (2015), los problemas rutinarios son de contenido específico y pueden resolverse en varios pasos, mientras que los no rutinarios ponen énfasis en estrategias heurísticas y no son específicos de un tema concreto; esta última idea conduce a pensar que un problema de esta naturaleza puede plantearse en cualquier contexto y abarcar más de un tema o área de conocimiento. Perdomo-Díaz, Cerda y Saadati, (2018), consideran que acuñar la expresión “problemas no rutinarios” es redundante ya que la definición de problema matemático, en general, lleva implícita la idea de reto, interés, desafío: un problema tiene el potencial de generar un interés, un desafío intelectual, propios de los problemas considerados no rutinarios. Lo que no se orienta a ello, no se considera problema. Lo expuesto permite pensar que los problemas son rutinarios o no en la medida que los resolutores los conocen y son capaces, o no, de resolverlos sin dificultad, lo que hace evidente la exigencia de aplicar estrategias cognitivas o metacognitivas para su solución o procedimientos ya conocidos.

1.5.9. Problemas de encontrar y de probar

Las clasificaciones expuestas en párrafos anteriores han considerado, básicamente, las características de presentación del problema y la viabilidad de los procesos de resolución; sin embargo, en un estudio sobre el análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas, Godino, Batanero y Flores (1999), hacen referencia a problemas de encontrar y problemas de probar argumentando que si el objetivo es buscar la estrategia, por excelencia, que lo resuelve, es un problema de encontrar; pero si se debe probar que la estrategia es la mejor; el problema es de probar. Esta denominación se aprecia en Polya (1957, citado por Noda y Hernández, 1999), aunque también se les conoce como problemas por resolver y problemas por demostrar (Polya, 1945, citado por Sigarreta y Arias, 2003). En los primeros se busca desvelar la incógnita del problema (a partir de los datos y la condición) y los de probar se busca validar una hipótesis (por lo que esta es uno de sus componentes, además de las conclusiones). Para Noda y Hernández (1999), si bien la distinción entre ambos tipos es clara, en el proceso de resolución de un problema se puede pasar de un tipo a otro. Por lo general, la escuela elemental propone el primer tipo de estos problemas ya que se busca que estos sean resueltos a partir de la aplicación de la matemática expuesta. No obstante, los problemas de encontrar no necesariamente son fáciles de resolver. Cualquiera de las dos clases podrían formular problemas simples o complejos.

1.5.10. Otras clasificaciones

Sánchez, Vicente, Manchado y Núñez (2014), hacen referencia a los problemas consistentes y problemas inconsistentes, citando a Lewis y Mayer (1987); en los primeros la palabra clave coincide con la operación a realizar y en los opuestos no existe esa coincidencia; en este caso, el o la estudiante puede identificar una palabra clave, pero esta no lo conduce a la operación que resuelve la situación. Por otra parte, Graig (1995, como se citó en Ayllón, 2012) distingue entre ‘problemas tradicionales’ y ‘problemas creativos’, considerando que la resolución de los primeros es un esfuerzo de conectar las condiciones dadas con el fin deseado, usando vías conocidas para alcanzar el fin, mientras que en los problemas creativos se conocen las condiciones, pero los medios para alcanzar el fin no son claros y demandan una reflexión a profundidad, siendo viable, en algunos casos, dar más de una solución posible. Los problemas creativos tienen características de los denominados auténticos problemas matemáticos, que en líneas generales orientan hacia el desarrollo del pensamiento.

Desde una perspectiva didáctica, García (1998) considera que el diseño de situaciones problemas con carácter creativo deben hacer evidente, entre otras, su referencia a la construcción de un concepto propio del campo de conocimientos que se va a estudiar, el estar conectada con un contexto que le permita al alumnado darle sentido (se pueden usar diferentes y variadas situaciones, reales, hipotéticas, fantásticas…); así que como su planteamiento podría incluir una parte lúdica, imaginativa o literaria que permita una mejor conexión que favorecerá su percepción. Por las características expuestas, su implementación en el aula requiere de una planificación previa

Desde otro enfoque, Sigarrera y Arias (2003) se preocupan por analizar problemas que busquen formar en valores. "Esta clasificación encierra tres grandes grupos de problemas y entre ellos forman un sistema para la formación de valores" (p.18): problemas para favorecer la perseverancia, para aumentar el espíritu crítico y autocrítico y la toma de decisiones. No obstante, las características de uno pueden extrapolarse a otros; además, las autoras consideran que pueden tener características de problemas abiertos, con múltiples soluciones, etc., puesto que este tipo de problemas reta al resolutor, lo que implica la puesta en marcha de una serie de valores, como los mencionados.

Por otro lado, Ruesga y Sigarreta (2004), clasifican los problemas escolares en problemas de aplicación y problemas puramente matemáticos, estos se subdividen a su vez en aritméticos, algebraicos y geométricos según sea el campo al que pertenecen los recursos empleados para su resolución. Los primeros se contextualizan en la realidad y los segundos no lo requieren. En otro contexto, Bishop (como se citó en Bárcenas, 2011) clasifica los problemas en deductivos e inductivos, asociándolos con los problemas bien y mal definidos:

> Los deductivos son problemas bien definidos, para abordarlos se utilizan métodos racionales, se emplean técnicas cuantitativas y reglas de decisión, la solución dada en general es óptima. Los problemas inductivos, son problemas mal definidos, en ellos se trata de solucionar conflictos de interés y las soluciones suelen ser resultado de la interacción de fuerzas políticas o de otra índole (p 51).

Completando la idea, Rojo (2010) expresa que los problemas inductivos requieren del sujeto mayor información que la proporcionada, mientras que los problemas deductivos brindan al sujeto toda la información necesaria para su solución.

La tipología expuesta nos muestra las características de los problemas matemáticos que se proponen en el aula, así como la idea que se tiene del mismo y los distintos nombres que asumen; en algunos casos, los problemas adquieren peculiaridades de uno u otro tipo, y lo que para algunos autores puede ser un problema no rutinario y creativo, para otros el mismo problema puede estar en otra categoría. Un mismo problema o situación problemática puede ser interpretado de diferentes formas. No obstante, la frecuencia de cada tipo dependerá de los objetivos planteados, de la experticia del docente y de la capacidad del estudiantado para enfrentarse a los mismos.

A manera de resumen se expone en la siguiente tabla las diferentes tipologías de problemas matemáticos y el criterio de clasificación.

Tabla 3. Tipología de los problemas matemáticos

Tipología	Criterio de clasificación
Aritméticos, Algebraicos, Estadísticos…	Rama de la matemática en la cual se aplican los contenidos o recursos para resolver el problema.
Determinados e Indeterminados	Cantidad de soluciones del problema.
Verbales y No verbales	Forma de enunciar el problema o situación problemática.
Ejercicios, Problemas e Historias	Nivel de contextualización y abstracción
Abiertos y Cerrados	Varios criterios: Cantidad de soluciones Presentación de la información necesaria Solución encontrada Formas de solución
Bien estructurados y mal estructurados	Estructura del problema; es decir, modo de relacionar las distintas partes del problema.
Bien definidos y Mal definidos	Precisión de los elementos e identificación de los estados del problema (inicial, problema y final).
Rutinarios y no rutinarios	Proceso de resolución (aplicación o construcción).
De encontrar y de probar	Objetivo de la actividad frente al problema.

Para favorecer la perseverancia, para aumentar el espíritu crítico y autocrítico y la toma de decisiones	Formar en valores
Tradicionales y creativos	Desarrollo del pensamiento o capacidad creativa
Deductivos e inductivos	Cantidad y calidad de la información suministrada/razonamiento.
Consistentes e inconsistentes	Relación entre palabra clave y operación que se debe realizar.
De aplicación y puramente matemáticos	Función orientadora de la actividad

Finalmente, para Castañeda, Gonzáles y Mendo (2017) cada tipo de problema tiene un alcance didáctico específico; empero, para los autores, saber cuáles son los problemas que se proponen en los libros de texto y en la clase de matemática permitirá anticipar su función en la sesión propuesta y ampliará el conocimiento sobre la construcción de conceptos que hacen los estudiantes.

1.6.Percepciones y creencias sobre los problemas matemáticos y su resolución

Existen diversas investigaciones sobre la percepción y creencias que tienen los estudiantes, docentes y docentes en formación sobre la enseñanza matemática, estudios que se dirigen a la enseñanza básica, media o superior, en diversos aspectos (una metodología, la resolución de problemas, los contenidos matemáticos, entre otros). Dado que la resolución de problemas es parte importante de la enseñanza de la matemática, pues la competencia de la misma se asocia a aquella, es pertinente conocer cuál es la percepción y/o creencias que se tiene de ello, ya que como dicen Gil, Blanco y Guerrero (2006):

> …la percepción, por parte del alumno, de cuáles son sus propias habilidades para las matemáticas, afecta al valor que le otorga a esta materia, así como a sus expectativas respecto del éxito que en ella pueda obtener. Así, la percepción de la propia habilidad (autoeficacia) puede ser considerado como un predictor de la ansiedad a las matemáticas y de las consecuencias de ésta sobre el futuro rendimiento de los adolescentes en tal materia.” (p.556)

De acuerdo a lo anterior, una buena percepción de las propias habilidades, y creencias positivas favorecerá el trabajo matemático en el aula, mientras que una percepción y creencias negativa, lo inhibiráo anulará. Frank (1988), en un estudio con estudiantes matemáticamente competentes, cuyas edades oscilan entre 12 – 13 años, sobre sus creencias respecto a la actividad matemática, centrada en la resolución de problemas, indica que los alumnos creen que los problemas se pueden resolver en cuatro pasos más o menos, considerándose esta actividad como rutinaria. Asimismo, el papel del docente es brindar los conocimientos a los alumnos y verificar que estos se han apropiado de dichos conocimientos, lo que permite intuir el papel del estudiante. Dado que los estudiantes tienen contacto con la matemática, principalmente, en la clase de matemática, es muy probable que las creencias se construyan, en gran medida, en este contexto, por lo que es un indicio del tipo de actividad matemática desarrollada.

Años más tarde, estudios como el de Callejo y Vila, y Remesal (2003 y 1999, como se citó en Alfaro y Barrantes, 2008) manifiestan que un “buen número de estudiantes y docentes tienen un concepto de problema de tipo tradicional” (p. 87), sin percibirse una diferencia entre ejercicio y problema, pero sí que una situación propuesta es en esencia un problema, no porque ofrezca dificultad al alumno sino porque de esa manera se reconoce (o nombra). Mientras el ejercicio se considera una operación por resolver, el problema es un texto por resolver aplicando operaciones. Esta idea se asocia a la percepción sobre cómo resolver problemas, ya que para ello se percibe que hay que manejar correctamente los algoritmos. La percepción de un problema matemático como ejercicio, dado que conlleva resolver una operación, supone que este tipo de problemas es el que se trabaja con mayor asiduidad en la clase de matemática, al menos en quien tiene esta percepción. Entre estas ideas y las creencias anteriores, no se visualiza diferencias esenciales.

Alfaro y Barrantes (2008), en un estudio realizado con profesores y estudiantes de la enseñanza media costarricense, encontraron resultados similares a otros, entre los que se destacan la conceptualización de problema matemático asociándolo a un enunciado verbal contextualizado; asimismo, se percibe que los problemas deben ser resueltos en quince minutos, aproximadamente; incluso menos (idea se aprecia en los estudios de Frank,1988, quien incluso manifiesta que el tiempo es menor), con lo cual deben ser asequibles a los estudiantes y estar orientado a una aplicación del conocimiento aprendido que al desarrollo de competencias que necesiten una mayor interacción con el problema, para lo que este tendría que ser más retador. No obstante, se aprecia, también, que los profesores, en su mayoría, “muestran un alto grado de acuerdo con que los problemas pueden servir para enseñar y aprender matemáticas y que el estudiante pueda hacer sus propios descubrimientos” (p.96), lo que favorece el uso de la resolución de problemas como estrategia didáctica.

Avanzando en el tiempo, un estudio, realizado por Jiménez y Ramos (2011) con estudiantes de 2° y 3° de Primaria, sobre el impacto negativo del contrato didáctico en la resolución realista de problemas, concluye que las creencias incorrectas sobre las matemáticas serían las responsables del fracaso en la resolución de problemas no rutinarios. A través de las respuestas de los estudiantes, se muestra que no se percibe la relación entre las matemáticas que desarrollan en la escuela y las del mundo real. Pifarré y Sanuy (2001) coinciden con diferentes autores (Schoenfeld, 1992; De Corte, 1993; Carrillo, 1998) en que el proceso de enseñanza que busca mejorar las estrategias de resolución de problemas, “al aumentar el rendimiento del sujeto, puede modificar su sistema de creencias, actitudes y emociones en relación con el área de las matemáticas” (p. 298). Muchos años después, Vesga-Bravo y Escobar-Sánchez (2018), afirman que el trabajo en solución de problemas generó mejores creencias en estudiantes de secundaria sobre las matemáticas y la actividad matemática, trascendiendo la inmediatez de su resolución. Con ello, se es más consciente que el cambio positivo en la forma de enfrentar una situación matemática, a través de nuevas estrategias y problemas, favorece la percepción y mejora las creencias sobre una matemática más tradicional.

De Lera y Deulofeu (2014) realizan un estudio de casos con un estudiante de profesor de primaria, un profesor de primaria, un estudiante de profesor de secundaria y un profesor de secundaria, en el que se analizan su conocimiento matemático para la enseñanza y sus creencias sobre resolución de problemas. Los resultados revelan la necesidad de poner mayor énfasis en el conocimiento del contenido matemático en la formación inicial de maestros de primaria, y la de una formación continua, para profesores de primaria y secundaria, en aspectos didácticos. Respecto a las creencias sobre los problemas matemáticos, los cuatro casos coinciden en que un problema matemático es un enunciado, duda o cuestión matemática que se tiene que resolver. Sin embargo, las creencias más rígidas están en el estudiante de profesor de Primaria que en el de profesor para secundaria, ya que los primeros tienen una visión más estrecha sobre el concepto de problema, mientras que en el segundo es más amplia. Respecto a las creencias sobre la naturaleza de la actividad de resolución de problemas, todos coinciden en que en esta no es más sustancial el producto que el proceso; no obstante, la mayoría, excepto el profesor de secundaria coincide en que no hay que conseguir que el proceso de resolución de problemas avance en línea recta hasta el resultado. Finalmente, en relación a sus creencias en torno al proceso de enseñanza – aprendizaje de la resolución de problemas, todos coinciden en que tiene mucha importancia en el éxito en resolución de problemas aprender estrategias; mientras que ninguno se manifiesta respecto a que es importante intentar mejorar el aspecto afectivo y los valores, entre otros, para mejorar en la capacidad de resolución de problemas. La idea final se asocia a la de la matemática como una ciencia que se es capaz de conocer y aplicar, o no.

Las investigaciones realizadas nos sugieren que la percepción que tienen los distintos actores de la matemática mezcla la idea tradicional, asociada a ejercicio o ejercitar el conocimiento aprendido aplicándolo directamente, con destellos de la creativa, relacionada con situaciones problemáticas que requieren de un trabajo previo y pensado antes de plasmar de manera inmediata un algoritmo o fórmula; no se aprecia que no se conozcan ambas, pero la segunda no es propiamente la que prevalece en un proceso regular de enseñanza – aprendizaje, en el que se sigue aplicando con mayor frecuencia problemas que refuerzan las primeras ideas, alejadas de un significado más amplio y completo de problema. Y si se aplican, su tratamiento es complejo.

CAPÍTULO 2. MÉTODOS Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Métodos y estrategias son dos términos que se han usado para referirse a diferentes formas de resolver problemas. Los métodos están asociados a los pasos que el resolutor debe dar para resolver con éxito cualquier problema y las estrategias a acciones específicas pensadas en función la naturaleza de la situación propuesta. En la escuela, el primer paso para resolver un problema es comprenderlo puesto que estos se suelen proponer directamente al estudiante; a partir de ello, y del nivel de comprensión obtenido, el resolutor seguirá o aplicará una estrategia u otras que le permita resolverlo. En la actividad escolar diaria los docentes suelen emplear ambos términos para referirse a un mismo concepto.

2.1.Métodos de resolución de problemas matemáticos

Los métodos o modelos de resolución de problemas son diversos; sin embargo, todos ellos proponen una serie de pasos o fases secuenciadas que prometen la resolución correcta del problema; seguirlas facilita la labor y augura el éxito. Las dificultades en cualquier tarea, generalmente, están asociadas a la falta de un método eficaz; y la resolución de problemas no es la excepción; no obstante, el aval de un buen tránsito por la resolución de problemas depende de la capacidad y experiencia de quien lo intenta resolver. Quienes resuelven problemas con éxito no solo siguen métodos y estrategias conocidos de resolución de problemas, sino que crean los suyos a partir de lo que son capaces de ver y descubrir, intentan otras vías, son curiosos y flexibles. Por su parte, quienes son novatos en esta tarea, tratan de encontrar similitudes con problemas previos, recordar formas aplicadas, problemas resueltos, y suelen seguir patrones fijos, lo que les permitirá mejorar su experiencia en la resolución de ciertos tipos de problemas y mantener la seguridad de seguir el camino correcto. Sin embargo, a veces fuerzan una forma en problemas que no lo requieren conduciendo al error.

Blanco (1996) menciona y describe diferentes métodos de resolución de problemas entre los que destaca a René Descartes (1596 – 1650), Dewey (1880), Wallas (1920), Polya (1945), Schoenfeld (1985), Guzmán (1985) entre otros; todos los cuales tienen un inicio, de conexión con el problema; un medio, de interacción a través de una propuesta; y un fin, que conlleva una solución. Bonilla (2014) amplía los métodos o modelos al considerar otros autores como Puig y Cerdán (1988), Figueras (1994), Pérez

(2011), que detallan más etapas, haciendo evidente la importancia de iniciar el procesod e resolución con una lectura comprensiva del problema. Chamorro (2005) hace una distinción entre modelos clásicos, de corte más matemático, y modelos más psicológicos. Dentro de los primeros incluye a Schoenfeld y Polya y en el segundo grupo a Bransford y Stein y a Antoine de la Garanderie. Asimismo, menciona modelos intermedios como el de Mason, Burton y Stacey. La siguiente tabla presenta las diferentes fases o etapas que los autores presentan y que permiten un mejor enfrentamiento a los problemas matemáticos:

Tabla 4. Fases en la resolución de problemas propuestos por diferentes autores

Autor	Fases en la resolución de problemas
Wallas (1926. Como se citó en Poggioli, 1999)	1. Preparación 2. Incubación 3. Inspiración 4. Verificación
George Polya (1992)	1. Entender el problema, 2. Configurar un plan, 3. Ejecutar el plan 4. Mirar hacia atrás o examinar la solución.
Werner Junk (1982, como se citó en Naranjo y Fernández, 2019)	1. Orientación hacia el problema 2. Trabajo con el problema. 3. Solución del problema. 4. Consideraciones retrospectivas y perspectivas.
A.H. Schoenfeld (1985, como se citó en Plaza y González, 2019)	1. Análisis 2. Exploración 3. Ejecución 4. Comprobación
Glass y Holyak (1986, citado por Juidías y Rodríguez, 2007)	1. Comprensión o representación del problema (Entender el problema) 2. Planificación de la solución (Diseñar un plan de solución)

	3. Ejecución del plan (Llevar a cabo dicho plan) 4. Evaluación de los resultados. (Análisis y examen de la solución obtenida)
Mayer (1986, como se citó en Mercado y Morales, 2018)	1. Representación del problema. Comprende dos pasos: a) Traducción b) Integración de los datos 2. Solución del problema. Implica: a) Planificación b) Ejecución
Bransford y Stein (1987, como se citó en Castro 2008) Programa IDEAL	1. Identificar problemas 2. Definir y representar el problema 3. Explorar posibles estrategias 4. Actuar de acuerdo a las estrategias 5. (evaluar y examinar los) Logros
Labarrere Sarduy, A (1987)	1. Problema 2. Análisis del enunciado 3. Determinar el camino de solución 4. Efectuar el proceso de solución 5. Control o comprobación del resultado obtenido
Puig y Cerdan (1988). En base a problemas aritméticos:	1. Lectura, escucha o interpretación de una representación 2. Comprensión del problema y aceptación del reto 3. Traducción del mismo al lenguaje matemático 4. Utilización de los algoritmos, calculo. 5. Alcanzar un resultado 6. Revisión y control 7. Comprobación con las expectativas reales y personales.
Mason, Burton y Stacey (1989)	1. Abordaje 2. Ataque 3. Revisión

Carlos Maza (1991)	1. Análisis del problema 2. Representación del problema 3. Planificación 4. Ejecución 5. Generalización
Miguel De Guzmán (1991, citado por Contreras y del Pino, sf)	1. Familiarización con el problema 2. Búsqueda de estrategias 3. Llevar adelante la estrategia 4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él
Figueras, E (1995)	1. Lectura comprensiva 2. Esquema o dibujo 3. Estimación del resultado 4. Estrategia 5. Operaciones 6. Expresión de la respuesta 7. Comprobación 8. Valoración de la estimación
Carrillo (1996) (como se citó en Liñán, Barrera e Infante, 2014)	1. Comprensión del problema: lectura y análisis 2. Planificación y exploración (concepción de un plan) 3. Ejecución del plan 4. Visión retrospectiva (verificación)
Luceño Campos (1999)	1. Orientación 2. Ejecución 3. Control 4. Consideraciones
Azinian, H. (2000)	1. Comprender el problema 2. Diseñar un plan, utilizando heurísticas 3. Ejecutar el plan 4. Examinar la solución obtenida
Vila y Callejo (2005)	1. Fase de abordaje 2. Fase de desarrollo

	3. Revisión global
PISA (2006)	1. Problema enmarcado en la realidad 2. Identificación de las matemáticas pertinentes al caso y reorganización según los conceptos matemáticos que han sido identificados 3. Abstracción de la realidad 4. Resolver el problema 5. Responder a la pregunta: ¿Qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transportarla al mundo real?
Pérez, R (2011)	1. Comprensión lectora 2. Interpretación y aprehensión del hecho presentado. 3. Análisis y selección de posibilidades estratégicas 4. Comunicación de los resultados.

Las diferentes fases expuestas nos permiten observar que las mismas presentan distintas concepciones de los problemas, lo cual conlleva al uso de estrategias de diferente tipo, según la fase en la que se encuentre. No solo es importante la selección y aplicación de estrategias sino la reflexión que la solución y el proceso de solución puedan generar en el resolutor. A través de los años se observa que no basta con resolver la situación, el proceso de solución y las fases propuestas van centrando el interés en quien resuelve y la importancia de dicha resolución. Nótese que estas fases suponen situaciones problemáticas que requieren de una mayor conexión de quien decide resolver el problema, desde una primera interacción con el problema que no es inmediata o sencilla, hasta una solución que va más allá de dar una solución inmediata, luego de ejecutar el plan elaborado, destacando la capacidad de creativa, de análisis, comunicativa, entre otras.

2.2.Métodos de resolución de problemas matemáticos aplicados en la escuela

En la escuela Primaria, se busca que los estudiantes puedan acceder a resolver los problemas matemáticos que se le plantean, sin mayores complicaciones. Los problemas planteados requieren, evidentemente, de una comprensión inicial del problema matemático planteado, pero también de una pronta solución, sobre todo si son problemas de aplicación. La fase de comprensión cobra más importancia cuanto más situacional sea la propuesta; es decir, cuando la matemática involucrada se presenta de contextualizada en una situación cotidiana, de la vida diaria, por ejemplo. En la escuela primaria, el plan de solución es más simplificado.

El plan simplificado para resolver problemas se ha centrado en tres pasos básicos que se asocian con algunas de las fases expuestas en el punto anterior (o las resume de manera concreta y simple, posiblemente porque los problemas son más sencillos y con una intención más didáctica, para una rápida identificación de los estudiantes): datos, operación y respuesta. Por ejemplo, ante el siguiente problema: *Margarita compró cuatro docenas de huevos. Al llegar a su casa, el perro se le cruzó y Margarita tropezó cayéndosele los huevos al piso y quebrándose una docena. ¿Qué fracción de los huevos no se quebró?*, el esquema a seguir, para resolverlo, suele ser como el representado en la siguiente tabla:

Tabla 5. Esquema en tres pasos de resolución de problemas matemáticos aplicados en las aulas escolares de Educación Primaria

Datos	Operación	Respuesta
4 docenas 1 docena Fracción que no se quebró: X	4/4 – 1/4= 3/4	No se quebró 3/4.

Sin embargo, otros docentes desagregan el primer paso e incluyen como segundo la pregunta, separándola de la información conocida del problema, ubicada en el primer paso de los datos; además, añaden el procedimiento, previo a la operación, como una forma de hacer explícito, a través de palabras, lo que se debe hacer matemáticamente, dándole sentido, a través del lenguaje cotidiano. El esquema propuesto se expone en la siguiente tabla:

Tabla 6. Esquema en cinco pasos de resolución de problemas matemáticos aplicados en las aulas escolares de Educación Primaria

Datos	Pregunta	Procedimiento	Operación	Respuesta
4 docenas compró. 1 docena se quebró.	¿Qué fracción de los huevos no se quebró?	Transformo a fracciones y opero: 4 docenas=4/4 1 docena= 1/4 Se quebró: X	4/4 – 1/4 = 3/4	No se quebró 3/4.

Asimismo, un tercer grupo presenta un esquema más simple que los dos anteriores, en el que se pide los datos del problema y la operación matemática que responda a la situación, tal como se presenta, sin hacer evidente la respuesta o comprensión del problema, dándose por obtenida:

Tabla 7. Esquema en dos pasos de resolución de problemas matemáticos aplicados en las aulas escolares de Educación Primaria

Situación	Operación
Compró 4 docenas = 4/4 Se quebró 1 docena = 1/4 Fracción que no se quebró: X	4/4 – 1/4 = 3/4

Refiriéndonos a la primera propuesta, el primer paso, etapa o fase consiste en identificar la información numérica y la incógnita del problema; el segundo, en ejecutar una operación matemática que permita relacionar los datos y la incógnita y el tercero en manifestar la respuesta; es decir, responder a la pregunta en función de la solución a la operación o resolver el problema, propiamente. La primera fase también se ha denominado Raciocinio. Evidentemente, hay una fase previa a "Datos" que es la de lectura del problema a partir de la cual se puede completar la información de la primera fase. Estableciendo diferencias entre una y otra denominación, la primera (datos) se centra en el producto, mientras que la segunda (raciocinio), en el proceso. Si bien, en cualquiera de los tres casos (datos, raciocinio y situación), la primera es la fase comprensiva, los datos son más accesibles en problemas que se basan en palabras clave para resolverlos, exponiendo directamente la información numérica y la relación matemática entre ellas (a través de dichas palabras clave). No obstante, cuando el planteamiento del problema no evidencia directamente la relación entre los datos y estos tampoco son expuestos libremente, se hace necesario recurrir a estrategias más reflexivas haciéndose evidente la necesidad de razonar.

El tercer modelo fusiona los primeros pasos, considerando los datos y transformándolos, a la expresión matemática correspondiente, de ser necesario y continúa hasta la siguiente fase que es la operativa. Sánchez et al. (2014), manifiestan que el planteamiento teórico de resolución de problemas no siempre coincide con el desarrollo real, pues:

> … en ocasiones, los alumnos prefieren seguir un proceso simplificado y superficial de resolución pasando de los datos directamente a la resolución, y de ésta al resultado, sin que exista razonamiento ni valoración de la plausibilidad del resultado obtenido. Este procedimiento ha sido ampliamente documentado, por ejemplo, a través del uso para la resolución de la "estrategia de la palabra clave", mediante la cual los alumnos, a partir de los datos, buscan una palabra clave que indique qué operación han de realizar con ellos… (p. 263).

La resolución de problemas matemáticos, como tal, es una actividad propia de la escuela, fundamental en las clases de matemáticas de cualquier país pues ayuda a que el alumnado relacione las matemáticas con el mundo real y extienda lo que aprendió a su vida cotidiana, logrando la competencia propuesta. Generalmente, los problemas (matemáticos) se presentan al o la escolar de manera textual a través de una situación o caso específico; acto seguido, el maestro intenta que los estudiantes interactúen con el problema a través de su lectura. Al principio su nivel de comprensión (de la actividad en sí) es limitada: el alumno no sabe qué hacer; sin embargo, a medida que se enfrenta a diferentes problemas matemáticos va adquiriendo conocimiento de la forma cómo debe actuar frente a ellos. En un primer momento, la acción la inicia el docente, desde el primer paso (leer el texto, interrogarse sobre el mismo, aplicar una estrategia específica, etc.); luego, el estudiante ha de hacerlo solo, siguiendo la propuesta del profesor (aprendizaje por imitación); lo cual le da seguridad ya que el camino del docente se aprecia como el adecuado. No obstante, para que un estudiante mejore su capacidad de resolver problemas no basta con que aprenda de forma más o menos mecánica unas cuantas estrategias o modos de resolver problemas. Hoy en día se aboga por un aprendizaje significativo, reflexivo y constructivo que coloca al alumnado en el centro del proceso de enseñanza – aprendizaje delegándole responsabilidades en cuanto a la generación del nuevo conocimiento, lo cual ha de partir de una propuesta diferente de problemas matemáticos y de la metodología de la o el docente. Nótese que los problemas matemáticos que producen el tipo de aprendizaje descrito se nombran diferente. Es fundamental que, para un aprendizaje más completo, el o la aprendiz deben ver los problemas como retos, cuestiones interesantes que se necesitan resolver, por ello se debe partir de elegir correctamente el problema matemático para que el estudiantado inicie su proceso de resolución con una buena actitud.

> Lo que se puede enseñar es la actitud correcta ante los problemas, y enseñar a resolver problemas es el camino para resolverlos (...). El mejor método no es contarles cosas a los alumnos, sino preguntárselas y, mejor todavía, instarles a que se pregunten ellos mismos. (Halmos, 1991, como se citó en Mora, 1995 p.7)

El mejor método es el que se construye a partir de la reflexión de quien resuelve ante el problema propuesto. El o la docente ha de dar la oportunidad al estudiante de interactuar con la situación en general (no solo con la palabra clave, si la hubiera). Las primeras preguntas que el o la estudiante se plantee (él o ella mismos) estarán en función de querer comprender la situación y darle sentido. Las siguientes versarán sobre cómo darle solución al problema (proponer un plan). En el intento puede fallar y rectificar cambiando el plan; el maestro guiará para que el aprendiz reformule la pregunta. En una investigación realizada por González Pienda et al (1999), con alumnos de sexto grado, los resultados arrojaron que los alumnos con éxito tienden más que los alumnos sin éxito a acordarse de la situación expuesta en el problema, reforzando la idea que los primeros tienden más a construir una representación significativa del problema; esto es viable ya que los alumnos que no tienen éxito en resolver cualquier tipo de problema, se centran en identificar la palabra clave y en los números, desatendiendo el resto de información; por ello, es difícil que recuerden la situación, como tal, descrita en el problema.

En quinto grado de Primaria, los estudiantes tienen vasta experiencia en este tipo de actividades, lo que les permite tener una idea de problema matemático y qué hay que hacer para resolverlo, por ello aplican estrategias de resolución de problemas que permitan hallar la solución. No obstante, cada vez hay más evidencias de que esta transferencia (conectar las matemática con el mundo real) no siempre se produce como se espera: las evaluaciones muestran que la capacidad de resolución de problemas es menor a la capacidad de comprensión lectora, por lo que la complejidad de la resolución de problemas no acaba cuando el alumno ha comprendido el texto del problema.

Los primeros intentos de resolver un problema, las primeras experiencias, crean las bases para resolver problemas posteriores. Jiménez y Ramos (2011) concluyen, a partir de una investigación realizada con estudiantes de segundo y tercer grado de primaria, que los niños resuelven los problemas de forma automática, sin preguntarse realmente qué se les está solicitando. Si la mayor experiencia en resolución de problemas se centra en aquellos cuya solución parte de identificar la palabra clave, esta forma de proceder asimilada influirá negativamente en aquellos problemas que no cumplen dicha característica, aunque probablemente, los estudiantes con una visión limitada de los problemas matemáticos, y su forma de solución, no lo cuestionen. Blanco y Blanco (2009) afirman que si el objetivo de la resolución de problemas en el aula es practicar el uso de una fórmula o una operación aprendida, por ejemplo, genera en los alumnos y las alumnas una serie de creencias y actitudes sobre la actividad matemática que explican su actuar al abordar los problemas; de esta manera, “los alumnos considerarán que los problemas se resolverán por aplicación directa de las fórmulas, reglas o procedimientos que el profesor ha explicado y que están en el libro de texto” (p.83), por lo que pensarán que lo que tienen que hacer para enfrentar los problemas, es estar atento, recordar y aplicar las reglas, fórmulas y procedimientos explicados previamente. En términos generales, aprender por recuerdo y repetición de los problemas previamente resueltos por el docente, o con su ayuda directa, aunque planteados en otros contextos y con otros datos numéricos. Esta forma de actuar, centrándose únicamente en la fórmula u operación que se ha de aplicar conlleva el uso específico y directo de estrategias de resolución de problemas; es decir, acciones únicas que permiten resolver el problema, pero que genera un tránsito superficial por las fases propuestas por los distintos autores, simplificando las mismas y poniendo énfasis a la parte operativa, sin reflexionar la comprensión del problema o la situación ya que su planteamiento no lo amerita. Las fases que se promueven en la escuela son útiles para problemas consistentes y para aquellos en los que se tiene experiencia, en los cuales la palabra clave coincide con la operación a realizar, pero no es aplicable en los inconsistentes de mayor complejidad. El primer tipo genera una resolución superficial de los problemas, si este se aplica de manera mecánica.

2.3.Estrategias de resolución de problemas matemáticos

Pifarré y Sanuy (2001), expresan que diversos estudios han mostrado que quienes resuelven correctamente los problemas “se caracterizan por disponer de un conjunto de estrategias generales… que guían su acción y que les ayudan a superar las dificultades que van encontrando durante el proceso de resolución” (, p.298); además, los autores añaden que ante problemas difíciles, las formas de actuación son más o menos constantes

El concepto de problema matemático, o lo que se entiende por él, orienta la conducta al momento de interactuar con la situación. Callejo (2004) define problema como:

> Una situación planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno/resolutor o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc. para afrontar una situación nueva. (p. 31-32)

Basándose en este concepto, la actuación de quien se enfrenta a un problema se centra en indagar, relacionar, etc. de forma que pueda encontrar la estrategia que le ayude a resolver la cuestión matemática planteada; se espera que su solución no sea, necesariamente, inmediata ni estándar. Por otro lado, si se define problema como aquella situación cuya solución sí es accesible, disponiendo de un algoritmo que relacione datos e incógnita o datos y conclusión, la actuación de quien se enfrenta al problema se centraría en aplicar directamente el algoritmo en cuestión; por lo tanto, en este caso, su actuación tiende a ser inmediata, dado que conoce el camino y la estrategia a seguir, ya que se ha enfrentado a problemas similares (o iguales en su estructura).

El concepto de estrategia es antiguo; sin embargo, su significado ha ido evolucionando, desde su uso en el ámbito militar hasta incorporarse a la psicología del aprendizaje y a la educación (Osorio, 2009). Diversos autores citan a Mintzberg y Quinn

(1997), Mintzberg y Brian (1991) para definir estrategia. Mintzberg, a su vez, cita a Evered (1983). El término estrategia viene del griego *strategos* que significa “un general” (Mintzberg, Brian y Voyer, 1997, p.5); o “el arte del general del ejército” (Ob. cit. p.18), abstrayéndolo de un sujeto concreto y centrándose en las habilidades psicológicas y el carácter con que, el general, asumía el rol asignado. El término se ha extendido a múltiples ámbitos: social, deportivo, educativo, didáctico, etc., y dentro de cada uno a múltiples sectores y/o aspectos.

Tomando en cuenta el origen de la palabra, la estrategia hace referencia a la forma cómo se consigue un fin, por lo tanto, al plan de acción que conduce al logro de uno o más objetivos. Para Bruner (como se citó en Rizo y Campistrous, 1999, p.32), “una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos… para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros”. En este sentido, el plan de George Pólya (1945), el modelo de Miguel de Guzmán (1994) o las propuestas de Alan Schoenfeld (1985) y Bransford y Stein (1986), entre otros, serían las estrategias propuestas por cada autor para resolver problemas con éxito. No obstante, en algunas de ellas, como es en el caso de Bransford y Stein (1986), Figueras (1995) o Pérez (2011), se menciona dentro del plan propiamente, la exploración, el análisis, búsqueda o aplicación de posibles estrategias, que nos hacen suponer que hay otro tipo de estrategias implicadas, que no necesariamente se refieren a los pasos, sino a una acción más concreta o específica. Sigarreta y Ruesga (2004) acuñan este término para la resolución de problemas en función del contenido y las definen como acciones aplicables a un determinado conjunto de problemas, “pero relativo a un dominio de conocimiento dado, cuyos efectos en función de la solución están claramente determinados” (p.80). Para los autores, frente a un problema es necesario trascender las estrategias generales y pensar en estrategias particulares o específicas.

Poggliolí (como se citó en Pérez y Ramírez, 2011), indica que “las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales usadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, a fin de transformarlos y obtener una solución” (p.182), consignando dentro de ellas estrategias generales, como los métodos heurísticos, o más específicas, como algoritmos y los procesos de pensamiento divergente; estos últimos propios de los problemas creativos, no estructurados o inconsistentes, entre otros. Los métodos heurísticos pueden ser muy generales, aplicándose a una gran variedad de dominios; otros pueden ser más específicos limitándose a un área particular del conocimiento, en este caso, la eficacia para resolver un problema está relacionada con el conocimiento que posea el individuo sobre el área en cuestión.

Rizo y Campistrous (1999) clasifican las estrategias de resolución de problemas como reflexivas o irreflexivas considerando en las primeras un análisis previo a la solución que permite relacionar esta con factores inherentes a la situación y lo que implica. Por el contrario, si la conducta responde a un proceder prácticamente mecánico y la vía de solución se asocia con factores externos, las estrategias se consideran irreflexivas. En un estudio realizado por Silva et al (2009), se concluye que los estudiantes de sexto grado utilizan estrategias reflexivas para resolver problemas que implican menor dificultad y estrategias irreflexivas en los problemas más difíciles. Dentro de las estrategias reflexivas se encuentran: seleccionar la operación cuyo significado era el apropiado para el texto, ordenar los datos y tenerlos presentes para la solución, diseñar dibujos o esquemas. Las menos utilizadas fueron tanteo y razonamiento directo. Por otra parte, las estrategias irreflexivas más usadas fueron: adivinar la operación, contestar sin hacer operaciones; mientras que buscar palabras clave sin comprender el significado del texto, seleccionar la opción más cercana al resultado obtenido fueron las menos usadas. Otros estudios (García, 2014; García-García, Rodríguez y Navarro 2015) reportan el uso de este tipo de estrategias en estudiantes de primaria y/o universidad.

Por otro lado, Gusmao, Cajaraville y Labraña (2004), asumiendo las ideas de Favell, aportan una forma distinta de clasificar las estrategias de resolución de problemas, nombrándolas como cognitivas y metacognitivas, considerando que las primeras son usadas para favorecer el tránsito de la actividad cognitiva a la meta y las metaconitivas para supervisarlo. Los autores estudian algunos matices de estrategias cognitivas – metacognitivas durante resolución de problemas con alumnos de ESO, afirmando que una reflexión metacognitiva del problema permitirá utilizar las estrategias cognitivas pertinentes; por otro lado, la carencia de aquellas le conduce a usar estrategias cognitivas no sujetas a las condiciones del problema, con lo cual desde la clasificación anterior se podrían corresponder a estrategias irreflexivas.

El uso de estrategias es inherente en la resolución de problemas, de ahí la importancia de darlas a conocer y utilizarlas en la escuela. A partir de las investigaciones realizadas en torno a la actuación de los expertos en resolución de problemas se han diseñado un gran número de propuestas para la enseñanza de estrategias generales (o heurísticas), así como de estrategias cognitivas y/o metacognitivas que permitan entender y hacer más eficiente la resolución de problemas, tanto por parte de la o el docente como por el y la estudiante. Es evidente que para tener éxito en la resolución de problemas el sujeto debe implicarse personalmente, haciendo suya la situación; sin embargo, sin las bases necesarias, es difícil lograrlo; no basta la intención (o la actitud) aunque es necesaria. Al conectarse con el problema, el resolutor experto usa estrategias trabajadas que percibe como apropiadas para la solución, o genera otras, si es que no es suficiente; no obstante, su selección debe ser consciente. Esto es posible cuando el sujeto es capaz de actuar reflexivamente, para lo cual necesita: conocer, identificar, usar y practicar; lo que le permite un mejor control, dominio y manipulación de la estrategia (llegando incluso a transformarla). Lo opuesto ocurre con el resolutor novato, para quien el proceso es más complejo, pero que, según su capacidad reflexiva y metacognitiva, podrá idear una solución adecuada.

De acuerdo a lo expuesto, las estrategias generales están asociadas a los pasos que debe seguir el educando para resolver con éxito cualquier problema. Estas estrategias se asocian a los denominados métodos de resolución de problemas, que exponen de forma ordenada una serie de pasos secuenciados por los que el alumnado ha de transitar para enfrentarse con éxito al problema. En primer lugar, se expone el primer contacto con el problema, que permita identificarlo, comprenderlo, familiarizarse e incluso representarlo de forma diferente; hasta ver la solución y resolverlo, incluyendo en algunos casos, la comprobación, generalización y evaluación. No obstante, también se hace referencia a una estrategia general cuando esta se aplica en diferentes situaciones, que involucran contenido distinto. Las estrategias específicas se asocian al contenido involucrado y a la complejidad del mismo de forma que puedan centrar su actividad en una acción específica más concreta: por ejemplo, usar una variable, buscar un patrón, hacer un diagrama o una gráfica, simplificar el problema, plantear una operación, recurrir a la palabra clave, trabajar hacia atrás, etc. "La estrategia específica en función del contenido pone de relieve aspectos concretos propios del contenido tratado y se inscribe dentro de las pautas que determinan las estrategias generales" (Ruesga y Sigarreta, 2004, p.85). Las estrategias cognitivas y metacognitivas pueden incluir estrategias generales y específicas. Tárraga Mínguez (2008) basándose en diferentes estudios sobre estrategias de resolución de problemas, menciona como estrategias cognitivas las siguientes: lectura, parafraseo, visualización, hipotetización, estimación, cálculo y comprobación; mientras que como estrategias metacognitivas propone: la autoinstrucción, el autocuestionamiento, y la autocomprobación. Finalmente, las estrategias reflexivas e irreflexivas dependen de cómo son seleccionadas por el resolutor, de ahí que también pueden considerarse las consignadas en la primera clasificación o segunda. Al ser enseñadas, las estrategias son conocidas por los estudiantes; sin embargo, pueden ser seleccionarlas de manera reflexiva o irreflexiva tal como han estudiado Silva et al (2009) con alumnos de sexto grado o Capote y Martínez (2006).

De la lectura anterior, destacamos tres criterios de clasificación de estrategias: el primero está en función de la capacidad de análisis previo de la situación (reflexivas e irreflexivas), la segunda clase hace referencia a niveles de procesamiento de la información (Cognitivas y metacognitivas), mientras que la tercera a la amplitud de uso de la estrategia (Generales y específicas). Las dos primeras clases dependen de la actitud del resolutor, mientras que la tercera del conocimiento que posea. De esta manera, las estrategias cognitivas y metacognitivas fusionan actitud y conocimiento.

2.4. Estrategias aplicadas por estudiantes en la resolución de problemas matemáticos específicos

Polya (1992), dentro de la fase “concepción de un plan”, hace referencia a una serie de estrategias que permiten enfrentar el problema, propuestas a través de preguntas. De Guzmán (1997) nombra directamente la segunda fase de su propuesta como “Búsqueda de estrategias diversas”, que intenta abordar la dificultad identificando diferentes formas. Las estrategias a las que se refieren estos autores son acciones concretas que permiten afrontar la situación de forma que esta vaya esclareciendo su solución, dirigiendo su acción directamente a la cuestión matemática. La pertinencia de dar a conocer estas estrategias, desde la escuela, permite que quienes se enfrenten a los problemas tengan herramientas necesarias para resolverlos. La variedad de las mismas, les permite seleccionar la que mejor se ajuste a la problemática enfrentada.

Reys (como se citó en Casajús, 2005) afirma que las estrategias pueden enseñarse lo que lleva implícito enseñar a resolver problemas; es decir, hay una estrecha relación (o debe haberla) entre enseñar estrategias y enseñar a resolver problemas, de tal manera que quien aprende estrategias, aprende a resolver problemas. Schoenfeld (1992, como se citó en Castro, 2008) reconoce que la enseñanza de heurísticos o estrategias generales de resolución de problemas no ha sido exitosa, considerando la posibilidad de enseñar estrategias específicas ligadas a clases de problemas; no obstante, si estas solo se conocen desde fuera, sin ser parte del proceso construido por el resolutor, pierden consistencia y significatividad.

En un estudio realizado por Pino y Blanco (2008) sobre análisis de libros de texto en relación con contenidos de proporcionalidad se concluyen que dichos textos no incluyen modelos ni estrategias para la resolución de problemas. La manera como se enseñen y busquen las estrategias en el aula permitirá un encuentro más abierto o cerrado del resolutor con el problema. Blanco y Blanco (2009) consideran la relación contexto y estrategia en la resolución de problemas de primaria: "La relación 'Matemática – realidad' tiene una doble dirección si queremos que tenga sentido la actividad matemática, y debe considerar tanto la actividad propuesta como las estrategias elegidas y utilizadas por la sociedad" (p.81). Si bien las investigaciones y los expertos afirman que las estrategias (y una variedad de ellas) deben ser enseñadas, su trabajo en el aula aun no permite un mejor dominio de las mismas y el desarrollo de la competencia correspondiente, a pesar que en los libros de texto de los últimos años se incluye la propuesta de estrategias, como es el caso del libro de sexto grado de primaria del Ministerio de Educación (Perú), que consigna "Estrategias para resolver problemas. Introduciendo un plan de 5 pasos (p. 21), iniciando con la lectura atenta del problemas y culminando con la verificación de la solución; sin embargo, en el tercer y cuarto paso hace referencia a distintas estrategias que pueden resolver el problema, pero eligiendo la más adecuada; por otro lado, el mismo libro propone aplicar "estrategias para resolver problemas. Gastos de viaje" (p. 152) y en el que a partir de un registro de gastos de viaje propone a los estudiantes responder a unas preguntas.

Casajús (2005) expone como estrategias de resolución de problemas las siguientes: la modelación (p.e. la representación gráfica), estrategias de lectura analítica y reformulación (lectura del texto profunda), estrategias de la determinación de problemas (subproblemas dentro del problema), estrategias del tanteo o ensayo y error (búsqueda de soluciones mediante pruebas sucesivas) y la estrategia de la comprobación (estimaciones previas, operación inversa, usar otra vía). Nótese que algunas estrategias hacen referencia a las distintas fases de la resolución de problemas, incluyendo la de configurar el plan, propiamente, por lo que pueden ser aplicadas en otros problemas matemáticos; por ello, se infiere que este autor indique que las estrategias son métodos generales, por lo que se pueden aplicar en una gran variedad de problemas. Ministerio de Educación (2012) también propone estrategias que contribuyen a la comprensión del problema, como la lectura analítica, el parafraseo y la ejemplificación, así como estrategias para la última fase denominada visión retrospectiva y prospectiva, en la que se reflexiona y verifica la solución, como ubicar los puntos difíciles, modificar las condiciones o datos del problema y volver a resolverlo y reflexionar sobre la naturaleza del problema general.

Diversas investigaciones se han propuesto identificar las estrategias usadas por los estudiantes al resolver problemas matemáticos; otras han planteado estrategias que facilitan la resolución de los problemas. Dentro del primer grupo, a finales de la década de los 80', Larry Sowder (como se citó en Rizo y Campistrous, 1999) presenta una lista representativa de las estrategias que los estudiantes de primero y segundo de secundaria utilizan en la resolución de problemas matemáticos. Las estrategias son las siguientes:

- Encuentra los números y suma (o resta o multiplica o divide). La selección está determinada por lo que se ha hecho más recientemente en la clase o por la operación para la cual el estudiante tiene más competencia al realizarla.
- Adivina qué operación debe ser utilizada.
- Mira los números y ellos te dicen que operación debes usar. Por ejemplo, 78 y 54 probablemente te indiquen suma o producto, pero 78 y 3 parecen una división por el tamaño de los números.
- Trata con todas las operaciones y selecciona la respuesta más razonable. Esta estrategia es la que se ha ejemplificado antes con la investigación suiza.
- Busca las palabras claves y ellas te dicen qué operación usar. Por ejemplo "todos juntos" significa adicionar.
- Decide si la operación debe ser grande o pequeña según los números dados. En este caso, si es grande trabaja o trata con la adición y la multiplicación y selecciona la respuesta más razonable. Si es pequeña, trata con la sustracción y la división y escoge la respuesta más razonable.
- Selecciona la operación cuyo significado es apropiado al texto. (p. 34)

Hacia finales de los 90', Roa, Batanero, Godino y Cañizares (1997), analizaron las estrategias en la resolución de problemas combinatorios simples y compuestos utilizadas por cuatro estudiantes con preparación matemática avanzada; entre las estrategias usadas figuran:

- Identificar la operación combinatoria para aplicar directamente su fórmula
- Enumeración
- Diagrama en árbol
- Fijar variable
- Descomponer en partes
- Generalizar
- Traducir a problema equivalente
- Regla del producto
- Regla de la suma

Dentro de sus conclusiones, los autores destacan el escaso uso que hacen del diagrama de árbol a pasar de la importancia como recurso productivo en la resolución de problemas de este tipo. Por otro lado, gran parte de las estrategias expuestas se han mostrado como elementos que separan a los buenos y malos resolutores. Las estrategias halladas por Rizo y Campistrous (1999), al plantear problemas matemáticos escolares a estudiantes de educación primaria, no difieren mucho de las expuestas por Sowder con estudiantes de secundaria. Para primer y segundo grado, las estrategias encontradas son las siguientes, observándose que algunas se aplican de manera irreflesiva:

- Conteo directo a partir de un modelo numérico
- Construye y opera de manera irreflexiva con los datos del problema
- Interpreta la solución sin un análisis previo
- Selecciona la operación cuyo significado es apropiado al texto; sin embargo, sin una explicación apropiada, en su mayoría.

Por otro lado, las estrategias halladas en estudiantes de cuarto a sexto grado, se detallan a continuación:

- Busca las palabras para identificar la operación utilizar
- Asocia el procedimiento a un indicador textual (similar al de la palabra clave)
- Tanteo (ensayo y error)
- Opera con las cantidades que proporciona el problema
- Adivinar el resultado usando números posibles
- Identificar el significado de las operaciones de acuerdo a la propuesta del problema (reformulando las preguntas si es necesario)

Como se puede observar, las estrategias propuestas orientan hacia el uso irreflexivo de la estrategia, aunque en menor grado que en los estudiantes de primero y segundo. Arteaga y Guzmán (2005) identifican las estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado de primaria para resolver problemas algebraicos. Los autores identifican las siguientes estrategias:

- Propuesta de un número y su comprobación para encontrar la solución.
- Separación de una de las cantidades en partes que se deben repartir.
- Apoyo en el diseño de un dibujo para encontrar la solución.
- Elaboración de un cuadro para comparar los datos y aproximarse a la solución.
- Trazo de una recta numérica para comparar recorridos mediante saltos.
- Utilización de operaciones aritméticas elementales (adición, sustracción, multiplicación y división) mecánicamente; es decir, sin reflexionar en las condiciones iniciales del problema.
- Uso de la regla de tres.
- Preferencia por el uso de cálculo mental sin tener que escribir las operaciones usadas (respuesta numérica). (p. 41-42)

Los resultados del estudio previo arrojaron que a través de los problemas y condiciones didácticas adecuadas, los estudiantes producen sus propias estrategias, las mismas que van cambiando a medida que interaccionan con el problema y lo comprenden mejor, utilizando una más eficaz. En un otro estudio, realizado por Valle et al (2007) sobre las estrategias generales identificadas en la resolución de problemas planteados en los exámenes de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas para el Estado de Puebla, México, analizando las respuestas de 91 concursantes, procedentes del sistema educativo superior y medio superior del estado de Puebla, cuyas edades fluctuaban entre 14 y 17 años se identificaron las siguientes estrategias:

- Ensayo y error: Se toman números al azar y se va probando, hasta encontrar la solución.
- Usar una variable: Se utiliza cuando se desconoce un dato, apoyándose en la estrategia anterior.
- Buscar un patrón: Consiste en el análisis de un determinado modelo para ver si se observa una regularidad. Es un patrón, que casi siempre sugiere la solución del problema.
- Hacer una lista: Se relacionan todos los posibles resultados y el que cumpla con las exigencias planteadas en el problema, entonces se considera que se tiene la solución. Aquí se utiliza la comprobación para verificar la solución.

- Resolver un problema más simple: Se trata de resolver un problema descomponiendo el problema original en problemas sencillos, de tal manera que al integrarlo se llegue a la solución.
- Hacer una figura: Estrategia que consiste en modelar la situación mediante figuras que incluyen relaciones de lo que se conoce y lo que se busca.
- Usar un razonamiento directo: Es una estrategia cuyo razonamiento se basa en la lógica; su principio es la inducción.
- Usar un razonamiento indirecto: Estrategia cuyo razonamiento está basado en la lógica; su principio es la deducción. (p. 6-7)

Nótese que los problemas propuestos en olimpiadas tienen un grado de complejidad mayor que aquellos que se utilizan en las escuelas para generar o aplicar conocimiento. Si bien alguna estrategia coincide con las aplicadas por estudiantes de Primaria, estas en su mayoría, son más complejas y tienden a ser más reflexivas. García-García et al. (2015) se cuestionaron sobre cuáles son las estrategias usadas por los niños de Tee Savi (mixtecos) de primaria al resolver problemas matemáticos formales y prácticos. En resumen, se encontraron nueve estrategias reflexivas y tres irreflexivas. Entre las primeras se encuentran las siguientes:

- Selecciona la operación adecuada previo análisis.
- Selecciona la operación considerando la palabra clave y previo análisis.
- Considera las posibles de soluciones si el problema lo amerita.
- Realiza un modelo y opera mediante conteo a partir de él.
- Opera mentalmente.
- Resuelve parte del problema, cuando este requiere de más operaciones para ser resuelto.
- Responde a partir de un dibujo elaborado por el estudiante a partir del problema.
- Emplea hechos numéricos conocidos para resolver el problema, pues conoce el resultado de la operación.
- Tantea de manera inteligente, a partir de una operación congruente con el texto, pero limitado por sus conocimientos.

Entre las estrategias irreflexivas consignan:

- Opera directamente sin un análisis previo.
- Responde directamente, sin realizar operaciones, o propone un algoritmo, sin considerar realmente los datos del problema.

- Elije la operación basándose en una palabra clave, sin un análisis previo.

Rodríguez et al. (2017) analizaron estrategias y procedimientos matemáticos que utilizaron estudiantes talentosos de 12 a 14 años en la resolución de problemas matemáticos. El principal hallazgo evidencia el uso recurrente de estrategias de ensayo y error, búsqueda de patrones y elaboración de una lista para resolver distintos problemas. Si bien estas estrategias también se observan en estudiantes promedio, ya sea que se usen de manera reflexiva o irreflexiva, los autores indican que la diferencia con los estudiantes talentosos estriba en que estos las utilizan sistematizando la información; es decir, poniendo en juego el uso de un pensamiento matemático que le permite cuestionar, argumentar, comunicar, relacionar, perseverar, improvisar, inferir, sorprenderse, entre otros.

Como podemos observar, algunas de las estrategias se repiten en los estudiantes de los diferentes niveles o talentos. Si bien todas se refieren a estrategias que usan los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, no siempre están asociadas con la comprensión de la situación, de forma que los estudiantes las pueden usar de manera irreflexiva.

Ministerio de Educación (2012) considera que se debe ayudar a los estudiantes a diseñar un plan de resolución del problema matemático y enuncia una serie de estrategias heurísticas que pueden contribuir con la consecución del objetivo; algunas coinciden con las que los distintos estudiantes usan al resolver problemas matemáticos: buscar una meta menor, particularizar, generalizar, tantear (ensayo y error), tratar de encontrar un patrón, razonar hacia atrás, elegir una notación adecuada, suponer el problema resuelto, suponer que no se puede resolver, modificar el problema, buscar analogías con otros problemas, hacer un diagrama, plantear una ecuación, hacer una simulación, construir un modelo físico de la solución, descomponer el problema en partes, hacer una tabla y construir una lista sistemática. Las estrategias específicas son variadas, unas más conocidas (y usadas) que otras; todas ellas ponen en juego la capacidad de resolver problemas matemáticos en los estudiantes, así como su experiencia en este tipo de actividad matemática escolar. Si bien, se pueden observar en los libros de texto algunas de las mencionadas, su inclusión aún es insipiente.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO METODOLÓGICO

3.1. La investigación cualitativa y el estudio de caso múltiple

De la Cuesta (1997) indica que “Hay un acuerdo generalizado en que el objetivo del paradigma en el que se apoya la investigación cualitativa es el proporcionar una metodología de investigación que permita comprender el complejo mundo “de la experiencia vivida desde el punto de vista de las personas que la viven”” (p. 18, citando a Arber, 1995). La metodología cualitativa, en su sentido más amplio, se refiere a “la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable” (Taylor y Bodgan, 1994. p. 20). Nuestra investigación se valdrá de una metodología cualitativa, ya que busca conocer desde la experiencia de los protagonistas una realidad concreta: la resolución de problemas matemáticos en las clases de matemáticas.

El estudio de caso múltiple

Se entiende por “caso” (del latín *casus*: suerte, chance, casualidad, accidente), un acontecimiento, hecho, asunto o suceso que llama la atención. Stake (1999) indica que en investigación con estudio de caso, “el caso es algo específico, algo complejo, en funcionamiento… El caso es un sistema integrado” (p. 16); por ello, para la autora, una persona, un programa, una institución o un conjunto de personas pueden der un caso. En el contexto de una investigación, los casos seleccionados para estudio son aquellos que llaman la atención, ya sea por sus características, circunstancias, condiciones o consecuencias, y van más allá de un evento o situación destacable. En el ámbito educativo, entre los casos que son de interés investigativo destacan personas y programas.

El estudio de caso tiene sus antecedentes en distintas disciplinas, tales como la sociología, antropología y psicología. De acuerdo con Simons (2011), tanto Stake (1967), como MacDonald (1971), cada uno en sus respectivos países, fueron los precursores del movimiento de la evaluación mediante estudio de caso en el ámbito de la investigación educativa, puesto que las problemáticas necesitaban otras formas de acceder a la información y/o se necesitaban datos diferentes. A partir de ellos, diversos autores han basado sus investigaciones en el estudio de casos, introduciéndose en la realidad activa de lo observado.

En correspondencia con Stake (1999), Simons (2011) indica que “El estudio de caso es un estudio de lo singular, lo particular, lo exclusivo” (p. 19), permitiendo analizar el caso en su contexto real, lo que conlleva considerar diferentes fuentes de manera simultánea (Villarreal y Landeta, 2010), las mismas que están conectadas directamente con el caso, “para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 2007, p. 11), reales y activas. Nótese que la comprensión es un rasgo característico del estudio de caso que también señala Simons (2011) al afirmar que “… la finalidad primordial es generar una comprensión exhaustiva de un tema determinado, un programa, una política, una institución o un sistema para generar conocimientos y/o informar del desarrollo de políticas, la práctica profesional y la acción civil o de la comunidad” (p.42). De esta manera los casos no se estudian desde la revisión bibliográfica o documentaria, o a través de un cuestionario o lista de cotejo exclusivamente, sino que tiene otro enfoque para llegar a una mejor comprensión de los mismos.

El estudio de caso se centra en investigar el fenómeno, objeto de estudio y tomado como caso, en su auténtico contexto (Yin, 1994, como se citó en Simons, 2011, p. 41); de lo anterior se añade que el estudio de caso es descriptivo, heurístico e inductivo, por cuanto se orienta a realizar un cuadro a detalle del objeto de estudio, lo que permite una mejor comprensión del caso y, a partir de los datos , llegar a generalizaciones, conceptos o hipótesis (Merriam, 1998, citado por Arnal, Del Rincón y La Torre, 1996, p. 234). Para la obtención de los datos que permitan analizar y comprender la situación, se recurre a la observación, la toma de notas, diálogos, producciones, entre otros instrumentos de recogida de información que conducen a un conocimiento profundo del caso.

Para lograr comprender y reafirmar el fenómeno, el estudio de caso emplea la triangulación. Esta puede ser de cuatro tipos: de datos, del investigador, de teorías o metodológica (Denzin, 1989b, citado por Flick, 2012). Nuestra investigación se basa en la última por cuanto utiliza diferentes estrategias o métodos de acceder a la información, tales como la observación, la entrevista no estructurada y el análisis de documentos.

El estudio de caso empleado en la presente investigación es el estudio de caso múltiple, en contraposición al estudio de caso único, puesto que se centra en el estudio de seis casos singulares y específicos que permitirán responder a la pregunta de investigación: ¿qué tratamiento se da al planteamiento y resolución de problemas matemáticos en el aula y cómo influyen en el proceso de enseñanza – aprendizaje escolar de la matemática?

El estudio de caso múltiple es sustancial para la presente investigación, ya que permite dar consistencia a los resultados obtenidos en uno u otro caso, debido a que estos pueden ser comparados y contrastados entre sí. No obstante, aun cuando se estudien diferentes casos, la idea básica no es generalizar sino comprender los mismos y a partir de ellos conocer mejor una realidad. En nuestro estudio, cada caso es un instrumento (Stake, 2007) para aprender sobre la resolución de problemas matemáticos en clase de matemáticas, que es la cuestión que se investiga; la finalidad no está en comprender a los profesores o profesoras concretos, sino en lo que ellos y ellas puedan aportar respecto al tema. Por tanto, con respecto a su finalidad el estudio de caso que aplicamos es de tipo instrumental.

Por sus características y naturaleza, el estudio de caso acoge las formas comunes de conocer las cosas: observar y preguntar. A partir de estas dos acciones, para la recogida de datos se ha empleado la observación propiamente, las entrevistas no estructuradas y el análisis de documentos. El análisis de datos se realiza en función de la codificación que permite elaborar distintas categorías orientadas a reflejar cómo los informantes perciben la resolución de problemas matemáticos. La presentación de los resultados se realiza a través de la elaboración de informes individuales que sintetizan el trabajo realizado por cada docente en torno al tratamiento de los problemas matemáticos en clase de matemática mediante descripciones particulares de la gestión de cada docente. La redacción de conclusiones globales del estudio de caso de cada docente proporciona ideas producto de contrastar los diferentes casos individuales entre sí.

Seguidamente, detallaremos el proceso metodológico que está estructurado en diferentes bloques: desarrollo de trabajo de campo, recogida de datos, análisis de datos, criterios de calidad, entre otros, describiendo dentro de cada bloque los diferentes momentos de la investigación y las decisiones metodológicas realizadas.

3.2. Desarrollo de la investigación.

A continuación presentamos el cronograma de acciones desarrolladas a lo largo de la investigación, las mismas que iniciaron a finales de 2007 con la consulta bibliográfica en torno al tratamiento de diferentes aspectos de la matemática escolar (fracciones, números decimales, medida, entre otros), la resolución de problemas matemáticos y la elaboración de material de apoyo a los docentes (información relacionada con el tema y fichas de trabajo) que pudieran guiarlos en la enseñanza de dichos aspectos de la matemática, y culminan en el 2020 con la elaboración del informe final.

Tabla 8. Cronograma de acciones

Año	Acciones desarrolladas
2007	Revisión bibliográfica y elaboración de material de apoyo al docente
2008	Entrada en el campo y escenario de trabajo (aulas), realización de observaciones, conversaciones con docentes y elaboración de fichas de aplicación para el alumno. Análisis de datos
2009	Revisión bibliográfica. Análisis de datos.
2010	Análisis de datos
2014	Análisis de datos
2015-2020	Revisión bibliográfica, análisis de datos y elaboración del informe de resultados

De esta forma, previo al proceso de estudio de caso, propiamente, se hizo necesaria una revisión conceptual cuya finalidad fue estudiar el estado de la cuestión del objeto de estudio de la tesis y proponer una primera delimitación temática acerca del tratamiento que dan los docentes a la resolución de problemas matemáticos en clase de matemática. De esta manera, se planteó un diseño inicial que fue modificándose conforme se avanzaba en la investigación, lo cual es factible bajo las características de la metodología cualitativa.

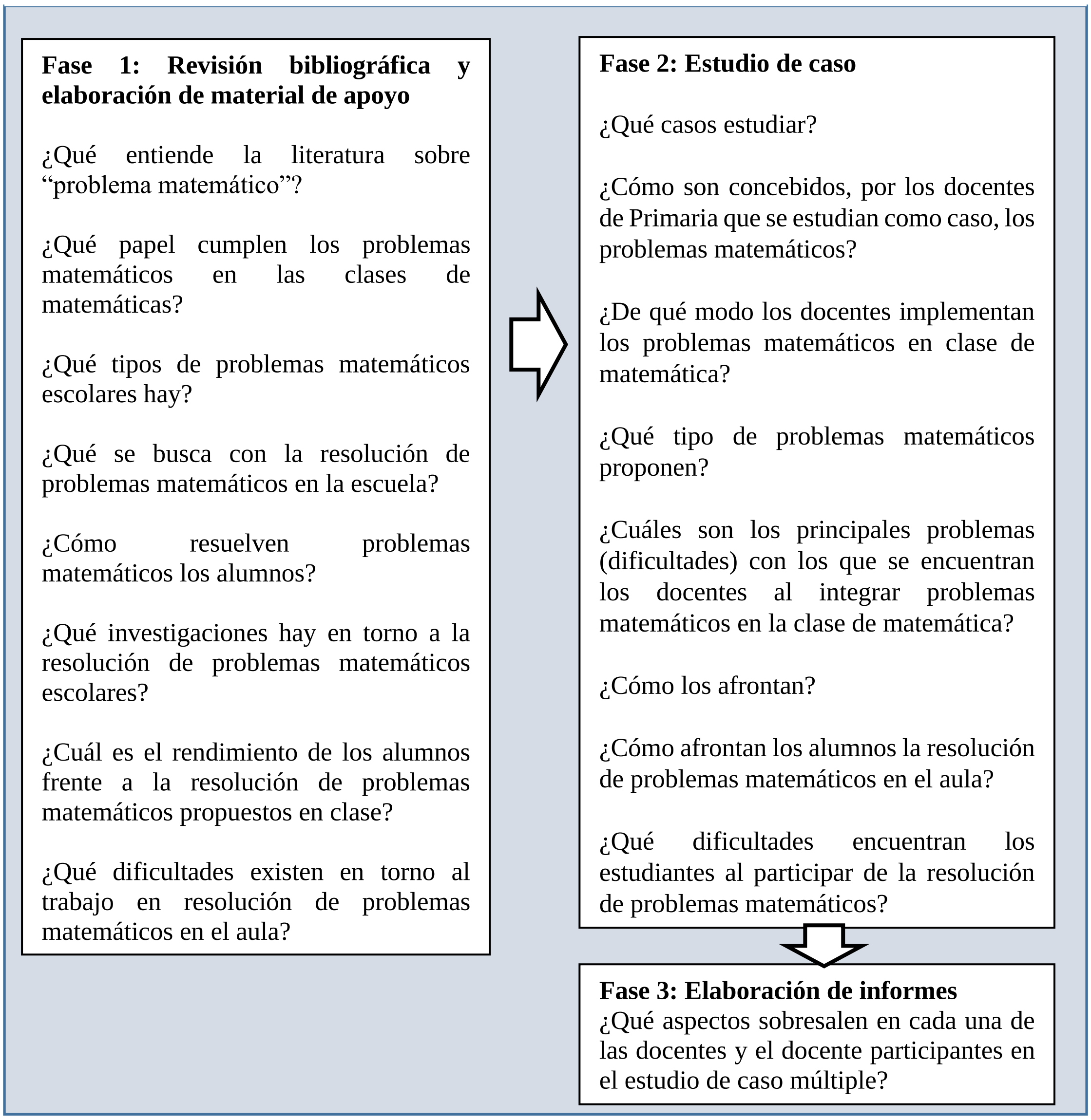
A través de la revisión de la literatura, se buscó delimitar conceptualmente el objeto de estudio y el estado de las investigaciones realizadas alrededor al tema; así como conocer las tendencias en torno a la enseñanza de cuestiones específicas que orientaran positivamente el trabajo de los y las docentes y del estudiantado en el aula. La idea era permitir una mayor participación de los y las estudiantes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de forma que este no se desarrollara en una sola línea: docente → alumno. Con la propuesta de actividades se pretendió orientar a los docentes hacia el uso de una metodología que permitiera la participación de los estudiantes en clase y les informara sobre el tema a trabajar.

Con el estudio de caso se propuso conocer y comprender, desde la experiencia de los protagonistas, qué es lo que los y las docentes (de Quinto grado de Primaria) entienden por problemas matemáticos, cuáles y cómo los trabajan en clase de matemática, identificando, además, las dificultades más habituales con las que se encuentran y el modo de afrontarlas; de esta manera se conoce mejor la realidad estudiada.

La elaboración del informe de resultados integra la producción de informes individuales y globales, derivados del estudio de caso múltiple; y, junto con las conclusiones obtenidas de la primera fase (revisión), permiten sacar una serie de conclusiones orientadas a facilitar el tratamiento de la resolución de problemas matemáticos en el aula y llegar a conclusiones.

La siguiente figura sintetiza la temporalización realizada así como las preguntas clave que surgieron en cada fase a fin de ser respondidas

Figura 2. *Fases del desarrollo de la investigación*



Fase 1: Revisión bibliográfica y elaboración de material de apoyo

¿Qué entiende la literatura sobre “problema matemático”?

¿Qué papel cumplen los problemas matemáticos en las clases de matemáticas?

¿Qué tipos de problemas matemáticos escolares hay?

¿Qué se busca con la resolución de problemas matemáticos en la escuela?

¿Cómo resuelven problemas matemáticos los alumnos?

¿Qué investigaciones hay en torno a la resolución de problemas matemáticos escolares?

¿Cuál es el rendimiento de los alumnos frente a la resolución de problemas matemáticos propuestos en clase?

¿Qué dificultades existen en torno al trabajo en resolución de problemas matemáticos en el aula?

Fase 2: Estudio de caso

¿Qué casos estudiar?

¿Cómo son concebidos, por los docentes de Primaria que se estudian como caso, los problemas matemáticos?

¿De qué modo los docentes implementan los problemas matemáticos en clase de matemática?

¿Qué tipo de problemas matemáticos proponen?

¿Cuáles son los principales problemas (dificultades) con los que se encuentran los docentes al integrar problemas matemáticos en la clase de matemática?

¿Cómo los afrontan?

¿Cómo afrontan los alumnos la resolución de problemas matemáticos en el aula?

¿Qué dificultades encuentran los estudiantes al participar de la resolución de problemas matemáticos?

Fase 3: Elaboración de informes

¿Qué aspectos sobresalen en cada una de las docentes y el docente participantes en el estudio de caso múltiple?

3.3. Selección de los casos

El tránsito por el estudio de caso se inicia con la selección de los mismos. Nos encontramos con una cuestión que se debe investigar y consideramos que el estudio de un caso particular nos permite entender la misma (Stake, 2007). No solo uno, sino varios. Cada estudio de casos es un instrumento para aprender sobre el tema en cuestión y a través de "un estudio de caso colectivo, se puede seleccionar casos de diferentes zonas geográficas para investigar cualesquiera diferencias regionales o institucionales en el modo en el que los temas se experimentan en cada caso" (Simons, 2011. p. 54). La investigación, centrada en la actividad matemática en aulas de primaria, planteó en un primer momento observar el desarrollo de las clases de matemática de quinto y sexto grado, en contextos reales, con la finalidad de conocer cómo se gestaba el conocimiento matemático a través del planteamiento y resolución de problemas matemáticos, el papel de estos frente a aquel y al aprendizaje del alumnado, de dos realidades distintas: A Coruña (España) y Piura (Perú), dado el lugar donde se realizó el doctorado y el sitio de origen de la investigadora, respectivamente; por ello, la primera cuestión que se tuvo en cuenta fue elegir maestros y/o maestras de ambos lugares y grados de enseñanza.

La selección de los casos se inició en A Coruña, a través del contacto que uno de los directores de tesis tenía con instituciones educativas de la zona y con docentes en ejercicio. Al escoger un caso para su estudio no se intentó buscar uno que sea representativo, solo se tuvo en cuenta que corresponda al nivel de estudios seleccionado, ya que "cuando se realiza un estudio de caso instrumental se puede escoger cualquiera de una serie de casos para investigar el tema que se está estudiando" (Simons, 2011, p. 53). El panorama resultaba amplio. No obstante, otros factores influyeron en la selección de los casos. Resultado de las gestiones del director, se logró acceder a dos instituciones educativas diferentes (una pública y otra privada); la selección de las aulas se vio condicionada a quinto grado, puesto que los docentes que accedieron a participar pertenecían a las mismas; por ello, se reorientó la investigación hacia un estudio centrado en aulas de quinto grado de primaria. La selección es producto de un proceso de toma de decisiones más que un parámetro a priori del diseño de investigación (Goetz y LeCompte, 1988). Los casos seleccionados en A Coruña fueron tres: dos pertenecían a la institución pública y uno a la privada. Ello, porque fueron los tres quienes accedieron a ser parte de la investigación.

Respecto al número de casos, trabajamos con seis: tres españoles y tres peruanos, con el fin de igualar la cantidad lograda en la primera ciudad. Otra característica importante del estudio de caso es que esta no es una investigación de muestras; la primera obligación es comprender el caso (Stake, 2007) o los casos seleccionados, como se mencionó en líneas anteriores.

La elección de estrategias de selección y muestreo en investigaciones cualitativas considera de los fines y propósitos formulados. En esta investigación, la técnica seguida se corresponde con lo que Goetz y LeCompte (1988) nombran como "selección basada en criterios" y Patton (1990) denomina "muestreo intencionado". La selección plantea la pertinencia de elegir a quienes faciliten la información y se muestren, durante todo el proceso de la investigación, disponibles para comunicar su experiencia a través de la puesta en práctica de su gestión docente. Además, siguiendo a Patton (1998, citado por Quintana, 2006) el muestreo es por conveniencia pues buscamos "obtener la mejor información en el menor tiempo posible, de acuerdo con las circunstancias concretas que rodean tanto al investigador como a los sujetos o grupos investigados" (p.59). De acuerdo con ello, se decidió trabajar con los tres casos que habían accedido a la investigación en A Coruña, y elegir un número igual en Perú.

La selección de los escenarios e informantes fue intencional y siguiendo los criterios que a continuación se detallan;

- Docentes de quinto grado ciclo de Educación Primaria puesto que la experiencia en actividades matemáticas es mayor en este grupo, frente a los de grados inferiores, y no se obtuvo respuesta positiva de docentes de sexto grado, que en un primer momento se consideró.
- El perfil docente buscado se basa en el compromiso del mismo con la actividad matemática y con la investigación (maestros y maestras que no rechacen la matemática y disposición para acoger las orientaciones de la propuesta).
- Centro educativo situado en la provincia de A Coruña (España) y en la ciudad de Piura (Perú) ya que se busca observar similitudes y diferencias en ambas realidades.
- Gestión administrativa (pública o privada). En un principio este no fue un criterio de selección; sin embargo, dado que en A Coruña los docentes pertenecían a gestiones distintas, la selección de colegios peruanos tomó en cuenta este criterio.

Por tanto, la presente investigación se basa en un estudio de caso múltiple cuya meta es buscar y describir estilos y patrones en la propuesta de problemas matemáticos en clase de matemática. Los casos seleccionados fueron seis docentes de quinto grado de educación primaria de dos realidades geográficas y educativas distintas. La tabla que presentamos a continuación recoge información general de los casos que participaron en la investigación.

Tabla 9. Clasificación del perfil de los casos

Casos	Ubicación	Código	Profesión	Gestión Escolar	Nº de alumnos
1	A Coruña	P1	Maestro EP	Pública	18
2	A Coruña	P2	Maestra EP	Pública	20
3	A Coruña	P3	Maestra EP	Privada	25
4	Piura	P4	Maestra EP	Pública	40
5	Piura	P5	Maestra EP	Privada	20
6	Piura	P6	Maestra ESMF	Privada	18
Total: 6					Total: 142

Queremos informar que en el caso P1, si bien el número de alumnos y alumnas que participaron en la investigación es el consignado, esporádicamente, una alumna asistía a clase; sin embargo, su participación en el aula era nula; es decir no interactuaba en la misma y tampoco el docente generaba su participación por condiciones particulares de la estudiante. Por otro lado, P6 es una maestra que enseña matemática en aulas de Educación Primaria, pero que ha sido formada como docente de Educación Secundaria, en la especialidad de Matemática y Física (ESMF).

Informantes claves

En un estudio de caso, surgen dos tipos de personas clave: los *actores* y los *informadores*, siendo los primeros las personas estudiadas y los siguientes, sujetos que saben sobre el caso y con disposición a conversar (Stake, 2007). En el presente estudio, los actores son las cinco maestras y el maestro estudiado puesto que a través de ellas y él se podrá comprender la cuestión objeto de estudio; cada uno, brinda información relacionada con la forma de trabajar la matemática en el aula desde la perspectiva del caso estudiado. Sin embargo, consideramos *informadores* o *informantes* (Taylor y Bogdan, 1994) a los alumnos y alumnas que participan de cada clase y sobre quienes recae el proceso de enseñanza – aprendizaje, ya que conocen, desde su experiencia, lo indicado en líneas anteriores. Cabe resaltar que no todos los alumnos y alumnas fueron informantes, principalmente porque no todos y todas hicieron evidente su participación en clase ni en las hojas de trabajo que cuestionan sobre la temática a investigar; es decir, sobre los problemas matemáticos y la actividad matemática.

3.4 Entrada en el campo

Los casos a estudiar y el contexto de su observación se enmarcan dentro de una institución educativa de enseñanza básica. Si bien, la investigación propuesta no es de instituciones o centros de enseñanza, es necesario pasar por la misma para acceder al caso particular. En A Coruña, la investigadora no conocía a los docentes de Primaria, por lo que el primer contacto se realizó a través de uno de uno de los directores de tesis quien se encargó de contextualizar la situación y explicar la propuesta (Taylor y Bogdan, 1994). El primer caso fue rechazado; el docente no mostró cierta apertura a la investigación. Stake (2007) expresa que debemos escoger casos que sean de fácil acceso y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas. Los dos siguientes accesos fueron positivos, tanto desde los casos seleccionados como desde los responsables de las instituciones educativas en las que el docente y las docentes trabajaban, por lo que se optó por seleccionarlos.

“Los observadores participantes por lo general tienen el acceso a las organizaciones solicitando el permiso de los responsables” (Taylor y Bogdan, 1994, p. 37). Para llevar a cabo la investigación, se conversó con los responsables de las escuelas en las que se pretendía estudiar los casos, luego de coordinar con el contacto, con el propósito de explicar la investigación. La propuesta fue aceptada, tanto por la directora, para P1 y P2, como por el coordinador, para P3.

El diálogo con el coordinador de una de las instituciones educativas y con la directora de la otra fue de total cordialidad y aceptación. Tras platicar con ellos y exponerse brevemente la investigación y lo que se requería del centro, se retomó el diálogo con el primer posible contacto y se inició la relación con los dos siguientes: el primero correspondía a una institución privada y los dos últimos, a una pública. Todos maestros de Primaria.

Tomando en consideración los casos estudiados en A Coruña, en Piura (Perú) se siguió el mismo patrón buscando colegios públicos y privados a fin de seguir la misma orientación de España. En la ciudad de Piura, el primer contacto fue con los responsables de las instituciones educativas con quienes se mantenía cierta relación profesional y académica. Goetz y LeCompte (1988) indican que para poder acceder al caso de manera fácil e iniciar la recogida de datos, es necesario que el investigador identifique a la persona que allane o simplifique el camino; lo que se ajustaba a los responsables de las instituciones educativas elegidas, quienes concordaron con la iniciativa y no pusieron resistencia. No obstante, el primer contacto no prosperó. Si bien, la responsable de la institución educativa aceptó la propuesta abriendo las puertas de la misma, la docente con quien se trabajaría, no; a pesar de que en un primer momento aceptó la idea. El siguiente escenario fue una institución educativa pública y el tercero y cuarto una privada. En todas, el ingreso fue inmediato, lo cual se vio influenciado por la familiaridad con los contactos dentro de ellas. En un primer encuentro, se les comunicó a los responsables o *porteros* (denominación de Becker, 1970, citado por Taylor y Bogdan, 1994) el motivo de la visita, planteándoles la posibilidad de realizar la investigación en sus instituciones educativas. En las tres instituciones, la aceptación fue inmediata; sin embargo, en los colegios privados había que comunicar a la directora general a fin de validar la misma. La primera visita al colegio permitió conocer, a grandes rasgos (sin verlos personalmente), a los docentes que formarían parte del proyecto, quienes por las características que brindaron los responsables eran docentes “comprometidos con la enseñanza” y con “espíritu de aprender”. En los tres escenarios, y siguiendo lo logrado en A Coruña, se trabajó con alumnos y alumnas de quinto grado. Cabe resaltar que en las instituciones privadas, la gestión escolar tiende a la polidocencia, con la finalidad de buscar la especialización de los docentes en un área de enseñanza determinada.

Entrada en el escenario

Luego de los tratos con los responsables de las instituciones educativas era menester contactar con los docentes que participarían directamente del proyecto como casos a estudiar. Las coordinaciones previas con los profesores eran fundamentales puesto que la función de la investigadora no solo consistía en observar el trabajo docente sino intentar que su trabajo tome en cuenta el de la investigación a fin de poder estudiar el caso a partir de ello y las respuestas de los estudiantes ante el conocimiento y problemas matemáticos suscitados en las clases. Por ello se convino concertar una cita previa a la incursión en el aula con cada docente, a fin de explicar a detalle el proyecto y entregarles el material elaborado para que lo revisaran.

En A Coruña, en el primer contacto con los docentes de la escuela pública se procedió a la presentación personal respectiva, los docentes conocían el proyecto y habían aceptado participar en el mismo; sin embargo, se necesitaba una mayor explicación que fue expuesta inmediatamente, aprovechándose la situación para entregarles el material elaborado. Para el caso de la docente de la institución educativa privada, este sería un segundo encuentro en el que se dialogó sobre su experiencia (de pocos años) como docente de primaria y las características de sus alumnos y alumnas: “muy hábiles aunque algunos con ciertas dificultades para aprender rápidamente”. Asimismo, se le entregó el material de trabajo. En esta visita, la docente proporcionó el horario de trabajo y mostró algunos materiales didácticos que usaban en el aula. En todos los casos, la entrega del material tuvo como objetivo que las docentes y el docente lo conocieran a fin de tener una mejor apreciación de los objetivos de la investigación y expusieran sus apreciaciones sobre el mismo.

En un segundo encuentro con los docentes de la institución pública (y tercero para la privada), se dialogó sobre el material entregado que, aunque comentaron sinceramente que no lo habían leído todo (pero que lo harían a medida que se desarrollaran los temas), lo poco que leyeron les sirvió para tener una idea de la propuesta, que vieron pertinente aunque con cierto recelo en algunos casos, puesto que por el grupo de alumnos y por su experiencia en aula consideraban que era difícil aplicarla completamente. En esta visita, los docentes proporcionaron los horarios de la asignatura de matemática y se habló de manera general de algunos estudiantes: características personales e intelectuales, así como actitudes frente a la actividad matemática. Por ejemplo, en la primera aula del colegio público (P1) estaba matriculada una niña que no asistía frecuentemente a clase y que, por lo tanto, su rendimiento y disponibilidad ante el trabajo matemático en particular y cualquier asignatura en general, eran lentos frente al de sus compañeros y compañeras cuya asistencia era más estable. Asimismo, estaba matriculada otra niña que había llegado en el curso anterior con un rendimiento por debajo del común a la clase; sin embargo, había logrado adaptarse al sistema. Un tercer niño también tenía una asistencia irregular, además era poco comunicativo en clase. Por lo demás, los alumnos no distaban mucho del comportamiento estándar de un niño o niña de su edad; excepto uno que era un poco “hiperactivo”, de acuerdo a la descripción el docente. En la segunda aula del colegio público (P2), la conducta del alumnado era regular, prevalecían las niñas frente a los niños, según la docente “hay chicos listos y otros no tanto”. La tercera aula, del colegio privado (P3) no presentaba casos de niños con características especiales ya sea contextuales como aptitudinales, según comentó la docente, toda la clase era considerada estándar.

En Piura, la situación fue similar; luego de las conversaciones con los responsables de las instituciones educativas, se concertó una cita para conocer a las docentes que participarían del proyecto. Todas maestras. El día de la cita, el director, la promotora y la directora de estudios, cada quien en su colegio respectivo, presentaron a las docentes elegidas, acto seguido se estableció un diálogo con ellas en el que se les explicó la investigación y se les entregó el material elaborado para que lo revisaran y conocieran mejor la propuesta (que aplicarían en sus aulas). Una de las docentes era conocida (P6), puesto que egresó de la universidad en la cual la investigadora labora; las otras, no; sin embargo una de estas últimas (P4), había sido profesora tutora de una egresada de la Facultad de Ciencias de la Educación, de la misma universidad. La primera es licenciada en Educación Secundaria, especialidad Matemática y Física y las dos siguientes de la carrera de Educación Primaria. Las coordinaciones con las tres docentes se dieron de manera positiva. A todas se les expuso con más detalle lo que se pretendía realizar y el papel de cada una de las docentes en esta tarea. Se les comentó que se trataba de un estudio de caso y se les indicó que los datos obtenidos se recogerían en un informe y formarían parte de una tesis doctoral. A diferencia de A Coruña, las docentes no manifestaron ninguna particularidad en sus alumnos (preferían que la investigadora lo apreciara personalmente), por lo que estas se fueron observando a medida que las clases se iban sucediendo.

El siguiente encuentro con las docentes de Piura se centró en comentar el material entregado. Las reacciones fueron similares a las expresadas en A Coruña. Las docentes mostraron conformidad con la propuesta; sin embargo, la experiencia (de distintos años en cada una) les sugería ser cautelosas al proponer una enseñanza basada en la participación constante de los alumnos. Cabe indicar que la docente P4 comentó que estaba participando de una capacitación pedagógica que involucraba un trabajo en clase como el propuesto en la investigación, por lo que manifestó que ella sí programaba sus clases en base a estos lineamientos; además sus alumnos estaban habituados a un tipo de enseñanza en la que se buscaba su participación directa en “la construcción del nuevo conocimiento” y “el trabajo en equipo”. Después de ese tiempo, se conversó personal e individualmente con los profesores sobre sus apreciaciones al respecto.

En líneas generales, los seis docentes de los cinco colegios involucrados manifestaron que el material era bueno pues buscaba “desligarse de la transmisión directa del conocimiento matemático" a través de la "búsqueda de la participación del alumno en el reconocimiento del mismo a través de las diferentes propuestas"; sin embargo, expusieron su preocupación pues esto generaría uso de un tiempo que es "limitado en la escuela". No obstante, su compromiso asumido, expresaron que intentarían adaptar "en parte" su trabajo al de la investigación. Por ello, la propuesta de clases de los docentes reorientó la investigación hacia la gestión propia de cada profesor o profesora, con ciertas aplicaciones de la propuesta, puesto que esta no se usó en clase como estaba planteada; básicamente se tomó el diálogo como estrategia de enseñanza. En palabras de Janesick, (2000, citado por De la Cuesta, 2003, p.25), "el diseño de investigación, que debe ser flexible, se adapta, se transforma y se rehace al avanzar el estudio".

En los seis casos, no mostraron ningún inconveniente inicial, sino apertura hacia la posibilidad de contribuir en esta investigación. No obstante, las observaciones fueron menos frecuentes en los colegios peruanos debido a la calendarización de cada institución educativa y a las actividades programadas al inicio del año escolar u otras (actividades extracurriculares, evaluaciones, etc.). Una vez expuesto el proyecto y teniendo en cuenta los horarios de clases de cada grupo se empezó a acudir a las aulas. Stake (2005, citado por Álvarez, 2011) manifiesta que las personas suelen cooperar y contar sus experiencias, así como ayudar para que otros logren realizar sus trabajos, sin que visualicen un beneficio propio, salvo que haya experimentado una situación negativa cercana.

Entrada en el aula

Siguiendo a Simons (2011) y Stake (2007), la entrada en aula se lleva a cabo luego de establecer relación directa con los docentes y con la autorización de estos. El aula de clase es el espacio en el que se realizaría la investigación ya que en la misma se gesta el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas; en el aula interactúan estudiantes y maestro como sujetos, por lo que la entrada en el aula implicaba establecer un primer contacto con las y los alumnos.

La entrada en el aula se produjo con la presencia directa de la o del docente de clase. Dado que los estudiantes están directamente involucrados en el proceso de enseñanza – aprendizaje que se iba a observar, era preciso aclararles la presencia de la investigadora en el aula. Durante los primeros minutos del primer día de observación, cada docente explicó a sus estudiantes la razón de la presencia de una persona ajena al aula y a la institución; estos lo aceptaron con cierta sorpresa. Los y las estudiantes estaban atentos a la observadora puesto que para algunos grupos, era la primera vez que recibían una visita de esa naturaleza (por lo general reciben la presencia de alumnos de enseñanza superior que se forman para ser docentes). Además, en el caso de A Coruña, al ser extranjera el asombro fue mayor. Para una de las alumnas, su sorpresa fue significativa al saber que era peruana, ya que ella era brasileña y comentó de dónde procedía y "parte" de su vida en su país de origen. En Perú, la cuestión fue similar; sin embargo, al originarse la entrada al aula después que en España, las preguntas de los y las estudiantes se centraron en torno a la realidad española y a los niños españoles en particular (¿cómo son, cómo aprenden, etc.?).

Por otra parte, la investigadora se dirigió a ellos y ellas explicándoles el motivo de su presencia en el aula, por lo que la comunicación del proyecto se trasladó a los estudiantes, a quienes se les informó de manera sencilla el mismo, exponiendo al grupo total y grosso modo, la investigación, los objetivos y la labor de la investigadora. Los alumnos y alumnas cuestionaron detalles sobre el trabajo (qué es una tesis doctoral, para qué sirve, porqué se investiga sobre los problemas matemáticos "siendo tan problemáticos") y en algunos casos manifestaron su facilidad o dificultad para acceder al conocimiento matemático, así como el gusto o no por la actividad matemática (o por la escuela en general). Desde el punto de vista ético, Vanegas (2010, p. 132) expresa que "debe garantizarse la aceptación de los sujetos para participar en el estudio a través del *consentimiento informado*, y la *confidencialidad"* puesto que, a medida que pasa el tiempo, se genera una relación muy directa entre el investigador y el o los informantes, que en ocasiones devela experiencias propias muy sensibles para la persona, que pueden afectarla de alguna manera; por ello, se precisó comunicar claramente a ambos grupos: docentes y estudiantes estas ideas. Acto seguido, en cada aula, se procedió a observar el trabajo de la clase.

3.5 Recogida de datos

La recogida de datos es importante dentro del contexto de la investigación puesto que permite, una vez analizada la información registrada, responder a las preguntas de investigación formuladas y alcanzar los objetivos propuestos. Los casos se estudian a través del contacto directo con cada uno y en su ámbito de actuación, para lo cual "el estudio cualitativo se aprovecha de las formas más habituales de conocer las cosas" (Stake, 2007, p. 51). La recogida de datos se realizó a través de las siguientes técnicas:

- Cuaderno de campo: observación participante y material discursivo
- Análisis de documentos

– Análisis del espacio

El empleo de variadas técnicas permite una mayor credibilidad a través de la triangulación (Goetz y LeCompte, 1988; Taylor y Bogdan, 1994; Stake, 2007).

La siguiente tabla resume las fuentes de información y las técnicas de recogida de datos elegidas:

Tabla 10. Fuentes de información y técnicas de recogida de datos utilizados en la investigación

<table>
<tr><th colspan="2">Fuente de información</th><th>Descripción</th><th>Número</th><th>Técnica de recogida de datos</th></tr>
<tr><td>Docentes</td><td rowspan="2">Clases de matemática</td><td rowspan="2">Espacio interactivo entre docente, alumnos y conocimiento matemático.</td><td rowspan="2">36</td><td rowspan="2">Observación participante y material discursivo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estudiantes</td></tr>
<tr><td>Hojas de aplicación</td><td>Preguntas y actividades propuestas al alumnado en formato escrito</td><td>10</td><td>Análisis de documentos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aula</td><td>Ambiente de trabajo y lugar donde se desarrolla la clase de matemática.</td><td>6</td><td>Observación participante</td></tr>
</table>

Calificamos, en primer lugar, al profesorado y estudiantado como fuente de información porque a través de su participación, la clase de matemática cobra vida y se puede recoger información sobre lo acontecido en ella. Sin sus presencias no habría clase ejecutada. A continuación se detalla cada una de estas tres fuentes, dado que los docentes y estudiantes han sido referenciados en puntos anteriores. Posteriormente, se analizará cada una de las técnicas expuestas, explicando sus características básicas y contextualizándolas a la presente investigación.

Las clases de matemática

Consideramos la clase de matemática como fuente de información pues en ella se lleva a cabo la actividad matemática que el docente gestiona y que se planteó observar. El desarrollo de la clase brinda información sobre diferentes aspectos: propuesta de actividades, introducción al conocimiento, estrategias empleadas, participaciones del alumnado, interacción estudiante – docente, interacción estudiante – conocimiento, “entradas” de los alumnos y alumnas a la actividad, “abandonos”, papel de los problemas matemáticos, valoración de cada aspecto de acuerdo a su incidencia en el mismo; entre otros. La clase de matemática es el espacio vivo y real, a través del cual se observa el proceso de enseñanza – aprendizaje y sus implicancias asociadas a la resolución de problemas.

Hojas de aplicación

La información sobre la actividad matemática de los alumnos y las alumnas se recogió por dos vías: a través de su participación durante el desarrollo de las clases observadas y mediante hojas de aplicación individuales que se les entregó casi al finalizar el periodo de observación y que permitió realizar el análisis de documentos o análisis documental (Simons, 2011). Cabe indicar que las hojas de aplicación no se usaron ni desarrollaron de manera obligatoria en ninguna de las aulas observadas; es decir, las alumnas y los alumnos eran conscientes que dichas hojas no formaban parte de su evaluación en la asignatura; sin embargo, se comprometieron a desarrollarlas “de acuerdo a lo que sabían”. Las hojas de aplicación se usaron en la medida en que las y el docente consideraban que era pertinente su aplicación: en algunos casos, se desarrollaron en clase; en otros, en casa. La siguiente tabla muestra, de manera general, el título de la hoja de aplicación, que coincide con el tema matemático y el tipo de actividades propuestas.

Tabla 11. Hojas de aplicación

Título de la hoja de aplicación	Tipo de actividades
Fracciones: Operaciones	Preguntas directas Cálculo
Porcentajes	Preguntas directas Cálculo Resolución de Problemas Matemáticos
Sistema Métrico Decimal	Preguntas directas
Matemáticas escolares	Preguntas directas Planteamiento de Problemas Matemáticos Resolución de Problemas Matemáticos

Título de la hoja de aplicación	Tipo de actividades
Piensa, resuelve y responde	Resolución de Problemas Matemáticos
Números decimales	Preguntas directas Cálculo
Medidas de superficie	Preguntas directas Resolución de Problemas Matemáticos
Medida del tiempo	Preguntas directas Cálculo
La hora, los minutos y los segundos	Preguntas directas

En términos generales, en las hojas de aplicación se plantean tres tipos de actividades: preguntas directas, cálculo y problemas matemáticos escolares. A continuación, se explica cada tipo.

a. Preguntas directas

Las preguntas directas conforman la mayor cantidad de planteamientos a las alumnas y a los alumnos, versan sobre cuestiones de la actividad matemáticas en la escuela; sus propuestas se dirigen a obtener una respuesta a partir de la aplicación de una operación o a indagar sobre qué piensa el alumnado sobre la actividad matemática y el conocimiento matemático, qué relaciones establecen, lo que es un indicio de las ideas que tienen sobre la actividad matemática y cómo se enfrentan a ella. Por ello, sus respuestas han de ser operativas y/o textuales. Un ejemplo de ello, lo abordamos a partir de la Hoja de Aplicación 2 (H2) en la que las dos primeras preguntas son consecutivas e intentan indagar sobre la capacidad de apertura hacia la actividad matemática en el alumno, en un aspecto específico:

- ¿Cómo harías para sumar dos fracciones? Explica por qué y escribe un ejemplo (H2Q1)
- ¿De qué otra manera podrías sumar dos fracciones? (H2Q2)

Con la primera, se busca que las y los estudiantes describan un proceso de resolución de una suma de fracciones (que es conocido) y con la segunda se pretende que los alumnos sean capaces de buscar o idear otras maneras de resolver la misma operación y expresarla (o al menos intentarlo). Nótese que una suma de fracciones considera si son fracciones homogéneas o fracciones heterogéneas, por lo que en la primera pregunta un estudiante puede hacer referencia a uno de los tipos o a ambos, considerando que al momento de responder las cuestiones, los estudiantes tenían conocimiento de ambos tipos de fracciones y de la forma cómo se suman. Si la solución a la primera cuestión se centra en una de las formas (o ambas) y la respuesta a la segunda cuestión es negativa (no hay otra manera) o se orienta al otro tipo de fracciones (por ejemplo, si en la primera pregunta respondió en base a las fracciones homogéneas y en la segunda en función de las fracciones heterogéneas) su pensamiento hacia la actividad matemática es cerrado, ya que se circunscribe a lo que conoce y aplica, mientras que si su respuesta a la segunda cuestión es positiva y plantea un modo distinto (por ejemplo, transformando en decimales, u otro) su pensamiento hacia la actividad matemática es abierto, pues intenta un planteamiento distinto que le permite pensar y trabajar solo (aunque pueda equivocarse en ello).

De acuerdo a lo anterior, las preguntas directas planteadas son de cuatro tipos: por definición, explicativas, reflexivas y metodológicas.

Preguntas por definición: se orientan a indagar sobre el concepto formado en el alumno de una cuestión matemática específica:

- ¿Qué son los porcentajes? (H5Q1)
- ¿Qué son las matemáticas para ti? (H13Q3)
- ¿Qué es una superficie? (H16Q1)

Las preguntas antes expuestas se orientan a examinar el concepto o idea que maneja el alumnado sobre el tema, identificando los elementos que lo forman y la profundidad obtenida. Los conceptos son importantes pues orientan el nivel de comprensión del tema. Los primeros conceptos se forman a partir de las características generales, independientes o visibles. Por ejemplo, a la pregunta ¿Qué son los porcentajes? Las respuestas son variadas: unas asociadas a su naturaleza (el tanto por ciento), otras a su uso cotidiano (rebajas), la manipulación numérica (operaciones), formas de construir un número, etc. Por otro lado, las respuestas a la idea de matemática también son variadas ya que pueden referirse a la forma cómo se enfrentan a la Matemática o a la actividad que se realiza en ella. Finalmente, para la pregunta qué es una superficie, las y los estudiantes recurren a sinónimos (espacio, extensión), ubicación (parte dentro de algo), forma (plano), dimensiones (largo y ancho), medidas (metros cuadrados), etc. Una definición que suele consignarse en los libros de texto hace referencia al largo y ancho o a la longitud y anchura. No obstante, los y las estudiantes no suelen asociar y exponer directamente dichos conceptos con la idea de superficie.

En cuanto al porcentaje la idea no es diferente. Los estudiantes responden que el porcentaje es:

- El tanto por ciento
- Son fracciones escritas de otra manera
- Expresión matemática
- Son los que te indican cuánto dinero te suben o cuánto dinero te rebajan.
- Son un signo que te expresa algo
- Una manera de expresar una parte del total de algo o el total y más.

La definición en este caso se asocia a su naturaleza, la forma de expresarse o a la utilidad o uso.

Preguntas explicativas: su propósito es observar cómo las y los estudiantes comprenden, conciben y comunican una cuestión matemática, qué recursos utilizan para ello. Dentro de este grupo podemos encontrar aquellas que se orientan a explicar una idea (EI), un procedimiento (EP) o aplicar el primero a un contexto diferente o situación distinta (EC).

- EI: ¿Qué significa operar con fracciones? (H1Q1)
- EP: ¿Cómo harías para sumar dos fracciones? Explica por qué y escribe un ejemplo (H2Q1)
- EC: ¿Qué usos se les da a los porcentajes? (H5Q2).

A diferencia de la pregunta: ¿Qué son los porcentajes?, la primera cuestión de este grupo: ¿qué significa operar con fracciones? busca que el estudiante exprese la idea que tiene de una acción propia de la actividad matemática (operar) asociado a las fracciones, explicando un proceso. Por lo general, el alumnado opera directamente, asociando, mecánicamente, una acción (agregar, añadir, quitar, disminuir…) a una operación matemática (sumar, restar…) y ésta a un procedimiento o algoritmo específico.

La segunda pregunta espera que describa un proceso específico y conocido. Se intenta que la y el estudiante no aplique un procedimiento sino que lo explique, de esta manera se observa la forma que tienen de actuar frente a la cuestión planteada y si es capaz de usar lenguaje cotidiano en la explicación de cuestiones matemáticas.

La tercera pregunta busca que el y la estudiante trascienda la actividad matemática de la actividad meramente operativa a la situacional y de la escolar a la cotidiana; para ello se le cuestiona sobre los usos de un asunto matemático específico.

Preguntas reflexivas: a diferencia de las anteriores, estas se proponen para que las y los estudiantes consideren con detenimiento un evento o una cuestión y expliquen lo que han pensado sobre ello. Las cuestiones explicativas exponen claramente un evento para darlo a conocer de manera comprensiva, mientras que las cuestiones reflexivas buscan que la y el estudiante se cuestione sobre el evento y transmita su juicio. Pueden asociarse a conceptos (RC) o a procedimientos (RP); no obstante se considera un tercer sub grupo asociado a la capacidad de apertura en la aplicación del conocimiento (RA).

- RC: ¿Puede ser mayor el 50% que el 70%? Explica (H6Q5)
- RP: ¿Crees que puede haber una forma distinta a la que empleaste anteriormente para pasar de expresiones incomplejas a complejas? Explica (H17Q5)
- PA: ¿Piensas que un niño/a que sepa sumar dos o más fracciones homogéneas, podría sumar dos fracciones heterogéneas, si aún no conoce ninguna forma (método) de hacerlo? Explica tu respuesta (H11Q3).

Por su naturaleza el 50% es menor que el 70%, ya que el primero representa la mitad y el segundo más de la mitad; sin embargo, en función de su referencia (el porcentaje está asociado a una cantidad específica), el producto puede ser mayor en el primero y menor en el segundo. Dentro de la hoja de trabajo la pregunta: ¿Qué es mayor: 50% o 70%? ¿Por qué? precede a esta. Responder positivamente a la pregunta formulada al inicio es un indicio de apertura ya que considera otros factores asociados al contexto en el que se usan estos porcentajes y no únicamente una cantidad específica para ambos.

La siguiente pregunta se centra en observar si la o el estudiante es capaz de idear una forma distinta de manipular las cantidades para representarlas de diferente manera. Considerar una forma diferente supone cierta apertura hacia el trabajo matemático.

La pregunta final supone evaluar si la o el estudiante es capaz de considerar la construcción personal del nuevo conocimiento. Indicar que sí se puede, explicando o argumentando porqué es un indicio de idea de la actividad matemática en posible construcción para el estudiantado. Una respuesta negativa supone que la o el estudiante necesita el conocimiento explícito para actuar, lo cual deja la actividad matemática fundamental en manos únicamente del o la experta (docente).

Pregunta metodológica: se orienta hacia el concepto que tiene de la forma de aprender la matemática en general o particular. Se proponen dos preguntas al respecto:

- ¿Cómo aprendiste a hallar el volumen de los objetos? (H12Q3)

- ¿Cómo aprendes matemática? (H13Q4)

Estas preguntas se asocian a las anteriores por cuanto se relaciona con la forma de acceder a la matemática que se enseña en la escuela; ya sea a través de la propia persona o a través de otros u otras (docente, por ejemplo). El aprendizaje es personal; sin embargo, se aúna principalmente a agentes externos como los métodos de enseñanza o los enseñantes.

b. Cálculo

El aprendizaje de los números y el cálculo numérico forma parte de la actividad matemática escolar por excelencia; sin embargo, se han considerado pocas propuestas de esta naturaleza en las hojas de aplicación puesto que la intención de estas se centra en la reflexión y explicación del conocimiento más que en su aplicación operativa directa y única. Sin embargo, en este caso, su objetivo es observar si los alumnos resuelven con acierto estas cuestiones. Pueden ser simples o combinados. Dentro de este grupo se encuentran:

- Cuánto es ½:2 (H4Q2)
- ¿Cuánto es los 5/7 de la unidad? ¿Cuánto es los 5/7 de 35?... (H4Q3)
- Realiza la siguiente operación: $2/3+\frac{1}{2}-4/6+\frac{3}{4}=$ (H4Q4)
- ¿Qué porcentajes te descuentan si: De… te rebajan…? (H5Q4)
- En 98675 segundos hay…..h….m….s. (H17Q4)

Operar con fracciones es una cuestión compleja para algunos estudiantes, puesto que suelen combinar los conocimientos que tienen sobre la operación con números naturales y aquellos asociados a fracciones sin establecer diferencias entre la naturaleza de las cantidades aun cuando sepan que son distintas. Situación parecida se da con las temáticas posteriores. Dominar estas cuestiones requiere tiempo; sin embargo, se busca observar qué aplica el estudiante al resolver estas cuestiones.

c. *Planteamiento y resolución de problemas matemáticos*

Al considerar dentro de la investigación los métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos (RPM), es fundamental incluir este tipo de cuestiones en las hojas de aplicación. Con ello indagamos acerca de qué problemas matemáticos son capaces de plantear las y los alumnos, exponiendo una idea de lo que es un problema matemático desde su experiencia y conocimiento, así como la solución que le dan a los mismos. Dentro de este segundo objetivo, se han propuesto problemas estructurados (RPME) en el sentido que su información es clara, completa y directa; problemas semiestructurados (RPMSE): a diferencia del grupo anterior, no contienen de manera clara la información necesaria para resolverlo directamente; así como problemas de ingenio (RPMI), pues la estrategia de solución no es inmediatamente asequible a los alumnos, por lo que deben idearla. Ejemplo de problemas propuestos son los siguientes:

Planteamiento:

- Haz una lista de dos problemas matemáticos distintos que te haya planteado tu profesor/a en clase sobre… (H11Q1)

Resolución:

- RPME: ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se necesitan para envasar 600 litros de
- RPMSE: Halla la superficie del siguiente triángulo. Explica cómo lo has hecho (H12Q2)
- RPMI: Se quiere pasar de un depósito a otro siete litros de agua y solo disponemos de dos jarras: una de 3 litros y otra de 5 litros (ni los depósitos ni las jarras no son graduados). ¿Cómo pasarías, exactamente, siete litros de un depósito a otro?

Cabe resaltar que el problema semiestructurado expuesto incluye una pregunta directa, ya que busca que la o el estudiante explique/reflexione sobre su actividad de resolución. Por lo general, los alumnos y alumnas de Primaria resuelven problemas pero no son capaces de explicar su resolución; en su defecto, enuncian los pasos que han seguido, obviando detalles de reflexión. En el proceso de investigación, al preguntar a las y los estudiantes por qué lo habían resuelto de esa manera, sus respuestas son imprecisas, indicando lo siguiente: “lo vi”, “así tiene que ser”, “así se resuelven”, evidenciando poca capacidad de comunicación oral, aunque no necesariamente conocimiento matemático. Las respuestas indicadas líneas arriba son brindadas por alumnos y alumnas que tienen buen estatus matemático. Los y las estudiantes que no tienen buen estatus matemático, por lo general, no responden la pregunta o suelen hacerlo indicando la operación aplicada o el tema matemático implicado ya que su solución suele no tener sentido. Cabe resaltar que los problemas propuestos fueron novedosos para los estudiantes, sobre todo los dos últimos.

Aula

Dentro de las clases, el espacio físico del aula cobra mucha relevancia. "La incorporación de registros observacionales centrados en aspectos proxémicos y kinésicos es particularmente útil cuando el foco de la investigación es el uso del espacio del aula o las pautas de la interacción entre profesor – alumno" (Goetz y LeCompte, 1984, p. 154) y entre alumnos. Es importante considerar el espacio físico del aula y la distribución del mobiliario (carpetas o mesas y sillas) ya que estos elementos contribuyen a las relaciones interpersonales que se dan dentro del aula, trasmiten una idea de la gestión del proceso de enseñanza – aprendizaje, influyendo en construcción del conocimiento y en el éxito y/o fracaso de las situaciones de aprendizaje.

Durante la investigación se observó que la organización de las y los alumnos dentro del aula varió en algunos casos en función de las actividades propuestas durante el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. La distribución del alumnado a través de los pupitres es un indicio del tipo de enseñanza que promueve el profesorado que por lo general, sigue un corte tradicional, en el que las y los alumnos se sientan individualmente en su carpeta mirando al docente, lo que orienta la actividad de este hacia un trabajo separado y centrado en el profesor o profesora y lo que este o esta transmite y en el trabajo individual de los y las estudiantes. Por el contrario, las mesas unidas es un indicio de cierta orientación a la interacción entre pares o grupos mayores. La observación del espacio físico nos permitió realizar un mapa de cada aula centrado en la distribución de los pupitres y del escritorio del o la docente que se comentará en el capítulo referido a hallazgos.

3.5.1. Cuaderno de campo: registro generalizado, observación participante y material discursivo (verbatim)

Como se expuso en párrafos anteriores, la recogida de datos se realizó a través de tres técnicas que detallamos a continuación. En el registro de los datos jugó un papel fundamental el cuaderno de campo para recoger todo lo que acontecía en el aula a través del registro generalizado de las acciones y acontecimientos y de las interacciones verbales de los participantes. El registro generalizado se concreta en dos modos más específicos de recoger datos: la observación de las acciones y acontecimientos y el registro del material discursivo o verbatim

Observar es otra destreza de la vida cotidiana, además de las competencias de hablar y escuchar, que se emplea en investigación cualitativa (Flick, 2004). La observación se vale de la contemplación de fenómenos, acciones, procesos, situaciones…, desarrollados en su marco natural, para poder conocer y comprender mejor la realidad observada. Esta técnica permite darnos cuenta de lo que sucede en el aula entre el docente, los alumnos, el conocimiento matemático y la actividad asociada a la resolución de problemas, más allá de lo que se puede identificar solo con la vista.

La observación es una técnica de investigación cualitativa que permite recoger información a través de lo que perciben nuestros sentidos. Al referirnos en plural a los sentidos, se entiende que si bien la observación se asocia directamente con el sentido de la vista, su aplicación no solo se basa en lo que este retiene, sino también en lo que captan otros sentidos, por ejemplo, el oído, con lo que escucha; de ahí que se asocie la observación con la contemplación que exigen examinar atentamente lo que se ha de investigar. A partir de la observación se realiza un análisis cualitativo de los escenarios teniendo considerando el contexto en el que se desarrolla la acción puesto que su comprensión aporta una visión más completa de la situación.

Según Friedrichs (1973, citado por Flick, 2004), los procedimientos de observación se pueden clasificar en general a lo largo de cinco dimensiones: observación en cubierta/observación al descubierto, observación participante/observación no participante, observación sistemática/observación no sistemática, observaciones en situaciones naturales/observación en situaciones artificiales y observación de sí mismo/observación de otros, clasificación que se puede aplicar en investigación cualitativa, excepto que en este tipo de investigación los datos se recogen en general a partir de situaciones naturales. Otras clasificaciones incluyen la observación individual/observación en equipo y la observación directa/observación indirecta. La observación aplicada en la presente investigación tiene las siguientes características:

- *Al descubierto*, o *investigación manifiesta* (Taylor y Bogdan, 1994) pues los actores tenían conocimiento de los intereses investigativos, al exponerlos personalmente.
- *Participante* ya que se interactuó tanto con los y las estudiantes como con las y el docente. Con los primeros en el proceso mismo de la clase, cuando estos resolvían las actividades propuestas por el o la docente; con el maestro y las maestras en el momento previo, durante y al final de la clase.
- *En escenarios naturales* puesto que se observó la actividad en el aula de clase, durante el desarrollo de la clase de matemática.

- *Observación de otros*, puesto que se observó la interrelación entre docente y estudiantes en el desarrollo de la clase de matemática.
- *Individual*, pues la observación la llevó a cabo una persona (la investigadora)
- *Directa*, puesto que la investigadora se situó en el mismo contexto de referencia: el aula de clase y durante el desarrollo de las sesiones de matemática programadas.

Desde un primer momento se buscó observar "*in situ*" la realidad a estudiar, por lo que esta fue la principal técnica de recogida de datos. Por otro lado, interesaba captar el caso tal como se vivía, sin agentes que "contaminen la escena", por lo que en un primer momento se optó por una *observación no participante*; sin embargo, a medida que se desarrolló la investigación, la técnica varió a *observación participante* puesto que se estableció un contacto activo con los y las estudiantes y docentes observados que permitía un mejor conocimiento y comprensión de la situación. Cabe precisar que, en la búsqueda de la máxima discreción posible, se evitó filmar y tomar fotos asociadas al trabajo directo de los y las estudiantes. Este hecho podría presumir una sustancial restricción al estudio, por lo que se prefirió realizar las observaciones mediante la toma de anotaciones de lo sucedido o *registro generalizado* de la situación (Velasco y Díaz de Rada, 2015) que se detallará posteriormente.

Las observaciones formales de las sesiones de clase se desarrollaron directamente dentro del horario asignado a la clase de matemática y se ejecutaron entre el 13 de febrero y el 29 de abril de 2008, incluyendo ambas fechas, en colegios españoles, y entre el 24 de julio y el 12 de diciembre de 2008, en colegios peruanos. El siguiente cuadro indica el número de sesiones observadas por docente.

Tabla 12. Número de sesiones observadas y analizadas por docente

Código del Docente	Número de clases observadas	Número de clases analizadas
P1[15]	32	6
P2	32	6
P3	20	7

---

[15] Se observaron más clases que no fueron desarrolladas por el docente sino por una profesora sustituta (del 11 al 27 de abril).

P4	22	6
P5	15	6
P6	17	6
Total	138	37

Se puede apreciar que las observaciones fueron en mayor cantidad en los colegios españoles; esto porque en los colegios peruanos coincidió con la realización de diferentes eventos extracurriculares que disminuyó horas a las visitas programadas, además de las evaluaciones programadas dentro de estas horas. Por otro lado, en el caso de P3 la diferencia fue porque en el transcurso de la investigación la docente con la que se inició la misma se dio de baja temporalmente y asumió el aula una nueva docente (P3) quien cuando ocupó el cargo estaba informada de la investigación; no obstante, se realizó un primer contacto con ella y se le explicó detalladamente la misma.

Por otro lado, la tabla 12 informa que las clases analizadas son en menor cantidad que las observadas. La razón de ello se debe principalmente a que las clases siguieron un patrón fijo que reiteraba el tratamiento de las mismas a medida que se sucedían. Suárez y Arenas (2013) toman el término “saturación teórica”, (de Glaser y Strauss, 1967; Glaser, 1978; Strauss, 1987; Corbin y Strauss, 2002) para referirse al “momento en el que el investigador detiene la recolección de datos porque considera que su teoría ya está construida y porque los datos adicionales, en vez de aportar al desarrollo de la teoría, incrementan el volumen de los mismos” (pp. 100 – 101). Asimismo, se escogió una secuencia sucesiva de las clases a fin de poder observar un bloque completo en cadena que incluya diferentes aspectos de la actividad propuesta por el o la docente. Finalmente, el número elegido de observaciones para analizar fue seis, excepto en P3 puesto que la sexta clase tomada inició un tema nuevo que no se concretó en la misma, por ello se trabajó la siguiente clase también a fin de poder analizarla completamente. No obstante, en el análisis de clases se recurre a otras sesiones no analizadas completamente que permiten hacer referencia a situaciones que se consideran pertinentes incluir, tal es el caso de S17-P3C2.

Como ya se dijo, para plasmar la información conseguida a través de la observación usamos la toma de apuntes. Anotar lo que sucede permite fijar la sustancia de una acción, recordarla, asimilar y estructurar. La recogida de datos a través de la observación se realizó mediante la redacción de lo que acontecía en el aula, combinando descripciones generales con diálogos suscitados entre el o la docente y sus estudiantes para lo cual se utilizó un cuaderno de recogida de información (o cuaderno de campo). “El instrumento de registro de datos propio del investigador de campo es el “cuaderno de campo”, donde se anotarán las observaciones (notas de campo) de forma completa, precisa y detallada (lo que no está escrito, no sucedió nunca)” (Amezcua, 2000, p. 34). Estas palabras se asocian a lo que Taylor y Bogdan (1994) registraron sobre las notas de campo, “procuran registrar en papel todo lo que se puede recordar sobre la observación. Una buena regla establece que si *no está escrito, no sucedió nunca*” (p. 75).

El registro generalizado, permite plasmar por escrito el diálogo suscitado entre el o la docente y las y los estudiantes, sus comentarios espontáneos, algunas anécdotas expuestas, etc. Asimismo, las expresiones literales (*verbatim*) de los observados, producto del discurso “funciona a veces como un auténtico descriptor de modos de comprensión del mundo” (Velasco y Díaz de Rada, 2015, p. 160); en el caso de la presente investigación, de la actividad matemática en el aula.

Las anotaciones tomaron en cuenta el desarrollo de la clase a fin de identificar el tipo de actividades propuestas, la interacción del alumno o alumna con la actividad, con el o la docente y con el conocimiento matemático que llevaban implícito, los problemas matemáticos propuestos, así como algún comentario de la observadora.

En las anotaciones, por lo general, se identifica a las y los alumnos; no obstante, en momentos en los que la participación involucraba a varios de ellos o de ellas, algunos o algunas estudiantes quedaron inscritos en el anonimato. Asimismo, cuando las intervenciones son generales (dos o más alumnos), se consigna la palabra “alumnos”, independientemente del género de los mismos. La redacción final de las clases observadas contiene bloques descriptivos y dialógicos, así como pies de página aclaratorios; al finalizar, una interpretación de la misma en base a elementos que capturan la atención, tales como, el conocimiento matemático, el tipo de actividades propuestas, el modo que utiliza el o la docente para interactuar con el y la estudiante o la forma de gestionar una intervención, entre otros aspectos, a través de los memos analíticos (Quintana, 2006; Mora, 2010).

En total se describieron tantas clases como observaciones de las mismas se realizaron, tal como se indica en la tabla anterior. Sin embargo, se analizaron un número limitado de ellas debido a la saturación teórica como ya se comentó.

3.5.1.2 Análisis de documentos: Hojas de aplicación

Simons (2011) emplea la palabra "documento" para referirse tanto a los documentos formales como "a cualquier cosa que se haya escrito o producido relativa al contexto o escenario" (p.97). En este sentido, la autora aclara que en los documentos escritos se pueden buscar pistas que ayuden a comprender la cultura, los valores, las creencias y actitudes.

Pinto (1989), quien señala que el análisis documental forma parte fundamental de la Ciencia de la Documentación, hace una reflexión sobre dicho análisis a través de diferentes autores (Gardin, 1973, Vickery, 1969; Coyaud, 1966; Courrier, 1976; Fondin, 1977; López Yepes, 1981; Amat, 1979; García Gurtiérrez, 1984) y concluye que el análisis documental:

> …está constituido por un conjunto de operaciones (unas de orden intelectual y otras mecánicas y repetitivas) que afectan al contenido y a la forma de los documentos originales, reelaborándolos y transformándolos en otros de carácter instrumental o secundarios, con el objetivo último de facilitar al usuario la identificación precisa, la recuperación y la difusión de aquellos. (p. 328)

Álvarez (2008) lo concibe como un "rastreo de materiales en formato papel, vídeo, audio, ya sean producidos por los miembros de la comunidad estudiada o por el propio investigador" (pág. 8), que serán organizados de acuerdo a las categorías que genere (y regenere).

En la presente investigación, el análisis documental se centró en las hojas de aplicación resueltas por las y los estudiantes. Estas hojas contienen información respecto a la forma cómo las alumnas y los alumnos conciben el trabajo matemático, de manera "bruta" y cómo se enfrentan a él, de ahí que se vio necesario extraer de la misma, indicios respecto a estas ideas a través del análisis de las respuestas vertidas.

Se propusieron dieciocho hojas de aplicación circunscritas a temas específicos de la matemática escolar: fracciones, porcentajes, sistema métrico decimal, medida de tiempo, superficie y perímetro, planteamiento y resolución de problemas matemáticos. Todas las hojas aplicadas versaron sobre temas que los alumnos y las alumnas desarrollaron durante el periodo de observación. Cada hoja de aplicación incluyó preguntas o actividades sobre el contenido trabajado. La siguiente tabla resume la relación de hojas de aplicación propuestas, especificando: título de la hoja, número de hojas por cada tema (NH) y sus respectivos planteamientos a través de preguntas, problemas o cálculo (Tipo de actividades), según el orden de la hoja (OH), así como la cantidad de actividades, de acuerdo al tipo (C) y los grupos que las respondieron, según el caso estudiado (P1, P2, P3, P4, P5 y P6). El color rojo en la columna OH indica que la hoja se analizó completamente; es decir, cada una de las actividades propuestas; mientras que el color azul, que el análisis se hizo de manera parcial, solo en algunas actividades, y el color negro que no fueron analizadas:

Tabla 13. Características de la asignación de las Hojas de Aplicación

Título de la hoja de aplicación	NH[16]	OH	Tipo de actividades	C	Docente					
					P1	P2	P3	P4	P5	P6
Fracciones: Operaciones	4	1	Preguntas directas	3	x	x		x	x	x
		2	Preguntas directas	3	x	x		x	x	x
		3	Preguntas directas	3	x			x	x	x
		V1	Preguntas directas	1	x					
			Cálculo	3						
		V2	Preguntas directas	2				x	x	x
			Cálculo	2						
Porcentajes	3	1	Preguntas directas	5	x	x		x	x	x
			Cálculo	1						
		V1	Preguntas directas	5	x	x				
		V2	Preguntas directas	3				x	x	x
			Cálculo	1						
		3	Preguntas directas	3				x	x	x
			Resolución de PM	1						
Sistema Métrico Decimal	3	1	Preguntas directas	4	x	x			x	x
		2	Preguntas directas	4	x	x			x	x
		3	Preguntas directas	4	x				x	
Matemáticas escolares	3	V1	Preguntas directas	2	x	x				
			Planteamiento de PM	3						

---

[16] Número de Hojas: En todas se considera cada carilla como una hoja, ya que las propuestas en cada una son independientes, excepto en Números decimales y Medidas de superficie que la hoja abarca ambas carillas ya que es una propuesta continuada.

Título de la hoja de aplicación	NH[16]	OH	Tipo de actividades	C	Docente					
					P1	P2	P3	P4	P5	P6
		v2	Preguntas directas	1					x	x
			Planteamiento de PM	3						
		2	Preguntas directas	2	x				x	x
			Resolución de PM	1						
		3	Preguntas directas	3	x	x	x		x	x
			Planteamiento de PM	3						
Piensa, resuelve y responde	1	1	Resolución de PM	3	x				x	x
Números decimales	1	1	Preguntas directas	7				x	x	
			Cálculo	17						
Medidas de superficie	1	1	Preguntas directas	2			x			
			Resolución de PM	1						
Medida del tiempo	1	1	Preguntas directas	5			x			
			Cálculo	1						
La hora, los minutos y los segundos	1	1	Preguntas directas	8			x			
Total	8	-	-	-	3	8	4	8	15	3

3.5.1.3. Análisis del espacio

La organización del trabajo de los alumnos en el aula, la manera cómo se distribuyen y realizan su tarea se ven reflejadas en la distribución espacial de los estudiantes. El espacio físico conocido como *Aula* proporciona elementos que permiten asociar la forma como el o la docente gestiona el proceso de enseñanza – aprendizaje y cómo los y las estudiantes interactúan en clase, de esta forma se observan clases que favorecen el trabajo individualizado, con carpetas o pupitres separados; trabajo por parejas, trabajo en pequeño grupo, trabajo en gran grupo, entre otras. Esta información se registró mediante un mapa de aula centrado en la distribución de los pupitres a lo largo

---

[17] El cálculo está incluido dentro de una pregunta directa.

de las sesiones observadas. Si bien, el aula es un espacio físico estático, su *movimiento* depende de la interacción que permita el o la docente y que vivencie el y la estudiante.

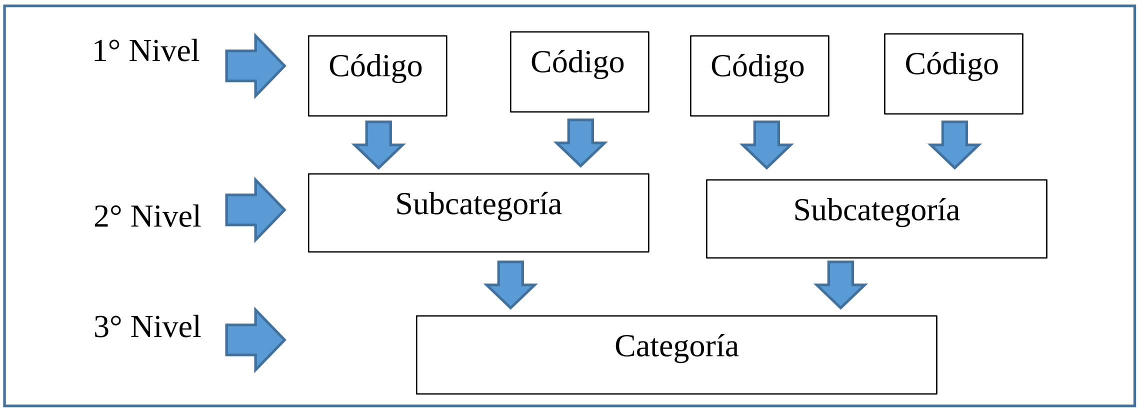
A través de la observación realizada se pudo identificar que el estilo de distribución de estudiantes que prevalece en casi todas las aulas es el de carpetas o pupitres en pares, lo que permitía intercambiar ideas con el compañero o compañera a la derecha o izquierda, según sea el caso. Es decir, que la distribución era por columnas y filas. Esta distribución se observó en los casos P1, P2, P3 y P5, mientras que los casos P4 y P6, mostraron una distribución diferente. Para P4, la distribución fue en grupos de seis, siete u ocho estudiantes, esta distribución facilitaba el trabajo en grupos, cuando la actividad lo requería. Para P6 la organización fue en columnas y filas de acuerdo a lo expuesto en los primeros casos, con una fila extraordinaria de cinco carpetas fusionadas en la parte posterior del aula; en este caso, de acuerdo a lo explicado por la docente, los alumnos podían trabajar en grupos mayores. Cabe resaltar que en todos los casos observados, los estudiantes que requerían de mayor atención por parte de los docentes se ubicaban cerca de ellos.

3.6. Análisis de datos

Analizar e interpretar consiste en dar sentido a las cosas, para ello se necesita mirar una y otra vez los datos a fin de descubrir en ellos aquello que pueda ser significativo para el estudio y establecer cierta relación. Los datos recogidos a través de las observaciones se han analizado tomando en cuenta a Stake (2007) y Flick (2004), a través de la interpretación directa y la categorización temática, respectivamente. La interpretación directa permite identificar aquellos aspectos que destacan en el material recogido que puedan dar sentido a la situación. La categorización temática no dista mucho de la anterior, puesto que esta consiste en identificar aspectos relevantes, codificarlos y posteriormente categorizarlos.

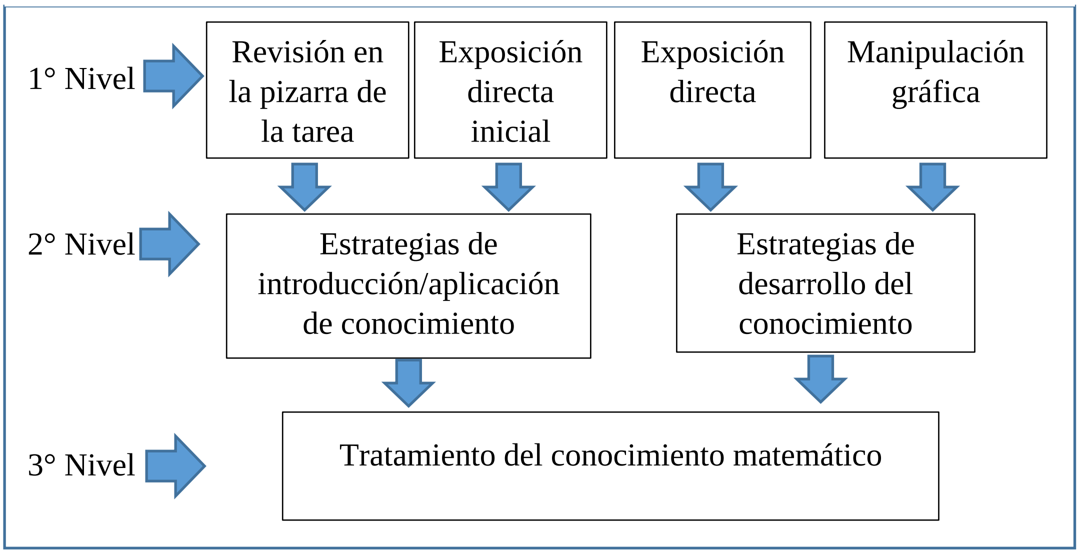
A través de la lectura del material recogido en las sesiones de clase, identificamos ideas o conceptos específicos tales como: exploración de ideas, resúmenes, diálogo, exposición, participación, etc., los mismos que fuimos precisando en unas gráficas; estas ideas fueron posteriormente agrupadas bajo un concepto o idea superior que las define. De esta manera, el análisis inicial estuvo asociado directamente a los datos de la observación y del análisis documental, con un componente descriptivo muy grande para luego condensarse, a través de códigos con el propósito de categorizarlos mediante un proceso de categorización temática (Flick, 2004). La siguiente figura muestra la estructura de análisis y la relación entre los tres niveles de categorización del más descriptivo al más interpretativo o teórico: código, subcategoría y categoría.

***Figura 3**. Estructura de análisis y relación entre los tres niveles de categorización*



Un caso particular de lo anterior se puede apreciar en la siguiente figura, en la que se muestra cómo se construye la categoría Tratamiento del conocimiento matemático a partir de los códigos identificados en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje.

***Figura 4.** Código, subcategoría y categoría aplicado a un caso particular*



El análisis de los datos brutos permitió identificar diferentes códigos, de los cuales seleccionamos cuarenta y siete asociados a la actividad matemática propiamente dicha. Posteriormente, los códigos se agruparon en ocho sub-categorías, las cuales dieron origen a tres categorías: 1. Tratamiento del conocimiento matemático, 2. Relación profesor –

alumno y 3. Participación del alumno (s). Las siguientes tablas exponen y definen las categorías, subcategorías y códigos identificados en la gestión del conocimiento matemático durante las sesiones de clase.

Tabla 14. Definición de categorías y subcategorías

Categoría	Definición	Sub-categoría	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Formas que plantea el docente para que el alumno acceda al conocimiento (objeto) matemático y participe de la actividad matemática propuesta.	Estrategias de introducción/ aplicación del conocimiento	Plan de acción para introducir o aplicar el conocimiento (objeto) matemático a través de actividades generales, casos concretos, situaciones generales, problemas matemáticos o exposición directa.
		Estrategias de desarrollo del conocimiento	Plan de acción para desarrollar o conocer el objeto matemático, luego de ser introducido.
		Contextos	Entorno en el que se plantea el objeto matemático, puede ser a través de situaciones cotidianas o matemáticas directamente.
Relación profesor – alumno	Conexión entre el docente y el alumno durante la actividad matemática propuesta	Horizontal	Relación establecida entre el docente y los estudiantes mediante el diálogo continuo que permite una comunicación fluida en torno a la actividad matemática.

Categoría	Definición	Sub-categoría	Definición
		Semi horizontal	Relación establecida entre el docente y los estudiantes mediante el diálogo cortante que inhibe una comunicación fluida en torno a la actividad matemática.
		Vertical	Relación casi nula establecida entre el docente y los estudiantes en la que el docente expone las cuestiones esenciales de la actividad matemática.
Participación del alumno (s)	Actuación del alumno ante la actividad matemática propuesta y frente al conocimiento (objeto) matemático involucrado.	En el desarrollo de la actividad	Intervención del estudiante en la propuesta de actividades del o la docente, que puede ser selectiva; es decir, a elección del estudiante o del o la docente; o total, ya que es una actividad planteada para todos los alumnos de la clase.
		En interacción con el conocimiento	Uso del conocimiento matemático involucrado en el desarrollo de la actividad propuesta. Puede ser teórico o práctico, así como puede ser fácil e inmediato o difícil y mediato.

Tabla 15. Definición de códigos

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Estrategias de introducción/ aplicación del conocimiento	Exploración de conocimientos	Sondeo teórico y/o aplicativo del conocimiento adquirido. El sondeo teórico responde a la pregunta ¿qué?, mientras que el sondeo aplicativo se circunscribe a ejemplos concretos.
		Planteamiento de la actividad	Propuesta de actividad (general) de enseñanza – aprendizaje que permitirá conectar con el conocimiento matemático.
		Planteamiento de casos concretos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta directa del conocimiento matemático (desenmarcado de cualquier actividad que lo conecte)
		Planteamiento de nuevos casos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta de casos similares para aplicar el conocimiento aprendido (trabajo operativo)
		Planteamiento de situaciones generales	Propuesta de cuestiones generales cotidianas que involucran conocimiento matemático

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		Revisión en pizarra de la tarea	Sondeo práctico del conocimiento matemático aprendido
		Exposición directa inicial	Declaración del tema a trabajar y/o explicación simplificada del mismo
		Planteamiento de problemas matemáticos	Propuesta de situaciones que exponen una cuestión y solicitan hallar un dato con la información brindada.
		Planteamiento de actividades del libro de texto	Planteamiento de actividades del libro de texto para aplicar conocimiento matemático aprendido
	Estrategias de desarrollo del conocimiento	Comparación gráfica y simbólica de una cuestión matemática y análisis	Cotejo de dos cuestiones diferentes (gráfica y simbólica) a fin de interpretar la más abstracta (simbólica)
		Comparación gráfica de una misma cuestión matemática	Cotejo de dos cuestiones diferentes a fin de extraer ideas comunes
		Descontextualización del conocimiento matemático para su tratamiento directo (análisis de la expresión matemática)	Desprendimiento/ desarticulación del conocimiento de la situación que lo contiene.

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		Contextualización del conocimiento matemático	Enmarcación del conocimiento matemático en situaciones cotidianas
		Manipulación gráfica	Recurrencia al uso de gráficas para representar el conocimiento matemático (la expresión matemática involucrada)
		Planteamiento de preguntas a los estudiantes sobre el conocimiento matemático	Interrogación diversa sobre el conocimiento matemático involucrado
		Intervención de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación de los estudiantes en la generación del conocimiento matemático
		Intervención de los alumnos en la aplicación del conocimiento	Participación de los estudiantes en la aplicación del conocimiento a diferentes cuestiones concretas
		Uso de casos concretos	Situaciones específicas (contextualizadas o no) que involucran el conocimiento matemático para su reconocimiento inmediato
		Síntesis del conocimiento	Resumen del trabajo realizado circunscrito al conocimiento aplicado

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		Reflexión sobre el tema	Toma de conciencia sobre las situaciones (cotidianas) que involucran el conocimiento matemático
		Tratamiento de la situación general	A partir de la cual se genera el conocimiento matemático (diverso)
		Tratamiento constante del nuevo conocimiento	Reincidencia en la interacción con el nuevo conocimiento (no se agota en una sola clase o en un solo caso)
		Contextualización a nuevas situaciones generales	Transferencia del nuevo conocimiento a situaciones generales diferentes
		Exposición directa	Explicación del tema sin mayor intervención de los estudiantes
		Intervención selectiva de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación directa de un estudiante en la generación del conocimiento matemático
		Guía directa en la docente en el trabajo del estudiante	Acompañamiento constante y secuencial de la docente
		Corrección individual	Corrección de las actividades propuestas a los alumnos de manera individual

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		Transformación de actividades ya resueltas	Cambio de algún aspecto de la actividad propuesta para una transformación del producto
		Reflexión grupal de la actividad desarrollada	Intercambio de ideas sobre el proceso seguido en la resolución de una actividad
		Corrección en plenaria	Corrección de la actividad propuesta delante de toda la clase
		Traslación del conocimiento de una gráfica a otra	Representación del conocimiento matemático en una gráfica distinta
		Guía directa en la docente en el tratamiento de la información	Acompañamiento constante y secuencial de la docente en el tratamiento de la información
		Transformación de casos o situaciones a otros más simples	Cambio de una situación a otra más sencilla
		Uso directo método	Aplicación del método convencional para resolver operaciones matemáticas
		Uso de ficha informativa	Ficha que contiene información teórica y casos concretos del conocimiento matemático trabajado

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		Corrección en plenaria con la docente	Corrección de las actividades propuestas a los alumnos en grupo total
		Tratamiento minucioso del conocimiento en su aplicación operativa	Desarrollo, paso a paso, de una cuestión en la que interviene conocimiento matemático
	Contextos	De la vida diaria	Contextualización en una situación cotidiana de la cuestión matemática desarrollada o por desarrollar
		De la actividad matemática	Descontextualización del objeto matemático de toda situación cotidiana para tratarlo directamente
Relación profesor – alumno	horizontal	Diálogo continuo	Generación de preguntas que permiten una comunicación fluida (preguntas a partir de las respuestas)
	Semi horizontal	Diálogo cortante	Generación de preguntas que permiten una comunicación detenida, con respuestas simples y cortantes.
	vertical	Exposición	Comunicación en una sola dirección, generalmente de parte del maestro.

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Participación del alumno (s)	En el desarrollo de la actividad	Selectiva	Elección personal de participación por parte del estudiante o propuesta por el o la docente. No participa toda la clase.
		Total	Participación total de la clase en el desarrollo de la actividad.
	En interacción con el conocimiento	Teórica	Exposición verbal del conocimiento matemático (conceptual o procedimental)
		Práctica	Aplicación personal del conocimiento en situaciones que requieren de su uso (contextualizando o aplicando directamente)
		Fácil	Interacción inmediata y directa, ya sea de manera teórica o práctica
		Difícil	Dificultad para acceder al conocimiento matemático o aplicarlo correctamente

El análisis de la clase de matemática se dividió en dos secciones. Por un lado, la gestión y desarrollo de la misma, expuesta en las tablas anteriores; y por otro, las actividades propuestas de tal manera que estas nos conduzcan al tratamiento de los problemas matemáticos. Centrándonos en las actividades propuestas dentro de la gestión del conocimiento matemático en la clase de matemática, el análisis permitió identificar: el tipo de actividades propuestas por las y el docente, el papel de las mismas dentro de la gestión del conocimiento, así como la propuesta de problemas matemáticos. La siguiente tabla resume el análisis realizado con respecto a la gestión de los problemas matemáticos:

Tabla 16. Definición de Tipo de Actividad

Tipo de actividad	Definición	Casos	Descripción
Actividad de repaso	Cuestiona sobre un tema ya trabajado. Por lo general, el repaso es verbal. Se utiliza para recordar, reforzar, explorar o asociar al tema inmediato a tratar. Suele darse al inicio o final de la clase.	Para reforzar	Se orienta a fortalecer el tema que se está trabajando, precisando su conocimiento
		Para explorar	Busca indagar sobre un tema que se ha trabajado con anterioridad, pero que se retoma para tratarlo desde otro ángulo o ampliarlo.
		Para conectar	Pretende enlazar directamente el repaso con el tema o cuestión a trabajar.
Actividad de aplicación	Empleo del conocimiento aprendido en situaciones nuevas. Puede tener fines reflexivos, de ampliación del conocimiento (desarrollo/ construcción) o práctica y puede aplicarse a	Fines reflexivos	Se orienta a cuestionarse sobre el proceso seguido.
		Fines de ampliación	Pretende precisar el procedimiento seguido.
		Fines prácticos	Busca utilizar directamente el conocimiento aprendido.
		Cuestiones matemáticas directas	Trabaja directamente con una cuestión matemática (expresión matemática).

	cuestiones matemáticas directas, o aplicadas a problemas o situaciones cotidianas.	Problemas y situaciones	A través de planteamientos verbales o situaciones que incluyen la cuestión matemática.
Actividad de reflexión/actividad reflexiva	Busca detenerse en una situación que se conoce o aplica con el fin de cuestionarse aquel conocimiento. Suele emplearse para comprender una situación con más detalle.	Sobre el tema	Se basa en la cuestión matemática general.
		Sobre el proceso (pasos)	Se centra en un proceso seguido.
		Sobre el resultado	Se orienta al producto.
		Sobre la situación	Se centra en la situación general (en la que se enmarca el conocimiento matemático).
Actividad de trasferencia de	Permite contextualizar o descontextualizar un conocimiento matemático.	Contextualizar	Traslado de la cuestión matemática a una situación ‘cotidiana’, ‘real’ para darle significado, comprensión o relación con la vida diaria.
		Descontextualizar	Retorno de la cuestión matemática a su estado inicial a fin de tratarla desde sus características inmediatas y directas.
Actividades de construcción/	Se orientan al tratamiento de un	Tema nuevo	El tema no se ha trabajado

desarrollo del conocimiento.	tema nuevo para desarrollarlo o a un tema conocido para ampliarlo.		anteriormente, por lo que el estudiante no tiene idea de cómo “funciona”.
		Tema conocido	El tema es conocido por el alumno; sin embargo, su aplicación es novedosa (más amplitud o en situaciones nuevas).
Actividad de recepción (por parte del alumno)/ Actividad de atención	Centrada en la explicación o exposición del tema por el o la docente y en la captura inmediata, directa y lineal de la información por parte del alumno.	Pasiva	El alumno no interviene en la exposición del docente.
		Cuasi activa	El alumno interviene parcialmente en la exposición/explicación del docente; sin embargo, su rol no es fundamental.
Actividad estratégica (de ingenio)	Permite aplicar un plan distinto en la resolución del problema o actividad planteada.		
Actividad de exploración de ideas	Busca examinar las ideas del alumno sobre un tema ya trabajado o por trabajar. Suele darse en el transcurso de la clase.	Sobre un tema ya trabajado	Permite desplegar (desarrollar) la actividad matemática.
		Sobre un tema por trabajar	Permite estructurar la actividad matemática

A partir de esta estructura de categorías se han identificado cuatro líneas interpretativas que responden a los objetivos de la investigación, y que son las que van a articular la descripción de los casos.

Tabla 17. Líneas interpretativas

N°	Denominación
1	Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos
2	Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por la o el docente
3	Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes
4	Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

El proceso de análisis ha tenido dos operaciones: primero la categorización temática y luego la categorización relacional. De la primera se obtiene la estructura de categorías: código, subcategoría y categoría, con los tres niveles temáticos. De la segunda operación, las líneas interpretativas que implican un refinamiento del análisis.

Además, se han realizado dos tipos de análisis: primero, el análisis vertical; es decir, el análisis de los datos de cada caso para construir una descripción de cada uno. El segundo, el análisis horizontal, que es el análisis cruzado de los casos, que supone realizar una comparación para encontrar afinidades, diferencias, puntos de encuentro, similitudes, entre los casos. La presentación de los hallazgos se va a organizar en función de estos dos tipos de análisis.

3.7. Criterios de calidad

El gran cometido de toda investigación es conocer y conseguir la verdad; no obstante, los procesos seguidos deben garantizar que los resultados obtenidos se adecuan a ello y sean creíbles. Desde los comienzos de la investigación se tuvo preocupación por la credibilidad de la misma, de forma que la información recogida y el análisis realizado se ajusten lo más posible a lo que es y sucede realmente. Una de las acciones desarrolladas para lograr este cometido ha estado asociada al trabajo prolongado en el mismo lugar, a la observación persistente y a la recogida detallada de datos a partir de la misma. En cada realidad educativa observada, el periodo de contacto fue de aproximadamente tres meses con una asistencia diaria o casi diaria a las aulas de clase. Otra, la propuesta de hojas de trabajo a los alumnos y alumnas que permitieron recoger información sobre su nivel de aplicación de los conocimientos matemáticos y de resolución de problemas en situaciones nuevas, así como su percepción sobre la actividad matemática y de resolución de problemas. Estas acciones se complementaron con pequeños diálogos tanto con las y el docente como con las y los estudiantes. Cabe resaltar que no todas las alumnas y los alumnos fueron consultados, sino aquellos que accedían a responder dentro de la hora de clase y cuidando de no distraerles de la actividad central de la misma.

Diversos procedimientos usados para garantizar la calidad y validez en la investigación educativa y en la social (por ejemplo, la validez interna, validez externa, fiabilidad y objetividad) provienen de la investigación cuantitativa y positivista, (Simons, 2011); sin considerar los dos primeros ejemplos, la autora afirma que estos criterios implican procesos menos aplicables a la investigación cualitativa con estudio de caso. Para mostrar la credibilidad de esta investigación nos centramos en exponer cómo se garantiza desde un punto de vista cualitativo, considerando la reformulación que menciona Mendizábal (como se citó en de Giraldino, 2006), tal y como se expone en la siguiente tabla. Pero aplicando para el caso de la fiabilidad lo que Flick (2004) denomina fiabilidad del procedimiento, y añadiendo la triangulación para asegurar la autenticidad (Stake, 2007).

Tabla 18. Criterios de calidad

Criterios de calidad	Tradicional	Reformulación
Validez interna (*validity*)	Validez interna	Credibilidad- autenticidad
Validez externa	Generalidad estadística	Transferibilidad
Confiabilidad (*reliability*)	Confiabilidad-fiabilidad	Seguridad- Auditabilidad (*dependability)*
Objetividad	Objetividad	Confirmabilidad

Nota 1. Datos tomados de Vasilachis de Gialdino, I (2006, p.91)

Fiabilidad de procedimiento o Seguridad

La fiabilidad en este estudio no se identifica con la replicabilidad del estudio en momentos diferentes, puesto que como expresan Goettz & LeCompte (1988) “las situaciones únicas no pueden ser reconstruidas con precisión" (p.215), sino por la recolección de datos en diferentes contextos (escuelas públicas y privadas de La Coruña – España – y Piura – Perú) y con diferentes estrategias. Esta diversidad de escenarios y de procedimientos permite asegurar la fiabilidad de manera apropiada. Para facilitar la auditabilidad, en el presente estudio, los apéndices (anexos) registran y documentan todos los procesos y pasos realizados en la recolección de datos. Asimismo, se explican los diferentes niveles de codificación, registrándose los documentos que se utilizaron para el análisis de datos; se muestra el diario de campo redactado detalladamente, incluyéndose los verbatim a pesar de haber sido usados únicamente para apoyar el análisis, y se muestra la matriz de cada sesión. Por tanto, esta clase de fiabilidad se asocia con la descripción y exposición de todo el proceso acompañado de registros y documentos analíticos elaborados.

Credibilidad o Autenticidad

La validez se puede resumir como "una cuestión de si el investigador ve lo que piensa que ve" (Kirk y Miller, 1986, p. 21, citados por Flick, 2004, p. 238). Wolcott (1995, citado por Simons, 2011), manifiesta que quienes se dedican al trabajo de campo han de saber justificar como "lo más probable" o lo más "creíble", el valor de verdad de sus explicaciones. Para Hammersley (1992, citado por Flick, 2004), "1) La validez del conocimiento no se puede evaluar con certeza… 2) Los fenómenos existen también con independencia de nuestras afirmaciones acerca de ellos… 3) La realidad se hace accesible a través de las (diferentes) perspectivas sobre los fenómenos" (p. 239). Por su parte, Goetz y LeCompte (1984) señalan que el punto fuerte de la investigación interpretativa es la autenticidad a causa de la convivencia con los participantes y el uso de las entrevistas, la observación natural, entre otros procedimientos de recogida de datos. Por ello, cuanto más se observa una realidad a detalle, y se trata de ahondar en ella a través de otras vías, mejor conocimiento se tiene de la misma. Es la realidad la que da a conocer su esencia y el investigador ha de ir estructurando las ideas o conceptos en ella identificados.

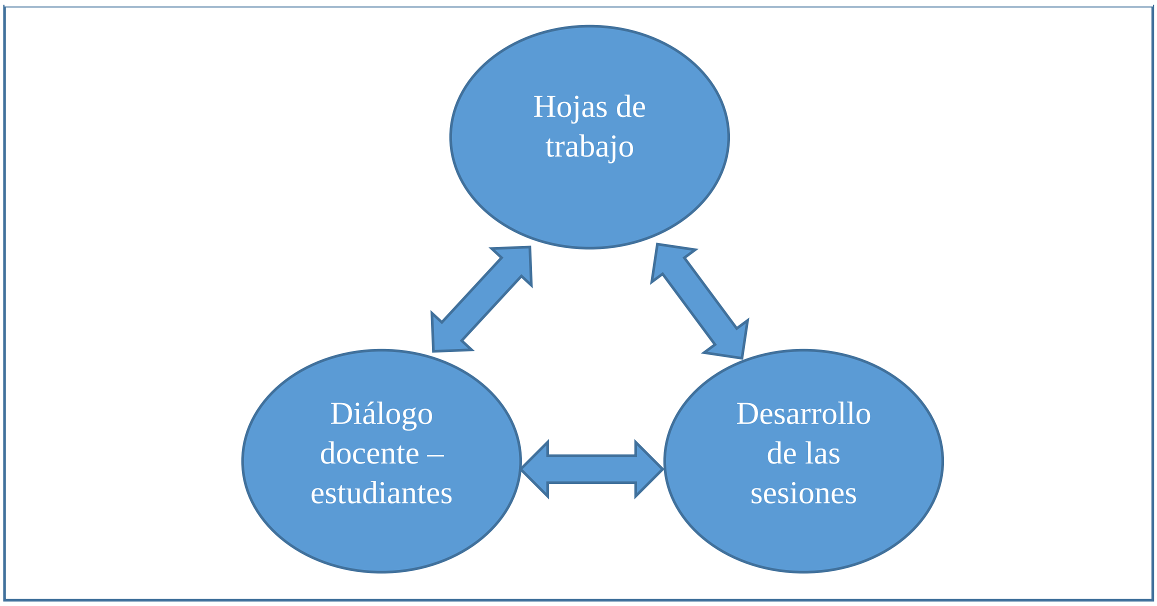
La credibilidad del presente estudio se puede demostrar de diferentes formas. En primer lugar, se fundamenta en los acuerdos y consentimientos obtenidos para realizar las observaciones y diálogos en los escenarios, tanto por parte de los directivos como por los docentes estudiados y los alumnos y alumnas involucrados. Además está garantizada porque los análisis realizados por parte de la investigadora tienen un carácter de bajo nivel inferencial (Goetz y LeCompte), ya que busca captar la realidad lo más fielmente posible.

Asimismo, existe un gran vínculo entre los diferentes niveles de codificación. Las dos categorías teóricas centrales están interrelacionadas por lo que no sería posible su análisis por separado. Por otro lado, hay un vínculo entre la evidencia y la categoría temática analizada en la matriz, lo cual demuestra la fortaleza de las interpretaciones. La investigación cuenta con la descripción de las sesiones de clase y breves comentarios al final de las mismas que recogen algunas anotaciones y reflexiones, relacionadas con diferentes aspectos de una sesión de enseñanza – aprendizaje: metodología, tratamiento matemático, participación del estudiante, etc. Las sesiones son descritas de manera narrativa, ya sea resumida (a través de una síntesis) o específica (mediante un diálogo). Los comentarios de la investigadora, o memos analíticos, son realizados para tener constancia de las ideas de la investigadora en torno al desarrollo de las clases. Los comentarios son de bajo nivel inferencial porque nos ajustamos a una redacción muy descriptiva.

Con respecto a la validez intersubjetiva que puede relacionarse con la confirmabilidad, advertimos que durante la recogida y análisis de datos se realizó un intercambio de interpretaciones con los docentes de modo procesual a través de los diálogos, que ayudó a cimentar y contrastar la recogida de datos y su posterior análisis. Sin embargo, no se articuló un procedimiento adecuado para hacer una devolución de los hallazgos de la investigación antes de decidir su configuración definitiva en el informe de investigación.

Para ganar credibilidad en una investigación cualitativa, es necesaria la triangulación de diferentes fuentes de información, la triangulación metodológica y la triangulación con investigadores. La triangulación es una dimensión clave de la autenticidad de la investigación porque permite realizar el control cruzado de los datos, fortaleciendo así su análisis. “Para la *triangulación de las fuentes de datos*, observamos si el fenómeno o caso estudiado sigue siendo el mismo en otros momentos, en otros espacios o cuando las personas interactúan de forma diferente” (Stake, 2007, p.98). En nuestro caso consideramos las conductas de los casos estudiados y de los y las estudiantes en diferentes momentos de la sesión y en diferentes sesiones. Además se extendió el estudio de casos al contexto educativo peruano, cumpliendo así con el requerimiento de diversificar escenarios educativos. En cuanto a la triangulación metodológica se usaron diferentes instrumentos de recogida de datos; la fuente básica de obtención de los mismos fue el cuaderno de campo que combinó registro generalizado de acciones con registro específico a través de la observación y el material discursivo. Si bien la observación participante ha tenido un papel preponderante, los datos obtenidos por este procedimiento fueron contrastados con los procedentes del análisis documental de las hojas de trabajo y de los diálogos con docentes y estudiantes. Luego podemos hablar del uso de una gama suficientemente variada de procedimientos de recogida de datos que es indicativa de la fortaleza de los datos recogidos. La siguiente figura muestra la interacción entre diferentes fuentes de información e instrumentos de recogida de datos para lograr una triangulación confiable.

Figura 5. *Triangulación*



Transferibilidad

Con respecto a la posibilidad de transferibilidad de nuestros hallazgos o de traducibilidad (Simons, 2011), si se entendiese que los hallazgos de la investigación pueden ayudar a comprender mejor la resolución de problemas matemáticos en el aula de primaria. En este sentido, creemos que los hallazgos son de utilidad puesto que permite conocer a través de casos específicos el comportamiento situacional y cotidiano, más allá de las políticas nacionales o regionales y de las diferentes teorías o investigaciones sobre la importancia de la resolución de problemas matemáticos en clase de matemática, de las cuales somos consientes. El día a día es lo que nos informa sobre qué se está haciendo en las escuelas, realmente, espacios donde se desarrolla básicamente el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, y cómo los actores que desarrollan ese proceso (docentes y estudiantes) actúan frente a ello. Observar cómo actúan estas personas nos permite conocer más de una situación de la que conocemos su importancia y necesidad para desarrollar competencia matemática en todos los niveles, principalmente en la enseñanza básica.

Además puede hablarse de generalización naturalística (Stake, 2007), si entendemos que el lector o lectora puede ampliar su propia comprensión y aplicarla a sus situaciones concretas, mediante la lectura del informe de esta investigación.

3.8. Reflexibilidad

Muy brevemente hay que mencionar el papel que la subjetividad de la investigadora ha tenido en esta investigación. Siguiendo a Helen Simons (2011) cabe considerar que para controlar nuestra subjetividad hemos intentado documentar nuestros pensamientos y sentimiento haciendo uso de los comentarios en el cuaderno de campo, aunque no hemos llegado a producir un diario reflexivo, propiamente (Jiménez, 2007). Como docente de matemática en el Nivel Primaria y a través de clases o asesorías particulares, a docentes y estudiantes, así como docente de didáctica de la matemática en la universidad a futuros maestros de Primaria, el contacto con la enseñanza de esta ciencia y con estudiantes que la aprenden, ya sea para usarla o para enseñarla, ha sido y es constante. Por ello, investigar en este rubro no fue casualidad, sino intencional y producto de años de interrogantes asociadas a la forma cómo los estudiantes interactúan con las matemáticas escolares y llegan a aprenderla en un ambiente de enseñanza – aprendizaje y a la forma cómo las y los docentes o futuros docentes gestionan este proceso de enseñanza - aprendizaje. En palabras de De la Cuesta-Benjumea (2011):

> En la literatura metodológica se nos insta a escoger temas de investigación en los cuales tengamos un interés particular, que nos impliquemos en el trabajo de campo para obtener datos, que en el análisis de ellos usemos nuestra sensibilidad teórica y que en el escrito final no nos ocultemos tras la tercera persona del singular, sino que nos hagamos visibles. (p.164)

Informar en tercera persona es una recomendación básica para la redacción científica, a fin de transmitir un punto de vista objetivo e impersonal; el uso de programas especializados para analizar información, también. Sin embargo, en un estudio de esta naturaleza, en el que se trabaja con datos vivos o en acción; es decir que se dan en interacción con otros, la presencia “viva” del investigador es inevitable y su experiencia también, aunque, debe evitar ponerla por encima de los resultados obtenidos. Siendo la reflexividad propia del ser humano, está presente en las interacciones sociales, por ello se hace presente en la investigación cualitativa (De la Cuesta-Benjumea, 2011). Siguiendo a la autora, la reflexibilidad favorece hacer consciente, o más consciente, la presencia de la o del investigador en la investigación, pensándola como un instrumento para la validez y criterio básico para la evaluación de los estudios cualitativos, facilitando la profundización en el análisis de datos; además, genera un efecto sobre el propio investigador o investigadora, que trasciende la investigación realizada. Reflexionar sobre la propia investigación, conlleva darle sentido más allá de los resultados obtenidos en un tiempo y espacio específicos, permite que aquello que fue objeto de investigación esté presente y nutra nuestra capacidad de investigar.

3.9. Cuestiones éticas

Como ya mencionamos con anterioridad, las cuestiones éticas han sido especialmente relevantes para lograr los permisos y para garantizar una entrada en el campo que genere confianza con los docenes y alumnado. “La ética se refiere aquí a cómo nos comportamos con las personas con las que interactuamos.” (Simons, 2011, p. 140). Es necesario que, desde un inicio y durante el proceso de investigación, se establezca una relación adecuada entre el investigador o la investigadora y los participantes fundamentada en el respeto a la dignidad humana, la integridad y la confianza. Desde un primer momento, se explicó a cada implicado en la investigación la naturaleza de la misma, informando sobre los objetivos y características del estudio y solicitando su consentimiento verbal para participar de las sesiones de enseñanza – aprendizaje de matemáticas que se generen en el aula, garantizando la confidencialidad y el anonimato; primero a través del contacto con la autoridad autorizada de la institución educativa en la que se desarrolla la investigación; luego a través de un diálogo con el docente responsable del aula y finalmente dirigiéndose a los estudiantes de manera grupal. En todos los casos, los responsables aceptaron verbalmente la propuesta; cabe resaltar que la apertura de la institución educativa delegó al docente la aceptación, de tal manera que fuera él o ella quien autorice directamente la aplicación de la investigación en sus aulas; no obstante, nuestra presencia también debía ser explicada a los estudiantes de las aulas elegidas a fin de que estos tuvieran conocimiento de la razón de la presencia de una persona ajena a la institución en el salón, en clase de matemáticas. Si bien, no era necesario solicitar el consentimiento a los estudiantes, se preguntó verbalmente si estaban de acuerdo con este proyecto, agradeciendo de antemano su apertura y participación. Asimismo, en ningún caso, se solicitó personalmente la autorización de las familias (dado que los estudiantes eran menores de edad) para la aplicación del proyecto, fueron los propios docentes quienes indicaron que comunicarían la situación, luego de la cual no se exigió una explicación adicional. No obstante, en una escuela peruana se tuvo que solicitar autorización a los padres y a las madres para poder acceder a las hojas de aplicación de algunos estudiantes, ya que estos no las habían entregado a los docentes y el año escolar estaba culminando, con lo cual se visitó cada domicilio. En este caso, solo una alumna no accedió a desarrollar las hojas propuestas, siendo apoyada por su familia, puesto que como mencionó el padre de familia "no tenía buena experiencia con las matemáticas y no querían exigirle en algo que no quería hacer".

El consentimiento informado (Ávila, 2002) busca asegurar que los sujetos participen en la investigación planteada de manera voluntaria y con el conocimiento suficiente que les permita comprender en qué consiste. La comunicación detallada se realizó con cada docente, brindándoles información sobre la investigación y proporcionándoles el material sobre la enseñanza de la matemática; mientras que con los estudiantes la comunicación fue más general que valió para que mostraran su aptitud y actitud hacia las matemáticas y su enseñanza – aprendizaje.

De acuerdo a Miguélez (2016), los criterios éticos para la investigación en ciencias sociales comprenden, entre otros, el consentimiento informado y la confidencialidad de los sujetos. Esta última exige no informar sobre datos privados que expongan a los sujetos y si llegara a suceder, aquellos han de estar de acuerdo. Para garantizar la confidencialidad se ha creado un código para cada sujeto directamente involucrado (docente y estudiantes), de tal manera que se garantice su anonimato; este código será utilizado en la presentación de los hallazgos.

Es necesario recalcar que la investigación se basa en información que no es propia de la investigadora sino de los participantes, quienes confiados en la ética de quien investiga pueden brindar información de forma bastante abierta sin guardar formas que puedan ocultar la realidad de los hechos. En este caso, es preciso considerar que, en palabras de Simons (2011), el principio ético fundamental de la investigación es "no hacer daño" (p. 141); por ello, es necesario tener claro que no hacemos un mal uso de la información y que cualquier dificultad surgida se resuelve mediante el diálogo.

CAPÍTULO 4. PRESENTACIÓN DE HALLAZGOS: INFORME DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Hallazgos del análisis vertical: descripción de los casos

“La investigación cualitativa puede generar ricas descripciones. Las citas y descripciones ilustrativas permiten comprender en profundidad cómo aparecen los escenarios y personas, y proporcionan las pruebas de que las cosas son como se dice en el informe” (Taylor y Bogdan, 1994, p.184). Los hallazgos encontrados en la investigación realizada se presentan a través de la descripción de cada caso estudiado, cada uno de ellos gira en torno a cuatro líneas interpretativas:

a. Estilo de enseñanza del o de la docente y tratamiento de los problemas matemáticos.
b. Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por el o la docente.
c. Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las o los estudiantes.
d. Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas.

Las sesiones de clase se caracterizan por las actividades propuestas y generadas en las mismas, a partir de las primeras y de la disposición, conocimiento y capacidades de los estudiantes. Una actividad en el contexto de la clase de matemática es una actividad de enseñanza – aprendizaje, medio por la cual se busca que el alumnado aprenda matemática y desarrolle competencias matemáticas.

Plantear un problema matemático estructurado para que las y los alumnos lo resuelvan es una actividad que busca, generalmente, que el alumnado aplique conocimiento adquirido en la clase de matemática; proponer problemas semiestructurados o abiertos busca que las y los estudiantes identifiquen, discriminen y utilicen conocimientos diversos. El momento de su propuesta determinará, básicamente, si el objetivo final es aplicar directamente conocimiento aprendido o descubrirlo y ordenarlo. En el primer caso, la actividad es estrecha y en el segundo, amplia. La diferencia entre estos términos es el uso del conocimiento aprendido, que puede estar orientado hacia un conocimiento concreto, específico o que involucre una mayor gama de los mismos.

Las matemáticas en clase son contenidos, procedimientos, planteamiento y resolución de problemas y actitudes. El estilo de enseñanza docente es factor clave para la actividad del estudiante quien se acoplará a la forma cómo su maestro o maestra actúa frente a la actividad propuesta y qué busca con las mismas. Imitar lo que hace otro es una de las formas básicas de aprender.

A continuación se exponen los hallazgos encontrados, describiendo uno a uno los seis casos estudiados. Recordemos que los tres primeros se ubican en A Coruña y los tres finales en Piura; no obstante, en la descripción que presentamos no aportamos datos contextuales, lo que predomina es la descripción a detalle de la rutina del desarrollo de las clases. Tampoco se ha tenido en cuenta el número de alumnos por aula porque oscilan entre 18 y 25; solo en el caso 4, que pertenece al colegio público de Piura, hay una diferencia significativa en este sentido. Finalmente, no se ha considerado la formación inicial de los docentes. Todos tienen formación de maestro o maestra de Primaria, excepto la docente del caso 6, de Piura, cuya formación es en Educación Secundaria, especialidad Matemática y Física, con un componente más matemático respecto a la formación del profesor de Primaria. Cabe indicar que todos los colegios participantes son mixtos.

4.1.1. Caso 1 (P1C1): "Piensa, conoce y decide"

Tabla 19. Datos generales del Caso 1

Características de su profesión	Tipo de colegio	Número de alumnos
Maestro de Educación Primaria. Gusta de enseñar matemática. Más de 20 años de experiencia docente.	Público (A Coruña)	18

a) Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos

El inicio de cada sesión se caracteriza por el repaso verbal de los temas matemáticos trabajados en la clase anterior o en sesiones precedentes. La revisión temática consiste en recordar el contenido en cuestión y los contextos o ejemplos que lo involucran, permitiendo además conectar con la actividad a iniciar. A través de esta fase, los alumnos y las alumnas expresan las ideas matemáticas que han aprendido respecto del tema, las mismas que están en función del contexto en el que están involucradas y en las acciones que implican ("multiplicar la cantidad por el numerador y dividir el resultado por el denominador… Ese es el porcentaje" (S5-P1A4)), lo que permite repasarlas, interpretarlas y expresarlas de acuerdo a lo que estas suponen para cada uno. El planteamiento puede ser directo (¿Qué son los porcentajes? ¿Qué quiere decir tres cuartos de veinticuatro?), o indirecto (¿Qué son las rebajas? ¿Cuándo y cómo se rebajan los productos?); en este último caso, la cuestión matemática siempre se involucra ("cuando una prenda de vestir está rebajada la mitad" (S3-P1A10), "se puede rebajar cincuenta, sesenta, veinte por ciento en un producto" (S4-P1A9)), permitiendo analizarla y pensar sobre ella:

S6-P1C1

*"… **¿qué es el tanto por ciento?** A su vez, escribe el símbolo (%) en el encerado.*

*P1A8 responde: "**Que te descuenten algo**". El profesor pregunta a la clase si están de acuerdo con esa respuesta y que expresen por qué. P1A15l[18] dice que no porque "**si te descuentan algo tiene que llevar un número como veinte por ciento o cincuenta por ciento**", señalando el símbolo que había escrito el profesor en el encerado y mostrando que no especificaba una cantidad…"*

El planteamiento del tema o conocimiento matemático que involucra la sesión se realiza a través de actividades que propone el docente como de la participación de los estudiantes, a través de la cual el docente captura la idea que se relaciona con el mismo y trabaja a partir de ella. En S1-P1C1, el docente entrega una hoja de trabajo que busca que los estudiantes resuelvan una cuestión planteada a partir de un ejemplo y en S2- P1C1 a través de la intervención de P1A16 se introduce el tema de los porcentajes relacionado con el tema de las fracciones como operador (o fracción de un número):

S1-P1C1:

*"… **El profesor propone** hacer la siguiente actividad de la ficha que sin embargo modifica ya que prefiere trabajar con fracciones propias y no con impropias como se propone en la actividad[19]. Después de un tiempo en el que el profesor ha observado que todos o la mayoría de los alumnos había desarrollado la actividad, el profesor le pide a P1A7 que salga al encerado y grafique lo que ha hecho en su folio…"*

---

[18] P1A15 es un alumno que no participa mucho, de hecho la mayoría de veces lo hace porque el profesor lo llama; sin embargo, hay momentos en que su participación es espontánea.

[19] En realidad hubo un error ya que lo que se planteaba era 3/5 de 15 y no 5/3 de 15 como aparece en la ficha.

S2- P1C1:

“… sin embargo, P1A16 levanta la mano para intervenir y plantea la situación ‘de la gasolina’ expresando lo siguiente “En la gasolina. Por ejemplo, vas a comprar ***y te descuentan el 20%****”. El profesor aprovecha la intervención y se establece el siguiente diálogo entre él y el alumno:*

Profesor:	*¿**Cómo así el 20% de descuento**?*
P1A16:	*El veinte por ciento de lo que te van a cobrar por la gasolina para el coche*
Profesor:	*¿Qué es eso del 20%?*
P1A16:	*Las dos décimas partes del total…”*

Cuando el tratamiento de la información se desarrolla en relación a una cuestión general, esta no pierde su valor; es decir, el tema matemático permite darle sentido y valor a las cuestiones generales planteadas, a la vez que lo aplica en situaciones específicas. Al respecto, no basta con que los o las estudiantes resuelvan la situación planteada aplicando una operación aritmética conocida o un procedimiento expuesto, sino que busca que los estudiantes expresen sus ideas sobre las soluciones expuestas:

S6- P1C1:

“… El profesor propone una actividad relacionada con los porcentajes: “hallen estos porcentajes”. El profesor hace una lista como la siguiente:

50% de 20
50% de 60
50% de 80

Los alumnos manifiestan lo que significa cada una de las expresiones anteriores y lo hacen de manera correcta[20]*. A continuación, el profesor les pregunta:* ***¿La clase de rebaja es la misma?*** *Los alumnos responden que no (se fijan en el resultado de la operación). El profesor busca otra respuesta y hace referencia a los significados de las siguientes palabras y expresiones: precio inicial, precio final, precio rebajado, rebaja, porcentaje de la rebaja. Luego de las explicaciones del profesor, este pregunta cómo es el porcentaje que se descuenta en cada artículo. Los alumnos no saben qué responder; luego el profesor pregunta qué porcentaje se rebaja en cada caso (pregunta caso por caso). Los alumnos responden y concluyen que se rebaja lo mismo (50%). El profesor*

---

[20] Los alumnos son los que generalmente que participan en clase. En algún caso, el docente preguntó a la alumna Francia y a Daniel, quienes son los que menos intervienen y estos respondieron correctamente.

hace referencia a esta conclusión y pregunta: si el porcentaje es el mismo en cada uno ***¿de qué depende que las rebajas sean distintas?*** *(refiriéndose a la cantidad que se rebaja). P1A4 responde que depende del precio. El profesor pregunta qué precio y ella añade que del precio original. El profesor repite la idea para toda la clase: "luego, la rebaja y el precio final dependen del precio original"…".*

Para las cuestiones trabajadas desde la actividad propiamente matemática, la reflexión de la actividad trasciende el hecho de ejecutarla. El docente aprovecha de este modo las soluciones de los estudiantes para indagar sobre el conocimiento matemático expuesto y las relaciones que los estudiantes pueden realizar en base a sus conocimientos previos sobre el tema. En S1- P1C1, a propósito de graficar la fracción de un número, mediante rectángulos y triángulos, el docente indaga sobre la idea de fracción y la unidad que la representa:

S1- P1C1

"… Mientras va dibujando, el profesor pregunta a la clase, en general, si ***da lo mismo 'cuadrados que triángulos'****. Algunos alumnos responden que sí y otros se quedan callados. Luego pregunta si es lo mismo "dividir de cualquier manera cada cuadrado". Después de un silencio general, P1A1 dice que cuadrados y triángulos* ***son iguales****, sin embargo el profesor le dice que eso no es correcto. La alumna piensa y rectifica diciendo que* ***"representan lo mismo: unidades",*** *y que da igual la figura que sea…"*

El estilo de enseñanza docente involucra la participación constante de las alumnas y los alumnos a través de un diálogo generado por el maestro, permitiendo que los y las estudiantes expresen diferentes ideas sobre la situación planteada y sobre la matemática en cuestión que les permite generar diversas opiniones o puntos de vista distintos sobre un mismo tema y conectarlos. La matemática, de este modo, se trabaja en relación a un contexto extramatemático que la involucra. Las clases son un intercambio de ideas sobre cuestiones generales que involucran conocimiento matemático que permite comprenderlas. El docente permite que la mayoría, si no son todos y todas, participen.

S3- P1C1

"… El profesor pide que mencionen ***otras maneras de comprar más barato****, expresiones que indiquen que el precio ha bajado. P1A8 explica que en el mercado ella ha visto letreros en los que dice "antes tal precio y ahora tal otro". El profesor asiente y pide que se explique mejor, sin embargo la alumna se queda en silencio. El profesor pone*

un ejemplo que la alumna acepta como un caso específico de lo que ella ha expresado: "por ejemplo, un par de zapatos en épocas normales puede costar sesenta y cinco euros y en las rebajas cincuenta y tres". El profesor pregunta si en este caso, se indica el porcentaje. Los alumnos dicen que no.

El profesor retoma los ejemplos brindados por los alumnos como ideas que expresan rebajas, luego comenta que dichos ejemplos son distintas maneras de expresar una rebaja y pregunta "si es lo mismo en cualquier caso", situándose en dos ejemplos concretos: **"rebajamos el 50%"** *y* **"lleva tres y pagas dos"**. *Pablo dice que "tres por dos es igual al treinta y tres por ciento" por lo que se rebaja menos que en el caso anterior. El profesor pide que explique y el alumno dice que "al comprar tres y pagar dos te están descontando el 33%". El profesor le pide que lo explique mejor. El alumno se queda en silencio, luego dice que ambas expresiones "son equivalentes y que es lo mismo". El profesor no comenta…"*

Durante el desarrollo de las sesiones no se observa el planteamiento y resolución de problemas matemáticos escolares como actividad rutinaria con un espacio y momento propio; es decir, como una fase dentro de la planificación y desarrollo de la sesión. La propuesta de este tipo de actividades suele ser posterior a la clase (como actividad para casa o como actividad aplicativa o evaluativa). Las clases se centran en el desarrollo del tema matemático a través de su uso en diferentes contextos; a partir de ello, el docente ubica el mismo en una situación (situación de rebajas, por ejemplo, para el caso de los porcentajes). No obstante, el docente plantea actividades que involucran la aplicación operativa de dichos conocimientos. Para el caso de los porcentajes, una vez contextualizado en una situación de rebajas y en base a su traducción a través de fracciones (otro modo de expresar porcentajes), el docente propone hallar diferentes rebajas a diferentes artículos aplicando el conocimiento contextualizado y aprendido. El alumnado resuelve las cuestiones aplicando dicho conocimiento. Es el docente quien plantea este tipo de actividades y el alumno o la alumna quien las resuelve. El docente actúa como intermediario entre la situación (actividad) y el alumno o la alumna.

S6- P1C1

"… ***El profesor propone*** *otras 'rebajas':* ***"me van a hallar la rebaja de cada producto"****, y escribe los porcentajes y los precios originales:*

10% de 40 €

20% de 20 €

50% de 8 €

P1A5 encuentra el primer porcentaje: 4 euros. El profesor le pregunta por qué son cuatro euros y él responde que dividió entre diez. El profesor pregunta al mismo alumno porqué divide cuarenta entre diez y si ese diez es el mismo que aparece en el porcentaje. El alumno responde que sí. Luego le pide al mismo alumno hallar el siguiente porcentaje y éste le dice que es uno. P1A1 siguió el mismo procedimiento que en el caso anterior, sin lograr darse cuenta de su error, aun cuando el profesor lo mira con interrogación. El compañero de éste, P1A6, que estaba diciéndole lo que tenía que hacer interviene. El profesor le pregunta cómo se hace y éste dice que sale cuatro "porque es la quinta parte y se divide entre cinco"..."

En el caso expuesto, la actividad permite aplicar conocimiento matemático que algunos alumnos logran con mayor acierto que otros. La actividad matemática se centra en la resolución de actividades que involucran conocimiento matemático para las cuales el alumno tiene las herramientas de resolución; sin embargo, no todos logran una solución pertinente y una respuesta adecuada.

El docente distingue entre ejercicio, problema y situación, tres actividades que ha propuesto durante el desarrollo de las sesiones.

S1- P1C1

"… A continuación se les propone una hoja de actividades para que los alumnos resuelvan… En esta actividad se propone a los alumnos graficar y hallar a cuánto equivale la fracción de un número específico a partir de una actividad modelo. El profesor pide a los alumnos que se centren en el primer **ejercicio** *y lean lo que dice…"*

S2- P1C1

"… A partir de las situaciones generadas con respecto al coste y precio de los productos, el profesor retoma la última actividad de la clase anterior, sobre pensar situaciones en las que esté involucrada la fracción como operación, y pregunta si pensaron en esas **situaciones***. Los alumnos quedan en silencio. P1A1 plantea la siguiente situación: "tengo sesenta caramelos y quiero los seis décimos". El maestro pide más situaciones. P1A8 expresa: "un pastel lo divido en seis trozos y cojo tres". El maestro queda en silencio, mira a sus alumnos y aclara que no quiere "***problemas***" como los que se les plantean, sino que digan en qué* **situaciones** *se pueden encontrar con estos casos. Los alumnos siguen mencionando ejemplos como los de las compañeras…"*

De acuerdo con los ejemplos, los *ejercicios* los concibe como actividades en las que se reproduce un conocimiento, las *situaciones* como hechos generales en las que se involucra cuestiones matemáticas y los *problemas* como planteamientos específicos en el que se ubican datos concretos o una cuestión específica que se resuelve con aquellos.

Si bien no se observa un planteamiento directo de problemas matemáticos escolares, durante el desarrollo de las sesiones, algunas cuestiones propuestas, sea como ejercicios o actividades operativas en las que los alumnos aplican el conocimiento aprendido, resultan ser *cuestiones difíciles* para algunos escolares puesto que no son capaces de aplicar correctamente el conocimiento en cuestión y necesitan reestructurarlo para darle sentido.

S5- P1C1

"… Ante la misma propuesta, el profesor pregunta si a alguien le ha salido diferente; luego le pregunta directamente a P1A17[21] *cuánto le ha salido y ella responde que ocho. El profesor le pide que explique qué es lo que ha hecho para obtener esa cantidad:*

Profesor: Explica qué has hecho

P1A17: Dividí cuarenta entre cincuenta

Profesor: ¿Por qué? Ve al frente y haz lo que has hecho en tu folio

P1A17 sale al encerado y escribe $40\,\underline{|\,50\;}$ *; luego añade un cero a cuarenta.*

Profesor: ¿Por qué has hecho eso?

P1A17: Es un truco que me ha enseñado mi madre para que pueda dividirse. Divido cuatrocientos entre cincuenta

…

Profesor: … Lo que es conveniente, aunque no necesario.
¿Por qué divides entre cincuenta?

P1A17: Porque es el cincuenta por ciento

…

P1A17 efectúa la división. El cociente obtenido es 80; sin embargo, añade un cero a la izquierda del ocho y el resultado se transforma en ocho décimas. P1A17 mira su trabajo y mira al profesor, quien cuestiona su trabajo. La alumna queda en silencio y luego expresa que "está mal". ¿Por qué está mal?, pregunta el profesor. P1A17 responde

---

[21] El profesor ha visto el procedimiento y resultados que ha obtenido Verónica en la resolución de la situación por lo que su solicitud es intencional.

"porque no puede ser ocho. El profesor añade: "lo que has escrito es ocho décimas. No ocho". El profesor establece con la alumna un pequeño diálogo en el que retoma la pregunta original: ¿qué te pide? P1A17 expresa que hallar el cincuenta por ciento. El profesor le pregunta qué significa el cincuenta por ciento y la alumna responde "la mitad" e, inmediatamente, añade "es que la mitad de cuarenta no es ocho"…"

Sobre los problemas matemáticos y la actividad frente a estos, los alumnos los conciben como cuestiones que deben resolver aplicando cálculos, situando dentro de esta categoría las cuestiones operativas propiamente y los problemas textuales (problemas matemáticos escolares propiamente), coincidiendo en este aspecto con la idea del docente sobre *problemas*, pero añadiendo a estos las operaciones básicas aplicadas a diferentes cantidades, las conversiones, etc. Se concibe, entonces, la resolución de problemas como toda actividad que involucre aplicar el conocimiento matemático aprendido. Ante la pregunta: ¿Por qué son problemas matemáticos los ejemplos anteriores?, que los propios alumnos propusieron estos argumentan que es porque son situaciones que se resuelven aplicando operaciones. Los siguientes ejemplos engloban las respuestas de estos alumnos:

"Porque no sabes la respuesta y hay que averiguarla" (P1A1-H11P2)
"Porque se resuelve con operaciones" (P1A3-H11P2)
"Porque son situaciones que hay que resolver" (P1A4-H11P2)
"Porque son situaciones en las que tenemos que pensar una solución para resolver el problema" (P1A4-H11P2)

En ellos, podemos observar dos ideas básicas: pensar y aplicar. La actividad de resolución de problemas involucra principalmente hacer operaciones y en menor medida "pensar". En estas ideas destaca su carácter aplicativo.

b) Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por el docente

La actividad de resolución de problemas generada en clase, se puede apreciar a través de las dificultades que tienen ciertos estudiantes para resolver correctamente algunas cuestiones planteadas, independientemente de cómo se formulen. Nótese el caso de P1A7 en S1- P1C1 o el de P1A17 en S5- P1C1. En el primero, P1A7 intenta una solución distinta a la que él personalmente plantea y no es capaz de explicarla en función de la propuesta, por lo que el docente genera un diálogo con el alumno. Para P1A17, hallar un porcentaje se puede convertir en problema ya que la estrategia aplicada no se ajusta al resultado del mismo, al que es fácil acceder (ya que es un porcentaje *asequible*) sin una operación de por medio. En ambos casos, más que un problema matemático es una cuestión de comprensión de la situación y el procedimiento involucrado. De antemano, los alumnos lo conocen, pero no son capaces de explicarlo o aplicarlo correctamente y necesitan reorientar su actuación para darle sentido al trabajo realizado. Este hecho se asocia al método de resolución de problemas que los alumnos empleen, el mismo que está asociado a las fases que lo transitan.

La mayoría de los alumnos que participan directamente en el desarrollo de la clase es capaz de resolver las cuestiones planteadas por el docente en el transcurso de las mismas; sin embargo, algunos no. Y otros, un buen grupo, no participa directamente ni con tanta frecuencia. Nótese que quienes participan en las mismas, la mayoría de las veces, son los mismos alumnos, esporádicamente, participan otros. Hemos expresado que la actividad en clase no se basa en la propuesta de problemas matemáticos propiamente como actividades concretas sino en la oferta de actividades que involucra aplicar el conocimiento matemático, sobre todo operativo, que algunos alumnos son capaces de aplicar sin inconvenientes y otros no.

En este contexto, las estrategias de resolución de problemas usadas por el docente se basan en estrategias específicas propias del tema en cuestión. Para los casos analizados, en relación con los porcentajes, la estrategia se circunscribe a facilitar la forma de hallar el porcentaje de una cantidad. Nótese que el tema no es nuevo para todos los alumnos, de hecho P1A16 lo lleva al aula a través de una situación concreta y es él quien lo relaciona con las fracciones (para otros alumnos tampoco es nuevo); sin embargo, como tal, el docente intenta que los alumnos establezcan la relación entre ambos conceptos: porcentajes y fracciones y luego sean capaces de aplicarlo en situaciones específicas en las que se pida hallar un porcentaje. Su aplicación depende del tipo de porcentaje requerido, ya que si este se asocia a una fracción simple su aplicación es más fácil y directa; sin embargo, cuando el porcentaje no se asocia a una fracción simple el proceso involucra un paso más. El docente facilita diferentes vías de acceso en relación al porcentaje requerido.

S2- P1C1

"… Profesor: Vemos que los descuentos los podemos representar de diferentes maneras. ¿Cómo se ha representado aquí? (señala el porcentaje)

P1A1: Con un circulito, raya y circulito

Profesor: Ese circulito, raya y circulito se llama "tanto por cien". ¿Qué otra forma usamos? (indica la fracción)

P1A5: Como fracción

Profesor: Exactamente.

…

Profesor: El cincuenta por cien es un medio. Por lo tanto el cincuenta por ciento de 30, por ejemplo es igual a decir un medio de treinta, ¿verdad?

P1A5: Sí

Profesor: Y un medio de treinta es…

P1A5: Quince

Profesor: Por lo tanto el cincuenta por cien de treinta es quince

P1A4: Sí

Profesor: Para hallar el cincuenta por cien de una cantidad divido la cantidad entre dos. ¿Qué quiere decir el veinte por ciento de cien?

P1A5: Dos décimos de cien

Profesor: ¿Qué quiere decir dos décimos de cien?

P1A1: El veinte por ciento

Profesor: ¿Cómo puedo hallar el veinte por ciento de cien?

P1A5: Divido entre cinco

Profesor: ¿Por qué?

P1A5: Porque es la quinta parte

Profesor: Entonces, el veinte por ciento de cien es lo mismo que un quinto de cien

P1A5: Sí

P1A16: También puedo dividir entre diez y multiplicar por dos

Profesor: Entonces, para hallar los porcentajes podemos hacer uso de las…

Alumnos: Fracciones

Profesor: Hay que descubrir cuál es la fracción que se asocia al porcentaje…"

S4- P1C1

"…El profesor propone otras situaciones de porcentaje que se pueden hallar directamente, es decir aplicando una división únicamente. Los alumnos van asociando

dichos porcentajes con "las partes de cien" que indican: veinte por ciento con la quinta parte. El cinco por ciento cuesta más a los alumnos, sin embargo llegan a expresar que es "la veinteava parte de cien".

Para finalizar, el profesor propone el 37% de 80…"

La propuesta directa de las situaciones concretas (por ejemplo "hallen estos porcentajes" en S6- P1C1) centran la actuación del estudiante en aplicar (o pensar) directamente la forma de hacerlo, lo cual inhibe la necesidad de comprender la situación ya que esta se plantea directamente. La fase básica en este proceso es la de concepción de un plan y ejecución del mismo. La concepción se orienta a traducir matemáticamente la situación concreta la cual, se espera, los alumnos hayan aprendido y puedan aplicarla. Posteriormente, los alumnos han de darle sentido a la situación dentro del contexto en la que ha sido concebida; es decir, el asunto no finaliza cuando el estudiante resuelve la cuestión operativa sino luego que este haya retornado a la cuestión inicial y haya dado sentido a la misma. La resolución matemática de la actividad se concibe como un medio para comprender y dar sentido a otras cuestiones (más generales).

S3- P1C1

"*… A partir de los últimos ejemplos, el profesor vuelve a insistir en si es lo mismo "dos por uno que tres por dos", ya que las respuestas fueron diversas. Para ello cambia de giro a la pregunta y cuestiona que si al comprar una u otra rebaja se gasta lo mismo. Los alumnos vuelven a expresar respuestas simples aunque encontradas: algunos dicen que sí y otros que no; sin embargo se genera el siguiente diálogo:*

P1A9:	*Cuando compras dos por uno pagas uno y llevas dos… es como si uno te lo regalaran.*
P1A4:	*En el primero pagas el cincuenta por ciento de cada producto; pero en el otro, no. Pagas más.*
P1A8:	*En el primero pagas uno y te llevas otro, pero en el segundo pagas dos y llevas uno.*
Profesor:	*Eso ya lo sabemos, pero ¿cuál conviene?*
Enrique:	*La que necesites*
Profesor:	*¿Cómo "la que necesites"?*
P1A5:	*Porque puede ser que no necesites tres sino dos camisas*
Profesor:	*Muy bien.*

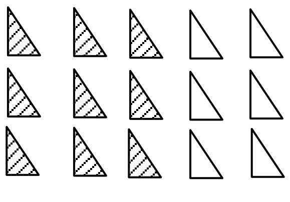
El profesor aprovecha y dice que muchas veces las épocas de rebajas contribuyen a que las personas gasten más de lo que habían presupuestado y que en lugar de ahorrar, se ve disminuido su capital, "incluso compran lo que no necesitan". Los alumnos dan ejemplos de algunas rebajas que han comprado últimamente. Otros expresan que sus padres compran en las últimas semanas de rebajas "porque es más barato"…"

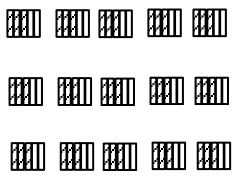
La resolución de problemas en clase (o actividades aplicativas), se plantea abiertamente; es decir a todos los alumnos del aula, el docente permite que cada uno resuelva la situación y observa el planteamiento hecho por cada uno; luego, facilita que alguno de ellos explique la solución e involucra a toda la clase en la misma. Nótese que frente a la actividad resuelta por P1A7 en S1-C1P1, y el planteamiento de su solución personal, el docente involucra a toda la clase en la reflexión sobre las mismas; aunque la participación sea limitada.

S1- P1C1

"…. El profesor establece una comparación entre las dos gráficas (triángulos y cuadrados). Pregunta si indican o representan lo mismo, dado que están representadas de diferente manera. En el primer caso, además de la gráfica se escribe la siguiente expresión: "3/5 de 15 = 9". Algunos alumnos responden que no; otros, que sí. Aún no lo tienen claro.

A la pregunta anterior, Lucía comenta que "en el segundo hay más partes que en el primero". El profesor interroga: "¿Qué quiere decir que 'hay más partes'?". Alba responde que "hay de más en el segundo, en el primero hay nueve y en el otro, quince" (refiriéndose a que las quince gráficas están pintadas). Las gráficas son las siguientes:





El profesor piensa y plantea la pregunta de otra manera, volviendo a lo que se hizo en la primera gráfica y que los niños han representado correctamente: "¿Cuántas unidades son tres quintos de quince?" Lucía dice que nueve. El profesor pregunta: "¿Creen que hay lo mismo en esta forma? (señalando la gráfica de los cuadrado)". Algunos alumnos dicen que no; otros aunque menos, que sí. Alba insiste en que "hay quince pintados".

El profesor vuelve a la expresión: Si tres quintos de quince son nueve (señalando la primera gráfica) y aquí (señalando la segunda) se ha graficado los tres quintos de quince, ¿cuánto creen que hay? Algunos alumnos (Pablo, Enrique y Eduardo, Lucía, Andrea B, Nerea) establecen la relación contestando que hay nueve. El resto de alumnos, sin embargo, no responde...”

Aun cuando el proceso a seguir es evidente, una fase que el docente promueve en la resolución de este tipo de actividades durante el desarrollo de la clase es la de evidenciar diferentes soluciones y explicar el proceso seguido de tal manera que los alumnos reflexionen sobre el mismo y tengan la posibilidad de observar otras formas de proceder (desde el ámbito operativo).

S3-P1C1

“... Profesor: ¿Cuál es el precio del libro?
P1A8.: Ocho euros
Profesor: ¿Cuánto tienes que rebajarle?
P1A8.: Veinticinco por ciento
Profesor: ¿Cómo puedo expresar ese veinticinco por ciento?
P1A8.: Veinticinco sobre cien
Profesor: ¿Por lo tanto los veinticinco centésimos de qué voy a hallar?
P1A8.: De ocho

El profesor escribe la expresión “$\frac{25}{100}$ *de 8” en el encerado. Acto seguido, el profesor pregunta a la clase si alguien más ha hallado la rebaja. Algunos alumnos levantan la mano pero es a P1A1. a quien el profesor señala para responder. Esta alumna dice que “sale dos”. El profesor le pregunta qué ha hecho y ella dice lo siguiente: “como veinticinco por ciento es un cuarto, dividí ocho entre cuatro”. El profesor le pide que explique porqué dice que “veinticinco es un cuarto”. La alumna responde: “Yo lo vi cuatro veces, entonces un cuarto, como es veinticinco así (indica con cuatro dedos de una mano), un cuarto”. Al querer seguir explicando, la niña expresaba que sumó varias veces el 25, hasta 100, y se dio cuenta que fueron cuatro veces las que lo sumó. El profesor escucha la respuesta de P1A1, luego pregunta a P1A4 quien coincide con P1A1. en la forma cómo ha hallado el veinticinco por ciento. P1A4 expresa: “veinticinco… cuatro veces de cien”…”*

c) Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes

Los métodos y estrategias de resolución de problemas que los alumnos evidencian a lo largo de las seis clases analizadas, se ajustan al tipo de actividad propuesta. El maestro formula diferentes actividades entre las cuales se aprecian las que buscan aplicar conocimiento. Frente a ellas, los alumnos y las alumnas intentan soluciones operativas, específicas del objeto matemático involucrado. Este conocimiento es conocido por los y las alumnas, pero no es comprendido en la misma medida. Por otro lado, en su aplicación se involucra no solo este conocimiento, sino otro, previo, que el alumno trae a la situación y lo aplica. En S1- P1C1, P1A7 aplica una forma distinta a la expuesta en la hoja de trabajo para resolver la actividad, aun cuando se le expone una forma de hacerlo, el alumno aplica una propia, quizá la que mejor entiende y actúa en consecuencia. En S5- P1C1, P1A8, al observar el proceso seguido por P1A17 sobre la forma de hallar el 50% de 40 por el que divide 40 entre 50, valida este proceso argumentando que hay que dividir entre cincuenta porque “si pides el 10% divides entre diez”, sin considerar que este diez no corresponde al porcentaje propiamente. La estrategia que aplica P1A17 en ese mismo caso, se basa en un *truco* aprendido (no tan bien aprendido), centrándose en la traducción matemática obtenida (dividendo menor que divisor) y no en la situación de partida. No obstante, la alumna se da cuenta del error porque parte del conocimiento del producto final. En esta misma actividad, P1A10 aplica una resta de porcentaje y valor de la prenda argumentando que “… es una rebaja y hay que descontar”.

En S4- P1C1, P1A16, a propósito de ser experto en hallar porcentajes, plantea una solución diferente a la situación propuesta: hallar el 37% de 80. Frente a la misma, el alumno pudo aplicar la traducción directa (lo que ha demostrado, en S2-P1C1, que puede hacerlo); sin embargo, intenta otra estrategia: aproximaciones. El alumno parte de porcentajes conocidos a partir de los cuales intenta construir el desconocido. La estrategia le permite obtener un aproximado de la cifra aunque explica que puede seguir dividiendo.

De acuerdo al tipo de actividad, los alumnos emplean estrategias específicas de resolución de problemas, ajustadas al tipo de cuestión planteada. Tomando en cuenta su nivel de comprensión de la situación, los alumnos emplean estrategias reflexivas (P1A16) o irreflexivas (P1A17, P1A8), ajustadas a situaciones externas a la naturaleza de la situación o actividad planteada.

Frente a la metodología o fases de resolución de problemas, se percibe un proceso de relación entre la situación propuesta y los conocimientos de los alumnos que permite pensar que aunque no se trabaja dentro de las clases analizadas, los alumnos necesariamente transitan por una fase de comprensión o falsa comprensión de la situación, aun cuando esta no sea promovida constantemente en el aula. Al estar frente a la actividad el alumno establece una relación entre la actividad y la forma de resolverla, la misma que puede estar amparada en ideas correctas e ideas erróneas. La falsa comprensión se da cuando el alumno aplica una estrategia convencido de que esa es la correcta, sin percatarse necesariamente del error o teniendo una pequeña sospecha del mismo. Los alumnos que no logran aclarar siguen el proceso y resuelven, obteniendo a veces resultados absurdos.

La forma de trabajar en clase se traslada a la forma de trabajo personal. Al resolver problemas matemáticos, los alumnos evidencian este método de resolución en el que la fase principal es la traducción matemática y la resolución de la misma. En un trabajo personal, los alumnos expresan directamente el planteamiento de solución, pocos alumnos hacen referencia explícita a los datos. Los alumnos obtienen respuestas que pueden no ajustarse a las condiciones de la situación planteada y no ser conscientes del error cometido. Esta idea se puede observar en la resolución de H14Q1 (¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se necesitan para envasar 600 litros de refresco? Indica cómo harías para saberlo y explica tu respuesta) en la que los alumnos evidenciaron respuestas correctas como diametralmente incorrectas, al aplicar estrategias específicas que no se ajustaban a las condiciones de la situación, y con menor frecuencia en H14Q2 (En un centro educativo de 800 alumnos aprueban el curso en junio 425 alumnos y en septiembre 175. Calcula el porcentaje total de aprobados y explica por qué eliges ese procedimiento), en la que las el número de soluciones correctas fue mayor, tal vez porque los conceptos involucrados no generaron mayores dificultades a los estudiantes, aun cuando la primera situación considere menos información que la segunda, aquella resultó ser más compleja.

En el primer caso la expresión “$\frac{3}{4}$ *de”* puede haber orientado a los estudiantes (P1A4-H14Q1, P1A9-H14Q1, P1A11-H14Q1, P1A12-H14Q1, entre otros) aplicar la idea de fracción como operador en esta situación y multiplicar los datos cuando el camino apropiado era dividirlos, con lo cual el resultado obtenido no se ajusta a las condiciones generales del planteamiento. Por otro lado, la falta de dominio en un tema (como es el tratamiento de los números decimales o el de la manipulación operativa con los números naturales) genera soluciones que se distancian más de la solución adecuada (P1A1-H14Q1, P1A7-H14Q1, P1A8-H14Q1, entre otros), generando, también, resultados improbables desde el contexto de la situación. Cualquier actividad, incluso la de resolución de problemas, requiere ser comprendida antes de resolverla; la comprensión implica una interacción con la situación, no únicamente con sus datos ya que estos, descontextualizados, pueden tener diferente significado.

d) Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

El tratamiento de la actividad matemática en el aula permite que los estudiantes apliquen cierto conocimiento matemático en la solución de actividades concretas. La adquisición de conocimiento matemático se da a través de situaciones que los involucra y que permiten contextualizarlo y reconstruirlo. No se aprecia una exposición directa del tema a partir de la cual los alumnos han de captar el nuevo conocimiento, ni la introducción mediante un problema matemático escolar concreto que lo contenga, pero sí una guía directa del docente que permite que los estudiantes, a través de situaciones generales o cuestionamientos, expresen sus ideas al respecto para luego resumirlas.

S4- P1C1

"… Profesor: ¿Cuánto es el diez por ciento de ochenta?

P1A5: Ocho

Profesor: ¿Es correcto lo que ha dicho P1A17?

P1A4: Sí

P1A5: Divides entre diez porque el diez por ciento es la décima parte

Profesor: ***Recuerden que los porcentajes están sobre cien****, por eso* ***el veinticinco por ciento es la cuarta parte*** *ya que* ***veinticinco es la cuarta parte de cien*** *y diez, la décima…"*

La construcción del conocimiento matemático se genera con la participación de los estudiantes quienes evidencian ideas de los mismos. Esto permite que el docente lo reoriente o precise y guíe la transferencia del mismo a situaciones nuevas y los apliquen. En S2-C1P1 el docente reorienta la idea de multiplicación por uno al operar con fracciones unitarias.

S2- P1C1

"…Profesor: Cuando cambio el porcentaje por una fracción ésta toma un significado. ¿Cuál es?

Alumnos: …

Profesor: *Conocemos tres significados de las fracciones…*

P1A5: *Como operación*

Profesor: *¿Por qué "como operación"?*

P1A5: *Porque divides entre cinco*

Profesor: ***¿Y qué pasa con el numerador?***

P1A5: *Nada*

Profesor: *¡Cómo que nada! Cuando la fracción actúa como operación, ¿qué hacemos con el numerador y el denominador?*

P1A5: *Se divide entre el denominador y se multiplica por el numerador*

Profesor: *Entonces…*

P1A5: *Multiplicamos por uno pero da lo mismo*

Profesor: ***No es que no pase nada, sino que el resultado no varía porque cualquier número multiplicado por uno…***

P1A18: *Es el mismo número…"*

Las situaciones generales a partir de las cuales se introduce una cuestión matemática facilitan la contextualización de los temas matemáticos y el grado de intromisión que el estudiante pueda darle; esto permite que el conocimiento expuesto resulte variado (en situaciones de rebaja intervienen porcentajes, fracciones, expresiones matemáticas cuyo significado es distinto: 2x1 en este contexto al del ámbito matemático propiamente). De esta manera, los alumnos van adquiriendo el conocimiento matemático y aplicándolo según las circunstancias.

Sobre la adquisición del conocimiento matemático, esta no se da inmediatamente, ni al mismo tiempo en todos los alumnos, quienes evidencian diferentes aspectos de la misma a medida que expresan sus ideas. Cada intervención puede complementar a la anterior o permitir que surja una idea nueva que el docente aprovecha para pensar sobre ella:

S6- P1C1

"… ¿qué es un porcentaje?, y añade ¿qué es el tanto por ciento? A su vez, escribe el símbolo (%) en el encerado.

P1A8 responde: "Que te descuenten algo". El profesor pregunta a la clase si están de acuerdo con esa respuesta y que expresen por qué. P1A15l[22] *dice que no porque*

---

[22] P1A15 es un alumno que no participa mucho, de hecho la mayoría de veces lo hace porque el profesor lo llama; sin embargo, hay momentos en que su participación es espontánea.

"si te descuentan algo tiene que llevar un número como veinte por ciento o cincuenta por ciento", señalando el símbolo que había escrito el profesor en el encerado y mostrando que no especificaba una cantidad.... Los alumnos orientan sus respuestas hacia la relación de porcentajes con descuentos o rebajas, contexto en el que han empezado a trabajar el tema… El profesor observa esta orientación (rebajas) y quiere que los alumnos transfieran el tema a otros contextos (que no relacionen los porcentajes únicamente con los descuentos). Para ello, pregunta en qué situaciones han visto ese signo (%) y les recuerda la actividad que tuvieron que hacer en la que se les pedía que encierren en la prensa[23] los títulos y subtítulos de las noticias que incluía información en porcentajes. Para ello, los alumnos comienzan a mirarse entre sí, intentando recordar lo que habían hecho. P1A16 coge uno de los diarios que hay en el aula y empieza a buscar. El profesor orienta a que toda la clase siga la actitud de P1A16.

A través de sus opiniones, los alumnos son conscientes que "la matemática" (o el conocimiento matemático) se aprende practicando, estudiando, atendiendo y pensando; es decir, aunque pueda resultar fácil para algunos (y para otros, difícil) necesita de cierto trabajo personal con la misma y la recurrencia a personas expertas que facilitan su comprensión (H13Q4: ¿Cómo aprendes matemática?). Esta idea relaciona la siguiente: para resolver una situación se necesita un conocimiento que permita actuar correctamente. La capacidad de resolución de problemas depende del conocimiento de la forma de hacerlo… lo que permite un tratamiento más rápido y efectivo (H12Q1: ¿Piensas que una niña y/o niño que no conoce ninguna operación concreta para hallar la superficie de un rectángulo, puede descubrir cuánto mide la superficie de ese rectángulo? Explica tu respuesta).

> "No porque si no conoce una de las dos formas no puedes porque después de medir no sabría qué hacer" (P1A1-H12Q1)
>
> "No porque sin fórmula no sabe cómo hallar la superficie" (P1A7-H12Q1)
>
> "Sí, pero si mido el largo y el alto y multiplicarlos, pero si no sabe medir el largo y el alto no lo puede saber" (P1A18-H12Q1)

En H12Q1 los alumnos consideran que para resolver una situación es necesario conocer cómo hacerlo (tener un procedimiento, una fórmula), de lo contrario no es posible

---

[23] Se entiende por prensa al conjunto de publicaciones periódicas (llamados 'periódicos'), especialmente las diarias (conocidos como 'diarios') que informan sobre distintos acontecimientos y situaciones de interés público.

o resultaría difícil. Estas ideas se asocian a la capacidad de resolver problemas matemáticos *verdaderos* (no rutinarios) para los que los alumnos y las alumnas no cuentan con un algoritmo fijo pero sí con la capacidad de relacionar sus conocimientos y la situación si es que se orienta a ello; no obstante, al no tener experiencia en los mismos su enfrentamiento resulta engorroso y poco comprensible. El problema de las dos jarras (H14Q3) no es un planteamiento típico para los alumnos, resultando compleja su solución y en, algunos casos, poco comprendida, pero permite que los estudiantes estructuren una solución personal, aunque no inmediata, retándolos en ello. La inmediatez en una solución es síntoma de aplicación, no de construcción o *creación*. Cuando no se tiene el planteamiento directo, el estudiante *piensa* como debería ser y en ese *pensar* pone en juego diversos conocimientos que le permiten idear una estrategia, para lo cual la ayuda del docente es fundamental: los alumnos pueden equivocarse (deberían) pero también rectificar (se espera). Para algunos alumnos, *pensar* es propio de la actividad matemática. La capacidad de resolución de problemas verdaderos (o novedosos) no es explotada en los alumnos, centrándose básicamente en la capacidad para resolver problemas tradicionales (o de aplicación). No obstante, en estos su aptitud se ve limitada por una mala comprensión de la situación que les conduce a matematizar la misma de manera incorrecta y actuar en consecuencia ya que resultan ser aplicativos. Su idea de problema se asocia a aplicar operaciones para resolverlos, de ahí que estas deben ser conocidas. Sin embargo, no es suficiente:

> “Transformaría los litros en cl después calcularía los ¾ de los 10 cl después divido los 6000 cl entre los 7’5 cl y te da que se necesita 8 botellas” (P1A1-H14Q1)
>
> “$\frac{125}{425} = 0'41 = 41\%$ de aprobados. Elijo este porque es más fácil” (P1A9-H14Q2)
>
> “Primero medí… el alto y luego la base y después ya hice la fórmula: $\frac{b \times a}{2}$ y después las operaciones $\frac{6 \times 4}{2}$ y me dio 14cm^2…” (P1A4-H12Q2)

De acuerdo a los resultados obtenidos al afrontar problemas matemáticos propuestos dentro del contexto de la investigación, los alumnos si bien se enfrentan a dichos problemas intentando un plan de solución en la mayoría de los casos la misma no es correcta ya que en parte del proceso su solución es incorrecta.

4.1.2. Caso 2 (P2C1): “Escucha, aplica y practica”

Tabla 20. Datos generales del Caso 2

Características de su profesión	Tipo de colegio	Número de alumnos
Maestra de Educación Primaria. Gusta de enseñar matemática. Más de 20 años de experiencia docente.	Público (A Coruña)	18

a) Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos

El inicio de cada sesión está marcado por una de las tres acciones siguientes: la revisión de la tarea, el repaso de la sesión anterior o la continuación de una actividad previa inconclusa; estas actividades define la secuencia de acciones en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas que la docente plantea. La primera consiste en proponer a los alumnos resolver la tarea en la pizarra de modo que puedan exponer su solución y explicarla; esta acción le permite a la maestra observar el nivel de comprensión del conocimiento aplicado y corregir al estudiante si es preciso.

S1- P2C1

“La clase empieza con la revisión de los ejercicios del libro sobre equivalencia de fracciones. Algunos alumnos salen al encerado para representar las fracciones y comprobar si son equivalentes. Para ello dibujan las gráficas del libro, dividen como indica la actividad, escriben la fracción que representa y comprueban gráficamente si son equivalentes. La alumna que salió al encerado se confundió al representar gráficamente las fracciones equivalentes, a partir de una dada, pero luego lo entendió. Los alumnos también saben (conocimiento adquirido) que si se multiplica o divide por un mismo número cada elemento de la fracción, la nueva fracción es equivalente a la anterior. ***En el transcurso de las correcciones, la profesora indica a los alumnos lo que tienen que hacer…****”*

S5- P2C1

“La clase empieza revisando la tarea. En la misma, la maestra mandó a los alumnos a resolver unas operaciones de suma y resta de fracciones homogéneas que proponía el libro y una suma y una resta de fracciones heterogéneas que propuso ella. Los alumnos intercambian opiniones sobre esta última operación ya que algunos decían

que no la habían hecho porque no sabían. Uno de los niños comentó que él, cuando no sabía algo, lo buscaba en el diccionario de la abuela. La profesora lo felicitó.

Las opiniones seguían intercambiándose entre los alumnos quienes expresaban sus inquietudes a la profesora. Luego de escuchar los distintos comentarios, la profesora interviene dirigiéndose a los alumnos con la siguiente observación y pregunta: "es lo mismo[24]*:* ***tienen que buscar fracciones equivalentes que sean homogéneas entre sí****, pero… al final, los resultados ¿qué hay que hacer?"; la maestra deja pasar unos segundos y uno de los alumnos dice que había que "sumarlos"; la profesora, en respuesta aclara: "era de restar, no de sumar"*[25]*.*

El repaso del tema anterior (fracción como operador) permite recapitular las ideas básicas sobre el mismo y contextualizar la temática en situaciones puntuales que son facilitadas por la docente, favoreciendo su inmersión en cuestiones de la vida diaria. Si bien, el repaso es sobre fracción como operador, en S2- P1C1, se plantean situaciones que permiten expresar en términos de fracción las cuestiones propuestas, más no en términos de fracción como operador:

S2- P2C1

"… Se da un repaso a la clase anterior sobre la fracción y su interpretación como operador, indicando qué tipo de operación se realiza con cada elemento de la fracción. Luego la profesora facilita algunas situaciones "de la vida diaria" para que los alumnos indiquen en términos de fracción. Por ejemplo: ***¿cuántos días de la semana son?****,* ***¿cuántos días tienen inglés****? (a propósito, los alumnos regresaban de la clase de inglés), ¿cómo lo expresamos como fracción? Ante esta pregunta, los alumnos manifiestan "tres séptimos". Luego con relación a los meses del año y los meses de las vacaciones de verano, los alumnos responden "tres doceavo"*[26]*…"*

La continuidad de una actividad que quedó inconclusa fue propuesta como tarea en la clase previa (S4- P2C1 y S6- P2C1), por lo que se puede incluir en el primer grupo; sin embargo, esta no es una actividad propiamente aplicativa sino que forma parte de otra que busca construir un conocimiento matemático nuevo a partir de una actividad contextualizada dentro del tema en mención sin hacer referencia a contextos extramatemáticos o de la vida diaria:

---

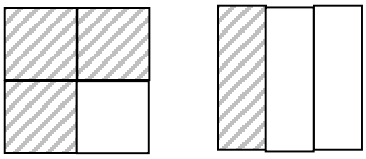
[24] Refiriéndose a lo trabajado en la sesión anterior.

[25] La operación solicitada era una resta de fracciones heterogéneas. Sin embargo, la acción del día anterior se centró en sumas.

[26] No se especifica el alumno, puesto que fueron varios a la vez.

S4- P2C1

"... La profesora retoma la última actividad[27] *y dibuja en el encerado las siguientes gráficas. Luego escribe la fracción que representa, en cada una, la parte sombreada:*



$$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$$

La profesora pregunta: "¿qué puedo hacer?" Los alumnos se miran entre sí y observan a la docente; luego P2A2 responde que "se suma el numerador y el denominador". La profesora le pide que resuelva en el encerado. La alumna sale, vuelve a escribir las fracciones y suma. La nueva fracción tiene como numerador la suma de los numeradores de las fracciones y como denominador la suma de los denominadores, con lo cual la nueva fracción es cuatro séptimos; de tal manera que: $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$ *..."*

S6- P2C1

"... La clase empieza con la revisión de la actividad que se propuso al finalizar la clase anterior, la misma que consistía en **interpretar y graficar una expresión en la que se indicaba multiplicar fracciones**. *En la revisión, que se realiza observando los folios, generalmente los alumnos no supieron darle solución, y quienes lo lograron manifestaron haber tenido ayuda de sus mayores (fuera de la escuela).*

La maestra le pide a uno de los alumnos que salga al encerado y a propósito de la gráfica que hizo en la última clase (que continuaba en el encerado), empezó a explicar cómo se representaba gráficamente esa expresión. Para ello recordó que la unidad (un rectángulo) se tenía que dividir en ocho partes iguales, de las cuales se tomaban (pintaba) 4 (la expresión fue 3/5 de 4/8). Luego, como se pedía los 3/5 de 4/8 preguntó **qué se tenía que hacer**. *Los alumnos respondieron que hallar los 3/5 de 4/8. La profesora pregunta cómo lo expresa en la gráfica, a lo que los alumnos respondieron que eso era lo que no sabían cómo hacer y no entendían..."*

---

[27] La última actividad de la clase anterior se refiere a la suma y resta de fracciones homogéneas, que los alumnos resolvieron sin dificultad. En dicha clase concluyó que sumar y restar fracciones heterogéneas era más difícil.

El planteamiento del tema o conocimiento matemático que involucra la sesión se realiza a través de actividades cerradas que propone la docente a los alumnos a través de las cuales la docente enseña directamente el tema en cuestión. Nótese en S1- P2C1 que la docente expone el tema (explica a grandes rasgos en qué consiste) y luego propone una situación ficticia que lo contextualiza a fin de identificarlo, usarlo y poder interpretar su manipulación simbólica, para luego aplicarlo.

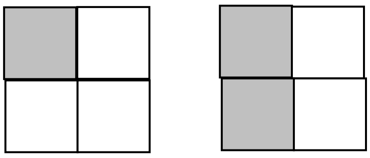
S1- P2C1

"... La maestra expresa la idea de que la fracción puede funcionar como operador y plantea una situación ficticia en que una de las alumnas, a propósito de haber sido su cumpleaños, decide invitar a tres amigos a su casa; la maestra le pide a la niña que escoja a tres compañeros de la clase. Una vez escogidos la maestra les dice a los cuatro que salgan y se sitúen delante del encerado. Continuando con la situación ficticia, la maestra supone que como la madre es atenta decide hacerles dos tortas de diferente sabor (chocolate y nata), ocho pastelitos y doce bombones; luego, dibuja en el encerado dos rectángulos que representan las dos tortas y ocho óvalos pequeños, escribiendo "12 bombones". Luego, dirigiéndose a la niña, le dice que tiene que repartir lo que la madre ha preparado entre los invitados, incluyéndose a ella..."

En S1- P2C1, S5- P2C1 y S6- P2C1 el tratamiento de la suma de fracciones homogéneas y multiplicación de fracciones es distinto puesto que la docente parte de situaciones descontextualizadas de cualquier medio cotidiano, plantea las actividades en el entorno propio del tema en cuestión, analizando directamente las cuestiones matemáticas, planteando, posteriormente, la forma de resolverlas.

S1- P2C1

"... El tiempo ha transcurrido y falta poco para concluir la hora de clase[28]*. Sin embargo, la profesora dibuja dos cuadrados y los divide en cruz, en partes iguales. Al primer cuadrado le pinta una parte y al segundo dos. Los gráficos quedan como sigue:*



$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$$

---

[28] Al inicio de ésta, la profesora tuvo una conversación con los alumnos sobre las normas del colegio y el papel de todos los profesores. Todo esto, a propósito de un asunto que ocurrió con este grupo en una hora y asignatura distintas.

La profesora pregunta si se puede sumar esas dos fracciones…"

S5- P2C1

"... La profesora les entrega a los alumnos una hoja de trabajo para que la resuelvan según entiendan. La hoja consiste en explicar qué significa la siguiente expresión: "3/5 x 4/8" y si pueden graficarla. Los alumnos no saben qué hacer, leen la hoja sin intentar escribir nada en ella. La profesora les dice que se centren en la primera parte y expliquen con sus propias palabras lo que expresa esa operación, que escribe en el encerado. Los niños responden en la hoja, básicamente, que es una multiplicación de fracciones, aclarando que no saben cómo resolverla..."

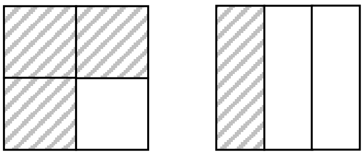
S6- P2C1

"… La clase empieza con la revisión de la actividad que se propuso al finalizar la clase anterior, la misma que consistía en interpretar y graficar una expresión en la que se indicaba multiplicar fracciones. En la revisión, que se realiza observando los folios, generalmente los alumnos no supieron darle solución…"

El desarrollo de ambas actividades se acompaña del uso de gráficas que buscan presentar el tema en cuestión y a partir de ellas hallar el resultado. En ambos casos, las cuestiones son operativas (fracción de un número y suma de fracciones homogéneas y multiplicación de fracciones) por lo que la representación "pictórica" conducirá a un resultado que se visualizará gráficamente. En S4- P2C1, al proponer una suma de fracciones heterogéneas, la docente representa gráficamente las fracciones y las equivalentes homogéneas que permitirán la suma respectiva:

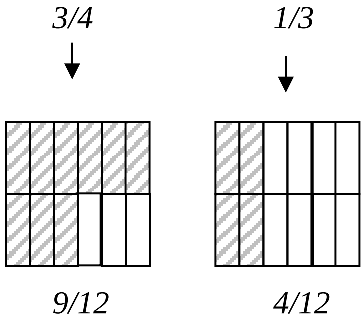
S4- P2C1

"…Acto seguido, retoma las gráficas y, refiriéndose a las fracciones equivalentes manifiesta que aquellas se convierten en 9/12 y 4/12 transformando las imágenes de la siguiente manera[29]:



---

[29] La profesora borra la parte sombreada en la primera imagen (3/4), para lograr en la segunda (9/12) un mejor orden de las mismas. Sin embargo, luego piensa que debió dejarlas como estaban para que los alumnos observaran que, efectivamente, se 'tomaban' nueve y cuatro partes respectivamente.



Al finalizar la elaboración de las gráficas, la profesora concluye que hay que buscar fracciones equivalentes en las que coincidan los denominadores para poder sumarlas o restarlas…”

Después de la introducción del tema, la docente extrae de la actividad la cuestión matemática desarrollada con la finalidad de lograr que los estudiantes la observen en su conjunto y la explicación sea más significativa al partir de una situación que ellos mismos han experimentado.

S1-P2C1

“… La profesora asocia cada fracción (1/4 y 2/4) con la cantidad de pastelitos totales y la cantidad de pastelitos que corresponden. Para ello escribe en el encerado:

$$\frac{1}{4} \text{ de } 8 = 2$$

$$\frac{2}{4} \text{ de } 8 = 4$$

A partir de esta explicación y señalando las últimas expresiones, la profesora centra la actividad en manifestar que la fracción está actuando como operador de un número, en el caso de los pastelitos, y que este número es “8”. Los alumnos atienden y no comentan. La profesora vuelve a la primera gráfica (la de las tortas) y asocia la fracción con la cantidad de tortas expresando: “2/4 de 2 (tortas). En este caso 2 indica el número de tortas”. Los alumnos se miran sorprendidos…”

En el caso de la suma de fracciones heterogéneas, la gráfica se usa para validar el tratamiento operativo de las acciones, ya que parte de “tener un truco que… permita hacer una transformación, para que las fracciones sean iguales…, sean homogéneas” (S4-P2C1). En ambos casos, el tema lo expone directamente la docente.

Una vez expuesto el tema, el siguiente paso es su aplicación, la misma que se efectúa en situaciones similares; es decir, contextualizadas para el primer caso y descontextualizadas para el segundo. El objetivo inmediato de las mismas es aplicar el conocimiento aprendido.

S1- P2C1

"... Después de la intervención anterior, la maestra pregunta por la cantidad de bombones (que son doce): "¿Cuánto es los 2/4 de la caja de bombones?" Los alumnos no saben qué hacer pero uno de ellos[30] *asocia con las operaciones que realizó la maestra y dice: "divides entre 4 y lo multiplicas por 2". Los niños asienten y lo hacen en el encerado. El resultado es 6. La maestra pide que comprueben con un dibujo. Los alumnos dibujan, siguiendo el esquema de los pastelitos. En algunos casos, los alumnos reestructuran la distribución de los "bombones"; en estos, la división gráfica es más sencilla..."*

S4-P1C1

"... Una vez que ha acabado de desarrollar el proceso, la profesora pregunta a sus alumnos si han comprendido. Como los alumnos responden que sí, les vuelve a plantear la suma de tres fracciones heterogéneas, aunque esta vez diferentes a las anteriores y les pregunta qué tienen que hacer. La expresión es la que sigue: ..."

Las actividades que permiten aplicar el conocimiento aprendido puede proponerlas la docente o el alumno; es decir, se permite al alumno plantear sus propias operaciones o problemas que se resuelvan con el conocimiento previamente trabajado.

S6-P2C1

"... La profesora propone que los alumnos salgan al encerado a resolver operaciones con fracciones. Para ello llama a P2A11 y elige a P2A6 para que esta alumna proponga la operación a P2A11. Ella propone: $\frac{5}{8}+\frac{7}{5}$ *..."*

S2-P1C1

"... Una vez finalizada la actividad anterior, la profesora les propone a sus alumnos que inventen una situación en la que se aplique lo que han visto. Los alumnos intentan pensar en un problema[31] *y lo van escribiendo en sus fichas. La profesora le dice*

---

[30] Que estaba castigado por hacer desorden, pero que sin embargo, había estado atento a la explicación de la profesora.

[31] Se le pregunta a la alumna qué hace y ella responde que "pensando en un problema"

a P2A3 que lea para todos el problema que ha planteado y saque a alguien a resolverlo. La alumna lo lee, escribe los datos en el encerado y señala a P2A16 para que lo resuelva. El problema que propone es el siguiente: Antonio hizo un viaje en su coche. El depósito tiene 63 litros y gastó 5/7 de 63. ¿Cuántos litros gastó?"…"

La propuesta didáctica de la docente incluye la participación de los y las estudiantes en la construcción del conocimiento matemático a través del desarrollo de las actividades propuestas, ya sea como introductorias del tema o como aplicativas. En S1-P2C1 (posteriormente en S2-P2C1), luego de explicar el tema de fracción como operador la docente propone que una alumna resuelva la situación planteada en la que hará uso del nuevo conocimiento. El ejemplo no resultó claro puesto que su planteamiento no exigía necesariamente esa traducción tal como lo evidencia la alumna quien recurre a cantidades enteras para responder a la pregunta (si hay 8 bombones y 4 niñas, ¿cuántos bombones le corresponde a cada niña? La respuesta directa es 2; sin embargo, la idea inmediata fue un cuarto de ocho o dos octavos de ocho). Recurrir a fracción de un número resultó forzado en la situación; no obstante, se llegó a ello, gracias a la guía de la docente.

S1-P2C1

"…Acto seguido, la profesora pregunta a la alumna del encerado cuántos pastelitos tocará a cada uno. La alumna responde directamente que son "dos". La profesora acepta la respuesta y le pregunta cómo puede representar dicha cantidad, "lo que le corresponde a cada uno, en términos de fracción"…

Maestra: ¿Qué hiciste para repartir la torta?

Alumna: La dividí en cuatro.

Maestra: ¿Qué tienes que hacer ahora?

Alumna: Dividirlo entre cuatro.

Maestra: Hazlo[32]*… ¿cuánto te sale?*

Alumna: Dos

Maestra: No, en fracción

Alumna: …

Maestra: (se acerca al encerado) Si divides entre cuatro (señala lo que ha hecho la niña), cada parte (señalando) corresponde a cada uno de vosotros, ¿cuánto le corresponde a uno de vosotros?

---

[32] La alumna hace las divisiones respectivas, como se indica en la imagen.

Alumna: *Dos*
Maestra: *En fracción… ¿si son CUATRO y UNO le das a tu compañero?*
Alumna: *Un cuarto*
Maestra: *Un cuarto… ¿de cuánto?*
Alumna: *… de dos (ve los pasteles en el recuadro)… de ocho (ve el total).*
Maestra: *…*
Alumna: *Dos octavos.*

En S3-P2C1 la forma de sumar fracciones homogéneas es expuesta por los alumnos y validada por la maestra. La acción realizada en la suma de fracciones heterogéneas no es validada por la maestra argumentando, con la venia de los estudiantes, su oposición; acto seguido explica cómo debe hacerse y recurre a la ayuda de los estudiantes para ello (ya que la forma es conocida por los estudiantes). En S6-P2C1, la docente conduce la actuación de la estudiante para que esta sea capaz de representar gráficamente (y descubrir el resultado) una multiplicación de fracciones. Los casos concretos propuestos por la docente (y por el estudiante en su momento) permiten aplicar directamente el tema en cuestión ya sea para introducirlo o para reforzarlo.

Frente al estilo de enseñanza expuesto, la actividad de resolución de problemas en clase está marcada por la propuesta de *situaciones ficticias*, *problemas* y *operaciones*. Las situaciones ficticias involucran a los estudiantes como personajes de las mismas y son planteadas “en bruto”; es decir sin seguir una estructura previamente elaborada (se narran y los datos van apareciendo). Los problemas se diferencian de las anteriores en el contexto y en la forma de plantearse (en este caso “más pulido” de tal manera que su propuesta sea directa). Las operaciones descontextualizan la misma de cualquier situación anterior (problema o situación ficticia) y se resuelven directamente sin indicios de “mala” interpretación.

Las situaciones ficticias son propuestas por la docente para resolución de los estudiantes. Estas situaciones ofrecieron cierta dificultad por su planteamiento. Nótese que el tratamiento de la fracción como operador (S1- P2C1) involucra dividir una cantidad en partes, por lo general esa cantidad al dividirla en partes o repartirla en grupos, los mismos están integrados por cierta cantidad de elementos; sin embargo, en la primera situación no fue así. La propuesta inicial de la alumna permitía ese reparto (un medio de dos divide a dos en dos partes con lo que en cada una se observa un elemento), mientras que la propuesta de la docente fue un poco más compleja aunque tomaba en cuenta la cantidad de niñas entre las que tenía que repartir las dos tortas.

Los problemas permiten la aplicación directa del tema en cuestión, son planteados por la docente (S2-P2C1, S3- P2C1a través de las actividades del libro de texto) o por los alumnos (S2-P1C1). En cualquiera de los casos su planteamiento permite aplicar el conocimiento aprendido para resolverlos. La docente no solo busca que los estudiantes apliquen dicho conocimiento sino que lo explique, además amplía las preguntas formuladas en los mismos.

Las operaciones tienen por finalidad aplicar el conocimiento aprendido, explicando el porqué de su acción; son propuestas directamente en clase, ya sea por la docente o por los estudiantes.

S6-P2C1

"… La profesora propone que los alumnos salgan al encerado a resolver operaciones con fracciones. Para ello llama a P2A11 y elige a P2A6 para que esta alumna proponga la operación a P2A11. Ella propone: $\frac{5}{8}+\frac{7}{5}$ *…)*

S4-P2C1

"… Después de hallar el resultado, la profesora propone a P2A17 que le diga a P2A18 dos fracciones heterogéneas para que las sume. El niño empezó a proponer fracciones con denominadores 'grandes' a lo que la profesora le sugirió que proponga fracciones 'fáciles' para que los cálculos los haga más rápido ya que lo que quiere ver es si siguen el proceso. Entonces, el alumno propone: tres quintos más cuatro séptimos…"

b) Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por la docente

La actividad de resolución de problemas surge de un proceso a seguir, este está formado por unas fases y estrategias que permiten la solución del problema. Durante las clases de matemáticas se proponen problemas matemáticos. Hemos expresado que un problema es una cuestión para la cual no se tiene un algoritmo de solución conocido; de acuerdo con ello, las actividades propuestas en clase son problemas si el alumno no cuenta con el algoritmo que la resuelve, pero sí con las herramientas necesarias para su resolución y no lo son si lo posee. En cualquiera de los casos, la docente plantea actividades que se consideran problemas matemáticos escolares. Estas actividades están enmarcadas dentro de un contexto de aplicación.

Las propuestas que la docente llama *situaciones ficticias* las propone la docente. Su planteamiento es expositivo – interactivo; es decir, busca la participación de los estudiantes en la propuesta de actividad, integrándolos a las mismas.

S1-P2C1

"… plantea una situación ficticia en que una de las alumnas, a propósito de *haber sido su cumpleaños, decide invitar a tres amigos a su casa; la maestra le pide a la niña que escoja a tres compañeros de la clase. Una vez escogidos la maestra les dice a los cuatro que salgan y se sitúen delante del encerado. Continuando con la situación ficticia, la maestra supone que como la madre es atenta decide hacerles dos tortas de diferente sabor (chocolate y nata), ocho pastelitos y doce bombones; luego, dibuja en el encerado dos rectángulos que representan las dos tortas y ocho óvalos pequeños, escribiendo "12 bombones". Luego, dirigiéndose a la niña, le dice que tiene que repartir lo que la madre ha preparado entre los invitados, incluyéndose a ella…"*

S2-P2C1

"… A continuación, la profesora, retomando el tema de la clase anterior, les comenta que la idea de fracción como operador puede aparecer en varias "situaciones concretas" y facilita el siguiente ejemplo específico: "Supongamos que nuestro dinero ahorrado es de treinta euros y P2A5[33] *quiere gastar un tercio de su dinero en su hermanito pequeño. Los alumnos comentan lo que puede comprar Nerea para su hermanito, básicamente mencionan: juguetes y ropa; la maestra permite que los alumnos expresen sus ideas; luego le pregunta a la alumna: ¿cuánto gastas en tu hermanito?" La maestra le pide a P2A5 que salga al encerado y represente la cantidad que gasta en el hermanito…"*

A continuación de la propuesta, la docente expresa lo que el resolutor debe hacer (que no es precisamente la formulación de la pregunta). Para S1-P2C1 es "*tienes que repartir lo que la madre…*" y para S2-P2C1: "*La maestra le pide a P2A5 que salga al encerado y represente la cantidad que gasta en el hermanito*".

---

[33] La maestra se dirige a la alumna.

La siguiente fase consiste en idear la forma de hacer aquello que la maestra ha propuesto: repartir o representar. No necesariamente lo que las alumnas proponen es lo que la maestra espera, de ahí que su guía se haga necesaria en esta fase a fin de orientar el proceso de solución. La propuesta no es compleja en cuanto tenga que hallar un resultado ya que este se halla rápidamente sino por cuanto el proceso seguido por las alumnas no se ajusta a la intención final de la propuesta (representar como fracción).

Al llegar a la traducción requerida, la siguiente fase es un trabajo a partir de esta, de tal manera que los alumnos puedan hacerse de la forma cómo se opera cuando las cuestiones involucran estos conocimientos. La fase gráfica permite la traducción matemática y esta asociar a la forma de solución; una vez que esta sea capturada por los estudiantes, la fase gráfica pierde valor. De hecho, esta se propone como medio para una mejor comprensión de la situación.

La propuesta de *problemas* no difiere de la anterior. Es decir, los problemas se proponen (exponen) y se resuelven. A diferencia de los anteriores en estos no es preciso graficar pues se cuenta con la herramienta operativa para desarrollar directamente la cuestión. Dentro de la resolución de este tipo de problemas, la docente desarrolla una fase previa a la ejecución de las operaciones respectivas; esta fase es de "análisis" tal como ella la nombra y que consiste explicar lo que se tiene que hacer. Para la docente es muy importante explicar y expresarse con propiedad usando lenguaje matemático. No basta decir "tengo que dividir" sino qué hay previo a ello. Con ello, la docente, promueve en clase una fase de comprensión de la situación previa a la traducción matemática y a la correspondiente aplicación de las operaciones.

S3-P2C1

"…

Profesora: *¿Qué tienes que hacer?*

P2A1: *Coger tres filas… (Señalando la imagen)*

Profesora: *No… ¿Qué tienes que hacer?*

P2A1: *…*

Profesora: *Dividir no sólo es partir, también es repartir o agrupar, ¿entienden con esas palabras lo que les digo?"*

Alumnos: *…*[34]

---

[34] Aunque nadie responde con palabras, se observa que algunos niños mueven la cabeza de arriba hacia abajo y otros de derecha a izquierda.

P2A1: *Junto en partes*[35]

…

Profesora: *¿Qué más tienes que hacer?*

P2A1: *Tengo que coger dos…”*

S2-P2C1

“…La profesora le dice a P2A3 que lea para todos el problema que ha planteado y saque a alguien a resolverlo. La alumna lo lee, escribe los datos en el encerado y señala a P2A16 para que lo resuelva. El problema que propone es el siguiente: Antonio hizo un viaje en su coche. El depósito tiene 63 litros y gastó 5/7 de 63. ¿Cuántos litros gastó?”.

Como en casos anteriores la alumna escribe directamente la operación (u operaciones) que resuelve la pregunta:

63:7=9

9x5=45.

No obstante, la profesora desea que vaya por partes; es decir, que primero explique lo que tiene que hacer y luego realice las operaciones. P2A16 expresa, en palabras, lo que ella considera que debe hacer y que se asocia directamente con las operaciones que ha realizado: “primero tengo que dividir sesenta y tres…”. La profesora evita que continúe y le dice: “primero tienes que analizar lo que te piden”. La alumna, luego de un momento, responde: “… hacer grupos de siete”…#

Las operaciones directas propuestas como actividades si bien no necesitan una fase previa de “descontextualización”, la docente incide en una fase de análisis de la misma, de forma que el alumno reflexione sobre la misma y en ello, plantee la solución a la operación.

S5-P2C1

“

… Profesora: *¿Qué tienes que hacer?*

Alumno: *una suma*

Profesora: *No, suma de qué*

Alumno: *…*

Profesora: *lo que quiero saber es tu opinión, antes de resolver.*

---

[35] La alumna dibuja una línea entre cada dos columnas (cada ocho círculos).

Alumno: *Una suma*

Profesora: *No me vale "una suma"*

Alumno: *...*

Profesora: *Esto es importante: "la respuesta tiene que ser clara y completa.*

Alumno: *... es una suma de fracciones.*

Profesora: *Una suma de fracciones... con el mismo denominador. O lo que es lo mismo: una suma de fracciones homogé...*

Alumno: *...neas*[36]*.*

Profesora: *Homogéneas... ¿Cómo se resuelve?*

Alumno: *sumamos ésta con ésta*[37]*.*

Profesora: *Habla con propiedad... Se suman los nu...*

Alumno: *...numeradores.*

Profesora: *Y se escribe el mismo...*

Alumno: *Denominador.*

Profesora: *Muy bien, ahora resuelve..."*

Las estrategias de resolución de problemas se circunscriben a estrategias específicas del tema en cuestión; la docente busca que los alumnos aprendan cómo llegar al conocimiento matemático que le permita resolver los problemas planteados. La estrategia gráfica empleada sirve de medio para una mejor comprensión de la estrategia operativa.

S6-P2C1

"... La profesora explica que la gráfica es para que entiendan de dónde sale y no lo hagan mecánicamente. Acto seguido, la profesora expresa lo siguiente: "el método para resolver la multiplicación de las fracciones... eso que pide (la operación) es realmente lo mismo si multiplico los numeradores y los denominadores". Luego pregunta: "¿cómo se multiplican las fracciones?, la manera rápida". Los alumnos no responden inmediatamente; sin embargo, P2A5 dice que ella lo ha hecho diferente. La profesora se acerca y observa que lo ha hecho correctamente pero sin la gráfica. La profesora le pregunta si alguien le ha ayudado y la alumna le dice que lo hizo con ayuda de su madre, aunque ella (su madre) tampoco sabía. La profesora insiste que no

---

[36] Al unísono con la profesora.

[37] Refiriéndose a cada fracción.

resuelvan los ejercicios sin entender: "no apliquen por aplicar", ya que primero deben entender lo que hacen…".

c) Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes

Los alumnos resuelven situaciones ficticias y problemas en clase (también "operaciones" que algunos de los alumnos catalogan como problemas matemático propuestos por el profesor/a en clase: H11Q2). Frente a esta actividad de resolución de problemas (u operaciones), los alumnos aplican distintos procedimientos; alguno común a toda la clase y otros más propios.

S3-P2C1

"… Luego de cuatro propuestas más de la misma naturaleza en los que los alumnos tienen que hallar directamente la fracción de un número, al siguiente alumno, P2A18, la profesora le propone un problema… "En una clase de quinto hay 24 alumnos/as. Las 2/3 partes son niñas, ¿cuántos niños hay?" El alumno escribe los datos en el encerado y procede a operar. Cuando concluye las operaciones, la profesora pregunta qué es lo que ha hallado y el alumno responde que la cantidad de niños. La profesora guarda silencio por un instante. Los niños en el aula se han dado cuenta del error. La profesora repite el texto del problema poniendo énfasis en la palabra "niñas". El alumno observa su trabajo y se da cuenta del error que había cometido. La profesora repite la pregunta del problema, poniendo énfasis en la palabra "niños". El alumno responde: ocho. La profesora le pregunta cómo ha llegado a esa conclusión, como el alumno se queda en silencio, la maestra le pregunta qué operación ha realizado o tiene que realizar. El alumno le dice que una resta ya que al 24 le resta 16.

La profesora pregunta si hay otra manera de responder ese problema, es decir "otro camino". P2A13, que está sentado en su escritorio, manifiesta que a 3/3 se le resta 2/3 y se halla 1/3. Algunos alumnos no lo comprenden inmediatamente, pero otros, sí. La profesora le pide P2A13 que salga al encerado y explique. El alumno escribe: 3/3 – 2/3 = 1/3…"

Una de las fases que precisa la resolución de problemas es la extracción de los datos del texto del mismo. Esta fase está asociada a la comprensión del problema ya que permite estructurar el planteamiento en base a la relación entre los datos extraídos. Nótese cómo P2A18 en S3-P2C1 luego de escuchar el problema escribe los datos y procede a operar. En S2-P2C1, P2A3 propone un problema y ella misma extrae los datos del mismo escribiéndolos en la pizarra; sin embargo, no es esta alumna quien lo resuelve sino P2A16. El no haber ejecutado personalmente esta fase y capturar un resumen del problema dirige la mirada hacia el planteamiento operativo, dejando de lado la situación propiamente dicha.

Si bien, la resolución de problemas se basa en la aplicación de los procedimientos aprendidos, la docente incide directamente en la respuesta a la pregunta del problema y otras que ella misma propone. Todas ellas, resolubles a través del procedimiento esperado. Nótese que P2A18 (en S3-P2C1) responde que para hallar la cantidad de niños realiza una resta, inmediatamente la maestra pregunta por otra forma; esta es propuesta por P2A13 quien aplica fracciones para ello (y sobre todo fracción como operador o fracción de un número).

La resolución de problemas en clase permite que los estudiantes apliquen conocimiento matemático y rectifique si es pertinente. Es la maestra quien se encarga de reorientar el trabajo realizado por el alumno.

Consideramos que algunas de las actividades propuestas por la docente ofrecen cierta dificultad al estudiante, tal es el caso de la suma de fracciones heterogéneas. Partimos del conocimiento que tienen los alumnos sobre suma de fracciones homogéneas, el mismo que expresan de la siguiente manera: “sumando los numeradores y escribiendo el mismo denominador” (S3-P2C1). Sumar fracciones heterogéneas, si no se tiene el algoritmo que permita resolverlo es un problema verdadero ya que su solución correcta no es directa (no necesariamente debe estar contextualizado en una situación cotidiana o “de la vida real” para que sea considerado como tal). P2A2 plantea una solución inmediata: “…suma el numerador y el denominador” (S4-P2C1). Efectivamente, esa respuesta no vale porque “los denominadores son distintos”; sin embargo, la propuesta de la docente fue justificar directamente la misma, sin dar opción a los estudiantes, que habían expuesto dos tendencias de opinión en los expuesto por la compañera, de interactuar con la situación y exponer sus puntos de vista (porqué consideran que no es correcta o porqué consideran que sí); es la propia docente quien justifica planteando a los alumnos preguntas de cuyas respuestas son dicotómicas: Si o No. P2A2 emplea una estrategia operativa para resolver la suma, basada en la idea de suma (de hecho suma objetos iguales: numeradores con numeradores y denominadores con denominadores), pero sin tener en cuenta las características particulares de esos denominadores (tienen distinto valor respecto de la unidad).

En S2-P2C1, al plantear una actividad consistente en graficar la fracción de un número en base a un ejemplo, concreto (y luego de haber participado de una situación ficticia que involucra dicho contenido), algunos alumnos muestran indicios de incomprensión de la situación, frente a este hecho, la docente corrige a los alumnos personalmente; acto seguido, el alumno corrige. Frente a ciertas actividades los alumnos encuentran obstáculos que las convierten en situaciones problemáticas. El tratamiento de los mismos es directo, a través de la participación directa de la docente transmitiendo el procedimiento correcto a realizar. Los alumnos se desprenden de la situación (de la complejidad encontrada) y aplican lo que permite resolverlo con eficiencia.

En S4-P2C1, la docente expone el procedimiento para sumar fracciones heterogéneas (a través de las fracciones equivalentes homogéneas) y plantea a los alumnos sumas para que lo apliquen. La situación propuesta es un ejemplo de suma que requiere un mayor trabajo encontrando dichas fracciones ya que según el procedimiento seguido estas no se encuentran inmediatamente. Para los alumnos no hay problema (solo retraso); es la profesora quien plantea la situación como tal y propone una forma más rápida de acceder a dichas fracciones.

Si bien los alumnos se han enfrentado a distintas situaciones difíciles en clase (no necesariamente bajo la categoría de situaciones ficticias o problemas), no se hace evidente sus estrategias de solución ya que la participación inmediata de la docente ha permitido que los alumnos adquieran de manera “fácil” y “práctica” la forma de resolver la dificultad.

d) Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

El tratamiento de los problemas matemáticos en clase tiene una forma definida por la docente y aceptada por los estudiantes. Los problemas planteados directamente se proponen luego de adquirir el conocimiento matemático nuevo y su tratamiento procedimental, aplicarlo de manera descontextualizada (a través del trabajo operativo) y circunscribirlo a la resolución de problemas de aplicación. Nótese cómo en S2-P2C1, la adquisición del conocimiento matemático: fracción como operador sigue las siguientes fases:

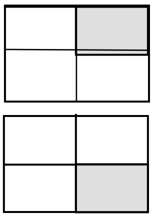
Primera: Exposición del tema:

"la profesora introduce una nueva forma de interpretar la fracción: como operador. Para ello, declara el tema explicando a grandes rasgos en qué consiste lo que van a aprender y que esto será útil posteriormente…"

Segunda: Contextualización:

"…una de las alumnas, a propósito de haber sido su cumpleaños, decide invitar a tres amigos a su casa… como la madre es atenta decide hacerles dos tortas de diferente sabor (chocolate y nata), ocho pastelitos y doce bombones… tiene que repartir lo que la madre ha preparado entre los invitados…")

Tercera: Traducción gráfica y simbólica:



$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$$

Cuarta: interpretación operativa ($\frac{1}{4}$ de 8 = 2; $\frac{2}{4}$ de 8 = 4; $\frac{2}{4}$ de 2)

"… La profesora pide a los alumnos que observen las expresiones anteriores; luego indica, señalando la segunda expresión: $\frac{2}{4} de 8 = 4$*, que primero tiene que dividir la cantidad y luego multiplicarla por las partes que corresponden según a cuántos hay que repartir. La profesora escribe en el encerado lo que ha expresado, de la siguiente manera: (8:4) x2=4. Luego dice: "es la forma de averiguar la fracción de una cantidad"…".*

Quinta: aplicación directa

"… Después de la intervención anterior, la maestra pregunta por la cantidad de bombones (que son doce): "¿Cuánto es los 2/4 de la caja de bombones?" Los alumnos no saben qué hacer pero uno de ellos[38] *asocia con las operaciones que realizó la maestra y dice: "divides entre 4 y lo multiplicas por 2"…"*

Sexta: recapitulación y aplicación a una situación ficticia nueva:

"… Supongamos que nuestro dinero ahorrado es de treinta euros y P2A5 quiere gastar un tercio de su dinero en su hermanito pequeño. Los alumnos comentan lo que puede comprar P2A5 para su hermanito, básicamente mencionan: juguetes y ropa; la

---

[38] Que estaba castigado por hacer desorden, pero que sin embargo, había estado atento a la explicación de la profesora.

maestra permite que los alumnos expresen sus ideas; luego le pregunta a la alumna: ¿cuánto gastas en tu hermanito?...”

Séptima: planteamiento de problema por parte de la profesora y resolución por parte del alumno

“*Un libro tiene 75 páginas y leí los 2/5 del libro, ¿cuánto leí?*”

Octava: Representación gráfica a partir de un caso específico: representar los 3/5 de 15.

Novena: planteamiento de problemas por parte de los alumnos y resolución por los compañeros.

“… La profesora pregunta a P2A18 si tiene algún problema propuesto; el alumno sale al encerado, lee su propuesta y escribe los datos[39]*. La profesora le sugiere escoger a uno o una de sus compañeros para que lo resuelva; Emilio elige a P2A6 y la alumna sale al encerado…”*

Décima: resolución de casos directos de fracción de un número

“La clase se inicia resolviendo las actividades del libro que se propusieron para la casa. La maestra saca al frente, de manera individual, a cada niño a quienes les propone hallar la fracción de un número. Los niños, al salir al encerado, escriben lo que la maestra plantea (“tienes que encontrar los… de…”)…”

Décimo primera: propuesta de problemas del libro de texto

“*En una clase de quinto hay 24 alumnos/as. Las 2/3 partes son niñas, ¿cuántos niños hay?*”

A lo largo de las fases, podemos observar que el tratamiento de los problemas en clase, como problemas matemáticos de aplicación, se da alternadamente luego de introducir y desarrollar el tema en cuestión. Los *problemas* se proponen para aplicar conocimiento, estos pueden ser planteados por la docente, por los alumnos o extraídos del libro de matemáticas. El tratamiento de la información involucra, consecuentemente, el planteamiento y la resolución de *problemas* que permitan aplicar en situaciones cotidianas concretas el conocimiento adquirido, mas no construirlo o descubrirlo a partir de él. Si bien en otras sesiones, el conocimiento parte de situaciones concretas, este es introducido por la acción directa de la docente quien lo enseña y aplica.

---

[39] El problema es como sigue: “En una tienda de animales hay 85 iguanas y yo quiero 2/5, ¿cuántas iguanas compro?”

La capacidad de resolución de problemas está en relación al grado de aplicación y dominio del conocimiento aplicado. En este proceso, se insiste en la explicación del estudiante del proceso que va a seguir y que le permite utilizar el procedimiento en cuestión.

Cabe recordar que las clases analizadas generan actividades que los estudiantes no pueden enfrentar directamente (tal es el caso de la suma de fracciones heterogéneas y multiplicación de fracciones) y por lo tanto producen cierto bloqueo (matemático) en su proceder; el tratamiento de estas actividades tiene otra orientación, centrada principalmente en la actividad experta de la docente quien expone la forma de hacerlo.

La construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos es más operativo. En las sesiones en las que la docente propone a los estudiantes "pensar" cómo se opera con las fracciones o la relación entre la fracción de un número y su resultado, permite que los estudiantes asocien dichas traducciones matemáticas y sus resultados con las operaciones básicas. Los estudiantes hacen un trabajo más operativo que gráfico.

S6-P2C1

"... P2A3explica que a ella "le salió esa fracción porque multiplicó", aunque la gráfica no la había hecho: "lo hice así porque pensé que era así". Los alumnos se asombran pues observan que la fracción final resulta, efectivamente, de multiplicar los numeradores y los denominadores por separado (que es como lo había hecho esta alumna). La mayoría de los alumnos responde afirmativamente. P2A2 manifiesta que eso era lo que quería decir (ese era 'el método' que había descubierto). La profesora sonríe..."

S4-P2C1

"... La profesora pregunta: "¿qué puedo hacer?" Los alumnos se miran entre sí y observan a la docente; luego P2A" responde que "se suma el numerador y el denominador". La profesora le pide que resuelva en el encerado. La alumna sale, vuelve a escribir las fracciones y suma. La nueva fracción tiene como numerador la suma de los numeradores de las fracciones y como denominador la suma de los denominadores, con lo cual la nueva fracción es cuatro séptimos; de tal manera que: $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$ *..".*

4.1.3. Caso 3 P3C2: “Escucha, recuerda y aplica”

Tabla 21. Datos generales del Caso 3

Características de su profesión	Tipo de colegio	Número de alumnos
Maestra de Educación Primaria. Gusta de enseñar matemática. Más de 05 años de experiencia docente.	Privado (A Coruña)	25

a) Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos

Las sesiones de clase desarrolladas por la docente tienen un fin práctico (aplicativo). El inicio de cada sesión se caracteriza por la revisión de las actividades propuestas y la resolución de otras actividades durante la misma, así como por el tratamiento de un conocimiento nuevo. En la primera, las actividades son básicamente de dos tipos: operativas (de construcción) y de resolución de problemas matemáticos:

S1-P3C2

“… En las actividades propuestas, se les solicita a los alumnos escribir la medida de los ángulos propuestos, dada una pista, y en la que tenían que dibujar pares de ángulos dadas unas características específicas. Esta última actividad es parecida a una de las que se habían propuesto en la ficha de evaluación aplicada anteriormente. Básicamente, se trabajaron las siguientes dos actividades:

> 1. *Observa que dos quesitos (se muestra la imagen de una caja circular en la que hay ocho porciones iguales de queso, luego la imagen de una circunferencia dividida en ocho partes iguales y la figura de dos porciones de quesitos formando ángulo recto) completan un ángulo recto. Teniendo esto en cuenta, copia y completa la tabla (se presenta una tabla de 7x2 en la que se debe considerar el número de porciones y el ángulo que forman. Se muestra un ejemplo, que es el que está en el enunciado.*
> 2. *Dibuja en tu cuaderno:*
>   - *a) Dos ángulos consecutivos; un agudo y otro obtuso*
>   - *b) Dos ángulos adyacentes iguales*
>   - *c) Dos ángulos opuestos por el vértice, ambos obtusos…”*

S2-P3C2

"La sesión empieza con la explicación de la profesora sobre el uso del transportador. Previamente, se cerciora que todos los alumnos tengan transportador y compás sobre sus mesas... La maestra muestra el transportador del aula… les expresa que es igual al que tiene cada alumno y les explica cómo es, qué partes tiene, cómo se miden los ángulos, qué expresa cada número, por qué los números están de izquierda a derecha y viceversa, para qué sirve la línea central que coincide con los 90º, qué uso se le da al orificio que tiene el transportador, etc. Los alumnos van comprobando si sus transportadores son iguales o no al de la maestra…"

El desarrollo de actividades, es más personal; es decir, son los propios alumnos quienes las resuelven de manera individual, ya sea fuera del aula (cuando son propuestas como tareas para su casa) como dentro. La maestra no interviene en el desarrollo de las mismas, solo cuando las actividades entran en fase de corrección y validación. En esta etapa se actúa de dos maneras: aprobando directamente el trabajo realizado o replanteando el mismo y sugiriendo su rehacer.

S1-P3C2

"Los alumnos, en general, resuelven solos las actividades correctamente, sobre todo la primera de ellas; sin embargo, en la segunda, aún tienen dificultad en reconocer ángulos según las características propuestas. Se observan casos en los que consideran una característica pero no la otra (por ejemplo, ser adyacentes e iguales a la vez, o ser suplementarios: uno agudo y otro obtuso). Los alumnos muestran sus producciones a la ***profesora quien valida o no sus trabajos****. Algunos alumnos comentan entre sí..."*

S3-P3C2

"… A medida que se va revisando se les pregunta a los alumnos qué pasos han seguido para medir y construir lo que se les pide. Se puede observar que no hay un manejo preciso del transportador. Todos los alumnos a los que les ha corregido han tenido aciertos y errores en ambos apartados.

Para corregir la primera actividad (cuando esta es incorrecta), la maestra les pide que usen su transportador u observen el ángulo formado. Los alumnos indican el ángulo y concluyen que no corresponde con el que ellos indican. ***La profesora les dice que corrijan****…"*

S4-P3C2

"…Otro ejercicio que ofreció dificultad y que no pudieron resolver consistía en averiguar cómo partir una pieza de madera para tener cuatro trozos iguales…

Los alumnos, en general, expresan que no sale. La profesora les asegura que sí y les dice que ella lo va a hacer…

La ***profesora les dibuja en el encerado cómo tienen que dividir la imagen****…"*

El tratamiento de un nuevo conocimiento se ha desarrollado de dos maneras, la primera (S2-P3C2) a través de la exposición directa de la información y la segunda (S6-P3C2) en base a un diálogo entre docente y alumnos (previa actividad introductoria):

S6-P3C2

"… La clase es sobre medida del tiempo. La profesora les dice a sus alumnos que les va a entregar una información para que ellos la lean y luego comenten lo que dice. Algunos alumnos trabajan individualmente y otros en pares. La profesora les comenta que cada uno, o par, tiene un texto diferente, pero que se relacionan entre sí; les dice que lo que tienen que hacer es leerlo y descubrir, con la información del texto, a qué se refiere y escribirlo en la parte superior de la ficha, en las que hay indicadas unas líneas que se corresponden con cada una de las letras del título del texto…"

En la primera situación, el estilo de enseñanza parte de la actividad observadora y atenta de los estudiantes a las explicaciones de la docente, quien expone el tema en cuestión; no obstante, incluye la participación de los estudiantes en la exploración de conocimientos previos.

S1-P3C2

"… Los alumnos intentan medir los ángulos que propone el libro de matemáticas, pero la maestra les dice que atiendan antes de hacer cualquier actividad, ya que así sabrán qué hacer. ***La maestra empieza a explicar cómo se construyen ángulos con el transportador****. Para ello expresa que se dibuja una línea recta y se ayuda del transportador; luego, se señala un punto en esa línea y se hace coincidir dicho punto con el agujero que tiene el transportador (el agujero sirve para ubicar el vértice). La explicación va acompañada de la ejecución por parte de la maestra en el encerado…*

La maestra propone a la clase hallar la bisectriz de un ángulo. ***Pregunta a los alumnos qué es la bisectriz****. Una de las alumnas lo lee del libro, pero la maestra le dice que del libro no, que exprese lo que ella sabe sobre el tema. La alumna dice que lo sabe* *e intenta decir, sin ver el libro, lo que es una bisectriz. Los alumnos levantan la mano para responder... La maestra empieza a explicar lo que es la bisectriz de un ángulo…"*

El planteamiento del tema o conocimiento matemático se ha ido expresando en los párrafos anteriores. Un asunto nuevo, una actividad nueva para el estudiante se inicia con la adquisición de la información necesaria para ello. La participación del estudiante se evidencia en la exploración de los conocimientos previos y en la aplicación de los nuevos a través de actividades manipulativas. Nótese que la clase analizada es sobre construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices, por lo que el producto final de las mismas es la construcción de aquellos por parte de los alumnos. Esta construcción está dirigida por la maestra quien expone la forma de hacerlo, pero permite que los alumnos participen adyacentemente. En S2-P3C2, al trabajar la mediatriz, la maestra requiere del uso de líneas perpendiculares, las que solicita a algún alumno construir; esto es válido para, posteriormente, construir la mediatriz, proceso en el que participa directamente la maestra.

S2-P3C2

"… Luego de la explicación, la maestra propone a la clase *hallar e indicar la bisectriz de un ángulo concreto. Para ello, la maestra le pide a otro alumno que salga al encerado y dibuje otro ángulo. Los alumnos protestan porque todos quieren salir al encerado. El alumno elegido traza dos líneas a mano alzada. Luego, con el uso de su transportador mide el ángulo. El alumno obtiene una medida; luego la maestra mide y obtiene otra. La maestra expresa que eso ha sucedido porque las líneas que ha dibujado el alumno no son rectas y que al usar transportadores distintos (de distinto tamaño), las medidas son diferentes. La maestra intenta hacer una línea recta sobre una de las líneas que hizo el alumno. Con esta modificación, el ángulo mide 80º...*

... La maestra retoma la idea de mediatriz y hace referencia a la perpendicular. Con esta idea pregunta qué es una perpendicular o cuando dos líneas son perpendiculares.

La maestra saca a uno de los alumnos al encerado para que trace una recta perpendicular al segmento…

La maestra coge el compás y empieza a explicar cómo usarlo para trazar la mediatriz… Al igual que en los usos anteriores, el compás no logra ser un buen instrumento ni marcar correctamente los trazos; sin embargo, con más esfuerzo, la profesora logra obtener el punto de intersección. La profesora indica el punto obtenido *sobre el segmento y explica que necesita otro punto ya que con uno la recta puede tomar diferentes direcciones. La profesora realiza el mismo procedimiento por debajo del segmento logrando ubicar el otro punto. Luego, con una escuadra grande une con una línea los puntos, obteniendo la mediatriz del segmento…"*

En este caso, el estilo de enseñanza de la docente está marcado por la exposición de la nueva información y su aplicación en situaciones concretas. Estas situaciones son actividades que las involucran, en las que los alumnos tienen que aplicar el procedimiento expuesto por la docente.

La segunda propuesta (medida del tiempo) es más interactiva, pues parte de una actividad que involucra la participación del alumno; a partir de la cual, la maestra extrae el tema en cuestión y a través del diálogo con los alumnos va explorando y precisando el conocimiento.

S6-P3C2

"… La profesora pregunta si todas las maravillas del mundo serán iguales, y los alumnos responden que no. Luego, la profesora añade la siguiente pregunta: "¿se habrán construido en el mismo tiempo?" Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Se habrán construido en el mismo tiempo?

P3A6: No, porque cada maravilla se hizo en distintos años... o fechas.

Profesora: ¿En qué año estamos?

P3A20: 2008

Profesora: ¿A qué siglo corresponde este año?

P3A25: Siglo XXII

Profesora: Paula (F), ¿cómo averiguas el siglo al que pertenece un año?... ¿Ramiro?

P3A25: Estamos en el siglo XXI

Profesora: ¿Por qué lo sabe?

P3A25: Porque han pasado veintiún siglos desde que nació Cristo

P3A3: A mí me enseñaron

Profesora: Cristina, explica cómo averiguar los siglos…

P3A3: Se cogen las dos primera cifras del año y se le sumaba una cantidad que no me acuerdo… uno en el caso.

Profesora: Efectivamente, según lo que ha dicho su compañera, ¿q qué siglo pertenece 1972?

Alumnos: *Al siglo veintiuno*
Profesora: *¿Cómo se escribe siglo veintiuno?*
P3A20: *Con una equis, otra equis y un palito*
Profesora: *Equis, equis y palito*
P3A20: *No, es una "i" mayúscula*
Profesora: *Vale… ¿Por qué se escriben de esa manera los siglos?*
P3A9: *Porque los escribían los romanos*
Profesora: *¿Cuál es el valor de cada letra?..."*

Dentro de la gestión de la clase, la propuesta de problemas matemáticos se orienta a su resolución directa por parte de los alumnos. Los problemas son extraídos del libro de matemáticas. Los problemas propuestos son básicamente aplicativos de un conocimiento específico (por lo general operaciones aritméticas), excepto en un caso: el de partir una pieza de madera en cuatro trozos iguales (S4-P3C2) cuya propuesta está enmarcada dentro de la actividad del libro en cuestión. Se espera con estos planteamientos que los alumnos apliquen la matemática aprendida y no tengan dificultad al resolverlos. No obstante, los alumnos evidencian ciertas dificultades en su solución, las que están asociadas a la comprensión de los mismos como se puede observar en S5-P3C2 en la que los tres problemas propuestos, aunque no dentro del contexto del conocimiento matemático trabajado (ángulos, mediatrices y bisectrices) generan confusión a algunos alumnos. Por lo general, los problemas no son desarrollados en clase; es decir, vienen con un planteamiento de solución generado en casa; no obstante, en el aula se comunican y analizan, de tal manera que a partir de la propuesta de los alumnos se va profundizando en el mismo. La comunicación puede cerrar ciclo en la maestra (al revisarlos) o en su planteamiento frente al grupo total (si decide que el alumno exponga su solución). En S1-P3C2, a propósito de la actividad referida a graficar ángulos, la maestra cuestiona a los alumnos sobre la misma y se vale de la actividad para reorientarla en base a otras cuestiones.

S1-P3C2

"… En grupo total, se intentó no sólo revisar sus producciones sino cuestionarles en base a lo que saben de lo que han aplicado. Por ejemplo, se preguntó a un alumno que había realizado las gráficas correctamente si, en el caso de los ángulos adyacentes, que se proponían que sean iguales, podía haber dos ángulos adyacentes que no sean iguales. La primera respuesta del alumno fue afirmativa. Luego se le preguntó cuándo

dos ángulos eran adyacentes y el mismo alumno respondió que cuando formaban ángulo plano. Luego se le preguntó cuánto debían medir los ángulos adyacentes para que sean iguales si siempre tenían que formar ángulo plano. El alumno dijo que 90º. Acto seguido se le preguntó si había otra posibilidad y respondió que sí. Se le volvió a preguntar, qué otro par de ángulos pueden ser adyacentes y no medir 90º. Entonces dijo que no había.

Otra cuestión fue a propósito de los ángulos opuesto por el vértice y que sean obtusos. A la alumna que presentó su respuesta y reconoció cuáles eran los ángulos obtusos se le preguntó si los ángulos opuestos por el vértice eran iguales (se le hizo la pregunta pues su gráfica mostraba ángulos relativamente diferentes, aunque parecía iguales). La alumna dudó en responder y dijo que no necesariamente…"

El problema de la división de la figura resultó interesante, puesto que las propuestas de solución fueron diversas, pero ninguna correcta. Por otro lado, no fue un problema que se propuso para casa, sino para desarrollar en clase (mientras se corregía la tarea). Es un problema que no involucra ninguna operación aritmética pero que implica que los estudiantes observen, analicen la forma, ideen métodos para encontrar la solución, lo que es posible con imaginación y creatividad. Además pone en juego la idea de fracción, áreas, perímetros… Su tratamiento en clase es individual, cada alumno piensa la forma de resolverlo. En el transcurso, los alumnos observan otras soluciones e intercambian alguna idea. Al final, la maestra solicita algunas soluciones que los estudiantes exponen. Al no ser ninguna correcta, la docente expresa la que responde a la pregunta. En este caso, la maestra opta por un tratamiento directo.

Los problemas matemáticos en clase no se proponen para construir conocimiento matemático o usar otro más allá del que directamente está inmerso.

b) Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por la docente

Basándonos en las sesiones analizadas podemos decir que la actividad de resolución de problemas está presente en las mismas. La maestra usa el mayor tiempo posible en permitir que los alumnos apliquen el conocimiento aprendido a través de la propuesta de diferentes actividades aplicativas que lo hacen posible (entre ellas la actividad de resolución de problemas matemáticos expuestos como problemas verbales). Esta actividad se apoya en la propuesta de problemas matemáticos escolares que los alumnos han de resolver.

El tratamiento de los problemas matemáticos en clase se basa en la exposición de las formas de solución expuesta por los alumnos. A través de ellas, la maestra observa el trabajo realizado por los estudiantes y corrige si es posible. De acuerdo a ello, las fases de comprensión, planteamiento, ejecución y respuesta recaen en el estudiante, mientras que la de verificación en clase en la docente (con la intervención del estudiante o de la clase si lo considera pertinente). Las siete sesiones analizadas no permiten hacer explícita esa idea, pero sí la S17-P3C2, en la cual la maestra plantea que un alumno resuelva el problema propuesto y la docente interviene según ve conveniente.

S17-P3C2

“... El siguiente problema es del mismo estilo. P3A21 es el encargado de resolverlo. El problema plantea saber cuánto obtiene de ganancia un vendedor si compra una cantidad de kilos de naranjas a determinado precio (1 euro 15 céntimos) y las vende a otro (1 euro 87 céntimos). P3A21 escribe en el encerado 850 (que son los kilos de naranja que compró) y lo multiplica por 115. Al preguntarle la profesora porqué multiplica por esa cantidad el alumno responde: “un euro son cien céntimos y quince (céntimos) son 115. La profesora no le dice que resuelva y pregunta:

Profesora: *¿Cuál es el precio al que compró las naranjas?*

P3A21: *Un euro quince céntimos.*

Profesora: *¿Cuál es el precio al que vendió las naranjas?*

P3A21: *Un euro ochenta y cinco céntimos*

Profesora: *¿Cuánto gana?... Si las compra a uno con quince y las vende a uno con ochenta y cinco, ¿cuánto gana? (la profesora hace la pregunta a toda la clase).*

P3A21: *Setenta céntimos*

Profesora: *Esto que gana (refiriéndose a los 70 cént.), ¿cuándo?*

P3A16: *Cuando vende un kilo*

Profesora: *En cada kilo gana 70 céntimos, ¿cuánto compró?*

P3A21: *850 kilos*

Profesora: *Si al vender un kilo gana 70 céntimos, al vender 850, ¿cuánto ganará?*

En el transcurso del diálogo, la profesora expresa que de esta manera se evitan hacer muchas operaciones y pueden resolver el problema directamente: “Vamos a ahorrar y hacer menos operaciones”. La profesora escribe la operación 850 x 70 y le dice al alumno que la resuelva, pero antes le dice al alumno que recuerde cómo se *multiplica cuando hay "ceros" al final de los números que se van a multiplicar (los alumnos lo expresan y la profesora lo refuerza: "al final, añadimos los ceros"), luego pregunta qué indica el resultado de la operación, respondiendo el alumno que son "céntimos". El P3A2 comenta que hay que pasar a euros. La profesora dice que si el resultado se pone de esa manera no está mal ya que lo pueden expresar en euros o céntimos, sin embargo pregunta cómo se tendría que hacer para pasar a euros…"*

Si bien el problema se resuelve aplicando operaciones aritméticas básicas, la idea de la docente es hacer más eficiente su proceso, por ello, expone una forma distinta de interactuar con los datos y plantear una solución operativa menos ardua por la aplicación de mayor cantidad de operaciones previas. En este caso, no es que el proceso seguido por el alumno sea incorrecto, sino que es menos eficaz. La maestra busca que los alumnos conozcan (y apliquen) estrategias específicas más simplificadas, y por lo tanto forjen una solución más eficiente.

c) Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes

Para resolver problemas matemáticos los alumnos aplican estrategias específicas que orientan su solución. Cabe resaltar que los problemas matemáticos (o actividades matemáticas) propuestos en la escuela tienen un matiz aplicativo; por ello, las estrategias de solución son conocidas por los resolutores. La aplicación de las mismas depende de la relación que establezcan entre los datos de la situación.

S5-P3C2

"… P3A20 también tiene dificultades en este problema. Se le sugiere que lo vuelva a leer. El alumno lo lee pero dice que no entiende los datos. Se le pregunta qué no entiende y el alumno expresa que "los tres coma cinco". Se le pregunta qué indica esa cantidad y el alumno expresa que las vueltas que ha dado. Se le pregunta qué distancia son esas tres vueltas. Inmediatamente, el alumno expresa que ha comprendido: "Ah, tengo que multiplicar 10,78 por 3". Se le hace hincapié en las vueltas que ha dado

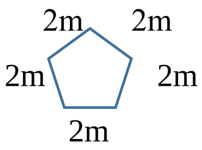
P3A19… no entiende un problema que pide averiguar cuántos lazos se pueden hacer con doce metros de cinta si uno se hace con cuarenta centímetros… se le pide que vuelva a leer el enunciado y se le pregunta qué tiene que hacer para averiguar cuántos lazos debe hacer con doce metros. La alumna expresa que tiene que restar. Se le pregunta qué resta y ella indica las cantidades: 12 y 40. Se le pregunta por qué tiene que hacer *esa resta y ella responde que para saber cuántos lazos tiene que hacer. Se le pregunta si puede restar cosas diferentes y ella dice que no. Se le pregunta qué indican los doce y ella responde que metros; luego expresa que tiene que convertir los metros en centímetros. Se le pregunta cuántos centímetros son doce metros y ella dice que ciento veinte. Se le dice que piense bien y ella dice que no sabe calcular mentalmente. Se le sugiere que lo haga por escrito. La alumna opera y expresa que son mil doscientos. Luego se le pregunta qué hace con esa cantidad y la alumna dice que la tiene que multiplicar por cuarenta. Se le pregunta por qué multiplica y ella indica que para saber cuántos lazos tiene que hacer. La observadora le hace una comparación con tres bolígrafos, en el que cada uno mide cuarenta centímetros, se le pregunta cuánto miden en total y la alumna dice que ciento veinte. Luego se le pregunta: "si cada uno son las cintas para los lazos y si en total mide ciento veinte, ¿para cuántos lazos hay?" La alumna observa los bolígrafos y expresa que tres. Se le pregunta qué ha tenido que hacer y ella dice que multiplicar. Se le vuelve a incidir: "si son ciento veinte centímetros y cada uno necesita cuarenta centímetros, ¿qué haces para saber cuántos lazos pueden salir? La alumna insiste que se multiplica…"*

Ambos casos recurren a la aplicación de operaciones; sin embargo, P3A16 intentó emplear el cálculo mental como estrategia para resolver la operación rápidamente, pero lo descarta por no saber "calcular mentalmente".

La cuestión referida a la partición de la figura en cuatro partes iguales, al ser propuesta sobre una imagen obliga a los estudiantes a recurrir a la misma; sin embargo, su uso es gráfico propiamente. Los alumnos intentan dividir la imagen en partes iguales aproximando las mismas (P3A9), trazando mediatrices y bisectrices (P3A12), puesto que está enmarcado dentro de este tema, pero sin ningún éxito; alterar las condiciones de la situación (P3A15). Los alumnos recurren a lo que conocen y cómo lo conciben; cuando sus herramientas no les permiten acceder a una solución, las mismas se alejan demasiado de la realidad de la situación. Nótese como en un planteamiento propuesto a los alumnos sobre cómo puede ser un terreno de diez metros cuadrados de superficie (H16Q7), los alumnos grafican generalmente un cuadrado haciendo referencia a la unidad indicada (metro cuadrado); sin embargo, otros aceptan otras formas. Sus estrategias de verificación están en función de la manipulación operativa de los datos numéricos que incluyen o de la cuadriculación de la imagen. De esta manera, P3A3 al dibujar un pentágono de 2m de lado indica que "Cada lado que he dibujado tiene 2 m por tanto 2m x todos los lados = 10 m”, mientras que P3A2, P3A6, P3A9, P3A14, P3A22 cuadriculan la imagen. En cualquiera de los dos casos, hay errores de interpretación de la situación.

P3A3-H16Q7:

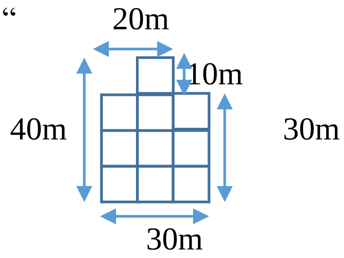
“



Cada lado que he dibujado tiene 2 m por tanto 2m x todos los lados = 10 m”

P3A6-H16Q7:

“



Porque en cada figura hay diez cuadrados”

Si bien se cuestiona sobre los métodos y estrategias de resolución de problemas que usan los alumnos, cabe indicar que la actividad en el aula no solo se centra en la resolución de este tipo de problemas (planteados verbalmente) sino que los estudiantes participan de actividades de construcción (puesto que las sesiones analizadas están dentro de ese contexto). Frente a la actividad de construcción de bisectrices o mediatrices que genera cierta dificultad al alumno, éste recurre a la gráfica directa de las mismas o al uso de los instrumentos enseñados.

S3-P3C2

“… El tercer ejercicio se relaciona con la construcción de la mediatriz y la bisectriz. Los alumnos suelen tener más errores en este apartado. Al ir revisando la construcción de la bisectriz se les pregunta cómo hacen para ubicar dicha línea en el ángulo y construirla. Uno de los alumnos. P3A20, no vio la necesidad de construirla siguiendo el método del libro ni de la profesora y explicó que lo hizo directamente ***(“a ojo”).*** *Al preguntarle que hacía la bisectriz con el ángulo, el alumno respondió que lo dividía en dos partes; luego se le preguntó cómo eran esas partes y respondió que eran iguales. Se le propuso comprobar si los ángulos que se habían formado, al trazar la bisectriz en su trabajo, eran iguales y en los tres no lo eran, aunque en uno estaban más próximos a la igualdad, por lo que se le propuso que trazara la bisectriz usando el compás…”*

Si bien para este tipo de actividades la propuesta es usar los instrumentos adecuados, los alumnos tienen dificultad en ello y optan por trazar a pulso y construir lo solicitado. La situación planteada como tal no le permite dar importancia al uso de estos instrumentos y recurre a otros.

d) Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

A lo largo de las sesiones hemos podido observar que los problemas matemáticos forman parte de la actividad *matemática* de los alumnos en clase de *matemática* (si se acepta la redundancia), puesto que este es un trabajo permanente en la propuesta de acciones que la docente plantea para los alumnos, ya sea dentro de clase o fuera de ella. Una de las razones es la necesidad del uso del libro de texto (ya que es un material que se le solicita al alumno). Los problemas matemáticos o actividades planteadas se proponen para que los alumnos las resuelvan y a través de ellas aplicar el conocimiento aprendido y, en esa aplicación adquirir destreza. La frecuencia en la interacción con un tipo concreto de situaciones permite que los alumnos las asocien y posteriormente actúen de la misma manera en una situación similar. Por otro lado, también conlleva un mayor discernimiento de sus características. No obstante, su tratamiento no le permite (o exige) necesariamente construir conocimiento matemático como contenido a partir de ella, pero sí desarrollar capacidades intelectuales según sea su planteamiento (haciendo referencia al problema de la figura dividida en cuatro partes iguales).

Según la propuesta metodológica, la adquisición del nuevo conocimiento está desligada de la resolución de problemas matemáticos, mas no su uso, ya que aquella no se plantea dentro de un problema propiamente sino como parte de una situación en la que es preciso su reconocimiento (S2-P3C2, S6-P3C2).

S6-P3C2

"…

Profesora: *¿Cómo saber que unas son las antiguas y otras las modernas?...*

P3A17: *Porque fue inaugurada en 1931 y nos parece que es antiguo.*

Profesora: *¿A qué siglo corresponde 1931?*

P3A17 y P3A12: *Veinte.*

Profesora: *Entonces, ¿pertenece al antiguo?*

P3A12: *No, porque el siglo veinte es anterior a éste, no fue tanto tiempo.*

Profesora: *P3A11, Chichén Itzá, México, ¿dónde?*

P3A11: *En el antiguo.*

Profesora: *¿Por qué?*

P3A11: *Porque aquí dice que fue centro de la civilización maya entre los años 750 y 1200 antes de Cristo, pero que fue construida antes.*

Profesora: *¿Entre qué años?*

P3A11: *Yo vi en el periódico, vi unas siete nuevas maravillas y no salía ésta.*

P3A3: *En 435 y 455 después de Cristo. Esto es muy, muy antiguo…"*

A partir de su incursión (del tema matemático) en una situación extramatemática, la docente permite que los estudiantes lo reconozcan, lo usen, lo reflexionen y lo construyan. Todo ello, con la guía directa de la docente quien a través de sus preguntas, reorienta la actividad hacia el tema matemático en cuestión y lo desarrolla, por etapas, a medida que *aparece*.

La capacidad de resolución de problemas se trabaja a partir de la propuesta constante de actividades que exija resolverlos; de esta manera, mientras más experiencia tengan los alumnos en los mismos, más diestros serán en su tratamiento. Todos los días se plantean actividades del libro, el mismo que involucra resolución de problemas. El binomio conocimiento matemático – problema matemático se transmite en una dirección que inicia en el primero; a partir del mismo, se plantean "ejercicios" y problemas matemáticos y en su ejecución se desarrolla la capacidad de resolución de problemas.

En clase de matemáticas, propiamente, los alumnos "ya saben" resolver problemas, puesto que su proceder frente a los mismos sigue un esquema definido: leer el problema, identificar los datos, plantear una solución con los mismos y resolver. Estas ideas no se observan en las clases analizadas ya que los problemas son resueltos en casa; sin embargo, al observar la actitud de los alumnos que no logran resolver correctamente los mismos se puede apreciar que recurren a los mismos para poder plantear correctamente la solución.

S5-P3C2

".. P3A9 levanta la mano y pregunta cómo se dividen decimales. Se le pregunta para qué quiere saberlo y él señala un problema. El problema pide que averigüe cuánto recibe un comprador si paga con treinta euros la compra de 1,8 k. de jamón si el kilo cuesta doce euros. Se le pregunta qué tiene que dividir y el alumno señala los kilos y los euros. Se le sugiere que lea bien el problema y se le pregunta qué indica cada dato. El

alumno concluye que tiene que multiplicar el precio del kilo y los kilos que ha comprado…”.

En otros casos, la solución está planteada y la dificultad se ubica en la ejecución de las operaciones propuestas.

“… P3A3 pregunta cómo se dividen decimales. Se le dice que como números naturales pero colocando coma en el cociente cuando llegue a la coma del dividendo. Se puede observar que el resultado es diferente que en el alumno anterior pues éste también había tenido un error y se había corregido. La alumna había tenido un error de cálculo que se había ido arrastrando hasta el final…”

La capacidad para resolver problemas no está garantizada por la cantidad de problemas matemáticos que el alumno pueda resolver, sino por la forma cómo se enfrenta a ellos: cantidad no es calidad. No obstante, el proponer la solución (S4-P3C2), cuestionamientos a partir de las soluciones (S1-P3C2), el corregir y hacer evidente un error (S5-P3C2), plantear otras formas más eficaces (S17-P3C2) son estrategias que la docente ejecuta a fin de que la capacidad de resolución de problemas mejore en sus alumnos.

4.1.4. Caso 4 (P4C3): “Trabajo grupal para aprender con el aporte de cada uno”

Tabla 22. Datos generales del Caso 4

Características de su profesión	Tipo de colegio	Número de alumnos
Maestra de Educación Primaria. Gusta de enseñar matemática. Más de 8 años de experiencia docente.	Público (Piura)	40

a) Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos

El inicio de clases de P4C3 se caracteriza, generalmente, por la propuesta de actividades que plantea a los alumnos, a partir de las cuales intenta extraer el conocimiento matemático que piensa trabajar.

S1-P4C3

“... La profesora… les muestra una hoja y les interroga acerca de lo que pueden hacer con ella.

Profesora: Tenemos una hoja, ¿qué podemos hacer?
P4A3: Dibujar
P4A29: Hacer tareas
P4A5: Dividirla
Profesora: ¿Cómo podríamos dividirla?
P4A1: Doblándola
Profesora: ¿De cuántas formas podemos doblarla?...”

S2-P4C3

“El tema de la clase es la fracción como operador. Para ello, la profesora dibuja en la pizarra 21 triángulos, pinta 3 y escribe "1/7 de 21 es igual a 3", luego pregunta por qué un sétimo de veintiuno es tres…”

S3-P4C3

“... La profesora les propone a los alumnos hacer una unidad entera en su cuaderno… les dice que dibujen la figura geométrica que ellos deseen: un cuadrado, un rectángulo, un rombo... Luego, la profesora les pide que dividan esa figura en partes iguales, haciéndolo de manera libre y a continuación indica que de esas partes divididas tomen "las fracciones" que quieran: una, dos, etc…”

S4-P4C3

“... La profesora propone la siguiente situación: Tenemos cinco barras de chocolate que se reparten de la siguiente manera…

Una vez dibujado las gráficas en la pizarra, la profesora les pregunta qué pueden observar. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué pueden observar?
P4A29: Que son (fracciones) propias
Profesora: ¿Cuándo las fracciones son propias?...”

S6-P4C3

"… La profesora comienza la clase proponiendo un problema sobre fracciones: "Jorge ha notado que los paquetes de arroz de la marca que él prefiere pesan tres cuartos de kilo. Como su familia es numerosa ahora piensa comprar el arroz por sacos. ¿A cuántos paquetes de arroz de tres cuartos de kilo equivale un saco de veintidós kilos y medio de arroz?"…"

En algunas situaciones, el inicio de la clase parte de la resolución de problemas matemáticos propuestos como tareas para la casa y que permiten aplicar el conocimiento aprendido:

S5-P4C3

"… La clase se inicia con la corrección de cuatro problemas que se propusieron para la casa. La profesora saca a cuatro a alumnos a resolver los primeros cuatro problemas…"

En otras, son situaciones nuevas. Con la propuesta de estas actividades, los alumnos exploran la información que en ella se presenta a través de la guía de la docente. Nótese como en S1-P4C3, al indagar los usos de la hoja de papel, los alumnos exponen diferentes ideas, las cuales no satisfacen inmediatamente a la docente; sin embargo, permite la participación de los estudiantes con la finalidad de lograr capturar aquella idea ("*dividirla"*) que permita hilar con el tema en cuestión (fracciones). En el resto de sesiones, la referencia es más directa (puesto que las actividades también lo son).

A partir de estas actividades iniciales, la maestra extrae el conocimiento matemático en cuestión y se orienta a su tratamiento. En S1-P4C3, después de haber concluido que la hoja de papel se divide en partes, la docente propone dividir una hoja en tres partes iguales; en S2-C3P4, después de reconocer que las fracciones son propias, la maestra solicita que las comparen en base a las gráficas mostradas; en S3-P4C3, después de representar las fracciones obtenidas, la docente solicita que las comparen descontextualizando de las gráficas mostradas (a partir de la relación entre sus elementos: numerador y denominador). En S6-P4C3, a partir del problema planteado, la maestra intenta introducir (y desarrollar) la división de fracciones.

El estilo de enseñanza docente está marcado por la propuesta de actividades concretas (directas, contextualizadas en situaciones cotidianas o no) que permitan la participación activa y constante de los alumnos en la ejecución de las mismas, de tal manera que los propios estudiantes puedan hacer referencia al tema involucrado y lo usen según la propuesta de la actividad. Por la participación de los estudiantes (al menos de algunos), podemos observar que los temas comprendidos no son desconocidos para los alumnos; sin embargo, su tratamiento no es del todo aprehendido, generándose ciertas inconsistencias en su aplicación, al menos en ciertos alumnos.

S1-P4C3

"... La profesora le pide a toda la clase que observen los dos trabajos, en los que ambas alumnas han realizado tres dobleces y pregunta si tienen "las mismas partes". Se genera el siguiente diálogo:

Profesora; *¿Tendrán las mismas partes?*

Alumnos: *¡No!*

Profesora: *(dirigiéndose a P4A25) ¿Quién tendrá más, ella o tú?*

P4A25: *Yo*

Profesora: *¿Segura?*

P4A5: *Porque ella ha doblado en cuatro*

Profesora: *¿Cuatro partes y tiene más que P4A40?... ¿Será la misma cantidad de partes?*

Alumnos: *No*

Alumnos: *Sí*

P4A18: *Si es la misma hoja, del mismo tamaño... solo que está doblada de diferente forma…*

Profesora: *Si hacemos otro doblez a ambos trabajos, ¿qué pasaría?...*

…

P4A18: *Se obtiene el doble*

Profesora: *¿Qué pasa si P4A25 sigue su método? ¿Cuántas obtienes, P4A25?*

P4A25: *Cinco*

Profesora: *¿Por qué si dobla de una forma u otra tiene diferente número de partes?*

P4A18: *Porque P4A25 va de uno en uno y en el otro caso, va sobre los dobleces..."*

Frente a todo esto, la actitud de la docente es involucrar la participación de todos los alumnos de la clase de forma que cada uno pueda expresar diferentes opiniones al respecto. Estas ideas son resumidas por la docente a fin de precisarlas y reorientar su uso de forma más precisa.

S2-P4C3

“..

Profesora: *¿Qué indica 3/5?*

P4A24: *Que se divide entre 3 y se toma 5*

P4A26: *No, que se divide entre 5 y se toma 3*

Profesora: *Bien, divides entre cinco y tomas tres. Recuerden que el denominador indica las partes en que se divide la unidad y el numerador, las que se toman.*

P4A26, representa gráficamente lo que estás diciendo…”

S3-P4C3

“…

Profesora: *¿Cuándo una fracción es mayor que otra?*

P4A24: *Cuando el denominador es mayor que el numerador*

Profesora: *¿Pero con qué lo relaciono al decir esto: con la unidad o con el resto de fracciones?*

P4A24: *Con el resto de fracciones*

Profesora: *Lo que P4A24acaba de decir es con relación a la unidad. Vamos a ver si estamos en lo cierto. 3/8 es mayor que uno:* $\frac{3}{8} > 1$*. Esto es lo que dice P4A24. ¿Estará bien?...”*

Con las representaciones gráficas la maestra busca que los estudiantes comprendan el proceso de transformación de la situación y no solo operen porque “la regla” así lo expresa. En S2-P4C3 la docente hace referencia a la importancia del uso de representaciones gráficas para una mejor comprensión de las acciones que se ejecutan, aun cuando P4A18 considere que la regla es más práctica:

S2-P4C3

“…

Profesora: *Al dividir 15 entre 5 grupos me da los rectángulos que hay en cada grupo. Pero la fracción me dice 'tres quintos de quince', ¿qué quiere decir?*

P4A25: *Que cojo tres rectángulos*

Profesora: *¿Es correcto?, ¿tengo que coger solamente tres rectángulos?*

P4A14: *No, tengo que coger tres grupos porque cada parte es un grupo*

Profesora: *Y al coger tres grupos de tres cada uno, ¿cuántos rectángulos cojo?*

P4A14: *Nueve*

Profesora: *Por lo tanto, los 3/5 de 15 es...*

P4A14: *Nueve*

P4A18: *Pero porqué tanto problema, si con la regla sale igual*

Profesora: *Es correcto, pero demostramos que efectivamente "Tres quintos de quince es nueve" ya que divides quince en cinco grupo. Cada grupo tiene tres rectángulos. Luego coges tres grupos y hallas el número de rectángulos que representan los tres quintos de quince*

P4A18: *No sé, me parece que pierdes tiempo*

P4A1: *Pero así lo entiendes mejor.*

P4A18: *No sé. La regla te lo dice. Si ya la sabes…*

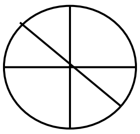
Profesora: *Pues ahora sabes comprobarlo y además la conocen todos tus compañeros…"*

De esta manera, el tratamiento de la información o la construcción del conocimiento, dentro de la gestión docente, se basan en la respuesta a situaciones específicas que los contiene y que generan dificultad en los alumnos.

S5-P4C3

"¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta?". Lucero propone el siguiente planteamiento y respuesta:

P4A19



$$1 = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Por su parte P4A12 plantea: $\frac{1}{6} + 5 = \frac{6}{6}$

Al preguntarles por sus respuestas, la primera alumna responde que "la torta es uno y la mitad es 3/6; luego se le resta 1/6 para que le dé 2/6". P4A12 no sabe qué responder ante su planteamiento…"

Dentro de la gestión docente, la resolución de problemas matemáticos tiene un rol importante, no solo como medio para contextualizar y desarrollar conocimiento matemático sino como recurso para que los alumnos resuelvan problemas matemáticos aplicando la matemática conocida.

S3-P4C3

"…

Profesora:	*En una fracción impropia también hay numerador y denominador, pero ¿cómo es el numerador?*
P4A14:	*Es mayor*
Profesora:	*¿Y el denominador?*
P4A18:	*Menor*
Profesora:	*Como es menor, no alcanza y debemos hacer otras unidades iguales hasta poder pintar las que piden… ¿Comprenden?*
Alumnos:	*¡Sí, señorita!*
Profesora:	*Me alegra que sean tan inteligentes. Vamos a plantearla como situación: Podemos decir que la mamá de Jesús tiene cinco queques. Si son nueve los visitantes, ¿qué puedo hacer para repartidos?*

En un principio los alumnos no responden. La clase se queda en silencio. La profesora llama a uno por uno para que dé alguna respuesta.

S5-P4C3

"… La profesora pide a cada uno de los alumnos que resolvieron en la pizarra que lean el enunciado de su problema. Uno de los problemas dice lo siguiente: "Carlos saca los 5/8 de su torta de chocolate, de los cuáles 3/8, por casualidad, se le cayeron al piso. ¿Qué porción de torta le quedó para repartir? El alumno realiza la siguiente resta: $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$*Los alumnos asienten cuando la profesora les pregunta si lo que ha hecho el alumno es correcto. Los demás problemas no ofrecieron dificultad para el planteamiento de la solución, aunque en algún caso hubo errores en la operación y en el planteamiento de la respuesta (P4A35 se olvidó de colocar el denominador, además de errar en el hallazgo de uno de los numeradores. Por su parte, Jesús corrigió el numerador, pero también olvidó el denominador)…"*

El tratamiento de problemas matemáticos no solo se da desde la propuesta docente, sino que esta propone que los alumnos también planteen sus propios problemas en base a una temática específica. No todos los problemas planteados se ajustan a las características de un tema; sin embargo, los alumnos plantean el suyo propio, unos más complejos que otros.

S6-P4C3

“…

Profesora: *Puede cada uno crear un problema de fracción…*

Algunos alumnos crean sus problemas considerando números naturales como datos numéricos. La profesora recalca que se tienen que utilizar fracciones.

P4A3: *Si en un saco de azúcar tiene 50 kilos, ¿cuántos de tres cuartos y un cuarto saldrán en los 50 kilos de azúcar?*

Profesora: *Podría ser ¿cuántas bolsitas de un tres cuartos y cuántas de un cuarto pueden ser?*

P4A14: *César lleva siempre a su casa 9/9 de azúcar. Si su mamá en dos días saca 5/2 ¿cuánta azúcar le va a quedar?*

Profesora: *¿Qué tipo de operación va a realizar?...”*

Tanto los problemas formulados por los estudiantes como los propuestos por la docente tienen una estructura tal que permite reconocer en ellos: una situación, unos datos, una pregunta…, una operación.

S5-P4C3

“Para hacer un pastel se necesita 2/8 de kilo de harina. ¿Cuánto se necesita para hacer 26 pasteles?”

S6-P4C3

“Jorge ha notado que los paquetes de arroz de la marca que él prefiere pesan tres cuartos de kilo. Como su familia es numerosa ahora piensa comprar el arroz por sacos. ¿A cuántos paquetes de arroz de tres cuartos de kilo equivale un saco de veintidós kilos y medio de arroz?”

S3-P4C3

"La mamá de P4A31 prepara tamales muy ricos. Tiene doce tamales. P4A31 llegó a casa con diez amigos y amigas. Si su mamá les invitó tamales a todos, con zarza y ají, ¿cómo los pudo repartir?, ¿le sobró o le faltó? ¿Cuánto? Escribe tres gráficas y representa en fracciones".

"En el cumpleaños de P4A39 hicieron tres fuentes de causa de pollo con mayonesa y aceitunas. Si llegaron quince invitados, ¿cuántas porciones fueron repartidas en cada fuente? Represента en un gráfico y fracción".

La diferencia entre los dos primeros y estos últimos está en la solución, ya que las primeras son directamente operativas y éstas básicamente gráficas con soluciones diversas, lo que se puede apreciar en las propuestas mostradas en el último problema, en el que se incluye no solo aspectos matemáticos sino contextuales.

S3-P4C3

"… La profesora deja las correcciones para después ya que la hora de clase llegó a su fin. Sin embargo les pregunta a los alumnos si es que los gráficos son correctos. En algunos casos opinan que quince quintos es el correcto porque "no sobra nada y se reparte todo"; mientras que otros opinan que con los otros se puede volver a repartir "por si quieran repetir". Se les pregunta qué pasaría si todos quieren repetir a lo que P4A25 dice que "de lo que sobra se pueden hacer quince partes, pero toca un poquito"

Profesora:	*¿En cuáles se puede hacer las quince partes iguales?*
P4A5:	*En todos menos en quince novenos*
Profesora:	*¿Por qué?*
P4A5:	*Porque sobran doce y es difícil*
P4A18:	*Lo que se puede hacer es que los últimos que repitan se partan entre dos…"*

Las actividades propuestas para la incursión y tratamiento del conocimiento matemático si bien no tuvieron la estructura de problemas matemáticos propiamente, sí generaron dificultad en los estudiantes. Nótese como en S1-P4C3, los alumnos interpretan de diferente manera la división de una unidad en tres partes o en tres partes iguales.

b) Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por la docente

Los métodos y estrategias de resolución de problemas usados por la docente dependen del planteamiento del mismo. No obstante cada uno de ellos sigue unas fases generales, desde su planteamiento hasta su resolución. Por ejemplo, al inicio de la sesión en S6-P4C3, la docente plantea el problema y genera un diálogo a partir de él, la primera cuestión se orienta a averiguar qué hay que hacer. Esta pregunta muestra una forma de concebir la actividad de resolución del problema y la parte principal del mismo. La actitud de la maestra no dista demasiado de la que muestran los alumnos al enfrentarse a la actividad matemática: la primera acción es identificar la operación a realizar; esto se evidencia en la respuesta que sigue a la pregunta: una división. Identificada la operación, la siguiente fase es construirla a partir de los datos del problema. La estrategia propuesta para resolver este problema es específica; sin embargo, la intención de la maestra es que los alumnos la comprendan a través de su construcción mediante acciones gráficas que permiten observar no solo el proceso sino el producto de la misma. Por ello, no solo recurre a estrategias gráficas sino a la simplificación de la situación ya que reformula la condición a fin de que con datos más simples se pueda observar mejor la transformación realizada.

S6-P4C3

"…

Profesora: *Hemos convertido el mixto en fracción. Ahora qué debemos hacer*

P4A19: *Dividir*

Profesora: *Lo que vamos a averiguar es cuántas veces está un medio en 45/2. Para ello, la operación que nos puede ayudar es la división. ¿Cuánto es* $\frac{45}{2} \div \frac{1}{2}$ *?*

P4A1: *Hay 45 veces un medio*

Profesora: *Por lo tanto* $\frac{45}{2} \div \frac{1}{2} = 45$

La profesora escribe en la pizarra la operación y el resultado recalcando que cuarenta y cinco medios entre un medio es cuarenta y cinco. Luego retoma la situación del problema.

Profesora: *Si en lugar de querer saber cuántos medios kilos hay en 45/2 necesitamos saber cuántos paquetes de tres cuartos hay, ¿qué debo hacer?*

P4A1: *Dividir 45/2 entre tres cuartos*

Profesora: *¿Cuánto será eso?*

P4A18: *Treinta…”*

Para ayudarle a resolver un problema a P4A19 en S5-P4C3, la maestra recurre a una fase previa, que en el apartado anterior no se evidencia: la identificación de los datos, a través de cuestiones que se orientan a preguntar por la situación y no por cómo tiene que resolverse. Nótese que la primera respuesta de la alumna se orienta a exponer la operación a realizar y no a evidenciar una comprensión verbal del problema planteado, lo que persiste al final del diálogo establecido.

S5-P4C3

“…

Profesora: *¿Cuántos kilogramos de harina se necesitan para hacer 26 pasteles?*

P4A19: *Hay que multiplicar 8 por 26 y dividirlo entre 2.*

Profesora: *¿Cuánto necesitas para hacer un pastel?*

P4A19: *2/8 kilo de harina*

Profesora: *¿Cuánto necesitarías para hacer dos pasteles?*

P4A19: *2/8 más 2/8*

Profesora: *¿Cuánto necesitarías para tres pasteles?*

P4A19: *2/8 más 2/8 más 2/8*

Profesora: *¿Qué operación tienes que hacer?*

P4A19: *Sumar*

Profesora: *¿Cuánto de harina necesitarías para hacer 26 pasteles?*

P4A19: *2/8 más 2/8 más 2/8 más…*

Profesora: *Sumas 2/8 hasta completar 26 veces".*

P4A19: *Sí*

Profesora: *¿Qué operación puede simplificar dicha suma?*

P4A19: *La multiplicación*

Profesora: *¿Qué multiplicarías?*

P4A19: *2/8 por 26*

La alumna multiplica correctamente y al preguntarle cuál es el resultado ella responde con acierto, pero no asocia a lo que le plantea el problema. La alumna vuelve a preguntar si su planteamiento es correcto o no…"

La actividad de resolución de problemas en S3-P4C3, es un tanto compleja pues la docente propone problemas que descarta antes de su solución. Nótese que en la misma sesión, la maestra recurre a este tipo de situaciones para contextualizar una fracción impropia, ya que esta no había sido comprendida por todos los alumnos en su tratamiento directo desde la fracción (nueve medios).

Hemos observado que la actividad de resolución de problemas no solo se circunscribe al tratamiento de los problemas matemáticos reconocidos como tales, sino a cuestiones que necesitan resolverse (matemáticamente) pero cuya solución no es fácilmente accesible al estudiante por la complejidad que percibe en el mismo. En S1-P4C3 la actividad que implicaba dividir una hoja de papel en tres partes iguales generó discusión entre los estudiantes, dado que las soluciones eran diversas. En este caso, la maestra recurre a exponer las soluciones de dos de las alumnas para que sean validadas por la clase.

S1-P4C3

Profesora; *¿Tendrán las mismas partes?*
Alumnos: *¡No!*
Profesora: *(dirigiéndose a P4A25) ¿Quién tendrá más, ella o tú?*
P4A25: *Yo*
Profesora: *¿Segura?*
P4A5: *Porque ella ha doblado en cuatro*
Profesora: *¿Cuatro partes y tiene más que P4A40?... ¿Será la misma cantidad de partes?*
Alumnos: *No*
Alumnos: *Sí*
P4A18: *Si es la misma hoja, del mismo tamaño... solo que está doblada de diferente forma…*
Profesora: *Si hacemos otro doblez a ambos trabajos, ¿qué pasaría?..."*
P4A18: *Se obtiene el doble*
Profesora: *¿Qué pasa si P4A25 sigue su método? ¿Cuántas obtienes, P4A25?*
P4A25: *Cinco*

Profesora: *¿Por qué si dobla de una forma u otra tiene diferente número de partes?*

P4A18: *Porque P4A25 va de uno en uno y en el otro caso, va sobre los dobleces...*

Profesora: *P4A40 forma mitades sobre mitades lo que le duplica la cantidad, sin embargo, P4A25 lo hace independientemente por eso es que siempre va aumentando de uno en uno… ¿Quién hizo la indicación correcta?*

P4A12: *P4A40…"*

Una estrategia que la maestra propone para resolver *ejercicios* (S2-P4C3) es la de plantear dos formas de resolver un mismo caso (fracción de un número): a través de la manipulación operativa (uso de la regla) y mediante la representación gráfica, de tal manera que al finalizar ambos procesos, se compruebe si, efectivamente, se llega al mismo producto.

c) Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes

Los estudiantes resuelven problemas y situaciones que se tornan difíciles. Hacemos la diferencia porque estas no tienen la estructura de un problema matemático escolar, pero generan dificultad al intentar actuar sobre ellas. Una situación difícil para algunos alumnos es dividir una hoja de papel en tres partes iguales (S1-P4C3) o representar nueve medios (S3-P4C3).

El método de resolución y las estrategias que aplican los alumnos son específicos. Se centran básicamente en dos: aplicar operaciones básicas y/o representar gráficamente. No obstante, este último es un recurso para comprender la manipulación simbólica de las cantidades involucradas en un problema. Por lo general, los alumnos aplican operaciones básicas para resolver los problemas propuestos (este es el objetivo final de sus propuestas), excepto si la maestra propone una representación gráfica propiamente como ocurre en S3-C3P4 al intentar que los alumnos comprendan la representación gráfica de una fracción impropia, la docente plantea un problema que pueda involucrarla.

S3-P4C3

"…

Profesora: … Vamos a plantearla como situación: Podemos decir que la mamá de P4A38 tiene cinco queques. Si son nueve los visitantes, ¿qué puedo hacer para repartidos?...

P4A18: Dividir entre dos cada queque

P4A1: Son nueve más P4A38, diez

Profesora: Buena observación, P4A1; pero pensemos que P4A38 no come de ese queque…

P4A19: Entonces, va a sobrar una parte

Profesora: Exacto, pero así se hace para que a cada uno le toque la mitad…"

Frente a un problema propuesto, los alumnos traducen el texto del problema usando simbología matemática. Luego de la lectura del problema, los estudiantes identifican la operación que se debe realizan y actúan en consecuencia (S5-C3P4).

La actividad personal de resolución de problemas se puede observar en la solución que los alumnos proponen independientemente, descontextualizados de una actividad que lo orienta a conocer por qué se aplica una operación (S6-C3P4), sin la guía docente. Al resolver problemas matemáticos, la influencia de la "palabra clave" o de la estructura del problema persiste cuando los planteamientos se rigen por ellas. En H7Q1 se plantea la siguiente pregunta: "Si me descuentan el 60% del precio de un pantalón y el 50% del precio de un jersey, ¿puedo saber qué porcentaje total me han descontado por las dos prendas? ¿Por qué?". Este problema tiene tres partes que se pueden resumir de la siguiente manera: a+b=c, en la que "a" representa el primer dato: 60%, "b" el segundo: 50% y "c" la pregunta resumida en una palabra "total". Hay un conector inclusivo entre el primer dato y el segundo. Los alumnos aprecian que no se puede saber el porcentaje total porque no se menciona el valor de cada prenda; sin embargo otro grupo responde afirmativamente, planteando una suma de los porcentajes en mención. Las palabras clave o la estructura del problema lo dividen en dos partes: la referida a los datos y la referida al contexto. Cuando el alumno se orienta por la primera, el contexto se anula; orientarse por la primera significa tenerla en cuenta independientemente de otros aspectos que la pueden condicionar.

"En el pantalón 60% y en el jersey 50%. Sí el 110%" (P4A20-H7Q1)

"Sí, sumamos los descuentos…" (P4A7-H7Q1)

“No, porque no me han dado el precio del pantalón, jersey” (P4A8-H7Q1)

“Pantalón Blusas
100 100% 80 100%
x 60% x= $\frac{60 \times 10}{100} = 6$ x 50% x= $\frac{80 \times 50}{100} = 40$
Te han descontado por las dos prendas el 100% porque son las dos rebajas de cada prenda” (P4A32-H7Q1).

Frente a la dificultad de este problema (no tener los precios de cada artículo), en el siguiente, H7Q3 en el que se plantea: “*Si por no pagar en la fecha indicada la cuota del club, a María le recargan el 10%, ¿cuánto tendría que pagar? Explica tu respuesta*”, los alumnos recurren a una estrategia: hacer visible el dato faltante; de esta manera, resuelven la situación en base a un dato concreto (el de la cuota); esta estrategia también fue aplicada por P4A32-H7Q3 en el problema anterior aunque con menos éxito. En este, los alumnos plantean una suma de porcentajes, pero solo en un caso (P4A31-H7Q3).

“Que si no paga 120 en la fecha indicada lo bajan el 10% y le dan 12 soles” (P4A26-H7Q3)

“Tendrá que pagar lo que tiene que pagar y el 10%...100+10=110” (P4A31-H7Q3)

El uso de estrategias específicas y generales es evidente; no obstante se aprecian estrategias concebidas desde otro ángulo: la reflexión. En este sentido, las estrategias pueden ser reflexivas e irreflexivas. Las primeras están en función del análisis que haya hecho el alumno antes de plantear una solución. Frente a las cuestiones planteadas, los alumnos responden directamente, dejan inconclusas sus propuestas o no suelen explicar su proceder. En el segundo caso, crean relaciones acertadas o diametralmente opuestas; en el tercero, traducen matemáticamente y desarrollan la operación planteada. Responder directamente, sin que la respuesta se ajuste a los requerimientos de la situación, no completar una solución o no responder al porqué puede ser un indicio de una aplicación de estrategias de manera irreflexiva:

“Sí, haciendo la regla de tres simple” (P4A16-H7Q1)

“Han descontado 30%” (P4A37-H7Q1)

“50%” (P4A11-H7Q2)

d) Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

El tratamiento de los problemas matemáticos en la gestión de la actividad matemática en las sesiones de clase de P4C3, permiten contextualizar el conocimiento matemático y aplicarlo para resolver aquellos. Los problemas matemáticos son un aspecto importante en la gestión de la enseñanza de la maestra quien recurre a estos para que los alumnos puedan capturar el conocimiento matemático manifiesto, trabajarlo y aplicarlo en la resolución de problemas.

Los temas desarrollados en la gestión de las clases no son conocimientos nuevos para muchos alumnos; como procedimiento aplicado (reglas), algunos son más hábiles para recordarlos y aplicarlos; sin embargo, la docente busca trascender el uso de la regla, de tal manera que los alumnos se den cuenta de cómo se llega a ella, analizar las cuestiones de forma que puedan establecer relaciones entre ellas.

S4-P4C3

"… La profesora les propone una suma de tres fracciones heterogéneas: $\frac{9}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}$ *Los alumnos sacan el mcm. Se llega a que es dieciséis. La profesora pregunta qué diferencia hay entre ese mcm. y el anterior (el obtenido al sumar un medio más un tercio). Los alumnos no saben qué responder. La profesora les pide que observen ambos casos y digan "algo" sobre los denominadores…*

P4A19:	*Dos por tres es seis*
P4A32:	*Dieciséis es uno de los denominadores*
Profesora:	*¿Cuándo puede ser el mínimo común múltiplo igual a uno de los denominadores?*
Alumnos:	*…*
Profesora:	*Seis no es ninguno de los denominadores y dieciséis es uno de ellos, ¿el menor o el mayor?*
P4A5:	*El mayor*
Profesora:	*¿Cuándo el mínimo común múltiplo es el denominador mayor?*
P4A18:	*Cuando, por ejemplo, multiplicas ocho por dos te da dieciséis y cuatro por cuatro te da dieciséis. Dieciséis es múltiplo de ocho y cuatro*
Profesora:	*¿Cuándo podemos decir que el mínimo común múltiplo es uno de los denominadores de las fracciones?*

P4A12: *Cuando son múltiplos.*

Profesora: *¿Dos y tres son múltiplos?*

Alumnos: *¡No! ...*

P4A18: *Para sacar el mínimo común múltiplo puedo multiplicar los denominadores o poner el mayor si el mayor es múltiplo de los otros…"*

A través del trabajo a partir de los problemas o las situaciones difíciles, los alumnos recurren al conocimiento matemático involucrado, lo exponen, lo comparten y tienen la posibilidad de reestructurarlo de acuerdo a las nuevas experiencias y situaciones vividas.

S6-P4C3

"…

Profesora: *Si en lugar de querer saber cuántos medios kilos hay en 45/2 necesitamos saber cuántos paquetes de tres cuartos hay, ¿qué debo hacer?*

P4A1: *Dividir 45/2 entre tres cuartos*

Profesora: *¿Cuánto será eso?*

P4A18: *Treinta*

Profesora: *¿Por qué?*

P4A18: *Porque 45/2 es 90/4. Ahora puedo quitar los denominadores y queda 90 entre 3 que es treinta*

Profesora: *¿Por qué quitas los denominadores?*

P4A18: *Porque en 45/2 entre un medio es 45. Se quitan los denominadores y 45x1 es 45.*

Profesora: *¿Están de acuerdo?*

Alumnos: *…*

…

Profesora: *Tenemos en un rectángulo un kilo de arroz. En un kilo, ¿cuántos paquetes de tres cuartos puedo hacer?*

Alumnos: *…*

Profesora: *P4A19, representa tres cuartos en este rectángulo*

P4A19 divide entre cuatro el rectángulo y pinta tres partes. Luego le pide que haga lo mismo en otro rectángulo y hace la misma pregunta. Le dice que haga lo mismo en otro rectángulo e igual. A partir de ello se genera el siguiente diálogo:

P4A19: *Se pueden hacer 3 paquetes de tres cuartos*

Profesora: *¿Con los cuartos que sobran se puede hacer otro paquete de tres cuartos?*

P4A19: *Sí*

Profesora: *En 3 kilos se pueden hacer cuatro paquetes de tres cuartos:* $3 \div \frac{3}{4} = 4$ *¿Cuántos paquetes de tres cuartos se harán con 6 kilos?...*

... Al final, la profesora tiene las siguientes operaciones:

$3 \div \frac{3}{4} = 4$ $6 \div \frac{3}{4} = 8$ $12 \div \frac{3}{4} = 16$ $24 \div \frac{3}{4} = 32$

La profesora les pide que observen las divisiones. Además añade lo que expresó P4A18: $\frac{45}{2} \div \frac{3}{4} = 30$ *y les dice que piensen cómo tienen que operar esos números para que el resultado sea el mismo.*

La situación anterior muestra una forma de dividir fracciones como la expuesta por el alumno y otra que es la trabajada por la docente a partir de la acción gráfica de la misma. Con la guía docente, los alumnos van expresando los conocimientos matemáticos involucrados en las situaciones o problemas planteados, lo cual permite que estos piensen sobre él y lo apliquen. Los alumnos adquieren el conocimiento a partir de casos concretos en los que es aplicado y a partir de los cuales van perfilándolos.

S1-P4C3

"...

Profesora: *¿Qué fracción del papel es cada parte coloreada?*

Alumnos: *Un octavo*

Alumnos: *Un doceavos*

Alumnos: *Tres doceavos*

Profesora: *¿Por qué un doceavos?*

P4A18: *doce doceavos... Se supone que todas están pintadas*

Profesora: *¿Qué parte vendría a ser cada una?*

P4A30: *Un doceavos*

Profesora: *¿Qué parte sería la mitad?*

P4A13: *Doce sextos… No, seis doceavos*

Profesora; *¿Si pinto todo?*

P4A1: *Seis sextos*

Profesora: *¿Si solo es uno?*

P4A5: *Un sexto*

Profesora: *¿Por qué seis sextos?*

P4A18: *Porque los seis están pintados y son seis*

Profesora: *¿P4A33, si es más de la mitad?*

P4A33: *Dos tercios… Dos de cada uno están pintados y son tres*

Profesora: *Porque está divido en tres y pinto dos… Si Luciana se quiere llevar esta parte del papel*[40]*, ¿qué fracción del papel se llevó Luciana?*

P4A5: *Seis sextos*

Profesora: *¿Qué parte se lleva la niña?*

P4A40: *Seis*

Profesora: *¿Qué fracción del papel se llevó Luciana?*

P4A5: *Seis sextos…"*

A partir de las intervenciones de los alumnos, la docente va reorientando el conocimiento; en embargo en algunos casos, esta puede resultar confusa o impuesta, con lo cual la idea no tiene la opción de ser correctamente aprehendida, ya que tropieza con otra previamente arraigada. Nótese cómo al preguntar por cómo se divide, los alumnos hacen referencia al mcm, luego la docente pregunta otra forma. Sacar mcm no es una forma de dividir. Por otro lado, la docente, al preguntar qué tipo de operación se hace, los alumnos responden distintas opciones, luego la maestra acepta la división sin hacer referencia a por qué descarta las otras. Finalmente, la docente plantea una división que no convence a los alumnos.

S5-P4C3

"…

Profesora: *¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta? (la profesora señala uno de los rectángulos que representan media torta).*

---

[40] La profesora coge un papel dividido en doce partes iguales de las cuales señala la mitad.

Alumnos: *Dos sextos*

Profesora: *1/6 por 2 nos da 2/6. Qué creen, ¿qué tipo de operación voy a hacer?*

Alumnos: *Resta... suma... dividir*[41].

Profesora: *Vamos a ver porqué dividir. ¿Cómo se divide?*

Alumnos: *Sacando mínimo común múltiplo.*

Profesora: *Otra forma*

P4A6: *De un sexto, el denominador se convierte en numerador y el numerador el denominador. Luego se multiplica.*

A partir de lo que Lucero ha mencionado, la profesora planeta la siguiente operación: $\frac{1}{2}\div\frac{6}{1}=\frac{6}{2}=3$ *La profesora pregunta a la clase porqué el resultado es tres. Se genera el siguiente diálogo:*

Profesora: *¿Por qué el resultado es tres?*

P4A14: *Porque tres entre uno es tres… No, tres por uno es tres*

Profesora: *El denominador pasó a ser numerador y el numerador pasó a ser denominador… ¿Esto soluciona mi problema o no?*

P4A6: *Un sexto no se convierte sino un medio. La respuesta sería dos sextos.*

La profesora vuelve a incidir en el gráfico, representando los sextos correspondientes, pero los alumnos insisten que es 2/6…”

Si bien la propuesta de gestión de clase de la docente favorece el intercambio de ideas matemáticas y la reorientación de las mismas, conduciendo al estudiante *en general* a participar de una reestructuración o adquisición del conocimiento, el estudiante *en particular* no siempre puede seguir la misma. Nótese cómo en S5-P4C3, P4A19 sigue el diálogo con la maestra sobre la estructuración de la solución al problema; no obstante, al final, la alumna aun no es consciente de la solución que ella ha planteado, puesto que pregunta, luego de seguir el proceso, si su planteamiento es correcto o no cuando lo que se ha explicado está en función de ello.

---

[41] Diferentes alumnos son los que responden.

En clases de P4C3, la experiencia en resolución de problemas es aceptable; sin embargo, su tratamiento es directo, anclado en la aplicabilidad de las operaciones o conocimiento matemático que le dan presencia. Se parte de que los alumnos de quinto grado "saben" resolver problemas matemáticos puesto que desde primer grado vienen haciéndolo; sin embargo, los problemas son diversos no solo en temáticas involucradas sino en complejidad de su planteamiento, lo que exige no solo saber una cuestión matemática ni asociarla a un problema concreto desde la temática u operación conocida sino desde el problema en sí. No se aprecia una gestión propia de la resolución de problemas más allá de su corrección o tratamiento directo de la información. La maestra dirige su atención directamente a lo que se tiene que hacer o a cantidades específicas a partir de las cuales se construye la operación pertinente.

S5-P4C3

"…

Profesora: ¿Cuántos kilogramos de harina se necesitan para hacer 26 pasteles?

P4A19: Hay que multiplicar 8 por 26 y dividirlo entre 2.

Profesora: ¿Cuánto necesitas para hacer un pastel?

P4A19: 2/8 kilo de harina

Profesora: ¿Cuánto necesitarías para hacer dos pasteles?

P4A19: 2/8 más 2/8…"

S6-P4C3

"…

Profesora: ¿Qué hay que hacer?

P4A36: Una división

Profesora: ¿Qué hay que dividir?

P4A36: Veintidós un medio entre tres cuartos

Profesora: ¿Qué hacemos con el mixto?

P4A10: Se convierte en fracción…"

Se aprende a resolver problemas con la práctica; su resolución en estos casos, está marcada por la guía directa de la docente quien, para problemas matemáticos escolares trabajados en clase, expone de manera aplicativa, con la participación de los alumnos, la forma de resolverlo. En S6-P4C3 la propuesta "*¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay* *en media torta?*" se orientó a su solución mediante una división de fracciones (pues su propuesta tenía ese fin). Sin embargo una reflexión previa de la misma pudo reorientar su planteamiento ya que capturar la división de un medio entre un sexto no fue fácil para los alumnos (en otros casos, no se logró). Los contextos para este tipo de cuestiones son menos concretos y por ende, se fuerzan más, con lo cual se fuerzan estrategias de resolución de problemas a diversos tipos de los mismos. No obstante, frente a problemas propuestos dentro del ámbito de la investigación, los alumnos tuvieron dificultad para resolverlos. Los problemas que enfrentaron fueron H7Q1 y H7Q3, ambos cuyo planteamiento no es típico en la enseñanza básica. En ambos, las soluciones o estrategias pertinentes son muy bajas, por lo que se considera que el alumno no tiene la suficiente capacidad para enfrentarse a los mismos.

4.1.5. Caso 5 (P5C4): "Observa y aplica"

Tabla 23. Datos generales del Caso 5

Características de su profesión	Tipo de colegio	Número de alumnos
Maestra de Educación Primaria. Gusta de enseñar matemática. Más de 10 años de experiencia docente.	Privado (Piura)	20

a) Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos

El inicio de clases de P5C4 se basa en una propuesta directa de la cuestión matemática que se va a tratar, descontextualizada de toda situación cotidiana, tratándose el contenido matemático a partir del análisis de las cuestiones planteadas directamente; en algunos casos (S1-P5C4), se apoya en representaciones gráficas y en otros (S5-P5C4) en planteamientos matemáticos "puros".

S1-P5C4

"La profesora pide representar en una hoja las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$; *los alumnos cogen una hoja blanca A4 y dividen según indica la profesora…*

… Una vez expuestas las diferentes fracciones, la profesora pregunta qué fracción indica más…"

S2-P5C4

“ La profesora escribe seis fracciones en la pizarra, a saber: $\frac{3}{7},\frac{6}{14},\frac{12}{28},\frac{21}{49},\frac{15}{35},\frac{19}{44}$ *, luego pregunta qué ven…”*

S3-P5C4

“La profesora inicia la sesión retomando el tema de la clase anterior: fracciones equivalentes y simplificación de fracciones. Para ello escribe en la pizarra:

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{32}{40}$$

Acto seguido les explica que si divide ocho y diez entre dos, le da como resultado cuatro quintos, que es la fracción inicial, pero que si multiplica por cuatro le da 32 y cuarenta, lo que se indica en la fracción siguiente. De esta manera: “pueden haber fracciones equivalentes menores o mayores a una dada”…”

S4-P5C4

“Profesora: Chicos, ustedes saben cómo se halla el área de las figuras geométricas….

Alumnos: Sí

P5A13: Yo no me acuerdo de todas….

Profesora: ¿Cómo se halla el área del cuadrado?

P5A8: Lado al cuadrado

Profesora: ¿Y del rectángulo?

P5A6: Base por altura

Profesora: ¿Cómo se halla el área del triángulo?

P5A7: Base por altura sobre dos

Profesora: ¿El área del rombo?

Alumnos: ….

Profesora: También las hemos visto, pero ahora no es necesario recordarla.

Acto seguido, la maestra les dice que estas fórmulas les servirán para hallar el área de otras figuras: “figuras compuestas”…”

S5-P5C4

"La maestra les propone resolver problemas de áreas de figuras compuestas (continuando la clase anterior). Los alumnos resuelven los problemas propuestos…"

S6-P5C4

"La sesión de hoy es sobre ecuaciones, la profesora les propone una ecuación a partir de la cual reconocen sus miembros:

$$x + 68 = 145$$

La profesora les pregunta qué es lo que observan…"

Las propuestas directas de la información permiten su tratamiento manipulativo y "exacto". La docente busca que los estudiantes reflexionen sobre un conocimiento matemático específico que ya conocen. No hay tema completamente nuevo, sino retomar la cuestión matemática y trabajar con ella solamente, sin hacer referencia a un dato "cotidiano" que la acompañe. Se evidencia que las primeras respuestas se relacionan con el tema en cuestión de manera que los alumnos (al menos los que responden) tienen conocimiento de las cuestiones.

S6-P5C4

"…

Profesora: ¿Qué observan?

Alumnos: Ecuación

Profesora: ¿Por qué será ecuación?

P5A15: Porque hay letras

P5A17: En una ecuación hay una incógnita…"

A partir de la propuesta inicial, la maestra genera un diálogo con los estudiantes sobre las cuestiones planteadas que permiten que los alumnos expresen sus conocimientos, establezcan relaciones directas entre ellos, las expongan y generen ciertas ideas al respecto; estas suelen ser las mismas, aunque pueden producir cierto conflicto como ocurre en S3-P5C4.

S1-P5C4

"Profesora: Vamos a decir algunos casos para poder hallar… dos tercios y cuatro doceavos (a medida que menciona las fracciones, las escribe en la pizarra)

P5A1: Veinticuatro

Profesora: ¿Otro?

P5A13: Doce

Profesora: Siete tercios y cuatro quinceavos… ¿Cuál será el denominador común?

P5A7: Quince

Profesora: ¿ $\frac{1}{6}$ *y* $\frac{2}{36}$?

P5A19: Treinta y seis

Profesora: ¿ $\frac{1}{6}$ *y* $\frac{2}{20}$?

P5A2: Veinte

Profesora: ¿Por qué?

(Silencio)

Profesora: Porque veinte es múltiplo de cuatro[42]

P5A2: Porque todos son múltiplos de un número

Profesora: Caso especial: si el número es múltiplo del otro, el común denominador va a ser…

P5A6: El mayor…"

S3-P5C4

"…

Profesora: Vamos a hallar las fracciones equivalentes a cinco sextos

P5A8: Diez doceavos

P5A6: Quince dieciochoavos

P5A15: Veinte sobre veinticuatro

P5A19: Veinticinco sobre treinta

P5A7: Treinta, treinta y seisavos

Profesora: Observen que todas estas fracciones son equivalentes de esta primera, ¿ $\frac{10}{12}$ *será equivalente a* $\frac{15}{18}$?

(Silencio)

Profesora: ¿Qué opinan?

---

[42] La profesora supuso que era un cuarto en lugar de un sexto como estaba planteado y actuó bajo ese criterio.

P5A13: *Es confuso*

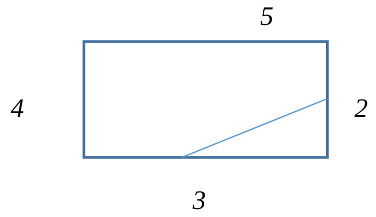
Profesora: *¿Por qué?*

P5A13: *Porque diez por ningún número da quince…”*

La propuesta docente busca que los estudiantes analicen el conocimiento matemático como tal y luego puedan aplicarlo a situaciones concretas que suelen ser de la misma naturaleza. Para los casos S1-P5C4, S2-P5C4 y S3-P5C4 las propuestas son iguales (se trabaja directamente con la cuestión), para S6-P5C4 el planteamiento es distinto porque la docente contextualiza el conocimiento matemático al trabajar con él. S4-P5C4 y S5-P5C4 trabaja el tema de áreas de figuras planas que contextualiza en este campo. Las situaciones planteadas para ello suelen ser directas también.

S4-P5C4

“Luego propone imágenes en las que no se les pide hallar el área de toda la figura sino de parte de ella. La siguiente es una de las figuras compuestas propuesta y en la que los alumnos reconocieron un triángulo y un rectángulo:



Los alumnos preguntan a la profesora cómo hacer. No obstante, P5A8 dice que cree saber cómo y muestra a la maestra su trabajo…”

El tratamiento de los problemas matemáticos propiamente dentro de la gestión docente se realiza luego de haber adquirido y trabajado la cuestión matemática. No se observa trabajo en aula sobre resolución de problemas estructurados, excepto cuando el conocimiento se aplica en el mismo. Nótese como en S4-P5C4 se inicia el trabajo con la propuesta de hallar áreas de figuras planas. El planteamiento de la situación es directo; sin embargo, tiene características de un problema matemático escolar sobre áreas. La cuestión en S6-P5C4 es similar. Los problemas matemáticos son expuestos directamente, más no de manera literal, pues surgen del quehacer matemático del momento.

El planteamiento de problemas es potestad de la docente; sin embargo, propone a los alumnos esta actividad a fin de poder contextualizar el conocimiento matemático trabajado. Los alumnos plantean los problemas siguiendo la estructura del original, aquel que la profesora usó para contextualizar el tema.

S6-P5C4

“Profesora: Vamos a ver otra situación, ustedes piensen en situaciones como la que les he planteado y la vamos a convertir en fracción…

Tiempo para que los alumnos piensen en la situación que van a proponer.

Profesora: A ver P5A6… ¿Otra situación?

P5A6: El número de mis canicas disminuido en 45 es igual a 28

Profesora: Cómo represento: ¿x-45 o 45-x? ¿Cuántas son mis canicas?... Esas son…

Alumnos: ¡Equis!...”

b) Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por la docente

Los métodos y estrategias de resolución de problemas aplicados por la docente siguen una estructura fija. Estas ideas se pueden extraer a partir de S4-P5C4, S5-P4C5 y S6-P5C4 pues estas sesiones trabajan en base a actividades que pueden considerarse problemas matemáticos (aunque no en su formato real). En S4-P5C4, la docente plantea la actividad exponiendo al estudiante lo que tiene que hacer (hallar áreas de figuras complejas), no hay texto en sus planteamientos, solo la imagen necesaria para ello. El trabajo de resolución es dirigido por la maestra, quien a través del diálogo con los alumnos va cuestionándolos de tal manera que sus respuestas conduzcan a la acción necesaria.

S4-P5C4

“La profesora retoma el diálogo:

Profesora: ¿Ustedes ya conocen el área del cuadrado?

Alumnos: ¡Sí!

Profesora: ¿Y del rectángulo?

Alumnos: ¡Sí!

P5A15: Si lo combino: un rectángulo y un cuadrado… Esto sería… Puede ser esta figura

Profesora: ¿Por qué puede ser así?

P5A9: Puede completar

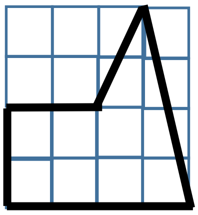
Profesora: ¿Qué figura es?

P5A9: Un cuadrado y un rectángulo…”

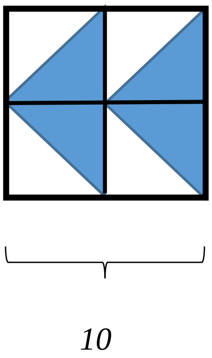
La estrategia empleada para resolver la cuestión anterior es la descomposición de la figura compleja en otras conocidas de tal manera que a través de la suma de estas se pueda obtener el área de la primera. Los siguientes problemas sobre áreas de figuras complejas (S5-P5C4) tienden a plantearse con la finalidad de mostrar otras estrategias de solución que la maestra hace evidentes.

S5-P5C4

"Acto seguido, la profesora propone la siguiente imagen para hallar el área de la figura e indica que cada cuadrado mide un centímetro cuadrado:



La profesora les expresa que "hay figuras que tengo que resolver haciendo traslados" e inmediatamente les propone la siguiente figura, indicando que la figura está dividida en cuatro partes iguales y cada lado del cuadrado mide 10 cm:



Este último planteamiento intenta convertir la imagen en una figura simple, mientras que el previo, no; a diferencia de los anteriores, los datos no se exponen directamente sino a partir de la medida de la unidad cuadrada en la que está inmersa la figura. Este problema puede generar más de una imagen aunque un mismo resultado.

El planteamiento de solución de la propuesta de S6-P5C4 tiene la misma estructura. El método empleado por la docente parte del análisis de la situación a partir de los datos de la cuestión, a fin de poder plantear la traducción necesaria (en el caso de las figuras, parte del conocimiento de las áreas de figuras simples). Las estrategias de solución expuestas en el desarrollo de cada problema son específicas para los casos expuestos. No obstante los alumnos siguen diferentes vías y no siempre todas las soluciones son iguales.

S5-P5C4

“Profesora: ¿Qué haces?

P5A14: Hallo el área de la figura

Profesora: ¿Qué figura es?

P5A14: Un cuadrado… Un rectángulo

Profesora: ¿Cuánto tiene de base?

P5A14: Seis

Profesora: ¿Y de alto?

P5A14: Siete

Profesora: ¿Será un cuadrado?

P5A15: No, un rectángulo

Profesora: ¿Cómo se halla el área del rectángulo?

P5A14: El área del rectángulo es seis por siete. Cuarenta y dos centímetros cuadrados.

(Silencio)

P5A14: Y luego hallo el área del rectángulo que queda

Profesora: (dirigiéndose a la clase). ¿Lo ha dicho bien, P5A14? ¿Qué piensan ustedes?

(Silencio)

Profesora: Primero vas a hallar…

P5A5: Lo que falta

Profesora: Está muy bien la estrategia que han empleado ustedes… La parte que no está sombreada forma un rectángulo, entonces vamos a hallar el área de la parte no sombreada y eso nos da…

P5A5: Treinta

Profesora: Treinta es la parte sombreada… ¿Cómo obtengo la parte sombreada?

P5A8: Doce

Profesora: Resto a cuarenta y dos, doce y obtengo treinta centímetros cuadrados…”

Considerando que la actividad de resolución de problemas no se circunscribe a la actividad realizada frente a problemas matemáticos escolares planteados para tal fin, una de las actividades que generó conflicto fue la que inicia S1-P5C4 al proponer dividir una hoja de papel según diferentes fracciones. La actividad no habría pasado a mayores si las fracciones elegidas hubiesen seguido el mismo patrón.

S1-P5C4

"La profesora pide representar en una hoja las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$*; los alumnos cogen una hoja blanca A4 y dividen según indica la profesora. Al querer representar un sexto, no saben cómo hacerlo (los alumnos doblan en la misma dirección; algunos cogen otra hoja), por lo que la profesora les pide que dividan en un octavo. Se genera el siguiente diálogo:*

Profesora: ¿Qué dificultad han encontrado?

P5A8: No es fácil representar un sexto

Profesora: Es más fácil dividir en cantidades pares que impares.

La profesora les pide que pinten la fracción indicada en cada caso; luego que lo expongan en la pizarra. Los alumnos salen a la pizarra y exponen el trabajo realizado…"

Frente a esta situación de conflicto para algunos alumnos, no se generó un trabajo a partir de ello, por lo que la propuesta de trabajo con problemas matemáticos se circunscribe a problemas aplicativos.

c) Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes

Al enfrentarse a los problemas matemáticos, los alumnos usan los conocimientos aprendidos. A través de las sesiones no se pueden observar las estrategias que aplica el alumno directamente porque en clase este proceso está dirigido por la acción de la docente, por ello siguen las estrategias que la maestra les transmite. En el caso de S6-P5C4 esta es conocida pues los alumnos saben cómo se resuelve una ecuación (no todos, pero al menos los que participan directamente). En S4-P5C4 y S5-P5C4 el planteamiento es similar. Para estos problemas, los alumnos recurren a las estrategias propuestas por la docente: dividir la imagen compleja en figuras simples y hallar el área de estas y trasladar figuras para formar figuras simples. En el segundo problema propuesto en S5-P5C4, la alumna que lo resuelve utiliza como estrategia el completar figuras.

S5-P5C4

“La profesora observa el trabajo de los alumnos deteniéndose en P5A12 pues observa que la alumna ha formado un triángulo a partir de la misma.; luego se acerca a la pizarra y pregunta a P5A12 sobre su solución. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: P5A12, ¿qué puedes hacer, qué has formado?
P5A12: Un triángulo
Profesora: ¿Y qué puedes hacer?
P5A12: Hallar su área
Profesora: ¿Cómo?
(Silencio)
Profesora: ¿Cuál es el área del triángulo?
P5A12: Base por altura…. Sobre dos
Profesora: ¿Cuál es la base de ese triángulo?
P5A12: Cuatro… ¡No!... Sí, cuatro
Profesora: ¿Y la altura?
P5A12: Cuatro
Profesora: ¿Cuál es el área?
P5A12: Dieciséis
Profesora: El área del triángulo es cuatro por cuatro…
Alumnos: Sobre dos
Profesora: Y eso da…
P5A12: Ocho
Profesora: ¿Y el otro triángulo?
P5A12: También es ocho
Profesora: ¿Y ahora qué haces?
P5A12: Tengo que hallar el área de la parte sombreada
Profesora: ¿Cómo?
P5A12: Se puede partir por la mitad
Profesora: ¿Y qué formas?
P5A12: Un triángulo
Profesora: ¿Cuánto es su área?
P5A12: Ocho
Profesora: ¿Por qué?
P5A12: Porque es igual al otro

Profesora: *¿Y el otro triángulo?*

P5A12: *Ocho*

Profesora: *¿Cuánto mide la parte sombreada?*

P5A12: *Ocho por ocho*

Profesora: *¿Por qué?*

(Silencio)

Profesora: *¿Cuánto mide cada triángulo?*

(Silencio)

Profesora: *¿Cuánto mide la parte sombreada?*

P5A12: *Dieciséis*

En este caso, se puede observar que el razonamiento de *P5A12* no es tan rápido como el de la maestra; sin embargo logra identificar las áreas halladas (aun cuando en algún momento equivoque las operaciones). Aunque hizo un trabajo doble (al completar la figura), esta estrategia le dio seguridad en la solución de la cuestión.

Durante el desarrollo de las observaciones, los alumnos se han enfrentado a otros problemas en los que se evidencia el empleo de diversas estrategias para resolverlos.

Ante problemas que involucran números, los alumnos ven la necesidad de operar con ellos; esto ocurre en H7Q1 (*Si me descuentan el 60% del precio de un pantalón y el 50% del precio de un jersey, ¿puedo saber qué porcentaje total me han descontado por las dos prendas? ¿Por qué?*), en el que P5A3-H7Q1 y P5A13-H7Q1 manipulan las cantidades varias veces en una misma operación, y en H14Q1 (*"¿Cuántas botellas de* $\frac{3}{4}$ *de litro se necesitan para envasar 600 litros de refresco? Indica cómo harías para saberlo y explica tu respuesta"*) con P5A19-H14Q1.

P5A3-H7Q1:

$$\left(60+50-\frac{60(50)}{100}\right)$$

$$=100-30=80\%$$

P5A13-H7Q1:

$$\left(60+50-\frac{60-50}{100}\right)\%$$

$$[110-30]\%$$

$$80\%$$

P5A19-H14Q1

“Sumo todos los 70% aproximadamente… 800+425+175=1406… 425+175=600”

Frente a ello, también podemos observar que las cantidades son abstractas para los estudiantes en el sentido que la obtención de un resultado es suficiente para concluir el procedimiento.

Otros resolutores tienden a responder directamente, sin ejecutar ninguna operación. En algunos casos, porque se concibe la situación como desbordante (no hay una relación entre el porcentaje total y el porcentaje de recarga) o porque las cantidades usadas son fácilmente manipulables:

- “Mucho” (P5A4-H7Q3)
- “50 soles y 5 soles” (P5A10-H7Q3)

Otra de las estrategias usadas es asignar una cantidad específica al dato desconocido. Esta estrategia se aplica en H7Q3 que es otro problema sobre porcentajes (*“Si por no pagar en la fecha indicada la cuota del club, a María le recargan el 10%, ¿cuánto tendría que pagar? Explica tu respuesta”*), frente a este, la estrategia empleada es asignar un valor a un dato desconocido.

En otra ocasión, los alumnos recurren a las aproximaciones para responder a la cuestión:

“Menos de 600 botellas” (P5A15-H14Q1)

“1200 aproximadamente” (P5A19-H14Q1)

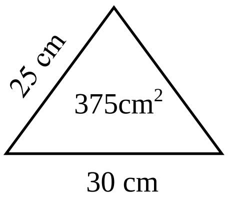
Centrándonos en los problemas propiamente, para resolver H14Q1 los alumnos aplican una división directa, como estrategia específica más usada, o una multiplicación. En el primer caso, a pesar de obtener el resultado esperado, P5A17 y P5A20 plantean la división con los elementos cambiados. En otros casos, usan aproximaciones, sin ejecutar ninguna operación (P5A15 y P5A19).

El problema H14Q2 (*“En un centro educativo de 800 alumnos aprueban el curso en junio 425 alumnos y en septiembre 175. Calcula el porcentaje total de aprobados y explica por qué eliges ese procedimiento”*) se diferencia de H14Q1 (botellas) por la matemática involucrada y por la cantidad de operaciones que hay que realizar para desarrollarlo. Este es un problema que los alumnos enfrentan con menor éxito que el primero, las soluciones en este caso se quedan incompletas no logrando resolver la segunda parte del mismo.

El problema de las dos jarras fue resuelto por la mayoría de estos alumnos aplicando estrategias operativas, la recurrencia a una estrategia gráfica no conllevó el planteamiento de ninguna solución (aunque permitió precisar los datos del mismo).

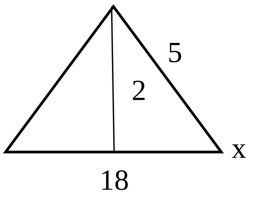
Finalmente, para problemas sobre áreas, los alumnos tienden a aplicar la fórmula requerida; no obstante, algunos recurren a la cuadriculación de la superficie (o figura geométrica), lo que conlleva valerse de aproximaciones para responder (P5A17-H12Q2), ya que en un triángulo no se obtiene cuadrados enteros únicamente. Aunque P5A9-H12Q2 planteó como estrategia subrayar, lo más probable es que se refiera a cuadricular. Por otro lado, la falta de dominio del tema, dirige la estrategia a sumar los datos para hallar el área. Por otro lado, en la resolución de este problema, los alumnos en general miden los lados de la figura geométrica; no obstante, P5A8-H12Q2 y P5A20-H12Q2 involucran cantidades que no necesariamente se ajustan a la medida de la imagen; en el primer caso, guardan relación respecto a la base y altura de la misma y en el segundo no; además usa un dato que no es correcto.

P5A8-H12Q2



30x
25
150
60
375

P5A20-H12Q2



4
18x
5
90

90 | 2
10 45
(0)

d) Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

Los problemas matemáticos en el aula forman parte de las actividades que la maestra propone como medios para contextualizar el conocimiento matemático (S6-P5C4) y aplicarlo en situaciones nuevas (S4-P5C4 y S5-P5C4). No es una propuesta permanente en la gestión del conocimiento matemático, pero sí un recurso que la docente usa en determinadas ocasiones a fin de poder aplicar correctamente el tema a tratar.

S6-P5C4
“Profesora: A ver P5A6… ¿Otra situación?
P5A6: El número de mis canicas disminuido en 45 es igual a 28
Profesora: Cómo represento: ¿x-45 o 45-x? ¿Cuántas son mis canicas?... Esas son…
Alumnos: ¡Equis!
Profesora: Disminuido…
P5A15: equis menos cuarenta y cinco
Profesora: ¿Cuántas canicas tengo?
(Silencio)
Profesora: ¿Qué representa el número de mis canicas?
P5A14: La equis… la incógnita
Profesora: x=45+28. ¿Por qué habría sumado?
P5A10: Porque así se resuelve
Profesora: ¿Cómo verificar?
P5A8: Restando 73 menos 45
Profesora: Bien, vamos a resolver otro caso…”

El tratamiento de la información con miras a que el alumno adquiera el conocimiento matemático es directo puesto que este se presenta solo al estudiante a fin de trabajarlo desde la simbología misma. En la propuesta metodológica, la maestra plantea un trabajo previo o posterior del alumno con el objeto a estudiar. En el primer caso, a partir de una exploración de los conocimientos de los alumnos, la maestra pregunta sobre el tema en cuestión. Nótese como en S1-P5C4, la docente cuestiona directamente a los alumnos sobre qué fracción es mayor y cuál menor; luego busca que esa comparación sea a partir de las fracciones independientemente de la gráfica que la representa (relacionando sus términos) para posteriormente introducir las diferentes formas de comparar fracciones que los alumnos conocen. Cabe recordar que la información con la que el alumno interactúa no es un conocimiento nuevo; no obstante, el objetivo de la maestra es reflexionar sobre él, establecer relaciones.

En esta interacción entre maestra y alumnos con el fin de reflexionar sobre el conocimiento matemático, las respuestas de los alumnos son diversas y no siempre se ajustan a lo que la maestra plantea.

S2-P5C4

“Profesora: *Primero: el proceso de simplificación. Segundo: productos cruzados.* $\frac{20}{42}$ *es equivalente a* $\frac{4}{6}$ *porque al simplificar me da cuatro sextos. ¿Será equivalente a cuatro séptimos?*

P5A6: *No*

Profesora: *¿Por qué?*

P5A6: *No, porque no es reducible*

Profesora: *Sí es reducible… ¿Quién me dice?*

P5A1: *Porque no tiene ningún divisor*

Profesora: *Sí tienen, pero no tiene divisor común. ¿Alguien más?*

Alumnos: *….*

Profesora: *Simplifiquen la siguiente fracción:* $\frac{180}{270}$ *… ¿Qué le puedo sacar?*

P5A16: *Noventava*

P5A7: *Décima”*

El trabajo directo con el conocimiento nuevo recorta el tiempo de uso para el mismo, ya que al ser básicamente un conocimiento expuesto este ha de ser capturado en su totalidad por el alumno, lo cual no necesariamente es así.

En la exploración de los conocimientos, los alumnos exponen la forma cómo conciben los mismos, en base a lo que generalmente se hace al involucrarlos.

De esta manera, la capacidad de resolución de problemas se trabaja en el aula brindándole al estudiante la posibilidad de resolver problemas matemáticos de manera limitada y circunscrita al conocimiento matemático; la maestra propone los problemas matemáticos con el fin de lograr una mejor aprehensión del conocimiento matemático. La capacidad de resolución de problemas está en relación a la captación del conocimiento matemático en el mismo y al planteamiento (traducción matemático) para resolverlo.

Si bien, el número de alumnos que no resuelven los problemas es para tener en cuenta, de acuerdo a las soluciones propuestas por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos que se le plantearon en el transcurso de la investigación, los alumnos muestran más capacidad para captar los problemas H7Q1, H7Q3 y H14Q1 y brindar una respuesta acorde a sus características; en los dos primeros casos, el darse cuenta de los datos faltantes y el asignar un valor al dato desconocido, fue fundamental para ello. Los problemas H12Q2, H14Q2 y H14Q3 no lograron mejores resultados. Cabe resaltar que al igual que H7Q1 y H7Q3, el problema H12Q2 no presenta toda la información requerida; sin embargo, en algunos casos no se asignó la misma y se respondió de manera general. H14Q2 y H14Q3 incluyen varias etapas en su resolución además de otros factores que los diferencian (H14Q2 es más típico de la enseñanza escolar mientras que H14Q3, no).

4.1.6. Caso 6 (P6C5): “Conoce a detalle y aplica”

Tabla 24. Datos generales del Caso 6

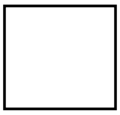
Características de su profesión	Tipo de colegio	Número de alumnos
Maestra de Educación Secundaria. Especialidad Matemática y Física. Gusta de enseñar matemática. 5 años de experiencia docente.	Privado (Piura)	18

a) Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos

El desarrollo de las clases de P6C5 es principalmente operativo, trabaja a partir de la manipulación numérica en base a las operaciones que las involucran. A través de las seis clases analizadas observamos distintas maneras de introducir un tema: a partir de una exploración de ideas generales a través de las cuales se llega a la característica deseada que es la que se va a desarrollar (S1-P6C5), en base a una operación aritmética con fracciones que desarrolla paso a paso (S2-P6C5), partiendo de un problema de áreas (S3-P6C5), de la aplicación de propiedades (S4-P6C5) o de la relación entre operaciones (S5-P6C5) y mediante una situación problemática (S3-P6C5 y S6-P6C5). Todas ellas centradas en un tratamiento minucioso del conocimiento matemático implicado.

S1-P6C5

“Acto seguido, dibuja un cuadrado en la pizarra y pregunta:



Profesora: ¿Qué características presenta un cuadrado? ¿Cuántos lados tiene?... ”

S2-P6C5

“Al iniciar la clase, la profesora plantea la operación[43] *que se indica, a propósito de una actividad propuesta para casa*[44]*, generándose el siguiente diálogo:*

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$$

Profesora: *¿Cuántas fracciones hay?*

Alumnos: *Cuatro*

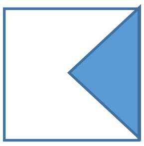
Alumnos: *Dos*

Profesora: *¿Esta línea, qué operación simboliza? (refiriéndose a la que separa cada suma de fracciones).*

Alumnos: *Una división…”*

S3-P6C5

“La clase comienza con la propuesta de la profesora de revisar la tarea asignada, centrándose en la solución “del siguiente problema: Halla el área sombreada en la siguiente figura”:



$$1\frac{1}{3}$$

A partir de la gráfica, algunos alumnos manifiestan que la medida del lado es un cuarto, mientras que otros dicen que es cuatro tercios. La profesora cuestiona ambos datos…”

“La profesora finaliza la corrección de tarea y escribe en la pizarra “Potenciación y radicación de fracciones”… “lo que hacemos con naturales lo retomamos con fracciones”… “hoy vamos a aprender a resolver operaciones aplicando las propiedades de la potenciación y radicación”. La profesora pregunta por alguna de estas propiedades que los alumnos van mencionando: “Cuando se expone a cero, el resultado es uno”, “cuando se expone a uno el resultado es el mismo número”. La profesora añade que las propiedades son útiles para operar. Acto seguido les propone la siguiente situación:

---

[43] La docente nombra como operación esta propuesta.

[44] Los alumnos traen las actividades resueltas de casa.

> *“Betania ordena su estante de la siguiente manera:*
> *½ para libros*
> *½ de ½ para cuadernos*
> *½ de ½ de ½ para sus muñecas*
> *La pregunta es: ¿qué espacio del estante destina a las muñecas?...”*

S4-P6C5

“La profesora retoma la operación de la sesión anterior[45] *(que seguía en la pizarra) y pregunta si las fracciones son iguales o diferentes. Los alumnos contestan que son iguales. A continuación, la maestra guía la participación de los estudiantes:*

Profesora: *Tenemos que un medio lo multiplicamos tres veces y un medio lo multiplicamos dos veces. De esta manera tenemos:*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

Profesora: *¿Cómo son las bases?...”*

S5-P6C5

“La profesora escribe en la pizarra: “Radicación de fracciones” e indica a los alumnos que el tema de hoy es ese. Acto seguido escribe lo siguiente:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\Rightarrow\sqrt{\frac{25}{9}}=$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{}{}\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{}{}}=\frac{2}{3}$$

Luego se genera el siguiente diálogo:

Profesora: *¿Cuál es la diferencia?...”*

S6-P6C5

“La sesión de hoy se inicia exponiendo el tema: números decimales, para ello, la profesora les dice que es un tema que conocen (del año pasado), pero que van a ver “un poco más profundo”.

Acto seguido, les dice que van a suponer que algunos de sus compañeros han reunido una cantidad de soles:

P6A8: *19,8 (diecinueve, coma, ocho)*

---

[45] La operación de la clase anterior es la siguiente: $\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=$

Kike: *19,09 (diecinueve, coma, cero nueve)*

Renzo: *19,14 (diecinueve, coma, catorce)*

Luego pregunta quién gana a quién…"

El tratamiento minucioso del conocimiento matemático parte de las actividades propuestas a partir de las cuales, la docente va desarticulando cada elemento a fin de poder llegar al producto final. En el proceso, cada paso dado se trataba pausadamente. En S1-P6C5, por ejemplo, para trabajar el área del rectángulo, la maestra parte de un análisis de la figura hasta llegar a sus lados y a partir de ahí seguir el proceso. En S2-P6C5 a propósito de la operación con fracciones, la maestra cuestiona la misma, paso a paso, identificando cada elemento que la compone. En S3-P6C5 al enfrentarse al área de la figura expuesta, analiza el cuadrado que la involucra, entre otras.

S1-P6C5

"Profesora: *¿Cuánto miden sus ángulos?*

Alumno: *Un metro*

Profesora: *No… ¿Cómo se llama el ángulo?*

P6A13: *Recto…*

Profesora: *El ángulo recto tiene una medida…*

P6A12: *90°.*

Profesora: *¿Qué significa ese ángulo recto?...*

P6A8: *Que mide noventa grados*

Profesora: *Sí, pero también que esta recta y esta recta son perpendiculares (señala la figura)…"*

Profesora: *Miren, la pizarra es un modelo de rectángulo. Miren la línea de la base y de arriba (señala el lado perpendicular), ¿medirán igual?*

Alumno: *Diferentes*

Profesora: *¿La superior y la inferior?*

Alumno: *Igual*

Profesora: *Sí, miden igual y son paralelas; es decir, que nunca se llegan a chocar ni intersectar… Se llaman paralelas…"*

S2-P6C5

"Profesora: *¿Cuántas fracciones hay?*

Alumnos: *Cuatro*

Alumnos: *Dos*

Profesora: *¿Esta línea, qué operación simboliza? (refiriéndose a la que separa cada suma de fracciones).*

Alumnos: *Una división*

Alumna: *Miss, sale siete octavos en todo*

Profesora: *Ahora veremos… ¿Qué hay en la parte superior?*

Alumnos: *Una suma de fracciones*

Profesora: *¿Y en la inferior?*

Alumnos: *También suma de fracciones*

Profesora: *Muy bien, suma de fracciones… ¿Qué hay que hacer para sumar?...”*

La propuesta docente exige una dirección vertical de la actividad matemática; si bien las actividades propuestas se trabajan en clase, es la docente quien lleva el mando en el desarrollo de las mismas. Nótese cómo en los diálogos anteriores, es la maestra quien dirige las preguntas. Parte, efectivamente de situaciones que los alumnos conocen (o han desarrollado) por ello sus interrogantes son más directas, esperando que las respuestas también lo sean.

La docente transmite el conocimiento y lo sintetiza usando un lenguaje más acorde con la actividad matemática desarrollada. Las actividades le permiten introducir temas específicos; no obstante, los alumnos participan en cuanto aportan con sus conocimientos al desarrollo de la actividad. En ninguno de los casos se percibe que todos los alumnos desconozcan por completo los temas tratados, por el contrario, los alumnos conocen sobre la matemática involucrada; por ello, su tratamiento en clase es más detallista. En S2-P6C5 la maestra parte de dos actividades que se plantearon para casa con lo cual los alumnos las han realizado, lo que implicaría una participación más fluida en la actividad; no es una actividad de corrección propiamente, sino de trabajo a detalle de cada paso dado, de tal manera que se haga evidente el contenido matemático implícito y se pueda trabajar o explicar directamente, recurriendo a ejemplos concretos.

S2-P6C5

“La profesora escribe en la pizarra lo siguiente: Calcula A x B, si:

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \qquad B=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}$$

…

Profesora: *Me dice que A equivale a uno sobre uno más un tercio o uno dividido entre uno más un tercio; y B es dos sobre uno menos un tercio*

(Silencio)

Profesora: *… Debemos reducir A que equivale a uno sobre uno más tres o uno dividido…*

(Silencio)

Profesora: *El otro día vimos que un número multiplicado por su inverso nos daba uno. Por ejemplo, tres cuartos por cuatro tercios es uno (la profesora escribe la operación en la pizarra). Esto se llama el inverso multiplicativo. Si me piden el inverso multiplicativo de cinco cuartos…*

P6A8: *Cuatro quintos*

Profesora: *Si me piden de un tercio…*

P6A12: *Tres*

Profesora: *De diez*

P6A9: *Diez*

P6A11: *Uno sobre diez*

Profesora: *Un décimo. El diez tiene denominador uno, por lo tanto, cuando hallas el inverso multiplicativo se transforma en un décimo… ¿El inverso multiplicativo de veinticinco?*

P6A12: *Un veinticincoavos.*

La nueva información la expone directamente la maestra, la que no es amplia, sino concreta. Nótese cómo en S1-P6C5 los alumnos hallan el perímetro, aunque no se hace explícita la forma cómo se accedió al mismo, la docente hace referencia a una forma fácil (suma) y otra que se puede expresar a partir de la primera (multiplicación), al llegar a esta forma es la docente que establece la relación directa entre la expresión “nueva” y el resultado de la operación.

La propuesta didáctica estructura cada sesión por actividades concretas (el tratamiento de una operación, de un gráfico, de una cantidad) que permiten trabajar de principio a fin una cuestión matemática, para después aplicarla a otros casos, con algunas variantes incluidas. En S1-P6C5, la docente inicia el trabajo de la multiplicación de fracciones con el perímetro del cuadrado, luego incorpora el del rectángulo y finalmente el del hexágono; los dos primeros implican casos distintos de multiplicación de fracciones y el último similar al primero pero con características particulares.

Respecto al tratamiento de los problemas matemáticos a partir de la gestión docente, la profesora recurre a ellos como medios para contextualizar y desarrollar el conocimiento matemático. El trabajo minucioso de la actividad de resolución de problemas está en función del contenido que involucra las situaciones; se parte del análisis de la situación propuesta en base a aspectos que son de interés para el desarrollo del problema.

S3-P6C5

“A partir de la situación, se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué ordena?

Alumnos: Muñecas

Alumnos: Libros

P6A12: Libros, cuadernos y muñecas

Profesora: ¿Cómo?

P6A3: La mitad para libros

Profesora: ¿Qué significa la mitad para libros?

P6A3: Que la mitad del estante es para libros

Profesora: ¿Y la mitad de la mitad para cuadernos?

P6A12: Que la mitad la partes

Profesora: Vamos a representar en la pizarra lo que están diciendo…”

S6-P6C5

“Profesora: ¿Quién gana?

P6A7: P6A8 y P6A5

Profesora: ¿Quién reúne menos?

P6A7: P6A3

Profesora: ¿Cuál iría primero?

P6A5: ¿del menor al mayor?...P6A3

Profesora: ¿Por qué?
P6A5: Porque es el menor
Profesora: ¿Por qué?
P6A5: Porque está con cero coma nueve…”

Las actividades planteadas son de dos tipos básicamente; centradas en la manipulación directa de las cantidades a partir de operaciones que las involucran o de situaciones, cotidianas o no, que las incluyen. En este caso, las situaciones pueden ser simples (transmitidas con poca información) o más elaboradas (con un texto mejor estructurado). Estas últimas tienden a identificarse con los problemas que los alumnos suelen enfrentar en la práctica individual o en las evaluaciones cuya estructura permite identificar el proceso o algoritmo de solución.

b) Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por la docente

A través de la propuesta metodológica de enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas, la docente plantea una forma específica de enfrentarse a ellos. A partir del problema del armario, del que propone hallar el área de la parte sombreada o de la situación sobre decimales, la docente transmite una forma de trabajar los problemas (o situaciones) matemáticos que inicia con el planteamiento del problema (y su posterior lectura) para continuar con la desarticulación de la información transmitida a través de preguntas preparadas para ello en función de las cuestiones matemáticas. No hay un reflexionar sobre la situación en general sino en función de las cuestiones matemáticas involucradas. El hecho de plantearse dentro de un contexto de “actividad matemática” partiendo de la declaración del objetivo de la clase, las preguntas se dirigen a ello. No obstante, esta conducta también se observa en los alumnos quienes frente a los problemas en cuestión se dirigen a hurgar en los datos cuantitativos de la misma. La tendencia directa a ello está en la pregunta que acompaña al problema, que suele dirigirse a indagar sobre cuestiones de ese tipo ya que los problemas propuestos son de este tipo, principalmente.

A partir del análisis de la situación, la docente extrae las cuestiones matemáticas involucradas y trabaja a partir de ellas; luego, se desarrolla la operación estructurada resolviéndose el problema. Como los problemas en las clases analizadas son medios para construir el conocimiento, el retorno al problema no es explícito; si no que se sobreentiende. Con ello, el problema es resuelto al resolver la operación que lo traduce.

En el proceso de traducción y resolución del problema, se observa que la docente recurre a estrategias distintas. En el primer problema sobre el área de la parte sombreada, si bien el centro de la actividad es la manipulación operativa de fracciones, antes de llegar a ello la maestra transforma el problema en uno más sencillo, cambiando los datos numéricos por números naturales de manera que los alumnos puedan comprender mejor el proceso seguido y aplicarlo posteriormente con el tratamiento de las fracciones.

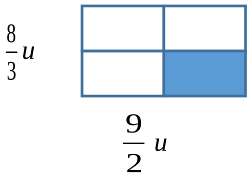
S3-P6C5

“Profesora: *¿La medida del lado es un cuarto o cuatro tercios?...*
Profesora: *La parte sombreada representa un cuarto del total, ¿qué significa la palabra “un cuarto del total”?*
P6A13: *El cuarto de toda la figura*
Profesora: *Imaginemos que este cuadrado tiene por área… Si su lado es ocho, ¿cómo determinados el área del cuadrado?*
P6A12: *Multiplicando lado por lado*
Profesora: *¿Cuánto es?*
P6A12: *Sesenta y cuatro metros cuadrados*
Profesora: *Si nos dicen que tiene sesenta y cuatro metros cuadrados (64cm^2) y yo lo divido así, en cuatro partes (la profesora hace cuatro partes como sigue)…”*

En la siguiente cuestión planteada, sobre áreas de figuras sombreadas, la maestra propone hallar el área de un rectángulo cuyas medidas está en fracciones. La estrategia que propone en este caso, que hace referencia a la manipulación numérica, es la de simplificar las fracciones de esta manera y la operación siguiente se torna más sencilla. La propuesta de trabajo operativa le permite introducir el mismo estilo de enseñanza al trabajar con *problemas*.

S3-P6C5

"La siguiente tarea presenta la siguiente imagen y pide hallar la parte sombreada:



Antes de proceder a resolver, la profesora manifiesta que no es difícil "aunque los números parezcan complicados" y añade: "Tiene que aplicar una operación y simplificar. La profesora pide a Leslie salir a la pizarra a resolver la tarea, teniendo en cuenta las medidas de los lados del rectángulo grande…"

Al tratar el tema de las potencias partiendo de la situación del armario, la maestra recurre a la representación gráfica de tal manera que los alumnos puedan visualizar la parte de la unidad requerida y enunciarla correctamente.

S3-P6C5

"La profesora dibuja un rectángulo que divide por la mitad; en una de ellas, escribe "libros"; luego manifiesta que sobra una mitad en la que va a colocar los cuadernos, pero que no puede usar todo porque dice que es "la mitad de la mitad". Luego pregunta por las muñecas:

Profesora: *¿Qué espacio usa para sus muñecas?*
César: *Un medio de un medio de un medio.*
Profesora: *Esto sería de esta manera (divide el gráfico y escribe muñecas)… ¿Sobraría espacio?*
Alumnos: *Un espacio*
Profesora: *¿Cómo sería ese espacio, porque este es un espacio y este también? (refiriéndose a dos espacios distintos de la gráfica)*
P6A11: *Un cuarto*
P6A8: *Un octavo*

Profesora: *No lo olviden que es respecto del total. Cada vez que multiplicamos las fracciones varias veces el exponente es importante. ¿Qué es mayor: un medio al cubo o un medio al cuadrado? (la profesora escribe en la pizarra)…"*

El problema sobre los números decimales busca que los alumnos comparen cantidades a partir de ellos. La estrategia que emplea la docente para el tratamiento de esta información es a partir de la transformación de los números decimales en números enteros. Nótese que los alumnos (que participan) muestran conocimiento sobre el tema en cuestión; no obstante, la docente transmite a través de la situación una forma práctica de comparar números decimales. La estrategia aplicada para responder la pregunta está en función de la manipulación numérica de las cantidades involucradas.

c) Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes

En clase de P6C5, los alumnos se enfrentan a los problemas que la maestra propone y con la ayuda de la misma; es decir, en ellas no se puede apreciar directamente qué estrategias usan los alumnos para resolver problemas puesto que siguen los pasos y estrategias que la docente expone. Incluso, en S1-P6C5, al resolver el perímetro del cuadrado, los alumnos (al menos uno) enuncia el resultado; sin embargo, no se cuestiona sobre el proceso de solución o qué hizo para hallarlo puesto que la maestra se orientó a exponer las dos formas de resolver la cuestión: sumando cuatro veces la medida del lado o multiplicando dicha medida por cuatro. Las clases tienen una orientación aplicativa que busca brindar información al alumno sobre los conocimientos matemáticos involucrados en la misma que, incluso, los alumnos conocen. Básicamente lo que la maestra propone es precisar el trabajo del alumno adelantando acciones que deberían seguir y que hace evidente o proponiendo nuevas a partir de las expuestas.

Las y los alumnos se han enfrentado a problemas matemáticos propuestos desde la investigación que han resuelto individualmente, después del trabajo con el tema en cuestión (aunque no inmediatamente).

Para responder los alumnos leen el problema y trabajan a partir de los datos del mismo. En sus soluciones se aprecia el trabajo directo con los datos a través de la manipulación numérica de los mismas, así como también la recurrencia a una estructuración de los datos en base a las cuestiones que transmite el problema; este aspecto sería una referencia a la exploración de la situación, previo a la traducción matemática de la misma y a la ejecución de las operaciones. También, se aprecia como fase final la expresión de la respuesta a la pregunta o simplemente la exposición del resultado dando por finalizada la actividad de resolución de problemas. La fase de verificación o validación se aprecia en casos puntuales.

El problema H7Q1[46] es sobre porcentajes. No es un problema escolar común pues no incluye todos los datos a partir de los cuales se debe trabajar ni tampoco lo hace indirectamente (es decir, no se obtienen a partir de la manipulación de los datos expuestos). Frente a este problema, los alumnos tienden a operar las cantidades directamente sin tener en cuenta la información que falta u otros aspectos.

P6A5

“Sí, porque sumo el porcentaje”

P6A14

“$\frac{60}{50}\times 100$”

Para responder a H7Q3[47] los alumnos recurren a otra estrategia: asignar un valor al dato desconocido que no fue empleado en el problema anterior, a partir de ello los alumnos responden el problema. Al asignar un valor al dato desconocido los alumnos plantean la traducción matemática al caso y resuelven; sin embargo, otros lo hacen directamente ya que los valores asignados son fácilmente manipulables. Cabe indicar que en este caso, los alumnos también suman los porcentajes; la comprobación se da a partir del valor asignado al dato desconocido. Es decir, que mediante esta acción, algunos alumnos validan su respuesta.

P6A1-H7Q3

“Tendría que pagar más. Por ejemplo, si la cuota es de 50 soles el recargo sería 5 soles en total pagaría 55 soles”.

P6A13-H7Q3

“El $\underbrace{100\%}_{200}+\underbrace{\text{el } 10}_{20}\%=110\%=110\%+10\%=$

220 soles pagaría”

---

[46] Si me descuentan el 60% del precio de un pantalón y el 50% del precio de un jersey, ¿puedo saber qué porcentaje total me han descontado por las dos prendas? ¿Por qué?

[47] Si por no pagar en la fecha indicada la cuota del club, a María le recargan el 10%, ¿cuánto tendría que pagar? Explica tu respuesta

La solución a H12Q2[48] se inicia con la manipulación de la imagen para obtener información sobre ella. Para resolver el problema, los alumnos identifican las medidas de la imagen y las traducen a lenguaje matemático. Por lo general, los alumnos miden los datos necesarios; sin embargo, también lo valoran como una incógnita. La traducción se basa en la fórmula conocida para hallar el área de un triángulo; sin embargo, la falta de dominio de la situación hace que recurran a la suma de los lados, confundiendo el perímetro y el área de una figura.

P6A7-H12Q2

"… 5cm+5cm+6cm

16cm

Sumando cuanto medían sus lados".

P6A15-H12Q2

"… $\frac{b \cdot h}{2}$ Multipliqué la base por la altura y la dividí entre 2"

P6A18-H12Q2

"x + x + x =3x"

En H14Q1[49] se observa la manipulación operativa de las cantidades, ya sea de manera correcta o no. Los alumnos frente a este problema recurren al trabajo directo con las cantidades propuestas o a la transformación de las mismas de tal manera que la operación se dé entre otro tipo de cantidades.

P6A9-H14Q1

$$\frac{\frac{600}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{2400}{3} = 800 \text{ botellas}$$

P6A6-H14Q1

"Convierto $\frac{3}{4}$ en un número decimal. Los divido (le pongo o si hay un número natural) los divido y fin.

---

[48] Halla la superficie del siguiente triángulo. Explica cómo lo has hecho. (se muestra un triángulo isósceles)

[49] ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se necesitan para envasar 600 litros de refresco? Indica cómo harías para saberlo y explica tu respuesta

$3:4=0,75\rightarrow600:0,75=800\rightarrow\frac{3}{4}$”

La siguiente cuestión, H14Q2[50], se resuelve a través de una regla de tres simple en base a los porcentajes, previa identificación de la cantidad total de alumnos aprobados, a través de una suma, previo hallazgo de los porcentajes parciales, o a través del procedimiento directo para hallar porcentajes ($\frac{a}{b}\times100$, donde “a” es el total de aprobados y “b” el total de alumnos). Cabe resaltar que si bien la respuesta (como producto) de P6A3-H14Q2 es correcta, su procedimiento no se ajusta a la misma; este indica una manipulación incorrecta de las cantidades que evidencia falta de comprensión de la misma; la alumna recurre a manipular las cantidades forzando el resultado “adecuado”.

P6A3-H14Q2

425+175=600

$$\begin{array}{ccc}800 & \times & 100\\ 600 & & x\end{array} = \qquad \frac{600\cancel{0}\cancel{0}}{8\cancel{0}\cancel{0}} = 75$$

75% aprobaron el curso

P6A7-H14Q2

800 ——— 100%
425 ——— x

800 ——— 100%
175 ——— x

$$\frac{1\cancel{0}\cancel{0}\text{x}175}{8\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{175}{8}$$

21.875% en setiembre

$$\frac{1\cancel{0}\cancel{0}\text{x}425}{8\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{425}{8}$$

53.125% en junio

$$\begin{array}{r}{}^{111}\\ 53.125+\\ \underline{21.875}\\ 75.000\%\end{array}$$

75% en
Julio y Setiembre

P6A14-H14Q2

$$\text{Total de alumnos} = \frac{600}{800}\ \text{x}\ 100$$

$$\frac{300}{4} = 75\%$$

El problema H14Q3[51] difiere de los anteriores pues no se considera un problema matemático “Rutinario”. Para resolverlo, el alumno recurre a una secuenciación de

---

[50] En un centro educativo de 800 alumnos aprueban el curso en junio 425 alumnos y en septiembre 175. Calcula el porcentaje total de aprobados y explica por qué eliges ese procedimiento

[51] Se quiere pasar de un depósito a otro siete litros de agua y solo disponemos de dos jarras: una de 3 litros y otra de 5 litros (ni los depósitos ni las jarras no son graduados). ¿Cómo pasarías, exactamente, siete litros de un depósito a otro?

acciones que realiza en base a las medidas de la jarra. La misma la expresa a través de la secuencia de acciones propiamente (de manera textual o con apoyo, o no, de la gráfica respectiva) o mediante una secuencia de operaciones aditivas.

P6A10-H14Q3

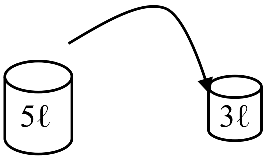
"Coloco 2 veces en la jarra de 3 ℓ y la vas vaciando en la jarra de 5 ℓ y me va a sobrar 1 ℓ, este lo saco y luego lleno 2 jarras de 3 ℓ.

3+3=6

6-5=1

3+3+1=7 ℓ"

P6A4-H14Q3



1° Llenar la jarra de 5ℓ y vierto hasta llenar la de 3 quedándome 2 litros en la jarra de 5 y ya medí 2 litros.

2° Vuelvo a llenar la jarra de 5ℓ vacía y ya medí 5ℓ.

3° Los 2ℓ del 1° paso más los 5ℓ del segundo obtengo 7ℓ.

En la resolución se observan alumnos que no consideran todas las condiciones de la situación:

P6A6-H14Q3

"En la jarra de 3 litros solo mido 2 litros de agua y la otra jarra mide 2 litros con lo cual sumo los 7 litros"

d) Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

Como podemos observar, la docente parte del tratamiento directo del conocimiento matemático a partir de actividades concretas asociadas a operaciones básicas (S2-P6C5 u otras), la manipulación de las cantidades (S6-P6C5) o contextualizando la misma en situaciones que los contienen (S3-P6C5 y S6-P6C5). De ello se desprende que la adquisición del conocimiento se dé de manera directa a través de la exposición de la docente. No obstante, no se puede considerar su estilo como un modo expositivo puro pues la participación del alumno es fundamental en el desarrollo del mismo; sin embargo, las cuestiones puntuales son transmitidas por la docente. Esta tendencia a la enseñanza se traslada a la gestión de los problemas matemáticos.

Los problemas matemáticos en clase son el fundamento para el desarrollo de los temas matemáticos involucrados de tal manera que el tratamiento de aquellos está en función de estos ya que permiten contextualizarlos. No obstante, a partir de esta gestión, los alumnos participan de una forma de resolver problemas matemáticos que está asociado a un trabajo minucioso de la matemática involucrada, centrando su resolución en este aspecto. Al estar asociados a una contextualización directa del conocimiento matemático, los problemas propuestos tienen una estructura que facilita su reconocimiento a fin de extraerlo del mismo; de ahí que los problemas propuestos tengan una estructura simple y directa.

No se aprecia un trabajo centrado en la resolución de un problema como tal en el que se haga evidente el tránsito por cada fase de resolución.

La capacidad para resolver problemas de los alumnos está en función del tipo de problemas a los que se enfrenta. Podemos observar que los alumnos son más capaces de resolver problemas que exponen directamente los datos y son resolubles a partir de operaciones matemáticas conocidas (H7Q3, H14Q1 y H14Q2), mientras que para los problemas que no contienen todos los datos o no tienen un proceso directo conocido tienen más dificultad (H7Q1, H12Q2 y H14Q3). Si bien, H7Q3 no presenta todos los datos, el éxito en su solución se debió a la asignación de un valor al dato desconocido. En las cuestiones en las que no hay un éxito en la resolución las mismas necesita un trabajo menos directo; es decir, implica que los alumnos se cuestionen, exploren, encuentren patrones, demuestren capacidad para persistir en la búsqueda de una solución posible además de retroceder sobre lo que ha hecho; ha de comprender que puede haber varias maneras de encontrar una respuesta; en este sentido, los alumnos ante la pregunta *"¿Piensas que una niña y/o niño que no conoce ninguna operación concreta para hallar la superficie de un rectángulo, puede descubrir cuánto mide la superficie de ese rectángulo? Explica tu respuesta*", responden en base al conocimiento que deben tener para poder resolver la cuestión; es decir, es posible si se tiene el conocimiento necesario. En pocos casos plantean otras formas que no sean a partir del conocimiento de la fórmula.

> "Rp. Pienso que sí, ya que si no tiene fórmulas haría uso de la regla" (P6A3-H12Q1)
>
> "No porque si no sabe lo básico no va a saber lo más difícil" (P6A5-H12Q1)

“Tal vez lo haga por tanteo pero eso no es lo correcto porque con tanteo no es mejor” (P6A7-H12Q1)

“No porque para hallar la superficie necesariamente tiene que aplicar una fórmula” (P6A8-H12Q1)

“Multiplicando el largo x el ancho” (P6A10-H12Q1)

“Sí porque ya lo sabe hacer” (P6A12-H12Q1)

“No, si no sabe cómo podría responder” (P6A13-H12Q1)

“Conoce la medida de $1m^2$ y comienza a medir en el tamaño del rectángulo y cuenta cuántos cuadraditos hay” (P6A15-H12Q1)

“Jamás lo va a hacer porque no sabe cómo hacerlo” (P6A16-H12Q1)

“No, porque si no sabe la fórmula que es lo principal y que de ahí se saca el resultado, no puede” (P6A17-H12Q1)

4.2 Hallazgos del análisis horizontal: afinidades y diferencias

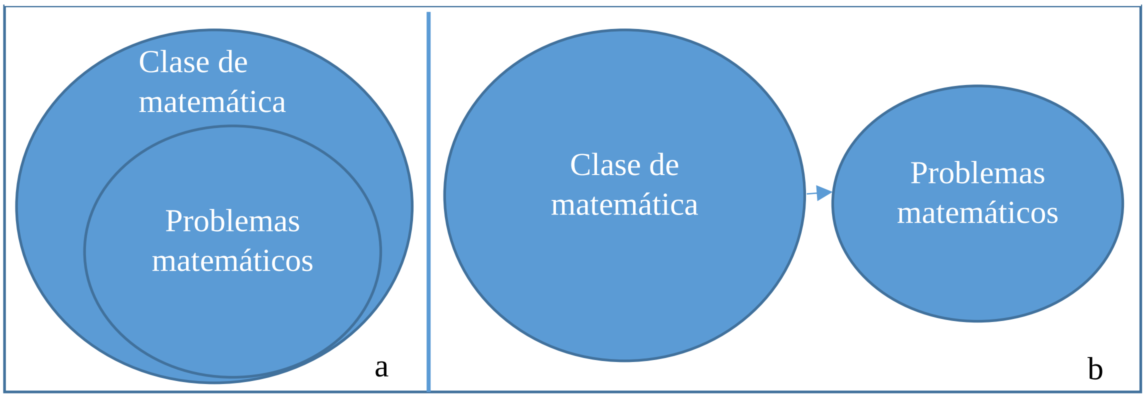
A través del análisis horizontal de los seis casos descritos podemos identificar afinidades y diferencias entre los casos en las cuatro líneas interpretativas, que son:

a) Estilo de enseñanza docente y tratamiento de los problemas matemáticos
b) Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos usados por la docente
c) Métodos y estrategias de resolución de problemas usados por las y los estudiantes
d) Tratamiento de problemas matemáticos – construcción de conocimiento matemático – capacidad de resolución de problemas

Respecto al estilo de enseñanza y el tratamiento de los problemas matemáticos dentro de la misma observamos que los problemas matemáticos escolares no aparecen necesariamente como generadores de conocimiento matemático sino como aplicadores. Chamorro (2005), menciona tres tipos de problemas que se pueden proponer a los estudiantes: aquellos que permiten afianzar la idea de problema, los que se orientan a examinar el nivel de conocimiento matemático dado y los que ayudan a introducir nuevo conocimientos matemáticos.

En el caso 1, estos problemas no aparecen sino después, como tarea o como actividad para evaluar. Los problemas matemáticos escolares, propiamente, no forman parte del desarrollo de la clase y cuando lo hacen, la actividad del docente se traslada a un segundo plano (el alumnado resuelve solo el problema). El estilo de enseñanza de este docente coloca los problemas matemáticos escolares en un plano posterior a la enseñanza del nuevo conocimiento; este se construye a través de situaciones más generales y reales que lo absorben (la matemática está en la vida diaria, directamente). No obstante, en los casos siguientes (2 – 6), sí hay una mayor incidencia de los problemas matemáticos escolares y de la actividad del alumno frente a ellos dentro de la clase: la matemática está en estos problemas y las y los alumnos ha de ser capaces de resolverlos aplicando el conocimiento matemático pertinente. La siguiente figura nos ayuda a visualizar las ideas expuestas:

Figura 6. *Relación de los problemas matemáticos escolares con la clase de matemática*

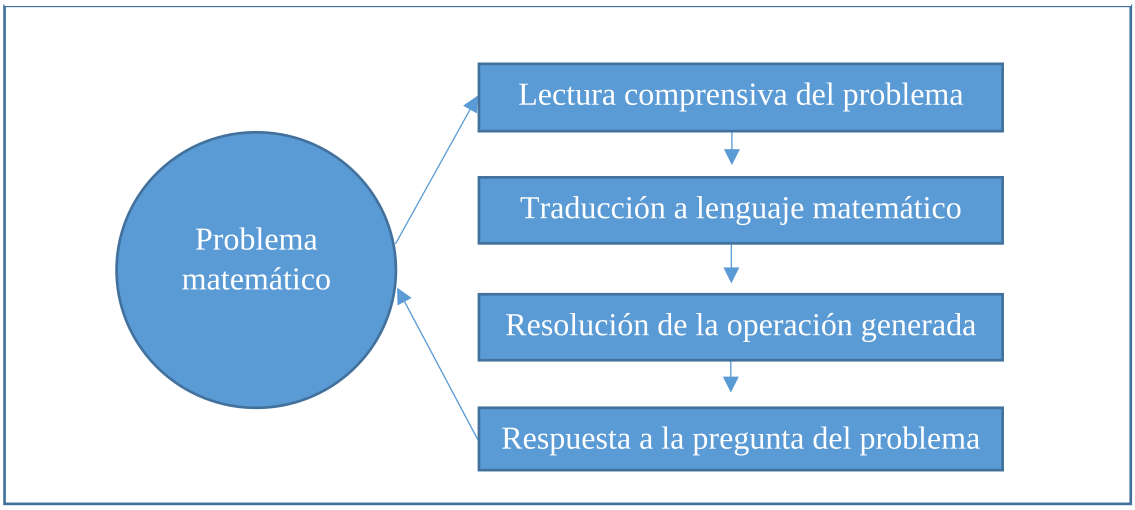


Podemos apreciar en ambas imágenes que los problemas matemáticos son independientes de la clase, aun cuando están relacionados. Con ello queremos expresar que si bien, los problemas forman parte importante de la enseñanza de las matemáticas en el aula no se compenetran con la misma. La clase de matemática trasciende el problema matemático para volver a él. El concepto de problema matemático se asocia a una situación concreta que facilita el reconocimiento de la información y contenido matemáticos, ya sea para su identificación como conocimiento nuevo, o para su aplicación como conocimiento adquirido.

En cualquiera de los casos estudiados, se observa que las y los alumnos de quinto grado tienen experiencia adquirida a través de los años escolares, enfrentándose a problemas matemáticos, con características comunes, pues los conocen y actúan frente a ello. Se deja ver que el alumnado sabe cómo proceder frente a un problema, ya que en ningún caso se apreció que alguno de ellos o de ellas preguntara qué es. Su idea de problema matemático está asociada a una actividad en la que se aplica directamente conocimiento matemático. Las dificultades están principalmente en hallar la solución correcta. De ahí que, aun cuando se propongan al inicio, durante, al final o fuera de la clase, los alumnos tienen una idea establecida sobre qué tipo de actividad realizan frente a un problema matemático y actúan en consecuencia.

Los problemas matemáticos planteados en clase son, en su mayoría, del tipo estructurado: problemas cuya propuesta conlleva a una solución directa. Houdement (2013, citado por Reséndiz, Block y Carrillo, 2017) describe estos problemas como textos que exponen o describen una situación real, en el que algunos de sus elementos (datos) están cuantificados y otros no, pero que pueden cuantificarse con la ayuda del texto del problema, lo cual requiere el uso de técnicas aritméticas asociadas a las cuatro operaciones, reglas diversas, entre otras, o el cálculo rápido. El método o camino promovido implica, secuencialmente: comprender el problema, relacionar los datos mediante operaciones matemáticas (según sea el caso), resolver la operación y responder. Los problemas matemáticos propuestos en clase tienden a ser resueltos mediante las operaciones aritméticas básicas (o fórmulas estandarizadas); es decir, aquello que los resuelve directamente. Se espera que la primera fase, de lectura comprensiva, no ofrezca dificultad al estudiante, por la naturaleza estructurada del problema que busca que el alumno comprenda directamente la situación. Por ello, en la práctica diaria, se suelen proponer problemas parecidos y no se incide en la comprensión del texto de manera integral, sino en lo que “se debe hacer” para resolverlo; es decir en la operación que permita su solución. Otra fase en la que no se incide es en la regresión de la solución al problema planteado. El retorno es a la pregunta directamente, sin necesidad de volver al texto completo, ya que la pregunta suele ser directa. Se da por comprendido y resuelto el problema cuando el alumnado logra traducir y resolver la operación gestada. La siguiente figura nos permite visualizar el método seguido por los docentes:

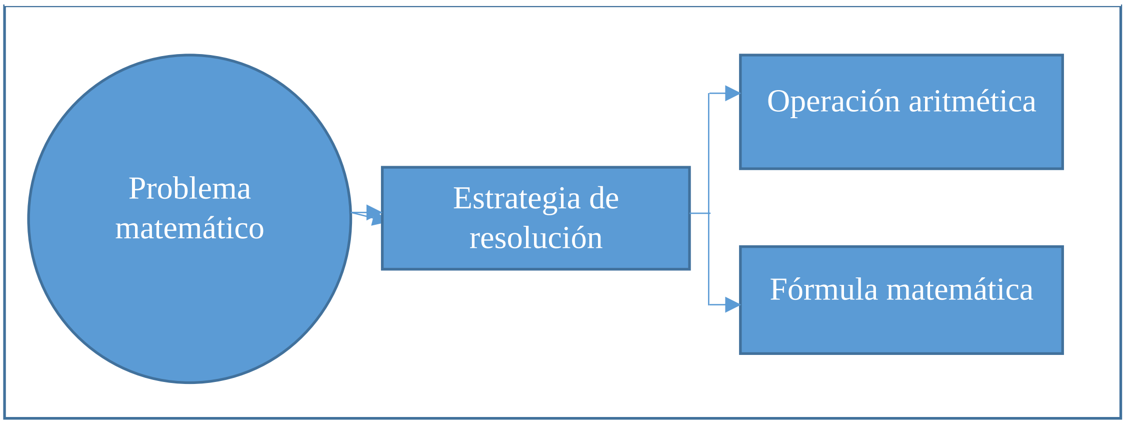
Figura 7. *Método de resolución de problemas utilizado en la clase de matemática*



En la revisión de la resolución del problema en clase, las y el docente se centran, principalmente, en la resolución. Las y los alumnos son capaces de transmitirla. La actividad reflexiva de la misma es poco trabajada en clase. El caso 1 suele buscar la reflexión, el caso 4, la explicación y los casos 2, 3, 5 y 6 la propuesta de solución.

En cuando a las estrategias de resolución de problemas, estas están asociadas a la segunda y tercera fase en el método propuesto. Si la idea es que apliquen conocimiento, las y el docente suelen indicar la estrategia a seguir; por ello, podemos decir que se promueve el uso de una única estrategia (aquella que conduce a la solución del problema). El tipo de problema propuesto orienta este camino. La enseñanza es bastante tubular en este aspecto, ya que el estudiantado ha de preguntarse: ¿qué operación conduce a la solución? O ¿qué fórmula permite hallar…? lo que genera que el alumnado se centre básicamente en idear una operación o recordar una fórmula para resolver el problema. El siguiente diagrama captura la idea expuesta:

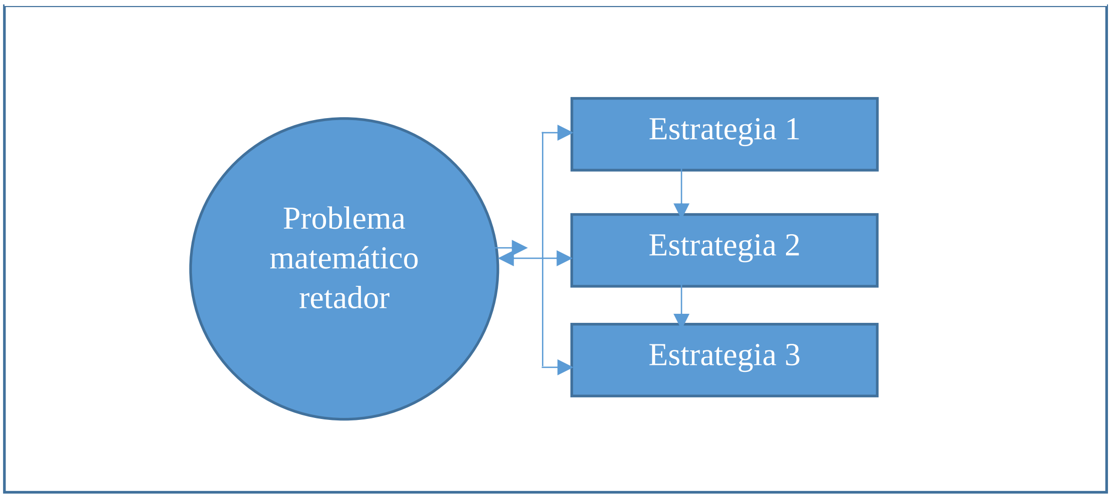
Figura 8. *Estrategias directas de resolución de problemas matemáticos escolares rutinarios*



Los métodos y estrategias usados por los y las estudiantes no distan de los que les transmitieron sus docentes a través de sus enseñanzas y/o experiencias cuando la lección y el problema están bien asimilados; es decir, cuando se reconoce cómo se resuelve; sin embargo, la estrategia muchas veces es determinada no por comprensión del problema sino por el contexto (o forma) en el que se propone.

Para los casos en los que el problema no es conocido u ofrece mayor reto a los estudiantes, la estrategia de solución se comienza a gestar en el alumnado, cuando este tiene disposición. Muchas veces suelen centrase en las operaciones, ya que tienen un bagaje de las mismas; sin embargo, el ofrecer reto le produce a una mayor responsabilidad y actuación, independiente de la responsabilidad y actuación de la maestra o del maestro. Con ello, queremos indicar que las y los estudiantes se retan cuando el problema los motiva. La siguiente figura nos ilustra la actuación del estudiante frente a problemas retadores:

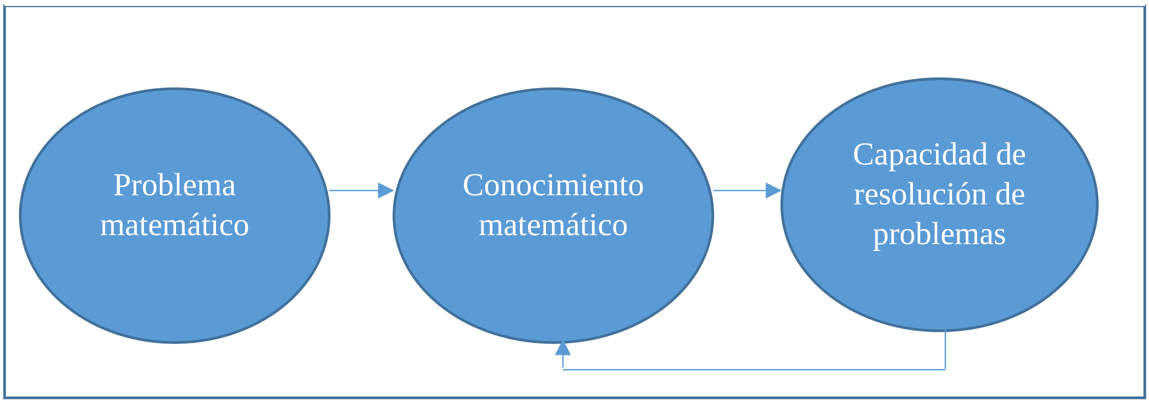
Figura 9. *Actuación del alumnado frente a los problemas retadores*



La figura nos muestra que frente a un problema retador, cualquier alumno o alumna intenta más de una estrategia para resolverlo; incluso los alumnos más motivados buscan distintas formas de solución, aun cuando ya han encontrado una. La doble fecha, desde el problema y desde la estrategia indica que las estrategias pueden surgir a partir del problema o desde la estrategia anterior. Un problema retador obliga al alumnado a volver al problema y tratar de comprenderlo mejor, desestructurándolo en unidades simples que permitan una mejor asimilación del mismo. Al proponer situaciones en las que se generen muchos problemas, el caso 1 favorece la apertura a una variedad de estrategias.

Finalmente, el tratamiento de los problemas matemáticos en clase conduce a la construcción de conocimiento matemático mediante su contextualización en situaciones concretas, específicas, que permiten aplicar el conocimiento aprendido y darle uso. Por su parte, la capacidad de resolución de problemas de los alumnos se refuerza a través de esta propuesta. Mediante la experiencia en este tipo de problemas, las y los estudiantes desarrollan su capacidad de enfrentar con éxito los mismos, dándole sentido al conocimiento matemático. La siguiente figura nos ilustra la idea expuesta:

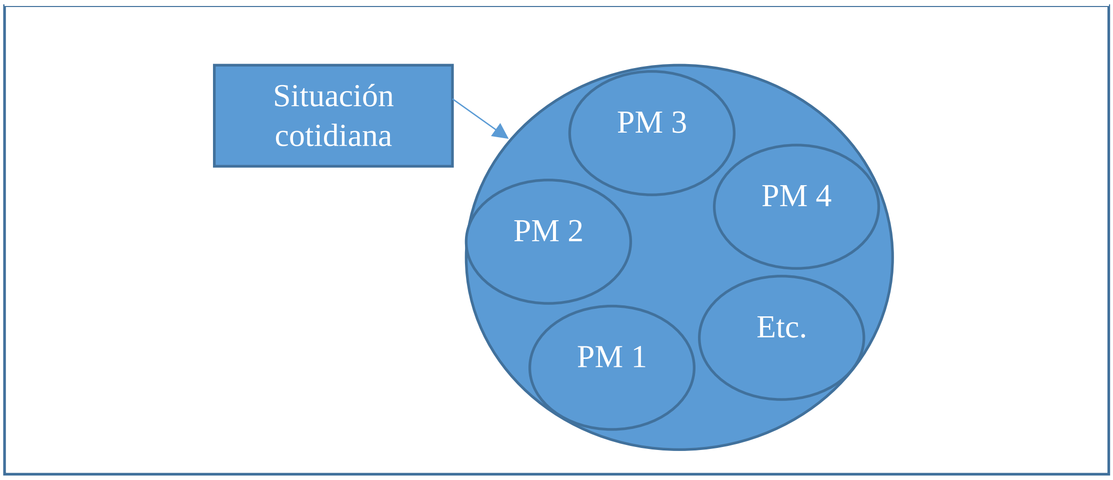
Figura 10. *Relación entre problema matemático y conocimiento matemático*



La Figura expone la relación entre problema matemático, conocimiento matemático y capacidad de resolución de problemas, así como el aporte de esta última en el conocimiento adquirido La flecha que retorna de la capacidad de resolución de problemas al conocimiento matemático indica que, a largo plazo, la capacidad de resolución le permite una mayor comprensión del conocimiento matemático.

Por otro lado, se destaca que en el caso 1, los problemas matemáticos surgen a partir de las situaciones cotidianas que propone y reflexionan; en este contexto, los problemas no son planteados directamente (de manera textual) sino que surgen a partir de la situación, La siguiente figura nos muestra la reflexión:

Figura 11. *Relación entre las situaciones cotidianas y los problemas matemáticos escolares*



La Figura muestra que una situación cotidiana puede generar diferentes problemas matemáticos. Esta propuesta es productiva en cuanto las y los estudiantes son capaces de identificar, desde la experiencia propia, problemas matemáticos simples (similares a los que enfrentan) y resolverlos.

Durante el periodo de investigación, en quinto grado de primaria, no se propusieron temas matemáticos nuevos (no vistos en su educación primaria); el trabajo en matemática consistió en ampliar el campo de conocimiento, reflexión y actuación de los temas ya conocidos. La propuesta del caso 1 fue en varias situaciones, buscar otras formas de resolver el problema (distinta a la conocida) de tal manera que las y los estudiantes pongan en acción distintos procesos cognitivos que les ayuden a usar la matemática conocida.

Por lo expuesto anteriormente, el análisis horizontal revela que hay ciertas pautas en el tratamiento de los problemas matemáticos de 5º de primaria que trascienden la localización geográfica y nacional y el tipo de institución educativa. Estas afinidades dan lugar a un estilo unificado indicativo de una concepción de la enseñanza de las matemáticas compartida que coincide con el tratamiento tradicional, en la que el docente asume toda la responsabilidad como experto, pero con una clara tendencia a asignar mayor responsabilidad al estudiante en su propio proceso de enseñanza – aprendizaje, delegándole cierta presencia, más incipiente en unos docentes y estudiantes que en otros.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

5.1. Conclusiones

Los resultados expuestos conllevan una serie de reflexiones finales que serán expuestas a continuación, estructuradas en líneas interpretativas que se corresponden con las categorías centrales surgidas del análisis de datos. La exposición de estas líneas parte de los objetivos de la investigación buscando dar respuesta a los mismos. Para hacerlo, expondremos las conclusiones apoyándonos en los fundamentos teóricos.

5.1.1. Estilos de enseñanza respecto al tratamiento de los problemas matemáticos

Es innegable que la matemática es una de las áreas básicas del currículo en la Educación Primaria, que contribuye al desarrollo de habilidades que los estudiantes necesitan para manejar situaciones de la vida en cualquier ámbito en el que se desenvuelvan. De los problemas destacamos una frase que se ha popularizado: "son el corazón de la matemática" (Halmos, citado por Gómez y Suárez, 2009, p. 88). De este modo, no se conciben las matemáticas escolares sin la actividad de resolución de problemas.

A lo largo de los distintos casos observamos que la enseñanza de la matemática y el tratamiento de los problemas matemáticos están sujetos a un estilo docente. Las matemáticas que se enseñan en la escuela no son distintas por cuanto los contenidos matemáticos son similares; los problemas propuestos, tampoco son diferentes en su estructura y contextualización; sin embargo, el estilo docente les brinda un matiz particular. Los datos registrados y el análisis realizado nos brindan información sobre el estilo de enseñanza y su relación con el tratamiento de los problemas matemáticos.

Para el docente del caso 1, el tratamiento de los problemas matemáticos no es inmediato, ni previo a la actividad matemática, sino que se desprende de un contexto (matemático o extra matemático) que el docente propone para que los estudiantes identifiquen las matemáticas involucradas y puedan construirlas aplicando conocimiento previo, en un intento de comprender la situación y darle sentido. Los problemas matemáticos son consecuencia de poder precisar situaciones específicas; surgen como casos concretos asociados a la aplicación del conocimiento matemático. En este caso, el docente actúa como intermediario entre la situación y la o el alumno, para que estos puedan intervenir frente a ella. En la gestión de su clase, las situaciones (o contextos) le permiten al docente contextualizar las cuestiones matemáticas. Dentro de la gestión de la asignatura, el docente también hace referencia a los ejercicios como propuestas que permiten reproducir o repetir un conocimiento, centrándose exclusivamente en ello; a diferencia de los problemas, cuya intención es aplicarlo en una situación estructurada. La complejidad de uno u otro tipo de tarea depende de la capacidad del estudiante para poder aplicar correctamente el conocimiento adquirido en la resolución de la misma, que puede conducirlo a construir un nuevo conocimiento a través de nuevas relaciones, que se destacan dentro de la actividad matemática.

Para la docente del caso 2, la claridad en las ideas matemáticas adquiridas es importante, por ello, resalta en la gestión de sus clases las actividades de repaso y verificación de la aplicación del conocimiento aprendido. El tratamiento de nuevas ideas matemáticas, independientemente de la actividad propuesta (matemática o extra matemática) lleva impreso la responsabilidad de la docente por una buena estructuración del conocimiento matemático, ya sea en su conceptualización como en su aplicación operativa. La participación de las y los estudiantes se lleva a cabo en cualquier fase de la sesión de aprendizaje, de acuerdo a la propuesta de la docente; sin embargo, en la fase de aplicación el alumnado resuelve actividades propuestas por la docente o aquellas que las y los propios alumnos pueden plantear a solicitud de la docente. Las actividades involucran la resolución de problemas, algoritmos o situaciones ficticias, diferenciando estas de las primeras en la forma de platearse; los problemas se diseñan de manera estructurada, mientras que las situaciones ficticias no, aunque en la gestión tienden a precisarse a fin de orientar el camino matemático a seguir. Si bien, las actividades propuestas buscan su solución matemática, la docente incide en la comprensión de la acción realizada a través de su explicación.

El estilo docente en el caso 3 es más directo, las ideas matemáticas son principalmente explicadas y expuestas por quien es consciente de dicho conocimiento; sin embargo, la docente puede permitir la participación de los estudiantes a través de una guía directa que está a cargo de la propia maestra; propuesta que facilita la participación segura de los estudiantes ya que exige de estos respuestas que la docente sabe de antemano que pueden responder. Si no sucede, es la propia maestra quien, por lo general, responde correctamente. Los problemas matemáticos siempre están presentes a través de las tareas asignadas con la finalidad de aplicar el conocimiento aprendido y su revisión en el aula; estos se proponen, también, como parte de la actividad en clase; los problemas que los estudiantes deben resolver son básicamente extraídos del libro de texto, que da la posibilidad de aplicar en diferentes propuestas el conocimiento aprendido; para su resolución, los estudiantes pueden acceder a la información del texto o del cuaderno. El trabajo de los estudiantes es, principalmente, personal, independiente; la interacción con otros estudiantes de la misma aula tiene como objetivo compartir respuestas y verificar el acierto de las mismas.

Por otro lado, el Caso 4 gestiona su clase con la propuesta de situaciones o problemas estructurados a partir de los cuales la docente intenta que las y los estudiantes identifiquen los conocimientos previos y las ideas asociadas al nuevo conocimiento para que, a partir de ello, se pueda construir éste con el aporte de las y los estudiantes. Para la docente es importante la participación de todo el alumnado, aun cuando sus respuestas no sean acertadas; asimismo, busca que las y los estudiantes comprendan y no solo apliquen, por ello, emplea estrategias que faciliten el aprendizaje de dicho conocimiento, como las gráficas. La propuesta de situaciones que comprueben los conocimientos aprendidos se realiza al inicio de la sesión, dándoles cierta importancia, aunque esta no sea constante; estas tienen la estructura de los problemas matemáticos estructurados. La resolución de problemas matemáticos tiene un rol importante dentro de la gestión de la clase, tanto para construir un conocimiento como para aplicarlo. La propuesta de problemas matemáticos como situaciones generales es mínima; sobresalen los problemas estructurados; sin embargo, los primeros generan más perspectiva por la extrañeza de la propuesta, creando expectativa. No obstante, al crearlos, los estudiantes tienden a proponer problemas más estructurados, en los que es evidente la matemática a aplicar.

La gestión de clases de la docente del Caso 5 se centra en el tratamiento directo de la cuestión matemática, sin contextualizaciones que impliquen reconocer la misma; si bien toma en cuenta el conocimiento previo de las y los estudiantes para que a partir de ello se construya (y afiance) el nuevo conocimiento, la construcción del éste recae en la docente, quien asume la responsabilidad de una buena construcción para comprensión de cada estudiante. La propuesta de situaciones para la aplicación tiene la misma estructura directa, poniéndose énfasis en el manejo y dominio del conocimiento matemático por sobre su contextualización en situaciones cotidianas. La propuesta de situaciones nuevas tiene la misma forma que se utiliza para su construcción, centrada en el conocimiento matemático propiamente. De esta propuesta se desprende la referencia ínfima o nula a la propuesta directa de problemas matemáticos contextualizados; estos surgen de la propia propuesta directa, como dificultad en la construcción del propio conocimiento.

Finalmente, para el caso 6, la manipulación directa de los conocimientos matemáticos es fundamental en la gestión de sus clases, independientemente de la forma de introducir las mismas; el trabajo se centra en el tratamiento minucioso del conocimiento matemático implicado, bajo la responsabilidad de la docente quien asume el rol principal en la estructuración y avance de la clase para un desarrollo comprensivo en los estudiantes. Durante este momento, las y los alumnos escuchan activamente y participan en función de la guía docente, quien se basa en preguntas para conducir la conexión del alumnado con el conocimiento. Los problemas matemáticos se aprecian como situaciones estructuradas que involucran conocimiento matemático, sus propuestas no son complejas sino directas a fin de que las y los estudiantes puedan identificar en ellos la información matemática involucrada y establecer relaciones apropiadas para su comprensión y conexión con la explicación de la docente.

En las propuestas de las clases se observan conductas que resaltan la gestión del conocimiento matemático y conductas que destacan la participación de las y los estudiantes. Sin embargo, hay que recalcar que cuando se les presenta a las y los estudiantes actividades que les permiten gestionar personalmente la construcción de ideas matemáticas, se observa un mayor involucramiento de la o del aprendiz. No es fácil para todos; sin embargo, es gratificante para cada uno ya que se aprecia el interés de las y los estudiantes frente a la actividad matemática. De acuerdo a Valdés (2016), “Cuando el alumno establece nuevas conexiones o relaciones entre los conocimientos que ya posee y como resultado obtiene un nuevo conocimiento, eso puede ser considerado como un producto nuevo para él independientemente que haya sido descubierto por la ciencia” (p.86). Para que suceda los docentes crean condiciones que permitan que los estudiantes muestren interés por la situación y decidan participar de la actividad, una de estas situaciones está en la propuesta de preguntas; sin embargo, si estas generan un diálogo reflexivo los resultados son mejores. “La actitud estimuladora-participativa–activa, se caracteriza porque el profesor participa en la acción creadora del alumno, utilizando preguntas para activar el pensamiento de los alumnos y para propiciar la reflexión, el cuestionamiento, la valoración y el análisis crítico” (Armada et al., 2016, p. 87).

Finalmente, la resolución de problemas matemáticos es una actividad que los docentes consideran importante dentro de la gestión de su enseñanza, vista como una forma de identificar en diferentes situaciones propuestas, la matemática necesaria, ya sea para construirla y comprenderla o para aplicarla y darle sentido. Durante la gestión de sesiones observadas son distintas las formas como los docentes introducen esta actividad. Su planteamiento influye en ello, puesto que la propuesta de los mismos, la forma de plantearlos orienta el trabajo de los maestros y estudiantes.

5.1.2. Métodos y estrategias usados por los docentes en la resolución de problemas matemáticos

La inclusión de la actividad de resolución de problemas matemáticos en la sesión de enseñanza aprendizaje, requiere el uso de métodos y estrategias para resolver los problemas planteados. La distinta bibliografía informa sobre los métodos de resolución de problemas. Lozada y Fuentes (2018), nos brindan diferentes propuestas, recogidas de distintos autores como Müller (1978), Jungk (1982), Schoenfeld (1985), Krulik y Rudnick (1988) y Santos (1993), de un método de resolución de problemas, que aparecen a partir de la propuesta de Polya (1973), identificando en ellos “su papel en el desarrollo de la capacidad para resolver problemas y para el desarrollo del pensamiento como esencia de esta actividad.”(p.60).

En la escuela, el primer contacto del estudiante con la resolución de un problema matemático es a través de la o del docente. Definitivamente, en Quinto Grado de Primaria las y los estudiantes evidencian una amplia experiencia en resolución de problemas matemáticos escolares y una forma construida de resolverlos. Frente a problemas estructurados, el método y la conducta del alumnado es más evidente, no así cuando el problema no es estructurado; en este caso, las y los estudiantes pueden no ser conscientes del problema implicado. Ante la propuesta de un problema en clase, las y el docente se involucran en la resolución mostrando una forma de enfrentar la solución que el estudiante va construyendo; por ello, los primeros métodos y estrategias que las alumnas y los alumnos aplican son aquellos que van observando en la conducta de la o del docente y que hacen propios para resolver otros problemas.

Para el docente del caso 1, la propuesta de resolución de problemas en clase involucra la participación de los estudiantes en interacción individual con la situación; acto seguido, propone a las y los estudiantes mostrar sus soluciones y explicarlas a fin de involucrar a otros. Por otro lado, la propuesta de situaciones más generales se desarrolla en comunidad; es decir, en diálogo entre estudiantes y docente de tal manera que se reciban diferentes puntos de vista que permitirán una mayor amplitud de comprensión de la misma. Los objetivos son diferentes: en el primero es aplicar el conocimiento matemático de acuerdo a sus saberes y en el segundo contextualizarlo. La solución del problema exige, además, reflexionar sobre la solución y recibir otras que permitan volver sobre la propia solución y madurarla. De ahí que la estrategia docente en la resolución de problemas matemáticos promueve hacer consciente en la y el estudiante el conocimiento matemático implicado, aunque no es fácil que todo el alumnado participe activamente de la propuesta, a partir de las relaciones que se pueden establecer usando conocimiento adquirido y darle sentido en nuevas relaciones.

Para la docente del caso 2, la propuesta de problemas o situaciones ficticias en clase se resuelven siguiendo un método que hace evidente en interacción con las y los estudiantes. Su estrategia requiere una guía constante de la docente que permita conducir la conducta del alumnado, ya sea para comprender la situación y lo que busca o para idear la estrategia de solución. Si bien, las y los alumnos pueden mostrar cierta independencia para idear la forma de realizar la acción clave de la solución, esta es reorientada por la docente. Para situaciones que buscan introducir un nuevo concepto, la docente orienta el trabajo a partir de representaciones gráficas que conduzcan posteriormente a la traducción matemática y consecuentemente a su manipulación operativa. En situaciones en las que se aplica el conocimiento, la representación gráfica ya no es necesaria, sino que se incide directamente en el manejo de la operación. Una fase del método exige explicar cada paso realizado usando el lenguaje matemático apropiado garantizando de esta manera la comprensión de la situación y de la manipulación matemática efectuada.

El método de resolución de problemas en la propuesta del caso 3 se hace evidente en la aplicación del conocimiento matemático; de esta manera, en clase la maestra centra su atención en la resolución, propiamente, propuesta por las y los estudiantes, mas no en todo el proceso seguido, desde la comprensión del problema hasta su verificación, para validar lo hecho por la y el alumno o para mejorarlo de ser necesario. Las distintas fases del método de resolución de problemas no se hacen evidentes, ni extrínseca ni intrínsecamente, en la gestión de la docente, pero sí la de ejecución del plan. En este último punto, visibilizar la solución trazada, permite validar el planteamiento de la o el estudiante o mejorarlo por parte de la docente, la nueva estrategia específica de manipulación matemática (operatividad) busca un trabajo más eficiente a fin de que las y los estudiantes puedan asimilarlo.

Trasladándonos al caso 4, se puede apreciar que el método de resolución de problemas transita por las distintas fases; sin embargo, estas se hacen más evidentes en la medida que el problema sea más complejo para las y los estudiantes. Si el problema no ofrece dificultad, la fase en la que se incide es la que evidencia la solución; caso contrario al no lograr una solución correcta, se reflexiona sobre la misma con la finalidad de volver sobre los pasos realizados y reorientar la misma. Para el caso de problemas estructurados en los que es evidente para los estudiantes de Quinto Grado el planteamiento de solución se centra en diseños reconocidos por todos dado que han sido trabajados en clase; para problemas menos estructurados el planteamiento de solución puede ser diverso, haciéndose evidente en una primera fase de la gestión de clase con el objetivo de llegar a una generalización; es decir al uso de una vía precisa.

Los problemas matemáticos propuestos por la docente del caso 5 durante la fase de observación de la investigación se centraron en problemas estructurados cuya finalidad básica era resolverlos directamente aplicando el conocimiento matemático en situaciones que se tornan más complejas. En este caso, la docente hace evidente el proceso de resolución, cuya dirección recae en la maestra, desde su planteamiento (ya que los problemas los plantea la maestra) hasta su solución que si bien la o el estudiante participa de la misma, es la maestra quien conduce, a través del diálogo, dicha participación. En este caso, las estrategias específicas se hacen evidentes con la participación de la docente quien va planteando la forma de integrar el conocimiento matemático a situaciones que no permiten hacerlo directamente.

Finalmente, la docente del caso 6 propone problemas matemáticos para la construcción del nuevo conocimiento centrando su atención en la comprensión del mismo a fin de entender lo que el problema solicita en base al conocimiento matemático involucrado. Sus estrategias involucran propuestas que permitan facilitar la construcción del conocimiento haciendo uso de conocimiento previo, hasta su manejo operativo y aplicación independiente.

El método de resolución de problemas propuesto en la escuela primaria extraído de las distintas sesiones observadas abarca tres fases claramente identificadas: identificación de datos para responder la pregunta, manipulación de datos para la solución y solución propiamente dicha, resaltando su carácter aplicativo. Cada fase cobra mayor importancia en cuanto sea más fácil o no el acceso al problema propuesto. Las fases expuestas, brindan importancia a la necesidad de concebir un plan que oriente el camino a seguir y haga visible la matemática y por ende, el procedimiento oportuno. Otras fases de resolución de problemas matemáticos son posibles en problemas matemáticos menos estructurados que conlleven una mayor reflexión y autonomía de la o el estudiante en su resolución, lo que se logra cuando los problemas se plantean para construir conocimiento en interacción con las y los alumnos; sin embargo, esta forma de proceder tiende a centrar la actividad en aprendices con mayor disposición a la participación. Lo fundamental es poner a prueba la curiosidad del aprendiz que conlleva un mayor involucramiento en la solución, poniendo en juego diversas estrategias y su capacidad de razonar.

Las estrategias de resolución de problemas surgen a partir de comprensión del problema, asociado a la actividad matemática que requiere su solución. Al plantear problemas cuyo objetivo es una aplicación directa del conocimiento matemático la estrategia es más específica, basada en procedimientos que indican paso a paso la solución de un problema, garantizando su acierto; esta idea aplica en ejercicios y problemas cuya estructura es conocida para la y el estudiante conduciéndolo directamente a la estrategia. Por otro lado, cuando el problema no es tan conocido y no conduce directamente a su solución, las y el docente hacen uso de otras estrategias como las gráficas. Hacer un dibujo, "permite representar los datos o información que suministra el problema, esta estrategia es de gran utilidad ya que permite visualizar mejor la situación planteada y por ende contribuye a que el estudiante comprenda mejor y genere nuevas ideas de resolución" (Pérez y Ramírez, 2011, p. 183). Las estrategias comunicativas en la resolución de problemas son utilizadas por algunos docentes con mayor asiduidad que otros. La verbalización del proceso seguido permite que el estudiante exprese y reflexione sobre aquello que ha realizado, dado que esta exteriorización está acompañada de un seguimiento de la o el docente quien monitorea el trabajo de las y los estudiantes.

5.1.3. Métodos y estrategias usados por las y los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

La apertura hacia un problema matemático depende de la confianza que la o el resolutor muestre al conectar con él, asociada a la experiencia en la resolución de problemas y al interés personal que la y el estudiante tenga frente a la actividad. Si bien, podemos pensar que el alumnado de quinto grado tiene una vasta experiencia en resolución de problemas, en clase, no todas las alumnas y los alumnos muestran confianza o interés para resolverlos, aun cuando se les plantee resolverlos en casa, como tarea de reforzamiento o aplicación; las razones son diversas. Para las y los alumnos de la investigación, los problemas matemáticos son actividades escolares que conllevan el uso de conocimiento matemático operativo (por lo general, los problemas que las y los estudiantes resuelve son aritméticos o basados en el uso de fórmulas que decantan en un resultado numérico). En consecuencia, tienen un objetivo en su solución: encontrar la operación o fórmula que los lleve a resolverlo; si esta no se ve inmediatamente es difícil idearla. Las y los estudiantes asocian los nuevos problemas a los problemas ya resueltos intentando una solución parecida. Darse cuenta de la pertinencia de la solución dependerá de la capacidad para comprender la situación, caso contrario, idean una solución sin ser esta la correcta.

Para las y los estudiantes del caso 1 la solución de problemas transita por tres fases marcadas, en correspondencia con las que el maestro pone en acción al resolver problemas: identificación de datos, planteamiento de la solución y solución propiamente. Este método se traslada a los problemas no rutinarios; sin embargo, su solución se hace menos inmediata. La idea del docente frente a las situaciones nuevas es que la y el estudiante construya una solución a partir de lo que conoce, con asociaciones directas, de tal manera que se haga evidente las distintas formas de acceder a una solución sin necesidad de recurrir siempre a una única forma o a la fórmula genérica; o en su defecto, poder acceder a esta fórmula sin necesidad inmediata de memorizarla. La estrategia para acceder a la solución tiende a asociar el nuevo problema a uno anterior de manera directa asumiendo que se resuelve de la misma manera (si se está trabajando problemas de porcentajes lo más propio es que los nuevos problemas se resuelvan ‘de la misma manera’). Aplicar otras estrategias trabajadas en clase es necesario cuando el problema lo amerita, es decir no es tan evidente su solución y siempre con la guía de alguien que oriente ese trabajo más responsable de resolución.

En las y los estudiantes del caso 2 el método es similar. Una adecuada comprensión del problema implica extraer los datos del mismo, para que a partir de ello, establecer la operación que conduzca a su solución. La propuesta de problemas estructurados y conocidos por las y los estudiantes facilita el acceso a los datos y a su plan de solución. Dentro de la gestión de clases no se aprecia la propuesta de problemas novedosos o no rutinarios que conlleven un mayor involucramiento en la comprensión y solución del mismo; sin embargo, sí se aprecia situaciones que involucran conocimiento nuevo para que sea construido por las y los estudiantes, al menos en un primer momento. Frente a ello, se aprecia que las y los alumnos ponen en juego lo que conocen sobre el tema, de manera específica y operativa sin considerar la naturaleza del conocimiento.

En el caso 3 la conducta de las y los estudiantes tampoco es distinta en relación al método de resolución de problemas asociado a las fases del mismo por cuanto que los problemas a resolver tienen un fin aplicativo directo que reclama de antemano la recurrencia a una forma conocida de resolverlo. No se exige otras formas si es que la propuesta es la que conlleva la solución más directa y genérica, por la que se puede resolver cualquier situación similar. La referencia a la comprensión del problema se circunscribe a la identificación de los datos necesarios y su posterior manipulación que permita la propuesta de un plan adecuado. El trabajo independiente permite en las y los estudiantes otras formas de resolver o estrategias más personales, producto de las relaciones personales que establece, siempre asociadas a la manipulación de los datos obtenidos. Las estrategias gráficas no son un recurso espontáneo cuando los datos numéricos son identificados, estos se orientan a estrategias algorítmicas asociadas a formas de operar en otras condiciones.

El método de solución para las y los estudiantes del caso 4 no es distinto de los grupos anteriores; ante la propuesta de resolución de un problema, el alumnado lee el problema e intenta traducir el mismo usando lenguaje matemático a fin de construir la operación que permita resolver la propuesta. Para elegir la operación, las y los estudiantes se basan en el contexto de la clase o en palabras que identifican en el problema y que permiten asociar con una operación matemática conocida. La lectura detallada del problema genera otras estrategias si es que la propuesta tiene connotaciones distintas a los previamente formulados, por ejemplo, si la palabra clave es suficiente, la comprensión puede darse sin necesidad de leer todo el problema. Dentro de las estrategias específicas usadas en la resolución, destacan aquellas que demandan la manipulación de los datos a través de las operaciones matemáticas conocidas; así como las gráficas, pero no por iniciativa de la propia o propio estudiante sino de la docente. Cuando la o el estudiante conoce la forma operativa para resolver el problema la aplica directamente sin recurrir a otras estrategias.

El método de resolución de problemas observado en las y los estudiantes del caso 5 no se aprecia directamente, sino en base a la propuesta de la docente, ya que sigue sus pasos. La primera fase consiste en comprender el problema identificando los datos que conducen a su solución en base a lo que busca (si lo que se busca es hallar el área de una figura, se busca identificar la figura y los datos que la fórmula exige. Si los datos no se transmiten directamente, se buscan por otros medios. Una vez hallados los datos necesarios se procede a formular la estrategia de solución, que suele ser operativa, caso contrario se recurre a estrategias gráficas que faciliten el acceso a la solución.

Finalmente, las y los estudiantes del caso 6 resuelven problemas matemáticos propuestos por la docente. Para resolver los problemas, las alumnas y los alumnos leen el problema a fin de identificar los datos necesarios para su resolución. Esta es una constante en la resolución de problemas: la comprensión se basa en identificar los datos necesarios que permitan responder a la pregunta propuesta. Por otro lado, el plan de acción se circunscribe en primer lugar a la manipulación numérica a través de las relaciones establecidas mediante operaciones que consideran son las pertinentes. La primera opción son operaciones simples, directas; no obstantes, cuando estas no satisfacen la solución, el volver atrás no es sencillo sin la ayuda docente.

La resolución de problemas es una de las tareas más importantes que se desarrolla en las aulas de matemáticas ya que da la posibilidad a las y los alumnos de adquirir conocimientos, habilidades y destrezas para afrontar con éxito situaciones de distinta índole. No obstante, las oportunidades de aprendizaje del alumnado están en relación con el tipo de actividad que se desarrolla en las aulas y de cómo interaccionan profesor, alumnas y alumnos en dicho desarrollo y en la resolución del problema propuesto. Si bien, a través de las distintas sesiones hemos observado participación, más o menos asidua de las y los estudiantes en la resolución de problemas, lo cierto es que si esta se basa en la resolución de problemas rutinarios, la participación también lo será, con poca posibilidad de razonamiento y entrega a la solución propiamente. Sin embargo, cuando el problema es no rutinario, como en algunos casos, los resultados son distintos, tanto en el involucramiento de la y del estudiante como en su capacidad de razonamiento; sin embargo, si la o el alumno no tiene experiencia en este tipo de problemas, sino en los anteriores intentará aplicar estrategias rutinarias en la resolución de problemas no rutinarios.

5.1.4. Tratamiento de problemas matemáticos en clase, construcción de conocimiento matemático y capacidad de resolución de problemas de las y los alumnos de quinto grado de primaria

En los puntos anteriores nos hemos referido a la inclusión de problemas matemáticos en la gestión del proceso de enseñanza aprendizaje, considerándolos como propuestas cuyo planteamiento conduce a la construcción de conocimiento matemático o a su aplicación en situaciones variadas; así como a su tratamiento por parte de las y del docente y de las y los estudiantes tanto de manera general, desde el primer contacto con el problema o la situación planteada, como específico, asociado a la estrategia concreta que se utiliza paran poder acceder a ese plan especial de solución y resolver el problema.

El uso de problemas matemáticos para hacer propio el conocimiento matemático se ha podido observar en la gestión de las sesiones. En este caso, la propuesta de actividades incluyen los problemas matemáticos entendidos como situaciones que presentan escenarios que involucran información matemática y cuestiones que demandan una solución pero para la cual no hay un procedimiento inmediato. Desde esta definición, los problemas rutinarios no se catalogan como problemas ya que de primera instancia para estos sí hay una solución inmediata que incluso la o el estudiante reconocería. Esta idea de problema es muy importante para su aplicación en la escuela, pues en la propuesta de problemas hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que las personas requieren para su solución; en este sentido los conocimientos que tienen las y los estudiantes pueden ser suficientes para resolver la situación directamente o pueden requerir cierto trabajo adicional, por lo que la propuesta presentaría dificultades para las cuales no hay una rápida solución. En este sentido, es que los problemas se presentan como situaciones para adquirir conocimiento.

En la propuesta del caso 1, las situaciones son amplias, con una gama variada de contenido, que permitan un diálogo sobre las mismas, y directas (diferente a una exposición directa del tema); a través de ellas, el tratamiento de la información busca que las y los estudiantes ideen estrategias que permitan construir diferentes formas de acceder a una solución, a partir de los conocimientos que tienen y que se pueden aplicar a la situación; no se busca que las y los alumnos recuerden una fórmula descontextualizada y sin sentido inmediato, sino que piense a partir de lo que tenga sentido para ellos; los espacios de tiempo para que las y los estudiantes aporten son valiosos en la gestión pues brindan oportunidades para que se involucren en la construcción de un conocimiento, favoreciendo la capacidad para resolver problemas.

Para el caso 2, la propuesta de actividades que se orientan a la construcción de conocimiento se da a partir de situaciones concretas contextualizadas o no. En este caso, si bien se permite la participación de la y del estudiante que garantice la comprensión de la situación y la toma de conciencia de la dificultad, la guía de la docente es más constante y puntual orientada a construir el camino correcto. En este contexto, la capacidad de resolución de problemas se centra en la capacidad de aplicación del nuevo conocimiento a situaciones nuevas a partir de la comprensión del mismo. Las situaciones nuevas se plantean más específicas a fin de que la y el estudiante pueda reconocer en ellas la información necesaria para construir un plan de acción que se ajuste a lo trabajado previamente.

En la gestión de clases del caso 3 hay mayor ocurrencia de propuestas de problemas matemáticos estructurados; en este caso, el objetivo es que los estudiantes apliquen conocimiento lo que conduce a una mayor experiencia y afianzamiento del mismo. Por otro lado, la construcción de un nuevo conocimiento se da principalmente a partir de situaciones con un matiz más matemático y directo que las y los estudiantes no son capaces de manejar por la falta del mismo; no obstante, la guía de la docente permite que la construcción se haga más comprensible. Las propuestas novedosas y el permitir una mayor participación de las y los estudiantes permiten que estos sientan interés por la actividad logrando un mayor involucramiento y naturalidad en la exposición del conocimiento matemático que se maneja.

La construcción de conocimiento matemático a partir del tratamiento de problemas matemáticos en la gestión de la docente del caso 4 se da a partir del planteamiento de problemas estructurados y a través de la oferta de actividades cuya propuesta difiere de la que se expone en un problema tradicional. Las situaciones cerradas tienden a una única forma de resolución, mientras que las abiertas permiten una mayor comunicación de formas diversas de solución. Para la construcción de un nuevo conocimiento, la docente parte de este último tipo, generando en las y los estudiantes mayor participación e interés por la propuesta. La capacidad de resolución de problemas está asociada al enfrentamiento de problemas rutinarios a partir de estrategias guiadas por la docente; sin embargo, su tratamiento en clase no es continuo, sino esporádico.

En la gestión de clases de la docente del caso 5, los problemas matemáticos tienen mayor presencia, la misma que está asociada a lograr una mayor relación y práctica con el conocimiento matemático involucrado. La propuesta para construir conocimiento se aprecia desde un planteamiento directo que parte de la reflexión de la y del estudiante sobre lo observado a partir de sus conocimientos previos, que orientarán a la docente en la organización de la información para una mejor comprensión. La capacidad de resolución de problemas se relaciona directamente con la experiencia que adquiera en la resolución de problemas estructurados, propuestos por la docente a través de un libro de actividades.

Finalmente, la docente de caso 6 parte de situaciones problemáticas para construir conocimiento a partir de la propuesta de problemas o escenarios que las y los estudiantes pueden manejar, pero que con la ayuda de la docente, el desarrollo es más compresivo. Si bien, es la docente quien expone la solución a cualquier propuesta, no descarta la participación de las y los estudiantes en el proceso, a fin de que esta se conduzca por el camino propuesto por la maestra. La carga matemática, de análisis minucioso, en este caso es mayor que en los casos anteriores. No obstante, se observan estudiantes que logran seguir el ritmo de trabajo de la profesora.

La construcción del conocimiento se da por aproximaciones sucesivas desde la interacción con el problema o la situación hasta su resolución. En problemas simples, la construcción del conocimiento se asocia a la reproducción del mismo, con la finalidad de afianzarlo. En problemas complejos los momentos que la y el estudiante transita no muestran caminos fáciles, sino que les demandan una mayor actividad para usar el conocimiento previo como medio para construir un nuevo conocimiento. En este caso, un primero momento pone de manifiesto el asombro de la y del estudiante frente a la situación, dado que puede comprenderla pero no idear una solución; la novedad de la tarea le genera confusión. Durante este momento, la y el estudiante puede paralizarse y no saber qué hacer; es importante que reconozca que no dispone de las herramientas para hacer frente a la propuesta. Sin embargo, esta "inmovilización" primaria no debe inhibirlo (si lo hace, en este momento finalizaría su participación, que es lo que sucede con muchas y muchos estudiantes si es que la o el docente no conecta con ellos) sino movilizarlo; sin embargo, la primera acción se espera que sea infructuosa, lo que le lleva a buscar ayuda (en pares, fuentes o en la o el docente (caso contrario el proceso finaliza). La ayuda brindada por la o el docente, el compañero o compañera o la fuente consultada le permite clarifica y le continuar (es el objetivo del docente) por lo que se puede observar una segunda movilización de la o el estudiante hacia la consecución del fin. En este momento, el alumnado tiene mayor claridad para comprender y usar sus conocimientos. Este proceso de construcción del conocimiento a partir de la resolución de problemas o de la comprensión de situaciones que involucran conocimiento matemático implica el acceso y conexión con conocimiento e ideas previas que facilitan las nuevas.

5.1.5. Conclusión final

A lo largo de la investigación, se ha observado que la enseñanza de la matemática busca que las y los estudiantes sean capaces de resolver problemas matemáticos adecuados a su nivel de aprendizaje, de acuerdo a sus currículos vigentes. Ningún proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas investigado ha obviado este objetivo ni se ha centrado en el conocimiento de los contenidos matemáticos (conceptuales o procedimentales) a fin de reproducirlos sin una aplicación correspondiente, ya sea en la resolución de problemas matemáticos o en la resolución de operaciones aritméticas básicas; se enseña la adición o suma no para que expresen su definición sino para que sean capaces de sumar cuando sea necesario; lo mismo ocurre con otros tópicos matemáticos; de hecho, hoy en día se escucha hablar de *competencia* refiriéndose a la capacidad para hacer o aplicar algo; sin embargo, no se limita a ello. La aplicación puede ser rutinaria o mecánica y no entrañar un *pensar* y *hacer* que conlleve una auténtica competencia. Citando a OCDE (2017), y a efectos de PISA, 2015, Izaguirre, Caño y Arguiñano (2020, p.244), expresan que la competencia matemática se define como:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, herramientas y hechos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. Esto ayuda a las personas a reconocer la presencia de las matemáticas en el mundo y a emitir juicios y decisiones bien fundamentados que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (p.64).

Si se toma en cuenta que hoy en día, y desde hace varios, "las matemáticas escolares implican *pensar y hacer*, más que *memorizar definiciones y procedimientos*, entonces debería asumirse también que estamos ante un cambio de paradigma substancial en la forma de concebir las matemáticas" (Alsina, 2020, p.3), que si bien se viene gestando desde hace más de una década en el ámbito escolar y su presencia en las aulas es evidente, también lo es la tendencia tradicional de enseñanza, centrada en una gestión que decanta en la o el docente, principalmente.

Considerando lo expuesto en los párrafos anteriores, para desarrollar la competencia descrita conviene que la enseñanza de la matemática en la escuela, desde los primeros grados, se entrelace con contextos cercanos y de interés para las y los aprendices, de tal manera que la ciencia en cuestión sea asequible al estudiantado, a través de entornos conocidos y transitados por ellos; de esta manera, les resultará más fácil relacionar las actividades matemáticas surgidas o propuestas con situaciones reales, propias de su medio; la acumulación de conocimientos matemáticos descontextualizados y sin ningún fin tangible si no se sabe relacionar, descubrir y aplicar en situaciones reales, pierden interés y dominio en el alumnado. El contexto de la y del estudiante es una fuente rica de planteamiento y resolución de problemas matemáticos, este es el espacio en el que el niño o la niña se manejan libremente, toman sus propias decisiones y se responsabilizan por las mismas: piensan y actúan.

Entrelazado con el contexto, que les permite a las y los estudiantes conectar con la situación y mostrar interés, está la naturaleza de la actividad. Los problemas matemáticos propuestos por las y el docente a lo largo del estudio se decantan por ser estructurados principalmente; es decir, enmarcados dentro de unos parámetros conocidos por las y los estudiante que les deben permitir trabajar solos, aplicando, estructuralmente, la matemática conocida. Sin embargo, durante el estudio se ha observado que los problemas no estructurados permiten mayor involucramiento del estudiante en el proceso de resolución y construcción del conocimiento matemático y un trabajo más en equipo en el que todos aportan y contribuyen a su solución. De esta idea se desprende la necesidad de promover y proponer situaciones y/o problemas matemáticos no estructurados y que favorezcan el trabajo en equipo y colaborativo, delegando, además, en las y los estudiantes la responsabilidad de la solución de la situación y de la propia construcción del conocimiento matemático u otro conocimiento descubierto en el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje, favoreciendo de este modo, el logro de un aprendizaje significativo. De acuerdo a una investigación realizada por Muñiz et al. (2017), con estudiantes de segundo curso de primaria, el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las matemáticas "parece ser capaz de hacer que los estudiantes que lo experimenten alcancen niveles más altos de rendimiento. Así mismo…parece ayudar a evitar que las percepciones de los estudiantes hacia la clase de matemática sean negativas" (p. 62), Estas ideas se asocian con las opiniones de las y los estudiantes de nuestro estudio al percibir que las clases con la observadora eran "más divertidas".

La propuesta de un tipo de problema distinto en el aula de matemática conlleva el manejo de un tiempo diferente, el cual las y el docente valoran y son conscientes de su limitación durante todo el año escolar; sin embargo, permitir que las y los estudiantes generen sus propias preguntas, interactúen entre ellos y con el o la docente, hablen y escriban acerca de lo que están aprendiendo, lo relacionen con experiencias previas y lo apliquen a sus vidas diarias, convierte el aprendizaje de cada estudiante en un aprendizaje significativo, de interés. Los y las docentes, deben lograr que sus estudiantes hagan de lo que aprenden una parte de sí mismos, de tal manera que sean ellos quienes construyan una forma de resolver los problemas matemáticos, más allá de iniciar el proceso de resolución con una estructura predeterminada.

La propuesta de un nuevo tipo de problemas debe ir de la mano con una nueva forma de enseñar. Las y el docente tienden a brindar todo lo necesario para que las y los estudiantes aprendan, de tal manera que el camino propuesto para que las y los aprendices sigan, carezca de la mayor dificultad posible, de tal manera que su tránsito sea el ideal; sin embargo, un buen aprendizaje trae consigo dificultades que, en primer lugar, hay que reconocer; este es un gran paso en el proceso de aprendizaje y en la resolución de problemas: identificar la dificultad permite al aprendiz ser consciente de la misma y de la capacidad de reconocerla, lo cual le permite tener una idea inicial de su resolución, aunque no sea consciente de este hecho, específicamente. En este sentido, las y los docentes, como expertos del proceso educativo, del conocimiento matemático y de la capacidad de sus estudiantes, han de permitir que sus aprendices, continúen en ese proceso de reflexión de la situación y puedan resolverla; en gran medida, depende de la o el docente que los estudiantes aumenten su percepción de su capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones matemáticas nuevas, teniendo en cuenta que el éxito no es solo hallar “la solución” a un problema, sino aprender en el proceso.

De las acciones observadas en las clases de matemática, es importante resaltar aquellas que promueven una enseñanza de la matemática que favorecen el desarrollo de una matemática con sentido para el aprendiz y conducentes a su formación como sujetos autónomos:

a) *Pensar* vs *Repetir*: Promover la resolución de situaciones problemáticas que impliquen pensar, más allá de repetir fórmulas o procesos estandarizados que son “evidentes” para quienes los conocen, pero no para quienes aún no han logrado darle sentido.

b) *Argumentar* vs *Aceptar*: Plantear preguntas y contra-preguntas efectivas en la clase de matemáticas que impliquen que los estudiantes discutan, den argumentos, contradigan si es necesario (o si no lo es).

c) *Interactuar* vs *Aislarse*: Fomentar la interacción en la clase de matemáticas en un ambiente que invite a combinar algunas ideas, desechar otras, en un trabajo conjunto que favorezca la amplitud de ideas y diferentes puntos de vista, así como la socialización como medio para una mejor comprensión de la situación.

d) *Comunicar* vs *callar*: Fomentar la comunicación en el aula de matemáticas en un ambiente que conlleve la trasmisión de lo que se está haciendo, ya sea que esto haya permitido crear una estrategia o bloquear un camino, tanto en el proceso mismo de resolución del problema, como al final, como síntesis. Desarrollar la capacidad de comunicación permite iniciar y mantener un diálogo que contribuye a una mejor comprensión de la situación y lo que necesita.

e) *Conectar* vs *Separar*: Diseñar e implementar actividades matemáticas que requieran hacer conexiones entre diversos contenidos matemáticos y no matemáticos, en contraposición a sesiones de clase que muestran los contenidos matemáticos como exclusivos de una situación concreta (por ejemplo, proponer problemas para fracciones, problemas para decimales, entre otros). Si bien esta forma aislada de proceder busca que las y los estudiantes se focalicen en un punto o tópico específicos, inhibe el hacer evidente la conexión que puedan tener los temas entre sí.

f) *Representar* vs *Fotocopiar*: promoviendo en las y los estudiantes diferentes tipos de representación para expresar las ideas matemáticas, de tal manera que sean ellos quienes lleguen a los conceptos desde lo concreto a lo abstracto, sin quedarse en ello; es decir, muchas veces, se piensa que el fin de manipular y representar gráficamente es que el estudiante llegue rápidamente a conocer el símbolo matemático y usarlo directamente; son embargo, las diferentes formas de representación deben formar parte de la actividad del estudiante de tal manera favorezca la representación de ideas matemáticas. En este caso, los problemas "tipo" tienden a fotocopiar procesos y formas de resolver e inhibe la búsqueda de nuevas estrategias o caminos.

En el contexto educativo, las seis ideas expuestas convienen sustentarse en una actitud positiva de la o del docente hacia la matemática que transmita a sus estudiantes, en un conocimiento profundo de las matemáticas escolares y en una auténtica vocación docente que permita guiar a sus alumnas y alumnos por el camino correcto del aprendizaje de las matemáticas. Cada una de las acciones propuestas facilitan la participación de la y del estudiante ya que les permiten ser protagonistas de su propio proceso de enseñanza – aprendizaje.

5.2. Futuras líneas de investigación

Reflexionar sobre lo expuesto en la presente investigación si bien ha permitido conocer sobre diversos aspectos de la gestión de clases de matemáticas reales en seis aulas de quinto grado de Educación Primaria, de cinco instituciones educativas de dos realidades socio geográficas y geopolíticas distintas, y el tratamiento de los problemas matemáticos en las mismas, llegando a conclusiones significativas sobre la naturaleza de los mismos, en el quehacer diario, y su impacto en la construcción de conocimiento matemático y en la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes, paralelamente abre una serie de interrogantes que pueden convertirse en futuras líneas de investigación. Por ello, en este apartado transmitiremos algunas ideas sobre hacia dónde podría dirigirse las futuras investigaciones en torno al tema.

Es evidente que hemos dejado de lado determinadas cuestiones que serían interesantes incluir dentro de una investigación asociada a las formas cómo se desarrollan los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en las aulas y que se relacionan con aspectos como las realidades sociodemográficas y geopolíticas que marcan las diferencias de los casos estudiados; asimismo, considerar la formación inicial de la o el docente que no se ha considerado en la presente investigación pero que sería de interés la influencia de la formación inicial de la o del maestro en la formación matemática de sus estudiantes. Nótese que de los seis casos estudiados en la presente investigación, uno de ellos tiene formación especializada en didáctica de la matemática para alumnos de la educación secundaria obligatoria. Asimismo, otro de los aspectos, que no se ha tomado en cuenta, asociado a esta formación es el centro de estudios de origen (llámese un centro de estudios universitario o pedagógico); en Piura, los docentes en ejercicio que forman parte del staff de docentes que reciben docentes en formación de nuestra institución consideran, por ejemplo, que la formación recibida en la universidad de la cual formo parte, se caracteriza por una sólida formación teórica; mientras que los futuros docentes de otras instituciones educativas tienen una mejor formación práctica. Sería interesante investigar este aspecto de la formación del docente en formación o en ejercicio en cuanto a la enseñanza de la matemática.

Investigar en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas desde las aulas es un tema que resulta interesante porque permite adentrarse en realidades concretas, singulares, aun cuando el objeto de estudio sea común. El trabajo conjunto entre el investigador o investigadora, el profesorado y el alumnado traslada el interés por la mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje a los propios agentes directos del mismo (docentes y alumnado), y al investigador o investigadora lo introduce en un escenario que es objeto de ello, dándole herramientas vivas para comprender mejor la realidad de aquello por lo que muestra interés. Un reto futuro sobre el tema es investigar sobre la influencia de la investigación en este proceso en las aulas propiamente. La importancia de trasladar los resultados de la investigación a la actividad escolar específica es inminente ya que es indudable que un fin primordial en toda investigación educativa es mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje; sin embargo, este traslado no ha de darse desde fuera sino desde la propia aula y sus agentes directos, principalmente de los docentes y de la gestión general, para lo cual planteamos realizar una investigación colaborativa o investigación acción que permita un avance en la educación matemática mediante su cambio educativo,

Dado que, desde hace varios años, el proceso de enseñanza – aprendizaje está centrado en la y el estudiante, desde los primeros grados, colocándolo como protagonista del mismo, otra línea de investigación interesante está relacionada con el educando y su capacidad para autogestionar su aprendizaje asociado a la resolución de problemas matemáticos. La idea hace mención a la capacidad de la o el aprendiz de gestionar por su cuenta, su propio aprendizaje, muy relacionado con la capacidad de resolver problemas. El concepto de autogestión del aprendizaje no es nuevo. Salazar (2018), citando a Bandura (1982), expone que, en la autogestión del aprendizaje, el estudiante es el artífice principal, dado que "es quien determina sus propios objetivos académicos, consigue los recursos humanos necesarios, toma decisiones y conoce las estrategias y los pasos que le conducirá al aprendizaje" (p.23). Por su parte, Barboza (2016), citando a Knowels (1975) señala que la autogestión del aprendizaje implica cuatro fases: planificación, seguimiento, control y evaluación; en las que el estudiante identificará "sus propias necesidades de aprendizaje, establecer sus propios objetivos de aprendizaje, realizar búsqueda de recursos (incluyendo instructores, compañeros y materiales), elegir e implementar sus propias estrategias y sus propios métodos de aprendizaje, y realizar actividades de evaluación de los resultados" (p.204). Las fases en mención son similares a las que se proponen para la resolución de problemas; sin embargo, aquellas se definen desde el perfil del aprendiz propiamente, como auténtico gestor de su aprendizaje y, por ende, de la resolución de problemas.

En el marco del planteamiento y resolución de problemas matemáticos, otra futura línea de investigación sobre problemas matemáticos está asociada a cuestiones vitales relacionadas con el cambio climático, un tema de interés actual, con el propósito de investigar el papel de aquello en el logro de las prácticas propuestas para una mejora de la enseñanza matemática; es decir en la reflexión, diálogo, argumentación, entre otros, así como la sensibilización y adopción de comportamientos en las y los estudiantes que expresen actitudes responsables frente al problema del calentamiento global y el cambio climático, aportando de este modo a la solución de este grave problema que afecta la vida de nuestro planeta, que en palabras de Pinto-Bazurco (2020), las soluciones deben provenir de las acciones de países individuales; y por qué no, desde las aulas escolares desde la gestión de problemas matemáticos.

En la actualidad, la capacidad investigadora del alumnado es una exigencia, desde los primeros grados de educación, ya que contribuye a potenciar de forma directa la competencia matemática y la iniciativa en su proceso formativo. Por ello, y no menos importante, una interesante y oportuna línea de investigación estaría asociada al perfil de la o del estudiante como investigador o investigadora en su propio proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas y de los problemas matemáticos en particular, a partir de la interacción con problemas significativos que les permitan indagar, descubrir y perfeccionar la resolución de problemas matemáticos, a través de la metodología ABP, aprendizaje basado en proyectos, o cualquier metodología asociada.

Finalmente, de manera específica, considerando que la formación de la o del docente de Educación Primaria abarca las distintas áreas de enseñanza (Comunicación, Matemáticas, Ciencias sociales, Ciencias Naturales, entre otros), y teniendo en cuenta que la resolución de problemas matemáticos es parte fundamental de la enseñanza matemática, una línea de investigación estaría asociada a la formación inicial y en ejercicio de las y los docentes de Educación Primaria en matemática y en resolución de problemas matemáticos.

Referencias

Acosta, S. y Boscán, A. (2012). Estrategias cognoscitivas para la promoción del aprendizaje significativo de la Biología, en la Escuela de Educación. *Telos*, vol. 14, núm. 2, mayo-agosto, 2012, pp. 175-193.

Alconchel, M. B. y Matarraña, I. E. S. (2012). Resolución de problemas con Excel. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (61), 45-54.

Alfaro Carvajal, C. y Barrantes Campos, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2008, Año 3, Número 4, pp. 83-98.

Alfaro Carvajal, C. y Barrantes Campos, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.2008, Año 3, Número 4, pp.83-98.

Almodóvar y García (2009). Matemáticas 5 Primaria. Proyecto La Casa del Saber. Santillana Educación, S.L., 2009.

Alonso Berenguer, I (2001).*La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación* [tesis de doctorado, Universidad de Oriente. https://www.researchgate.net/publication/320386743

Alonso, I. (2003). Modelación didáctica de la representación y su formación en el proceso de resolución de problemas matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *16*(2), 530-536.

Alsina, A. (2006). ¿Para qué sirven los problemas en la clase de matemáticas? *Uno,* núm. 43, pp. 113-118.

Alsina, A. (2020). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar, 2020, vol. 28, p. 1-13.*

Álvarez Álvarez, C. (2008a). “La etnografía como modelo de investigación educativa”. *Gazeta de Antropología, 24(1),* 1-15. (Disponible en Internet: http://www.ugr.es/~pwlac/).

Álvarez, C. (2008). *La relación teoría–práctica en la enseñanza y desarrollo profesional docente. Un estudio de caso en Primaria* [Tesis de doctorado. Universidad de Oviedo]. http://hdl.handle.net/10803/32139

Álvarez, C. Á. (2011). *La relación teoría-práctica en la enseñanza y el desarrollo profesional docente: Un estudio de caso en Educación Primaria*. Universidad de Oviedo.

Álvarez, M. Y., Alonso, I. y Gorina, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. Universidad de Oriente, Cuba. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.* Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/4328/1/AlvarezDinamicaALME2012.pdf

Amezcua, M. (2000). El Trabajo de Campo Etnográfico en Salud. Una aproximación a la observación participante. Index de Enfermería, 2000; IX (30):30-35 [http://hdl.handle.net/10481/50643]

Arias, N. (2005). Matemáticas en el Perú: Un caso de responsabilidad social. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, *10*(18-19), 205-220.

Arnal, J., Del Rincón, D. y Latorre, A. (1994). *Investigación Educativa Fundamentos y Metodología*. Barcelona, España. Editorial Labor SA.

Arteaga, J. y Guzmán, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Educación matemática*, *17*(1), 33-53.

Ávila, M. G. (2002). Aspectos éticos de la investigación cualitativa. *Revista Iberoamericana de educación*, *29*, 85-104.

Ayllón Blanco, M. F. (2013). *Invención-resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria*. [Tesis de doctorado. Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/27771.

Azinián, H. (2000). *Resolución de problemas matemáticos: visualización y manipulación con computadora*. Noveduc Libros.

Barboza, E. C (2016). Investigación educativa sobre autogestión en los Entornos Personales de Aprendizaje (PLE): Una revisión de literatura. *Edmetic*, *5*(2), 202-222. htpps://doi.org/10.21071/edmetic.v5i2.5783

Bárcenas Salgado, Erik. (2011). "Construcción de un escenario de movilidad urbana: el caso de la Ciudad de México". (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, México. Recuperado de https://repositorio.unam.mx/contenidos/406386

Barrantes López, M. y Zapata Esteves, M.A. (2010). La resolución de problemas aritméticos y su tratamiento didáctico en Educación Primaria. *Campo abierto: Revista de educación*, *29*(1), 77-95.

Basoredo Ledo, C. (2009) ¿Cómo formular objetivos para el aprendizaje y el desarrollo de competencias? *Quaderns Digitals: Revista de Nuevas Tecnologías Y Sociedad*, *58*(7).

Bastiand, M. (2012). Relación entre comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de sexto grado de primaria de las instituciones educativas públicas del Concejo Educativo Municipal de La Molina-2011. [Tesis de maestría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. *Recuperado de: http://cybertesis. unmsm. edu. pe/handle/cybertesis/2902*.

Beltrán Campos, S. y Repetto Talavera, E. (2006). El entrenamiento en estrategias sobre la comprensión lectora del enunciado del problema aritmético: un estudio empírico con estudiantes de Educación Primaria. *REOP-Revista Española de Orientación y Psicopedagogía*, *17*(1), 33-48.

Bermejo Fernández, V., Lago Marcos, M, y Rodríguez, P. (1998) *Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. Revista de Psicología General y Aplicada*, 51 (3-4). pp. 533-552. ISSN 0373-2002.

Blanco, B., y Blanco, L. J. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *71*, 75-85.

Blanco, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma*, *21*, 11-20.

Blanco, L. J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales*, *25*, 49-60.

Boletín Oficial del Estado (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE, núm. 106, 17158-17207.

Boletín Oficial del Estado (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el Currículo Básico de Educación Primaria. BOE, núm, 52. 19349-19393.

Bonilla, F.J. (2014). El cuento y la creatividad como preparación a la resolución de problemas matemáticos. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3(1), 117-143.

Broitman, C. (1998). Enseñar a Resolver Problemas en los Primeros Grados. Propuestas Didácticas para Trabajar en el Aula. *La escuela*, *25*, 4-9.

Campistrous, L. y Rizo, C. (2013). *La resolución de problemas en la escuela*. En Morales, Yuri; Ramírez, Alexa (Eds.), Memorias I CEMACYC (01-11). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC. *Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 2, (2-3), noviembre, 1999, pp. 31-45.

Canseco Cruz, V. y Elvira Franco, S. (2002). *Problemas matemáticos verbales. Una intervención educativa* (Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional). http://200.23.113.51/pdf/19402.pdf

Capote Castillo, M. y Martínez Hondares, L. E. (2006). Algunas estrategias de aprendizaje para la solución de problemas matemáticos. *Mendive. Revista de Educación*, *4*(2), 89-94.

Casajús Lacosta, A. (2005). *La resolución de problemas aritmético–verbales por alumnos con déficit de atención con hiperactividad* [Tesis de doctorado. Universidad de Barcelona]. http://tdx. cat/handle/10803/1311.

Castañeda, A., González Rodríguez, J. C. y Mendo-Ostos, L. Libros de Matemáticas para primer grado de secundaria en México: problemas y estrategias de solución. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, REDIE*. Vol.19, Núm.4, 2017. ISSN: 1607-4041.

Castro Martínez, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. *Investigación en educación matemática XII* (p. 6). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E. (2002). La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática. *Investigación en educación matemática. Resolución de problemas*, 11-28.

Chamorro, M. C. (Coord.) (2005). Didáctica de las matemáticas. Madrid: Pearson Education.

Chemello, G., Agrasar, M. y Crippa, A (2010). La Capacidad de resolver problemas. Mecanismos y cuadriláteros. En Duro, E., Pulfer, D y Kit, I. (Coord,). Una Escuela Secundaria Obligatoria para todos - La Capacidad de resolución de problemas. Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia.

Codina, A. y Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*, 125-135.

Contreras, J. y Del Pino, C. Resolución de problemas en la enseñanza de la matemática. Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca. Artículos. 27-36.

Contreras, L. C. (2009). El papel de la resolución de problemas en el aula (Seminario dictado en el Primer Congreso Internacional de educación en Ciencia y Tecnología. Universidad de Huelva. España). *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología* — Volumen 1, Número 1, Diciembre 2009. pp. 37-98.

D'Amore, B. (2000). Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *3*(3), 321-338.

De Castro Hernández, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta*, *14*, 47-65.

De la Cuesta Benjumea, C. (1997). Características de la investigación cualitativa y su relación con la enfermería. *Investigación y educación en enfermería*, *15*(2).

De la Cuesta Benjumea, C. (2003). El investigador como instrumento flexible de la indagación. *International Journal of Qualitative Methods*, *2*(4), 25-38.

De la Cuesta-Benjumea, C. (2011). La reflexividad: un asunto crítico en la investigación cualitativa. *Enfermería clínica*, *21*(3), 163-167.

Díaz, M. V. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, *45*, 33-41.

Díaz-Levicoy, D. y Roa Gumán, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista chilena de educación científica*, *13*(1), 9-19.

Echenique, I. (2006). Matemáticas resolución de problemas. Educación Primaria. Navarra: Departamento de Educación. Gobierno de Navarra.

Espinoza González, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio* [Tesis de maestría. Universidad de Granada].

Fernández Arteaga, M. L. (2013). Importancia de la comprensión lectora en el abordaje de la primera etapa de resolución de problemas matemáticos con un enfoque crítico. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, CEMACYC.*

Fernández Bravo, J. A. (2006). Algo sobre resolución de problemas matemáticos en educación primaria. *Sigma*, *29*, 29-42.

Fernández, F. (2001). El problema de los “problemas algebraicos”. En P. Gómez y L. Rico (Eds.). Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro (pp. 137-147). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Ferrer, M. (2000). La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. [Tesis de doctorado. Instituto Superior Pedagógico Frank País García]. https://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/mfv/index.htm

Figueras, E. (1995). Leer, escribir y comprender matemáticas. Los problemas. *Suma, 19*, 20-34.

Flick, U. (2004) Introducción a la investigación cualitativa. Ediciones Morata, Madrid.

Flick, U. (2012). *Introducción a la investigación cualitativa* (Vol. 303). Ediciones Morata, SL.

Frabetti (2000), Malditas Matemáticas. Alicia en el País de los números. Madrid: Alfaguara.

Frank, M. L. (1988). La resolución de problemas y las creencias matemáticas. *Arithmetic Teacher.* Enero, 1988.

Gallardo Romero, J. (2001). *Comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación: un estudio exploratorio en escolares de 10 a 14 años.* En Ortiz, M. (Ed.), *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)* (pp. 1-13). Palencia: Universidad de Valladolid.

García García, J. (2014). El contexto cultural y la resolución de problemas: vistos desde el salón de clases de una comunidad Ñuu Savi. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(1), 50-73.

García García, J. J. (1998). La creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo. *Revista Educación y pedagogía*. Volumen X N° 21. Mayo – agosto 1998.

García-García, J., Rodríguez, F. M., & Navarro, C. (2015). Las estrategias utilizadas por los niños Tee Savi en la resolución de problemas aritméticos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(2), 213-244.

Garrett, R. M. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *6*(3), 224-230.

Giaconi, V., Perdomo-Díaz, J., Cerda, G. y Saadati, F. (2018). Prácticas docentes, autoeficacia y valor en relación con la resolución de problemas de matemáticas: diseño y validación de un cuestionario. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 36*(3), 99-120.

Gil Ignacio, N., Blanco Nieto, L. J., & Guerrero Barona, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*.

Godino, J. y Batanero, C. (2009). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Colección digital Eudoxus*, (11).

Godino, J. D., Batanero, C., & Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. *homenagem ao professor Oscar Sáenz Barrio. Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar*, 165-185.

Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa* (Vol. 1). Madrid: Morata.

Goetz, J. P., & Lecompte, M. D. (1984). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa* (Vol. 1). Madrid: Morata.

Gómez, N. L., y Suárez, L. (2009). Propagación de la excelencia académica como valor a través de la enseñanza de la matemática. *Investigación y postgrado*, *24*(1), 74-114.

Gonzáles Pienda, J. A., Núñez, J. C., Álvarez Pérez, L., González Pumariega, S. y Roces Montero, C. (1999). Comprensión de problemas aritméticos en alumnos con y sin éxito. *Psicothema*, *11*(3), 505-515.

González Dosil, M. C. (2006) *Propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la forma semipresencial en la Disciplina de Geometría* [Tesis de doctorado. Instituto Superior pedagógico "Enrique José Varona", Facultad de Ciencias Exactas].

González González, W. Y. (2018). Resolución de problemas, una estrategia para aprender estadística. [Tesis de maestría. Universidad Externado de Colombia].

González Ramírez, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo. *Revista de Investigación educativa*, *18*(1), 175-199.

Granados, C. y Rodríguez Expósito, F. (2011). Implementación de un procedimiento generalizado para la resolución de problemas en el área de matemáticas en básica primaria. *Escenarios*, *9*(2), 37-45.

Guirles, J. R. G. (2004). El cálculo en el primer ciclo de primaria. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (25), 71-97.

Gusmao, T. C. R. S., Cajaraville, J. A. y Labraña, P. A. (2004). Algunos matices de estrategias cognitivas-metacognitivas durante resolución de problemas con estudiantes de ESO. *Boletín das ciencias*, *17*(56), 41-42.

Irazoque, G. (2005). Más problemas ¿Para qué? *Educación química*, *16*(2), 279-283.

Izagirre, A., Caño, L., y Arguiñano, A. (2020). La competencia matemática en Educación Primaria mediante el aprendizaje basado en proyectos. *Educación MatEMática*, *32*(3).

Jiménez Márquez, L. (2008). *La activación del conocimiento real en la resolución de problemas: un estudio evolutivo sobre los problemas no-rutinarios de adición* [Tesis de doctorado. Universidad Complutense de Madrid]. https://eprints.ucm.es/id/eprint/8621/1/T30732.pdf

Jiménez, M. T. M. (2007). La reflexividad como herramienta de investigación cualitativa (III). *NURE investigación: Revista Científica de enfermería*, (30), 13.

Jiménez, L., y Ramos, F. J. (2011). El impacto negativo del contrato didáctico en la resolución realista de problemas. Un estudio con alumnos de 2º y 3º de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *9*(3), 1155-1181.

Juidías Barroso, J. y Rodríguez Ortiz, I. D. L. R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación, 342, 257-286.*

Labarrere Sarduy, A. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. Editorial Pueblo y Educación.

Lachat Leal, Christina (2008). Aprendizaje de resolución de problemas de traducción: Herramientas para el desarrollo cognitvo de los estudiantes, en PEGENAUTE, L.; DECESARIS, J.; TRICÁS, M. y BERNAL, E. [eds.] *Actas del III Congreso Internacional de la Asociación Ibérica de Estudios de Traducción e Interpretación. La traducción del futuro: mediación lingüística y cultural en el siglo XXI. Barcelona 22-24 de marzo de 2007*. Barcelona: PPU. Vol. n.º 2, pp. 47-55. ISBN 978-84-477-1027-0. Versión electrónica disponible en la web de la AIETI. http://www.aieti.eu/pubs/actas/III/AIETI_3_CLL_Aprendizaje.pdf

León, J., y Youn, M. J. (2016). El efecto de los procesos escolares en el rendimiento en Matemática y las brechas de rendimiento debido a las diferencias socioeconómicas de los estudiantes peruanos. *Revista Peruana de Investigación Educativa,* vol. 8, pp. 149-180

Lera, C. G. D. y Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y Creencias entorno a la Resolución de Problemas de Profesores y Estudiantes de Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 191-208.

Liñán García, M. M., Barrera Castarnado, V. J. e Infante Infante J. M. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *EA, Escuela Abierta*, *17*, 41-63.

Lira y Rencoret (1994). Simón y las Matemáticas. Texto de Matemática para Quinto Año Básico. Libro del Alumno. Editorial Andrés Bello.

Llivina, M. (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. [Tesis de doctorado. Universidad Pedagógica Enrique José Varona]. https://nanopdf.com/download/una-propuesta-metodologica-para-contribuir-al-desarrollo-de-la_pdf

López-Rupérez, F. (1991). Organización del conocimiento y resolución de problemas en Física. *Centro de Publicaciones del MEC, Madrid*.

Lorente, A. (s.f). Historia del álgebra y de sus textos. Obtenido de: http://educagratis.cl/moodle/pluginfile.php/77582/mod_resource/content/1/Historia_del_algebra_y_de_sus_textos.pdf

Lozada, J. A. D. y Fuentes, R. D. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*, 57-74.

Luceño Campos, J. L. (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula*. Aljibe.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Editorial Labor.

Mato, D. y de la Torre, E. (2009). *Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico.* En González, María José; González, María Teresa; Murillo, Jesús (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 285-300). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Mato-Vázquez, D., Espiñeira, E. y López-Chao, V. A. (2017). Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles educativos*, *39*(158), 91-111.

Maza, C (1991). Multiplicar y dividir. A través de la resolución de problemas. Madrid. Aprendizaje-Visor.

Mazur, B. (2008). *Números imaginados (en especial la raíz cuadrada de-15)*. Libraria.

Mendoza, L. (2018). Estrategias heurísticas para incrementar la capacidad de resolución de problemas en estudiantes de educación secundaria. *SCIÉNDO*, *21*(2), 205-211.

Mercado, Andres; Morales, José (2018). *Influencia del contexto real, simulado y evocado en los modelos de resolución de problemas de Polya, Mayer y Schoenfeld utilizados por los estudiantes de 5° de básica primaria para la resolución de problemas matemáticos aplicado en el pensamiento numérico.* En Valbuena, Sonia; Vargas, Leonardo; Berrío, Jesús (Eds.), Encuentro de Investigación en Educación Matemática (pp. 167-172). Puerto Colombia, Colombia: Universidad del Atlántico.

Miguélez, B. A. (2016). Investigación social cualitativa y dilemas éticos: de la ética vacía a la ética situada. *EMPIRIA. Revista de Metodología de las Ciencias Sociales*, (34), 101-119.

Míguez, Á. (2003). Los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas en las actividades de aprendizaje de matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 141-149.

Ministerio de Educación (2005). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular – Proceso de Articulación.

Ministerio de Educación (2009). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular.

Ministerio de Educación (2015). Rutas del Aprendizaje. Versión 2015 ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? V ciclo. Área Curricular Matemática 5° y 6° grados de Educación Primaria.

Ministerio de Educación (2016). Currículo Nacional de Educación Básica Regular.

Ministerio de Educación de Chile (2010). Niveles de Logro 8° Básico para Educación Matemática. SIMCE.

Ministerio de Educación y Cultura (s.f). Diseño Curricular - 7° año E.G.B. Matemática.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). PISA 2012 Resolución de problemas de la vida real. Resultados de Matemática y lectura por ordenador. Informe español. Edita Secretaría General Técnica. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

Ministerio de Educación. (2012). Módulo de Resolución de Problemas - Resolvemos 1 MD Manual del docente. Perú: El comercio S.A

Minotta-Valencia, C. (2014). Caracterización de las fases en la resolución de problemas y su análisis, a través del reporte verbal del pensamiento. *Horizontes Pedagógicos*, *16*(1).

Mintzberg, H., Quinn, J. B. y Voyer, J. (1997). *El proceso estratégico: conceptos, contextos y casos*. Pearson Educación.

Miranda Sánchez, F. E. (2021). Monitoreo pedagógico y la mejora de los aprendizajes en educación básica regular de Huaraz-Ancash 2017.

Miró, J. (2003). Situaciones y problemas: cómo preparar a los alumnos para lo que se les avecina. *Actas de las IX Jornadas de Enseñanza Universitaria de Informática, Jenui*, 21-28.

Mora Nawrath, H. (2010). El método etnográfico: origen y fundamentos de una aproximación multitécnica. Forum: Qualitative Social Research, Vol. 11, No 2, Art.10, mayo 2010.

Mora Sánchez, J. A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (3), 101-115.

Múnera, John (2009). *Diseño de situaciones problema dinamizadoras de pensamiento matemático escolar.* Curso dictado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.

Muñiz, J. C. I., Miranda, T. L., & Río, J. F. (2017). La enseñanza de las matemáticas a través del aprendizaje cooperativo en 2º curso de educación primaria. *Contextos educativos: Revista de educación*, (2), 47-64.

Muñoz, L. y Lassalle, P. (2002). Problemas matemáticos en el aula: más y más problemas. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (21), 6-36.

Nápoles, V. J. (2005). Aventuras, venturas y desventuras de la resolución de problemas en la escuela. *Cuenca del Plata, Corrientes, Argentina. Obtenido de http://www. edutecne. utn. edu. ar/napoles-valdes/problemas-02. pdf.*

Naranjo Acosta, A. y Fernández Chelala, R. M. (2019). Fundamentos teóricos e históricos para la solución de problemas aritméticos en el cuarto grado de la educación primaria. *Atlante Cuadernos de Educación y Desarrollo*, ISSN: 1989-4155 (abril).

Noda Herrera, M. A. C. (2000). Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación. [Tesis de doctorado. Universidad de La Laguna]. https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/12339/cp130.pdf?sequence=1

Noda, A., Hernández, J. y Socas, M.M (1999). Estudio del comportamiento de alumnos de Magisterio en la resolución de problemas mal definidos. *El Guiniguada*.- N°8/9.

OCDE (2006). PISA 2006. Marco de Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.

Oriol y Bernadet, José (1840). La Aritmética de las escuelas y del comercio y el aljebra mercantil. Segundo Tomo. Tarragona, Imprenta de Andrés Granell.

Osorio, D. B. (2009). Aprendizaje en el entorno del e-learning: estrategias y figura del e-moderador. *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal, 6*(2), 1-9.

Patton, MQ (1990). *Métodos de investigación y evaluación cualitativa*. Publicaciones SAGE, inc.

Penagos-Corzo, J. C. y Aluni, R. (2000). Creatividad, una aproximación. *Revista Psicología*, 1-8.

Perales Palacios, F. J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias, 11*(2), 170-178.

Pérez Ariza, K., Álvarez García, E. y Breña Rivero, C. (2016). Reflexiones sobre el concepto de problema matemático. *Revista Bases de la Ciencia*, 1(1), 25-34.

Pérez Ortiz, J. (2016.). *Un ambiente de aprendizaje para reconocer las estrategias de los estudiantes de grado cuarto en la solución de problemas multiplicativos simples de tipo razón.* [Tesis de maestría. Universidad de La Sabana]. http://hdl.handle.net/10818/28655

Pérez Zorrilla, M. J. (2005). Evaluación de la comprensión lectora: dificultades y limitaciones. *Revista de educación*, número extraordinario 2005, pp. 121-138.

Pérez, P. (2000). Psicología Educativa. Piura: Universidad de Piura, 2000.

Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 169-194.

Pifarré, M., y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 297-308.

Pino Ceballos, J. y Blanco, J. L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla*, (38), 63-88.

Pino Ceballos, J. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad.

Pinto Molina, M. (1989). Introducción al análisis documental y sus niveles: el análisis de contenido. *Boletín de la ANABAD*, *39*(2), 323-342.

Pinto-Bazurco, J. F. (2020). *Los retos del cambio climático: Un estudio sobre las respuestas legales del Perú*. Fondo editorial Universidad de Lima.

Piñeiro, J. L., Pinto, E., y Díaz-Levicoy, D. (2015). ¿Qué es la Resolución de Problemas? *Boletín REDIPE*, *4*(2), 6-14.

Plaza, L y González, J. (2019). *Evolución de la resolución de problemas matemáticos. Análisis histórico a partir del siglo XVI.* En Pérez-Vera, Iván Esteban; García, Daysi (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 168-176). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Poggioli, L. (1999). Enseñando a aprender. *Módulo la metacognición. Fundación Polar*, 32.

Polya, G (1992). Cómo plantear y resolver problemas. México. Trillas.

Prieto, M. D. L. A., González, M. y González, O. (2003). Para todo contenido de geometría plana: ¿existirán movimientos que lo sistematizan? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *16*(3), 1-4.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos escolares (nº 8) Síntesis.

Quintana Peña, A. (2006). Metodología de investigación científica cualitativa. En Quintana, A. y Montgomery, W. (Eds.) (2006). *Psicología: Tópicos de actualidad*. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: *Diccionario de la lengua española*, 23.ª ed., [versión 23.4 en línea]. <https://dle.rae.es> [22 de agosto de 2018].

Reséndiz, L., Block, D. y Carrillo, J. (2017). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. *Educación matemática*, *29*(2), 99-123.

Rizo Cabrera, C. y Campistrous Pérez, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *2*(2-3), 31-45.

Rizo Cabrera, C. y Campistrous Pérez, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 2* (2-3), 31-45. [Fecha de Consulta 15 de Enero de 2021]. ISSN: 1665-2436. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335/33520304

Roa, R., Batanero, C., Godino, J y Cañizares, J (1997). Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avançada. *Epsilon*, *36*, 433-446.

Rodríguez, M., Gregori, P., Riveros, A. y Aceituno, D. (2017). Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. *Educación matemática*, *29*(2), 159-186.

Rojo Martínez, A. (2010). La identificación de alumnos con altas habilidades: enfoques y dimensiones actuales. [Tesis de doctorado. Universidad de Murcia]. http://hdl.handle.net/10201/10036

Romero Medina, A. y García Sevilla, J. (2008). La elaboración de problemas ABP. En J. García Sevilla (Coord.), El aprendizaje basado en problemas en la enseñanza universitaria. (pp. 37-55). Murcia: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia. I.S.B.N.: 978-84-8371-778-3

Romero Murillo, A. E. (2012). Comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en alumnos de segundo grado de primaria del distrito de Ventanilla-Callao. [Tesis de grado académico de maestro en Educación con Mención en Problemas de Aprendizaje. Universidad San Ignacio de Loyola]. http://repositorio.usil.edu.pe/handle/123456789/1287

Rosales Molina, M. J. y Salvo Molina, E. G. (2013). Influencia de la comprensión lectora en la resolución de problemas matemáticos de contexto en estudiantes de quinto y sexto año básico de dos establecimientos municipales de la comuna de Chillán. [Proyecto de título de pregrado. Universidad del Bío-Bío]. http://repobib.ubiobio.cl/jspui/handle/123456789/1868

Salazar Yauta, E. (2018). Autonomía conductual y autogestión del aprendizaje en los estudiantes de primero de secundaria de la Institución Educativa “Mariscal Ramón Castilla” Anta-Cusco. [Tesis de maestría. Universidad César Vallejo]. https://hdl.handle.net/20.500.12692/33998

Salvador, A (2013). Matemáticas 2° de ESO. www.apuntesmareaverde.org.es

Salvat, B. G. (1990). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas mal estructurados. *Revista de educación, 293*, 415-433.

Sanabria, Giovani (2009). *Revista digital Matemática, Educación e Internet* (www.cidse.itcr.ac.cr/). Vol. 9, No 2. (Feb., 2009)

Sánchez, J. M. C., Vicente, S., Manchado, E. y Múñez, D. (2014). Los problemas de matemáticas escolares de primaria, ¿son solo problemas para el aula? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 261-279.

Sánchez, K. M. O., Osollo, J. E. R. y Martínez, L. F. F. (2010). Pertinencia de la formalización de dominios semiformalmente definidos en el análisis inteligente de datos. *CULCyT: Cultura Científica y Tecnológica*, *7*(40), 53-68.

Sánchez, N. M. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Pedagogía Universitaria, 8*(3).

Santos, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En Actas del XII Simposio de la SEIEM. Badajoz. SEIEM, 157-187

Sigarreta, J. M., Locia, E., y Bermudo, S. (2011). Metodología para el tratamiento de los problemas matemáticos. *Revista Premisa*, *13*(48), 28-40.

Sigarreta, J. M., Rodríguez, J. M., y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática venezolana*, *13*(1), 53-66.

Sigarreta, J. M., y Arias, L. R. (2003). La resolución de problemas: Un recurso para el desarrollo de la formación de la personalidad. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*, *20,* 13-22.

Sigarreta, J. M., y Ruesga, P. (2004). Estrategia para la Resolución de Problemas, utilizando las Funciones. *Docencia Universitaria*, *5*(1-2), 75-95.

Sigarreta, J., y Torres, J. (2003). Utilización de los problemas matemáticos en la formación de valores. *Revista EMA*, *8*(2), 208-225.

Silva Laya, M., Rodríguez Fernández, A. y Santillán González, O. (2009). Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos de 6to. Grado de primaria. *Universidad Iberoamericana. México.*

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Ediciones Morata.

Sorando, J.M. (21013). Problemas escolares vs problemas reales (1). Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ISSN 1130-488X, Nº 73, 2013, págs. 73-79.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Sternberg, R. J. y Spear-Swerling, L. (1999). *Enseñar a pensar*. Santillana.

Suárez, E. E. A. y Arenas, J. F. R. (2013). La saturación teórica en la teoría fundamentada: su de-limitación en el análisis de trayectorias de vida de víctimas del desplazamiento forzado en Colombia. *Revista colombiana de sociología, 36*(2), 93-114.

Tárraga, R. (2008). ¡Resuélvelo! Eficacia de un entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas matemáticos en estudiantes con dificultades de aprendizaje. [Tesis de doctorado. Universidad de Valencia]. http://hdl.handle.net/10803/10232

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1994). Introducción a los métodos cualitativos de investigación (2ª reimpresión). Ediciones Paidós Ibérica S.A.

Toboso Picazo, J. (2004). *Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos* [Tesis de doctorado. Universitat de València]. http://hdl.handle.net/10803/10090

Turnes, P. B., Lázaro, M., Santos, D., Requero, B. y Gascó, M. (2015). Pensamiento y lenguaje. *Psicología médica* (pp. 137-156).

Valdés, C. E. A. (2016). El desarrollo de la creatividad en la enseñanza de la Matemática. El reto de la educación Matemática en el siglo XXI. *Revista Conrado, 12*(54).

Valle Espinosa, M. C., Juárez Ramírez, M. A. y Guzmán Ovando, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 9* (2).

Vanegas, C (2010). La investigación cualitativa: un importante abordaje del conocimiento para enfermería. *Revista Colombiana de Enfermería* • Volumen 6 Año 6 • Págs. 128-142

Vasilachis de Gialdino, I. (Coord.) (2019). *Estrategias de investigación cualitativa: Volumen II* (Vol. 240022). Editorial Gedisa.

Vázquez, E. A. (2015). ¿Cómo se enseñan las matemáticas en la escuela primaria? En Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 11: Educación Primaria*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Velasco. H. y Díaz de Rada, Á (2015). *La lógica de la Investigación etnográfica. Un modelo de trabajo para etnógrafos de escuela*. Madrid: Editorial Trotta.

Vesga-Bravo, G. J. y Escobar-Sánchez, R. E. (2018). Trabajo en solución de problemas matemáticos y su efecto sobre las creencias de estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, *9*(1), 103-114.

Vila, A. y Callejo, M. (2005). Matemáticas para aprender a pensar El papel de las creencias en la resolución de problemas Ediciones Narcea SA Madrid.

Vilanova, S. (2003). La resolución de problemas en la educación matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *16*(2), 502-509.

Villalobos Fuentes, X. (2008). Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *REICE: Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *6*(3), 36-58.

Villarreal Larrinaga, O. y Landeta Rodríguez, J. (2010). El estudio de casos como metodología de investigación científica en dirección y economía de la empresa. Una aplicación a la internacionalización. *Investigaciones europeas de dirección y economía de la empresa*, *16*(3), 31-52.

ANEXOS

ANEXO A: Materiales para el profesor

Las Fracciones

Si bien es cierto que cuando los alumnos de Quinto Grado se introducen en el tema de las fracciones ya tienen una noción de las mismas y son capaces de conceptuarla. Así, si preguntamos a un chico cualquiera de quinto o sexto grado qué es una fracción la respuesta estará dirigida a definirla como "una parte de la unidad que ha sido dividida en partes iguales". Sin embargo, el tema de las fracciones es uno en el que gran parte de los alumnos de los grados superiores tienen dificultad para usar en diferentes situaciones y llegar a un trabajo matemático correcto y comprensivo. Si bien un alumno puede definir la fracción como una parte (o cada una de las partes) de una unidad que ha sido divida en partes iguales, no necesariamente es capaz de reconocer esa parte como una unidad que a su vez puede ser dividida y que esa nueva parte (o fracción), aun cuando representara simbólicamente *más* que la parte de la que ha sido tomada, es menor que ésta, en ese contexto específico. Definir únicamente, repitiendo textos dados por otros, no es sinónimo de comprender.

Antes de iniciar cualquier actividad sobre el trabajo con fracciones en los grados superiores es necesario saber si estos alumnos no sólo definen lo que es una fracción sino si son capaces de tener la noción correcta de la misma, en cualquier contexto. No porque seamos capaces de expresar correctamente una definición necesariamente comprendemos lo que decimos, haciéndolo nuestro. Todo trabajo, entonces, debe iniciarse con una introducción del tema, aunque éste no necesariamente parte de cero, como en nuestro caso.

Ya que hemos mencionado la palabra *contexto* en el párrafo anterior, en primer lugar, cabe recordar que las fracciones tienen diferentes interpretaciones relacionadas con el contexto en el que pueden aparecer. Todas se desarrollan en el nivel de enseñanza primaria. En el libro Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000), se dice que "además de comprender los números naturales, se puede animar a los niños para que entiendan y representen fracciones usadas en contextos familiares, tales como ½ de una galleta o 1/8 de una pizza y para ver las fracciones como parte de una unidad entera o de una colección. Los profesores deberían ayudar a los alumnos a desarrollar la noción de fracción como división de números. Y, en los niveles medios, en parte como una base para el estudio de la proporcionalidad, los alumnos necesitan dar solidez a su conocimiento de las fracciones como números"[52]. Las distintas interpretaciones sobre fracción son: la relación parte-todo y la medida, la fracción como cociente, la fracción como razón y la fracción como operador. Una definición de fracción en un contexto no necesariamente lleva a su comprensión y aplicación correcta en otro. Muchas veces los docentes desarrollamos el tema en un contexto y, en su resolución y aplicación abarcamos muchos más, lo que lleva a una desorientación de los estudiantes y a un aprendizaje sin sentido. Por ello, es necesario abarcar todas las interpretaciones para que el alumno pueda tener un mejor manejo del tema, en cualquier contexto y pueda darle sentido.

Evidentemente, la definición que, generalmente, dan los alumnos de cualquier grado de primaria, que tenga conocimiento de este tema, se corresponde con la relación parte-todo. Sin embargo, aún para comprender esta relación, que es la que didácticamente[53] introduce el tema de las fracciones, los alumnos necesitan desarrollar ciertos atributos expuestos por Piaget, Inhelder

---

[52] Principios y Estándares para la Educación Matemática (2000) Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Nacional Council of Teachers of Mathematics NCTM. Página 35.

[53] Didácticamente, la relación parte-todo requiere de menos conocimientos previos por parte de los alumnos y menos relaciones entre los mismos.

y Szeminska (1960) y ampliados por Payne (1976)[54] que los lleva a reconocer que distintas partes de un mismo todo, obtenidas con diferentes divisiones, nos dan la misma parte de la totalidad, lo que lleva a identificar una misma relación parte-todo expresada con nombres equivalentes (fracciones equivalentes).

Pasando a desarrollar el tema que nos interesa seguramente usted ya ha pensado en la situación que puede involucrarlo. Partimos de la idea que los alumnos de Quinto Grado conocen las fracciones en un contexto de relación parte-todo y que es necesario sumergir el tema en otro contexto, ampliando su aplicación; por ejemplo, la fracción como cociente, operador o razón. La interpretación de fracción como cociente puede no ofrecer dificultad si se ve ésta como la expresión de una división que ‘no se puede’ desarrollar o no es necesario hacerlo; basta con expresarla de manera fraccionaria, como otra forma de expresar una cantidad, quizá porque convenga mejor de esta forma. Los alumnos deben tener experiencia en expresar de diferente manera una cantidad[55] y ésta es otra manera, siempre dentro de un contexto necesario. Claro, llegará un momento en el que esa división se tenga que efectuar, porque es necesario, surgiendo de esta manera los decimales o números decimales.

La fracción como operador ofrece un nivel mayor de dificultad puesto que aquí la fracción no es una manera distinta de expresar una cantidad sino que cumple una función dentro de una operación: a partir de ella, de su manipulación, una cantidad se transforma.

Contextualizar la idea anterior nos lleva a pensar en una situación en la que es necesario tomar una parte de un todo, un todo que puede ser un conjunto de cosas o una parte de algo (expresada en fracción). En el contexto culinario, al analizar las recetas de cocina nos damos cuenta que ciertas cantidades se expresan en fracciones. Por ejemplo: agregue ¼ de kilo de mantequilla. El asunto no pasa a más porque la unidad de referencia es 1 (un kilo) y cualquier multiplicación o división por 1 nos da la misma cantidad. En este caso, dividimos la unidad entre cuatro y tomamos una parte de ella. Podemos plantearnos las siguientes preguntas: ¿Qué pasa si la unidad de referencia se duplica o triplica?, es decir, ¿si en lugar de un kilo de mantequilla tenemos dos o tres? En este caso, ¿el ¼ de kilo pedido representa la misma cantidad, es decir, tiene el mismo valor? Ante la interrogante, los alumnos pueden formular diferentes conjeturas o dar diferentes ideas. Es necesario destinar un tiempo para que aquellas preguntas que formulamos a los alumnos sean respondidas y explicadas por los propios alumnos, de lo contrario pierden su valor. Estas preguntas no son para llenar espacios o para ser respondidas únicamente por el maestro, quien en un principio las formula, sino para que el alumno reflexione y a partir de ellas pueda construir el nuevo conocimiento de ahí que precisen un tiempo dentro del desarrollo de la actividad.

Bien, de acuerdo a su reflexión, los alumnos pueden expresar que al duplicarse el total, el ¼ también se duplica o triplica. En esta parte hay que tener cuidado pues algunos alumnos expresan equivocadamente que el doble de ¼ es 1/8 y el triple 1/12[56]. ¿Cómo expresar, entonces, esa transformación de la cantidad? En un principio es ¼ de 1, luego, ¼ de 2 o ¼ de 3, porque la situación (el estado-unidad) cambia, así “¼” va a transformar a 1, 2 y 3 respectivamente. En el primer caso, ¼ de 1 es igual a ¼; en el segundo ¼ de 2 es igual a… y en el tercero, ¼ de 3 es igual

---

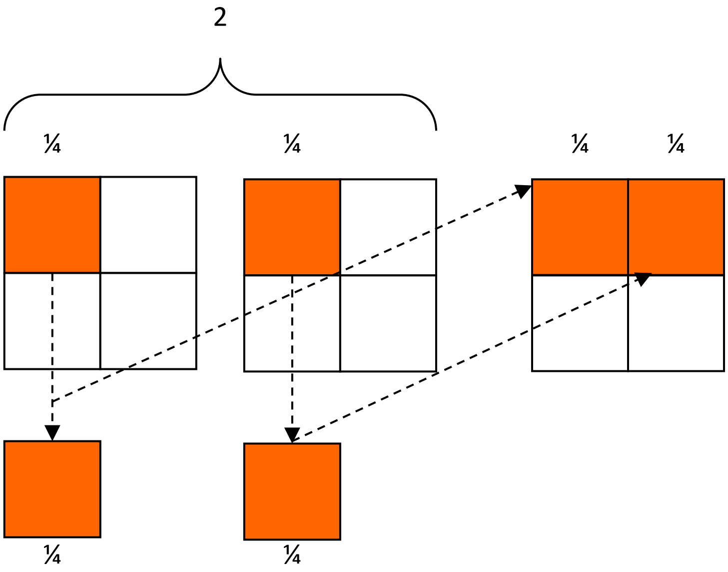
[54] Véase: Llinares Ciscar, S y Sánchez García, M. (1988) Fracciones. Editorial Síntesis S.A. Madrid. Páginas 80-81.

[55] Por ejemplo, 22 es igual a dos decenas más dos unidades o 22 es igual a 10x2+2, etc., lo que es un indicio de comprensión de los números por parte de los alumnos.

[56] Muchas de las reflexiones de los alumnos son externas a la naturaleza del tema. Generalmente el docente da la receta o paso para que el alumno “comprenda” lo que hace, por ejemplo: “cuando divides un número natural por una fracción el resultado es una cantidad mayor”, pero ante esta “receta”, que es correcta, los alumnos tienen a generalizar por el efecto más no por la naturaleza de la acción. Además, sus conclusiones son erróneas. En este contexto, si dividimos 2 entre ½ ¿el resultado, que es 4, es mayor que 2? ¿Qué representa 4 y qué 2?

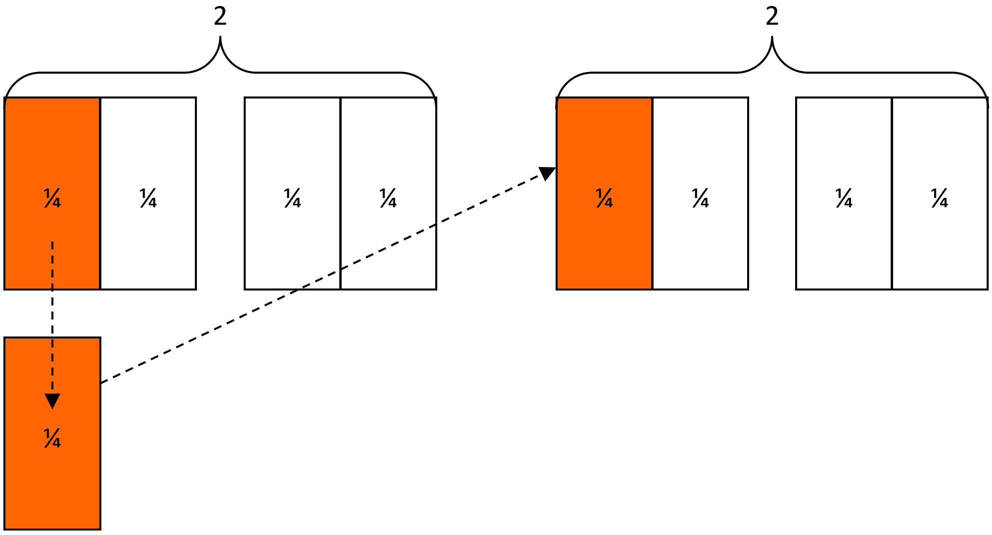
a… ¿Qué haremos para saber exacta y comprensivamente cuánto es y cómo se transforma esa cantidad?

El tema de las fracciones, en su inicio, requiere de la representación gráfica. Por ello, se recomienda que se les permita a los alumnos representar a través de dibujos su pensamiento matemático, puesto que los alumnos aún no son capaces de dominar ese pensamiento y retenerlo en la memoria. Pues bien, al fraccionar, lo primero que hacemos es dividir, de ahí que la primera acción gráfica (y por ende simbólica, al menos desde el punto de vista lógico) sea la de dividir la unidad en tantas partes como exprese el denominador de la fracción; luego, se toma una. En segundo lugar, esa cantidad, la que se genera, es la que se duplica, por lo que hay que "repetirla" tantas veces según sea el caso. Gráficamente tenemos:



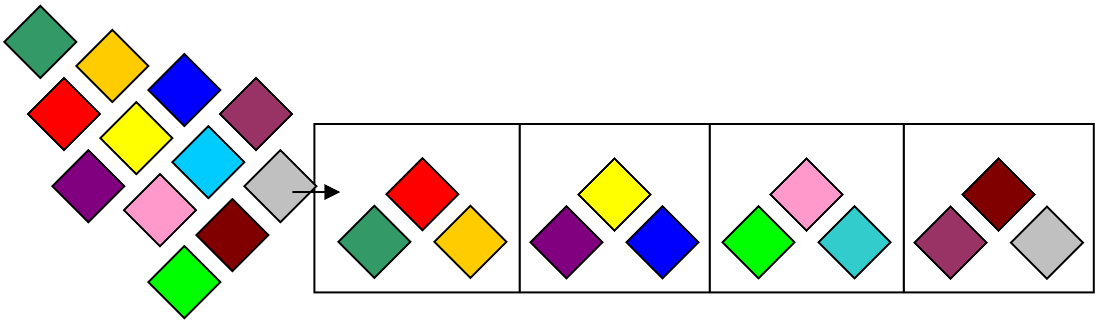
Grafica 1

Así, ¼ de 2 es igual a 2/4. La expresión "¼ de 2" indica "duplicar" ¼ que traducido simbólicamente quedaría "¼ x 2", que es igual a 2/4. De ahí que ¼ de 2 es igual a ¼ x 2 = 2/4. También se puede realizar la siguiente gráfica



Gráfica 2

En este caso, “¼ de 2” también representa los 2/4, basta fijarse en las gráficas 1 y 2 pues la parte sombreada tiene el mismo valor. Algo parecido ocurre con ¼ de 3, ya que al triplicar multiplicamos por 3. Sin embargo, ¿qué pasa cuando el estado-unidad (la situación) ya no es 2 o 3 sino 12, por ejemplo? La acción se traduciría en “¼ de 12”. Al generalizar, según los razonamientos anteriores, en el que duplicamos, triplicamos, etc. la fracción transformadora, los alumnos pueden escribir: 12/4, puesto que se repetiría doce veces. Como esta fracción representa una división que puede realizarse ya que es posible y exacta, el cociente sería 3, de ahí que ¼ de 12, rombos por ejemplo, quede representado por 3 (rombos). En estos casos, ¿qué papel cumple la fracción? Como habíamos visto, de “operador” pues transforma una cantidad.



Gráfica 3

Como podemos observar, el razonamiento empleado por los alumnos puede ser variado. Este tipo de situaciones nos debe llevar, como docentes, a permitir que los alumnos apliquen las diferentes operaciones con las fracciones como una acción que pueden manejar y analizar dicha acción y sus resultados. Por ejemplo, en el caso anterior, en el que ¼ de 2 es 2/4, ¼ de 3 es ¾ y ¼ de 12 es 3, intentar ver cómo se va transformando el estado final y cuando el denominador tiende a “desaparecer”.

En este caso, se pueden plantear actividades de reforzamiento del siguiente tipo. Se les permite a los alumnos elaborar una tabla de doble entrada en la que la primera columna indica el estado situación y la primera fila de la segunda columna la fracción transformadora (anexo 1).

El problema que se puede observar cuando los alumnos manipulan fracciones, o cualquier tema matemático, es que muchas veces su aprendizaje es memorístico. Sabemos que ciertos conocimientos matemáticos deben ser memorizados; pero su aprendizaje, no. Cuando un alumno no recuerda una fórmula, o un algoritmo específico, si su aprendizaje es únicamente memorístico y sin sentido, generalmente no es capaz de idearse un camino según sus conocimientos previos y sus razonamiento; por el contrario, cuando es capaz de recordarlo y usarlo adecuadamente, aun cuando se haya equivocado en una parte (al operar, o escribir la fórmula, por ejemplo), es capaz de darse cuenta; su actuación se centra en todo el proceso seguido, relacionándolo; sin importar únicamente el producto final. Proceso y producto son importantes cuando nos enfrentamos a cualquier problema matemático: no sólo qué camino seguir sino cuál es el resultado de seguirlo. Los maestros debemos permitir que los alumnos se equivoquen[57], no en la aplicación, sino en la construcción del conocimiento; sólo así puede construirlo

---

[57] Se requiere una postura abierta del docente o la docente ante los errores de sus estudiantes. Es necesario un ‘contrato’ entre maestro y alumno en el que los últimos hagan uso de esos errores en el aprendizaje del nuevo conocimiento. En palabras de Cifali, 1994, el gran desafío para la didáctica hoy en día es el tratamiento metodológico de los errores como materia prima del aprendizaje y desarrollo didáctico.

significativamente y puede darse cuenta cuándo está siguiendo el camino correcto y cuando no, incluso antes de ejecutar la fase siguiente.

Volviendo a nuestra actividad, nos centraremos en las operaciones con fracciones: sumas y restas con fracciones heterogéneas y multiplicación y división de fracciones.

La suma y resta con fracciones homogéneas, generalmente es un requisito previo para la introducción y desarrollo de las sumas y restas con fracciones heterogéneas. Antes de desarrollar cualquiera es necesario que el alumno sea capaz de comprender que se puede operar con ellas. De alguna manera el primer gráfico permite intuir que las fracciones pueden sumarse, ya que se pueden sumar, o juntar, las partes de un todo.

La suma y resta de fracciones heterogéneas requiere de ciertos conocimientos matemáticos, el primero: mínimo común múltiplo, ya que éste es el que se le "sacará" a los denominadores de las fracciones que hay que sumar o restar. Para llegar a ello, es necesario que los alumnos se den cuenta que cuando queremos sumar o restar fracciones heterogéneas es importante transformar esos denominadores. Plantear la situación a partir de una experiencia concreta como saber ¿qué fracción total representa los ½ de una pizza y los ⅓ de otra, del mismo tamaño, para saber con cuánta pizza en general cuenta? (si quiero hacer una nueva repartición) nos lleva a crear la necesidad de sumar esas cantidades (fraccionarias). Claro está que si no conocemos el algoritmo no podemos hallar el resultado rápidamente, así debemos permitir que los alumnos piensen, a partir de lo que saben, cómo hacerlo.

Ese conocimiento previo e inmediato, y que es el que los alumnos tomarán, es el de suma y resta de fracciones homogéneas: para sumar o restar fracciones homogéneas basta sumar o restar los numeradores y colocar el mismo denominador. ¿Por qué colocar el mismo denominador? En este caso, la idea es que las partes en que se dividen las unidades (o la unidad) siguen teniendo el mismo valor, por lo que el denominador no cambia[58]: si tengo ¼ y añado otro ¼, tendré 2/4, estoy sumando cantidades iguales. La novedad, ahora, es que las partes son distintas y por tanto, el valor de cada una cambia. ¿Qué hacer? ¿Qué es lo que permite, en el primer caso, sumar con facilidad? ¿Cómo hacer, entonces, que esos valores sean iguales en ambos casos?[59] El tema de equivalencia de fracciones cobra importancia en este caso, por lo que hay que traerlo a la memoria. Habíamos visto, en párrafos anteriores, que las fracciones equivalentes representan el mismo valor, y esto gracias a permitir que los alumnos dividan la misma unidad de diferentes maneras: al hacerlo, las fracciones son distintas, y al hacer coincidir dos de ellas por representar el mismo valor, se dice que las fracciones son equivalentes. Pues bien, las fracciones equivalentes permiten salvar esa dificultad: buscamos dos fracciones equivalentes a cada una de las presentadas que dividan la unidad en partes iguales, volviendo las fracciones que voy a sumar en homogéneas. Esas fracciones equivalentes son 3/6 y 2/6. Encontradas esas fracciones, aplicar la operación es cuestión de rutina: sumamos los numeradores, porque me representa lo que cojo, y colocar el mismo denominador, porque es la unidad básica.

A partir del análisis de la acción realizada, los alumnos pueden simplificar su actividad. A través de hojas de trabajo podemos llevar a los alumnos a reflexionar sobre cómo podemos simplificar el proceso seguido. Lo que hemos hecho es buscar fracciones homogéneas por separado, ¿podemos buscarlas conjuntamente? (anexos 2 y 3).

Para el tema de la multiplicación y división, en la que los alumnos únicamente aplican la "fórmula" dada por el profesor y que, efectivamente, nos lleva a hallar una respuesta, aunque la

---

[58] Siempre se suman unidades de referencia iguales: principio básico para sumar.

[59] Recuérdese que cada pregunta se formula al alumno o grupo de alumnos y debe ser pensada y respondida por ellos.

mayoría de las veces no nos fijemos en el resultado, sin considerar si es lógico o no[60], es preferible que sean los alumnos quienes lleguen a esas conclusiones. Esto les permite razonar y crear formas alternativas de resolver problemas relacionados con este tema.

Otra vez, partimos de una situación que puede ser del ámbito social o puede ser del ámbito de la matemática escolar. Así, la siguiente situación se genera en el ámbito de la matemática escolar.

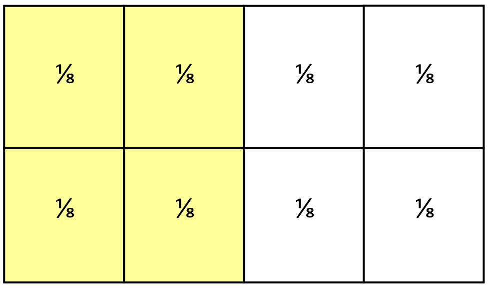
Una vez conocida las fracciones y sabiendo que podemos operar con ellas, al menos sabemos que podemos sumarlas u restarlas, me cabe preguntarles si es posible multiplicar y dividir dos fracciones y cómo podríamos hacerlo, es decir, si podemos descubrir un algoritmo que pueda llevarnos a la solución de manera simbólica. El maestro o la maestra pueden proponer una operación (multiplicación y/o división entre fracciones) para que el alumno interprete esa expresión, es decir, explique con sus propias palabras lo que observa. Así tenemos:

3/5 x 4/8… ¿Qué quiere decir?

Las diferentes opiniones de los alumnos son importantes. Ellos se basarán en lo que conocen de multiplicación de dos números naturales, del papel de ambos elementos según la interpretación que se dé[61]. Evidentemente, otro conocimiento previo es el de multiplicar una fracción por un número natural. Al tratar la fracción como operador, introducimos a los alumnos en la multiplicación de fracciones, sin embargo, este caso es distinto ya que el otro elemento no es un número entero sino otra fracción.

La expresión resaltada en negrita se puede interpretar de la siguiente manera:

- La primera fracción actúa como operador de la segunda.
- Al ser la segunda una fracción no hablamos de cantidades enteras, como 2, 3 o 24, sino de partes de una unidad, en particular los 4/8 de una unidad. En el siguiente ejemplo, los 4/8 corresponden a la parte sombreada:



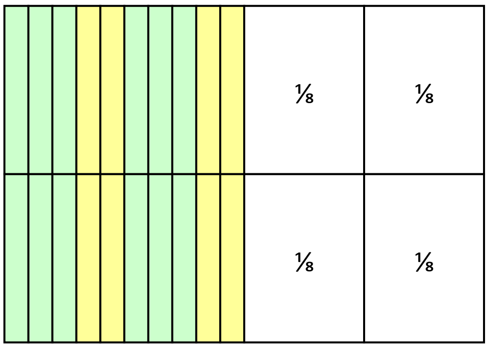
Gráfica 4 (a)

- De esa parte sombreada, sólo cogemos 3/5, por lo que esa parte sombreada ha de sufrir una segunda transformación: se ha de dividir en 5 y se cogerán tres:

---

[60] El alumno únicamente se centra en el procedimiento, para el caso de la multiplicación, si ha multiplicado numerador con numerador y denominador con denominador, y quizá si ha ejecutado bien las operaciones parciales. Para la división de fracciones, la multiplicación se realiza en aspa.

[61] Según la multiplicación se haya visto como sumas sucesivas o como producto cartesiano. Generalmente, el alumno usará la primera interpretación.



Gráfica 5 (b)

- La parte verde son los 3/5 de los 4/8 de la unidad, que se traduce como 3/5 x 4/8.
- En función de la unidad total en la que está incluida, los 3/5 de 4/8 son los 12/40avos[62].

Otra forma de graficar sería la siguiente, en la que para indicar cada tipo de fracción, se hacen cortes distintos (verticalmente para indicar 1/8 y de manera horizontal para los 3/5). Este tipo de gráfica tiene la ventaja de visualizar la fracción final relacionada con el todo:

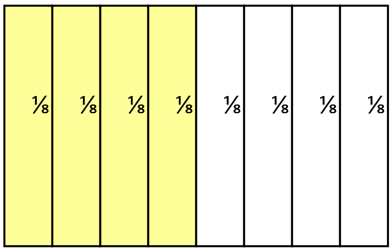


Gráfico 4 (b)

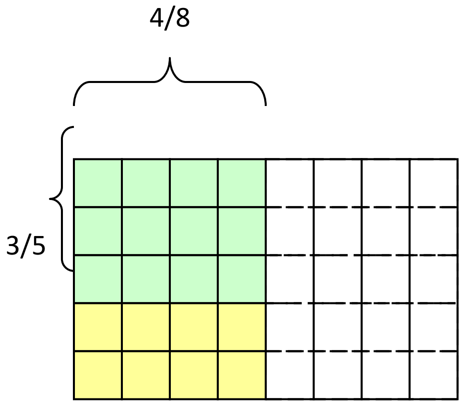


Gráfico 5 (b)

Analizando las fracciones factores y la fracción producto, es fácil ver la relación entre sus numeradores y denominadores:

$$\frac{3}{5} \quad x \quad \frac{4}{8} \quad = \quad \frac{12}{40}$$

La conclusión es evidente: El producto de la multiplicación de dos fracciones es otra fracción. Para hallar sus elementos multiplicamos los numeradores de las fracciones iniciales (u operadores) cuyo resultado es el numerador del producto. Acto seguido multiplicamos los denominadores cuyo resultado corresponde al denominador de la fracción producto. La hoja de trabajo correspondiente se aprecia en el anexo 4. En este caso se puede cuestionar, como actividad de ampliación, sobre qué pasa con los denominadores de las fracciones cuando las que multiplicamos son homogéneas.

La división de fracciones puede seguir el mismo razonamiento. Pienso que una vez inmersos en el mundo matemático del tema específico, las situaciones llamadas "de la vida diaria" dan paso al trabajo (escolar) meramente simbólico, de ahí que no necesitemos contextualizar

---

[62] No incluimos el tema de simplificación de fracciones, aunque si ya se ha trabajado, pueden orientar a que los alumnos simplifiquen esta fracción resultante.

dentro de una situación cotidiana, la división de fracciones. Basta, para el caso, plantear una hoja de trabajo parecida a la aplicada para la multiplicación de fracciones (anexo 5).

Trabajar de esta manera permite poner en juego la noción misma de la fracción y la relación entre parte y unidad, reforzando incluso las ideas previas adquiridas.

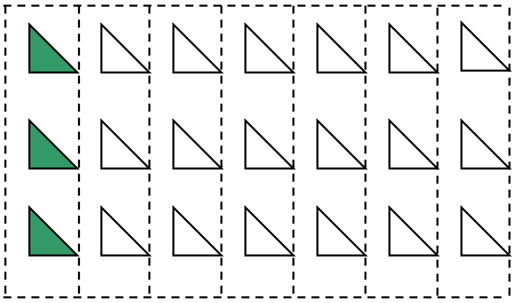
Anexo 1 (Las fracciones)

La Fracción como operador

Al interpretar la fracción como operador, esta cumple una función distinta: expresa una transformación. A continuación te proponemos aplicar distintas fracciones a distintas cantidades (o situaciones iniciales) y hallar la transformación que se genera:

1/7 de 21
5/3 de 15
6/9 de 45
4/6 de 60

1/7 de 21



1/7 de 21 = 3

5/3 de 15

6/9 de 45

4/6 de 60

La relación que guardan la traducción y el producto final se puede expresar de la siguiente manera:

(21/7) x 1 = 3. En el siguiente cuadro escribe dicho proceso para cada uno de los casos propuestos anteriormente.

Fracción como operador	Situación	Proceso	Transformación
1/7	21		
5/3	15		
6/9	45		
4/6	60		

Anexo 2 (Las Fracciones)

Buscamos rápidamente un denominador común a dos denominadores heterogéneos

Para sumar o restar fracciones heterogéneas transformamos estas fracciones en homogéneas buscando fracciones equivalentes a cada una que sean homogéneas entre sí. Por ejemplo:

½→2/4→**3/6**→4/8→…

⅓→**2/6**→3/9→4/12→…

De esta manera, sumamos las fracciones homogéneas que son equivalentes a cada una de las fracciones originales. Al ser equivalentes tienen el mismo valor. Otro caso sería:

2/5→4/10→6/15→8/20→10/25→12/30→14/35→**16/40**→18/45→…

3/8→6/16→9/24→12/32→**15/40**→18/48→21/56→24/64→27/72→…

Buscar las fracciones equivalentes es de gran ayuda pero, ¿encuentras alguna desventaja al hacerlo? Expresa tu opinión:

____

____

Efectivamente, a veces las fracciones equivalentes que sean homogéneas entre sí no aparecen inmediatamente y el procedimiento se vuelve tedioso.

¿Cómo podemos simplificar esta actividad de tal manera que podamos descubrir rápidamente el denominador común a ambas fracciones heterogéneas? Analiza los siguientes pares de fracciones heterogéneas y sus correspondientes fracciones equivalentes que son homogéneas entre sí:

½ + ⅓ = 3/6 + 2/6

2/5 + 3/8 = 16/40 + 15/40

¿Qué relación encuentras entre los denominadores cuando son fracciones heterogéneas y los denominadores de sus fracciones equivalentes? Expresa lo que observas:

____

____

Efectivamente, en estos casos, el denominador común es igual al producto de los denominadores de las fracciones heterogéneas. Así: 6 = 2x3 y 40 = 5x8.

Observa el siguiente par de fracciones y sus equivalentes entre sí:

½ + 7/4 = 2/4 + 7/4

4/6 + 15/24 = 16/24 + 15/24

¿Qué observas?

____

____

Cuando un denominador es múltiplo del otro denominador se busca la equivalente en una de ellas. Puedes hacerlo del menor, multiplicando, o del mayor, dividiendo (o simplificando, si se puede).

En ambos casos, ¿qué es lo que estamos buscando?

____

Efectivamente, buscamos un múltiplo común a ambos denominadores. Básicamente, el primer múltiplo común, o mínimo común múltiplo (m.c.m.) de ambos denominadores. ¿Qué hacemos para hallarlo?

____
____

Realizamos cualquiera de los siguientes pasos:

a) Multiplicamos por cada uno de los números naturales, en orden, cada uno de los denominadores, hasta hallar los comunes.
b) Multiplicamos directamente los denominadores, si uno no es múltiplo de otro.
c) Seleccionamos el mayor si éste es múltiplo del menor.

Ahora sabemos hallar los denominadores comunes de manera rápida. Explícalo con tus propias palabras:

____
____

Anexo 3 (Las Fracciones)

Multiplicamos fracciones

Observa la siguiente expresión y expresa con tus propias palabras lo que a tu juicio quiere decir:

3/5 x 4/8

____

____

____

____

Hemos podido graficar la suma y resta de fracciones, ¿crees que podamos graficar la multiplicación? Haz un dibujo de tu análisis anterior:

¿Cómo expresas, esa parte de la unidad inicial, tomada en un segundo momento, en términos de fracciones?

____

¿Qué relación guardan las fracciones iniciales con la fracción producto?

____

____

Puedes decir un procedimiento fácil y simbólico para hallar el producto de dos fracciones. Indica los pasos que seguirías:

1º____

2º____

Anexo 4 (Las Fracciones)

¿Cómo dividimos fracciones?

En la actividad anterior has descubierto que si multiplicas dos fracciones el producto es otra fracción. Además, has planteado y explicado una manera rápida y correcta para hallar esa fracción producto sin recurrir a las gráficas u operaciones largas. Te proponemos que, siguiendo el mismo procedimiento, intentes descubrir si dos fracciones se pueden dividir y cómo habría que hacerlo. Para que empieces por algo específico te proponemos la siguiente división:

A. Observa y explica:

½ : 2 … ¿Qué quiere decir?

Explica con tus propias palabras.

____

____

____

Grafica tu análisis:

¿Cómo expresas el resultado en términos de fracciones? _________________________

¿Qué sucede cuando dividimos una fracción entre un número natural? ¿Qué relación hay entre la fracción cociente y la unidad total?

____

____

¿Qué relación guarda la fracción cociente con cada uno de los elementos de la expresión inicial? (a qué es igual el numerador y el denominador de la fracción cociente)

Puedes expresar un procedimiento fácil y simbólico para hallar el cociente de dos fracciones. Indica los pasos que seguirías:

1º______________________________

2º______________________________

B. Haz lo mismo para la siguiente expresión:

2 : ½ =

Explica y dibuja:

¿Cómo expresas el resultado en términos de fracciones?

¿Qué sucede cuando dividimos un número natural entre una fracción?

¿Cómo es el resultado respecto a las cantidades iniciales?

____

Puedes decir un procedimiento fácil y simbólico para hallar el cociente de dos fracciones. Indica los pasos que seguirías:

1º____

2º____

C. Desarrolla la siguiente división:

3/5 : 2/10 = ¿?

Intenta explicar, con tus palabras, la expresión anterior.

____

____

____

Seguramente, representar gráficamente esta división te resulta complicado, sin embargo podrías intentarlo. Para ello sigue los siguientes pasos:

1º En primer lugar, tienes que dibujar una unidad, ¿verdad? Por ejemplo, un cuadrado de 10 cm. de lado. Dibújalo en este espacio.

2º Luego tienes que ____[63]

3º De la unidad dividida en__________________________ sólo tomas_______________

4º Esa parte que has tomado la tienes que dividir en______________________________

5º Representa la fracción por la que has de dividir en una unidad igual a la anterior. Puede ser en la misma unidad[64]

6º ¿Recuerdas que la división nos dice cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo? Observa cuántos rectángulos corresponden a esta segunda fracción, ¿cuántas veces cabe, o está contenida, la segunda fracción en la primera?

7º ¿Cuánto es 3/5 : 2/10?

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{10} =$$

Te has dado cuenta que 2/10 está contenida **TRES VECES** en 3/5, es decir se han formado tres unidades más pequeñas que la primera (de 10x10), ¿verdad? Observa esas unidades pequeñas.

¿Cómo están divididas?____

¿Cuántas partes se han tomado de la unidad?____________________________________

Si son tres unidades iguales, ¿cuántas partes se han tomado en total?_________________

¿Cómo escribes esa fracción?____

¿Qué relación encuentras entre esta fracción y las veces que está contenida 2/10 en 3/5? Intercambia las ideas con tus compañeros y escribe las conclusiones.

____

____

¿Qué relación encuentras entre la fracción resultante y 3, que fue el resultado de la división?

____

____

¿Qué puedes hacer para dividir fracciones?

____

____

---

[63] Haz divisiones verticales para la primera fracción.

[64] Ahora, haz las divisiones de manera horizontal.

Anexo 5 (Las Fracciones)

Descubrimos fracciones equivalentes, homogéneas entre sí

Pasemos a observar los numeradores de las fracciones equivalentes, ¿qué sucede con ellos?

____

____

Efectivamente, también se transforman, pero ¿cómo? Observa las fracciones trabajadas, ¿qué puedes decir de esos nuevos numeradores en cada caso?

____

____

Seguramente has concluido que los numeradores aumentan en todos los casos. En los dos primeros ejemplos, el numerador de la fracción equivalente a la primera fracción es igual al producto del numerador de esa fracción por el denominador de la otra fracción. En el segundo caso, hay que dividirlo por su propio denominador. Este razonamiento se expresa de la siguiente manera:

½ + 7/4 = 2/4 + 7/4 → 2 = (1 x 4) / 2

4/6 + 15/24 = 16/24 + 15/24 → 16 = (4 x 24) / 6

Halla directamente las fracciones equivalentes, homogéneas entre sí, de los siguientes pares de fracciones heterogéneas. Indica el proceso:

Fracciones heterogéneas	Proceso de transformación	Fracciones homogéneas
4/5 + 8/9 =		
7/3 + 2/6 =		
13/15 + 25/32 =		

Explica cómo puedes sumar o restar fracciones heterogéneas de manera simplificada:

____

____

____

____

Los Números Decimales

En contextos que no son ajenos a nuestra vida ordinaria, podemos encontrar situaciones en las que se usen los números decimales; las más próximas, aquéllas en las que se involucran el sistema métrico o el sistema monetario. Dada la cercanía del tema, el trabajo con números decimales puede partir de una situación en la que los alumnos tengan que medir o valorar objetos cuyas longitudes y/o precios no precisamente se expresan mediante un número entero. De hecho, podemos observar que casi todos los artículos en venta se ofertan mediante números decimales. Por otro lado, las dimensiones de los objetos o cualquiera de sus medidas no siempre se expresa mediante un número natural.

Sabemos que la enseñanza de los números decimales se inicia en el primer año (curso) del último ciclo de enseñanza primaria[65], sin embargo su uso social puede situarse en cursos anteriores, por ejemplo, a través del uso de los temas expuestos en el párrafo anterior y su aplicación en diferentes situaciones[66]. Es preciso suponer que en el último ciclo de enseñanza primaria, los alumnos ya han tenido un contacto informal con el tema, pero además un conocimiento formal con otros temas que son la base para construir los nuevos conocimientos. Este es el caso del Sistema de Numeración y los Números Naturales; además del de Fracciones y el Sistema Métrico Decimal que ayudarán en el intento de formarse el concepto de Números Decimales.

Sobre los Números Decimales sabemos, por historia, que surgen de las fracciones decimales, ya que se originan por la necesidad de hacer más fáciles las sumas con este tipo de fracciones. Sin embargo, cualquier fracción se puede expresar de forma decimal. Los decimales que surgen de cualquier fracción común se suelen denominar expresiones decimales, así decimos que 0,75 es un número decimal pues surge de ¾ que a su vez se puede expresar como fracción decimal si multiplicamos cada elemento por 25 (75/100), pero 0,33… es una expresión decimal que no surge de una fracción, aunque tiene una representación mediante fracción.

Para estudiar formalmente los Números Decimales podemos hacer referencia a su origen (partir de la necesidad de sumar fracciones decimales de manera rápida); sin embargo, los alumnos toman contacto indirecto con este tipo de números (decimales), incluso, antes de conocer formalmente qué son las fracciones y qué es una fracción decimal. Podemos escoger, entonces, por la cercanía de la situación, la medición de longitudes y pesos de objetos para introducir los números decimales.

Partiendo del contexto de mediciones, podemos situarnos en la necesidad de expresar la medida de nuestra talla. Generalmente ésta es expresada en metros, y oscila, para cualquiera de nosotros, entre uno y dos metros. Un niño o niña de quinto de primaria puede medir ciento cincuenta y tres (153) centímetros o, expresado de otra manera, un metro con cincuenta y tres centímetros. La frecuencia de esta última forma puede llevar a abreviar la escritura y cambiar la palabra “con” por el signo de la coma y luego las palabras “metros” y “centímetros” escribiendo directamente 1,53 (aunque es necesario expresar la unidad de medida), en este caso, el alumno sabe qué indica la cantidad antes de la coma y qué la que viene después. En este caso, no podemos decir que el alumno identifica claramente la relación entre unidades de orden superior y unidades

---

[65] La ECB del Sistema Educativo Peruano considera el inicio de la enseñanza de los números decimales en Quinto Grado de enseñanza primaria con la interpretación y representación gráfica de los números decimales a partir de las fracciones decimales con denominador 10 y 100.

[66] En las situaciones de compra y venta, al utilizar expresiones como “sol cincuenta”, “ochenta céntimos” cuya traducción simbólica es S/. 1.50 y 80 céntimos o S/. 0.80, respectivamente, los niños se enfrentan con estas cantidades. Si bien es cierto no hay un conocimiento formal del tema, que implica análisis del caso (las cantidades), los alumnos “saben” a qué se refiere cuando se enfrentan con ellas. Su conocimiento es más social que matemático.

de orden inferior, ni siquiera que la unidad, en este caso el metro, ha sido dividida en cien partes iguales de las que se han tomado 53. El sentido de la coma es separar unidades de medida distintas: metros a la izquierda y centímetro a la derecha, o la unidad mayor a la izquierda y la menor a la derecha cuando se utilizan otras unidades con el fin de simplificar la escritura.

De la actividad anterior, querer saber, por ejemplo, las tallas de los alumnos de un aula permite utilizar este tipo de escritura; querer hallar la media entre todas las tallas es intentar operar con estas cantidades y, particularmente, con esta forma “abreviada” de escribir una cantidad en la que cada miembro, antes y después de la coma, tiene un significado específico. Que los alumnos escriban de esta manera las medidas para expresarlas de forma simplificada, como hemos dicho, no necesariamente da la idea de número decimal, excepto si logran establecer relaciones entre la parte “entera” (metros) y la parte “decimal” (centímetros), así la unidad que acompaña al número escrito con coma incluida (1,53) es “metros” pues en función de ella se está analizando la situación.

Por lo general, las situaciones que se plantean en la escuela básica buscan adaptarse a las necesidades reales, sociales y cotidianas de los alumnos, como puede ser el caso anterior, esto no descarta la idea de que dichas situaciones surjan del quehacer matemático, en cualquier caso recordemos que las situaciones planteadas en la escuela han de ser abiertas, siéndolo en tanto que generan en los resolutores múltiples procedimientos de solución e intercambio de ideas distintas y productivas, a diferencia de los llamados típicamente problemas matemáticos escolares cuyo fin es aplicar directamente un contenido matemático previamente aprendido. Estos últimos problemas pueden surgir del intento por resolver las situaciones abiertas, y es mucho más productivo, en estos niveles, que sean los propios resolutores (alumnos/as) quienes los formulen en el intento por resolver la situación general. La situación puede surgir de esta manera o puede ser propuesta el profesor. Para desarrollar la actividad sobre nuestras tallas podemos guiarnos por el anexo 1.

Otra situación surge de querer saber si en un espacio determinado siempre se puede poner la misma cantidad de folios (quizá se quiera elaborar un libro con un grosor determinado, pero con la mayor cantidad de hojas. Surge, entonces, la siguiente pregunta: ¿todos los folios de un tamaño específico son iguales?, ¿qué significa que sean iguales? Querer saber el grosor de una hoja cualquiera puede ser de interés para los alumnos si quieren poner mayor cantidad de hojas en un espacio limitado. En el aula podemos contextualizar esta situación de tal manera que los alumnos se interesen por querer saber si cualquier folio del mismo tamaño vale para utilizar el mayor número de hojas sin extralimitar el espacio asignado. Esta necesidad lleva a querer medir el grosor de una hoja o folio, para saber si una tiene más grosor que otra y cuántas necesitamos para el espacio asignado, sin comprar más de lo necesario. Quizá el comparar de manera visual las hojas nos permitan establecernos ciertas conjeturas, pero no nos dice cuántas exactamente necesitamos.

A simple vista, si los alumnos tienen los paquetes de folios del mismo tamaño pero diferente grosor, sabrán que con un paquete necesitarán más hojas (o menos) que con el otro, pero lo más probable es que en el aula se disponga del mismo tipo de folios. La maestra puede llevar una hoja de cada tipo y trabajar con ellas, por lo que habrá que buscar la estrategia que nos ayude a saber la cantidad necesaria de hojas, a partir de aquéllas. Si queremos medir el grosor necesitaremos instrumentos de medida. Para medir el grosor de una hoja existen diferentes instrumentos: micrómetros de tornillo, medidores láser, calibre electrónico y quizás varios otros aparatos de precisión. Obviamente estos son instrumentos que no están al alcance inmediato de los alumnos de escuela, por lo que lo más práctico es buscar otra manera de resolver la situación. Si tenemos más de una hoja de cada tipo podemos juntarlas y medir el grosor del grupo, luego realizar la división. Si solo tenemos una, se puede hacer pedazos iguales juntándolos de tal manera que se observe un grosor en el conjunto. Esto nos dará una medida aproximada, pero bastante cercana, del grosor de cada una de ellas. La primera actividad del alumno está definida: averiguar cuál es el grosor de una hoja Din-A4 y saber cuántas necesitamos. Acto seguido, debemos pensar (principalmente los alumnos) cómo expresar esas medidas, ya que surgen a medida que realizamos la actividad.

Trabajar en grupos, permite a los alumnos que cada miembro exprese su razonamiento y lo justifique. Es necesario que los maestros permitan el trabajo grupal de sus alumnos. Para resolver la situación los alumnos pueden emplear cualquiera de los métodos anteriores, incluso pueden usar los instrumentos de medida que conocen. Evidentemente, utilizando estos instrumentos los alumnos pueden concluir que estos no pueden darnos una medida exacta de cada hoja, por lo que buscarán otros métodos.

A partir de la información obtenida mediante la manipulación numérica y de sus conocimientos sobre unidades de medida[67], los alumnos ya no se basan únicamente en los instrumentos, sino de la información obtenida. Proponer la situación planteada permite a los alumnos pensar en un plan de solución que, en este caso, por ser una actividad propuesta dentro del área de matemática, tiene connotaciones numéricas y matemáticas. Como habíamos comentado, las situaciones abiertas, por su misma naturaleza, involucran diferentes procedimientos y la aplicación de conocimientos diversos. En primer lugar aparece la necesidad de medir, luego la de limitar esa medida; todo, a partir de la información brindada y de las relaciones establecidas por los alumnos.

A partir de la nueva información y de la hipótesis planteada (una hoja tiene un grosor), los alumnos, formados en grupos, intentan depurar la solución en la que no sólo hay que indicar que las hojas tienen diferentes grosores sino expresar ese grosor en cada una de ellas. El o la docente orientará la actuación de los alumnos a fin de que ellos adquieran las ideas principales (en términos de resolución de problemas verbales rutinarios sería la “extracción de datos”). Podemos observar que esta manera de proponer la situación no permite exponer directamente los datos, de ahí que los alumnos han de hacer un análisis de la situación para elegir, de entre muchos, los datos que consideren necesarios.

En el proceso de resolución por parte de los alumnos es oportuno que estos se equivoquen ya que su reconocimiento permitirá seleccionar y depurar los mismos. Aprender del error, permitiendo que los alumnos se den cuenta del mismo, les permite rectificar comprensiblemente, descartar y buscar la información matemática necesaria: cambiar el camino de manera compresible y no únicamente porque el profesor o profesora expresó que su respuesta era incorrecta.

Para poder expresar correctamente la medida del grosor de un folio es importante que los alumnos propongan diferentes maneras de escribir esa cantidad. Los alumnos, reunidos en grupos pequeños, buscan estrategias que les permitan informar cuánto mide cada hoja, sin necesidad de hacerlo con instrumentos pues saben que con los que cuentan no pueden brindarles esa información. A partir de sus conocimientos previos, los alumnos pueden:

a) Intentar dividir las cantidades halladas: la medida entre número de hojas. En estos casos el dividendo será siempre menor que el divisor. Si los alumnos no tienen experiencia en este tipo de divisiones, no podrían resolver la situación. Se busca, entonces, otro modo.

b) Utilizar fracciones para dar exactitud a la medida, por ejemplo 48/500, 22/205, etc., siempre que los alumnos dominen el tema de fracciones. Sin embargo, la cantidad quedaría indicada de esta manera únicamente.

---

[67] En el año (curso) anterior los alumnos han desarrollado capacidades sobre el uso de unidades oficiales de medida: m, dm, cm.

c) Intentar transformar las fracciones encontradas en fracciones decimales a fin de poder representar mejor gráficamente qué parte del total representa la parte que quiere encontrarse: 48/500 = 96/1000.

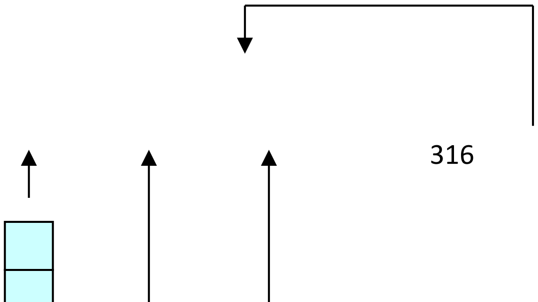
Al utilizar diferentes maneras de expresar una cantidad, los alumnos se dan cuenta que esas formas distintas tienen el mismo valor. Utilizar fracciones decimales puede orientar al alumno a establecer relación entre las fracciones decimales y nuestro sistema de numeración. Los alumnos podrán hacer un paralelo entre ellos, mencionando las características principales de cada uno, por ejemplo:

- Nuestro sistema de numeración es de base 10, y cada orden nuevo contiene diez unidades del orden anterior, por ejemplo, una decena contiene diez unidades simples (o unidades de primer orden) y una centena diez decenas (o unidades de segundo orden). Por su parte, las fracciones decimales dividen la unidad en 10, 100, 1000, etc. partes.
- Por otro lado, en nuestro Sistema de Numeración la cantidad va aumentando (hay más unidades), mientras que en las fracciones es la misma unidad la que es dividida en 10, 100, 1000, etc., partes, de ahí que cada una de las partes sean parte de la unidad, y son menores.

Al concluir que nuestro sistema de numeración es decimal y las fracciones decimales también, se plantea la construcción de números en nuestro sistema decimal que representen fracciones decimales, planteando la interrogante de si es posible una ampliación de nuestro sistema de numeración hacia la derecha y cómo se haría. Las interrogantes están en función de:

- ¿Cómo es nuestro sistema de numeración?
- ¿Cómo se forma?
- ¿Cuál es la unidad mínima?
- ¿Cuál es la unidad mínima de orden inmediatamente superior?
- ¿Cómo se forma esta unidad?
- ¿Cuántas unidades del orden inmediatamente inferior tiene una centena?
- ¿Cuántas unidades del orden inmediatamente inferior tiene una decena?
- Si hubiera una unidad a la derecha de las unidades, ¿cómo sería?
- ¿Qué características tendría?
- ¿Podríamos expresar 1/10, que es una fracción decimal, en nuestro sistema de numeración decimal? ¿Cómo hacerlo?

A partir de sus conocimientos sobre Sistema de Numeración y Base 10, los alumnos, por grupos, se cuestionan las interrogantes y plantean soluciones. Se cuestiona la forma de representar el número considerando que a la derecha de la unidad podría haber un orden inferior. Los alumnos representan gráficamente sus ideas y construyan su Tablero de Valor Posicional (TVP):



C	D	U	**d**	
	1	1	**1**	

Indica que la unidad ha sido dividida
en diez (10) partes

La representación hecha para la partición de la unidad en diez partes iguales debería se asociada a las fracciones (conocimiento previo) y nombrar la parte azul como se nombra una fracción: la parte azul representa un décimo, de ahí que por convenio, en el aula, los alumnos pueden nombrar ese orden en el TVP como “décimos”: porque cada una de las diez partes que conforman la unidad (por estar en base 10) se llaman décimos (por estar dividida en diez partes). Posteriormente se asociará los decimales a las fracciones decimales.

Una vez representado en el TVP el siguiente paso es hacerlo fuera de él. Las interrogantes planteadas serían:

- ¿Cómo representar mediante dígitos: una unidad y cinco décimos?
- ¿Cómo diferenciar esa expresión de aquella que representa, por ejemplo, 15 unidades?

Evidentemente, según lo trabajado en el TVP, ambas cantidades, sin expresar lo mismo, se escribirían de la misma manera, ¿cómo diferenciarlas para evitar confusiones?

Mediante esta actividad los alumnos se dan cuenta que la parte de los décimos son cantidades menores que la unidad, como las fracciones, y que se pueden “armar” o escribir en base 10 y en el TVP, es decir, escribirlas de diferente manera. Las estrategias para escribirlas pueden ser diferentes, de acuerdo a la “ocurrencia” de cada grupo. Por ejemplo, escribir los décimos de un color diferente; el número quedaría de la siguiente manera: 15, cuando se quiera expresar un entero cinco décimos, y se escribe del mismo color (15) cuando expresa quince unidades. Otro grupo puede pensar en escribir los números un poco más pequeños de tal manera que evidencia una parte menor que la unidad: 15. También se puede pensar en la coma como el signo que separe las cantidades enteras de las decimales. Seguramente, a medida que los alumnos van formando las cantidades decimales, pueden relacionar con cantidades conocidas (precios, por ejemplo) y analizar si las cantidades después del punto (o la coma) se refieren a montos menores a la unidad. Para el desarrollo de esta actividad nos podemos guiar de los anexos 2 y 3.

Anexo 1 (Los Números decimales)

Codificamos nuestra talla

Habrás observado que no todos somos del mismo tamaño. Algunos compañeros o compañeras son más altos o menos altos que nosotros. Esto puede deberse a varios factores, entre los que se encuentra el tipo de alimentación que recibimos, pero sobre todo se lo debemos a nuestros padres. Efectivamente, si nuestros padres son altos, seguro que nosotros lo somos (o lo seremos en su momento). Puede ser sin embargo que ante padres altos seamos pequeños: la herencia familiar es otro factor.

¿Qué te parece si comprobamos si nuestra aula tiene a los chicos y chicas más altos o no? Para ello tenemos que observar entre qué cantidades oscila nuestras medidas, cuál es la talla más baja y cuál es la más alta, y sobre todo ver si nuestra talla es “normal” ya que si estamos por debajo habrá que indagar las razones.

Para saber nuestra medida exacta debemos utilizar un instrumento, ¿verdad? de lo contrario lo que haríamos es tantear y con esto no llegaremos a nada preciso. Quizá en nuestra aula haya algún objeto que nos sirva. No perderás tiempo si observas unos segundos.

Bien, si no lo encontraste, al menos sabes qué estás buscando… Efectivamente, la regla, la cinta métrica pueden servir, pero si tenemos que escoger alguno de ellos, ¿cuál escogerías? ¿Por qué?

Antes de usar la cinta métrica observemos cómo está organizada. Anota en las siguientes líneas las características que has encontrado:

Características de la cinta métrica

(Instrumento para medir el largo – la longitud - de las personas o cosas)

____

____

____

____

____

Ahora bien, pasemos a medirnos. Para organizarnos mejor, podemos agruparnos con otros cuatro compañeros. Qué tal si entre dos nos medimos y el que queda libre anota. Para medirnos, nos colocamos de espaldas a una pared, nos paramos rectamente haciendo coincidir los talones y la cabeza con dicha pared. Nuestro compañero hace un ángulo recto con una regla, que esté al ras de nuestra cabeza, y la pared que nos sirve de apoyo. Marcamos ahí donde coinciden la regla y la pared y anotamos la medida en el siguiente cuadro. Ahora intercambiamos los papeles.

Nombre	Talla
1º	
2º	
3º	
4º	
5º	

Bien, tenemos las medidas de nuestro grupo. Debemos juntarlas con las de los demás compañero así tendremos cada grupo todas las medidas.

Analizamos nuestra escritura:

¿Cómo hemos escrito cada medida?
____

¿Qué unidad de medida hemos utilizado?
____

¿Todos los grupos las han escrito de la misma manera?
____

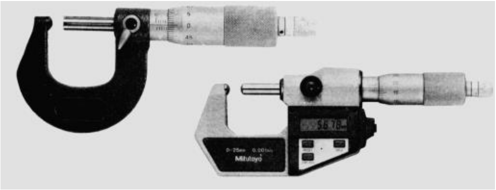
Si escribiste las medidas en centímetros, ¿cómo lo harías en metros?
____

¿Existe alguna forma de simplificar esa escritura?
____

Más folios, menos espacio

El problema está planteado: ¿Todos los folios tienen el mismo grosor?, ¿cuál es el grosor de cada tipo de folio?

Para saberlo, evidentemente, hay que medir el grosor de cada folio, y para medirlo necesitaremos, además de diferentes folios, un instrumento de medida. ¿Conoces alguno que pueda ayudarnos a medir el grosor de un folio? Lo siguientes instrumentos nos permiten medir el grosor de un folio (u “hoja”, como dicen en Sudamérica).



Micrómetros de tornillo electrónico

Medidores láser

Calibre

Lo más probable es que ninguno de estos instrumentos estén en tu aula en estos momentos, pero no por ello vamos a dejar de hacer la actividad, ¿verdad? Eres una persona de retos y cuando te propones uno, agotas todos los recursos. Esto es bueno. Seguimos entonces. ¿Qué sugieres que hagamos? ¿Contamos con algún instrumento que nos facilite la medida? Escribe en las siguientes líneas tus ideas, luego compártelas con tus compañeros de grupo para llegar a consenso.

____

____

Te habrás dado cuenta que medir una hoja (o folio) es muy difícil con los instrumentos que tienes, básicamente una regla, ¿puedes decirme porqué es difícil?

____

____

Tienes una muestra de cada folio distinto, ¿crees que cada folio tiene diferente grosor? Ordénalos de mayor a menor grosor. Escribe en cada uno un número según has hecho la secuencia.

Volviendo a nuestro problema, ¿qué puedes hacer para saber exactamente la medida de un folio? Pensemos un poco, si pones un folio para medir su grosor, el problema es que no hay medida, en la regla, que nos indique cuánto mide, ¿verdad? No hay mucho espacio entre 0, el inicio de la medida, y lo que ocupa el folio. ¿Qué podemos hacer, entonces para abarcar un espacio conocido? Escribe lo que piensas.

____

____

¿Qué te parece si medimos un grupo de cada tipo de hoja de tal manera que podamos observar una medida específica? ¿Crees que esta acción nos ayuda a averiguar el grosor de un folio?, ¿cómo?

____

____

Escribe la medida que lograste y cuántas hojas utilizaste de cada tipo de folio. Anota tus resultados en la siguiente tabla:

Tipo de folio	Cantidad de folios	Grosor alcanzado

Analizamos nuestra escritura numérica

Efectivamente, para saber cuánto mide cada folio basta dividir la medida obtenida entre la cantidad de folios empleados, pero antes, debemos analizar nuestras medidas obtenidas.

También lo podemos hacer precisando más esa escala empleada, ¿cómo? Pues como sabes, la regla, o cualquier instrumento que utilicemos para medir, tiene divisiones; entre una y otra división hay el mismo espacio. Hay divisiones que están señaladas con líneas más largas y otras con líneas más cortas. ¿Estás observando? Pues bien, ¿puedes decirme cuántas divisiones hay de cada tipo en la regla que estás usando? Dibújala en el siguiente recuadro y señala las distintas divisiones (al menos una parte porque quizá la regla sea más grande que el espacio asignado):

Como has podido observar entre el 0 y el 1 hay diez espacios señalados con líneas pequeñas, luego, las líneas que me indican el 0, 1, 2,… y así sucesivamente son más largas. Cuando llegamos a diez, la línea es más larga aún. ¿Te dice algo eso de “ir de diez en diez”? Escribe lo que te sugiere:

Efectivamente, nuestro sistema de numeración es decimal ya que agrupa de diez en diez: Conocemos nuestra unidad (1) y a partir de ella, cada diez unidades, creamos una unidad de orden superior (las decenas, las centenas, los millares, etc.). Pero si te has dado cuenta entre el 0 (no tener nada. A veces no se escribe) y el uno (nuestra cantidad mínima) hay diez espacios pequeños. Lo mismo ocurre entre cada número conocido. ¿Qué podemos decir al respecto?

____

____

Comparto tu opinión: Hay cosas más pequeñas que 1, o medidas menores que 1, como el grosor de un folio, o que pueden estar entre 1 y 2 o entre 2 y 3, etc. como el grosor de varios folios. En tu dibujo anterior, marca el espacio que ocupa cada grupo de folios que mediste. Ese espacio, ¿abarca hasta una línea numerada en la regla? En qué casos sí y en qué casos no.

Seguramente, no habrías tenido problema si el fajo de folios marcara un número conocido pues habrías escrito inmediatamente su medida (3, 5, 2 centímetros). El problema está en ¿cómo indicar esa medida si no alcanza un número conocido? ¿Qué hiciste?

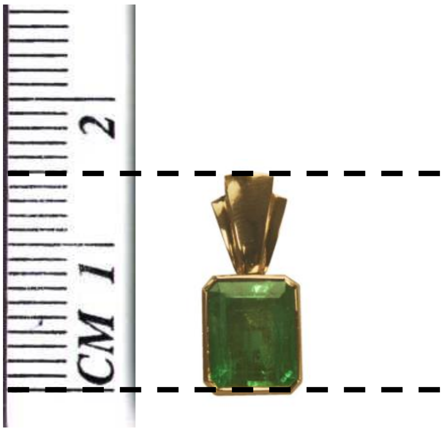
Vamos a ver, si hay divisiones más pequeñas a la unidad, y esas divisiones son diez, quiere decir que cada 10 unidades pequeñas forman una unidad de orden superior, que en este caso sería la UNIDAD SIMPLE, ¿verdad? Si tenemos que ubicar esa unidad en el TVP, ¿dónde lo haríamos? Completa el siguiente tablero, indicando las distintas unidades conocidas y dónde colocarías el nuevo orden de unidad:

Bien, la **nueva unidad** iría a la derecha de la unidad simple, pues esa unidad es la **décima parte** de nuestra unidad simple y como en nuestro tablero cada orden crece de derecha a izquierda y decrece de izquierda a derecha, la nueva unidad, o el nuevo orden que contiene cada una de las partes (o décimas) en las que se ha dividido la unidad, debe estar a la derecha de la unidad simple. Escribe, en el siguiente cuadro, cuántas unidades y cuántas décimas abarcaron cada grupo de folios:

TVP

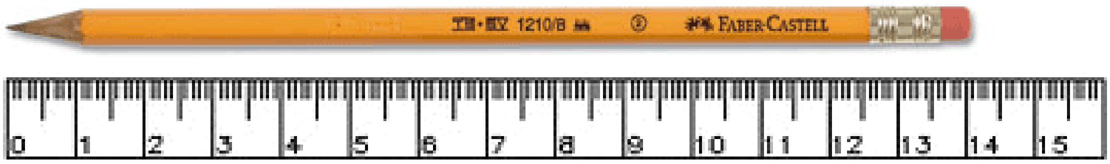
Unidad	décimas			

Cada número formado me indica los *centímetros* exactos que mide el grosor de cada grupo de folios. Observa la siguiente imagen:



TVP

Objeto:				
colgante				
lápiz				



Ambas medidas se expresan con los mismos dígitos y en la misma distribución: 15, pero ¿en qué se diferencia? Escribe sus medidas en el TVP y comenta tu respuesta:

____

____

Para no confundirlo con los números que nosotros conocemos y para que todos sepamos que estamos indicando con las décimas cantidades menores que la unidad, por convenio se ha establecido que entre la unidad y las décimas haya una coma, sí: una coma (,), que se le llama “la coma decimal”. Así, 15 centímetros, que mide el lápiz, y 1,5 centímetros, que mide el dije de esmeralda, representan medidas distintas.

¡¡Para pensar!!

Así como hemos construido un orden nuevo en nuestro sistema de numeración decimal, un orden que está integrado por las décimas: cada una de las diez partes en que ha sido dividida la unidad, ¿crees que podamos construir un nuevo orden a la derecha de las décimas? ¿Cuándo sería necesario y qué características tendría?

TVP

Unidad	décimas			

____

____

Planteamiento y Resolución de problemas en la clase de Matemática en el último ciclo de la Enseñanza Primaria

Podemos observar que la actividad matemática del alumno en el aula se dirige al desarrollo de dos tipos de actividades ‘prácticas’ o de aplicación: la resolución de ejercicios y la resolución de problemas. Si intentamos delimitar una diferencia entre ambos tipos de actividades podemos decir que ésta es de contexto. Explicando lo anterior, los ejercicios preguntan directamente por el contenido matemático (por ejemplo, “relaciona cada número con su operación”; “En un concesionario de coches se anuncian estas ofertas. Una furgoneta de 2.567.800 ptas. Este número se lee”[68], etc.). Por su parte los problemas matemáticos escolares plantean una dificultad en una situación, la que es resoluble mediante conocimiento matemático (por ejemplo, “Un fontanero cobra 1.700 ptas. por cada hora de trabajo. Sabiendo que trabaja ocho horas diarias y cinco días a la semana, ¿cuánto gana en tres semanas de trabajo”[69]). Es decir, en los primeros (ejercicios) no hay una situación 'cotidiana', social, que los envuelve mientras que en los segundos, sí. Esta situación lleva al docente, quien sigue la línea del libro de texto seleccionado, a proponer el mismo tipo de situaciones, las que siguen un objetivo principal: “aprender -y reforzar- contenido matemático específico (ejercicios) y aplicarlo en situaciones cotidianas (problemas)”. Visto de este modo, aparece una tendencia a tratar las situaciones cotidianas de tal manera que permitan desarrollar contenidos matemáticos concretos; es decir, los problemas matemáticos o situaciones propuestas son propicios para introducir un tema nuevo (o ampliar un tema conocido, según el curso en el que se aplique). Luego, los nuevos problemas matemáticos propuestos directamente por el libro de texto (o profesor que sigue esa metodología) sirven para aplicar inmediatamente ese tema conocido y aprendido. Esta situación lleva a forzar la situación cotidiana, idealizándola, para que en ella se pueda aplicar contenido matemático.

Se observa también dentro de los problemas propuestos un grupo reducido de estos en los que la función antes expuesta (aplicar contenido matemático) no es única; es decir, hay otras funciones (de relación entre los contenidos explícitos, de cálculo mental) que sobresalen. Sin embargo, estos problemas están fuera del proceso de enseñanza-aprendizaje que se está desarrollando, por lo que la función del alumno se dirige a desarrollar la actividad, únicamente. No se aprecia un tratamiento de los mismos en el libro de texto, por lo que en clase quizá este tipo de ejercicios quede relegado a un segundo plano y se mencione únicamente para conocer, en el mejor de los casos, cómo los alumnos los han desarrollado y las estrategias que han utilizado, sin intención de generar debate y reflexión por parte de la clase. De hecho, forman parte de un capítulo aparte dentro del desarrollo del tema o unidad, simplemente se proponen, por lo que puede pensar que únicamente se desarrollan.

En otros casos se proponen actividades de planteamiento de problemas por parte de los alumnos. Este planteamiento es tratado directamente, es decir, a partir de cierta información que es específica y cuidadosamente seleccionada por el libro de texto (o profesor), el alumnos tiene que idear y redactar problemas que se ajusten a la información presentada y al tema que se está tratando; es decir, el alumno ha de enmarcar dicha información numérica dentro de un contexto específico y una situación concreta.

Como hemos ido comentando, esta forma de tratar los problemas matemáticos en el aula permite el desarrollo de ciertas habilidades que son propicias promover en los alumnos que cursan la asignatura de matemática en el nivel primario, principalmente el conocimiento y aplicación de

---

[68] Rodeira. Gupo edebé. Matemáticas 5. 3er. Ciclo. 1994. Página 14.
[69] Ibidem, página 27.

los temas que forman parte del programa propuesto, temas que el alumno debe dominar al finalizar la etapa de educación primaria. Además permite que dichos temas se traten directamente y el alumno los conozca tal y como el profesor propone (o el libro de texto), sin obviar información importante que es necesario aprender.

Dentro del plan para resolver problemas matemáticos hemos observado diferentes pasos que permiten un mejor enfrentamiento y resolución de los mismos. Todos ellos siguen, de alguna manera la línea expuesta por G. Polya: 1. entender el problema (o comprensión del problema), 2. Configurar un plan (o planteamiento del plan), 3. Ejecución del plan y 4. Mirar hacia atrás (o revisión de lo que se ha hecho). La forma cómo se introducen los problemas en el aula de matemática, desde los primeros cursos e incluso en el último ciclo de la etapa primaria reducen a uno sólo los pasos en los que el alumno, o los alumnos, tienen que centrarse: la ejecución del plan. Esta ejecución consiste en resolver la operación aritmética implícita en la situación. Sin embargo, la ejecución del plan debe ser producto de una reflexión del resolutor[70] (en este caso el alumno) experimentada en las etapas anteriores (comprensión y configuración). El tipo de problemas propuestos en el aula reducen estas etapas previas a situaciones concretas que poco a poco se vuelven rutinarias (leer el problema, ubicar los datos y relacionarlos según convenga[71]). Al ser los problemas propuestos para aplicar contenido matemático, y al tener el mismo formato en la mayoría de los casos, los alumnos conocen lo que tienen que hacer, incluso antes de leer el problema. El problema matemático 'presentado' de esta manera pierde su real naturaleza y la resolución de los mismos, también.

Si bien es cierto que dentro de cada curso escolar hay un apartado dirigido de manera explícita a la resolución de problemas, en el que éste se ve como contenido de la asignatura y se expone los pasos que hay que seguir para resolver eficazmente los problemas matemáticos, los alumnos ya han tenido un primer contacto con el mismo que difícilmente puede variar una vez establecido. Cabe recordar el tema de las creencias y lo arraigadas que pueden estar en las personas, que si bien pueden ser modificadas, forman parte del bagaje que los alumnos tienen. Por experiencia, los alumnos tienen una idea de lo que es un 'problema matemático' y una forma de trabajar con él. Parece ser que 'Comprender el problema' muchas veces es un simple trámite porque de antemano ellos ya lo comprendieron (al menos eso 'creen'): sólo hay que identificar los datos (matemáticos) que presenta. Luego, ejecutar la operación es el paso final ya que lo demás se sobreentiende o pierde importancia frente al hecho de haber ejecutado correctamente la operación aritmética implícita.

Es necesario, entonces, retomar el verdadero sentido de los problemas matemáticos y su relación con la actividad matemática para que su tratamiento dentro de la escuela no lo tergiverse. Considerando que 'hacer matemática' es resolver problemas (NCTM, Informe Cockroft, Diseño Curricular), estos deben llevar a realizar auténtica actividad matemática en el aula, una actividad matemática que no es la propia del matemático, obviamente, pero que permite que el alumno piense matemáticamente y se 'haga' del conocimiento matemático necesario de acuerdo a su nivel

---

[70] La palabra resolutor no está en el diccionario de la Real Academia de la Lengua, sin embargo en el campo matemático es muy usado actualmente para referirse a la persona que se enfrenta y resuelve problemas.

[71] En un problema propuesto se dice: “Para decorar el escenario disponen de 50 rosas rojas y 45 rosas rosas. Las quieren agrupar en ramos, de manera que haya el mismo número de rosas en todos los ramos y no estén mezcladas. ¿Cuántas rosas han de poner como máximo en cada ramo? Sigue los pasos habituales para resolver este problema. Lee atentamente el enunciado y completa: Número de rosas rojas: ____ Número de rosas rosas: ______ Queremos saber: _____. Piensa cuál ha de ser la estrategia que se debe seguir: Si divides el número total de rosas rojas entre las rosas de la mano, el resto de la división ha de ser: _____. Si divides el número de rosas rosas entre las rosas de cada ramo, el resto de la división debe ser: ______. Luego, el resultado tiene que ser un divisor de de 50 y de 45 a la vez y, además, el mayor. Por tanto se debe buscar el m.c.d. De 50 y 45. Efectúa los cálculos (se presentan los cálculos para 45 y se dejan los de 50 para que los realice el alumno). Comprueba que el resultado que has obtenido es divisor de 50 y 45. Expón la respuesta. El número de rosas que ha de tener cada ramo es.....”. Páginas 77 y 78 de Matemáticas 6. 3er. Ciclo. Rodeira. Grupo edebé. 1994.

de comprensión. La actividad matemática en el aula no se limita a que el alumno interiorice conocimiento matemático sino que también contribuye al desarrollo de su pensamiento.

Partir del problema como un texto propuesto por el profesor es, de antemano, formarse una idea del mismo que puede estar ligada a que: “los problemas matemáticos son textos propuestos por el profesor o libro de texto para aplicar operaciones”. De hecho uno de los objetivos que proponen los libros de texto es ése: “En esta unidad aprenderás… a realizar multiplicaciones, a aplicar esta operación a la resolución de problemas…”[72]. Se debe, entonces, tratar el problema en su contexto real y debe ser el resolutor quien se dé cuenta que en esa situación hay un problema.

El primer paso, entonces, es que el problema sea reconocido por el alumno en una situación específica; por ejemplo en situaciones como construir una maqueta del patio del colegio, reorganizar el salón de clase para introducir más carpetas al aula de tal manera que se pueda circular libremente, elegir el mejor balón para jugar según el juego, poder bajar un balón si es que éste se quedó atascado en un árbol, etc., los alumnos pueden hacer uso de conocimiento matemático y sentir la necesidad de adquirir nuevo conocimiento. Cada una de estas actividades puede parecer fácil, pero también pueden ofrecer inconvenientes 'matemáticos' que el alumno tiene que reconocer; una situación bloqueadora para el alumno y que a partir de ese reconocimiento le surgen dudas y preguntas puesto que ha reconocido el problema (el alumno). Estas dudas y preguntas las ha de plantear el mismo alumno, a partir de la información que la situación le brinda y del conocimiento matemático que posee o ha desarrollado. Situaciones que son aptas para cada futuro resolutor ya que tiene las herramientas para responder a sus interrogantes o está capacitado para adquirirlas.

Tratar los problemas de esta manera permite despertar la curiosidad matemática en los alumnos porque surgen de su darse cuenta personal, propio. La idea concreta, entonces, es cambiar el tipo de problemas propuestos en clase sin cambiar su naturaleza. Es decir, proponer situaciones no tan directas, en las que el alumno sea capaz de reconocer un problema (un bloqueo) y plantearlo, no necesariamente siguiendo las pautas de una redacción eficaz (como suelen plantearse los problemas), la cual se irá perfeccionando a medida que el alumno adquiera experiencia en el asunto.

¿Cómo, entonces, se pueden tratar los problemas matemáticos en el aula? Fácil, hay que proponer situaciones abiertas en las que los alumnos actúen, reconozcan conflictos, intercambien ideas, opinen, expresen sus dudas, planteen interrogantes, propongan soluciones, comparen, corrijan, etc. No solamente automaticen unas estructuras y resuelvan unas operaciones. Para que los alumnos se adiestren en la solución de operaciones hay que proponer muchas y variadas operaciones, variar las estrategias de cálculo, crearlas; es decir, centrarse en su tratamiento, separando las operaciones aritméticas de los problemas matemáticos mediante textos y tratarlas independientemente (cuando el objetivo es que practiquen operaciones aritméticas). Para que los alumnos se adiestren en la resolución de problemas es necesario que los alumnos se enfrenten a diferentes tipos de problemas y los reconozcan en cualquier situación, no sólo en aquellas de suma y resta, los puedan plantear a partir de ese reconocimiento y puedan hacerlo libremente, es decir, descontextualizándolos de cualquier situación concreta y cotidiana.

¿Dejarán, entonces, estos problemas de ser 'problemas matemáticos escolares'? No, siguen siendo escolares porque se ajustan a objetivos escolares, pero éstos son más amplios y consideran la naturaleza del problema matemático y no únicamente del contenido matemático implícito.

---

[72] Extraído del libro de texto Primaria Matemática 5. Grupo Anaya S.A. (1994), página 31.

¿Cuál es la labor del profesor? Tener desarrollado su sexto sentido para escoger aquellas situaciones apropiadas para el nivel de los alumnos y guiar la actuación de los mismos en ese darse cuenta de la dificultad, del bloqueo en la situación, y de organizar una posible vía de solución.

¿Cómo integrar esta actividad en el aula? A través de talleres abiertos en los que la finalidad es participar de una tarea amplia y permitir en el alumno responsabilizarse por su solución hasta el final; para la que es necesario aplicar conocimiento matemático aprendido y aprender otro nuevo. Podemos llamar a esta tarea proyecto, actividad abierta, amplia, creativa, singular no rutinaria, situación real, etc. En todas ellas predomina la participación activa y creativa del estudiante.

En ellas hay un auténtico poner en práctica de lo que se conoce del conocimiento matemático, estableciendo relaciones entre unos y otros temas del área. Su tratamiento es significativo para el alumno porque surge de su actividad. El ensayo y error cobra sentido porque surge de la actividad reflexiva del alumno, volviéndose más dirigido.

Las situaciones abiertas pueden presentarse de distinta manera. No tienen un formato único por lo que pueden adoptar la forma de problema texto como problemas sin texto. No pretendamos centrar la característica en su forma de presentación. Hay que recordar que son abiertas porque permiten más libertad en la actuación del resolutor, más no por la forma de presentarse.

No estamos en contra de los problemas escolares ‘tipo’ al estilo: “en una escuela hay 6 aulas, en cada aula hay 6 niños, cada niño tiene 6 juguetes, cada juguete necesita 6 pilas, y cada pila tiene 6 horas de duración. ¿Cuántos hay entre escuela, aulas, niños, juguetes, pilas y horas?” La solución de este problema, por ejemplo, tratado dentro del tema “Potencias y operaciones con potencias”, conduce a una suma de potencias de 6 pero, como se puede apreciar, no tiene ningún sentido práctico y obviamente sólo tiene como función ejercitar el cálculo de suma de potencias de seis. Así, la siguiente traducción:

$6^0 + 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 =$

$1 + 6 + 36 + 216 + 1296 + 7776 =$

9331 sería la solución ‘ideal’ al problema propuesto.

Ante el problema anterior, un niño puede plantearse la siguiente interrogante antes de intentar alguna operación: ¿cuántos qué?, ya que para él quizá no tenga sentido sumar cosas de muy distinta naturaleza y ‘crea’ que es un problema con ‘trampa’, de aquéllos que sirven para ‘despistar’ a los alumnos. Cabe preguntarnos, entonces, si es factible proponer sumar cantidad de personas y cantidad de horas, o de aulas y personas, con el fin de aplicar la suma de potencias en problemas matemáticos o situaciones problemáticas; porque, quizá, se pueda sumar juguetes y pilas como pertenecientes al grupo de los objetos, pero ¿y los demás?; las aulas están dentro de la escuela (relación todo-partes), ¿cómo las puedes sumar? Si bien es cierto que todos los números se pueden sumar y en cualquier circunstancia descontextualizada $6^0 + 6^1 = 7$ tal vez esto no sea tan lógico cuando la primera expresión se refiere a cantidad de escuelas y la segunda a cantidad de aulas dentro de la misma.

Ante el problema planteado anteriormente, dentro de la unidad indicada, el niño que ‘sabe’ que lo que se intenta reforzar es la suma de potencias, puede hacer caso omiso a esa inquietud, si es que se la planteó en algún momento, y ‘trabajar’ para encontrar esa suma de potencias que está implícita, tal como le puede haber enseñado su profesor/a o le puede indicar el libro de texto. Acto seguido, escribe cada operación y su traducción a potencia, y quizá coloque la primera potencia: 6^0, lo que en una solución práctica no sería necesario, puesto que para ‘escuela’ no es necesario llegar a esa traducción, simplemente se coloca 1. O si se quiere, puede colocar cualquier base con la misma potencia y mostraría un mejor manejo del contenido (cualquier número elevado a cero es uno). Si lo hace de la manera ‘ideal’ su respuesta y actuación estaría más automatizada y menos reflexiva.

Proponer problemas de este tipo y con este fin únicamente tiene sus inconvenientes puesto que, como vemos, la reflexión se deja de lado, las dudas se cohíben, o simplemente no se tienen. Todo es perfecto y lo único en lo que hay que centrarse es en buscar la relación matemática acorde según los datos propuestos.

Como puede apreciarse, el aprender a enfrentarse a problemas matemáticos en la escuela tiene una limitación en el aprender a traducir operaciones en un texto organizado de una manera específica y resolverlas. Para aprender a resolver problemas y aprender a partir de la resolución y planteamiento de problemas hay que quitar esa limitación, y trabajar en función del problema y su proceso de solución. En la actividad escolar básica, la aplicación y dominio de los contenidos estudiados actúan como ‘sombra’ frente a la actividad propia de la resolución de problemas.

Se ha observado, además, que los libros de texto proponen estrategias de resolución de problemas, cada cual para un tipo de problema distinto (buscar regularidades, ensayo y error, organización de datos, etc.). La limitación está, según creo, en que este tratamiento se reduce a un tema específico dentro de la diversidad de temas que abarca la asignatura[73] que muchas veces se introduce de esta manera a mitad de curso, cuando antes de ello los alumnos se han enfrentado y resuelto muchos problemas. Se produce, entonces una especie de 'divorcio' entre los problemas aritméticos (de aplicación de operaciones directamente), aquéllos hasta los que ahora se han enfrentado y para los que no se aplica más estrategia que la de rutina y los que necesitan un tratamiento diferente. El inconveniente es que se pierden en ese espacio de tiempo para luego no ser tratados más.

Para promover el adecuado enfrentamiento de los alumnos con los problemas matemáticos escolares es necesario trabajar diferentes estrategias de planteamiento y resolución de problemas producto de la reflexión de los alumnos e introducir este tipo de problemas (abiertos, creativos, etc.) más a menudo en el aula, de tal manera que los alumnos adquieran contacto y experiencia con los mismos y permitan desarrollar un pensamiento más reflexivo y eficaz y estrategias de aprendizaje. Quizá el problema del libro de texto es que brinda al alumno toda la información 'ideal', proponiendo un camino a seguir para resolver adecuadamente el problema, lo cual puede limitar la puesta en acción de diferentes estrategias por parte del alumno y limitarse, éste, a seguir la que es correcta (sin pensar que puede haber otras). No es cuestión de dejarle hacer al alumno sin ninguna orientación u organización previa. Ninguno de los extremos es correcto. Debemos intentar, desde los primeros meses del curso, proponer situaciones, en las que el alumno pueda involucrase realmente en su resolución, organizando verdaderos planes de acción, cotejando diferentes maneras, transformando la situación, y 'haciéndose' del contenido

---

[73] En el libro de Anaya, Sexto Grado, el tema 9 se titula “Resolvemos problemas” y en él se proponen problemas abiertos o de mayor complejidad cognitiva, en el que la traducción directa y la resolución de operaciones no es el fin principal. Por ejemplo: “Construye una cuadrícula de 4x4 e intenta colocar en ella ocho fichas o botones sin hacer tres en raya. ¿Cuántos botones o fichas puedes colocar si la cuadrícula es de 5x5, sin hacer tres en raya? ¿Y si es de 6x6? ¿Qué observar?. Otro problema: “...doble número de gallinas que de cerdos, habiendo en total 98 patas y 37 picos. ¿Cuántos animales hay en el corral? ¿Y cuántas...? Páginas 70 y 71. En este problema, sin embargo, el dato de “...doble número de gallinas que de cerdos...” no es correcto puesto que 25 (que es el total de gallinas) no es el doble de 12 (que es el total de cerdos), y 12,5 no es una cantidad correcta para designar el número de cerdos. Que hay en el problema. Por otro lado, el problema que se propone a continuación para que el alumno refuerce lo aprendido (fases de resolución de problemas) reafirma lo que venimos diciendo: lo central es el contenido a aprender y la resolución de problemas juega un rol de contexto de ese contenido. El problema propuesto es el siguiente: “Un mantel cuadrado de tela tiene una superficie de 1,44 m2. ¿cuántos centímetros mide cada lado del mantel? Si un metro cuadrado de tela vale 1.350 PTA, ¿cuánto ha costado el mantel?”. Este problema tiene una complejidad mucho menor que el anterior lo que lleva a pensar que no se quiere que el alumno se 'atasque' en la resolución y pueda seguir correctamente las fases, minimizando el valor de los problemas matemáticos y su proceso de resolución. No se logra con ello que el alumno aprenda estrategias, sino que aplique las propuestas. Lograr estrategias de aprendizaje es permitir el uso reflexivo de procedimientos mientras que intentar una simple comprensión y utilización de procedimientos es lograr un aprendizaje al estilo de técnicas de estudio.

matemático involucrado de tal manera que luego pueda manipularlo libremente, 'inventándose' problemas para ese contenido; problemas, quizá, al estilo del de la escuela-aulas-niños, etc. pero creados y propuestos por él. Luego, cuando el manejo y experiencia en dichos contenidos y en la resolución de problemas abiertos sea más profunda podrá proponer problemas más creativos y abiertos.

Lograr esta nueva forma de trabajar en el aula de matemática en el nivel primario, de tal manera que los alumnos puedan desarrollar estrategias de aprendizaje que les permita enfrentarse eficazmente a los problemas matemáticos es intentar, en primer lugar, que los profesores a cargo desarrollen estrategias de aprendizaje y además la habilidad para diseñar experiencias de aprendizaje que luego posibiliten a los alumnos el desarrollo de estrategias de aprendizaje. En segundo lugar, implica una reestructuración de la formación inicial de los futuros docentes y la reorientación de los programas de actualización para los maestros en servicio.

Centrada la situación actual intentamos buscar nuevas alternativas de trabajo en el aula con los problemas matemáticos, o modificaciones de las ya existentes, que orienten a los alumnos hacia un aprendizaje de los contenidos matemáticos que les permitan usarlos correctamente y desarrollar su pensamiento, cuyos resultados podrán ser observados no solamente en una prueba escrita, en la resolución de un problema matemático específico o ejercicio similar, sino en el uso inteligente, en cualquier situación que los requiera, de los contenidos matemáticos y de las capacidades y habilidades que el trabajo matemático desarrolla en el sujeto. La matemática en la escuela, desde los primeros grados, también debe enseñar a pensar, no sólo a conocer más o menos un concepto y aplicarlo.

Para ello debemos incluir en nuestra actividad matemática escolar diferentes tipos de problemas matemáticos, desde el primer contacto de los alumnos/as con la materia. Los problemas deben ser producto de la reflexión del sujeto resolvente y no únicamente de la decisión del profesor o libro de texto. Por estar nuestro trabajo centrado en el último ciclo de enseñanza primaria nos limitaremos a proponer problemas que este grupo de alumnos/as puede desarrollar. Sin embargo, aún en los primeros grados, los alumnos deben tener oportunidad de enfrentarse a problemas novedosos, creativos y abiertos. Los problemas matemáticos escolares pueden tener estas características.

Intentaremos centrarnos en qué tipos de problemas matemáticos pretendemos incluir en la actividad matemática del escolar. En primer lugar debemos aclarar lo que se entiende por 'problema' en la escuela y en la actividad matemática. Dentro de las investigaciones en planteamiento y resolución de problemas lo primero que se intenta definir es 'problema matemático'. Diversos autores han clasificado los mismos y han intentado esclarecer las diferencias que existen entre las tareas o actividades denominadas 'problemas' y aquéllas que se consideran 'ejercicios', dos términos que hasta ahora los alumnos de enseñanza básica manejan con relativa flexibilidad[74], si consideramos las apreciaciones de los investigadores. Borassi (1986)[75], por ejemplo habla de 'ejercicios' y 'problemas con texto' para referirse a aquellas tareas que intentan desarrollar algún tipo de algoritmo (los primeros) y aquel texto formulado con precisión donde aparecen todos los datos necesarios para obtener la solución (para los problemas con texto). Este último es el tipo de problemas que, generalmente, los alumnos enfrentan en la escuela, desde el primer contacto con los mismos. Los alumnos se enfrentan a 'problemas con

---

[74] Los alumnos de enseñanza primaria manejan una definición de problema centrada en la forma de presentación, directa o indirecta, del contenido matemático. Es decir, la diferencia que hay entre 'ejercicio' y 'problema' es que los primeros presentan la operación matemática de manera inmediata (40x50=), mientras que los problemas las presentan mediante texto (Juan tiene ahorrados 40 euros y le regalan 50 euros por su santo. ¿Cuánto tiene ahora?) . Básicamente, los problemas son considerados “ejercicios con texto”. En ambos casos, la finalidad es la misma, aunque para los alumnos el segundo tipo de actividad intenta 'esconder' las operaciones aritméticas básicas o cualquier contenido matemático aprendido.

[75] Citado por Cruz Ramírez, Miguel (2002). Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza matemática. Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas.

texto' en el que aparecen todos los datos necesarios para descubrir la operación (traducir matemáticamente) y hallar la solución. Desde esta clasificación, el 'problema matemático' se ve como un tipo de tarea, de actividad escolar o propuesta docente. Hace referencia a un nombre o sustantivo[76]. En este caso, el alumno se enfrenta a dicha tarea e identifica si es un 'ejercicio' o 'problema', dependiendo de si la actividad requiere que resuelva o halle el resultado y presente directamente números y operaciones que los relacionan; o si pide que resuelva el problema y presenta un enunciado textual.

Borassi también menciona otros tipos de problemas o actividades matemática más complejas denominadas: “problemas puzzle” (contexto lúdico), “problemas de la vida real” (contextos cotidianos), “situaciones problémicas[77]” (no se especifica el contexto). Incluye además las “pruebas de conjeturas” y las “situaciones[78]” (contexto matemático). En este caso, no se habla de la forma de presentación (con texto o sin él) del problema. Este tipo de actividades no son el quehacer ordinario de la actividad matemática en la enseñanza primaria, aunque algunas editoriales empiezan a incluirlos en sus libros de texto, sin demasiado tratamiento en el mismo[79].

Presentar problemas con texto, del tipo expuesto por Borassi, permite formarse una idea de los mismos, más allá de lo que el problema matemático y la habilidad matemática significan. Este tipo de problemas, al presentar toda la información necesaria, permiten una solución rápida; no necesitan de mucho esfuerzo y reflexión por parte del resolutor: sólo conocer el contenido matemático implícito (operaciones aritméticas, fórmulas; sobre cuadriláteros, regla de tres, etc.). Con ello, si no se conoce dicha matemática, no se puede resolver el problema; incluso, no se puede idear nada. El proceso de resolución queda en blanco y el alumno, simplemente, no sigue o trabaja sin sentido, y, algunas veces, sin darse cuenta. Sin embargo, no basta recordar el contenido matemático aprendido para resolver un problema con éxito. Recordemos el caso denominado “La edad del Capitán” en la que un grupo de alumnos 'resolvió' el problema, aplicando sin sentido lógico (al menos para el 'problema con texto' expuesto) operaciones con los datos del problema que no se relacionaban con lo que la situación preguntaba.

Los problemas de este tipo cumplen una función concreta, simple, dentro del campo de la actividad matemática escolar, que es más amplia. Es verdad que deben estar dentro esta actividad, pero no deben ser los únicos artífices de la misma, pues estos no permiten resolver con éxito cualquier situación problemática; sólo aquellas situaciones parecidas y cuyo campo es muy reducido. Una vez cumplida su función, pierden todo valor creativo ya que se transforman en 'problemas con texto rutinarios' (propuestos por otro: el profesor, el libro de texto, los padres, etc.). Quizá su presentación debe ser tal que no se introduzcan como 'problemas matemáticos'[80], sino que han de surgir de situaciones que se resuelven aplicando conocimiento matemático. No son problemas en sí, sino situaciones con una pregunta, una inquietud que no necesariamente es un problema en el sentido de dificultad[81]. Serán más o menos difíciles según el alumno tenga capacidad para darse cuenta de la relación que existe entre la situación y la pregunta, y según el

---

[76] Nombre. Palabra que designa o identifica seres animados o inanimados (Real Academia de la Lengua Española).

[77] La palabra 'problémica' no aparece en el diccionario de la Real Lengua Española, aunque es un término bastante usado en temas relacionados con problemas de distinta índole.

[78] Un ejemplo de situaciones, según la definición de Borassi es el propuesto por Blanco y dice: Considérese algunas triplas pitagóricas (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17). ¿Cumplen alguna regularidad? Según Borassi, las situaciones son tareas que facilitan la formulación de conjeturas por parte de los alumnos/as.

[79] Aparecen como actividades extra dentro de cada capítulo.

[80] Generalmente, en los libros de texto y en los cuadernos del escolar se pueden observar actividades como la siguiente: “Resuelve los siguientes problemas”. Esto empieza a catalogar dicha actividad como algo que naturalmente no lo es. Quizá lo mejor sea poner la siguiente instrucción: Lee el siguiente texto y reconoce la operación matemática que puede ayudarte a responder la pregunta solicitada. O, Las siguientes situaciones plantean una pregunta. Léelas atentamente y trata de responder la pregunta planteada. Así, nos evitamos catalogarla como problema y ser más precisos.

[81] 'Problema', según la RAE tiene varios significados: 1. Cuestión que se trata de aclarar, 2. Proposición o dificultad de solución dudosa, 3. Conjunto de hechos y circunstancias que dificultan la consecución de algún fin, 4. Disgusto, preocupación, 5. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. Desde la matemática se conoce 'problema determinado' como aquel que no puede tener sino una sola solución, o más de una en número fijo y 'problema indeterminado' aquel que puede tener indefinido número de soluciones.

grado de dificultad para resolverla. El problema depende de si resulta difícil para el alumno/a (problema como adjetivo: situación problema o situación problemática).

En primer lugar, es que el alumno/a quien ha de ver, vivir, directa o indirectamente, estos 'problemas' o bloqueos en una situación, antes que el profesor se los presente de manera textual, en una situación hipotética, casi ideal. Poner al alumno en situaciones cotidianas, sencillas (un día en la granja, jugando con las canicas, haciendo la compra, ordenamos el aula, distribuimos las crayolas, etc.) y conducirlo a vivir situaciones conflictivas para reconocer, y luego plantear, los problemas surgidos. Vivir la situación puede llevarle a identificar el conflicto, reconocerlo, y expresarlo y formularlo con sus propias palabras, quizá no apropiadamente al principio, pero sí de manera lógica. Ante una situación concreta (perdiste 5 canicas en el primer juego, ganaste dos en el segundo..., gastaste dinero en gominolas y en fichas de juego, te hicieron un descuento por comprar más de 50 euros; llegaron 5 vacas más a la granja, las gallinas pusieron 30 huevos en total; no hay tantas crayolas del mismo color como niños en el aula; llega material al aula y tenemos un sólo estante... ¿qué puedes hacer para...? La idea es preguntar al alumno ¿qué ha pasado? (así expresa la nueva situación), ¿cómo era antes?(reconoce y confirma que ha habido un cambio) ¿qué quieres saber? (se plantea una pregunta para poder seguir), ¿cómo lo resuelves (expresa formas, métodos, datos etc. que ayuden a resolver la situación).

Las preguntas que formule el profesor pueden ser de tal manera que invite a los alumnos a pensar en la situación y no en cómo la plantea el profesor, o el libro de texto, o cuáles son sus expectativas con el alumno (pensar en una operación, identificar los datos numéricos y relacionarlos mediante una operación que se ajuste a lo que el profesor ha preguntado, por ejemplo). Si el alumno no logra formular los problemas, y ahora hablamos de problemas, porque son situaciones bloqueadoras de la situación general, reconocidas por los alumnos, difícilmente se podrá idear un camino de solución propio y difícilmente podrá encontrar otros mejores. El planteamiento de problemas por parte de los alumnos ayuda a su mejora en el proceso de resolución de los problemas matemáticos, ayuda a reconocerlos e idearse un plan de solución.

El siguiente problema es ya famoso en diversas investigaciones sobre el planteamiento de problemas (*problem posing*), en múltiples variedades, una de ellas es la siguiente, extraída del libro El art of Problem Posing, de Stephen I. Brown y Marion I. Walter (página 16):

> "*Cada año, en un acto de cordialidad, la sesión del Tribunal Supremo comienza con un □□saludo□□apretón□de manos entre cada juez asistente. Hay nueve jueces del Tribunal Supremo*"

Como podemos observar, la situación está planteada, más no la pregunta especificada. Seguramente quienes conocemos la situación, u otras parecidas, inmediatamente podemos lanzar la pregunta que se ajusta a la misma. Ésta estaría entre: ¿cuántos apretones de mano (saludos) se darán en dicha conferencia?, o ¿cuántos apretones de mano se darán entre los nueve jueces?; quizá esta otra: ¿cuántos apretones de mano se darán en dicha conferencia entre los jueces asistentes? etc. Los matices pueden ser distintos, pero todas coinciden en la cantidad de *saludos* o apretones de manos. Si la situación la planteamos a nuestros alumnos de Quinto y Sexto Grados, quizá su respuesta seguiría el mismo camino. Así, analizando los datos de la situación, los alumnos que 'mejor' se manejan en la resolución de problemas aritméticos escolares, pueden pensar de la siguiente manera: hay nueve jueces, cada uno se da un apretón de manos con otro. Se refiere a que esto sucede cada año, pero no nos dice cuántos años; la cantidad de jueces es conocida, la cantidad de apretones de manos no y los años tampoco; pero entonces la pregunta va por los apretones de manos. Por lo tanto: ¿cuántos apretones de manos se darán? Sin embargo, otros pueden lanzar la pregunta pensando en los años que han pasado: ¿cuántos años son de conferencias? (como aquellos del problema "La edad del capitán" u otras versiones similares); otros pueden tomar el dato y decir: Si están en la 8ª Conferencia, ¿cuántos apretones de manos se habrán dado desde entonces? Los profesores que conocemos el problema sabemos por dónde va el camino. Los alumnos que no lo conocen, no; pero ellos tienen una idea clara: hay que preguntar por cantidades. La clave, entonces, es lanzar la pregunta hacia cuestionar ¿cuántos...? 'algo'. Como hemos visto, algunos ¿cuántos? pueden tienen sentido, pero otros no.

Muchas veces, nuestra experiencia personal en resolución de problemas, directa o indirecta (a través de revistas, programas de televisión, etc.) nos muestra un camino a seguir que limita nuestro actuar[82]. Al limitarlo no nos da oportunidad de poner en juego más conocimiento que el experimentado, marginando preguntas alternativas dentro del campo de la matemática que pueden ser beneficiosas para nuestro aprendizaje y razonamiento matemático. Por otro lado, el habernos enfrentado, básicamente, a problemas matemáticos escolares que generalmente tienen una sola pregunta directa (aunque a veces haya más de una pregunta, éstas siempre se dirigen a conocer cantidades[83]), hace que nuestra actuación se dirija a plantear *esa* pregunta (que de antemano 'sabemos' cuál es su finalidad) y resolverla, sin dar pie a otras que también pueden plantearse. Visto desde esta perspectiva, el objetivo está puesto en 'alguna' cantidad desconocida y en operar, no en la comprensión de la situación ni en lo que ésta puede traer de conocimiento matemático.

Las situaciones, al ser amplias, pueden generar muchas preguntas. La situación de los saludos, por ejemplo, es tan amplia que se pueden desprender de ella infinidad de preguntas previas y posteriores a las que propusimos[84]. Las preguntas no sólo nos tienen que llevar a aplicar una operación, sino a observar los fenómenos y establecer diferentes relaciones; y viceversa: las observaciones y relaciones generadas nos guían a la formulación de diversas cuestiones.

Las preguntas propuestas, a medida que las formula el resolutor (quien se enfrenta al problema), al reflexionar sobre la situación en sí y no únicamente sobre lo que imagina querer (hacer una operación y encontrar una cantidad nueva que se ajuste a la situación), permite ampliar dicha situación e incluirle otras alternativas y otros temas que pueden relacionarse (no sólo realizar operaciones aritméticas). Es decir, analizar la situación no sólo en sí misma sino en función de su relación con otros temas (otro tipo de operaciones, por ejemplo), ampliando hacia otros temas y contenidos en trabajo con ese problema.

La idea frente a una situación es que el alumno/a resolutor pueda identificar dicha situación/problema y las condiciones de la misma. Lanzar la pregunta inmediatamente (en mayor grado por parte del profesor y del libro de texto que del alumno[85]) inhibe esta tarea. El razonamiento inmediato puede ser diverso y bastante desacertado, o no. En la situación sobre los Saludos (o apretones de manos) se puede decir los siguiente: nueve personas se pueden dar ocho apretones de manos (desde *mi* punto de vista, únicamente) o nueve personas se pueden dar 72 apretones de mano (uno con todos y todos con todos, respectivamente). De hecho, cuando sucede entre ellos (los alumnos/as), el desorden es tal que fácilmente dos personas (infantes, niños, adolescentes) se dan más de un apretón de manos. También se puede pensar en darse 9 apretones

---

[82] La experiencia personal de un alumno o alumna de enseñanza básica es haber desarrollado muchos problemas aritméticos, situaciones en las que casi siempre, o muy por encima de cualquier otra, plantean aplicar alguna operación básica: suma, resta, multiplicación, división, potencia, etc., o sus combinaciones.

[83] Por ejemplo en el siguiente problema: “Juan coge 10 manzanas del árbol quedando 8, ¿cuántas manzanas había en el árbol antes que Juan cogiera las diez? Si, además de las que cogió Juan, se caen 5 manzanas, ¿cuántas quedan en el árbol? Si Juan decide coger las manzanas caídas, ¿cuántas se lleva?” se pueden observar tres preguntas, cada una de las cuales se refieren a cuestiones numéricas. Si bien es cierto que para resolver la tercera hay que responder la segunda, cada una se responde con los datos de la situación propuesta.

[84] En su libro, Brown y Walter (The Art of Problem Posing) plantean otras preguntas, como por ejemplo: ¿Puedes predecir un número par o impar de apretones de manos? ¿Puedes intuir un número mínimo de apretones de mano? si llegan tarde tres jueces, ¿cuántos apretones de mano necesitan darse todavía?, etc. Otra pregunta puedes ser: si están sentados uno a continuación de otro en un banco largo, ¿cuál es la cantidad mínima y máxima de apretones de manos que se pueden dar sin necesidad de pararse del banco?

[85] Cuando es el libro de texto el que propone el 'problema' los alumnos/as tienden a leer la pregunta antes de terminar de leer toda la situación (o circunstancias del enunciado/problema); luego, este hecho puede influir en la mayor o menor comprensión global de la situación planteada.

de manos (pensando desde la cantidad de personas de manera global: nueve personas, nueve apretones). O si se juega un poco más con la experiencia personal y se decide reunir nueve chicos/as simulando ser los jueces, y organizando mejor la situación, se puede decir: la primera persona (un compañero/a) ocho, la segunda (otro compañero/a) siete... la última (un compañero o el mismo sujeto resolutor), cero. Total de apretones de mano (o saludos) 36. El asunto está zanjado, aunque no completamente.

Zanjar el asunto en esta fase es desechar parte de las circunstancias que habrían podido desatarse al reflexionar sobre esta situación específica u otras parecidas. Las preguntas adicionales, propuestas por el alumno/a resolvente, permitirían abrir esa zanja y trabajar sobre las fronteras de su propio conocimiento. Debemos enseñar a pensar sobre las situaciones y no únicamente sobre las operaciones implícitas, provocando en el alumno/a cierto grado de desequilibrio e interés por la situación. El pensamiento surge siempre de una situación de desequilibrio, problemática, permitiendo a los estudiantes resolutores enfrentarse a contradicciones que deben resolverse con su participación activa y de forma independiente, a fin de lograr su más real y provechoso aprendizaje.

Como vamos observando, la actividad que se busca en el alumno es principalmente intelectual, reflexiva, y esta sólo es posible si él es capaz de vivir una situación conflictiva. La asimilación del conocimiento debe ir más allá de la simple memorización de conceptos, reglas o fórmulas, para su posterior aplicación en 'situaciones problemáticas -o conflictivas- ideales', desarrollando no sólo la memoria. Es necesario desarrollar también las diferentes habilidades y capacidades del estudiante, en el nivel en el que se encuentre. La enseñanza a través de la resolución de problemas pretende formar un pensador activo y no un mero imitador o procesador de soluciones ajenas (profesores o libros de texto). Ante una situación-problema el estudiante debe, por medio de la abstracción, simplificar la información y determinar lo esencial a fin de formular el problema con suficiente rigor.

Podemos pensar que los alumnos de Quinto y Sexto grados, y mucho menos los de los niveles anteriores, no tienen un pensamiento abstracto y que esto que se viene diciendo es una utopía en estos niveles. Esto es verdad en parte[86]; porque quizá no están siendo formados para ellos. De hecho, se piensa que, en la actualidad, hasta los 14-17 años predomina el 'pensamiento concreto', lo que no permite procesar la información más allá de lo que alguien tiene experimentado; las personas que carecen de este pensamiento no son capaces de formular una hipótesis y utilizar sistemáticamente la lógica para solucionar un problema, cuando se enfrentan realmente a él[87]. Un estudiante cuyo pensamiento es concreto, puede recitar perfectamente cosas que ha memorizado[88], pero no suele comprender el significado real de las palabras que ha utilizado; de ahí que pueda, en algunos casos, resolver problemas matemáticos escolares sencillos

---

[86] Por ejemplo, Jean Piaget considera que la etapa de las operaciones formales (pensamiento abstracto) comienza a partir de los 11-12 años de edad (las operaciones concretas comprenden desde los 7 hasta los 11 años de edad, aproximadamente), cuando los alumnos de escuela, en nuestra sociedad actual, están finalizando la etapa primaria e incluso la mayoría ya la finalizaron (generalmente, los niños inician la etapa de enseñanza primaria a los 6 años de edad, por lo que la culminan con 11 años de edad). De todas maneras, la división es una referencia y las etapas se superponen por lo que no es factible pensar que un niño/a de 11 años cualquiera, se caracterice por poseer un pensamiento abstracto desarrollado y haber dejado atrás el pensamiento concreto. La etapa del adolescente es bastante amplia, y no sabemos en qué momento posee las características propias del pensamiento abstracto (de hecho se considera la adolescencia -en Winipedia, enciclopedia libre- como un fenómeno cultural y social y por tanto sus límites no se asocian fácilmente a características físicas). Debemos pensar, entonces, hasta qué punto es factible, intentar desarrollar el pensamiento lógico en un alumno de estas edades, en la actualidad y en nuestro tipo de sociedad y cultura.

[87] La mayor cantidad de accidentes en coche o motocar, por ejemplo, se dan entre adolescentes que no llegan a los 17 años, por causas de irresponsabilidad.

[88] Algunos de ellos pueden parecer 'niños genios' y son presentados como tal en los programas de televisión en lo que aparecen. Recuerdo un niño de 5 o 6 años aproximadamente que apareció en televisión porque podía decir las capitales de cualquier país que se le mencionara, por extraño que parecía; u otro que podía definir cualquier palabra del campo de las Ciencias Naturales que le indicaran. Los niños/as pueden recitar poesías extensas o interpretar canciones tan o más largas, sin necesidad de comprender lo que quiere decir cada una.

sin comprender la esencia de la resolución[89]. La capacidad de memorizar no es la capacidad de comprender; de ahí que resolver problemas matemáticos de primer tipo o rutinarios, o aquellos cuya presentación es copia de aquél presentado por el profesor, y que le permite seguir el mismo camino, no necesariamente le da capacidad para enfrentarse con éxito y resolver cualquier problema matemático, de su nivel, si es que no se pone en circunstancias para hacerlo.

De todas maneras, el que el alumno de último ciclo de enseñanza primaria no posea teórica o formalmente hablando el pensamiento abstracto, no quiere decir que no esté potencialmente en condiciones de poseer dicho pensamiento y en esto juega un papel muy importante la gente que le rodea y con quien se relaciona. En primer lugar la familia y en segundo lugar, la escuela, y en ella los maestros, quienes serán los encargados de proponer situaciones que desarrollen su pensamiento de manera amplia y reflexiva.

En primer lugar, hay que especificar qué problemas o situaciones problemáticas debemos proponer a nuestros alumnos/as y la manera de hacerlo, de tal forma que ellos/as tengan oportunidad de demostrar conductas propias[90], aplicar y alcanzar nuevo conocimiento; así como analizar el tipo de problemas que, en su mayoría, proponemos. Si nuestro objetivo es que nuestros/as alumnos/as puedan, a través de los problemas matemáticos propuestos, aprender de manera óptima los conocimientos matemáticos escolares y lograr enfrentarse mejor a los mismos, es necesario proponerles situaciones en las que sean capaces de no sólo aplicar un único conocimiento (un único procedimiento, un sólo tema aprendido), sino también requerir nuevo conocimiento o aplicarlo de diferente manera. Evidentemente, los problemas matemáticos escolares (PME) a los que suelen enfrentarse los/as alumnos/as no cumplen estos requerimientos ya que su finalidad es básicamente aplicar conocimiento aprendido; así, a partir de una situación a la que se le plantean preguntas concretas se introduce un nuevo tema matemático (suma, potencia, área, ecuaciones, etc.), para luego aplicarlo en situaciones parecidas, cuyo texto es más pequeño y específico, ya que sirve, principalmente, para indicar los datos necesarios[91].

Vistos de esta manera, podemos decir que los PME 'cierran' las puertas a la reflexión y puesta en acción de contenidos y procedimientos diferentes: de caminos distintos que conducen a diferentes formas de enfocar la situación y distinto uso del conocimiento adquirido. Al 'cerrar' las puertas a la amplitud, reflexión e intercambio de ideas, los problemas pueden denominarse 'cerrados', puesto que no necesitan más que temas puntuales y un solo resolutor ya que cualquiera que sea debería seguir el mismo procedimiento. Los problemas cerrados se caracterizan por expresar todo lo que el alumno/a resolutor/a debe saber para responder correctamente a la

---

[89] Cuando los alumnos no ven la situación como tal (como una situación problemática, por ejemplo) sino como una tarea en la que tienen que relacionar unos datos numéricos, tienden a enfrentarse a la misma sin reconocer en ella un problema en el sentido de dificultad situacional. Se basan entonces en indicadores externos, como las 'palabras clave', para encontrar la operación aritmética que traduzca esa relación. Cuando esta tarea es similar a otras anteriores, y los problemas se tornan rutinarios y sin dificultad más allá de reconocer y resolver la operación aritmética implícita, los alumnos son capaces de recordar el procedimiento empleado y aplicarlo en esta nueva tarea, muchas veces sin necesidad de comprender la situación globalmente . En algunos casos no hay comprensión de la situación y por ello decimos que pueden resolver tareas de este tipo sin comprender la situación básicamente.

[90] Al hablar de 'conductas propias' nos referimos a aquéllas que son producto del pensamiento y reflexión personal al interactuar con la situación problemática propuesta y responsabilizarse por su solución.

[91] Por ejemplo, una situación que introduce la resta de números naturales en sexto grado es la siguiente: Maite cuenta a Pedro que en el viaje de vuelta de vacaciones vio una señal que indicaba Salamanca 415 km y, más adelante, vio otra que indicaba Salamanca 267 km. ¿Cuántos kilómetros hay entre estas dos ciudades? Luego, en un PME de aplicación dice: En un polideportivo hay 2 541 abonados. 549 son mayores de 12 años y 35 tienen 12 años. ¿Cuántos abonados hay menores de 12 años? De esta manera, aunque los textos son igualmente amplios, los PME -a diferencia de las situaciones introductorias o PME introductorios- transmiten la idea de que son propuestos para reconocer en ellos los datos y operar con ellos. Son más directos al referirse a los datos de los mismos. Por otro lado, las tareas denominadas 'ejercicios' inician con una indicación para el alumno. Por ejemplo, “Calcula de dos formas distintas”, “Completa el siguiente cuadro”, “Realiza las siguientes restas” de acuerdo al tema que se trabaja en la unidad. Sin embargo, cuando se proponen PME no se ha podido observar indicación alguna, simplemente se enuncia el problema de manera textual, considerando que el alumno debe responder a la pregunta propuesta al final del 'problema con texto'. Esta forma no especifica que el alumno deba indicar la manera o maneras de hacerlo, lo que deja de lado un momento importante de la fase de resolución. Por otro lado, analizando los libros de texto, estos dejan espacio para el resultado de la operación, el que se puede colocar en el mismo libro, mientras que para los PME no. El espacio es nada, lo que podría llevar a pensar que lo importante es el 'resultado' de la operación que hay que realizar.

pregunta propuesta. En palabras de Miguel Cruz Ramírez (2006) “los problemas cerrados se caracterizan por expresar lo dado y lo buscado con suficiente exactitud”[92]. Si esta es la definición y/o característica de los problemas que han predominado en la enseñanza básica, y lo que pretendemos actualmente es que los alumnos/as reflexionen sobre la solución al problema, observen diferentes formas de resolución y distintos temas involucrados, de tal manera que hagan uso eficaz de los mismos y puedan a partir de ellos aprender mejor los temas matemáticos; siendo capaces, además, de ver, plantear y formular sus propios problemas matemáticos, debemos proponer problemas que no sólo no cumplan las características de los problemas cerrados, sino que promuevan lo contrario. Los nuevos problemas no deben brindar lo dado y lo buscado con suficiente exactitud, es decir, la situación inicial y/o final no se ha de precisar con suficiente claridad, de tal manera que sea el resolutor (alumno/a) quien logre hacerlo.

Un problema de este tipo, en el que *lo dado* y/o *lo buscado* no se brinde con suficiente claridad, por ejemplo, sería el siguiente: “Se quiere construir una caja de 360 m^2. ¿Qué dimensiones debe tener?”. En este caso, la situación no nos brinda toda la información: hay condiciones que no están dadas, como la forma de la caja: si ha de ser rectangular, cuadrada, triangular, etc., para qué es la caja (para guardar balones, botellas, material didáctico, etc.), y la cantidad de material disponible, pues se gasta más o menos en dependencia de la forma y dimensiones escogidas. La situación así presentada permite distintas consideraciones para la respuesta. Por este motivo, este tipo de problemas se denominarían 'problemas abiertos', pues permiten 'abrir' la mente del o la estudiante resolutor/a a múltiples posibilidades de acuerdo a las características del problema. Los problemas abiertos se aproximan mucho a lo que sucede en la vida real en la que las condiciones no siempre se presentan de manera explícita. Como docentes, debemos aprovechar este tipo de situaciones y proponerlas a nuestros alumnos/as con el fin de permitir en ellos/as ese tratamiento diferente y reflexivo que se busca, y sobre todo crear las condiciones para que lo hagan explícito y poder orientarlo adecuadamente. No debemos caer en el error de tratar de la misma manera problemas de diferente naturaleza.

Un alumno que busca la operación a seguir, y cuya experiencia se basa en resolver problemas cerrados, puede intentar aplicar el mismo procedimiento seguido para los problemas que conoce y 'desperdiciar', desde todos los puntos de vista, la riqueza de este tipo de problemas. Por ejemplo, puede pensar en las siguientes operaciones que se ajustan a la cantidad solicitada: 60x60=360; 10x36=360; si las formas son cuadradas o rectangulares; o (72x10)/2=360 si la forma es triangular, entre otras. En este caso, puede presentar varias opciones, lo que no necesariamente puede llevarnos a pensar que esté analizando la situación; quizá sí. Lo necesario es hacerlo explícito y permitir expresar las representaciones mentales que el sujeto se hace de la información brindada por la tarea propuesta y las condiciones que está poniendo en juego.

La palabra 'abierto' para referirse a PME que se oponen a los 'problemas cerrados', cuya característica ya hemos mencionado, hace pensar en una serie de problemas con texto que forman parte de algunos libros de texto que se pueden enmarcar dentro de este grupo. Los 'problemas abiertos' son todo lo opuesto a los 'problemas cerrados', aunque habrá grados de apertura y de cierre en cada uno de ellos. Es decir, un problema puede ser más o menos abierto, o cerrado, según cómo se expongan sus datos. Así, el problema de las gallinas y cerdos, citado anteriormente, no es considerado por los investigadores como un problema cerrado. En este caso, si el problema es tratado correctamente, estimula a desarrollar diferentes métodos de solución; así, los alumnos pueden exponer y discutir la validez, generalización y potencia de dos enfoques algebraicos, una solución visual y el uso de aproximaciones sucesivas. La situación final junto con el proceso de resolución deben generar desarrollo en el/la alumno/a resolutor/a. Los problemas cerrados no lo hacen, y si se transforman en rutinarios, simplemente mecanizan un procedimiento de resolución.

---

[92] Cruz, M (2006): La Enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1. La Habana: Edición Cubana, página 72.

Aún no podemos afirmar que mejoran la destreza en resolución de operaciones aritméticas. Lo que no hacen es mejorar la capacidad de resolución de problemas matemáticos de cualquier índole. Cada problema ha de constituir un reto en el que se desconoce tanto la vía de solución como el tiempo que necesitará, el que no debe desanimarlo ni abandonar la tarea[93]. El maestro y principalmente el alumno ha de confiar en su inteligencia y habilidades que posee las que son suficientes y adecuadas para responsabilizarse por su resolución.

El trabajo en el aula de los alumnos cuando se enfrentan a PME (Problemas Matemáticos Escolares)

Revisando algunos libros de texto y páginas web en las que se proponen problemas matemáticos para escolares de educación primaria se pudo observar una web denominada “Usa el Coco” en la que se proponen una serie de actividades matemáticas, dentro de las que se incluyen una sección denominada “problemas”. En ella se concibe un problema como aquél enunciado en el que se plantea una pregunta (generalmente al final del enunciado) relacionada con la situación planteada. Se puede ver que algunos *problemas* son más o menos fáciles o difíciles; además, todos responden a la idea de 'problema cerrado' expuesta anteriormente. Luego, dentro de la misma página se pudo encontrar otro apartado denominado “razonamiento”, en el que también se proponen problemas (con o sin números. Los del apartado “problemas” son todos con números y resolubles a partir de las operaciones aritméticas básicas), además de otras actividades denominadas de diferente manera. A diferencia de los problemas anteriores, estos necesitan de otras habilidades en los estudiantes, e incluso algunos, como el problema de las gallinas y cerdos, que se incluye en este apartado, son considerados 'problemas abiertos', lo cual es un progreso en el campo de los PME, pero al pedir solamente el resultado, este tipo de problemas resulta infructuoso, ya que no permite al alumno, o a la alumna, darse cuenta de las distintas posibilidades que existen en la resolución de problemas.

Contar en el aula con un problema matemático abierto para aprender más eficazmente las matemáticas resulta ventajoso debido a varias razones, las que hemos ido explicando en los párrafos anteriores y que podemos resumir como sigue:

- A través de los 'problemas abiertos' los alumnos tienen ocasión de pensar las cuestiones con detenimiento. Podríamos decir que existe un bloqueo intelectual. Al ser problemas de este tipo, los alumnos no vislumbran inmediatamente el camino a seguir ya que los datos no están directamente conectados, como puede suceder con los problemas cerrados, en el que hablaríamos de bloqueos algorítmicos, básicamente[94]. De ahí que, en este último caso, su conducta esté limitada a un procedimiento concreto (aplicar operaciones aritméticas básicas, por ejemplo) y a unos temas matemáticos específicos (suma, resta…). En el caso de los ‘problemas abiertos’, los alumno/as resolutores/as necesitan más tiempo para comprender, pensar y organizar su actuación, con lo cual habrá tiempo de trabajo en el que aparentemente no realicen nada concreto. El tiempo empleado no es tiempo perdido porque es tiempo de reflexión, de investigación, de equivocaciones que, si son bien conducidas, puede llevar al resolutor o resolutora a afinar sus estrategias y encontrar la verdad de la cuestión. Esos tiempos de reflexión deben ser propiamente conducidos por el/la maestro/a.
- Este ‘ir y venir’ en el problema o situación problemática permite una mayor participación del alumno y un mayor grado de comprensión de la situación, de los temas matemáticos

---

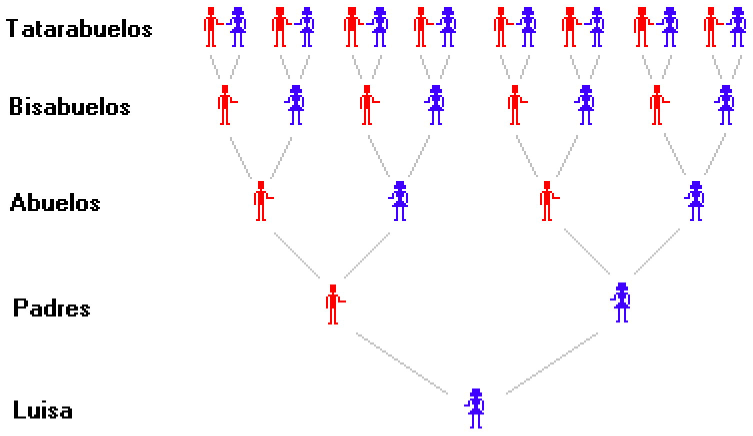
[93] Una de las creencias que han saltado a la luz en investigaciones sobre el caso es que si los problemas matemáticos no se resuelven en diez minutos, no se resuelven nunca y por tanto hay que abandonarlos.

[94] En los 'problemas cerrados', en los que la cuestión algorítmica es básica, se intenta que los alumnos lleguen a ella inmediatamente, de ahí el uso de palabras clave o pistas que orienten a tal traducción inmediata. Si existe un bloqueo está en la ejecución de la operación: mientras incluyan más operaciones o números más grandes, son más complicadas y si el alumno no es experto en el asunto tiende a equivocarse, a veces sin darse cuenta del error.

involucrados y de los procedimientos seguidos, al ser producto de su propia actividad física (uso de lápiz y papel, lectura le libros, etc.) e intelectual (procesamiento de la información). Es el alumno quien pone los medios que tiene a su alcance inmediatamente (contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales) y que puede ir descartando y poner otros que le puedan servir (propios para los ‘problemas abiertos’).

- Este conocimiento adquirido o refinado a través del planteamiento y resolución de problemas matemáticos, y basado en la experiencia, resulta más comprensible pues es producto de *su* elaboración personal, de su propia vivencia. El alumno puede expresar ese conocimiento con sus propias palabras porque es capaz de recordar el camino que ha seguido para elaborarlo o aplicarlo. Aun cuando el profesor/a o el libro de texto puedan transmitirle ese conocimiento es recomendable que el/la alumno/a lo reflexione para que pueda aplicarlo, según sus estrategias personales, sus vivencias, y su modo de ser.
- Así, los alumnos/as resolutores/as se ven inmersos en sus propios sistemas individuales de aprendizaje y aplicación de lo aprendido. Además el nuevo o antiguo conocimiento se va modificando e interrelacionando, creando estructuras mentales más consistentes. Todos los alumnos/as pertenecientes al mismo nivel o curso pueden aprender los mismos temas, aunque no de la misma manera ni usando los mismos conocimientos -conceptuales, procedimentales y actitudinales- previos. No podemos pensar que puedan haber dos copias de pensamiento o formas de pensar y expresar en chicos/as distintos, aun cuando estos puedan ser físicamente iguales.
- A través de la resolución de problemas los/as estudiantes pueden mejorar sus estrategias de resolución de problemas y aprender conocimiento matemático de manera consistente. El único camino que existe para resolver problemas eficazmente es enfrentarse a los mismos. Para hacerlo, hay que reconocer en la situación el problema en cuestión, para lo que es preciso formar la mente del alumno de tal manera que se haga sensible a ese reconocimiento. Hay que guiar al alumno hacia ese reconocimiento y formulación de problemas matemáticos.

Pensemos ahora en un tema concreto del currículum matemático escolar. Por ejemplo *La Potencia*. Podemos nombrar problemas conocidos que involucren este tema. Uno de ellos es el mencionado anteriormente (el de la escuela, aulas, alumnos, etc.), aunque un poco forzada la situación propuesta. Quizá este otro estaría más centrado en el contexto del resolutor: “Lucía quiere saber cuántos bisabuelos y tatarabuelos tuvo...[95]. Una de las soluciones gráficas propuestas es la siguiente[96]:



---

[95] Se puede encontrar este problema en www.naveguitos.com.ar/comun/v2/vis_17556.asp Este problema lo podemos encontrar en otras páginas que tratan el tema de la Potenciación.

[96] Preuniversitario Popular Víctor Jara/ Área de matemáticas. Números naturales, cardinales y enteros. Página: 18. Encontrado en Internet. Documento denominado: Algebra%20clase□1□.doc

	Operación	Resultado
Padres	$2 = 2^1$	2
Abuelos	$2·2 = 2^2$	4
Bisabuelos	$2·2·2 = 2^3$	8
Tatarabuelos	$2·2·2·2 = 2^4$	16

En realidad, lo más inmediato si es el alumno quien analiza la gráfica e intenta establecer relaciones numéricas entre las agrupaciones realizadas es percibir que en la primera generación (la de los padres) hay dos personas; en la segunda (abuelos), 4; en la tercera, 8; y en la cuarta, 16 personas o tatarabuelos. La idea de producto de factores iguales no es tan inmediata, así a primera vista se puede establecer las siguientes relaciones:

	Operación	Resultado
Padres	2	2
Abuelos	2·2	4
Bisabuelos	2·4	8
Tatarabuelos	2·8	16

La observación inmediata, por tanto, es horizontal de ahí que se establezca esta relación, mediante multiplicaciones de factores distintos, y no vertical, que permita llegar a la multiplicación de factores iguales, y por ende, a la potencia. El asunto es bastante forzado para ser expuesto.

Si bien, la Potenciación simplifica una multiplicación de factores iguales y podría concebirse como una multiplicación abreviada como lo es, desde el punto de vista didáctico, la multiplicación respecto de la suma; no es una operación autónoma, como lo pueden ser la suma, resta, multiplicación y división. Para desarrollar y hallar la potencia de un número se tiene que recurrir a la multiplicación necesariamente. No hay una relación directa entre 3 y 4 cuando estas cantidades expresan la base y el exponente respectivamente ($3^4= 81$), aun cuando se tenga interiorizada y se diga automáticamente la potencia. En este caso, la potencia es producto de multiplicar cuatro veces el número tres. Digamos que la Potenciación no adquiere esa 'autonomía' que puede tener la multiplicación, en la que no hay que transformar en suma para hallar el producto o multiplicación de dos números naturales, decimales… Se basta ella sola, conociendo los hechos numéricos básicos y siguiendo un algoritmo concreto. Tratado de este modo, la situación problemática se pierde, se olvida para centrar nuestra atención en las cantidades únicamente. La situación simplemente cumple la función de 'contextualizar' la nueva operación. Es más, si el alumno establece una relación horizontal, el tema no es necesario en esta situación problemática. Este planteamiento lleva a que se propongan situaciones forzosamente similares para que el alumno exprese a través de potencia la relación entre las cantidades para que *su* procedimiento sea correcto (no es suficiente indicar la multiplicación), de lo contrario se pensará que el/la alumno/a no ha captado suficientemente el tema y que no puede enmarcarlo dentro de un contexto cotidiano. Este planteamiento lleva a considerar enunciados correctos aquéllos del estilo de la escuela, aula, alumnos...

Analizando la situación podemos pensar otra manera de tratar la Potencia de Números Naturales, pero partiendo también del tratamiento de problemas matemáticos: planteamiento y resolución. En realidad, si partimos de la idea de ‘problema’ que las investigaciones en Didáctica de la Matemática o Matemática Escolar maneja, podemos decir que en las situaciones planteadas anteriormente los alumnos no identifican un problema puesto que la cuestión es fácilmente contestable si se resuelve la multiplicación implícita. El ‘problema’ o dificultad (que algunas veces no es identificable) puede estar, en el primer caso, en no considerar todas las relaciones entre los números y obviar alguna de ellas (sobre todo cuando estas son más de cinco[97]). Salvada esta dificultad, los alumnos no encontrarían 'problema' (dificultad) en responder a la pregunta cuando sea necesario. En el segundo caso, lo inmediato es no reconocer multiplicación de factores iguales. Un primer aspecto en contra sería que: no se presenta un ‘problema matemático’, aunque sí una situación enunciada oralmente o por escrito que se puede resolver aplicando conocimiento matemático. El bloqueo, no es bloqueo realmente. No hay que confundir entre estas dos actividades o tareas propuestas en la escuela.

Un segundo aspecto en contra: dejar de lado el problema propuesto. Imaginemos por un momento que la situación es un auténtico problema, un problema distinto, abierto. El maestro deja de lado la situación para centrarse en el tema matemático. El problema propuesto pierde protagonismo y la actuación del alumno/a, también. Se dejan de lado los pensamientos, reflexiones, procedimientos e intercambios para centrarse en *el procedimiento* y *el contenido* aplicado y surgido- a veces forzosamente- que nos permite llegar al nuevo conocimiento y enunciarlo; para luego, desarrollarlo. En tercer lugar, el planteamiento no es fruto de la identificación del problema en una situación, sino de querer adecuar dicho contenido a una situación concreta.

Una actividad escolar centrada en el tema del Porcentaje

¿Cómo podemos tratar ése y otros temas, como *El Porcentaje* por ejemplo, sin caer en esos “aspectos en contra” mencionados anteriormente? ¿Qué problemas abiertos nos pueden permitir aprender correctamente este tema? ¿Cómo hacer que el aprendizaje se fije correctamente en el alumno de tal manera que pueda recordarlo y aplicarlo correctamente a corto y largo plazo? Los porcentajes constituyen uno de los lenguajes matemáticos de uso más extendido en la vida real. Se encuentran en cualquier artículo de revista o noticia periodística; en las vitrinas de diferentes tiendas y centros comerciales es común verlos en época de rebajas, y hacer uso de ellos. Por ejemplo, podemos leer: “Aproveche ahora 20+20% de descuento”, “-30%, -50%” o “Hasta 50%”. A pesar de su uso extendido, la experiencia muestra una dificultad bastante extendida a todos los niveles en la comprensión y manipulación de los porcentajes. ¿Se debe acaso a una mala enseñanza del tema?, ¿o a un uso descontrolado de la situación en cualquier medio?

Plantear una situación ‘abierta’ para el tema de los porcentajes nos lleva a pensar en situaciones tan cotidianas como “las rebajas”. La mayoría compra en ellas, ya que cualquier artículo está en rebaja en el periodo establecido y los precios aparentemente son tentadores. Podríamos plantear la siguiente pregunta: ¿Es verdad que gastamos menos si compramos en el periodo de las rebajas? Esta es una pregunta abierta por lo que la situación lo es. Incluso, la pregunta no se centra en el tema concreto que se intenta trabajar ni tampoco es cerrada (¿qué porcentaje de...?). La situación así planteada requiere de diversas acciones para ser resuelta. En primer lugar, precisa de una organización que lleve al alumno/a o grupo de alumnos/as a plantear un plan de acción que permita responder a la pregunta, que como vemos no se responde con una cantidad a mencionar, aunque éstas deben estar presentes en el proceso de resolución, un proceso

---

[97] Consideramos cinco pues es una cantidad que se puede identificar inmediata o súbitamente. En otros casos puede ser menos o más.

que no es inmediato. La resolución de problemas se transformaría en algo así como un proceso de investigación, que puede partir de la lectura de textos que hagan mención a este suceso, en los que aparecerán signos y símbolos referidos a los porcentajes, entre otros. Son 'abiertos' porque eliminan toda referencia directa posible a algoritmos estereotipados de resolución, combatiendo desde el principio el automatismo mecánico al que suelen dirigirse los problemas 'cerrados'. Esto no quiere decir que dentro de un problema abierto exista uno o varios problemas cerrados u otros abiertos.

¿De qué nos podemos enterar en este proceso de resolución de la situación planteada? Específicamente, ¿qué pueden aprender los alumnos, respecto a los porcentajes, al involucrarse en esta situación? Los alumnos conocerá su significado y usos; aprenderá que su valor depende de la cantidad de referencia (su valor es relativo), así como los cálculos básicos que se deben realizar para hallar los porcentajes; podrán responder a preguntas tales como ¿es lo mismo decir -30% que 30% de descuento? ¿Los porcentajes pueden ser negativos? ¿Los porcentajes mostrados (-30%, -50%) son negativos? En definitiva, aprenden lo mismo que aprenderían si el tema fuese expuesto, pero lo harán de manera distinta y a través de la experiencia, sin descuidar ni dejar de lado el aspecto social y cultural del tema.

Para iniciar es necesario que los/as alumnos/as que se enfrentan a la situación sean capaces de delimitar el problema. La situación inicial debe crear en los/as resolutores/as uno o varios conflictos, reconocibles por ellos, que se puedan traducir en cuestiones planteadas, que les permita delimitar y definir de manera precisa el problema o problemas hallados. El/la alumno/a podría *acabar* de plantear el problema y analizar las circunstancias generadas: ¿cuántos periodos de rebaja existen en el año? ¿En qué condiciones económicas estamos – está una familia- en ese periodo de rebajas? ¿Tiene más ingresos o menos que el resto del año?, ¿qué puede interesar comprar? ¿Qué compramos -o compra “x” familia- finalmente?, ¿Qué productos se rebajan más?, ¿Se benefician las empresas en periodo de rebajas?, ¿Qué porcentaje de beneficio tienen?, entre otras. Al realizar esta actividad lo que podemos estar provocando es que el/la alumno/a se dé cuenta de la situación y desarrolle la habilidad de planteamiento de problemas matemáticos, porque reconoce la necesidad y dificultad matemática implícita, la que le llevará a una mejor disposición en su resolución.

Es necesario sin embargo, que los/as alumnos/as se hayan enfrentado a problemas que requieren cálculos numéricos puesto que en el transcurso de resolución de los problemas abiertos surgen estos mismos, los que podría reconocer y resolver correctamente si es que ha tenido experiencia con ellos. Los ‘problemas abiertos’ y los ‘problemas cerrados’ son necesarios en la clase de matemáticas complementándose correctamente[98]. Es importante crear este clima de preguntas entre los alumnos para que sean ellos quienes precisen y delimiten el problema que van a resolver.

Permitir que los/as alumnos/as planteen preguntas es delegar en ello/as la responsabilidad de resolver el problema, puesto que es el alumno o alumna quien lo ha reconocido y expresado, y puede (está en potencia), porque este primer paso de reconocimiento y expresión es importante, resolverlo. No pretendamos que las preguntas que inicialmente se puedan plantear los/as alumnos/as resolutores/as sean las que nosotros como conocedores de la situación y con un conocimiento más amplio podríamos plantear. Es importante que con nuestra ayuda docente sea el/la alumno/a quien pueda aceptar o descartar las preguntas – o hipótesis- que se vaya formulando

---

[98] No pretendemos desterrar de las clases de matemáticas el trabajo con problemas cerrados o que requieren cálculos numéricos. Juan Manuel Campanario, mencionando a Níaz, 1995b dice que “...Los resultados de algunos trabajos sugieren que puede conseguirse una mejor comprensión de los conceptos científicos cuando se resuelven problemas que requieren cálculos numéricos antes de pasar a abordar otros que requieren comprensión conceptual, aunque se necesita más investigación para confirmar este resultado (Níaz, 1995b)”. En Campanario, Juan Manuel: La Enseñanza de las Ciencias en Preguntas y Respuestas: ¿Qué son los problemas abiertos y los problemas orientados como pequeñas investigaciones? : http://www2.uah.es/jmc/webens/html

o que pueden ir formulando sus compañeros/as que también están comprometidos con la resolución de la situación. Quizá una lista de preguntas-guía pueda orientarnos en esa dirección, ya que si permitimos que el/la resolutor/a o resolutores/as novatos/as lo hagan sin ninguna guía podría ser más complicado. Al principio y durante toda la etapa de enseñanza es importante que el o la docente dirija la actuación de sus alumnos/as hasta que vea que están completamente aptos para realizarlo de manera independiente y en grupo. Aún en esta etapa, la evaluación y guía del o la docente es importante y necesaria.

Una vez permitido que el/la alumno/a formule sus propios problemas es necesario que también reflexione cómo estos problemas le pueden ayudar a resolver la situación. Es decir, antes de enfrentarse a cualquier modo de resolución algorítmica o de cualquier otra índole es necesario que el/la alumno/a pueda esbozar cómo la resolución de esa cuestión ayuda a la resolución del problema general. La destreza algorítmica que es lo que nuestros/as alumnos/as deberían dominar se tiene que utilizar después, es más, no es necesario que lo realice de manera 'obligatoriamente' correcta[99], ya que no es el objetivo básico del problema propuesto, y los/as alumnos/as no deben centrar sus esfuerzos ahí, ni pensar que esto es lo únicamente importante; sí lo es el enfrentamiento a un nuevo conocimiento que tiene que aprender y los usos que de él se hacen en la vida diaria o en situaciones cotidianas.

Volviendo al tema de las rebajas como problema abierto y al de los porcentajes como tema matemático a desarrollar: es importante orientar la actuación de los alumnos hacia su aprendizaje. Evidentemente en quinto o sexto grado los alumnos tienen cierto conocimiento escolar sobre este tema, es decir, no es un conocimiento adquirido únicamente de la experiencia sino que en la escuela, en los cursos anteriores se ha venido desarrollando, por lo que cuentan con ciertos conocimientos previos directamente relacionados con el tema de los porcentajes. Formular preguntas como: ¿reconocen esas cantidades? (30%, 50%) ¿a qué hacen referencia?, ¿recuerdan el tema de los porcentajes?, de manera directa es bloquear la mente del alumno y no permitirle explorar la situación como tal y el uso que se le da a “esas” cantidades. Las preguntas deben cambiarse por otras que permitan evaluar la capacidad de formular problemas, describir y justificar procedimientos y articular conceptos. Los problemas abiertos exigen preguntas abiertas aunque no por ello sin orientación. Las preguntas abiertas requieren de una respuesta expresada de manera distinta por cada resolutor/a. No es una pregunta en la que la respuesta es únicamente sí o no, sino que a cualquiera de estos monosílabos tiene que sucederle una justificación razonada. Los problemas abiertos y las preguntas abiertas, como alternativa didáctica, son vitales porque estimulan el pensamiento del alumno.

A través de esta nueva forma de preguntar a los alumnos se promueve una clase en la que el planteamiento de problemas (o 'problem posing') es misión no sólo del profesor sino, principalmente, de los alumnos quienes se han responsabilizado por resolver el problema y ponen todos los medios a su alcance para hacerlo. Además se da otro enfoque e idea de lo que es un problema o situación problemática y cómo las matemáticas están involucradas en ella y en su resolución exitosa. Las preguntas o incógnitas que se vayan formulando permiten generar nuevos problemas y cuestiones que posibilitan explorar la situación dada y en el transcurso de su resolución, probablemente, reformular el problema inicial. La idea es que los alumnos/as hallen en las situaciones problemática problemas de índole matemática. Si los alumnos/as se puede dar cuenta que ese problema que han identificado, y pueden formular, es resoluble mediante conocimiento matemático catalogarán desde su experiencia ese problema como “problema matemático” ya que para su resolución hace uso de ese conocimiento. El conocimiento

---

[99] Puede incluso permitirse el uso de estrategias de cálculo como el redondeo por exceso o defecto, siempre y cuando el/la alumno/a comprenda lo que esté haciendo y sea capaz de manipularlo razonablemente.

matemático es amplio y amplio debe ser el grueso de problemas que deben integrarlo, así como sus vías de solución.

Las preguntas que podrían iniciar el proceso de resolución del problema propuesto[100] pueden referirse a la manera de pensar del resolutor/ra o resolutores, centrándose en ese primer contacto con la situación como tal y no como 'problema matemático' propuesto por el libro de texto o por el o la docente. Si es de esta última manera que se entiende, los alumnos centrarán su atención en esa parte de la matemática, básicamente operaciones aritméticas, que permiten “resolver” el problema, sin permitir un razonamiento propiamente dicho de la situación, más sí de la operación u operaciones aritméticas a aplicar. Por eso, para permitir ese pensamiento matemático reflexivo es importante plantear preguntas que lleven a los alumnos a pensar en lo que piensan, porqué lo piensan y seleccionar esa parte de su pensamiento que les permite seguir el proceso de resolución.

Lyn D.English (1995), propone las siguientes preguntas que permiten a los alumnos analizar su pensamiento matemático, así como compartir ideas con otros grupos. Las preguntas se dirigen a reflexionar sobre lo que piensan mientras abordan problemas. Estas preguntas promueven el interés hacia la resolución de la situación[101]. Algunas de estas preguntas pueden ayudarnos a orientar la actuación de los alumnos en el proceso de resolución del problema planteado pero sobre todo a madurar sobre la manera de enfrentarse a los mismos. No basta con proponerles problemas nuevos, novedosos, abiertos. Esta nueva clase de problemas en el aula exige una mejor capacitación para enfrentarse a ellos. Por ejemplos preguntas como: ¿Qué piensas sobre la situación? una vez leía o tomado el primer contacto con la misma permite reflexionar a cada alumno/a sobre lo que interiormente está 'procesando' o pensando. Cualquier persona no piensa sobre 'algo' una vez terminado el contacto con ese 'algo' sino que a medida que lo va estableciendo, va pensando sobre lo que experimenta directa o indirectamente[102], además fluyen sus experiencias, ideas y creencias sobre el asunto o cualquier otro parecido. Es importante pedir que describan ese pensamiento que han tenido para poder reflexionar sobre él y qué beneficios trae al proceso de resolución de ese problema y de cualquiera que se les presente. Estas preguntas les permite pensar además cómo se enfrentan a los problemas, cuál es su primer pensamiento en cada uno de ellos, si es que es el mismo para cualquier problema que se le presente, si todos los problemas a los que se enfrenta son del mismo tipo, si piensa que las situaciones cotidianas son problemas también y se enfrenta a ellas de la misma manera; en qué piensa cuando se enfrenta a problemas o actividades que de antemano 'sabe' que son matemáticas y cómo ese pensamiento ayuda o dificulta, y bloquea, su proceso de resolución.

Por otra parte, realizar esta actividad en grupo permite enriquecer el pensamiento de cada miembro puesto que no todos sus integrantes tienen la misma fluidez de pensamiento. Cada uno proporcionará lo suyo y podrá enriquecer el proceso. Sin embargo, es importante dar a cada uno su tiempo y hacer que todos expresen sus inquietudes, de lo contrario se limitará a las personas menos dotadas del grupo y se podrá desviar su conducta hacia la espera de respuestas sin adquirir

---

[100] Un problema 'propuesto' no necesariamente tiene que presentarse idealmente planteado o formulado, lo que podría depurarse en el transcurso de resolución por parte de los alumnos. Una de las ideas es que el alumno lo reformule si considera necesario hacerlo.

[101] Las preguntas propuestas por English son: Do you ever think about your thinking? How would you describe the way you think? What about the way you think when doing mathematics activities? Is it different from your “everday” thinking? When doing mathematics activities, do you think in pictures? In drawings? In words? In rule? In sings? How do these ways of thinking help you? If your friend thinks of an idea before you do, does That mean that he or she is a better thinker than you are? If your friend says that he or she is a good mathematical thinker, what do you think the comment might mean? What might you think about as you begin to tackle a new mathematics problem? Do you change your thinking often as you solve a problem? In what ways might you do so? Which types of problems do you like to solve? Why? Have you ever thought about changing a mathematics problem into one that you would really like to solve? What might you do? Have you ever thought of another question to ask after you have solved a problem?

[102] Ante un problema matemática tradicional los alumnos, a medida que van leyendo el problema propuesto mediante texto, van pensando cómo establecer las relaciones entre los datos, generalmente numéricos; e incluso, antes de terminar de leer toda la información del problema, intuye cuál es la pregunta que se va a formular por lo que no necesita terminar de leer o escuchar el problema matemático para pensar en su proceso de resolución.

experiencia en la formulación de las mismas. Lo importante, en un primer momento, es hacerles pensar sobre lo que piensan. En ello se podrá observar no sólo conductas de pensamiento matemático, y las relaciones que pueden establecer, sino también aquellas que pueden dirigir su actuación: sus creencias acerca de los problemas 'matemáticos' a los que se enfrenta en clase, así como de la forma que les hacen frente.

Uno de los requisitos básicos para plantear nuevos problemas es que los alumnos entiendan lo que cada problema abarca. Cuando logren hacerlo podrán considerar las nuevas situaciones que en su resolución se pueden presentar; así como modificar o ampliar las ideas que tienen. Para ello es necesario plantearles preguntas como: ¿Cuáles son las ideas importantes en este problema? ¿Cómo se relacionan? ¿Dónde hemos visto ideas como éstas? ¿Qué nos piden hacer con estas ideas? ¿Cómo podemos hacerlo? ¿Por qué lo haríamos? ¿Tenemos bastantes ideas importantes para resolver el problema? Como nos podemos dar cuenta, las preguntas no se dirigen directamente a identificar los datos del problema como tales[103], que en un problema tipo suelen ser numéricos relacionados entre sí a través de una operación aritmética. El tema de *las ideas* es más amplio ya que afecta directamente al problema como situación abierta y no como "ejercicio con texto en el que hay que identificar unos números concretos que generalmente el texto te lo da o si no hay que encontrarlos mediante las operaciones…" como suelen definir algunos alumnos del último ciclo de educación primaria a los problemas matemáticos que suelen resolver en la escuela. Es importante que el alumno o la alumna descubran en la situación las ideas matemáticas implícitas y las utilicen o definan para poder resolver el problema.

Volviendo al tema de Las Rebajas podemos empezar averiguando qué significado tiene esa palabra y cuál es el uso que se le da. Si decidimos visitar algunas de las tiendas o leer información al respecto, en las revistas, diarios, etc., podemos ver que en este periodo se rebajan los productos de distinta manera: unos un 20%, otros un 30% y otros hasta 50%, y a medida que pasan las semanas, las rebajas son mayores. Además, algunos comercios usan otras palabras como: oferta, liquidación, saldos… que también hacen referencia a la baja del precio original de determinados productos, pero ¿significan lo mismo?, ¿es cuestión de sinónimos?, ¿puedo hablar de rebajas y ofertas sin cambiar el significado de la situación? Por otro lado, ¿por qué algunos productos en rebaja no se pueden devolver y otros sí? (en una tienda indicaban que los productos rebajados un 50% no se podían devolver) ¿Hasta qué porcentaje pueden llegar las rebajas?, ¿y los saldos?, ¿y la liquidación de existencias?, ¿todos los productos se deben rebajar? ¿Todas las tiendas venden al mismo precio el mismo producto?, ¿cuándo es que un producto empieza a perder su valor original? ¿Qué tanto por ciento 'cae' la primera vez? Cada pregunta genera otra y entre ellas pueden surgir nuevos problemas. Los problemas aparecen al enfrentarse un sujeto con una situación en la que ha reconocido una incógnita o un bloqueo y trata de definirlo y delimitarlo para poder comprender la situación y darle sentido.

Es necesario estudiar la conducta de los alumnos al enfrentarse a las situaciones y a este tipo de preguntas para poder guiar su aprendizaje hacia el logro de los objetivos actuales de la educación matemática en la enseñanza primaria y conocer hasta qué punto los alumnos de este nivel son capaces de reflexionar sobre sus propios pensamientos, y en qué medida pueden ellos enfrentarse con éxito hacia las matemáticas a través de la resolución de problemas. ¿Qué nivel de aprendizaje matemático se logra si tratamos la matemática escolar a través del planteamiento y resolución de problemas? ¿Cuánto más o menos recuerdan los conocimientos matemáticos aprendidos mediante la enseñanza

---

[103] Por lo general, la actuación del profesor es preguntar directamente al resolutor/a cuáles son los datos del problema, o indicarle los pasos que debe seguir: 1. Comprender el problema, 2. Elaborar y 3. Ejecutar un plan y comprobar los resultados. En el paso 1, se suele preguntar por los datos del problema y lo que el problema pide, para lo que la lectura del problema es importante, y observar si éste tiene dibujos, tablas, gráficos que lo ilustren. El paso 2 se sigue, respondiendo a preguntas que intentan averiguar las operaciones, dibujos, esquemas que hay que hacer para resolver el problema y el tercer paso se dirige comprobar los resultados repasando básicamente los cálculos realizados.

tradicional (únicamente desde fuera) y la enseñanza mediante resolución de problemas (que intenta que los alumnos descubran y comprendan mejor cada conocimiento matemático involucrado)?

A partir de estas preguntas y de las reflexiones hechas por los alumnos es labor del o la docente a cargo orientar al alumno o alumna hacia el tema matemático involucrado (los porcentajes) sin desconectar del tema 'cotidiano' que lo envuelve (las rebajas). Es importante que el alumno/a se dé cuenta de ello y sea capaz de relacionarlo con otro u otros temas, formándose así ideas razonadas del mismo. Por ejemplo, los alumnos pueden pensar sobre el descuento del 70% o "setenta por ciento" a un producto ¿qué significa esta situación?, ¿qué significado puede tener ese símbolo "%" que lee "por ciento"? Conocemos lo que la palabra "setenta" quiere decir. Por otro lado, la palabra 'ciento' hace referencia a "cien" o "100" (el alumno debería tenerlo claro sobre todo en el contexto – matemático- en el que se desenvuelve), incluso el símbolo % podría ser una deformación del numeral "100". Quiere decir, entonces, que si un pantalón o una cazadora, por ejemplo, vale 100 euros "descontar el 70%" es quitar 70 euros de los 100 euros que vale y así se vendería en ¿30 euros? O *por* cada *100* – euros- descontamos 70, con lo cual, ¿qué pasa con los productos que no llegan a costar 100 euros? ¿Y los que pasan esta cantidad? Por ejemplo, si un producto vale 140 euros, ¿también se le puede descontar 70 euros ya que tiene más de 100 pero no otro tanto para descotarle otros 70 euros? Así el producto valdría 70 euros. O podemos descontar el 70% (o cualquier otro porcentaje) a una cantidad distinta de 100 y no sólo 70 euros. Aparentemente por los precios que aparecen en los comercios de todo tipo sí, porque no muchos productos valen 100 euros y en todos ellos el precio que se les baja aun cuando el porcentaje es el mismo, es distinto. Es distinto el 70% de 100 y el 70% de 140, o de 99.90 y 139.90 como suelen valorar los productos, por lo tanto no es que se descuente la misma cantidad sino el mismo porcentaje, aunque los precios sean distintos. El 70% no es siempre lo mismo o quizá sí, si hace referencia a la fracción 70/100 que equivale a 7/10 o 0,7 ("siete décimas"). Por otro lado, ¿en qué otros contextos aparecen los porcentajes?

Los alumnos se van formando hipótesis razonadas – o no- de la situación y del tema central. Hasta ahora la reflexión es producto del contacto con la situación y de los conocimientos previos del alumno o alumna. Como podemos observar, el profesor o profesora no ha expuesto el tema ni ha formulado preguntas directas del mismo (¿qué entienden por porcentaje?, ¿de qué creen que va el tema de la clase de hoy?, ¿saben qué son los porcentajes?, etc.). El o la estudiante no piensa sobre las cantidades matemáticas involucradas en función de la operación aritmética que se puede realizar. El aprendizaje es mucho más rico para los alumnos involucrados directamente, que piensan sobre la resolución de la situación como tal y a partir de ello van descubriendo y aprendiendo el conocimiento matemático involucrado.

Podemos pensar que no siempre el conocimiento matemático está correctamente presente en las situaciones cotidianas y que si se deja libertad al alumno o alumna puede aprenderlo de manera errónea. Este es un buen punto a tener en cuenta. A veces leemos en las revistas o escuchamos en las noticias, por mencionar las situaciones mejor dispuestas para tratar un tema, y nos damos cuenta que, en algunos casos, no manejan correctamente el conocimiento matemático, ya sea porque no se han informado correctamente o porque confiaron en quienes debían hacerlo. Por ejemplo, en una hoja informativa, extraída de internet, sobre porcentajes nos hacen mención de la dificultad bastante extendida a todos los niveles en la comprensión y manipulación de los porcentajes, hecho del que no están libres ni los periodistas de los grandes medios de comunicación. Para ello proporcionan el siguiente ejemplo que se refiere a una noticia sobre la venta de autos:

Los coches se vendieron por un 400% más de su valor... Su precio real era un 400% menos del de venta.

Evidentemente esta situación no es cotidiana, no vemos todos los días información incorrecta en los diarios o telediarios, pero si en algún caso sucediera el profesor o profesora ha de orientar a su alumno o alumna hacia el conocimiento correcto del tema para que pueda darse cuenta del error cuando lo hubiere, como en el caso anterior. Eso sí, a veces las noticias brindan información incompleta, sobre todo en los titulares, ante lo cual el alumno o alumna no debe sorprenderse y saber leer toda la información. Volviendo al tema de los porcentajes, el o la docente ha de preparar a sus alumnos no sólo para que conozcan entre diversas cantidades aquellas que se refieren a los porcentajes, ni sólo para que sean capaces de saber el porcentaje correcto de una cantidad, lo cual es importante que dominen al finalizar la educación primaria, ya que es uno de sus objetivos. Sin embargo, la escuela ha de brindar las condiciones necesarias para que el aprendizaje sea significativo para los alumnos de tal manera que puedan usarlo libremente en cualquier circunstancia, según su nivel y situación (no sólo en un examen o ejercicio matemático). Para que lo usen en cualquier circunstancia y sean capaces de hallar conocimiento matemático nuevo en la misma y extraerlo libremente es importante valerse de situaciones o problemas abiertos que cumplen ese requerimiento.

¿Qué problemas matemáticos pueden surgir de esta actividad sobre “Las Rebajas de Invierno”? Evidentemente, el profesor debe poner los fundamentos necesarios para que los alumnos puedan centrarse en la situación; es decir, debe planificar la actividad de sus alumnos resolutores. Una de esas actividades puede estar orientada a que los alumnos organicen y procesen los datos que han hallado en distintas revistas, folletos, comercios, etc., sobre las rebajas, lo que les puede orientar en la formulación correcta de los problemas matemáticos y expresarlos por escrito. Por ejemplo, a partir de la información presentada en la distinta publicidad de diversos comercios sobre las rebajas se puede elaborar un cuadro de doble entrada centrándonos en un tema específico que puede ser el mismo para toda la clase o uno para cada grupo formado, según sus intereses o información de la que disponen[104]. Los criterios de elección pueden ser diversos, pero deben tener un objetivo concreto, por ejemplo: ambientar el aula, ir de excursión, preparar la fiesta de carnaval, etc. Si elegimos uno, por ejemplo, ir de excursión, el cuadro puede referirse a “Artículos para un día en la montaña” en el que se incluye productos rebajados (y cuánto) relacionados con lo necesario para llevar a la montaña en un día o más de excursión, según sean dos, tres o cuatro personas por camping, los días de la excursión, el día de compras de la rebaja (si es la primera, segunda o última semana) etc. Los alumnos averiguarán, además, que nivel de rebajas se da en estos productos respecto a los de otros deportes.

Otro tema, que surge a partir del anterior, es investigar en qué época del período de rebajas es mejor comprar, qué ventajas y desventajas, por ejemplo, tiene comprar al inicio o al final del periodo de rebajas; cuándo gastamos más o menos dinero, si realmente compramos los productos que necesitamos, etc. Cada una de estas interrogantes, surgidas en los resolutores ya que de alguna u otra manera forman parte de esta realidad, pone de manifiesto que el campo de actuación de la matemática es amplio. En estos casos, por ejemplo, se involucra diferentes temas del campo matemático. Uno de ellos es el tema estadístico, con la recogida de datos y la organización y análisis de los mismos. Así

---

[104] Quizá en una actividad previa los alumnos, formados por grupos, han tenido que buscar información sobre las rebajas y entre ellas se ha encontrado dicha información en distintos productos: ropa, muebles, viajes, electrodomésticos, zapatos, etc.

mismo, surge la regla de tres de manera natural[105] al establecer relaciones entre los diferentes precios conocidos. En este trabajo, estudiarán que no siempre al comprar dos productos se paga el doble, etc. Por otro lado, aun cuando los alumnos y alumnas no conozcan la manera cómo se obtiene un porcentaje pueden hacer algunas conjeturas estableciendo únicamente relaciones entre las diferentes rebajas que han observado con el mismo porcentaje. Por ejemplo, el 50% siempre es la mitad del precio (sin rebaja). Así, el 50% de 140 euros es 70, el 50% de 150 es 75, el 50% de 200 es 100[106], etc. Por correspondencia, los alumnos puede pensar que el 25% es la cuarta parte del precio *actual* (sin rebaja), y el 75% las tres cuartas partes, etc. A partir de ello, se puede establecer que rebajar el 50% es más que si se rebaja sólo el 25% y menos si la rebaja fuera del 75%, algo que parece obvio pero que se puede ir descubriendo en la experiencia; se puede llegar a establecer que el 50+50% del precio actual se corresponde con el 75% de ese mismo precio y no con el 100%. Los alumnos pueden explicar mediante ejemplos y casos concretos este hecho.

A partir de su contacto real y manipulación con estas cantidades y símbolos, los alumnos descubren que el porcentaje es una expresión del tipo “a%” (de b) donde *a* es un número, que puede ser entero o decimal, y *b* también, aunque es cambiante, es decir, es una cantidad de referencia, lo que hace que el valor del porcentaje dependa de esa cantidad-referente. El alumno ha de “descubrir” que no se puede indicar un porcentaje sin añadir ese símbolo. Desde el punto de vista expuesto en el párrafo anterior quizá no se haga directamente la referencia a las 100 partes iguales en las que se ha dividido la unidad[107] ya que la reflexión se ha realizado desde el producto (lo que el alumno observa). En estos casos, los alumnos aún no tienen que encontrar cuánto es el tanto por ciento de cierta cantidad, más bien ésta se especifica en cada producto rebajado. Los alumnos pueden relacionar la cantidad del porcentaje y el valor que tiene y establecer, por ejemplo, que siempre coinciden si la cantidad de referencia es 100. Por ejemplo, el 50%, 30%, 20%, etc. de 100 es 50, 30; 20, etc. respectivamente. Y el 100% de 100 es 100. El todo. A partir de esto, el 100% de 200 es 200, y el 100% de 50 es 50, etc. Las conclusiones son fruto del establecimiento de relaciones entre lo que ve y es, sin realizar ninguna sola operación aritmética ni regla de tres, de manera formal, aunque se va descubriendo y aprendiendo esto.

Con ello se llega a la conclusión que se puede rebajar hasta el 100% en un producto o casi ese porcentaje, pero más allá no porque un producto que vale 140 euros no se le puede rebajar el 200%, ni 141 euros, es ilógico, pero sí 140, aunque no suela suceder - o no suceda realmente[108]- porque es una cantidad que se le puede quitar a la original. Sin embargo, un producto puede subir (o sobre valorarse) más del 100%, es decir más de su cantidad actual y pasar a costar de 0,10 céntimos de euro a 0,25 céntimos, o de un millón a cinco millones. Cabe entonces la pregunta de si puede haber porcentajes mayores que 100%, y qué significa y en qué contextos se puede encontrar, es decir, cuándo son usados, aunque parte de la respuesta está en el ejemplo anterior: cuando la cantidad actual o futura rebasa la anterior o actual. Sin embargo, hay circunstancias específicas en las que puede ser usual encontrarlas.

Como podemos observar, los temas relacionados con los porcentajes se amplían

---

[105] Por ejemplo, al intentar establecer correspondencias entre diferentes precios y sus rebajas, el alumno va desarrollando una regla de tres simple de manera sencilla. Así, si observa que el 50% de 140 euros es 70 euros (en una primera rebaja) y el 70% es 98 euros (en las Segundas Rebajas), y así entre diferentes cantidades se puede dar cuenta de la relación entre

[106] Este hecho los comercios lo indican aunque los precios no son tan enteros y sí decimales, como podemos observar.

[107] Esta idea se puede extraer directamente si el análisis se hace desde el símbolo “%” que se lee “por ciento”, a través del cual los alumnos pueden establecer hipótesis relacionadas con las cien partes.,

[108] Quizá sí, cuando ofrecen productos 2x1, se puede interpretar que uno es gratis y entonces se le rebaja el 100%, o quizá a los dos se les ha rebajado el 50%

y conectan en esta reflexión y trabajo mental, básicamente, de los alumnos en grupo, y de cada uno de ellos y ellas en particular, frente a la situación (significado, usos, relación entre porcentaje-fracción y decimal, etc.). Los problemas e inquietudes se van sucediendo y la disposición intelectual y el bagaje matemático del alumno o alumna permiten dar solución a ese problema y aprender temas nuevos dentro de la matemática y relacionarlos entre sí, además de ubicar el contexto en el que se desarrollan.

Esta manera de ver la matemática escolar permite un trabajo significativo de los alumnos porque surge de lo que viven, directa e indirectamente, y les permite interpretar esa realidad. Con ello, los alumnos se pueden dar cuenta que la matemática está presente en cada situación y es un medio para interpretar y enfrentar con éxito la realidad, así como de transformarla. No pretendemos con ello, formar matemáticos, pues no es la finalidad de la educación básica formar lingüistas, literatos, historiadores, científicos ni matemáticos. La matemática es una herramienta para el alumno, una herramienta sobretodo del pensamiento. Con ello no queremos decir que no debamos motivar el amor por esta o aquellas asignaturas y ramas del saber, si es que observamos determinadas inteligencias en cada alumno y alumna, de tal manera que el día de mañana uno de ellos decida dedicarse a estudiar ésta o aquella ciencia específica. No debemos ir por ningún extremo. Los maestros de primaria tenemos la misión de enseñar todo a los alumnos de este nivel. Es nuestra responsabilidad conocer todo de todo y no por ello ser lo que cada área trabaja: ni matemáticos, ni lingüistas, ni científicos, pero sí tener un conocimiento más que suficiente para poder orientar a otros hacia ese conocimiento.

Los Porcentajes

Desarrollo de la actividad

Para concretar mejor la situación, esta idea de los porcentajes relacionada con las rebajas de invierno podemos plasmarla en una actividad de aprendizaje concreta. ¿Qué tenemos que hacer? Es importante, en primer lugar, saber qué objetivos queremos lograr con ello, objetivos desde la matemática y desde lo social; objetivos conceptuales, procedimentales y actitudinales. A continuación vamos a programar la sesión para que podamos analizar cómo podemos trabajarla con nuestros alumnos.

En primer lugar, hay que delimitar las capacidades que vamos a desarrollar. En nuestro caso, los aprendizajes esperados, en relación a la situación de las rebajas y los porcentajes, serían: 1. Identifica los porcentajes dentro de situaciones de la vida diaria, 2. Analiza los porcentajes encontrados y la función que tienen en contextos determinados, y 3. Hace uso de los porcentajes en diferentes situaciones cotidianas. Para lograr cada uno de estos aprendizajes, claro está, que los alumnos han de ser capaces de definir qué son los porcentajes y encontrar el porcentaje de una cantidad mediante el uso de la regla de tres y otros procedimientos.

Teniendo claro los aprendizajes que intentamos lograr con la actividad (párrafo anterior), el siguiente paso es programar la secuencia de actividades y estrategias que nos lleven a cumplir esos aprendizajes. Como hemos ido viendo, nuestra idea es trabajar con problemas abiertos, problemas que en principio están inmersos en la vida y que por ello no necesariamente son fácilmente identificables ni están correctamente delimitados o formulados, aunque existen. Son problemas abiertos en el sentido que pueden tener diferentes vías de solución y múltiples respuestas. Además, a través de ellos vamos a aprender nuevos conocimientos. La idea con estos problemas es que a partir de ellos se pueda aprender nueva información matemática principalmente y no sean simplemente medio para aplicar información ya aprendida, como ocurre con los problemas tipo (de aplicación).

Entonces, una primera fase y que se extiende a lo largo de toda la sesión de aprendizaje es la fase de motivación. Cabe preguntarnos, ¿cómo hacer para despertar el interés de los alumnos (varones y mujeres) hacia el tema que queremos que aprendan: los porcentajes y el *movimiento*[109] de las rebajas? En esta primera fase se puede brindar a los alumnos información al respecto. Quizá si buscamos una noticia interesante sobre el asunto pueda generar expectación en los alumnos. Tal vez esa noticia y otras que tengamos nos sirvan para crear una situación, una especie de historia que pueda involucrar a los alumnos, historia en la que ellos puedan identificar algunos problemas y comprometerse a darle solución. A partir de ella el alumno intenta identificar el tema del porcentaje, no en función únicamente de lo que han aprendido en cursos anteriores sino de lo que pueden identificar en la información que se les brinda. Otra idea es un collage de fotografías en las que se muestre diferentes rebajas, ofertas, saldos y liquidaciones puede motivar a los alumnos e identificar qué diferencia y similitudes hay entre cada uno de ellos si es que las encontraran (anexo 1).

Quizá nuestra idea de motivación puede ser la siguiente: "ir un día de rebajas…sin comprar". Podemos formar por grupos a nuestros alumnos y distribuirlos para que en un día, cada uno de ellos, se dedique a visitar tiendas y observen el comportamiento de los

---

[109] Nos referimos con *movimiento* a los cambios que se van produciendo durante el periodo de rebajas, así como a identificar qué objetos se ven afectados de ese periodo, etc.

consumidores y vendedores. Quizá puedan llevar un guión para hacer algunas preguntas relacionadas con lo que hemos venido preguntándonos y una libreta de notas para apuntar las inquietudes que surjan en el trayecto. Antes de realizar las visitas, los alumnos deben tener cierta idea clara de lo que van a observar, por ello la profesora o el profesor crearán las condiciones para que los alumnos expresen sus inquietudes y orienten el diseño de ese guión. La profesora o el profesor pueden ir con uno de los grupos. Al volver a clase, los alumnos comentarán sus impresiones al respecto y anotarán las ideas que han resaltado, ya sea porque se repiten en todos o casi todos los grupos o porque es una idea que se considera importante.

Es importante, también, que una vez acabada la visita, los alumnos, por grupos, comenten sus impresiones para que luego, en el aula, puedan tener las ideas más organizadas y se expresen mejor. Los alumnos pueden reunirse al final de la visita para comentar y organizar sus impresiones. Esta reunión es preferible realizarla antes del día de clase, e incluso es preferible contar con la ayuda del o la docente de asignatura para que guíe la discusión.

Una vez retomada la actividad en el aula a través del diálogo, los alumnos expresan y comparten la información obtenida en su trabajo de investigación de campo. En esta etapa se procede a la recuperación de los conocimientos previos[110] mediante la formulación de preguntas sobre lo que han logrado observar y lo que conocen al respecto, ya sea de manera directa como indirecta por anteriores experiencias. Para guiar hacia una actividad basada en la resolución de problemas abiertos y el análisis de la situación, las preguntas que formulemos a los alumnos deben ser reflexivas y no orientadas únicamente a declarar el tema matemático básico a desarrollar. Una lista de preguntas puede ser:

- ¿Qué inquietudes tuvieron al saber que tenían que vivenciar, indirectamente (ya que ustedes no iban a comprar nada), un día de rebajas en su ciudad?
- ¿Cómo cambia el establecimiento (vitrinas, productos, etc.) cuando está en periodo de rebajas de cómo está cuando no se vive este periodo?
- ¿Cuál es el comportamiento del consumidor habitual en un día de rebajas?
- ¿Cómo son las rebajas? ¿Se rebajan todos los productos de un establecimiento concreto? ¿Qué productos se rebajan y cuáles no?
- ¿Cómo son esas rebajas? ¿Cómo nos damos cuenta que determinado producto está rebajado? ¿Qué productos compra más la gente en periodo de rebajas?
- ¿Cómo se rebaja un producto? ¿cómo es el producto rebajado?

Estas y otras preguntas pueden activar conocimientos en los alumnos y ayudarles a reflexionar sobre lo que han observado ese día específico y en otros periodos de rebaja que hayan vivido. Como podemos observar, las preguntas formuladas generan diversas respuestas pues apuntan a la experiencia de cada uno, ya sea de manera individual y como grupo. El conflicto cognitivo surgirá al dar respuesta a estas preguntas y plantearse otras para las que no tienen respuesta, o sus respuestas son diversas, y por las que deben investigar y trabajar. Las preguntas surgidas pueden incluir conocimiento matemático desconocido o no dominado completamente. Esto depende también de la actuación de la profesora o profesor y su capacidad para orientar hacia ello.

Las ideas expuestas anteriormente nos pueden orientar hacia lo que nosotros,

---

[110] Generalmente la recuperación de los conocimientos previos forma parte de la fase de motivación, la que incluye además el establecimiento del conflicto cognitivo.

como docentes conocedores de lo que intentamos hacer, queremos que los alumnos trabajen: los porcentajes. En este diálogo se hablará de las rebajas en sí. Por ejemplo:

- ¿Qué son las rebajas?
- Los comercios ¿sólo ofrecen rebajas en sus productos o hay otra forma de venderlos?
- ¿Qué diferencia hay entre cada una de ellas?
- ¿Cómo sabemos que un producto está rebajado? ¿Cómo se expresa?
- ¿Cómo son las rebajas de los diferentes productos?
- ¿Cuánto se ha rebajado?
- ¿Todos los productos se rebajan lo mismo? (Si la respuesta es sí o no, ¿En qué sentido?)

En un principio, es la profesora o profesor quien formulará estas preguntas a sus alumnos para que poco a poco él o ella deleguen esta función a los mismos alumnos. Es decir, no todas las preguntas serán formuladas por el profesor, como una especie de cuestionario que los alumnos tienen que responder, sino que a medida que los alumnos entran en contacto con ellas, son los alumnos quienes las proponen, pues la experiencia es de ellos. Los profesores han de orientar. Sin embargo, si no tienen experiencia en este tipo de actividad escolar difícilmente pueden vivenciarla ni hacer que otros la vivan.

Continuando con la clase, los alumnos se han de ir formando ideas sobre las interrogantes anteriores. Las ideas pueden ser diversas:

- “Las *rebajas* son un periodo del año en el que los artículos en venta se ofrecen a un precio inferior del que marcaba antes de ese periodo”. “Los artículos no deben rebajar su calidad, es decir, puede bajar el precio pero no la calidad del producto”… “Existen *rebajas* cuando los artículos se venden, en el mismo comercio, a un precio inferior al fijado antes de dicha venta, por lo que si un comercio vende un producto a ‘x’ precio y otro comercio vende el mismo producto a un precio superior o inferior no quiere decir que éste o aquél esté ‘de rebajas’”… “las *rebajas* son un descuento que se hace a un producto porque ya pasó de moda y llegan otros que sí lo están”… “Las rebajas es la venta de productos a precios más bajos durante un tiempo determinado. Luego el producto desaparece del mercado”… A lo que otro grupo o alumno puede objetar: “No necesariamente desaparece del mercado, aunque sí del centro comercial en la que se vendía. Puede ser que se vaya a vender a otra tienda”. “Hay un periodo de rebajas y dentro de ese periodo hay periodos más cortos. En cada periodo corto se va rebajando más el producto”.

Como podemos observar, las ideas sobre las rebajas pueden ser diversas y expresadas de distinta manera. Todas ellas tienen algo de verdad y expresan más que un dato numérico. Expresan la forma de vida y pensar de cada uno de nosotros. A las dos siguientes preguntas: ¿todos los establecimientos ofrecen rebajas en sus productos? y ¿cómo saber cuánto han rebajado?, pueden corresponder las siguientes respuestas:

- “Los comercios no sólo ofrecen *rebajas* sino también ofertas, liquidaciones, remates, saldos”… “Cada uno de ellos es distinto. Por ejemplo, en los saldos, los productos pueden tener cierto defecto, mientras que en las rebajas no”… “los *saldos* ofrecen los productos que quedan”… “Las *liquidaciones* se dan cuando se quiere acabar con todos los productos, es decir, hasta acabar el último producto del último lote de esa tienda o establecimiento. A diferencia de las rebajas, en las liquidaciones se vende por lotes ya que se quiere acabar con todo. Es como *rematar* todo”… “Sin embargo, en todos ellos el precio del producto disminuye”…

Cada una de estas ideas puede generar diferentes comentarios y opiniones. Es importante que el maestro o la maestra oriente a que los alumnos, cada uno de ellos, expresen esas ideas y escuchen las de los demás a fin de enriquecerse en el transcurso de esa reflexión. A medida que se va generando esta discusión, los alumnos van interiorizando la manera de expresar esas rebajas (o saldos, liquidaciones, etc.). Es decir, la imagen (en porcentajes: 70%, 50%, 20%, etc.) está fijada pues forma parte de la situación. La segunda pregunta anterior orienta hacia la puesta en común de la forma cómo se expresa una rebaja. Estos pueden ser los comentarios:

- “En los productos se pone el precio antes de las rebajas, el porcentaje que se le rebaja y el precio rebajado”… “Los comercios también llenan sus ventanas con la palabra ‘rebajas’ y algunos añaden los porcentajes que se rebajan: veinte, treinta, cuarenta por ciento”… “los porcentajes son números con un símbolo que indica la cantidad que se está rebajando. Por ejemplo, ‘30’ es el número y ‘%’ es el símbolo, eso quiere decir que se le rebaja el 30%”. “Se puede rebajar hasta el setenta por ciento. No hemos visto rebajas mayores”… “El setenta por ciento es ya para una última rebaja porque dentro de este periodo de rebajas hay otros: primeras rebajas, segundas rebajas, terceras, últimas rebajas. Luego de las últimas rebajas anuncian los ‘últimos días’”… “Dentro de poco ya se acaba el periodo de las rebajas de invierno”…

A medida que se van introduciendo en el tema específico es más difícil expresar correctamente lo que se quiere decir. Es momento de investigar sobre este asunto y centrarnos en el tratamiento de esta información:

- “Puedes encontrar diferentes productos que están al 70% pero su precio de rebaja varía porque el precio original era distinto”… “El 70% de una cantidad no es el mismo que de otra distinta” “El 50% es la mitad de lo que valía”… “El 10% es la décima parte de una cantidad”… “Si el precio es 20, el 10% es 2”… “el 50% de 20 es 10”… “Los productos empiezan rebajando el 10% y el 20%”… “y en algunos casos, porque no en todos, terminan rebajando hasta el 70%. El 70% de 20 es…”

Como podemos observar, hay ciertos porcentajes que se sacan sin necesidad de utilizar fórmula conocida, basta simplemente establecer relaciones de mitad, tercia, cuarta, décima parte. Es traer al presente ideas sobre divisiones y fracciones que los alumnos conocen y les permiten establecer relaciones. En otros casos, como el 70% de 20, se necesita esa fórmula que les permite hallar el porcentaje rápidamente, y que los alumnos pueden investigar y crear a partir de las relaciones anteriores. Es importante que los alumnos exploren posibilidades antes de enfrentarse directamente a la fórmula conocida. Por ejemplo, el 70% de ciertas cantidades tampoco necesita fórmula alguna. Lo importante es que los alumnos establezcan relaciones personales y grupales que les permitan ‘descubrir’ o ‘recrear’ lo que ya existe, pero a partir de su reflexión y pensamiento. En este caso el alumno llega al conocimiento y no se impone éste a él, como añadido.

A partir de esta reflexión se puede sistematizar el aprendizaje, a través de la elaboración de esquemas, mapas o cualquier gráfico que lo permita. Un cuadro de doble entrada con la evolución de los precios y porcentajes en primera, segunda y tercera rebajas sobre determinados productos permite organizar lo que hasta ahora hemos visto sobre cómo se rebaja e ir incluyendo porcentajes y su equivalencia en precios determinados (anexo 2).

Producto/Periodo de R		1ª Rebajas		2ª Rebajas		3ª Rebajas	
Producto	Precio Original	Porcentaje	Rebaja	Porcentaje	Rebaja	Porcentaje	Rebaja
Chaqueta X	104	10%	10,4	25%	26	50%	52
Zapatillas Y	75	10%	7,5	25%	18,75	50%	37,5
Mochila Z	53	10%	5,3	25%	13,25	50%	26,5

Este puede ser un cuadro que, unido a otros distintos (dependiendo de la tienda y cómo se rebaje), permitirá que los alumnos lleguen a conclusiones generales sobre el tema tratado (los porcentajes y cómo afectan las cantidades). A partir de establecer relaciones entre una misma cantidad y sus diferentes rebajas se puede llegar a la regla o fórmula, extraída de la misma actividad de los alumnos. Así:

Chaqueta: 104 euros			Zapatillas: 75 euros			Mochila: 53 euros		
10%	→	10,4	10%	→	7,5	10%	→	5,3
25%	→	26	25%	→	18,75	25%	→	13,25
10 x 26 = 260 25 x 10,4 = 260			10 x 18,5 = 185 25 x 7,5 = 185			10 x 13,25 = 132,5 25 x 5,3 = 132,5		

De esta manera se van estableciendo relaciones entre las cantidades, de forma que multiplicadas en aspa (x) se obtiene el mismo resultado. Sin embargo, habrá situaciones en las que la relación sea más evidente y el alumno o la alumna puedan darse cuenta de manera más rápida. A partir de estas relaciones, la profesora o el profesor orientarán hacia la inquietud de poder conocer cualquier porcentaje de una cantidad si es que no se conoce de antemano, pero conociendo otros porcentajes de esta cantidad[111]. Siempre, en este caso, se parte de la cantidad con la que se está trabajando, en función de los precios y los porcentajes conocidos[112]. Así se puede llegar a establecer que el 100% de una cantidad es la cantidad misma, que a medida que se aumenta el porcentaje, la cantidad se acerca a la original y que ésta coincide con el 100%, que el 10% de una cantidad *más* el 20% de la misma es igual al 30% de esa cantidad, etc. Una vez conocido esto se puede prescindir de conocer un porcentaje ‘x’ para hallar un porcentaje ‘y’: basta saber que la cantidad original representa el 100% porque ese porcentaje coincide con la cantidad (los alumnos lo han experimentado en diferentes ejemplos) (anexo 3). La siguiente tabla puede ser completada por los alumnos a partir de su investigación y de lo que han ido encontrando en cada producto:

---

[111] Por ejemplo, conocemos el 10% de 20, el 25% y el 50% pero no el 35% o 60%.

[112] En principio el alumno puede no tener idea de que la cantidad en referencia es el 100%.

Chaqueta: 104 euros			Zapatillas: 75 euros			Mochila: 53 euros		
10%	**→**	**10,4**	**10%**	**→**	**7,5**	**10%**	**→**	**5,3**
20%	→	20,8	20%	→	15	20%	→	10,6
30%	→	31,20	30%	→	22,5	30%	→	15,90
40%	→	41,60	40%	→	30	40%	→	21,20
50%	**→**	**52**	**50%**	**→**	**37,5**	**50%**	**→**	**26,50**
60%	→	62,40	60%	→	45	60%	→	31,80
70%	→	72,8	70%	→	52,50	70%	→	37,10
80%	→	83,2	80%	→	60	80%	→	42,40
90%	→	93,60	90%	→	67,5	90%	→	47,70
100%	**→**	**104**	**100%**	**→**	**75**	**100%**	**→**	**53**

Con ello, los alumnos serán capaces de expresar y definir qué es un porcentaje, lo que expresa (aunque en un contexto limitado, pero correcto y acertado para empezar) y su relación con la fracción y los decimales, aunque esto último más adelante[113]. A medida que se van realizando estas reflexiones, los alumnos van interiorizando el tema de los porcentajes y van identificando problemas matemáticos en cada etapa de la actividad, problemas que pueden ser aquellos con los que normalmente trabaja (problemas tipo) o aquellos que nosotros queremos que conozca: problemas abiertos, novedosos y/o creativos. Desde el punto de vista didáctico[114], una clase de problemas novedosos o creativos, como dijimos, puede ser aquélla cuya estructura no indica el camino a seguir, carece de palabras clave y el alumno ha de idearse ese camino. Por ejemplo, situaciones como:

- "En su visita al Corte Inglés, María vio a su tía comprar varias prendas de vestir ya que estaban todas al 70% de descuento, sólo por ese día. Entre todo compró 5 camisas y 6 chaquetas para su primo Alberto, ahijado de su tía. ¿De cuántas maneras puede combinar su primo Alberto, las chaquetas y las camisas que le ha comprado su madrina?"

Este es uno de los problemas que los especialistas consideran novedoso, sin embargo, este adjetivo depende de cómo se trabaje en el aula. En primer lugar, cuando un problema es habitualmente tratado en la escuela deja de ser novedoso, ya que los alumnos conocen la forma de resolverlo, y el grado de novedad va disminuyendo, entonces se vuelve un 'problema tipo o rutinario'. Si los alumnos conocen este tipo de problema (multiplicativos de combinación) y su conducta se orienta hacia hallar la operación aritmética que lo resuelve, ellos o ellas intentarán multiplicar "6x5" y anotarán la respuesta: "De 30 formas diferentes" o simplemente "30", aunque no es tan fácil para un alumno de quinto o sexto grado de primaria reflexionar sobre el mismo[115]. Sin embargo, si el alumno o alumna reflexiona la situación podría pensar, por ejemplo, que depende de cómo son las prendas, ya que no todas podrían ser 'combinables'[116]. Otro problema de tipo novedoso sería: En un centro comercial se encontraron cinco personas y todas se

---

[113] Para pasar de porcentaje 'a%' a fracción basta con formar una fracción de numerador 'a' y denominador 100. Para llegar a una verdadera fracción se amplía la anterior por una potencia de 10 hasta que el numerador sea entero y simplificándola si es posible. Luego, para pasar de fracción a porcentaje se divide el numerador entre el denominador y el resultado se multiplica por 100. Por último, para pasar de porcentaje a decimal basta dividir el valor del porcentaje entre 100.

[114] En matemática, o desde el punto de vista matemático, un problema abierto es aquél que, estando planteados, no se le ha encontrado todavía solución o demostración, aunque se sabe que existe.

[115] En un trabajo realizado con alumnos de estos niveles se pudo observar que este tipo de problema era el menos resuelto.

[116] Imaginemos que una alumna o un alumno responden 20. Aparentemente la respuesta es incorrecta, pero si en su proceso de resolución esta persona concretizó las prendas, es decir, les dio una apariencia física y entre las combinaciones que hizo, 10 no le parecían correctas, por no combinar entre ellas, el razonamiento es correcto. No hay error.

saludaron estrechándose la mano, ¿cuántos apretones de manos se dieron en total? Este problema si bien no está directamente relacionado con el tema de los porcentajes puede orientar hacia el tratamiento de otro tema. Las situaciones involucran diferentes temas matemáticos y hay que permitir a los alumnos que expresen todas las situaciones que puedan 'visualizar' en la experiencia, aun cuando no se refieran directamente al tema que se está tratando.

Por otro lado, el problema de las ofertas puede incluir una fotografía con las prendas y sus precios de tal manera que se pregunte; "con 200 euros, ¿cuántas prendas puede comprar?, ¿qué prendas puede comprar?" O se puede formular esta otra pregunta: "si la tía de María compró 6 prendas de las que estaban expuestas, ¿cuánto pudo gastar?" En este sentido se habla de otro tipo de problema novedoso: aquél que puede suponer varias respuestas y todas correctas, ya que se puede hallar diferentes alternativas y todas buenas, desde el punto de vista matemático, aunque no necesariamente desde el punto de vista de las rebajas[117]. Este problema ofrece varias alternativas de solución. Con este ejemplo, los alumnos verán que un problema matemático puede tener varias soluciones y no pensar siempre en una, y la primera, como la correcta. Pensar en la mejor compra les orienta a seleccionar una de las respuestas halladas. Se puede preguntar: ¿cuál es la mejor respuesta desde el punto de vista de la oferta?, a lo que los alumnos tienen que pensar en función del producto, la marca, su precio original, etc. para poder responder (anexo 4).

Otro problema que surge de esta situación de rebajas y porcentajes podría ser: cincuenta más cincuenta es generalmente igual a cien, ¿puedes explicar cómo cincuenta más cincuenta puede ser igual a setenta y cinco? Este problema parte de una situación explicada anteriormente en la que el 50 + 50% es igual a 75% del precio original[118]. Este problema se puede incluir en lo que Le Blanc y otros (1992) denominan puzzle. No pensemos, sin embargo, que los alumnos plantearán todos estos problemas en una sola sesión, ni mucho menos. Este es un proceso que requiere tiempo, esfuerzo y paciencia por parte de los alumnos y de los propios profesores para dejar que los alumnos sean promotores de estas situaciones. El profesor o profesora tiene que orientar la actuación del alumno y conducirlo hacia el reconocimiento y planteamiento de estas situaciones. De alguna manera, a través de estas situaciones, los alumnos están aplicando lo aprendido y transfiriendo el aprendizaje a nuevas situaciones, las que ellos están descubriendo en contacto con la realidad. Por ejemplo, ¿pueden existir porcentajes mayores que el 100%? En las rebajas evidentemente no, al menos en la práctica, ya que como dijimos anteriormente no se puede descontar más de lo que vale realmente, ni siquiera lo que vale; pero quizá sí en otros contextos: en la subida de los precios, en los recargos, las multas y en los salarios, por ejemplo. Estos problemas novedosos, abiertos o creativos intentan desafiar la mente del alumno y su sentido común para enfrentarse a ellos.

Involucrarnos, e involucrar a nuestros alumnos, en este tipo de problemas, en los que se precisa de otras estrategias para una solución correcta desde todos los ámbitos, no sólo desde la aplicación de una operación matemática, fórmula o proceso de resolución, es permitir que los alumnos descubran otras armas poderosas para enfrentar cualquier situación, o situaciones abiertas, y ampliar el campo de las matemáticas en su experiencia escolar y cotidiana. Así, por ejemplo, podemos utilizar la estrategia de las "figuras y diagramas", ya que aun cuando los problemas no sean básicamente geométricos, pueden admitir una interpretación geométrica (siempre que sea posible, por supuesto). El caso de

---

[117] Quienes entienden de marcas y calidad de la prenda pueden conocer más sobre el asunto.

[118] Adaptado del siguiente problema "Nueve más siete es generalmente igual a dieciséis. ¿Puedes explicar cómo nueve más siete pueden ser igual a cuatro?", encontrado en Le Blanc, J; Leíste, A y Emenaker, C (1992). Problem-Solving Data bank: Mathematical Problem-Solving in the Elementary School Clasroom. Educatinal Technology, 32 (8) p. 12-16.

las combinaciones de prendas sugiere la elaboración de un diagrama o cuadro de doble entrada, por ejemplo, o un diagrama de árbol. Por otro lado, tenemos otra estrategia que consiste en examinar casos especiales. El enunciado de muchos problemas puede sorprender al resolutor y 'nublar' su pensamiento, ya sea porque las cantidades son 'enormes' o por la generalidad de lo que proponen; en este caso se orienta al alumno o a la alumna a examinar casos especiales (como ocurre con el problema de los saludos o el de las prendas de vestir, en el que se puede reducir el número de personas y prendas o porcentajes, respectivamente.) de tal manera que observe lo que sucede cuando, por ejemplo, las cantidades son pequeñas; y si existe un patrón característico, formule una conjetura y trate de probarla. Intentar transformar situaciones nos permite trabajar otra de las estrategias utilizables en el tratamiento de la resolución de problemas: el planteamiento de problemas por parte de los alumnos. Ambos, planteamiento y resolución, van unidos y mejoran la capacidad de los alumnos para enfrentarse a las situaciones y adquirir conocimiento matemático de tal manera que éste sea un conocimiento "vivo". A medida que los alumnos se van involucrando en una situación y van descubriendo otras a partir de ella, pueden plantear problemas matemáticos ya que se hacen susceptibles a los mismos. La experiencia les permite lograr identificarlos. Esta experiencia transforma sus creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en la escuela de tal manera que los hace partícipes de la elaboración del conocimiento matemático, sobre todo desde su pensamiento y razonamiento.

Para que los alumnos logren suficiencia en la resolución de problemas simples, directos o indirectos, como los que generalmente se plantean en el aula; sin necesidad de intentar adivinar o recordar cuál era el procedimiento empleado en un problema similar anterior y sin éxito porque no fue lo suficientemente comprendido como para idear ellos mismos ese plan de solución, es necesario que los alumnos hayan identificado esos problemas e identificado el conocimiento matemático implícito que les permita idear una solución de esa índole, aplicando el conocimiento matemático adquirido en la experiencia o experiencias vividas. En este caso, no se propone un problema para aplicar el conocimiento aprendido, como cuando aprendemos a sumar y luego resolvemos problemas de suma, sino que a partir de experiencias en las que sea necesario sumar, se propone esa acción y se identifica como aquella que permite conocer el total o el conjunto integrado, por ejemplo. El conocimiento así trabajado es creado por el propio alumno y aplicado a nuevas situaciones en las que puede seguir su mismo curso, adaptarse o transformarse si el caso lo amerita.

Generalmente se evalúa el conocimiento y la habilidad matemática a partir de problemas tipo, rutinarios y no rutinarios, que no necesitan otro procedimiento que el que generalmente se enseña en el aula y que básicamente consiste en aplicar de manera directa una operación aritmética o fórmula aprendida. A veces la operación no se identifica directamente Los siguientes son tres ejemplos de problemas propuestos a alumnos de sexto grado de educación primaria de escuelas peruanas que ubican a los alumnos que resuelven uno u otro problema, en diferentes niveles de suficiencia o insuficiencia matemática del nivel. Los problemas se presentan de mayor a menor suficiencia[119]

---

[119] En los problemas 1 y 3, el símbolo 'S/.' se refiere a la moneda nacional: Nuevo Sol.

Problema 1:

Felipe fue a comprar con S/.5. Lo que compró fue:

1 chupete a S/. 0,50;

1 chocolate a S/. 1,20;

1 chicle a S/. 0,30

1 gaseosa a S/. 1,30.

¿Cuánto le dieron de vuelto?

a) S/. 0,33
b) S/. 1,70
c) S/. 3,30
d) S/. 4,67

¿Qué evalúa esta pregunta? La capacidad del estudiante para resolver problemas de **número y cantidad** en una situación de compra y venta que demanda el **manejo solvente de algoritmos de adición y sustracción de números decimales**.

Problema 2:

Por 5 bolsas de arroz se paga S/. 10. ¿Cuánto se pagaría por 2 bolsas?

a) S/. 17
b) S/. 4
c) S/. 5
d) S/. 8

¿Qué evalúa esta pregunta? La capacidad del estudiante de resolver problemas de **proporcionalidad simple de dos magnitudes con una relación definida entre ellas**, en una situación de compra y venta. El enunciado **no hace referencia explícita a la unidad**, es decir, al precio de una bolsa de arroz, pero sí da el valor de cinco bolsas de arroz.

Problema 3:

Lee con atención y responde:

OSOS S/. 14

Tengo 9 soles

¿Cuántos soles me faltan para comprarme un oso?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

¿Qué evalúa esta pregunta? La capacidad del estudiante para resolver **problemas tipo** en una situación cotidiana de compra y venta presentada en forma de historieta, cuya solución demanda la **aplicación de una operación aritmética en los números naturales**. Los números utilizados son pequeños, por lo que la solución del problema no va a ser afectada por el ámbito numérico sino por la estrategia de solución seleccionada.

Para que los dos primeros problemas se identifiquen como 'problemas tipo', según la característica del tercer problema, que sitúa al alumno o alumna de sexto grado en un nivel previo al que debe encontrase ya que las capacidades que demuestra son propias de grados anteriores[120], hace falta que la pregunta se dirija, en el primer caso, hacia el gasto total de lo que compra, aunque el dato de los cinco soles se identificaría como un dato que "intenta distraer" la resolución; mientras que en el segundo problema bastaría con modificar la pregunta propuesta, más no cambiarla en esencia[121]. Para que los alumnos respondan correctamente este tipo de problemas, y aquellos más complejos pero que requieren soluciones aritméticas, es necesaria la experiencia no sólo en problemas de este tipo sino en problemas abiertos, en los que es capaz de proponer soluciones distintas y/o diferentes resultado. Problemas abiertos que se enmarcan dentro de situaciones abiertas. La experiencia en este tipo de problemas permite a los alumnos identificar los casos específicos. Estos problemas escolares, que forman parte de las distintas evaluaciones nacionales o específicas de un aula concreta, se identificarían como casos específicos,

---

[120] Ministerio de Educación del Perú. Unidad de Medición de la Calidad Educativa. Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe Pedagógico de resultados. Formación matemática Segundo y Sexto grados. Página 144.

[121] La pregunta sería: ¿cuánto pagarías por un kilo de arroz?, así el resolutor o la resolutora simplemente aplicarían una división entre los datos que presenta el problema y hallaría el dato de la incógnita.

concretos y directos, de resolución matemática inmediata[122]. Si proponemos a los alumnos este tipo de problemas antes de permitirles enfrentarse a problemas o situaciones abiertas podría ser la causa de un tipo de obstáculo denominado ‘obstáculo cuantitativo’ en los alumnos. Un obstáculo de este tipo, en palabras de Bachelard, citado por Lopes y Costa (1996) permite que el alumno o alumna se distraiga en fórmulas y números sin saber exactamente lo que hacen, lo que les limita su capacidad para discutir los resultados, ya que su procedimiento estaría en función de las cantidades implícitas y las operaciones conocidas, y formular problemas pertinentes.

La evaluación del aprendizaje matemático y de la resolución de problemas es constante, a través de toda la actividad y de las respuestas que vayan brindando a lo aprendido, sin embargo, es necesario proponer una actividad final en la que se pueda observar el aprendizaje de cada alumno en particular, formulando preguntas que evalúe tanto los contenidos conceptuales, como procedimentales y actitudinales a cada uno de ellos (anexo 5).

Problemas planteados en función del tema propuesto en la actividad anterior

Los siguientes son problemas que los alumnos pueden plantear a medida que logren experiencia directa con el tema y situación tratada. Para que los alumnos logren experiencia en la identificación y planteamiento de problemas matemáticos, es importante que se les deje libertad de planteamiento, es decir, los alumnos pueden plantear problemas que no necesariamente se resuelvan mediante aplicación de porcentajes, sino que pueden requerir otros conocimientos matemáticos que incluso aún no se han formalizado en el aula. Frente a estos problemas, no se recomienda descartar su solución para después ya que los alumnos pueden resolver dicho problema con los conocimientos que tiene, aunque su razonamiento sea más engorroso, pero no por ello errado. Si se deja para después, el problema y la actuación del alumno pueden perder valor. Es necesario, sí, que los alumnos incluyan en sus enunciados información relacionada con el tema aprendido que permita evaluar su grado de interiorización y aprendizaje.

A medida que los alumnos vayan tomando contacto con los problemas matemáticos en situaciones cotidianas y refuercen su experiencia en la identificación de los mismos, los alumnos pueden “apartar” la cotidianidad de la situación y centrarse en el conocimiento matemático. No queremos decir, con esto, que los alumnos de quinto y sexto grado pueden hacerlo, como tampoco decimos que nadie de este nivel lo puede hacer; sin embargo, la forma de tratarlos y la experiencia que van ganando permite esta situación y llevarlos al planteamiento de problemas desde el conocimiento matemático[123].

A continuación presentamos una serie de problemas que pueden surgir de la actividad propuesta, y que el maestro y la maestra deben procurar generar durante el desarrollo de la misma:

1. Un comerciante intenta subir una escalera de 20 escalones en la que tiene almacenada cierta mercadería para las rebajas. Cada vez, el comerciante intenta ‘saltarse’ cuatro escalones, pero como es demasiado esfuerzo retrocede un escalón. Si la distancia de la subida es constante, ¿cuántas veces tendrá que ‘saltar’ antes de llegar al tope y alcanzar la mercadería?

---

[122] Siempre y cuando los alumnos tengan las herramientas necesarias para resolver los problemas planteados y sean capaces de comprenderlo.

[123] Por ejemplo, problemas del tipo: Demuestre que el producto de cualquier cuarteto de números enteros consecutivos es divisible por 24.

2. En una tienda de las visitadas llegaron cinco personas conocidas entre sí. Al parecer se habían citado en dicho comercio a la misma hora. Todas se saludaron con un apretón de manos por pareja distinta. ¿Puedes decirme cuántos apretones de manos se dieron en total?
3. Nuestro grupo fue a visitar, en el Corte Inglés, la séptima planta, dedicada al deporte. Cada uno de nosotros tiene gusto por deportes diferentes, así que visitamos, cada uno, nuestra sección favorita. A uno de nosotros le gusta el tenis, a otro la natación, al tercero le gusta correr y el cuarto tiene gusto por el básquet. A cada uno le gusta sólo un deporte y tienes que decirme cuál a quien. Te doy las siguientes pistas para ayudarte a descubrir que deporte nos gusta a cada uno de nosotros: 1. Borja y Raúl se encontraron cuando uno de ellos estaba en la sección de natación analizando la calidad de los trajes. 2. Pedro y Luis se encontraron cuando uno de ellos intentaba hacer una canasta y el otro recogió el rebote y anotó un punto extraordinario, y no por casualidad sino porque es un experto. 3. Borja no es nadador ni corredor. 4. Luis es un amigo del hermano del pívot.
4. María entró en una tienda de mascotas y observó que había varias personas y perros. Al contar las cabezas se dio cuenta que habían 50 y al contar entre piernas y patas le resultaron 140. A María no le alcanzó el tiempo para contar cuántas personas y perros habían ¿Con estos datos, podrías decirme lo que le faltó saber a María?
5. Jazmín estaba muy contenta porque su mamá le había comprado el libro de recetas de postres que tanto quería, con un 70% de descuento. ¡Muy por debajo de la mitad de su precio original! Cuando tuvo el libro entre sus manos, Jazmín le pidió a su mamá que le dijera en qué página del libro estaba la receta de las galletas de avena que tanto les gustaban. Ella, para hacerla pensar un poco le dijo: "la receta está en dos páginas, una al lado de la otra…" (es decir que la receta ocupa dos páginas consecutivas). Además, la madre añadió: "… Cuando tú sumas las dos páginas en las que se encuentra la receta, la suma es 113." Con estos datos, ¿puedes decirme en qué páginas encontrará Jazmín la receta que buscaba?
6. Cada helado de la heladería que está en la Avenida América puede tener un sabor de helado y un sabor de cobertura diferente. Además puedes comprar los que quieras, ya que están en rebajas, y por cinco que compres te descuentan el 50% del precio total. Las opciones para el helado son chocolate, vainilla, y mango. Las opciones para la cobertura son dulce de azúcar, chocolate, y caramelo. Por ejemplo, tú puedes pedir un helado de vainilla cubierto de caramelo. ¡Qué rico! Con todos esos sabores y coberturas, ¿cuántos helados diferentes se pueden pedir? Además, ¿qué porcentaje te descontarían si pidieras todas las combinaciones?
7. Un comercio de artículos de escritorio lanza las siguientes rebajas: paquete de 500 hojas blancas de 80 gramos, 70% descuento. Paquete de medio millar de hojas blancas de 70 gramos, -80%. Si el primer paquete cuesta 5,90 euros y el segundo 6.70 euros. ¿Cuál te conviene comprar y por qué?
8. Determina el porcentaje que se debe descontar a una bicicleta que vale 205 euros para que no se pierda más de 100 euros.
9. Sara tenía en su cartera cuatro billetes que sumaban 170 euros. Ella le dijo a su hijo, Sebastián, que podía gastar todo en las últimas rebajas si él le decía cuáles eran los cuatro billetes que tenía. Sebastián lo calculó y pudo comprar cinco artículos que estaban de rebaja, ya que si los hubiese comprado al precio original

sólo se podría haber comprado dos. ¿Puedes calcularlo tú también qué billetes tenía en su cartera la mamá de Sebastián?

10. Mario, el padre de Luisa, le compra a su hija diferentes artículos en las rebajas. Entre ellos, compra una chaqueta a la que le descuentan el 70%, un pantalón cuyo precio está rebajado un 50%, un par de zapatillas rebajadas un 40%; una mochila, menos el 35%. Con estos datos, ¿me puedes decir qué porcentaje en total ha ahorrado por todos los artículos? Justifica y explica tu respuesta.
11. Un ascensor de un centro comercial puede llevar 14 personas. Por la mañana llevó 269 personas. ¿Cuántas veces subió el ascensor para subir a todas las personas?
12. En un mapa de tu ciudad, encuentra la mejor manera de llegar, andando, desde un punto “x” hasta el Corte Inglés. Interpreta la expresión “encuentra la mejor manera”.
13. Para esta tarea tú tienes una colección de cerca de 25 objetos que se pueden encontrar en las rebajas, por ejemplo, ropa, accesorios, artículos de escritorio, etc. Tú y tus compañeros deben mirar cuidadosamente los objetos y después clasificarlos en seis grupos separados. Luego, clasifíquenlos en tres grupos. ¿De qué otra manera pueden clasificarlos? Piensa en otras maneras y compáralas.

Anexo 1 (Porcentajes)

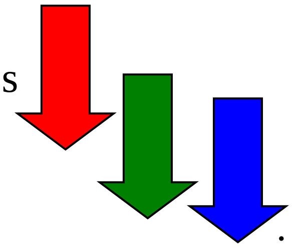
¡De compras… sin comprar!

Estamos en el periodo de rebajas y seguramente imágenes como éstas se ven por las calles de tu ciudad. ¡Qué te parece si vas con tus compañeros un día de rebajas!… sin comprar, necesariamente, para que observes todas las rebajas que existen y qué tanto se puede rebajar un producto. A medida que vas observando, intenta responder a las siguientes preguntas y anota los que averiguas:

- ¿Cómo sabes que estás en periodo de rebajas?
- ¿Qué significan “las rebajas”?
- ¿Cómo cambia el establecimiento cuando está en periodo de rebajas?
- ¿Qué productos se rebajan?
- ¿Cómo se ‘rebajan’? ¿Cómo son las rebajas?
- ¿Crees que la gente compra más en periodo de rebajas? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el producto más rebajado que han visto?, ¿y el menos rebajado?
- ¿Todos los productos se rebajan en un establecimiento?
- ¿Todos los comercios ofrecen rebajas para sus productos, o hay otra manera de venderlos?
- ¿Todos los productos de un establecimiento ‘sufren’ la misma rebaja? Fíjate en el precio de varios artículos diferentes (ropa, juguetes, artefactos, etc.)

Anexo 2 (Porcentajes)

Los precios



… en las rebajas

En el ‘periodo de rebajas’, los precios de los artículos varían, ¿verdad? Esa variación del precio favorece al cliente pues los precios __________________.

En este periodo, la disminución de los precios se indica de dos maneras: a través de la palabra __________________, y mediante ___________________.

Escribe un ejemplo. Fíjate en las notas que apuntaste en tu visita a los comercios: un pantalón normalmente cuesta______________ y en el periodo de rebajas se puede pagar por él________________________. En este periodo le han rebajado______________.

¿La cantidad de la rebaja coincide con el precio original del artículo?_______________

Cuando rebajamos el precio de un artículo, descontamos parte de él. ¿Has observado cómo son esas ‘partes’ que descontamos a los precios de los artículos? (qué parte del precio original se ha rebajado en cada artículo). Comenta con tus compañeros y escribe tus impresiones.

____

____

¿Recuerdas las imágenes del anexo 1? Fíjate en la que los pantalones se venden a 2,69 €, cuando su precio anterior era 26,90 €. ¿Cuánto se ha descontado al pantalón de la imagen? ¿De qué otra manera lo expresan en la foto?

____

____

50%,

Las rebajas se expresan a través de símbolos como 10%, -10%, -20%, -30%, -40%, 30%, 40%, 25%, 50%, -50%, -90%, %, %, %. Observa los productos que indican 50% de rebajas y anota su precio original y el precio de la rebaja:

50%		
Artículo	Precio original	Precio de la rebaja

Fíjate en los precios, ¿Cómo varía su precio final? ¿Qué parte del precio original es? ¿Cómo es éste precio respecto al primero?

____

____

¿Qué quiere decir que un producto esté rebajado 50%?___________________________

10%

Ahora observa los productos que están rebajados 10% y anota su precio original y el rebajado en un cuadro como el anterior:

10%		
Artículo	Precio original	Precio de la rebaja

¿Cómo varía su precio final? ¿Qué parte del precio original es? ¿Cómo es éste precio respecto al primero?

____

____

¿Qué quiere decir que un producto esté rebajado 10%?___________________________

¿Qué nos indica la expresión 50%?____

¿Qué nos indica la expresión 10%?____

Te habrás dado cuenta que algunos comercios indican 50% y otros -50%, o 10% y -10%, ¿en ambos casos, se refiere a los mismo? ¿Qué nos indica el símbolo '-'?

____

____

Fíjate en los cuadros de la página anterior. Esa parte o porcentaje que se descuenta: 50%, 10% en cada artículo, ¿varía de un precio a otro? ¿Es lo mismo el 50% de un precio que el 50% de otro precio? Comenta con tus compañeros y expresa las ideas que han surgido.

____

____

¿Qué cuesta 100 €?

Imagina que el precio de un producto es 100 €, ¿qué productos pueden costar 100 euros? Casi ninguno, ¿verdad? Sin embargo, esta parka lo vale:

Imagina que, como la mayoría de los productos, esta parta está en rebajas. Completa el siguiente cuadro considerando el precio de la parka:

Precio original	Parte o porcentaje de descuento	Cantidad descontada	Precio rebajado
100 €	10%		
100 €	50%		
100 €	90%		

Observa las rebajas y los precios rebajados del cuadro anterior. Podrías intuir las rebajas si el porcentaje o parte de descuento fuesen los siguientes. Comenta con tus compañeros y escribe tus conclusiones en el siguiente cuadro y en las siguientes líneas:

Precio original	Parte o porcentaje de descuento	Cantidad descontada	Precio rebajado
100 €	20%		
100 €	40%		
100 €	70%		
100 €	85%		

____

____

¡Piensa!

Si el 10% es la décima parte del total, quiere decir que divido el total en_________ partes, de las que tomo___________ que corresponden al ____%. Cada parte es el ______% del total. ¿Qué pasa si tomo dos partes, es decir, dos veces el 10%? ¿A cuánto equivale? ¿Qué porcentaje sería? Comenta con tus compañeros.

____

____

¿Qué pasa si tomo todas las partes? ¿Qué porcentaje sumaría?

____

____

¿A cuánto (precio) equivale ese porcentaje?

____

____

¿Cuánto es lo máximo que puedo descontar a un producto? ¿Por qué? ¿A cuánto equivale? Comenta con tus compañeros e intercambia ideas. Anótalas en las siguientes líneas.

____

____

Anexo 3 (Porcentajes)

Las expresiones 50%, 20%, 10%, 30%, 90%, 100%, etc., que aparecen en las rebajas, nos indican cuánto estamos descontando al artículo en venta. Así, si aparece 50%, le descontamos la mitad, pero si es el 10%, le descontamos la décima parte del precio original.

Estas expresiones: 50%, 20%, 10%, 90%, etc., que siempre van acompañadas de ese símbolo (%), se conocen como **porcentajes**, ya que nos indican una parte o porción de un todo, en este caso, el precio original del producto. ¿Sabes cómo se leen esos porcentajes? Investiga con tus compañeros y escríbelo en las siguientes líneas:

10%____

20%____

50%____

90%____

30%____

¿Sabes qué significan el símbolo % y la palabra “por ciento”? Investígalo y explícalo en clase.

____

____

¿Crees que los porcentajes sólo se usan en las rebajas? ¿En qué otras situaciones los has visto? Fíjate en la calle y luego comenta con tus compañeros:

____

____

¿A qué hacen referencia los porcentajes en otros contextos?

____

____

Anexo 5 (Porcentajes)

Situaciones de rebajas… situaciones de porcentajes

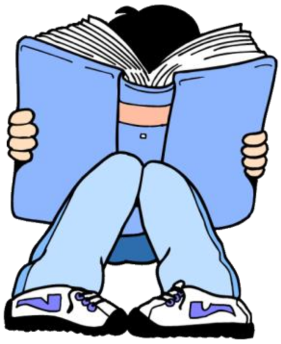
1. Jazmín estaba muy contenta porque su mamá le había comprado el libro de recetas de postres que tanto quería, con un 70% de descuento. ¡Muy por debajo de la mitad de su precio original! Cuando tuvo el libro entre sus manos, Jazmín le pidió a su mamá que le dijera en qué página del libro estaba la receta de las galletas de avena que tanto les gustaban. Ella, para hacerla pensar un poco le dijo: "la receta está en dos páginas, una al lado de la otra…" (es decir que la receta ocupa dos páginas consecutivas). Además, la madre añadió: "… Cuando tú sumas las dos páginas en las que se encuentra la receta, la suma es 113." Con estos datos, ¿puedes decirme en qué páginas encontrará Jazmín la receta que buscaba?
2. Cada helado de la heladería que está en la Avenida América puede tener un sabor de helado y un sabor de cobertura diferente. Además puedes comprar los que quieras, ya que están en rebajas, y por cinco que compres te descuentan el 50% del precio total. Las opciones para el helado son chocolate, vainilla, y mango. Las opciones para la cobertura son dulce de azúcar, chocolate, y caramelo. Por ejemplo, tú puedes pedir un helado de vainilla cubierto de caramelo. ¡Qué rico! Con todos esos sabores y coberturas, ¿cuántos helados diferentes se pueden pedir? Además, ¿qué porcentaje te descontarían si pidieras todas las combinaciones?
3. Un comercio de artículos de escritorio lanza las siguientes rebajas: paquete de 500 hojas blancas de 80 gramos, 70% descuento. Paquete de medio millar de hojas blancas de 70 gramos, -80%. Si el primer paquete cuesta 5,90 euros y el segundo 6.70 euros. ¿Cuál te conviene comprar y por qué?
4. Determina el porcentaje que se debe descontar a una bicicleta que vale 205 euros para que no se pierda más de 100 euros.
5. Mario, el padre de Luisa, le compra a su hija diferentes artículos en las rebajas. Entre ellos, compra una chaqueta a la que le descuentan el 70%, un pantalón cuyo precio está rebajado un 50%, un par de zapatillas rebajadas un 40%; una mochila, menos el 35%. Con estos datos, ¿me puedes decir qué porcentaje en total ha ahorrado por todos los artículos? Justifica y explica tu respuesta.
6. Un ascensor de un centro comercial puede llevar 14 personas. Por la mañana llevó 269 personas. ¿Cuántas veces subió el ascensor para subir a todas las personas?
7. En un mapa de tu ciudad, encuentra la mejor manera de llegar, andando, desde un punto "x" hasta el Corte Inglés. Define qué quieres decir por 'mejor'.

8. ¿Qué situación propones tú?

Sistema Métrico Decimal (SMD)

Para iniciar el estudio escolar del Sistema Métrico Decimal (SMD)[124] es necesario que los alumnos identifiquen en los objetos características que lo necesite: su longitud, peso, capacidad, masa; y necesiten medirlas. Evidentemente, en quinto y sexto, los alumnos tienen noción del SMD, sin embargo se puede observar cierta confusión en el uso del mismo, sobre todo en actividades relacionadas con las conversiones de una unidad de medida a otra. Quizá esta actividad no sea la más importante dentro del tema que nos interesa, no obstante es la más evaluada. Interesa tanto llegar al tema de los múltiplos y submúltiplos, y que los alumnos sepan "ir de un lado a otro", que la actividad se centra en este apartado.

Para empezar, el profesor debe comprobar que los alumnos reconocen en los objetos características que son objeto de medición. Por ejemplo, podemos entregarles varios objetos y pedir que a cada cosa añadan diferentes adjetivos que las identifiquen. Por ejemplo, dados varios libros, los alumnos pueden escoger uno y decir sus características más resaltantes. Así, ante la siguiente imagen[125] se pueden decir las siguientes características del libro que el niño ha elegido:



- libro azul
- **libro pesado**
- **libro grande**
- libro interesante
- libro nuevo
- **libro "gordo" o ancho.**
- **Libro "alto"**
- Etc.

Como podemos observar, entre las características nombradas aparecen aquellas que son objeto de medición a través del SMD. ¿Cómo identificar que un libro es "pesado" o "liviano", "grande" o "pequeño", "ancho" o "delgado", etc.?, ¿cómo reconocer en él la característica de peso, longitud, área o volumen, etc.? Es importante que nuestros alumnos de quinto y sexto cursos tengan muy claras estas ideas y las sepan identificar y diferenciar. Para ello, el docente debe

---

[124] Sistema de Unidades basado en el metro, en el cual los múltiplos y submúltiplos de una medida están relacionados entre sí por múltiplos o submúltiplos de diez. Fue implantado por la 1ª Conferencia General de Pesos y Medidas (Paris, 1889) con el fin de buscar un sistema único para todo el mundo, facilitando la comunicación y el intercambio ya que hasta ese momento cada país, e incluso cada región, tenía su propio sistema a menudo con las mismas denominaciones para las magnitudes, pero con distinto valor. Como unidad de medida de longitud se adoptó el metro, definido como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre, cuyo patrón se reprodujo en una barra de platino iridiado. El original se depositó en París y se hizo una copia para cada uno de los veinte países firmantes del acuerdo. Como medida de capacidad se adoptó el litro, equivalente al decímetro cúbico. Como medida de masa se adoptó el kilogramo, definido a partir de la masa de un litro de agua pura y materializado en un kilogramo patrón. Actualmente se ha sustituido por el Sistema Internacional de Unidades (SI) al que se han adherido muchos de los países que no adoptaron el Sistema Métrico Decimal y se ha ampliado con nuevas medidas.

[125] En nuestro caso, es preferible entregar el objeto concreto y no una imagen del mismo. Además, para cada grupo se puede elegir un tipo de objeto distinto (libros de lectura, libros huecos – cofres-, cubos huecos y compactos, cajas, etc.

indagar, a través de la explicación del alumno, sobre los argumentos que éste posee y que le permiten decir que el libro (o el objeto elegido) posee dicha cualidad.

Es necesario, además, que los alumnos distingan entre las diferentes características relacionadas con el SMD: longitud, superficie, volumen, capacidad y peso, pues su poca destreza para diferenciarlas puede ser un factor importante de su incomprensión, además de la lista relativamente larga de múltiplos y submúltiplos que hay que recordar y aprender en todos ellos.

Una vez que el alumno, o grupo, ha identificado la cualidad en el objeto elegido, diferenciando cada característica y argumentando su respuesta; el profesor puede entregarles un cuadro de doble entrada, en el que se incluya las diferentes características relacionadas con el SMD, y pedirle a cada alumno, o por grupo, que seleccione veinte objetos que observen a su alrededor y señalen con un aspa la característica pedida, si es que el objeto la posee (anexo 1). Luego de completar el cuadro, y haber permitido que intercambien opiniones sobre los objetos elegidos y las características identificadas de tal manera que los otros grupos puedan afirmar o no lo que el compañero explica, se les pide que comenten cómo podemos saber que cada objeto posee o no dicha característica y en qué se diferencia una de otra (el peso de la longitud, por ejemplo). Para ello, los alumnos pueden seguir resolviendo el anexo 1, parte 2, en la que les propone un diálogo que incluye el uso de diferentes unidades de medida. Los alumnos tienen que identificar qué medidas indican longitud y cuál el peso, además de si se incluye otra medida en el diálogo (capacidad). Al entrar en esta parte de la actividad, el profesor se irá dando cuenta de las diferentes medidas para cada característica, e incluso se puede preguntar qué instrumentos se usan para medir cada una (cinta métrica o regla, balanza o báscula).

Cuando el alumno, o grupo, en el desarrollo de la actividad, manifiesta que el libro "es ancho", por ejemplo, ha efectuado una comparación con otro libro que le sirve de referencia. Intuitivamente está creando una unidad de medida (en este caso, el libro delgado le sirve de referencia… o la idea de *delgadez* que se haya creado[126]). Sin embargo, cuando manifiesta que el libro es pesado, utiliza un "instrumento de medición" (su mano) que le permite saber si el libro es o no pesado, aunque dicho instrumento no le dice cuán pesado es. Esta idea permite introducir las diferentes unidades en cada capacidad (si los objetos elegidos permiten hacerlo, lo que es muy probable). Como habíamos mencionado, los alumnos en este nivel tienen ideas y conocimiento específico acerca del SMD por lo que partir de *cero* es desperdiciar el aporte de los alumnos, y su posible razonamiento a partir de lo que conocen; sin embargo, hacer que expresen esas ideas es permitir que puedan relacionarlas con las nuevas y descubrir la importancia de las mismas. Asimismo, descubrir qué conocen del tema y cómo. Por ejemplo, el alumno descubre la necesidad de comparar los objetos entre sí, la necesidad de una unidad de medida de referencia, de un instrumento de medida y de unidades e instrumentos diferentes según sea la característica a medir. El desarrollo de esta capacidad se logra a partir de las interrogantes que puede plantear el maestro. Entre esas interrogantes nos pueden ayudar las siguientes:

- ¿Cómo has llegado a la conclusión de que el libro es "gordo" o ancho?
- ¿Cómo has hecho para saber que el objeto es "pesado"?
- ¿Qué significa que en esa caja "cabe más" que en esa otra?
- ¿Por qué dices que ese cubo es más grande de ese otro cubo?
- ¿Cuál de los dos lápices tiene mayor longitud?
- ¿Cuál es la longitud del lápiz más largo?
- ¿Cuán pesado puede ser ese libro?
- Etc.

---

[126] En el caso de la imagen, por ejemplo, el libro elegido es considerado "gordo" aun cuando no se haya tenido como referencia los libros "delgados" ya que esta idea está en función de su propio cuerpo.

A través de las preguntas, los alumnos van recordando algunas ideas e introduciéndose en otras que no conocen o no dominan (como volumen y capacidad, por ejemplo). Con esta idea, es preferible que el profesor permita agotar lo que el alumno conoce (medidas de longitud y superficie, que son las primeras que, generalmente, se introducen), pueda aplicarlo correctamente (saber qué unidades de longitud, por ejemplo, se usan para la medida de un clip o de un perchero vertical y cuáles para las distancias largas y cortas y el porqué de ello), y cómo a partir de ello, puede llegar al conocimiento de las otras (volumen, capacidad, peso).

Para trabajar la unidad fundamental de las medidas de longitud, sus múltiplos y submúltiplos, el profesor puede entregar a los alumnos una hoja de trabajo en la que los alumnos deben relacionar diferentes objetos, que ahí aparecen a través de imágenes, con sus posibles medidas reales, centrándonos únicamente en una característica conocida: la longitud (anexo 2). A través de la hoja, el alumno identificará cuál es la posible medida de cada objeto y la unidad correspondiente (metros, decímetros, kilómetros, milímetros[127]). Además, la actividad permitirá que los alumnos expresen su opinión sobre la posible longitud de cada unidad de medida, identifiquen cuáles se usa en longitudes pequeñas y cuál en grandes, introduciéndose, de esta manera, en los múltiplos y submúltiplos del metro. A partir de este trabajo y de la segunda parte del anexo se pueden trabajar las unidades de superficie. Buscar las relaciones y diferencias entre estas medidas y las anteriores permite comprender el uso de las unidades de superficie y porqué son distintas que las de longitud.

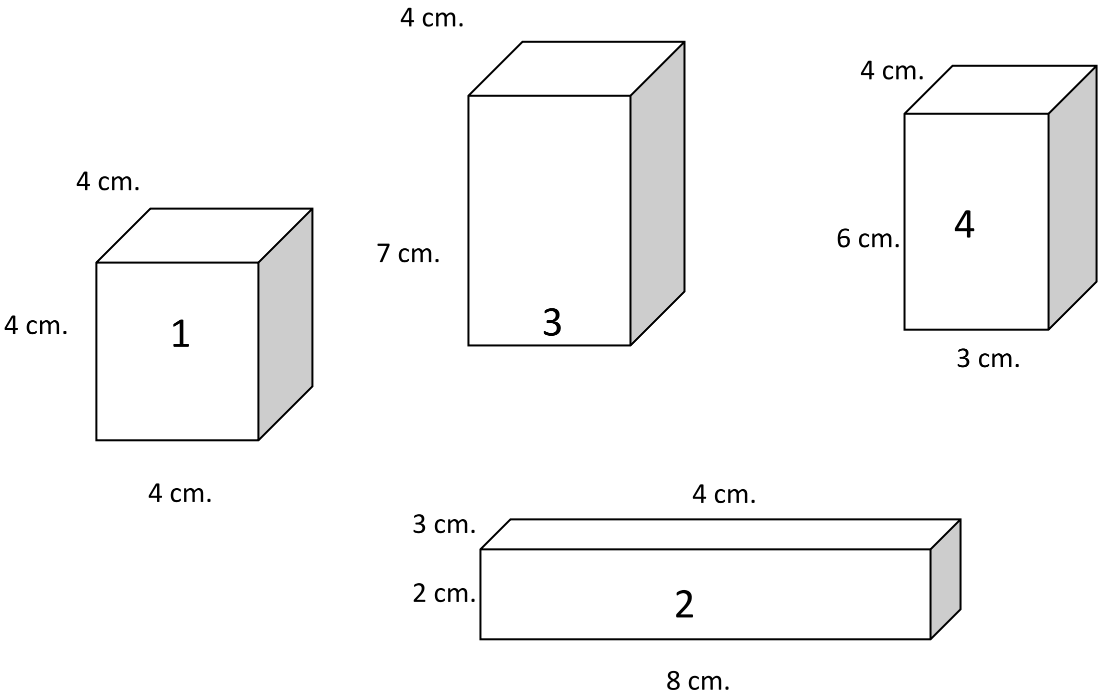
Una vez identificadas las unidades de longitud y superficie se puede entregar a los alumnos una ficha en la que aparecen las unidades referidas anteriormente, haciendo una breve introducción de las mismas (es claro, que esta hoja se entrega después que los alumnos han identificado cada una de ellas y explicado su función, de esta manera la hoja resume lo que se ha trabajado en clase). Además, la hoja puede contener dos cuadros (uno para longitud y otro para superficie) de tal manera que los alumnos completen en ellos los respectivos múltiplos y submúltiplos del metro y del metro cuadrado (anexo3).

Volumen y capacidad

Podemos abordar ahora las unidades de volumen. En muchas ocasiones los conceptos de volumen y capacidad se confunden. Algunas veces se utilizan como sinónimos. Es importante, por tanto, empezar en la escuela primaria a diferenciar estos conceptos, al mismo tiempo, que encontramos la relación entre ambos (anexo 4). En primer lugar, podemos reflexionar sobre los objetos susceptibles de ser medidos respecto al volumen. Para ello hay que diferenciar el volumen del área (concepto que ya conocen). Para diferenciarlos podemos mostrar objetos como los siguientes y preguntar a los alumnos si la superficie que estos ocupan es la misma en los tres casos.

---

[127] No consideramos Hectómetros ni Decámetros pues son menos usados.

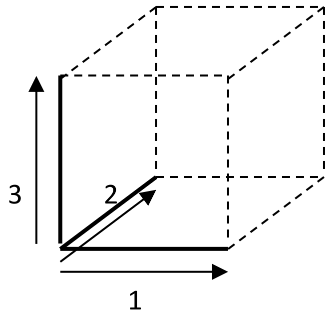


Los alumnos pueden marcar o dibujar dicha superficie señalándola con un lápiz sobre un folio blanco; luego, hallar el área. Inmediatamente podemos preguntar si el único espacio que ocupa cada objeto es la superficie del “suelo” que han hallado, por ejemplo, entre los objetos 1 y 3 que ocupan una misma medida de área. Los alumnos, intercambiando ideas comentarán al respecto. Evidentemente, uno es más alto que el otro, lo que creará una diferencia: el espacio vertical es mayor en la figura 3, por lo que ocupará más espacio. Con ello se llega a la conclusión de que el espacio que ocupan no sólo depende de la superficie en la que se apoyan los objetos, sino del lugar que ocupa todo el objeto, no sólo su base. No sólo consideramos el largo y ancho de la base, sino también su altura. Entendemos por volumen el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio. Cuando hablamos de espacio no sólo pensamos en el “suelo que pisan” sino al espacio total: largo, ancho y altura.

Cuando hablamos de capacidad, nos referimos a objetos que son capaces de contener, dentro de ciertos límites, otros objetos o sustancias (son objetos huecos). Estos objetos, por ocupar un lugar en el espacio tienen un volumen, pero su capacidad no depende de su volumen, sino de cuántos objetos o cuánta sustancia son capaces de almacenar dentro. ¿Qué objetos tienen esta capacidad? Las cajas, los recipientes, los floreros, una gaveta, etc.:

La relación que puede existir entre el *volumen* de un objeto y la *capacidad* de otro es que si el objeto está contenido completamente – sin dejar un espacio libre - en un recipiente, el volumen del primero es la capacidad del segundo. Por ejemplo, si llenamos el florero anterior con agua, de tal manera que no haya un espacio interior sin ese líquido, la capacidad de ese florero es el volumen del agua que lo contiene. Sin embargo, si metemos una pelota de tenis en la segunda gaveta del armario, el volumen de la pelota no es la capacidad de la gaveta, ya que sobraría espacio.

Nos centraremos en primer lugar en el estudio del volumen de estos objetos. Luego trabajaremos objetos con capacidad (y volumen). El volumen de los objetos anteriores (prismas), como todos sabemos, considera tres dimensiones: largo, ancho y altura, o largo, alto y profundidad.



Para trabajar el volumen, partimos de objetos que permitan medirlo, en sus tres dimensiones, por ejemplo diferentes libros o distintos cubos. En ellos podemos medir, en primer lugar, las magnitudes que hemos trabajado: longitud y superficie. Es preferible trabajar con objetos cuyas medidas se expresen mediante números naturales por lo que es mejor seleccionar cuidadosamente el material a emplear. No precisamos de varias unidades, aunque sí de las apropiadas. Por ejemplo, podemos mostrar los prismas anteriores, de diferente volumen, aunque no necesariamente proporcionales.

Con estos objetos, los alumnos pueden hallar distintas medidas: las longitudes de sus aristas y el área de sus superficies. En el cubo, evidentemente todas las superficies son iguales, mientras que en los prismas siguientes sólo tienen pares de superficies iguales (las opuestas). Luego, los alumnos se pueden dar cuenta que en los tres objetos hay muchas más longitudes y que las dos últimas figuras (u objetos) tienen al menos tres medidas distintas. Sin embargo los tres objetos tienen más de dos dimensiones.

Llegar a la idea anterior, permite identificar que para medir el *tamaño* de este tipo de objetos, necesitamos contar con las tres medidas (distintas) que reconocemos (¿o todas ellas?[128]). El tamaño, en estos objetos, no depende únicamente de su largo y ancho, como en el caso de las superficies, pues a diferencia de las anteriores, estos no son objetos planos (como lo son el cuadrado, el rectángulo o el triángulo), sino que tienen cierta altura. ¿Cómo saber, entonces, cuál es la medida de su tamaño y cómo expresarla? Es importante retomar el razonamiento que hemos seguido con la longitud y superficie, así este tema puede entenderse mejor (anexo 5).

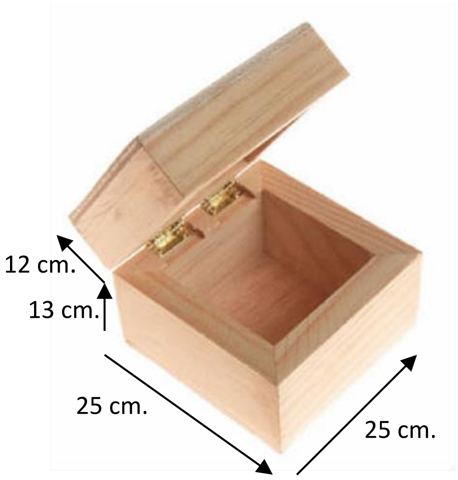
Una vez superado el tema del volumen retomamos la cualidad ‘capacidad’ en los objetos. Una vez hallada la forma de saber qué y cuál es el volumen de los objetos, veremos qué objetos tiene la cualidad de almacenar objetos y cuál es su capacidad. Para ello, podemos mostrar a los alumnos las imágenes de dos cajas diferentes pero de igual volumen. Primero podemos preguntas qué piensan del volumen de ambas cajas. Luego se les proporciona la medida de sus lados.

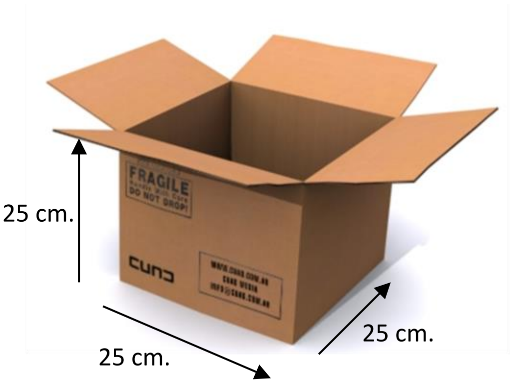
---

[128] Los alumnos pueden intentar considerar todas las medidas halladas, incluso si se proponen hallar las diagonales. Es importante que seleccionen las necesarias.

Evidentemente ambas cajas, cuando se cierran forman, sus caras son cuadradas. Aunque una de las dimensiones de la primera caja está “partida”, los alumnos deben ser capaces de reconocer la suma de ambas partes como la medida total de dicha dimensión.

Podemos entregar otra imagen de las mismas cajas pero precisando sus medidas:





Los alumnos, a partir de las medidas, hallarán el volumen de cada caja, y comparando los mismos llegarán a la conclusión de que ambas cajas tienen el mismo volumen. Una vez analizado el volumen de las cajas se les orienta a los alumnos a observar el material de la que están hechas y el interior de las mismas. Una vez llegado a este punto se les cuestiona sobre la capacidad de cada una para almacenar objetos o sustancias. La pregunta clave podría ser ¿Qué caja almacena más objetos de las mismas características? ¿Cuánto creen que mide el espacio para almacenar objetos en cada caja? Los alumnos intercambiarán ideas al respecto, tanto con los compañeros como con el profesor, llegando a la conclusión que la primera caja tiene menos capacidad que la segunda puesto que tiene un espacio menor de almacenaje. Este trabajo lleva a los alumnos a reafirmar que el volumen de un objeto recipiente no necesariamente es la capacidad del mismo.

Luego de esta primera idea, la segunda es desarrollar para qué nos sirve un recipiente, qué podemos medir con él. Intentamos que los alumnos se imaginen qué podemos meter dentro de un recipiente como los de la imagen. En un primer momento de la misma naturaleza (cartón y madera), luego de distinto material (vidrio, por ejemplo), como las siguientes:

Los alumnos han de comentar y anotar los distintos objetos que podemos meter en dichos recipientes y la naturaleza de los mismos (pelotas, ropa, cubos pequeños, agua, arena, piedras, etc.). La capacidad nos lleva a la medida de los litros. Al manipular diferentes objetos, los alumnos también pueden hacer referencia al peso de los objetos, sin embargo, el profesor puede proponer situaciones en las que esa idea sea descartada. Por ejemplo, una de las cajas tiene capacidad para 20 pelotas de tenis y también para dos bolas de billar, si las pelotas de tenis pesan 30 gr., cada una y las de billar 1.500 gramos, ¿podríamos decir que 20 pelotas de tenis pesan igual que 2 de billar por ocupar el mismo espacio? Con ello, y otros ejemplos de la misma naturaleza, descartamos que la capacidad es el referente del peso de lo que contiene. Permitimos a los alumnos que nombren otros objetos, de distinta naturaleza. El profesor puede guiar directamente al alumno hacia este hecho preguntándoles qué pasa con los líquidos, como el agua. ¿Cuánta 'agua' podemos almacenar en un recipiente como el cubo de vidrio que tiene igual medida que las cajas anteriores?, ¿la cantidad de agua se puede medir? ¿Cómo?

A partir de ello, el maestro o maestra puede introducir la capacidad de los recipientes como el referente para medir los líquidos. El maestro muestra diferentes recipientes que contienen líquidos y los analiza con sus alumnos:

- ¿Dónde sabemos que hay más agua?
- ¿Cuánta cantidad de agua hay en cada uno? ¿Cómo saberlo?

Las anteriores, son algunas de las preguntas que el docente o la docente pueden formular orientando el pensamiento de los alumnos hacia identificar qué objetos son referentes de las medidas de los líquidos y qué capacidad tienen.

Para saber qué capacidad tiene cada recipiente y por lo tanto cuánto ‘mide’ la cantidad de agua, proponemos a los alumnos que observen los recipientes y decidan cómo hacerlo. Lo más probable es que escojan uno de ellos como recipiente unidad. El maestro debe orientar hacia la necesidad de una unidad de medida en este caso también. Además, los recipientes como las botellas, los vasos graduados y las latas (si las hubiera) tienen la ventaja de indicar el contenido de agua y por tanto su capacidad. El maestro puede orientar a través de las siguientes preguntas:

- ¿Según indique el recipiente, cuánta agua contiene el recipiente?
- ¿Cuál es la capacidad de ese recipiente?
- ¿Cómo se relaciona la capacidad del recipiente y la medida de agua que indica el recipiente?

En este caso, los alumnos, en grupo, deben buscar maneras de saber cuál es la capacidad, en litro, del recipiente en cuestión. Es necesario que el maestro y los alumnos cuenten con objetos graduados (ya sea vasos, jarras o cubos abiertos de diferente capacidad, al menos una de cada una: una de un mililitro y otra de un litro) que indique, por ejemplo en litros, la capacidad del recipiente. Esto los llevará a establecer relaciones entre litros y decímetros cúbicos y descubrir que un litro equivale a un dm^3; esto es, si vertemos el contenido de un recipiente de un litro, este contenido ocupará el recipiente de 1 dm^3 o su equivalente en cm^3 (anexo 6). Como la introducción y desarrollo de cada unidad de capacidad se desarrolla a partir de la anterior, las actividades deben partir de dichos conocimientos para que pueda realizarse la conexión debida de los temas.

Por último, nos toca desarrollar el peso de los objetos. Los alumnos han reconocido en los objetos la cualidad de ser ‘pesados’, algunos pesan más y otros menos. Así como los alumnos han comprobado que para medir la longitud, el área, el volumen y la capacidad necesitamos de una unidad de medida, podemos preguntar a los alumnos cuál es esa unidad de medida que permite saber el peso de las cosas. Para ello podemos trabajar directamente con los objetos envasados y pedir a los alumnos que analicen el peso de cada uno, clasificando de acuerdo al mismo y señalando qué unidades son mayores y cuáles son menores. Esta actividad integra el trabajo realizado en las anteriores. En este caso, los alumnos no van a dar los primeros pasos de descubrimiento, ya que estos han sido dados en actividades anteriores, sino que van a identificar, a partir de lo que saben, cuáles son las unidades que se utilizan normalmente para indicar el peso de los objetos en los diferentes envases (anexo 7). Para ello se les puede llevar una serie de productos en los que se indica su peso y a partir de ellos, pedirles que ordenen los mismos desde aquel que piensen que pese menos hasta aquel que cree que tiene el mayor peso. Luego, deben observar en cada envase la cifra que indica el peso de cada producto, lo escribirán e intuirán que significa cada uno y a qué puede equivaler. Lo importante es saber seleccionar aquellos con los que los alumnos puedan trabajar y clasificar rápidamente sin perder la idea de lo que se pretende. De la siguiente imagen, por ejemplo, podemos seleccionar el arroz, el azúcar, las galletas, las pastas, las bolsitas filtrantes, entre los más destacados:

Para que los alumnos 'pesen' los productos sin hacer uso de una balanza profesional pueden hacerlo sopesando con sus propias manos y brazos. Luego se puede hacer uso de una balanza convencional indicando cómo funciona. Esto puede ser producto de haber ido, en grupos, al mercado y haber preguntado al comerciante cómo pesan sus productos.

Anexo 1 (SMD)

Identificamos características que pueden medirse

Indica con una X si la característica se presenta en cada objeto que estás analizando. Anota el nombre del objeto en el recuadro correspondiente.

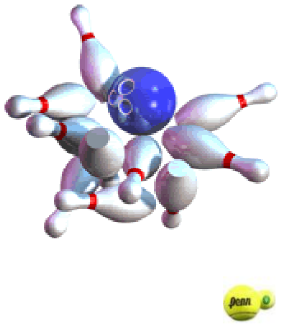
Objeto	¿Pesa?	¿Es largo?	¿Es ancho?	¿Tiene altura?	¿Tiene superficie?	¿Tiene volumen?	¿Es hueca?	¿Es compacta?

¿Todas las características elegidas se pueden medir? ¿Se miden de la misma manera? ¿Su medida se puede expresar de la misma manera?

____

____

Observa la siguiente imagen y lee el siguiente diálogo:



- ¡Mira estas bolas para jugar bolos que me han regalado en Navidad!
- ¡Qué pesadas son! Mi pelota de fútbol no pesa tanto.
- ¡Pero si son de mismo tamaño!
- Sí, las dos miden 30 cm. de alto, pero compara, una pesa más que la otra.
- Mira la caja, dice que pesan 5 kilos cada una.
- Mi pelota debe pesar menos de 5 kilos.
- Sabes, en la caja de la pelota de bolos puedes meter tu pelota de fútbol.
- ¡Pero si pesa más!
- Pero entra. Mira. En cambio, no puedo guardar mi pelota de baloncesto porque es mucho más grande.
- Pero puedes guardar muchas de las de tenis, que son más pequeñas.
- Tienes razón. Esta caja tiene mucho espacio para las pelotas de tenis, el espacio necesario para la de bolos y la de fútbol, pero poco para la de básquet.
- Bueno, qué jugamos ahora: ¿bolos, fútbol, básquet o tenis?
- Lo que quieras.
- Pues vamos a jugar bolos.

¿Qué características han mencionado, los chicos, de las diferentes pelotas?, ¿cómo las clasifican?, ¿qué medidas mencionan en cada caso?

____

____

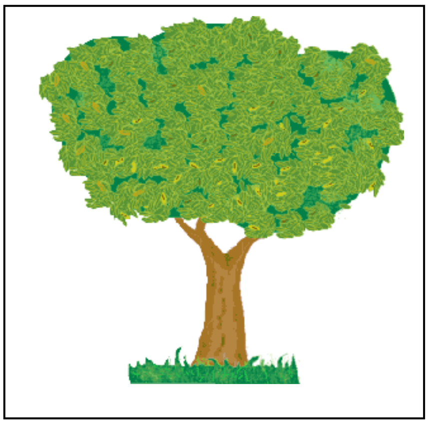
Como has podido observar, los objetos tienen características relacionadas con su _____________, ________________ y capacidad; aunque cada objeto no necesariamente posee todas a la vez.

Cada una de estas características puede ser medida y expresada de distinta manera. Así, la pelota de fútbol pesa_______________ y mide_____________; mientras que la de bolos pesa__________________ y mide _______________

Anexo 2 (SMD)

¿Cuál es el largo de cada objeto?

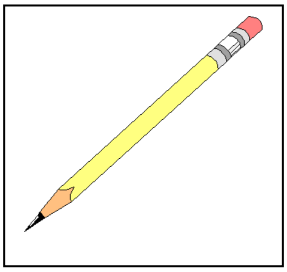
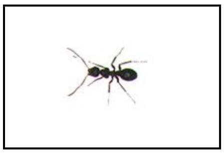
Identifica y ordénalos de acuerdo a su tamaño cada objeto con su medida (piensa en la medida real):









4 metros

30 centímetros

170 centímetros

3 kilómetros.

3 metros

20 metros

40 kilómetros.

70 centímetros.

20 centímetros

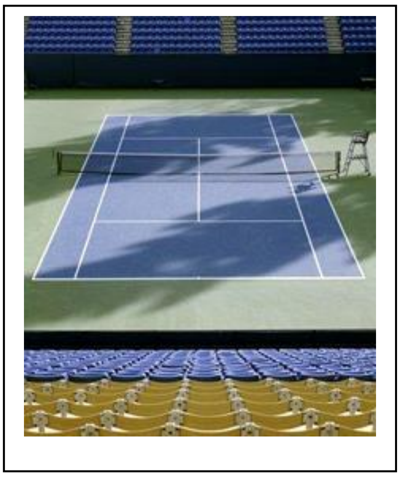
5 milímetros

2 centímetros

¿Qué diferencia encuentras entre un objeto y otro? ¿Cuál es la longitud de cada objeto? ¿Qué diferencia hay entre sus medidas?

Como podemos observar, la longitud de los objetos es variada: algunas pueden ser muy largas, y otras muy pequeñas. En cada caso utilizamos unidades de medida distinta: Por ejemplo: dos centímetros es más largo que 5 milímetros, si no compara el tamaño de una hormiga y el de un clip.

Ahora observa las siguientes imágenes:



690 cm^2

29,575 km^2

195.6 m^2

Cada una de las medidas que aparecen debajo de las imágenes pertenece a cada superficie. ¿Cuál crees que corresponde a cada una?

¿Quién tiene la mayor longitud?__________________ ¿Cómo se expresa?_____________

¿Quién tiene la menor longitud?__________________ ¿Cómo se expresa?_____________

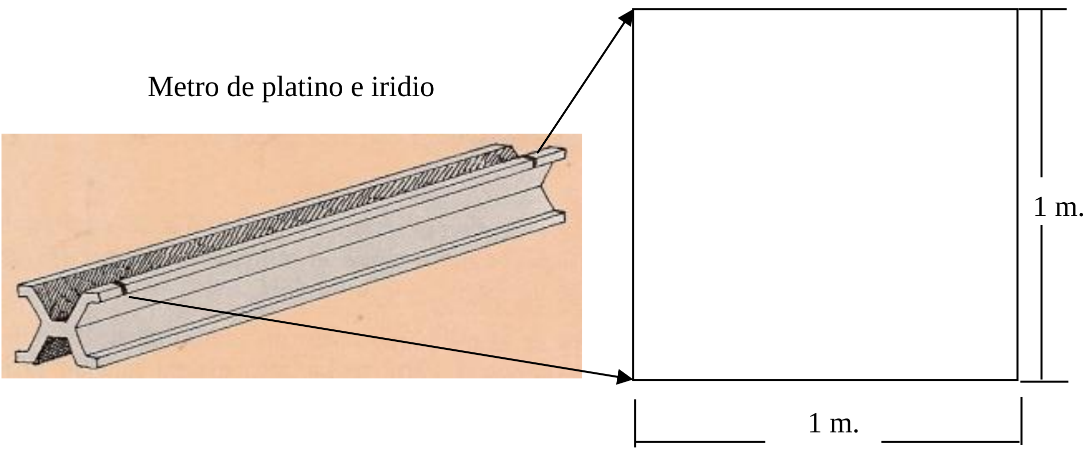
¿Qué longitud tiene la cancha de tenis?____

¿Qué diferencia observas entre sus medidas? Comenta con tus compañeros.

Tanto en las imágenes de la página anterior como en éstas, hemos medido la longitud de cada una. ¿Encuentras alguna diferencia entre la longitud de las primeras y la longitud de éstas?

Anexo 3 (SMD)

Metro y Metro cuadrado



Para medir el largo y ancho de las cosas usamos el metro. El metro es la unidad principal de longitud, así quedó definido para todo el mundo, desde hace muchos años. ¿Sabes a cuánto equivale un metro? Si tienes una cinta métrica o un tallímetro[129] en tu aula, señala la distancia que hay desde 0 a 100 y sabrá que esa es la distancia del metro[130]. Coge una cinta métrica y dime ¿qué cosas pueden medir un metro? Anota las que sepas:

____

____

____

Te habrás dado cuenta que muy pocas cosas miden un metro ¿verdad? De hecho, muchas de las que hay en tu aula miden menos, sin embargo, con la cinta métrica y con el tallímetro las podemos medir. ¿Cuánto mide el alto de tu escritorio?, ¿cuánto mides tú? Lo puedes leer en la cinta métrica. ¿Por qué sucede? Porque ambos instrumentos tienen medidas pequeñas que nos permiten identificar el tamaño de las cosas menores que un metro, o que están entre un metro y dos, como tu estatura.

Una de las unidades pequeñas es el centímetro. Tú lo debes conocer pues está en la cinta métrica, en tu regla, en la wincha, etc. Un centímetro equivale a la centésima parte del metro (1/100), es decir divides el metro en cien partes iguales (como las fracciones) y una de ellas es un centímetro. ¿Crees que habrá cosas más pequeñas que un centímetro? Señala un centímetro en la cinta métrica o en tu regla y piensa qué cosas pueden medir menos que un centímetro. Anota las que has pensado:

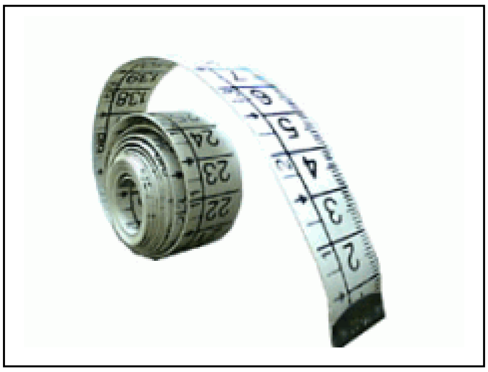
---

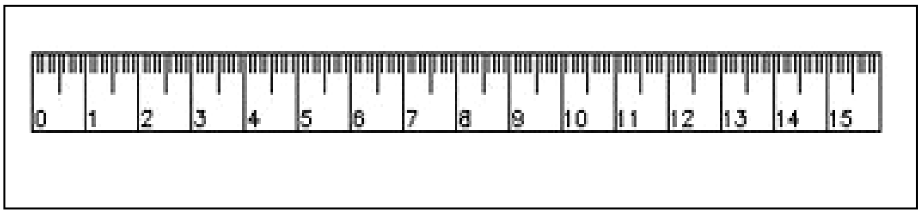
[129] Aunque esta palabra no está aún en el diccionario, se refiere a un instrumento que sirve para medir la estatura o longitud de las personas. Tal vez en tu aula no esté, pero los hospitales y clínicas tienen uno. Las aulas de infantil tienen una mezcla de tallímetro y cinta métrica que sirve para medir a los pequeños.

[130] Esa distancia, que la puede medir todo el mundo, inicialmente fue creada por la Academia de Ciencias Francesa, en 1791, y definida como la diezmillonésima parte de la distancia que separa el Polo de la línea del ecuador terrestre, ¿casi nada, verdad? Luego se realizaron mediciones cuidadosas al respecto y en 1889 se corporizaron en un metro patrón de platino e iridio depositado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (París), como lo puedes ver en la figura.

Aunque no parezca, hay cosas mucho más pequeñas que un centímetro y para medirlas surge el mismo problema que surgió para las cosas menores a un metro, pero como la solución ya se ha dado pues, ¿qué se puede hacer con el centímetro? Anota lo que piensas:

Lo dividimos en 10, así podemos ver cuántas décimas (1/10) de centímetro miden esos objetos pequeñitos. Date cuenta, como el centímetro está dentro del metro, las partes del centímetro también lo están, ¿verdad? Observa los gráficos:





¿A cuántas partes de metro equivale 1/10 de centímetro?_________________________

¿A cuántas partes del metro equivalen 10 centímetros?___________________________

Bien, cada décima de centímetro equivale a una milésima parte del metro. Esa milésima parte del metro recibe el nombre de **milímetro**. Por su parte, 1/10 de metro equivale a 10 centímetros y a la décima parte del metro se le denomina **decímetro**.

Te das cuenta: dividimos el metro en diez partes iguales y cada parte es un __________ Luego dividimos el metro en 100 partes iguales y cada parte es un_________________. Por último, lo dividimos en 1000 partes iguales y cada parte es un________________ Lo importante es ir dividiendo el metro, y cada parte, de ____________en___________.

El decímetro, el centímetro y el milímetro, por ser más pequeños que el metro, se conocen como **SUBMÚLTIPLOS DEL METRO.**

Observa las siguientes medidas:

600.000 m.

9.550.000 m.

40.075.014 m.

384.000.000 m.

Impresionantes ¿verdad? ¿Podrías decirme a cuál de las siguientes distancias corresponde cada medida?

- Desde el centro de la Tierra hasta la Luna
- Desde La Coruña hasta Madrid
- Circunferencia ecuatorial de la Tierra
- Desde Lima hasta Madrid

Algunas cifras son demasiado grandes, pero realmente esas distancias existen. Como has podido observar, todas las distancias están indicadas en metros. ¿Crees que hay distancias o longitudes más largas? ¿Crees que habría dificultad para escribir y leer esas cifras?: a mayor distancias, cifras más___________________ Comenta tu respuesta:

____

____

¿Qué solución darías?

____

____

Para hacer más fácil la lectura de las distancias podemos hacer uso de los **MÚLTIPLOS DEL METRO**. Así como para precisar medidas más pequeñas que el metro, dividíamos de diez en diez cada nueva unidad; pues, para precisar medidas más grandes, lo que se hace es agrupar de 10 en 10. De esta manera, si agrupamos 10 metros, originamos una nueva unidad, como en nuestro sistema de numeración decimal, así decimos que si completamos 10 metros, tenemos un **Decámetro (dam)**. En nuestros sistema de numeración si completamos diez decenas formamos una centena, ¿verdad? pues en el sistema métrico, si llegamos a 10 Decámetros, habremos formado un **Hectómetro (hm)**, y si logramos medir 10 Hectómetro, decimos que esa distancia mide un **Kilómetro (km)**.

Piensa:

Si en un kilómetro hay 10 hectómetros y en un hectómetro hay 10 decámetros y en un decámetro hay 10 metros, ¿cuántos metros hay en un kilómetro?___________________

Si en un hectómetro hay 10 decámetros y en un decámetro hay 10 metros, ¿cuántos metros hay en 1 hectómetro?

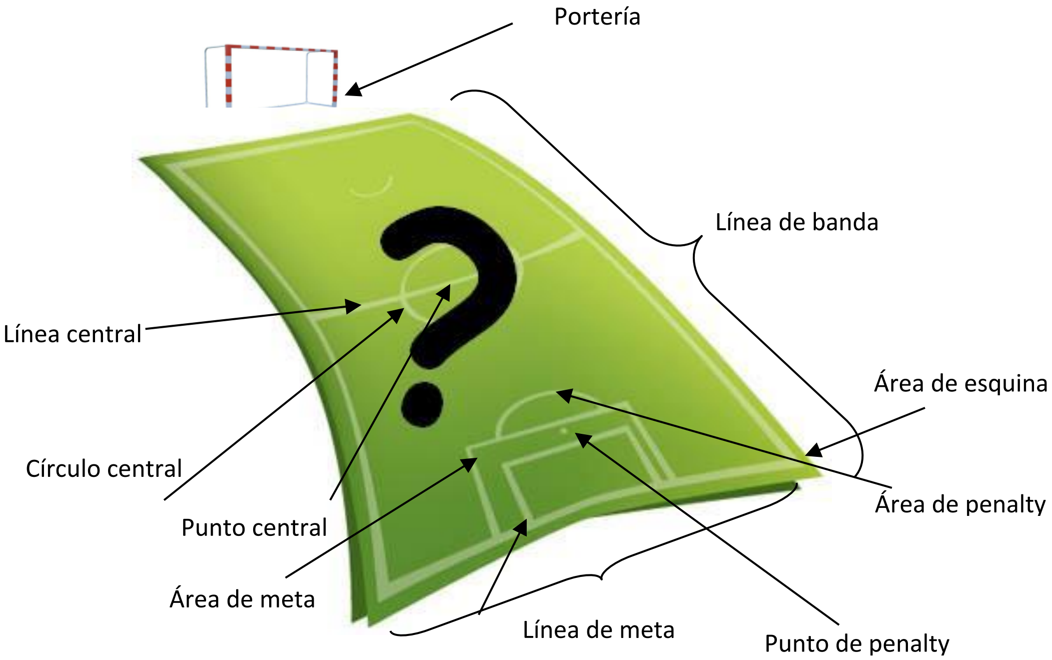
Expresa en kilómetros las distancias leías al principio:

Distancia desde… hasta…:	Distancia expresada en metros (m.)									Distancia expresada en kilómetros (km.)
	Millones			Millares			U. Simples			
	C	D	U	C	D	U	C	D	U	
La Coruña – Madrid				6	0	0	0	0	0	
Lima (Perú) – Madrid			9	5	5	0	0	0	0	
Circunferencia ecuatorial de la Tierra		4	0	0	7	5	0	1	4	
El centro de la Tierra – La Luna	3	8	4	0	0	0	0	0	0	

Metro Cuadrado

Como sabes, el metro junto con sus múltiplos y submúltiplos nos permiten medir distancias y longitudes lineales: desde un punto hasta otro, en línea recta. Por ejemplo, la distancia que hay desde el punto de penalty hasta la portería:

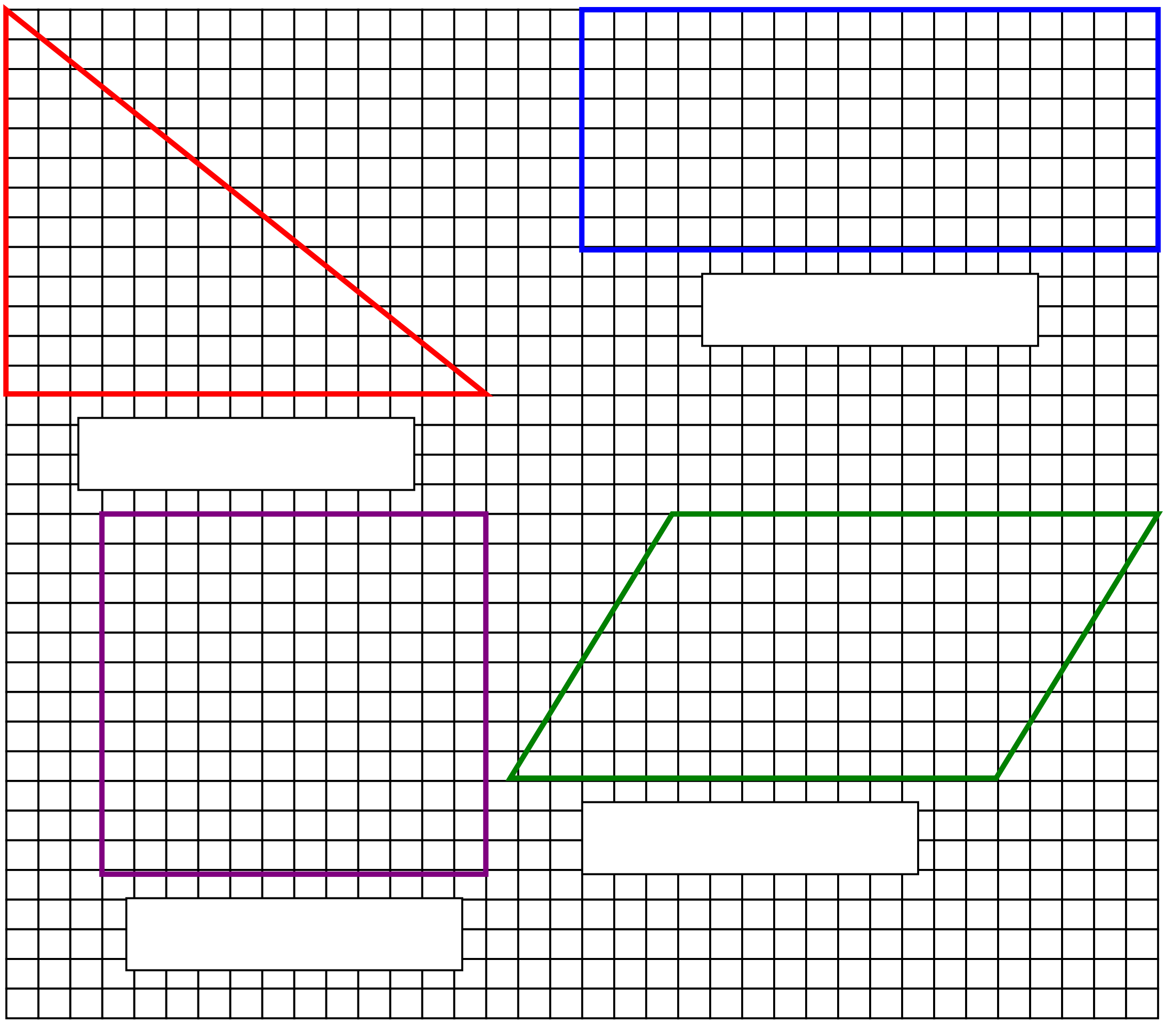
¿Qué más podemos expresar en metros, en una cancha de fútbol? Observa la imagen y comenta con tus compañeros. Escribe en las líneas lo que podrías expresar en metros



¿Has podido expresar todo en metros? ¿Hay algún aspecto que no se ha podido?

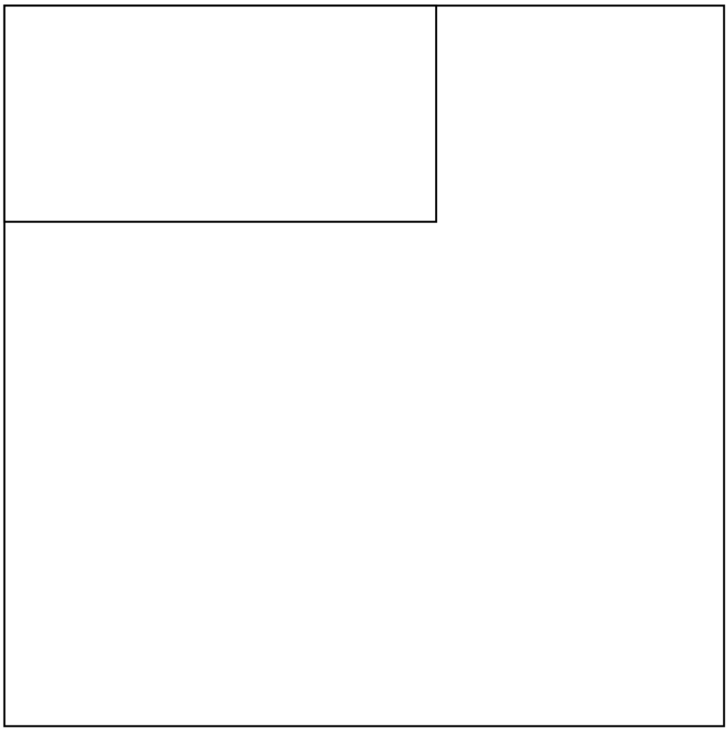
Para expresar el área de una región o superficie, utilizamos el metro cuadrado (m^2). Como el metro es la unidad fundamental para las longitudes o distancias lineales, un metro cuadrado lo será para las superficies. Las superficies tienen dos dimensiones: largo y ancho; por lo que cada dimensión deberá medir un metro.

Imagina que cada cuadradito de la siguiente cuadrícula equivale a un m^2. ¿Cuál sería la superficie de cada una de las siguientes figuras?



Con las superficies sucede igual que con las longitudes: hay áreas que son mayores que un metro cuadrado y otras que son menores a un metro cuadrado. ¿Qué hacer? Comenta con tus compañeros y expresa tu respuesta:

Observa la siguiente imagen. El cuadrado equivale a un metro cuadrado ($1m^2$), ¿cómo puedo expresar la medida de la superficie del rectángulo contenido en dicho cuadrado? ¿Qué puedo hacer?:



Evidentemente, su medida es menor que un metro cuadrado. Piensa un poco y comenta con tus compañeros. ¿Cómo podrías precisar su medida?

____

____

____

Seguramente has pensado en hacer unidades más pequeñas, como hicimos con el metro. ¿Cómo dividirías este metro cuadrado?, ¿cómo tendría que ser esa unidad más pequeña?

____

____

____

Si, en el caso de la longitud, el metro me indica la distancia en línea recta desde un punto a otro y las partes de él son también distancias cortas o líneas rectas de menor longitud; en el metro cuadrado, las partes de él serán______________________________

¿Cuántos cuadrados pequeños se forman al unir las líneas divisorias de cada par de lados opuestos del cuadrado de 1 m^2?____

¿A qué parte del metro cuadrado corresponde cada cuadrado pequeño formado?_______

Escribe los múltiplos y submúltiplos del metro que conoces, por orden de tamaño. Hazlo en el siguiente cuadro, completando la información que se te pide:

	Unidades de Longitud	Sigla	Equivalencia en metros
Múltiplos	kilómetro	km	1000
	hectómetro	hm	100
	decámetro	dam	10
	metro	m	1
Submúltiplos	decímetro	dm	1/10
	centímetro	cm	1/100
	milímetro	mm	1/100

Como la unidad de superficie parte del metro, los múltiplos y submúltiplos también. Escríbelos en el siguiente cuadro. Guíate de lo que has hecho y de la información que te doy.

	Unidades de Superficie	Sigla	Equivalencia en metros cuadrados
Múltiplos			
	Metro cuadrado	m^2	
Submúltiplos			

Mientras que en las unidades de longitud los múltiplos y submúltiplos del metro crecen o decrecen de_____ en______, en las unidades de superficie, los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado crecen o decrecen de________ en _________.

Anexo 4 (SMD)

Volumen y capacidad

Observa los siguientes objetos:

¿Cuál de ellas crees que es más grande?

____

____

¿En cuál de ellas piensas que podemos almacenar más cosas o guardar el regalo más grande?

____

____

Referirnos al *tamaño* de los objetos no es lo mismo que referirnos a su *capacidad*. El primero depende de cuánta región de espacio en el que está ocupa y el segundo de la cualidad que tiene para almacenar otros objetos. ¿Crees que todos los objetos tienen la cualidad de almacenar otros objetos en su interior?

____

____

Podemos decir, entonces, que en las tres cajas de regalo podemos medir su tamaño – o volumen- y su capacidad. ¿Es lo mismo la capacidad que el volumen de los objetos?

____

____

¿A qué se refiere el tamaño o volumen de los objetos?

____

____

¿A qué se refiere la capacidad?

____

____

¡Para pensar y compartir con tus compañeros!

¿Puedes encontrar alguna relación entre volumen y capacidad?

____

____

¿Crees que la capacidad de un objeto, representa su volumen?

____

____

Las siguientes cajas son iguales por fuera, pero cada una solo pueden contener uno de los siguientes regalos (el que está delante de ellas o más pequeños). ¿Qué puedes decir de las cajas y de su capacidad en cada una?

¿Crees que la capacidad de un objeto representa el volumen de otro objeto?

____

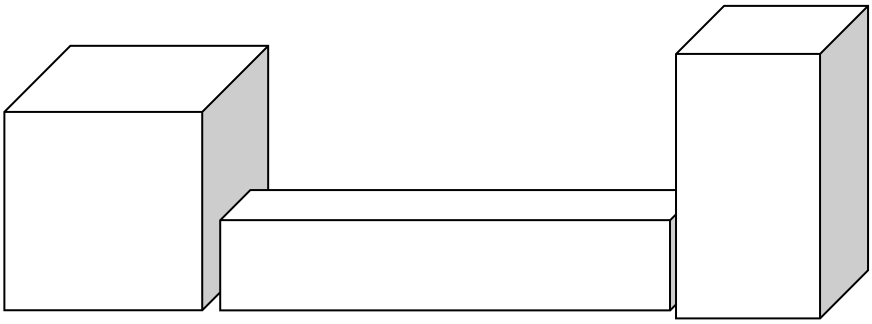
____

¿Piensas que las siguientes cajas contienen su capacidad?, ¿les falta o les sobra contenido?

Anexo 5 (SMD)

metro x metro x metro = m^3

Seguimos midiendo objetos. Esta vez, los objetos que vamos a medir son distintos a los anteriores (a aquellos que te presentábamos para medir la superficie: la cancha de fútbol, la de tenis, la extensión de Galicia, etc.) Obsérvalos y di ¿en qué se diferencian?



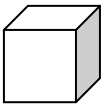
¿Cuál de los tres crees que es más grande y por qué? Comenta tus ideas con tus compañeros. Escribe en las tres primeras líneas tus ideas y en las tres siguientes las del grupo:

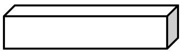
Si colocamos los objetos, uno a continuación de otro, como mostramos arriba, podemos decir que:

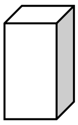
- El tercer objeto es más grande porque es el más alto de todos.
- El segundo objeto es más grande porque es más ancho de los tres
- El primer objeto es más grande porque es el más gordo.

El tamaño de los objetos depende de la región de espacio que ocupa. Tal ocupación del espacio es lo que llamamos **volumen**. Los objetos lineales ocupan un espacio lineal, de una dimensión; las superficies, un espacio bidimensional, de dos dimensiones, pues dependen de su largo y ancho, ¿de qué crees que dependa el tamaño de estos objetos?

¿Reconoces el largo y el ancho en estas figuras? Identifícalos en cada una.







En cada figura, ¿queda alguna parte sin definir?

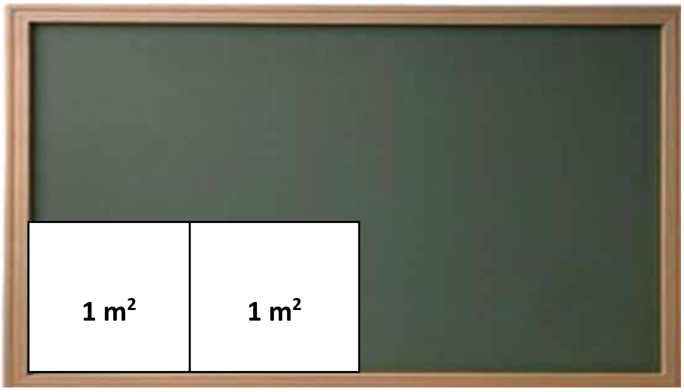
1º Figura ____

2º Figura ____

3º Figura ____

Como te habrás dado cuanta, estos objetos son distintos a los anteriores. La cancha de fútbol, de tenis, la extensión de Galicia se pueden representar como figuras planas; sin embargo estos objetos no, ya que reconocemos en ellos otra dimensión. A esta dimensión se le conoce como “altura” del objeto. Podemos decir que estos objetos tienen tres dimensiones: largo, ancho y altura.

¿Recuerdas que en las medidas de longitud y superficie necesitábamos de una unidad de medida para precisar el tamaño de los mismos? En la longitud es el metro y en la superficie es el metro cuadrado:



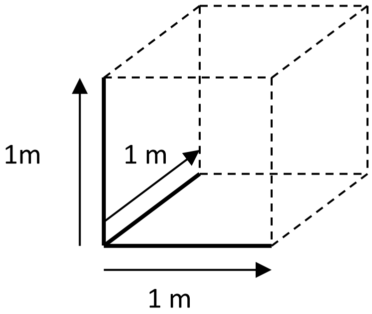
En las longitudes esa unidad fundamental de medida es el metro, y a partir de ahí se ve cuantos metros mide la longitud de un objeto o la distancia entre dos puntos. En las áreas esa unidad fundamental es el metro cuadrado, ya que la unidad es un cuadrado de un metro de largo por un metro de ancho; luego se ve cuántos metros cuadrados contiene el área de la superficie a medir, ¿cómo crees que deba ser la unidad para medir el volumen de los objetos?

____

____

____

Como en el volumen consideramos otra dimensión, esa nueva dimensión debe medir__________ Así, la unidad de medida del volumen sería un cubo de 1 m de lado.



A esta unidad que considera tres dimensiones distintas y que parte de un metro se le llama **metro cúbico (m^3)**. ¿A cuántos metros cúbicos equivale la siguiente caja que te presenta el profesor o profesora?:

Observa lo que vamos a hacer. Cada regleta de Cuissenaire de 1 cm de lado tiene a 1 cm^3 de volumen. Reproduce con las regletas de 1 cm de lado la caja que se te presenta. Luego cuenta cuántas regletas (o cubitos) necesitaste. La cantidad de cubitos representa el volumen de la caja, ¿cuál es la unidad de medida empleada? Recuérdala___________

Has obtenido la medida del volumen de dicha caja. Ahora mide las longitudes de la misma y relaciona con la medida del volumen:

1º dimensión	2º dimensión	3º dimensión	Volumen

Efectivamente, para medir el volumen de esta caja basta conocer la medida de las tres ____________ y efectuar una ____________ El resultado es la medida en ___________

¡¡Te atreves con los múltiplos y submúltiplos!!

Observa y completa:

Longitud		Área		Volumen	
Kilómetro (km)	1000 m	Kilómetro cuadrado (km^2)	1 000 000 m^2	Kilómetro	
Hectómetro (hm)	100 m	Hectómetro cuadrado (hm^2)	10 000 m^2	Hectómetro	
Decámetro (dam)	10 m	Decámetro cuadrado (dam^2)	100 m^2	Decámetro	
Metro (m)	**1 m**	**Metro cuadrado (m^2)**	**1 m^2**	**Metro cúbico (m^3)**	
Decímetro (dm)	1/10 m	Decímetro cuadrado (dm^2)		decímetro	
Centímetro (cm)	1/100 m	Centímetro cuadrado (cm^2)		centímetro	
Milímetro (mm)	1/1000 m	Milímetro cuadrado (mm^2)		milímetro	

Para completar la parte del volumen piensa un poco y razona tu respuesta:

____
____
____

Para el volumen, los múltiplos aumentan de________ en__________ y los submúltiplos disminuyen de ___________ en _________

Anexo 6 (SMD)

La Capacidad

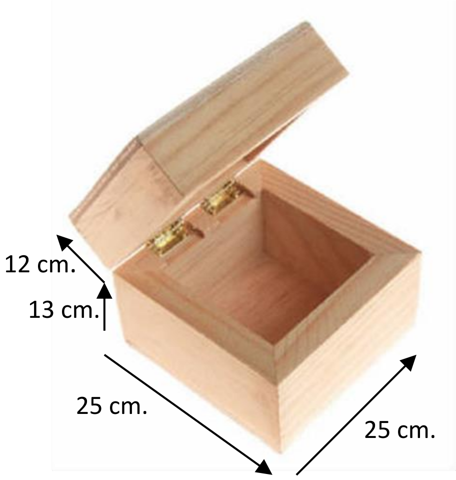
Observa las siguientes cajas, ¿Piensas que tienen el mismo volumen? Comenta con tus compañeros y explica por qué.

____

____

____

Fíjate en las medidas de sus dimensiones:



Comprueba si acerta

Como puedes observar, estas cajas, por ser huecas en su interior sirven de recipiente para otros objetos. ¿Crees que ambas cajas pueden contener la misma cantidad de objetos iguales? Comenta con tus compañeros justificando sus respuestas.

____
____
____

Como has podido observar, no siempre el mismo volumen de dos recipientes iguales indica que tienen la misma capacidad, es decir la cualidad de almacenar la misma ‘cantidad’ o medida de otros objetos o sustancias. En el primer caso, el grosor de la madera disminuye la capacidad de la caja, mientras que la delgadez de la caja de cartón lo aumenta.

¿Qué objetos podemos medir con estos recipientes?

Cajas de madera de 25 cm. de arista.

Caja de cartón de 25 cm. de arista.

Cajas de cristal de 25 cm. de arista.

Como has podido darte cuenta, cada una de las cajas tiene la misma medida, por lo que tienen el mismo volumen. Las cajas de cartón y madera no tienen la misma capacidad, mientras que las de cristal, ¿tendrán o no la misma capacidad? Comenta con tus compañeros y escribe tu respuesta:

____
____
____

Escribe en las siguientes líneas lo que puede contener cada caja:

_______________________   _______________________   _______________________
_______________________   _______________________   _______________________
_______________________   _______________________   _______________________
_______________________   _______________________   _______________________
_______________________   _______________________   _______________________

En nuestra lista podemos observar objetos líquidos (como el agua) y objetos sólidos (como __________________). ¿Piensas que la capacidad de un recipiente nos puede dar la medida de otro? Piensa tu respuesta y compártela con tus compañeros. Escribe debajo la conclusión a la que llegaron.

____

____

____

Observa las siguientes imágenes y comenta:

¿Todos los recipientes contendrán la misma cantidad de agua? ¿Cómo podemos saber qué cantidad de agua es capaz de contener cada recipiente?

____

____

____

Efectivamente, para saber qué cantidad de agua contiene cada recipiente basta ver el envase: todas las botellas y bidones de agua indican la cantidad de líquido que traen. ¿Esa cantidad es igual en cada recipiente?

____

____

____

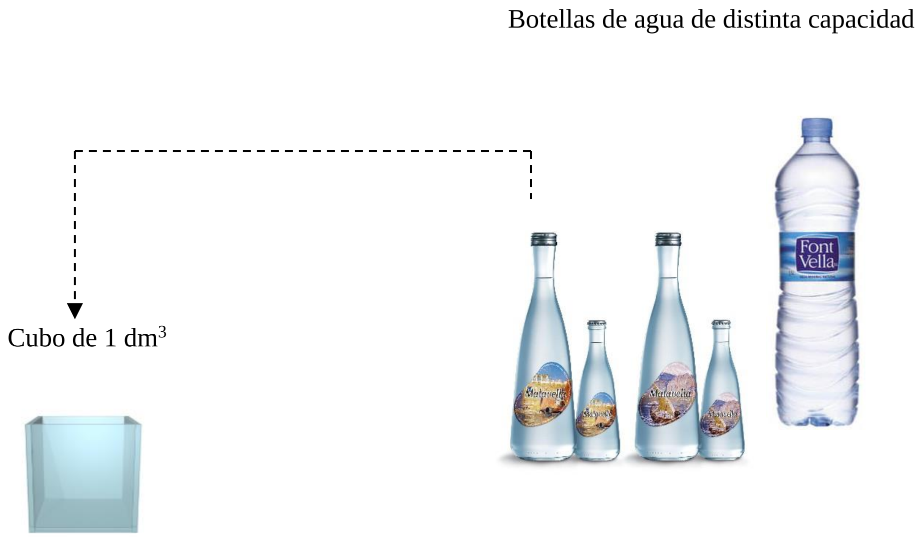
¿Qué podemos hacer con aquellos recipientes que no indican la cantidad máxima de agua que son capaces de almacenar? Intercambia tus ideas con tus compañeros:

____

____

____

Realiza la siguiente acción junto con tus compañeros: Vierte en un cubo de 1 dm^3 la cantidad de varias botellas de agua. Indica cuál de ellas contiene tanto como la capacidad del cubo. ¿A qué conclusión llegan?



____

____

____

Como has podido comprobar, en un decímetro cúbico (dm^3) entra ___________ de agua. El litro es una unidad de volumen equivalente a un decímetro cúbico (dm^3). Normalmente es utilizado para medir líquidos o sólidos granulares.

Mira las equivalencias:

1 L = 1 dm^3 = ______ cm^3.

Múltiplos y submúltiplos:

Los múltiplos y submúltiplos del litro son los siguientes:

Unidades de Capacidad		
Kilolitro	kl	1 000 l
Hectolitro	hl	100 l
Decalitro	dal	10 l
Litro	l	1 l
decilitro	dl	1/10 l
centilitro	cl	1/100 l
mililitro	ml	1/1000 l

Para no confundir la sigla ‘l’ de los litro con el número 1, se una ‘L’, en mayúscula.

Anexo 7 (SMD)

¿Cuánto pesan los productos?

Observa los productos que a continuación te muestra tu maestro o maestra y comenta con tus compañeros en qué se parecen y en qué se diferencian.

Intenta ver cuál pesa más y ordénalos de mayor a menor peso. ¿Cómo sabemos cuál pesa más y cuál menos? Indica dos maneras de hacerlo:

____

____

¿Coinciden esas dos maneras?

____

Como sabes, para conocer la medida de los objetos, en este caso su peso, los productos empaquetados o envasados lo indican en su respectivo envase. Escribe la forma cómo cada producto indica el peso del mismo:

- Paquete de fideos don Vittorio: ______________________________
- Paquete de fideos Nicolini: espagueti ______________________________
- Paquete de fideos Gallo: Gourmet ______________________________
- Paquete de pasta Gallo: Piñones Clásico ______________________________
- Bolsa grande de arroz Costeño ______________________________
- Bolsa pequeña de arroz Costeño ______________________________
- Bolsa grande de arroz paisana ______________________________
- Caja de Turrón de Alicante ______________________________
- Bolsa de turrón de doña Pepa San José ______________________________

¿Qué unidades de medida utilizan para indicar el peso en cada producto?

____
____
____

Al igual que en las unidades de medida que has estudiado anteriormente, en el peso necesitamos de una unidad fundamental. Esa unidad es el gramo, y a partir de ella, están las unidades inferiores, conocidas como submúltiplos del gramo, y las superiores, que vendrían a ser los múltiplos del gramo. ¿Qué productos están indicados en su unidad fundamental y cuáles utilizando un múltiplo o un submúltiplo? ¿Qué múltiplos y qué submúltiplos has encontrado?

____
____
____

Si los múltiplos y submúltiplos del gramo se forman siguiendo el mismo procedimiento que los múltiplos y submúltiplos del metro y del litro, ¿cómo se forman los múltiplos y submúltiplos de la unidad fundamental de peso?

____
____
____

En el siguiente cuadro escribe los múltiplos y submúltiplos del kilo

Unidades de Peso		
Nombre	Sigla	Equivalencia en gramos
gramo	**g**	**1 g**

¿Cuáles faltarían? Completa el cuadro.

Figuras Planas y áreas de las figuras planas

El tema de las figuras planas causa cierta dificultad en los alumnos de primaria pues estos no son capaces de reconocer, en primer lugar, qué tipo de figura es cada una, al cambiar la posición habitual a la que están acostumbrados a observarla. Ocurre, por ejemplo, con el cuadrado que, generalmente aparece con uno de sus lados como base, pero cuando se le da un giro de 45º los alumnos tienden a cambiarle el nombre, y la naturaleza, y confundirla con el rombo. Algo similar ocurre con el triángulo rectángulo: cuando uno de los catetos es perpendicular a una línea vertical se reconoce como triángulo rectángulo, pero cuando lo es la hipotenusa es difícil. Evidentemente, el círculo y el cuadrado son figuras planas; el cuadrado es un polígono, ¿lo es el círculo también? Es necesario empezar por salvar estas dificultades de lo contrario pueden originarse estancamientos.

Quizá el tema de las figuras planas, y geométricos en general, cause cierta dificultad. Generalmente, dentro del currículo de primaria, a los temas geométricos se les dedica poco tiempo y se trabajan aislados de las "otras" matemáticas, aquellas relacionadas con los números y las operaciones aritméticas. En cierta forma la geometría escolar no está tan lejos de la aritmética escolar, de ahí que su tratamiento no tiene que aislarse de la misma. Por otro lado, con las figuras planas también aplicamos operaciones.

Primero hay que comprender qué es una 'figura plana'. Por figura plana se entiende toda aquella figura que está constituida por dos dimensiones: largo y ancho. Con el estudio de las unidades de longitud, previo al de las figuras planas como tales, los alumnos han descubierto una de las propiedades de las cosas u objetos: la distancia que hay entre un punto y otro del mismo objeto es su longitud entre esos dos puntos y puede ser objeto de medición. Pocos objetos observables poseen "longitud" en un sentido. Quizá la *línea* que deja el lápiz al pasar la punta por una superficie nos dé la idea de objetos que poseen "longitud" en un sentido o la cuerda con la que sostenemos la tabla donde nos columpiamos. Sin embargo, la mayoría de los objetos que observamos a nuestro alrededor poseen más de una medida de longitud. ¿Qué es necesario para mandar a enmarcar una pintura, por ejemplo? Evidentemente, la medida de la pintura, pero ¿qué medida?

Esta puede ser la situación que inicie el tratamiento de las figuras planas. En la escuela, los niños dibujan siempre, crean sus propias pinturas y las exponen. Se puede aprovechar la sesión de arte para introducir y desarrollar el tema de las figuras planas. Así, elegida la actividad: crear nuestra obra de arte, cada alumno tiene que decidir cómo será el plano que contenga su pintura, es decir qué forma y tamaño tendrá. Para ello tienen que escoger de entre diferentes formas: cuadradas, rectangulares, triangulares, circulares, etc. Todas estas formas son conocidas por los alumnos, desde sus primeros años de ahí que sea fácil mencionarlas o escoger entre ellas.

Una vez definida la forma, dando oportunidad a los alumnos que elijan y justifiquen su elección (el porqué de la forma elegida, si tiene relación con lo que piensan hacer, etc.), se procederá a pedir que definan el tamaño de esa forma, ya sea un cuadrado, un rombo, un rectángulo o cualquier otra figura. Para ello, los alumnos tienen que seguir tres pasos: dibujar la forma sobre papel, comprobar que es el tamaño adecuado y medirlo, precisando las medidas, para poder delimitarlo en la tela correspondiente.

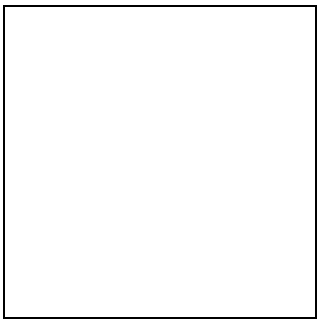
Al dibujar las formas elegidas podemos aprovechar para interrogar sobre ellas. Las siguientes preguntas orientarán nuestra guía:

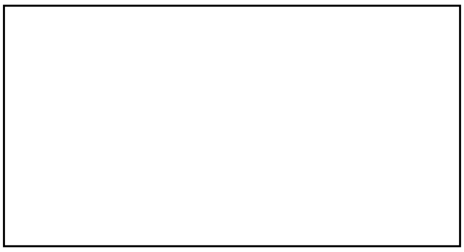
- ¿Qué forma has elegido?
- ¿Qué figura representa?
- ¿Cómo es esa figura? ¿Cómo la formas?
- ¿Qué necesitas saber para reproducirla correctamente?

Las respuestas a estas interrogantes nos orientarán sobre las ideas que tienen sobre cada figura y cómo la consideran (qué clase abarca).

El análisis de cada figura llevará a los alumnos a identificar elementos en las mismas, que en muchos casos coincidirán con los de sus compañeros aunque no sean las mismas figuras siempre, por ejemplo, lados, ángulos, vértices, polígono, etc. Reconocerlos es un paso importante pues algunos de esos elementos, básicamente los lados, hay que medirlos para poder conocer su tamaño.

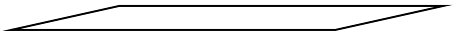
Bien, la respuesta a la pregunta ¿de qué tamaño haremos nuestra obra?, dará origen a intentar medir la figura bosquejada y por consiguiente precisarla. Supongamos que entre las figuras están estas dos:



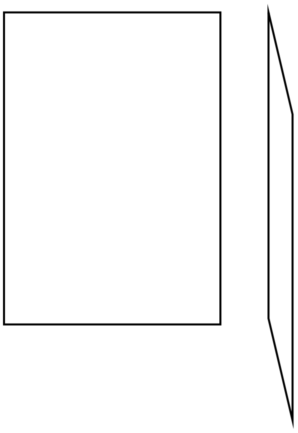


Efectivamente, un cuadrado y un rectángulo. Las figuras más comunes en la elaboración de pinturas, sino demos una vuelta por cualquier museo para comprobar lo que hemos afirmado. Pues bien, definida la forma y aproximado el tamaño, sobre un papel mediano cada alumno ha intentado delimitar el tamaño de su pintura, el paso siguiente es precisarlo y para ello tenemos que medir dicha figura, ¿Qué características tiene esa figura? En primer lugar que es plana ¿Qué significa que una figura sea plana? Cuando formulamos esta pregunta a los alumnos generalmente dicen "que no tenga altura" pero cuando colocamos la figura en forma vertical (como aparece en la siguiente imagen) no saben cómo contrarrestar esa idea. Algunos dicen, que no tengan ancho, aunque luego descartan la idea pues "saben" que el rectángulo tiene *largo* y *ancho*:

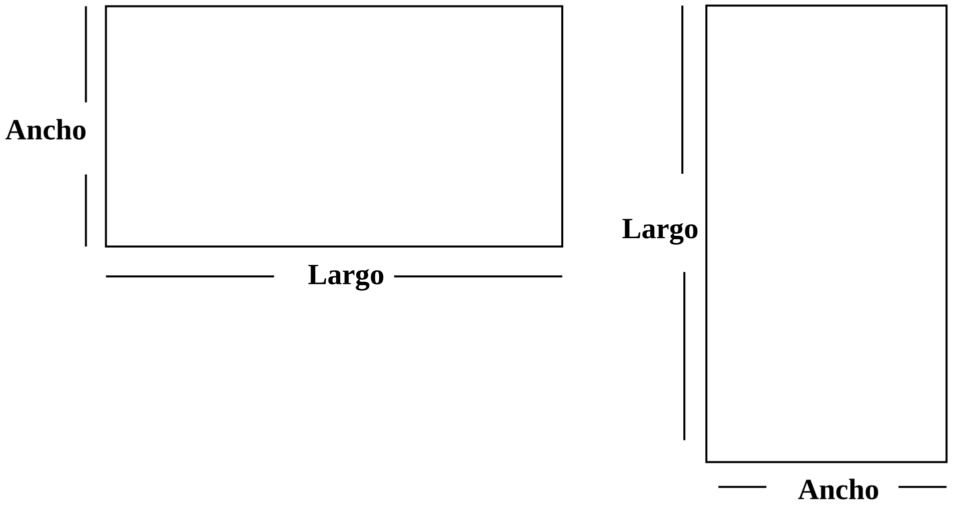
Horizontalmente



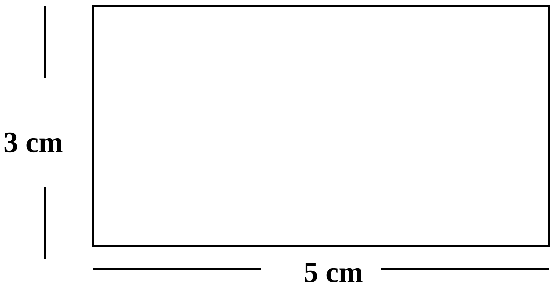
Verticalmente



Reconocer el largo y ancho de las figuras de dos dimensiones puede resultar fácil. El término *largo* está asociado a la longitud de un objeto. La Real Academia nos dice que 'largo' es aquello "que tiene mucha longitud" y longitud la define como "mayor dimensión lineal de una superficie plana". Por su parte *ancho* se define como "que tiene más o menos anchura" y la 'anchura' como "la menor de las dos dimensiones principales que tienen las cosas o figuras planas en contraposición a la mayor o longitud[131]", de ahí que en objetos de dos dimensiones llamamos largo a la longitud mayor y ancho a la menor:



Por otro lado, cuando se introduce el tema de área del rectángulo y su fórmula, en los libros escolares de matemática aparece la siguiente figura para indicar dicha área y su fórmula, siendo 5 y 3 la base y la altura, respectivamente. No se usan los términos anteriores:



Área = 5 cm x 3 cm

Área = base x altura

A = b x h

Las formas estandarizadas de presentar las figuras puede crear al alumno confusión, sobre todo porque generalmente en las evaluaciones solemos incluir formas que en clase no hemos trabajado[132]. Con ello, los alumnos pueden confundirse y no saber qué escoger, lo que puede originar un bloqueo al momento de trabajar con las figuras planas, de ahí que sea conveniente definir con ellos cada una de las dimensiones en una figura plana y comprender cómo es que esta puede variar según las necesidades.

---

[131] Se entiende *longitud* como el largo.

[132] Si al rectángulo anterior lo giramos de tal manera que en la "base" aparezca uno de los vértices y ninguno de sus lados, los alumnos no podrían identificar la base y la altura de la misma o lo harían eligiendo el largo para la primera y el ancho para la segunda.

En cualquiera de los casos, podemos observar, que el largo y el ancho de las figuras u objetos hacen referencia a dimensiones, o longitudes distintas[133] – de ahí su diferenciación-, y como son dos en un mismo objeto o figura decimos que esa figura u objeto tiene dos dimensiones: largo y ancho. Por lógica, el largo sería la de mayor longitud y el ancho la de menor longitud.

Una vez que nos hemos aclarado estos términos que involucran a las figuras planas nuestra siguiente misión es analizar las mismas. Trabajaremos de manera general las figuras planas, sin centrarnos en una específica pues lo que queremos es reconocer características comunes a todas ellas. La actividad de escoger nuestra forma para hacer nuestro dibujo permite que clasifiquemos las figuras de diferente manera. Podemos dibujarla en una cuartilla y colocar todas sobre el suelo, de tal manera que observemos qué tipo de figura se ha elegido, cuáles son iguales y cuáles distintas, porqué son iguales y porqué distintas. De esta manera, los alumnos harán referencia a los diferentes elementos y cómo la modificación de algunos cambia la figura o sólo la forma de la misma, sin cambiar su esencia (por ejemplo, sigue siendo un triángulo pero con ángulos distintos). Se puede pedir, luego, que elaboren un mapa conceptual o un esquema con las características y ejemplos de figuras planas[134]. A partir de los ejemplos podemos analizar qué elementos de cada figura cambian y cambia la figura. Por ejemplo:

Observemos los cuadrados. Estos están formados por cuatro lados, cuatro vértices, cuatro ángulos y dos diagonales:

- Qué pasa si el tamaño de sus lados es distinto aunque iguales entre sí, ¿seguimos viendo un cuadrado?
- ¿Qué sucede si el tamaño de sus ángulos varía? ¿Qué figuras planas puede adoptar?
- ¿Qué pasaría si el número de lados variara? ¿en qué figuras se transformaría?
- ¿Qué ocurriría si el tamaño de uno de sus lados varía: se alargara o se acortara? ¿qué otros elementos variarían en él? ¿cuáles quedarían invariables?

Podemos proporcionar a los alumnos fideos largos, de distinto tamaño, con la finalidad de que con ellos puedan formar los polígonos encomendados e ir trabajando de acuerdo a los requerimientos. Todas estas actividades las pueden ir plasmando en un papel, así como las ideas que va analizando y generalizando.

Una vez identificados los elementos y descubierto que dentro de cada clase pueden haber subclases y que éstas dependen de cómo se van modificando los elementos, pasamos a reconocer cuántos polígonos pueden formarse según las características dadas.

Perímetro y Área

Volviendo a nuestra actividad inicial, para hallar la medida de una figura, su tamaño, no basta con saber qué elementos posee. Saber estar características es suficiente para identificar la figura, más no su tamaño. Es momento de cuestionar a los alumnos sobre si la información que hemos extraído de las figuras que hemos analizado es suficiente para saber de qué tamaño es. Para ello podemos hacer que cada uno dibuje una figura específica. Por ejemplo, podemos dar la

---

[133] Cuando nos referimos al cuadrado, desaparece el largo y el ancho y hablamos de lados, ya que todas las dimensiones de los mismos tienen la misma medida.

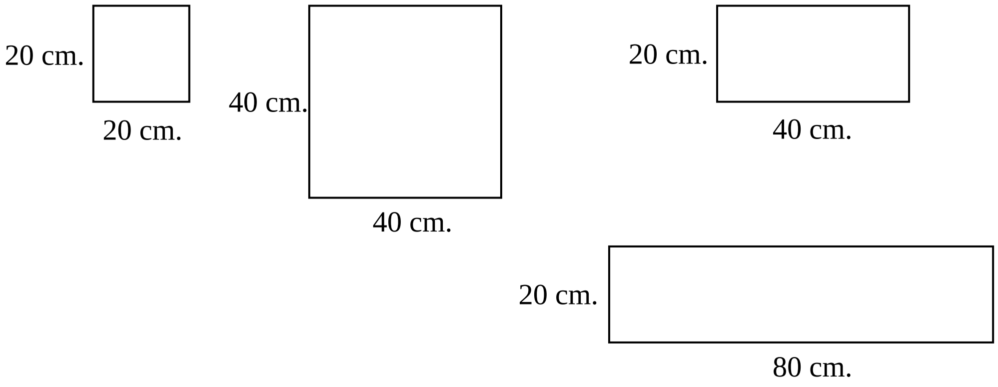
[134] Por ejemplo, que las figuras planas son figuras de dos dimensiones: tienen largo y ancho. Las figuras planas cerradas pueden estar formadas por líneas rectas (triángulo, cuadrilátero, etc.) o curvas (círculo, óvalo, etc.). Las primeras reciben el nombre de polígonos; las segundas, figuras no poligonales. En los polígonos, cada segmento recibe el nombre de lado. Los lados tienen un inicio y un fin. Cada extremo se une a otro segmento o lado. Cada punto de corte de dos segmentos, o lados, recibe el nombre de vértice. La zona que forman los lados al cortarse se llama ángulo. Dentro de la figura, dos vértices no consecutivos se unen mediante una línea. Ese segmento se llama diagonal. Los triángulos no tienen diagonales, los cuadriláteros tienen dos… El círculo es… etc.

consigna directamente: “dibuja un cuadrado” o a través de sus características: “dibuja un polígono de cuatro lados de igual longitud, cuyos ángulos midan 90º cada uno”. Seguramente cada uno lo hará del tamaño que quiera y bastará para que concluyan que para saber el tamaño de una figura no basta con nombrar sus características principales. Esto nos llevará a preguntar sobre qué necesito saber para acertar con el tamaño de la figura. Por ejemplo, cogemos uno de los modelos originales elaborados por uno de los niños y les pedimos que dibujen un cuadrado igual a ése, del mismo tamaño. Inmediatamente, los alumnos lanzarán preguntas al respecto. Quizá alguno quiera calcarlo, pero el que no, preguntará qué tamaño tiene o directamente ¿cuál es la medida de sus lados?

Así, resaltamos que para saber el tamaño de un cuadrado necesitamos la medida de sus lados. Si su lado mide 70, será un cuadrado de 70 de lado, por lo que su largo y ancho serán 70 o su base y altura lo mismo. El problema está resuelto para el cuadrado, ¿estará resuelto para cualquier figura plana: polígono o círculo?

Algunos conceptos saldrán del quehacer matemático con este tema. Por ejemplo, la idea de *perímetro* se asocia a la de *contorno* que es una palabra de uso más cotidiano. Por ejemplo, ¿qué contorno debe tener el cuadro para que encaje en un marco específico? Los alumnos pueden interpretar la idea de contorno (lo que significa) y asociarla con la suma de la medida de los lados de la figura elegida. Es preferible trabajar con figuras simples, de fácil sumatoria, pues los alumnos deben centrarse en lo que están aprendiendo[135]. Lo demás les sirve para llegar al nuevo conocimiento y no para bloquear o retrasar su aprendizaje. Una vez que los alumnos hayan interpretado el término *contorno* y asociado a la suma de la medida de sus lados, se identifican *contorno* y *perímetro* y se define. Se aprovecha esta situación para proponer a los alumnos que hallen el perímetro de distintas figuras planas, específicamente polígonos[136].

A medida que vamos planteando actividades matemáticas específicas, en este caso sobre perímetro e igualdad de figuras por su perímetro es momento de retomar el tema de “tamaño” del cuadro, comparándolos entre sí. Por ejemplo, se escogen algunas formas elegidas, elaboradas en su tamaño original y se pregunta cuál de ellas será más grande. Evidentemente algunas serán iguales en forma, e incluso en todos o algunos de sus lados y basta con observar para saber cuál es más grande pues incluso la medida de sus lados lo demuestra. Así tenemos:



En las figuras anteriores, si se toman dos a dos entre figuras iguales, es fácil decir cuál es más grande pues visualmente se observa que una es más grande que la otra, sin necesidad de medirlas; incluso si comparamos un cuadrado con uno de los rectángulos, puesto que una de sus medidas son iguales en ambas figuras. Más aún, si las comparamos, superponiéndolas, podremos

---

[135] Si se trabaja con cantidades mayores, los maestros y maestras pueden permitir el uso de la calculadora ya que les permite la obtención del resultado de manera inmediata, lo que lleva al alumno a centrarse, principalmente, en el tema y no en la operación.

[136] La longitud de la circunferencia se trabaja después.

ver que una está incluida en la otra, completamente; por lo que a la figura que le “sobra” espacio se le considera “más grande”. Sin embargo, esto no ocurre si comparamos el cuadrado de cuarenta centímetros de lado con el rectángulo de ochenta centímetros de largo[137]. ¿Qué hacer en este caso? ¿Cómo saber qué figura es más grande? Al manipular las figuras y superponer sus superficies nos damos cuenta, principalmente los alumnos, que para saber el tamaño de las mismas es necesario saber el tamaño de la superficie de la figura, no sólo la medida de uno de sus lados: largo o ancho (base o altura) sino de ambas, las dos consideradas a la vez se corresponden con la superficie de la figura: su extensión total. La superficie es la extensión en dos dimensiones.

Habíamos observado que cuando la comparación se da entre diferentes figuras o cuyas medidas son desiguales completamente, la tarea resulta difícil pues los recursos con los que contábamos para hacerlo son insuficientes (recursos visuales y de manipulación física). Surge así la necesidad de buscar un método para saber qué superficie es mayor en dos figuras que si son superpuestas, en ambos casos “sobra” espacio. El tema de área o superficie de las figuras está introducido. ¿Con qué finalidad? ¿Por qué es importante saber cuál tiene mayor superficie? Porque a mayor superficie, mayor espacio posible para realizar la pintura.

El tema de área o superficie de las figuras surge de la necesidad de medir el tamaño[138] de un espacio. Se reconoce que lo que se tiene que medir es el espacio, la extensión de la forma. Al tener el espacio dos dimensiones, ambas deben ser consideradas para saber el tamaño de dicha superficie. Comparar el tamaño de las figuras con las medidas de sus lados lleva a descubrir que a mayor tamaño de las figuras, mayor medida de sus lados. En el caso de los cuadrados, en el más grande la medida de sus lados es mayor, cuarenta centímetros, mientras que en el más pequeño, es menor, 20 centímetros. Lo mismo ocurre con uno de los cuadrados y cada uno de los rectángulos: en el primer caso, una de sus medidas es igual, pero en los dos rectángulos excede la otra medida, por lo que los rectángulos son más grandes que el primer cuadrado. En el segundo caso, una de las medidas es mayor en el cuadrado por lo que éste es más grande que el primer rectángulo, mientras que con el segundo la comparación ya no es tan visual puesto que mientras que en el cuadrado uno de sus lados es mayor que uno de los lados del rectángulo, el otro es la mitad.

Quizá este razonamiento resulte interesante para desarrollar una comparación que podríamos llamar visual-numérica de la situación. Aún no hay aplicación de fórmulas, ni referencia a ellas[139], sin embargo, sí, a elementos y sus medidas respectivas. ¿Cómo saber cuál de las dos figuras es más grande: el cuadrado más grande o el rectángulo más grande? Algunas de las ideas expresadas pueden ser las siguientes:

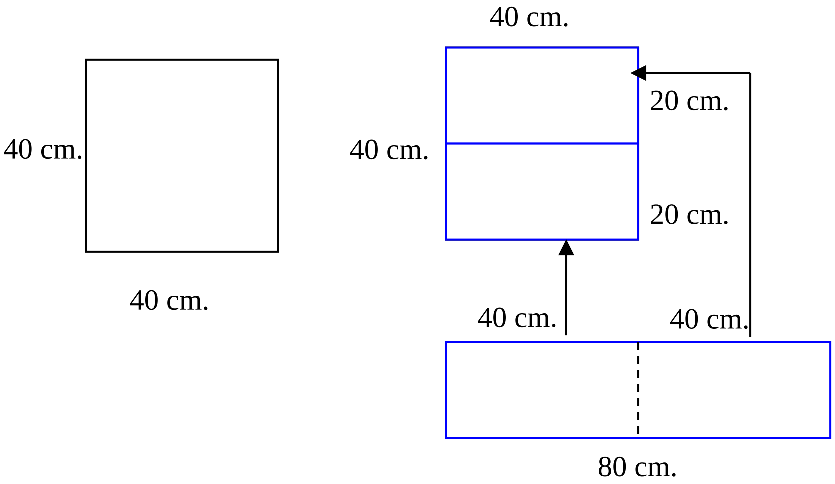
- El cuadrado tiene mayor altura (o ancho), mientras que el rectángulo tiene mayor base (o largo).
- La altura del cuadrado es el doble que la del rectángulo, mientras que la base del rectángulo es el doble que la del cuadrado.
- Si partimos por la mitad el rectángulo de tal manera que tenga igual base que el cuadrado, su altura será igual que la del cuadrado, así:

---

[137] Medidas hechas a escala.

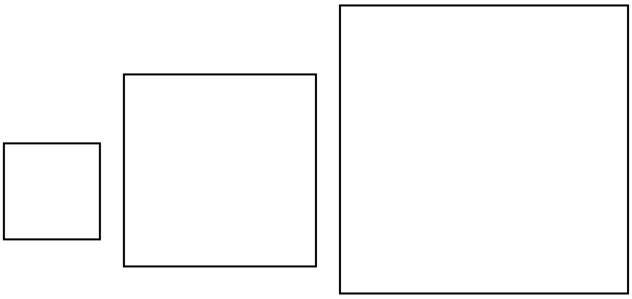
[138] Según la RAE, *tamaño* se refiere a “mayor o menor volumen o dimensión de algo”.

[139] Aun cuando alguno de los alumnos la conozca y quiera expresarla. La idea es hacer pensar al alumno a través de la actividad matemática y darse cuenta cómo puede él construir dicha fórmula, producto de su reflexión y simplificación del trabajo que está elaborando.



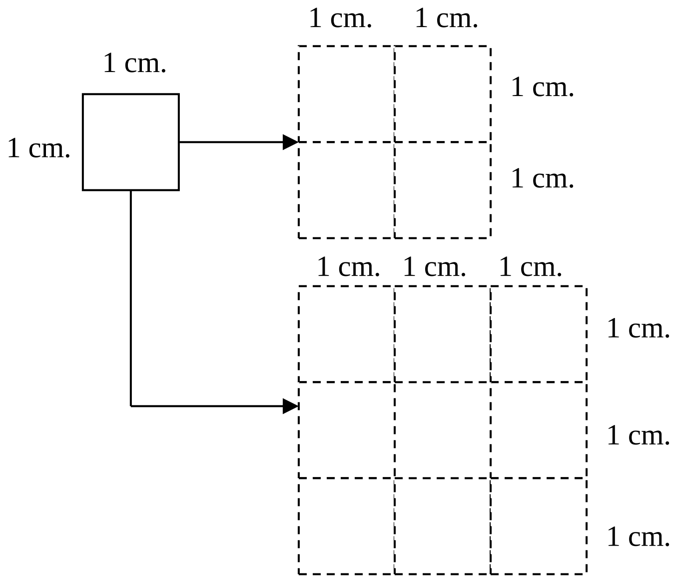
- El cuadrado de 40 cm. de lado tiene igual superficie que el rectángulo de 20 cm. x 40 cm., aunque distribuidas de diferente manera.

Hacer referencia a las medidas e incluirlas en nuestros escritos (en los apuntes de los alumnos cuando estos razonan la actividad) permite que ellos vayan estableciendo correspondencia entre las mismas, bajo la guía del docente quien orienta hacia el camino correcto a través de sus actividades y preguntas reflexivas. Por ejemplo, si preguntamos por la superficie de una figura, ¿cómo podríamos expresar esa idea?, qué responderíamos ante la pregunta ¿cuál es la superficie de los siguientes cuadrados?



Al preguntar por la superficie de una figura plana, preguntamos no sólo por su forma, sino por su medida. Así como al preguntar por el tamaño de algo decimos cuanto mide, cuál es su longitud, cuando preguntamos por la superficie de un objeto o una figura plana, para ser más precisos debemos decir cuál es la medida de esa superficie. Entonces, cabe preguntar a los alumnos ¿cuál es la medida de la superficie de los siguientes cuadrados? Evidentemente cada uno es mayor que el siguiente. Una conclusión lógica es que su medida es mayor: la medida de la superficie de un cuadrado de un centímetro de lado es menor que la medida de la superficie de un cuadrado de dos centímetro de lado, que a su vez es menor que la medida de la superficie de un cuadrado de tres centímetros de lado. A este razonamiento, el maestro puede preguntar: ¿Cuánto mayor es el tercer cuadrado del segundo y cuánto mayor el segundo del primero? O ¿cuántas veces está contenido un cuadrado en otro más grande? Los alumnos intentarán averiguar cuántas veces está el cuadrado pequeño en el mediano y en el grande. Este trabajo necesita ser expresado por parte de los alumnos. El trabajo en grupo ayuda a que las ideas sean más completas cuando sean expuestas a la clase puesto que vienen elaboradas con la aportación de todos los integrantes del grupo que han participado en el razonamiento y elaboración de la respuesta. Así se tiene que:

- El cuadrado de un centímetro de lado está incluido cuatro veces en el cuadrado de 2 centímetros de lado y nueve veces en el cuadrado de tres centímetros de lado.



Relacionando con la unidad de medida de las longitudes, hacemos referencia a la misma, es decir a la necesidad de una unidad de medida: cuando medimos siempre hacemos referencia a una unidad de medida, de ahí que sea necesario también hacer referencia a una unidad de medida cuando nos referimos a las superficies. ¿Cuáles son las unidades de medida para las longitudes? Los alumnos deben recordar esas unidades de medida[140], tratadas en clases anteriores. La idea en este apartado es que los alumnos consideren necesario expresar la medida a partir de una unidad de medida referencial, que permita dar medida a objetos más grandes o más pequeños que la unidad de referencia.

Asociando a la actividad de la imagen anterior y acompañando lo realizado gráficamente con símbolos matemáticos tenemos que:

- En un cuadrado de 1cm de lado entra sólo un cuadrado de 1 cm. de lado, mientras que en un cuadrado de 2 cm. de lado entran 4 cuadrados de 1 cm. de lado y en un cuadrado de 3 cm. de lado entran 9 cuadrados de 1 cm. de lado.

Esta idea expresada a partir del razonamiento de los alumnos se entiende fácilmente. La dificultad está cuando el alumno no ha participado de ese razonamiento. ¿Qué relación guardan la medida de los lados y el total de cuadrados de medida un centímetro?

- El total de cuadrados de 1 cm. que caben en una superficie cuadrada es el cuadrado de la medida de uno de los lados de la superficie mayor en centímetros.

El momento es propicio para permitir que los alumnos intuyan la medida de la superficie de varios cuadrados y lo comprueben a través de la manipulación física. Una vez que se ha

---

[140] Cuando medimos la longitud de un objeto, estamos viendo cuántas veces entra una unidad de medida en el largo de ese objeto. Para que todos obtengamos el mismo resultado debemos utilizar la misma unidad de medida. La unidad principal de longitud es el metro, que junto con sus múltiplos y submúltiplos constituyen el Sistema Métrico Decimal.

generalizado la situación se trabaja únicamente la manipulación simbólica, descubriendo la operación (multiplicación) que permite llegar a ese resultado.

Evidentemente hasta este momento no hemos hecho referencia a la unidad de medida: metro cuadrado, y sus respectivos múltiplos y submúltiplos. El profesor puede aprovechar la oportunidad para que los alumnos lean del libro de texto o a través de una ficha informativa cuál es la unidad, que por convenio, se ha establecido para las unidades de superficie.

A continuación, y una vez que los alumnos han hallado el área o la superficie de los cuadrados y establecido la operación o fórmula para hallarla rápidamente (multiplicamos dos veces la medida de los lados o elevamos al cuadrado esa medida), se puede pedir que hallen la superficie de las demás figuras, empezando por el rectángulo, la más próxima al cuadrado. En este caso, aparece cierta dificultad pues ya no hay medidas iguales y por lo tanto no se sabe si podemos seguir la misma fórmula. Quizá se pruebe a multiplicar la medida de sus lados, aunque tal vez se escoja equivocadamente. Creemos que podemos dejar especular al alumno pero dando razones de su razonamiento: de porqué lo considera así y porqué no. Luego, se permite comprobar a través de la manipulación gráfica o según sus propios métodos si la aplicación de la fórmula ha sido la correcta o hay que reorientarla: descubrir realmente qué cantidades hay que multiplicar y porqué en el caso del rectángulo no se puede elevar al cuadrado.

El área del triángulo se construye a partir del área del rectángulo. Evidentemente hay que trabajar con triángulos rectángulos, aunque según se conozcan los datos necesarios se puede hallar el área de cualquier triángulo. Los anexos de la actividad pueden orientar el desarrollo de la misma.

Anexo 1(Figuras planas)

Descubrimos el área del cuadrado

Ya sabes que el cuadrado es una figura plana. Tiene dos dimensiones: largo y ancho. Los cuadrados pueden ser de diferente tamaño. Dibuja, en el siguiente espacio, dos cuadrados de diferente tamaño, por ejemplo uno de 3 cm. de lado y el otro de 5 cm.

¿Qué puedes decir de los dos cuadrados que has dibujado, respecto a su tamaño? Escribe tu opinión y compártela con tus compañeros.

____
____
____

¿Cómo son las medidas del lado de cada cuadrado? ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande y cuánto el del cuadrado pequeño?

Cuadrado grande : _______________
Cuadrado pequeño : _______________

Relacionando las preguntas anteriores, ¿a qué conclusión llegas?

____
____
____

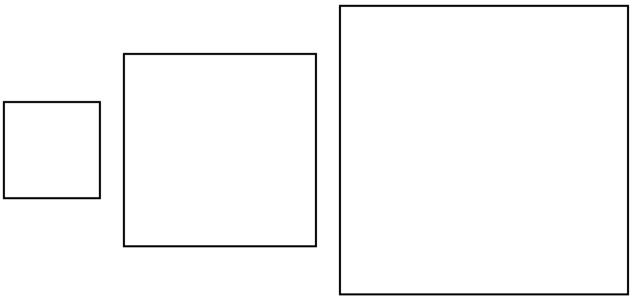
El tamaño de un cuadrado depende de cuanta extensión tenga, ¿verdad? y como tiene dos dimensiones: largo y ancho, pues hay que ver su extensión en ambas. Recuerda: un cuadrado es mayor que otro si en ambas direcciones es mayor. Claro, esto es lógico en los cuadrados pues si un lado es mayor que el lado de otro cuadrado, todos sus lados serán mayores. Bien, sabemos que uno es más grande que otro, que el que tiene menor medida en sus lados, es más pequeño, pero no sabemos cuánto más pequeño es, ¿verdad? ¿Podrías expresar cuánto más grande es el cuadrado de 5 cm. respecto al de 3 cm?

____
____
____

Para saber cuánto mayor es la superficie de un cuadrado respecto de otro debemos saber cuánto mide su superficie. Hallar la superficie de un cuadrado es hallar su medida. La medida hay que expresarla en números y en una unidad de medida, como lo hacíamos con las longitudes, ¿recuerdas? Por ejemplo, ¿cuánto mide el largo de la pizarra? En el siguiente recuadro haz un esquema de ella e indica su medida:

Seguramente, para indicar su medida has escrito un número y una unidad de medida. Por ello, para saber la medida de las cosas y expresarlas con claridad debemos conocer los números y las unidades de medida empleadas. ¿Cómo llegar a esa expresión con la superficie de las figuras planas y la medida de su área? ¿Nos puede valer saber la medida de los lados de dichas figuras? Para descubrirlo vamos a proponerte que realicemos la siguiente actividad:

Recorta estos tres cuadrados que te damos a continuación. Procura ser exacto/a.



Ahora que tienes los cuadrados en tu poder, y por separado, intenta hacer algo con ellos: compáralos, mide sus lados, comprueba si alguno cabe una cantidad exacta de veces en el otro.

Luego de haber realizado lo anterior, expresa de dos maneras precisas y distintas, cuánto mide la superficie de cada cuadrado. Te ayudo con el primero:

- La superficie del cuadrado más pequeño mide el espacio comprendido entre 1cm. de largo y 1 cm. de ancho. Dicho de manera corta: la superficie del cuadrado pequeño mide 1 cm. de largo por 1 cm. de ancho.

¿Cómo lo expresarías para los cuadrados mediano y grande?

- La superficie del cuadrado mediano mide…………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
- La superficie del cuadrado más grande mide……………………………………………….
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Piensa en una segunda forma para estos dos últimos cuadrados. Recuerda, cuando manipulaste los cuadrados te diste cuenta que el cuadrado pequeño cabía un número exacto de veces en los siguientes cuadrados. ¿Cómo expresarías la longitud de la superficie de los cuadrados mediano y grande haciendo referencia a este hecho?

- La superficie del cuadrado mediano mide, exactamente,……………cuadrados pequeños, de.............cm. de lado.
- La superficie del cuadrado más grande mide, exactamente,……………..cuadrados pequeños, de……………....cm. de lado.

Exactamente, la superficie del cuadrado mediano es cuatro veces la superficie del cuadrado pequeño, de 1cm. por 1 cm. y la superficie del cuadrado grande es nueve veces la superficie del pequeño.

Completa el siguiente cuadro:

Tipo de cuadrado	Longitud de sus lados	Número de veces que contiene al cuadrado pequeño
Cuadrado pequeño		
Cuadrado mediano		
Cuadrado grande		

Observa las cantidades expresadas y piensa si guardan alguna relación entre sí.

____
____
____

En nuestra actividad, hemos utilizado el cuadrado pequeño, de 1 cm. de lado, como unidad de medida. ¿Recuerdas que la unidad fundamental de medida de longitud es el metro?, ¿y que el centímetro es un submúltiplo del metro ya que es la centésima parte del mismo? En la medida del área de las superficies la unidad fundamental es el **metro cuadrado** (en la medida del área también consideramos longitudes, aunque por partido doble) y el **centímetro cuadrado** es un submúltiplo del mismo. Un metro cuadrado es el área comprendida en un cuadrado cuyos lados miden un metro de largo. Así, si nuestra unidad de referencia es el metro, la medida de la superficie se expresa en metros cuadrados, y si es el centímetro, en centímetros cuadrados ¿Cómo podemos expresar las superficies anteriores?

Tipo de cuadrado	Medida de la superficie
Cuadrado pequeño	
Cuadrado mediano	
Cuadrado grande	

Anexo 2 (Figuras planas)

Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

Presta atención: Tienes un cuadrado de 1 metro cuadrado de área. Dibuja un cuadrado como éste o a escala. Bien, en un metro cuadrado podemos encontrar cuadrados de un centímetro cuadrado, ¿verdad? ¿Cuántos cuadrados de un centímetro cuadrado hay en un cuadrado de un metro cuadrado de área? Vuelve a leer la pregunta y piensa. Quizá te ayude dibujar los cuadrados de 1 cm. de lado en el cuadrado de un metro, ¿en cuántas partes tienes que dividir cada lado del cuadrado de un metro?

Efectivamente, en un metro cuadrado (1 m^2) "caben" 10 000 centímetros cuadrados (10 000 cm^2). Podrías decirme, ¿cuántos decímetros cuadrados "caben" en un metro cuadrado?, ¿y cuántos milímetros cuadrados? Piensa, ¿en cuántas partes hay que dividir cada lado del metro cuadrado para el primer y segundo caso? Completa el cuadro:

Unidad de superficie	Un metro cuadrado equivale a:		
	decímetro cuadrado	centímetro cuadrado	milímetro cuadrado
metro cuadrado			

En un:	Hay…metros cuadrados (m^2)
decímetro cuadrado (dm^2)	
centímetro cuadrado (cm^2)	
milímetro cuadrado (mm^2)	

Recuerda, el orden en que decimos la expresión altera la expresión final:

- Un m^2 equivale a……………dm^2, mientras que un dm^2 equivale a…………..m^2.
- Un m^2 equivale a…………cm^2, mientras que un cm^2 equivale a…...………..m^2.
- Un m^2 equivale a…………mm^2, mientras que un mm^2 equivale a…………..m^2.

¿Te atreves con los múltiplos?

Recuerda que para los submúltiplos, el metro cuadrado es la unidad mayor, pero para los múltiplos es la unidad menor por lo tanto:

Unidad de superficie	Un metro cuadrado equivale a:		
	decámetro cuadrado	hectómetro cuadrado	kilómetro cuadrado
metro cuadrado			

En un:	Hay…metros cuadrados (m^2)
decámetro cuadrado (dm^2)	
hectómetro cuadrado (hm^2)	
kilómetro cuadrado (km^2)	

Anexo 3 (Figuras planas)

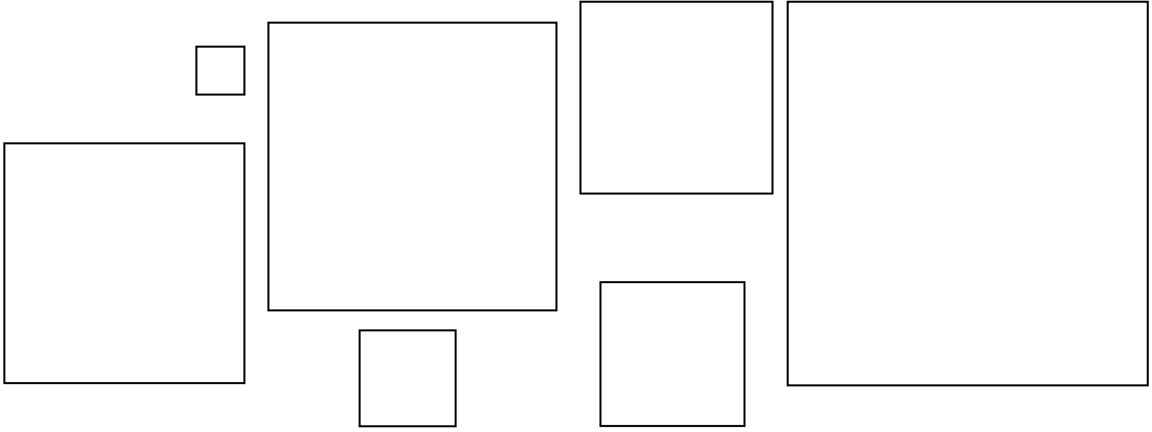
El área del rectángulo y del triángulo

¿Por qué un cuadrado y no un rectángulo… o un triángulo?

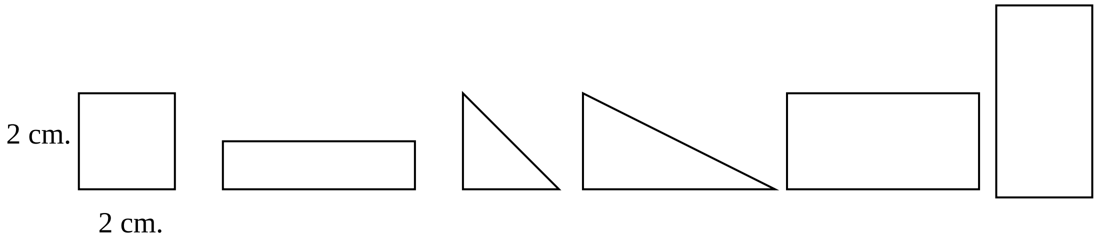
¡Es fácil! La unidad fundamental del área o superficie tiene que ser una figura proporcional en sus dos dimensiones. El cuadrado es proporcional por sus cuatro lados. Si hablamos de metro, tiene un metro por cualquier lado, y si hablamos de centímetros, igual. Así que es la figura plana más proporcional de dos dimensiones.

Aclarada la inquietud, te proponemos los siguientes retos:

Secuencia según su tamaño:



Está bien, ese no es un reto para ti. Lo haces con sólo mirar. Aunque también puedes aplicar la fórmula. ¿Qué tal con las siguientes figuras[141]?



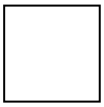
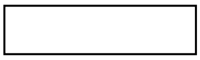
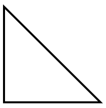
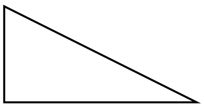
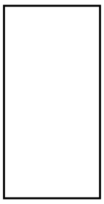
Esto sí es un reto, ¿verdad? Si quieres, puedes recortar las figuras y compararlas. Luego escribe las conclusiones a las que llegas:

---

[141] La medida está a escala.

Has aprendido a hallar el área de los cuadrados aplicando una operación o fórmula, ¿verdad? ¿Cuánto mide el área del cuadrado de la serie? ¿Podrías hallar el área de las demás figuras? ¿Qué datos necesitarías?

Completa el cuadro siguiente:

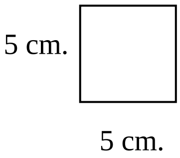
Figura	Medida de su largo	Medida de su ancho	Área
			
			
			
			
			
			

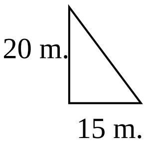
¿Qué relación guardan las figuras entre sí?

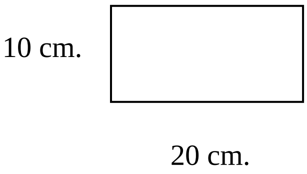
¿Cómo es la medida del área respecto a la medida de sus lados?

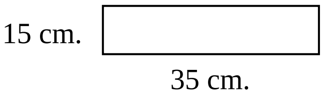
¿Puedes encontrar una operación o fórmula para hallar directamente, a partir de sus datos, el área del rectángulo y del triángulo?

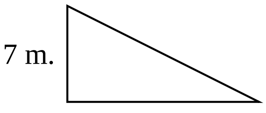
Halla el área de los siguientes rectángulos y triángulos a partir de la fórmula creada[142].

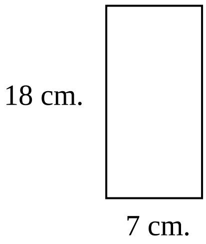












---

[142] Las medidas son a diferentes escalas.

La Enseñanza de la geometría mediante actividades o situaciones abiertas. Un caso concreto para la Circunferencia y el Círculo

La Circunferencia y el Círculo

Antes de iniciar la organización de la actividad, es importante recordar que el planteamiento de problemas en el aula debe ser tal que permita que a los alumnos no les parezca un problema que no se puede resolver. El alumno no debe sentirse ‘perdido’, en el sentido de no saber qué hacer frente a la situación, pensando únicamente en los datos numéricos del problema y manipulándolos sin un eje de orientación desde el problema; intentando adivinar el resultado y sin poder analizar la solución o soluciones obtenidas, porque no se sabe cuál de ellas es la adecuada o más ‘lógica’, según su enunciado. Por otro lado, el problema planteado debe trazar claramente la frontera entre lo conocido y lo desconocido, y delimitar su contenido. Con todo, quien debe descubrir esa frontera es el alumno a través de su propia actividad (siendo ésta una de las maneras posibles de que cada alumno reformule el problema). El profesor ha de tener más responsabilidad en la delimitación del contenido.

Dar prioridad a los problemas cuantitativos[143], como generalmente hacemos en el aula, es poner de manifiesto que el objetivo principal de su aplicación es reforzar un conocimiento anteriormente aprendido (en el que predomina el manejo de operaciones aritméticas). El objetivo con este tipo de problemas no es enfrentarse al problema poniendo en juego nuestra capacidad para organizar una solución, sino lograr la traducción correcta en el menor tiempo posible. Para los alumnos que son capaces de identificar en el problema el conocimiento nuevo[144], esta actividad se puede volver rutinaria, llegando a considerar dichos problemas como un tipo ejercicios, con texto, más o menos fáciles o difíciles de resolver. Para quienes ese conocimiento aún no han sido interiorizado correctamente y/o no logran establecer la relación entre conocimiento matemático aprendido y problema que involucra ese conocimiento, este tipo de problemas puede originar y reforzar un bloqueo y unas creencias negativas hacia la matemática y la actividad matemática en la escuela; y hacia los problemas matemáticos en particular. Este tipo de problemas necesita de soluciones concretas, limitadas, como aplicar una fórmula, una operación o una serie de operaciones, mientras que los problemas abiertos, sin embargo, dan más posibilidad de expresar dudas, limitaciones, conocimiento previo, conceptos nuevos que en la medida de su actividad pueden concretarlos, definirlos, delimitarlos y utilizarlos.

Como hemos comentado, los problemas deben ser sentidos por los alumnos; estos tienen que identificarlos, pues sólo así constituirán un verdadero problema para su conocimiento, generando un conflicto cognitivo que necesita ser resuelto[145], lo que originaría inquietud por conocer; de ahí que plantear problemas es fundamental para el conocimiento, y plantear problemas adecuados en el aula es fundamental para aprender. Si es el alumno quien logra plantearlos habrá un auténtico aprendizaje. Para la enseñanza de la geometría, que es nuestro caso

---

[143] Problemas que generalmente buscan la aplicación de una operación o fórmula matemática.

[144] Para lo que generalmente los problemas tienen el mismo formato variando únicamente los datos numéricos y/u operaciones o fórmulas implicadas.

[145] La forma de enfrentarse a los ‘problemas tipo’ no generan conflicto cognitivo en los alumnos. Por ser estos necesarios para aplicar conocimiento conocido, en el caso de no poseerlo adecuadamente y no comprender la situación, genera un bloqueo que difícilmente puede solucionarse pues está centrado en el contenido que no logra relacionarlo con los datos de la situación, y no en la situación en sí como situación conflictiva.

en este apartado, puede haber muchas situaciones problemáticas, que permitirían un aprendizaje significativo de cualquier tema en esta área.

Para concretar el trabajo en la enseñanza de la geometría, pensemos ahora en una situación abierta que genere conocimiento geométrico y que sea del interés de los alumnos. Obviamente, como profesores y siendo nuestra responsabilidad la delimitación del contenido, tenemos que pensar en qué tema vamos a trabajar. Este puede ser, por ejemplo, La Circunferencia y el círculo, tema al que muchas veces los alumnos tienen dificultades para comprender y darle significado, por los conceptos y fórmulas que implican. Desde la gimnasia hasta las construcciones, pasando por el ciclismo, el cultivo, la decoración y los juegos, la circunferencia y el círculo han sido objeto de utilidad.

Una vez definido el tema, pensemos en qué objetivos queremos lograr desde este contenido, y en general. Desde la enseñanza de la geometría podemos decir que, básicamente, pretendemos que los alumnos sean capaces de revisar con profundidad los conceptos geométricos más elementales, con el fin de poder razonar las diversas situaciones que bajo formas geométricas se le pueden presentar durante su etapa escolar y posteriormente en su vida profesional; así como aprender las propiedades características de las figuras poligonales y de las figuras y cuerpos redondos. Estos objetivos se puedes especificar para el caso concreto de la Circunferencia y el círculo.

Si queremos especificar los contenidos relacionados con nuestro tema en cuestión podríamos esbozar el siguiente esquema:

Circunferencia y Círculo

1. Generalidades: circunferencia, círculo, radio, diámetro, cuerda, arcos en una circunferencia, figuras en el círculo.
2. Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.
3. Ángulos centrales y arcos correspondientes. Igualdad de ángulos.
4. Arcos consecutivos, suma de arcos.
5. Propiedades de los diámetros y las cuerdas.
6. Tangente y normal a una circunferencia. Propiedades de la tangente.
7. Distancia de un punto a una circunferencia.
8. Posiciones relativas de dos circunferencias.
9. Ángulos en la circunferencia. Ángulo central, inscrito, semiinscrito, ex – inscrito y sus medidas. Arco capaz de un ángulo.
10. Relaciones métricas en la circunferencia: entre cuerdas, secantes y tangentes.
11. Relaciones métricas en los polígonos regulares.
12. etc.

Evidentemente, el nivel en el que trabajamos no permite llegar a todos estos contenidos, ni es lo que se propone en términos de conocimientos suficientes para los alumnos de quinto y sexto grados, sin embargo es importante saber qué sobre el tema debemos conocer y hasta qué punto, a futuro, lo tienen que conocer los alumnos. No es cuestión de abarcar lo más posible sino de hacerlo con los conocimientos básicos que les permitan continuar con éxito. En este nivel, los objetivos y contenidos se pueden corresponder con los que aparecen en el anexo 1[146]. Este trabajo nos permitiría capacitar a los alumnos en temas y situaciones posteriores y de mayor complejidad.

Para iniciar la programación de la actividad en la que buscamos mayor participación de los alumnos en la construcción del conocimiento a través del planteamiento y resolución de

---

[146] Extraído de Everest 6º de Primaria. Proyecto Ágora. Programaciones de Aula.

problemas matemáticos abiertos[147], cabría preguntarnos ¿cómo hacer que los alumnos 'sientan' la necesidad de medir la longitud de una o más circunferencias y desarrollar procedimientos personales que les lleven a generalizar y 'construir' una fórmula que simplifique su trabajo, 'descubriendo' y conceptualizando los diferentes elementos implicados?

Situaciones pueden haber varias, pero una de ellas, y que puede motivar a los alumnos, es la creación de un juego en el que los círculos y circunferencias son la base para desarrollarlo o llevarlo a cabo (es la condición para su creación)[148]. Por ejemplo, un juego con diferentes círculos de distinto tamaño y color que los alumnos irán utilizando, según su ingenio y creatividad. Cada grupo puede idear el juego que quiera. Podemos agrupar a los alumnos por equipos de cinco integrantes. Acto seguido es importante comenzar la reflexión que puede estar orientada hacia preguntarse si conocen algún juego que implique el uso de círculos y/o circunferencias, lo que les permitiría tener cierta orientación en la creación del suyo propio. Los alumnos pueden investigar sobre los mismos[149] y analizar qué características tienen, en función del juego[150], y el papel de los círculos y/o circunferencias en los mismos. Este trabajo en grupo, les permitiría intercambiar información, ideas, dudas, comentarios, ideas sobre sus conocimientos previos sobre el tema general (juegos) y particular (círculo y circunferencia), y llegar a consenso con los 'pro y contra' que pudieran encontrar. Por ejemplo, y después de haber realizado un pequeño trabajo de investigación sobre el papel de la circunferencia y el círculo en diversos juegos encontrados, entre esas ideas se puede destacar:

- ¿Qué nos interesa saber sobre la circunferencia y el círculo? ¿Es lo mismo o son diferentes?
- ¿Todas las circunferencias son iguales? ¿Y los círculos?
- ¿Hacer un círculo implica graficar primero una circunferencia?
- ¿Qué ideas tengo yo sobre este tema?
- ¿Cómo podemos construir una circunferencia?
- ¿Qué instrumentos podemos utilizar para dibujar una circunferencia si queremos que abarque un metro de ancho en un papel, por ejemplo? Si no tengo un instrumento disponible, ¿puedo elaborarlo? ¿Qué necesitamos saber para construirla? ¿Qué objetos nos pueden ayudar y hasta qué punto?
- Y si queremos hacer una circunferencia de alambre, ¿qué debemos tener en cuenta?
- ¿Podemos utilizar circunferencias 'partidas' o partes de una circunferencia en el juego que pensemos proponer?
- ¿Cuántas circunferencias o círculos entrarían en un cuadrado de 3x3?
- ¿De qué manera deberíamos ubicarlas para que en esa área quepan más cantidad de circunferencias del mismo tamaño?
- ¿Y si son de distinto tamaño?
- Etc.

Como habíamos dicho, cada grupo puede inventar un juego diferente, y de acuerdo a sus inquietudes las preguntas pueden ser diversas. Se nos puede ocurrir uno, adaptado de otro, en el que haya circunferencias 'huecas' de distinto tamaño y círculos que le encajan correctamente, en un cuadrado de 3x3. En este juego pueden participar dos alumnos: uno que da las órdenes para encajar el círculo en la circunferencia correspondiente y otro que las puede cumplir con los ojos vendados. Otro juego puede ser aquél en el que participaría una persona, por grupo quizá, que tendría que secuenciar diferentes círculos (pueden ser veinte) de mayor a menor en el menor tiempo posible y sin equivocarse. Claro, en algunos casos no es fácilmente perceptible esa

---

[147] Sin desterrar los problemas cerrados ya que ambos forman parte del quehacer matemático escolar.

[148] Esta (la creación de un juego con círculos y circunferencias) vendría a ser la situación abierta propuesta por el docente, una situación que genera problemas abiertos en los cuales hay conocimiento matemático implícito.

[149] Juegos en el que se impliquen círculo y circunferencias hay muchos, tanto manuales como intelectuales. Los alumnos pueden buscar en internet o entre sus amigos y familiares si conocen algún juego que implique el uso de círculos y circunferencias.

[150] Se pueden distribuir los tipos de juegos y un grupo dedicarse a los juegos de mesa, otros a los de suelo, un tercero a los de internet, etc.

diferencia. También se puede crear el juego en el que los alumnos tienen que juntar la mayor cantidad de aros (o circunferencias) con la menor cantidad de puntos de intersección, etc. Los juegos pueden ser diversos; sin embargo, el proceso de construcción del juego es fundamental pues ahí está el verdadero trabajo de los alumnos, el destape de sus inquietudes y la adquisición del nuevo conocimiento[151].

Volviendo al desarrollo de la actividad, para que las ideas sean las que se correspondan con lo que el docente o la docente se han propuesto, éstas deben orientar a sus alumnos hacia el tema. Los profesores pueden indagar sobre el proceso de reflexión que los alumnos estén haciendo a través de preguntas abiertas y amplias, que permitan siempre respuestas abiertas de los alumnos, buenas y malas, de las que los alumnos, con la orientación del profesor y del grupo será capaz de aceptar y rechazar, respectivamente. Las preguntas abiertas que, como docentes, podemos formular pueden ser las siguientes[152]:

- ¿Qué ideas son importantes en la situación que nos plantean?
- ¿Dicha situación nos genera algún problema? ¿De qué tipo?
- ¿Cómo se relacionan estas ideas?
- ¿Recordamos alguna situación en la que no hayan surgido ideas como las que nos surgen ahora?
- Estas ideas, ¿hacia qué nos orientan? ¿Cuál tiene que ser nuestra actividad? ¿Qué podemos hacer? ¿Cómo lo podemos hacer? ¿Por qué lo haríamos?
- ¿Tenemos ideas importantes suficientes como para resolver el o los problemas encontrados en el proceso de resolución de la situación?
- ¿Por qué hemos aceptado unas ideas y descartado otras?
- Etc.

Preguntar sobre las ideas que tienen los alumnos es permitir que cada uno exprese lo que está pensando y sintiendo frente al problema que se les ha planteado. Los profesores podrán conocer además, qué orientación está dando cada alumno o grupo al problema y cuáles son sus armas y limitaciones. Esta reflexión es previa a la solución aunque ya está orientada hacia ella y permitirá elaborar un proceso de resolución más real, y comprensivo. Luego, en una etapa posterior, se podría generar una reflexión en torno a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo nos han servido las ideas que hemos utilizado en la resolución del problema?
- ¿Habrías podido utilizar estas ideas si hubieses seguido otra forma de resolver el problema?
- ¿Cómo podrías cambiar algunas de esas ideas para plantear un problema distinto?
- ¿Qué podría haber pasado si no se daban todas estas ideas? ¿En problema seguiría siendo el mismo? ¿Se podría transformar en otro distinto?
- ¿Qué pasa si agregamos algunas ideas nuevas al problema que hemos resuelto? ¿Cuáles pueden ser éstas? ¿Qué podríamos preguntarnos? ¿Cómo se amplía el problema?
- Etc.

A medida que se responden estas preguntas se van generando respuestas relacionadas con el tema en cuestión que guiarían a los alumnos hacia la investigación de nuevos temas o ampliación del que se ha desarrollado. No es un trabajo que se deje únicamente al o a los alumnos ya que esto conduciría a error y a un auténtico desaprovechamiento del tiempo escolar. En esta forma distinta de plantear el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el docente sigue teniendo un papel importante, aunque éste es distinto al que puede desarrollar en una enseñanza expositiva. No podemos decir que el alumno pase a un primer plano y el profesor a uno segundo, pues en el proceso escolar el alumno ha sido y es el centro de dicho proceso, desde

---

[151] Es verdad que en quinto y sexto grado los alumnos tienen conocimiento formal sobre el tema, sin embargo esas ideas previas son la base para la construcción, consolidación y ampliación del nuevo conocimiento.

[152] A medida que los alumnos se involucran en este tipo de actividades son ellos quienes se irán formulando dichas preguntas, sin embargo, el profesor nunca dejará de orientar el trabajo de sus ‘pequeños investigadores’.

siempre. Ambos, profesor/a y alumno/a están en planos distintos, pero consideramos que ninguno es superior a otro. Digamos que se encajan y complementan y que sin uno el otro no se podría desarrollar adecuadamente, en ningún caso. Si bien la actividad mental y concreta del alumno se amplia y abarca todo el proceso, como ‘descubridor’ del conocimiento, la del docente no se reduce. Es más, pensamos que se multiplica porque tiene que adaptarse a formas de aprender distintas y a distintos razonamientos e ideas por parte de los alumnos, de tal manera que a todos los alumnos conduzca hacia la realización de los objetivos propuestos desde sus posibilidades particulares.

Bien, retomando el tema de la planificación de la clase habíamos propuesto algunas preguntas que orientarían el proceso de resolución del problema o situación a los alumnos. Estas preguntas organizarían su actividad. Lo importante es que cada integrante del grupo, o cada grupo formado, tenga funciones que desempeñar, que pueden ser distintas que las de otro integrante o grupo, aunque no por eso de menos importancia, para luego exponer sus hallazgos a todo el grupo y consolidar el trabajo; darle unidad. Resumiendo lo anterior, las tareas que se generarían pueden ser las siguientes:

- Tareas de investigación respecto a juegos con círculos. Cuál es el papel de los mismos en el juego.
- Averiguar que es una circunferencias y qué es un círculo, sus elementos y como se construyen.
- Investigación sobre creación de juegos: reglas, jugadores, etc.

El hecho de que cada grupo se pueda dedicar a una parte de la investigación total no quiere decir que sólo conozca y domine la información que ha averiguado, ni que conozcan lo que investigaron otros grupos sólo por informarse o para anotar lo que hay, y luego ‘estudiarlo’. Una vez que cada grupo ha averiguado lo que le correspondía es necesario que los alumnos realicen un informe y que todos los miembros del grupo se enteren de la información para poder organizar la actividad, en función de lo que han encontrado[153]. En general, los alumnos han encontrado el fundamento teórico que van a utilizar para crear el juego, y a partir de lo que lograron comprender trabajarán.

A medida que se va recopilando información surgen ideas sobre la misma, en función de lo que se está averiguando. Por ejemplo, sobre circunferencia y círculo para aclarar ideas sobre lo que se lee:

- ¿Qué significa ‘π’?,
- ¿Cómo hallar el área de un círculo?, ¿Puedo valerme de las fórmulas estudiadas en los polígonos? ¿Por qué?
- ¿Qué figuras geométricas pueden encajar en una circunferencia?,
- ¿Una circunferencia puede tener la misma área que un cuadrado o un triángulo?
- ¿Un diámetro puede ser una cuerda? ¿Y un radio puede ser una cuerda?,
- ¿La circunferencia tiene lados? ¿Y el círculo?
- ¿Cada punto podría ser considerado un lado de la circunferencia?,
- ¿Qué significa ‘lado’?
- Si ‘lado’, según la RAE, es cada una de las partes que limitan un todo, ¿por qué en otras figuras hablamos de lados y en la circunferencia no, si la circunferencia o el círculo también están limitados?
- ¿Los lados siempre son rectos? ¿Pueden haber lados curvos?
- Si ‘lado’ es cada una de las líneas que forman o limitan un polígono, ¿un lado puede ser una línea curva? Entonces, ¿un círculo partido por la mitad podría tener dos lados porque tiene dos líneas: una recta y otra curva?
- Si la circunferencia no tiene lados, entonces tampoco tiene vértices.

---

[153] En este caso, los alumnos se convertirían en ‘profesores’ de sus compañeros, lo cual facilitaría una mejor interacción y comprensión entre pares.

- Si la circunferencia no tiene lados, ¿entonces tampoco tiene ángulos ya que estos están formados por la unión de dos lados o líneas?
- Etc.

De alguna manera, las preguntas que se van formulando los alumnos se corresponden, y orientan, con los objetivos propuestos. Estas preguntas, y sus respuestas, irán introduciendo a los alumnos en el uso adecuado del lenguaje matemático y precisando ideas, así como conociendo una especie de ‘contrato’ o acuerdo entre matemáticos para precisar sus conceptos, contrato al que los mimos alumnos pueden acceder. Es evidente que esta actividad no se desarrolla en un día, que precisa de más. De todas maneras, algunas de las circunstancias vividas en esta actividad pueden encaminar hacia el desarrollo de otra u otras situaciones que precisen el conocimiento de otro contenido matemático y así ir encajando e interrelacionado los contenidos matemáticos escolares como contenidos que en muchos casos tienen relación. Los alumnos pueden, además, querer conocer el conocimiento matemático por el simple hecho de saber qué es, y no para resolver una situación concreta. Es favorable promover estas situaciones pues guían al alumno a investigar en matemática y abstraerla de casos o situaciones concretos.

En el proceso de resolución desarrollado anteriormente, los alumnos se puede ir enfrentando a diferentes actividades propuestas por el docente (ver anexos 2-5: Hojas para el docente) de tal manera que les permita trabajar directamente con la información matemática pertinente. Dichas actividades intentan hacer que sea el alumno quien a través de su actividad se dé cuenta del nuevo contenido y qué es lo que genera y cómo. En el anexo 2, sobre construcción de una circunferencia, por ejemplo, se intenta que los alumnos a través de su observación y reflexión individual y por equipos descubra las cosas esenciales y las que no en una circunferencia, y sobre todo lo exprese con sus propias palabras a partir de la experiencia realizada y no únicamente a través de una frase aprendida; luego, identificar los elementos esenciales para construir una circunferencia y cómo puede hacerla, es decir, de qué recursos puede valerse y pueden ser suficientes. Cada grupo o alumno puede pensar en un recurso distinto y presentar al grupo su propuesta, para luego, con la ayuda de todos reflexionar sobre su conveniencia o no. En el anexo 3, se avanza un poco y se intenta que los alumnos utilicen los elementos e identifiquen otros y las relaciones que se pueden establecer entre dos circunferencias. El anexo 4 se propone en función de la longitud de la circunferencia y se pregunta sobre las relaciones que se pueden establecer entre los elementos conocidos y la medida de la longitud, hasta llegar a una fórmula que puede ser ‘descubierta’ por el alumno para agilizar el trabajo. Por último el anexo 5 intenta que los alumnos creen figuras nuevas utilizando las circunferencias y/o círculos a fin de identificar y establecer relaciones y utilizando lenguaje matemático adecuado en sus reflexiones y explicaciones. Lo básico, en cualquier actividad propuesta en los anexos es que el alumno construya el nuevo conocimiento, intercambie ideas con sus compañeros y con el profesor, y lo exprese con sus propias palabras. Es el profesor quien guiará y observará el desarrollo de cada actividad, completando ideas que estas hojas de trabajo no pueden transmitir, en vez de darles dichas hojas a los alumnos para que estos las desarrollen individualmente.

La evaluación, como en el caso de las potencias, es a través de todo el proceso aunque es necesario aplicar una evaluación personal a cada alumno y al mismo proceso de resolución seguido. ¿Qué vamos a evaluar? Evaluamos contenidos conceptuales, que se corresponden con los objetivos del anexo, procedimentales y actitudinales. Se pueden realizar preguntas directas, del tipo ¿qué es una circunferencia? Pero además, preguntas para pensar como: Dibuja dos circunferencias secantes y traza dos rectas: la primera que una los puntos de intersección y segunda que una los centros. ¿Qué puedes decir de estas rectas? ¿Cómo es una respecto de la otra? Así mismo, la hoja de evaluación para cada alumno puede incluir una pregunta general: ¿Qué hemos aprendido?, indicando en cada caso, lo que se ha aprendido de cada apartado. Por ejemplo, los alumnos pueden responder: “hemos aprendido que…

- … la circunferencia es circular”.
- … siempre hay la misma distancia entre el centro y el borde de la circunferencia”.
- … el radio puede ser cualquier recta que vaya desde el centro al cualquier punto del borde de la circunferencia”.
- …su longitud se puede hallar a través de una fórmula, que es 2πr o Dπ”.
- …las fórmulas simplifican nuestro trabajo”.
- … un círculo abarca toda la región interior de la circunferencia”.
- … la circunferencia es el borde del círculo”.
- … la cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia”.
- … un diámetro es el mayor de las cuerdas”.
- … un diámetro es dos veces el radio”.
- … que la relación entre longitud y diámetro es una cantidad constante llamada *pi*”.
- … una recta es secante a una circunferencia si la corta en dos puntos”.
- … el símbolo π es igual a 3,14, aproximadamente; se lee ‘pi’ y está escrito en griego”.
- … a mayor diámetro o radio, mayor longitud de la circunferencia”.
- … la circunferencia tiene área”.
- … el círculo es el área de la circunferencia”.
- … un polígono se dirá ‘inscrito en una circunferencia’ si todos sus vértices pertenecen a esa circunferencia”.
- … un polígono se dirá ‘circunscrito en una circunferencia’ si todos sus lados son tangentes a esa circunferencia”.
- … Etc.

Mientras más ideas incluya cada alumno en su hoja de evaluación, es mejor puesto que indica cuanto ha aprendido del tema tratado. Expresar con sus propias palabras es más productivo porque indica el grado de comprensión o incomprensión, y reflexión, del tema en ese alumno concreto. Cuando un alumno expresa tan cual definen otros (el profesor, un libro de texto) un concepto, no se puede juzgar el grado de comprensión o memorización realizado por el alumno. Luego estas ideas se pueden corregir si es necesario y organizar para que los alumnos, todos, tengan la misma información claramente organizada de lo que matemáticamente ellos han aprendido. También favorece esta información al docente para analizar cuál es la idea más interiorizada por el grupo total y cuál la que menos a fin de corregir posibles deficiencias.

Anexo 1 (Circunferencia y círculo)

Circunferencia y círculo

Objetivos y contenidos para Sexto Grado de Educación Primaria

Objetivos:

- Reconocer una circunferencia y sus elementos más importantes.
- Hallar la longitud de una circunferencia.
- Reconocer y representar las distintas posiciones de una recta respecto a una circunferencia.
- Reconocer y representar las distintas posiciones relativas de dos circunferencias.
- Diferenciar circunferencia y círculo.
- Reconocer el círculo y sus elementos más significativos.
- Identificar las figuras circulares más comunes.
- Calcular el área del círculo.
- Construir circunferencias, círculos y figuras circulares utilizando los instrumentos de dibujo.
- Elaborar y aplicar estrategias de cálculo mental utilizando los conceptos de doble, triple y mitad.
- Resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana en las que intervengan la circunferencia y el círculo.

Contenidos:			**Criterios de evaluación:**
Conceptos	**Procedimientos**	**Actitudes**	
• La circunferencia: concepto y elementos. • Longitud de la circunferencia. • Posición de una recta respecto a una circunferencia.	• Trazado de circunferencias y círculos. • Investigación de las posiciones relativas de una recta en relación a una circunferencia.	• Valoración de la utilidad del cálculo de la longitud de la circunferencia y área del círculo. • Precisión y cuidado en la utilización de los instrumentos de dibujo.	• Identifica la circunferencia y reconoce en ella los elementos más destacados. • Calcula la longitud de una circunferencia.

• Posición relativa de dos circunferencias. • El círculo: concepto y elementos. • El área del círculo. • Figuras circulares.	• Identificación y trazado de las posiciones relativas de dos circunferencias. • Aplicación de la fórmula para obtener la longitud de una circunferencia. • Trazado de semicírculos, sectores circulares, segmentos circulares y coronas circulares. • Cálculo del área de un círculo.	• Interés y constancia en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. • Gusto por la precisión y el orden en los trabajos presentados.	• Identifica y representa las distintas posiciones de una recta respecto a una circunferencia. • Identifica y representa posiciones relativas de dos circunferencias. • Establece diferencias entre circunferencia y círculo. • Identifica los elementos más característicos de un círculo. • Reconoce y representa las figuras circulares más conocidas. • Halla el área del círculo. • Traza circunferencias, círculos y figuras circulares utilizando los instrumentos de dibujo. • Elabora y aplica estrategias de cálculo mental utilizando los conceptos de doble, triple y mitad. • Resuelve situaciones problemáticas de la vida cotidiana en las que aparecen circunferencias y círculos.

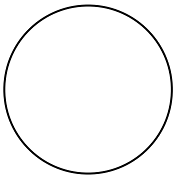
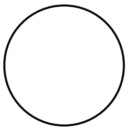
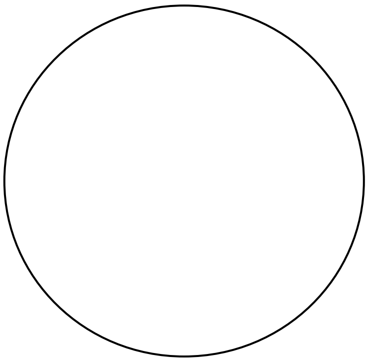
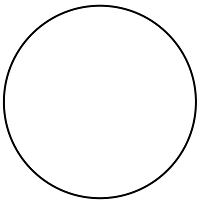
Anexo 2 (Circunferencia y círculo)

(Ficha para el profesor)

¿Cómo podemos construir una Circunferencia?

(Experiencias con distintos materiales)

1. Observemos como son las circunferencias, mediante unos ejemplos, e intentemos describirla[154]:

Escribe la descripción que has hecho:

2. Seguramente que has encontrado aspectos parecidos y diferentes en las circunferencias anteriores. Separa cada uno y escríbelos en los espacios del siguiente cuadro:

Semejanzas	Diferencias
-	-
-	-
-	-
-	-

3. De la información que has extraído de la actividad anterior, podrías decirme ¿qué necesitas para construir una circunferencia? ¿Qué debes tener en cuenta? Anota los datos que necesitas saber:

---

[154] Las circunferencias que se presenten deberían estar en relación con lo que los alumnos van investigando sobre juegos con circunferencias; es decir, a través de su investigación los alumnos se enfrentarán a distintos juegos que tienen distintas circunferencias, las que podrán comparar y analizar sus semejanzas y diferencias. Las imágenes propuestas en esta hoja son una representación de lo que los alumnos podrían encontrar. Por ejemplo, en un juego las circunferencias pueden ser pequeñas y en otros muy grandes; en unos pueden estar una a continuación de otra, y ser circunferencias tangentes, y en otros circunscritas, etc.

4. Con los datos que has indicado, ahora piensa en ¿qué instrumentos te pueden servir para construir una circunferencia? Reflexiona sobre las siguientes alternativas:

a) Basta con un lápiz o una tiza. Porqué sí o por qué no

b) Necesito un lápiz y una regla o escuadra. Por qué sí o porqué no.

5. ¿Qué otro material te puede servir?[155] Anota el que hayas pensado y explica el porqué de sus ventajas y desventajas.

6. Construye una circunferencia con el material que has pensado e indica los pasos que hay que seguir:

Construyo una circunferencia:

---

[155] En este apartado de la actividad, el profesor orienta a que los alumnos utilicen distintos objetos o materiales para la construcción de una circunferencia, desde objetos cuya forma o base es circular y permiten copiarla (bloques lógicos, CDs, latas con la base circular, platos, etc.), hasta elementos como pitas, hilos, compás, etc., que permiten construirla de acuerdo al radio que cada uno desee. Estos objetos los alumnos los pueden encontrar en el aula.

Explico el procedimiento seguido:

____

____

____

____

____

7. ¿Necesitas hacer exactamente lo mismo para construir un círculo? ¿Te falta o sobra algo? Comparte con tus compañeros y expresa tu respuesta:

____

____

____

Anexo 3 (Circunferencia y círculo)

(Ficha para el profesor)

Elementos y Relaciones

1. En el siguiente espacio, traza una circunferencia de radio ‘libre’, es decir el que tú quieras, siempre y cuando la circunferencia no extralimite el espacio asignado[156].

2. Piensa que el espacio anterior es un plano (superficie plana). Al dibujar una circunferencia en él te das cuenta que has dividido el plano en dos zonas o regiones. ¿Puedes diferenciarlas? Comenta tus impresiones y escribe debajo tu respuesta:

3. ¿Qué significa la circunferencia respecto al plano y a las dos regiones diferenciadas?

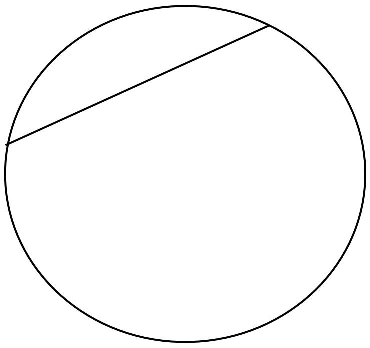
4. Recorta el dibujo que has hecho, ¿qué haría para dividir la circunferencia en dos partes iguales? ¿Qué se ha formado al dividirla en dos partes iguales? Resáltala con un lápiz. Compara esa línea con la de tus compañeros. ¿Cómo queda la circunferencia?

---

[156] El espacio asignado puede ser el que quiera el profesor, incluso se puede apoyar en una hoja A4 o A3 para que los alumnos tracen en ella una circunferencia.

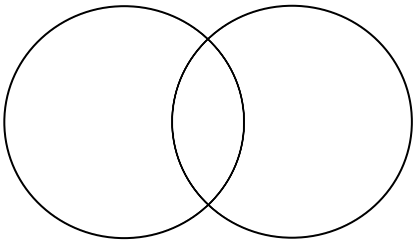
5. ¿Qué puedes decir de la línea que has resaltado?: ¿Es la única línea que puede dividir la circunferencia o el círculo de esa manera? Indica otras líneas que puedan hacerlo. ¿Cuántas puede haber?

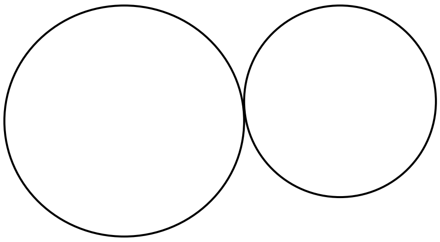
6. Dibuja otras líneas rectas o segmentos cuyos extremos estén en la circunferencia. Sigue el ejemplo que te damos a continuación ¿Qué diferencia hay entre estas líneas y la que divide a la circunferencia en dos partes iguales, llamada 'diámetro'?



7. Como te has dado cuenta, un segmento (o línea recta) toca en dos puntos a una circunferencia. Ahora piensa, ese mismo segmento, ¿puede tocar en más o menos puntos a la circunferencia? Explica tu respuesta. ¿Cómo se llama a la recta cuando toca un solo punto de la circunferencia?, ¿cuándo la toca en dos? ¿Y cuando no la toca en ningún punto?

8. Considerando la información anterior, respecto a las líneas que cortan la circunferencia, ¿cómo llamarías a las siguientes circunferencias[157]? Explica por qué:





---

[157] Igual que en el anexo anterior es recomendable que las imágenes que se presenten a los alumnos surjan de los juegos encontrados por estos en la fase de investigación.

Anexo 4 (Circunferencia y círculo)

(Ficha para el profesor)

Longitud de la Circunferencia

1. Dibuja dos circunferencias cuyos radios sean distintos[158]. Escoge los radios que desees.

Aquí dibujas tus circunferencias:

2. Compara tus circunferencias con las de un compañero, cuyas circunferencias tengan medidas distintas a las tuyas. ¿En qué medida te has de fijar para saber que son "circunferencias de distinta medida"?

____

____

3. Te has dado cuenta que las cuatro circunferencias tienen radio de distinta medida, ¿me puedes decir si su diámetro también es distinto?

____

____

4. Al ser en cada circunferencia su radio distinto, ¿el tamaño de cada circunferencia es distinto? ¿Qué tan distinto puede ser? Ordena las circunferencias de mayor a menor radio… Ordénalas ahora de mayor a menor tamaño.

Circunferencia Circunferencia 2 Circunferencia 3 Circunferencia 4

(Si no entra en este espacio, hazlo en una hoja aparte)

---

[158] El profesor se puede apoyar en juegos que los alumnos han investigado, en los que se observan circunferencias de distinto tamaño que los alumnos puedan reconocer fácilmente y copiarlas o dibujarlas.

5. Ahora, completa el siguiente cuadro para saber qué tan distinta puede ser la longitud de cada circunferencia cuando su radio varía. ¿Cómo puedes medir su longitud?

	radio	diámetro	longitud
Circunferencia 1			
Circunferencia 2			
Circunferencia 3			
Circunferencia 4			

6. ¿Qué relación guardan el radio y el diámetro de cada circunferencia con su longitud? Una es mayor que otra, ¿cuántas veces es más grande?

____

____

____

7. Te has dado cuenta que la longitud de una circunferencia es más de tres veces mayor que su diámetro pero menos de cuatro, ¿puedes precisar cuál es esa cantidad? Explica el procedimiento que has seguido[159].

____

____

____

____

____

____

8. Qué necesitas para saber cuál es la longitud de una circunferencia sin tener que medirla. ¿Puedes elaborar una fórmula que resuma tu procedimiento?

____

____

____

____

Te das cuenta, las fórmulas simplifican nuestro trabajo y nos permiten ahorrar mucho tiempo cuando queremos resolver algún problema. Basta con recordar cada elemento de la misma y comprender la relación que guardan. Nuestra fórmula para hallar la longitud de la circunferencia es:

$$L =$$

---

[159] A este apartado se llega si y sólo si el alumno (o los alumnos) ha logrado superar comprensivamente el apartado anterior en el que se orienta a los alumnos a ver cuántas veces es más grande uno que otro.

9. La fórmula me ayuda a averiguar la longitud de una circunferencia, pero ¿se puede averiguar otros datos aplicando la misma fórmula? Reflexiona la pregunta y comenta con tus compañeros. Luego, explica tu respuesta.

____

____

10. ¿Las medidas que hemos hallado son exactas o aproximadas? Explica tu respuesta.
¿Qué es una medida exacta y qué es una medida aproximada?

____

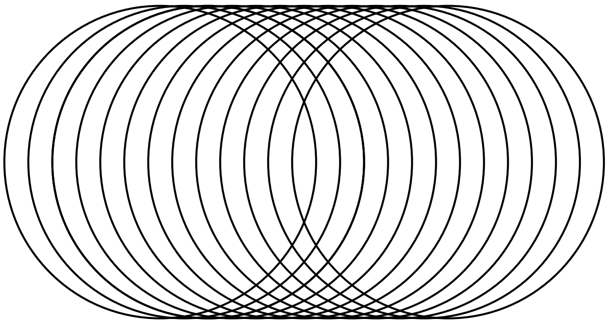
____

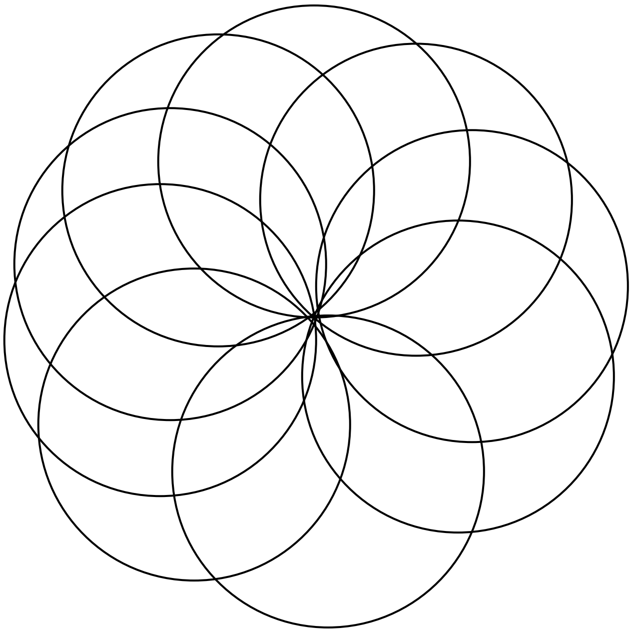
Anexo 5 (Circunferencia y círculo)

(Ficha para el profesor)

Diseños con circunferencias

1. Observa las figuras que te mostramos e intenta expresar cuál es el criterio usado para elaborarlas. Escribe tus ideas en las líneas de abajo.
2. En base al criterio elegido, reproduce dichas figuras (no te fijes en las figuras sino en tu reflexión). Utiliza las distintas circunferencias que hay en las hojas transparentes[160] y arma con ellas cada diseño.
3. Ahora, compara ambas imágenes y observa si son exactamente iguales. Comenta con tus compañeros tus reflexiones.





---

[160] Son hojas de transparencias en las que hay dibujadas distintas circunferencias para que los alumnos puedan superponerlas y armar distintas figuras.

Números Negativos[161]

Para que los números negativos cobren sentido en la enseñanza escolar se tienen que introducir de tal manera que los alumnos les den sentido, para que luego operar entre ellos sea comprensivo y producto de la situación. ¿Cómo surgen los números negativos?, ¿en qué contextos?, ¿cuándo es necesario nombrarlos?, ¿tiene sentido nombrarlos en ésa o aquella situación? Si los matemáticos de Europa tardaron mucho tiempo en aceptar los números negativos como tales, aun cuando se conocían a través de los textos árabes (en un principio se consideraban absurdos a los números negativos), ¿por qué los alumnos de primaria deben aceptarlos inmediatamente y operar con ellos de manera correcta y abstracta, cuando su pensamiento aún no lo es completamente?

Los números negativos se trabajan plenamente en el nivel secundario, sin embargo, se intentan introducir en el nivel primario, en los últimos grados como una ampliación del Sistema de numeración Decimal, a partir de situaciones en las que se habla de déficit económico, de las temperaturas, o de los pisos del ascensor, que debajo de 0 se escriben con un signo '-' delante.

¿Por qué cuesta entender la naturaleza de los números enteros y las operaciones con ellos en el aprendizaje escolar? Una de las causas es que en algún momento su enseñanza se vuelve tan abstracta y absurda para los alumnos que difícilmente comprenden lo que hacen; al no comprenderlo no reconocen si lo que han realizado es correcto o no.

Como todo conocimiento escolar, la enseñanza de los números negativos, sobre todo si es un tema nuevo, debe partir de situaciones asequibles para el alumno. ¿Podemos hablar de "tener -2 manzanas, o -2 euros"? ¿Es lo mismo decir "tengo -2 euros" que "no tengo 2 euros"?, ¿o es más adecuado decir "tengo un déficit de 2 euros, que lo represento con un signo menos delante: -2", o "me falta 2 euros, por lo que lo represento como -2" en oposición a decir me sobra 2"?

Generalmente, cuando se introduce a los alumnos en el ámbito de los números negativos, los positivos aparecen superficialmente, como un conocimiento ya adquirido. Hasta este momento, los alumnos han conocido diferentes tipos de números: naturales, decimales, fracciones; todos, sin hacer referencia, explícitamente, a su 'positividad'. Cuando aparecen los números negativos, los anteriores se 'transforman' en positivos y se les antepone el signo más… sin más. Se sabe por historia que para los hindúes[162], los números negativos tuvieron un sentido práctico: las deudas[163]. ¿Quién no las tiene? Muchas veces hemos ganado tanto como eran nuestras deudas, o quizá menos. Los números negativos expresan correctamente estas situaciones.

Retomemos ese sentido práctico para introducir los números negativos en la enseñanza primaria, así estos números cobrarán ese sentido 'práctico' en los alumnos. El docente o la maestra pueden plantear una situación a los alumnos en las que se generen deudas. Por ejemplo, el

---

[161] El tema de los números negativos aparece en el DCB de Galicia (páginas 77 y 78) y forman parte de lo que el ciudadano de hoy puede experimentar, en el mundo y en la enseñanza, de ahí que se haga necesaria su introducción en el último ciclo de educación primaria, luego que hayan consolidado los conocimientos relacionados con los números naturales y sean capaces de interactuar con ellos.

[162] Al parecer los matemáticos chinos también poseían la idea de número negativo y estaban acostumbrados a calcular con ellos usando varillas negras para representar los negativos y rojas para denotar los positivos. Sin embargo, la primera vez que aparecen de forma explícita las reglas que rigen la aritmética con los negativos es en una obra del matemático hindú Brahmagupta que data del año 628. En ella se explicaban los algoritmos para sumar, restar, multiplicar, dividir, realizar potencias y extracción de raíces con lo que llamaba "los bienes", "las deudas" y "la nada", es decir, con lo que hoy llamamos los números positivos, negativos y el cero. En Números Enteros (1990) de Gonzales, J.L; Ortiz, Alfonso; Sanz, E. y Ortiz, Antonio, y otros

[163] Gonzales, J.L; Ortiz, Alfonso; Sanz, E. y Ortiz, Antonio, y otros (1990) también afirman que los números negativo, los irracionales y los complejos tienen su origen en la práctica matemática y más concretamente, en las manipulaciones algebraicas. Fueron introducidos "ad hoc" a fin de hacer resolubles ecuaciones como: $x+2=0$; $x^2-2=0$; $x^2+2=0$. Su aparición histórica fue mucho más tardía que los números naturales, y aún tuvo que transcurrir más tiempo hasta que fueron, admitidos primero, y legitimados después al dotarlos de un fundamento teórico.

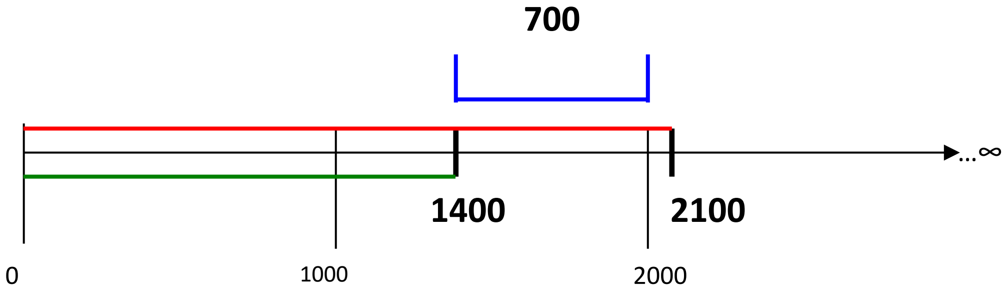
presupuesto familiar. Dada la necesidad de conocer cómo está la economía familiar y si realmente el salario de las personas está por debajo de sus necesidades básicas, los alumnos pueden realizar un trabajo de investigación al respecto. El maestro o la docente pueden hacer que, por grupos de tres alumnos, estos elijan a una persona o familia, con quien puedan realizar su investigación. Previamente a la entrevista, los alumnos averiguarán cuáles son las necesidades básicas de las personas, de acuerdo a su condición; por ejemplo, niño, adolescente, adulto, adulto mayor o anciano. Estas necesidades estarán sujetas a alimentación, vivienda, recreación, educación, etc. Los alumnos pueden hacer primero un bosquejo de lo que ellos consideran ‘necesidades básicas’ y, con la ayuda de la profesora o el docente, consolidar o reestructurar esas ideas si es necesario.

El proyecto en acción se complementa con el trabajo en las demás áreas de estudio: derechos de las personas, dieta alimenticia, espacios de diversión, etc. Una vez definido lo que cada persona necesita, el siguiente paso es conocer las distintas posibilidades que hay para acceder a esa necesidad y las condiciones de cada uno. En este apartado, los grupos pueden dividirse cada aspecto. De acuerdo a los aspectos que se van a tratar y al número de grupos formados, cada uno puede responsabilizarse por uno o dos aspectos. Así, por ejemplo, un grupo puede encargarse del aspecto ‘educación’, otro ‘vivienda’, un tercero ‘alimentación’ etc. En cada uno de ellos, los alumnos indagarán las distintas posibilidades que ofrece su ciudad para ofertar esas necesidades. Así tenemos:

- En ‘educación’, si hablamos de educación básica, las escuelas más significativas que existen, lo que se gastaría en cada una de ellas, la calidad de su enseñanza, el sistema empleado, la facilidad de acceso, etc.
- En ‘alimentación’, en qué consiste una cesta familiar, cuánto se gasta por ella semanalmente ya sea para una persona, para una familia con pocos integrantes o una con muchos integrantes.
- En ‘vestido’, qué necesita tener un armario de tal manera que las personas se sientan seguras: qué es imprescindible y qué no en cada estación, cada cuánto tiempo se debe renovar el armario, etc.
- En ‘vivienda’, cuánto cuesta un piso, una casa; en qué generalmente vive la gente, cuánto es el pago de luz, agua, teléfono, etc.
- En ‘recreación’, qué centros de entretenimiento existen en la ciudad, para niños, jóvenes y adultos, el nivel de accesibilidad a los mismos, etc.

De esta manera, podemos ir trabajando con todos los aspectos que se consideren necesarios. Una vez expuesto por cada grupo lo que investigó de cada aspecto, se procede a elaborar una entrevista en la que se pregunte sobre cada aspecto. La entrevista nos llevará a conocer, de los entrevistados, qué consideran ‘necesidades básicas’, cómo acceden a ellas y si su ingreso cubre dichas necesidades. En caso de no hacerlo, cómo cubre ese déficit económico, si es que intenta hacerlo, o la manera cómo lo resuelve. En general, su forma de vida y si ésta se la puede pagar cómodamente. Obviamente, las entrevistas serán anónimas, los alumnos no tienen obligación de entrevistar a la suya ni hacerlo público. En todo caso, sea a quien sea que decida aplicar la entrevista, ésta se mantendrá anónima.

Lo importante con esta investigación, además de conocer si los sueldos permiten satisfacer las necesidades básicas, es hacer uso de los números negativos. En este tipo de situaciones son necesarios (los números negativos), ya que la gente, en algún momento, asume deudas que tiene que pagar. En algún momento, los alumnos pueden haber intentado restar al sueldo lo que se gasta, y al no lograr un resultado en el conjunto de los números naturales buscan otro camino para expresar la deuda. Para ello, al consolidar los datos, seguramente los alumnos harán uso de dos recursos: las palabras y los números naturales (“le falta 500 euros para satisfacer todas las necesidades básicas”, “gana 1.500 € y gasta 2.000 €”, “no le alcanza en 500 euros”, "ahorra 500 €", entre otras expresiones). A partir de sus expresiones y de haber llegado a dichas conclusiones, el maestro propone a los alumnos idear una manera clara y precisa para expresar y reflejar sin confusión sus conclusiones. El maestro o la maestra pueden proponer que los alumnos intenten pensar en un gráfico, específicamente la recta numérica ya que el tema está relacionado con los números. Al indicar en cada expresión situaciones distintas, en la recta numérica deben escribirse de distinta manera y en lugares distintos, o al menos indicar de tal manera la cantidad que no produzca confusión. Por ejemplo, ante la situación: "A la persona X le falta 700 euros para llegar a fin de mes ya que lo que gana en un mes es 1.400 € y sus gastos suman 2.100 €" en ese mes", los alumnos pueden realizar el siguiente gráfico haciendo uso de la recta numérica:



Con esta idea aparece, intuitivamente, la idea de restar 2100 a 1400[164]. Por otro lado, ante la situación: "A la familia X le sobran 700 porque gana 2100 y gasta solamente 1400. Esta familia puede ahorrar los 700 que les sobra", los alumnos pueden construir la misma gráfica anterior. ¿Qué hacer ante esta doble interpretación a la misma gráfica?, ¿cómo se podría modificar para que, al mirarla, no produzca confusión? ¿Cómo representar las cantidades que me indican déficit?

Ante las cuestiones anteriores, los alumnos expresan sus opiniones e ideas grupales. Para ello, el maestro o la maestra han de crear un espacio de reflexión y puesta en común entre los alumnos. Una vez analizadas las posibles soluciones, los alumnos exponen sus ideas. ¿Cómo hacer para que ese 700 se diferencie en ambos casos? Quizá los alumnos añadan una marca a cada cifra (un asterisco o cualquier otra marca) o intenten expresarla de distinto color (rojo para el déficit y azul para el ahorro), así cuando lleve asterisco la cantidad indicada expresa pérdidas, deudas, déficit, mientras que cuando se presenta sin asterisco indica ahorro, beneficio, etc. Lo mismo sucedería con el color de seguir este camino.

En un primer momento, lo importante no es la marca que coloque cada grupo o el color que elija, sino que comprendan lo que expresa cada número[165] en cada situación. En ambos casos, para saber la diferencia lo más probable es que se haga una resta[166]; darse cuenta que una misma cifra (700) puede expresar situaciones diametralmente opuestas. El uso de la recta numérica, y su ampliación, se hace necesario para expresar esa situación, a través de preguntas como las siguientes:

- ¿Qué pasaría si no hubiera déficit ni ahorro?, ¿Si tuviéramos que colocar sólo el resultado final en la recta numérica, dónde estaría colocada dicha cifra. Por ejemplo, si gana 1.400 € y gasta 1.400 €, ¿cuál es el resultado final? ¿Y si gasta 2.100 €?
- ¿Qué nos indica 700 en el primer caso? (referido al caso presupuestal). ¿Dónde colocaríamos la cifra?

---

[164] Bajo esta idea se considera al número entero como extensión del número cardinal. La teoría que lo sustenta es la Teoría de los pares, desarrollada por Hankel, cuya base es la idea intuitiva de que los negativos hacen siempre posible la sustracción. Su admisión permite la extensión de la operación de restar, definida entre los naturales, pues concibe un número negativo como diferencia de dos naturales, con minuendo menor que sustraendo. Esta idea fue decisiva para que surja esta teoría de los enteros.

[165] El número en el primer caso puede expresar una cantidad negativa (deuda) y en el segundo, una cantidad positiva (ahorro).

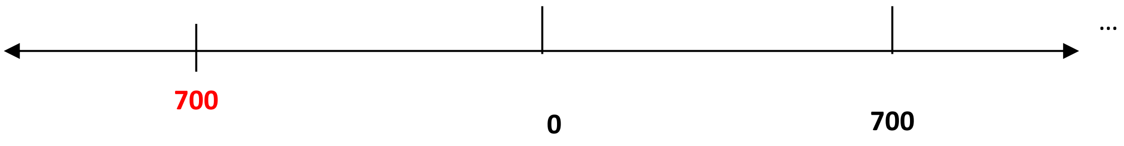
[166] En este caso concreto quizá no, porque, mentalmente, los alumnos pueden saber cuál es la diferencia, sin embargo en las situaciones que les toque investigar quizá sí tengan necesidad de aplicar directamente una resta, y sientan que no pueden hacerlo ya que nunca han experimentado, simbólicamente, en ese caso.

- ¿Qué nos indica 700 en el segundo caso? (igualmente), ¿dónde colocaríamos ese número?
- ¿Cómo expresarías gráficamente esa relación?

Los alumnos pueden ir colocando en dicha recta la cantidad hallada de acuerdo a si es déficit o no. Lo más probable es que coloquen 700, que significa ahorro, hacia la derecha porque es lo más natural. Esta situación nos permite preguntar por la otra cifra:

- Si colocamos las cantidades que indican ahorro a la derecha del 0, ya que la cantidad aumenta, ¿hacia dónde colocar las cantidades que indican déficit o deuda, mucha más disminución del capital?

A través de la pregunta anterior, el profesor o la profesora permiten que sus alumnos ideen otra forma, distinta a la previa para expresar las situaciones. El maestro o la maestra pueden orientar la actuación de sus alumnos proponiéndoles que piensen en lo que representa cada cantidad, partiendo de la cantidad positiva y cómo la representan y ubican en la recta numérica. Es importante que el maestro o la maestra permitan que los alumnos expresen la razón[167]. A partir de ello, y considerando que la otra cifra indica lo contrario, proponemos que piensen, dentro de la recta numérica, dónde la colocarían[168]. Porque es lo más natural y porque esta nueva cifra representa lo opuesto, los alumnos pueden colocar la nueva cifra a la izquierda de 0. El gráfico queda representado de la siguiente manera:



A medida que los alumnos van colocando las cantidades en la recta numérica van ‘creando’ un lado opuesto en dicha recta, integrado por números que expresan ‘lo opuesto’ a los números naturales; de esta manera ven necesario ampliar la recta, para expresar aquellas cantidades que indican aspectos contrarios, ya que para uno de los aspectos utilizamos el lado ‘conocido’ de la recta. En la ‘nueva semirrecta’, el punto de origen sigue siendo el cero, que indica nada; en el caso presupuestal, que no debe ni tiene ahorros.

El proceso anterior (colocar las cifras en sus respectivos lugares, ya sea a la derecha o izquierda del cero) debe ir acompañado por el diálogo del alumnos y la explicación de lo que diseñan. El maestro o la maestra pueden ir formulando preguntas como las siguientes:

- ¿Qué expresa ese 700 a la derecha del 0? (referido a su ubicación en la recta)
- ¿A qué distancia del cero está?
- ¿Esa distancia es la misma que hay entre cero y 700 de la izquierda? ¿Por qué?
- Si doblamos la recta por la mitad, en el cero, ¿cómo quedarían las cantidades de la izquierda respecto a las que indican los números naturales?
- ¿Dónde colocaría los números opuestos de las cantidades que faltan?
- ¿Qué me indican las cantidades que están a la izquierda del cero?

---

[167] El alumno ha de basarse en las características de los números naturales. Este es un conocimiento previo de los primeros años de escolaridad, por lo que los alumnos deben tenerlo comprendido. La naturaleza de los números naturales me indican que sirven para ordenar y para contar. Su uso tiene dos propósitos fundamentales: describir la posición de un elemento en una secuencia ordenada y especificar el tamaño de un conjunto finito. La serie numérica es una serie ordenada y cada número siguiente me indica que tiene uno más (un elemento más) que el anterior.

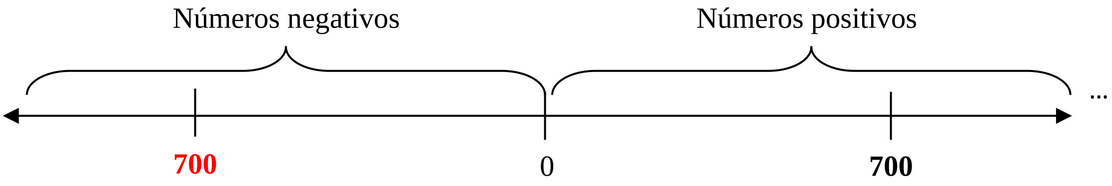
[168] Si ‘700’ me indica ahorro, una cantidad mayor que cero, la escribo hacia la derecha. Si 700 me indica deuda, una cantidad menor que cero, pues menos que cero es “tener una deuda”, la escribo hacia la izquierda.

- ¿Qué me indican las cantidades que están a la derecha?

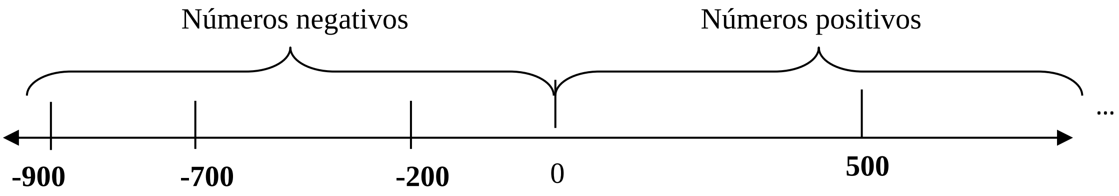
A medida que los alumnos responden a estas preguntas, van manipulando la recta numérica y su nueva ampliación, explicando cómo se va construyendo y lo que significa esa parte de la recta. Las palabras ‘positivo’ y ‘negativo’ surgen en esa explicación como una manera de diferenciar las situaciones:

- “Ahorrar es algo positivo, mientras que tener una deuda y no poder cubrirla es algo negativo”.
- “Qué te sobre dinero está bien, es positivo; mientras que te falte para cubrir tus necesidades es complicado, es negativo”.

A partir de las expresiones anteriores que pueden haber sido expresadas por los alumnos, se introduce la idea de **números positivos** como aquellos que me indican ahorro, mientras que los **números negativos** son los que hacen referencia a déficit. Inmediatamente se relacionan los números positivos con los números naturales, mientras que los negativos se pueden categorizar como un grupo nuevo de números. La recta numérica puede quedar de la siguiente manera:



De esta manera se ‘aparecen’ los números negativos[169], logrando que los alumnos sean capaces de decir qué son y en qué situaciones se pueden utilizar. Aún no hemos definido su forma de expresión, pero sí su naturaleza y ubicación en la tabla. A partir de lo anterior, ya que los números negativos indican disminución, resta, déficit, y como en matemática hay un signo para expresar que una cantidad disminuye (-), podemos colocar dicho signo delante del número indicado: -700. De esta manera, los números con el signo menos delante me indican disminución, resta, déficit: me indican que una cantidad es negativa. Lo expresamos en la recta numérica:

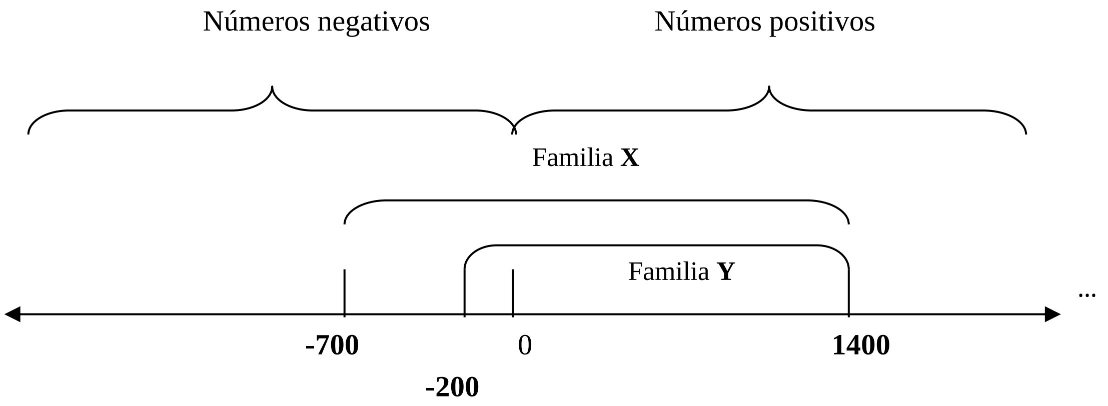


A partir de lo anterior se pueden comparar los números negativos, siempre relacionando con las situaciones que los contienen. Así por ejemplo:

- “Las familias X e Y ganan 1.400 € cada una. La familia X tienen un déficit de 700 €, expresado de la siguiente manera: -700. La familia Y tiene un déficit de 200 €, que se expresar mediante: -200. ¿Qué familia tiene mayor déficit? ¿Por qué?

---

[169] Se entiende el número negativo como el resultado de restar a un número natural otro número natural mayor, ya que al ‘restar’ lo que hay que gastar a lo que se tiene, en muchos casos se genera déficit, y por lo tanto ese primer número es mayor que el segundo.

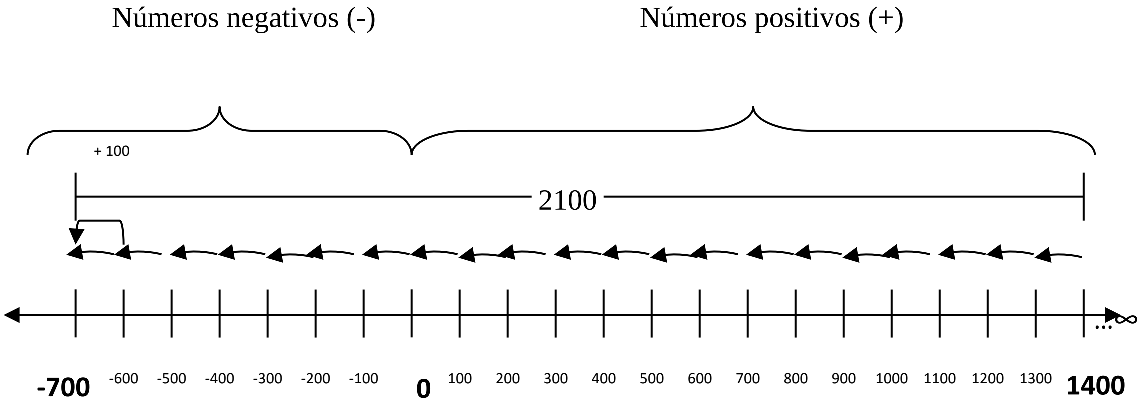


El análisis de esta situación permite a los alumnos manipular los números negativos. Relacionar con la manera cómo crecen o decrecen los números naturales lleva a afirmar que a mayor cantidad restada, menor es el número obtenido (si restamos 500 a 1400 obtenemos 900, mientras que si restamos 800 obtenemos 600); por otro lado, a medida que el número negativo se van alejando de 0, el déficit es mayor; la deuda, situándonos en el caso específico, crece. Pero el número negativo, como tal, no.

Partir, únicamente, de la situación concreta anterior para que los alumnos comprendan que -200 es mayor que -500, puede resultar difícil de entender, en primera instancia para cualquier persona, ya que si un número crece es mayor, al menos así sucede con los números naturales. Sin embargo, los números negativos son otro tipo de números, que tienen sus propias reglas o características. Se puede ampliar el trabajo anterior a partir de otras situaciones hipotéticas. Por ejemplo:

- ¿Qué pasa si la familia X no gastar 100 € en una cosa concreta?

El docente o la maestra deben permitir que los alumnos no sólo expresen numéricamente la solución, sino que la expliquen con palabras y de ser posible, que en este caso lo es, grafiquen el movimiento de su deuda, apoyándose evidentemente, en la recta numérica:

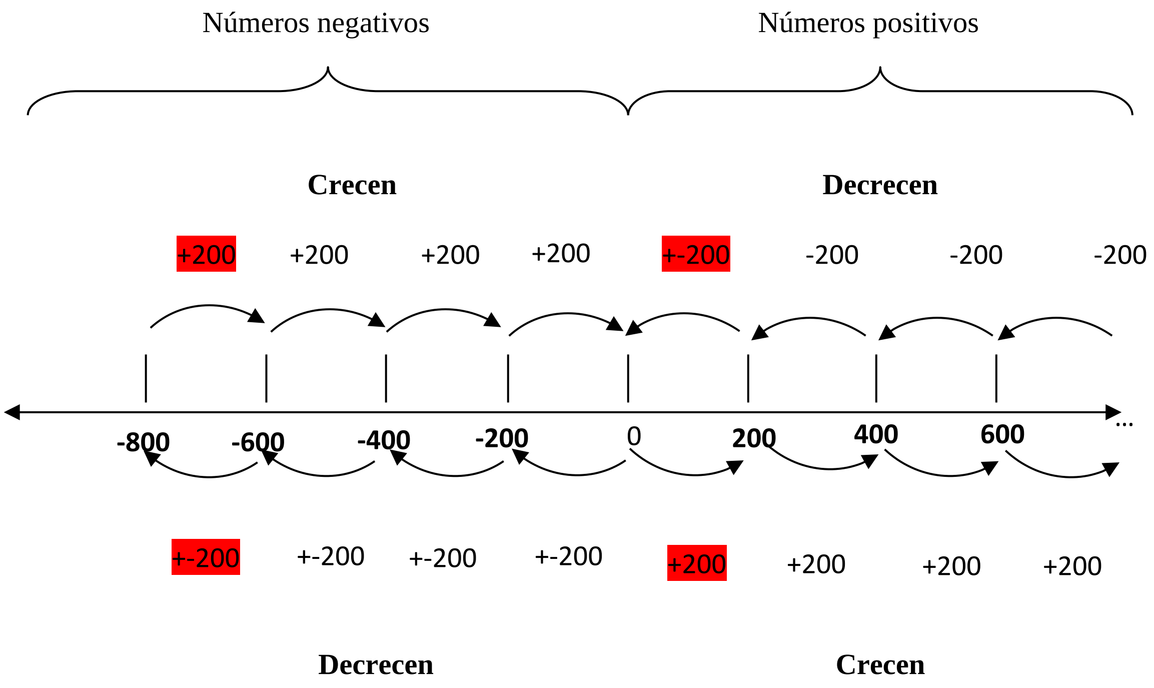


El maestro o la docente deben permitir que los alumnos expliquen, textual y simbólicamente, lo que sus alumnos están realizando. Por otro lado, el maestro debe ir consolidando lo que sus alumnos explican y expresan paso a paso y con un lenguaje más coloquial.

- Quiere decir que al no gastar 100 € en algo específico, lo que le restamos a 1.400 € es menor. Ya no restamos 2.100 €, que era lo que acumulaba, sino 2.000 €, que es lo que suma, sin el gasto de 100 €.

La idea anterior introduce en la comparación de números negativos, en saber cuándo un número negativo es mayor o menor que otro número. Es necesario que relacionemos con los pasos para la formación de números. Un ejemplo no basta para que los alumnos puedan generalizar un concepto. El profesor o la profesora deben proponer diferentes situaciones que trabajen la misma idea (al sumar, la cantidad crece) para que los alumnos puedan 'ver' cómo a medida que a los números negativos se les suma o añade una cantidad 'crecen', ya que a partir del caso concreto al natural se le resta una cantidad menor y al hacerlo el resultado es mayor.

Por otro lado, si se toma como referencia que los números negativos son lo opuesto a los números positivos o números naturales se puede reafirmar por qué a medida que los números naturales se alejan de cero crecen, mientras que los negativos decrecen; así mismo a medida que los números naturales o positivos se acercan a cero, decrecen, mientras que con los negativos sucede lo contrario: crecen. Esta idea se trabaja al final cuando se han agotado muchas situaciones como las anteriores y los alumnos se manejan fácilmente en las mismas (anexo). La siguiente gráfica sólo puede darse con el trabajo de los alumnos, de lo contrario, si es que únicamente el maestro o la maestra la exponen, como resultado de su reflexión, quizá el alumno no logre comprenderla y por lo tanto explicarla:



Para la parte inferior del gráfico, el razonamiento es a la inversa. La situación puede ser la siguiente:

- ¿Qué sucede si a la familia X, que tiene una deuda de 600 (-600) se le añade otra deuda de 200 (-200)? ¿La deuda total varía?

Efectivamente, la deuda se vuelve -800, por lo que si aumentamos otra deuda, la deuda original se transforma, aumenta. Aumentar un número negativo a otro número negativo hace que el resultado sea otro número negativo más alejado de 0.

El gráfico, y haberlo elaborado el o la alumna le ayudan a entender por qué con los números negativos sucede al contrario que con los positivos o naturales: por qué al aumentarle a los números negativos una cantidad positiva se acercan a 0 y porqué al aumentarle una cantidad negativa se alejan.

No se puede agotar el tema de la comparación de números negativos con estas ideas, sin embargo, si el alumno o la alumna han logrado expresar esas ideas a través de su trabajo y razonamiento, es más fácil lograr establecer y comprender que -800 < -600 por lo que -600 > -800. Aun cuando en un primer momento no lo expresen única y exclusivamente de manera simbólica.

A través de actividades en las que hay que añadir o quitar una cantidad, ya sea positiva o negativa a otra cantidad de las mismas condiciones, de manera indirecta y a propósito de la comparación, nos hemos ido introduciendo en el tema de suma y resta de números negativos. En un primer momento nos hemos centrado en el resultado (lo que sucede con el número final); ahora nos centraremos en el proceso: la suma y resta de números enteros. Es importante saber que si lo anterior no ha sido bien interiorizado, al menos en sus conceptos y definiciones, lo siguiente se va a construir sobre fundamento débil, por eso se recomienda que la noción de número negativo, su formación y características se trabajen hasta que los niños tengan dominio del tema.

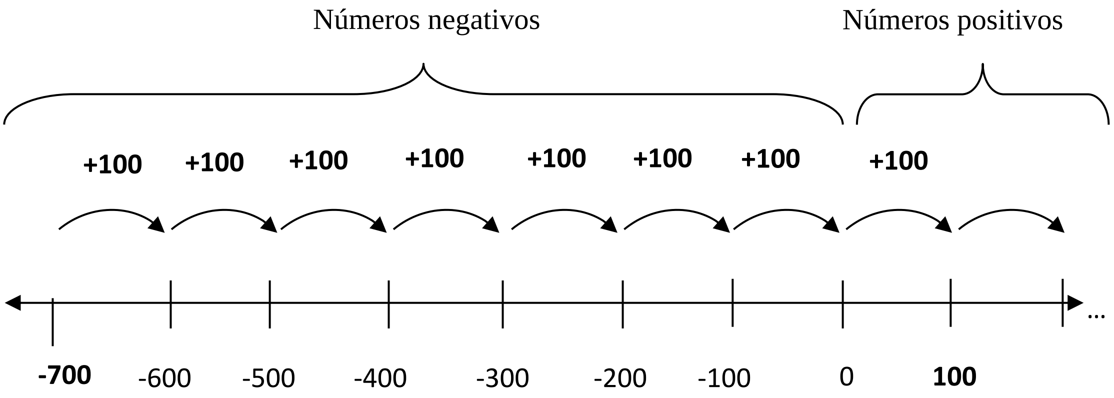
La situación de inicio, y que dio origen a los números negativos, fue el querer expresar cantidades que indicaban déficit en una economía familiar. Quizá cuando los alumnos quisieron restar a la cifra de 'ingresos', es decir lo que gana una persona o una familia mensualmente, la cifra que indicaba 'gastos', lo que gasta producto de sus necesidades, no supo cómo restarla a un número menor, que indicaba ingresos, pues es una operación que nunca ha efectuado; sin embargo las actividades anteriores han intentado ver cuánto le falta para llegar cubrir los gastos; no desde una resta, sino desde el trabajo con la recta numérica, ha sido una actividad tanto simbólica como gráfica.

Cuando los alumnos restan números naturales, que es lo que dominan, se dan cuenta que el mínimo resultado es 0. Hasta ahí lo comprenden, por eso cuando la resta no se produce en el conjunto de los números naturales, simplemente se descarta. Es lo natural, producto del conocimiento que tiene sobre numeración. Sin embargo, la actividad anterior ha permitido hacer uso de la idea de 'añadir', que es la que da origen a la suma, y cómo una 'suma de dos negativos' da como resultado otro negativo. Visualizar gráficamente esta situación de suma de negativos permite ver que hay una regla para ello: la suma de dos negativos da otro negativo que es menor que los dos anteriores. Por otro lado, la suma de una cantidad positiva a un número negativo da otro negativo siempre y cuando esa cantidad sea menor que su opuesto.

Las situaciones en las que se propone calcular cuál es la cantidad que sumada al número negativo, que representa el déficit, permite que no haya déficit, permite al alumno ver que se debe reunir la cantidad de la deuda para que ésta sea 0, es decir, si a -500, que me indica el déficit, le sumamos 500, una cantidad positiva que me indica lo que falta, el resultado es 0; de ahí que -500+500=0. En todos los casos de déficit se debe trabajar esta idea y expresarla como operación, permitiendo al alumno interpretar la misma y visualizar la actividad concreta y gráfica de manera simbólica.

Luego, se puede trabajar con sumas de números positivos mayores al opuesto del número negativo, de tal manera que 'pasemos' la barrera del 0.

- ¿Qué sucederá con la familia **X** si en lugar de reunir los 700 euros que le faltan para no tener deudas, reúne 800 euros? ¿Cómo podemos expresar esa situación?



- Al conseguir 800 €, la familia X tiene un ahorro de 100 €, pues con 700 puede pagar su deuda y además le sobra 100, entonces -700 + 800 = 100.

Hay que cuidar en estos casos que los alumnos no confundan los signos de la operación (suma o resta) con el signo del número (positivo o negativo), aunque se representen de la misma manera. Generalmente cuando los números son positivos, su signo no se coloca, pero es necesario que el maestro o la maestra pregunten a sus alumnos por la naturaleza de dichos números. Para introducirse en el mundo de los números negativos y aprender de ellos, es necesario que los alumnos lo hagan con el apoyo de las representaciones gráficas, pues de lo contrario su aprendizaje será mecánico. Luego, sólo mucho después, y en niveles o cursos superiores, ya que en estos cursos no lo consideramos necesario, se puede llegar a conocer y comprender la ley de signos en las operaciones con números negativos[170]. Recuérdese que en los casos anteriores hemos sumado a los números negativos, tanto números positivos como negativos, según sea la situación (anexos). Mediante las actividades propuestas, los alumnos podrán dar sentido a los resultados obtenidos cuando tengan que sumar o restar números negativos y positivos y negativos entre sí.

---

[170] En algún momento, cuando los alumnos tengan una idea clara de los números negativos y cómo se mueven, puede abandonar el campo de lo real para poder dar sentido a la manipulación libre de los mismos, a través de las diversas operaciones. Si en algunas de ellas pueden encontrar sentido en el contexto ordinario; en otras, no. Es difícil crear una situación concreta en la que se tenga que restar una cantidad negativa a una positiva, y la operación, en el nivel abstracto, existe. Sin embargo, estos temas no se tendrían que tratar en la enseñanza primaria, en la que únicamente, los alumnos tienen que tomar contacto con ellos para poder conocerlos e interpretarlos adecuadamente.

Anexo 1 (Números Negativos)

¿Cuánto gastamos mensualmente?

Mucho se escucha por la calle y en los diarios y telediarios que el sueldo no alcanza, que las personas han de trabajar en más de un empleo para ‘llegar’ a fin de mes; económicamente hablando, claro. Te proponemos que con dos compañeros o compañeras más averigües si esto es cierto entre la gente de tu localidad. Para ello, es necesario que investigues sobre qué necesita una persona, o una familia para vivir; cuánto se ha de gastar en ello, en término medio y si el sueldo de una persona o una familia que tú, y tus compañeros, van a escoger, alcanza. Recuerda que los datos que averigües son confidenciales, así que has de poner un pseudónimo a la persona o familia que escojan, para que no descubras su identidad.

Te anotamos algunos de los puntos que puedes investigar. Si descubres otro que es necesario, lo añades a la lista:

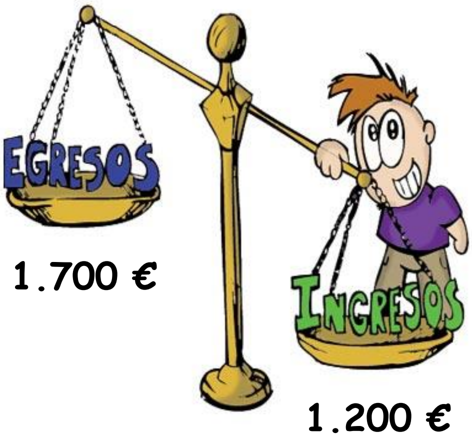
- Alimentación
- Vestido
- Vivienda
- Educación
- Recreación
- Otros, especificar:

  ____.

Te sugerimos que con los datos que has investigado, elabores una encuesta que puedes aplicar a quien va a ser tu caso específico. Necesitarás tener, también, cuánto dinero recibe, mensualmente, dicha persona o familia y cuántos trabajos desempeña.

Anexo 2 (Números negativos)

Expresamos Resultados



Seguramente tu investigación ha sido todo un éxito. Habéis logrado, tú y tus compañeros, reunir todos los datos necesarios y averiguar si en tu zona, también existe este problema que nos afecta a todos, o a la mayoría. ¿A qué conclusión han llegado? ¿La gente gasta más de lo que gana?

¿Qué haces para saber, al final, si hay más egresos o ingresos?

¿Cómo has expresado la situación que han investigado?

Observa la imagen anterior. Seguramente tú o alguno de tus compañeros han obtenido conclusiones parecidas, en las que los *gastos* de la persona o familia entrevistada excedían sus *ingresos* personales o familiares. Observa cómo fue expresada la situación de la imagen:

Familia X → 500 €

¿Qué significa la expresión anterior?

Imagínate que en algún caso, la situación se haya dado de manera opuesta, es decir, que la familia o persona entrevistada haya tenido más ingresos que gastos y la diferencia fuera 500. Lo cual queda expresado de la siguiente manera:

Familia Y → 500 €

¿Qué significa la expresión anterior?

¿Qué puedes observar entre las dos expresiones, las de la familia X y la familia Y?

¿Cómo puedes ‘arreglar’ la situación? Propón tres maneras distintas de hacerlo:

1º

2º

3º

Para distinguir dos cantidades que aparentemente se escriben igual, pues utilizamos las mismas cifras y en el mismo orden, pero que significan situaciones diferentes, es necesario que esas cantidades se distingan, ¿verdad? Las cantidades que indican déficit o situaciones de deuda deben tener algún distintivo que las diferencie de aquéllas que expresan ahorros. Intercambia tus ideas con las de tus compañeros y seleccionen cuál es la que mejor expresa lo que se quiere comunicar.

Anexo 3 (Números negativos)

Cantidades Negativas

Nos hemos dado cuenta que una misma cifra puede indicar situaciones distintas. Lo importante es saber distinguirlas. Después de analizar muchas, hemos llegado a la conclusión de que la mejor manera de hacerlo es colocándole una '-' delante. Como el signo (-) indica disminución, y como las deudas indican que hay que disminuir nuestro dinero, les ponemos la rayita delante. Así -500 y 500 significan, en nuestro caso, situaciones distintas, ¿qué situaciones indican?

-500:____

500: ____

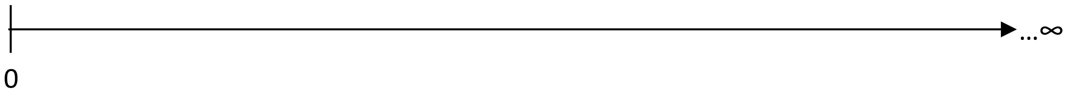
Como hemos visto en las situaciones anteriores, existen cantidades negativas, ya que indican déficit, pérdida, etc., y para escribirlas, hemos creado una nueva forma de escribir los números. Estos nuevos números, ¿qué me indican?

No podemos decir que estos nuevos números son los números naturales, aunque se escriban casi de la misma manera. ¿En qué se diferencian los números negativos de los números naturales? Escribe lo que piensas al respecto:

Números negativos	Números naturales

Los números naturales expresan cantidades mayores que__________________ ¿Qué nos expresan los números negativos?____

Intenta expresar esa idea en la siguiente recta numérica:



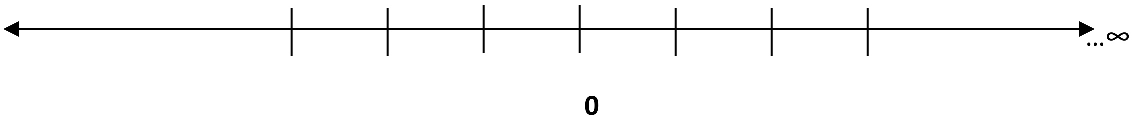
¿Dónde escribirías los números negativos?

Para escribir los números negativos es necesario ampliar la recta numérica hacia la izquierda del 0. ¿Por qué crees que debe ser así?

En la recta numérica, ¿qué nos indican las cantidades que están a la izquierda de una dada?

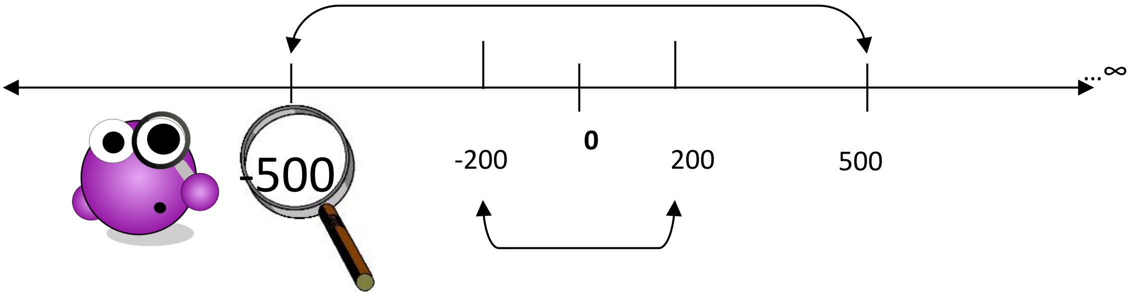
¿Qué nos indicarían las cantidades que estarían a la izquierda de 0?

Escribe los números negativos en la recta numérica:



Observando las cantidades en la recta numérica, ¿cuáles son mayores: los números negativos o los números naturales?

Céntrate en un número negativo. Seguramente hay una cifra igual en el lado de los números naturales, ¿cómo es el número negativo respecto al número natural que se escribe de la misma manera?



¿Qué distancia hay desde 0 a 500 y cuál desde 0 a -500?

Efectivamente, los números negativos son los opuestos de los números naturales. Siempre, para un número negativo existe su opuesto natural o positivo. Y viceversa: para un número positivo, existe _____________________ que es su _________________

Anexo 4 (Números negativos)

¡Cómo son los números negativos entre sí!

¿Cómo se transforma una cantidad? Imagina que tengo 500 €. ¿Cómo hago para 600 €?, ¿y para tener 1.500 €? Por el contrario, ¿qué tendría que pasar para tener 400 €?, ¿y para tener 150 €? ¿Qué ha sucedido en ambos casos? Comenta con tus compañeros y escribe tus comentarios.

____

____

____

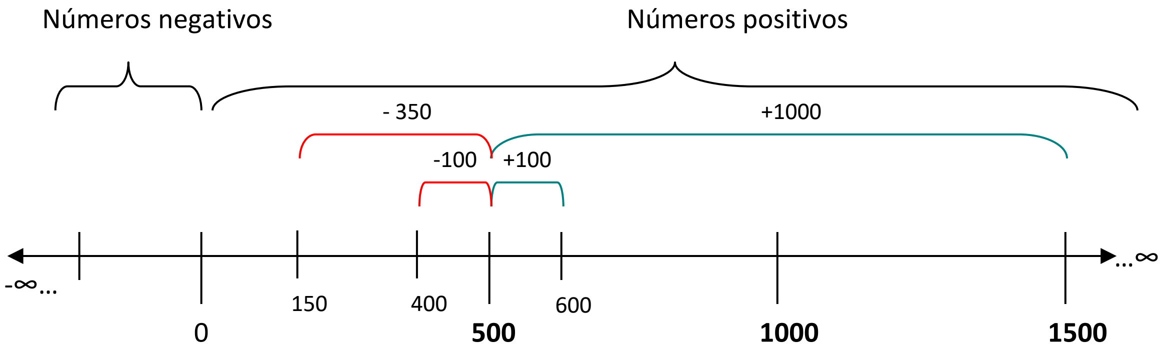
____

____

____

Una cantidad se transforma si le aumentamos o le quitamos otra cantidad. Al añadir una cantidad a otra, obtenemos una cantidad ____________________, mientras que al quitar una cantidad a otra, obtenemos una cantidad______________________ que la primera.

Observa el siguiente gráfico:



¿Qué pasa cuando añadimos cierta cantidad a otra? ¿Y qué sucede cuando quitamos o restamos una cantidad a otra? Comenta con tus compañeros y escribe lo que piensan al respecto:

____

____

____

1.500 es mayor que 500, puesto que para obtener 1.500 hemos de añadir cierta cantidad a 500. Por su parte, 600 es mayor que 500 porque____

400 es_________ que 500 ya que para obtener 400 debemos quitar cierta cantidad a 500. Así mismo, 150 también es___________ que 500 puesto que para obtener 150 hay que ___________ cierta cantidad a 500.

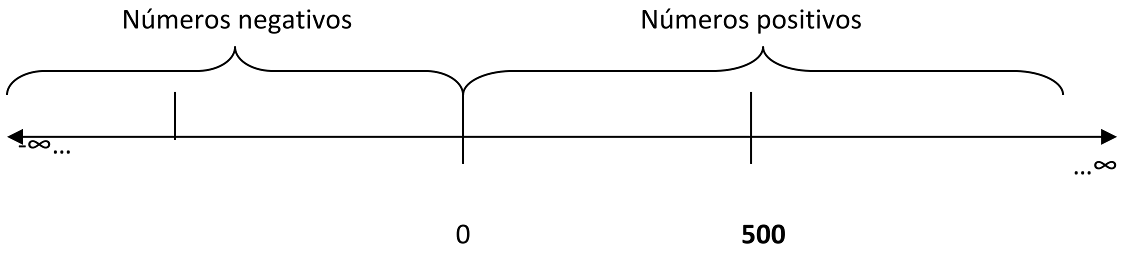
¿Qué sucede si de los 500 € que tengo, necesito gastar 600 €?, ¿y si necesito gastar 850 €? ¿La nueva cifra es mayor o menor que 500? Comenta con tus compañeros.

____

____

____

Si restamos más de lo que tenemos, la cantidad resultante es un número_______________ que la primera. Los números negativos son ______________ que los números positivos (o naturales), ya que son producto de quitar o restar al positivo una cantidad positiva mayor. Representa en la recta la actividad anterior:



Si a 500 le restamos 600 se origina un número negativo: -100, que es ___________ que 500. Si a 500 le restamos 850, se origina también una cantidad negativa: ___________. Ésta también es __________________ que 500. Ambos números negativos son menores que 500. Todos los números negativos son________________ menores que los naturales, puesto que son menores que ________________.

¿En qué circunstancias quitamos o restamos más cantidad: cuando la cantidad resultante fue -100 o -350? A una resta mayor, el número obtenido es mucho_____________. Por tanto, ¿quién es menor: -100 o -350? Piensa un poco y comparte tus razonamientos con tus compañeros. Recuerda que si más quitas, más pequeño se hace el número.

____

____

____

Observa y analiza las siguientes situaciones:

- La familia X tiene ahorrados 400 € y los ahorros de la familia Y son de 600 €. La familia X ha de realizar un gasto de 500 € y la familia Y de 700 €. ¿Cómo se transforma la economía de ambas familias?

____

____

____

- La familia **X** y la familia **Y** tienen unos ahorros de 1.700 €. La familia X quiere comprarse un coche que le cuesta 2.500 €. La familia Y quiere alquilar una casa de verano por 2.300 €. ¿Quién adquiere una mayor deuda?

____

____

____

- ¿A qué ahorros se le resta más dinero? _______________ ¿Qué cantidad negativa será menor?

____

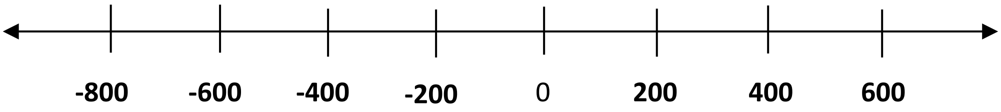
____

____

A medida que quitamos más cantidad el número negativo se va haciendo ________________ y se va alejando del ______________________. Mientras más lejos del cero, los números negativos son _________________.

Anexo 5 (Números negativos)

Añadimos cantidades a los números negativos



Vuestro trabajo ha permitido 'crear' los números negativos. Ahora sabemos cómo surgen, y sabemos que lo mejor es ubicarlos en la recta numérica, hacia la izquierda del cero porque _____

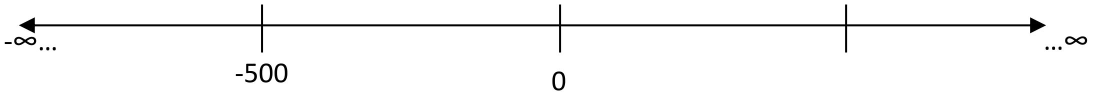
____

____

Al ir ubicando los números negativos en la recta numérica, nos damos cuenta que estos números pueden ser numerosos. ¿Qué pasa si tengo un déficit de 100 euros?, ¿dónde escribo la cantidad que me indica el déficit? Ubícalo en la recta numérica que está en la parte superior. ¿Y si tengo un déficit de 300 euros?, ¿y si el déficit es de 50 euros? Intenta ubicar en la recta numérica todas estas cantidades. Con ello, llegamos a la conclusión que entre dos números negativos siempre hay____

Piensa un poco:

"La familia **X** tienen un déficit de 500, expresado de la siguiente manera: -500 (utilizamos un número negativo). Escoge a otra familia que tenga un déficit en su presupuesto mensual. Compara ambos déficit y comenta con tus compañeros ¿quién tiene mayor déficit?, ¿por qué? Ubica en la siguiente recta el déficit de la otra familia y comenta con tus compañeros lo que sucede con los números negativos.



____

____

____

¿Qué pasa si la familia **X** logra ganar 100 euros más? ¿Qué pasaría con su déficit?

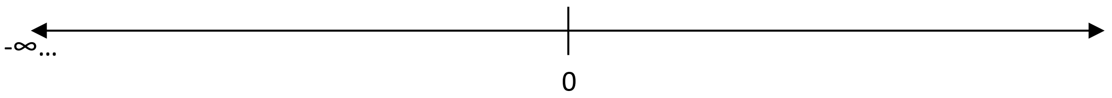
____

____

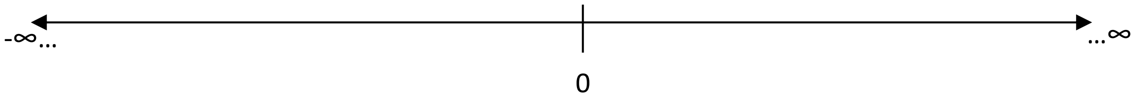
Efectivamente, su déficit disminuye. ¿Cómo representamos, en la recta numérica, ese déficit disminuido de la familia X? Represéntalo en la recta numérica anterior.

Podemos decir que al añadir a -500 la cantidad de 100 (le sumamos 100, una cantidad positiva), el déficit disminuye, quedando transformado en -400. Por lo tanto, -500+100=-400.

Imagina que cada persona entrevistada logra reunir 200 euros más a su presupuesto mensual, ¿cómo se transformaría su ahorro o déficit de ese mes? Representa cada caso en la recta numérica. Utiliza un color distinto para cada familia.



Qué pasaría si en lugar de tener la deuda o ahorro que tiene, le aparece otra deuda de 200 euros, producto de una situación que surgió del momento; recuerda que los 200 € representan una deuda, por lo que hay que escribirlos de la siguiente manera ____________________________. ¿Cómo queda transformado su deuda o ahorro hallado? Comenta con tus compañeros la transformación y, de la misma manera que en la actividad anterior, represente cada situación en una recta numérica:



Como hemos observado, al añadir una cantidad positiva o negativa a otra negativa, la cantidad se transforma. ¿Cómo se transforma en cada caso? Comenta con tus compañeros y escribe las conclusiones:

____

____

____

Al añadirles una cantidad positiva, los números negativos se acercan a_____________, mientras que al añadirles una cantidad negativa se alejan de ______________________

Representación de datos

La estadística es una ciencia matemática que se refiere a la colección, estudio e interpretación de los datos obtenidos en un estudio y se puede aplicar a una amplia variedad de disciplinas, en diferentes ámbitos. Esta ciencia se divide en dos ramas: estadística descriptiva e inferencia estadística. La primera trata sobre los métodos de recolección, descripción, visualización y resumen (numérico o gráfico) de datos, originados a partir de los fenómenos estudiados. La segunda se dedica a la generación de los modelos, inferencias y predicciones asociadas a los fenómenos en cuestión. Hoy el uso de la estadística se ha extendido más allá de sus orígenes y cualquier persona e institución se sirve de ella, lo que les ayuda a entender mejor situaciones, extraer conclusiones y tomar decisiones, antes de lanzarse a cualquier empresa. De hecho, los gráficos y cuadros estadísticos pueden formar parte de cualquier información brindada a través de los medios de comunicación o en cualquier evento. Por ello, hoy en día este tema forma parte de la enseñanza primaria con la finalidad de brindar al alumno o la alumna la capacidad de resolver y formular problemas que impliquen la representación e interpretación de gráficas y cuadros estadísticos, de acuerdo a la complejidad del caso, así como manifestar una actitud crítica y comprensiva ante las informaciones y mensajes estadísticos que difunde los medios de comunicación.

Hemos mencionado al finalizar el párrafo anterior, que los medios de comunicación e información hacen uso de gráficos y cuadros estadísticos para expresar situaciones concretas. La presentación de datos estadísticos por medio de gráficos es considerada una tarea importante en el proceso de comunicar datos. Generalmente, cuando alguien recibe entre sus manos un documento con información textual y gráfica, la vista se dirige principalmente a ésta última. En algunos casos, ayudará a entender mejor la información, en otros, no; ya que a pesar de la reconocida importancia este proceso no siempre se realiza de la mejor manera. Como dice John Tukey “un gráfico puede valer más que mil palabras, pero puede tomar muchas palabras para hacerlo”[171], en comparación con otras formas de presentación de datos, los gráficos permiten, de una mirada, comprender el comportamiento de los datos, permitiendo hacer juicios sobre la variabilidad, escala, patrones y tendencia de los datos. La ventaja de dichos gráficos es que permiten resumir una realidad de manera clara y precisa de forma que quien lo observe pueda saber de qué se trata e interpretar dicha información: es una forma de simplificar lo complejo y tedioso, permitiendo entender y retener mejor. Con la inclusión de este tema en la enseñanza matemática escolar pretendemos que el alumno y la alumna sean capaces de interpretar y representar datos estadísticos, así como iniciarse en la capacidad de predecir la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno.

Si bien un buen gráfico, y otro no tan bueno, nos dan información precisa y resumida, estos no estarían completos si no los acompaña una buena descripción que permite informar al lector y obliga a quien produce el gráfico a pensar cómo lo presenta y porqué.

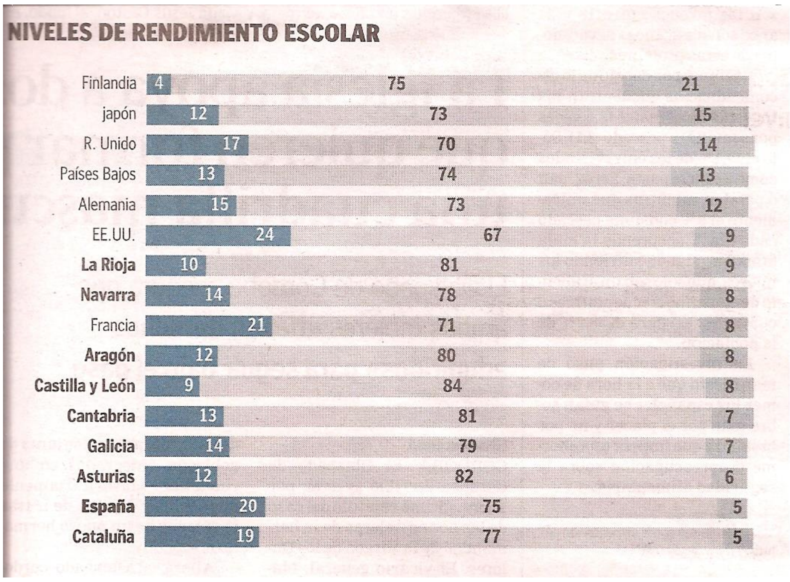
Dada la importancia de los gráficos en general, y de los estadísticos en particular, es necesario además saber cuándo utilizarlos, ya que no todo gráfico estadístico que podamos observar, es necesario. Muchas veces es mejor presentar una tabla.

Para iniciar el estudio de la estadística escolar es necesario que los docentes sepan hacia dónde encaminar a sus alumnos, y qué necesitan para ello. Lo primero sería poner en contacto a

---

[171] Jonh Tukey (1915-2000) fue un estadístico nacido en New Bedford, Massachusset que hizo muchas contribuciones en el aspecto estadístico. Se le atribuye el gráfico de caja (boxplot) que resume información utilizando cinco medidas estadísticas.

los alumnos con el tema en cuestión. El maestro debe asegurarse que la gráfica que presenta se entiende correctamente y presenta la información de manera veraz, sin confundir al lector. Cuando se presenta una gráfica solamente, se ha de observar si ésta presenta toda la información que queremos y se puede comprender con sólo mirarla; de lo contrario es mejor no presentarla, ya que no se sabe cómo interpretarla. La siguiente es una gráfica que apareció en el diario ABC, el 5 de diciembre, sin más rótulos ni explicaciones que las que se ven:



Fuente: ABC.

Sin más información, este gráfico no podría ser interpretado correctamente. Quizá sea un buen gráfico, pero sin más componentes que los que presenta poco se puede comprender; no podemos imaginar qué nos dice la información numérica, aunque podemos interpretar, entre otras cosas, que Finlandia está por encima de cualquier otro país, sólo en la columna final pues en la primera está por debajo, ¿qué significa eso?, no podemos decir más. Por otro lado, la columna central está muy pareja y Asturias está por encima. Hasta allí podemos llegar. Esta información no sirve de mucho; excepto porque se refiere al rendimiento escolar, no sabemos más. La noticia de la lectura 1, al final del texto, puede ayudar a entender el gráfico. Entre otras observaciones, a este gráfico le faltan algunos componentes: título principal, título secundario o subtítulo, descripción del gráfico, etc.[172] Identificar todos estos componentes permite interpretarlos correctamente.

Retomando el tema de la introducción, el docente puede partir de una situación concreta, actual y de interés. Por ejemplo, se puede partir de alguna noticia relacionada con el hábito lector (la información de la lectura 2 puede ser de utilidad), o con el rendimiento de los alumnos, a propósito del informe Pisa[173]. Decidiéndonos por el primer tema, el del hábito lector, y a partir de la lectura, podemos elaborar un pequeño cuestionario (anexo 1), para ser respondido por nuestros alumnos, sobre las obras que ellos leen, además de cuándo y dónde lo hacen, así indagaremos sobre sus preferencias literarias y en qué se basan. Dicho cuestionario puede pasarse antes de la lectura del texto. Después de aplicado, proponemos la lectura 2. Los alumnos realizarán una

---

[172] Si el lector quiere ver el gráfico de manera completa puede consultar el Informe español de Pisa 2006, página 42.

[173] El famoso informe Pisa muestra cómo estamos en matemática a nivel mundial en función de los países evaluados. A través de una prueba que se aplica sabemos, en general, qué países están por encima de la media y qué países por debajo; además de qué capacidades matemáticas tenemos más desarrolladas

lectura silenciosa de la misma, luego comentarán con los compañeros sobre la información que ahí se presenta y cómo se relaciona con su experiencia como lectores, y con el cuestionario que ha respondido (anexo 2). Por ejemplo las siguientes preguntas pueden ayudar al docente y a la docente a orientar el análisis y comentario de la lectura:

- ¿De qué nos habla la noticia?
- ¿Qué información nos da?[174]
- ¿Qué ideas comunica?
- ¿A quiénes se refieren esas ideas?[175]
- ¿Cómo justifica cada una de las ideas que comunica?
- ¿Cómo podemos clasificar la información que nos da?[176]
- ¿Qué pasa si la noticia obviara una de ellas? ¿Cómo cambia la información?[177]
- ¿Qué ventajas ofrece incluir dicha información?
- ¿Cómo creen que hace el autor de la noticia para saber dicha información?[178]

Luego de comentar entre ellos y con la profesora o el profesor sobre sus impresiones y opiniones, el o la docente presenta los gráficos y cuadros que se incluyen a continuación, relacionados con el tema lector, aunque no con la información de la lectura precisamente:

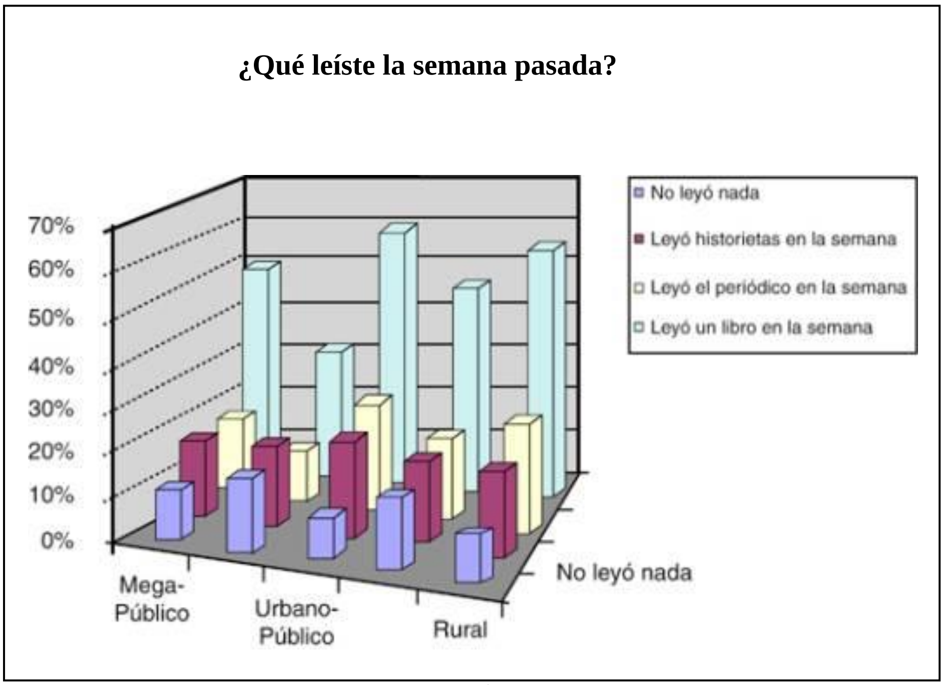


Imagen1[179]

Fuente: SEP Secretaría de Educación Pública. La formación docente y el aprendizaje de los alumnos. Presentación de Fernando Reimers, junio de 2003. http://ses4.sep.gob.mx/dg/dgespe/conf/2_reimers.htm

---

[174] Con esta pregunta nos orientamos hacia lo que es 'variable estadística' de tal manera que los alumnos identifiquen la característica o propiedad estudiada.

[175] Esta pregunta se centra en los sujetos de estudio, el maestro puede ampliarla para tratar de especificar el tema de la población/muestra dentro de ese estudio. La pregunta puede orientarse hacia indagar si toman todos los miembros de la población o una parte, etc.

[176] La pregunta se orienta hacia clasificar la información como numérico y no numérica.

[177] El maestro o la docente pueden presentar alguna parte del texto mutilado, excluyendo la información numérica, como por ejemplo, en el título: "Los niños, los que más leen en España". A partir de ello, los alumnos conversarán sobre las ventajas de precisar la información numérica y cómo cada aspecto limita la situación.

[178] Se hace referencia a la necesidad de hacer un estudio, a través, por ejemplo, de una encuesta, que pregunta sobre qué leen las personas. O a las librerías para saber qué libros son los más vendidos.

[179] La palabra 'mega' se aplica a escuelas que están ubicadas en ciudades con más de un millón de habitantes, mientras que la palabra 'urbano' se refiere a ciudades con menos de un millón de habitantes.

Porcentaje de niños que indica que realizó diversos tipos de lectura la semana anterior a la encuesta.

	Leyó un libro en la semana	Leyó historietas en la semana	Leyó el periódico en la semana	No leyó nada
Mega-Público	51%	19%	19%	13%
Mega-Privado	32%	19%	12%	17%
Urbano-Público	62%	21%	26%	10%
Urbano-Privado	50%	20%	18%	17%
Rural	60%	19%	24%	11%

Imagen 2

Fuente: SEP Secretaría de Educación Pública. La formación docente y el aprendizaje de los alumnos. Presentación de Fernando Reimers, junio de 2003. http://ses4.sep.gob.mx/dg/dgespe/conf/2_reimers.htm

La lectura del texto, de los cuadros y de las gráficas, permitirán que nuestros alumnos se introduzcan en las nociones básicas de la Estadística: población, muestra, individuo, variable; que son necesarios que los alumnos y las alumnas reconozcan para poder encontrarle sentido y ser capaces de definir lo que es y hace la estadística, como ciencia. El análisis de la gráfica y cuadro pueden ir acompañados de las siguientes preguntas dirigidas por el profesor o la profesora:

- ¿Cómo es la imagen que les he mostrado?[180]
- ¿Qué información nos muestra dicha gráfica (imagen 1)?
- ¿Qué elementos presenta?
- ¿Puedes interpretar la gráfica?
- ¿Se relaciona con la lectura que has realizado? ¿Se referirá a la misma noticia?
- ¿Y la siguiente imagen? (imagen 2)[181]
- ¿Qué información nos da?
- ¿Se parece a la anterior?
- ¿Nos da la misma información? ¿De la misma manera?

Si bien todos los alumnos pueden tener la misma lectura e imágenes, el trabajo en grupo permite el intercambio de ideas, de conocimientos, la puesta en común. Luego, la maestra o el maestro pueden llegar a un consenso de clase con las ideas en las que todos han coincidido y que se corresponde con los datos que el material ha mostrado.

La tercera imagen, que se presenta a continuación, muestra el cuadro y la gráfica cuyos datos se centran en cuántos libros lee una persona en un año. Ésta puede ser una especie de proyección ya que pregunta sobre la lectura durante un año, mientras que las anteriores se refieren

---

[180] Orientada hacia reconocer en dicha imagen un gráfico. Quizá los alumnos tengan noción de qué tipo de gráfico es ya que en cursos anteriores han aprendido aspectos de este tema.

[181] Orientada a reconocer en dicha imagen un cuadro. Lo más probable es que lo relacionen con los cuadros de doble entrada.

a lo que se leyó la semana pasada. Una vez que han analizado toda la información gráfica, numérica y textual del asunto en cuestión, relacionando cada una de ellas, se procede a compararlas simultáneamente, analizando la complementariedad de cada una respecto a la otra (cuadros y gráficas), o las ventajas que ofrece una respecto a la otra (cuadros y gráficas y éstas entre sí). Para comentar esta relación, los alumnos pueden trabajar en grupos de cinco alumnos, de tal manera que entre ellos intercambien ideas, escuchen las opiniones, generándose así una comunicación matemática productiva (anexo 3).

ESTUDIO DE OPINIÓN SOBRE
"Los hábitos de consumo escolares"

Pregunta 5: ¿Cuantos libros leen durante el año, aproximadamente, exceptuando los de texto?

A. Menos de tres
B. De tres a seis
C. Más de seis
D. No sabe / No contesta

- Muestra: población de España que tiene hijos en edad escolar o bien a los propios niños (con capacidad para responder a dichas preguntas).

RESPUESTA	PORCENTAJE	FIABILIDAD
Menos de tres	29,5%	+/- 3,44%
De 3 a 6	35,5%	+/- 3,61%
Más de 6	26,0%	+/- 3,31%
Ns / Nc	8,6%	+/- 2,11%

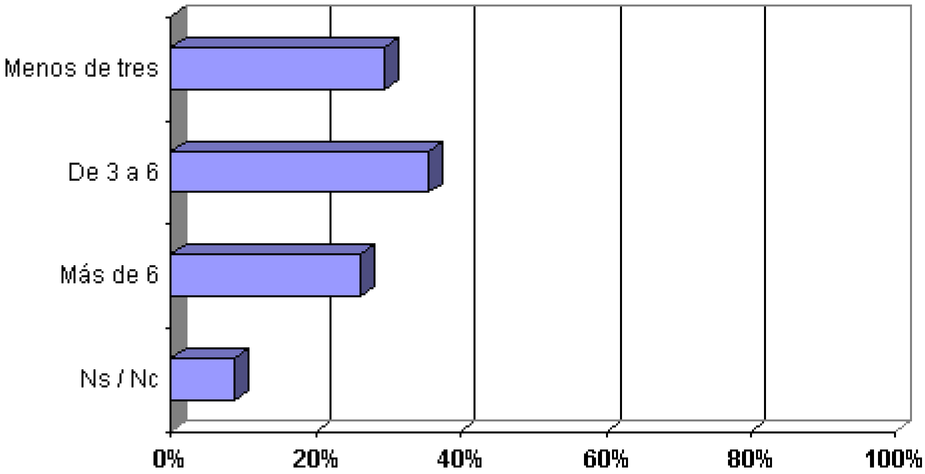


Imagen 3

Fuente: http://www.infortecnica.com/estadistica/CEC/septiembre02/escolares_septiembre02.html

Partimos del análisis de modelos sencillos, conocidos, los más difundidos y menos complicados. Es necesario empezar con unos modelos específicos de gráfico, sencillos, por ejemplo, los de barras o circulares, ya que el primer objetivo es reconocerlos como un medio de transmisión de información, analizando la misma y cómo se llega a ella: los datos que incluye, el tipo de población, la muestra, etc. Estos términos los va introduciendo el maestro o la maestra a partir del diálogo con cada grupo. Cada nuevo término será escrito en la pizarra para su reconocimiento posterior, de tal manera que los alumnos puedan identificar de qué se trata. El maestro o la docente, les puede proporcionar una ficha informativa con la información pertinente o aprovechar la información que nos da el libro de texto (anexo 4).

Luego que los alumnos se han enfrentado a este tipo de situaciones y a su forma de representación, el docente o la docente pueden mostrarles diferentes tipos de gráficas: de barra, poligonales, pictogramas y circulares, extraídas de diferentes revistas, diarios, o inventados por los mismos profesores, y que muestran información variada, para que las analicen, de acuerdo a la información que presentan y a los componentes estudiados (anexo 5). Una vez vistos diferentes tipos de gráficas mostradas por el profesor o la profesora, les puede pedir a sus alumnos que esta vez la actividad la realicen ellos, buscando de manera grupal, en los diarios, revistas, etc., una gráfica de cada tipo visto en clase y la lleven a la escuela. Una vez que cada grupo haya llevado cada tipo de gráfica, el maestro puede pedir que cada integrante coja y se reúna con el integrante de otro grupo que tenga el mismo tipo de gráfica. Una vez reunidos, intentan analizarlas exponiendo cada uno la gráfica que ha conseguido y llegando a consenso sobre las características en las que coinciden, identificándolas como un tipo de gráfica específica. El análisis está en función del tipo de información que transmiten, su estructura, la información numérica, etc.[182]

Una vez identificados los tipos de gráficas estadísticas e interpretadas correctamente, podemos pasar a que los alumnos intenten representar a través de las mismas, datos estadísticos extraídos a través de distintos medios de información. Para ello una primera actividad sería reconocer datos relacionados con la estadística en diferentes medios. Se pueden elegir los diarios por ser los más asequibles a los alumnos. Así, se les pide que extraigan de dichos medios, básicamente de los titulares, o subtitulares, cualquier información relacionada con la estadística. Por ejemplo, en el diario “Qué!” de hoy 18 de enero de 2008, se pueden observar los siguientes titulares y subtitulares:

- El precio de los pisos creció por debajo del 5% en 2007.
- En ocho de cada diez coches sólo viaja un conductor.
- El 72% de los españoles apunta tareas, pero hace el 60% de lo programado.
- 75 victorias blancas, 35 atléticas y 31 empates.

Con estos titulares, los alumnos expresan información estadística, además, el maestro orienta hacia que los alumnos interpreten dicha información. Apoyándonos de las gráficas estudiadas, podemos guiar a los alumnos para que representen lo que alguno de ellos expresa; por ejemplo, los resultados obtenidos (victoria, derrota y empate) en encuentros sostenidos entre los equipos de fútbol, de Primera División: Atlético de Madrid y Real Madrid.

Para iniciar en la representación gráfica de datos estadísticos, los deportes son un buen recurso para trabajar en ello. Como son casos en las que hay ciertas normas y situaciones que son propias de cada deporte, los docentes y las docentes pueden hacer que los alumnos se conviertan, por un día en “estadistas deportivos”. Para ello, los alumnos tendrán que reunirse en torno a un encuentro y anotar lo que sucede durante el mismo. En un partido de tenis, por ejemplo, y a propósito del Abierto de Australia se puede tomar nota sobre cuántas veces, cada jugador o jugadora logró lo siguiente: *aces*, primeros servicios, dobles falta, porcentaje ganado en el primer

---

[182] El inconveniente puede estar en el tipo de gráfica que logren reunir, ya que pueden resultar incomprensibles para el nivel del alumno, sin embargo, lo importante es reconocer en cada una qué tipo de información presentan y cómo la presenta. A groso modo se puede explicar sin entrar en detalles numéricos si estos no son comprensibles.

servicio, porcentaje ganado en el segundo servicio, puntos ganadores, errores no forzados, aproximaciones a la red, etc. En un partido de fútbol, y a propósito del derbi madrileño, se puede obtener la siguiente información: tarjetas amarillas, tarjetas rojas, posición del balón, tiros de esquina, posiciones adelantadas, faltas cometidas, goles marcados, etc. En cada uno de ellos se puede analizar por sets o tiempos, respectivamente. Lo importante es que los alumnos recojan la información por grupos y luego elaboren los cuadros y gráficas necesarias (Anexo 6).

A medida que los alumnos extraigan la información numérica de cada encuentro (de tenis o fútbol), elaboren un cuadro con ella, y planeen la mejor manera de representarla gráficamente, el profesor puede orientar qué tipo de gráficas puede utilizar para representar dicha información de tal manera que los alumnos observen sus características y las analicen, comparándolas y deduciendo qué tipo de información intenta representar cada una de ellas y cuál conviene en cada caso. Esta actividad le permitirá a los alumnos plantearse preguntas orientadas a la información que pretenden extraer, antes de comenzar el encuentro, durante su realización y al finalizar el mismo. Los datos numéricos, por otro lado le permitirán sacar porcentajes en el encuentro analizado o reuniendo todos los encuentros que se han analizado en cada grupo de clase. Las preguntas pueden ser las siguientes:

- ¿Cuántos goles se metieron en esta fecha?
- ¿En qué tiempo se metieron más goles?
- ¿Qué equipo metió más goles?
- ¿Cuántas tarjetas rojas hubo en total?
- ¿Cuántas amarillas?

Lectura 1 (Representación de datos)

FINLANDIA VUUELVE A ENCABEZAR INFORME PISA SOBRE EDUCACIÓN

Los alumnos de 15 años de Finlandia, Corea del Sur y Taiwán, los mejores a nivel mundial en ciencia, lectura y matemáticas, según el último informe PISA sobre educación, presentado hoy en París.

En total se hicieron tests a 400.000 escolares en 57 países, entre ellos los 30 de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), como parte del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) 2006. El informe se realiza cada tres años.

Finlandia ocupó el primer puesto en ciencias, con un total de 563 puntos, seguido de Hong Kong (542) y Canadá (534).

En cambio, Estados Unidos mostró una marca sorprendentemente baja, de 489 puntos, y fue superado por varios países del centro y este de Europa como República Checa, Eslovaquia, Polonia y Eslovenia.

Debido a la creciente importancia de la tecnología en las economías actuales, el estudio puso mayor énfasis que en el pasado en la capacidad de comprender y resolver problemas científicos.

Ciencia, crucial para el futuro

'Las actitudes de los escolares hacia la ciencia serán cruciales para los países', señala el informe, que añade que aunque la mayoría de los alumnos dice haber sido motivado para estudiar ciencias, sólo un pequeño número de ellos planea hacerlo.

En lectura, los que más destacaron fueron los adolescentes surcoreanos con 556 puntos, seguidos de Finlandia (547) y Hong Kong (536). Finlandia ya encabezó los estudios PISA en 2000 y 2003.

A su vez, en matemática destacaron los taiwaneses, con un puntaje de 549, ligeramente por encima de Finlandia (548) y Hong Kong y Corea del Sur (ambos con 547).

Una vez más, los estadounidenses mostraron resultados por debajo de la media, menos de 474 puntos, casi el mismo nivel que los alumnos de la Federación Rusa.

La OCDE añadió que Polonia aumentó considerablemente su rendimiento en lectura respecto a 2003, mientras Grecia y México registraron importantes mejoras en matemáticas. Sin embargo, los resultados fueron en general decepcionantes.

España: problemas educativos

España tiene problemas en materia educativa. El nivel de comprensión lectora de los alumnos de 15 años bajó de manera 'muy notable', el de matemáticas es 'ligeramente inferior' al de años anteriores y el de ciencias no ha cambiado apenas desde 2003.

Según la media ponderada en virtud del número de alumnos por país, España se sitúa en esos tres aspectos por debajo del total de los 30 países miembro de la OCDE.

El presidente del gobierno español, José Luis Rodríguez Zapatero, atribuyó el problema a que ha habido 'muchas generaciones en España con un bajo rendimiento educativo fruto del país que teníamos' y apostó por esperar a que 'haya una generación en España que haya tenido un porcentaje de educación más allá de la obligatoria igual que la europea, cuando haya habido una generación que en idiomas haya tenido lo que hace 20 años en Europa'.

La ministra de Educación, Mercedes Cabrera, admitió por su parte que existe 'un problema en lectura', pero consideró no obstante que en lo relativo a las ciencias, España no está tan mal en comparación con el resto de países analizados en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA).

Lectura 2 (Representación de datos)

Los niños entre 10 y 13 años los que más leen en España

Los menores entre 10 y 13 años se consolidan, por segundo trimestre consecutivo, como el grupo de población que más lee en España, según los datos del Barómetro de Hábitos de Lectura y Compra de Libros correspondiente al tercer trimestre de 2007.

'Kika Superbruja', de Knister, 'Harry Porter', de J. K. Rowling, y 'Las crónicas de Narnia', de C. S. Lewis, son los libros más leídos por este segmento en los últimos tres meses.

Entre los libros que más han leído en el último trimestre destaca, en el quinto puesto, un cómic, 'Mortadelo y Filemón', de Francisco Ibáñez, y dos títulos destinados al público adulto como 'El Código Da Vinci' y 'El capitán Alatriste' de Arturo Pérez Reverte.

Los títulos más leídos durante el tercer trimestre de 2007 fueron 'La catedral del mar', de Ildefonso Falcones, 'Los pilares de la tierra', de Ken Follet, que recupera el segundo lugar, 'El código Da Vinci', de Dan Brown; 'La sombra del viento', de Carlos Ruiz Zafón, seguidos por los libros de la saga de Harry Potter de J.K. Rowling. En este tercer trimestre de 2007 destaca como novedad de la lista un título nuevo, 'El niño con el pijama de rayas', de John Boyne.

Los resultados del informe, elaborado por Conecta Research & Consulting para la Federación de Gremios de Editores de España (FGEE), con el patrocinio de la Dirección General del Libro, Archivos y Bibliotecas del Ministerio de Cultura del Gobierno de España, indican que el índice de Lectura entre la población mayor de 14 años se situó en el 57% en el tercer trimestre, mientras que entre el grupo de población de entre 10 y 13 años este índice se dispara al 82,2%.

De los datos del informe se deduce además que el perfil del lector tipo en España se mantiene en mujer, joven, universitaria, que vive en núcleos urbanos, lee mayoritariamente en castellano y por entretenimiento, prefiere las novelas como género literario y adquiere sus libros en las librerías.

El Barómetro señala también entre sus conclusiones que este grupo de población supera también a los adultos en los porcentajes de lectores frecuentes -leen libros diaria o semanalmente- (69,5%) y lectores ocasionales -leen alguna vez al mes o al trimestre- (18,6%). En el segmento de población mayor de 14 años, las tasas son del 41,2 % y 15,8% respectivamente.

El Barómetro de hábitos de lectura y compra de libros es realizado trimestralmente desde el año 2000 para analizar el comportamiento de los ciudadanos españoles mayores de catorce años en materia de lectura y otros hábitos culturales. Los resultados anuales se obtienen a partir de una muestra de 16.000 individuos (8.000 correspondientes a la población general mayor de 14 años y 8.000 pertenecientes al universo de lectores).

Las mujeres, líderes en lectura

En el desglose general de los datos, el Barómetro destaca que el 43% de personas mayores de 14 años no lee nunca (26,8%) o casi nunca (16,1%). Por sexo, los datos se mantienen estables y las mujeres siguen siendo líderes con un 59,6% de lectoras frente al 54,4% de lectores. Si se observa la relación entre el hábito de lectura y la edad destaca que a mayor edad, el porcentaje de lectores es cada vez menor.

En cuanto a la relación de edad y sexo, el porcentaje de lectoras es superior al de lectores en todos los tramos de edad salvo a partir de los 65 años, en el que el porcentaje en los hombres es superior con un 30,8% frente a un 26,7% de las mujeres.

El factor más influyente en el hábito de lectura es la formación académica. El índice de lectura entre los universitarios es del 85%, 2,3 veces mayor que el porcentaje de lectores que tienen estudios primarios (37,4%).

De entre la población lectora, hay un 52,3% que ellos solos leen el 84,7% de los libros, a estos se les llamaría lectores de alta frecuencia, mientras que el otro 47,7% de lectores -lectores de baja frecuencia- leen pocos libros al año, tan solo entre 1 y 4 libros, es decir, el 15,3 % del total de libros leídos.

Un libro al mes

La media de libros leídos en el último año es de 7,9 y de 5,7 la media de horas semanales de lectura de los lectores frecuentes -leen al menos una vez a la semana-. Entre los lectores frecuentes, el número medio de libros leídos en los últimos 3 meses es de 3,5 -un libro al mes.

En cuanto al idioma, el 94,3% de los lectores prefiere leer en castellano y un 13,6% también suele leer libros en inglés. Sólo el 3,9% de los lectores lee en catalán, el 0,8% lo hace en euskera y el 0,1% en gallego.

En relación a los hábitos de compra de libros, el porcentaje de la población mayor de 14 años que compró libros en el último año es del 54,1%, tanto libros de texto como no de texto. Entre los que compraron libros, un 43,3% compró libros no de texto y un 25,6% compró libros de texto. Entre los entrevistados, hay un porcentaje del 45,8% que dice no adquirir libros.

Más lectores en las bibliotecas

El Barómetro sobre Hábitos de Lectura y Compra de Libros señala también que el porcentaje de lectores que acudió a bibliotecas subió al 32,2% en el último año, mientras que la tasa de lectores que solicitó libros en préstamo en este tipo de establecimientos o en un bibliobus fue del 34,7%.

En conclusión, y en cuanto al perfil del lector, se mantienen las tendencias de los últimos años, según las cuales leen más las mujeres que los hombres; los universitarios más que los que sólo tienen estudios primarios, a mayor edad menor población lectora; se lee mayoritariamente novela; el idioma de lectura habitual es el castellano, la motivación para leer es el entretenimiento y la mayoría compra sus libros en las librerías.

…¿Qué lees tú?

Anexo 1 (Representación de datos)

Nuestros hábitos lectores

¿Qué lees?

'Kika Superbruja'

'Harry Porter'

'Las crónicas de Narnia'

'Mortadelo y Filemón',

'El capitán Alatriste'

'El niño con el pijama de rayas'

Otra obra: ____

¿Dónde de lees frecuentemente?

En la escuela

En la biblioteca

En mi casa

En el parque

En el autobús

Otro lugar: ____

¿Cuándo lees?

Durante todo el año (casi a diario)

Sólo en vacaciones

De vez en cuando (por temporadas)

Sólo cuando encuentro un buen libro

Otro: ____

Anexo 2 (Representación de datos)

Qué opinas sobre la siguiente afirmación:

“Los niños entre 10 y 13 años los que más leen en España”

¿Qué hay de vosotros? ¿Sois de los que más leéis? Intercambia tus ideas con tus compañeros y escriban vuestras conclusiones:

Lee la información que te da tu maestra o maestro. Lee la información que le da tu maestro o maestra sobre la idea anterior. Esta es una noticia que se puede leer en “elconfidencial.com”. ¿Qué opinas al respecto? Comenta con tus compañeros:

Volvamos a la noticia, ¿de qué nos habla?

¿Qué información nos da?

¿Qué ideas comunica?

¿A quiénes se refieren esas ideas?

¿Crees que es importante que mencione a quiénes se refieren las ideas?

¿Cómo crees que los informantes han llegado a esas conclusiones? ¿En qué hechos se basa?

¿Cómo podemos clasificar la información que nos da?

¿Qué pasaría si la noticia obviara una de ellas? ¿Cómo cambia la información?

¿Qué ventajas ofrece incluir dicha información?

¿Cómo creen que hace el autor de la noticia para saber dicha información?

Anexo 3 (Representación de datos)

Observa las siguientes imágenes:

¿Qué leíste la semana pasada?

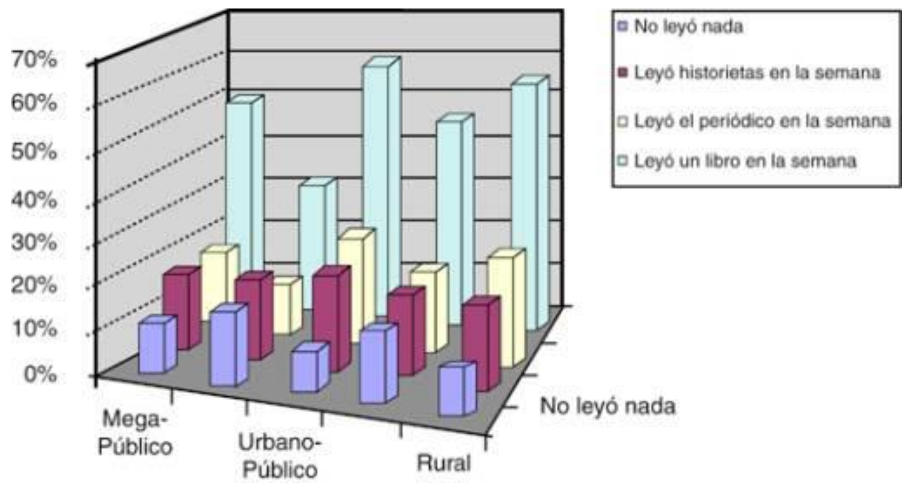


Imagen1

Fuente: SEP Secretaría de Educación Pública. La formación docente y el aprendizaje de los alumnos. Presentación de Fernando Reimers, junio de 2003. http://ses4.sep.gob.mx/dg/dgespe/conf/2_reimers.htm

Porcentaje de niños que indica que realizó diversos tipos de lectura la semana anterior a la encuesta.

	Leyó un libro en la semana	Leyó historietas en la semana	Leyó el periódico en la semana	No leyó nada
Mega-Público	51%	19%	19%	13%
Mega-Privado	32%	19%	12%	17%
Urbano-Público	62%	21%	26%	10%
Urbano-Privado	50%	20%	18%	17%
Rural	60%	19%	24%	11%

Imagen 2

Fuente: SEP Secretaría de Educación Pública. La formación docente y el aprendizaje de los alumnos. Presentación de Fernando Reimers, junio de 2003. http://ses4.sep.gob.mx/dg/dgespe/conf/2_reimers.htm

¿Crees que tienen relación con la noticia que has leído? ¿Qué relación pueden tener?

¿Cómo son las imágenes que les han mostrado?

¿Qué información aporta?

¿Cómo nos presenta la información?

¿La presenta de la misma manera que la presenta la noticia que has leído? ¿En qué se diferencian ambas formas?

¿Puedes interpretar la gráfica?

Las dos imágenes entre sí, ¿tienen relación?, ¿presentan la misma información?, ¿los mismos datos? ¿Por qué son diferentes? Comenta con tus compañeros y escribe tus impresiones.

Hábitos de consumo lector

La imagen que te presentamos a continuación forma parte de un estudio de opinión sobre los hábitos de consumo lector que se aplicó a los padres españoles que tienen hijos en edad escolar o bien a los propios hijos con capacidad para responder a las preguntas que se les planteaba. La imagen sólo se refiere a la pregunta 5 sobre cuántos libros leen durante un año, sin incluir los libros de texto. Observa el cuadro y la gráfica respectiva y comenta con tus compañeros. ¿En qué grupo te incluirías?

RESPUESTA	PORCENTAJE	FIABILIDAD
Menos de tres	29,5%	+/- 3,44%
De 3 a 6	35,5%	+/- 3,61%
Más de 6	26,0%	+/- 3,31%
Ns / Nc	8,6%	+/- 2,11%

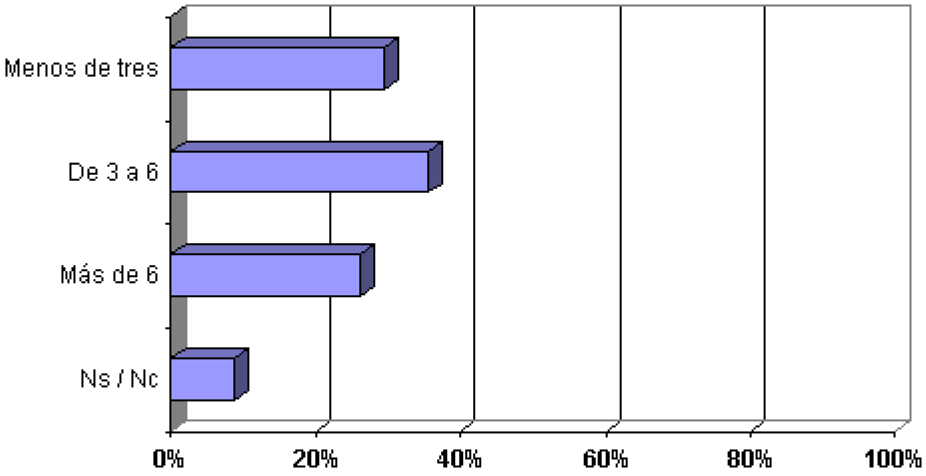


Imagen 3

Fuente: http://www.infortecnica.com/estadistica/CEC/septiembre02/escolares_septiembre02.html

¿Cómo presentan la información estas imágenes?

¿Las gráficas presentadas son iguales o diferentes? ¿En qué se parecen y en qué no?

____
____
____

Cada una de las gráficas analizadas nos da información específica que ha sido obtenida a través de estudios concretos realizados. Por ejemplo esta última sobre____________________ y la anterior se refiere a____

Para realizar con certeza y precisión estos estudios, en los que hay que saber qué queremos averiguar y a quiénes queremos preguntar la gente recurre a la Estadística.

La estadística es una ciencia matemática que se encarga de la colección, estudio e interpretación de los datos obtenidos en un estudio concreto en cualquier ámbito de la vida cotidiana: educación, vivienda, economía, etc. El cuestionario que tú has respondido puede formar parte de un estudio estadístico, ¿cómo crees que se llamaría dicho estudio?

____

En los estudios estadísticos siempre hay unos datos que hay que tener en cuenta. Estos datos están relacionados con:

- Lo que se va a estudiar
- A quiénes vamos a estudiar
- Cuántas personas necesitamos para nuestro estudio
- Qué puede influir en nuestro estudio

Para poder entenderse, en Estadística, cada uno de estos datos tiene un nombre específico: variable independiente, variable dependiente, población, muestra, entre otros. Investiga a qué se refieren cada uno de estos términos estadísticos.

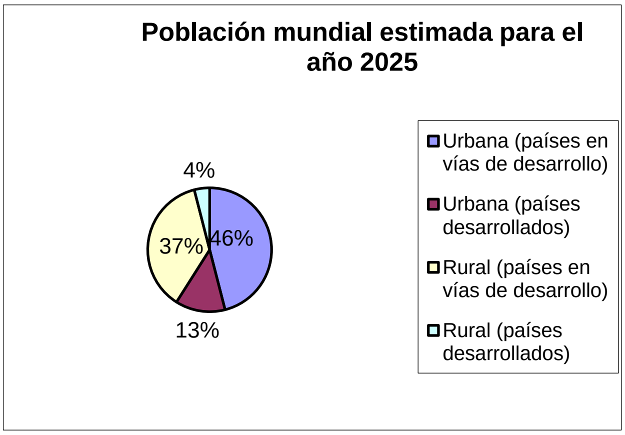
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Por lo tanto, la estadística nos permite____
____
____
____

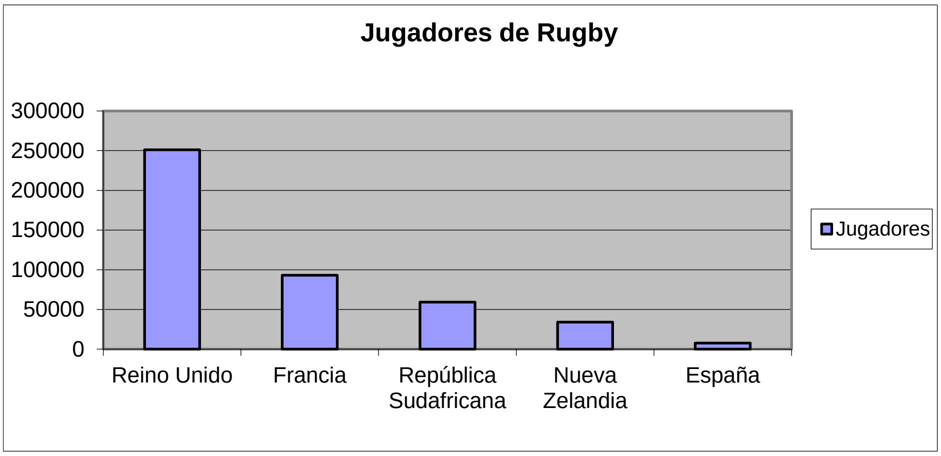
Anexo 5 (Representación de datos)

Gráficas estadísticas

Observa las siguientes gráficas estadísticas:



Fuente: kalipedia. Presentar la información. Gráficos y tablas.



Fuente: kalipedia. Presentar la información. Gráficos y tablas

¿Dónde se juega el mejor campeonato de fútbol?

Fuente: http://www.udd.cl/prontus_docencia/site/artic/20060629/pags/20060629111832.html

Cada una de estas gráficas te aporta información específica, comenta con tus compañeros sobre la información que presentan.

____

____

____

¿Cómo es cada tipo de gráfica? ¿Qué características tiene? ¿Cómo presentan los datos? Comenta con tus compañeros.

____

____

____

Cada una de estas gráficas son diferentes y tienen nombre distinto: gráfica de barras, gráfica de sectores o circulares e histogramas. ¿Cuál es cada uno? ¿Cuál es su principal diferencia? Intercambia ideas con tus compañeros y anoten en el siguiente cuadro la conclusión final.

Gráfica de barras	Gráfica de sectores	Histogramas

Junto con tu grupo, busquen en revistas, diarios, internet, etc. un gráfico de cada tipo y tráelo a clase.

Anexo 6 (Representación de datos)

Creamos gráficos estadísticos

¡Serás estadista deportivo por un día!

En el próximo encuentro de liga, vas a escoger uno de los encuentros, el que más te guste y vas a estar presente en él, no importa si es en el mismo estadio o por televisión. Además de disfrutar del encuentro tienes que estar atento y ver, con ojo estadista qué es lo que ocurre en él. Anotarás cada hecho que observes. Trabaja con dos compañeros más, así pueden organizarse de la mejor manera. **¡Suerte!**

Ordena todas tus anotaciones en un cuadro. Este cuadro te permitirá organizar mejor la información numérica que has anotado.

Luego, construye distintas gráficas estadísticas con la información que has obtenido. Preséntenlas a sus compañeros y comenten sus impresiones.

Compara tu trabajo con el de otro grupo que haya escogido el mismo encuentro que el tuyo. Comenten sus trabajos ¿Escogieron los mismo gráficos? ¿Representan correctamente la información que pretenden? ¿Puede otro gráfico representarla mejor?

ANEXO B: Hojas de Aplicación de los alumnos

Fracciones: Operaciones

Nombre: _________________________________ Curso: _______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Qué significa operar con fracciones?

2. ¿Crees que saber operar con números naturales te es útil para poder operar con fracciones? ¿Por qué?

3. ¿Qué diferencias encuentras entre operar con números naturales y operar con fracciones?

Fracciones: Operaciones 2

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Cómo harías para sumar dos fracciones? Explica por qué y escribe un ejemplo.

2. ¿De qué otra manera podrías sumar dos fracciones?

3. ¿Por qué al sumar fracciones homogéneas, el resultado es una fracción con el mismo denominador que las fracciones que has sumado?

Fracciones: Operaciones 3

Nombre: __________________________________ Curso: _______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Qué relación hay entre el denominador que resulta de sumar dos fracciones heterogéneas y los denominadores de las fracciones que has sumado? Explica tu respuesta.

2. ¿Qué relación hay entre fracción y porcentaje?

3. Si sumas dos fracciones propias, ¿qué tipo de fracción puede ser el resultado? ¿Por qué?

4. ¿Crees que hay alguna diferencia hay entre multiplicar números naturales y multiplicar fracciones? ¿Por qué?

Fracciones: Operaciones 4

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Qué significa "un medio entre dos"? Representa dicha expresión de manera gráfica.

2. ¿Cuánto es $\frac{1}{2}$: 2?

3. ¿Cuánto es los 5/7 de la unidad? ¿Cuánto es los 5/7 de 35? ¿Hay alguna diferencia entre las dos soluciones? Explica.

4. Realiza la siguiente operación: 2/3 + $\frac{1}{2}$ – 4/6 + $\frac{3}{4}$ =

Porcentajes 1

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Qué son los porcentajes?

2. ¿Qué usos se les da a los porcentajes?

3. ¿En qué situaciones se aplican los porcentajes?

4. ¿Qué porcentaje te descuentan si:

a) de 50€ te rebajan 25€
b) de 100€ te rebajan 20€
c) de 40€ te rebajan 4€
d) de 60€ te rebajan 15€
e) de 50€ te rebajan 35€
f) de 90€ te rebajan 27€
g) de 120€ te rebajan 72€
h) de 80€ te rebajan 60€
i) de 200€ te rebajan 80€

Explica qué has hecho, en cada caso, para averiguarlo. Explica tu respuesta.

Porcentajes 2

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Cómo puedes hallar el porcentaje de 'algo'? ¿Qué puede ser ese 'algo'? Escribe tres ejemplos distintos.

2. ¿A cuánto equivale el 50% de una cantidad? ¿Y el 10%?

3. ¿Crees que pueden haber porcentajes mayores que 100%? ¿En qué situaciones?

4. ¿Qué es mayor: 50% o 70%? ¿Por qué?

5. ¿Puede ser mayor el 50% que el 70%? Explica.

Porcentajes 3

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. Si me descuentan el 60% del precio de un pantalón y el 50% del precio de un jersey, ¿puedo saber qué porcentaje total me han descontado por las dos prendas? ¿Por qué?

2. ¿Crees que los porcentajes se podrían escribir en forma de número decimal, por ejemplo: 50,5%? ¿Por qué?

3. Si por no pagar en la fecha indicada la cuota del club, a María le recargan el 10%, ¿cuánto tendría que pagar? Explica tu respuesta con un ejemplo.

4. ¿Cómo puedes expresar, en forma de porcentaje la siguiente expresión: "subió el doble del precio actual"?

SMD 1

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

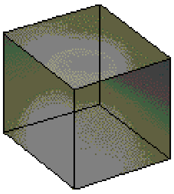
¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Qué quiere decir SMD, qué significa y para qué sirve?

2. ¿Qué pasaría si no conocieras o no existiera un SMD?

3. ¿Qué características puedes averiguar de los siguientes objetos que sea a través del SMD y por qué? Enumera cada una y explica cómo lo harías.

Característica	¿Cómo lo haría?



Característica	¿Cómo lo haría?

4. ¿Qué características de dichos objetos no puedes averiguar a través del SMD? ¿Por qué?

SMD 2

Nombre: ______________________________ Curso: _____________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Qué diferencia hay entre longitud, superficie y volumen?

2. ¿Qué relación hay entre longitud, capacidad y masa?

3. Para medir, ¿qué necesitas?

4. ¿Cómo está expresada la siguiente medida: 654'57Dl? ¿Cómo la expresarías de otra forma? Explica tu respuesta.

SMD 3

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿En qué casos utilizarías la forma compleja para indicar una medida? ¿cuándo utilizarías la forma incompleja?

2. ¿Qué significa que una medida esté expresada de manera compleja?

3. ¿Qué me puedes decir de las siguientes medidas: 7Km^2 y 7 000 000 m^2?

4. ¿Cómo está expresada la siguiente medida: 3Kg 67Hg? ¿Cómo la expresarías de otra forma? Explica tu respuesta.

Matemáticas Escolares 1

Nombre: _________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. Haz una lista de dos problemas matemáticos distintos, que te haya planteado tu profesor/a en clase, sobre:

   a) Operaciones con fracciones:

   b) Porcentajes:

   c) SMD:

2. ¿Por qué son problemas los ejemplos anteriores?

3. ¿Piensas que un niño/a que sepa sumar dos o más fracciones homogéneas, podría sumar dos fracciones heterogéneas, si aún no conoce ninguna forma (método) de hacerlo? Explica tu respuesta.

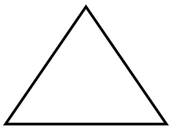
Matemáticas Escolares 2

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. ¿Piensas que una niña y/o niño que no conoce ninguna operación concreta (fórmula) para hallar la superficie de un rectángulo, puede descubrir cuánto mide la superficie de ese rectángulo? Explica tu respuesta.

2. Halla la superficie del siguiente triángulo. Explica cómo lo has hecho.



3. ¿Cómo aprendiste a hallar el volumen de los objetos?

Matemáticas Escolares 3

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar antes de responder!!!

1. Escribe algunos ejemplos de problemas matemáticos que se te pueden presentar, en el día a día, en:

a) la escuela:

b) tu casa:

c) la calle:

2. ¿Cómo son las matemáticas para ti? ¿Por qué?

3. ¿Qué son las matemáticas para ti?

4. ¿Cómo aprendes matemáticas?

Piensa, resuelve y responde

Nombre: ______________________________ Curso: _________________

¡¡¡Recuerda que tienes que pensar, antes de responder!!!

1. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se necesitan para envasar 600 litros de refresco? Indica cómo harías para saberlo y explica tu respuesta.

2. En un centro educativo de 800 alumnos aprueban el curso en junio 425 alumnos y en septiembre 175. Calcula el porcentaje total de aprobados y explica porqué eliges ese procedimiento.

3. Se quiere pasar de un depósito a otro siete litros de agua y solo disponemos de dos jarras: una de 3 litros y otra de 5 litros (ni los depósitos ni las jarras no son graduados). ¿Cómo pasarías, exactamente, siete litros de un depósito a otro?

Medida del Tiempo

Nombre:_______________________________ Curso: __________________________

Responde y resuelve:

1. ¿Qué necesitas para medir el tiempo? ¿Por qué?
2. ¿Qué unidades de tiempo conoces? ¿En qué se diferencia cada una?
3. Para pasar de un siglo a otro, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir? ¿Por qué?
4. En 98675 segundos hay .....h ......m ......s. Indica cómo lo has averiguado.
5. ¿Crees que puede haber una forma distinta a la que empleaste anteriormente para pasar de expresiones incomplejas a complejas? Explica.
6. ¿Crees que se puede dividir un tiempo expresado en horas, minutos y segundos? Cómo lo harías y por qué.

La hora, los minutos y los segundos

Completa los espacios con la palabra adecuada y responde las preguntas:

1. La esfera del reloj está dividida en 12 partes .... y éstas a su vez se dividen en cinco partes .... La esfera del reloj se divide así en .... partes .... en total.

2. Cada una de esas 12 partes indica una ....

   a) ¿Podrías medir dicha parte?

   b) ¿Cómo harías para medir cada parte y cómo expresarías su medida? Explica por qué.

3. Cada parte más pequeña indica.......................................

   a) ¿Cuánto mediría cada una de esas partes pequeñas?

   b) ¿Cómo lo averiguarías?

4. Durante una hora, las manecillas del reloj se mueven a distinta velocidad. ¿Qué manecilla recorre una mayor amplitud? Explica por qué.

Medidas de Superficie

Nombre:__________________________Curso: _____________________

Piensa y responde:

1. ¿Qué es una superficie?
2. ¿Cuál es la superficie de una cancha de tenis?
3. ¿Cómo puedes medir una superficie?
4. ¿Qué unidades de superficie conoces? Escribe algunos ejemplos.
5. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las unidades de superficie que conoces?
6. ¿Es lo mismo "superficie" y "perímetro"? Escribe en qué se parecen y en qué se diferencian.

Se parecen en...	Se diferencian en...

7. ¿Qué formas puede tener un terreno de diez metros cuadrados de superficie? Dibuja y explica tu respuesta.

8. ¿Qué diferencia hay entre longitud, superficie y volumen?

Longitud	Superficie	Volumen

9. ¿En qué se diferencian las unidades de longitud y las unidades de superficie?

Unidades de longitud	Unidades de superficie

10. Escribe tres ejemplos de objetos en los que prevalezca:

Una sola dimensión	Únicamente dos dimensiones	Tres dimensiones

11. ¿Qué es más grande: el decímetro cuadrado o el metro cuadrado? ¿Por qué?

ANEXO C: Sesiones observadas y analizadas

Caso 1

Sesión 1/ Caso 1

Miércoles, 13 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

El profesor hace un repaso de la clase anterior sobre las fracciones, recordando cuáles son las interpretaciones que se les da. Tres interpretaciones se han trabajado, y en el siguiente orden: la fracción como ‘partir’ (repartir), como dividir y como doble operación: $\frac{\times}{\div}$, en la que el numerador multiplica y el denominador, divide. El profesor pregunta por cada interpretación y las ejemplifica con casos específicos (en los que hay que operar), con intervención de los alumnos. Todo a manera de resumen.

A continuación se les propone una hoja de actividades para que los alumnos resuelvan (Ficha de trabajo para el alumno 1: La fracción como operador). La hoja tiene dos tipos de actividades: una gráfica y otra simbólica. En la primera hay cuatro casos que expresan fracción de un número; el primero está resuelto, es decir, se presenta, además de la expresión, la gráfica que la representa. En esta actividad se propone a los alumnos graficar y hallar a cuánto equivale la fracción de un número específico a partir de una actividad modelo. El profesor pide a los alumnos que se centren en el primer *ejercicio*[183] y lean lo que dice.

Los alumnos realizarán el trabajo de manera individual. El profesor pregunta: ¿qué observan en la gráfica? Generándose el siguiente diálogo:

Profesor: ¿Qué observan en la gráfica?

Alumnos[184]: Veintiún triángulos

Profesor: ¿Qué más?

Eduardo: Un séptimo de veintiuno es igual a tres

Profesor: ¿A qué se referirá veintiuno?

Enrique: A la cantidad de triángulos

Profesor: ¿Y un séptimo?

Eduardo: A tres

Profesor: Veintiuno es la cantidad que me indica (refiriéndose al total), ¿cómo están distribuidos esos triángulos?

Eduardo: En siete grupos

Profesor: Veamos los veintiún triángulos como un solo conjunto, un solo grupo, un grupo de veintiún triángulos (El profesor dibuja en el encerado los veintiún

---

[183] Palabra textual del docente.

[184] Cuando escribimos alumnos, nos referimos a varios en la clase, aunque no todos.

triángulos y los encierra en un rectángulo). Este conjunto está dividido en partes. ¿En cuántas partes están divididos los veintiún triángulos? Observen su ficha

Alumnos: Tres

Profesor: Escuchen bien,… ¿cuántas *partes* hay? (señalando cada grupo)

Alumnos: Siete

Profesor: Cada división representa una parte. ¿Cuántas partes están pintadas?

Alumnos: Una

Profesor: ¿Cuántos triángulos hay en esa parte?

Alumnos: Tres

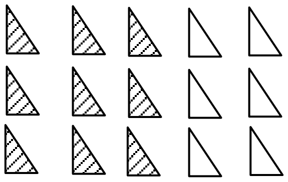
Profesor: Una parte de siete se lee, en fracción, un séptimo. En este caso, un séptimo de un conjunto de veintiuno triángulos. ¿Cuántos triángulos hay en un séptimo de veintiuno?

Alumnos: Tres

Profesor: Entonces, un séptimo de veintiuno es igual a tres, que es lo que se indica en la ficha. ¿Han comprendido?

Alumnos: Sí.

El profesor propone hacer la siguiente actividad de la ficha que sin embargo modifica ya que prefiere trabajar con fracciones propias y no con impropias como se propone en la actividad[185]. Después de un tiempo en el que el profesor ha observado que todos o la mayoría de los alumnos había desarrollado la actividad, el profesor le pide a Eduardo que salga al encerado y grafique lo que ha hecho en su folio. El alumno dibuja quince triángulos distribuidos equitativamente en cinco columnas[186]. Luego, 'pinta' las tres primeras columnas, es decir nueve triángulos. Su gráfica queda como se muestra a continuación:



El profesor le pide a Eduardo que explique, con palabras, lo que ha hecho. El alumno expresa: "de cada cinco (triángulos) se coge tres". El profesor pone signos de interrogación a esa expresión: "¿Cómo que 'de cada cinco se coge tres'?", y añade: "Explica lo que has hecho."

---

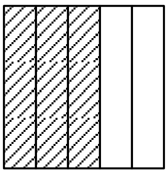
[185] En realidad hubo un error ya que lo que se planteaba era 3/5 de 15 y no 5/3 de 15 como aparece en la ficha.

[186] El alumno sigue el planteamiento de la primera actividad en la que se trabaja con triángulos.

Eduardo queda en silencio, sin encontrar otra manera de explicarlo y Pablo intenta responder diciendo: “dividir cada triángulo en cinco partes iguales y coger tres”.

El profesor vuelve a insistir y pregunta a Eduardo porqué hace eso. El profesor especifica la pregunta: “¿Por qué has pintado nueve y no otra cantidad?”. El alumno responde: “porque hay que dividir entre cinco y coger tres. Da nueve”. El profesor pregunta “¿Qué dividimos entre cinco?” El alumno responde: “quince”. El profesor afirma: “entonces, tres quintos de quince es igual a nueve”. Esta expresión se escribe en la pizarra

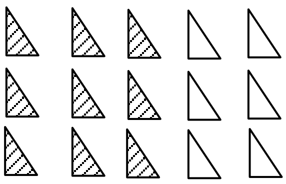
En el transcurso del trabajo individual, el profesor observó que Eduardo había elaborado un primer gráfico, distinto al que hizo en el encerado (había dibujado rectángulos), por ello le pregunta si lo que ha hecho en el encerado es lo que había trabajado en su folio. El alumno responde que no, que Alba le había dicho que dibujara igual que la ficha. El profesor le pide que exprese lo que había hecho en su folio. El alumno empieza a dibujar. Para evitar demoras, el profesor le dice que él (el profesor) lo va a hacer a medida que el alumno le diga, verbalmente, lo que había trabajado. El alumno le dice que dibuje quince cuadrados, divida cada uno en cinco partes iguales y coja (o pinte) tres en cada cuadrado. Cada cuadrado queda como sigue

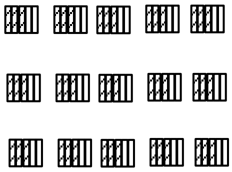


Mientras va dibujando, el profesor pregunta a la clase, en general, si da lo mismo ‘cuadrados que triángulos’. Algunos alumnos responden que sí y otros se quedan callados. Luego pregunta si es lo mismo “dividir de cualquier manera cada cuadrado”. Después de un silencio general, Andrea B. dice que cuadrados y triángulos son iguales, sin embargo el profesor le dice que eso no es correcto. La alumna piensa y rectifica diciendo que “representan lo mismo: unidades”, y que da igual la figura que sea. Esta idea no se da inmediatamente, pero esta alumna llega a ella. Los alumnos no saben cómo llegar a la expresión correcta y el profesor intenta, a través de sus preguntas, que se expresen de manera adecuada, utilizando un lenguaje general y matemático apropiado. La idea de dividir la unidad en partes iguales para representar fracciones de ella se tiene mejor asimilada pues los alumnos responden inmediatamente que no se puede dividir de cualquier manera, que tienen que ser partes iguales.

El profesor establece una comparación entre las dos gráficas (triángulos y cuadrados). Pregunta si indican o representan lo mismo, dado que están representadas de diferente manera. En el primer caso, además de la gráfica se escribe la siguiente expresión: “3/5 de 15 = 9”. Algunos alumnos responden que no; otros, que sí. Aún no lo tienen claro.

A la pregunta anterior, Lucía comenta que “en el segundo hay más partes que en el primero”. El profesor interroga: “¿Qué quiere decir que ‘hay más partes’?”. Alba responde que “hay de más en el segundo, en el primero hay nueve y en el otro, quince” (refiriéndose a que las quince gráficas están pintadas). Las gráficas son las siguientes:





El profesor piensa y plantea la pregunta de otra manera, volviendo a lo que se hizo en la primera gráfica y que los niños han representado correctamente: “¿Cuántas unidades son tres quintos de quince?” Lucía dice que nueve. El profesor pregunta: “¿Creen que hay lo mismo en esta forma? (señalando la gráfica de los cuadrado)”. Algunos alumnos dicen que no; otros aunque menos, que sí. Alba insiste en que “hay quince pintados”.

El profesor vuelve a la expresión: Si tres quintos de quince son nueve (señalando la primera gráfica) y aquí (señalando la segunda) se ha graficado los tres quintos de quince, ¿cuánto creen que hay? Algunos alumnos (Pablo, Enrique y Eduardo, Lucía, Andrea B, Nerea) establecen la relación contestando que hay nueve. El resto de alumnos, sin embargo, no responde.

El profesor retoma la pregunta de la diferencia entre una gráfica y otra. Lucía dice: “la primera se ve más claro y la segunda, no (con relación a 9)”. El profesor sigue el comentario: “¿quieres decir que aquí hay nueve también?, ¿cómo?”. La misma alumna sale al encerado y empieza a completar el sombreado de las partes de cada cuadrado, advirtiendo que al completar en uno, hay que quitar en otro. El profesor le pide que explique lo que está haciendo. La alumna expresa: “Hay que completar, pero hay que borrar”. El maestro la ayuda borrando. Al final se observan los nueve cuadrados 'pintados' y seis sin pintar, como en el caso de los triángulos. Los alumnos que observan asienten con la cabeza.

El profesor relaciona la expresión: “$\frac{3}{5} de 15 = 9$” con las operaciones necesarias (fracción de un número que se trabajó en la clase anterior y se recordó al inicio de ésta). El profesor pregunta: “como operador, ¿qué hacemos?”; Enrique responde: “dividimos entre cinco y multiplicamos por tres”. El profesor escribe: “(15:5) x3 = 9”.

Elba dice, refiriéndose a las diferencias entre una y otra gráfica, “en la primera hay que hacer unas operaciones y en la otra no”, viendo que el profesor escribe la operación anterior.

A continuación, el profesor expresa que al operar una cantidad se transforma. El profesor les dice que lean la parte introductoria de la ficha de trabajo[187], en la que se expresa esta idea y les pregunta qué es lo que se transforma en la expresión de la actividad que han resuelto. Los alumnos no logran captar el sentido de esta pregunta y vuelven a responder en función de las diferencias que hay entre una gráfica y otra. Asmaa’ expresa que en el segundo gráfico se han partido las unidades y se ha ido pintando lo que falta y en el primero, no. El profesor vuelve a insistir en mirar la expresión simbólica y no la gráfica.

---

[187] La ficha empieza de la siguiente manera: “Al interpretar la fracción como operador, ésta cumple una función distinta: expresa una transformación. A continuación te proponemos aplicar distintas fracciones a distintas cantidades (o situaciones iniciales) y hallar la transformación que se genera”.

Para centrar más las respuestas, el profesor les hace observar la expresión: “observen, tres quintos de quince es igual a nueve” y les señala la fracción 3/5 y el número 9. Luego, les pregunta por la diferencia entre ambos. Para ello, les pregunta cómo es la primera cantidad, a lo que Andrea R. dice que es una fracción. Luego, les pregunta por la segunda cantidad señalada y el profesor les dice que éste es un número natural, luego añade: “¿cuál es la diferencia?”. Alba responde: en el primero hay denominador y en el segundo, no: desaparece. El profesor lo repite: “aquí el denominador desaparece”.

Los alumnos dejan de lado la ficha de trabajo. El profesor recapitula la idea de fracción de un número y pregunta si este tema se puede aplicar en alguna situación. El profesor hace alusión a que las matemáticas sirven para ‘algo’ (algo concreto, específico). Los alumnos no expresan situaciones en las que puedan aplicar la fracción de un número. El profesor retoma las tres interpretaciones de fracción y les pide que piensen situaciones en las que la fracción como reparto esté incluida. Andrea P. dice: “repartir la torta”; Lucía: “partir un folio”. El profesor acepta las ideas anteriores como correctas, aunque especifica que muchas veces los repartos reales no son equitativos, dando como ejemplo el caso de la torta: “si el reparto lo tuviera que hacer yo, seguro que me quedaría con la mayor parte”. Los niños se ríen.

Una vez trabajada esta interpretación, el profesor les pide que piensen en situaciones en las que la idea de fracción como división esté inmersa. Andrea B. dice: “cuando tenemos que repartir el dinero”, el profesor le dice que explique y la alumna continúa “cuando la mamá da un dinero a sus hijas y éstas lo reparten entre las que son”. Otro ejemplo es el del reparto de las ‘chucherías’, que lo expresa Andrea R. En este caso, el profesor pide que expliquen cómo hacen dicho reparto. Andrea B. intenta explicarlo: “Cuento cuántas ‘chuches’ tengo, cuento cuántos (personas, niños, etc.) hay y divido”. El profesor dice que ésta no es la manera común de hacerlo, pues él ha visto que lo hacen de otra manera, y pide que lo expliquen.

La misma niña explica que pueden ir repartiendo uno a uno, o cogen una cantidad, cualquiera, de ‘chuches’ y van entregando. Las demás alumnas asienten. El profesor pregunta por las desventajas de este último procedimiento. El profesor insiste de la siguiente manera: “¿hacerlo de esa manera permite que todos reciban lo mismo?” Algunos niños dicen que sí y otros que no.

Después de pensar, Asmaa’ dice que no, “porque puede ser que se acaben y no todos reciban lo mismo”. El profesor reafirma la idea. Elba dice que, entonces, se deja de repartir. El profesor continúa: “el reparto ya no sería equitativo ya que no se da la misma cantidad a todos”.

Al finalizar, el maestro les dijo a los alumnos que para la próxima clase les traigan las situaciones en las que se aplique la fracción bajo esta nueva interpretación: como operador.

Sesión 2 / Caso 1

Viernes, 15 de febrero de 2008. Hora: 09.55 – 10.50. Colegio A

El profesor empieza la clase recapitulando los tres significados de fracciones que ha trabajado en las clases anteriores: como parte, como división y como 'operación'[188]. Los alumnos intervienen diciendo cuáles son los significados estudiados, qué quiere decir y dando ejemplos directos de cada uno. La última interpretación la expresan como "multiplicar y dividir"; al llegar a ésta, el profesor propone un ejemplo: " $\frac{3}{4} de 24$ " y pregunta: "¿qué quiere decir tres cuartos de veinticuatro?

Daniel expresa: "veinticuatro entre cuatro es igual a seis…". En este momento el profesor interrumpe, recalcando que no es la respuesta correcta ya que no busca que respondan cuánto es sino qué significa; luego, pide a otro voluntario que explique lo que quiere decir la expresión. Eduardo dice: "veinticuatro entre cuatro, por tres", sin dar ninguna respuesta parcial ni final. El profesor asiente y lo escribe en el encerado, mientras el alumno lo expresa pausadamente: "veinticuatro entre cuatro. Lo pones entre paréntesis…" El profesor interrumpe y pregunta si es necesario poner los paréntesis, algunos alumnos dicen que no (Enrique, Pablo, Iago, Lucía, Andrea B y Andrea P); luego él asiente, aunque aclara que los va a poner por otras razones.

El profesor les plantea lo siguiente: "si quiero decir una cantidad, por ejemplo trece, ¿sería mejor así (escribe "13") o de esta manera (señala la fracción de un número)?". Los alumnos se quedan en silencio. El profesor vuelve a insistir señalando los ejemplos anteriores y expresando que "hay que suponer que aquí – señalando la fracción de un número – es trece". Andrea B. responde que la primera es más clara. El profesor pregunta cuáles son las ventajas de expresarlo de una u otra forma. La misma alumna dice que en el primer caso dice cuánto es "y no tienes que hallar el número porque ahí está". Enrique, Lucía y Andrea P. asienten, mientras que en el segundo "hay que operar primero para hallar la cantidad". El profesor, refiriéndose a la clase reafirma lo que dijo Andrea B. y expresa que, efectivamente, en el caso de "13" la cantidad está expresada directamente, mientras que en el segundo, no; sin embargo, hace referencia a lo mismo. El profesor resuelve: ¾ de 24 = 18. Pablo, refiriéndose a la misma situación, responde: "pago más".

El profesor piensa en la idea de Pablo que, aunque le resulta descabellada y haciéndoselo saber, la usa para preguntar "qué significa *pagar más*", y "cuál es la diferencia entre coste y precio", diferencia que el profesor, piensa, no tienen clara. Se suscita un diálogo al respecto en el que se aclara que el precio es el valor de cada producto y el coste es lo que se paga por ellos; y que muchas veces ambos no se corresponden de ahí que surjan expresiones como "cuesta más de lo que pago por ello", cuando el valor está por encima de su coste o "cuesta más de lo que debería" cuando su coste está por encima de su valor, en diferentes situaciones de compra y venta que el profesor concretizan y solicitando a los alumnos otras situaciones al respecto.

A partir de las situaciones generadas con respecto al coste y precio de los productos, el profesor retoma la última actividad de la clase anterior, sobre pensar situaciones en las que esté involucrada la fracción como operación, y pregunta si pensaron en esas

---

[188] La idea que trabajan en esta última interpretación es que la fracción sirve para multiplicar y dividir una cantidad.

situaciones. Los alumnos quedan en silencio. Andrea B. plantea la siguiente situación: “tengo sesenta caramelos y quiero los seis décimos”. El maestro pide más situaciones. Andrea P. expresa: “un pastel lo divido en seis trozos y cojo tres”. El maestro queda en silencio, mira a sus alumnos y aclara que no quiere “problemas” como los que se les plantean, sino que digan en qué situaciones se pueden encontrar con estos casos. Los alumnos siguen mencionando ejemplos como los de las compañeras; sin embargo, Pablo levanta la mano para intervenir y plantea la situación ‘de la gasolina’ expresando lo siguiente “En la gasolina. Por ejemplo, vas a comprar y te descuentan el 20%”. El profesor aprovecha la intervención y se establece el siguiente diálogo entre él y el alumno:

Profesor: ¿Cómo así el 20% de descuento?

Pablo: El veinte por ciento de lo que te van a cobrar por la gasolina para el coche

Profesor: ¿Qué es eso del 20%?

Pablo: Las dos décimas partes del total

Profesor: (intenta que Pablo no siga expresándose pues observa que el resto de la clase no comprende su explicación y reformula la pregunta). ¿Qué quiere decir 20%?”.

Pablo: Veinte de cien

Profesor: ¿Y si son 200?

Pablo: (Piensa un poco y responde) Sería el 40%

Profesor: ¿Qué pasa si pago 50 euros? ¿Cuánto me descuentan?

Alumno: La quinta parte. Porque veinte de cien es la quinta parte

Dirigiéndose a toda la clase, el maestro señala el tanto por ciento y pregunta quienes han visto esas expresiones (refiriéndose a los porcentajes) y qué otras maneras hay de escribirlas. Los alumnos intentan pensar; sin embargo, Andrea B. sale al encerado y escribe: “-20%”. Luego se sienta. El profesor pregunta a la alumna dónde ha visto esa forma de escribir el porcentaje; la alumna responde que en las tiendas. El profesor pregunta otras maneras de representarla. Pablo vuelve a intervenir y dice: 20/100 de x. Luego sale al encerado y escribe la expresión. El profesor pregunta otras formas y escribe la forma de expresarla mediante el uso del lenguaje oral: “el descuento es del veinte por cien”, luego hace hincapié en que los descuentos se pueden representar y expresar de diferentes maneras: con signos matemáticos y con palabras.

Profesor: Vemos que los descuentos los podemos representar de diferentes maneras. ¿Cómo se ha representado aquí? (señala el porcentaje)

Andrea B: Con un circulito, raya y circulito

Profesor: Ese circulito, raya y circulito se llama “tanto por cien”. ¿Qué otra forma usamos? (indica la fracción)

Enrique: Como fracción

Profesor: Exactamente.

El profesor asocia los porcentajes con una fracción: “el 50% de una cantidad es la mitad de la cantidad. Se representa mediante un medio”, y escribe la expresión en el encerado, luego pregunta cuánto es, y añade:

Profesor: El cincuenta por cien es un medio. Por lo tanto el cincuenta por ciento de 30, por ejemplo es igual a decir un medio de treinta, ¿verdad?

Enrique: Sí

Profesor: Y un medio de treinta es…

Enrique: Quince

Profesor: Por lo tanto el cincuenta por cien de treinta es quince

Lucía: Sí

Profesor: Para hallar el cincuenta por cien de una cantidad divido la cantidad entre dos. ¿Qué quiere decir el veinte por ciento de cien?

Enrique: Dos décimos de cien

Profesor: ¿Qué quiere decir dos décimos de cien?

Andrea B: El veinte por ciento

Profesor: ¿Cómo puedo hallar el veinte por ciento de cien?

Enrique: Divido entre cinco

Profesor: ¿Por qué?

Enrique: Porque es la quinta parte

Profesor: Entonces, el veinte por ciento de cien es lo mismo que un quinto de cien

Enrique: Sí

Pablo: También puedo dividir entre diez y multiplicar por dos

Profesor: Entonces, para hallar los porcentajes podemos hacer uso de las…

Alumnos: Fracciones

Profesor: Hay que descubrir cuál es la fracción que se asocia al porcentaje

A medida que el diálogo se desarrolla, el profesor va escribiendo en el encerado. El maestro recalca que una de las situaciones en las que se usan los porcentajes es el de los descuentos, como el caso de la compra de la gasolina y en las rebajas. Añade que estos son dos casos concretos de la fracción como operación “ya que al numerador y al denominador le corresponde una operación concreta: división o multiplicación” puesto que “los porcentajes se pueden expresar como fracciones” y “los porcentajes averiguan cantidades de otras cantidades”. Insiste, a la vez que señala en el encerado: “20% de 100 es lo mismo que 2/10 de 100 o 1/5 de 100”, asocia y resuelve expresando las operaciones:

Profesor: Cuando cambio el porcentaje por una fracción ésta toma un significado. ¿Cuál es?

Alumnos: …

Profesor: Conocemos tres significados de las fracciones…

Enrique: Como operación

Profesor: ¿Por qué “como operación”?

Enrique: Porque divides entre cinco

Profesor: ¿Y qué pasa con el numerador?

Enrique: Nada

Profesor: ¡Cómo que nada! Cuando la fracción actúa como operación, ¿qué hacemos con el numerador y el denominador?

Enrique: Se divide entre el denominador y se multiplica por el numerador

Profesor: Entonces…

Enrique: Multiplicamos por uno pero da lo mismo

Profesor: No es que no pase nada, sino que el resultado no varía porque cualquier número multiplicado por uno…

Asmaa’: Es el mismo número

Pablo: Si divido entre diez y multiplico por dos da lo mismo también

Profesor: Porque las fracciones son equivalentes y podemos escoger la más simple. No hay que escoger lo más complicado[189]. Por lo tanto cuando reemplazamos fracciones por porcentajes, las fracciones actúan como operación porque hay que dividir y multiplicar por el denominador y el numerador

El profesor pide a los alumnos que piensen otras situaciones. Sin embargo, los alumnos no logran enunciar ninguna sin ayuda alguna. El profesor se vale de la prensa que tienen en el aula para enunciar algunos titulares relacionados con los porcentajes y las fracciones. Entre las que se nombran están las compras, las encuestas. El profesor reparte la prensa para que cada alumno revise las noticias y dé ejemplos concretos. Los alumnos observan y mencionan algunas. El profesor va dando pistas para que los alumnos reconozcan en dichas noticias situaciones en las que están incluidas las fracciones (descuentos, compras: ¾ del precio. Encuestas: 2 de cada 3: 2/3 (razón). Materia grasa. Bolsa. Audiencia del canal. Pérdida de trabajo. ING Direct, consumo del coche: 6 litros cada 100 km, presupuesto, etc.). Los alumnos revisan la prensa y van enunciando algunos casos concretos a partir de las situaciones enunciadas por el profesor. En algunos casos, aciertan y en otros no. En general, las situaciones las plantea el profesor y los casos

---

[189] El profesor comenta que Pablo, generalmente, escoge los caminos “más complicados” para llegar a un resultado: la operación más larga, el camino más largo, etc.

concretos en ellas, también. Pocos alumnos son capaces de plantear sus propias situaciones, aún a partir de las presentadas (Nerea, Elba, Enrique y Lucía):

Lucía: Aquí menciona el porcentaje de desempleo

Profesor: En fracción, ¿cómo indicamos el porcentaje?

Lucía hace la transformación e indica la fracción correcta.

Los alumnos buscan noticias en las que se mencione algún porcentaje y lo convierten a fracción.

Sesión 3 / Caso 1

Lunes, 18 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

Empieza la clase retomando el tema de las rebajas que se introdujo en la clase anterior, a propósito de las fracciones y maneras en las que éstas representan la función de ‘operación’. El profesor pregunta qué son las rebajas.

La respuesta a la pregunta anterior genera comentarios entre los alumnos que, sin embargo no expresan en voz alta. El profesor espera un momento y luego pregunta directamente a María quien responde que para ella ‘las rebajas’ es “cuando una prenda de vestir está rebajada la mitad”. El profesor hace hincapié en la idea de mitad y pregunta cómo se representa esa “rebaja”. Los alumnos la expresan de diferente manera. Por ejemplo, Enrique a través de la fracción decimal 50/100, y Pablo mediante el porcentaje (cincuenta por ciento). Asmaa’ menciona “en letras” y el profesor lo escribe: “rebajan el cincuenta por ciento”[190]. En la pizarra se aprecian las tres formas, pues los dos primeros alumnos salieron a escribir las suyas. El profesor pide que observen las tres representaciones de una misma idea, haciendo hincapié en que las “ideas matemáticas también se pueden expresar en lenguaje común”, como el último caso; acto seguido pregunta otra manera de expresar “la mitad”.

Los alumnos asocian la idea del “cincuenta por ciento” directamente con el porcentaje (50%) y, en fracciones, a través de la fracción decimal (50/100). En ningún caso lo expresan en términos de ½, que es a lo que el profesor intenta llegar; al menos los alumnos no logran expresarlo. Para que así sea, el profesor intenta darles pistas diciendo que dicha forma es una manera ‘muy fácil’ de representar dicha rebaja; sin embargo los alumnos no dan ninguna respuesta. El profesor intenta otra situación, que expresa a sus alumnos de la siguiente manera: “Imaginemos que quieres comerte la mitad de una pizza, ¿cómo lo expresarías?”. Se observa a los alumnos comentar entre sí. Parece ser que Enrique tiene la respuesta, pues hace un comentario a Iago, su compañero más cercano, e, inmediatamente, levanta la mano para intervenir, pero el profesor prefiere que sea Iago quien responda:

Profesor: ¿Cómo expreso que me quiero comer la mitad de la pizza?

Iago: La parto por la mitad

Profesor: ¿Cómo parto la pizza por la mitad?

Iago: Así[191]

Profesor: ¿Así, de cualquier manera?

Iago: Lo parto y me como una parte

Profesor: ¿Pero cómo lo parto?

Iago: Lo divido y me como una parte

---

[190] Estas tres formas se trabajaron en la clase anterior.

[191] Iago hace un dibujo en el aire, intentando representar la pizza a través de una circunferencia y trazando una línea recta en el interior.

Profesor: ¿Lo divido de cualquier forma?

Iago: No

Profesor: ¿Cómo sé yo que está por la mitad?

Iago: Tienen que ser dos partes iguales

Profesor: Expresa lo que has dicho como fracción

Iago: Uno, rayita, dos”

Profesor: Bien

El profesor añade a las anteriores esta nueva forma de expresar la mitad y las compara; luego se detiene en las dos fracciones propuestas (cincuenta centésimos y un medio) y pregunta la relación entre dichas fracciones a lo que Lucía dice que son equivalentes. El profesor acepta la intervención; luego pregunta cuál de las dos formas es más sencilla. Los alumnos señalan que un medio. El profesor pregunta por la razón de su respuesta. Pablo dice que “porque tiene menos partes”, mientras que Lucía añade que es “porque se puede simplificar”. El profesor hace la simplificación respectiva a la fracción decimal y menciona que muchas veces es mejor trabajar con la fracción simplificada “porque en este caso solo tienes que hacer una división”. Enrique añade: “porque la multiplicación ya no es necesaria”, refiriéndose a la multiplicación por el numerador. El profesor agrega “porque si multiplicamos por uno da el mismo número”.

El profesor deja de lado las fracciones y se posiciona en la forma de expresar la mitad mediante porcentajes; luego pregunta qué es eso de los porcentajes. Los alumnos no responden al profesor aunque comentan entre ellos, y el profesor les dice que lo piensen un poco. Andrea B. dice que es “un número y un cero una rayita y un cero”. El profesor añade que “así se expresa un porcentaje” pero que no es lo que significa, añadiendo que quiere que le digan “lo que es”. Los alumnos se quedan callados.

Retomando la idea que expresó María sobre qué eran las rebajas, el profesor le vuelve a preguntar a la misma alumna si se puede rebajar cualquier cosa. La alumna asiente con la cabeza y el profesor pide más opiniones. Algunos alumnos comentan que no, que solo se pueden rebajar los productos tales como: los alimentos, juguetes, ropa. Otros se quedan callados. El profesor escucha las intervenciones y anota en el encerado los ejemplos propuestos.

El profesor hace referencia a dichos ejemplos recalcando que en todos ellos se pueden dar rebajas, luego vuele a preguntar qué es rebajar. Andrea B. manifiesta que “es el descuento que se hace de una cosa”. Pablo opina que “es vender más barato”. El profesor asiente las respuestas e insiste en que las rebajas disminuyen el precio de un producto, “aunque no su valor”. Acto seguido les pregunta por otras maneras de expresar que hay esos descuentos o que se vende más barato. Los alumnos se miran entre sí, algunos comentan ‘algo’ que, sin embargo, no es escuchado. Una de las que comentan, Andrea B., indica que en los escaparates escriben la palabra “rebajas” sin precisar “números”; otros alumnos mencionan diferentes porcentajes (setenta por ciento, treinta por ciento, etc. Las fracciones quedaron de lado) y Pablo indica una manera distinta: Dos por uno. El profesor pide a los alumnos que expliquen qué significa esa expresión: “dos por uno”, porque aclara que “dos por uno es dos”. Los alumnos quieren explicar. Eduardo lo hace de la siguiente manera: “pagas uno y llevas dos”. Enrique dice que también ha visto 3x2 y expresa qué quiere decir de la siguiente manera: “llevas tres y pagas dos”. El profesor añade que en ambos casos llevas una prenda más y pregunta si son iguales las rebajas. Se escucha que algunos alumnos expresan que sí, pero otros niegan la igualdad. El profesor insiste que expliquen cuando responden “sí” o “no”.

A partir de los últimos ejemplos, el profesor vuelve a insistir en si es lo mismo “dos por uno que tres por dos”, ya que las respuestas fueron diversas. Para ello cambia de giro a la pregunta y cuestiona que si al comprar una u otra rebaja se gasta lo mismo. Los alumnos vuelven a expresar respuestas simples aunque encontradas: algunos dicen que sí y otros que no; sin embargo se genera el siguiente diálogo:

Elba: Cuando compras dos por uno pagas uno y llevas dos… es como si uno te lo regalaran.

Lucía: En el primero pagas el cincuenta por ciento de cada producto; pero en el otro, no. Pagas más.

Andrea P: En el primero pagas uno y te llevas otro, pero en el segundo pagas dos y llevas uno.

Profesor: Eso ya lo sabemos, pero ¿cuál conviene?

Enrique: La que necesites

Profesor: ¿Cómo “la que necesites”?

Enrique: Porque puede ser que no necesites tres sino dos camisas

Profesor: Muy bien.

El profesor aprovecha y dice que muchas veces las épocas de rebajas contribuyen a que las personas gasten más de lo que habían presupuestado y que en lugar de ahorrar, se ve disminuido su capital, “incluso compran lo que no necesitan”. Los alumnos dan ejemplos de algunas rebajas que han comprado últimamente. Otros expresan que sus padres compran en las últimas semanas de rebajas “porque es más barato”.

El profesor pide que mencionen otras maneras de comprar más barato, expresiones que indiquen que el precio ha bajado. Andrea P. explica que en el mercado ella ha visto letreros en los que dice “antes tal precio y ahora tal otro”. El profesor asiente y pide que se explique mejor, sin embargo la alumna se queda en silencio. El profesor pone un ejemplo que la alumna acepta como un caso específico de lo que ella ha expresado: “por ejemplo, un par de zapatos en épocas normales puede costar sesenta y cinco euros y en las rebajas cincuenta y tres”. El profesor pregunta si en este caso, se indica el porcentaje. Los alumnos dicen que no.

El profesor retoma los ejemplos brindados por los alumnos como ideas que expresan rebajas, luego comenta que dichos ejemplos son distintas maneras de expresar una rebaja y pregunta “si es lo mismo en cualquier caso”, situándose en dos ejemplos concretos: “rebajamos el 50%” y “lleva tres y pagas dos”. Pablo dice que “tres por dos es igual al treinta y tres por ciento” por lo que se rebaja menos que en el caso anterior. El profesor pide que explique y el alumno dice que “al comprar tres y pagar dos te están descontando el 33%”. El profesor le pide que lo explique mejor. El alumno se queda en silencio, luego dice que ambas expresiones “son equivalentes y que es lo mismo”. El profesor no comenta.

El profesor cambia la situación y pregunta qué pasa si se quiere comprar una camisa y en una tienda la ‘rebajan al 50%’ y en otra indican que “paga una y lleva dos”. Lucía vuelve a expresar que en el primer caso paga la mitad por la camisa y que en el segundo no, ya que “tiene que comprar una pagando todo” para que lleve la segunda. Pablo dice que en realidad no paga la mitad, “paga todo” y que la segunda “se la regalan”. Sintetizando las intervenciones anteriores, el profesor hace una distinción entre ambos casos, pero antes expresa que las ideas de los alumnos Lucía y Pablo son acertadas:

Profesor: Es cierto que en los dos casos hay ofertas, pero cada una es distinta.

Pablo: Dos por uno es mejor que tres por dos porque te descuentan más

Profesor: ¿Y cincuenta por ciento y dos por uno?

Enrique: No es lo mismo porque para que te den la otra camisa tienes que pagar la primera. No hay descuento. Si no compras una no hay oferta

Iago: Pero al llevar dos es como si pagaras la mitad por cada una

Enrique: Pero tienes que llevar la primera para que te den la otra.

Iago: Llevas dos

Enrique: Pero si no necesitas dos puedes comprar la del cincuenta por ciento porque así pagas la mitad por una… y gastas menos.

Profesor: Efectivamente, algunas ofertas exigen que compres más de lo que habías pensado… y gastas más. En el primer caso cada camisa tiene un descuento y yo puedo comprar una o más pero en el segundo ¿cuántas tengo que comprar para acceder a la oferta?”

Lucía: En dos por uno tengo que comprar una. Y en tres por dos, tienes que comprar dos

Profesor: Por lo que si compro una no accedo a la oferta. Hay que comprar más”. ¿Podemos decir que es lo mismo?”

Enrique: No.

Otros alumnos secundan la respuesta de Enrique. El profesor concluye que en el segundo caso termina gastando más de lo que pensaba porque lo que él quería era comprar una camisa y no más. Iago añade “pero tendría más”, y el profesor agrega: “pero no necesito más”.

El profesor pregunta si siempre hay rebajas o sólo en unas épocas determinadas. Los alumnos dicen que hay unas épocas. Andrea B. da una explicación: “por ejemplo, hay épocas en el año como ésta donde te rebajan los precios, pero también hay otras en otras épocas, por ejemplo en el verano”.

El profesor pregunta por el comportamiento de la gente durante este periodo a lo que los alumnos responden que es muy movido “porque hay mucha gente en las tiendas”. El profesor pregunta dónde más hay rebajas. Enrique menciona que en el supermercado. El profesor comenta que también en el supermercado se gasta más de lo que se había pensado, incluso en productos que no están rebajados y que “ni se tenía pensado comprar”. El profesor explica que muchas veces son estrategias de mercado “poner los productos rebajados al final de tal manera que cuando llegues a ellos ya has visto otros productos que decides comprar” en ese momento. Además, añade, que hay que pagar por la gasolina del coche, el estacionamiento, el tiempo, etc. Se concluye que la gente muchas veces compra sin necesitar lo que adquiere, sólo porque está rebajado y que generalmente se termina gastando más de lo que se necesita. Los alumnos escuchan atentamente y comentan entre sí. Elba interviene diciendo que “un día mi madre me fue a comprar un libro y me compró una falda”.

La clase termina.

Sesión 4 / Caso 1

Martes, 19 de febrero de 2008. Hora: 09.55 – 10.50. Colegio A

El profesor retoma la idea de las rebajas trabajada en la clase anterior y las preguntas sobre las que giraron las intervenciones de los alumnos: qué son las rebajas, qué, cuándo y cómo se rebajan los productos. En esta sesión, a la pregunta sobre qué son las rebajas, Enrique expresa que rebaja es "la venta de un producto por debajo de su precio", por su parte Elba menciona que "se puede rebajar cincuenta, sesenta, veinte por ciento en un producto". Raúl añade que "para rebajar un producto hay que disminuir su precio", mientras que Andrea comenta que "esta es una época de rebajas". Los alumnos siguen expresando ideas sobre el tema en cuestión; sin embargo, entre todas las respuestas, sobresale una que llama la atención del profesor ya que es una idea que, hasta el momento, ningún alumno había expresado y que tiene relación con su costo: "tienen que ser caros", expresada por Pablo, quien afirma que las rebajas solo se dan en los productos "caros". Ante la respuesta, los alumnos miran extrañados a su compañero. Una de las alumnas, Andrea P., comenta a Asmaa' que "no es verdad".

El profesor se cuestiona lo que afirma Pablo y pregunta a la clase si creen que, efectivamente, los productos tienen que ser caros para que se rebajen sus precios. Los alumnos se miran entre sí, algunos intercambian palabras, pero no las expresan a la clase, sino que vuelven a mirar al profesor, en silencio. Al respecto, el profesor pregunta: "¿qué es caro?". Pablo, quien expresó la idea responde que 'caro' es "lo que cuesta mucho". El profesor le pide que se explique y el alumno completa la frase de la siguiente manera: "lo que cuesta mucho para lo que es". El profesor se vale de lo expresado por Pablo y pregunta a los alumnos si están de acuerdo con la intervención de su compañero, es decir, si comparten la idea. Dirigida por el profesor, en la clase se genera una discusión entre cuándo un producto es caro y cuando es barato y de qué depende.

El profesor observa a sus alumnos intercambiar ideas entre sí, algunos se dirigen al profesor comentando que "muchos productos se rebajan, no solo los productos caros". Centrando la atención de todos sus alumnos, el profesor les pide que piensen en un único producto y su precio. Al no escuchar ningún comentario, el profesor les sugiere que piensen en una prenda específica: el jersey, y le dice, concretamente, a Elba que diga cuánto puede costar un producto como ese; esta alumna responde que puede costar "diecinueve euros". Luego el profesor pregunta si han visto algún otro jersey con un precio distinto. Enrique dice que él ha visto uno de 48 euros, en una tienda de marca. El profesor comenta que entre los dos precios hay bastante diferencia, y luego vuelve a preguntar a Elba si le parece caro el jersey que ella ha visto. La alumna se queda en silencio por un momento y luego responde que depende; el profesor pregunta la razón. En esta oportunidad, los alumnos quieren responder y entre todas las respuestas, destacan dos: la marca del producto, expresada por Lucía y la calidad del mismo, mencionada por Enrique.

El profesor reflexiona sobre los dos casos y expresando el primero pregunta por qué una marca puede vender caro y la misma alumna responde que porque se vende mucho. En el segundo caso, el alumno respondió que la calidad dependía del material con el que se fabricaba, sin dar ningún ejemplo. El profesor pregunta qué marcas conocen que son caras. Los alumnos mencionan marcas de coches, básicamente. El profesor afirma que, efectivamente, las marcas que habían expresado eran de coches “que es un lujo tener”. El profesor asocia las ideas de Lucía y Enrique y expresa que los productos de marcas reconocidas y caras muchas veces se preocupan por conseguir los mejores materiales para elaborarlos, aunque algunas veces son más caros porque tienen más funciones. Raúl añade: “mientras más nos simplifiquen la vida, mejor”.

Entre las razones del valor monetario de un producto, Pablo expresa que puede costar mucho porque cuesta hacerlo, es decir, “puede ser caro si cuesta hacerlo”. El profesor recuerda esta idea y pregunta ejemplos de esta situación. Los alumnos mencionan productos como los aviones, televisores, coches, etc. El profesor afirma que dichos productos son ejemplos correctos de lo que se les pide pero añade que hay otros que, aunque las personas no los elaboran directamente, son difíciles de acceder a ellos; por ello, el profesor les pide que piensen en otros productos, diferentes a los mencionados, que pueden ser caros por esta última razón.

Al especificar cierta información sobre dichos “productos”, los alumnos se miran entre sí e intercambian ideas. Se escucha que un par de alumnos comenta que “hay productos del supermercado que son caros”. El profesor destaca que en su comunidad, específicamente, existen esos productos. Los alumnos lanzan otra serie de productos como televisores con plasma, expresado por Alba, u otros. El profesor insiste que no se refiere a esos productos, sino a los que produce su comunidad. Los alumnos mencionan algunos productos naturales: patatas, pulpo, etc. Entre todas las ideas, el profesor se queda con la de los mariscos, expresada por Enrique, aunque le pide especificar ya que los mariscos son variados. Ningún alumno menciona el caso que el profesor espera, por lo que este empieza a dar algunas pistas: “los encontramos adheridos a las rocas por lo que es muy difícil acceder a ellos, incluso las personas pueden poner en riesgo su vida”. Los alumnos siguen pensando aunque, aparentemente, saben a qué se refiere el profesor pero no lo expresan:

Enrique: Sí, ya sé… están en las rocas

Profesor: Sí, ¿cómo se llaman?

Enrique: No recuerdo, pero sí sé. Son así como…

Pablo: Ya sé, yo los he comido

Profesor: Es muy difícil acceder a ellos porque se recogen manualmente en las rocas. Las personas ponen en peligro su vida para hacerlo… ¿Recuerdan su nombre?

Los alumnos no recuerdan exactamente cómo se llaman y es el profesor quien lo dice. El profesor explica la razón de porqué es difícil acceder a los percebes y el porqué de su precio.

El profesor retoma el tema de las rebajas. Les recuerda que las rebajas afectan a casi todos los productos, independientemente de su precio, luego escribe en el encerado ejemplos de cómo aparecen las rebajas en los diferentes establecimientos incidiendo en que son casos que los mismos alumnos han mencionado en las sesiones anteriores. Lo que aparece a continuación es lo que el profesor escribió en el encerado y en ese orden:

50% 2x1 Antes: 65

Después de escribir estos ejemplos, que fueron propuestos en la clase anterior, pregunta por otras formas en que aparecen los productos a menos precio que el inicial. Los alumnos intercambian miradas, y algunos ciertas palabras, pero sus comentarios no son expresados al profesor. Como los alumnos no expresan otras formas, el profesor escribe en el encerado la palabra: ¡¡¡liquidación!!!, entre signos de admiración, y pregunta si han visto esta palabra. Los alumnos responden afirmativamente y Andrea B. añade la palabra "total" (liquidación total). El profesor asiente y pregunta a qué hace referencia esta idea; la misma alumna responde que es cuando la tienda va a cerrar. El profesor completa la idea diciendo que la tienda intenta vender todo lo que tiene y "todos sus productos están rebajados a precios muy por debajo de su precio original". Luego escribe otra forma de expresar rebajas: "Todo a 12 €". Los niños comentan que también la han visto.

De todas las ideas y formas expuestas, el profesor pregunta si hay diferencia, si todas aparecen en la misma época o en otras épocas. Los alumnos expresan que las rebajas aparecen en determinadas épocas (final de temporada). Luego pregunta si el segundo caso (2x1, 3x2), también. Algunos alumnos responden afirmativamente y otros, no, incidiendo en que aparecen todo el año. El profesor pregunta en qué comercios, básicamente, aparece la segunda forma, y Andrea B. toma la palabra y responde que esa forma de presentar ofertas la ha visto en los supermercados. El profesor intenta que expresen "en los hipermercados" diciendo que no todos los supermercados lanzan dichas ofertas todos los días. Luego pregunta cómo se le llama a este tipo de venta y que de alguna manera lo ha ido expresando. Los alumnos responden: ofertas. El profesor pregunta la razón por la que se ofrecen ese tipo de ofertas y los alumnos contestan que para que la gente compre más del producto. Con las explicaciones del profesor se concluye que otra de las razones es para que compren más productos, incluso otros que no necesitaba comprar ya que las ofertas siempre se colocan "al fondo" del establecimiento.

El profesor retoma la forma de expresar las rebajas en porcentaje y aquélla en la que dan los precios (original y rebajado) y pregunta qué diferencias hay entre ambos. Para ello escribe los casos siguientes:

Antes: 60 € Zapatos: 60 €

Eduardo expresa que, en el primer caso, sabes cuánto hay que pagar y en el segundo no y hay que hallarlo para saber. El profesor pregunta en cuál de los dos paga más y cómo saberlo. Alba responde 40/100, señalando el porcentaje.

El profesor propone un ejemplo más sencillo: 50% de 80. Los alumnos responden inmediatamente 40. El profesor pregunta: "¿qué significa eso de 50%?". Los alumnos responden “la mitad”, entonces el profesor pregunta: “Si el 50% indica la mitad, ¿qué hay que hacer para hallarlo?” Enrique y Pablo responden inmediatamente: “dividir entre dos”, aunque otros alumnos también levantan la mano para responder. El profesor pregunta por otra forma de expresar la mitad y los niños responden ½ (esta idea se trabajó en la clase anterior). Luego, el profesor propone el 25% de 80. Enrique responde que es 20. El profesor pregunta cómo sabe que es 20, además le motiva a explicar cómo ha hallado rápidamente dicho porcentaje. El alumno responde que 25 es la cuarta parte por lo que divide 80 entre 4. El profesor asiente la intervención de Enrique y reafirma que el veinticinco por ciento es la cuarta parte del cien por ciento, es decir del todo. Luego, el profesor pregunta por el 10% de 80. Verónica dice que es 8 y al preguntarle lo que ha hecho no sabe explicarlo. Entonces el profesor pregunta al resto de la clase:

Profesor: ¿Cuánto es el diez por ciento de ochenta?

Enrique: Ocho

Profesor: ¿Es correcto lo que ha dicho Verónica?

Lucía: Sí

Enrique: Divides entre diez porque el diez por ciento es la décima parte

Profesor: Recuerden que los porcentajes están sobre cien, por eso el veinticinco por ciento es la cuarta parte ya que veinticinco es la cuarta parte de cien y diez, la décima

El profesor propone otras situaciones de porcentaje que se pueden hallar directamente, es decir aplicando una división únicamente. Los alumnos van asociando dichos porcentajes con “las partes de cien” que indican: veinte por ciento con la quinta parte. El cinco por ciento cuesta más a los alumnos, sin embargo llegan a expresar que es “la veinteava parte de cien”.

Para finalizar, el profesor propone el 37% de 80…

…. Algunos alumnos intentan sumar varias veces dicha cantidad para saber cuántas veces está contenido en cien, otros no lo hacen porque saben que no es exacto. Pablo da una respuesta y expresa que “es menos de treinta”. Al preguntarle el profesor el porqué de su respuesta, Pablo explica que “el diez por ciento es ocho, el veinte por ciento es dieciséis; el treinta, veinticuatro y el cuarenta por ciento es treinta y dos. Van de ocho en ocho”, luego añade: “Como treinta y siete es mayor que treinta por ciento y menor que cuarenta es como treinta ya que se acerca al cuarenta”. El profesor y los alumnos escuchan a Pablo, quien escribe en el encerado su explicación, luego el profesor asiente la intervención del alumno y expresa que, efectivamente, puede ser treinta pero que el procedimiento no le da la cantidad exacta. Pablo expresa que puede seguir dividiendo.

El profesor pregunta por el método de Pablo. Enrique expresa que es muy largo y no dice cuánto es, sin embargo el profesor añade que puede aplicarse si se pide el porcentaje aproximado. Luego pregunta qué otro camino se puede seguir. Los alumnos no contestan por lo que el profesor pregunta cómo se puede expresar dicho porcentaje en fracción. En general, los alumnos transforman 37% en la fracción 37/100. El profesor les recuerda que el cincuenta por ciento se expresa como cincuenta sobre cien pero también como un medio, de ahí que se utilice un medio porque es más práctico; luego establece la relación en el encerado y escribe lo siguiente: $\frac{50}{100}$ de 80 = 40, $\frac{1}{2}$ de 80 = 40. Enrique levanta la mano y dice que se divide entre dos: “divides ochenta entre dos”. El profesor pregunta qué pasa con el uno y el alumno responde que se multiplica pero que como es uno no es necesario.

El profesor les recuerda que una de las interpretaciones de las fracciones era como multiplicación y división, recalcando las operaciones en ese orden, y les dice que dicha interpretación va a ser importante para hallar porcentajes como el que les ha propuesto, en los que es difícil aplicar solo una división: “En estos casos, las fracciones no se pueden simplificar y el numerador va a ser un número mayor que uno, por lo que hay que efectuar la multiplicación”. Pablo añade que hay que multiplicar cincuenta por ochenta y dividirlo entre cien... “es cuarenta”. El profesor asiente y Asmaa’, quien ha realizado lo que Pablo ha expresado se sorprende de comprobar su validez.

No hay tiempo para más y la sesión termina.

Sesión 5 / Caso 1

Miércoles 20 de febrero de 2008. Hora: 9:00 – 9:55. Colegio A

Continuando con el tema de las rebajas, el profesor retoma la última parte de la sesión anterior y pregunta qué hacer para saber cuánto se ha rebajado en un producto. El tema de la definición no se retoma. Los alumnos levantan la mano, pero es Elba quien responde: "se divide y se multiplica". El profesor pregunta qué se divide y qué se multiplica. Lucía expresa que hay que "multiplicar la cantidad por el numerador y dividir el resultado por el denominador… Ese es el porcentaje".

El profesor confirma la intervención de la alumna e inmediatamente propone a toda la clase una actividad: "Vamos a hallar diferentes porcentajes y los vamos a escribir en este folio". El profesor entrega un folio a cada alumno y les pide que dibujen un cuadro, "como el que voy a dibujar", y pongan los siguientes datos: Precio, % y Rebaja, escribiendo en el encerado los mismos.

El profesor espera que los alumnos dibujen el cuadro en su folio y para completarlo, se dirige a tres alumnos (Lucía, Elba y Iago) preguntándoles qué fue lo último que han comprado, cuánto les ha costado y si lo compraron en época de 'rebajas'. Lucía expresa que le compraron un libro, Elba un pantalón y Iago una sudadera[192]. Los tres alumnos coincidieron que lo que habían comprado no fue adquirido en época de rebajas. El profesor anota los datos que expresan sus alumnos quedando el cuadro de la siguiente manera:

Precio	%	Rebaja
Pantalón:		
Libro:		
Sudadera:		

Para completar el cuadro y definir la tarea, el profesor pregunta por el precio de cada producto. Los alumnos expresan 40 € por el pantalón, 8 € por el libro y 20 € por la sudadera. El profesor escribe al lado de cada producto el precio correspondiente y plantea la situación hipotética que cuestiona cuánto habrían pagado por cada producto si los hubiesen comprado en época de rebaja:

Profesor: Imagínense que sus padres esperan a comprarles cada producto en las rebajas. Necesitamos saber cuánto es la rebaja por cada uno, ¿verdad?

Pablo[193]: Un libro se puede rebajar el veinte por ciento

---

[192] Según la RAE: f. Jersey o chaqueta deportivos, a veces con capucha.

[193] Pablo es un alumno que siempre interviene en clase, aun cuando el profesor no pida la participación de los estudiantes. No obstante, en algunos casos, sus intervenciones no son las más convenientes. En este caso, el profesor hace caso omiso a la intervención de Pablo para crearle el hábito de intervenir cuando el profesor lo solicite.

Profesor: Vamos a suponer que el libro se rebaje un veinticinco por ciento, el pantalón un cincuenta por ciento y la sudadera diez por ciento. ¿Qué sucederá?

Andrea P.: Pagarán menos por cada uno

Profesor: Exactamente. Intenten averiguar cuánto pagarán por cada producto aplicando el descuento correspondiente

Los alumnos plantean sus soluciones. Un grupo de alumnos[194] lo hace inmediatamente. Su procedimiento se basa en: dividir entre dos para el 50%; para el 25% y 10% escriben la fracción equivalente o identifican directamente la parte que representa cada porcentaje, luego dividen (cuarta y décima parte, respectivamente). El profesor observa lo que cada alumno plantea para resolver cada situación y les pide que coloquen sus respuestas en el cuadro correspondiente. Los cuadros comienzan a ser variados. Se observan casos en los que los alumnos escriben en la columna ‘rebajas’ el precio rebajado y no lo que equivale el porcentaje. Esto se hace evidente en los dos últimos productos; en el caso del pantalón podría pasar desapercibida dicha situación puesto que tanto ‘rebaja’ como ‘precio rebajado’ es la misma cantidad. En la columna ‘%’, todos coinciden en escribir el porcentaje que se rebaja. Otros, sin embargo, como Verónica, escriben en la columna ‘rebaja’ cantidades que no se ajustan a lo que se pide (el cincuenta por ciento de cuarenta, para Verónica, es ocho).

Una vez que el profesor ha visto que la mayoría de los alumnos ha resuelto la primera situación pregunta cuál ha sido el resultado en el primer caso. Iago responde que es veinte. El profesor pregunta cómo ha llegado a ese resultado y le pide que explique qué es lo que ha hecho. Iago responde que ha sacado la mitad. Al preguntar qué significa “sacar la mitad”, el mismo alumno responde que “es el cincuenta por ciento”. El profesor solicita otras opiniones, a lo que Enrique dice que “lo divide entre dos”.

Ante la misma propuesta, el profesor pregunta si a alguien le ha salido diferente; luego le pregunta directamente a Verónica[195] cuánto le ha salido y ella responde que ocho. El profesor le pide que explique qué es lo que ha hecho para obtener esa cantidad:

Profesor: Explica qué has hecho

Verónica: Dividí cuarenta entre cincuenta

Profesor: ¿Por qué? Ve al frente y haz lo que has hecho en tu folio

Verónica sale al encerado y escribe $40\left|\underline{\,50\,}\right.$; luego añade un cero a cuarenta.

Profesor: ¿Por qué has hecho eso?

Verónica: Es un truco que me ha enseñado mi madre para que pueda dividirse. Divido cuatrocientos entre cincuenta

---

[194] El grupo de alumnos está integrado por Enrique, Pablo, Elba, Iago y Lucía. La mayoría de alumnos halla el primer porcentaje y por lo tanto el primer precio rebajado.

[195] El profesor ha visto el procedimiento y resultados que ha obtenido Verónica en la resolución de la situación por lo que su solicitud es intencional.

Profesor: (Refiriéndose a toda la clase) ¿Qué hay que hacer cuando aparecen este tipo de divisiones en las que hay 'algo' que sobresale?[196]... Observen el dividendo que es…

Enrique: …menor

Profesor: … menor que el divisor. Bien

Asmaa': Hay que preparar la división

Profesor: … Lo que es conveniente, aunque no necesario. ¿Por qué divides entre cincuenta?

Verónica: Porque es el cincuenta por ciento

Profesor: ¿Eso es correcto?

Ante la pregunta, los alumnos responden que no; no obstante, Andrea P. comenta con su compañera (Asmaa') que "está bien" (lo que ha hecho Verónica) ya que "hay que dividir entre cincuenta" justificando que "si pides el 10% divides entre diez".

Verónica efectúa la división. El cociente obtenido es 80; sin embargo, añade un cero a la izquierda del ocho y el resultado se transforma en ocho décimas. Verónica mira su trabajo y mira al profesor, quien cuestiona su trabajo. La alumna queda en silencio y luego expresa que "está mal". ¿Por qué está mal?, pregunta el profesor. Verónica responde "porque no puede ser ocho. El profesor añade: "lo que has escrito es ocho décimas. No ocho". El profesor establece con la alumna un pequeño diálogo en el que retoma la pregunta original: ¿qué te pide? Verónica expresa que hallar el cincuenta por ciento. El profesor le pregunta qué significa el cincuenta por ciento y la alumna responde "la mitad" e, inmediatamente, añade "es que la mitad de cuarenta no es ocho".

El profesor retoma el significado de 50% (mitad) y pregunta si hay otra manera de escribirlo. Alba expresa que se puede escribir "cincuenta sobre cien". El profesor pregunta qué significa esa expresión: 50/100, escribiéndola en el encerado. La misma alumna responde que "cincuenta por ciento". El profesor cambia la pregunta: "¿Qué es 50/100?". Se escucha a varios alumnos responder que es una fracción. El profesor queda en silencio, luego pregunta cómo se busca la mitad.

El profesor pregunta a María, quien expresa que restó "cincuenta menos cuarenta" obteniendo diez. Algunos alumnos se miran entre sí y comentan que eso es incorrecto. El profesor pregunta a María porqué ha restado y ella responde "porque es una rebaja y hay que descontar". Se observó que Andrea P. había hallado que la rebaja era doce, aunque la alumna no lo manifestó públicamente. Andrea R. levanta la mano y dice que hay que dividir entre dos; esta alumna también obtiene veinte, como Iago. El profesor asiente y pasa al siguiente caso.

En el siguiente caso, el del libro que costó 8 € y se le rebaja el 25%, el profesor pregunta a Andrea P. cuál ha sido su respuesta. Andrea P. ha hallado que la rebaja es 32. Cuando el profesor le pide que explique ella expresa que ha hallado 8/100 de 25. Se genera el siguiente diálogo:

---

[196] Este tema ha sido tratado anteriormente, en casos de división por números naturales cuyo dividiendo es menor que el divisor.

Profesor: ¿Cuál es el precio del libro?

Andrea P.: Ocho euros

Profesor: ¿Cuánto tienes que rebajarle?

Andrea P.: Veinticinco por ciento

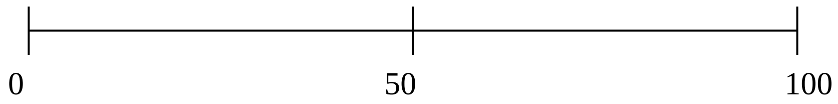
Profesor: ¿Cómo puedo expresar ese veinticinco por ciento?

Andrea P.: Veinticinco sobre cien

Profesor: ¿Por lo tanto los veinticinco centésimos de qué voy a hallar?

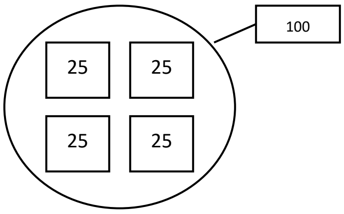
Andrea P.: De ocho

El profesor escribe la expresión "$\frac{25}{100}$ de 8" en el encerado. Acto seguido, el profesor pregunta a la clase si alguien más ha hallado la rebaja. Algunos alumnos levantan la mano pero es a Andrea B. a quien el profesor señala para responder. Esta alumna dice que "sale dos". El profesor le pregunta qué ha hecho y ella dice lo siguiente: "como veinticinco por ciento es un cuarto, dividí ocho entre cuatro". El profesor le pide que explique porqué dice que "veinticinco es un cuarto". La alumna responde: "Yo lo vi cuatro veces, entonces un cuarto, como es veinticinco así (indica con cuatro dedos de una mano), un cuarto". Al querer seguir explicando, la niña expresaba que sumó varias veces el 25, hasta 100, y se dio cuenta que fueron cuatro veces las que lo sumó. El profesor escucha la respuesta de Andrea B, luego pregunta a Lucía quien coincide con Andrea B. en la forma cómo ha hallado el veinticinco por ciento. Lucía expresa: "veinticinco… cuatro veces de cien". El profesor pide a la clase, en general, que expliquen la situación de tal manera que él la pueda entender ya que hasta el momento "no logra entender del todo lo que dicen". Pablo sale al encerado y traza la siguiente gráfica:



Luego, empieza a hacer divisiones pequeñas entre 0-50 y 50-100. Intenta que las divisiones se ubiquen en la parte central de cada bloque y escribe 25 en cada división. Luego une con una línea curva 0, 25, 50, 25y 100. Pablo escribe 25 entre 50 y 100, con lo que para él queda representado las veces que está 25 en 100.

El profesor observa la gráfica; el alumno, también y luego borra su dibujo. En el mismo lugar, dibuja un círculo y dentro de esa figura cuatro cuadrados escribiendo dentro de cada uno, 25 y luego indica que ese conjunto grande es 100; con lo cual queda representado que uno de los veinticinco representa un cuarto. La gráfica queda como sigue:



El profesor observa la gráfica de Pablo y escribe dos diferentes maneras de expresar que 25 está contenido 4 veces en 100. Para ello aprovecha la intervención de Andrea B. El profesor escribe en el encerado: 25+25+25+25=100; y debajo de esa expresión: 4x25=100. Inmediatamente plantea: “Si buscamos la manera inversa…”. Los alumnos observan pero no continúan la frase, con lo cual es el profesor quien lo hace y escribe en el encerado: 100:4=25 o 100:25=4. El profesor insiste en la primera forma: “100 entre 4 es 25. El 25 resulta de dividir cien en cuatro partes, ¿sí?”. Luego grafica de la siguiente manera:

25	25
25	25

Después de la gráfica concluye: “un veinticinco (señalando un recuadro) es un cuarto”. Vuelve a escribir: “25% = 25/100” y pregunta: “cuando una fracción nos indica con números más pequeño... ¿cómo se llama una fracción que valga lo mismo (pero) con otros términos? Los alumnos responden “equivalentes”. El profesor pregunta “¿entre qué números tendré que dividir para obtener una fracción equivalente?”. Lucía responde que entre 25. Luego, el profesor divide y coloca a la derecha de 25/100, ¼ y añade “Para hallar el 25% tengo que dividir entre cuatro”.

Se da por concluida la actividad anterior y se pasa a la siguiente, al precio de la sudadera. El profesor pregunta cuál es la rebaja y Lucía responde que la rebaja es 2, sin embargo Asmaa’ dice que es 1. El profesor pide a esta última que explique lo que ha hecho. La alumna dice que divide 20 entre 10. El profesor le pide que resuelva en el encerado, y que antes de dividir piense cómo es esa operación y qué características tiene. La niña resuelve y se da cuenta que es dos[197]. El profesor le pregunta por qué divide 20 entre 10 y qué significa el 10%. La alumna responde a la segunda pregunta: “de cien partes, coges diez: 10/100”.

El profesor pide a la clase si puede explicar lo que ha dicho la compañera. Enrique lo intenta, pero confunde la forma de expresar oralmente los centésimos, aunque luego rectifica y dice: “diez cienavos es una décima parte de cien”. El profesor concluye: “entonces 10 sobre100 es igual a 1 sobre 10”. El alumno asiente. El profesor vuelve a preguntar sobre la rebaja y el mismo alumno dice que es 2, añadiendo que la sudadera costará dieciocho euros.

El profesor propone otras situaciones aunque ahora conservando un mismo precio: 70 €, variando el porcentaje. El profesor pide, en primer lugar, que hallen el 10% de 70. Verónica dice que es “siete” justificando su respuesta al añadir que es “porque es el diez

---

[197] La niña sale al encerado y resuelve la división correctamente y acepta que es dos.

por ciento”. El profesor no queda convencido expresando que no es la justificación adecuada y vuelve a preguntar. Lucía expresa que es “porque es la décima parte”. Otras alumnas asienten. El profesor expresa conformidad y pide hallar el 20% de 70. Andrea B. dice que es “cinco”. El profesor pregunta: “si en 10% te da siete, en 20% ¿te da cinco? La alumna se queda pensando y asiente, por lo que el profesor le pregunta:

Profesor: Fíjate bien, ¿con el veinte por ciento, rebajas más o menos?

Andrea B.: Yo he pensado que si el diez por ciento es diez, el veinte por ciento es cinco

Profesor: El veinte por ciento, ¿qué es respecto del diez por ciento?

Andrea B.: El doble

Profesor: Entonces, si el diez por ciento de setenta es siete, ¿cuánto será el veinte por ciento?

Andrea B.: … cinco

Profesor: Piensa un poco. Si el porcentaje es mayor, ¿el descuento es mayor?

Andrea B.: Sí

Profesor: Por lo tanto, dónde compraré: ¿en una rebaja del diez por ciento o del veinte por ciento?

Andrea B.: Del veinte

Profesor: ¿Por qué?

Andrea B.: Porque pagas menos

Profesor: Entonces, ¿es posible que si te van a descontar el veinte por ciento te descuenten cinco?

Andrea B.: Es que por el diez por ciento es siete entonces por el veinte es cinco… es menos… lo que pagas

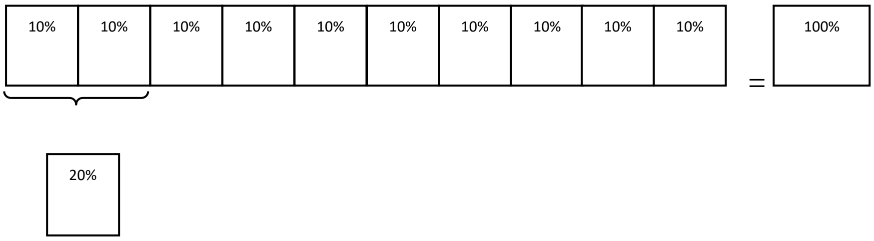
Profesor: El porcentaje no te indica lo que pagas, sino lo que descuentan. Si descuentan diez pagas sesenta y tres, ¿verdad?

Andrea B.: Sí

Profesor: Si te descuentan veinte, en el que dices que es cinco, pagas sesenta y cinco… ¿Pagas más?

Andrea B.: …

No hay tiempo para más y la clase termina. El profesor comenta al día siguiente que la alumna logra entender la situación de la siguiente manera: “Le propuse graficar el diez por ciento. Andrea dibujó un rectángulo y lo dividió en diez partes iguales. Le pregunté qué representaba cada parte y me dijo que diez. Le dije que lo escribiera, por lo que a cada parte le puso diez por ciento. Luego le pregunté qué pasaba si juntaba dos “diez por ciento", señalando los dos primeros[198] y Andrea me dijo que era veinte. Le pregunté a cuánto equivalía el veinte por ciento y me dijo que era catorce; entonces le dije que catorce era diferente que cinco; luego Andrea añadió: "Yo estaba mal, tenía que duplicar la cantidad y no hallar la mitad; estaba dividiendo entre dos". Como ella dividía entre dos el diez le pregunté por qué dividía diez entre cinco. Entonces ella me dijo que estaba mal, que había que multiplicar siete.



---

[198] El profesor une los dos primeros rectángulos con llaves, como queda expresado en el gráfico.

Sesión 6 / Caso 1

Viernes, 22 de febrero de 2008. Hora: 9:55 – 10:50.

La clase empieza con un repaso de todo lo que se ha visto sobre porcentajes y su relación con las fracciones. Para ello, el profesor pregunta a los alumnos ¿qué es el porcentaje de ‘algo’? Espera un momento, quizá que los estudiantes respondan y como observa que ninguno levante la mano para participar reduce la pregunta a la siguiente: ¿qué es un porcentaje?, y añade ¿qué es el tanto por ciento? A su vez, escribe el símbolo (%) en el encerado.

Andrea P. responde: “Que te descuenten algo”. El profesor pregunta a la clase si están de acuerdo con esa respuesta y que expresen por qué. Daniel[199] dice que no porque “si te descuentan algo tiene que llevar un número como veinte por ciento o cincuenta por ciento”, señalando el símbolo que había escrito el profesor en el encerado y mostrando que no especificaba una cantidad. El profesor sigue esperando más intervenciones. Los alumnos orientan sus respuestas hacia la relación de porcentajes con descuentos o rebajas, contexto en el que han empezado a trabajar el tema. Raúl añade a las ideas la palabra ‘total’ (‘del total’), que amplía lo expresado por sus compañeros: “del total te sacan dinero”. El profesor observa esta orientación (rebajas) y quiere que los alumnos transfieran el tema a otros contextos (que no relacionen los porcentajes únicamente con los descuentos). Para ello, pregunta en qué situaciones han visto ese signo (%) y les recuerda la actividad que tuvieron que hacer en la que se les pedía que encierren en la prensa[200] los títulos y subtítulos de las noticias que incluía información en porcentajes. Para ello, los alumnos comienzan a mirarse entre sí, intentando recordar lo que habían hecho. Pablo coge uno de los diarios que hay en el aula y empieza a buscar. El profesor orienta a que toda la clase siga la actitud de Pablo.

Los alumnos empiezan a expresar diferentes titulares en los que los porcentajes están presentes, a la vez el profesor pregunta si saben a qué se refiere cada uno. Por ejemplo, el primer caso fue el de Elba que expresó que “cae 20% las ventas”. Por su parte Nerea dice el “80% de las elecciones”. Andrea B. se refiere a “la cuota de mercado” y a la “baja de los termómetros” sin expresar porcentajes específicos. Lucía sitúa los porcentajes en una noticia sobre las encuestas mientras que Asmaa’ indica que: “subió 4% la bolsa”; por su parte Andrea R. se refiere a la “venta de genéricos”. En un caso, la alumna expresa con sus propias palabras lo que significa esa idea (porcentaje), en el ejemplo que ha encontrado, en el que dice que “cae 20% las ventas”: significa que estas han disminuido: “las ventas han disminuido”. Los otros casos no fueron explicados o interpretados por los alumnos. El profesor pregunta por el término genérico, pero los alumnos no responden. El profesor menciona la sigla ‘TAE’ y su relación con los porcentajes. Los alumnos quedan en silencio y es Andrea B. quien pregunta qué significa; el profesor intenta explicar la idea con palabras sencillas y los alumnos quedan, o siguen, en silencio.

A medida que los alumnos van expresando las distintas situaciones, el profesor intenta explicar cada una y categorizarlas en diferentes grupos. La mayoría de las noticias se

---

[199] Daniel es un alumno que no participa mucho, de hecho la mayoría de veces lo hace porque el profesor lo llama; sin embargo, hay momentos en que su participación es espontánea.

[200] Se entiende por prensa al conjunto de publicaciones periódicas (llamados ‘periódicos’), especialmente las diarias (conocidos como ‘diarios’) que informan sobre distintos acontecimientos y situaciones de interés público.

relacionan con la economía. En algunos casos, las noticias sobre porcentajes no expresaban disminución, sino subida. Esto fue aprovechado por el docente para que los alumnos descubrieran que los porcentajes no sólo indican disminución, sino que puede hacer referencia a un aumento. El profesor puso el caso concreto de las multas y los pagos posteriores a las fechas pactadas:

Profesor: ¿En este caso, el pago aumenta o disminuye?

Enrique: Aumenta

Pablo: Hay que aumentar el precio

Profesor: Ya no hace referencia a disminuir el precio

Andrea R.: No, porque tiene que pagar una multa

Profesor: Exacto

El profesor concluye, a partir de las diferentes noticias expresadas por los alumnos, y de la situación concreta de las multas, que los porcentajes se utilizan en las rebajas y en otras situaciones,…para posteriormente volver a preguntar: tanto si es descuento como recargo, ¿qué es el porcentaje?, ¿qué es el 20% de algo? (ambas preguntas las escribe en el encerado). Se establece el siguiente intercambio de preguntas y respuestas entre el profesor y varios alumnos:

Profesor: ¿Qué es el 20% de algo?”

Pablo: la quinta parte.

Profesor: ¿Qué es la quinta parte?

Pablo: Una cosa dividida en cien partes y coges veinte.

Lucía: de cien partes, veinte.

Profesor: ...o veinte de cada cien... ¿Y el 70%?

Asmaa’: Setenta de cada cien.

Profesor: ¿y el 20%?[201]

Alba: veinte centésimos

Enrique: Un quinto.

Profesor: ¿Y el 50%?

Iago: Cincuenta centésimos

Profesor: ¿de qué otra forma se puede representar?

Raúl: Un medio

Profesor: ...es decir que cualquier porcentaje se puede escribir en forma de fracción. ¿Y el 70%?

---

[201] El profesor repite la pregunta.

Enrique: setenta sobre cien.

Profesor: ¿De qué otra manera se puede representar 70%?

Enrique y Pablo: siete décimos.

Para sistematizar lo que los alumnos están haciendo (convertir porcentajes en fracciones), el profesor vuelve a expresar que “cualquier porcentaje se puede escribir en forma de fracción”. Los alumnos asienten. Luego, el profesor pregunta: “¿Y qué utilidad tiene? (refiriéndose a escribir un porcentaje en forma de fracción), ¿lo necesitamos?, ¿nos conviene?”. Los alumnos empiezan a expresar sus ideas. Andrea B. dice que “para saber el dinero que nos rebajan”. Con la mirada, el profesor pide más ideas. Enrique contesta: “porque es más fácil trabajar con fracciones”. Una tercera idea, expresada por Pablo, “porque podemos hacer las operaciones más fácilmente que con el porcentaje”, expresa la forma matemática de conocer la cantidad que representan.

El profesor plantea la siguiente interrogante: ¿el cincuenta por ciento de sesenta euros? (lo escribe en el encerado: “50% de €60”. Se establece el siguiente intercambio de palabras:

Profesor: ¿El cincuenta por ciento de sesenta euros?

Enrique: Treinta euros.

Profesor: ¿Cómo lo hiciste?

Enrique: Dividiendo entre dos.

Profesor: ¿por qué divides entre dos?

Enrique: Porque es la mitad.

Profesor: (El profesor cambia la situación) ¿El veinticinco por ciento de sesenta?

Pablo: Cuarenta y cinco.

Profesor: ¿Por qué cuarenta y cinco?, ¿qué has hecho?

Pablo: Dividí sesenta entre cuatro

Profesor: ¿Y sesenta entre cuatro te da cuarenta y cinco?

Pablo: Sí[202].

Profesor: Piensa lo que dices.

Raúl: Yo dividí sesenta entre veinticinco y multipliqué por uno.

Eduardo[203]: Entre cuatro. Se divide entre cuatro porque es un cuarto.

Profesor: ¿Veinticinco es un cuarto? ¿De qué es un cuarto?

Eduardo: De cien.

---

[202] Al preguntársele a Pablo porqué dijo que era 45, el alumno respondió que “era lo que tenía que pagar”. Se le dijo que eso no se le preguntaba. Observó el encerado y dijo: “es quince”.

[203] Eduardo es un alumno que no asiste regularmente a la escuela.

Profesor: Es un cuarto de cien… No de quince (mira a Pablo) ¿cómo sabes que es un cuarto? ¿De dónde lo sacaste?

Eduardo: Sumo veinticinco, veinticinco...

Profesor: Eso es lo que hizo Andrea en la clase pasada.

Pablo: Divides cien entre cuatro.

Profesor: ¿De qué otra forma podemos expresar el 25%?

(Los alumnos empiezan a decir las formas que saben: 25/100; ¼; en letras)

Profesor: ¿Cómo sé que es un cuarto?, ¿qué hago?

Lucía: Divides entre 25 el numerador y el denominador.

Profesor: Busco una fracción equivalente.

El profesor propone una actividad relacionada con los porcentajes: “hallen estos porcentajes”. El profesor hace una lista como la siguiente:

50% de 20

50% de 60

50% de 80

Los alumnos manifiestan lo que significa cada una de las expresiones anteriores y lo hacen de manera correcta[204]. A continuación, el profesor les pregunta: ¿La clase de rebaja es la misma? Los alumnos responden que no (se fijan en el resultado de la operación). El profesor busca otra respuesta y hace referencia a los significados de las siguientes palabras y expresiones: precio inicial, precio final, precio rebajado, rebaja, porcentaje de la rebaja. Luego de las explicaciones del profesor, este pregunta cómo es el porcentaje que se descuenta en cada artículo. Los alumnos no saben qué responder; luego el profesor pregunta qué porcentaje se rebaja en cada caso (pregunta caso por caso). Los alumnos responden y concluyen que se rebaja lo mismo (50%). El profesor hace referencia a esta conclusión y pregunta: si el porcentaje es el mismo en cada uno ¿de qué depende que las rebajas sean distintas? (refiriéndose a la cantidad que se rebaja). Lucía responde que depende del precio. El profesor pregunta qué precio y ella añade que del precio original. El profesor repite la idea para toda la clase: “luego, la rebaja y el precio final dependen del precio original”.

El profesor propone otras ‘rebajas’: “me van a hallar la rebaja de cada producto”, y escribe los porcentajes y los precios originales:

10% de 40 €

20% de 20 €

50% de 8 €

---

[204] Los alumnos son los que generalmente que participan en clase. En algún caso, el docente preguntó a la alumna Francia y a Daniel, quienes son los que menos intervienen y estos respondieron correctamente.

Enrique encuentra el primer porcentaje: 4 euros. El profesor le pregunta por qué son cuatro euros y él responde que dividió entre diez. El profesor pregunta al mismo alumno porqué divide cuarenta entre diez y si ese diez es el mismo que aparece en el porcentaje. El alumno responde que sí. Luego le pide al mismo alumno hallar el siguiente porcentaje y éste le dice que es uno. Enrique siguió el mismo procedimiento que en el caso anterior, sin lograr darse cuenta de su error, aun cuando el profesor lo mira con interrogación. El compañero de éste, Iago, que estaba diciéndole lo que tenía que hacer interviene. El profesor le pregunta cómo se hace y éste dice que sale cuatro "porque es la quinta parte y se divide entre cinco".

El profesor pregunta a la clase "qué nos manda a hacer 1/10 como operador". Los alumnos responden lo que han aprendido: "se divide entre diez y se multiplica por uno. El profesor pregunta: "¿de qué otra manera puedo representar el 20%? Enrique responde: 20/100. El profesor añade que esa manera es la "real" y escribe 20%=20/100.

El profesor pide a los alumnos que observen los últimos casos y digan en cuál de ellos se hizo mejor compra. Andrea B. opina que en el primero (10% de 40 = 4) porque el precio es el mayor. Raúl expresa que en el tercero (50% de 8 = 4) porque es el que cuesta menos (refiriéndose al precio final). Iago piensa que el tercero, también, aunque su razón se orienta hacia que "se rebaja la mitad y la rebaja es más". Por su parte, Asmaa' piensa que en ninguno hay una mejor rebaja porque "se rebaja lo mismo". Esta alumna asocia la rebaja con lo que paga puesto que asumió que los cuatro euros que se obtenía en cada situación era lo que se pagaba. Para resolver esta confusión el profesor pregunta a la clase si lo que dice la alumna es correcto; la clase responde que no. El profesor le explica a la alumna que lo que se ha obtenido es lo que se rebaja y pregunta a la clase cuánto hay que pagar por ese producto (señalando el primer producto). Enrique responde que €36.

A propósito de esa situación, y aprovechando la intervención de Asmaa', el profesor pregunta cuánto le habrían descontado en el supuesto caso de pagar 4 euros: "el precio era cuarenta y se paga, ya sea porque se ha equivocado, cuatro euros". Pablo responde que noventa por ciento. A modo de resumen, el profesor expresa que el 10%, en euros, de cada 100, es 10.

Para sintetizar, el profesor pregunta de qué depende el precio final (una vez resueltos cada porcentaje). Los alumnos ofrecen dos respuestas de manera independiente: del precio original y del porcentaje. El profesor hace referencia a las dos situaciones expuestas anteriormente (el mismo porcentaje en distintas cantidades y el mismo valor en diferentes cantidades y porcentajes. En el primero resalta que es el mismo porcentaje pero la rebaja es distinta dado que el precio es diferente y en el segundo ambos son distintos. Al final, el profesor añade "influyen el precio original y el porcentaje, por lo que el precio final depende del precio original y del porcentaje". Andrea R. añade que "si el precio original es mayor, la rebaja es mayor", Enrique interviene y dice que "si el porcentaje es el mismo, depende el precio", mientras que Andrea B. dice que "pueden haber rebajas iguales".

El timbre suena y la sesión concluye, más – antes de finalizarla completamente – el profesor recalca lo anteriormente dicho, aunque sin intervención de los alumnos y entrega una ficha de trabajo para que la trabajen en sus casas. El profesor les dice que como ya han ido a diversas tiendas no necesariamente tienen que ir nuevamente para responder las preguntas que se plantean en dicho anexo.

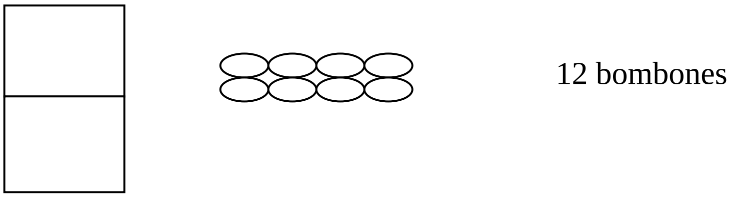
Caso 2

Sesión 1 / Caso 2

Viernes, 15 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

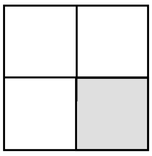
La clase empieza con la revisión de los *ejercicios* del libro sobre equivalencia de fracciones. Algunos alumnos salen al encerado para representar las fracciones y comprobar si son equivalentes. Para ello dibujan las gráficas del libro, dividen como indica la actividad, escriben la fracción que representa y comprueban gráficamente si son equivalentes. La alumna que salió al encerado se confundió al representar gráficamente las fracciones equivalentes, a partir de una dada, pero luego lo entendió. Los alumnos también saben (conocimiento adquirido) que si se multiplica o divide por un mismo número cada elemento de la fracción, la nueva fracción es equivalente a la anterior. En el transcurso de las correcciones, la profesora indica a los alumnos lo que tienen que hacer.

La corrección termina y la profesora introduce una nueva forma de interpretar la fracción: como operador. Para ello, declara el tema explicando a grandes rasgos en qué consiste lo que van a aprender y que esto será útil posteriormente. La maestra expresa la idea de que la fracción puede funcionar como operador y plantea una *situación ficticia* en que una de las alumnas, a propósito de haber sido su cumpleaños, decide invitar a tres amigos a su casa; la maestra le pide a la niña que escoja a tres compañeros de la clase. Una vez escogidos la maestra les dice a los cuatro que salgan y se sitúen delante del encerado. Continuando con la situación ficticia, la maestra supone que como la madre es atenta decide hacerles dos tortas de diferente sabor (chocolate y nata), ocho pastelitos y doce bombones; luego, dibuja en el encerado dos rectángulos que representan las dos tortas y ocho óvalos pequeños, escribiendo “12 bombones”. Luego, dirigiéndose a la niña, le dice que tiene que repartir lo que la madre ha preparado entre los invitados, incluyéndose a ella.

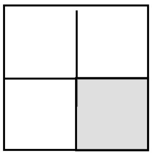


La niña divide cada torta en dos partes, “así le corresponde a cada uno la mitad de una torta”. La maestra le dice que no, porque puede ser que quieran de las dos clases, de ahí que tiene que distribuir ambas tortas para todos. Una de las ‘invitadas’ dice que a ella no le gusta de chocolate. La maestra les hace suponer que todos quieren de las dos clases. Ante estas observaciones, la alumna divide en cuatro partes cada torta.

Una vez que los dos rectángulos están divididos, la maestra le pide que indique la parte que le corresponde a uno de los invitados y que lo represente. La alumna pinta una de las cuatro partes en cada rectángulo y escribe $\frac{1}{4}$ en el primero y en el segundo representa la suma: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$.



$\frac{1}{4}$

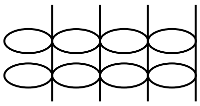


$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

Algunos de los alumnos que están sentados piensan que se come 2/8 ya que sus respuestas así lo evidencian. Una de las alumnas que está sentada lo hace explícito; no obstante, la profesora indica que no, porque “un cuarto más un cuarto son dos cuartos”.

Acto seguido, la profesora pregunta a la alumna del encerado cuántos pastelitos tocará a cada uno. La alumna responde directamente que son “dos”. La profesora acepta la respuesta y le pregunta cómo puede representar dicha cantidad, “lo que le corresponde a cada uno, en términos de fracción”. Las respuestas no son inmediatas y los estudiantes se miran desconcertados. En ningún caso, se observa una respuesta según la propuesta de la docente; los alumnos solo escriben el número entero.

La profesora insiste en representar en fracción la cantidad que le corresponde a cada persona, indicando a la alumna que divida como en el caso de las tortas y “haciendo referencia a los *grupos* que se pueden formar”. La alumna divide haciendo una línea vertical entre cada ‘pastelito’.



Después de varios intentos por representar lo que le corresponde a cada uno en términos de fracción, la alumna escribe: $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$. Luego borra el resultado y escribe 4/8. Los alumnos no muestran este procedimiento en sus folios. La maestra va indicando lo que la alumna debe hacer asociando a lo que hizo en la primera gráfica. Se genera el siguiente diálogo:

Maestra: ¿Qué hiciste para repartir la torta?

Alumna: La dividí en cuatro.

Maestra: ¿Qué tienes que hacer ahora?

Alumna: Dividirlo entre cuatro.

Maestra: Hazlo[205]… ¿cuánto te sale?

Alumna: Dos

---

[205] La alumna hace las divisiones respectivas, como se indica en la imagen.

Maestra: No, en fracción

Alumna: …

Maestra: (se acerca al encerado) Si divides entre cuatro (señala lo que ha hecho la niña), cada parte (señalando) corresponde a cada uno de vosotros, ¿cuánto le corresponde a uno de vosotros?

Alumna: Dos

Maestra: En fracción… ¿si son CUATRO y UNO le das a tu compañero?

Alumna: Un cuarto

Maestra: Un cuarto… ¿de cuánto?

Alumna: … de dos (ve los pasteles en el recuadro)… de ocho (ve el total).

Maestra: …

Alumna: Dos octavos.

La maestra acepta dos octavos como respuesta y asocia la fracción con la cantidad total de pastelitos que son ocho, escribiendo: 2/8 de 8 y expresando: “esto es la cantidad de pastelitos que le corresponde a cada uno”. A partir de la gráfica, algunos niños de la clase, expresan “un cuarto” en lugar de “dos octavos” como lo hizo la alumna. La profesora vuelve al gráfico, se centra en la niña y va señalando la división de la gráfica que hizo, estableciéndose el siguiente diálogo:

Maestra: Si divides todo entre cuatro, ¿cada una es…?

Alumna: Dos

Maestra: Observa lo que hiciste con las tortas, las dividiste entre cuatro y cada una es…

Alumna: Un cuarto

Maestra: Entonces, si estos los divides entre cuatro cada uno es…

Alumna: Un cuarto

Maestra: Un cuarto de… ¿Cuántos pasteles son en total?

Alumna: Ocho

Maestra: Un cuarto de ocho. Un cuarto de ocho es dos[206].

Después del diálogo, la maestra pregunta a toda la clase cuántos pastelitos corresponderán a dos niños. Los alumnos aún asocian a cantidades expresadas mediante números naturales, indicando que les toca cuatro pastelitos, a lo que la profesora insiste que lo digan mediante fracción. Los niños del encerado piensan y sus respuestas oscilan entre un cuarto y dos cuartos sin decidirse en primera instancia por ninguna. La profesora vuelve a indicar que a un alumno le corresponde un cuarto, señalando a uno de los niños,

---

[206] Lo escribe en lenguaje matemático

luego señala otro, expresando que le corresponde un cuarto también; al final los junta[207] y pregunta cuánto le corresponde a los dos, con lo que los alumnos responden “dos cuartos”.

La profesora asocia cada fracción (1/4 y 2/4) con la cantidad de pastelitos totales y la cantidad de pastelitos que corresponden. Para ello escribe en el encerado:

$$\frac{1}{4} \text{ de } 8 = 2$$

$$\frac{2}{4} \text{ de } 8 = 4$$

A partir de esta explicación y señalando las últimas expresiones, la profesora centra la actividad en manifestar que la fracción está actuando como operador de un número, en el caso de los pastelitos, y que este número es “8”. Los alumnos atienden y no comentan. La profesora vuelve a la primera gráfica (la de las tortas) y asocia la fracción con la cantidad de tortas expresando: “2/4 de 2 (tortas). En este caso 2 indica el número de tortas”. Los alumnos se miran sorprendidos.

La profesora pide a los alumnos que observen las expresiones anteriores; luego indica, señalando la segunda expresión: $\frac{2}{4} de 8 = 4$, que primero tiene que dividir la cantidad y luego multiplicarla por las partes que corresponden según a cuántos hay que repartir. La profesora escribe en el encerado lo que ha expresado, de la siguiente manera: (8:4) x2=4. Luego dice: “es la forma de averiguar la fracción de una cantidad”.

Después de la intervención anterior, la maestra pregunta por la cantidad de bombones (que son doce): “¿Cuánto es los 2/4 de la caja de bombones?” Los alumnos no saben qué hacer pero uno de ellos[208] asocia con las operaciones que realizó la maestra y dice: “divides entre 4 y lo multiplicas por 2”. Los niños asienten y lo hacen en el encerado. El resultado es 6. La maestra pide que comprueben con un dibujo. Los alumnos dibujan, siguiendo el esquema de los pastelitos. En algunos casos, los alumnos reestructuran la distribución de los “bombones”; en estos, la división gráfica es más sencilla.

El tiempo se agota y la sesión termina.

---

[207] La profesora une a los niños, intentando que la alumna, y la clase en general, ‘junten’ las expresiones numéricas.

[208] Que estaba castigado por hacer desorden, pero que sin embargo, había estado atento a la explicación de la profesora.

Sesión 2/Caso 2

Lunes, 18 de febrero de 2008. Hora: 09.55 – 10.50. Colegio A

Se da un repaso a la clase anterior sobre la fracción y su interpretación como operador, indicando qué tipo de operación se realiza con cada elemento de la fracción. Luego la profesora facilita algunas situaciones “de la vida diaria” para que los alumnos indiquen en términos de fracción. Por ejemplo: ¿cuántos días de la semana son?, ¿cuántos días tienen inglés? (a propósito, los alumnos regresaban de la clase de inglés), ¿cómo lo expresamos como fracción? Ante esta pregunta, los alumnos manifiestan “tres séptimos”. Luego con relación a los meses del año y los meses de las vacaciones de verano, los alumnos responden “tres doceavo”[209].

A continuación, la profesora, retomando el tema de la clase anterior, les comenta que la idea de fracción como operador puede aparecer en varias “situaciones concretas” y facilita el siguiente ejemplo específico: “Supongamos que nuestro dinero ahorrado es de treinta euros y Nerea 1[210] quiere gastar un tercio de su dinero en su hermanito pequeño. Los alumnos comentan lo que puede comprar Nerea para su hermanito, básicamente mencionan: juguetes y ropa; la maestra permite que los alumnos expresen sus ideas; luego le pregunta a la alumna: ¿cuánto gastas en tu hermanito?” La maestra le pide a Nerea 1 que salga al encerado y represente la cantidad que gasta en el hermanito.

La alumna sale al encerado y, sin hacer cuentas ni representar mediante gráficos, dice que gasta 10 euros. La profesora le pide que lo exprese como fracción; luego la alumna escribe un tercio, en términos de fracción, en el encerado. La profesora le dice que la expresión (lo que ha escrito) no está bien, que “le falta algo”. La alumna no entiende qué debe escribir y, aunque intenta, no añade nada; algunos alumnos de la clase expresan, de forma oral que la expresión es “un tercio de treinta”. La profesora asiente la intervención de los alumnos y le dice a Nerea que lo escriba en el encerado. La alumna, luego de fijar su mirada en la maestra, en los estudiantes y en el encerado, añade un cero al denominador de la fracción, con lo que se transforma en 1/30. La profesora niega esa expresión y le insiste que no es lo que debe hacer. La profesora vuelve a plantear la situación, resaltando que gasta “un tercio de treinta”, y la alumna escribe la expresión de la siguiente manera: “ $\frac{1}{3} de 30$ ”.

A la expresión anterior, la alumna añade “= 10”, quedando de la siguiente manera: “ $\frac{1}{3} de 30 = 10$ ”. La profesora acepta lo que ha escrito Nerea, manifestando que es correcta la expresión, luego añade que “como los números son sencillos es fácil hallar el resultado”; acto seguido le pide a la alumna que explique qué es lo que ha hecho con los treinta euros. La profesora, dirigiéndose a toda la clase, insiste en que cada alumno no sólo debe resolver sino que debe explicar lo que va a hacer y luego cómo lo hace. La alumna, con un poco de recelo[211] explica: “divido treinta entre tres”.

Antes que la alumna continúe, la profesora le pide que represente gráficamente en el encerado lo que ha expresado: “representa lo que has dicho”. La alumna mira el encerado

---

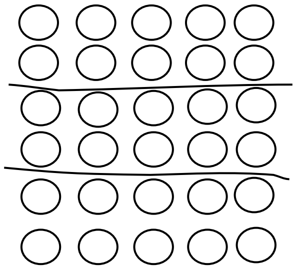
[209] No se especifica el alumno, puesto que fueron varios a la vez.

[210] La maestra se dirige a la alumna.

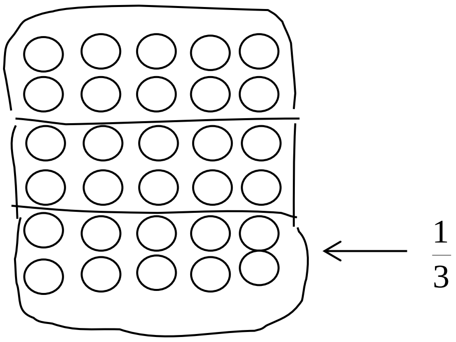
[211] Su intervención no es espontánea y duda en cómo manifestarlo, ya que inicia su intervención y se corrige.

y observa a la profesora; aparentemente, no sabe qué graficar. Al ver que la alumna no da respuesta, la maestra le especifica que grafique las monedas, y la alumna dibuja 10 círculos. La maestra le pregunta por qué dibuja diez monedas; luego Nerea responde que es lo que gasta en el hermanito. La profesora le dice que represente todo el dinero; es decir, los treinta euros. La alumna dibuja más círculos hasta que completa treinta. Luego la profesora le pide que explique qué ha hecho y la alumna encierra 10 círculos. La profesora le indica que lo haga con todas las monedas[212].

La alumna hace tres grupos iguales con los treinta círculos, separándolos equitativamente mediante dos líneas. La imagen queda representada de la siguiente manera:



La profesora le pregunta directamente qué hizo. La alumna manifiesta que "los divide entre tres"; luego, la profesora le pide que lo exprese correctamente en el dibujo. La alumna hace tres divisiones, encierra los círculos y señala la parte que indica el gasto (un tercio).



Luego, la profesora le pregunta cuánto le queda. La alumna le dice, inmediatamente, que veinte. La maestra le manifiesta que lo exprese como fracción, especificando la parte en el dibujo que indica lo que le queda. La alumna señala "las monedas" restantes; acto seguido, la profesora le pregunta qué fracción es esa. La alumna expresa que son "dos tercios". La profesora intenta que complete la frase: "dos tercios de…" La alumna completa la frase: "dos tercios de treinta" y la escribe en el encerado. La profesora continúa y sintetiza: "dos tercios de treinta es igual a veinte euros".

Observando la expresión anterior: $\frac{2}{3} de 30 = 20$, la profesora pregunta cómo saber que son veinte euros. La misma alumna responde que se divide y se resta. Uno de los alumnos dice que se suma. La profesora pregunta a la clase si están de acuerdo. Un grupo de alumnos responde que no; Lucía es quien argumenta expresando que se multiplica por

---

[212] Es decir, que agrupe las monedas en grupos de diez. Lo primero que tiene que hacer es hacer tres grupos con las treinta monedas y seleccionar uno de los grupos (1/3), que representa lo que gasta.

dos. La profesora le pregunta a la alumna del encerado si ha entendido. La alumna asiente. La profesora le dice que regrese a su carpeta.

La profesora propone otro ejemplo: "Un libro tiene 75 páginas y leí los 2/5 del libro, ¿cuánto leí?". Los alumnos levantan la mano[213]. La profesora le propone a Emilio salir al encerado. El alumno sale y expresa: "setenta y cinco entre cinco", escribiendo la operación. La profesora le pregunta al alumno por qué divide; luego, el alumno responde: "porque se hacen cinco partes… se reparten todas las páginas en 5 grupos". La profesora le dice al alumno que después de la división coloque el signo igual. El alumno responde: "15 páginas ha leído". La profesora mira al alumno y éste observa su trabajo. Lucía dice que 15 es 1/5. La profesora añade: "eso sería cada una de las 5 partes": 1/5. La profesora vuelve a preguntar: "¿cuánto he leído?". El alumno responde que ha leído "2/5". La profesora pregunta, ¿qué hay que hacer? Los alumnos responde: "sumar". La profesora añade: "sumar… o multiplicar. Han tenido que dividir por lo que me indica el denominador… y multiplicar por lo que me indica el numerador". El alumno realiza la operación y luego se sienta.

La profesora propone una hoja de actividades (anexo 2). Para ello les entrega el folio y les dice que en el segundo ejercicio cambien 5/3 por 3/5. Los alumnos no saben qué hacer y lanzan diferentes inquietudes[214]. La profesora les dice que primero observen el primer ejercicio, que está resuelto, ya que "es el que va a indicar cómo hacer los siguientes".

Los alumnos siguen sin entender. La profesora les pide que observen el primer ejercicio y pregunta cuántos triángulos hay. Los alumnos dicen "tres" refiriéndose a los tres de color que hay. La profesora pregunta por la cantidad total de triángulos y los alumnos responden: "veintiuno". La profesora explica lo que se ha realizado en el primer ejercicio haciendo alusión a lo que se ha estado trabajando en clase. Les dice que ellos pueden hacer los dibujos que quieran.

La profesora propone que los alumnos realicen la hoja de ejercicio de forma individual y se acerca a cada uno de ellos para observar qué es lo que están haciendo y corregir si es posible. Los alumnos intentan dibujar la cantidad indicada en cada ejercicio; sin embargo, les es difícil graficar la fracción que se indica. La mayoría comete equivocaciones y en todos los casos corrige. Aparentemente los alumnos no comprenden lo que tienen que hacer o cómo deben hacerlo. La profesora intenta que, retomando la explicación del primer ejercicio, los alumnos puedan comprender los demás; para ello, les explica que hay siete grupos de tres, como lo indica el denominador y que se ha pintado uno, como lo indica el numerador. Los alumnos retoman sus folios e intentan representar gráficamente "tres quintos de quince", en algunos casos, dibujan de tres en tres[215], de manera ordenada (en filas y columnas); en otros, lo hacen sin un orden observable (de acuerdo al espacio y tamaño de cada dibujo). A partir de sus gráficas, los alumnos pintan tantos grupos como indica el numerador: un grupo lo hace a partir de las colecciones establecidas según interpretan el denominador de la fracción (por ejemplo, si el denominador es cinco, realizan grupos de cinco – imagen "a"; otro, agrupan según resulte

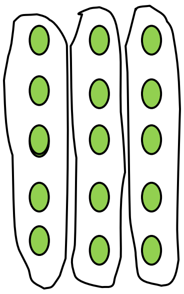
---

[213] Actitud que adoptan cuando quieren intervenir.

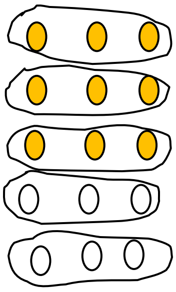
[214] Se escucha decir que no entienden o no han visto lo que el folio les presenta. Uno de los alumnos manifiesta recordar algo.

[215] El ejercicio propuesto en el folio dice "cinco tercios de quince". Aun cuando la docente ha propuesto que cambien cinco tercios por tres quintos, algunos alumnos trabajan en función de lo escrito en el ejercicio.

de dividir el número entre el denominador (siguiendo el ejemplo: quince entre cinco – imagen “b”:



a



b

La maestra corrige algunas propuestas, sobre todo aquellas en las que los estudiantes consideran el denominador como la cantidad de cada grupo.

Una vez finalizada la actividad anterior, la profesora les propone a sus alumnos que inventen una situación en la que se aplique lo que han visto. Los alumnos intentan pensar en un *problema*[216] y lo van escribiendo en sus fichas. La profesora le dice a Lucía que lea para todos *el problema que ha planteado* y saque a alguien a resolverlo. La alumna lo lee, escribe los datos en el encerado y señala a Raquel para que lo resuelva. El problema que propone es el siguiente: Antonio hizo un viaje en su coche. El depósito tiene 63 litros y gastó 5/7 de 63. ¿Cuántos litros gastó?”.

Como en casos anteriores la alumna escribe directamente la operación (u operaciones) que resuelve la pregunta:

63:7=9

9x5=45.

No obstante, la profesora desea que vaya por partes; es decir, que primero explique lo que tiene que hacer y luego realice las operaciones. Raquel expresa, en palabras, lo que ella considera que debe hacer y que se asocia directamente con las operaciones que ha realizado: “primero tengo que dividir sesenta y tres…”. La profesora evita que continúe y le dice: “primero tienes que analizar lo que te piden”. La alumna, luego de un momento, responde: “… hacer grupos de siete”. La profesora, señalando la fracción, pregunta. “cada una de estas partes, ¿cuántos son? Los alumnos manifiestan varias respuestas: “cinco”, “siete”… “nueve”, en relación a las cantidades implicadas. Luego, la profesora pregunta: “¿Qué quiere decir 5/7?”; los alumnos no responden, aunque se miran entre sí, acto seguido, la misma profesora responde y pregunta: “que de siete partes cojo cinco…y estas siete partes cuántos litros son?”. La alumna responde: “divido 63:7”. La maestra pregunta: “¿cuánto vale cada uno de los siete apartados?”… ¿cada una de esas partes cuánto sale?” La niña responde “nueve”. La maestra completa la frase: “una parte, nueve litros”, luego pregunta: ¿cuántas partes gastó? Los alumnos responden 5/7… Si uno son 9 litros, ¿cuánto es en total? La alumna opera “nueve por cinco” y responde.

---

[216] Se le pregunta a la alumna qué hace y ella responde que “pensando en un problema”

La profesora le pregunta a la alumna que salió a resolver el problema de la compañera si ha planteado un problema y ella responde que sí; luego lee[217]. La profesora, luego de escuchar la propuesta de la alumna, le pregunta cómo se representa “la tercera parte” (que es un aspecto del problema) como fracción. Los alumnos dan diferentes respuestas: $\frac{3}{7};\frac{3}{4};\frac{3}{5};\frac{1}{3}$. Le pregunta a la alumna como lo haría y ésta responde: “el resultado… haría dibujar 10 columnas y coger 3” Se desiste del problema ya que la alumna expresa que no está segura. La profesora tampoco insiste.

La profesora pregunta a Emilio si tiene algún problema propuesto; el alumno sale al encerado, lee su propuesta y escribe los datos[218]. La profesora le sugiere escoger a uno o una de sus compañeros para que lo resuelva; Emilio elige a Nerea 2 y la alumna sale al encerado. La primera acción de Nerea es escribir la operación, la profesora se percata y le dice que antes de hacer cualquier operación debe preguntarse lo que tiene que hacer. La alumna escribe 2/5 de 85, luego empieza a operar. La profesora observa lo que Nerea escribe y le dice que escriba el signo igual antes de operar.

Una vez resuelto el problema planteado, la maestra le manifiesta a Nerea que puede proponer su problema. La alumna lo lee[219]. Ante esta situación, algunos alumnos expresan que tienen que multiplicar y otros que dividir. La profesora empieza a cuestionar el problema y los alumnos responden con acierto[220]. La profesora cambia el término 'podres' incluido en el problema por el de 'secas' y pregunta cuántas hojas secas tiene el árbol, además añade: “¿cuántas hojas corresponden a esa fracción?”. Los alumnos expresan diferentes operaciones, entre divisiones y multiplicaciones. La alumna escribe “2/3 de 75”, luego la profesora le pregunta cuál es el siguiente paso. La alumna escribe las operaciones respectivas y encuentra el resultado final que la maestra acepta como respuesta correcta.

El tiempo culmina y la clase finaliza.

---

[217] El problema que plantea es el siguiente: “En una biblioteca hay 100 libros. Yo ya leí la tercera parte. ¿Cuántos libros me quedan por leer?”

[218] El problema es como sigue: “En una tienda de animales hay 85 iguanas y yo quiero 2/5, ¿cuántas iguanas compro?”

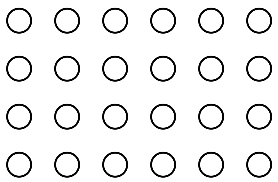
[219] La alumna propone el siguiente problema: “Un árbol tiene 75 hojas y están podres 2/3, ¿cuántas hojas (podres) tiene en total el árbol?

[220] Les pregunta qué hacer, qué pide el problema, qué datos tienen.

Sesión 3 / Caso 2

Martes, 19 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

La clase se inicia resolviendo las actividades del libro que se propusieron para la casa. La maestra saca al frente, de manera individual, a cada niño a quienes les propone hallar la fracción de un número. Los niños, al salir al encerado, escriben lo que la maestra plantea (“tienes que encontrar los… de…”). Los niños se acercan al encerado, manifiestan lo que tienen que hacer (“hallar los… de…) y proceden a operar. Los dos primeros ejercicios se resuelven inmediatamente. En el tercer ejercicio, que propone hallar los dos tercios de veinticuatro, la maestra se detiene pues quien tiene que resolverlo es una niña a quien le fue difícil, en la clase pasada, expresar con palabras, y sin ir directamente a operar, lo que tenía que hacer. La maestra le pide a Nerea 1 que ejemplifique a través de una gráfica lo que tiene que hacer[221]. La alumna dibuja círculos distribuidos en seis columnas[222]; acto seguido, se genera el siguiente diálogo:



Profesora: ¿Qué tienes que hacer?

Nerea 1: Coger tres filas… (Señalando la imagen)

Profesora: No… ¿Qué tienes que hacer?

Nerea 1: …

Profesora: Dividir no sólo es partir, también es repartir o agrupar, ¿entienden con esas palabras lo que les digo?”

Alumnos: …[223]

Nerea 1: Junto en partes[224]

Alguna alumna sugiere que los círculos dibujados por Nerea 1 no están bien “distribuidos”; sin embargo, la profesora dice que eso no importa.

Profesora: ¿Qué más tienes que hacer?

Nerea: Tengo que coger dos

Profesora: Señala lo que tienes

---

[221] Los niños suelen ir directamente a operar con las cantidades que se presentan pero les resulta difícil explicar y expresar con palabras lo que significa la acción que están realizando (o van a realizar). Los niños directamente dicen la operación u operaciones que tienen que ejercitar y lo hacen. Esta actitud se transfiere a la resolución de los problemas matemáticos que se proponen en el aula y en el libro de texto sin muchas veces reflexionar sobre lo que la situación plantea.

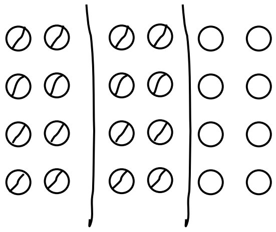
[222] Los círculos no estuvieron distribuidos equitativamente; es decir, la separación entre cada círculo (sobre todo de derecha a izquierda) no fue siempre la misma.

[223] Aunque nadie responde con palabras, se observa que algunos niños mueven la cabeza de arriba hacia abajo y otros de derecha a izquierda.

[224] La alumna dibuja una línea entre cada dos columnas (cada ocho círculos).

Nerea 1: Este y este…[225]

Profesora: Opera y escribe el resultado.



La alumna resuelve la expresión sin dificultad, escribiendo las operaciones pertinentes y sus respectivos resultados; la maestra manifiesta que es correcto y le indica a la niña que vuelva a su carpeta. La corrección de la tarea continúa por lo que salen otros niños y/o niñas a quienes les propone actividades similares:

Profesora: Escribe cinco sextos de trescientos

Nerea 2: (escribe) ¿Cuántas partes?

Profesora: ¿Qué cantidad son cinco sextos de trescientos?

Nerea 2: Trescientos lo multiplico por cinco y lo divido entre seis

Profesora: ...

Nerea: Es 250

Profesora: ¿Cuántos son “siete décimos de quinientos”?

Natalia: ¿Cuánto da?

Profesora: ¿Cuánto es “siete décimos de quinientos”?

Natalia: El siete de aquí hay que multiplicar

Profesora: ¿Por qué?

Natalia: Para averiguar cuánto es los siete décimos de quinientos

Profesora: …

La alumna resuelve realizando las operaciones que involucran las cantidades propuestas e indicándolas en el encerado.

Luego de cuatro propuestas más de la misma naturaleza en los que los alumnos tienen que hallar directamente la fracción de un número, al siguiente alumno, Emilio, la profesora le propone un problema de los que se encuentran en el libro y que designó para resolver en casa. El problema es como sigue: “En una clase de quinto hay 24 alumnos/as. Las 2/3 partes son niñas, ¿cuántos niños hay?” El alumno escribe los datos en el encerado y procede a operar. Cuando concluye las operaciones, la profesora pregunta qué es lo que ha hallado y el alumno responde que la cantidad de niños. La profesora guarda silencio

---

[225] La alumna hace una raya a cada uno de los círculos de dos de las tres partes.

por un instante. Los niños en el aula se han dado cuenta del error. La profesora repite el texto del problema poniendo énfasis en la palabra “niñas”. El alumno observa su trabajo y se da cuenta del error que había cometido. La profesora repite la pregunta del problema, poniendo énfasis en la palabra “niños”. El alumno responde: ocho. La profesora le pregunta cómo ha llegado a esa conclusión, como el alumno se queda en silencio, la maestra le pregunta qué operación ha realizado o tiene que realizar. El alumno le dice que una resta ya que al 24 le resta 16.

La profesora pregunta si hay otra manera de responder ese problema, es decir “otro camino”. Manuel, que está sentado en su escritorio, manifiesta que a 3/3 se le resta 2/3 y se halla 1/3. Algunos alumnos no lo comprenden inmediatamente, pero otros, sí. La profesora le pide Manuel que salga al encerado y explique. El alumno escribe: 3/3 – 2/3 = 1/3, generándose el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Por qué restas 2/3 a 3/3?

Manuel: ¿Porque quiero saber cuántos alumnos hay?

Profesora: ¿Qué significa 3/3?

Manuel: Todos los alumnos

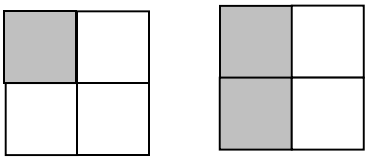
Profesora: ¿Por qué 3/3?, ¿por qué esa fracción?

Manuel: Porque es todo

Profesora: Y 2/3 son las alumnas… por lo tanto 1/3, lo que falta, corresponde a los alumnos[226].

Al volver a ser preguntados sobre si entendían lo que había explicado el compañero, los alumnos asienten con la cabeza.

El tiempo ha transcurrido y falta poco para concluir la hora de clase[227]. Sin embargo, la profesora dibuja dos cuadrados y los divide en cruz, en partes iguales. Al primer cuadrado le pinta una parte y al segundo dos. Los gráficos quedan como sigue:



$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$$

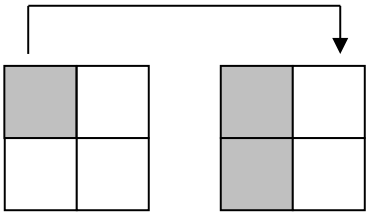
La profesora pregunta si se puede sumar esas dos fracciones. Para ello, escribe lo que corresponde en cada fracción a la parte pintada y coloca un signo más entre ellas; luego pregunta: “¿se puede hacer esto (colocando el signo ‘más’) con las fracciones?”. Los alumnos responden afirmativamente, a lo que la profesora lanza otra pregunta: “y ¿cuánto es?”. Los niños responden que “tres cuartos”. La profesora explica en el gráfico que es

---

[226] En todo momento, la profesora señala en el encerado cada una de estas cantidades.

[227] Al inicio de ésta, la profesora tuvo una conversación con los alumnos sobre las normas del colegio y el papel de todos los profesores. Todo esto, a propósito de un asunto que ocurrió con este grupo en una hora y asignatura distintas.

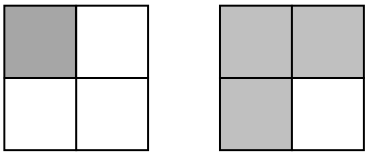
como pasar la parte sombreada en la primera gráfica a la segunda (lo traslada con una flecha y sombrea otra parte en el segundo dibujo).



La profesora pregunta cómo son las fracciones que han empleado. Los niños dicen que son equivalentes aunque no insisten en la idea. Luego dicen que son homogéneas.

La profesora pregunta cómo se suman las fracciones homogéneas y los niños responden que "sumando los numeradores y escribiendo el mismo denominador". La profesora acepta la intervención de los estudiantes.

Acto seguido, propone otra situación: "tengo ¾ y quiero quitar ¼". Algunos niños manifiestan que hay que restar. Al preguntarles porqué hay que restar responden que "porque dice *quitar*". La maestra, sobre las gráficas anteriores, explica la situación, separando de la segunda el ¼ que había sido añadido anteriormente. Escribe la resta y pregunta cuánto es. Los niños responden correctamente; luego, la profesora pregunta qué hay que hacer para restar las fracciones homogéneas. Los niños expresan lo que hay que hacer diciendo que "se restan los numeradores y se escribe el mismo denominador"; además, añaden que "es fácil".



$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$$

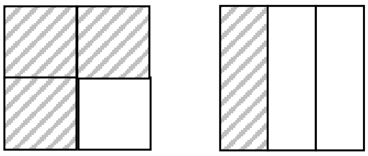
La profesora toma esta última idea ("es fácil") y dice que efectivamente es fácil con estas fracciones pero que es difícil con otras. Manuel hace referencia a las fracciones heterogéneas. La profesora insiste que lo verán la próxima clase.

Termina la sesión.

Sesión 4/Caso 2

Miércoles 20 de febrero de 2008. Hora: 9:55 – 10:50. Colegio A

La profesora retoma la última actividad[228] y dibuja en el encerado las siguientes gráficas. Luego escribe la fracción que representa, en cada una, la parte sombreada:



$$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$$

La profesora pregunta: “¿qué puedo hacer?” Los alumnos se miran entre sí y observan a la docente; luego Natalia responde que “se suma el numerador y el denominador”. La profesora le pide que resuelva en el encerado. La alumna sale, vuelve a escribir las fracciones y suma. La nueva fracción tiene como numerador la suma de los numeradores de las fracciones y como denominador la suma de los denominadores, con lo cual la nueva fracción es cuatro séptimos; de tal manera que: $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$.

La profesora, dirigiéndose a la clase y en relación a lo que ha desarrollado la alumna, manifiesta a través de pregunta: “¿decimos que tenemos una fracción dividida en siete partes y cogemos cuatro?”. Los alumnos no responden; sin embargo, algunos manifiestan que sí y otros que no, aunque sin justificar

La profesora, volviéndose a la alumna, le dice que eso no sirve pues los denominadores son distintos. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Eso no sirve pues los denominadores son distintos.

Natalia: …

Profesora: Y las cosas distintas no se pueden sumar… ¿Están de acuerdo?

Alumnos: Sí

Profesora: ¿Podemos sumar peras y manzanas?

Alumnos: Sí

Alumnos: No

Profesora: Si tengo tres manzanas y dos peras[229]… ¿Cuánto tengo?

Alumnos[230]: ¡Cinco frutas!

Profesora: Correcto, pero ¿pueden ser peras o manzanas?

---

[228] La última actividad de la clase anterior se refiere a la suma y resta de fracciones homogéneas, que los alumnos resolvieron sin dificultad. En dicha clase concluyó que sumar y restar fracciones heterogéneas era más difícil.

[229] La profesora dibuja las peras y manzanas en el encerado, de acuerdo a las cantidades indicadas.

[230] Algunos alumnos; una minoría.

Alumnos: No

Alumnos[231]: Son las dos

Profesora: No se puede sumar peras y manzanas para que dé “peras o manzanas”…

Alumnos: …

Profesora: Para sumarlas es necesario nombrarlas de diferente manera, con una palabra que las englobe a las dos… como “frutas”.

La profesora retoma el caso inicial y dice a sus alumnos: “tengo que tener un truco que me permita hacer una transformación, para que las fracciones sean iguales…, sean homogéneas”; luego pregunta: “¿cómo consigo fracciones equivalentes?”. A continuación, la profesora empieza a buscar, con ayuda de los alumnos, fracciones equivalentes a las dos anteriores. Para ello pregunta lo que tiene que hacer y va multiplicando por ‘dos’ ambas fracciones, tanto el numerador como el denominador de cada una. Como no consigue fracciones equivalentes con el mismo denominador, multiplica por ‘tres’. Los alumnos van siguiendo el procedimiento y contestan al unísono los resultados de operar el numerador y el denominador por el mismo número. Una vez que se llega a multiplicar por cuatro, la profesora les pregunta si observan algo.

$$3/4 \rightarrow 6/8 \rightarrow 9/12 \rightarrow 12/16$$

$$1/3 \rightarrow 2/6 \rightarrow 3/9 \rightarrow 4/12$$

A partir de la pregunta de la docente sobre si observaban algo, los alumnos establecen distintas relaciones; de esta manera una de las alumnas dijo que el numerador de las fracciones equivalentes de la primera fracción coincidía con el denominador de las fracciones equivalentes de la segunda fracción. La profesora justifica como “casualidad” ya que “el numerador de la primera fracción coincide con el denominador de la segunda… de ahí que se repita en sus fracciones equivalentes respectivas”. Luego, la docente pregunta por otras relaciones. Los alumnos no responden; sin embargo, Antía le pregunta a la profesora “qué pasa si la fracción es dos quinceavos” y cómo hace para dividir entre dos[232]. La profesora mira a la clase y plantea la pregunta a todos los alumnos y permite que Lucía responda. La alumna expresa que se divide entre tres. La profesora le dice que no se están dividiendo, aunque se podría; luego menciona las reglas de divisibilidad “que se verán en el siguiente curso”.

Natalia pregunta qué pasa si los numeradores son iguales[233]. Como la profesora ‘no entienden’ a la alumna le dice que salga al encerado y escriba lo que quiere decir. La alumna escribe: $\frac{4}{12}\, y \,\frac{4}{20}$. La profesora pregunta a la clase en general cuál es la condición. Los alumnos responden lo que la maestra ha explicado y ésta añade, dirigiéndose a la alumna que le hizo la pregunta y a la clase total: “no importa que coincidan los numeradores, lo que debo tener en cuenta es que sean iguales los denominadores”. La alumna asiente.

---

[231] Otros, aunque un grupo más reducido que el anterior.

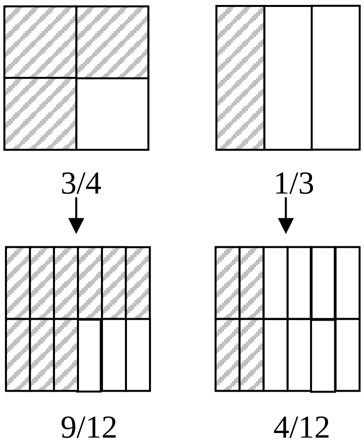
[232] La alumna aparentemente ha visto que para multiplicar es fácil, pero para dividir no, ya que no siempre se puede dividir el numerador y el denominador por el mismo número.

[233] Esta niña es la que, al iniciar la sesión, planteó resolver la suma, sumando los numeradores y los denominadores.

La profesora pide que se centren en las fracciones que están escritas y que son equivalentes de las que se tienen que sumar. “Recuerden que necesitamos dos fracciones equivalentes homogéneas”. Después de mirar los resultados, Nerea 2 expresa que hay dos fracciones con el mismo denominador, luego los alumnos ven lo mismo y asienten. La profesora expresa que esas fracciones son equivalentes y homogéneas por lo que “ahora sí se pueden sumar, ya que sus denominadores son iguales”. Los niños asienten. Luego, la profesora suma las fracciones equivalentes homogéneas:

$$9/12 + 4/12 = 13/12$$

Acto seguido, retoma las gráficas y, refiriéndose a las fracciones equivalentes manifiesta que aquellas se convierten en 9/12 y 4/12 transformando las imágenes de la siguiente manera[234]:



Al finalizar la elaboración de las gráficas, la profesora concluye que hay que buscar fracciones equivalentes en las que coincidan los denominadores para poder sumarlas o restarlas.

Luego la profesora les dice a sus alumnos: “imaginen que ahora les pongo: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$”. Los alumnos se sorprenden, pero luego responden que hay que buscar fracciones equivalentes. La profesora empieza a hacerlo, con la ayuda de los alumnos, pero al no lograr hallar las fracciones equivalentes, multiplicando por los primeros números naturales, les dice: “es complicado, ¿verdad?”; luego les lanza otra pregunta: “¿cómo solucionar esta situación para que no sea complicada?”. Uno de los alumnos responde que hay que seguir hallando fracciones equivalentes, a lo que la profesora indica que la lista sería larga.

Como los alumnos no dan otra respuesta, la profesora les dice que hay otra forma en la que pueden convertir el denominador. Para ello, les vuelve a escribir las dos primeras fracciones, correspondiente al primer caso, y les dice: “el cuatro lo multiplico por el otro denominador y si se multiplica éste por éste (refiriéndose a los denominadores) da lo mismo, se aplica la propiedad conmutativa”. Sara pregunta: “¿y cuando son tres?”, refiriéndose la última suma. La profesora no responde inmediatamente e insiste a sus

---

[234] La profesora borra la parte sombreada en la primera imagen (3/4), para lograr en la segunda (9/12) un mejor orden de las mismas. Sin embargo, luego piensa que debió dejarlas como estaban para que los alumnos observaran que, efectivamente, se ‘tomaban’ nueve y cuatro partes respectivamente.

alumnos que se centren en lo que están haciendo en ese momento, que ya llegará el tiempo en el que tenga que resolver el otro *ejercicio*. Reitera que primero hay que comprender éste que está explicando. A continuación la profesora les dice que si se multiplica el denominador, el numerador también…[235]. Luego la profesora continua: “el numerador se transforma… multiplicando por el mismo número que se multiplicó el denominador, el numerador de la fracción respectiva”. Los alumnos observan a la maestra.

Una vez que ha acabado de desarrollar el proceso, la profesora pregunta a sus alumnos si han comprendido. Como los alumnos responden que sí, les vuelve a plantear la suma de tres fracciones heterogéneas, aunque esta vez diferentes a las anteriores y les pregunta qué tienen que hacer. La expresión es la que sigue: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=$. La profesora, con la ayuda de los alumnos, dice que hay que hacer una transformación para conseguir que los denominadores sean iguales. De esta manera, algunos alumnos expresan que hay que multiplicar “cinco por tres por cuatro”. Yasmín pregunta qué va a pasar arriba, refiriéndose a los numeradores. La profesora le pide que se centre en lo que están haciendo, que “luego verá lo que pasa con los numeradores”.

Profesora: El denominador es…

Alumnos: 60

Profesora: Porque hemos multiplicado cinco por tres por dos. Es el producto de los tres. ¿Qué pasará con los numeradores?

Aaron: Hay que transformarlos

Profesora: ¿Cómo?

Alumno: Multiplicando por el otro número

Profesora: A este número, ¿por cuánto lo multiplico para que me dé 60?

Alumnos: …

Profesora: ¿Qué número multiplicado por cinco da sesenta?

Alumno: Doce

Profesora: Entonces el numerador se multiplicará por doce… sería veinticuatro sobre sesenta.

Una vez establecidas y resueltas las multiplicaciones, tanto en el numerador como en el denominador: $\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{48}{60}+\frac{20}{60}+\frac{45}{60}=$, la profesora pregunta lo que tienen que hacer, a lo que los niños responden: “sumar”.

Después de hallar el resultado, la profesora propone a Aaron que le diga a Emilio dos fracciones heterogéneas para que las sume. El niño empezó a proponer fracciones con denominadores ‘grandes’ a lo que la profesora le sugirió que proponga fracciones ‘fáciles’

---

[235] La profesora deja un tiempo para que los alumnos completen la frase, en función del resultado obtenido en la primera operación, permitiendo que establezcan alguna relación.

para que los cálculos los haga más rápido ya que lo que quiere ver es si siguen el proceso. Entonces, el alumno propone: tres quintos más cuatro séptimos.

El alumno que tiene que resolver la suma escribe la operación y empieza a resolver, pero antes que continúe la profesora le pregunta: "¿qué hay que hacer?"; el alumno responde: "sumar las fracciones". La profesora añade: "¿qué tienen de especial?", el niño continúa: "que tienen que tener el mismo…" La profesora interrumpe la respuesta del alumno y reformula la pregunta: "No, ¿qué tienen?"; el niño piensa y responde: "tienen diferente denominador". La profesora continúa: "entonces ¿qué tienes que hacer?"; el alumno piensa y contesta: "transformarlos". A medida que la profesora deja que el alumno trabaje en el encerado pregunta a la clase qué significa la palabra "transformarlos". Los alumnos dan diferentes opiniones, pero concluyen que dicha palabra significa 'cambiar'; luego la profesora añade: "cambiar a común denominador" y pregunta qué significa 'común'. Manuel responde que significa "normal". La profesora no acepta y propone una situación en la que dos alumnos comparten una afición *común*, "es decir que les gusta el mismo deporte". Luego pregunta cómo es ese deporte. Los niños dicen que "el mismo"; así asocian 'común' e 'igual' como palabras que expresan lo mismo.

La profesora vuelve a observar lo que está haciendo Manuel en el encerado y al ver que está siguiendo el camino largo (hallar fracciones equivalentes, una a una), le dice que pare y borre. Le dice que piense en lo que han estado haciendo, pero el alumno no logra expresar ni escribir algo. Luego, la profesora le dice que continúe como él quería hacerlo.

El alumno empieza a resolver en silencio aunque no comprende lo que tiene que hacer ya que él ha captado el primer procedimiento (multiplicar por cada número hasta hallar las equivalentes), aunque no sabe cómo concretarlo. Mira a sus compañeras. Una de las alumnas le dice que haga como él quiera. Al ver la profesora que vuelve a incidir, le dice que borre pues quiere ver el procedimiento[236]. La profesora empieza a recordarle al alumno lo que han estado haciendo. Algunos alumnos acompañan ese 'recordatorio'. El alumno va siguiendo los pasos, recuerda lo que tiene que hacer y resuelve la suma.

Se propone otra operación y sale Bryce a resolverla: $\frac{4}{5}+\frac{7}{8}$. El alumno multiplica cinco por siete. La profesora interrumpe la acción del alumno y le pregunta qué ha hecho y de dónde sale ese número, refiriéndose al siete. El alumno responde que multiplica por el numerador; al preguntarle la maestra porqué multiplica por el numerador, el alumno no argumenta. La profesora pide a Bryce que regrese a su asiente y a otro alumno que salga a resolverlo. Sale Lucía, quien lo resuelve siguiendo el segundo método. Su respuesta es correcta.

La maestra le pide al Aaron que resuelva la siguiente suma: $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=$, que fue propuesta por Nadia. El alumno la resuelve correctamente, no sin antes indicar en el encerado el proceso (las multiplicaciones que debe hacer); luego, la profesora deja "*ejercicios*" de libro para su casa y otros que ella les escribe en el encerado. El tiempo culmina y la clase finaliza.

---

[236] Es convenio de la clase dejar 'limpia' la expresión que se propone y trabajar fuera de ella. Por ejemplo, ante la expresión: 4/5 + 7/8, los alumnos no deben operar sobre ella, que generalmente es lo que hacen los niños; tienen que indicar el proceso a continuación (después de escribir el signo 'igual').

Sesión 5/Caso 2

Viernes, 22 de febrero de 2008. Hora: 9:00 – 9:55.

La clase empieza revisando la tarea. En la misma, la maestra mandó a los alumnos a resolver unas operaciones de suma y resta de fracciones homogéneas que proponía el libro y una suma y una resta de fracciones heterogéneas que propuso ella. Los alumnos intercambian opiniones sobre esta última operación ya que algunos decían que no la habían hecho porque no sabían. Uno de los niños comentó que él, cuando no sabía algo, lo buscaba en el diccionario de la abuela. La profesora lo felicitó.

Las opiniones seguían intercambiándose entre los alumnos quienes expresaban sus inquietudes a la profesora. Luego de escuchar los distintos comentarios, la profesora interviene dirigiéndose a los alumnos con la siguiente observación y pregunta: "es lo mismo[237]: tienen que buscar fracciones equivalentes que sean homogéneas entre sí, pero… al final, los resultados ¿qué hay que hacer?"; la maestra deja pasar unos segundos y uno de los alumnos dice que había que "sumarlos"; la profesora, en respuesta aclara: "era de restar, no de sumar"[238].

A continuación, la profesora le pide a un alumno que salga a resolver "un ejercicio"[239]. La maestra insiste en que los alumnos, antes de operar expresen con palabras lo que tienen que hacer (en este caso: transformar los denominadores de las fracciones que se van a sumar – o restar – a común denominador). Todos los intercambios de palabras entre profesora y alumno siguen la misma estructura. Éste es el que intercambió con el primer alumno:

Profesora: ¿Qué tienes que hacer?

Alumno: una suma

Profesora: No, suma de qué

Alumno: …

Profesora: lo que quiero saber es tu opinión, antes de resolver.

Alumno: Una suma

Profesora: No me vale "una suma"

Alumno: …

Profesora: Esto es importante: "la respuesta tiene que ser clara y completa.

Alumno: … es una suma de fracciones.

Profesora: Una suma de fracciones… con el mismo denominador. O lo que es lo mismo: una suma de fracciones homogé…

Alumno: …neas[240].

---

[237] Refiriéndose a lo trabajado en la sesión anterior.

[238] La operación solicitada era una resta de fracciones heterogéneas. Sin embargo, la acción del día anterior se centró en sumas.

[239] Las operaciones propuestas son sumas de fracciones homogéneas.

[240] Al unísono con la profesora.

Profesora: Homogéneas… ¿Cómo se resuelve?

Alumno: sumamos ésta con ésta[241].

Profesora: Habla con propiedad… Se suman los nu…

Alumno: …numeradores.

Profesora: Y se escribe el mismo…

Alumno: Denominador.

Profesora: Muy bien, ahora resuelve.

El alumno resuelve correctamente la suma; luego, la profesora saca al encerado a dos alumnas, a quienes, antes de resolver la operación les hace la misma pregunta que al primer alumno: ¿qué tienes que hacer? Las primeras respuestas de las alumnas se centran en indicar qué tienen que hacer: la operación; no obstante, la profesora cambia la pregunta centrándose en "lo que se busca a través de la suma". Las alumnas, poco a poco, van respondiendo como la profesora ha explicado y los alumnos van repitiendo e interiorizando ya que la maestra transmite a toda la clase la respuesta correcta:

Profesora: ¿Qué nos pide?:

Alumnos: Sumar

Profesora: ¿Qué hay que hacer?

Alumnos: Sumar los numeradores y colocar el mismo denominador.

Una vez que han terminado de revisar y resolver las sumas y restas de fracciones homogéneas, una de las alumnas, que aún no ha salido al encerado le expresa a la profesora que ella ha desarrollado a través de un camino distinto: "yo hice de otra forma más rara". La profesora se sorprende, pues aparentemente todos debían hacerlo de la misma manera, y expresa, entre interrogación y exclamación: "¡O sea que ahora vamos a descubrir las matemáticas!, ¡Genial!". No obstante, la maestra no permite que la alumna muestre inmediatamente su forma de proceder. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Recuerdo el truco con los denominadores diferentes…

Alumno: Hay que transformarlos

Profesora: Hay que buscar dos fracciones equivalentes que tengan el mismo…

Alumna: Denominador… Así la suma es como fracciones homogéneas.

Profesora: ¡Hay que recordar el truco!

Alumna: El truco lo hace más fácil.

Profesora: ¿Tú qué crees que eres Pitágoras?[242]

Alumnos: ¿Quién es Pitágoras?

---

[241] Refiriéndose a cada fracción.

[242] Refiriéndose a la niña. No obstante, algún niño se ríe.

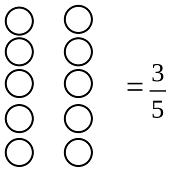
Profesora: Fue un gran matemático.

Luego, la profesora saca a uno de los alumnos varones y le lee el problema del libro, a la vez que pone énfasis en algunas partes: “De un depósito de agua se sacaron primero 5/10…sacaron 5/10”[243]. Después 4/10… y te pide que expreses en fracción la cantidad de agua que se sacó”. Luego de escribir los datos el alumno se dirige a escribir la pregunta, no obstante la maestra le dice que no indique la pregunta pues todos la saben. El niño empieza a resolver y lo hace correctamente: suma los numeradores y escribe el mismo denominador. La profesora pregunta: ¿Qué parte se saca? Todos los niños responden que los 9/10. Luego, dirigiéndose al niño le dice que exprese, también en forma de fracción, la cantidad de agua que quedó en el depósito. El niño resta 9/10 de 10/10 e indica el resultado. La profesora recalca que el depósito de agua completo en forma de fracción es 10/10. Los alumnos asienten.

Una vez finalizadas las actividades relacionadas con las sumas y restas de fracciones homogéneas, la profesora propone que una de las alumnas salga y resuelva una suma de fracciones heterogéneas. La alumna resuelve correctamente y explica lo que tiene que hacer de forma acertada. Sin embargo, varios alumnos de la clase tenían otros resultados. Frente a este comentario, la profesora no toma importancia pues lo que hizo la alumna en el encerado era correcto.

Otra alumna sale a resolver una resta de fracciones heterogéneas. Lo hace correctamente aunque tiene dificultad para expresar con palabras lo que tiene que hacer. Al finalizar estas actividades, la profesora refuerza oralmente que “es lo mismo que con la suma, pero se resta”.

Al concluir las actividades de suma y resta de fracciones, la profesora expone a los alumnos que así como han aprendido a sumar y a restar, también van a aprender a multiplicar. Para ello, les recuerda que las fracciones se habían visto como operador. Luego, saca al encerado a uno de los alumnos para que escriba la siguiente expresión: 3/5 de 10. El niño escribe la expresión y la profesora le dice que la resuelva, primero, gráficamente. Además añade: “para ello puedes representarlo como quieras: manzanas, monedas…”. El niño dibuja dos columnas de cinco círculos cada una, coloca el signo igual y vuelve a escribir la expresión anterior.



La maestra le dice que represente en el dibujo lo que tiene que hacer. Para ello le pregunta qué significa el cinco en la expresión. El niño expresa que tiene que dividirlo entre cinco. La profesora añade: “partir o separar” y le pide que lo haga en la gráfica. El niño lo hace correctamente en la gráfica aunque se equivoca al expresarlo de manera oral (confunde los elementos). La profesora continúa la explicación del alumno, añadiendo: “y de esas cinco partes cojo tres”. Luego, el alumno pregunta si hace la operación.

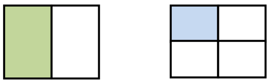
---

[243] El alumno escribe en el encerado los datos del problema.

La profesora les entrega a los alumnos una hoja de trabajo para que la resuelvan según entiendan. La hoja consiste en explicar qué significa la siguiente expresión: “3/5 x 4/8” y si pueden graficarla. Los alumnos no saben qué hacer, leen la hoja sin intentar escribir nada en ella. La profesora les dice que se centren en la primera parte y expliquen con sus propias palabras lo que expresa esa operación, que escribe en el encerado. Los niños responden en la hoja, básicamente, que es una multiplicación de fracciones, aclarando que no saben cómo resolverla.

En la segunda parte, en la que tienen que graficar, los alumnos no saben cómo hacer. El trabajo se centra en la manipulación de los símbolos: una de las niñas multiplica los numeradores y los denominadores entre sí, pero antes transforma las fracciones en homogéneas siguiendo el procedimiento usado en los casos anteriores. La profesora les deja que piensen solos unos minutos más, luego les hace una comparación con el último ejemplo de fracción de un número, aclarando que en este caso “ya no son varias unidades, sino una fracción”. Les aclara, además, que tienen que graficar, es decir, hacer un dibujo. Los estudiantes intentan gráficas independientes, es decir las que representan a cada fracción por separado, pero no la del producto final ya que no tienen respuesta para ello.

Como las respuestas de los alumnos no son acertadas, la profesora intenta darles una pista. Le pide a uno de sus alumnos que represente gráficamente ½, luego ¼. El alumno realiza lo siguiente:



La profesora le dice al alumno que en la última gráfica que realizó, “sin hacer otra”, represente ¾. El alumno pinta dos de las tres partes que estaban sin pintar.

La profesora les dice a sus alumnos que intenten una gráfica en la que tengan que calcular los 3/5 de 4/8. Los alumnos empiezan a dibujar unidades; algunos dibujan las diez del ejemplo anterior (3/5 de 10) y otros dibujan tantas unidades como el producto del numerador por el denominador de cada fracción (3x5 y 4x8). Centrándose en la expresión: 3/5 de 4/8, la maestra pregunta cuál de las dos fracciones habría que representar primero. Los estudiantes no responden. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Si nos piden hallar los tres quintos de cuatro octavos, ¿qué fracción debo representar?

Alumnos: …

Profesora: Si me piden los tres quintos de diez, ¿qué represento?

Alumnos: Diez unidades

Profesora: Si me piden los tres quintos de cuatro octavos, ¿qué represento?

Alumnos: Cuatro octavos

Profesora: Entonces primero dibujo los cuatro octavos.

La profesora dibuja un rectángulo en el encerado al que divide en ocho partes iguales y pinta cuatro. El tiempo finaliza y la profesora les dice que guarden lo concerniente a matemática y la clase termina. Bryce respira profundo y sus compañeros se ríen.

Sesión 6/Caso 2

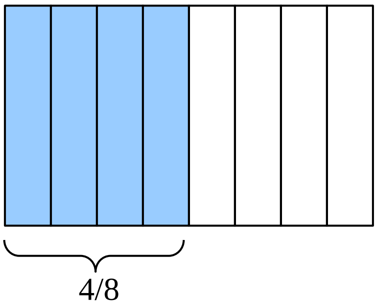
Lunes, 25 de febrero de 2008. Hora 9:55 – 10:50. Colegio A.

(Continuación de la actividad sobre multiplicación de fracciones)

La clase empieza con la revisión de la actividad que se propuso al finalizar la clase anterior, la misma que consistía en interpretar y graficar una expresión en la que se indicaba multiplicar fracciones. En la revisión, que se realiza observando los folios, generalmente los alumnos no supieron darle solución, y quienes lo lograron manifestaron haber tenido ayuda de sus mayores (fuera de la escuela).

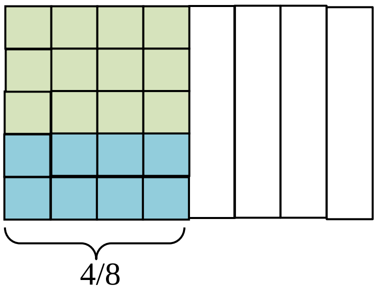
La maestra le pide a uno de los alumnos que salga al encerado y a propósito de la gráfica que hizo en la última clase (que continuaba en el encerado), empezó a explicar cómo se representaba gráficamente esa expresión. Para ello recordó que la unidad (un rectángulo) se tenía que dividir en ocho partes iguales, de las cuales se tomaban (pintaba) 4 (la expresión fue 3/5 de 4/8). Luego, como se pedía los 3/5 de 4/8 preguntó qué se tenía que hacer. Los alumnos respondieron que hallar los 3/5 de 4/8. La profesora pregunta cómo lo expresa en la gráfica, a lo que los alumnos respondieron que eso era lo que no sabían cómo hacer y no entendían.

La profesora explica que como son los 3/5 de 4/8 había que trabajar con esa parte (los 4/8), señalándola en el gráfico: “lo que interesa es esta parte, los cuatro octavos. Lo demás, no”.



Luego pregunta cómo hallar los 3/5 de los 4/8. Los alumnos responden que tienen que dividir entre cinco y coger 3. La profesora pregunta qué tienen que dividir entre cinco. Algunos alumnos (pocos) responden que los 4/8. La profesora recalca que “hay que dividir cada uno de los octavos que se habían tomado”. La profesora acompaña su explicación señalando en el encerado cada una de esas partes.

La profesora, divide en cinco cada octavo y pregunta cuántos hay que tomar. Los alumnos responden que tres y la profesora pinta de otro color tres de las cinco partes. Inmediatamente pregunta cuánto es los 3/5 de 4/8 (señalando, en la gráfica, la parte pintada de un segundo color).



Ante la pregunta anterior, Natalia responde que son “doce dieciseisavo”. La profesora le pide que explique cómo lo ha hallado. La alumna empieza a explicar diciendo que cuenta las partes que están de otro color… No obstante, no termina porque Lucía manifiesta que son “12/40”. Al escuchar a Lucía, la profesora le pide que explique como lo ha visto. La alumna explica que lo hace “mirando toda la unidad”. Luego la profesora pregunta a todos los alumnos: ¿cuánto sale de esa unidad que tenía al principio? Se puede apreciar que no todos los alumnos lo comprenden ya que no se escucha comentario alguno. Natalia, de manera sorpresiva, expresó que ella había descubierto otra manera de hallar la multiplicación, pero la profesora no toma en cuenta esta intervención y pregunta a todos si han comprendido la gráfica.

Lucía explica que a ella “le salió esa fracción porque multiplicó”, aunque la gráfica no la había hecho: “lo hice así porque pensé que era así”. Los alumnos se asombran pues observan que la fracción final resulta, efectivamente, de multiplicar los numeradores y los denominadores por separado (que es como lo había hecho esta alumna). La mayoría de los alumnos responde afirmativamente. Natalia manifiesta que eso era lo que quería decir (ese era 'el método' que había descubierto). La profesora sonríe.

La profesora explica que la gráfica es para que entiendan de dónde sale y no lo hagan mecánicamente. Acto seguido, la profesora expresa lo siguiente: “el método para resolver la multiplicación de las fracciones... eso que pide (la operación) es realmente lo mismo si multiplico los numeradores y los denominadores”. Luego pregunta: “¿cómo se multiplican las fracciones?, la manera rápida”. Los alumnos no responden inmediatamente; sin embargo, Nerea 1 dice que ella lo ha hecho diferente. La profesora se acerca y observa que lo ha hecho correctamente pero sin la gráfica. La profesora le pregunta si alguien le ha ayudado y la alumna le dice que lo hizo con ayuda de su madre, aunque ella (su madre) tampoco sabía. La profesora insiste que no resuelvan los ejercicios sin entender: “no apliquen por aplicar”, ya que primero deben entender lo que hacen.

La profesora nombra a Sara para que se acerque al encerado y realice la representación gráfica de la fracción de fracción: 2/4 de 3/6. La alumna no sabe qué hacer y la profesora le pregunta qué tiene que hacer primero. La alumna dibuja un rectángulo (la unidad) pero no sabe cómo dividirlo (si elegir 2/4 o 3/6). Con ayuda de la profesora divide en 6 partes de la siguiente manera, tomando las tres de la parte superior:

Profesora: Si pide los dos cuartos de tres sextos, ¿de qué vas a hallar los dos cuartos?

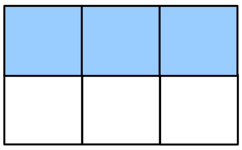
Sara: De tres sextos

Profesora: Por lo tanto, debes dividir en seis partes…

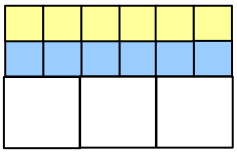
Sara: (divide)

Profesora: Y tomas…

Sara: Tres



Una vez vista la gráfica anterior, la profesora le pregunta a Sara qué parte de los 3/6 (señalando los tres sextos) se van a tomar. La alumna responde que los 2/4. La profesora le pregunta qué tiene que hacer pero la alumna no responde inmediatamente. La profesora se dirige a toda la clase y plantea la misma pregunta. Nadia responde: "de cada parte hacemos cuatro y tomamos dos". La alumna del encerado parte en forma de cruz cada parte tomada. La profesora le pregunta cuánto debe tomar de cada una y la alumna responde que dos; luego pinta los 2/4 de cada parte. El gráfico queda de la siguiente manera[244]:



La profesora le pregunta cómo se representa los 2/4 de 3/6. La alumna escribe: 2/4 de 3/6 = 6/12. La profesora le expresa que la unidad es "todo eso" (encerrando en un círculo todo el rectángulo). La alumna divide de igual manera (en cruz) la parte de la unidad que quedó en blanco (3/6). Luego expresa que "los 2/4 de 3/6 = 6/24. La profesora vuelve a repetir que para multiplicar las fracciones hay que multiplicar los numeradores y multiplicar los denominadores.

La profesora concluye que han aprendido a sumar, restar y multiplicar fracciones y expresa que en la suma hay dos casos diferentes. La profesora pregunta por esos casos. Los alumnos no saben cómo expresarlo; se confunden, al expresarse oralmente, entre una y otra operación. Los alumnos tienden a decir el proceso (se suma, se resta...), pero no explicar lo que se tiene que hacer (transformar a común denominador). La profesora insiste que expresen oralmente primero el proceso y luego escriban las operaciones implicadas. Silvia responde pero se equivoca al enunciar los elementos ("...se transforman los numeradores"). Paula 1 responde correctamente: "que los denominadores sean iguales o diferentes". La profesora pregunta a la clase qué significa que los denominadores sean iguales o diferentes. Luego, con la ayuda de los alumnos concluye que los casos dependen de si las fracciones son homogéneas o heterogéneas.

La profesora propone que los alumnos salgan al encerado a resolver operaciones con fracciones. Para ello llama a Bryce y elige a Nerea 2 para que esta alumna proponga la operación a Bryce. Ella propone: $\frac{5}{8}+\frac{7}{5}$. Para la resolución, la profesora sigue la misma estrategia: pregunta qué es lo que tienen que hacer para que los alumnos expliquen y luego les dice que escriban cómo lo hacen (las operaciones).

La siguiente operación la resuelve Emilio y la propone Raquel ($\frac{4}{6}-\frac{3}{4}$). En este caso, la profesora cambia tres cuartos por dos cuartos. Los alumnos resuelven sus operaciones aplicando el método aprendido, sin recurrir a la gráfica. Luego, llama a Natalia y le propone la siguiente operación: $\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}$. Los alumnos preguntan si pueden hacerlo sin el

---

[244] No con los mismos colores.

dibujo. La profesora asiente pues explica que el gráfico es para entenderlo, pero una vez aprendido el método ya no es necesario. La alumna elegida pregunta si hace “el rápido o el indicado”. La profesora le dice simplemente: “hazlo”. La alumna iba a escribir solo el resultado (pues operaba mentalmente), pero la profesora le dijo que indicara cómo obtenía ese resultado. La alumna procede a indicar las operaciones que tiene que realizar y escribe lo siguiente: $\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{4}\times 8\times 5$. La profesora pregunta qué está haciendo y le pide que explique lo que tiene que hacer. La alumna lo hace correctamente: “multiplico los denominadores... y multiplico los numeradores”. La profesora le dice que lo haga y la alumna lo expresa correctamente. Luego escribe el resultado:

$$\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{2\times 3\times 1}{4\times 8\times 5}=\frac{6}{160}$$

Por su parte, Bryce intenta aplicar el método aprendido para la suma y resta en la multiplicación de fracciones (transformando a común denominador). La profesora le corrige diciéndole que no necesita hacerlo ya que solo tiene que multiplicar los numeradores y los denominadores.

Al finalizar la sesión, la maestra propone una hoja de trabajo sobre las rebajas para que ellos relacionen lo que están aprendiendo de fracciones con las rebajas. Uno de los alumnos comenta sobre los porcentajes. El tiempo termina y la clase finaliza.

Caso 3

Sesión 1/Caso 3

Martes 4 de marzo de 2008. Hora 9:45 – 10:35. Colegio B

La profesora tenía previsto, en la sesión de hoy, trabajar las actividades del libro de matemática en las que los alumnos debían de hacer uso del transportador y compás. Como la mayoría de los alumnos no había llevado el transportador, la profesora cambió las actividades por otras, del mismo libro.

En las actividades propuestas, se les solicita a los alumnos escribir la medida de los ángulos propuestos, dada una pista, y en la que tenían que dibujar pares de ángulos dadas unas características específicas. Esta última actividad es parecida a una de las que se habían propuesto en la ficha de evaluación aplicada anteriormente. Básicamente, se trabajaron las siguientes dos actividades:

1. Observa que dos quesitos (se muestra la imagen de una caja circular en la que hay ocho porciones iguales de queso, luego la imagen de una circunferencia dividida en ocho partes iguales y la figura de dos porciones de quesitos formando ángulo recto) completan un ángulo recto. Teniendo esto en cuenta, copia y completa la tabla (se presenta una tabla de 7x2 en la que se debe considerar el número de porciones y el ángulo que forman. Se muestra un ejemplo, que es el que está en el enunciado.
2. Dibuja en tu cuaderno:
    a) Dos ángulos consecutivos; un agudo y otro obtuso
    b) Dos ángulos adyacentes iguales
    c) Dos ángulos opuestos por el vértice, ambos obtusos

Los alumnos, en general, resuelven solos las actividades correctamente, sobre todo la primera de ellas; sin embargo, en la segunda, aún tienen dificultad en reconocer ángulos según las características propuestas. Se observan casos en los que consideran una característica pero no la otra (por ejemplo, ser adyacentes e iguales a la vez, o ser suplementarios: uno agudo y otro obtuso). Los alumnos muestran sus producciones a la profesora quien valida o no sus trabajos. Algunos alumnos comentan entre sí.

En grupo total, se intentó no sólo revisar sus producciones sino cuestionarles en base a lo que saben de lo que han aplicado. Por ejemplo, se preguntó a un alumno que había realizado las gráficas correctamente si, en el caso de los ángulos adyacentes, que se proponían que sean iguales, podía haber dos ángulos adyacentes que no sean iguales. La primera respuesta del alumno fue afirmativa. Luego se le preguntó cuándo dos ángulos eran adyacentes y el mismo alumno respondió que cuando formaban ángulo plano. Luego se le preguntó cuánto debían medir los ángulos adyacentes para que sean iguales si siempre tenían que formar ángulo plano. El alumno dijo que 90º. Acto seguido se le preguntó si había otra posibilidad y respondió que sí. Se le volvió a preguntar, qué otro par de ángulos pueden ser adyacentes y no medir 90º. Entonces dijo que no había.

Otra cuestión fue a propósito de los ángulos opuesto por el vértice y que sean obtusos. A la alumna que presentó su respuesta y reconoció cuáles eran los ángulos obtusos se le preguntó si los ángulos opuestos por el vértice eran iguales (se le hizo la pregunta pues su gráfica mostraba ángulos relativamente diferentes, aunque parecía iguales). La alumna dudó en responder y dijo que no necesariamente. El timbre suena y el tiempo finaliza.

Sesión 2/Caso 3

Jueves, 6 de marzo de 2008. Hora: 10:35 – 11:25. Colegio B

La sesión empieza con la explicación de la profesora sobre el uso del transportador. Previamente, se cerciora que todos los alumnos tengan transportador y compás sobre sus mesas. Algunos no lo tienen. La maestra muestra el transportador del aula, que es para su uso en el encerado y está hecho de manera; les expresa que es igual al que tiene cada alumno y les explica cómo es, qué partes tiene, cómo se miden los ángulos, qué expresa cada número, por qué los números están de izquierda a derecha y viceversa, para qué sirve la línea central que coincide con los 90º, qué uso se le da al orificio que tiene el transportador, etc. Los alumnos van comprobando si sus transportadores son iguales o no al de la maestra. A diferencia del de ella, el de los alumnos, generalmente, es transparente.

Los alumnos intentan medir los ángulos que propone el libro de matemáticas, pero la maestra les dice que atiendan antes de hacer cualquier actividad, ya que así sabrán qué hacer. La maestra empieza a explicar cómo se construyen ángulos con el transportador. Para ello expresa que se dibuja una línea recta y se ayuda del transportador; luego, se señala un punto en esa línea y se hace coincidir dicho punto con el agujero que tiene el transportador (el agujero sirve para ubicar el vértice). La explicación va acompañada de la ejecución por parte de la maestra en el encerado. La maestra se da cuenta que en su transportador el agujero y los cero grados no coinciden, así que les hace saber a los alumnos que *su* transportador no es muy fiable; sin embargo, intenta hacer que el punto marcado en la línea y los cero grados coincidan, luego explica que si quiere un ángulo de cuarenta grados, por ejemplo, marca un punto donde indica esa medida. A continuación explica que para construir el ángulo se debe trazar otra línea desde el punto marcado (vértice) y el nuevo punto. Los alumnos observan sus transportadores, los comparan entre sí y siguen la explicación de la maestra.

La maestra saca al encerado a uno de los alumnos para que dibuje un ángulo. El alumno dibuja un ángulo a pulso y la maestra pregunta a los alumnos cuánto puede medir el ángulo que ha dibujado el compañero. Los alumnos expresan algunas medidas: unas cercanas a la medida real y otras muy distantes. La profesora coge su transportador y mide el ángulo. Su medida es 105º. Uno de los alumnos no está de acuerdo con la medida (desde la posición de este alumno, aparentemente, el ángulo es recto). La maestra opina que la medida puede ser incorrecta pues se usó el transportador del aula. Se le propone a la maestra usar otro transportador y ella decide que uno de los alumnos lo haga con el transportador que ese alumno haya traído. El alumno sale al encerado y mide. Con su transportador, el ángulo también mide 105º. La profesora le pide que lo vuelva a hacer porque no lo ha visto. La profesora corrobora su medida. Otro de los alumnos quiere salir al encerado y probar su transportador, pero la maestra le dice que vuelva a su sitio. Los alumnos se disponen a desarrollar las actividades del libro pero la maestra les dice que antes de desarrollar las actividades verán lo que es la bisectriz y mediatriz.

La maestra propone a la clase hallar la bisectriz de un ángulo. Pregunta a los alumnos qué es la bisectriz. Una de las alumnas lo lee del libro, pero la maestra le dice que del libro no, que exprese lo que ella sabe sobre el tema. La alumna dice que lo sabe e intenta decir, sin ver el libro, lo que es una bisectriz. Los alumnos levantan la mano para responder. Uno de los alumnos pregunta si con el compás trazarán triángulos. La maestra le dice que ahora no, que servirá para hallar la bisectriz. El alumno intenta trazar un triángulo en un folio y luego se lo muestra a la maestra. La maestra empieza a explicar lo que es la bisectriz de un ángulo.

Luego de la explicación, la maestra propone a la clase hallar e indicar la bisectriz de un ángulo concreto. Para ello, la maestra le pide a otro alumno que salga al encerado y dibuje otro ángulo. Los alumnos protestan porque todos quieren salir al encerado. El alumno elegido traza dos líneas a mano alzada. Luego, con el uso de su transportador mide el ángulo. El alumno obtiene una medida; luego la maestra mide y obtiene otra. La maestra expresa que eso ha sucedido porque las líneas que ha dibujado el alumno no son rectas y que al usar transportadores distintos (de distinto tamaño), las medidas son diferentes. La maestra intenta hacer una línea recta sobre una de las líneas que hizo el alumno. Con esta modificación, el ángulo mide 80º.

Una de las alumnas expresa que a ella le resulta difícil hacer una línea recta ya que cuando la traza se da cuenta que está “torcida”. La profesora le siguiere que use la regla, ya que con ella no es complicado hacer una línea recta[245]. La alumna responde que lo hace con la regla.

A partir del ángulo anterior (80º), la maestra va explicando cómo se tiene que hallar la bisectriz usando el compás. Para ello, hace uso de *su* compás y va explicando cómo se usa: se marca un punto en uno de los lados del ángulo y haciendo centro en ese punto se marca con el compás. Se hace lo mismo con el otro lado. El compás no funciona correctamente, pero la maestra logra marcar el punto de intersección dejado por el compás. La maestra marca ese punto de intersección y luego dice a la clase que hay que trazar la recta que pase por el vértice y el punto marcado; así se obtiene la bisectriz que corta por la mitad el ángulo en cuestión.

Para comprobar que la bisectriz ha cortado por la mitad el ángulo, la maestra le propone al alumno que está en el encerado que mida el nuevo ángulo. La medida no es 40º, como tendría que ser; la maestra intenta acomodar el transportador pero no logra mayor precisión, por lo que la maestra dice que eso ha ocurrido porque el compás no es bueno y que cuando ellos (los alumnos) lo hagan con su compás saldrá mejor. Los alumnos se disponen a trazar la bisectriz de un ángulo, pero la profesora les dice que antes tienen que ver cómo se construye la mediatriz.

Acto seguido, la maestra propone trabajar la mediatriz y pregunta qué saben de la mediatriz. Un alumno expresa que esos nombres son muy extraños. Los compañeros asienten. La maestra expresa oralmente qué es la mediatriz, y propone construir una. Para ello, traza en el encerado un segmento. Con este segmento, la maestra pregunta por qué esa imagen es un segmento y no una recta. Uno de los alumnos hace el aporte correcto. La maestra retoma la idea de mediatriz y hace referencia a la perpendicular. Con esta idea pregunta qué es una perpendicular o cuando dos líneas son perpendiculares. Como los alumnos no responden inmediatamente, la maestra propone que miren en el aula objetos que sean perpendiculares. Los alumnos observan, pero no logran expresar dos objetos que cumplan la característica. La maestra les propone decir qué es perpendicular al tablero de la mesa de cada uno. Los alumnos que intervienen confunden la idea de perpendicularidad

---

[245] Aparentemente, el alumno confunde línea horizontal con línea recta, ya que cuando intentaba explicar las manos simulaban una línea horizontal cuando ella se refería a la línea recta.

con la de paralelismo y mencionan ejemplos de lo que puede ser paralelo al tablero de la mesa. Uno de los alumnos dice “los lados del tablero son perpendiculares”. La maestra le explica que lo que tiene que decir es “algo” que sea perpendicular al tablero. Una alumna dice que “las patas” de la mesa. La profesora acepta la idea; los alumnos asientan y expresan, en algunos casos, que lo habían confundido con las paralelas[246].

La maestra pregunta cuándo dos líneas son perpendiculares, los alumnos intentan expresarlo con movimientos de las manos y brazos, haciendo una cruz con ellos. La profesora les plantea la posibilidad de que las líneas perpendiculares formen un ángulo de 90º. Los alumnos asienten con sorpresa. La maestra saca a uno de los alumnos al encerado para que trace una recta perpendicular al segmento. El alumno sale y no sabe cómo dibujar la recta; luego hace una línea perpendicular al segmento pero que no lo corta. La maestra le pide que haga una recta que corte el segmento. El alumno borra su trazado y mira el segmento. No sabe cómo trazar una recta que corte el segmento. Luego, “se da cuenta” que sí puede y lo hace. Al igual que en el caso anterior, los alumnos trazan las rectas a pulso, es decir, sin usar una regla o algún otro instrumento que le permita trazar con precisión la recta.

La maestra coge el compás y empieza a explicar cómo usarlo para trazar la mediatriz. El compás resulta pequeño para el segmento trazado, ya que no logra abarcar los extremos, así que la profesora borra una parte, pero ya no traza la recta perpendicular al segmento. Al igual que en los usos anteriores, el compás no logra ser un buen instrumento ni marcar correctamente los trazos; sin embargo, con más esfuerzo, la profesora logra obtener el punto de intersección. La profesora indica el punto obtenido sobre el segmento y explica que necesita otro punto ya que con uno la recta puede tomar diferentes direcciones. La profesora realiza el mismo procedimiento por debajo del segmento logrando ubicar el otro punto. Luego, con una escuadra grande une con una línea los puntos, obteniendo la mediatriz del segmento.

La maestra pregunta a los alumnos si han comprendido. Uno de los alumnos expresa que en el libro está de otra manera. La maestra le explica que ella ha seguido el método correcto, el alumno insiste que en el libro está de manera distinta. La profesora se acerca al alumno, revisa el libro y le dice que es una cuestión de perspectiva[247]. El alumno no logra convencerse.

La maestra manda a los alumnos a que resuelvan, en su casa, los ejercicios del libro en los que tienen que hacer uso del transportador.

El tiempo finaliza y la clase culmina.

---

[246] Sólo dos pares de patas son rectas y perpendiculares; las otras no.

[247] En el libro se traza arcos a un lado y otro del segmento a la vez; la maestra lo hace por separado: hallando primero un punto y luego el otro. En el caso anterior, se hallan a la vez.

Sesión 3/Caso 3

Lunes 10 de marzo de 2008. Hora: 11:55 – 12:45. Colegio B.

La profesora les propone continuar la resolución de los ejercicios que aparecen en el libro de matemática a la vez que se les revisa los *ejercicios* anteriores.

Las propuestas son tres: uno es de medida de ángulos: a partir de unos ángulos que propone el libro a través de imágenes, el alumno tiene que indicar cuanto mide. El segundo *ejercicio* es de construir ángulos a partir de una medida, y el tercero es de construcción de la mediatriz y la bisectriz a partir de unos ángulos.

Una vez que la maestra finaliza la revisión de la actividad propuesta para casa, procede a revisar las actividades propuestas en clase.

A medida que se va revisando se les pregunta a los alumnos qué pasos han seguido para medir y construir lo que se les pide. Se puede observar que no hay un manejo preciso del transportador. Todos los alumnos a los que les ha corregido han tenido aciertos y errores en ambos apartados.

Para corregir la primera actividad (cuando esta es incorrecta), la maestra les pide que usen su transportador u observen el ángulo formado. Los alumnos indican el ángulo y concluyen que no corresponde con el que ellos indican. La profesora les dice que corrijan.

Para la segunda actividad, la maestra sigue la misma estrategia: les dice a los alumnos que midan el ángulo formado e indiquen si se corresponde con el que pide el libro. Si no se corresponde, la maestra les pregunta dónde debería ir. Los alumnos indican. Acto seguido, la maestra les dice que rehagan la tarea.

El tercer ejercicio se relaciona con la construcción de la mediatriz y la bisectriz. Los alumnos suelen tener más errores en este apartado. Al ir revisando la construcción de la bisectriz se les pregunta cómo hacen para ubicar dicha línea en el ángulo y construirla. Uno de los alumnos. Pedro, no vio la necesidad de construirla siguiendo el método del libro ni de la profesora y explicó que lo hizo directamente (“a ojo”). Al preguntarle que hacía la bisectriz con el ángulo, el alumno respondió que lo dividía en dos partes; luego se le preguntó cómo eran esas partes y respondió que eran iguales. Se le propuso comprobar si los ángulos que se habían formado, al trazar la bisectriz en su trabajo, eran iguales y en los tres no lo eran, aunque en uno estaban más próximos a la igualdad, por lo que se le propuso que trazara la bisectriz usando el compás.

En la revisión de la mediatriz se observó que suelen hacerlo sin hacer uso de instrumentos adecuado (lo hacen a pulso) por lo que sus construcciones no necesariamente forman ángulos de 90°. Al revisar, la maestra pregunta por las características de la mediatriz. Los alumnos responden y verifican si se cumple en sus dibujos. Si no cumple, la maestra les dice que rectifiquen.

El tiempo finaliza y la revisión termina. La maestra propone a los estudiantes que continúen desarrollando las actividades del libro de texto.

Sesión 4/Caso 3

Martes 11 de marzo de 2008. Hora: 9:45 – 10:35. Colegio B

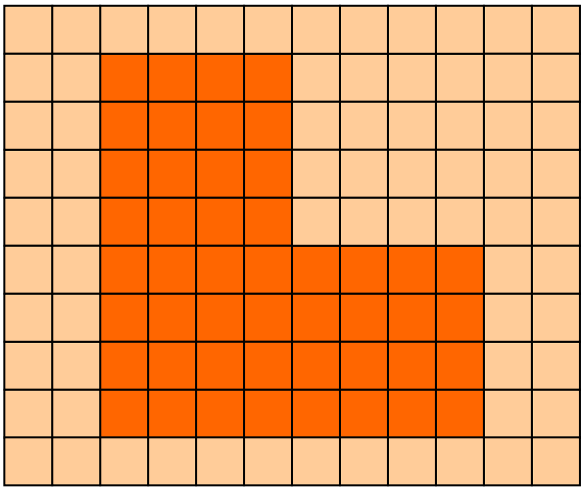
La sesión continúa con la revisión de los ejercicios del libro de texto, mientras los alumnos realizan otros ejercicios del libro sobre medición y construcción de ángulos y bisectrices y mediatrices.

Los alumnos resuelven las actividades propuestas.

Uno de los ejercicios pide que los alumnos dibujen dos polígonos en papel cuadriculado y trace las bisectrices de todos sus ángulos[248]. Los polígonos son mostrados sobre una base cuadriculada. Se puede observar en siete de los diez ejercicios revisados que los alumnos dibujan otros polígonos: un cuadrado en vez de un rectángulo y un romboide en lugar de un rombo. Las mayores diferencias se observan al dibujar el segundo polígono. Los alumnos no respetan la forma de la figura, ni sus características.

Por las figuras que muestra el libro de texto, las bisectrices se pueden trazar sin usar el compás, ya que están indicadas por las líneas de la cuadrícula; sin embargo, todos los alumnos a los que se les revisó el ejercicio habían trazado las bisectrices usando el compás. Aun así, se puede observar que los alumnos no trazan correctamente las bisectrices usando compás. Para trazarlas, los alumnos dibujan el ángulo estableciendo la medida con el transportador; luego indican el ángulo: Algunos alumnos lo hacen con el compás y otros a pulso. Los alumnos no consideran que la distancia entre el vértice y un punto de ambos lados debe ser igual para luego hacer centro en ese punto. Los alumnos ‘no entienden’ por qué no les sale la bisectriz; son conscientes de ello cuando se les dice que midan los ángulos que se forman al trazar la bisectriz y comprobar que no son iguales. Lo mismo ocurre con las mediatrices.

Otro ejercicio que ofreció dificultad y que no pudieron resolver consistía en averiguar cómo partir una pieza de madera para tener cuatro trozos iguales. La actividad presentaba la siguiente imagen:

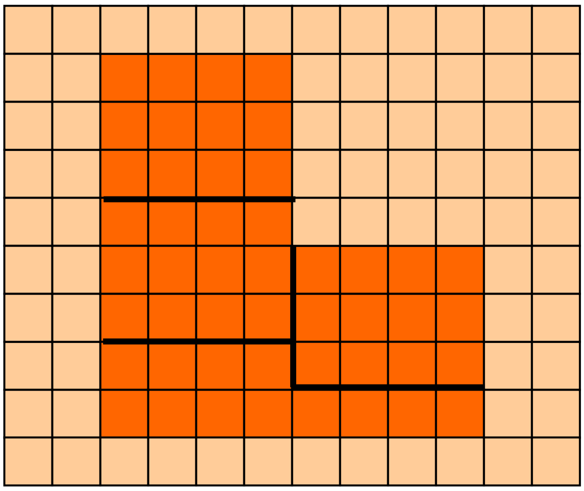


Frente a esta actividad, Nacho forma tres rectángulos iguales, de cuatro por tres cuadraditos. Al ver que el espacio que queda en la imagen tiene la misma cantidad de cuadraditos da por finalizada la actividad. Al preguntarle si esas figuras eran iguales, el

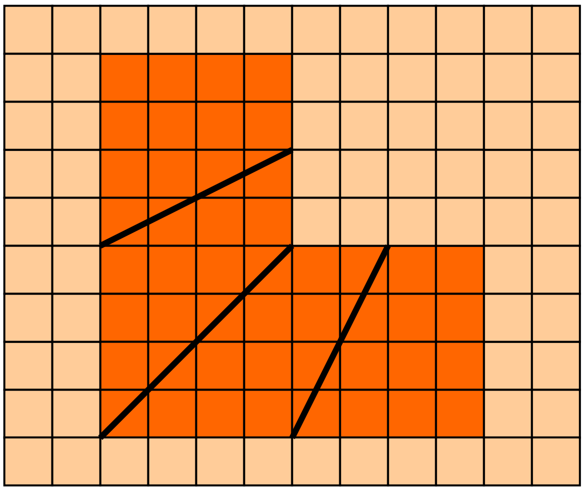
---

[248] La actividad dice lo siguiente: “Debuxa estes polígonos en papel cuadriculado e traza as bisectrices de todos os seus ángulos”.

alumno dijo que no, pero que tenían los mismos cuadraditos: “quizá vale”. Se propuso que pensara en figuras iguales, pero dijo que no se podía.



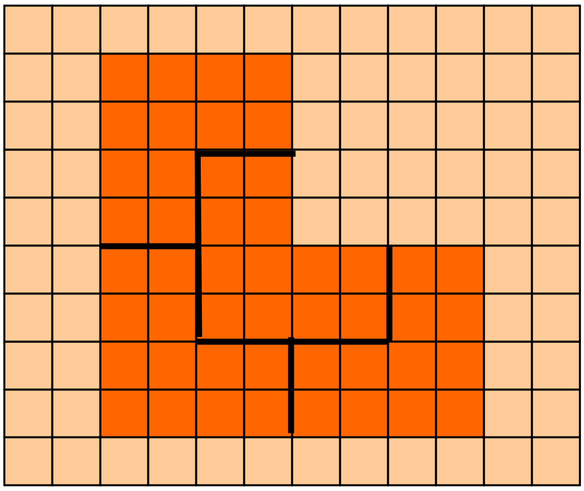
Juan Carlos intenta hacer figuras que tengan, todas, la misma forma, pero se da cuenta que no logra su cometido.



Luis L. traza bisectrices y mediatrices, pero haya más formas. Los alumnos, en general, expresan que no sale. La profesora les asegura que sí y les dice que ella lo va a hacer. Cristina dice que ella lo tiene. Le muestra su dibujo a la maestra y ésta dice que no. Alejandro hace lo mismo y la maestra tampoco acepta el dibujo. Ninguno de los dibujos es el correcto.

Guillermo dice que él sabe cómo tiene que ser la forma y dibuja en el encerado una forma parecida al dibujo, pero más pequeña. La profesora le pregunta cómo lo ha hecho y este alumno dice que así le dijeron que era. El alumno no supo cómo dibujar esa forma, cuatro veces, en el dibujo.

La profesora les dibuja en el encerado cómo tienen que dividir la imagen:



Los alumnos reproducen la imagen. Algunos alumnos lo hacen incorrectamente.

La clase finaliza y los alumnos guardan sus cuadernos.

Sesión 5/Caso 3

Jueves 13 de marzo de 2008. Hora: 10:35 – 11:25. Colegio B.

La clase continúa con la corrección y el desarrollo de actividades del libro de texto que se inició en la sesión anterior. La profesora hace referencia a los ejercicios y problemas matemáticos que se habían propuesto el día anterior. Las actividades son de dos tipos: medición y construcción de ángulos y resolución de problemas de aplicación de operaciones aritméticas con números decimales aplicados en contextos de medición. La corrección es individual, cada alumno se acerca a la profesora y muestran sus tareas.

La profesora revisa las primeras actividades. Los alumnos usan el transportador para medir los ángulos, aunque las medidas que expresan no son del todo correctas; en algunos casos hay errores de hasta cinco y diez grados. Para la construcción sucede lo mismo. Un mismo alumno puede tener medidas correctas e incorrectas de los ángulos. La profesora observa el trabajo de los alumnos e indica que tengan cuidado al medir pues “hay ángulos que no son correctos”. Los alumnos revisan su trabajo y, en algunos casos, corrigen.

La actividad de resolución de problemas ofreció más dificultad en el sentido que algunos alumnos encuentran una dificultad para resolverlo. Paula M., frente a un problema de dos etapas[249] expresaba que no entendía el problema. Se le propuso que lo lea otra vez; la alumna lo hizo pero expresaba que no entendía. Se le preguntó sobre la situación: ¿sobre qué es el problema?, ¿qué información te da?, ¿ha recorrido las 12 vueltas?, ¿cuántas vueltas le falta recorrer?, ¿cómo puedes averiguar cuanto le falta por recorrer?... La alumna responde cada pregunta, excepto la última. Al ver que no lograba proponer un camino de solución, se le preguntó por lo que significaba cada uno de los datos. La alumna logra establecer relaciones entre los datos que el problema presenta directamente (de manera rápida los kilómetros totales y con más dificultad los kilómetros que recorrió), pero no entre aquellos que el texto le presenta indirectamente (los kilómetros por recorrer y los kilómetros recorridos), excepto si se le va indicando paso a paso:

Observadora: ¿Qué hallaste en la primera operación?

Paula M: (expresa el resultado de la operación)

Observadora: ¿Qué te indica ese resultado?

Paula M: Los kilómetros que tiene que recorrer

Observadora: ¿Qué hallaste en la segunda operación?

Paula M: (la alumna expresa el resultado)

Observadora: ¿Qué significa?

Paula M: los kilómetros que ha recorrido.

Observadora: ¿Qué te pregunta el problema?

Paula M: Los kilómetros que le faltan

---

[249] El problema pregunta qué distancia le falta por recorrer a un ciclista que ya ha dado tres vueltas y media y que tiene que completar doce vueltas. Se da los kilómetros que mide el circuito (una vuelta).

Observadora: ¿Cómo los puedes hallar?

Paula M ... Restando éste (segundo) a éste (primero).

Pedro también tiene dificultades en este problema. Se le sugiere que lo vuelva a leer. El alumno lo lee pero dice que no entiende los datos. Se le pregunta qué no entiende y el alumno expresa que “los tres coma cinco”. Se le pregunta qué indica esa cantidad y el alumno expresa que las vueltas que ha dado. Se le pregunta qué distancia son esas tres vueltas. Inmediatamente, el alumno expresa que ha comprendido: “Ah, tengo que multiplicar 10,78 por 3”. Se le hace hincapié en las vueltas que ha dado.

Por otro lado, Nacho tiene una dificultad respecto al mismo problema: “¿cómo tienes que dar la respuesta? Se le pregunta qué es lo que pide. El alumno dice que “la distancia que le falta por recorrer”. Se le pregunta cómo se expresa la distancia y el alumno la relaciona con los kilómetros. Sin embargo, se pudo observar que el alumno había realizado las dos operaciones que todos los observados habían planteado.

Paula M. vuelve a llamar pues no entiende un problema que pide averiguar cuántos lazos se pueden hacer con doce metros de cinta si uno se hace con cuarenta centímetros. Como en el primer caso, se le pide que vuelva a leer el enunciado y se le pregunta qué tiene que hacer para averiguar cuántos lazos debe hacer con doce metros. La alumna expresa que tiene que restar. Se le pregunta qué resta y ella indica las cantidades: 12 y 40. Se le pregunta por qué tiene que hacer esa resta y ella responde que para saber cuántos lazos tiene que hacer. Se le pregunta si puede restar cosas diferentes y ella dice que no. Se le pregunta qué indican los doce y ella responde que metros; luego expresa que tiene que convertir los metros en centímetros. Se le pregunta cuántos centímetros son doce metros y ella dice que ciento veinte. Se le dice que piense bien y ella dice que no sabe calcular mentalmente. Se le sugiere que lo haga por escrito. La alumna opera y expresa que son mil doscientos. Luego se le pregunta qué hace con esa cantidad y la alumna dice que la tiene que multiplicar por cuarenta. Se le pregunta por qué multiplica y ella indica que para saber cuántos lazos tiene que hacer. La observadora le hace una comparación con tres bolígrafos, en el que cada uno mide cuarenta centímetros, se le pregunta cuánto miden en total y la alumna dice que ciento veinte. Luego se le pregunta: “si cada uno son las cintas para los lazos y si en total mide ciento veinte, ¿para cuántos lazos hay?” La alumna observa los bolígrafos y expresa que tres. Se le pregunta qué ha tenido que hacer y ella dice que multiplicar. Se le vuelve a incidir: “si son ciento veinte centímetros y cada uno necesita cuarenta centímetros, ¿qué haces para saber cuántos lazos pueden salir? La alumna insiste que se multiplica.

Cristina llama y pregunta si su operación es correcta; ella ha dividido, para el problema anterior, 120:4=30. Se le pregunta qué indica el “120” y ella expresa que son los centímetros. Se le pregunta qué ha hecho para hallar ese resultado y ella responde que ha multiplicado “120 x 100”. La alumna se da cuenta del error e intenta rehacer su solución.

Juan Carlos levanta la mano y pregunta cómo se dividen decimales. Se le pregunta para qué quiere saberlo y él señala un problema. El problema piden que averigüe cuánto recibe un comprador si paga con treinta euros la compra de 1,8 k. de jamón si el kilo cuesta doce euros. Se le pregunta qué tiene que dividir y el alumno señala los kilos y los euros. Se le sugiere que lea bien el problema y se le pregunta qué indica cada dato. El alumno concluye que tiene que multiplicar el precio del kilo y los kilos que ha comprado.

Se revisa las soluciones de otros alumnos. Dos de ellos (Luis L. y Alejandro), dicen que ya les revisó la profesora. Se observa que Luis L. ha cometido el mismo error que Cristina (120 centímetros en lugar de mil doscientos). El alumno se da cuenta del error y corrige. Alejandro ha terminado todos los problemas, se le pide la hoja de solución y se puede observar que tiene el mismo error que el compañero y otros errores en otros problemas. Por ejemplo, en el problema de la compra de jamón, este alumno había divido los kilos comprados entre el precio. Al preguntarle porqué había dividido, éste dice que para saber cuánto pagó. Se le sugiere que lea otra vez el problema. Luego de leerlo, expresa que tiene que multiplicar.

Cristina pregunta cómo se dividen decimales. Se le dice que como números naturales pero colocando coma en el cociente cuando llegue a la coma del dividendo. Se puede observar que el resultado es diferente que en el alumno anterior pues éste también había tenido un error y se había corregido. La alumna había tenido un error de cálculo que se había ido arrastrando hasta el final. El tiempo termina y los alumnos guardan sus cuadernos.

Sesión 6/Caso 3

Miércoles 26 de marzo de 2008. Hora: 13:55 – 14:40. Colegio B.

La clase es sobre medida del tiempo. La profesora les dice a sus alumnos que les va a entregar una información para que ellos la lean y luego comenten lo que dice. Algunos alumnos trabajan individualmente y otros en pares. La profesora les comenta que cada uno, o par, tiene un texto diferente, pero que se relacionan entre sí; les dice que lo que tienen que hacer es leerlo y descubrir, con la información del texto, a qué se refiere y escribirlo en la parte superior de la ficha, en las que hay indicadas unas líneas que se corresponden con cada una de las letras del título del texto.

La profesora deja un tiempo para que los alumnos lean el texto. Algunos de ellos expresa que no entiende nada, que "hay unos nombres muy raros" y que no sabe de qué se trata; otros creen saberlo, pero no encuentran las palabras exactas para expresarlo. La profesora insiste que el texto les puede dar pistas y que tienen que leerlo correctamente.

Después de un tiempo, la profesora empieza a preguntar si han descubierto de qué se trata. Pregunta a Santi y a Ramón qué han logrado descubrir. Los alumnos expresan que no han logrado descifrar nada, aunque creen que se refiere a un monumento. La profesora acepta su intervención y le pregunta a Óscar si ha logrado descifrar de qué se trata. Óscar dice que piensa que se trata de la Gran Muralla China; Maite y Lucía expresan que ellas creen que se trata de los Jardines de Babilonia. Tomás y Guillermo tuvieron dos textos y lograron descifrar de qué se trataba: Mausoleo de Halicarnaso y Faro de Alejandría. Carlos había escrito "funerario de Kefrén" pero no estaba seguro pues sabía que era una pirámide pero esa palabra no encajaba en el espacio. Se le preguntó si se hablaba de una o varias pirámides y el alumno respondió que de varias, comprobó si 'pirámides' encajaba y vio que sí. Luego, el alumno lo asoció a las Pirámides de Egipto y dio como respuesta esta idea.

La profesora le pregunta a Pedro si ha descubierto de qué se trata y éste responde que piensa que es el "Coloso de Apolo". La profesora le dice que no, que algo no es correcto y que vuelva a leer. Daniel y Paula M. tampoco logran descifrar de qué se trata. Se les da una pista: esa maravilla es de Perú, lo que encaja en la palabra que corresponde al país. Los alumnos sólo tienen el dato que su nombre significa "montaña mayor" y preguntan cómo se dice "montaña mayor" en peruano. Se les da la el dato que el lugar es Machu Picchu. Daniel expresa que él no podría haberlo descubierto porque no sabe nada de Perú ni de Machu Picchu.

Enrique y Paula F. manifiestan que ellos piensan que se trata del Imperio de Roma; Luis M. y Cristina no tienen idea de qué puede ser, escriben un nombre sin sentido, ambos expresan que su información se refiere a la Estatua de Zeus. Por su parte, Luis L. y Pablo saben que se refiere a Cristo y han escrito "El Cristo cristiano", pero expresan que no es así. Jorge y Javier dicen que no logran identificar de qué se trata pero creen que es "el templo de algo". Por último Ramiro y María no saben de qué se trata aunque el dato que tienen es que "está en la India". La profesora les dice que vuelvan a leer. Algunos alumnos lo han descubierto. Los alumnos leen, Ramiro lo hace en voz alta. La profesora le dice que se fije en determinadas palabras "princesa Mumtaz Mahal" y "Taj Ganj". El alumno asocia y logra expresar el nombre: Taj Mahal.

La profesora da el nombre de las maravillas que no fueron descubiertas: Petra, Chichén Itzá y el Templo de Artemisa. Carlos dice que él sabe a qué se refiere y expresa que son las siete maravillas del mundo. Algunos alumnos asienten. Pedro dice que en el encerado la profesora ha escrito nueve. La profesora pregunta qué piensan que ha ocurrido. Tomás dice que "son las maravillas antiguas y las modernas". Pedro y Carlos expresa que esa puede ser la razón.

La profesora afirma que, efectivamente, la información se corresponde con las siete maravillas del mundo antiguo y las siete maravillas de la actualidad. Pedro comenta que las maravillas del mundo antiguo fueron elegidas por un poeta.

La profesora pregunta si todas las maravillas del mundo serán iguales, y los alumnos responden que no. Luego, la profesora añade la siguiente pregunta: "¿se habrán construido en el mismo tiempo?" Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Se habrán construido en el mismo tiempo?

Guillermo: No, porque cada maravilla se hizo en distintos años... o fechas.

Profesora: ¿En qué año estamos?

Pedro: 2008

Profesora: ¿A qué siglo corresponde este año?

Ramiro: Siglo XXII

Profesora: Paula (F), ¿cómo averiguas el siglo al que pertenece un año?... ¿Ramiro?

Ramiro: Estamos en el siglo XXI

Profesora: ¿Por qué lo sabe?

Ramiro: Porque han pasado veintiún siglos desde que nació Cristo

Cristina: A mí me enseñaron

Profesora: Cristina, explica cómo averiguar los siglos…

Cristina: Se cogen las dos primera cifras del año y se le sumaba una cantidad que no me acuerdo… uno en el caso.

Profesora: Efectivamente, según lo que ha dicho su compañera, ¿q qué siglo pertenece 1972?

Alumnos: Al siglo veintiuno

Profesora: ¿Cómo se escribe siglo veintiuno?

Pedro: Con una equis, otra equis y un palito

Profesora: Equis, equis y palito

Pedro: No, es una "i" mayúscula

Profesora: Vale… ¿Por qué se escriben de esa manera los siglos?

Juan Carlos: Porque los escribían los romanos

Profesora: ¿Cuál es el valor de cada letra?

Los alumnos responden a la pregunta de la maestra de acuerdo a lo que van recordando; por lo general, las intervenciones son acertadas; otras, no tanto, sin embargo los propios alumnos corrigen a sus compañero. La maestra escucha las intervenciones de los alumnos y anota en la pizarra.

No hay tiempo para más y la clase termina,

Sesión 7/Caso 3

Jueves 27 de marzo de 2008. Hora: 10:35 – 11:25. Colegio B.

La profesora comienza la sesión recordando que el día anterior habían estado hablando de las catorce maravillas del mundo y que esas maravillas estaban situadas en un momento de la historia. Pregunta en qué año estamos actualmente y los alumnos responden que en el 2008. La profesora hace referencia a que este año se corresponde con un siglo y pregunta cuál es. Los alumnos responden que en el siglo XXI. Guillermo comenta que no entiende porqué tiene que añadir un uno. La profesora hace extensivo el comentario del alumno y refiriéndose a Cristina, quien había explicado cómo se formaban los siglos, le pregunta si puede explicar por qué el año 2008 correspondía al siglo XXI. Cristina responde que ella "sabe cómo se forma pero no sabe por qué es así". Ramiro levanta la mano y responde: "si el siglo comprende cien años, va de cien en cien. Hay veintiuno desde que nació Cristo". Nacho añade: "porque está entre el 2000 y el 2100". La profesora pregunta: "y cuando llegue al 2100, ¿qué pasa? Juan Carlos responde con una pregunta: "¿llegamos al veintidós? La profesora pregunta porqué y el alumno responde "porque pasaron cien años".

La profesora pregunta si con la información que tenían en las hojas se podía saber cuáles eran las maravillas del mundo antiguo. Se establece el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Cómo saber que unas son las antiguas y otras las modernas?

Luis M: Porque en el mundo de ahora... antiguamente las maravillas del mundo eran menos maravillosas que ahora.

Paula M: Porque están viejas

Daniel: Por quienes las construyeron.

Ramón: Porque las nuevas, la mayoría están en América y antes no conocían América, cuando hicieron las viejas.

Pablo: Sabiendo cuáles son las de ahora y cuáles las antiguas.

Profesora: Bien, pero cómo.

Pedro: Muchas de las maravillas se construyeron en la época romana, sobre el 300 antes de Cristo. Y... después de Cristo, cuando se acaba la época de los romanos ya se sabe que las maravillas son actuales; la gente empieza a modernizarse.

Cristina: Por el lugar... En Roma, el coliseo queda en Roma.

Carlos: Porque (las antiguas) ya no existen, se han destruido.

Javier: Las nuevas están mejor diseñadas que las viejas.

Óscar: Por cómo están conservadas.

Ramiro: En los años en las que se construyeron.

Profesora: Bien, por los años que se construyeron.

Pedro: Yo dije eso.

Profesora: No exactamente. Entonces, cuáles son las del mundo antiguo.

Ramiro: Las de antes de Cristo.

Profesora: Puede ser. A ver...Óscar, ¿cuál tienes tú y qué piensas que es: antigua o actual?

Óscar: La Muralla China, que será antigua... porque se construyó antes de Cristo.

Profesora: Y tú... Luis (L), ¿cuáles crees que son las antiguas?

Luis L: Las siete que se han construido antes.

Profesora: Vamos a clasificar las maravillas según su antigüedad. La que tienen ustedes, Luis (L) y Pablo, ¿es del mundo actual o antiguo?

Pablo: Antiguo.

Profesora: ¿Por qué?

Pablo: Porque fue inaugurada en 1931 y nos parece que es antiguo.

Profesora: ¿A qué siglo corresponde 1931?

Pablo y Luis L:Veinte.

Profesora: Entonces, ¿pertenece al antiguo?

Luis L: No, porque el siglo veinte es anterior a éste, no fue tanto tiempo.

Profesora: Luis (M), Chichén Itzá, México, ¿dónde?

Luis M: En el antiguo.

Profesora: ¿Por qué?

Luis M: Porque aquí dice que fue centro de la civilización maya entre los años 750 y 1200 antes de Cristo, pero que fue construida antes.

Profesora: ¿Entre qué años?

Luis M: Yo vi en el periódico, vi unas siete nuevas maravillas y no salía ésta.

Cristina: En 435 y 455 después de Cristo. Esto es muy, muy antiguo.

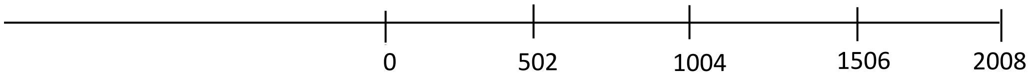
La profesora, dirigiéndose a Jorge y Javier, menciona “Petra de Jordania”, que es la maravilla que les ha tocado a ellos. Los alumnos empiezan a leer la información que tienen. La profesora les pregunta a qué pertenecen y los alumnos dice que al antiguo. A continuación, la profesora pregunta Pedro a qué grupo cree que corresponde la maravilla que le ha tocado (Coloso de Rodas) y el alumno responde que “al antiguo, porque se construyó en una época muy, muy antigua, alrededor del 300 antes de Cristo, significa que Cristo todavía no nació...”. La profesora continúa con Juan Carlos, a quien le corresponde la estatua de Zeus. El alumno responde que es antigua “porque se hizo sobre el año... antes de Cristo”[250]. El siguiente turno es para Daniel y Paula M, quienes tienen “Machu Picchu”. Ellos opinan que es moderna “porque fue hecha en el siglo XV”. La profesora le pregunta a Carlos dónde sitúa las Pirámides de Egipto y el alumno responde que en las antiguas “porque fueron hechas antes de Cristo”. La profesora le pregunta a Ramón por el Templo de Artemisa y éste responde que “en el antiguo porque fue construida en el 550 antes de Cristo”. Ramón y María, que son los que continúan, respondiendo que “el Taj Mahal, del siglo XVII es actual”.

La profesora vuelve a preguntarle a Óscar si la Gran Muralla pertenece a las antiguas o actuales maravillas del mundo. El alumno responde que se construyó entre el siglo V y el año 1368, por lo tanto es moderna. La profesora les pregunta a Mayte y Lucía E por los Jardines de Babilonia. Lucía responde que es “antigua porque fue en el 605 antes de Cristo”. Los últimos en responder, Tomás y Guillermo mencionan que las suyas (Faro de Alejandría y Mausoleo de Halicarnaso) corresponden a las antiguas porque se construyeron antes de Cristo.

La profesora comenta que algunos han confundido la clasificación, aunque es lógico porque consideraron antiguas todas las que se construyeron antes de Cristo. La profesora menciona las siete maravillas del mundo antiguo y los alumnos van comprobando si se equivocaron o no. Luis M. y Cristina no están de acuerdo con que Chichén Itzá pertenezca a las maravillas actuales pues pone que fue “el centro de la civilización maya y fue antes de Cristo”. La profesora les dice que lean las fechas y verifiquen si fue antes de Cristo.

La profesora explica que para situar los hechos en la historia se necesita un inicio y pregunta en qué momento se empiezan a contar. Pedro responde “desde el nacimiento de Cristo” (este es un tema que han visto en clase de Historia). La profesora dibuja una línea del tiempo en el encerado, ubica el nacimiento de Cristo y pregunta qué año debe ir allí. Los alumnos responden que el cero. La profesora pregunta: “¿hasta qué año? Los alumnos responden que “dos mil ocho”; la profesora pregunta porqué y los alumnos expresan “porque estamos en el 2008”.

La profesora va estructurando la línea de tiempo que dibujó en el encerado. Divide el espacio entre 0 y 2008 por la mitad y pregunta a la clase qué año corresponde. Los alumnos responden correctamente y la profesora va escribiendo el año correspondiente. Continúa la misma estrategia hasta formar la siguiente línea:



La profesora comenta que esa línea del tiempo les va a ayudar para saber “qué maravillas van a ser del mundo antiguo o, por el contrario, cuáles del mundo actual”, para ello, haciendo referencia a que desde el nacimiento de Cristo han pasado 2008 años, pregunta qué año pondrían a la izquierda e indica un punto concreto (señala un punto equidistante a 2008). Tomás responde: “8002…al revés”. La profesora pregunta: “¿sabemos cuánto tiempo ha pasado antes del nacimiento de Cristo?”, Pedro responde: “millones de años porque la creación de la Tierra ningún ser humano la recuerda”. La profesora señala los años indicados en la línea y pregunta, en cada uno, qué siglo le corresponde. El mismo

---

[250] El alumno no menciona el año e indica que se hizo antes de Cristo.

alumno responde que al año 502 le corresponde el siglo VI después de Cristo. La profesora escribe sobre la línea del tiempo, entre el año cero y el actual: “Después de Cristo”. La profesora le pregunta a Pablo qué siglo le corresponde al año 1004 y el alumno, dudando al principio responde que el siglo XI. Luego el turno es para Paula M. quien responde que al año 1506 le corresponde el siglo XVI. La profesora le pregunta por qué y la alumna le dice que porque se lo dijo un compañero. La profesora le dice a la alumna que piense porqué es el siglo XVI, pero la alumna no responde. La profesora le pregunta a Luis L. por qué el año 1506 se corresponde con el siglo XVI y el alumno expresa: “porque se cogen las dos primeras cifras y se añade uno”.

La profesora expone que en la información que los alumnos tienen hay fechas que ayudan a situar las maravillas del mundo actual; luego añade: “vamos a ver si todas pueden encajar aquí (refiriéndose a la línea elaborada), pero luego lo haremos”. A continuación, la profesora retoma la pregunta de cuántos años pueden haber pasado antes de Cristo, señalando el punto antes indicado. Juan Carlos responde: “millones de millones de años”. La profesora le dice que piense. La profesora hace referencia a que: “si desde aquí (nacimiento de Cristo) hasta aquí (actualmente) han pasado 2008 años...”; luego pregunta, “¿cuántos años han pasado desde aquí (nacimiento de Cristo) hasta aquí? (punto indicado). La profesora pregunta si hay la misma distancia y los alumnos responden afirmativamente. Luego, la profesora vuelve a preguntar cuántos años han pasado. Tomás responde que “los mismos”. La profesora escribe en ese punto “2008”. Luego la profesora pregunta qué diferencia hay entre ese año y el actual. Los alumnos responden que uno es antes de Cristo y el otro después. La profesora pregunta si pueden haber más años antes de Cristo y los alumnos responden que sí. La profesora señala un punto a la izquierda del 2008 a. C. y pregunta qué año puede ir allí. Los alumnos dan diversos años y la profesora escribe 3012. La profesora escribe a la izquierda del cero la frase “antes de Cristo” y recalca que los años que están a la izquierda del cero son aquellos que sucedieron antes de Cristo. La profesora pregunta si esa fecha es la más antigua que pueden colocar, según los datos que tienen. Carlos dice que las Pirámides se terminaron de construir hacia el 2570 antes de Cristo. La profesora vuelve a preguntar si alguien tiene una fecha más antigua que esa y los alumnos responden que no. La profesora empieza a hacer las mismas divisiones que hizo en la línea del tiempo, en la parte izquierda y recalca que “todo esto es antes de Cristo, ¿verdad?”. Luego, haciendo referencia al año que indicó Carlos, la profesora comenta: “ese año que nos dice... (Carlos) ya podríamos representarlo en la línea de tiempo, ¿dónde?”. La profesora hace la pregunta a Jorge quien responde “entre 3012 y 2008 antes de Cristo”.

La profesora pregunta cuál es la diferencia entre los años antes de Cristo y los años “después”. Cristina responde: “en que se puede poner “antes de Cristo” y “después de Cristo”. La profesora pregunta por otra diferencia. Daniel dice: “que se cuentan al revés... por ejemplo un año: once, diez, nueve, ocho... hasta llegar a cero, luego crece”. La profesora pregunta a Jorge a qué siglo pertenece el año 3012. El alumno responde que al siglo veintinueve. La profesora pregunta a los alumnos, en general, si están de acuerdo. Algunos alumnos responden que no y otros que sí. Cristina opina que sí y justifican de la siguiente manera: “porque si va de atrás se resta”.

Después de la intervención de Cristina, la profesora expresa lo siguiente: “han dicho que cada siglo son... cien años, y de aquí a aquí (señala desde el año cero hasta el 502),

¿cuántos años pasaron? La profesora le hace la pregunta a Enrique, quien responde correctamente. Luego la profesora pregunta: "¿con qué siglo se corresponde el 502? El mismo alumno da dos alternativas: cuatro y seis. La profesora vuelve a insistir: "¿cuántos años han pasado desde el cero al 502? Los alumnos responden. La profesora pregunta: "¿qué siglo le corresponde al 502? Tomás responde que "igual" (refiriéndose al siglo que corresponde al año 502 después de Cristo), Juan Carlos coincide con Tomás. La profesora le hace la pregunta a Luis M. quien responde que al año 502 le corresponde el siglo VI. La profesora pregunta a cada alumno el siglo que corresponde a cada año escrito "antes de Cristo". Guillermo y Lucía responden correctamente. María no responde inmediatamente. La profesora le pregunta qué dificultad tiene y la alumna dice lo que hay que hacer "se le suma a las dos primeras cifras un uno". La alumna logra responder. Luego la profesora les dice: "van a decir dónde situarían, dentro de qué periodo situarían su maravilla del mundo".

Los alumnos expresan correctamente entre qué años ubicarían su maravilla del mundo, justificando su decisión. La profesora va situando en la línea el año correspondiente según indican los alumnos (más cerca de 2008 que de 3012, o más cerca de 502 porque el año es 550, etc.).

La profesora muestra cada una de las imágenes que corresponden a las catorce maravillas del mundo y pregunta a cuál corresponde. Tomás logra identificar Petra pues comenta que él la ha visto en un libro. Cada alumno va identificando las imágenes y justificando su decisión, según la información que aparece en las fichas:

Profesora: (muestra Petra)

Javier: Machu Picchu

Luis M: Chichén Itzá

Tomás: Petra

Profesora: ¿por qué?

Tomás: Porque lo vi en un libro sobre las maravillas.

Profesora: (Muestra El Cristo Redentor) ¿Y éste?

Pablo: El Cristo Redentor

Profesora: (Muestra Machu Picchu) ¿Y esta… Daniel?

Daniel: Machu Picchu

Profesora: ¿Por qué?

Daniel: Porque pone que es "montaña mayor"

Profesora: (Muestra Chichén Itzá) ¿Y ésta,... Nacho y Daniel?

Daniel: Chichén Itzá

Profesora: ¿Por qué?

Cristina: Porque dice que es una pirámide.

Profesora: (Muestra el Coliseo de Roma) ¿Y ésta...María?

María: ...

Profesora: Esto deberían conocerlo todos. A ver...Santi, tú que vienes de esas tierras

Santi: Coliseo Romano

Profesora: (Muestra el Taj Mahal)

Juan Carlos: El Coloso

Tomás: (en voz baja) ¡Que es el Taj Mahal!

Profesora: ¿Qué es “coloso”?

Pablo: Gigante

Profesora: (refiriéndose a Paula M.), ¿a qué maravilla corresponde?

Paula M: Al Taj Mahal

Profesora: ¿Por qué?

Paula M: Porque lo he oído

Profesora: ¿Qué puedes decir por ti misma?

Paula M: Que es de la India

Ramiro: Es un mausoleo

Profesora: (refiriéndose a Javier) ¿Qué es esto?

Javier: Varias pirámides

Carlos: Las Pirámides de Egipto

Profesora: (refiriéndose a Ramón) ¿Y esto?

Ramón: Jardines Colgantes de Babilonia...

La clase transcurre reconociendo las demás maravillas y justificando. La profesora pregunta, al final y a propósito del Faro de Alejandría si los alumnos conocen un faro parecido. Los alumnos responden la Torre de Hércules. La profesora pregunta si ambos faros cumplen la misma función y cuál es. Los alumnos expresan sus distintas opiniones al respecto.

La clase finaliza no sin antes decir a los alumnos que resuelvan la página del libro que corresponde a medida del tiempo: años y siglos.

Caso 4

Sesión 1/Caso 1

24 de julio de 2008. Colegio C

La profesora inicia la clase recordando las Normas de Convivencia, establecidas a principio de año y "que llevan a hacer mejor el trabajo en el aula". Para ello, plantea la pregunta acerca de cómo debe ser el trabajo y comportamiento en clase;...

… luego, les muestra 'una hoja y les interroga acerca de lo que pueden hacer con ella.

Profesora: Tenemos una hoja, ¿qué podemos hacer?

Óscar: Dibujar

Álvaro: Hacer tareas

Rosalía: Dividirla

Profesora: ¿Cómo podríamos dividirla?

Bruno: Doblándola

Profesora: ¿De cuántas formas podemos doblarla?

Alumnos: …

Profesora: ¿En cuántas partes?

Egiber: Diez

Ebert: Un montón

Patricia: Dos

Nataly: Cuarenta y dos

Profesora: Y si doblamos y doblamos, ¿seguiría siendo la misma?

Alumnos: No
Profesora: Si doblamos y doblamos, ¿qué se forma?

Rosalía: Cuadritos
Juan Pablo: Rayitas
Profesora: Del doblez salen cuadraditos

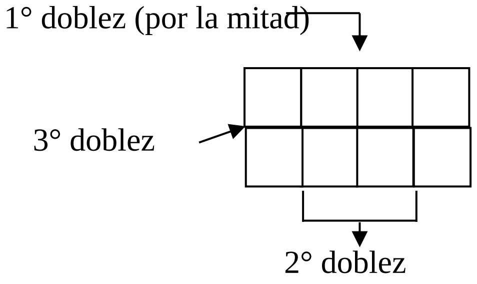
La profesora presenta la hoja que acompañaba a las interrogantes y muestra cómo al doblarla se forman "rayitas" y "cuadraditos" ya que los dobleces le generan "rayas horizontales y rayas verticales".

A continuación, la profesora les propone una "situación problemática" a partir de la actividad de la hoja; para ello les dice que cojan una hoja en la que "van a trabajar con la primera parte[251] y van a representar en ella tres partes iguales". El trabajo de los alumnos

---

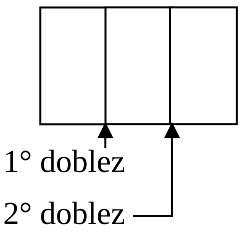
[251] Los alumnos utilizan una cara de la hoja

muestra diferentes versiones. La profesora observa a cada uno de los alumnos y se detiene en Oriana quien ha obtenido lo siguiente:

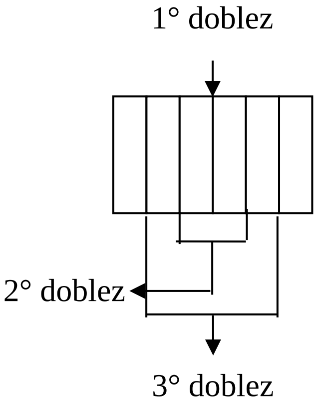


a

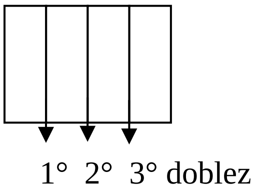
Otras versiones son[252]:



b



c



d

A partir del trabajo de Oriana se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Cómo doblaste la hoja, Oriana?

Oriana: Doblé tres veces

Patricia: No está bien

Profesora: ¿Por qué? ¿Tú crees que hay partes iguales?

Patricia: No…
Egiber: Sí hay, pero no son tres

Juan Pablo: Son diferentes formas de ver las indicaciones

Profesora: Son diferentes formas de ver las indicaciones como dice Juan Pablo. Lo que yo dije fue que debían haber tres que sean iguales, pero en el caso de Oriana hay más de las que se habían indicado. ¿Por qué creen que pasó?

Alumnos: …

La profesora observa el trabajo de Maudy quien ha obtenido una división diferente. Su gráfica corresponde con la figura d:

---

[252] Por lo general, los alumnos asocian el número de dobleces con el número de partes.

Profesora: Maudy, ¿cómo doblaste?

Maudy: En tres partes: uno, dos, tres[253]

Profesora: ¿Tiene tres partes?

Maudy: …
Rosalía: Tiene cuatro

La profesora pregunta quienes han hecho lo mismo. La producción de Sandra se corresponde con la de Patricia, la de Lucero con la de Maudy y la de Keila con la de Oriana.

La profesora le pide a toda la clase que observen los dos trabajos, en los que ambas alumnas han realizado tres dobleces y pregunta si tienen "las mismas partes". Se genera el siguiente diálogo:

Profesora; ¿Tendrán las mismas partes?

Alumnos: ¡No!

Profesora: (dirigiéndose a Maudy) ¿Quién tendrá más, ella o tú?

Maudy: Yo

Profesora: ¿Segura?

Rosalía: Porque ella ha doblado en cuatro

Profesora: ¿Cuatro partes y tiene más que Oriana?... ¿Será la misma cantidad de partes?

Alumnos: No

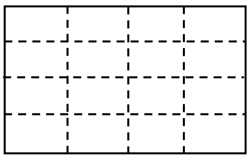
Alumnos: Sí

Egiber: Si es la misma hoja, del mismo tamaño... solo que está doblada de diferente forma…

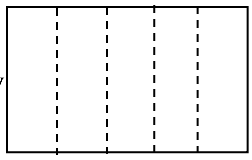
Profesora: Si hacemos otro doblez a ambos trabajos, ¿qué pasaría?

La profesora les pide que, en ambos casos, hagan otro doblez a la hoja. Maudy hace un doblez horizontal (para lo cual descarta el trabajo anterior y comienza de nuevo) y Oriana sigue doblando sobre el doblez anterior. El resultado es el siguiente:

Oriana →



Maudy



Egiber: Se obtiene el doble

Profesora: ¿Qué pasa si Maudy sigue su método? ¿Cuántas obtienes, Maudy?

---

[253] El doblez de Maudy, a diferencia de Oriana, es en forma de acordeón o abanico.

Maudy: Cinco

Profesora: ¿Por qué si dobla de una forma u otra tiene diferente número de partes?

Egiber: Porque Maudy va de uno en uno y en el otro caso, va sobre los dobleces...

Profesora: Oriana forma mitades sobre mitades lo que le duplica la cantidad, sin embargo, Maudy lo hace independientemente por eso es que siempre va aumentando de uno en uno… ¿Quién hizo la indicación correcta?

Patricia: Oriana

…

La profesora pide que pinten una parte de la hoja y pregunta que fracción representa[254]. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué fracción del papel es cada parte coloreada?

Alumnos: Un octavo

Alumnos: Un doceavos

Alumnos: Tres doceavos

Profesora: ¿Por qué un doceavos?

Egibert: doce doceavos… Se supone que todas están pintadas

Profesora: ¿Qué parte vendría a ser cada una?

Nataly: Un doceavos

Profesora: ¿Qué parte sería la mitad?

Daniel: Doce sextos… No, seis doceavos

Profesora; ¿Si pinto todo?

Bruno Jesús: Seis sextos

Profesora: ¿Si solo es uno?

Rosalía: Un sexto

Profesora: ¿Por qué seis sextos?

Egiber: Porque los seis están pintados y son seis

Profesora: ¿Roxana, si es más de la mitad?

Roxana: Dos tercios… Dos de cada uno están pintados y son tres

Profesora: Porque está divido en tres y pinto dos… Si Luciana se quiere llevar esta parte del papel[255], ¿qué fracción del papel se llevó Luciana?

---

[254] Cada alumno pinta sobre sus producciones que no son iguales en todos los casos.

[255] La profesora coge un papel dividido en doce partes iguales de las cuales señala la mitad.

Rosalía: Seis sextos

Profesora: ¿Qué parte se lleva la niña?

Oriana: Seis

Profesora: ¿Qué fracción del papel se llevó Luciana?

Rosalía: Seis sextos

El timbre suena y los alumnos guardan sus materiales de matemática.

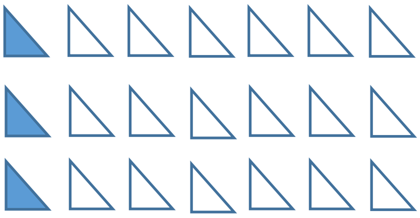
La clase finaliza

Sesión 2/Caso 4

Jueves 14 de agosto de 2008. Hora: 9:30 a 10:20. Colegio C

El tema de la clase es la fracción como operador. Para ello, la profesora dibuja en la pizarra 21 triángulos, pinta 3 y escribe "1/7 de 21 es igual a 3", luego pregunta por qué un sétimo de veintiuno es tres.

Se genera el siguiente diálogo:



Profesora: ¿Por qué un séptimo de veintiuno es igual a tres?

Rossy: Porque siete por tres es veintiuno,

Angie: Veintiuno entre siete es tres

Profesora: ¿Por qué un séptimo de veintiuno es igual a tres?

Egiber: Es la regla de cómo se saca la fracción de un número: divido entre 7 y multiplico por uno

Profesora: ¿Sirve para todos los casos? Por ejemplo, para los siguientes casos.

La profesora escribe en la pizarra las siguientes situaciones:

3/5 de 15

6/9 de 45

4/6 de 60

Los alumnos[256] siguen el procedimiento que mencionó Egiber: "dividir y multiplicar", luego la profesora pregunta cómo averiguar si es correcta o no dicha respuesta. Para ello se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué indica 3/5?

Luigi: Que se divide entre 3 y se toma 5

Ronny: No, que se divide entre 5 y se toma 3

Profesora: Bien, divides entre cinco y tomas tres. Recuerden que el denominador indica las partes en que se divide la unidad y el numerador, las que se toman. Ronny, representa gráficamente lo que estás diciendo.

---

[256] No todos. Pocos grafican y otros observan el trabajo de los compañeros. En algunos casos se intentó averiguar si comprendían la situación y manifestaron que sí, pero que no querían trabajar, animándoles a seguir las indicaciones de la maestra En otros, no entendían el trabajo.

Ronny sale a la pizarra dibuja un rectángulo, lo divide entre cinco y pinta tres partes. La profesora
pregunta a la clase si ese gráfico es correcto. Los alumnos responden afirmativamente. La profesora continúa:

Profesora: En este caso, su compañero ha dibujado un rectángulo, lo ha dividido entre cinco y ha pintado tres. ¿Qué pasa cuando tienes que representar 3/5, no de un rectángulo sino de 15? Recuerden que en el primer ejemplo se mostró 1/7 de veintiún triángulos, no solamente de uno. ¿Cuántos rectángulos tendríamos que dibujar en este caso?

Rosalía: Quince

Profesora: Vamos a dibujar los 15 rectángulos (la profesora dibuja), ¿qué hacemos luego?

Alumnos: …
Profesora: ¿Qué representa 3/5?

Patricia: Dividir entre 5 y tomar 3

Profesora: En este caso, qué dividimos entre cinco

Patricia: Los 15 rectángulos

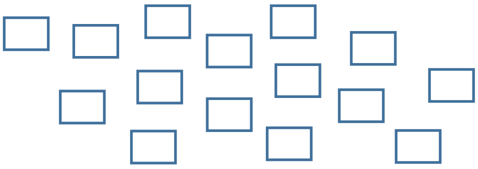
Profesora: ¿Cómo divido entre 5 los 15 rectángulos?

Juan Pablo: Da tres

Profesora: ¿Tres qué?

Alumnos: …

Profesora: (la profesora dibuja en la pizarra quince rectángulos) Fíjense, si tengo 15 rectángulos y los divido entre cinco, me da tres. ¿Qué quiere decir?



Omaira: Que formo tres grupos.

Profesora: ¿Por qué tres grupos?

Omaira: Porque quince entre cinco es tres

Profesora: Si formo tres grupos quiere decir que lo he dividido entre tres y no entre cinco

Angie: Entonces hay que formar 5 grupos

Profesora: Al formar cinco grupos, cada grupo tiene… ¿cuántos triángulos?

Angie: Tres

Profesora: (la maestra forma los cinco grupos con los rectángulos dibujados y señala los que hay en cada grupo) Al formar cinco grupos, cada uno tiene tres rectángulos, ¿es correcto?

Angie: Sí

Profesora: Al dividir 15 entre 5 grupos me da los rectángulos que hay en cada grupo. Pero la fracción me dice 'tres quintos de quince', ¿qué quiere decir?

Maudy: Que cojo tres rectángulos

Profesora: ¿Es correcto?, ¿tengo que coger solamente tres rectángulos?

Marjori: No, tengo que coger tres grupos porque cada parte es un grupo

Profesora: Y al coger tres grupos de tres cada uno, ¿cuántos rectángulos cojo?

Marjori: Nueve
Profesora: Por lo tanto, los 3/5 de 15 es...

Marjori: Nueve
Egiber: Pero porqué tanto problema, si con la regla sale igual

Profesora: Es correcto, pero demostramos que efectivamente "Tres quintos de quince es nueve" ya que divides quince en cinco grupo. Cada grupo tiene tres rectángulos. Luego coges tres grupos y hallas el número de rectángulos que representan los tres quintos de quince

Egiber: No sé, me parece que pierdes tiempo

Bruno: Pero así lo entiendes mejor.

Egiber: No sé. La regla te lo dice. Si ya la sabes…

Profesora: Pues ahora sabes comprobarlo y además la conocen todos tus compañeros.

La profesora propone resolver los *ejercicios* restantes y comprobar gráficamente. Para ello pide que un grupo aplique la regla y otro represente gráficamente. Una vez finalizada la actividad por ambas partes, los alumnos comparan sus soluciones y verifican.

En general, los alumnos tienen dificultad en la representación gráfica. Antes de hacerla, dividen el número entre el denominador para hallar la cantidad de triángulos que deben haber en cada grupo, luego representan gráficamente de acuerdo al resultado (si el resultado es cinco dibujan de cinco en cinco hasta completar la cantidad indicada) y pintan los grupos que dice el numerador:

Profesora: ¿Qué haces para representar?

Patricia: Tengo que hacer seis grupos de diez

Profesora: ¿Por qué son de diez?

Patricia: Porque sesenta entre seis es diez

Profesora: Luego, ¿qué haces?

Patricia: Pinto cuatro grupos

Profesora: ¿Cuántos son cuatro sextos de sesenta triángulos?

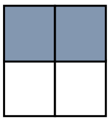
Patricia: Son cuatro grupos que son cuarenta triángulos

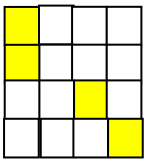
La clase finaliza.

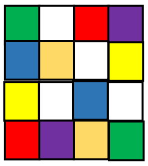
Sesión 3/Caso 4

Lunes 18 de agosto de 2008. Hora: 7:40 a 9:10. Colegio C

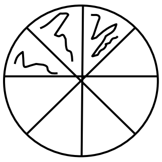
La profesora les propone a los alumnos hacer una unidad entera en su cuaderno. Los alumnos preguntan qué significa “hacer una unidad entera” y la profesora les dice que dibujen la figura geométrica que ellos deseen: un cuadrado, un rectángulo, un rombo... Los alumnos generalmente dibujan un cuadrado aunque en algunos casos se observa que dibujan círculos y rectángulos. Luego, la profesora les pide que dividan esa figura en partes iguales, haciéndolo de manera libre y a continuación indica que de esas partes divididas tomen "las fracciones" que quieran: una, dos, etc. Algunas de las gráficas son las siguientes:



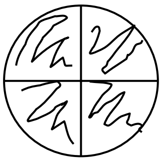




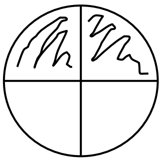
La profesora les pide a unos alumnos que salgan a la pizarra y representen gráficamente lo que han hecho, pero en las unidades que ella les propone (círculos de cartulina que ha adherido a la pizarra). Los alumnos dividen los círculos en tantas partes como dividieron sus respectivas figuras. Las siguientes son representaciones de lo elaborado por los estudiantes[257]:



3/7



4/4



2/4

Una vez representados en los círculos el trabajo de cada alumno que salió a la pizarra, la profesora pregunta qué se puede hacer con las fracciones. Los alumnos responden que se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir; además de convertirlas en mixtos[258].

Luego, la profesora pregunta cuál es la mayor, a lo que todos los alumnos, inmediatamente, responden que la primera. Los alumnos escriben la siguiente relación: 3/7>4/4>2/4. El alumno que dibujó la primera imagen dice que no es 3/7 sino 3/8. La profesora cambia la fracción y pregunta cuándo una fracción es mayor que otra. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Cuándo una fracción es mayor que otra?

Luigui: Cuando el denominador es mayor que el numerador

Profesora: ¿Pero con qué lo relaciono al decir esto: con la unidad o con el resto de fracciones?

---

[257] El trabajo de los estudiantes no es perfecto; es decir, sus divisiones no obtienen partes iguales, pero intentan que así sea.

[258] En ningún caso se observó graficas de mixtos con más de una fracción; sin embargo, se mencionó el hecho de transformar a mixto una fracción.

Luigui: Con el resto de fracciones

Profesora: Lo que Luigui acaba de decir es con relación a la unidad. Vamos a ver si estamos en lo cierto. 3/8 es mayor que uno: $\frac{3}{8} > 1$. Esto es lo que dice Luigui. ¿Estará bien?

Maryori: Una fracción es mayor que la unidad cuando el numerador es mayor que el denominador

Profesora: Tú me dices que el numerador es mayor que el denominador. Tú me dices que 3/8 en relación con la unidad va a ser ¿mayor o menor?

Maryori: Menor

Egiber: Es menor, porque de los ocho se han tomado solo tres

Profesora: Supongamos que Milagros solo pintó tres partes, ¿será cierto que 3/8 será menor que uno?

Egiber: Sí

Profesora: ¿Por qué?

Maryori: Porque la unidad está completa y al otro le faltan cinco partes

Profesora: Por lo tanto va a ser menor que la unidad, ¿no es cierto? ¿Qué puedo decir de esto?

Patricia: Que 3/8 es menor que uno

Profesora: 3/8 es menor que 1, pero porqué

Patricia: Porque 3/8 no pinta toda la unidad

Roxana: Y el numerador es menor y el denominador es mayor y el numerador es menor que el denominador

Profesora: ¿4/4? ¿Qué puedo decir?

Bruno: Que es igual

Profesora: ¿Por qué?

Allisson: Porque el numerador y el denominador son iguales y va a ser igual que la unidad

Profesora: Si hago esto...[259] ¿qué me queda? ¿A qué es igual si simplifico?

Egiber: A solo la unidad

Profesora: En ese caso tomas la unidad. ¿2/4 será mayor, menor o igual?

Patricia: Menor

Profesora: Menor, ¿por qué?

---

[259] La profesora intenta simplificar el numerador y el denominador.

Bruno: Porque son cuatro partes de torta pero se comen dos

Patricia: Porque el numerador es menor que el denominador

Profesora: ¿Cuándo se supone esto: 1 >?

Rosalía: Cuando el numerador es menor que el denominador

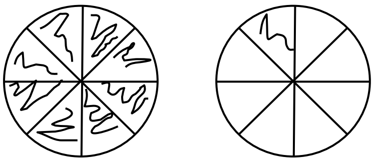
Profesora: Supongamos que tengo 9/2

Rosalía: Es mayor

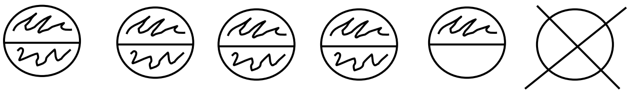
Profesora: Vamos a representar 9/2

Un grupo de alumnos expresa que no se puede representar, sin embargo Angie y Patricia dicen que sí, por lo que la profesora les dice que salgan a la pizarra a representar la fracción. Ambas alumnas representan de la siguiente manera:

Angie:



Patricia:[260]



A partir de las gráficas...

Profesora: Vamos a ver lo que piensa cada una de las alumnas de lo que ha hecho. Angie, ¿nos puedes explicar lo que has hecho?

Angie: Ocho más ocho, dieciséis y de los dieciséis pinto nueve

Profesora: ¿Por qué Angie?

Angie: …[261]

Profesora: Angie no nos puede explicar en este momento. Vamos a dejarle un tiempo para que piense y preguntemos a Patricia...

Patricia: Yo no puedo partir el dos en un círculo… no puedo pintar nueve, entonces lo que hago son cinco veces: dos, cuatro, seis hasta diez en total y como pide nueve… Tengo que pintar nueve.

Profesora: ¿Y por qué sobra?

Patricia: Porque nueve es un número impar y para eso he tenido que coger dos

Profesora: ¿Por qué no en tres?

---

[260] Patricia dibujó seis círculos, pero al pintar solo cinco, borra el sexto.

[261] Angie pregunta a la observadora si está mal lo que ha hecho. La observadora le pregunta porque divide entre ocho y por qué no entre nueve. Angie dice que porque deben haber dos unidades.

Patricia: Porque esta es una fracción impropia

Profesora: ¿Cuándo una fracción es impropia?

Patricia: Cuando el denominador es menor que el numerador

Natalia: El dos no significa que sean dos unidades sino que la unidad está dividida en dos partes. Si mi numerador me va a indicar las partes en las que divido mi fracción... ¿estoy en lo cierto?

Profesora: ¿Qué piensan, niños?

Omaira: Sí

Egiber: ¡No!

Profesora: ¿Se respeta el pensamiento de los demás?

Alumnos: Sí

Profesora: Aquí estamos para aprender. Estos pensamientos nos van a llevar a una idea de lo que son las cosas. ¿Cuál es la unidad? ¿Por qué cinco unidades? ¿Álvaro?

Álvaro: Porque piden nueve medios y la unidad se va a dividir en dos y no puede en una sola por eso ha dividido en cinco. Por eso tiene diez y coge nueve

Profesora: ¿Alguien más que pueda explicar?

Egiber: Ha dibujado cinco unidades y las cinco las dividió por la mitad y de ahí pinta nueve porque es nueve medios

Rosalía: Dividió a cinco partes, hizo diez pero solo pintó nueve

Profesora: ¿Por qué cinco unidades? ¿Óscar?... ¿Sandra?

Sandra: Tiene que llegar a la fracción que le han indicado

Profesora: ¿Y dónde me indica?

Sandra: Ahí está pintado... nueve

Óscar: Yo creo que tiene que dividir en nueve y pintarlos[262]

Profesora: (a partir del trabajo de Óscar) ¿Y de ahí qué va a tener?

Óscar: Las nueve que piden

Egiber: El denominador indica dos

Óscar: Entonces hay que dividir en dos, pero no hay nueve

Profesora: ¿Quién piensa diferente?

Algunos alumnos levantan la mano y opinan que el gráfico de Patricia es mejor. La profesora vuelve a preguntar por qué se tienen que representar cinco unidades.

---

[262] Óscar dibuja dos unidades divididas en nueve partes y pinta una unidad entera.

Profesora: ¿Por qué cinco unidades?

Lucero: Cinco por dos es diez y como me han pedido nueve, he pintado cinco
Juan Pablo: Puedo hacer tres círculos, divido en tres y tomo tres, tres y tres
Óscar: Porque piden nueve medios y tenía que hallar al resultado

Rosalía: El numerador tiene las partes que le han pedido y como nueve es impar tengo que llegar al diez .

Lucero: Tomando de dos en dos para tomar nueve

La profesora vuelve a dibujar un círculo y lo divide en dos, enfatizando que el denominador indica que hay que realizar dicha división; luego explica la necesidad de hacer más círculos: "Dibujo una unidad y la divido en dos partes, como indica el denominador; como no alcanza con estos dos, debemos dibujar otra igual... ". Una vez que la profesora termina la explicación, Angie le pregunta si su representación está bien. La profesora pregunta a la clase cuál de las dos representaciones es la correcta (la de Angie o la de Patricia).

Profesora: ¿Cuál de las dos representaciones es la correcta?

Alumnos: (la mayoría) ¡La de Patricia!

Profesora: ¿Por qué la de Patricia, Allyson?

Allyson: Porque pide las partes y el numerador lo que pinto

Profesora: ¿Qué me indica el numerador?... ¿Cristian?[263]

Cristian: Las partes que voy a tomar

Profesora: ¿Y el denominador?... ¿Grace?

Grace: Las partes divididas…

Profesora: ¿Qué voy a encontrar de diferente?

Alumnos: …

Profesora: ¿Qué de diferente tiene con las otras fracciones?

Maryori: Que es impropia…

Profesora: Es otra clase de fracciones

Los alumnos van mencionando lo que significa cada elemento de la fracción y cómo tienen que representar la fracción indicada. Luego, la profesora les dice que va a plantear el mismo *problema* en una *situación*.

Profesora: En una fracción impropia también hay numerador y denominador, pero ¿cómo es el numerador?

Maryori: Es mayor

---

[263] A cada pregunta, los alumnos levantan la mano y esperan a que la profesora nombre alguno de ellos para responder.

Profesora: ¿Y el denominador?

Egiber: Menor

Profesora: Como es menor, no alcanza y debemos hacer otras unidades iguales hasta poder pintar las que piden… ¿Comprenden?

Alumnos: ¡Sí, señorita!

Profesora: Me alegra que sean tan inteligentes. Vamos a plantearla como situación: Podemos decir que la mamá de Jesús tiene cinco queques. Si son nueve los visitantes, ¿qué puedo hacer para repartidos?

En un principio los alumnos no responden. La clase se queda en silencio. La profesora llama a uno por uno para que dé alguna respuesta.

Egiber: Dividir entre dos cada queque

Bruno: Son nueve más Jesús, diez

Profesora: Buena observación, Bruno; pero pensemos que Jesús no come de ese queque…

Angie: Entonces, va a sobrar una parte

Profesora: Exacto, pero así se hace para que a cada uno le toque la mitad.

La profesora pide que uno de los alumnos salga a la pizarra y represente gráficamente la situación. Uno de los alumnos intenta dibujar un queque; sin embargo le resulta difícil. La profesora relaciona con la situación de los círculos:

Profesora: Es igual que los círculos. No entiendo porque tanto problema si ya está (la profesora dibuja los círculos). ¿El dos por qué niños? ¿Luigui?

Luigi: Para dividirlos… repartidos

Maryori: ¿Porque cinco partes en dos?

Angie: Para que alcance para todos y aún sobra una parte

Gabriel: Lo más equitativo es dividir en dos partes

Profesora: Cinco… y quiere nueve… dividido entre dos… ¿Por qué el número cinco?

Egiber: … La manera más equitativa de dar nueve partes a nueve amigos

Profesora: ¡Cómo en el otro hablan y en el otro se quedan callados!... Les cuento una pequeña situación problemática. ¿Cuándo aprenden mejor?

Bruno: Cuando nos cuenta algo

Profesora: Si pido que de cada uno tomen dos, ¿cuántos voy a tener que hacer para tener nueve? ¿Qué puedes decir, Patricia?, ¿voy a hacer uso de más cantidades?

Patricia: Sí
Profesora: Acá la unidad es suficiente[264], acá no.

La profesora propone la siguiente actividad: ¿Me pueden hacer este gráfico: 12/5?

Angie: … Si es una pizza y está dividida en 12

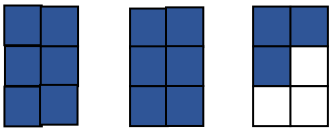
Los alumnos comienzan a hacer sus representaciones gráficas. Todos dibujan círculos, algunos los dividen en cinco y otros en 12 partes.

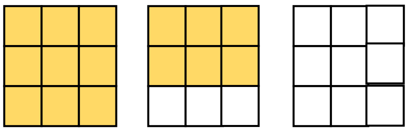
Luego de unos minutos, la profesora da contexto a la situación planteando lo siguiente a la vez que escribe en la pizarra: "La mamá de Darleny prepara tamales muy ricos. Tiene doce tamales. Darleny llegó a casa con diez amigos y amigas. Si su mamá les invitó tamales a todos, con zarza y ají, ¿cómo los pudo repartir?, ¿le sobró o le faltó? ¿Cuánto? Escribe tres gráficas y representa en fracciones".

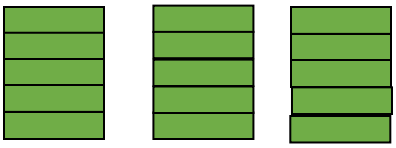
Los alumnos escriben el problema y lo leen, luego dibujan doce tamales. Algunos alumnos manifiestan que "alcanza uno para cada uno y sobra uno". Otros dicen que "falta saber cuántos son en la familia". La profesora les dice que "son los que aparecen en el problema". Los alumnos plantean sus soluciones.

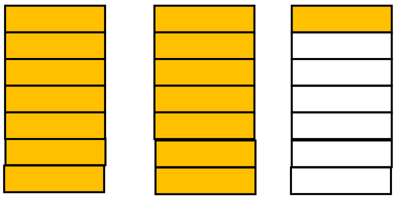
Mientras los alumnos esbozan sus soluciones, la profesora plantea otra situación que también escribe en la pizarra: "En el cumpleaños de Álvaro hicieron tres fuentes de causa de pollo con mayonesa y aceitunas. Si llegaron quince invitados, ¿cuántas porciones fueron repartidas en cada fuente? Representa en un gráfico y fracción".

La profesora pregunta cómo se tendría que representar y los alumnos muestran las siguientes versiones, luego de escribir en sus cuadernos el problema:


15/6


15/9


15/5


115/7

La profesora deja las correcciones para después ya que la hora de clase llegó a su fin. Sin embargo les pregunta a los alumnos si es que los gráficos son correctos. En algunos casos opinan que quince quintos es el correcto porque "no sobra nada y se reparte todo"; mientras que otros opinan que con los otros se puede volver a repartir "por si quieran repetir". Se les pregunta qué pasaría si todos quieren repetir a lo que Maudy dice que "de lo que sobra se pueden hacer quince partes, pero toca un poquito"

Profesora: ¿En cuáles se puede hacer las quince partes iguales?

---

[264] Refiriéndose a 3/8.

Rosalía: En todos menos en quince novenos

Profesora: ¿Por qué?

Rosalía: Porque sobran doce y es difícil

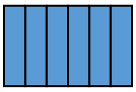
Egiber: Lo que se puede hacer es que los últimos que repitan se partan entre dos

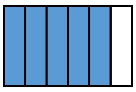
La clase finaliza.

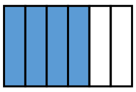
Sesión 4/Caso 4

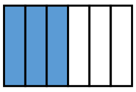
Miércoles 20 de agosto de 2008. Hora: 7:40 a 9:10. Colegio C

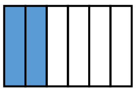
La profesora propone la siguiente situación: Tenemos cinco barras de chocolate que se reparten de la siguiente manera:


6/6


5/6


4/6


3/6


2/6

Una vez dibujado las gráficas en la pizarra, la profesora les pregunta qué pueden observar. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué pueden observar?

Álvaro: Que son (fracciones) propias

Profesora: ¿Cuándo las fracciones son propias?

Álvaro: Cuando el numerador es menor que el denominador

Patricia: Profesora, yo observo que a cada uno se le quita barritas de chocolate

Profesora: ¿Qué puedo hacer para indicar cuantas barritas se han quitado?

Bruno: Sumar lo pintado.

Pedro: Sumar fracciones

Óscar: Veinte sextos. Sumo todo

Maryori: Todas son homogéneas

Profesora: ¿Qué significa?

Maryori: Que el denominador es el mismo

Profesora: ¿Qué pasa si tengo un medio y un tercio?... ¿Y si quiero sumar cómo hacerlo?

Maryori: Sacar el mínimo común múltiplo de tres y dos

Roxana: Es un quinto

Luigi: Saca mínimo común múltiplo y operas un medio más un tercio. Es igual a cinco sextos

Profesora: Intentemos recordar la regla: al sacar el mínimo común múltiplo va a ser igual a seis. ¿Qué voy haciendo en el camino?... El denominador es seis. ¿Es igual así: $\frac{}{6}$ y así: $\frac{}{6}+\frac{}{6}$[265]?

Alumnos: Sí
Alumnos: No
Profesora: Tres sextos más dos sextos es igual a cinco sextos

Bruno: Es igual al otro

Profesora: ¿Están de acuerdo?

Alumnos: Sí
Profesora: ¿Qué puedo decir de estas fracciones?

Ronny: Que son homogéneas

Profesora: ¿Primero?
Ronny: Heterogéneas
Profesora: Y luego para poderlas sumar, ¿qué hacía?

Ronny: Las convertía a homogéneas

Profesora: ¿Qué puedo decir de la suma de fracciones heterogéneas?

Cristian: Que hay que sacarles en mínimo común múltiplo

Profesora: Para convertirlas en...

Bruno: A un solo denominador

Profesora: Para poder. ..

Juan de Dios: Las voy a convertir en homogéneas para poderlas sumar

Profesora: Supongamos que tengo 7/9 - 3/6

Maryori: Hay que sacarles el mínimo común múltiplo

Profesora: ¿Cuál es el objetivo?

Jossy: Convertirlas en homogéneas

La profesora les dice a sus alumnos que escriban en sus cuadernos lo que han hecho (la suma y resta de fracciones heterogéneas) y resuelvan las operaciones. La profesora va preguntando qué hay que hacer.

Egiber: Buscar mínimo común múltiplo

Patricia: Para llegar a las homogéneas. Es dieciocho

---

[265] La profesora se refiere a si la forma de expresar la suma es igual al hacerlo junto, como lo hizo Luigi, que al hacerlo por separado y desarrolla esta forma

Egiber: Es lo mismo que la resta de homogéneas

La profesora les propone una suma de tres fracciones heterogéneas: $\frac{9}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}$ Los alumnos sacan el mcm. Se llega a que es dieciséis. La profesora pregunta qué diferencia hay entre ese mcm. y el anterior (el obtenido al sumar un medio más un tercio). Los alumnos no saben qué responder. La profesora les pide que observen ambos casos y digan "algo" sobre los denominadores.

Allison: No entiendo porque es seis

Maudy: Porque son fracciones heterogéneas

Álvaro: Para convertirlas en homogéneas

Angie: Dos por tres es seis

Jossie: Dieciséis es uno de los denominadores

Profesora: ¿Cuándo puede ser el mínimo común múltiplo igual a uno de los denominadores? Alumnos:

…

Profesora: Seis no es ninguno de los denominadores y dieciséis es uno de ellos, ¿el menor o el mayor?

Rosalía: El mayor

Profesora: ¿Cuándo el mínimo común múltiplo es el denominador mayor?

Egiber: Cuando, por ejemplo, multiplicas ocho por dos te da dieciséis y cuatro por cuatro te da dieciséis. Dieciséis es múltiplo de ocho y cuatro

Profesora: ¿Cuándo podemos decir que el mínimo común múltiplo es uno de los denominadores de las fracciones?

Patricia: Cuando son múltiplos.

Profesora: ¿Dos y tres son múltiplos?

Alumnos: ¡No!

Profesora: ¿Y su mínimo común múltiplo es uno de ellos?

Alumnos: ¡No!

Profesora: ¿Cuatro y ocho son múltiplos de dieciséis?

Jossy: Sí

Profesora: ¿Y cuál es el mínimo común múltiplo?

Ronny: Dieciséis

Egiber: Para sacar el mínimo común múltiplo puedo multiplicar los denominadores o poner el mayor si el mayor es múltiplo de los otros.

La profesora resume las ideas que han ido expresando a lo largo de la clase: “nos damos cuenta que para sumar fracciones heterogéneas podemos transformarlas en homogéneas sacando el mínimo común múltiplo de los denominadores (de las fracciones que voy a sumar), así se puede sumar a partir de las fracciones homogéneas”.

La clase termina.

Sesión 5/Caso 4

Lunes 1° de setiembre de 2008. Hora 7:30 a.m. a 9:10 a.m. Colegio C

La clase se inicia con la corrección de cuatro *problemas* que se propusieron para la casa. La profesora saca a cuatro a alumnos a resolver los primeros cuatro problemas.

Angie, quien permanece en su mesa, pregunta si uno de los problemas en particular lo ha resuelto correctamente pues no está segura de su respuesta. El problema dice lo siguiente: Para hacer un pastel se necesita 2/8 de kilo de harina. ¿Cuánto se necesita para hacer 26 pasteles? La alumna ha propuesto multiplicar 26 por 8 y dividir el resultado entre 2. El resultado final es 104. Antes de decirle si su respuesta es correcta o no se le pregunta qué es lo que dice y plantea el problema. La alumna lo lee correctamente. Luego de la lectura se le pregunta cuántos kilogramos de harina necesita para hacer los 26 pasteles, generándose el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Cuántos kilogramos de harina se necesitan para hacer 26 pasteles?

Angie: Hay que multiplicar 8 por 26 y dividirlo entre 2.

Profesora: ¿Cuánto necesitas para hacer un pastel?

Angie: 2/8 kilo de harina

Profesora: ¿Cuánto necesitarías para hacer dos pasteles?

Angie: 2/8 más 2/8

Profesora: ¿Cuánto necesitarías para tres pasteles?

Angie: 2/8 más 2/8 más 2/8

Profesora: ¿Qué operación tienes que hacer?

Angie: Sumar

Profesora: ¿Cuánto de harina necesitarías para hacer 26 pasteles?

Angie: 2/8 más 2/8 más 2/8 más…

Profesora: Sumas 2/8 hasta completar 26 veces".

Angie: Sí

Profesora: ¿Qué operación puede simplificar dicha suma?

Angie: La multiplicación

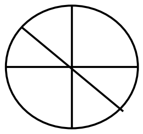
Profesora: ¿Qué multiplicarías?

Angie: 2/8 por 26

La alumna multiplica correctamente y al preguntarle cuál es el resultado ella responde con acierto, pero no asocia a lo que le plantea el problema. La alumna vuelve a preguntar si su planteamiento es correcto o no.

La profesora pide a cada uno de los alumnos que resolvieron en la pizarra que lean el enunciado de su problema. Uno de los problemas dice lo siguiente: "Carlos saca los 5/8 de su torta de chocolate, de los cuáles 3/8, por casualidad, se le cayeron al piso. ¿Qué porción de torta le quedó para repartir? El alumno realiza la siguiente resta: $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ Los alumnos asienten cuando la profesora les pregunta si lo que ha hecho el alumno es correcto. Los demás problemas no ofrecieron dificultad para el planteamiento de la solución, aunque en algún caso hubo errores en la operación y en el planteamiento de la respuesta (Owen se olvidó de colocar el denominador, además de errar en el hallazgo de uno de los numeradores. Por su parte, Jesús corrigió el numerador, pero también olvidó el denominador).

La profesora propone que los cuatro problemas restantes los corrijan en la próxima clase y acto seguido les enuncia la siguiente situación: "¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta?". Lucero propone el siguiente planteamiento y respuesta:

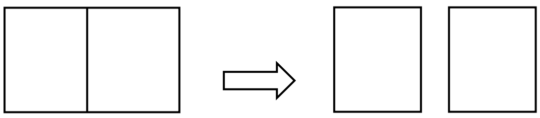


$$1=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$$

Por su parte Patricia plantea: $\frac{1}{6}+5=\frac{6}{6}$

Al preguntarles por sus respuestas, la primera alumna responde que "la torta es uno y la mitad es 3/6; luego se le resta 1/6 para que le dé 2/6". Patricia no sabe qué responder ante su planteamiento. La profesora pregunta (a los alumnos) si creen que lo que hizo Lucero es correcto. Los alumnos responden que sí[266]. Se puede observar que algunos alumnos sólo reproducen lo que Lucero ha escrito en la pizarra.

La profesora vuelve a preguntar cuántas porciones de un sexto de torta hay en media torta. No obtiene respuesta; luego dibuja un rectángulo simulando que es la torta y a continuación dibuja dos rectángulos indicando que cada uno representa media torta. Se genera el siguiente diálogo:



Profesora: ¿Me dicen que voy a trabajar con toda la torta?

Alumnos: Con la mitad

Profesora: ¿Cuál mitad?

Alumnos: cualquiera

Profesora: ¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta? (la profesora señala uno de los rectángulos que representan media torta).

---

[266] Se puede observar que los alumnos escriben el procedimiento seguido por Lucero ya que esta alumna suele tener aciertos en el área y los alumnos confían en sus respuestas.

Alumnos: Dos sextos

Profesora: 1/6 por 2 nos da 2/6. Qué creen, ¿qué tipo de operación voy a hacer?

Alumnos: Resta... suma... dividir[267].

Profesora: Vamos a ver porqué dividir. ¿Cómo se divide?

Alumnos: Sacando mínimo común múltiplo.

Profesora: Otra forma

Lucero: De un sexto, el denominador se convierte en numerador y el numerador el denominador. Luego se multiplica.

A partir de lo que Lucero ha mencionado, la profesora planeta la siguiente operación: $\frac{1}{2} \div \frac{6}{1} = \frac{6}{2} = 3$ La profesora pregunta a la clase porqué el resultado es tres. Se genera el siguiente diálogo:

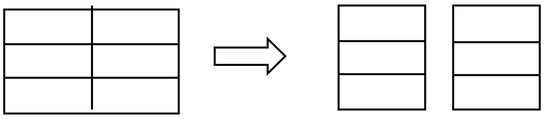
Profesora: ¿Por qué el resultado es tres?

Maryorie: Porque tres entre uno es tres… No, tres por uno es tres

Profesora: El denominador pasó a ser numerador y el numerador pasó a ser denominador… ¿Esto soluciona mi problema o no?

Lucero: Un sexto no se convierte sino un medio. La respuesta sería dos sextos.

La profesora vuelve a incidir en el gráfico, representando los sextos correspondientes, pero los alumnos insisten que es 2/6. El diálogo continúa:



Jesús: La torta entera son seis sextos.

Profesora: ¿A qué es igual seis sextos?

Jesús: A uno

Profesora: ¿Cuántas partes hay si preguntan por la mitad de la torta?

Jesús: Tres

Profesora: ¿Pero en realidad, cuántas partes de la torta van a ser?

Jesús: Tres sextos

Profesora: Hay seis sextos y me dicen media torta, entonces 6:2=3. De ahí nos salen 3 porciones de la torta.

---

[267] Diferentes alumnos son los que responden.

Los alumnos aún no comprenden porqué la profesora plantea la operación invirtiendo un sexto y no un medio, por ello contextualiza la operación en una situación de reparto.

La profesora plantea la siguiente situación para explicar la anterior: "imagínense que nuestra mamá decide repartir la torta cuando ya está por terminar el cumpleaños, a las 7, pero a las 7:10 llegan más invitados. Si ya tiene las porciones divididas, ¿qué puede hacer?”. Los alumnos responden:

Alumnos 1[268]: Hay que multiplicar

Alumnos 2: Dividir

Profesora: Claro, esto se puede hacer dividiendo en partes más pequeñas

Lucero: Pero el que se invierte es un sexto y no un medio

Profesora: ¿El año pasado vieron este tema?

Alumnos: ¡No![269]

Profesora: La forma como yo lo he resuelto es la correcta. Observen el gráfico: de una unidad de la torta tengo que hacer porciones de 1/6, ¿cuántas voy a hacer?

Alumnos: Un tercio

Alumnos: Tres

Alumnos: Dos tercios

Profesora: ¿Tres o un tercio?

Maryorie: Tres

Profesora: ¿Por qué?

Maryorie: Porque voy a tomar un medio

Profesora: Que es lo que está en el gráfico: un, dos y tres partes.

La profesora pregunta qué se ha visto en la clase de hoy; los alumnos responden “división de fracciones”; luego explica el proceso que hay que seguir apoyándose en la situación trabajada. A medida que explica, pregunta a los alumnos qué paso sigue en ese procedimiento. Al final, la profesora recalca que en media torta hay tres porciones de un sexto de torta. La profesora pide que expliquen cuándo se divide fracciones. Maryorie dice que cuando el numerador es mayor que el denominador; otros alumnos no saben qué responder.

La profesora les propone resolver una división siguiendo los pasos que ha explicado. Los alumnos copian la operación en sus cuadernos y algunos alumnos resuelven invirtiendo

---

[268] No se anotó el nombre, Cuando se indica alumno o alumna es uno solo sin recordar el nombre. Cuando se indica en plural es porque la intervención fue masiva.

[269] El tema de fracciones se trabaja desde tercer grado, año en el que el alumno deberá ser capaz de interpretar y representar gráficamente fracciones usuales y representar gráficamente e identificar fracciones equivalentes. En cuarto grado se hace lo mismo con las fracciones propias e impropias.

la segunda fracción; otros piden que les expliquen otra vez cómo hay que hacer y lo resuelven. La profesora explica, paso a paso:

Profesora: ¿Cuándo se dividen fracciones?

Maryorie: Cuando el numerador es mayor que el denominador

Profesora: ¿Owen?

Owen: …

Profesora: ¿Darleny?

Darleny: …

Profesora: Vamos a resolver una división diferente siguiendo los pasos explicados

Bruno: Señorita, ¿puede explicar otra vez?

Profesora: Nos piden saber cuántas porciones de un sexto hay en media torta. Media torta es un medio por lo que divido un medio entre un sexto… para saber cuántas hay. Invertimos un sexto y nos queda un medio por seis… que es tres

Bruno: Gracias, señorita.

Profesora: Recuerden que la segunda fracción se invierte y se multiplica.

La clase finaliza.

Sesión 6/Caso 4

Miércoles 03 de setiembre de 2008. Hora: 7:40 a.m. a 9:10 a.m. Colegio C

La profesora comienza la clase proponiendo un *problema sobre fracciones*: “Jorge ha notado que los paquetes de arroz de la marca que él prefiere pesan tres cuartos de kilo. Como su familia es numerosa ahora piensa comprar el arroz por sacos. ¿A cuántos paquetes de arroz de tres cuartos de kilo equivale un saco de veintidós kilos y medio de arroz?”.

A continuación se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué hay que hacer?

Ronny: Una división

Profesora: ¿Qué hay que dividir?

Ronny: Veintidós un medio entre tres cuartos

Profesora: ¿Qué hacemos con el mixto?

Juan Pablo: Se convierte en fracción

Profesora: ¿Cómo se realiza la conversión de mixto a fracción?

Maryori: Hay unos pasos.

Profesora: Primero fíjense en el mixto... ¿En cuántas partes está dividida la unidad?

Maryori: En dos

Profesora: Por lo tanto el denominador es dos. ¿Todos de acuerdo?

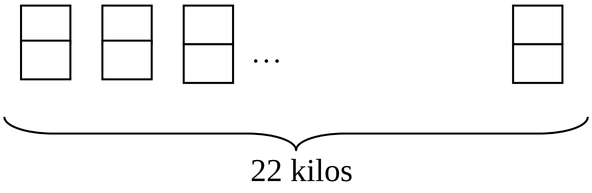
Alumnos: Sí

Profesora: Si hay 22 enteros, ¿cuántas unidades enteras hay?

Ronny: Veintidós
Profesora: Por lo tanto, en 22 unidades ¿cuántos medios hay?

Alumnos: …

Al ver que los alumnos no responden, la profesora dibuja en la pizarra un rectángulo y les dice que se imaginen que ese rectángulo representan un kilo de arroz, luego divide entre dos el rectángulo y dibuja otros iguales; a la vez pregunta cuántos kilos son. Los alumnos responden que 22. A partir de la imagen se genera el siguiente diálogo:



Profesora: En veintidós kilos, ¿cuántos medios kilos hay?

Egiber: Cuarenta y cuatro

Profesora: ¿Por qué?

Egiber: Porque cada kilo tiene dos medios kilos y son 22 kilos, multiplicas 22x2. Es 44.

Profesora: Bien, ¿pero solo fueron 22 kilos?

Alumnos: No

Luigui: Compró 22 kilos y medio

Profesora: Por lo tanto, ¿cuántos medios kilos son?

Bruno: 45

Profesora: Por lo tanto, si hemos cogido 45 medios kilos y cada bolsa se ha dividido en dos medios kilos, ¿cuál es la fracción?

Bruno: 45/2

Profesora: Ustedes recuerdan que para transformar en fracción un mixto, multiplicábamos el entero por el denominador y le sumábamos el numerador; luego, poníamos el mismo denominador.

Maryori: Ese es el procedimiento

Profesora: Ese es el procedimiento rápido, pero ahora sabemos por qué lo hacemos. ¿Por qué multiplicamos 22x2?

Bruno: Porque son 22 veces medio kilo

Profesora: ¿Por qué sumamos medio kilo?

Maryori: Porque hay medio kilo más

Rosalía: ¿Por qué ponemos el mismo denominador?

Profesora: ¿Alguien quiere responder esa pregunta?

Egiber: Porque la unidad se ha dividido en dos

Profesora: Hemos convertido el mixto en fracción. Ahora qué debemos hacer

Angie: Dividir

Profesora: Lo que vamos a averiguar es cuántas veces está un medio en 45/2. Para ello, la operación que nos puede ayudar es la división. ¿Cuánto es $\frac{45}{2} \div \frac{1}{2}$?

Bruno: Hay 45 veces un medio

Profesora: Por lo tanto $\frac{45}{2} \div \frac{1}{2} = 45$

La profesora escribe en la pizarra la operación y el resultado recalcando que cuarenta y cinco medios entre un medio es cuarenta y cinco. Luego retoma la situación del problema.

Profesora: Si en lugar de querer saber cuántos medios kilos hay en 45/2 necesitamos saber cuántos paquetes de tres cuartos hay, ¿qué debo hacer?

Bruno: Dividir 45/2 entre tres cuartos

Profesora: ¿Cuánto será eso?

Egiber: Treinta

Profesora: ¿Por qué?

Egiber: Porque 45/2 es 90/4. Ahora puedo quitar los denominadores y queda 90 entre 3 que es treinta

Profesora: ¿Por qué quitas los denominadores?

Egibert: Porque en 45/2 entre un medio es 45. Se quitan los denominadores y 45x1 es 45.

Profesora: ¿Están de acuerdo?

Alumnos: …

La profesora les pide que observen la gráfica de los rectángulos, luego les pregunta en cuántas partes deben estar dividido si se quiere saber cuántas bolsas de tres cuartos hay. Ronny dice que entre cuatro. Los alumnos no comprenden y la profesora cambia la pregunta:

Profesora: Tenemos en un rectángulo un kilo de arroz. En un kilo, ¿cuántos paquetes de tres cuartos puedo hacer?

Alumnos: …

Profesora: Angie, representa tres cuartos en este rectángulo

Angie divide entre cuatro el rectángulo y pinta tres partes. Luego le pide que haga lo mismo en otro rectángulo y hace la misma pregunta. Le dice que haga lo mismo en otro rectángulo e igual. A partir de ello se genera el siguiente diálogo:

Angie: Se pueden hacer 3 paquetes de tres cuartos

Profesora: ¿Con los cuartos que sobran se puede hacer otro paquete de tres cuartos?

Angie: Sí

Profesora: En 3 kilos se pueden hacer cuatro paquetes de tres cuartos: $3 \div \frac{3}{4} = 4$ ¿Cuántos paquetes de tres cuartos se harán con 6 kilos?

Maryori: Ocho

Profesora: (escribiendo en la pizarra) $6 \div \frac{3}{4} = 8$ ¿Y en doce kilos?

Bruno: Dieciséis

Al final, la profesora tiene las siguientes operaciones:

$3 \div \frac{3}{4} = 4$ $6 \div \frac{3}{4} = 8$ $12 \div \frac{3}{4} = 16$ $24 \div \frac{3}{4} = 32$

La profesora les pide que observen las divisiones. Además añade lo que expresó Egiber: $\frac{45}{2} \div \frac{3}{4} = 30$ y les dice que piensen cómo tienen que operar esos números para que el resultado sea el mismo.

Profesora: Egiber transforma los enteros en fracciones, así 6 se convierte en 24/4, 12 en 48/4 y así sucesivamente, luego anula los denominadores y divide los numeradores.

Maryori: Yo conozco la regla para dividir. A mí me la enseñó mi tío. Creo que había que invertir la segunda fracción y multiplicar. No sé porque, pero así se hace.

Profesora: Maryori, ¿puedes salir a explicar a la pizarra?

Maryori: (lo hace con la división de fracciones) Quedaría 45/2 por 4/3. Da 180/6 que es 30.

Profesora: Efectivamente esa es una forma de dividir fracciones y que al dar lo mismo que Egiber ambas formas son correcta.

Bruno: La forma de Maryori es más rápida.

Profesora: Antes de operar ¿qué se puede hacer?

Bruno: Sacarle la mitad, tercia…

Profesora: Owen, ¿qué hacías cuando tienes fracciones de diferente denominador?

Owen: Sacarle mcm. de 2 y 3

Ronny: Es seis

Profesora: ¿Y ahora qué realizamos?

Egiber: Está mal. Cuando se multiplica no se saca mcm.

Profesora: ¿Qué se hace?

Bruno: Se multiplica. Sale 180/6

Profesora: ¿Podría simplificarlo?

Bruno: 90/3 que es 30

La profesora reconstruye el problema y va preguntando a sus alumnos, paso a paso, lo que tienen que hacer:

Profesora: Si tengo una cantidad mayor y los quiero hacer en paquetitos de tres cuartos ¿qué voy a hacer?... ¿Voy a…?

Alumnos: Dividir

Profesora: Si cada taza es un cuarto, ¿para tres tazas cuánto voy a usar?

Bruno: 3/4

Profesora: Si junto un cuarto más un cuarto…

Angie: Medio kilo

Profesora: Y un cuarto más...

Bruno: Tres cuartos

Profesora: ¿Cuánto falta para el kilo?

Rosalía: Un cuarto

Profesora: Casi el kilo o falta

Alumnos: Falta

Profesora: ¿Cuánto falta?

Jossy: Un cuarto

Profesora: ¿Qué se hacía para dividir una fracción?

Juan de Dios: Primero es fracción mixta y luego hay que convertirla a fracción... Luego se divide.

Profesora: Vamos a poner otros ejemplos. De un saco que tiene 50 kilos, ¿cuántos medios kilos puedo hacer?

Los alumnos dan diferentes respuestas. Como primera respuesta, la profesora escucha 25, producto de haber dividido entre dos el total de kilos; sin embargo, otro grupo, aunque reducido, dice que 100 porque "si en un kilo hay dos medios kilos en cincuenta se duplica la cantidad". La profesora asiente y pregunta ahora por cuántos cuartos habrán en 50 kilos. La profesora recalca que cada niño tiene una estrategia de trabajo y que lo importante es llegar a la operación correcta: "lo importante es que tienden que llegar al mismo resultado", luego les plantea otra situación:

Profesora: Planteamos otra situación. ¿Con qué podría ser...?

Patricia: Con azúcar

Profesora: Puede cada uno crear un problema de fracción teniendo en cuenta que es azúcar… con los kilos que ustedes quieran

Algunos alumnos crean sus problemas considerando números naturales como datos numéricos. La profesora recalca que se tienen que utilizar fracciones.

Óscar: Si en un saco de azúcar tiene 50 kilos, ¿cuántos de tres cuartos y un cuarto saldrán en los 50 kilos de azúcar?

Profesora: Podría ser ¿cuántas bolsitas de un tres cuartos y cuántas de un cuarto pueden ser?

Maryori: César lleva siempre a su casa 9/9 de azúcar. Si su mamá en dos días saca 5/2 ¿cuánta azúcar le va a quedar?

Profesora: ¿Qué tipo de operación va a realizar?

Bruno: Una resta

Profesora: Otra situación...

Patricia: Un saco de azúcar pesa 60 k. Si mamá saca 2 kilos ¿Cuánto le quedará?

Profesora: Con fracciones

Bruno: Un saco de arroz pesa 28 kilos. ¿Cuántas bolsitas de un cuarto se pueden hacer?

Profesora: Bien

Rosalía: Un saco de arroz pesa 60 kilos. ¿Cuántas bolsitas de un medio se pueden hacer?

Marco: Un saco de arroz pesa 49 kilos. ¿Si vende 5/2 y saca 5/4…?

Profesora: Tengamos claro algo: si tengo una cantidad y uso otra… Suponiendo que tengo 3 kilos de arroz y en su familia sumaron 7... La mamá tiene que hacer paquetitos de todo. Si de los 3 kilogramos mi mamá va a usar 2, 3, 8. ¿Cuánto me queda? ... Si tengo una cantidad y la quiero repartir en cantidades pequeñas ahí sí se divide. El problema que tengo que crear es de división.

Angie: Si tengo 30 caramelos y los quiero repartir en cinco niños, ¿cuánto le toca a cada uno?

Gabriel: Tengo 50 kilogramos y medio de azúcar. Cada uno consume medio kilo. ¿Cuántos medios kilos gastarán en 23 días?

Pedro: No tiene en cuenta el valor de las cantidades

Profesora: ¿Qué debo tener en cuenta para crear un problema en este momento?

Angie: La división de fracciones

Rosalía: Si son 60 y medio; 60 por medio no me sale

Angie: Pero hay que dividir

Profesora: ¿Cómo divido 30/8 entre un quinto?

Maryori: Hay que invertir 5 y multiplicamos: $\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$

La profesora plantea un problema para que los alumnos resuelvan: “A la tienda de Bruno llevaron 25 kilogramos de menestras. Si su mamá las embolsa en paquetitos de un cuarto ¿cuántas bolsitas saldrán?”. Después de algunas soluciones se escucha

Nataly: Salen cien bolsitas de un cuarto

Bruno: La segunda fracción se invierte para poder hallar la respuesta.

Profesora: Escuchen, si la mamá de Bruno decide dividir el azúcar en bolsitas de tres kilos 2/4, ¿cuántas obtendrá?

Alumnos: …[270]

Profesora: ¿Qué debo tener en cuenta para dividir? Piensen un poco y luego intenten dar la respuesta

Nataly: Es igual que 25 entre un cuarto que es cien

Bruno: Se divide entre tres y dos cuartos

Egiber: Hay que convertirlo en fracción

Maryori: Dos cuartos es un medio

Profesora: ¿Cómo quedaría...?

Egiber: Siete medios. Hay que dividir 25 entre siete medios

Profesora: ¿Qué hacemos con los siete medios?

Nataly: Lo invertimos

Profesora: ¿Y luego?

Bruno: Multiplicamos

Profesora: ¿Cuánto sale?, ¿cuál sería la solución?

Bruno: Sale siete y sobra uno

Profesora: ¿Qué representa ese uno?

Bruno: Un kilo

La clase finaliza...

---

[270] Algunos alumnos se entusiasman e intentan resolver aplicando operaciones. En primer lugar comentan que deben transformar a fracción.

Caso 5

Sesión 1/Caso 5

21 de agosto de 2008. Colegio D

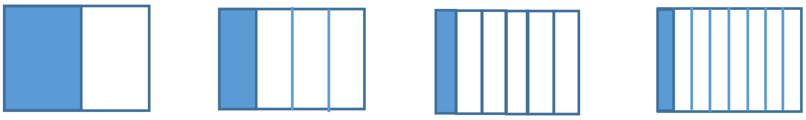
La profesora pide representar en una hoja las siguientes fracciones: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8}$; los alumnos cogen una hoja blanca A4 y dividen según indica la profesora. Al querer representar un sexto, no saben cómo hacerlo (los alumnos doblan en la misma dirección; algunos cogen otra hoja), por lo que la profesora les pide que dividan en un octavo. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué dificultad han encontrado?

Luis: No es fácil representar un sexto

Profesora: Es más fácil dividir en cantidades pares que impares.

La profesora les pide que pinten la fracción indicada en cada caso; luego que lo expongan en la pizarra. Los alumnos salen a la pizarra y exponen el trabajo realizado. Una representación de lo realizado es lo siguiente:



Una vez expuestas las diferentes fracciones, la profesora pregunta qué fracción indica más, generándose el siguiente diálogo:

Profesora: ¿A qué (fracción) supone más?

Ivana: Un medio

Profesora: ¿Y menos?

Danitza: Un octavo

Profesora: ¿Qué fracción es mayor?

Alumnos: Un medio

Profesora: ¿Y menor?

Alumnos: Un octavo

Profesora: ¿Cuál figura es mayor: un cuarto, un sexto o un octavo?

Los alumnos indican un cuarto y la profesora compara gráficamente las fracciones indicando que la parte sombreada es mayor en un cuarto.

La profesora vuelve a preguntar por qué un medio es mayor que un octavo. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Por qué dirían que un medio es mayor que un octavo? Observen las fracciones

Luis: Tienen el mismo numerador

Danitza: Cuando son distintas hay que hallar las equivalentes

Ana: Las equivalentes representan la misma cantidad

Profesora: No es lo que se les pregunta

(Silencio)

Profesora: Entonces, las fracciones equivalentes representan la misma parte… ¿Por qué un medio es mayor que un octavo?

(Silencio)

Profesora: Cuando se repiten los números de arriba, el mayor será el que tiene el número menor abajo. Miren los gráficos.

María Pía: Porque está coloreado más

Profesora: ¿Cómo están las partes? ¿Más o menos partes? (indicando un octavo)

Alumnos: Más

Profesora: ¿Y aquí? (indicando un medio)

Alumnos: Menos

La profesora varía la situación:

Profesora: ¿En cuántas partes se ha dividido la unidad?… Si tengo cinco hijos... ¿Cuánto a cada uno?

Luis: Un quinto

Profesora: ¿Si tengo dos?

Luis: Un medio

Profesora: ¿Cuándo reciben más?

Luis: Cuando son dos

Profesora: ¿Cuándo reciben menos?

Luis: Cuando son más

Profesora: Mientras el denominador sea más bajo, hay más cantidad… ¿Quién lleva más torta: los veinte o cincuenta?

María Pía: Cuando son menos

Profesora: A más partes dividida la unidad menor es la parte que se tiene. Aquí: ¿quién es mayor: $\frac{1}{12} o \frac{1}{20}$?

Diego: Uno sobre doce

Profesora: ¿Por qué?

Diego: Porque la unidad se ha dividido en menos partes: doce

Profesora: Vamos a comparar dos quintos, un medio y un sexto (la profesora escribe las fracciones)

María Pía: Un medio es mayor porque se ha dividido entre dos

Profesora: ¿Cuál sigue: un sexto o dos sextos?

(Silencio)

Profesora: Hay otras formas de comparar fracciones… ¿Qué casos hemos visto?

(Silencio)

Luis: Productos cruzados

Profesora: ¿Otra opinión?

Ana María: Simplificar

Profesora: Puedo simplificar para comparar las fracciones

María Pía: Comparo los denominadores

Profesora: Cuando el denominador es igual, mayor es el mayor en el numerador… ¿Cuando el denominador es diferente?

Luz: Buscamos equivalencias para que sean homogéneas

Profesora: ¿Qué tipo de fracciones son?

Luz: heterogéneas

Profesora: Sí… ¿y cómo se hallan las equivalentes?

Luis: Sacando el m.c.m.

Profesora: Bien, ¿hay otra forma?

Ana María: Simplificando

Profesora: Podemos simplificar esto (refiriéndose a dos quintos y un sexto)

Alumnos: ¡No!

Ana María: Multiplicando

Danitza: En aspa

Renato: ¿Seis?

Profesora: Acuérdense que debe dividir exactamente esos tres números. Ya les di un camino.

María Pía: Tres por dos es seis

Renato: dos por cinco es diez

Ana María: tres por cinco es quince

Renato: Si multiplicamos por seis es treinta

Profesora: ¿Y puedo hallar el numerador?

Renato: Multiplicando igual

Renato sale a la pizarra y realiza la multiplicación del numerador como del denominador por seis. La profesora pregunta:

Profesora: ¿Qué son esas fracciones?

Luz: Homogéneas

Profesora: No, estas (refiriéndose a $\frac{2}{5}\, y\, \frac{12}{30}$)

Luis: Equivalentes

Profesora: ¿Es fácil comparar fracciones homogéneas?

Alumnos: ¡Sí!

Profesora: Por lo tanto, ¿podemos compararlas? … ¿Cómo es de menor a mayor?

Luis: Un sexto es la menor

Luz: Un medio es la mayor

Profesora: ¿Y dos quintos?... Veamos los numeradores: dos quintos y un medio… ¿Cómo?... Hallando la equivalencia

Ana María: ¿Y cuándo es de dos?

Profesora: Puedo aplicarlo también. Por ejemplo dos tercios y cuatro quintos

Renato: Quince

Profesora: Dos tercios comparado con cuatro quintos

María Pía: Es menor

Profesora: Vamos a decir algunos casos para poder hallar… dos tercios y cuatro doceavos (a medida que menciona las fracciones, las escribe en la pizarra)

Ana María: Veinticuatro

Profesora: ¿Otro?

Luz: Doce

Profesora: Siete tercios y cuatro quinceavos… ¿Cuál será el denominador común?

Diego: Quince

Profesora: ¿ $\frac{1}{6}\, y\, \frac{2}{36}$?

Danitza: Treinta y seis

Profesora: ¿$\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{20}$?

Renato: Veinte

Profesora: ¿Por qué?

(Silencio)

Profesora: Porque veinte es múltiplo de cuatro[271]

Renato: Porque todos son múltiplos de un número

Profesora: Caso especial: si el número es múltiplo del otro, el común denominador va a ser…

Salma: El mayor

Profesora: Claudia, da un ejemplo.

La profesora propone que los diferentes alumnos mencionen dos pares de fracciones. Los alumnos mencionan diferentes pares de fracciones. En todos los casos un denominador es múltiplo del otro, excepto en el octavo ejemplo, de Diego, que propone: $\frac{9}{11} y \frac{7}{9}$. La profesora pregunta si será apropiado el ejemplo; sin embargo Diego no responde. Una vez escritos los pares de fracciones, los alumnos salen a la pizarra para hallar sus equivalentes. Una vez resueltos todos los casos, la profesora propone otros casos, en los que los números que corresponden a los denominadores son primos entre sí ($\frac{2}{3} y \frac{3}{5}; \frac{1}{2} y \frac{4}{7}; \frac{2}{5} y \frac{6}{12}; \frac{4}{8} y \frac{3}{5}$). La profesora propone resolver estos casos; al final de los mismos, pregunta qué particularidades observan. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué particularidades observan?

César: Que se multiplican

Profesora: ¿En todos los casos se multiplica?

César: Sí

Danitza: No

Profesora: ¿Tienen algún divisor común?

Luis: 28

Profesora: Eso es múltiplo

Renato: No tienen ningún divisor en común

Profesora: ¿Cuándo multiplicamos?

Ana María: Cuando no tienen divisores comunes

Profesora: Es decir, cuando sean primos entre sí

---

[271] La profesora supuso que era un cuarto en lugar de un sexto como estaba planteado y actuó bajo ese criterio.

Ana María: ¡Esa palabrita!

Profesora: Esa palabrita: PESI: que no va a tener divisores en común, excepto la unidad

Ana María: Está en el libro

La profesora propone diferentes ejercicios del libro para que los alumnos, a partir de hallar las fracciones equivalentes homogéneas, comparen las mismas. Los alumnos van saliendo a la pizarra a resolver los casos propuestos, a medida que ello ocurre, la profesora recalca la forma de resolver: transformando a homogéneas y comparando los numeradores:

Renato: Un sexto es menor que cinco tercios porque esto es tres dieciochoavos y treinta dieciochoavos. Como treinta es mayor, cinco tercios es mayor.

Sara: Veinticinco quintos es mayor que siete décimos porque se convierte en cincuenta décimos y siete décimos.

María Pía: Once octavos es menor que siete cuartos porque once octavos es menor que catorce octavos.

Fin de la clase.

Sesión 2/Caso 5

S/f entre el 21 de agosto y 3 de setiembre. Colegio D

La profesora escribe seis fracciones en la pizarra, a saber: $\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{12}{28}, \frac{21}{49}, \frac{15}{35}, \frac{19}{44}$, luego pregunta qué ven. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué ven?

Alumnos: Fracciones

Profesora: ¿Qué es una fracción?

Sara: Una fracción divide en partes iguales

Profesora: La fracción divide en partes iguales a la unidad. ¿Toma nombre esa unidad?

Danitza: El todo

Profesora: Es importante saber lo siguiente: la fracción divide en partes iguales. ¿Qué observan?

Salma: Que algunas son equivalentes

Profesora: … Encuentra la fracción que no es equivalente.

Sara: Son equivalentes las que son múltiplos de 7

Profesora: ¿Todas son equivalentes?

Alumnos: No

Profesora: Por ejemplo, si quiero saber las equivalentes a cuatro sextos, ¿cuáles serían?

Los alumnos mencionan las siguientes: $\frac{8}{12}, \frac{12}{18}, \frac{16}{24}, \frac{20}{42}$.

Acto seguido, la profesora expresa que "hay unas estrategias" para hallar fracciones equivalentes o saber si son equivalentes. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Primero: el proceso de simplificación. Segundo: productos cruzados. $\frac{20}{42}$ es equivalente a $\frac{4}{6}$ porque al simplificar me da cuatro sextos. ¿Será equivalente a cuatro séptimos?

Salma: No

Profesora: ¿Por qué?

Salma: No, porque no es reducible

Profesora: Sí es reducible… ¿Quién me dice?

Ana María: Porque no tiene ningún divisor

Profesora: Sí tienen, pero no tiene divisor común. ¿Alguien más?

Alumnos: ….

Profesora: Simplifiquen la siguiente fracción: $\frac{180}{270}$ … ¿Qué le puedo sacar?

Mauricio: Noventava

Diego: Décima

Los alumnos simplifican la fracción a partir de las propuestas de los dos alumnos.

La profesora propone otra fracción ($\frac{60}{72}$) para que los alumnos simplifiquen. Cada alumno dice qué se le puede sacar y sale a la pizarra a simplificar.

Una vez finalizada la actividad, la profesora propone convertir a mixto y graficar las siguientes fracciones: $\frac{27}{4}, \frac{30}{8}$. La conducta inmediata de los alumnos sigue uno de los tres caminos siguientes: simplificar, graficar o transformar a mixto. La profesora valora las tres formas y propone que cada alumno salga a la pizarra a explicar cómo lo ha trabajado. Tres alumnos salen a la pizarra: Luis, Salma y Diego. Luis explica que primero simplificó "para hacer más fácil el trabajo"; Salma expresa que lo transformó en mixto para "representar fácilmente los enteros" y Diego indica que graficó porque "así se representan las fracciones".

La profesora consolida manifestando que por cualquiera de los tres caminos se puede responder y son válidos.

La clase finaliza

Sesión 3/Caso 5

Sin fecha. Colegio D

La profesora inicia la sesión retomando el tema de la clase anterior: fracciones equivalentes y simplificación de fracciones. Para ello escribe en la pizarra:

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{32}{40}$$

Acto seguido les explica que si divide ocho y diez entre dos, le da como resultado cuatro quintos, que es la fracción inicial, pero que si multiplica por cuatro le da 32 y cuarenta, lo que se indica en la fracción siguiente. De esta manera: “pueden haber fracciones equivalentes menores o mayores a una dada”.

La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a cinco tercios, para lo cual les recuerda que “deben multiplicar por los números naturales”. Los alumnos resuelven en sus cuadernos la propuesta. Una vez finalizada la actividad y supervisada por la maestra, esta les propone hallar fracciones equivalentes a cinco sextos, resolviendo en la pizarra a partir de las aportaciones de los estudiantes. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Vamos a hallar las fracciones equivalentes a cinco sextos

Luis: Diez doceavos

Salma: Quince dieciochoavos

María Pía: Veinte sobre veinticuatro

Danitza: Veinticinco sobre treinta

Diego: Treinta, treinta y seisavos

Profesora: Observen que todas estas fracciones son equivalentes de esta primera, ¿ $\frac{10}{12}$ será equivalente a $\frac{15}{18}$?

(Silencio)

Profesora: ¿Qué opinan?

Luz: Es confuso

Profesora: ¿Por qué?

Luz: Porque diez por ningún número da quince

Profesora: Observen: $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ … Si multiplico en aspa… ¿qué sucede?

Salma: Te da lo mismo

Profesora: Y entonces digo que son equivalentes… ¿Qué pasa sin multiplico en aspa estas fracciones? (refiriéndose al par anterior)

Ana María: Da lo mismo.

Profesora: Entonces sí son equivalentes. Vamos a hallar las fracciones equivalentes a tres séptimos.

La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a otra fracción (tres séptimos). Los alumnos resuelven multiplicando tres y siete por cada uno de los números naturales, a partir del dos. A partir de este trabajo la profesora pregunta si $\frac{9}{21}$ es equivalente a $\frac{21}{49}$. Los alumnos manifiestan que sí "porque si multiplican en aspa da lo mismo", expresado por Alessandra. La profesora le dice a Alessandra que salga a la pizarra a resolver, pero la alumna dice que no; la profesora propone a Diego para que resuelva y Diego realiza en la pizarra las multiplicaciones respectivas: 49x9 y 21x21. Por su parte, Luis manifiesta que sí porque al dividir 21 entre 9 y 49 entre 21 el resultado es 2,3. La profesora felicita al alumno y dirigiéndose a la clase, les expresa que también se puede hallar el valor de una fracción dividiendo "ya que la fracción indica división" y añade: "si el resultado es el mismo, las fracciones son equivalentes".

La profesora plantea resolver las actividades del libro, las mismas que proponen sumas y restas de fracciones homogéneas. Diego intenta simplificar las fracciones; no obstante, la profesora les pregunta si conviene simplificar como lo está haciendo el compañero. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Será conveniente simplificar como lo hace Diego?

Luis: No porque se transforman en heterogéneas

María Pía: Pero sí se pueden restar

Luz: Si esto no se puede simplificar, esto tampoco... (Refiriéndose a la primera y segunda fracción, respectivamente)

Profesora: Sí se puede. Si les resulta fácil operar con heterogéneas, simplifican.

Los alumnos siguen resolviendo las actividades del libro; la profesora supervisa la actividad y resuelve las dudas de los alumnos. Las actividades involucran operaciones de suma y resta, comparación y fracciones equivalentes.

La clase finaliza.

Sesión 4/Caso 5

Martes, 9 de setiembre de 2008 (sin hora). Colegio D

Profesora: Chicos, ustedes saben cómo se halla el área de las figuras geométricas…

Alumnos: Sí

Luz: Yo no me acuerdo de todas…

Profesora: ¿Cómo se halla el área del cuadrado?

Luis: Lado al cuadrado

Profesora: ¿Y del rectángulo?

Salma: Base por altura

Profesora: ¿Cómo se halla el área del triángulo?

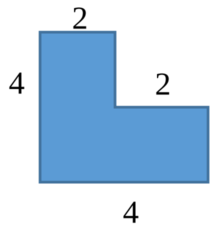
Diego: Base por altura sobre dos

Profesora: ¿El área del rombo?

Alumnos: …

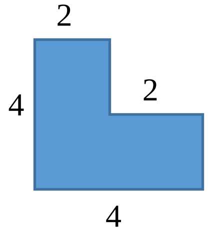
Profesora: También las hemos visto, pero ahora no es necesario recordarla.

Acto seguido, la maestra les dice que estas fórmulas les servirán para hallar el área de otras figuras: "figuras compuestas" y les dibuja una figura en la pizarra:



A partir de la imagen y de las palabras de la profesora se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Era necesario recordar las fórmulas de las áreas de figuras simples… Ayer les dije por qué: Vamos a hallar áreas de figuras compuestas, por ejemplo la siguiente:



Luis: Es un pentágono… hexágono

Profesora: ¿Yo les he enseñado?

(Silencio)

Profesora: ¿Cómo?

(Silencio)

Mauricio: Sumamos sus medidas

Profesora: ¿Qué hallamos al sumar?

Salma: El perímetro

María Pía: Sale seis metros cuadrados

Sara: Hay que sumar cuatro más cuatro más dos más dos

Alexandra: ¡Hagámoslo!

Los alumnos suman las medidas del contorno de la figura y expresan a la maestra el resultado. Algunos alumnos solo suman las medidas expuestas. La maestra pregunta cómo lo han hecho y los alumnos exponen. Solo exponen los que hicieron correctamente la suma.

La profesora retoma el diálogo:

Profesora: ¿Ustedes ya conocen el área del cuadrado?

Alumnos: ¡Sí!

Profesora: ¿Y del rectángulo?

Alumnos: ¡Sí!

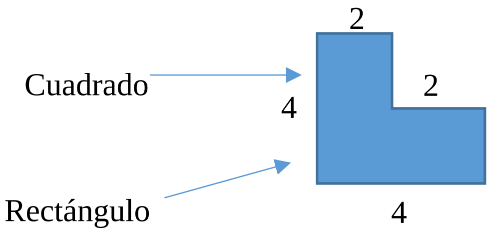
María Pía: Si lo combino: un rectángulo y un cuadrado… Esto sería… Puede ser esta figura

Profesora: ¿Por qué puede ser así?

Sara: Puede completar

Profesora: ¿Qué figura es?

Sara: Un cuadrado y un rectángulo



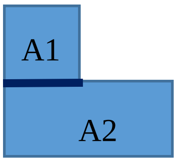
La alumna señala las partes de la figura que se corresponde con un cuadrado y un rectángulo.

Profesora: Sí… ¿Puedo hallar el área del rectángulo?

María Pía: No

Luis: Sí

Profesora: Entonces esto sería A1 y esto A2… ¿Cuánto sería A1?



Luis: Dos por dos, cuatro metros cuadrados

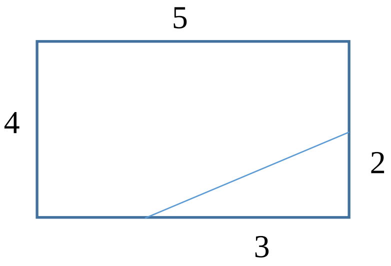
Profesora: Y A2 sería…

María Pía: Ocho metros cuadrados

La profesora da por finalizada la actividad…

… y propone otra figuras compuestas. A partir de ellas, el primer paso es reconocer qué figuras simples componen la figura compuesta; acto seguido, la maestra pide que hallen el área de dichas figuras. Al final recalca que el área de la figura compuesta es la suma de las figuras simples.

Luego propone imágenes en las que no se les pide hallar el área de toda la figura sino de parte de ella. La siguiente es una de las figuras compuestas propuesta y en la que los alumnos reconocieron un triángulo y un rectángulo:



Los alumnos preguntan a la profesora cómo hacer. No obstante, Luis dice que cree saber cómo y muestra a la maestra su trabajo.

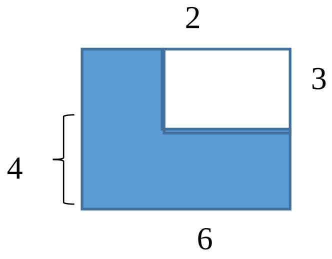
La maestra le dice que la próxima clase ven el caso.

No hubo tiempo para analizar más la figura y la clase finaliza.

Sesión 5/Caso 5

SF. Colegio D

La maestra les propone resolver problemas de áreas de figuras compuestas (continuando la clase anterior). Los alumnos resuelven los problemas propuestos. La maestra se acerca a la mesa de Ivana y observa que está sumando tres más cuatro y multiplicando el resultado por seis a partir de la imagen siguiente en la que se pide hallar el área de la parte sombreada:



La maestra le pregunta a Ivana qué está haciendo. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué haces?

Ivana: Hallo el área de la figura

Profesora: ¿Qué figura es?

Ivana: Un cuadrado… Un rectángulo

Profesora: ¿Cuánto tiene de base?

Ivana: Seis

Profesora: ¿Y de alto?

Ivana: Siete

Profesora: ¿Será un cuadrado?

María Pía: No, un rectángulo

Profesora: ¿Cómo se halla el área del rectángulo?

Ivana: El área del rectángulo es seis por siete. Cuarenta y dos centímetros cuadrados.

(Silencio)

Ivana: Y luego hallo el área del rectángulo que queda

Profesora: (dirigiéndose a la clase). ¿Lo ha dicho bien, Ivana? ¿Qué piensan ustedes?

(Silencio)

Profesora: Primero vas a hallar…

César: Lo que falta

Profesora: Está muy bien la estrategia que han empleado ustedes… La parte que no está sombreada forma un rectángulo, entonces vamos a hallar el área de la parte no sombreada y eso nos da…

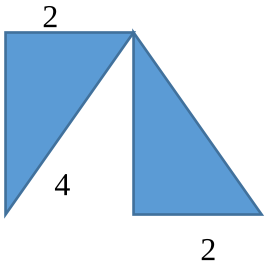
César: Treinta

Profesora: Treinta es la parte sombreada… ¿Cómo obtengo la parte sombreada?

Luis: Doce

Profesora: Resto a cuarenta y dos, doce y obtengo treinta centímetros cuadrados. Resolvamos el siguiente problema.

La profesora dibuja una imagen en la pizarra y pide que hallen el área de la figura:



La profesora observa el trabajo de los alumnos deteniéndose en Antonella pues observa que la alumna ha formado un triángulo a partir de la misma.; luego se acerca a la pizarra y pregunta a Antonella sobre su solución. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Antonella, ¿qué puedes hacer, qué has formado?

Antonella: Un triángulo

Profesora: ¿Y qué puedes hacer?

Antonella: Hallar su área

Profesora: ¿Cómo?

(Silencio)

Profesora: ¿Cuál es el área del triángulo?

Antonella: Base por altura… Sobre dos

Profesora: ¿Cuál es la base de ese triángulo?

Antonella: Cuatro… ¡No!... Sí, cuatro

Profesora: ¿Y la altura?

Antonella: Cuatro

Profesora: ¿Cuál es el área?

Antonella: Dieciséis

Profesora: El área del triángulo es cuatro por cuatro…

Alumnos: Sobre dos

Profesora: Y eso da…

Antonella: Ocho

Profesora: ¿Y el otro triángulo?

Antonella: También es ocho

Profesora: ¿Y ahora qué haces?

Antonella: Tengo que hallar el área de la parte sombreada

Profesora: ¿Cómo?

Antonella: Se puede partir por la mitad

Profesora: ¿Y qué formas?

Antonella: Un triángulo

Profesora: ¿Cuánto es su área?

Antonella: Ocho

Profesora: ¿Por qué?

Antonella: Porque es igual al otro

Profesora: ¿Y el otro triángulo?

Antonella: Ocho

Profesora: ¿Cuánto mide la parte sombreada?

Antonella: Ocho por ocho

Profesora: ¿Por qué?

(Silencio)

Profesora: ¿Cuánto mide cada triángulo?

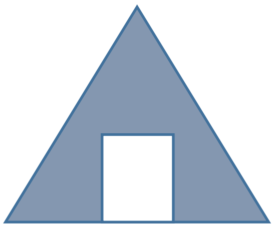
(Silencio)

Profesora: ¿Cuánto mide la parte sombreada?

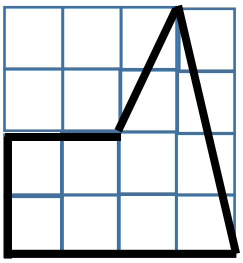
Antonella: Dieciséis

Alejandra manifiesta que ella ha hallado primero un triángulo y luego del otro "porque hay dos triángulos iguales"; añade: "Dos triángulos por la mitad. En el primero en la parte de abajo y en el segundo en la parte de arriba… y puedes pasarlo al otro (lado)". A partir de la propuesta de Alejandra, la profesora explica que "se pueden usar diferentes caminos y estrategias y ustedes pueden llegar a la misma solución".

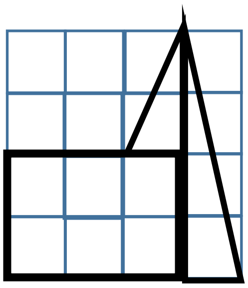
Los siguientes dos casos, tienen la misma estructura del anterior. Una de las figuras es la siguiente, indicando que la base del triángulo es 10 y su altura 6, además que el rectángulo mide 3 cm de base y 2 de altura. La maestra pide hallar la parte sombreada:



Acto seguido, la profesora propone la siguiente imagen para hallar el área de la figura e indica que cada cuadrado mide un centímetro cuadrado:

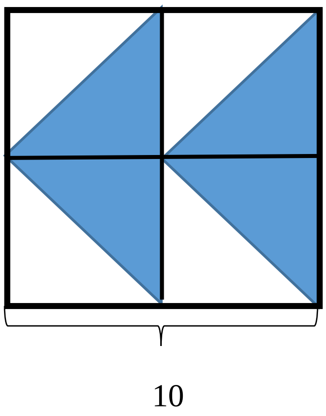


Los alumnos intentan resolver, para lo cual identifican un rectángulo y dos triángulos:



Los alumnos hayan las áreas de las figuras encontradas y en algunos casos suman las áreas y en otros no, dando por concluido el problema. Al preguntarles si ya habían terminado y porqué indicaban que porque ya habían hallado el área de las figuras encontradas. La profesora pregunta si han terminado y propone otro problema.

La profesora les expresa que “hay figuras que tengo que resolver haciendo traslados” e inmediatamente les propone la siguiente figura, indicando que la figura está dividida en cuatro partes iguales y cada lado del cuadrado mide 10 cm:



La profesora les sugiere trasladar los triángulos antes de resolver, sabiendo que todos son iguales. Los alumnos trasladan y forman un rectángulo. La maestra les dice que “en lugar de dos figuras ahora tienen una más fácil”. Diego expresa que el área es cincuenta centímetros cuadrados y añade: “tengo que hacer una operación y en la otra dos, aunque son fáciles”. La profesora asiente y propone otros casos que los alumnos van resolviendo a partir de trasladar las figuras hasta que la clase finaliza.

La clase finaliza.

Sesión 6/Caso 5

Martes 28 de octubre de 2008 (Sin hora). Colegio D

La sesión de hoy es sobre ecuaciones, la profesora les propone una ecuación a partir de la cual reconocen sus miembros:

$$x + 68 = 145$$

La profesora les pregunta qué es lo que observan, generándose el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué observan?

Alumnos: Ecuación

Profesora: ¿Por qué será ecuación?

María Pía: Porque hay letras

Jorge: En una ecuación hay una incógnita

Profesora: Mi dinero ha aumentado en 68 es 145. ¿Cómo he representado mi dinero?

Luis: Con una equis

Profesora: Con una letra, esa letra viene a ser ¿qué en la ecuación?

Ivana: La incógnita

Alejandra: La cifra desconocida

Profesora: En esa situación…

Alejandra: La incógnita

Renato: 145 – 68

Profesora: ¿Qué me da esa operación?

Diego: El número de la incógnita

Profesora: Mi dinero: o sea el dinero que tengo… ¿César, cómo hallarías tú cuánto dinero tengo?

César: Restando 145 menos 68

María Pía: Restando

Profesora: ¿Cómo tendrán que resolver aquí para que dé 77?

Luis: Pones equis igual ciento cuarenta y cinco menos sesenta y ocho; luego equis igual setenta y siete.

Profesora: Equis es lo que vas a encontrar, equis es lo que estás buscando. ¿Cómo plasmar la respuesta?

Luis: 77+68

Profesora: Esa sería la comprobación. ¿Qué ha pasado con el 68?... A ver Luis

La profesora se detiene a observar la solución que dio Luis, quien sale a la pizarra a escribirla.

$$x + 68 = 145$$
$$x = 145 - 68$$
$$x = 77$$

Luego que Luis ha plasmado su solución en la pizarra, la profesora les dice a los alumnos que observen dicha solución. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Por qué has hecho esto?

Luis: Porque el positivo pasa negativo

Profesora: Tú has pasado el 68 que es positivo al otro miembro, ¿por qué?

(Silencio)

Profesora: Porque se tiene que restar, ¿verdad? Lo que se ha hecho es transposición de términos.

María Pía: Es una ecuación

Profesora: ¿Qué es transportar?... significa cambiar… ¿Qué tenemos que transportar?

Jorge: 68

Profesora: ¿Cómo está: positivo o negativo?

Alejandra: Ahí está positivo

Profesora: Y lo he pasado con signo negativo porque la suma y sustracción son operaciones inversas

(Silencio)

Profesora: Igual sucede con otras operaciones. Si está multiplicando…

Alejandra: Dividiendo

Profesora: Y si estás dividiendo…

Diego: Multiplicando

Profesora: Porque son operaciones inversas.

Profesora: Vamos a ver otra situación, ustedes piensen en situaciones como la que les he planteado y la vamos a convertir en ecuación…

Tiempo para que los alumnos piensen en la situación que van a proponer.

Profesora: A ver Salma… ¿Otra situación?

Salma: El número de mis canicas disminuido en 45 es igual a 28

Profesora: Cómo represento: ¿x-45 o 45-x? ¿Cuántas son mis canicas?... Esas son…

Alumnos: ¡Equis!

Profesora: Disminuido…

María Pía: equis menos cuarenta y cinco

Profesora: ¿Cuántas canicas tengo?

(Silencio)

Profesora: ¿Qué representa el número de mis canicas?

Ivana: La equis… la incógnita

Profesora: x=45+28. ¿Por qué habría sumado?

Alejandra: Porque así se resuelve

Profesora: ¿Cómo verificar?

Luis: Restando 73 menos 45

Profesora: Bien, vamos a resolver otro caso,

María Pía: ¡Yo!

Profesora: Vamos a preguntar a Franco

Franco: El doble de mis canicas aumentado en cinco es igual a 45

Profesora: ¿Cómo representar, matemáticamente, esto: el doble de mis canicas…?

Franco: Dos equis

Profesora: Bien; aumentado en cinco igual cuarenta y ocho[272]… ¿Cuántas canicas tengo?

(Silencio)

Luis: Miss, no sale

Profesora: ¿Cuánto sale?

Luis: Veintiuno

Profesora: ¿Qué has hecho?

(Silencio)

Profesora: Pueden hacerlo pero no en la ecuación (sin reemplazarlo)

(Silencio)

Profesora: Realizando la trasposición de términos, ¿cómo sería?... Tenemos que despejar primero la variable… ¿Alessandra?

Alessandra: Primero pasaría esta…

(Silencio)

---

[272] La profesora escribe en la pizarra lo que va expresando. No obstante, cambió 45 por 48.

Alessandra: Ah, ya, x=21x2

Profesora: ¿Cuál 21?

Salma: 47-5

Franco: 2x=42

Luz: Sería 2x=42+5… No, 42/2

Profesora: Ojo, tenemos que hallar el valor de la variable, no de 2

Salma: No he encontrado

Profesora: ¿Cómo lo tiene que pasar?

Salma: Dividiendo

Profesora: ¿Cuánto es?

La alumna Salma sale a la pizarra y escribe: 2x=42:2, luego escribe: x=21. La profesora da por finalizada la actividad.

La profesora les entrega una ficha sobre transposición de términos. Los alumnos leen; la profesora les recalca que deben poner la operación inversa porque “lo que voy a despejar, ¿qué significa?... Lo voy a dejar solito que es la variable”. Añade: “la transposición de términos, simple y llanamente cambia al otro miembro”.

Luego, la profesora les dice que cojan su folleto de ejercicios y resuelvan la página 54. Los alumnos resuelven los ejercicios hasta que el timbre de cambio de hora suena.

La clase finaliza.

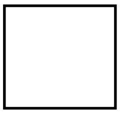
Caso 6

Sesión 1/Caso 6

Lunes, 13 de octubre de 2008 (sin hora). Colegio E

La profesora expresa que iniciará la clase de matemática no sin antes hacer referencia a la presencia de otra docente, externa, quien estará con ellos durante un tiempo observando cómo trabajan en matemática, así que “deben estar atentos y participar como siempre”.

Acto seguido, dibuja un cuadrado en la pizarra y pregunta:



Profesora: ¿Qué características presenta un cuadrado? ¿Cuántos lados tiene?

César: Cuatro…

Profesora: ¿Y esquinitas?

(Silencio)

Profesora: ¿Cómo se llaman?

César: Puntas

Leonardo: Vértices

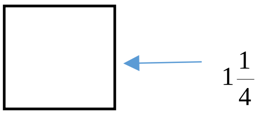
María P: Ángulos

Profesora: ¿Ángulos…?

María P: Rectos

Profesora: Cada “esquinita” se llama vértice.

La profesora señala el borde del cuadrado e indica:



Profesora: Cada uno tiene la medida del lado de un cuadrado (1¼). Si cada lado mide lo mismo y me piden hallar el perímetro…

(Silencio)

Profesora: El perímetro equivale a decir la medida de todos los lados. ¿Qué tengo que hacer?

(Silencio)

Profesora: Hemos dicho que el perímetro es la longitud del contorno de la figura… (Señala la figura). Expresado en suma eso es…

(Silencio)

Profesora: … Ese contorno se llama perímetro. Entonces al modelo (el contorno), lo que sale es el perímetro… Si esta es la medida de cada lado, ¿cuánto medirá su perímetro?

Los alumnos intercambian ideas, manifestando que el perímetro es el contorno y que tienen que sumar la medida de su lado o multiplicarla por cuatro. La profesora interviene:

Profesora: Si los lados miden $\frac{5}{4}$ el perímetro es…

Jorge Luis: $\frac{20}{4}$ … transforma a fracción

Profesora: Para que la operación sea fácil… ¿La suma de qué realizamos?...

Jorge Luis: De los lados del cuadrado

Profesora: También se puede expresar en multiplicación. ¿Cuántas veces se repite?

Samanta: Cuatro

Profesora: Entonces se expresa $4\times\frac{5}{4}$… Vemos acá que el cuatro (4) multiplica a cinco (5). 4x5=20 y el cuatro (4) multiplica a su denominador. ¿Cuál será? Uno (1)… Es lo mismo. Simplificando, ¿cuánto será? Cinco… Cinco enteros… Si la medida está expresada en metros, ¿el perímetro en qué estará expresado?

César: En metros

Profesora: $\frac{5}{4}$ m + $\frac{5}{4}$ m +…

La profesora deja indicada la suma y hace referencia, de manera verbal que se suma cuatro veces recalcando la unidad de medida e indicando que el perímetro es veinte cuartos metros.

La profesora dibuja un rectángulo y pregunta por la cantidad de lados, vértices y ángulos que tiene.

Profesora: ¿Cuánto miden sus ángulos?

Alumno: Un metro

Profesora: No… ¿Cómo se llama el ángulo?

Samantha: Recto…

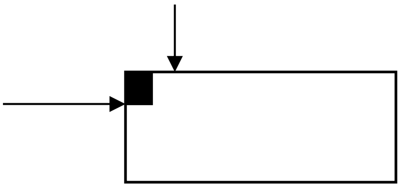
Profesora: El ángulo recto tiene una medida…

César: 90°.

Profesora: ¿Qué significa ese ángulo recto?...

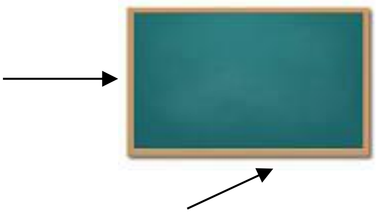
Mikail: Que mide noventa grados

Profesora: Sí, pero también que esta recta y esta recta son perpendiculares (señala la figura).



La profesora observa la pizarra y dirigiéndose a los alumnos dice:

Profesora: Miren, la pizarra es un modelo de rectángulo. Miren la línea de la base y de arriba (señala el lado perpendicular), ¿medirán igual?



Alumno: Diferentes

Profesora: ¿La superior y la inferior?

Alumno: Igual

Profesora: Sí, miden igual y son paralelas; es decir, que nunca se llegan a chocar ni intersectar… Se llaman paralelas.

(Silencio)

Profesora: Tenemos dos líneas más, paralelas (la profesora señala los lados restantes de la figura). Si sucede ese caso estamos hablando de un rectángulo. Si tenemos la misma medida (de todos sus lados) es un cuadrado. ¿Cuál es la diferencia entre este cuadrado y este rectángulo? (señala las figuras de la pizarra)

...

Rosita: Que todos (los lados) son iguales.

Profesora: El superior y el inferior, y el de acá y el de acá. El superior e inferior tienen su nombre: largo; y el de la izquierda y derecha: ancho. ¿Recuerdan otro nombre?

(Silencio)

Profesora: Base y altura

La profesora observa la puerta y pregunta a los alumnos:

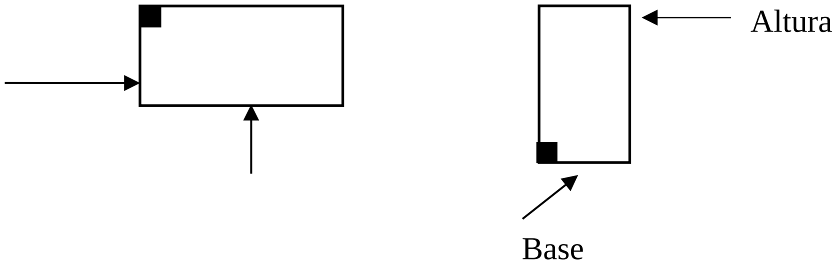
Profesora: Miren la puerta… tiene la misma forma (rectangular). ¿Qué ha pasado?

Alumno: Se ha volteado

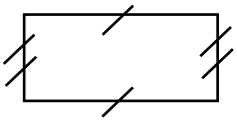
Profesora: Se ha invertido

La profesora dibuja el mismo rectángulo girando noventa grados y menciona (refiriéndose al nuevo rectángulo):

Profesora: Ya la base será esto y la altura esta parte porque la figura ha sido girada nada más.



Profesora: Este lado es igual que el de acá (a medida que señala, la profesora marca de la misma manera los lados iguales de la figura). De esa manera se define el rectángulo:



Profesora: ¿Qué medidas tiene?[273]

Profesora: Si me piden el perímetro de la figura ¿qué tendré que hacer para encontrar el perímetro?

(Silencio)

Marcos: Multiplicamos cada una de las medidas por dos

Profesora: ¿Y luego?

Marcos: Sumar

---

[273] La profesora escribe las medidas del rectángulo, según sea el largo y ancho de la misma: $1\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

Profesora: Efectivamente, para hallar el perímetro de un rectángulo multiplicamos por dos la medida del largo y la medida del ancho. Luego sumamos los resultados parciales. La suma total es la medida del perímetro. ¿Hay otra forma?

Anthony: sumar todos los lados.

Profesora: ¿Qué significa?... Este lado es igual que el de acá… Lo sumaría dos veces:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\frac{3}{4}}_{}+1\frac{3}{4}=$$

$$\underbrace{\frac{2}{2}+\frac{7}{4}+\frac{7}{4}}_{}$$

$$\frac{2}{2}+\frac{14}{4}=$$

Profesora: Si en el camino se presenta esta opción, ¿qué harían?

Samantha: Sacar el mínimo común múltiplo al denominador

César: Dieciocho cuartos

Profesora: ¿Cuál es (el mcm)?

César: Cuatro

Profesora: ¿Por qué es cuatro?

César: Porque da cuatro

Profesora: Porque es el mayor. ¿Y en todos los casos es igual (refiriéndose a que el denominador mayor es el m.c.m)?

(Silencio)

Profesora: ¿Cuándo?

(Silencio)

Samantha: Cuando el número menor es…

Marco: Cuando el número menor sea diferente

Anthony: Cuando los dos primeros números menores se multipliquen (refiriéndose al número dos de dos medios)

Dana: 2 es divisor de 4

La profesora escucha todas las intervenciones de los alumnos, e incluso permite que sigan expresándolas. No obstante a partir de la intervención de Dana vuelve a intervenir.

Profesora: A ver… El mayor era cuatro (señalando los denominadores)

Leonardo: Dos está contenido en cuatro

Profesora: Bien, porque al dividir cuatro, que es el mayor, significa que tiene mitad y ambos tienen mitad, pero este (refiriéndose a la segunda fracción) tiene dos veces mitad. ¿Cuál es el proceso?

César: Sacas m.c.m. y divides y multiplicas por cada uno. Te da 18/4.

Profesora: Se puede simplificar

César: 9/2.

Profesora: Esa no es la única manera. Luego eso lo puedo transformar en mixto también.

La profesora regresa a la suma: $\frac{2}{2}+\frac{14}{4}$ … ¿qué tienen de parecido? Son…

(Silencio)

Profesora: ¿Reducibles o irreducibles?

Alumnos: Reducibles

Profesora: ¿Por qué son reducibles?

Alumnos: Porque se puede simplificar

Profesora: ¿A cuánto equivale? (señalando dos medios)

Alumno: uno

Profesora: ¿Y catorce cuartos?

Rosita: Siete medios

Profesora: Un número natural sumado a una fracción se puede transformar a mixto:

César: Se puede escribir como uno siete medios

Profesora: ¿Y un entero, siete medios es lo mismo que nueve medios?

Alumnos: Sí

Profesora: Muy bien.

La profesora da por concluida esta actividad y propone una operación: $2+\frac{5}{4}$

A partir de la operación pregunta:

Profesora: La forma práctica, ¿cuál será?

Leonardo: Dos, cinco cuartos

Profesora: ¿Y la otra?

Leonardo: Trece cuartos, porque multiplicas y sumas. Es igual.

Profesora: Muy bien.

La profesora dibuja un hexágono regular. A medida que lo hace, César expresa que “también sale nueve medios”. La profesora asiente y refiriéndose al hexágono manifiesta:

Profesora: Se llama regular porque cada lado mide lo mismo. Si mide dos…

César: Doce

Profesora: Su perímetro es doce…En el hexágono del libro la medida de su lado no es dos sino…

César: Uno, cinco sextos

Profesora: Que como fracción será equivalente a…

César: Once sextos

Profesora: ¿Cuántos lados son?

Alumnos: Seis

María Fe: Hay que sumarlo por seis

Profesora: Para hallar el perímetro, ¿por cuánto hay que multiplicar?

María Fe: Por seis

Profesora: Multiplicarlo por seis o sumar seis veces 11/6 que es lo mismo

Samantha: Sale sesenta y seis sextos

Profesora: (La profesora resuelve la operación llegando a los sesenta y seis sextos) Y esto simplificado es…

César: Once

Profesora: Es decir, estoy eliminando el seis y ahí queda el 11 (refiriéndose al numerador)…

Guarden todo.

Sesión 2/Caso 6

Miércoles 15 de octubre de 2008. Colegio E

Al iniciar la clase, la profesora plantea la *operación*[274] que se indica, a propósito de una actividad propuesta para casa[275], generándose el siguiente diálogo:

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$$

Profesora: ¿Cuántas fracciones hay?

Alumnos: Cuatro

Alumnos: Dos

Profesora: ¿Esta línea, qué operación simboliza? (refiriéndose a la que separa cada suma de fracciones).

Alumnos: Una división

Alumna: Miss, sale siete octavos en todo

Profesora: Ahora veremos… ¿Qué hay en la parte superior?

Alumnos: Una suma de fracciones

Profesora: ¿Y en la inferior?

Alumnos: También suma de fracciones

Profesora: Muy bien, suma de fracciones… ¿Qué hay que hacer para sumar?

Alumno: Convertirlo en fracción homogénea

Profesora: ¿Otro?

Alumno: Sacarle el m.c.m.

Profesora: ¿Cuál es el denominador en el primer caso?

Alumnos: Doce (la profesora empieza a desarrollar la operación anterior)

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{}{12}}{\frac{}{}}$$

Profesora: ¿Por qué doce?

Samantha: Los números son PESI

---

[274] La docente nombra como operación esta propuesta.

[275] Los alumnos traen las actividades resueltas de casa.

Profesora: Muy bien, la alumna ha recordado que los denominadores de esta primera suma son PESI ¿Cuándo los números son PESI?

Samantha: Cuando no tienen nada en común

Profesora: Cuando tienen al uno en común

Marcos: Entonces el m.c.m. es su producto (Maripili, César y Anthony avalan la respuesta de Marcos)

Anthony: Miss, los denominadores son 12 y 6

Profesora: Seis, ¿por qué?

César: Porque dos está contenido en seis

Profesora: Es decir, seis es múltiplo de dos… Luego, ¿qué se hace?

Jorge: Suma tres más uno y tres más cuatro

La profesora completa la resolución de la suma inicial, siguiendo la suma de Jorge; es decir completando los numeradores en cada fracción resultante:

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{4}{6}}$$

Luego se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Una vez que tenemos esa expresión, ¿qué harán?

Andrea: Multiplico siete por seis y doce por cuatro

Profesora: ¿Cómo se llama esta propiedad?

Andrea: … ¿Propiedad de extremos y medios?

Profesora: Producto de extremos sobre producto de medios… ¿Cuánto será los extremos?

Leslie: Cuarenta y dos

Profesora: ¿Y los medios?

Jorge: Cuarenta y ocho

Profesora: Antes de escribir la fracción… ¿Puedo simplificar?

Alumnos: Sí

Profesora: ¿Cuál de los dos?

Leslie: Doce y seis

Marco: Seis y cuatro

Profesora: Para simplificar una fracción debe simplificarse tanto el numerador como el denominador. Simplificar siempre es más directo

César: Se saca sexta

Profesora: Puedo optar por las dos formas. Puedo simplificar antes de operar o al final de la operación. Si simplificamos antes, tenemos: sexta: uno; sexta: dos. ¿Ya no puedo simplificar?

Alumnos: No

Profesora: Ya no puedo simplificar. ¿Cuál será el resultado?

César: Siete octavos

Profesora: Bien, ¿esa fracción es propia o impropia?

Samantha: Propia

Profesora: ¿Por qué?

Samantha: Porque el numerador es menor que el denominador

Profesora: Recuerden que toda fracción propia no puede ser transformada a mixto, pero la impropia, sí.

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{4}{6}}=\frac{42}{48}=\frac{7}{8}$$

La profesora completa la resolución de la operación propuesta, tal como se indica arriba, dando por finalizada la operación.

La profesora escribe en la pizarra lo siguiente: Calcula A x B, si:

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \qquad B=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}$$

Generándose el siguiente diálogo:

Profesora: Me dice que A equivale a uno sobre uno más un tercio o uno dividido entre uno más un tercio; y B es dos sobre uno menos un tercio

(Silencio)

Profesora: … Debemos reducir A que equivale a uno sobre uno más tres o uno dividido…

(Silencio)

Profesora: El otro día vimos que un número multiplicado por su inverso nos daba uno. Por ejemplo, tres cuartos por cuatro tercios es uno (la profesora escribe la operación en la pizarra). Esto se llama el inverso multiplicativo. Si me piden el inverso multiplicativo de cinco cuartos…

Mikail: Cuatro quintos

Profesora: Si me piden de un tercio…

César: Tres

Profesora: De diez

María Fe: Diez

Leonardo: Uno sobre diez

Profesora: Un décimo. El diez tiene denominador uno, por lo tanto, cuando hallas el inverso multiplicativo se transforma en un décimo… ¿El inverso multiplicativo de veinticinco?

César: Un veinticincoavos.

La profesora retoma la operación: $\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$ y expresa que si "cuatro tercios que está multiplicando pasa dividiendo" a la vez que lo plasma en la pizarra:

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{\frac{4}{3}}$$

Se continúa el siguiente diálogo:

Profesora: … Uno sobre una fracción va a resultar el inverso de esa fracción. Si divido un entre tres medios, ¿cuál es el resultado?

César: Dos tercios

Profesora: Y dos tercios es el inverso de tres medios

$$\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

La profesora retoma la propuesta de multiplicar A x B y pregunta a sus alumnos qué tendrán que hacer primero, generándose el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué tendremos que hacer primero?

César: Sumar

Profesora: El uno (numerador principal de A) queda porque lo que voy a hacer primero es la suma.

Leonardo: El uno (1) tiene denominador uno (1).

Dana: Uno más un tercio es equivalente a un mixto

Profesora: ¿Cuál es el mixto?

Dana: Uno, un tercio

Antes de continuar, la profesora pregunta si con cualquier operación ocurre que se puede transformar a mixto. Los alumnos responden entre positiva y negativamente. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Cuándo tengo que transformarlo en mixto?

Andrea: Cuando es una suma

Profesora: En la resta, no… Entonces, cambiamos la expresión. ¿Cuándo cambiamos la expresión?

César: Cinco tercios

Profesora: Cuando no es una suma. En teoría lo vas a hacer cuando tengas un entero y una fracción en suma

Cesar: Sale tres cuartos en A

Profesora: En el denominador de A, tenemos un entero, un tercio que es cuatro tercios. Tenemos uno (numerador) sobre cuatro tercios. Toda fracción (denominador) dividida en uno (numerador) me dice que tengo el inverso.

(Los alumnos escuchan)

Profesora: Para justificar esa respuesta es importante hacer lo siguiente: Tú ya sabes que sale tres cuartos (porque es el inverso), pero hay que justificarlo.

La profesora expresa que el uno tiene denominador uno y que esto está sobre cuatro tercios, luego pregunta qué propiedad se aplica para poder resolver, a lo que los alumnos responden: producto de extremos sobre producto de medios. César hace referencia que solo se aplica con uno y la profesora añade que, con un número diferente, “ya no es lo mismo porque el resultado cambia”. Un alumno menciona que el resultado en B es seis quintos. La profesora retoma toda la propuesta.

Profesora: Jorge, ¿qué dice la pregunta?

Jorge: Que calculemos A por B

Profesora: Por lo tanto no basta con hallar A y B sino que hay que multiplicar. Observen, al dividir A, la respuesta es tres cuartos. Al dividir B, la respuesta es…

Mikail: Seis quintos[276]

Profesora: Si B es seis quintos, podemos simplificar

Alumnos: Sí

Profesora: ¿Qué simplificamos?

Mikail: 4 y 6

Profesora: ¿Puedo seguir?

Alumno: Ya no

Profesora: ¿Cuál es la respuesta?

---

[276] Los alumnos trabajaron con 2 – 1/3.

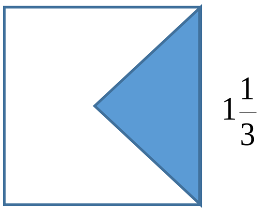
César:	Nueve décimos

La clase finaliza.

Sesión 3/Caso 6

Jueves, 16 de octubre de 2008. Colegio E

La clase comienza con la propuesta de la profesora de revisar la tarea asignada, centrándose en la solución “del siguiente problema: Halla el área sombreada en la siguiente figura”:



A partir de la gráfica, algunos alumnos manifiestan que la medida del lado es un cuarto, mientras que otros dicen que es cuatro tercios. La profesora cuestiona ambos datos, generándose el siguiente diálogo:

Profesora: ¿La medida del lado es un cuarto o cuatro tercios?

Alumnos: Cuatro tercios

Profesora: Bien, ¿cuál es la característica principal del cuadrado?

César: Tiene partes iguales

Profesora: ¿Cómo se llaman?

César: Lados

Profesora: La parte sombreada representa un cuarto del total, ¿qué significa la palabra “un cuarto del total”?

Samantha: El cuarto de toda la figura

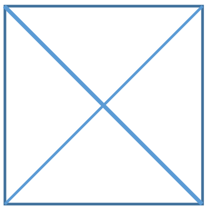
Profesora: Imaginemos que este cuadrado tiene por área… Si su lado es ocho, ¿cómo determinados el área del cuadrado?

César: Multiplicando lado por lado

Profesora: ¿Cuánto es?

César: Sesenta y cuatro metros cuadrados

Profesora: Si nos dicen que tiene sesenta y cuatro metros cuadrados ($64cm^2$) y yo lo divido así, en cuatro partes (la profesora hace cuatro partes como sigue)



Profesora: Una de ellas… ¿Cuánto mide si todo mide 64?

María: Dieciséis metros cuadrados

Profesora: Por lo tanto $16m^2$ es un cuarto ¿de qué?

César: De sesenta y cuatro

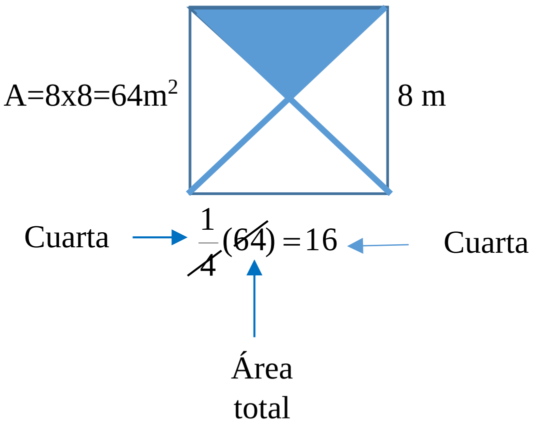
Profesora: Miren, $\frac{1}{4}(64)$ La cuarta parte de sesenta y cuatro es…

María: Dieciséis.

Profesora: Sesenta y cuatro es el área del cuadrado… ¿por qué?... porque su lado es ocho y el área se obtiene multiplicando ocho por ocho… ¿cuánto tiene que dar?

Alumnos: Dieciséis

A medida que se comunica con los estudiantes, la profesora realiza lo siguiente en la pizarra:



Profesora: Dieciséis es la cuarta parte. Observen (señalando la parte operación):

Rosita: Ahí me piden un cuarto (señala la imagen del problema inicial)… es igual pero…

Profesora: El área sombreada, ¿equivale a cuánto?... Observen, ¿es verdad que es un cuarto del total?

Alumnos: Sí

Profesora: ¿Un cuarto de qué?

Alumnos: De cuatro tercios

Profesora: ¿De qué área?

Alumnos: Del cuadrado

Profesora: ¿Cómo hallo el área del cuadrado?

Mikail: Cuatro tercios por cuatro tercios… dieciséis novenos

Profesora: ¿Multiplico o hago antes otros procesos?...

(Silencio)

Profesora: ¿Puedo simplificar?

Joao: Cuatro novenos

Profesora: ¿Qué significa cuatro novenos?

(Silencio)

Profesora: La expresión cuatro tercios por cuatro tercios es equivalente a cuatro tercios elevado al cuadrado…

$$\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

(Los alumnos atienden a las explicaciones de la profesora)

Profesora: ¿En que se mide el área, cuáles son las unidades del área?

Dana: Ahí, en metros cuadrados

Profesora: ¿Qué representa el perímetro?

Miguel: La suma de sus lados

Profesora: El contorno de la figura, ¿correcto? Si nos piden hallar el perímetro sería…

Dana: Cuatro por cuatro tercios

Profesora: Dieciséis tercios. ¿Y el área del cuadrado?

Dana: Dieciséis novenos

Profesora: ¿Cuál es el denominador de cuatro?

Alumnos: Uno

Profesora: ¿Cómo haces para multiplicar?

La alumna sale a la pizarra y multiplica, indicando:

4x4=16

1x3=3

Profesora: ¿Cuál es la respuesta?

Dana: Dieciséis tercios

La profesora realiza las siguientes operaciones en la pizarra, a fin de sintetizar lo trabajado:

$$\text{As}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\text{As}=\frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{16}}{9}\right)$$

$$\text{As}= \frac{4}{9}m^2$$

$$\text{Perímetro} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

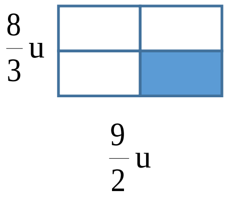
$$= \frac{16}{3}$$

Profesora: ¿Cuál es la respuesta?

Alumnos: 16/3

Profesora: Siguiente

La siguiente tarea presenta la siguiente imagen y pide hallar la parte sombreada:



Antes de proceder a resolver, la profesora manifiesta que no es difícil “aunque los números parezcan complicados” y añade: “Tiene que aplicar una operación y simplificar. La profesora pide a Leslie salir a la pizarra a resolver la tarea, teniendo en cuenta las medidas de los lados del rectángulo grande. La alumna realiza lo siguiente:

$$\text{AT}= \frac{9}{2}\times\frac{8}{3}$$

$$\text{AT}= 12\text{u}^2$$

$$\text{As}=3\text{u}^2$$

A partir de la solución brindada por Leslie, la profesora dice: Si todo mide 12 unidades cuadradas y se pinta una parte, ¿cuánto mide ella? Los alumnos responden: Tres. La profesora añade: al simplificar nos dio un número entero y la operación fue más fácil.

La profesora finaliza la corrección de tarea y escribe en la pizarra “Potenciación y radicación de fracciones”, luego añade que “lo que hacemos con naturales lo retomamos con fracciones” y declara el objetivo de la clase: “hoy vamos a aprender a resolver operaciones aplicando las propiedades de la potenciación y radicación”. La profesora pregunta por alguna de estas propiedades que los alumnos van mencionando: “Cuando se expone a cero, el resultado es uno”, “cuando se expone a uno el resultado es el mismo número”. La profesora añade que las propiedades son útiles para operar. Acto seguido les propone la siguiente situación:

> “Betania ordena su estante de la siguiente manera:
>
> ½ para libros
>
> ½ de ½ para cuadernos
>
> ½ de ½ de ½ para sus muñecas
>
> La pregunta es: ¿qué espacio del estante destina a las muñecas?

A partir de la situación, se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Qué ordena?

Alumnos: Muñecas

Alumnos: Libros

César: Libros, cuadernos y muñecas

Profesora: ¿Cómo?

Jorge: La mitad para libros

Profesora: ¿Qué significa la mitad para libros?

Jorge: Que la mitad del estante es para libros

Profesora: ¿Y la mitad de la mitad para cuadernos?

César: Que la mitad la partes

Profesora: Vamos a representar en la pizarra lo que están diciendo.

La profesora dibuja un rectángulo que divide por la mitad; en una de ellas, escribe “libros”; luego manifiesta que sobra una mitad en la que va a colocar los cuadernos, pero que no puede usar todo porque dice que es “la mitad de la mitad”. Luego pregunta por las muñecas:

Profesora: ¿Qué espacio usa para sus muñecas?

César: Un medio de un medio de un medio.

Profesora: Esto sería de esta manera (divide el gráfico y escribe muñecas)… ¿Sobraría espacio?

Alumnos: Un espacio

Profesora: ¿Cómo sería ese espacio, porque este es un espacio y este también? (refiriéndose a dos espacios distintos de la gráfica)

Leonardo: Un cuarto

Mikail: Un octavo

Profesora: No lo olviden que es respecto del total. Cada vez que multiplicamos las fracciones varias veces el exponente es importante. ¿Qué es mayor: un medio al cubo o un medio al cuadrado? (la profesora escribe en la pizarra)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 o \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Alumnos: Al cubo

Profesora: Eso funciona para los naturales. Observa: ¿Cuánto es un medio al cubo?

Alumnos: Un octavo

Profesora: ¿Y cuánto es un medio a la cuarta?

César: Un dieciseisavos

Profesora: ¿Qué es mayor?

Jorge: Un dieciseisavos

Alumno: Un octavo

Profesora: ¿Cómo saben que lo que les dice el compañero es verdad?

Anthony: dieciséis es mayor que ocho. Por lo tanto un dieciseisavos es mayor que un octavo

Profesora: ¿Otra justificación? ¿Cómo compruebo que las fracciones… una es mayor que la otra?

César: Simplificando

Dana: Multiplicando en aspa

Profesora: Uno por dieciséis es dieciséis y uno por ocho es ocho

Rosita: Un octavo

Profesora: Observa el signo: Si el numerador es uno y el denominador es ocho es mayor el que tiene menor denominador. Como puedes ver esto hay un rectángulo dividido en dieciséis partes y coges uno y otro dividido en ocho partes…

Rosita: Un octavo es mayor.

La profesora expresa que van a trabajar las propiedades y añade lo siguiente, a medida que escribe:

1x1=1

2x2=4

Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Uno por uno es igual a uno; dos por dos es igual a cuatro (escribe en la pizarra). Pero estas expresiones resultan de multiplicar dos veces uno y de multiplicar dos veces dos. Eso de multiplicar dos veces uno equivale a decir uno al cuadrado.

Alumnos: (Escuchan)

Profesora: Por lo tanto, generalizamos: Si la expresión es esta: $\frac{a}{b}$ lo cual puede ser cualquier número y la elevamos a este exponente *n*… ¿Cuánto sale?

Alumnos: (Silencio)

Profesora: ¿Cómo se llama este ene?

Alumnos: Exponente

Profesora: ¿*a* sobre *b*?

Alumnos: (Silencio)

Profesora: En este ejemplo (dos elevado al cuadrado), ¿dos qué viene a ser?

Alumnos: La base

Profesora: Aquí (refiriéndose a a/b) la base es una fracción. Lo que resulta se llama…

Marco: Potencia

Profesoras: Esas dos expresiones (escribe en la pizarra: $\left(\frac{a}{b}\right)^n \equiv \left(\frac{a^n}{b^n}\right)$) son equivalentes… El resultado de la potenciación se llama…

Gloria: Potencia

Profesora: Recapitulando, cuáles son las propiedades básicas… con sus propias palabras.

Viviana: Para comparar dos fracciones multiplicamos en aspa

Profesora: ¿Cuáles son los términos?

Gloria: Base, potencia y exponente

Profesora: ¿La base es un número natural o una fracción?

Gloria: Fracción

Profesora: Es importante consultar el libro, ahí están las propiedades.

La profesora escribe en la pizarra: Potencia y producto, luego escribe la siguiente expresión:

$$(a \times b)^e \qquad \left(\frac{c}{d}\right)^e$$

Y añade: Propiedades de la potenciación:

$$\left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right)^2$$

Profesora: Si no sabes cómo, demostraremos…

Marco: Primero multiplicamos

Profesora: ¿Cuánto sale?

Marco: Tres octavos

Profesora: Luego…

Marco: Lo elevamos al cuadrado

Profesora: Cuando elevamos al cuadrado una fracción, se eleva al cuadrado cada elemento, tanto el numerador como el denominador: $\frac{3^2}{8^2}$ ¿Cuánto sale?

María Fe: Nueve sobre sesenta y cuatro

Profesora: Desarrollemos una multiplicación de fracciones:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

Profesora: ¿Son los mismos resultados?

Alumnos: Sí.

Profesora: Cuando la multiplicación de fracciones está dentro del paréntesis, primero se multiplica y luego se eleva al cuadrado cada elemento… Cuando son bases distintas y los exponentes distintos, se resuelve por separado. …

Profesora: ¿Qué pasará si las bases son iguales?:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

Profesora: (antes de escribir el resultado) ¿En aspa?

Alumnos: No

Profesora: El “n” ¿a qué operación?

El timbre suena por lo que la maestra da por finalizada la clase.

Sesión 4/Caso 6

Viernes, 17 de octubre de 2008.Colegio E

La profesora retoma la operación de la sesión anterior [277] (que seguía en la pizarra) y pregunta si las fracciones son iguales o diferentes. Los alumnos contestan que son iguales. A continuación, la maestra guía la participación de los estudiantes:

Profesora: Tenemos que un medio lo multiplicamos tres veces y un medio lo multiplicamos dos veces. De esta manera tenemos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

Profesora: ¿Cómo son las bases?

Alumnos: Diferentes

Alumnos 2: Iguales

Profesora: Si contamos las veces que se repite nos da cinco veces. Observamos que la primera fracción estaba elevada al cuadrado y la segunda al cubo. Entonces, cuando las bases son iguales…

Dana: Los exponentes se suman.

La profesora escribe la operación:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{32}$$

Profesora: Si no pongo el paréntesis, ¿cómo es la expresión y cuál es el resultado?

Dana: Un medio

Profesora: ¿Y si tiene esto ( )?

Marcos: Una a la quinta y dos a la quinta… treinta y dos.

Profesora: Es decir…

Marcos: Uno sobre treinta y dos.

Profesora: Por lo tanto es importante usar paréntesis cuando tengo un exponente que afecta a la fracción.

La profesora propone otra operación y pide a los alumnos que la observen, Los alumnos observan e intentan recordar las reglas aprendidas.

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{2}$$

---

[277] La operación de la clase anterior es la siguiente: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=$

Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Quién recuerda cómo se llama esta propiedad?

Andrea: Potencia de potencia

Profesora: Muy bien. Diego, ¿qué se hace?

Diego: Se suman

Maripili: Se multiplica

Profesora: Piensen: ¿se suma o se multiplica?

Maripili: Yo recuerdo que se multiplica

Profesora: ¿Cuándo se sumaban?

Diego: Cuando la base es igual… pero es igual si multiplicas tres veces un tercio…

Profesora: ¿Un tercio también se eleva al cuadrado en los corchetes? Piensen

El timbre suena y la clase finaliza.

Sesión 5/Caso 6

Jueves, 23 de octubre de 2008 (sin hora). Colegio E

La profesora escribe en la pizarra: “Radicación de fracciones” e indica a los alumnos que el tema de hoy es ese. Acto seguido escribe lo siguiente:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{9}} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{}{} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{}{}} = \frac{2}{3}$$

Luego se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Cuál es la diferencia?

(Silencio. No obstante, los alumnos comentan que ese tema lo aprendieron con números naturales. Algunos alumnos intentan recordar las propiedades)

Profesora: Esto lo manejan con números naturales, lo único que cambia es que la base es una fracción.

Cesar: Hay raíz cuadrada

Profesora: La radicación es la inversa de la potencia… Cada parte pasa a ser…

(Silencio. Los alumnos comienzan a enunciar, para ellos, los elementos de la radicación)

Profesora: Los términos de la radicación serían…

Maripili: Raíz cuadrada

Profesora: … de veinticinco… Te vas a preguntar qué número multiplicado dos veces por sí mismo da veinticinco… Si me piden encontrar la $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ sería $\frac{2}{3}$ porque dos por dos cinco veces es treinta y dos y tres por tres cinco veces es doscientos cuarenta y tres.

(Los estudiantes atienden)

Profesora: Ahora van a hallar la $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

Samantha: Es un medio

Dana: También me dio un medio

Profesora: Bien, ahora van a hallar la $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} =$

César: Es $\frac{8}{27}$

Samantha sale a la pizarra y escribe: $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

La profesora observa que algunos alumnos no siguen el proceso, y propone la siguiente situación:

Profesora: ¿Cuánto es $\sqrt{4^3}$?

La clase queda en silencio. Sin embargo, algunos alumnos mencionan que es dos al cubo; otros indican que “hay que sacar el exponente” o que “Dos es la raíz cuadrada de cuatro”. Sus intervenciones indican que los alumnos que intervienen conocen las propiedades. La profesora escucha las intervenciones y continúa.

La profesora escribe en la pizarra el proceso de resolución a la vez que explica a los alumnos: “Para hallar la raíz cuadrada de cuatro al cubo, primero multiplico cuatro por cuatro por cuatro y al resultado le saco la raíz cuadrada. Es ocho… Acto seguido, les plantea la siguiente pregunta: ¿Será lo mismo: $\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3$?, generándose el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Será lo mismo: $\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3$?

Alumnos: No… Sí.

Profesora: Hallas primero la raíz cuadrada y el resultado lo elevas al cubo… Esto es ocho. Esta propiedad la vas a aplicar en la medida que… ¿4 y 9 tienen raíz cuadrada exacta? Si dicen sí, aplican la propiedad… ¿Con qué finalidad saco el tres?

(Silencio)

Profesora: Con la finalidad que los dos tengan raíz exacta… Dos tercios elevado al cubo, ¿qué significa?

Samantha: Multiplicar al número tres veces

Profesora: ¿Ahora entendemos para qué aplicamos la propiedad?

(Silencio)

Profesora: Para hacer más fácil la operación.

La profesora propone otra operación:

$$A = \sqrt{\frac{9}{16}}\ ;\ B = \sqrt[4]{\frac{1}{16}}\ ;\quad \sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}}$$

Y pide calcular: *(A:C):B.* La profesora menciona que A y B son más simples. Los alumnos mencionan sus respuestas que valida la profesora: $A = \frac{3}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: La “C” es más elaboradita… ¿Cómo se llama la propiedad?

César: raíz de raíz

Profesora: ¿Qué se hace con los índices?

César: Multiplico

Profesora: ¿Cuánto sería la raíz?

Anita: Veinte

Profesora: Quedaría $\sqrt[20]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}$ … ¡Qué complicado sería si no conociéramos las propiedades!... Hay una propiedad nueva: $\sqrt[n]{a^n}$ … Si se elimina ene, ¿cuánto es la respuesta?

Jorge Luis: “a”

Profesora: Ponemos otro ejemplo: $\sqrt[4]{3^4}$, ¿cuál es la respuesta?

Leslie: Tres

Joao: Pero veinte y cuarenta no son iguales

César: A veinte y cuarenta le sacamos veinteava

Profesora: ¿Qué pensaríamos si tengo esta expresión: $\sqrt[4]{5^8} = ?$

Leonardo: Sacamos cuarta

Profesora: Observen… no existe raíz 1… ¿a partir de qué número?

César: Dos

Profesora: Este radical se elimina… ¿Cuánto es cinco al cuadrado?

César: Sería tres quintos al cuadrado: $C = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

Profesora: Le falta algo…

César: Paréntesis

Profesora: ¿Qué pasaría si tengo: $\sqrt[40]{\left(\frac{3}{5}\right)^{20}}$?... Hago el mismo procedimiento, ¿sí, verdad?

Alumnos: …

Profesora: La raíz es de tipo…

César: Cuadrada

Samantha: No se puede resolver

Profesora: Porque tres y cinco no tienen…

Samantha: Mitad

Profesora: ¿Mitad?

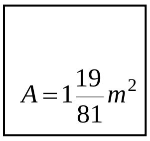
César: Raíz cuadrada exacta

Profesora: Su raíz es inexacta… Ahí (refiriéndose a la operación) no tienen problema

La profesora resuelve (A:C):B:

$$\left(\frac{3}{4} \div \frac{9}{25}\right) \div \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$$

A continuación propone resolver otra de las actividades propuestas: Calcula la medida de cada lado de la figura:



La profesora asocia a la potencia y a la radicación diciendo que esta situación se puede desarrollar cambiando a raíz la potencia. Uno de los alumnos resuelve en la pizarra: $\sqrt{1\frac{19}{81}} \Rightarrow \sqrt{1} \times \sqrt{\frac{19}{81}} \Rightarrow 1\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{81}} = 1\frac{\sqrt{19}}{9}$; no obstante, les dice que esto se puede simplificar si transforman el mixto a fracción, de manera que: $\sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$. La profesora les dice que se les aplicará un paso corto, indicándoles que; “si recuerdas, aplicas; si no, recordar o adivinar. Al que no recuerda… No resuelvan sin darse cuenta de los resultados”.

El timbre suena y la clase finaliza.

Sesión 6/Caso 6

Viernes, 24 de octubre de 2008. Colegio E

La sesión de hoy se inicia exponiendo el tema: números decimales, para ello, la profesora les dice que es un tema que conocen (del año pasado), pero que van a ver “un poco más profundo”.

Acto seguido, les dice que van a suponer que algunos de sus compañeros han reunido una cantidad de soles:

Mikail: 19,8 (diecinueve, coma, ocho)

Kike: 19,09 (diecinueve, coma, cero nueve)

Renzo: 19,14 (diecinueve, coma, catorce)

Luego pregunta quién gana a quién. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: ¿Quién gana?

Dana: Mikail y Renzo

Profesora: ¿Quién reúne menos?

Dana: Kike

Profesora: ¿Cuál iría primero?

Diego: ¿del menor al mayor?

Renzo: Kike

Profesora: ¿Por qué?

Renzo: Porque es el menor

Profesora: ¿Por qué?

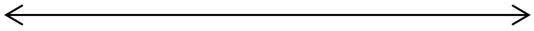
Renzo: Porque está con cero coma nueve

María Fe: Es el menor de todos

Profesora: Si tuvieran una línea imaginaria, recta numérica, y tenemos los tres valores para colocar… ¿El valor mayor o el menor?

Alumno: El menor y luego el mayor

Profesora: Si tengo 4 y 5 ¿qué número va a la derecha?



Marcos: Cinco

Profesora: Por lo tanto, el menor a la izquierda… Si tenemos 19,8 y 19,14… ocho se transforma en 80 y… ochenta

Joao: ocho es menor que catorce

Profesora: ¿Renzo?

Samantha: Catorce es mayor que ocho

Profesora: Para comparar los dos números, lo que tiene que hacer es primero colocar el número 19,8 y 19,14. Primero: al llegar al número decimal si tiene una cifra decimal y acá tiene dos le agregas un cero para que se puedan comparar. Segundo: eliminamos la coma y comparamos como si fueran naturales:

1980 1914

¿Quién es mayor?

Alumnos: 1980

Profesora: Por lo tanto, tenemos que tener las mismas cifras decimales. Si no agregamos un cero, ocho no se podría comparar con catorce fácilmente

(Los alumnos escuchan a la docente; algunos asienten)

Profesora: De aquí voy a deducir unas cositas… ¿los números los leo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda?

Alumnos: De izquierda a derecha

Profesora: Los números con coma son números decimales, ¿desde qué expresión obtenemos un número decimal?

Samantha: Se puede representar en la plata

Profesora: … Si tengo cien soles (S/.100) y gasto quince soles, cincuenta céntimos (S/.15,5)

César: ocho entre tres

Anthony: En los soles y en los céntimos

César: En la división te puede dar un número decimal

Profesora: Si tengo dos números y los divido necesariamente tengo un decimal, ¿no?

Samantha: Cuatro entre dos es dos

Profesora: ¿Es decimal?

Maripili: Es natural

Profesora: Cuatro entre dos es dos, pero también lo podemos representar como decimal: $\frac{4}{2} = 2 = 2{,}00000 \ldots$ ¿$\frac{3}{2}$?

María FS: Sale 1,01

Rosita: Uno con cinco

Profesora: 1,5=1,50… Cuando compras algo a cincuenta céntimos (50 c), lo expreso como 0,50, pero también lo puedo expresar así: 0,5. ¿Cuánto cuesta una fotocopia?

Alumnos: Cinco céntimos

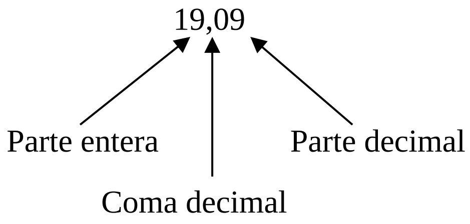
Profesora: Que se escribe: 0,05...

Profesora: ...Vamos a escribir decimales y a utilizar el TVP. ¿Qué hemos hecho?

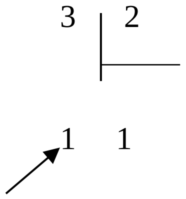
Alumnos: Expresar números decimales

María FS: Comparar

Profesora: Anotamos la regla: en este número: 19,09 tenemos una parte entera (19), una parte decimal (09) y la coma decimal…



Si divido tres entre dos:



La profesora escribe la división en la pizarra, al llegar al residuo expresa:

Profesora: Si le sobra (señalando el 1 del residuo), le pongo una coma. Para expresarlo en decimales añado un cero al dividiendo… ¿A cuánto equivale $\frac{5}{4}$ en decimal?

Los alumnos resuelven e intervienen:

Joao: Uno, coma ocho

María FS: Uno, coma, veinticinco

Maripili: Uno con ocho.

Rosita sale a la pizarra y divide cinco entre cuatro obteniendo 1,25.

La profesora escribe en la pizarra:

…	d	c	m	dm	cm	mll	dmll	cmll

A continuación, les dice: Hay una técnica que ayudará a leer los decimales. Fijarse en la parte entera y en la parte decimal. La parte entera como si fueran números naturales. Separamos de tres en tres la parte decima de derecha a izquierda:

715	030	298, 21	034	679

Luego la parte decimal se lee: veintiún millones, treinta y cuatro mil, seiscientos setenta y nueve cienmillonésimas.

La profesora propone diferentes números para ser leídos correctamente, de acuerdo a la técnica aprendida:

8000342,000002

1200,1033

28042,120035

Los alumnos salen a la pizarra, separan los números decimales de tres entres e intentan leer la parte decimal; sin embargo, confunden millares con millones:

María Fe: Ocho millones trescientos cuarenta y dos, coma, dos cienmilésimos.

Rosita: Ocho millones trescientos cuarenta y dos enteros, dos millonésimas

Maripili: Mil doscientos, coma mil treinta y tres…

Diego: Mil doscientos enteros, coma mil treinta y tres diezmilésimas

César: Veintiocho mil cuarenta y dos con ciento veinte mil treinta y cinco millonésimas

Profesora: Alumnos, es fácil tiene que fijarse en la tabla para nombrar el orden decimal que corresponde a la última cifra. Apóyense en el cuadro.

Joao: Son muchas cifras…

La clase finaliza.

ANEXO D: Síntesis temática

Caso 1

Sesión 1/Caso 1

Miércoles, 13 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ Se hace un repaso teórico del tema aprendido. ▪ Se ejemplifica con casos específicos operativos: - El profesor ejemplifica. - Los alumnos ejemplifican. Códigos – *Resumen verbal ejemplificativo de las distintas interpretaciones de las fracciones.*	El profesor hace un repaso de la clase anterior sobre las fracciones, recordando cuáles son las interpretaciones que se les da. Tres interpretaciones se han trabajado, y en el siguiente orden: la fracción como ‘partir’ (repartir), como dividir y como doble operación: $\frac{\times}{\div}$, en la que el numerador multiplica y el denominador, divide. El profesor pregunta por cada interpretación y las ejemplifica con casos específicos (en los que hay que operar), con intervención de los alumnos. Todo a manera de resumen.
Inicio de clase ▪ Se propone una actividad específica (representar gráficamente la fracción de un número a partir de un ejemplo). ▪ La actividad se propone en una ficha de trabajo. ▪ La actividad es definida como “ejercicio”. ▪ Los alumnos trabajan individualmente. ▪ No se evidencia producción de los alumnos. Códigos	A continuación se les propone una hoja de actividades para que los alumnos resuelvan (Ficha de trabajo para el alumno 1: La fracción como operador). La hoja tiene dos tipos de actividades: una gráfica y otra simbólica. En la primera hay cuatro casos que expresan fracción de un número; el primero está resuelto, es decir, se presenta, además de la expresión, la gráfica que la representa. En esta actividad se propone a los alumnos graficar y hallar a cuánto equivale la fracción de un número específico a partir de una actividad modelo. El profesor pide a los alumnos que se centren en el primer *ejercicio*[278] y lean lo que dice.

---

[278] Palabra textual del docente.

– *Propuesta de una actividad directa sobre fracción de un número (trabajo individual a partir de una ficha interactiva) (inicial).* – *Dificultad en los alumnos para desarrollar solos la actividad.*	
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Interacción alumnos – ficha de trabajo (LECTURA: los alumnos leen la ficha e intentan desarrollar). ▪ Interacción profesor – alumnos (el profesor interroga sobre lo que observan los alumnos). ▪ Los alumnos describen lo que observan (gráfica y literalmente. ▪ Los alumnos establecen relaciones entre la información gráfica y simbólica presentada a partir del cuestionamiento del profesor y las exponen. ▪ Algunos alumnos tienen dificultad para comunicar el trabajo realizado. ▪ El profesor sintetiza las intervenciones de los alumnos. Códigos – *Diálogo con preguntas directas interpretativas e ideas clave para establecer relaciones entre los elementos de la expresión matemática y lograr la comprensión de los alumnos.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por el docente y por iniciativa de los alumnos).*	Los alumnos realizarán el trabajo de manera individual. El profesor pregunta: ¿qué observan en la gráfica? Generándose el siguiente diálogo: Profesor: ¿Qué observan en la gráfica? Alumnos[279]: Veintiún triángulos Profesor: ¿Qué más? Eduardo: Un séptimo de veintiuno es igual a tres Profesor: ¿A qué se referirá veintiuno? Enrique: A la cantidad de triángulos Profesor: ¿Y un séptimo? Eduardo: A tres Profesor: Veintiuno es la cantidad que me indica (refiriéndose al total), ¿cómo están distribuidos esos triángulos? Eduardo: En siete grupos Profesor: Veamos los veintiún triángulos como un solo conjunto, un solo grupo, un grupo de veintiún triángulos (El profesor dibuja en el encerado los veintiún triángulos y los encierra en un rectángulo). Este conjunto está dividido en partes. ¿En cuántas partes están divididos los veintiún triángulos? Observen su ficha

---

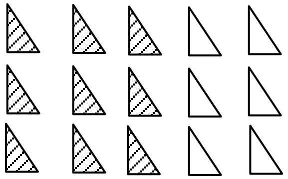
[279] Cuando escribimos alumnos, nos referimos a varios en la clase, aunque no todos.

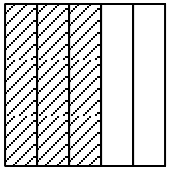
	Alumnos: Tres Profesor: Escuchen bien,… ¿cuántas *partes* hay? (señalando cada grupo) Alumnos: Siete Profesor: Cada división representa una parte. ¿Cuántas partes están pintadas? Alumnos: Una Profesor: ¿Cuántos triángulos hay en esa parte? Alumnos: Tres Profesor: Una parte de siete se lee, en fracción, un séptimo. En este caso, un séptimo de un conjunto de veintiuno triángulos. ¿Cuántos triángulos hay en un séptimo de veintiuno? Alumnos: Tres Profesor: Entonces, un séptimo de veintiuno es igual a tres, que es lo que se indica en la ficha. ¿Han comprendido? Alumnos: Sí.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ Transformación del caso por otro más sencillo (por parte del profesor). ▪ Interacción alumno – ficha de trabajo (REPRESENTACIÓN GRÁFICA a partir del ejemplo anterior). ▪ Exposición de producciones gráficas. ▪ El trabajo no ofrece dificultad a los estudiantes, lo ejecutan siguiendo un patrón establecido.	El profesor propone hacer la siguiente actividad de la ficha que sin embargo modifica ya que prefiere trabajar con fracciones propias y no con impropias como se propone en la actividad[280]. Después de un tiempo en el que el profesor ha observado que todos o la mayoría de los alumnos había desarrollado la actividad, el profesor le pide a Eduardo que salga al encerado y grafique lo que ha hecho en su folio. El alumno dibuja quince triángulos distribuidos equitativamente en cinco columnas[281]. Luego, ‘pinta’ las tres primeras columnas, es decir nueve triángulos. Su gráfica queda como se muestra a continuación:

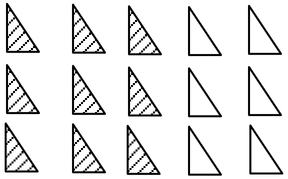
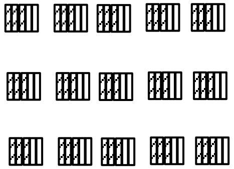
---

[280] En realidad hubo un error ya que lo que se planteaba era 3/5 de 15 y no 5/3 de 15 como aparece en la ficha.

[281] El alumno sigue el planteamiento de la primera actividad en la que se trabaja con triángulos.

Códigos – *Propuesta de un caso similar (adaptación de la actividad a una más simple: fracción propia).* – *Participación total de los estudiantes al ser una actividad propuesta de manera individual.* – *Resolución de acuerdo al modelo por parte de los alumnos.*	
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ El alumno comunica/explica su trabajo. ▪ La comunicación de los alumnos sigue un patrón diferente al enseñado y expuesto ("de cada cinco se coge tres" frente a "dividir en cinco grupos y coges tres"); no se corresponde con la forma de representar la gráfica. La comunicación simbólica sigue el patrón conocido. ▪ El profesor sistematiza el trabajo del alumno. Códigos – *Dificultad para explicar la propuesta de solución de acuerdo al modelo.* – *Diálogo con preguntas directas para orientar la explicación del trabajo realizado por el estudiante.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la interpretación del trabajo realizado por el compañero.*	El profesor le pide a Eduardo que explique, con palabras, lo que ha hecho. El alumno expresa: "de cada cinco (triángulos) se coge tres". El profesor pone signos de interrogación a esa expresión: "¿Cómo que 'de cada cinco se coge tres'?", y añade: "Explica lo que has hecho." Eduardo queda en silencio, sin encontrar otra manera de explicarlo y Pablo intenta responder diciendo: "dividir cada triángulo en cinco partes iguales y coger tres". El profesor vuelve a insistir y pregunta a Eduardo porqué hace eso. El profesor especifica la pregunta: "¿Por qué has pintado nueve y no otra cantidad?". El alumno responde: "porque hay que dividir entre cinco y coger tres. Da nueve". El profesor pregunta "¿Qué dividimos entre cinco?" El alumno responde: "quince". El profesor afirma: "entonces, tres quintos de quince es igual a nueve". Esta expresión se escribe en la pizarra
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ El profesor cuestiona el trabajo personal del alumno y permite que lo exponga.	En el transcurso del trabajo individual, el profesor observó que Eduardo había elaborado un primer gráfico, distinto al que hizo en el encerado (había dibujado rectángulos), por ello le pregunta si lo que ha hecho en el encerado es lo que había trabajado en su folio. El alumno

▪ El trabajo se corresponde con las comunicaciones anteriores. En primera instancia, los alumnos trabajan con la unidad como un todo y no con el conjunto como tal. ▪ Se evidencia otra forma de representar gráficamente una situación. Códigos: – *Valoración de una gráfica distinta generada realizada por un estudiante y exposición a la clase.*	responde que no, que Alba le había dicho que dibujara igual que la ficha. El profesor le pide que exprese lo que había hecho en su folio. El alumno empieza a dibujar. Para evitar demoras, el profesor le dice que él (el profesor) lo va a hacer a medida que el alumno le diga, verbalmente, lo que había trabajado. El alumno le dice que dibuje quince cuadrados, divida cada uno en cinco partes iguales y coja (o pinte) tres en cada cuadrado. Cada cuadrado queda como sigue: 
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ Interacción profesor – alumnos – actividad. ▪ Reflexión sobre el tema a partir de la actividad. ▪ Reflexión sobre la actividad. Códigos: – *Diálogo con preguntas directas reflexivas sobre el tema general (fracciones).* – *Participación selectiva de los estudiantes de acuerdo a las preguntas formuladas en torno a la idea de fracción.* – *Propuesta a los alumnos de comparación y análisis entre dos formas de graficar la misma situación (una propuesta en la gráfica y otra desarrollada por los estudiantes).* – *Participación selectiva de los estudiantes con respuestas simples (sin argumentar).*	Mientras va dibujando, el profesor pregunta a la clase, en general, si da lo mismo ‘cuadrados que triángulos’. Algunos alumnos responden que sí y otros se quedan callados. Luego pregunta si es lo mismo “dividir de cualquier manera cada cuadrado”. Después de un silencio general, Andrea B. dice que cuadrados y triángulos son iguales, sin embargo el profesor le dice que eso no es correcto. La alumna piensa y rectifica diciendo que “representan lo mismo: unidades”, y que da igual la figura que sea. Esta idea no se da inmediatamente, pero esta alumna llega a ella. Los alumnos no saben cómo llegar a la expresión correcta y el profesor intenta, a través de sus preguntas, que se expresen de manera adecuada, utilizando un lenguaje general y matemático apropiado. La idea de dividir la unidad en partes iguales para representar fracciones de ella se tiene mejor asimilada pues los alumnos responden inmediatamente que no se puede dividir de cualquier manera, que tienen que ser partes iguales. El profesor establece una comparación entre las dos gráficas (triángulos y cuadrados). Pregunta si indican o representan lo mismo, dado que están representadas de diferente manera. En el primer caso, además de la gráfica se escribe la siguiente expresión: “3/5 de 15 = 9”. Algunos alumnos responden que no; otros, que sí. Aún no lo tienen claro.
Desarrollo de la clase (Parte VI) ▪ Conflicto de ideas en los estudiantes (diferentes interpretaciones).	A la pregunta anterior, Lucía comenta que “en el segundo hay más partes que en el primero”. El profesor interroga: “¿Qué quiere decir que ‘hay más partes’?”. Alba responde que “hay de más

▪ Se evidencia dos formas de representar gráficamente la fracción de un número (considerando el conjunto unidad como un todo y considerando la como un todo). Códigos: – *Participación selectiva de los estudiantes de acuerdo a las gráficas expuestas.* – *Diálogo con preguntas directas e ideas clave que orientan la participación de los estudiantes a la reflexión de las dos gráficas.* – *Dificultad para identificar la similitud de ambas gráficas.*	en el segundo, en el primero hay nueve y en el otro, quince" (refiriéndose a que las quince gráficas están pintadas). Las gráficas son las siguientes:   El profesor piensa y plantea la pregunta de otra manera, volviendo a lo que se hizo en la primera gráfica y que los niños han representado correctamente: "¿Cuántas unidades son tres quintos de quince?" Lucía dice que nueve. El profesor pregunta: "¿Creen que hay lo mismo en esta forma? (señalando la gráfica de los cuadrado)". Algunos alumnos dicen que no; otros aunque menos, que sí. Alba insiste en que "hay quince pintados". El profesor vuelve a la expresión: Si tres quintos de quince son nueve (señalando la primera gráfica) y aquí (señalando la segunda) se ha graficado los tres quintos de quince, ¿cuánto creen que hay? Algunos alumnos (Pablo, Enrique y Eduardo, Lucía, Andrea B, Nerea) establecen la relación contestando que hay nueve. El resto de alumnos, sin embargo, no responde.
Desarrollo de la clase (Parte VII) ▪ A partir de la reflexión, algunos alumnos visualizan mejor la idea y lo expresan. Establecen relaciones a partir de la gráfica. Códigos: – *Participación selectiva de los estudiantes de acuerdo a la pregunta formulada (La comprensión se hace evidente en una alumna).* – *Diálogo con preguntas aclaratorias para orientar la explicación de los alumnos (¿quieres decir…?).* – *Manipulación gráfica de la expresión para una mejor visualización y comprensión.*	El profesor retoma la pregunta de la diferencia entre una gráfica y otra. Lucía dice: "la primera se ve más claro y la segunda, no (con relación a 9)". El profesor sigue el comentario: "¿quieres decir que aquí hay nueve también?, ¿cómo?". La misma alumna sale al encerado y empieza a completar el sombreado de las partes de cada cuadrado, advirtiendo que al completar en uno, hay que quitar en otro. El profesor le pide que explique lo que está haciendo. La alumna expresa: "Hay que completar, pero hay que borrar". El maestro la ayuda borrando. Al final se observan los nueve cuadrados 'pintados' y seis sin pintar, como en el caso de los triángulos. Los alumnos que observan asienten con la cabeza.

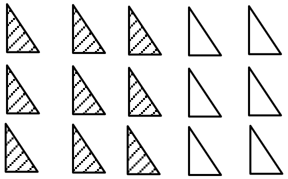
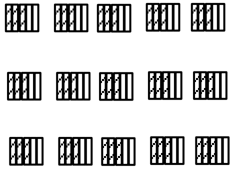
Desarrollo de la clase (Parte VIII) ▪ Sistematización del docente: Asociación: GRÁFICA – SIMBÓLICA. ▪ Interacción con la ficha de trabajo. ▪ Participación guiada de los alumnos (a partir de las preguntas del profesor). Códigos: – *Descontextualización de la fracción de un número (o fracción como operador) de la representación gráfica y relación con las operaciones que lo involucran (división y multiplicación).* – *Diálogo con preguntas directas para guiar en los alumnos la comprensión de la situación.* – *Dificultad en los alumnos para explicar la expresión "fracción como operador" (o fracción de un número) en función de la naturaleza de sus elementos.* – *Participación selectiva de los estudiantes en el análisis interpretativo de la fracción como operador (o fracción de un número).*	El profesor relaciona la expresión: "$\frac{3}{5} de 15 = 9$" con las operaciones necesarias (fracción de un número que se trabajó en la clase anterior y se recordó al inicio de ésta). El profesor pregunta: "como operador, ¿qué hacemos?"; Enrique responde: "dividimos entre cinco y multiplicamos por tres". El profesor escribe: "(15:5) x3 = 9". Elba dice, refiriéndose a las diferencias entre una y otra gráfica, "en la primera hay que hacer unas operaciones y en la otra no", viendo que el profesor escribe la operación anterior. A continuación, el profesor expresa que al operar una cantidad se transforma. El profesor les dice que lean la parte introductoria de la ficha de trabajo[282], en la que se expresa esta idea y les pregunta qué es lo que se transforma en la expresión de la actividad que han resuelto. Los alumnos no logran captar el sentido de esta pregunta y vuelven a responder en función de las diferencias que hay entre una gráfica y otra. Asmaa' expresa que en el segundo gráfico se han partido las unidades y se ha ido pintando lo que falta y en el primero, no. El profesor vuelve a insistir en mirar la expresión simbólica y no la gráfica. Para centrar más las respuestas, el profesor les hace observar la expresión: "observen, tres quintos de quince es igual a nueve" y les señala la fracción 3/5 y el número 9. Luego, les pregunta por la diferencia entre ambos. Para ello, les pregunta cómo es la primera cantidad, a lo que Andrea R. dice que es una fracción. Luego, les pregunta por la segunda cantidad señalada y el profesor les dice que éste es un número natural, luego añade: "¿cuál es la diferencia?". Alba responde: en el primero hay denominador y en el segundo, no: desaparece. El profesor lo repite: "aquí el denominador desaparece".
Cierre de la actividad (Parte IX) ▪ Identificación de lo trabajado (fracción de un número) en situaciones cotidianas. No se logra (los alumnos no logran contextualizar). ▪ Cambio de interpretación: como reparto y como división.	Los alumnos dejan de lado la ficha de trabajo. El profesor recapitula la idea de fracción de un número y pregunta si este tema se puede aplicar en alguna situación. El profesor hace alusión a que las matemáticas sirven para 'algo' (algo concreto, específico). Los alumnos no expresan situaciones en las que puedan aplicar la fracción de un número. El profesor retoma las tres interpretaciones de fracción y les pide que piensen situaciones en las que la fracción como reparto esté incluida. Andrea P. dice: "repartir la torta"; Lucía: "partir un folio". El profesor acepta las ideas anteriores como correctas, aunque especifica que muchas veces los repartos reales no son

---

[282] La ficha empieza de la siguiente manera: "Al interpretar la fracción como operador, ésta cumple una función distinta: expresa una transformación. A continuación te proponemos aplicar distintas fracciones a distintas cantidades (o situaciones iniciales) y hallar la transformación que se genera".

▪ Los alumnos contextualizan las ideas. Sobresale la idea de fracción como reparto y división en situaciones cotidianas generales pero no la de fracción de un número. Código – *Contextualización posterior de la expresión matemática en situaciones ‘cotidianas’ (planteamiento de situaciones).* – *Dificultad de los alumnos para contextualizar fracción de un número en situaciones cotidianas.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la contextualización de la expresión matemática (parcial).*	equitativos, dando como ejemplo el caso de la torta: “si el reparto lo tuviera que hacer yo, seguro que me quedaría con la mayor parte”. Los niños se ríen. Una vez trabajada esta interpretación, el profesor les pide que piensen en situaciones en las que la idea de fracción como división esté inmersa. Andrea B. dice: “cuando tenemos que repartir el dinero”, el profesor le dice que explique y la alumna continúa “cuando la mamá da un dinero a sus hijas y éstas lo reparten entre las que son”. Otro ejemplo es el del reparto de las ‘chucherías’, que lo expresa Andrea R. En este caso, el profesor pide que expliquen cómo hacen dicho reparto. Andrea B. intenta explicarlo: “Cuento cuántas ‘chuches’ tengo, cuento cuántos (personas, niños, etc.) hay y divido”. El profesor dice que ésta no es la manera común de hacerlo, pues él ha visto que lo hacen de otra manera, y pide que lo expliquen. La misma niña explica que pueden ir repartiendo uno a uno, o cogen una cantidad, cualquiera, de ‘chuches’ y van entregando. Las demás alumnas asienten. El profesor pregunta por las desventajas de este último procedimiento. El profesor insiste de la siguiente manera: “¿hacerlo de esa manera permite que todos reciban lo mismo?” Algunos niños dicen que sí y otros que no. Después de pensar, Asmaa’ dice que no, “porque puede ser que se acaben y no todos reciban lo mismo”. El profesor reafirma la idea. Elba dice que, entonces, se deja de repartir. El profesor continúa: “el reparto ya no sería equitativo ya que no se da la misma cantidad a todos”.
Final de la clase ▪ Tarea sobre contextualizar la idea de fracción de un número. Códigos: – *Propuesta de tarea para la casa.* – *Clase cerrada (actividad finalizada).*	Al finalizar, el maestro les dijo a los alumnos que para la próxima clase les traigan las situaciones en las que se aplique la fracción bajo esta nueva interpretación: como operador.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas /Fragmento de la sesión observada
a) El profesor propone preguntas directas al estudiante sobre el tema en cuestión y ejemplos de cada uno. La actividad no genera ningún conflicto, pues los alumnos exponen directamente las cuestiones, sin ninguna dificultad. Los ejemplos son directos (expresiones matemáticas). Código: – *Actividad de repaso (de un conocimiento ya trabajado).*	a) El profesor hace un repaso de la clase anterior sobre las fracciones, recordando cuáles son las interpretaciones que se les da. Tres interpretaciones se han trabajado, y en el siguiente orden: la fracción como 'partir' (repartir), como dividir y como doble operación: $\frac{\times}{\div}$, en la que el numerador multiplica y el denominador, divide. El profesor pregunta por cada interpretación y las ejemplifica con casos específicos (en los que hay que operar), con intervención de los alumnos. Todo a manera de resumen.
a) El docente propone una actividad (primera propuesta) de aplicación a partir de un modelo. La actividad solicita aplicar distintas fracciones a distintas cantidades y hallar la transformación que se genera basándose en un modelo. Busca aplicar y, posteriormente, reflexionar (sacar conclusiones) Es una actividad que pretende que el alumno trabaje sin la ayuda directa del docente (solo de la ficha); sin embargo, el alumno no puede hacerlo solo y el docente guía la comprensión del modelo a través de preguntas. Esta actividad ofrece dificultad inmediata pues los alumnos no saben cómo representar gráficamente la cuestión	a) A continuación se les propone una hoja de actividades para que los alumnos resuelvan (Anexo 1: La fracción como operador). La hoja tiene dos tipos de actividades: una gráfica y otra simbólica. En la primera hay cuatro casos que expresan fracción de un número; el primero está resuelto, es decir, se presenta, además de la expresión, la gráfica que la representa. En esta actividad se propone a los alumnos graficar y hallar a cuánto equivale la fracción de un número específico a partir de una actividad modelo. El profesor pide a los alumnos que se centren en el primer ejercicio y lean lo que dice. b)   c) El profesor relaciona la expresión: "$\frac{3}{5} de 15 = 9$" con las operaciones necesarias (fracción de un número que se trabajó en la clase anterior y se recordó al inicio de ésta). El profesor pregunta: "como operador, ¿qué hacemos?"; Enrique responde: "dividimos entre cinco y

planteada. Se puede considerar que es un problema para quienes no son capaces de resolverla inmediatamente. Es una actividad que se enmarca dentro de la construcción y reflexión del conocimiento aprendido (no es nuevo para el alumno). b) La aplicación de esta actividad genera dos formas de graficar la fracción de un número que es aprovechada por el docente para generar la participación y reflexión de los estudiantes. c) La actividad sirve para extraer gráficamente el resultado de la expresión y asociarlo simbólicamente con la expresión matemática (qué operaciones aplicadas a la fracción como operador permiten obtener este resultado. No obstante, no se llega a resolver todas las propuestas (la explicación del modelo demandó más tiempo del previsto) Código: – *Actividad de aplicación (gráfica y simbólica en base a un modelo)* – *Actividad de reflexión*	multiplicamos por tres”. El profesor escribe: “(15:5) x3 = 9”.
a) La siguiente actividad busca que el alumno contextualice en situaciones concretas la idea de fracción de un número, trascendiendo su expresión matemática directa. b) Los alumnos tienen dificultad para transferir inmediatamente esta	a) El profesor recapitula la idea de fracción de un número y pregunta si este tema se puede aplicar en alguna situación b) Los alumnos dejan de lado la ficha de trabajo. El profesor recapitula la idea de fracción de un número y pregunta si este tema se puede aplicar en alguna situación. El profesor hace alusión a que las matemáticas sirven para ‘algo’ (algo concreto, específico). Los alumnos no expresan situaciones en las que puedan aplicar la fracción de un número. c) Una vez trabajada esta interpretación, el profesor les pide que piensen en situaciones en las que la idea de fracción como división esté inmersa. Andrea B. dice: “cuando tenemos

interpretación de fracción a una situación ‘cotidiana’. c) Por lo general los alumnos plantean la situación como problema matemático escolar (situación concreta y específica). Código: – *Actividad de trasferencia de contexto matemático a contexto extramatemático.*	que repartir el dinero”, el profesor le dice que explique y la alumna continúa “cuando la mamá da un dinero a sus hijas y éstas lo reparten entre las que son”. Otro ejemplo es el del reparto de las ‘chucherías’, que lo expresa Andrea R. En este caso, el profesor pide que expliquen cómo hacen dicho reparto. Andrea B. intenta explicarlo: “Cuento cuántas ‘chuches’ tengo, cuento cuántos (personas, niños, etc.) hay y divido”. El profesor dice que ésta no es la manera común de hacerlo, pues él ha visto que lo hacen de otra manera, y pide que lo expliquen.

Sesión 2/Caso 1

Viernes, 15 de febrero de 2008. Hora: 09.55 – 10.50. Colegio A

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ El profesor inicia con una recapitulación del tema fracciones y sus distintos significados. ▪ Pregunta a los alumnos los distintos significados y ejemplos de cada uno. ▪ El profesor propone comparar una cantidad expresada como fracción de un número y una cantidad expresada en número natural. ▪ El profesor involucra diferentes aspectos en una misma actividad, a partir de las intervenciones de los alumnos. Códigos: – *Resumen verbal ejemplificativo de las distintas interpretaciones de las fracciones centrándose en la fracción como operador.*	El profesor empieza la clase recapitulando los tres significados de fracciones que ha trabajado en las clases anteriores: como parte, como división y como ‘operación’[283]. Los alumnos intervienen diciendo cuáles son los significados estudiados, qué quiere decir y dando ejemplos directos de cada uno. La última interpretación la expresan como “multiplicar y dividir”; al llegar a ésta, el profesor propone un ejemplo: “ $\frac{3}{4} de 24$ ” y pregunta: “¿qué quiere decir tres cuartos de veinticuatro? Daniel expresa: “veinticuatro entre cuatro es igual a seis…”. En este momento el profesor interrumpe, recalcando que no es la respuesta correcta ya que no busca que respondan cuánto es sino qué significa; luego, pide a otro voluntario que explique lo que quiere decir la expresión. Eduardo dice: “veinticuatro entre cuatro, por tres”, sin dar ninguna respuesta parcial ni final. El profesor asiente y lo escribe en el encerado, mientras el alumno lo expresa pausadamente: “veinticuatro entre cuatro. Lo pones entre paréntesis…” El profesor interrumpe y pregunta si es

---

[283] La idea que trabajan en esta última interpretación es que la fracción sirve para multiplicar y dividir una cantidad.

– *Diálogo con pregunta directa interpretativa/reflexiva sobre fracción como operador.* – *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la expresión matemática y sus implicancias.* – *Valoración de las intervenciones de los estudiantes a través de las cuales genera reflexión de la situación en los estudiantes.*	necesario poner los paréntesis, algunos alumnos dicen que no (Enrique, Pablo, Iago, Lucía, Andrea B y Andrea P); luego él asiente, aunque aclara que los va a poner por otras razones. El profesor les plantea lo siguiente: “si quiero decir una cantidad, por ejemplo trece, ¿sería mejor así (escribe “13”) o de esta manera (señala la fracción de un número)?”. Los alumnos se quedan en silencio. El profesor vuelve a insistir señalando los ejemplos anteriores y expresando que “hay que suponer que aquí – señalando la fracción de un número – es trece”. Andrea B. responde que la primera es más clara. El profesor pregunta cuáles son las ventajas de expresarlo de una u otra forma. La misma alumna dice que en el primer caso dice cuánto es “y no tienes que hallar el número porque ahí está”. Enrique, Lucía y Andrea P. asienten, mientras que en el segundo “hay que operar primero para hallar la cantidad”. El profesor, refiriéndose a la clase reafirma lo que dijo Andrea B. y expresa que, efectivamente, en el caso de “13” la cantidad está expresada directamente, mientras que en el segundo, no; sin embargo, hace referencia a lo mismo. El profesor resuelve: ¾ de 24 = 18. Pablo, refiriéndose a la misma situación, responde: “pago más”. El profesor piensa en la idea de Pablo que, aunque le resulta descabellada y haciéndoselo saber, la usa para preguntar “qué significa *pagar más*”, y “cuál es la diferencia entre coste y precio”, diferencia que el profesor, piensa, no tienen clara. Se suscita un diálogo al respecto en el que se aclara que el precio es el valor de cada producto y el coste es lo que se paga por ellos; y que muchas veces ambos no se corresponden de ahí que surjan expresiones como “cuesta más de lo que pago por ello”, cuando el valor está por encima de su coste o “cuesta más de lo que debería” cuando su coste está por encima de su valor, en diferentes situaciones de compra y venta que el profesor concretizan y solicitando a los alumnos otras situaciones al respecto.
Inicio de clase ▪ El docente parte de situaciones que involucren la fracción de un número (retomando la actividad de la clase anterior y que los alumnos no lograron producir correctamente). ▪ Los alumnos plantean situaciones específicas que involucran el uso de fracciones directamente, o no. El profesor define dichos ejemplos como “problemas” (diferencia *situación* de *problema*).	A partir de las situaciones generadas con respecto al coste y precio de los productos, el profesor retoma la última actividad de la clase anterior, sobre pensar situaciones en las que esté involucrada la fracción como operación, y pregunta si pensaron en esas situaciones. Los alumnos quedan en silencio. Andrea B. plantea la siguiente situación: “tengo sesenta caramelos y quiero los seis décimos”. El maestro pide más situaciones. Andrea P. expresa: “un pastel lo divido en seis trozos y cojo tres”. El maestro queda en silencio, mira a sus alumnos y aclara que no quiere “problemas” como los que se les plantean, sino que digan en qué situaciones se pueden encontrar con estos casos. Los alumnos siguen mencionando ejemplos como los de las compañeras; sin embargo, Pablo levanta la mano para intervenir y plantea la situación ‘de la gasolina’ expresando

▪ El profesor acepta el ejemplo de uno de los alumnos referido a la gasolina y en el que involucra porcentajes. ▪ El alumno asocia porcentaje a fracciones. ▪ El profesor reafirma la idea: asociar porcentajes y fracciones. Códigos: – *Orientación del diálogo generado hacia el desarrollo del conocimiento matemático (situaciones ‘cotidianas’ que involucren la fracción como operador (contextualización).* – *Dificultad para contextualizar la fracción como operador en situaciones ‘cotidianas’.* – *Participación selectiva de los estudiantes para contextualizar la fracción de un número (cuestiones a las que una minoría llega).* – *Diálogo con preguntas directas para conectar la situación concreta (descuentos en porcentajes) con la idea de fracción de un número).* – *Participación selectiva de los estudiantes para interpretar el porcentaje en términos de fracción.*	lo siguiente “En la gasolina. Por ejemplo, vas a comprar y te descuentan el 20%”. El profesor aprovecha la intervención y se establece el siguiente diálogo entre él y el alumno: Profesor: ¿Cómo así el 20% de descuento? Pablo: El veinte por ciento de lo que te van a cobrar por la gasolina para el coche Profesor: ¿Qué es eso del 20%? Pablo: Las dos décimas partes del total Profesor: (intenta que Pablo no siga expresándose pues observa que el resto de la clase no comprende su explicación y reformula la pregunta). ¿Qué quiere decir 20%?”. Pablo: Veinte de cien Profesor: ¿Y si son 200? Pablo: (Piensa un poco y responde) Sería el 40% Profesor: ¿Qué pasa si pago 50 euros? ¿Cuánto me descuentan? Alumno: La quinta parte. Porque veinte de cien es la quinta parte
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Los alumnos muestran conocimientos previos sobre porcentajes (forman parte de su cultura en las rebajas). ▪ El profesor motiva a expresar de diferente manera el conocimiento matemático, incluso usando el lenguaje oral (o textual).	Dirigiéndose a toda la clase, el maestro señala el tanto por ciento y pregunta quienes han visto esas expresiones (refiriéndose a los porcentajes) y qué otras maneras hay de escribirlas. Los alumnos intentan pensar; sin embargo, Andrea B. sale al encerado y escribe: “-20%”. Luego se sienta. El profesor pregunta a la alumna dónde ha visto esa forma de escribir el porcentaje; la alumna responde que en las tiendas. El profesor pregunta otras maneras de representarla. Pablo vuelve a intervenir y dice: 20/100 de x. Luego sale al encerado y escribe la expresión. El profesor pregunta otras formas y escribe la forma de expresarla mediante el uso del lenguaje oral: “el

▪ El docente introduce términos propios de la matemática a partir de las intervenciones de los alumnos. ▪ A través de las intervenciones de los alumnos, el profesor asocia el porcentaje con una fracción y con una división como medio para hallarlo. Para los ejemplos expuestos la división es directa. ▪ El maestro contextualiza en situaciones cotidianas la idea de porcentaje. ▪ El docente sintetiza la relación entre porcentaje y fracción y que en este caso la fracción se trabaja como operador. ▪ El docente pregunta sobre lo anterior a los alumnos. ▪ La actitud dialógica es constante en la sesión: el docente pregunta ejemplos a los alumnos y cuestiona a partir de ellos. Códigos: – *Orientación de la clase hacia la representación e interpretación de porcentaje.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para la síntesis de la información con participación de los alumnos.* – *Asociación directa por parte del docente del porcentaje con fracciones simples (mitad) y aplicación a otros casos concretos (quinta).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución en la resolución de casos concretos (verbal).* – *Contextualización del conocimiento matemático (fracción como operador).*	descuento es del veinte por cien", luego hace hincapié en que los descuentos se pueden representar y expresar de diferentes maneras: con signos matemáticos y con palabras. Profesor: Vemos que los descuentos los podemos representar de diferentes maneras. ¿Cómo se ha representado aquí? (señala el porcentaje) Andrea B: Con un circulito, raya y circulito Profesor: Ese circulito, raya y circulito se llama "tanto por cien". ¿Qué otra forma usamos? (indica la fracción) Enrique: Como fracción Profesor: Exactamente. El profesor asocia los porcentajes con una fracción: "el 50% de una cantidad es la mitad de la cantidad. Se representa mediante un medio", y escribe la expresión en el encerado, luego pregunta cuánto es, y añade: Profesor: El cincuenta por cien es un medio. Por lo tanto el cincuenta por ciento de 30, por ejemplo es igual a decir un medio de treinta, ¿verdad? Enrique: Sí Profesor: Y un medio de treinta es… Enrique: Quince Profesor: Por lo tanto el cincuenta por cien de treinta es quince Lucía: Sí Profesor: Para hallar el cincuenta por cien de una cantidad divido la cantidad entre dos. ¿Qué quiere decir el veinte por ciento de cien? Enrique: Dos décimos de cien Profesor: ¿Qué quiere decir dos décimos de cien?

– *Síntesis por parte del docente del trabajo realizado (asociación porcentaje – fracción).* – *Diálogo con preguntas directas reflexivas e ideas claves para reconstruir el conocimiento trabajado.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la reconstrucción del nuevo conocimiento.*	Andrea B: El veinte por ciento Profesor: ¿Cómo puedo hallar el veinte por ciento de cien? Enrique: Divido entre cinco Profesor: ¿Por qué? Enrique: Porque es la quinta parte Profesor: Entonces, el veinte por ciento de cien es lo mismo que un quinto de cien Enrique: Sí Pablo: También puedo dividir entre diez y multiplicar por dos Profesor: Entonces, para hallar los porcentajes podemos hacer uso de las… Alumnos: Fracciones Profesor: Hay que descubrir cuál es la fracción que se asocia al porcentaje A medida que el diálogo se desarrolla, el profesor va escribiendo en el encerado. El maestro recalca que una de las situaciones en las que se usan los porcentajes es el de los descuentos, como el caso de la compra de la gasolina y en las rebajas. Añade que estos son dos casos concretos de la fracción como operación “ya que al numerador y al denominador le corresponde una operación concreta: división o multiplicación” puesto que “los porcentajes se pueden expresar como fracciones” y “los porcentajes averiguan cantidades de otras cantidades”. Insiste, a la vez que señala en el encerado: “20% de 100 es lo mismo que 2/10 de 100 o 1/5 de 100”, asocia y resuelve expresando las operaciones: Profesor: Cuando cambio el porcentaje por una fracción ésta toma un significado. ¿Cuál es? Alumnos: … Profesor: Conocemos tres significados de las fracciones…

	Enrique: Como operación Profesor: ¿Por qué “como operación”? Enrique: Porque divides entre cinco Profesor: ¿Y qué pasa con el numerador? Enrique: Nada Profesor: ¡Cómo que nada! Cuando la fracción actúa como operación, ¿qué hacemos con el numerador y el denominador? Enrique: Se divide entre el denominador y se multiplica por el numerador Profesor: Entonces… Enrique: Multiplicamos por uno pero da lo mismo Profesor: No es que no pase nada, sino que el resultado no varía porque cualquier número multiplicado por uno… Asmaa’: Es el mismo número Pablo: Si divido entre diez y multiplico por dos da lo mismo también Profesor: Porque las fracciones son equivalentes y podemos escoger la más simple. No hay que escoger lo más complicado[284]. Por lo tanto cuando reemplazamos fracciones por porcentajes, las fracciones actúan como operación porque hay que dividir y multiplicar por el denominador y el numerador
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ El planteamiento de situaciones es limitado para los alumnos. Tal como lo propone el docente, los alumnos no logran plantear situaciones en las que intervenga la “fracción de un número.	El profesor pide a los alumnos que piensen otras situaciones. Sin embargo, los alumnos no logran enunciar ninguna sin ayuda alguna. El profesor se vale de la prensa que tienen en el aula para enunciar algunos titulares relacionados con los porcentajes y las fracciones. Entre las que se nombran están las compras, las encuestas. El profesor reparte la prensa para que cada alumno revise las noticias y dé ejemplos concretos. Los alumnos observan y mencionan algunas. El

---

[284] El profesor comenta que Pablo, generalmente, escoge los caminos “más complicados” para llegar a un resultado: la operación más larga, el camino más largo, etc.

▪ El profesor recurre a la prensa para que los alumnos identifiquen ahí situaciones parecidas. ▪ El profesor recurre a pistas. Códigos: – *Dificultad para contextualizar a otros casos fracción de un número (aun cuando los alumnos han experimentado una situación específica es difícil que la trasladen a otros casos).* – *Facilidad para manipular simbólicamente frente a la dificultad para contextualizar.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la contextualización de la expresión matemática (dificultad)*	profesor va dando pistas para que los alumnos reconozcan en dichas noticias situaciones en las que están incluidas las fracciones (descuentos, compras: ¾ del precio. Encuestas: 2 de cada 3: 2/3 (razón). Materia grasa. Bolsa. Audiencia del canal. Pérdida de trabajo. ING Direct, consumo del coche: 6 litros cada 100 km, presupuesto, etc.). Los alumnos revisan la prensa y van enunciando algunos casos concretos a partir de las situaciones enunciadas por el profesor. En algunos casos, aciertan y en otros no. En general, las situaciones las plantea el profesor y los casos concretos en ellas, también. Pocos alumnos son capaces de plantear sus propias situaciones, aún a partir de las presentadas (Nerea, Elba, Enrique y Lucía): Lucía: Aquí menciona el porcentaje de desempleo Profesor: En fracción, ¿cómo indicamos el porcentaje? Lucía hace la transformación e indica la fracción correcta.
Final de la clase ▪ Los alumnos se interesan por la actividad propuesta por el docente. La actividad se orienta hacia la búsqueda de porcentajes que transforman en fracción. Códigos: – *Participación total de los estudiantes en la contextualización de la expresión matemática al ser una actividad propuesta individualmente.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).* – *Si tarea para la casa.*	Los alumnos buscan noticias en las que se mencione algún porcentaje y lo convierten a fracción.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) El docente propone una actividad (primera propuesta) que exigen recordar, ejemplificar, reflexionar e interpretar un tema (significados de fracción, específicamente: fracción de un número). b) Es una actividad “teórica” en el sentido que se busca conversar acerca del conocimiento más que aplicar directamente una operación y hallar un resultado. Son cuestiones ya trabajadas. c) Algunos alumnos tienden a resolver la cuestión cuando la pregunta se orienta a su significado. d) El docente preguntas a partir de las cuestiones surgidas (¿si quiero decir una cantidad…?) que busca relacionar dos formas de expresar una cantidad: como fracción de un número (indicada) o como número natural (directa). e) Los alumnos tienen dificultad para responder la pregunta. La orientación del docente permite aclarar la situación (aunque no a todos). f) Otras preguntas se orientan a situaciones generales a través de las cuales buscas reflexionar sobre las mismas. Código: – *Actividades de repaso.* – *Actividad reflexiva.*	a) El profesor empieza la clase recapitulando los tres significados de fracciones que ha trabajado en las clases anteriores: como parte, como división y como ‘operación’[285]. Los alumnos intervienen diciendo cuáles son los significados estudiados, qué quiere decir y dando ejemplos directos de cada uno. La última interpretación la expresan como “multiplicar y dividir”; al llegar a ésta, el profesor propone un ejemplo: “ $\frac{3}{4} de 24$ ” y… b) pregunta: “¿qué quiere decir tres cuartos de veinticuatro? c) Daniel expresa: “veinticuatro entre cuatro es igual a seis…”. En este momento el profesor interrumpe, recalcando que no es la respuesta correcta ya que no busca que respondan cuánto es sino qué significa; luego, pide a otro voluntario que explique lo que quiere decir la expresión. Eduardo dice: “veinticuatro entre cuatro, por tres”, sin dar ninguna respuesta parcial ni final. d) El profesor les plantea lo siguiente: “si quiero decir una cantidad, por ejemplo trece, ¿sería mejor así (escribe “13”) o de esta manera (señala la fracción de un número)?”. e) Los alumnos se quedan en silencio. El profesor vuelve a insistir señalando los ejemplos anteriores y expresando que “hay que suponer que aquí – señalando la fracción de un número – es trece”. Andrea B. responde que la primera es más clara f) El profesor piensa en la idea de Pablo que, aunque le resulta descabellada y haciéndoselo saber, la usa para preguntar “qué significa *pagar más*”, y “cuál es la diferencia entre coste y precio”, diferencia que el profesor, piensa, no tienen clara.

---

[285] La idea que trabajan en esta última interpretación es que la fracción sirve para multiplicar y dividir una cantidad.

a) La siguiente actividad se retoma la última de la clase anterior. Busca contextualizar la idea de fracción de un número o como operación en "situaciones". b) Los alumnos plantean situaciones específicas que involucra manipulación numérica concreta. Sin embargo, el maestro diferencia entre situaciones y problemas. La actividad genera el uso de cuestiones matemáticas (porcentajes) que el profesor aprovecha para su interrogación reflexiva. Se asocia el conocimiento con la idea de fracción y se trabaja a partir de ello. c) Los alumnos tienen dificultad para enmarcar dentro de otros contextos la fracción de un número. Código: – *Actividad de trasferencia de contexto matemático a contexto extramatemático.* – *Actividad de reflexión.*	a) A partir de las situaciones generadas con respecto al coste y precio de los productos, el profesor retoma la última actividad de la clase anterior, sobre pensar situaciones en las que esté involucrada la fracción como operación, y pregunta si pensaron en esas situaciones. b) Andrea B. plantea la siguiente situación: "tengo sesenta caramelos y quiero los seis décimos". El maestro pide más situaciones. Andrea P. expresa: "un pastel lo divido en seis trozos y cojo tres". El maestro queda en silencio, mira a sus alumnos y aclara que no quiere "problemas" como los que se les plantean, sino que digan en qué situaciones se pueden encontrar con estos casos. Pablo levanta la mano para intervenir y plantea la situación 'de la gasolina' expresando lo siguiente "En la gasolina. Por ejemplo, vas a comprar y te descuentan el 20%". El profesor aprovecha la intervención y se establece el siguiente diálogo entre él y el alumno:… ¿Cómo así el 20% de descuento?... Las dos décimas partes del total. c) El profesor pide a los alumnos que piensen otras situaciones… Sin embargo, los alumnos no logran enunciar ninguna sin ayuda alguna. El profesor se vale de la prensa que tienen en el aula para enunciar algunos titulares relacionados con los porcentajes y las fracciones. Entre las que se nombran están las compras, las encuestas. El profesor reparte la prensa para que cada alumno revise las noticias y dé ejemplos concretos. Los alumnos observan y mencionan algunas. El profesor va dando pistas para que los alumnos reconozcan en dichas noticias situaciones en las que están incluidas las fracciones (descuentos, compras: ¾ del precio. Encuestas: 2 de cada 3: 2/3 (razón). Materia grasa. Bolsa. Audiencia del canal. Pérdida de trabajo. ING Direct, consumo del coche: 6 litros cada 100 km, presupuesto, etc.).… Pocos alumnos son capaces de plantear sus propias situaciones, aún a partir de las presentadas (Nerea, Elba, Enrique y Lucía).

Sesión 3/Caso 1

Lunes, 18 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

Síntesis temática	Sesión observada
Inicio de sesión ▪ El docente inicia la clase retomando y recapitulando lo trabajado en la sesión anterior. Parte de una situación (como él le llama) en la que se involucra los temas matemáticos tratados. ▪ Los alumnos utilizan información matemática (fracciones, porcentajes) para expresar la idea de rebaja. ▪ Algunas ideas no son recordadas inmediatamente por los alumnos. Obsérvese que en la clase anterior se trabajó 50% asociado a un medio y en esta, los alumnos no evidencian inmediatamente esta relación. Hacen referencia a otras formas, incluso porcentajes. Otras ideas sí son recordadas (multiplicación por uno). ▪ El profesor se vale de “problemas” para recapitular el tema. ▪ Los alumnos logran asociar con la orientación directa del docente. ▪ El profesor propone analizar las fracciones obtenidas: cómo son. ▪ Los alumnos analizan las fracciones de acuerdo a los conocimientos previos (son equivalentes, es más sencilla, se puede simplificar, tiene menos partes).	Empieza la clase retomando el tema de las rebajas que se introdujo en la clase anterior, a propósito de las fracciones y maneras en las que éstas representan la función de ‘operación’. El profesor pregunta qué son las rebajas. La respuesta a la pregunta anterior genera comentarios entre los alumnos que, sin embargo no expresan en voz alta. El profesor espera un momento y luego pregunta directamente a María quien responde que para ella ‘las rebajas’ es “cuando una prenda de vestir está rebajada la mitad”. El profesor hace hincapié en la idea de mitad y pregunta cómo se representa esa “rebaja”. Los alumnos la expresan de diferente manera. Por ejemplo, Enrique a través de la fracción decimal 50/100, y Pablo mediante el porcentaje (cincuenta por ciento). Asmaa’ menciona “en letras” y el profesor lo escribe: “rebajan el cincuenta por ciento”[286]. En la pizarra se aprecian las tres formas, pues los dos primeros alumnos salieron a escribir las suyas. El profesor pide que observen las tres representaciones de una misma idea, haciendo hincapié en que las “ideas matemáticas también se pueden expresar en lenguaje común”, como el último caso; acto seguido pregunta otra manera de expresar “la mitad”. Los alumnos asocian la idea del “cincuenta por ciento” directamente con el porcentaje (50%) y, en fracciones, a través de la fracción decimal (50/100). En ningún caso lo expresan en términos de ½, que es a lo que el profesor intenta llegar; al menos los alumnos no logran expresarlo. Para que así sea, el profesor intenta darles pistas diciendo que dicha forma es una manera ‘muy fácil’ de representar dicha rebaja; sin embargo los alumnos no dan ninguna respuesta. El profesor intenta otra situación, que expresa a sus alumnos de la siguiente manera: “Imaginemos que quieres comerte la mitad de una pizza, ¿cómo lo expresarías?”. Se observa a los alumnos comentar entre sí. Parece ser que Enrique tiene la respuesta, pues hace un comentario a Iago, su compañero más cercano, e, inmediatamente, levanta la mano para intervenir, pero el profesor prefiere que sea Iago quien responda:

---

[286] Estas tres formas se trabajaron en la clase anterior.

▪ A partir de las situaciones, el profesor refuerza temas anteriores (…muchas veces es mejor trabajar con la fracción simplificada "porque en este caso solo tienes que hacer una división…). ▪ La forma inmediata de definir se basa en aspectos observables a través de los sentidos (respecto a porcentaje: "un número y un cero una rayita y un cero"). Códigos: – *Exploración de conocimientos sobre situaciones (rebajas) que involucran conocimiento matemático (porcentaje) y diferentes formas de representarlo.* – *Diálogo con preguntas directas y casos concretos que orientan la participación del estudiante hacia la relación entre porcentaje y fracción y hacia la comprensión de los mismos.* – *Orientación hacia el uso de las fracciones simples para un trabajo más directo.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la comprensión de los porcentajes.*	Profesor: ¿Cómo expreso que me quiero comer la mitad de la pizza? Iago: La parto por la mitad Profesor: ¿Cómo parto la pizza por la mitad? Iago: Así[287] Profesor: ¿Así, de cualquier manera? Iago: Lo parto y me como una parte Profesor: ¿Pero cómo lo parto? Iago: Lo divido y me como una parte Profesor: ¿Lo divido de cualquier forma? Iago: No Profesor: ¿Cómo sé yo que está por la mitad? Iago: Tienen que ser dos partes iguales Profesor: Expresa lo que has dicho como fracción Iago: Uno, rayita, dos" Profesor: Bien El profesor añade a las anteriores esta nueva forma de expresar la mitad y las compara; luego se detiene en las dos fracciones propuestas (cincuenta centésimos y un medio) y pregunta la relación entre dichas fracciones a lo que Lucía dice que son equivalentes. El profesor acepta la intervención; luego pregunta cuál de las dos formas es más sencilla. Los alumnos señalan que un medio. El profesor pregunta por la razón de su respuesta. Pablo dice que "porque tiene menos partes", mientras que Lucía añade que es "porque se puede simplificar". El profesor hace la simplificación respectiva a la fracción decimal y menciona que muchas veces es mejor trabajar

---

[287] Iago hace un dibujo en el aire, intentando representar la pizza a través de una circunferencia y trazando una línea recta en el interior.

	con la fracción simplificada "porque en este caso solo tienes que hacer una división". Enrique añade: "porque la multiplicación ya no es necesaria", refiriéndose a la multiplicación por el numerador. El profesor agrega "porque si multiplicamos por uno da el mismo número". El profesor deja de lado las fracciones y se posiciona en la forma de expresar la mitad mediante porcentajes; luego pregunta qué es eso de los porcentajes. Los alumnos no responden al profesor aunque comentan entre ellos, y el profesor les dice que lo piensen un poco. Andrea B. dice que es "un número y un cero una rayita y un cero". El profesor añade que "así se expresa un porcentaje" pero que no es lo que significa, añadiendo que quiere que le digan "lo que es". Los alumnos se quedan callados.
Inicio de clase ▪ El profesor retoma el tema de las rebajas y pregunta qué es. ▪ Los alumnos dan diferentes apreciaciones en torno al descuento. La mayoría da ejemplos de rebajas. ▪ Hay más respuestas afirmativas o negativas que explicativas. ▪ El profesor diferencia entre *precio* y *valor*. ▪ El profesor propone comprara diferentes formas de expresar las rebajas. ▪ Los alumnos dan sus diferentes apreciaciones e interpretaciones de las mismas. ▪ Los alumnos involucran cuestiones extra matemáticas en situaciones en las que involucran conocimiento matemático (se compra lo que se necesite, por ejemplo). ▪ El profesor explica las implicancias personales, familiares, económicas de las rebajas, más allá de la situación numérica. Códigos:	Retomando la idea que expresó María sobre qué eran las rebajas, el profesor le vuelve a preguntar a la misma alumna si se puede rebajar cualquier cosa. La alumna asiente con la cabeza y el profesor pide más opiniones. Algunos alumnos comentan que no, que solo se pueden rebajar los productos tales como: los alimentos, juguetes, ropa. Otros se quedan callados. El profesor escucha las intervenciones y anota en el encerado los ejemplos propuestos. El profesor hace referencia a dichos ejemplos recalcando que en todos ellos se pueden dar rebajas, luego vuele a preguntar qué es rebajar. Andrea B. manifiesta que "es el descuento que se hace de una cosa". Pablo opina que "es vender más barato". El profesor asiente las respuestas e insiste en que las rebajas disminuyen el precio de un producto, "aunque no su valor". Acto seguido les pregunta por otras maneras de expresar que hay esos descuentos o que se vende más barato. Los alumnos se miran entre sí, algunos comentan 'algo' que, sin embargo, no es escuchado. Una de las que comentan, Andrea B., indica que en los escaparates escriben la palabra "rebajas" sin precisar "números"; otros alumnos mencionan diferentes porcentajes (setenta por ciento, treinta por ciento, etc. Las fracciones quedaron de lado) y Pablo indica una manera distinta: Dos por uno. El profesor pide a los alumnos que expliquen qué significa esa expresión: "dos por uno", porque aclara que "dos por uno es dos". Los alumnos quieren explicar. Eduardo lo hace de la siguiente manera: "pagas uno y llevas dos". Enrique dice que también ha visto 3x2 y expresa qué quiere decir de la siguiente manera: "llevas tres y pagas dos". El profesor añade que en ambos casos llevas una prenda más y pregunta si son iguales las rebajas. Se escucha que algunos alumnos

– *Uso constante de lo ‘cotidiano’ para contextualizar el conocimiento matemático.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar al alumno hacia la expresión y análisis de diferentes formas (matemáticas) de expresar descuentos (contexto cotidiano) y su implicancia en las personas.* – *Participación selectiva de los estudiantes al mencionar diferentes formas de expresar una rebaja.*	expresan que sí, pero otros niegan la igualdad. El profesor insiste que expliquen cuando responden “sí” o “no”. A partir de los últimos ejemplos, el profesor vuelve a insistir en si es lo mismo “dos por uno que tres por dos”, ya que las respuestas fueron diversas. Para ello cambia de giro a la pregunta y cuestiona que si al comprar una u otra rebaja se gasta lo mismo. Los alumnos vuelven a expresar respuestas simples aunque encontradas: algunos dicen que sí y otros que no; sin embargo se genera el siguiente diálogo: Elba: Cuando compras dos por uno pagas uno y llevas dos… es como si uno te lo regalaran. Lucía: En el primero pagas el cincuenta por ciento de cada producto; pero en el otro, no. Pagas más. Andrea P: En el primero pagas uno y te llevas otro, pero en el segundo pagas dos y llevas uno. Profesor: Eso ya lo sabemos, pero ¿cuál conviene? Enrique: La que necesites Profesor: ¿Cómo “la que necesites”? Enrique: Porque puede ser que no necesites tres sino dos camisas Profesor: Muy bien. El profesor aprovecha y dice que muchas veces las épocas de rebajas contribuyen a que las personas gasten más de lo que habían presupuestado y que en lugar de ahorrar, se ve disminuido su capital, “incluso compran lo que no necesitan”. Los alumnos dan ejemplos de algunas rebajas que han comprado últimamente. Otros expresan que sus padres compran en las últimas semanas de rebajas “porque es más barato”.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Reincidencia en las cuestiones planteadas para generar otros casos.	El profesor pide que mencionen otras maneras de comprar más barato, expresiones que indiquen que el precio ha bajado. Andrea P. explica que en el mercado ella ha visto letreros en los que dice “antes tal precio y ahora tal otro”. El profesor asiente y pide que se explique mejor, sin embargo

▪ Los alumnos expresan diferentes formas. ▪ Reflexión sobre las distintas formas de expresar una situación a partir de casos concretos. Códigos: – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar al alumno hacia la expresión y análisis de diferentes formas (matemáticas) de expresar descuentos (contexto cotidiano) (otros casos).* – *Participación selectiva de los estudiantes al mencionar diferentes formas de expresar una rebaja.*	la alumna se queda en silencio. El profesor pone un ejemplo que la alumna acepta como un caso específico de lo que ella ha expresado: “por ejemplo, un par de zapatos en épocas normales puede costar sesenta y cinco euros y en las rebajas cincuenta y tres”. El profesor pregunta si en este caso, se indica el porcentaje. Los alumnos dicen que no. El profesor retoma los ejemplos brindados por los alumnos como ideas que expresan rebajas, luego comenta que dichos ejemplos son distintas maneras de expresar una rebaja y pregunta “si es lo mismo en cualquier caso”, situándose en dos ejemplos concretos: “rebajamos el 50%” y “lleva tres y pagas dos”. Pablo dice que “tres por dos es igual al treinta y tres por ciento” por lo que se rebaja menos que en el caso anterior. El profesor pide que explique y el alumno dice que “al comprar tres y pagar dos te están descontando el 33%”. El profesor le pide que lo explique mejor. El alumno se queda en silencio, luego dice que ambas expresiones “son equivalentes y que es lo mismo”. El profesor no comenta.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ El docente continúa la actividad de relacionar diferentes rebajas expresadas en distintas formas, a fin de evaluar cuál, económicamente, es mejor. ▪ El profesor recalca el valor de las rebajas, más allá del aspecto numérico de las mismas. Códigos: – *Planteamiento de casos concretos sobre rebajas para el análisis por parte de los alumnos. Orientación a través de la pregunta directa.* – *Participación selectiva de los estudiantes al interpretar las diferentes formas de descuento (interpretaciones numéricas y situacionales).* – *Reflexión sobre la situación en torno a las implicancias generales de las rebajas.*	El profesor cambia la situación y pregunta qué pasa si se quiere comprar una camisa y en una tienda la ‘rebajan al 50%’ y en otra indican que “paga una y lleva dos”. Lucía vuelve a expresar que en el primer caso paga la mitad por la camisa y que en el segundo no, ya que “tiene que comprar una pagando todo” para que lleve la segunda. Pablo dice que en realidad no paga la mitad, “paga todo” y que la segunda “se la regalan”. Sintetizando las intervenciones anteriores, el profesor hace una distinción entre ambos casos, pero antes expresa que las ideas de los alumnos Lucía y Pablo son acertadas: Profesor: Es cierto que en los dos casos hay ofertas, pero cada una es distinta. Pablo: Dos por uno es mejor que tres por dos porque te descuentan más Profesor: ¿Y cincuenta por ciento y dos por uno? Enrique: No es lo mismo porque para que te den la otra camisa tienes que pagar la primera. No hay descuento. Si no compras una no hay oferta Iago: Pero al llevar dos es como si pagaras la mitad por cada una Enrique: Pero tienes que llevar la primera para que te den la otra. Iago: Llevas dos

	Enrique: Pero si no necesitas dos puedes comprar la del cincuenta por ciento porque así pagas la mitad por una… y gastas menos. Profesor: Efectivamente, algunas ofertas exigen que compres más de lo que habías pensado… y gastas más. En el primer caso cada camisa tiene un descuento y yo puedo comprar una o más pero en el segundo ¿cuántas tengo que comprar para acceder a la oferta?” Lucía: En dos por uno tengo que comprar una. Y en tres por dos, tienes que comprar dos Profesor: Por lo que si compro una no accedo a la oferta. Hay que comprar más”. ¿Podemos decir que es lo mismo?” Enrique: No. Otros alumnos secundan la respuesta de Enrique. El profesor concluye que en el segundo caso termina gastando más de lo que pensaba porque lo que él quería era comprar una camisa y no más. Iago añade “pero tendría más”, y el profesor agrega: “pero no necesito más”. El profesor pregunta si siempre hay rebajas o sólo en unas épocas determinadas. Los alumnos dicen que hay unas épocas. Andrea B. da una explicación: “por ejemplo, hay épocas en el año como ésta donde te rebajan los precios, pero también hay otras en otras épocas, por ejemplo en el verano”.
Final de la clase ▪ El profesor continúa con el tema de las rebajas, el comportamiento y sus consecuencias. ▪ Los alumnos recuerdan casos específicos asociados a lo que el profesor trata de expresar. ▪ La clase termina. Código: – *Reflexión sobre la situación en torno a las implicancias generales de las rebajas.*	El profesor pregunta por el comportamiento de la gente durante este periodo a lo que los alumnos responden que es muy movido “porque hay mucha gente en las tiendas”. El profesor pregunta dónde más hay rebajas. Enrique menciona que en el supermercado. El profesor comenta que también en el supermercado se gasta más de lo que se había pensado, incluso en productos que no están rebajados y que “ni se tenía pensado comprar”. El profesor explica que muchas veces son estrategias de mercado “poner los productos rebajados al final de tal manera que cuando llegues a ellos ya has visto otros productos que decides comprar” en ese momento. Además, añade, que hay que pagar por la gasolina del coche, el estacionamiento, el tiempo, etc. Se concluye que la gente muchas veces compra sin necesitar lo que adquiere, sólo porque está rebajado y que generalmente se termina gastando más de lo que se necesita. Los alumnos escuchan atentamente

– *Diálogo con preguntas directas que orientan a la reflexión en torno al tema de las rebajas.* – *Sin tarea para cada.* – *Clase cerrada (actividad finalizada).*	y comentan entre sí. Elba interviene diciendo que “un día mi madre me fue a comprar un libro y me compró una falda”. La clase termina.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) El docente propone actividades (primera propuesta) que exigen recordar e interpretar un tema (rebajas). b) Los alumnos responden con ideas concretas. c) El profesor se vale de las respuestas para encaminar la orientación de la clase (tratamiento matemático de la situación). d) Los alumnos dan diferentes formas de expresar la idea de mitad. e) El docente hace uso de contextos extramatemáticos y asocia los conocimientos matemáticos involucrados. f) Otra cuestión surgida es el uso de porcentajes a partir de lo cual el docente pregunta por esto. Código: – *Actividades de repaso (de un tema ya trabajado que implica usos e ideas).*	a) Empieza la clase retomando el tema de las rebajas que se introdujo en la clase anterior, a propósito de las fracciones y maneras en las que éstas representan la función de ‘operación’. El profesor pregunta qué son las rebajas. b) … las rebajas’ es “cuando una prenda de vestir está rebajada la mitad”… c) El profesor hace hincapié en la idea de mitad y pregunta cómo se representa esa “rebaja”. d) Los alumnos la expresan de diferente manera. Por ejemplo, Enrique a través de la fracción decimal 50/100, y Pablo mediante el porcentaje (cincuenta por ciento). Asmaa’ menciona “en letras” y el profesor lo escribe: “rebajan el cincuenta por ciento”[288]. En la pizarra se aprecian las tres formas, pues los dos primeros alumnos salieron a escribir las suyas. El profesor pide que observen las tres representaciones de una misma idea, haciendo hincapié en que las “ideas matemáticas también se pueden expresar en lenguaje común”, como el último caso; acto seguido pregunta otra manera de expresar “la mitad”. e) El profesor intenta otra situación, que expresa a sus alumnos de la siguiente manera: “Imaginemos que quieres comerte la mitad de una pizza, ¿cómo lo expresarías?”. Se observa a los alumnos comentar entre sí… El profesor añade a las anteriores esta nueva forma de expresar la mitad y las compara; luego se detiene en las dos fracciones propuestas (cincuenta centésimos y un medio) y pregunta la relación entre dichas fracciones a lo que Lucía dice que son equivalentes. f) El profesor deja de lado las fracciones y se posiciona en la forma de expresar la mitad mediante porcentajes; luego pregunta qué es eso de los porcentajes…. Andrea B. dice

---

[288] Estas tres formas se trabajaron en la clase anterior.

	que es “un número y un cero una rayita y un cero”… Andrea B. manifiesta que “es el descuento que se hace de una cosa”. Pablo opina que “es vender más barato”.
a) La siguiente actividad, busca que los alumnos expresen varias maneras de expresar una rebaja y los usos de la información matemática para ello. b) Los alumnos indican otras formas usando lenguaje matemático. c) A partir de la actividad se reflexiona sobre las diferentes rebajas (como ocurre en la actividad anterior). d) Esta actividad orienta para reflexionar sobre el comportamiento de la gente en tiempo de rebajas. Código: – *Actividad de reflexión (formas de expresar rebajas).* – *Actividad de reflexión (Comportamiento).*	a) El profesor pide que mencionen otras maneras de comprar más barato, expresiones que indiquen que el precio ha bajado. b) Andrea P. explica que en el mercado ella ha visto letreros en los que dice “antes tal precio y ahora tal otro”. El profesor asiente y pide que se explique mejor, sin embargo la alumna se queda en silencio. El profesor pone un ejemplo que la alumna acepta como un caso específico de lo que ella ha expresado: “por ejemplo, un par de zapatos en épocas normales puede costar sesenta y cinco euros y en las rebajas cincuenta y tres”. El profesor pregunta si en este caso, se indica el porcentaje. Los alumnos dicen que no. c) El profesor retoma los ejemplos brindados por los alumnos como ideas que expresan rebajas, luego comenta que dichos ejemplos son distintas maneras de expresar una rebaja y pregunta “si es lo mismo en cualquier caso”, situándose en dos ejemplos concretos: “rebajamos el 50%” y “lleva tres y pagas dos”… d) El profesor pregunta por el comportamiento de la gente durante este periodo… … los alumnos responden que es muy movido “porque hay mucha gente en las tiendas”… Elba interviene diciendo que “un día mi madre me fue a comprar un libro y me compró una falda”.

Sesión 4/Caso 1

Martes, 19 de febrero de 2008. Hora: 09.55 – 10.50. Colegio A

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ El docente inicia la clase con la recapitulación del tema anterior, en la que incluye diferentes aspectos asociados a las rebajas y sus formas de expresarla.	El profesor retoma la idea de las rebajas trabajada en la clase anterior y las preguntas sobre las que giraron las intervenciones de los alumnos: qué son las rebajas, qué, cuándo y cómo se rebajan los productos. En esta sesión, a la pregunta sobre qué son las rebajas, Enrique expresa que rebaja es “la venta de un producto por debajo de su precio”, por su parte Elba menciona que “se puede rebajar cincuenta, sesenta, veinte por ciento en un producto”. Raúl añade que “para rebajar un

▪ Los alumnos intervienen en función de las preguntas del docente. ▪ Las ideas se van consolidando en esta fase y surgen otras nuevas, expuestas por los alumnos, asociadas al tema de rebajas. ▪ El profesor reflexiona sobre las ideas expuestas y los alumnos comentan y expresan sus interpretaciones. ▪ El profesor solicita situaciones en las que se pueden concretar dichas ideas y los alumnos piensan en algunas dando ejemplos. ▪ Esta fase de inicio demandó casi todo el tiempo de la clase; no obstante, la participación de los alumnos fue fluida, mostrando interés por participar. Código: – *Reflexión sobre el tema de las rebajas a través del diálogo entre docentes y estudiantes.* – *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre el tema de las rebajas.* – *Planteamiento de otras formas de representar rebajas (diferentes a las trabajadas en la sesión anterior).* – *Reflexión en torno a las diferentes formas de expresar rebajas a través del diálogo entre docente y estudiantes.*	producto hay que disminuir su precio”, mientras que Andrea comenta que “esta es una época de rebajas”. Los alumnos siguen expresando ideas sobre el tema en cuestión; sin embargo, entre todas las respuestas, sobresale una que llama la atención del profesor ya que es una idea que, hasta el momento, ningún alumno había expresado y que tiene relación con su costo: “tienen que ser caros”, expresada por Pablo, quien afirma que las rebajas solo se dan en los productos “caros”. Ante la respuesta, los alumnos miran extrañados a su compañero. Una de las alumnas, Andrea P., comenta a Asmaa’ que “no es verdad”. El profesor se cuestiona lo que afirma Pablo y pregunta a la clase si creen que, efectivamente, los productos tienen que ser caros para que se rebajen sus precios. Los alumnos se miran entre sí, algunos intercambian palabras, pero no las expresan a la clase, sino que vuelven a mirar al profesor, en silencio. Al respecto, el profesor pregunta: “¿qué es caro?”. Pablo, quien expresó la idea responde que ‘caro’ es “lo que cuesta mucho”. El profesor le pide que se explique y el alumno completa la frase de la siguiente manera: “lo que cuesta mucho para lo que es”. El profesor se vale de lo expresado por Pablo y pregunta a los alumnos si están de acuerdo con la intervención de su compañero, es decir, si comparten la idea. Dirigida por el profesor, en la clase se genera una discusión entre cuándo un producto es caro y cuando es barato y de qué depende. El profesor observa a sus alumnos intercambiar ideas entre sí, algunos se dirigen al profesor comentando que “muchos productos se rebajan, no solo los productos caros”. Centrando la atención de todos sus alumnos, el profesor les pide que piensen en un único producto y su precio. Al no escuchar ningún comentario, el profesor les sugiere que piensen en una prenda específica: el jersey, y le dice, concretamente, a Elba que diga cuánto puede costar un producto como ese; esta alumna responde que puede costar “diecinueve euros”. Luego el profesor pregunta si han visto algún otro jersey con un precio distinto. Enrique dice que él ha visto uno de 48 euros, en una tienda de marca. El profesor comenta que entre los dos precios hay bastante diferencia, y luego vuelve a preguntar a Elba si le parece caro el jersey que ella ha visto. La alumna se queda en silencio por un momento y luego responde que depende; el profesor pregunta la razón. En esta oportunidad, los alumnos quieren responder y entre todas las respuestas, destacan dos: la marca del producto, expresada por Lucía y la calidad del mismo, mencionada por Enrique. El profesor reflexiona sobre los dos casos y expresando el primero pregunta por qué una marca puede vender caro y la misma alumna responde que porque se vende mucho. En el segundo caso, el alumno respondió que la calidad dependía del material con el que se fabricaba, sin dar ningún

ejemplo. El profesor pregunta qué marcas conocen que son caras. Los alumnos mencionan marcas de coches, básicamente. El profesor afirma que, efectivamente, las marcas que habían expresado eran de coches “que es un lujo tener”. El profesor asocia las ideas de Lucía y Enrique y expresa que los productos de marcas reconocidas y caras muchas veces se preocupan por conseguir los mejores materiales para elaborarlos, aunque algunas veces son más caros porque tienen más funciones. Raúl añade: “mientras más nos simplifiquen la vida, mejor”.

Entre las razones del valor monetario de un producto, Pablo expresa que puede costar mucho porque cuesta hacerlo, es decir, “puede ser caro si cuesta hacerlo”. El profesor recuerda esta idea y pregunta ejemplos de esta situación. Los alumnos mencionan productos como los aviones, televisores, coches, etc. El profesor afirma que dichos productos son ejemplos correctos de lo que se les pide pero añade que hay otros que, aunque las personas no los elaboran directamente, son difíciles de acceder a ellos; por ello, el profesor les pide que piensen en otros productos, diferentes a los mencionados, que pueden ser caros por esta última razón.

Al especificar cierta información sobre dichos “productos”, los alumnos se miran entre sí e intercambian ideas. Se escucha que un par de alumnos comenta que “hay productos del supermercado que son caros”. El profesor destaca que en su comunidad, específicamente, existen esos productos. Los alumnos lanzan otra serie de productos como televisores con plasma, expresado por Alba, u otros. El profesor insiste que no se refiere a esos productos, sino a los que produce su comunidad. Los alumnos mencionan algunos productos naturales: patatas, pulpo, etc. Entre todas las ideas, el profesor se queda con la de los mariscos, expresada por Enrique, aunque le pide especificar ya que los mariscos son variados. Ningún alumno menciona el caso que el profesor espera, por lo que este empieza a dar algunas pistas: “los encontramos adheridos a las rocas por lo que es muy difícil acceder a ellos, incluso las personas pueden poner en riesgo su vida”. Los alumnos siguen pensando aunque, aparentemente, saben a qué se refiere el profesor pero no lo expresan:

Enrique: Sí, ya sé… están en las rocas

Profesor: Sí, ¿cómo se llaman?

Enrique: No recuerdo, pero sí sé. Son así como…

Pablo: Ya sé, yo los he comido

Profesor: Es muy difícil acceder a ellos porque se recogen manualmente en las rocas. Las personas ponen en peligro su vida para hacerlo… ¿Recuerdan su nombre?

Los alumnos no recuerdan exactamente cómo se llaman y es el profesor quien lo dice. El profesor explica la razón de porqué es difícil acceder a los percebes y el porqué de su precio.

El profesor retoma el tema de las rebajas. Les recuerda que las rebajas afectan a casi todos los productos, independientemente de su precio, luego escribe en el encerado ejemplos de cómo aparecen las rebajas en los diferentes establecimientos incidiendo en que son casos que los mismos alumnos han mencionado en las sesiones anteriores. Lo que aparece a continuación es lo que el profesor escribió en el encerado y en ese orden:

50%

2x1

Antes: 65

Después de escribir estos ejemplos, que fueron propuestos en la clase anterior, pregunta por otras formas en que aparecen los productos a menos precio que el inicial. Los alumnos intercambian miradas, y algunos ciertas palabras, pero sus comentarios no son expresados al profesor. Como los alumnos no expresan otras formas, el profesor escribe en el encerado la palabra: ¡¡¡liquidación!!!, entre signos de admiración, y pregunta si han visto esta palabra. Los alumnos responden afirmativamente y Andrea B. añade la palabra “total” (liquidación total). El profesor asiente y pregunta a qué hace referencia esta idea; la misma alumna responde que es cuando la tienda va a cerrar. El profesor completa la idea diciendo que la tienda intenta vender todo lo que tiene y “todos sus productos están rebajados a precios muy por debajo de su precio original”. Luego escribe otra forma de expresar rebajas: “Todo a 12 €”. Los niños comentan que también la han visto.

De todas las ideas y formas expuestas, el profesor pregunta si hay diferencia, si todas aparecen en la misma época o en otras épocas. Los alumnos expresan que las rebajas aparecen en determinadas épocas (final de temporada). Luego pregunta si el segundo caso (2x1, 3x2), también. Algunos alumnos responden afirmativamente y otros, no, incidiendo en que aparecen

	todo el año. El profesor pregunta en qué comercios, básicamente, aparece la segunda forma, y Andrea B. toma la palabra y responde que esa forma de presentar ofertas la ha visto en los supermercados. El profesor intenta que expresen “en los hipermercados” diciendo que no todos los supermercados lanzan dichas ofertas todos los días. Luego pregunta cómo se le llama a este tipo de venta y que de alguna manera lo ha ido expresando. Los alumnos responden: ofertas. El profesor pregunta la razón por la que se ofrecen ese tipo de ofertas y los alumnos contestan que para que la gente compre más del producto. Con las explicaciones del profesor se concluye que otra de las razones es para que compren más productos, incluso otros que no necesitaba comprar ya que las ofertas siempre se colocan “al fondo” del establecimiento.
Inicio de clase ▪ El profesor plantea situaciones en las que pide comparar dos formas de expresar rebajas. ▪ El profesor plantea un ejemplo más sencillo sobre porcentaje de un número. ▪ El profesor plantea otros ejemplos. Códigos: – *Planteamiento de casos concretos ‘descontextualizados’ sobre porcentajes en los que se aplica fracciones.* – *Participación de los estudiantes en la resolución de los casos concretos.* – *Planteamiento de un caso ‘nuevo’.*	El profesor retoma la forma de expresar las rebajas en porcentaje y aquélla en la que dan los precios (original y rebajado) y pregunta qué diferencias hay entre ambos. Para ello escribe los casos siguientes: Antes: 60 € Zapatos: 60 € Eduardo expresa que, en el primer caso, sabes cuánto hay que pagar y en el segundo no y hay que hallarlo para saber. El profesor pregunta en cuál de los dos paga más y cómo saberlo. Alba responde 40/100, señalando el porcentaje. El profesor propone un ejemplo más sencillo: 50% de 80. Los alumnos responden inmediatamente 40. El profesor pregunta: “¿qué significa eso de 50%?”. Los alumnos responden “la mitad”, entonces el profesor pregunta: “Si el 50% indica la mitad, ¿qué hay que hacer para hallarlo?” Enrique y Pablo responden inmediatamente: “dividir entre dos”, aunque otros alumnos también levantan la mano para responder. El profesor pregunta por otra forma de expresar la mitad y los niños responden ½ (esta idea se trabajó en la clase anterior). Luego, el profesor propone el 25% de 80. Enrique responde que es 20. El profesor pregunta cómo sabe que es 20, además le motiva a explicar cómo ha hallado rápidamente dicho porcentaje. El alumno responde que 25 es la cuarta parte por lo que divide 80 entre 4. El profesor asiente la intervención de Enrique y reafirma que el veinticinco por ciento es la cuarta parte del cien por ciento, es decir del

	todo. Luego, el profesor pregunta por el 10% de 80. Verónica dice que es 8 y al preguntarle lo que ha hecho no sabe explicarlo. Entonces el profesor pregunta al resto de la clase: Profesor: ¿Cuánto es el diez por ciento de ochenta? Enrique: Ocho Profesor: ¿Es correcto lo que ha dicho Verónica? Lucía: Sí Enrique: Divides entre diez porque el diez por ciento es la décima parte Profesor: Recuerden que los porcentajes están sobre cien, por eso el veinticinco por ciento es la cuarta parte ya que veinticinco es la cuarta parte de cien y diez, la décima El profesor propone otras situaciones de porcentaje que se pueden hallar directamente, es decir aplicando una división únicamente. Los alumnos van asociando dichos porcentajes con "las partes de cien" que indican: veinte por ciento con la quinta parte. El cinco por ciento cuesta más a los alumnos, sin embargo llegan a expresar que es "la veinteava parte de cien". Para finalizar, el profesor propone el 37% de 80…
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ El profesor plantea hallar el porcentaje de una cantidad que tiene una particularidad distinta a los casos anteriores, generando una pausa en la acción de los alumnos. ▪ Uno de los alumnos resuelve aplicando una estrategia distintas (sin embargo, este alumno sabe y ha aplicado en otras situaciones el procedimiento general, asociado a fracción de un número). ▪ El docente pregunta a los alumnos sobre el método aplicado por el alumno. ▪ Los alumnos intercambian ideas y uno de ellos expresa su opinión.	…. Algunos alumnos intentan sumar varias veces dicha cantidad para saber cuántas veces está contenido en cien, otros no lo hacen porque saben que no es exacto. Pablo da una respuesta y expresa que "es menos de treinta". Al preguntarle el profesor el porqué de su respuesta, Pablo explica que "el diez por ciento es ocho, el veinte por ciento es dieciséis; el treinta, veinticuatro y el cuarenta por ciento es treinta y dos. Van de ocho en ocho", luego añade: "Como treinta y siete es mayor que treinta por ciento y menor que cuarenta es como treinta ya que se acerca al cuarenta". El profesor y los alumnos escuchan a Pablo, quien escribe en el encerado su explicación, luego el profesor asiente la intervención del alumno y expresa que, efectivamente, puede ser treinta pero que el procedimiento no le da la cantidad exacta. Pablo expresa que puede seguir dividiendo.

▪ El profesor valida las situaciones en las que el método es pertinente. Códigos: – *Reflexión en torno a la forma de expresar y resolver el porcentaje 'nuevo'.* – *Diálogo en torno a los planteamientos de los estudiantes.*	El profesor pregunta por el método de Pablo. Enrique expresa que es muy largo y no dice cuánto es, sin embargo el profesor añade que puede aplicarse si se pide el porcentaje aproximado. Luego pregunta qué otro camino se puede seguir. Los alumnos no contestan por lo que el profesor pregunta cómo se puede expresar dicho porcentaje en fracción. En general, los alumnos transforman 37% en la fracción 37/100. El profesor les recuerda que el cincuenta por ciento se expresa como cincuenta sobre cien pero también como un medio, de ahí que se utilice un medio porque es más práctico; luego establece la relación en el encerado y escribe lo siguiente: $\frac{50}{100}$ de 80 = 40, $\frac{1}{2}$ de 80 = 40. Enrique levanta la mano y dice que se divide entre dos: "divides ochenta entre dos". El profesor pregunta qué pasa con el uno y el alumno responde que se multiplica pero que como es uno no es necesario.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ El profesor consolida la idea trabajada: dos formas de hallar porcentaje o fracción de número: aquellas en las que el numerador es 1, se aplica a división directa y aquellas en las que el numerador no es uno, se aplica las dos operaciones (división y multiplicación). ▪ Los alumnos trabajan de acuerdo a su ritmo. Códigos: – *Síntesis final del docente sobre la fracción como operador en el contexto de los porcentajes.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la sistematización del docente.*	El profesor les recuerda que una de las interpretaciones de las fracciones era como multiplicación y división, recalcando las operaciones en ese orden, y les dice que dicha interpretación va a ser importante para hallar porcentajes como el que les ha propuesto, en los que es difícil aplicar solo una división: "En estos casos, las fracciones no se pueden simplificar y el numerador va a ser un número mayor que uno, por lo que hay que efectuar la multiplicación". Pablo añade que hay que multiplicar cincuenta por ochenta y dividirlo entre cien... "es cuarenta". El profesor asiente y Asmaa', quien ha realizado lo que Pablo ha expresado se sorprende de comprobar su validez.
Final de la clase ▪ El profesor no propone ninguna actividad para la casa. Códigos:	No hay tiempo para más y la sesión termina.

– *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Sesión observada (fragmentos)**
Durante la sesión hay tres actividades *macro*, que generan otras actividades[289]. a) La primera macro actividad (pregunta sobre qué son las rebajas) busca que los alumnos expresen diferentes ideas sobre este concepto, el mismo que está asociado a cantidades expresadas de diferente manera. Los alumnos conceptualizan la idea a partir de sus experiencias previas e incluyen cuestiones matemáticas en sus planteamientos. b) El profesor genera otras preguntas a partir de la primera que implican reflexión sobre las cuestiones generales planteadas. Código: – *Actividad de repaso (de un tema ya trabajado).* – *Actividad de reflexión (de una situación).*	a) El profesor retoma la idea de las rebajas trabajada en la clase anterior y las preguntas sobre las que giraron las intervenciones de los alumnos: qué son las rebajas, qué, cuándo y cómo se rebajan los productos. En esta sesión, a la pregunta sobre qué son las rebajas… Enrique expresa que rebaja es “la venta de un producto por debajo de su precio”, por su parte Elba menciona que “se puede rebajar cincuenta, sesenta, veinte por ciento en un producto”. Raúl añade que “para rebajar un producto hay que disminuir su precio”, mientras que Andrea comenta que “esta es una época de rebajas”. Los alumnos siguen expresando ideas sobre el tema en cuestión… las rebajas solo se dan en los productos “caros”. b) El profesor se cuestiona lo que afirma Pablo *y pregunta a la clase si creen que, efectivamente, los productos tienen que ser caros para que se rebajen sus precios*. Los alumnos se miran entre sí, algunos intercambian palabras, pero no las expresan a la clase, sino que vuelven a mirar al profesor, en silencio. Al respecto, el profesor pregunta: *“¿qué es caro?”*. Pablo, quien expresó la idea responde que ‘caro’ es “lo que cuesta mucho”. *El profesor le pide que se explique* y el alumno completa la frase de la siguiente manera: “lo que cuesta mucho para lo que es”. El profesor se vale de lo expresado por Pablo y *pregunta a los alumnos si están de acuerdo con la intervención de su compañero*, es decir, si comparten la idea. Dirigida por el profesor, en la clase se genera una discusión entre cuándo un producto es caro y cuando es barato y de qué depende.
a) La segunda macro actividad (¿De qué otras formas aparecen los productos a menos	a) Después de escribir estos ejemplos, que fueron propuestos en la clase anterior, *pregunta por otras formas en que aparecen los productos a menos precio que el inicial*. Los

---

[289] Consideramos que una “actividad” es una propuesta de acción o quehacer del docente para que el alumno intervenga y actúe, cree, forme, invente, conciba, imagine, elabore, descubra, produzca, etc. La respuesta puede ser directa (como en la mayoría de los casos expuestos) o mediante la aplicación de algún procedimiento particular, operación matemática; actividad matemática propiamente.

precio que el inicial?) indaga la capacidad del estudiante para identificar otras formas de expresar una idea. A través de esta pregunta: Los alumnos tienen dificultad para expresar la idea planteada; sin embargo, el docente propone un ejemplo que permite que el estudiante amplíe el campo de ejemplos. b) El docente reflexiona sobre los ejemplos propuestos. Código: – *Actividad reflexión.*	alumnos intercambian miradas, y algunos ciertas palabras, pero sus comentarios no son expresados al profesor. b) De todas las ideas y formas expuestas, el profesor *pregunta si hay diferencia*, si todas aparecen en la misma época o en otras épocas. Los alumnos expresan que las rebajas aparecen en determinadas épocas (final de temporada). Luego *pregunta si el segundo caso (2x1, 3x2), también*. Algunos alumnos responden afirmativamente y otros, no, incidiendo en que aparecen todo el año. *El profesor pregunta en qué comercios*, básicamente, aparece la segunda forma, y Andrea B. toma la palabra y responde que esa forma de presentar ofertas la ha visto en los supermercados. El profesor intenta que expresen “en los hipermercados” diciendo que no todos los supermercados lanzan dichas ofertas todos los días. Luego pregunta cómo se le llama a este tipo de venta y que de alguna manera lo ha ido expresando. Los alumnos responden: ofertas. *El profesor pregunta la razón por la que se ofrecen ese tipo de ofertas* y los alumnos contestan que para que la gente compre más del producto. Con las explicaciones del profesor se concluye que otra de las razones es para que compren más productos, incluso otros que no necesitaba comprar ya que las ofertas siempre se colocan “al fondo” del establecimiento.
a) La siguiente actividad se centra en resolver una cuestión matemática directamente: porcentajes. Los alumnos aplican estrategias operativas para resolver directamente a través de su relación con fracciones simples (o unitarias). b) El profesor pide a sus alumnos que reflexionen sobre lo realizado. Se considera una actividad de aplicación porque este tipo de situaciones se han venido trabajando, por lo que su solución es más inmediata (relacionado directamente con las fracciones unitarias). Código: – *Actividad de aplicación operativa.*	a) … El profesor pregunta en cuál de los dos paga más y cómo saberlo. Alba responde 40/100, señalando el porcentaje. El profesor propone un ejemplo más sencillo: 50% de 80. Los alumnos responden inmediatamente 40. b) El profesor pregunta: “¿qué significa eso de 50%?”. Los alumnos responden “la mitad”, entonces el profesor pregunta: “Si el 50% indica la mitad, ¿qué hay que hacer para hallarlo?” Enrique y Pablo responden inmediatamente: “dividir entre dos”, aunque otros alumnos también levantan la mano para responder. El profesor pregunta por otra forma de expresar la mitad y los niños responden ½ (esta idea se trabajó en la clase anterior). Luego, el profesor propone el 25% de 80. Enrique responde que es 20. El profesor pregunta cómo sabe que es 20, además le motiva a explicar cómo ha hallado rápidamente dicho porcentaje. El alumno responde que 25 es la cuarta parte por lo que divide 80 entre 4. El profesor asiente la intervención de Enrique y reafirma que el veinticinco por ciento es la cuarta parte del cien por ciento, es decir del todo. Luego, el profesor pregunta por el 10% de 80.

– *Actividad de reflexión.*	
a) La tercera macro actividad (hallar el 37% de 80) busca que los alumnos ideen una estrategia que permita hallar rápidamente este porcentaje, puesto que la estrategia de transformar a una fracción simple no se aplica. Se espera que los estudiantes configuren una forma de hallar el porcentaje puesto que su transformación en fracción unitaria no es posible. Los alumnos no relacionan directamente el porcentaje con fracción de un número. El docente se orienta a la reflexión de la propuesta de solución. El planteamiento de las actividades se acopla a la situación que contextualiza (surgen de ellas). Código – *Actividad de aplicación operativa* – *Actividad de reflexión*	a) Para finalizar, el profesor propone el 37% de 80… …. Algunos alumnos intentan sumar varias veces dicha cantidad para saber cuántas veces está contenido en cien, otros no lo hacen porque saben que no es exacto.

Sesión 5/Caso 1

Miércoles 20 de febrero de 2008. Hora: 9:00 – 9:55. Colegio A

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ El profesor plantea a los alumnos una pregunta: qué hacer para saber cuánto se ha rebajado.	Continuando con el tema de las rebajas, el profesor retoma la última parte de la sesión anterior y pregunta qué hacer para saber cuánto se ha rebajado en un producto. El tema de la definición no se retoma. Los alumnos levantan la mano, pero es Elba quien responde: “se divide y se multiplica”. El profesor pregunta qué se divide y qué se multiplica. Lucía expresa que hay que

- Los alumnos responden a la propuesta del docente. Una de ellas responde la pregunta. - La respuesta es directa; sin embargo, hemos visto que surge de asociar la rebaja con el porcentaje, este con las fracciones y esta con fracción de un número. - "lo que resulta de multiplicar la cantidad por el numerador y dividir el resultado por el denominador… es el porcentaje. - En este inicio de la sesión se produce la Definición de la estrategia (procedimiento para hallar porcentajes). Código: – *Reflexión 'operativa' en torno a las rebajas.* – *Participación selectiva de los estudiantes sobre la forma cómo se halla una rebaja (expresada en porcentaje).*	"multiplicar la cantidad por el numerador y dividir el resultado por el denominador… Ese es el porcentaje".
Inicio de clase - El profesor propone directamente una actividad: hallar porcentajes. El profesor construye la actividad con la participación de los alumnos, a través de sus experiencias con la situación en la que se enmarca (rebajas). - Los alumnos plantean soluciones principalmente usando el procedimiento recordado; algunos alumnos intentan simplificar la fracción obtenida antes de operar (multiplicar y dividir).	El profesor confirma la intervención de la alumna e inmediatamente propone a toda la clase una actividad: "Vamos a hallar diferentes porcentajes y los vamos a escribir en este folio". El profesor entrega un folio a cada alumno y les pide que dibujen un cuadro, "como el que voy a dibujar", y pongan los siguientes datos: Precio, % y Rebaja, escribiendo en el encerado los mismos. El profesor espera que los alumnos dibujen el cuadro en su folio y para completarlo, se dirige a tres alumnos (Lucía, Elba y Iago) preguntándoles qué fue lo último que han comprado, cuánto les ha costado y si lo compraron en época de 'rebajas'. Lucía expresa que le compraron un libro, Elba un pantalón y Iago una sudadera[290]. Los tres alumnos coincidieron que lo que habían comprado no fue adquirido en época de rebajas. El profesor anota los datos que expresan sus alumnos quedando el cuadro de la siguiente manera:

---

[290] Según la RAE: f. Jersey o chaqueta deportivos, a veces con capucha.

- Si bien el trabajo es similar, los cuadros se interpretan de diferente manera.
- En esta parte de la clase se da la Propuesta de actividad y desarrollo.

Códigos:

- *Planteamiento de casos concretos (contextualizados en situaciones 'cotidianas') sobre rebajas con participación de los estudiantes en su elaboración.*
- *Participación selectiva de los estudiantes en el planteamiento de los casos concretos.*
- *Participación total de los estudiantes en la resolución de los porcentajes.*
- *Dificultad para reconocer el precio final y la rebaja.*

Precio	%	Rebaja
Pantalón:		
Libro:		
Sudadera:		

Para completar el cuadro y definir la tarea, el profesor pregunta por el precio de cada producto. Los alumnos expresan 40 € por el pantalón, 8 € por el libro y 20 € por la sudadera. El profesor escribe al lado de cada producto el precio correspondiente y plantea la situación hipotética que cuestiona cuánto habrían pagado por cada producto si los hubiesen comprado en época de rebaja:

Profesor: Imagínense que sus padres esperan a comprarles cada producto en las rebajas. Necesitamos saber cuánto es la rebaja por cada uno, ¿verdad?

Pablo[291]: Un libro se puede rebajar el veinte por ciento

Profesor: Vamos a suponer que el libro se rebaje un veinticinco por ciento, el pantalón un cincuenta por ciento y la sudadera diez por ciento. ¿Qué sucederá?

Andrea P.: Pagarán menos por cada uno

Profesor: Exactamente. Intenten averiguar cuánto pagarán por cada producto aplicando el descuento correspondiente

Los alumnos plantean sus soluciones. Un grupo de alumnos[292] lo hace inmediatamente. Su procedimiento se basa en: dividir entre dos para el 50%; para el 25% y 10% escriben la fracción equivalente o identifican directamente la parte que representa cada porcentaje, luego dividen (cuarta y décima parte, respectivamente). El profesor observa lo que cada alumno plantea para resolver cada situación y les pide que coloquen sus respuestas en el cuadro correspondiente. Los cuadros comienzan a ser variados. Se observan casos en los que los alumnos escriben en la

---

[291] Pablo es un alumno que siempre interviene en clase, aun cuando el profesor no pida la participación de los estudiantes. No obstante, en algunos casos, sus intervenciones no son las más convenientes. En este caso, el profesor hace caso omiso a la intervención de Pablo para crearle el hábito de intervenir cuando el profesor lo solicite.

[292] El grupo de alumnos está integrado por Enrique, Pablo, Elba, Iago y Lucía. La mayoría de alumnos halla el primer porcentaje y por lo tanto el primer precio rebajado.

	columna ‘rebajas’ el precio rebajado y no lo que equivale el porcentaje. Esto se hace evidente en los dos últimos productos; en el caso del pantalón podría pasar desapercibida dicha situación puesto que tanto ‘rebaja’ como ‘precio rebajado’ es la misma cantidad. En la columna ‘%’, todos coinciden en escribir el porcentaje que se rebaja. Otros, sin embargo, como Verónica, escriben en la columna ‘rebaja’ cantidades que no se ajustan a lo que se pide (el cincuenta por ciento de cuarenta, para Verónica, es ocho).
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Una vez resuelta la primera rebaja se procede a revisar. ▪ El profeso solicita exponer los resultados y la forma como se ha llegado a él. ▪ El profesor solicita indicar y explicar la forma de hallar el porcentaje. ▪ Algunos alumnos, aplican el procedimiento sin una aplicación correcta de las cantidades. No obstante, saben que es incorrecto. Otros se basan únicamente en la idea de rebaja (descuento) asociándola a la operación de restar. ▪ Se observa también dificultades en divisiones “especiales” (el dividendo es menor que el divisor). ▪ El docente trata solo un caso incorrecto pero no se llega a resolverlo (rectificarlo). ▪ En esta fase se da la Revisión. Códigos: – *Exploración oral del trabajo realizado por los estudiantes orientando a la explicación del proceso seguido.* – *Confusión en algunos alumnos para interpretar la fracción de un número.*	Una vez que el profesor ha visto que la mayoría de los alumnos ha resuelto la primera situación pregunta cuál ha sido el resultado en el primer caso. Iago responde que es veinte. El profesor pregunta cómo ha llegado a ese resultado y le pide que explique qué es lo que ha hecho. Iago responde que ha sacado la mitad. Al preguntar qué significa “sacar la mitad”, el mismo alumno responde que “es el cincuenta por ciento”. El profesor solicita otras opiniones, a lo que Enrique dice que “lo divide entre dos”. Ante la misma propuesta, el profesor pregunta si a alguien le ha salido diferente; luego le pregunta directamente a Verónica[293] cuánto le ha salido y ella responde que ocho. El profesor le pide que explique qué es lo que ha hecho para obtener esa cantidad: Profesor: Explica qué has hecho Verónica: Dividí cuarenta entre cincuenta Profesor: ¿Por qué? Ve al frente y haz lo que has hecho en tu folio Verónica sale al encerado y escribe $40\ \vert\underline{50\ }$; luego añade un cero a cuarenta. Profesor: ¿Por qué has hecho eso? Verónica: Es un truco que me ha enseñado mi madre para que pueda dividirse. Divido cuatrocientos entre cincuenta

---

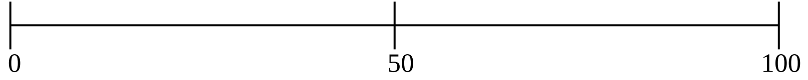
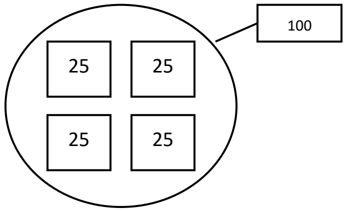
[293] El profesor ha visto el procedimiento y resultados que ha obtenido Verónica en la resolución de la situación por lo que su solicitud es intencional.

– *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar el trabajo de los estudiantes y que estos reflexionen en torno a él.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por el docente y por iniciativa de los estudiantes).* – *Retorno a la interpretación del porcentaje en términos de fracción para una mejor comprensión de la situación.* – *Dificultad en algunos alumnos para interpretar fracciones.*	Profesor: (Refiriéndose a toda la clase) ¿Qué hay que hacer cuando aparecen este tipo de divisiones en las que hay ‘algo’ que sobresale?[294]... Observen el dividendo que es… Enrique: …menor Profesor: … menor que el divisor. Bien Asmaa’: Hay que preparar la división Profesor: … Lo que es conveniente, aunque no necesario. ¿Por qué divides entre cincuenta? Verónica: Porque es el cincuenta por ciento Profesor: ¿Eso es correcto? Ante la pregunta, los alumnos responden que no; no obstante, Andrea P. comenta con su compañera (Asmaa’) que “está bien” (lo que ha hecho Verónica) ya que “hay que dividir entre cincuenta” justificando que “si pides el 10% divides entre diez”. Verónica efectúa la división. El cociente obtenido es 80; sin embargo, añade un cero a la izquierda del ocho y el resultado se transforma en ocho décimas. Verónica mira su trabajo y mira al profesor, quien cuestiona su trabajo. La alumna queda en silencio y luego expresa que “está mal”. ¿Por qué está mal?, pregunta el profesor. Verónica responde “porque no puede ser ocho. El profesor añade: “lo que has escrito es ocho décimas. No ocho”. El profesor establece con la alumna un pequeño diálogo en el que retoma la pregunta original: ¿qué te pide? Verónica expresa que hallar el cincuenta por ciento. El profesor le pregunta qué significa el cincuenta por ciento y la alumna responde “la mitad” e, inmediatamente, añade “es que la mitad de cuarenta no es ocho”. El profesor retoma el significado de 50% (mitad) y pregunta si hay otra manera de escribirlo. Alba expresa que se puede escribir “cincuenta sobre cien”. El profesor pregunta qué significa esa expresión: 50/100, escribiéndola en el encerado. La misma alumna responde que “cincuenta por ciento”. El profesor cambia la pregunta: “¿Qué es 50/100?”. Se escucha a varios alumnos

---

[294] Este tema ha sido tratado anteriormente, en casos de división por números naturales cuyo dividiendo es menor que el divisor.

	responder que es una fracción. El profesor queda en silencio, luego pregunta cómo se busca la mitad. El profesor pregunta a María, quien expresa que restó “cincuenta menos cuarenta” obteniendo diez. Algunos alumnos se miran entre sí y comentan que eso es incorrecto. El profesor pregunta a María porqué ha restado y ella responde “porque es una rebaja y hay que descontar”. Se observó que Andrea P. había hallado que la rebaja era doce, aunque la alumna no lo manifestó públicamente. Andrea R. levanta la mano y dice que hay que dividir entre dos; esta alumna también obtiene veinte, como Iago. El profesor asiente y pasa al siguiente caso.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ Se procede a revisar la segunda rebaja (25% de 8€). ▪ Los alumnos traducen la situación en términos de fracción de un número (fracción como operador). ▪ Los alumnos proceden de diferente forma: algunos simplifican la fracción, otros cambian los términos. ▪ No todos los alumnos obtienen los mismos resultados. ▪ Los alumnos utilizan dos formas para explicar sus procesos: de manera operativa y gráfica. ▪ Operativamente, los alumnos recurren a la suma. ▪ El maestro explica a partir de las producciones de los estudiantes. ▪ El profesor dialoga con sus alumnos en el proceso de sistematización de la información. ▪ Esta fase es de Revisión y sistematización de procedimientos. Códigos:	En el siguiente caso, el del libro que costó 8 € y se le rebaja el 25%, el profesor pregunta a Andrea P. cuál ha sido su respuesta. Andrea P. ha hallado que la rebaja es 32. Cuando el profesor le pide que explique ella expresa que ha hallado 8/100 de 25. Se genera el siguiente diálogo: Profesor: ¿Cuál es el precio del libro? Andrea P.: Ocho euros Profesor: ¿Cuánto tienes que rebajarle? Andrea P.: Veinticinco por ciento Profesor: ¿Cómo puedo expresar ese veinticinco por ciento? Andrea P.: Veinticinco sobre cien Profesor: ¿Por lo tanto los veinticinco centésimos de qué voy a hallar? Andrea P.: De ocho El profesor escribe la expresión “$\frac{25}{100}$ de 8” en el encerado. Acto seguido, el profesor pregunta a la clase si alguien más ha hallado la rebaja. Algunos alumnos levantan la mano pero es a Andrea B. a quien el profesor señala para responder. Esta alumna dice que “sale dos”. El profesor le pregunta qué ha hecho y ella dice lo siguiente: “como veinticinco por ciento es un cuarto, dividí ocho entre cuatro”. El profesor le pide que explique porqué dice que “veinticinco es un cuarto”. La alumna responde: “Yo lo vi cuatro veces, entonces un cuarto, como es veinticinco así (indica

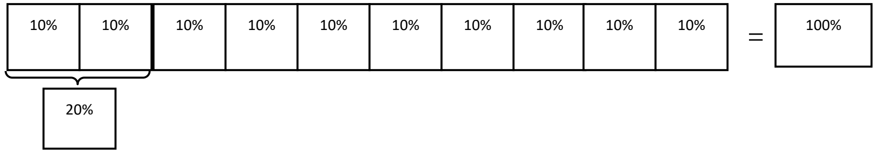
– *Dificultad en algunos alumnos para aplicar el conocimiento adquirido a situaciones concretas.* – *Diálogo basado en las preguntas directas como estrategia para la comprensión de la situación.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación de la transformación de porcentajes a fracciones simples, basadas en la representación gráfica.*	con cuatro dedos de una mano), un cuarto”. Al querer seguir explicando, la niña expresaba que sumó varias veces el 25, hasta 100, y se dio cuenta que fueron cuatro veces las que lo sumó. El profesor escucha la respuesta de Andrea B, luego pregunta a Lucía quien coincide con Andrea B. en la forma cómo ha hallado el veinticinco por ciento. Lucía expresa: “veinticinco… cuatro veces de cien”. El profesor pide a la clase, en general, que expliquen la situación de tal manera que él la pueda entender ya que hasta el momento “no logra entender del todo lo que dicen”. Pablo sale al encerado y traza la siguiente gráfica:  Luego, empieza a hacer divisiones pequeñas entre 0-50 y 50-100. Intenta que las divisiones se ubiquen en la parte central de cada bloque y escribe 25 en cada división. Luego une con una línea curva 0, 25, 50, 25y 100. Pablo escribe 25 entre 50 y 100, con lo que para él queda representado las veces que está 25 en 100. El profesor observa la gráfica; el alumno, también y luego borra su dibujo. En el mismo lugar, dibuja un círculo y dentro de esa figura cuatro cuadrados escribiendo dentro de cada uno, 25 y luego indica que ese conjunto grande es 100; con lo cual queda representado que uno de los veinticinco representa un cuarto. La gráfica queda como sigue:  El profesor observa la gráfica de Pablo y escribe dos diferentes maneras de expresar que 25 está contenido 4 veces en 100. Para ello aprovecha la intervención de Andrea B. El profesor escribe en el encerado: 25+25+25+25=100; y debajo de esa expresión: 4x25=100. Inmediatamente plantea: “Si buscamos la manera inversa…”. Los alumnos observan pero no continúan la frase, con lo cual es el profesor quien lo hace y escribe en el encerado: 100:4=25 o 100:25=4. El profesor insiste en la primera forma: “100 entre 4 es 25. El 25 resulta de dividir cien en cuatro partes, ¿sí?”. Luego grafica de la siguiente manera:

	25 25 25 25 Después de la gráfica concluye: “un veinticinco (señalando un recuadro) es un cuarto”. Vuelve a escribir: “25% = 25/100” y pregunta: “cuando una fracción nos indica con números más pequeño... ¿cómo se llama una fracción que valga lo mismo (pero) con otros términos? Los alumnos responden “equivalentes”. El profesor pregunta “¿entre qué números tendré que dividir para obtener una fracción equivalente?”. Lucía responde que entre 25. Luego, el profesor divide y coloca a la derecha de 25/100, ¼ y añade “Para hallar el 25% tengo que dividir entre cuatro”.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ El docente solicita la solución de la tercera rebaja. El profesor solicita explicación de una respuesta incorrecta. ▪ La alumna se da cuenta del error y rectifica. ▪ Los alumnos explican con mayor precisión el proceso seguido por la alumna (un alumno). ▪ Se halla la tercera rebaja y se expone cuál sería el precio rebajado del producto. ▪ Los alumnos están en proceso de construcción del conocimiento (el dominio no es total). ▪ Esta fase es de revisión y explicación de procesos por parte de los alumnos. Códigos: – *Diálogo basado en la pregunta directa para generar la comprensión de la situación por parte de los alumnos.*	Se da por concluida la actividad anterior y se pasa a la siguiente, al precio de la sudadera. El profesor pregunta cuál es la rebaja y Lucía responde que la rebaja es 2, sin embargo Asmaa’ dice que es 1. El profesor pide a esta última que explique lo que ha hecho. La alumna dice que divide 20 entre 10. El profesor le pide que resuelva en el encerado, y que antes de dividir piense cómo es esa operación y qué características tiene. La niña resuelve y se da cuenta que es dos[295]. El profesor le pregunta por qué divide 20 entre 10 y qué significa el 10%. La alumna responde a la segunda pregunta: “de cien partes, coges diez: 10/100”. El profesor pide a la clase si puede explicar lo que ha dicho la compañera. Enrique lo intenta, pero confunde la forma de expresar oralmente los centésimos, aunque luego rectifica y dice: “diez cienavos es una décima parte de cien”. El profesor concluye: “entonces 10 sobre100 es igual a 1 sobre 10”. El alumno asiente. El profesor vuelve a preguntar sobre la rebaja y el mismo alumno dice que es 2, añadiendo que la sudadera costará dieciocho euros.

---

[295] La niña sale al encerado y resuelve la división correctamente y acepta que es dos.

Planteamiento de la intervención de los estudiantes en las resoluciones de los compañeros.	
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ El docente propone otros precios a los que solicita hallar un porcentaje. ▪ Las propuestas de los alumnos son diversas. Las interpretaciones, también. ▪ Se observa confusión en la interpretación. ▪ El docente intenta que la alumna que procede de manera incorrecta, se dé cuenta del error cometido a partir de la relación entre los porcentajes y sus productos, de manera oral e interpretando directamente los mismos. Códigos: – *Propuesta de casos concretos directos sobre porcentajes.* – *Reflexión en torno a la obtención de los porcentajes.* – *Dificultad en algunos alumnos para identificar relaciones entre porcentajes.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por el docente).*	El profesor propone otras situaciones aunque ahora conservando un mismo precio: 70 €, variando el porcentaje. El profesor pide, en primer lugar, que hallen el 10% de 70. Verónica dice que es “siete” justificando su respuesta al añadir que es “porque es el diez por ciento”. El profesor no queda convencido expresando que no es la justificación adecuada y vuelve a preguntar. Lucía expresa que es “porque es la décima parte”. Otras alumnas asienten. El profesor expresa conformidad y pide hallar el 20% de 70. Andrea B. dice que es “cinco”. El profesor pregunta: “si en 10% te da siete, en 20% ¿te da cinco? La alumna se queda pensando y asiente, por lo que el profesor le pregunta: Profesor: Fíjate bien, ¿con el veinte por ciento, rebajas más o menos? Andrea B.: Yo he pensado que si el diez por ciento es diez, el veinte por ciento es cinco Profesor: El veinte por ciento, ¿qué es respecto del diez por ciento? Andrea B.: El doble Profesor: Entonces, si el diez por ciento de setenta es siete, ¿cuánto será el veinte por ciento? Andrea B.: … cinco Profesor: Piensa un poco. Si el porcentaje es mayor, ¿el descuento es mayor? Andrea B.: Sí Profesor: Por lo tanto, dónde compraré: ¿en una rebaja del diez por ciento o del veinte por ciento? Andrea B.: Del veinte Profesor: ¿Por qué?

	Andrea B.: Porque pagas menos Profesor: Entonces, ¿es posible que si te van a descontar el veinte por ciento te descuenten cinco? Andrea B.: Es que por el diez por ciento es siete entonces por el veinte es cinco… es menos… lo que pagas Profesor: El porcentaje no te indica lo que pagas, sino lo que descuentan. Si descuentan diez pagas sesenta y tres, ¿verdad? Andrea B.: Sí Profesor: Si te descuentan veinte, en el que dices que es cinco, pagas sesenta y cinco… ¿Pagas más? Andrea B.: …
Final de la clase ▪ El profesor recurre a las gráficas para facilitar la comprensión de la situación. Códigos: – *La gráfica como estrategia de comprensión de la situación.* – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	No hay tiempo para más y la clase termina. El profesor comenta al día siguiente que la alumna logra entender la situación de la siguiente manera: “Le propuse graficar el diez por ciento. Andrea dibujó un rectángulo y lo dividió en diez partes iguales. Le pregunté qué representaba cada parte y me dijo que diez. Le dije que lo escribiera, por lo que a cada parte le puso diez por ciento. Luego le pregunté qué pasaba si juntaba dos “diez por ciento”, señalando los dos primeros[296] y Andrea me dijo que era veinte. Le pregunté a cuánto equivalía el veinte por ciento y me dijo que era catorce; entonces le dije que catorce era diferente que cinco; luego Andrea añadió: “Yo estaba mal, tenía que duplicar la cantidad y no hallar la mitad; estaba dividiendo entre dos”. Como ella dividía entre dos el diez le pregunté por qué dividía diez entre cinco. Entonces ella me dijo que estaba mal, que había que multiplicar siete. 

---

[296] El profesor une los dos primeros rectángulos con llaves, como queda expresado en el gráfico.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

<table>
<tr><th></th><th>Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada</th></tr>
<tr><td>La sesión se basa en actividades propuestas por el docente que buscan la participación del estudiante para que este interprete el conocimiento matemático en situaciones cotidianas.
a) La primera actividad busca indagar sobre lo trabajado en la sesión anterior (y otras previas).
Los alumnos asocian a la última cuestión trabajada (fracción de un número y la forma de hallarlo).
Código:
– <i>Actividad de repaso (de un tema ya trabajado).</i></td><td>a) Continuando con el tema de las rebajas, el profesor retoma la última parte de la sesión anterior y pregunta qué hacer para saber cuánto se ha rebajado en un producto. El tema de la definición no se retoma. Los alumnos levantan la mano, pero es Elba quien responde: “se divide y se multiplica”. El profesor pregunta qué se divide y qué se multiplica. Lucía expresa que hay que “multiplicar la cantidad por el numerador y dividir el resultado por el denominador… Ese es el porcentaje”.</td></tr>
<tr><td>a) La segunda actividad busca aplicar porcentajes en diferentes casos concretos de rebaja.
En esta actividad involucra la participación de los alumnos para definir las cuestiones a trabajar.
Los alumnos resuelven pero algunos tienen dificultad para resolver correctamente (aun cuando comprenden la idea operativa de fracción de un número que se recordó al inicio de la sesión)
b) El maestro conduce a la reflexión de los caminos seguidos por los estudiantes.
Código:
– <i>Actividad de aplicación en situaciones cotidianas directas.</i></td><td>a)
<table><tr><th>Precio</th><th>%</th><th>Rebaja</th></tr><tr><td>Pantalón:</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Libro:</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Sudadera:</td><td></td><td></td></tr></table>
Para completar el cuadro y definir la tarea, el profesor pregunta por el precio de cada producto. Los alumnos expresan 40 € por el pantalón, 8 € por el libro y 20 € por la sudadera.
b) El profesor escribe la expresión “$\frac{25}{100}$ de 8” en el encerado. Acto seguido, el profesor pregunta a la clase si alguien más ha hallado la rebaja. Algunos alumnos levantan la mano</td></tr>
</table>

– *Actividad de reflexión (del proceso).*	pero es a Andrea B. a quien el profesor señala para responder. Esta alumna dice que "sale dos". El profesor le pregunta qué ha hecho y ella dice lo siguiente: "como veinticinco por ciento es un cuarto, dividí ocho entre cuatro". El profesor le pide que explique porqué dice que "veinticinco es un cuarto". La alumna responde: "Yo lo vi cuatro veces, entonces un cuarto, como es veinticinco así (indica con cuatro dedos de una mano), un cuarto". Al querer seguir explicando, la niña expresaba que sumó varias veces el 25, hasta 100, y se dio cuenta que fueron cuatro veces las que lo sumó. El profesor escucha la respuesta de Andrea B, luego pregunta a Lucía quien coincide con Andrea B. en la forma cómo ha hallado el veinticinco por ciento. Lucía expresa: "veinticinco… cuatro veces de cien". El profesor pide a la clase, en general, que expliquen la situación de tal manera que él la pueda entender ya que hasta el momento "no logra entender del todo lo que dicen"
a) La siguiente actividad busca aplicar el proceso seguido. A partir de ella, el docente busca hallar otros porcentajes por relación. Código: – *Actividad de aplicación.* – *Actividad de reflexión (transferencia directa a otros porcentajes).*	El profesor propone otras situaciones aunque ahora conservando un mismo precio: 70 €, variando el porcentaje. El profesor pide, en primer lugar, que hallen el 10% de 70. Verónica dice que es "siete" justificando su respuesta al añadir que es "porque es el diez por ciento". El profesor no queda convencido expresando que no es la justificación adecuada y vuelve a preguntar. Lucía expresa que es "porque es la décima parte". Otras alumnas asienten. El profesor expresa conformidad y pide hallar el 20% de 70. Andrea B. dice que es "cinco".

Sesión 6/Caso 1

Viernes, 22 de febrero de 2008. Hora: 9:55 – 10:50.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La sesión inicia con una pregunta directa sobre qué es el porcentaje y qué significa "tanto por ciento". El docente pasa de preguntar por las rebajas a centrarse en el tema matemático propiamente.	La clase empieza con un repaso de todo lo que se ha visto sobre porcentajes y su relación con las fracciones. Para ello, el profesor pregunta a los alumnos ¿qué es el porcentaje de 'algo'? Espera un momento, quizá que los estudiantes respondan y como observa que ninguno levante la mano para participar reduce la pregunta a la siguiente: ¿qué es un porcentaje?, y añade ¿qué es el tanto por ciento? A su vez, escribe el símbolo (%) en el encerado.

▪ Los alumnos asocian el tema al de rebajas (descuentos) que es el contexto en el que han estado trabajando. ▪ Uno de los alumnos expresa que "%" no puede referirse a descuentos porque el símbolo sin números no dice eso. ▪ El profesor se basa en la prensa para que los alumnos amplíen el horizonte de uso de los porcentajes. Código: – *Reflexión inicial en torno al tema de los porcentajes.* – *Orientación hacia el uso de los porcentajes en otros contextos (diferente al de rebajas).* – *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre los porcentajes (interpretaciones en torno al contexto en el que se usa).*	Andrea P. responde: "Que te descuenten algo". El profesor pregunta a la clase si están de acuerdo con esa respuesta y que expresen por qué. Daniel[297] dice que no porque "si te descuentan algo tiene que llevar un número como veinte por ciento o cincuenta por ciento", señalando el símbolo que había escrito el profesor en el encerado y mostrando que no especificaba una cantidad. El profesor sigue esperando más intervenciones. Los alumnos orientan sus respuestas hacia la relación de porcentajes con descuentos o rebajas, contexto en el que han empezado a trabajar el tema. Raúl añade a las ideas la palabra 'total' ('del total'), que amplía lo expresado por sus compañeros: "del total te sacan dinero". El profesor observa esta orientación (rebajas) y quiere que los alumnos transfieran el tema a otros contextos (que no relacionen los porcentajes únicamente con los descuentos). Para ello, pregunta en qué situaciones han visto ese signo (%) y les recuerda la actividad que tuvieron que hacer en la que se les pedía que encierren en la prensa[298] los títulos y subtítulos de las noticias que incluía información en porcentajes. Para ello, los alumnos comienzan a mirarse entre sí, intentando recordar lo que habían hecho. Pablo coge uno de los diarios que hay en el aula y empieza a buscar. El profesor orienta a que toda la clase siga la actitud de Pablo.
Inicio de clase ▪ La clase inicia contextualizando el porcentaje en diferentes situaciones (más allá de las rebajas). ▪ Los alumnos ubican porcentajes en diferentes titulares de las noticias y expresan los mismos, así como la idea que transmiten. ▪ El profesor ratifica o no sus intervenciones, en función de si es correcta o no. Códigos:	Los alumnos empiezan a expresar diferentes titulares en los que los porcentajes están presentes, a la vez el profesor pregunta si saben a qué se refiere cada uno. Por ejemplo, el primer caso fue el de Elba que expresó que "cae 20% las ventas". Por su parte Nerea dice el "80% de las elecciones". Andrea B. se refiere a "la cuota de mercado" y a la "baja de los termómetros" sin expresar porcentajes específicos. Lucía sitúa los porcentajes en una noticia sobre las encuestas mientras que Asmaa' indica que: "subió 4% la bolsa"; por su parte Andrea R. se refiere a la "venta de genéricos". En un caso, la alumna expresa con sus propias palabras lo que significa esa idea (porcentaje), en el ejemplo que ha encontrado, en el que dice que "cae 20% las ventas": significa que estas han disminuido: "las ventas han disminuido". Los otros casos no fueron explicados o interpretados por los alumnos. El profesor pregunta por el término genérico, pero los alumnos no responden. El profesor menciona la sigla 'TAE' y su relación con los porcentajes. Los alumnos

---

[297] Daniel es un alumno que no participa mucho, de hecho la mayoría de veces lo hace porque el profesor lo llama; sin embargo, hay momentos en que su participación es espontánea.

[298] Se entiende por prensa al conjunto de publicaciones periódicas (llamados 'periódicos'), especialmente las diarias (conocidos como 'diarios') que informan sobre distintos acontecimientos y situaciones de interés público.

– *Contextualización de los porcentajes en diferentes situaciones generales y reflexión en torno a algunos contextos.* – *Participación selectiva de los estudiantes al indicar porcentajes en diferentes noticias.*	quedan en silencio y es Andrea B. quien pregunta qué significa; el profesor intenta explicar la idea con palabras sencillas y los alumnos quedan, o siguen, en silencio.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ El docente clasifica los distintos contextos en los que aparecen los porcentajes: economía, clima, elecciones, alimentos… etc. ▪ La idea de porcentaje como subida (y no descuento) aparece. Los alumnos lo hacen evidente sin asociarla con la idea inicial (descuentos); sin embargo, el docente se las hace ver. La visión de porcentaje se amplía. Códigos: – *Diálogo como estrategia docente para la contextualización y comprensión de situaciones generales en las que intervienen los porcentajes.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la interpretación de los porcentajes en diferentes contextos.*	A medida que los alumnos van expresando las distintas situaciones, el profesor intenta explicar cada una y categorizarlas en diferentes grupos. La mayoría de las noticias se relacionan con la economía. En algunos casos, las noticias sobre porcentajes no expresaban disminución, sino subida. Esto fue aprovechado por el docente para que los alumnos descubrieran que los porcentajes no sólo indican disminución, sino que puede hacer referencia a un aumento. El profesor puso el caso concreto de las multas y los pagos posteriores a las fechas pactadas: Profesor: ¿En este caso, el pago aumenta o disminuye? Enrique: Aumenta Pablo: Hay que aumentar el precio Profesor: Ya no hace referencia a disminuir el precio Andrea R.: No, porque tiene que pagar una multa Profesor: Exacto
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ En esta parte de la clase el docente intenta descontextualizar la idea de porcentaje de cualquier situación concreta (aumento o disminución), a fin de que el estudiante exprese una idea más general del mismo.	El profesor concluye, a partir de las diferentes noticias expresadas por los alumnos, y de la situación concreta de las multas, que los porcentajes se utilizan en las rebajas y en otras situaciones,…para posteriormente volver a preguntar: tanto si es descuento como recargo, ¿qué es el porcentaje?, ¿qué es el 20% de algo? (ambas preguntas las escribe en el encerado). Se establece el siguiente intercambio de preguntas y respuestas entre el profesor y varios alumnos: Profesor: ¿Qué es el 20% de algo?”

▪ Se logra lo anterior, a partir de un ejemplo concreto (¿qué es el 20% de algo?). ▪ Los alumnos que intervienen haciendo referencia a las partes que corresponden al 20% respecto de 100%. ▪ El profesor sistematiza las ideas expresadas asociando el porcentaje a las fracciones. ▪ Los alumnos que intervienen, en su mayoría asocian esta idea con la facilidad que supone trabajar con fracciones en lugar que con porcentajes. ▪ Una de las alumnas lo sigue asociando al tema d rebajas. Códigos: – *Reflexión en torno a un porcentaje específico que oriente a la comprensión de la situación.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para reflexionar sobre los porcentajes a partir de casos específicos.* – *Participación selectiva de los estudiantes para interpretar diferentes porcentajes.* – *Reflexión en torno a la utilidad del conocimiento aprendido (forma de hallar los porcentajes).*	Pablo: la quinta parte. Profesor: ¿Qué es la quinta parte? Pablo: Una cosa dividida en cien partes y coges veinte. Lucía: de cien partes, veinte. Profesor: ...o veinte de cada cien... ¿Y el 70%? Asmaa’: Setenta de cada cien. Profesor: ¿y el 20%?[299] Alba: veinte centésimos Enrique: Un quinto. Profesor: ¿Y el 50%? Iago: cincuenta centésimos Profesor: ¿de qué otra forma se puede representar? Raúl: Un medio Profesor: ...es decir que cualquier porcentaje se puede escribir en forma de fracción. ¿Y el 70%? Enrique: setenta sobre cien. Profesor: ¿De qué otra manera se puede representar 70%? Enrique y Pablo: siete décimos. Para sistematizar lo que los alumnos están haciendo (convertir porcentajes en fracciones), el profesor vuelve a expresar que “cualquier porcentaje se puede escribir en forma de fracción”. Los alumnos asienten. Luego, el profesor pregunta: “¿Y qué utilidad tiene? (refiriéndose a escribir un

---

[299] El profesor repite la pregunta.

	porcentaje en forma de fracción), ¿lo necesitamos?, ¿nos conviene?”. Los alumnos empiezan a expresar sus ideas. Andrea B. dice que “para saber el dinero que nos rebajan”. Con la mirada, el profesor pide más ideas. Enrique contesta: “porque es más fácil trabajar con fracciones”. Una tercera idea, expresada por Pablo, “porque podemos hacer las operaciones más fácilmente que con el porcentaje”, expresa la forma matemática de conocer la cantidad que representan.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ Concluida la parte anterior, en la que el docente busca que los alumnos expresen lo que saben de porcentajes, tanto en un contexto matemático como extramatemático, procede a plantear actividades en las que solicita hallar ciertos porcentajes de ciertas cantidades. ▪ Los alumnos hallan resultados y explican sus procedimientos. ▪ Se observa que no todos los alumnos resuelven correctamente; algunos interpretan de manera distinta el porcentaje hallado. ▪ El profesor solicita que los alumnos expliquen lo que han hecho y porqué a diferentes alumnos, lo cual permite observar diferentes formas de actuar y utilizar los conocimientos previos. ▪ Los conocimientos previos (tanto a nivel operativo como comunicativo) van surgiendo. Códigos: – *Planteamiento de situaciones concretas contextualizadas parcialmente.*	El profesor plantea la siguiente interrogante: ¿el cincuenta por ciento de sesenta euros? (lo escribe en el encerado: “50% de €60”. Se establece el siguiente intercambio de palabras: Profesor: ¿El cincuenta por ciento de sesenta euros? Enrique: Treinta euros. Profesor: ¿Cómo lo hiciste? Enrique: dividiendo entre dos. Profesor: ¿por qué divides entre dos? Enrique: porque es la mitad. Profesor: (El profesor cambia la situación) ¿El veinticinco por ciento de sesenta? Pablo: Cuarenta y cinco. Profesor: ¿Por qué cuarenta y cinco?, ¿qué has hecho? Pablo: Dividí sesenta entre cuatro Profesor: ¿Y sesenta entre cuatro te da cuarenta y cinco? Pablo: Sí[300]. Profesor: Piensa lo que dices. Raúl: Yo dividí sesenta entre veinticinco y multipliqué por uno.

---

[300] Al preguntársele a Pablo porqué dijo que era 45, el alumno respondió que “era lo que tenía que pagar”. Se le dijo que eso no se le preguntaba. Observó el encerado y dijo: “es quince”.

– *Diálogo con preguntas directas que se orientan a la explicación del procedimiento seguido.* – *Participación selectiva de los estudiantes al explicar el proceso seguido.*	Eduardo[301]: Entre cuatro. Se divide entre cuatro porque es un cuarto. Profesor: ¿Veinticinco es un cuarto? ¿De qué es un cuarto? Eduardo: De cien. Profesor: Es un cuarto de cien… No de quince (mira a Pablo) ¿cómo sabes que es un cuarto? ¿De dónde lo sacaste? Eduardo: Sumo veinticinco, veinticinco... Profesor: Eso es lo que hizo Andrea en la clase pasada. Pablo: Divides cien entre cuatro. Profesor: ¿De qué otra forma podemos expresar el 25%? (Los alumnos empiezan a decir las formas que saben: 25/100; ¼; en letras) Profesor: ¿Cómo sé que es un cuarto?, ¿qué hago? Lucía: Divides entre 25 el numerador y el denominador. Profesor: Busco una fracción equivalente.
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La actividad anterior se centró en hallar un porcentaje de una cantidad de euros, esta propuesta se basa en hallar un mismo porcentaje de tres cantidades distintas descontextualizadas. Sin embargo, luego contextualiza (rebajas). ▪ La propuesta busca que los alumnos interpreten un mismo porcentaje en diferentes cantidades: cómo afecta a las	El profesor propone una actividad relacionada con los porcentajes: “hallen estos porcentajes”. El profesor hace una lista como la siguiente: 50% de 20 50% de 60 50% de 80 Los alumnos manifiestan lo que significa cada una de las expresiones anteriores y lo hacen de manera correcta[302]. A continuación, el profesor les pregunta: ¿La clase de rebaja es la misma? Los alumnos responden que no (se fijan en el resultado de la operación). El profesor busca otra

---

[301] Eduardo es un alumno que no asiste regularmente a la escuela.

[302] Los alumnos son los que generalmente que participan en clase. En algún caso, el docente preguntó a la alumna Francia y a Daniel, quienes son los que menos intervienen y estos respondieron correctamente.

mismas, antes de aplicar cualquier procedimiento. ▪ Se observan diferentes apreciaciones, de acuerdo al punto de vista tomado. ▪ El profesor sistematiza las intervenciones de los alumnos. Código: – *Planteamiento de casos concretos de porcentajes (mismo porcentaje a diferentes cantidades) y reflexión en torno a los resultados.* – *Participación total de los estudiantes al hallar los porcentajes.* – *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre los resultados obtenidos.*	respuesta y hace referencia a los significados de las siguientes palabras y expresiones: precio inicial, precio final, precio rebajado, rebaja, porcentaje de la rebaja. Luego de las explicaciones del profesor, este pregunta cómo es el porcentaje que se descuenta en cada artículo. Los alumnos no saben qué responder; luego el profesor pregunta qué porcentaje se rebaja en cada caso (pregunta caso por caso). Los alumnos responden y concluyen que se rebaja lo mismo (50%). El profesor hace referencia a esta conclusión y pregunta: si el porcentaje es el mismo en cada uno ¿de qué depende que las rebajas sean distintas? (refiriéndose a la cantidad que se rebaja). Lucía responde que depende del precio. El profesor pregunta qué precio y ella añade que del precio original. El profesor repite la idea para toda la clase: "luego, la rebaja y el precio final dependen del precio original".
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ Al igual que en la fase anterior, el profesor propone hallar rebajas (si bien anteriormente se inició la actividad sin contextualizar, luego se hizo). ▪ La idea de esta actividad, más allá de hallar las rebajas obtenidas, es interpretar el resultado (todos son el mismo). ▪ Los alumnos expresan diferentes ideas de acuerdo a los puntos de vista tomados. ▪ El docente aprovecha las intervenciones de los estudiantes para reorientar hacia otras cuestiones (que tal vez no tenía previsto, pero que se acoplan a las circunstancias). ▪ El profesor sistematiza las situaciones con la intervención de los alumnos.	El profesor propone otras 'rebajas': "me van a hallar la rebaja de cada producto", y escribe los porcentajes y los precios originales: 10% de 40 € 20% de 20 € 50% de 8 € Enrique encuentra el primer porcentaje: 4 euros. El profesor le pregunta por qué son cuatro euros y él responde que dividió entre diez. El profesor pregunta al mismo alumno porqué divide cuarenta entre diez y si ese diez es el mismo que aparece en el porcentaje. El alumno responde que sí. Luego le pide al mismo alumno hallar el siguiente porcentaje y éste le dice que es uno. Enrique siguió el mismo procedimiento que en el caso anterior, sin lograr darse cuenta de su error, aun cuando el profesor lo mira con interrogación. El compañero de éste, Iago, que estaba

▪ Hallar el porcentaje es medio para interpretar las situaciones expuestas (rebajas). Códigos: – *Planteamiento de casos concretos contextualizados de porcentajes (diferentes porcentajes, diferentes cantidades mismos resultados finales) y reflexión en torno a los resultados.* – *Participación total de los estudiantes al hallar los porcentajes.* – *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre los resultados obtenidos.*	diciéndole lo que tenía que hacer interviene. El profesor le pregunta cómo se hace y éste dice que sale cuatro “porque es la quinta parte y se divide entre cinco”. El profesor pregunta a la clase “qué nos manda a hacer 1/10 como operador”. Los alumnos responden lo que han aprendido: “se divide entre diez y se multiplica por uno. El profesor pregunta: “¿de qué otra manera puedo representar el 20%? Enrique responde: 20/100. El profesor añade que esa manera es la “real” y escribe 20%=20/100. El profesor pide a los alumnos que observen los últimos casos y digan en cuál de ellos se hizo mejor compra. Andrea B. opina que en el primero (10% de 40 = 4) porque el precio es el mayor. Raúl expresa que en el tercero (50% de 8 = 4) porque es el que cuesta menos (refiriéndose al precio final). Iago piensa que el tercero, también, aunque su razón se orienta hacia que “se rebaja la mitad y la rebaja es más”. Por su parte, Asmaa’ piensa que en ninguno hay una mejor rebaja porque “se rebaja lo mismo”. Esta alumna asocia la rebaja con lo que paga puesto que asumió que los cuatro euros que se obtenía en cada situación era lo que se pagaba. Para resolver esta confusión el profesor pregunta a la clase si lo que dice la alumna es correcto; la clase responde que no. El profesor le explica a la alumna que lo que se ha obtenido es lo que se rebaja y pregunta a la clase cuánto hay que pagar por ese producto (señalando el primer producto). Enrique responde que €36. A propósito de esa situación, y aprovechando la intervención de Asmaa’, el profesor pregunta cuánto le habrían descontado en el supuesto caso de pagar 4 euros: “el precio era cuarenta y se paga, ya sea porque se ha equivocado, cuatro euros”. Pablo responde que noventa por ciento. A modo de resumen, el profesor expresa que el 10%, en euros, de cada 100, es 10. Para sintetizar, el profesor pregunta de qué depende el precio final (una vez resueltos cada porcentaje). Los alumnos ofrecen dos respuestas de manera independiente: del precio original y del porcentaje. El profesor hace referencia a las dos situaciones expuestas anteriormente (el mismo porcentaje en distintas cantidades y el mismo valor en diferentes cantidades y porcentajes. En el primero resalta que es el mismo porcentaje pero la rebaja es distinta dado que el precio es diferente y en el segundo ambos son distintos. Al final, el profesor añade “influyen el precio original y el porcentaje, por lo que el precio final depende del precio original y del porcentaje”. Andrea R. añade que “si el precio original es mayor, la rebaja es mayor”, Enrique interviene y

	dice que “si el porcentaje es el mismo, depende el precio”, mientras que Andrea B. dice que “pueden haber rebajas iguales”.
Final de la clase ▪ El docente sistematiza la información y propone una actividad para casa. Códigos: – *Sistematización final del docente del trabajo realizado en clase.* – *Propuesta de trabajo para la casa.* – *Clase cerrada (actividad finalizada).*	El timbre suena y la sesión concluye, más – antes de finalizarla completamente – el profesor recalca lo anteriormente dicho, aunque sin intervención de los alumnos y entrega una ficha de trabajo para que la trabajen en sus casas. El profesor les dice que como ya han ido a diversas tiendas no necesariamente tienen que ir nuevamente para responder las preguntas que se plantean en dicho anexo.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La actividad propuesta por el docente al inicio de la sesión busca que los estudiantes apliquen los conocimientos trabajados y definan los mismos a través de un repaso del trabajo realizado. El profesor busca una mayor amplitud en el uso del conocimiento (rebajas) y orienta a ello (más allá de las rebajas). A partir de la lectura en la prensa, los alumnos expresan diferentes situaciones y se reflexiona al respecto. Código: – *Actividad de repaso.* – *Actividad de reflexión (de la situación general).*	a) La clase empieza con un repaso de todo lo que se ha visto sobre porcentajes y su relación con las fracciones. Para ello, el profesor pregunta a los alumnos ¿qué es el porcentaje de ‘algo’? Espera un momento, quizá que los estudiantes respondan y como observa que ninguno levante la mano para participar reduce la pregunta a la siguiente: ¿qué es un porcentaje?, y añade ¿qué es el tanto por ciento? A su vez, escribe el símbolo (%) en el encerado. Los alumnos empiezan a expresar diferentes titulares en los que los porcentajes están presentes, a la vez el profesor pregunta si saben a qué se refiere cada uno. Por ejemplo, el primer caso fue el de Elba que expresó que “cae 20% las ventas”. Por su parte Nerea dice el “80% de las elecciones”. Andrea B. se refiere a “la cuota de mercado” y a la “baja de los termómetros” sin expresar porcentajes específicos. Lucía sitúa los porcentajes en una noticia sobre las encuestas mientras que Asmaa’ indica que: “subió 4% la bolsa”…

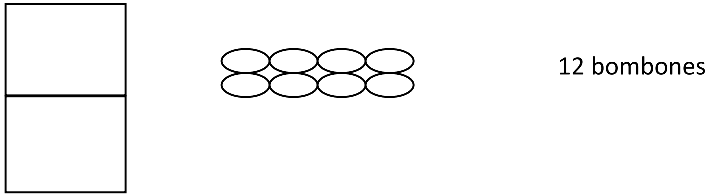
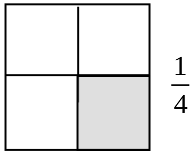
a) La siguiente actividad (Qué es el 20% de algo, qué es el 70%) es una propuesta de repaso pues estos casos concretos se trabajaron anteriormente. Código: – *Actividad de repaso (de un tema ya trabajado).*	a) Profesor: ¿Qué es el 20% de algo?” Pablo: la quinta parte. Profesor: ¿Qué es la quinta parte? Pablo: Una cosa dividida en cien partes y coges veinte. Lucía: de cien partes, veinte. Profesor: ...o veinte de cada cien... ¿Y el 70%?
a) Las actividades propuestas por el docente busca que resuelvan porcentajes para lo cual deben aplicar una técnica o procedimiento para hacerlo. A partir de la actividad, el docente busca la reflexión de las soluciones en torno al contexto de los casos concretos. Código: – *Actividad de aplicación (operativa directa).* – *Actividad de reflexión.*	a) El profesor plantea la siguiente interrogante: ¿el cincuenta por ciento de sesenta euros? (lo escribe en el encerado: “50% de €60”. Se establece el siguiente intercambio de palabras: El profesor propone una actividad relacionada con los porcentajes: “hallen estos porcentajes”. El profesor hace una lista como la siguiente: 50% de 20 50% de 60 50% de 80 El profesor propone otras ‘rebajas’: “me van a hallar la rebaja de cada producto”, y escribe los porcentajes y los precios originales: 10% de 40 € 20% de 20 € 50% de 8 €

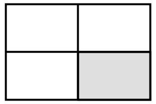
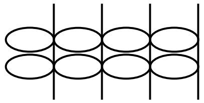
Caso 2

Sesión 1/Caso 2

Viernes, 15 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora revisa la tarea a partir de las intervenciones de los alumnos. ▪ Los alumnos salen a la pizarra a resolver los ejercicios del libro. ▪ La profesora refuerza oralmente lo que se tiene que hacer. Códigos: – *Reproducción de la actividad realizada en casa (sobre equivalencia de fracciones).* – *Dificultad en algunos los alumnos para aplicar el conocimiento matemático aprendido.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente).*	La clase empieza con la revisión de los *ejercicios* del libro sobre equivalencia de fracciones. Algunos alumnos salen al encerado para representar las fracciones y comprobar si son equivalentes. Para ello dibujan las gráficas del libro, dividen como indica la actividad, escriben la fracción que representa y comprueban gráficamente si son equivalentes. La alumna que salió al encerado se confundió al representar gráficamente las fracciones equivalentes, a partir de una dada, pero luego lo entendió. Los alumnos también saben (conocimiento adquirido) que si se multiplica o divide por un mismo número cada elemento de la fracción, la nueva fracción es equivalente a la anterior. En el transcurso de las correcciones, la profesora indica a los alumnos lo que tienen que hacer.
Inicio de clase ▪ La profesora expone el tema nuevo y explica en qué consiste. ▪ La profesora plantea una situación ficticia "de la vida diaria" en la que pide la intervención de algunos alumnos. ▪ La maestra expone oralmente la situación y gráficas correspondientes. ▪ La actividad se plantea a una de las alumnas que salió a la pizarra.	La corrección termina y la profesora introduce una nueva forma de interpretar la fracción: como operador. Para ello, declara el tema explicando a grandes rasgos en qué consiste lo que van a aprender y que esto será útil posteriormente. La maestra expresa la idea de que la fracción puede funcionar como operador y plantea una *situación ficticia* en que una de las alumnas, a propósito de haber sido su cumpleaños, decide invitar a tres amigos a su casa; la maestra le pide a la niña que escoja a tres compañeros de la clase. Una vez escogidos la maestra les dice a los cuatro que salgan y se sitúen delante del encerado. Continuando con la situación ficticia, la maestra supone que como la madre es atenta decide hacerles dos tortas de diferente sabor (chocolate y nata), ocho pastelitos y doce bombones; luego, dibuja en el encerado dos rectángulos que representan las dos

▪ La actividad es definida como “situación ficticia”. ▪ Los alumnos observan a la alumna y algunos intentan alguna solución. Códigos: – *Exposición directa por parte de la docente del nuevo tema (fracción como operador).* – *Contextualización del tema (fracción como operador) a situaciones (cotidianas) concretas con implicancias numéricas.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente).*	tortas y ocho óvalos pequeños, escribiendo “12 bombones”. Luego, dirigiéndose a la niña, le dice que tiene que repartir lo que la madre ha preparado entre los invitados, incluyéndose a ella. 
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Interacción alumnos – situación ficticia (los alumnos observan las imágenes de la pizarra e intentan dividir las correspondientes a cada torta). ▪ Interacción profesor – alumnos (la maestra dirige la acción de la alumna y establece límites a la situación, descartando posibles “cambios”). ▪ Los alumnos representan en fracción lo hecho gráficamente. ▪ Hay resultados distintos. ▪ La profesora invalida lo hecho por una alumna y que difiere de lo expuesto por la alumna del encerado. ▪ Finaliza la primera parte de la situación ficticia. Códigos:	La niña divide cada torta en dos partes, “así le corresponde a cada uno la mitad de una torta”. La maestra le dice que no, porque puede ser que quieran de las dos clases, de ahí que tiene que distribuir ambas tortas para todos. Una de las ‘invitadas’ dice que a ella no le gusta de chocolate. La maestra les hace suponer que todos quieren de las dos clases. Ante estas observaciones, la alumna divide en cuatro partes cada torta. Una vez que los dos rectángulos están divididos, la maestra le pide que indique la parte que le corresponde a uno de los invitados y que lo represente. La alumna pinta una de las cuatro partes en cada rectángulo y escribe $\frac{1}{4}$ en el primero y en el segundo representa la suma: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$. 

– *Indicaciones directas para orientar la actuación del estudiante hacia el objetivo planteado (representar en fracción).* – *Uso de la representación gráfica para una mejor traducción y visualización del producto.* – *Participación selectiva del estudiante en el desarrollo de la actividad y en la 'construcción' del conocimiento a través de la traducción del lenguaje verbal al gráfico y posteriormente al simbólico (propuesta por la docente).* – *Participación total del estudiante en el desarrollo de la actividad y traducción al lenguaje simbólico.*	 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ Algunos de los alumnos que están sentados piensan que se come 2/8 ya que sus respuestas así lo evidencian. Una de las alumnas que está sentada lo hace explícito; no obstante, la profesora indica que no, porque "un cuarto más un cuarto son dos cuartos".
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ Inicio de la segunda parte de la situación ficticia (la profesora pregunta a la alumna cuántos pastelitos tocará a cada uno). ▪ Interacción alumnos – situación ficticia (INTERPRETACIÓN NUMÉRICA). ▪ Reorientación de la propuesta por parte de la profesora (representar en fracción lo que le toca a cada uno). ▪ Bloqueo cognitivo en los alumnos. El trabajo ofrece dificultad a los estudiantes. ▪ La profesora guía la acción de la alumna asociando la misma a la actividad anterior. ▪ La alumna sigue un proceso sin darse cuenta de lo que sucede en función de lo que la maestra espera. ▪ La maestra guía directamente la acción de la alumna asociando lo que hizo en la	Acto seguido, la profesora pregunta a la alumna del encerado cuántos pastelitos tocará a cada uno. La alumna responde directamente que son "dos". La profesora acepta la respuesta y le pregunta cómo puede representar dicha cantidad, "lo que le corresponde a cada uno, en términos de fracción". Las respuestas no son inmediatas y los estudiantes se miran desconcertados. En ningún caso, se observa una respuesta según la propuesta de la docente; los alumnos solo escriben el número entero. La profesora insiste en representar en fracción la cantidad que le corresponde a cada persona, indicando a la alumna que divida como en el caso de las tortas y "haciendo referencia a los *grupos* que se pueden formar". La alumna divide haciendo una línea vertical entre cada 'pastelito'.  Después de varios intentos por representar lo que le corresponde a cada uno en términos de fracción, la alumna escribe: $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$. Luego borra el resultado y escribe 4/8. Los alumnos

primera parte de la situación ficticia a esta segunda parte. La gráfica se emplea para “descubrir” la fracción de un número en ella. ▪ La visualización en “enteros” de una cantidad inhibe verla en fracción. La respuesta inmediata es un número natural. No se visualiza inmediatamente la idea de fracción en un conjunto de elementos. ▪ Las respuestas correctas de la alumna no son inmediatas (va “tanteando” las mismas). Código: – *Uso de la gráfica como estrategia para una mejor traducción y visualización del producto.* – *Dificultad de los alumnos para aplicar el conocimiento matemático en situaciones nuevas.* – *Dificultad de los alumnos para traducir en términos de fracción una situación que no implica dividir una unidad propiamente.* – *Guía directa (preguntas puntuales y palabras “clave”) como estrategia docente para dirigir la propuesta del trabajo de la estudiante.*	no muestran este procedimiento en sus folios. La maestra va indicando lo que la alumna debe hacer asociando a lo que hizo en la primera gráfica. Se genera el siguiente diálogo: Maestra: ¿Qué hiciste para repartir la torta? Alumna: La dividí en cuatro. Maestra: ¿Qué tienes que hacer ahora? Alumna: Dividirlo entre cuatro. Maestra: Hazlo[303]… ¿cuánto te sale? Alumna: Dos Maestra: No, en fracción Alumna: … Maestra: (se acerca al encerado) Si divides entre cuatro (señala lo que ha hecho la niña), cada parte (señalando) corresponde a cada uno de vosotros, ¿cuánto le corresponde a uno de vosotros? Alumna: Dos Maestra: En fracción… ¿si son CUATRO y UNO le das a tu compañero? Alumna: Un cuarto Maestra: Un cuarto… ¿de cuánto? Alumna: … de dos (ve los pasteles en el recuadro)… de ocho (ve el total). Maestra: … Alumna: Dos octavos.

---

[303] La alumna hace las divisiones respectivas, como se indica en la imagen.

Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ ASOCIACIÓN CON EL TEMA. La profesora asocia la fracción obtenida ($\frac{2}{8}$), con la cantidad de pastelitos (8) ($\frac{2}{8} de 8$). ▪ Los alumnos contrastan sus respuestas con la que está en la pizarra. ▪ EXPLICACIÓN INDIVIDUAL. La profesora explica directamente a la alumna la asociación establecida a partir de la gráfica realizada. ▪ La profesora se vale de condicionales y preguntas muy concretas. No obstante, la *influencia* del entero anula a la fracción. ▪ EXPLICACIÓN GRUPAL. La profesora explica la situación a la clase entera, valiéndose de acciones concretas. ▪ TRADUCCIÓN MATEMÁTICA. La profesora sistematiza la información a través de la expresión matemática correspondiente. Códigos: – *Diálogo a través de la pregunta directa para abstraer el conocimiento matemático (traducción matemática de la situación).* – *Descontextualización del tema para un análisis independiente (centrándose en la expresión matemática).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la descontextualización.*	La maestra acepta dos octavos como respuesta y asocia la fracción con la cantidad total de pastelitos que son ocho, escribiendo: 2/8 de 8 y expresando: “esto es la cantidad de pastelitos que le corresponde a cada uno”. A partir de la gráfica, algunos niños de la clase, expresan “un cuarto” en lugar de “dos octavos” como lo hizo la alumna. La profesora vuelve al gráfico, se centra en la niña y va señalando la división de la gráfica que hizo, estableciéndose el siguiente diálogo: Maestra: Si divides todo entre cuatro, ¿cada una es…? Alumna: Dos Maestra: Observa lo que hiciste con las tortas, las dividiste entre cuatro y cada una es… Alumna: Un cuarto Maestra: Entonces, si estos los divides entre cuatro cada uno es… Alumna: Un cuarto Maestra: Un cuarto de… ¿Cuántos pasteles son en total? Alumna: Ocho Maestra: Un cuarto de ocho. Un cuarto de ocho es dos[304]. Después del diálogo, la maestra pregunta a toda la clase cuántos pastelitos corresponderán a dos niños. Los alumnos aún asocian a cantidades expresadas mediante números naturales, indicando que les toca cuatro pastelitos, a lo que la profesora insiste que lo digan mediante fracción. Los niños del encerado piensan y sus respuestas oscilan entre un cuarto y dos cuartos sin decidirse en primera instancia por ninguna. La profesora vuelve a indicar que a un alumno le corresponde un cuarto, señalando a uno de los niños, luego señala otro, expresando que le corresponde un cuarto también; al final los junta[305] y pregunta cuánto le corresponde a los dos, con lo que los alumnos responden “dos cuartos”.

---

[304] Lo escribe en lenguaje matemático

[305] La profesora une a los niños, intentando que la alumna, y la clase en general, ‘junten’ las expresiones numéricas.

	La profesora asocia cada fracción (1/4 y 2/4) con la cantidad de pastelitos totales y la cantidad de pastelitos que corresponden. Para ello escribe en el encerado: $\frac{1}{4}$ de 8 = 2 $\frac{2}{4}$ de 8 = 4
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ SISTEMATIZACIÓN SIMBÓLICO – TEÓRICA. La profesora asocia la expresión con el tema en cuestión (fracción de un número), explicando en qué consiste. ▪ Los alumnos atienden. Código: – *Exposición directa del conocimiento matemático por parte de la docente*. – *Participación total del estudiante en el proceso de exposición de la docente (al escucharla).*	A partir de esta explicación y señalando las últimas expresiones, la profesora centra la actividad en manifestar que la fracción está actuando como operador de un número, en el caso de los pastelitos, y que este número es “8”. Los alumnos atienden y no comentan. La profesora vuelve a la primera gráfica (la de las tortas) y asocia la fracción con la cantidad de tortas expresando: “2/4 de 2 (tortas). En este caso 2 indica el número de tortas”. Los alumnos se miran sorprendidos.
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ OPERATIZACIÓN. La profesora explica la forma simbólica de averiguar la fracción de un número, operando con los mismos. ▪ Los alumnos observan. Códigos: – *Exposición directa del conocimiento matemático por parte de la docente*.	La profesora pide a los alumnos que observen las expresiones anteriores; luego indica, señalando la segunda expresión: $\frac{2}{4} de 8 = 4$, que primero tiene que dividir la cantidad y luego multiplicarla por las partes que corresponden según a cuántos hay que repartir. La profesora escribe en el encerado lo que ha expresado, de la siguiente manera: (8:4) x2=4. Luego dice: “es la forma de averiguar la fracción de una cantidad”.

Desarrollo de la clase (Parte VI) - APLICACIÓN. En la tercera parte de la situación ficticia. - Los alumnos aplican la forma operativa de hallar la fracción de un número a partir de la intervención de uno de ellos. - COMPROBACIÓN. A partir de un dibujo. Se produce el proceso inverso en la estrategia de enseñanza aplicada por la docente (la gráfica se usa para validar). Códigos: – *Transferencia por parte del alumno del nuevo conocimiento a situaciones concretas (logrado por un alumno).* – *Aplicación del nuevo conocimiento a situaciones concretas (planteadas al inicio).*	Después de la intervención anterior, la maestra pregunta por la cantidad de bombones (que son doce): "¿Cuánto es los 2/4 de la caja de bombones?" Los alumnos no saben qué hacer pero uno de ellos[306] asocia con las operaciones que realizó la maestra y dice: "divides entre 4 y lo multiplicas por 2". Los niños asienten y lo hacen en el encerado. El resultado es 6. La maestra pide que comprueben con un dibujo. Los alumnos dibujan, siguiendo el esquema de los pastelitos. En algunos casos, los alumnos reestructuran la distribución de los "bombones"; en estos, la división gráfica es más sencilla.
Final de la clase - La actividad se detiene por el timbre que indica que el tiempo ha finalizado. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	El tiempo se agota y la sesión termina.

---

[306] Que estaba castigado por hacer desorden, pero que sin embargo, había estado atento a la explicación de la profesora.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La primera propuesta de actividades busca evaluar el nivel de conocimiento aplicado por los alumnos en actividades que implican aplicar un procedimiento (gráfico y/o simbólico) para hallar fracciones equivalentes. Código: – *Actividad de aplicación (operativa directa).*	a) La clase empieza con la revisión de los *ejercicios* del libro sobre equivalencia de fracciones. Algunos alumnos salen al encerado para representar las fracciones y comprobar si son equivalentes. Para ello dibujan las gráficas del libro, dividen como indica la actividad, escriben la fracción que representa y comprueban gráficamente si son equivalentes.
a) La siguiente propuesta es una *situación ficticia* que tiene por objetivo contextualizar en situaciones "cotidianas" una idea matemática nueva (fracción de un número) y desarrollar ésta a partir de aquella (descubrir el conocimiento matemático a partir de una situación cotidiana). No se podría decir que es una actividad aplicativa sino que busca la construcción del conocimiento a partir de una situación concreta. Al final, un alumno establece la relación y aplica directamente en la solución de un caso concreto. Código: – *Actividad de trasferencia de contexto extramatemático a contexto matemático.*	a) La maestra expresa la idea de que la fracción puede funcionar como operador y plantea una *situación ficticia* en que una de las alumnas, a propósito de haber sido su cumpleaños, decide invitar a tres amigos a su casa; la maestra le pide a la niña que escoja a tres compañeros de la clase. Una vez escogidos la maestra les dice a los cuatro que salgan y se sitúen delante del encerado. Continuando con la situación ficticia, la maestra supone que como la madre es atenta decide hacerles dos tortas de diferente sabor (chocolate y nata)… Luego, dirigiéndose a la niña, le dice que tiene que repartir lo que la madre ha preparado entre los invitados, incluyéndose a ella… La profesora asocia cada fracción (1/4 y 2/4) con la cantidad de pastelitos totales y la cantidad de pastelitos que corresponden. Para ello escribe en el encerado: $\frac{1}{4}$ de 8 = 2 $\frac{2}{4}$ de 8 = 4 Después de la intervención anterior, la maestra pregunta por la cantidad de bombones (que son doce): "¿Cuánto es los 2/4 de la caja de bombones?" Los alumnos no saben qué hacer pero uno de ellos[307] asocia con las operaciones que realizó la maestra y dice: "divides

---

[307] Que estaba castigado por hacer desorden, pero que sin embargo, había estado atento a la explicación de la profesora.

	entre 4 y lo multiplicas por 2”. Los niños asienten y lo hacen en el encerado. El resultado es 6. La maestra pide que comprueben con un dibujo. Los alumnos dibujan, siguiendo el esquema de los pastelitos. En algunos casos, los alumnos reestructuran la distribución de los “bombones”; en estos, la división gráfica es más sencilla.

Sesión 2/Caso 2

Lunes, 18 de febrero de 2008. Hora: 09.55 – 10.50. Colegio A

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora inicia la sesión con un repaso de la sesión anterior. ▪ El repaso recae en la profesora quien expone las ideas resumidas del tema. ▪ La profesora propone situaciones “de la vida diaria” para que los alumnos expresen en términos de fracción. ▪ Esta fase de la clase se basa en el REPASO y CONTEXTUALIZACIÓN. Códigos: – *Repaso expositivo del tema (fracción como operador) por parte de la docente.* – *Planteamiento de situaciones ‘cotidianas’ por parte de la docente para traducir en términos de fracción.* – *Participación selectiva de los alumnos en la traducción a lenguaje matemático de situaciones ‘cotidianas’.*	Se da un repaso a la clase anterior sobre la fracción y su interpretación como operador, indicando qué tipo de operación se realiza con cada elemento de la fracción. Luego la profesora facilita algunas situaciones “de la vida diaria” para que los alumnos indiquen en términos de fracción. Por ejemplo: ¿cuántos días de la semana son?, ¿cuántos días tienen inglés? (a propósito, los alumnos regresaban de la clase de inglés), ¿cómo lo expresamos como fracción? Ante esta pregunta, los alumnos manifiestan “tres séptimos”. Luego con relación a los meses del año y los meses de las vacaciones de verano, los alumnos responden “tres doceavo”[308].

---

[308] No se especifica el alumno, puesto que fueron varios a la vez.

Inicio de clase ▪ La profesora plantea una actividad similar a la trabajada en la clase anterior para contextualizar en una situación concreta (del ámbito personal, familiar) la idea de fracción de un número y poder representar en términos matemáticos la misma. ▪ Esta fase de la clase trata sobre el mismo tema y busca la CONTEXTUALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE UNA SITUACIÓN. Códigos: – *Contextualización del objeto matemático en situaciones ‘cotidianas’ a fin de ser identificado en ellas.* – *Participación selectiva del estudiante en la ejecución de la actividad (propuesta por la docente).*	A continuación, la profesora, retomando el tema de la clase anterior, les comenta que la idea de fracción como operador puede aparecer en varias “situaciones concretas” y facilita el siguiente ejemplo específico: “Supongamos que nuestro dinero ahorrado es de treinta euros y Nerea 1[309] quiere gastar un tercio de su dinero en su hermanito pequeño. Los alumnos comentan lo que puede comprar Nerea para su hermanito, básicamente mencionan: juguetes y ropa; la maestra permite que los alumnos expresen sus ideas; luego le pregunta a la alumna: ¿cuánto gastas en tu hermanito?” La maestra le pide a Nerea 1 que salga al encerado y represente la cantidad que gasta en el hermanito.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La alumna resuelve la situación expresando lo gastado. No obstante, no es lo que la maestra le propuso directamente (¿cuánto gastaste en tu hermanito?). ▪ La alumna no comprende rápidamente lo que la maestra dice y esta la orienta paso a paso. ▪ Los alumnos intervienen. Algunos han captado lo que la maestra propone. ▪ La etapa de la clase se centra en la RESOLUCIÒN DE LA SITUACIÓN.	La alumna sale al encerado y, sin hacer cuentas ni representar mediante gráficos, dice que gasta 10 euros. La profesora le pide que lo exprese como fracción; luego la alumna escribe un tercio, en términos de fracción, en el encerado. La profesora le dice que la expresión (lo que ha escrito) no está bien, que “le falta algo”. La alumna no entiende qué debe escribir y, aunque intenta, no añade nada; algunos alumnos de la clase expresan, de forma oral que la expresión es “un tercio de treinta”. La profesora asiente la intervención de los alumnos y le dice a Nerea que lo escriba en el encerado. La alumna, luego de fijar su mirada en la maestra, en los estudiantes y en el encerado, añade un cero al denominador de la fracción, con lo que se transforma en 1/30. La profesora niega esa expresión y le insiste que no es lo que debe hacer. La profesora vuelve a

---

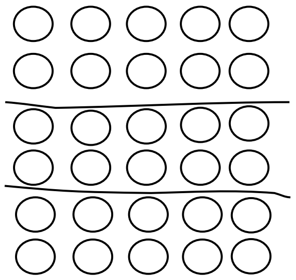
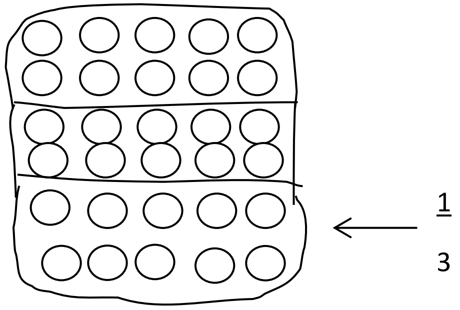
[309] La maestra se dirige a la alumna.

▪ La situación se resuelve directamente (dividiendo entre tres). Códigos: – *Resolución de la situación por parte de una estudiante.* – *Dificultad de los estudiantes para expresar como fracción una situación que implica manipulación directa de números enteros.* – *Orientación directa a través de indicaciones explícitas de la docente en la actividad del alumno a fin de lograr el objetivo (representar en términos de fracción como operador).* – *Participación selectiva de los estudiantes en el desarrollo de la actividad ‘cotidiana’ (propuesta por la docente).*	plantear la situación, resaltando que gasta “un tercio de treinta”, y la alumna escribe la expresión de la siguiente manera: “ $\frac{1}{3}de30$ ”. A la expresión anterior, la alumna añade “= 10”, quedando de la siguiente manera: “ $\frac{1}{3}de30=10$ ”. La profesora acepta lo que ha escrito Nerea, manifestando que es correcta la expresión, luego añade que “como los números son sencillos es fácil hallar el resultado”; acto seguido le pide a la alumna que explique qué es lo que ha hecho con los treinta euros. La profesora, dirigiéndose a toda la clase, insiste en que cada alumno no sólo debe resolver sino que debe explicar lo que va a hacer y luego cómo lo hace. La alumna, con un poco de recelo[310] explica: “divido treinta entre tres”.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora solicita la representación gráfica de la situación. ▪ La comunicación entre profesora y alumna no es fluida, la alumna no comprende directamente lo que la profesora solicita y esta le orienta paso a paso. La alumna sigue los pasos. ▪ En esta fase se busca la REPRESENTACIÓN GRÁFICA de la situación. Códigos:	Antes que la alumna continúe, la profesora le pide que represente gráficamente en el encerado lo que ha expresado: “representa lo que has dicho”. La alumna mira el encerado y observa a la profesora; aparentemente, no sabe qué graficar. Al ver que la alumna no da respuesta, la maestra le especifica que grafique las monedas, y la alumna dibuja 10 círculos. La maestra le pregunta por qué dibuja diez monedas; luego Nerea responde que es lo que gasta en el hermanito. La profesora le dice que represente todo el dinero; es decir, los treinta euros. La alumna dibuja más círculos hasta que completa treinta. Luego la profesora le pide que explique qué ha hecho y la alumna encierra 10 círculos. La profesora le indica que lo haga con todas las monedas[311]. La alumna hace tres grupos iguales con los treinta círculos, separándolos equitativamente mediante dos líneas. La imagen queda representada de la siguiente manera:

---

[310] Su intervención no es espontánea y duda en cómo manifestarlo, ya que inicia su intervención y se corrige.

[311] Es decir, que agrupe las monedas en grupos de diez. Lo primero que tiene que hacer es hacer tres grupos con las treinta monedas y seleccionar uno de los grupos (1/3), que representa lo que gasta.

– *Recurrencia a la representación gráfica como medio para interpretar la situación y traducir al lenguaje simbólico.* – *Guía directa (indicaciones directas) de la docente del trabajo del estudiante.*	 La profesora le pregunta directamente qué hizo. La alumna manifiesta que “los divide entre tres”; luego, la profesora le pide que lo exprese correctamente en el dibujo. La alumna hace tres divisiones, encierra los círculos y señala la parte que indica el gasto (un tercio). 
Desarrollo de la clase (Parte III) - La profesora pregunta por la situación en general y solicita expresar como “fracción de un número” desde otra perspectiva (cuánto queda). - La situación no es inmediatamente comprendida. - Una de las estrategias aplicadas por la maestra es expresar frases incompletas, a fin de que los alumnos las completen (“dos tercios de…).	Luego, la profesora le pregunta cuánto le queda. La alumna le dice, inmediatamente, que veinte. La maestra le manifiesta que lo exprese como fracción, especificando la parte en el dibujo que indica lo que le queda. La alumna señala “las monedas” restantes; acto seguido, la profesora le pregunta qué fracción es esa. La alumna expresa que son “dos tercios”. La profesora intenta que complete la frase: “dos tercios de…” La alumna completa la frase: “dos tercios de treinta” y la escribe en el encerado. La profesora continúa y sintetiza: “dos tercios de treinta es igual a veinte euros”. Observando la expresión anterior: $\frac{2}{3} de 30 = 20$, la profesora pregunta cómo saber que son veinte euros. La misma alumna responde que se divide y se resta. Uno de los alumnos dice que se suma. La profesora pregunta a la clase si están de acuerdo. Un grupo de alumnos responde que no;

▪ Esta fase se orienta a un ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN desde la perspectiva de "fracción de un número". Códigos: – *Dificultad en los estudiantes para expresar (o aplicar) como fracción una cuestión asociada a cantidades enteras.* – *Planteamiento directo de la situación por parte de la docente para una mejor compresión (uso de expresiones "cortadas" para que los alumnos completen).*	Lucía es quien argumenta expresando que se multiplica por dos. La profesora le pregunta a la alumna del encerado si ha entendido. La alumna asiente. La profesora le dice que regrese a su carpeta.
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora propone otras situaciones ficticias, expuesta de manera estructurada y directa[312], tipo problema matemático escolar para que sea resuelta por los alumnos. Elije un alumno para que resuelva la situación en el encerado. ▪ La actitud del alumno es expresar lo que sucede con las cantidades y cómo operar con ellas. ▪ La resolución se centra en el aspecto operativo de la situación. ▪ Esta fase es de APLICACIÒN a situaciones similares. Códigos: – *Propuesta de problema matemático escolar sobre fracción como operador para resolver*	La profesora propone otro ejemplo: "Un libro tiene 75 páginas y leí los 2/5 del libro, ¿cuánto leí?". Los alumnos levantan la mano[313]. La profesora le propone a Emilio salir al encerado. El alumno sale y expresa: "setenta y cinco entre cinco", escribiendo la operación. La profesora le pregunta al alumno por qué divide; luego, el alumno responde: "porque se hacen cinco partes… se reparten todas las páginas en 5 grupos". La profesora le dice al alumno que después de la división coloque el signo igual. El alumno responde: "15 páginas ha leído". La profesora mira al alumno y éste observa su trabajo. Lucía dice que 15 es 1/5. La profesora añade: "eso sería cada una de las 5 partes": 1/5. La profesora vuelve a preguntar: "¿cuánto he leído?". El alumno responde que ha leído "2/5". La profesora pregunta, ¿qué hay que hacer? Los alumnos responde: "sumar". La profesora añade: "sumar… o multiplicar. Han tenido que dividir por lo que me indica el denominador… y multiplicar por lo que me indica el numerador". El alumno realiza la operación y luego se sienta.

---

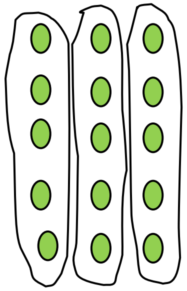
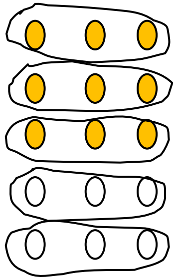
[312] Usamos el término "estructurada", para indicar que aquello tiene una estructura tal que le permite claridad de ideas y comprensión. Usamos el término "directa" para indicar que lo que se expone se hace sin ambigüedades, con lo cual es fácil saber lo que se transmite. En estos casos, la situación ficticia tiene la estructura de un problema matemático verbal escolar que busca aplicar directamente un contenido operativo.

[313] Actitud que adoptan cuando quieren intervenir.

aplicando directamente el conocimiento trabajado. – *Participación selectiva de los estudiantes en el desarrollo del problema (propuesta por la docente).* – *Interrogación de la docente sobre el proceso seguido en la resolución de problemas.* – *Recurrencia al planteamiento textual del problema para una mejor resolución (volver al texto).*	
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ La profesora entrega una hoja de actividades en la que se pide hallar y representar gráficamente la fracción de un número, según los casos propuestos. ▪ La profesora solicita cambiar un dato de la ficha (en la que se incluía una fracción impropia; esta se cambia por una propia). ▪ Los alumnos no saben qué hacer frente a la actividad, aunque lanzan inquietudes al respecto. ▪ La maestra orienta el trabajo hacia la primera actividad propuesta en la hoja (que está desarrollada). ▪ La maestra analiza con los alumnos la información de la primera actividad. ▪ La profesora explica la primera situación y la asocia a lo que se ha estado trabajando sobre "fracción de un número" y les dice que	La profesora propone una hoja de actividades (anexo 2). Para ello les entrega el folio y les dice que en el segundo ejercicio cambien 5/3 por 3/5. Los alumnos no saben qué hacer y lanzan diferentes inquietudes[314]. La profesora les dice que primero observen el primer ejercicio, que está resuelto, ya que "es el que va a indicar cómo hacer los siguientes". Los alumnos siguen sin entender. La profesora les pide que observen el primer ejercicio y pregunta cuántos triángulos hay. Los alumnos dicen "tres" refiriéndose a los tres de color que hay. La profesora pregunta por la cantidad total de triángulos y los alumnos responden: "veintiuno". La profesora explica lo que se ha realizado en el primer ejercicio haciendo alusión a lo que se ha estado trabajando en clase. Les dice que ellos pueden hacer los dibujos que quieran. La profesora propone que los alumnos realicen la hoja de ejercicio de forma individual y se acerca a cada uno de ellos para observar qué es lo que están haciendo y corregir si es posible. Los alumnos intentan dibujar la cantidad indicada en cada ejercicio; sin embargo, les es difícil graficar la fracción que se indica. La mayoría comete equivocaciones y en todos los casos corrige. Aparentemente los alumnos no comprenden lo que tienen que hacer o cómo deben hacerlo. La profesora intenta que, retomando la explicación del primer ejercicio, los alumnos puedan comprender los demás; para ello, les explica que hay siete grupos de tres, como lo indica el denominador y que se ha pintado uno, como lo indica el numerador. Los alumnos retoman sus folios e intentan representar gráficamente "tres quintos de quince", en algunos casos, dibujan de

---

[314] Se escucha decir que no entienden o no han visto lo que el folio les presenta. Uno de los alumnos manifiesta recordar algo.

realicen las siguientes situaciones de manera individual. ▪ Las interpretaciones son diversas. ▪ La profesora vuelve a explicar el primer caso, asociando la expresión matemática a la situación gráfica expuesta (hay siete grupos de tres como lo indica el denominador…). ▪ Las interpretaciones son diversas. Los alumnos manipulan las cantidades de acuerdo al numerador y denominador establecidos: grafican de tres en tres porque el numerador es tres o de cinco en cinco porque el denominador es cinco… hasta completar quince). Esto no les permite interpretar correctamente la situación. ▪ Los alumnos toman unas características y no otras de la situación (el numerador o denominador sin considerar su definición) ▪ Solo se resuelve uno de los casos (son tres en total). ▪ Esta fase es de REFUERZO SIMBÓLICO Y GRÁGICO. Códigos: – *Planteamiento gráfico-simbólico de fracción como operador (descontextualizada de situaciones ‘cotidianas’).* – *Cambio de propuesta (de 5/3 a 3/5) a una menos compleja.* – *Interrogación literal sobre la situación previo a la explicación para centrar la atención del alumno.*	tres en tres[315], de manera ordenada (en filas y columnas); en otros, lo hacen sin un orden observable (de acuerdo al espacio y tamaño de cada dibujo). A partir de sus gráficas, los alumnos pintan tantos grupos como indica el numerador: un grupo lo hace a partir de las colecciones establecidas según interpretan el denominador de la fracción (por ejemplo, si el denominador es cinco, realizan grupos de cinco – imagen “a”; otro, agrupan según resulte de dividir el número entre el denominador (siguiendo el ejemplo: quince entre cinco – imagen “b”:  a  b La maestra corrige algunas propuestas, sobre todo aquellas en las que los estudiantes consideran el denominador como la cantidad de cada grupo.

---

[315] El ejercicio propuesto en el folio dice “cinco tercios de quince”. Aun cuando la docente ha propuesto que cambien cinco tercios por tres quintos, algunos alumnos trabajan en función de lo escrito en el ejercicio.

– *Explicación previa de la docente del ejemplo propuesto.* – *Participación total del estudiante al ser una actividad propuesta para todos de manera individual.* – *Dificultad en los alumnos para representar gráficamente a partir de un ejemplo (propuesto en la hoja de actividad).* – *Corrección directa del docente al trabajo planteado incorrectamente.*	
Desarrollo de la clase (Parte VI) ▪ La profesora propone a los estudiantes “inventar situaciones” en las que se aplique lo que han visto (fracción de un número). ▪ Los alumnos plantean situaciones como las propuestas en los libros de texto o aquellas de la profesora. ▪ El alumno que plantea escoge al alumno que resuelve. ▪ En la resolución, los alumnos se centra (exponen) las operaciones a realizar y los resultados obtenidos. ▪ La profesora reorienta el trabajo de los alumnos al análisis de lo que piden (comprensión de la situación). ▪ Se evidencia cierta dificultad en los alumnos para explicar con palabras lo que a veces hacen rápido operativamente. ▪ Los alumnos plantean situaciones del mismo estilo; en algunos casos (segundo) no se llega a solución ya que la alumna considera	Una vez finalizada la actividad anterior, la profesora les propone a sus alumnos que inventen una situación en la que se aplique lo que han visto. Los alumnos intentan pensar en un *problema*[316] y lo van escribiendo en sus fichas. La profesora le dice a Lucía que lea para todos *el problema que ha planteado* y saque a alguien a resolverlo. La alumna lo lee, escribe los datos en el encerado y señala a Raquel para que lo resuelva. El problema que propone es el siguiente: Antonio hizo un viaje en su coche. El depósito tiene 63 litros y gastó 5/7 de 63. ¿Cuántos litros gastó?”. Como en casos anteriores la alumna escribe directamente la operación (u operaciones) que resuelve la pregunta: 63:7=9 9x5=45. No obstante, la profesora desea que vaya por partes; es decir, que primero explique lo que tiene que hacer y luego realice las operaciones. Raquel expresa, en palabras, lo que ella considera que debe hacer y que se asocia directamente con las operaciones que ha realizado: “primero tengo que dividir sesenta y tres…”. La profesora evita que continúe y le dice: “primero tienes que analizar lo que te piden”. La alumna, luego de un momento, responde: “… hacer grupos de siete”. La profesora, señalando la fracción, pregunta. “cada una de estas partes, ¿cuántos son? Los alumnos manifiestan varias respuestas: “cinco”, “siete”… “nueve”, en relación a las cantidades

---

[316] Se le pregunta a la alumna qué hace y ella responde que “pensando en un problema”

que estaba mal planteado. La maestra no insiste. ▪ Los alumnos intervienen en la resolución de los problemas planteados. Códigos: – *Planteamiento de problemas matemáticos escolares por parte de los alumnos en los que se aplique el conocimiento aprendido.* – *Participación selectiva de los estudiantes en el planteamiento y resolución de los problemas (propuesta por la docente y por el alumno).* – *Explicación/interpretación de la situación previo a la resolución del problema.*	implicadas. Luego, la profesora pregunta: “¿Qué quiere decir 5/7?”; los alumnos no responden, aunque se miran entre sí, acto seguido, la misma profesora responde y pregunta: “que de siete partes cojo cinco…y estas siete partes cuántos litros son?”. La alumna responde: “divido 63:7”. La maestra pregunta: “¿cuánto vale cada uno de los siete apartados?”… ¿cada una de esas partes cuánto sale?” La niña responde “nueve”. La maestra completa la frase: “una parte, nueve litros”, luego pregunta: ¿cuántas partes gastó? Los alumnos responden 5/7… Si uno son 9 litros, ¿cuánto es en total? La alumna opera “nueve por cinco” y responde. La profesora le pregunta a la alumna que salió a resolver el problema de la compañera si ha planteado un problema y ella responde que sí; luego lee[317]. La profesora, luego de escuchar la propuesta de la alumna, le pregunta cómo se representa “la tercera parte” (que es un aspecto del problema) como fracción. Los alumnos dan diferentes respuestas: $\frac{3}{7};\frac{3}{4};\frac{3}{5};\frac{1}{3}$. Le pregunta a la alumna como lo haría y ésta responde: “el resultado… haría dibujar 10 columnas y coger 3” Se desiste del problema ya que la alumna expresa que no está segura. La profesora tampoco insiste. La profesora pregunta a Emilio si tiene algún problema propuesto; el alumno sale al encerado, lee su propuesta y escribe los datos[318]. La profesora le sugiere escoger a uno o una de sus compañeros para que lo resuelva; Emilio elige a Nerea 2 y la alumna sale al encerado. La primera acción de Nerea es escribir la operación, la profesora se percata y le dice que antes de hacer cualquier operación debe preguntarse lo que tiene que hacer. La alumna escribe 2/5 de 85, luego empieza a operar. La profesora observa lo que Nerea escribe y le dice que escriba el signo igual antes de operar. Una vez resuelto el problema planteado, la maestra le manifiesta a Nerea que puede proponer su problema. La alumna lo lee[319]. Ante esta situación, algunos alumnos expresan que tienen que multiplicar y otros que dividir. La profesora empieza a cuestionar el problema y los alumnos responden con acierto[320]. La profesora cambia el término 'podres' incluido en el problema por el de 'secas' y pregunta cuántas hojas secas tiene el árbol, además añade: “¿cuántas hojas corresponden a esa fracción?”. Los alumnos expresan diferentes operaciones, entre divisiones y

---

[317] El problema que plantea es el siguiente: “En una biblioteca hay 100 libros. Yo ya leí la tercera parte. ¿Cuántos libros me quedan por leer?”

[318] El problema es como sigue: “En una tienda de animales hay 85 iguanas y yo quiero 2/5, ¿cuántas iguanas compro?”

[319] La alumna propone el siguiente problema: “Un árbol tiene 75 hojas y están podres 2/3, ¿cuántas hojas (podres) tiene en total el árbol?

[320] Les pregunta qué hacer, qué pide el problema, qué datos tienen.

	multiplicaciones. La alumna escribe “2/3 de 75”, luego la profesora le pregunta cuál es el siguiente paso. La alumna escribe las operaciones respectivas y encuentra el resultado final que la maestra acepta como respuesta correcta.
Final de la clase ▪ La maestra termina la clase al culminar la solución de la alumna. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase cerrara (actividad finalizada).*	El tiempo culmina y la clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La primera propuesta es una actividad de repaso que busca que los alumnos utilicen el conocimiento aprendido en casos concretos. Código: – *Actividad de repaso (de un tema ya trabajado).*	a) Se da un repaso a la clase anterior sobre la fracción y su interpretación como operador, indicando qué tipo de operación se realiza con cada elemento de la fracción. Luego la profesora facilita algunas situaciones “de la vida diaria” para que los alumnos indiquen en términos de fracción. Por ejemplo: ¿cuántos días de la semana son?, ¿cuántos días tienen inglés? (a propósito, los alumnos regresaban de la clase de inglés), ¿cómo lo expresamos como fracción? Ante esta pregunta, los alumnos manifiestan “tres séptimos”. Luego con relación a los meses del año y los meses de las vacaciones de verano, los alumnos responden “tres doceavo”.
a) La siguiente actividad es similar a la de la sesión anterior, pues busca a través de una situación ficticia (ahora “situación concreta”) abstraer el conocimiento matemático. Se puede decir que es de aplicación puesto que es un nuevo caso para el mismo objeto matemático; sin embargo, se entremezcla	d) A continuación, la profesora, retomando el tema de la clase anterior, les comenta que la idea de fracción como operador puede aparecer en varias “situaciones concretas” y facilita el siguiente ejemplo específico: “Supongamos que nuestro dinero ahorrado es de treinta euros y Nerea 1[321] quiere gastar un tercio de su dinero en su hermanito pequeño. Los alumnos comentan lo que puede comprar Nerea para su hermanito, básicamente mencionan: juguetes y ropa; la maestra permite que los alumnos expresen sus ideas; luego le pregunta a la alumna: ¿cuánto gastas en tu hermanito?” La maestra le pide a Nerea 1 que salga al encerado y represente la cantidad que gasta en el hermanito.

---

[321] La maestra se dirige a la alumna.

con construcción puesto que el objetivo no es una aplicación directa. Código: – *Actividades de aplicación (con guía de la docente)*	
a) La siguiente actividad es la propuesta de un problema matemático escolar estructurado que busca que los alumnos representen mediante fracción de un número la situación y resuelvan. La profesora busca la explicación previa de la situación antes de resolverla. Código: – *Actividad de aplicación en problemas matemáticos.*	a) La profesora propone otro ejemplo: “Un libro tiene 75 páginas y leí los 2/5 del libro, ¿cuánto leí?”. Los alumnos levantan la mano[322]. La profesora le propone a Emilio salir al encerado. El alumno sale y expresa: “setenta y cinco entre cinco”, escribiendo la operación. La profesora le pregunta al alumno por qué divide; luego, el alumno responde: “porque se hacen cinco partes… se reparten todas las páginas en 5 grupos”. La profesora le dice al alumno que después de la división coloque el signo igual. El alumno responde: “15 páginas ha leído”. La profesora mira al alumno y éste observa su trabajo. Lucía dice que 15 es 1/5. La profesora añade: “eso sería cada una de las 5 partes”: 1/5. La profesora vuelve a preguntar: “¿cuánto he leído?”. El alumno responde que ha leído “2/5”. La profesora pregunta, ¿qué hay que hacer? Los alumnos responde: “sumar”. La profesora añade: “sumar… o multiplicar. Han tenido que dividir por lo que me indica el denominador… y multiplicar por lo que me indica el numerador”. El alumno realiza la operación y luego se sienta
a) La siguiente actividad busca que los alumnos representen gráficamente la fracción de un número y hallen el resultado a partir de ella (expresión – gráfica – resultado – expresión). Es una forma inversa a la anterior en la que se partía de la gráfica. El trabajo individual del alumno no le permite resolver correctamente los casos propuestos, por lo que la docente opta por explicar el modelo. Código:	a) La profesora propone una hoja de actividades (anexo 2). Para ello les entrega el folio y les dice que en el segundo ejercicio cambien 5/3 por 3/5. Los alumnos no saben qué hacer y lanzan diferentes inquietudes[323]. La profesora les dice que primero observen el primer ejercicio, que está resuelto, ya que “es el que va a indicar cómo hacer los siguientes”.

---

[322] Actitud que adoptan cuando quieren intervenir.

[323] Se escucha decir que no entienden o no han visto lo que el folio les presenta. Uno de los alumnos manifiesta recordar algo.

– *Actividad de aplicación (gráfica y simbólica en base a un modelo).*	
a) La profesora retoma los problemas matemáticos sobre fracción como operador; sin embargo, en este caso solicita a los alumnos que inventen sus propios problemas y los resuelvan. Los alumnos reconocen este tipo de propuesta como *problemas*. Código: – *Actividad de aplicación (planteamiento)* – *Actividad de aplicación (resolución)*	a) Una vez finalizada la actividad anterior, la profesora les propone a sus alumnos que inventen una situación en la que se aplique lo que han visto. Los alumnos intentan pensar en un *problema*[324] y lo van escribiendo en sus fichas. La profesora le dice a Lucía que lea para todos *el problema que ha planteado* y saque a alguien a resolverlo. La alumna lo lee, escribe los datos en el encerado y señala a Raquel para que lo resuelva. El problema que propone es el siguiente: Antonio hizo un viaje en su coche. El depósito tiene 63 litros y gastó 5/7 de 63. ¿Cuántos litros gastó?”.

Sesión 3/Caso 2

Martes, 19 de febrero de 2008. Hora: 09.00 – 09.55. Colegio A

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La sesión empieza con la corrección de las actividades propuestas en el libro de texto sobre hallar la fracción de un número. ▪ Las actividades son de dos tipos: las primeras solicitan directamente hallar (hallar los… de…) y las siguientes son propuestas de problemas en los que se involucra la fracción de un número. ▪ Los alumnos salen al encerado a exponer sus soluciones.	La clase se inicia resolviendo las actividades del libro que se propusieron para la casa. La maestra saca al frente, de manera individual, a cada niño a quienes les propone hallar la fracción de un número. Los niños, al salir al encerado, escriben lo que la maestra plantea (“tienes que encontrar los… de…”). Los niños se acercan al encerado, manifiestan lo que tienen que hacer (“hallar los… de…) y proceden a operar. Los dos primeros ejercicios se resuelven inmediatamente. En el tercer ejercicio, que propone hallar los dos tercios de veinticuatro, la maestra se detiene pues quien tiene que resolverlo es una niña a quien le fue difícil, en la clase pasada, expresar con palabras, y sin ir directamente a operar, lo que tenía que hacer. La maestra le pide a Belén que ejemplifique a

---

[324] Se le pregunta a la alumna qué hace y ella responde que “pensando en un problema”

▪ La maestra insiste en que los alumnos expliquen lo que hacen. ▪ La maestra guía la acción del alumno cuando este no sigue los pasos establecidos. ▪ La acción de la maestra permite que Belén reorienten su acción hacia una propuesta correcta. ▪ Los alumnos exponen diferentes formas operativas de resolver un problema a sugerencia de la docente. ▪ No se sistematiza esta fase resaltando las diferentes operaciones aplicadas. Códigos: – *Planteamiento directo a los alumnos de una fracción de un número (fracción como operador).* – *Orientación directa de la docente en el desarrollo de la propuesta (fracción como operador) a través de preguntas explícitas.* – *Propuesta de casos similares (fracción de un número directamente).* – *Descripción/justificación por parte de los alumnos del proceso seguido (verbal).* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente)* – *Planteamiento directo a los alumnos de problema matemático que involucra fracción de un número.*	través de una gráfica lo que tiene que hacer[325]. La alumna dibuja círculos distribuidos en seis columnas[326]; acto seguido, se genera el siguiente diálogo: ○ Profesora: ¿Qué tienes que hacer? Belén: Coger tres filas… (Señalando la imagen) Profesora: No… ¿Qué tienes que hacer? Belén: … Profesora: Dividir no sólo es partir, también es repartir o agrupar, ¿entienden con esas palabras lo que les digo?” Alumnos: …[327] Belén: Junto en partes[328] Alguna alumna sugiere que los círculos dibujados por Belén no están bien “distribuidos”; sin embargo, la profesora dice que eso no importa. Profesora: ¿Qué más tienes que hacer? Belén: Tengo que coger dos

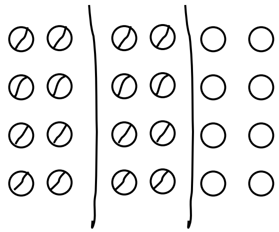
---

[325] Los niños suelen ir directamente a operar con las cantidades que se presentan pero les resulta difícil explicar y expresar con palabras lo que significa la acción que están realizando (o van a realizar). Los niños directamente dicen la operación u operaciones que tienen que ejercitar y lo hacen. Esta actitud se transfiere a la resolución de los problemas matemáticos que se proponen en el aula y en el libro de texto sin muchas veces reflexionar sobre lo que la situación plantea.

[326] Los círculos no estuvieron distribuidos equitativamente; es decir, la separación entre cada círculo (sobre todo de derecha a izquierda) no fue siempre la misma.

[327] Aunque nadie responde con palabras, se observa que algunos niños mueven la cabeza de arriba hacia abajo y otros de derecha a izquierda.

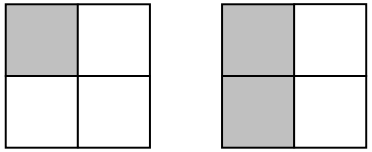
[328] La alumna dibuja una línea entre cada dos columnas (cada ocho círculos).

– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de fracciones planteadas directamente (propuesta por la docente).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución del problema (propuesta por la docente y por iniciativa de los estudiantes.* – *Orientación de la docente hacia el uso explícito de fracciones en la resolución del problema propuesto.*	Profesora: Señala lo que tienes Belén: Este y este…[329] Profesora: Opera y escribe el resultado.  La alumna resuelve la expresión sin dificultad, escribiendo las operaciones pertinentes y sus respectivos resultados; la maestra manifiesta que es correcto y le indica a la niña que vuelva a su carpeta. La corrección de la tarea continúa por lo que salen otros niños y/o niñas a quienes les propone actividades similares: Profesora: Escribe cinco sextos de trescientos Nerea 2: (escribe) ¿Cuántas partes? Profesora: ¿Qué cantidad son cinco sextos de trescientos? Nerea 2: Trescientos lo multiplico por cinco y lo divido entre seis Profesora: ... Nerea: Es 250 Profesora: ¿Cuántos son “siete décimos de quinientos”? Natalia: ¿Cuánto da?

---

[329] La alumna hace una raya a cada uno de los círculos de dos de las tres partes.

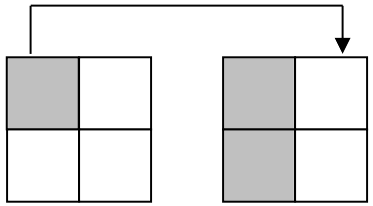
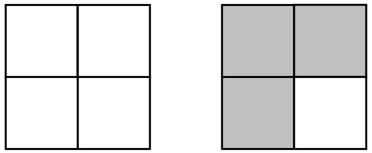
	Profesora: ¿Cuánto es “siete décimos de quinientos”? Natalia: El siete de aquí hay que multiplicar Profesora: ¿Por qué? Natalia: Para averiguar cuánto es los siete décimos de quinientos Profesora: … La alumna resuelve realizando las operaciones que involucran las cantidades propuestas e indicándolas en el encerado. Luego de cuatro propuestas más de la misma naturaleza en los que los alumnos tienen que hallar directamente la fracción de un número, al siguiente alumno, Emilio, la profesora le propone un problema de los que se encuentran en el libro y que designó para resolver en casa. El problema es como sigue: “En una clase de quinto hay 24 alumnos/as. Las 2/3 partes son niñas, ¿cuántos niños hay?” El alumno escribe los datos en el encerado y procede a operar. Cuando concluye las operaciones, la profesora pregunta qué es lo que ha hallado y el alumno responde que la cantidad de niños. La profesora guarda silencio por un instante. Los niños en el aula se han dado cuenta del error. La profesora repite el texto del problema poniendo énfasis en la palabra “niñas”. El alumno observa su trabajo y se da cuenta del error que había cometido. La profesora repite la pregunta del problema, poniendo énfasis en la palabra “niños”. El alumno responde: ocho. La profesora le pregunta cómo ha llegado a esa conclusión, como el alumno se queda en silencio, la maestra le pregunta qué operación ha realizado o tiene que realizar. El alumno le dice que una resta ya que al 24 le resta 16. La profesora pregunta si hay otra manera de responder ese problema, es decir “otro camino”. Manuel, que está sentado en su escritorio, manifiesta que a 3/3 se le resta 2/3 y se halla 1/3. Algunos alumnos no lo comprenden inmediatamente, pero otros, sí. La profesora le pide Manuel que salga al encerado y explique. El alumno escribe: 3/3 – 2/3 = 1/3, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿Por qué restas 2/3 a 3/3? Manuel: ¿Porque quiero saber cuántos alumnos hay?

	Profesora: ¿Qué significa 3/3? Manuel: Todos los alumnos Profesora: ¿Por qué 3/3?, ¿por qué esa fracción? Manuel: Porque es todo Profesora: Y 2/3 son las alumnas… por lo tanto 1/3, lo que falta, corresponde a los alumnos[330]. Al volver a ser preguntados sobre si entendían lo que había explicado el compañero, los alumnos asienten con la cabeza.
Inicio de clase ▪ La profesora representa gráficamente dos fracciones homogéneas en gráficas distintas y pregunta si se pueden sumar, representando simbólicamente dicha suma. ▪ Los alumnos responden afirmativamente, considerando que dos fracciones se pueden sumar, respondiendo afirmativamente el resultado de la misma. ▪ La maestra explica gráficamente cómo se realiza la suma. ▪ La profesora pregunta cómo se realiza la suma de fracciones homogéneas. ▪ Los alumnos responden en función de la manipulación de sus elementos. Códigos: – *Planteamiento directo de una suma de fracciones homogéneas a través de su representación gráfica y simbólica.*	El tiempo ha transcurrido y falta poco para concluir la hora de clase[331]. Sin embargo, la profesora dibuja dos cuadrados y los divide en cruz, en partes iguales. Al primer cuadrado le pinta una parte y al segundo dos. Los gráficos quedan como sigue:  $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$ La profesora pregunta si se puede sumar esas dos fracciones. Para ello, escribe lo que corresponde en cada fracción a la parte pintada y coloca un signo más entre ellas; luego pregunta: “¿se puede hacer esto (colocando el signo ‘más’) con las fracciones?”. Los alumnos responden afirmativamente, a lo que la profesora lanza otra pregunta: “y ¿cuánto es?”. Los niños responden que “tres cuartos”. La profesora explica en el gráfico que es como pasar la parte sombreada en la primera gráfica a la segunda (lo traslada con una flecha y sombrea otra parte en el segundo dibujo).

---

[330] En todo momento, la profesora señala en el encerado cada una de estas cantidades.

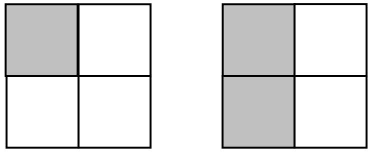
[331] Al inicio de ésta, la profesora tuvo una conversación con los alumnos sobre las normas del colegio y el papel de todos los profesores. Todo esto, a propósito de un asunto que ocurrió con este grupo en una hora y asignatura distintas.

– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar ideas sobre el tema (suma de fracciones homogéneas).* – *Explicación directa por parte de la docente de la transformación gráfica de una suma de fracciones homogéneas.* – *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la suma de fracciones homogéneas (verbal).*	 La profesora pregunta cómo son las fracciones que han empleado. Los niños dicen que son equivalentes aunque no insisten en la idea. Luego dicen que son homogéneas. La profesora pregunta cómo se suman las fracciones homogéneas y los niños responden que “sumando los numeradores y escribiendo el mismo denominador”. La profesora acepta la intervención de los estudiantes.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora la situación inversa a la anterior en una situación concreta: tengo ¾ y quiero quitar ¼ … ▪ La situación es reconocida inmediatamente por los alumnos como una situación de resta por la palabra “quitar”. ▪ La maestra explica gráficamente la situación, apoyándose de las mismas gráficas anteriores (deshace lo realizado para la suma). ▪ La profesora pregunta cómo se realiza la suma de fracciones homogéneas. ▪ Los alumnos responden en función de la manipulación de sus elementos. Códigos: – *Planteamiento verbal ‘situacional’ (uso de palabras clave) de una resta de fracciones homogéneas.*	Acto seguido, propone otra situación: “tengo ¾ y quiero quitar ¼”. Algunos niños manifiestan que hay que restar. Al preguntarles porqué hay que restar responden que “porque dice *quitar*”. La maestra, sobre las gráficas anteriores, explica la situación, separando de la segunda el ¼ que había sido añadido anteriormente. Escribe la resta y pregunta cuánto es. Los niños responden correctamente; luego, la profesora pregunta qué hay que hacer para restar las fracciones homogéneas. Los niños expresan lo que hay que hacer diciendo que “se restan los numeradores y se escribe el mismo denominador”; además, añaden que “es fácil”.  $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$

– *Explicación directa por parte de la docente de la transformación gráfica de una resta de fracciones homogéneas.* – *Diálogo a través de pregunta directa para comprobar la comprensión de lo explicado en el caso concreto propuesto.* – *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la resta de fracciones homogéneas (verbal).*	
Final de la clase ▪ La profesora establece de manera general, diferencias entre la suma y resta de fracciones homogéneas y heterogéneas. Código: – *Introducción general de fracciones diferentes.* – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La profesora toma esta última idea (“es fácil”) y dice que efectivamente es fácil con estas fracciones pero que es difícil con otras. Manuel hace referencia a las fracciones heterogéneas. La profesora insiste que lo verán la próxima clase. Termina la sesión.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) Las actividades propuestas por la docente busca que los alumnos apliquen el conocimiento adquirido en situaciones concretas (contextualizadas en situaciones cotidianas o no). Código: – *Actividades de aplicación (operativa directa).*	a) La clase se inicia resolviendo las actividades del libro que se propusieron para la casa. La maestra saca al frente, de manera individual, a cada niño a quienes les propone hallar la fracción de un número. Los niños, al salir al encerado, escriben lo que la maestra plantea (“tienes que encontrar los… de…”). Los niños se acercan al encerado, manifiestan lo que tienen que hacer (“hallar los… de…) y proceden a operar. Luego de cuatro propuestas más de la misma naturaleza en los que los alumnos tienen que hallar directamente la fracción de un número, al siguiente alumno, Emilio, la

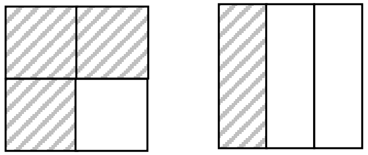
– *Actividades de aplicación (resolución de problemas).*	profesora le propone un problema de los que se encuentran en el libro y que designó para resolver en casa. El problema es como sigue: “En una clase de quinto hay 24 alumnos/as. Las 2/3 partes son niñas, ¿cuántos niños hay?”…
a) La siguiente actividad plantea una suma de fracciones homogéneas, representadas gráficamente con la finalidad de que los alumnos reflexionen al respecto (posteriormente una resta). Si bien puede ser una actividad reflexiva, no lo es totalmente pues los alumnos saben sumar fracciones homogéneas. Tampoco se considera una actividad de aplicación, pues no se le pide directamente esta acción. Se podría considerar como actividad de repaso. La propuesta gráfica le permite a la docente explicar cada situación (suma y resta). Código: – *Actividad de repaso (de un tema ya trabajado)*	a) El tiempo ha transcurrido y falta poco para concluir la hora de clase[332]. Sin embargo, la profesora dibuja dos cuadrados y los divide en cruz, en partes iguales. Al primer cuadrado le pinta una parte y al segundo dos. Los gráficos quedan como sigue:  $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$ La profesora pregunta si se puede sumar esas dos fracciones. Para ello, escribe lo que corresponde en cada fracción a la parte pintada y coloca un signo más entre ellas; luego pregunta: “¿se puede hacer esto (colocando el signo ‘más’) con las fracciones?”. … Acto seguido, propone otra situación: “tengo ¾ y quiero quitar ¼”. Algunos niños manifiestan que hay que restar. Al preguntarles porqué hay que restar responden que “porque dice *quitar*”.

---

[332] Al inicio de ésta, la profesora tuvo una conversación con los alumnos sobre las normas del colegio y el papel de todos los profesores. Todo esto, a propósito de un asunto que ocurrió con este grupo en una hora y asignatura distintas.

Sesión 4/Caso 2

Miércoles 20 de febrero de 2008. Hora: 9:55 – 10:50. Colegio A

Síntesis temática	Sesión observada
Inicio de sesión/inicio de clase ▪ El inicio es directo, con la propuesta de la profesora de una suma de fracciones heterogéneas. ▪ Las respuestas expresadas indican que los alumnos suman tanto numerador como denominador, sin tomar en cuenta la naturaleza de los mismos. Es una manipulación directa de los elementos expuestos. La alumna ve "normal" sumar los denominadores, sin considerar la idea de "colocar el mismo denominador". ▪ Las respuestas ante esta situación no son tan claras como en el caso de las fracciones homogéneas expuesto en la sesión anterior. Códigos: – *Planteamiento directo de una suma de fracciones heterogéneas.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar ideas sobre la suma de fracciones heterogéneas.* – *Discrepancias entre estudiantes en torno a la suma de fracciones heterogéneas.*	La profesora retoma la última actividad[333] y dibuja en el encerado las siguientes gráficas. Luego escribe la fracción que representa, en cada una, la parte sombreada:  $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$ La profesora pregunta: "¿qué puedo hacer?" Los alumnos se miran entre sí y observan a la docente; luego Natalia responde que "se suma el numerador y el denominador". La profesora le pide que resuelva en el encerado. La alumna sale, vuelve a escribir las fracciones y suma. La nueva fracción tiene como numerador la suma de los numeradores de las fracciones y como denominador la suma de los denominadores, con lo cual la nueva fracción es cuatro séptimos; de tal manera que: $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$.

---

[333] La última actividad de la clase anterior se refiere a la suma y resta de fracciones homogéneas, que los alumnos resolvieron sin dificultad. En dicha clase concluyó que sumar y restar fracciones heterogéneas era más difícil.

Desarrollo de la clase (parte I) ▪ La profesora directamente rechaza la propuesta de la alumna haciendo referencia a que “las cosas distintas no se pueden sumar”, una de las ideas que generalmente se exponen en clase al introducir la noción de suma. ▪ Los alumnos no tienen claro que “dos cosas distintas no se puedan sumar” ya que sí se puede… transformando las mismas (esto puede haber ayudado directamente la idea de transformar las fracciones heterogéneas). ▪ Se llega a un consenso entre profesora y alumnos respecto a la necesidad de “nombrarlas de diferente manera”. Códigos: – *Diálogo con pregunta directa para orientar la suma de fracciones heterogéneas basado en situaciones contextualizadas (suma de objetos iguales).* – *Participación masiva de los estudiantes en el diálogo con la docente (en general) (verbal).*	La profesora, dirigiéndose a la clase y en relación a lo que ha desarrollado la alumna, manifiesta a través de pregunta: “¿decimos que tenemos una fracción dividida en siete partes y cogemos cuatro?”. Los alumnos no responden; sin embargo, algunos manifiestan que sí y otros que no, aunque sin justificar. La profesora, volviéndose a la alumna, le dice que eso no sirve pues los denominadores son distintos. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: Eso no sirve pues los denominadores son distintos. Natalia: … Profesora: Y las cosas distintas no se pueden sumar… ¿Están de acuerdo? Alumnos: Sí Profesora: ¿Podemos sumar peras y manzanas? Alumnos: Sí Alumnos: No Profesora: Si tengo tres manzanas y dos peras[334]… ¿Cuánto tengo? Alumnos[335]: ¡Cinco frutas! Profesora: Correcto, pero ¿pueden ser peras o manzanas? Alumnos: No Alumnos[336]: Son las dos Profesora: No se puede sumar peras y manzanas para que dé “peras o manzanas”… Alumnos: …

---

[334] La profesora dibuja las peras y manzanas en el encerado, de acuerdo a las cantidades indicadas.

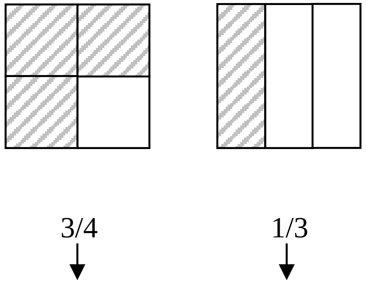
[335] Algunos alumnos; una minoría.

[336] Otros, aunque un grupo más reducido que el anterior.

	Profesora: Para sumarlas es necesario nombrarlas de diferente manera, con una palabra que las englobe a las dos… como “frutas”.
Desarrollo de la clase (parte II) ▪ La profesora expone directamente la necesidad de transformación de las fracciones heterogéneas para que sean iguales. ▪ La profesora expone la forma: ¿cómo consigo fracciones equivalentes? ▪ La profesora busca fracciones equivalentes a las anteriores con la ayuda de los alumnos. Los alumnos construyen las fracciones equivalentes a medida que la profesora propone multiplicar por dos, tres, etc. ▪ La profesora se detiene y solicita a los alumnos observar lo elaborado. ▪ Los alumnos establecen diferentes relaciones. ▪ Los alumnos se plantean diferentes interrogantes a partir de lo expuesto. Estas interrogantes no necesariamente siguen la línea propuesta por la docente. ▪ La profesora orienta directamente a los alumnos para que estos se centren en lo que se les solicita. ▪ Una alumna se da cuenta de las fracciones homogéneas y la profesora resuelve la situación. ▪ La profesora resuelve la situación simbólica y gráficamente. ▪ Los alumnos observan.	La profesora retoma el caso inicial y dice a sus alumnos: “tengo que tener un truco que me permita hacer una transformación, para que las fracciones sean iguales…, sean homogéneas”; luego pregunta: “¿cómo consigo fracciones equivalentes?”. A continuación, la profesora empieza a buscar, con ayuda de los alumnos, fracciones equivalentes a las dos anteriores. Para ello pregunta lo que tiene que hacer y va multiplicando por ‘dos’ ambas fracciones, tanto el numerador como el denominador de cada una. Como no consigue fracciones equivalentes con el mismo denominador, multiplica por ‘tres’. Los alumnos van siguiendo el procedimiento y contestan al unísono los resultados de operar el numerador y el denominador por el mismo número. Una vez que se llega a multiplicar por cuatro, la profesora les pregunta si observan algo. 3/4→6/8→9/12→12/16 1/3→2/6→3/9 →4/12 A partir de la pregunta de la docente sobre si observaban algo, los alumnos establecen distintas relaciones; de esta manera una de las alumnas dijo que el numerador de las fracciones equivalentes de la primera fracción coincidía con el denominador de las fracciones equivalentes de la segunda fracción. La profesora justifica como “casualidad” ya que “el numerador de la primera fracción coincide con el denominador de la segunda… de ahí que se repita en sus fracciones equivalentes respectivas”. Luego, la docente pregunta por otras relaciones. Los alumnos no responden; sin embargo, Antía le pregunta a la profesora “qué pasa si la fracción es dos quinceavos” y cómo hace para dividir entre dos[337]. La profesora mira a la clase y plantea la pregunta a todos los alumnos y permite que Lucía responda. La alumna expresa que se divide entre tres. La profesora le dice que no se están dividiendo, aunque se podría; luego menciona las reglas de divisibilidad “que se verán en el siguiente curso”.

---

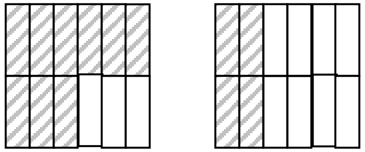
[337] La alumna aparentemente ha visto que para multiplicar es fácil, pero para dividir no, ya que no siempre se puede dividir el numerador y el denominador por el mismo número.

▪ Esta fase de la clase se centra en el ESTABLECIMIENTO DE FRACCIONES EQUIVALENTES MULTIPLICANDO NUMERADOR Y DENOMINADOR PARA HALLAR FRACCIONES HOMOGÉNEAS. Códigos: – *Exposición directa del proceso a seguir en una suma de fracciones heterogéneas.* – *Diálogo con pregunta directa para orientar a los alumnos en el desarrollo de la suma (obtención de fracciones equivalentes).* – *Manipulación numérica y representación gráfica como estrategias docente para una mejor comprensión de la situación simbólica.*	Natalia pregunta qué pasa si los numeradores son iguales[338]. Como la profesora ‘no entienden’ a la alumna le dice que salga al encerado y escriba lo que quiere decir. La alumna escribe: $\frac{4}{12}$ *y* $\frac{4}{20}$. La profesora pregunta a la clase en general cuál es la condición. Los alumnos responden lo que la maestra ha explicado y ésta añade, dirigiéndose a la alumna que le hizo la pregunta y a la clase total: “no importa que coincidan los numeradores, lo que debo tener en cuenta es que sean iguales los denominadores”. La alumna asiente. La profesora pide que se centren en las fracciones que están escritas y que son equivalentes de las que se tienen que sumar. “Recuerden que necesitamos dos fracciones equivalentes homogéneas”. Después de mirar los resultados, Nerea 2 expresa que hay dos fracciones con el mismo denominador, luego los alumnos ven lo mismo y asienten. La profesora expresa que esas fracciones son equivalentes y homogéneas por lo que “ahora sí se pueden sumar, ya que sus denominadores son iguales”. Los niños asienten. Luego, la profesora suma las fracciones equivalentes homogéneas: 9/12 + 4/12 = 13/12 Acto seguido, retoma las gráficas y, refiriéndose a las fracciones equivalentes manifiesta que aquellas se convierten en 9/12 y 4/12 transformando las imágenes de la siguiente manera[339]: 

---

[338] Esta niña es la que, al iniciar la sesión, planteó resolver la suma, sumando los numeradores y los denominadores.

[339] La profesora borra la parte sombreada en la primera imagen (3/4), para lograr en la segunda (9/12) un mejor orden de las mismas. Sin embargo, luego piensa que debió dejarlas como estaban para que los alumnos observaran que, efectivamente, se ‘tomaban’ nueve y cuatro partes respectivamente.

	 9/12 4/12 Al finalizar la elaboración de las gráficas, la profesora concluye que hay que buscar fracciones equivalentes en las que coincidan los denominadores para poder sumarlas o restarlas.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone una suma de tres fracciones heterogéneas. ▪ Los alumnos tienen claro lo que deben hacer (hallar las equivalentes). ▪ Se resuelve; no obstante, la profesora hace ver que la solución no es inmediata y cuestiona sobre qué hacer. ▪ Los alumnos indican que hay que seguir buscando. ▪ La profesora propone otra forma de hallar fracciones equivalentes: multiplicando los denominadores se halla el denominador de las fracciones equivalentes homogéneas. ▪ La profesora parte de casos más simples (dos fracciones) para luego trasladar la situación a casos más complejos (tres fracciones). ▪ La profesora explica cómo se aplica esta forma. ▪ La solicitud de la alumna sobre tres fracciones la centra en tener interés de desarrollar esta suma.	Luego la profesora les dice a sus alumnos: “imaginen que ahora les pongo: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$”. Los alumnos se sorprenden, pero luego responden que hay que buscar fracciones equivalentes. La profesora empieza a hacerlo, con la ayuda de los alumnos, pero al no lograr hallar las fracciones equivalentes, multiplicando por los primeros números naturales, les dice: “es complicado, ¿verdad?”; luego les lanza otra pregunta: “¿cómo solucionar esta situación para que no sea complicada?”. Uno de los alumnos responde que hay que seguir hallando fracciones equivalentes, a lo que la profesora indica que la lista sería larga. Como los alumnos no dan otra respuesta, la profesora les dice que hay otra forma en la que pueden convertir el denominador. Para ello, les vuelve a escribir las dos primeras fracciones, correspondiente al primer caso, y les dice: “el cuatro lo multiplico por el otro denominador y si se multiplica éste por éste (refiriéndose a los denominadores) da lo mismo, se aplica la propiedad conmutativa”. Sara pregunta: “¿y cuando son tres?”, refiriéndose la última suma. La profesora no responde inmediatamente e insiste a sus alumnos que se centren en lo que están haciendo en ese momento, que ya llegará el tiempo en el que tenga que resolver el otro *ejercicio*. Reitera que primero hay que comprender éste que está explicando. A continuación la profesora les dice que si se multiplica el denominador, el numerador también…[340]. Luego la profesora continua: “el numerador se transforma… multiplicando por el mismo número que se multiplicó el denominador, el numerador de la fracción respectiva”. Los alumnos observan a la maestra.

---

[340] La profesora deja un tiempo para que los alumnos completen la frase, en función del resultado obtenido en la primera operación, permitiendo que establezcan alguna relación.

▪ Esta fase de la clase se centra en conocer una FORMA más directa de hallar fracciones equivalentes homogéneas: MULTIPLICANDO DENOMINADORES. Códigos: – *Planteamiento de situaciones nuevas similares (suma de tres fracciones en lugar de dos).* – *Cuestionamiento del procedimiento seguido en la situación nueva (engorroso) para su orientación hacia otro procedimiento.* – *Exposición de la nueva forma por parte de la docente (multiplicar denominadores).* – *Truncamiento de actividades (no se terminó de resolver la suma de tres fracciones).* – *Participación total de los estudiantes en la suma de fracciones a través del primer procedimiento.*	
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora propone una suma de tres fracciones heterogéneas para que los alumnos la resuelvan. ▪ La profesora guía su solución hacia la multiplicación de denominadores. ▪ La profesora guía la solución con la ayuda de los alumnos a quienes pregunta paso a paso lo que hay que hacer.	Una vez que ha acabado de desarrollar el proceso, la profesora pregunta a sus alumnos si han comprendido. Como los alumnos responden que sí, les vuelve a plantear la suma de tres fracciones heterogéneas, aunque esta vez diferentes a las anteriores y les pregunta qué tienen que hacer. La expresión es la que sigue: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=$. La profesora, con la ayuda de los alumnos, dice que hay que hacer una transformación para conseguir que los denominadores sean iguales. De esta manera, algunos alumnos expresan que hay que multiplicar "cinco por tres por cuatro". Yasmín pregunta qué va a pasar arriba, refiriéndose a los numeradores. La profesora le pide que se centre en lo que están haciendo, que "luego verá lo que pasa con los numeradores".

▪ Cuando la pregunta no es comprendida por los alumnos, la profesora reformula la pregunta. ▪ Se llega a visualizar la suma de fracciones homogéneas y se resuelve esta operación. Sin embargo, no se regresa a la anterior. Códigos: – *Aplicación del procedimiento a situaciones nuevas semejantes.* – *Guía directa de la docente para un desarrollo correcto de la actividad (para que el alumno no se disperse).*	Profesora: El denominador es… Alumnos: 60 Profesora: Porque hemos multiplicado cinco por tres por dos. Es el producto de los tres. ¿Qué pasará con los numeradores? Aaron: Hay que transformarlos Profesora: ¿Cómo? Alumno: Multiplicando por el otro número Profesora: A este número, ¿por cuánto lo multiplico para que me dé 60? Alumnos: … Profesora: ¿Qué número multiplicado por cinco da sesenta? Alumno: Doce Profesora: Entonces el numerador se multiplicará por doce… sería veinticuatro sobre sesenta. Una vez establecidas y resueltas las multiplicaciones, tanto en el numerador como en el denominador: $\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{48}{60}+\frac{20}{60}+\frac{45}{60}=$, la profesora pregunta lo que tienen que hacer, a lo que los niños responden: “sumar”.
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ La profesora propone a los alumnos que planteen sumas de fracciones heterogéneas. ▪ Los alumnos propone fracciones con cantidades grandes. ▪ La profesora reorienta hacia fracciones simples para que los cálculos se realicen rápidamente.	Después de hallar el resultado, la profesora propone a Aaron que le diga a Emilio dos fracciones heterogéneas para que las sume. El niño empezó a proponer fracciones con denominadores ‘grandes’ a lo que la profesora le sugirió que proponga fracciones ‘fáciles’ para que los cálculos los haga más rápido ya que lo que quiere ver es si siguen el proceso. Entonces, el alumno propone: tres quintos más cuatro séptimos. El alumno que tiene que resolver la suma escribe la operación y empieza a resolver, pero antes que continúe la profesora le pregunta: “¿qué hay que hacer?”; el alumno responde: “sumar las fracciones”. La profesora añade: “¿qué tienen de especial?”, el niño continúa: “que tienen que tener el mismo…” La profesora interrumpe la respuesta del alumno y reformula la pregunta: “No, ¿qué

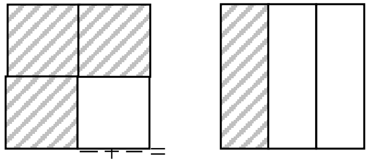
▪ Previo a resolver la suma, la profesora cuestiona a los alumnos sobre la misma, de tal forma que los alumnos comuniquen a qué se enfrentan (características y peculiaridades de la operación). ▪ Los alumnos comunican en primer lugar como s la operación. La profesora reorienta las intervenciones de los alumnos. ▪ La profesora va precisando términos utilizados. ▪ Los alumnos aplican la forma que mejor conocen. ▪ No todos los alumnos captan completamente cómo se halla las fracciones equivalentes a través del segundo proceso. ▪ Alumnos proponen operaciones. Códigos: – *Planteamiento de casos similares por parte de los estudiantes.* – *Participación selectiva de los alumnos en la propuesta y aplicación de situaciones similares.* – *Diálogo y pregunta directa para orientar la explicación y resolución de las situaciones similares.* – *Propuesta de actividades similares del libro para su casa.*	tienen?”; el niño piensa y responde: “tienen diferente denominador”. La profesora continúa: “entonces ¿qué tienes que hacer?”; el alumno piensa y contesta: “transformarlos”. A medida que la profesora deja que el alumno trabaje en el encerado pregunta a la clase qué significa la palabra “transformarlos”. Los alumnos dan diferentes opiniones, pero concluyen que dicha palabra significa ‘cambiar’; luego la profesora añade: “cambiar a común denominador” y pregunta qué significa ‘común’. Manuel responde que significa “normal”. La profesora no acepta y propone una situación en la que dos alumnos comparten una afición *común*, “es decir que les gusta el mismo deporte”. Luego pregunta cómo es ese deporte. Los niños dicen que “el mismo”; así asocian ‘común’ e ‘igual’ como palabras que expresan lo mismo. La profesora vuelve a observar lo que está haciendo Manuel en el encerado y al ver que está siguiendo el camino largo (hallar fracciones equivalentes, una a una), le dice que pare y borre. Le dice que piense en lo que han estado haciendo, pero el alumno no logra expresar ni escribir algo. Luego, la profesora le dice que continúe como él quería hacerlo. El alumno empieza a resolver en silencio aunque no comprende lo que tiene que hacer ya que él ha captado el primer procedimiento (multiplicar por cada número hasta hallar las equivalentes), aunque no sabe cómo concretarlo. Mira a sus compañeras. Una de las alumnas le dice que haga como él quiera. Al ver la profesora que vuelve a incidir, le dice que borre pues quiere ver el procedimiento[341]. La profesora empieza a recordarle al alumno lo que han estado haciendo. Algunos alumnos acompañan ese ‘recordatorio’. El alumno va siguiendo los pasos, recuerda lo que tiene que hacer y resuelve la suma. Se propone otra operación y sale Bryce a resolverla: $\frac{4}{5}+\frac{7}{8}$. El alumno multiplica cinco por siete. La profesora interrumpe la acción del alumno y le pregunta qué ha hecho y de dónde sale ese número, refiriéndose al siete. El alumno responde que multiplica por el numerador; al preguntarle la maestra porqué multiplica por el numerador, el alumno no argumenta. La profesora pide a Bryce que regrese a su asiente y a otro alumno que salga a resolverlo. Sale Lucía, quien lo resuelve siguiendo el segundo método. Su respuesta es correcta.

---

[341] Es convenio de la clase dejar ‘limpia’ la expresión que se propone y trabajar fuera de ella. Por ejemplo, ante la expresión: 4/5 + 7/8, los alumnos no deben operar sobre ella, que generalmente es lo que hacen los niños; tienen que indicar el proceso a continuación (después de escribir el signo ‘igual’).

	La maestra le pide al Aaron que resuelva la siguiente suma: $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=$, que fue propuesta por Nadia. El alumno la resuelve correctamente, no sin antes indicar en el encerado el proceso (las multiplicaciones que debe hacer)…
Final de la clase ▪ Propuesta de actividades para la casa, las que siguen el mismo patrón. Códigos: – *Trabajo para casa (operaciones con fracciones).* – *Clase cerrada (actividad finalizada).*	…luego, la profesora deja "*ejercicios*" de libro para su casa y otros que ella les escribe en el encerado. El tiempo culmina y la clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La propuesta de actividad de la docente es similar a la de la sesión anterior. Sin embargo, al ser un conocimiento nuevo esta se propone para construir (o descubrir) el mismo. Los alumnos no responden inmediatamente; sin embargo, quien lo hace, suma numeradores y denominadores. A partir de ello, la docente orienta la forma de resolver esta operación llegando a la aplicación de un conocimiento previo (fracciones equivalentes) y explica gráficamente la solución.	a) La profesora retoma la última actividad y dibuja en el encerado las siguientes gráficas. Luego escribe la fracción que representa, en cada una, la parte sombreada:  $\frac{}{4}+\frac{}{3}=$ La profesora pregunta: "¿qué puedo hacer?"… Natalia responde que "se suma el numerador y el denominador"… La profesora, volviéndose a la alumna, le dice que eso no sirve pues los denominadores son distintos. Se genera el siguiente diálogo:

Una alumna idea otras situaciones (casos particulares) a fin de ver la correspondencia. Código: – *Actividades de construcción del conocimiento.*	Profesora: Eso no sirve pues los denominadores son distintos. Natalia:… Profesora: Y las cosas distintas no se pueden sumar… ¿Están de acuerdo? Alumnos: Sí Profesora: ¿Podemos sumar peras y manzanas? Alumnos: Sí Alumnos: No Profesora: Si tengo tres manzanas y dos peras[342]… ¿Cuánto tengo? Alumnos[343]: ¡Cinco frutas! Profesora: Correcto, pero ¿pueden ser peras o manzanas? Alumnos: No Alumnos[344]: Son las dos Profesora: No se puede sumar peras y manzanas para que dé “peras o manzanas”… Alumnos: … Profesora: Para sumarlas es necesario nombrarlas de diferente manera, con una palabra que las englobe a las dos… como “frutas”. La profesora retoma el caso inicial y dice a sus alumnos: “tengo que tener un truco que me permita hacer una transformación, para que las fracciones sean iguales…, sean homogéneas”; luego pregunta: “¿cómo consigo fracciones equivalentes?”.

---

[342] La profesora dibuja las peras y manzanas en el encerado, de acuerdo a las cantidades indicadas.

[343] Algunos alumnos; una minoría.

[344] Otros, aunque un grupo más reducido que el anterior.

	Acto seguido, retoma las gráficas y, refiriéndose a las fracciones equivalentes manifiesta que aquellas se convierten en 9/12 y 4/12 transformando las imágenes de la siguiente manera…
a) La siguiente actividad (primera operación) propuesta por la docente exigen del alumno manipular la información numérica y aplicar estrategias operativas para resolver cada caso. No obstante, su intención es ver la complejidad de la misma en estos casos para orientar hacia otro procedimiento que la docente explica. b) Las siguientes operaciones son de aplicación directa. Código: – *Actividad de aplicación.*	a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=$ $\frac{4}{5}+\frac{7}{8}$
a) La siguiente actividad busca resolver sumas de fracciones heterogéneas a partir de la propuesta de los alumnos (de ahí la sugerencia de plantear sumas simples). La profesora insiste en explicar antes de resolver. Código: – *Actividad de aplicación (planteamiento).* – *Actividad de aplicación (procedimiento).*	a) Después de hallar el resultado, la profesora propone a Aaron que le diga a Emilio dos fracciones heterogéneas para que las sume. El niño empezó a proponer fracciones con denominadores ‘grandes’ a lo que la profesora le sugirió que proponga fracciones ‘fáciles’ para que los cálculos los haga más rápido ya que lo que quiere ver es si siguen el proceso. Entonces, el alumno propone: tres quintos más cuatro séptimos. El alumno que tiene que resolver la suma escribe la operación y empieza a resolver, pero antes que continúe la profesora le pregunta: “¿qué hay que hacer?”; el alumno responde: “sumar las fracciones”. La profesora añade: “¿qué tienen de especial?”, el niño continúa: “que tienen que tener el mismo…” La profesora interrumpe la respuesta del alumno y reformula la pregunta: “No, ¿qué tienen?”; el niño piensa y responde: “tienen diferente denominador”. La profesora continúa: “entonces ¿qué tienes que hacer?”; el alumno piensa y contesta: “transformarlos”. A medida que la profesora deja que el alumno trabaje en el encerado pregunta a la clase qué significa la palabra “transformarlos”.

Sesión 5/Caso 2

Viernes, 22 de febrero de 2008. Hora: 9:00 – 9:55.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora revisa la ejecución de la tarea que implica sumar y restar fracciones homogéneas y heterogéneas. ▪ No todos los alumnos han resuelto las operaciones alegando que no entendía cómo hacerlo (básicamente las operaciones que involucran fracciones heterogéneas). ▪ La profesora orienta verbalmente en la solución de este tipo de operaciones. Códigos: – *Revisión verbal de la tarea sobre suma y resta de fracciones (homogéneas y heterogéneas).* – *Consolidación por parte de la docente sobre la forma de sumar o restar fracciones heterogéneas.* – *Dificultad en los alumnos para sumar fracciones heterogéneas individualmente.* – *Valoración del esfuerzo y búsqueda de soluciones.*	La clase empieza revisando la tarea. En la misma, la maestra mandó a los alumnos a resolver unas operaciones de suma y resta de fracciones homogéneas que proponía el libro y una suma y una resta de fracciones heterogéneas que propuso ella. Los alumnos intercambian opiniones sobre esta última operación ya que algunos decían que no la habían hecho porque no sabían. Uno de los niños comentó que él, cuando no sabía algo, lo buscaba en el diccionario de la abuela. La profesora lo felicitó. Las opiniones seguían intercambiándose entre los alumnos quienes expresaban sus inquietudes a la profesora. Luego de escuchar los distintos comentarios, la profesora interviene dirigiéndose a los alumnos con la siguiente observación y pregunta: "es lo mismo[345]: tienen que buscar fracciones equivalentes que sean homogéneas entre sí, pero… al final, los resultados ¿qué hay que hacer?"; la maestra deja pasar unos segundos y uno de los alumnos dice que había que "sumarlos"; la profesora, en respuesta aclara: "era de restar, no de sumar"[346].
Inicio de clase ▪ Los alumnos resuelven operaciones de suma y resta de fracciones homogéneas.	A continuación, la profesora le pide a un alumno que salga a resolver "un ejercicio"[347]. La maestra insiste en que los alumnos, antes de operar expresen con palabras lo que tienen que hacer (en este caso: transformar los denominadores de las fracciones que se van a sumar – o restar – a común

---

[345] Refiriéndose a lo trabajado en la sesión anterior.

[346] La operación solicitada era una resta de fracciones heterogéneas. Sin embargo, la acción del día anterior se centró en sumas.

[347] Las operaciones propuestas son sumas de fracciones homogéneas.

▪ Los alumnos explican con palabras lo que se les pide. ▪ La profesora insiste en explicar lo que se pide (es una suma de fracciones…) frente a lo que hacen (multiplicar, dividir…). ▪ La profesora exige precisión y no vaguedad en la comunicación verbal. ▪ La profesora sistematiza la forma de resolver la suma de fracciones heterogéneas. ▪ Los alumnos captan la esencia de la estrategia (hacer la operación más fácil). ▪ La profesora usa la técnica de la frase cortada para orientar las respuestas de los alumnos (… una suma de fracciones homogé…). Códigos: – *Diálogo y pregunta directa para generar la explicación del alumno al planteamiento de la operación, previo a la resolución.* – *Tendencia en los alumnos a responder en función de la operación (de manera general) y usando lenguaje impreciso.* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de la suma de fracciones.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la pizarra (propuesta por la docente).* – *Consolidación de la información con ayuda de los estudiantes (a través de frases fragmentadas que el alumno debe completar).*	denominador). Todos los intercambios de palabras entre profesora y alumno siguen la misma estructura. Éste es el que intercambió con el primer alumno: Profesora: ¿Qué tienes que hacer? Alumno: una suma Profesora: No, suma de qué Alumno: … Profesora: lo que quiero saber es tu opinión, antes de resolver. Alumno: Una suma Profesora: No me vale “una suma” Alumno: … Profesora: Esto es importante: “la respuesta tiene que ser clara y completa. Alumno: … es una suma de fracciones. Profesora: Una suma de fracciones… con el mismo denominador. O lo que es lo mismo: una suma de fracciones homogé… Alumno: …neas[348]. Profesora: Homogéneas… ¿Cómo se resuelve? Alumno: sumamos ésta con ésta[349]. Profesora: Habla con propiedad… Se suman los nu… Alumno: …numeradores. Profesora: Y se escribe el mismo…

---

[348] Al unísono con la profesora.
[349] Refiriéndose a cada fracción.

Alumno: Denominador.

Profesora: Muy bien, ahora resuelve.

El alumno resuelve correctamente la suma; luego, la profesora saca al encerado a dos alumnas, a quienes, antes de resolver la operación les hace la misma pregunta que al primer alumno: ¿qué tienes que hacer? Las primeras respuestas de las alumnas se centran en indicar qué tienen que hacer: la operación; no obstante, la profesora cambia la pregunta centrándose en “lo que se busca a través de la suma”. Las alumnas, poco a poco, van respondiendo como la profesora ha explicado y los alumnos van repitiendo e interiorizando ya que la maestra transmite a toda la clase la respuesta correcta:

Profesora: ¿Qué nos pide?:

Alumnos: Sumar

Profesora: ¿Qué hay que hacer?

Alumnos: Sumar los numeradores y colocar el mismo denominador.

Una vez que han terminado de revisar y resolver las sumas y restas de fracciones homogéneas, una de las alumnas, que aún no ha salido al encerado le expresa a la profesora que ella ha desarrollado a través de un camino distinto: “yo hice de otra forma más rara”. La profesora se sorprende, pues aparentemente todos debían hacerlo de la misma manera, y expresa, entre interrogación y exclamación: “¡O sea que ahora vamos a descubrir las matemáticas!, ¡Genial!”. No obstante, la maestra no permite que la alumna muestre inmediatamente su forma de proceder. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Recuerdo el truco con los denominadores diferentes…

Alumno: Hay que transformarlos

Profesora: Hay que buscar dos fracciones equivalentes que tengan el mismo…

Alumna: Denominador… Así la suma es como fracciones homogéneas.

Profesora: ¡Hay que recordar el truco!

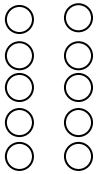
	Alumna: El truco lo hace más fácil. Profesora: ¿Tú qué crees que eres Pitágoras?[350] Alumnos: ¿Quién es Pitágoras? Profesora: Fue un gran matemático.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Se propone la solución de problemas del libro texto para lo cual llama a un alumno al encerado. ▪ La profesora lee el texto e interpreta el mismo. ▪ El alumno escribe los datos del problema e intenta escribir la pregunta, pero la profesora le indica “pues todos la saben”. ▪ El alumno transforma y suma correctamente. ▪ La profesora amplía el problema agregando otras tareas (expresa en forma de fracción la parte de agua que quedó en el depósito). El alumno aplica una resta de fracciones homogéneas, interpretando el depósito lleno en términos de fracción. ▪ Los alumnos no muestran dificultad en resolver este problema. Códigos: – *Planteamiento de problemas matemáticos escolares para resolver sobre sumas y restas de fracciones homogéneas.* – *Preguntas directas de la docente durante la resolución con el fin de guiar la misma.*	Luego, la profesora saca a uno de los alumnos varones y le lee el problema del libro, a la vez que pone énfasis en algunas partes: “De un depósito de agua se sacaron primero 5/10…sacaron 5/10”[351]. Después 4/10… y te pide que expreses en fracción la cantidad de agua que se sacó”. Luego de escribir los datos el alumno se dirige a escribir la pregunta, no obstante la maestra le dice que no indique la pregunta pues todos la saben. El niño empieza a resolver y lo hace correctamente: suma los numeradores y escribe el mismo denominador. La profesora pregunta: ¿Qué parte se saca? Todos los niños responden que los 9/10. Luego, dirigiéndose al niño le dice que exprese, también en forma de fracción, la cantidad de agua que quedó en el depósito. El niño resta 9/10 de 10/10 e indica el resultado. La profesora recalca que el depósito de agua completo en forma de fracción es 10/10. Los alumnos asienten.

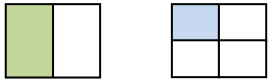
---

[350] Refiriéndose a la niña. No obstante, algún niño se ríe.

[351] El alumno escribe en el encerado los datos del problema.

– *Participación total de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos.* – *Participación selectiva de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos (propuesta por la docente).*	
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora propone una suma y una resta de fracciones heterogéneas. ▪ Algunos alumnos resuelven correctamente y otros no. ▪ No se corrigen los errores. ▪ La profesora asocia la suma y resta de fracciones heterogéneas recalcando que “es lo mismo”. Códigos: – *Planteamiento y resolución de suma y resta de fracciones heterogéneas.* – *Explicación previa del planteamiento por parte de los alumnos. No siempre hay correspondencia entre la aplicabilidad de una cuestión y su explicación verbal (el algunos casos es más fácil lo primero).*	Una vez finalizadas las actividades relacionadas con las sumas y restas de fracciones homogéneas, la profesora propone que una de las alumnas salga y resuelva una suma de fracciones heterogéneas. La alumna resuelve correctamente y explica lo que tiene que hacer de forma acertada. Sin embargo, varios alumnos de la clase tenían otros resultados. Frente a este comentario, la profesora no toma importancia pues lo que hizo la alumna en el encerado era correcto. Otra alumna sale a resolver una resta de fracciones heterogéneas. Lo hace correctamente aunque tiene dificultad para expresar con palabras lo que tiene que hacer. Al finalizar estas actividades, la profesora refuerza oralmente que “es lo mismo que con la suma, pero se resta”.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora expone directamente lo que van a aprender: multiplicar fracciones. ▪ La profesora retoma el tema de fracción como operador y solicita a un alumno que represente gráficamente 3/5 de 10. ▪ La profesora asocia *dividir* a números y *partir* o *separar* a conjunto de elementos.	Al concluir las actividades de suma y resta de fracciones, la profesora expone a los alumnos que así como han aprendido a sumar y a restar, también van a aprender a multiplicar. Para ello, les recuerda que las fracciones se habían visto como operador. Luego, saca al encerado a uno de los alumnos para que escriba la siguiente expresión: 3/5 de 10. El niño escribe la expresión y la profesora le dice que la resuelva, primero, gráficamente. Además añade: “para ello puedes representarlo como quieras: manzanas, monedas…”. El niño dibuja dos columnas de cinco círculos cada una, coloca el signo igual y vuelve a escribir la expresión anterior.

▪ El alumno representa correctamente de manera gráfica. En la expresión oral tuvo dificultad. Códigos: – *Introducción directa de la multiplicación de fracciones.* – *Exploración de conocimientos sobre fracción como operador a través de un caso directo.* – *Recurrencia a la representación gráfica para establecer relación entre esta y la forma simbólica de la fracción como operador.* – *Diálogo con pregunta directa para guiar el procedimiento hacia el objetivo buscado (representar simbólicamente la fracción de un número).* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente).*	 $=\frac{3}{5}$ La maestra le dice que represente en el dibujo lo que tiene que hacer. Para ello le pregunta qué significa el cinco en la expresión. El niño expresa que tiene que dividirlo entre cinco. La profesora añade: “partir o separar” y le pide que lo haga en la gráfica. El niño lo hace correctamente en la gráfica aunque se equivoca al expresarlo de manera oral (confunde los elementos). La profesora continúa la explicación del alumno, añadiendo: “y de esas cinco partes cojo tres”. Luego, el alumno pregunta si hace la operación.
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora les entrega a sus alumnos una hoja de trabajo para que resuelvan. La hoja plantea explicar qué significa la siguiente expresión: 3/5 x 4/8 y graficarla de ser posible. ▪ Los alumnos expresan qué significa (una multiplicación de fracciones). ▪ Los alumnos no expresan no saber cómo resolverla. ▪ Los alumnos intentan manipular los elementos de las fracciones, aplicando sus conocimientos previos respecto a	La profesora les entrega a los alumnos una hoja de trabajo para que la resuelvan según entiendan. La hoja consiste en explicar qué significa la siguiente expresión: “3/5 x 4/8” y si pueden graficarla. Los alumnos no saben qué hacer, leen la hoja sin intentar escribir nada en ella. La profesora les dice que se centren en la primera parte y expliquen con sus propias palabras lo que expresa esa operación, que escribe en el encerado. Los niños responden en la hoja, básicamente, que es una multiplicación de fracciones, aclarando que no saben cómo resolverla. En la segunda parte, en la que tienen que graficar, los alumnos no saben cómo hacer. El trabajo se centra en la manipulación de los símbolos: una de las niñas multiplica los numeradores y los denominadores entre sí, pero antes transforma las fracciones en homogéneas siguiendo el procedimiento usado en los casos anteriores. La profesora les deja que piensen solos unos minutos más, luego les hace una comparación con el último ejemplo de fracción de un número, aclarando que en este caso “ya no son varias unidades, sino una fracción”. Les aclara, además, que tienen que graficar, es decir, hacer un dibujo. Los estudiantes intentan gráficas independientes, es decir

multiplicar en sí y a sumar y restar fracciones. ▪ La estrategia correcta se expone pero sin una comprensión de por medio, al menos no evidente (la alumna multiplica, pero antes transforma). ▪ La gráfica es más compleja que la manipulación simbólica. ▪ La profesora orienta la representación gráfica a través de casos simples (menos complejos). ▪ La profesora orienta a través de preguntas asociando la multiplicación con fracción como operador, indicando que en este caso, en lugar de un número natural hay una fracción. ▪ Los alumnos siguen el planteamiento de la maestra a partir del caso simple (conocido: tres quintos de diez). Códigos: – *Presentación directa de una multiplicación de fracciones para ser interpretada y graficada.* – *Dificultad para representar gráficamente la multiplicación de fracciones. Tendencia a representar por separado o manipular simbólicamente.* – *Participación total de los estudiantes al ser una actividad propuesta individualmente.* – *Guía directa de la docente a través de preguntas directas para orientar el trabajo del estudiante a través de representaciones gráficas y asociación con fracción como operador (experiencias directas previas).*	las que representan a cada fracción por separado, pero no la del producto final ya que no tienen respuesta para ello. Como las respuestas de los alumnos no son acertadas, la profesora intenta darles una pista. Le pide a uno de sus alumnos que represente gráficamente ½, luego ¼. El alumno realiza lo siguiente:  La profesora le dice al alumno que en la última gráfica que realizó, "sin hacer otra", represente ¾. El alumno pinta dos de las tres partes que estaban sin pintar. La profesora les dice a sus alumnos que intenten una gráfica en la que tengan que calcular los 3/5 de 4/8. Los alumnos empiezan a dibujar unidades; algunos dibujan las diez del ejemplo anterior (3/5 de 10) y otros dibujan tantas unidades como el producto del numerador por el denominador de cada fracción (3x5 y 4x8). Centrándose en la expresión: 3/5 de 4/8, la maestra pregunta cuál de las dos fracciones habría que representar primero. Los estudiantes no responden. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: Si nos piden hallar los tres quintos de cuatro octavos, ¿qué fracción debo representar? Alumnos: … Profesora: Si me piden los tres quintos de diez, ¿qué represento? Alumnos: Diez unidades Profesora: Si me piden los tres quintos de cuatro octavos, ¿qué represento? Alumnos: Cuatro octavos Profesora: Entonces primero dibujo los cuatro octavos. La profesora dibuja un rectángulo en el encerado al que divide en ocho partes iguales y pinta cuatro.

– *Participación selectiva de los estudiantes en la interpretación de la expresión (bajo la guía docente).*	
Final de la clase ▪ No se propone ninguna actividad para casa. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	El tiempo finaliza y la profesora les dice que guarden lo concerniente a matemática y la clase termina. Bryce respira profundo y sus compañeros se ríen.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La maestra propone actividades que buscan que los alumnos apliquen el conocimiento aprendido en la resolución de casos nuevos, como los propuestos por el libro de texto. La actividad no se desarrolló en casa completamente pues los alumnos manifestaron dificultad. La profesora insiste en explicar lo que se pide antes de ejecutar (comprensión) Una alumna plantea indica que aplicó otro procedimiento, pero no se le hace caso. Código: – *Actividades de aplicación (operativa directa).*	a) La clase empieza revisando la tarea. En la misma, la maestra mandó a los alumnos a resolver unas operaciones de suma y resta de fracciones homogéneas que proponía el libro y una suma y una resta de fracciones heterogéneas que propuso ella. Los alumnos intercambian opiniones sobre esta última operación ya que algunos decían que no la habían hecho porque no sabían. Uno de los niños comentó que él, cuando no sabía algo, lo buscaba en el diccionario de la abuela. La profesora lo felicitó. La maestra insiste en que los alumnos, antes de operar expresen con palabras lo que tienen que hacer (en este caso: transformar los denominadores de las fracciones que se van a sumar – o restar – a común denominador).
a) La siguiente actividad propone resolver un problema matemático extraído del libro de texto.	a) Luego, la profesora saca a uno de los alumnos varones y le lee el problema del libro, a la vez que pone énfasis en algunas partes: “De un depósito de agua se sacaron primero

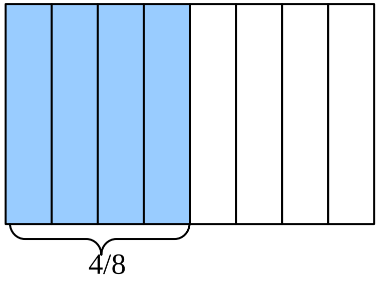
La actividad se centra en la resolución de la misma. Se insiste en explicar antes de ejecutar. Código: – *Actividad de aplicación (a través de un problema).*	5/10…sacaron 5/10”[352]. Después 4/10… y te pide que expreses en fracción la cantidad de agua que se sacó”. Luego de escribir los datos el alumno se dirige a escribir la pregunta, no obstante la maestra le dice que no indique la pregunta pues todos la saben. El niño empieza a resolver y lo hace correctamente: suma los numeradores y escribe el mismo denominador. La profesora pregunta: ¿Qué parte se saca? Todos los niños responden que los 9/10. Luego, dirigiéndose al niño le dice que exprese, también en forma de fracción, la cantidad de agua que quedó en el depósito. El niño resta 9/10 de 10/10 e indica el resultado. La profesora recalca que el depósito de agua completo en forma de fracción es 10/10. Los alumnos asiente
a) La siguiente actividad propone aplicar la fracción de un número. El objetivo es asociar este conocimiento con el nuevo (multiplicación de fracciones) por eso se propone un solo caso concreto y directo. Código: – *Actividad de aplicación (con fines de repaso y conexión con actividad nueva).*	a) Al concluir las actividades de suma y resta de fracciones, la profesora expone a los alumnos que así como han aprendido a sumar y a restar, también van a aprender a multiplicar. Para ello, les recuerda que las fracciones se habían visto como operador. Luego, saca al encerado a uno de los alumnos para que escriba la siguiente expresión: 3/5 de 10
a) La siguiente actividad busca reflexionar sobre un tema nuevo (multiplicación de fracciones) y representarlo gráficamente. Los alumnos muestran dificultad para representar gráficamente e intentan soluciones operativas directas. Código: – *Actividad de reflexión* – *Actividad de construcción/desarrollo de conocimiento,*	a) La profesora les entrega a los alumnos una hoja de trabajo para que la resuelvan según entiendan. La hoja consiste en explicar qué significa la siguiente expresión: “3/5 x 4/8” y si pueden graficarla.

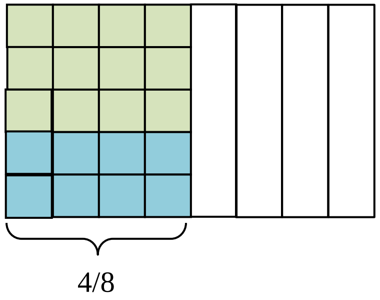
---

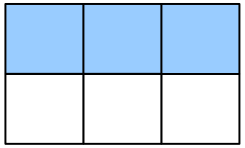
[352] El alumno escribe en el encerado los datos del problema.

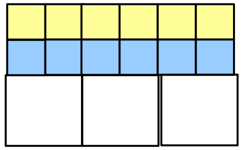
Sesión 6/Caso 2

Lunes, 25 de febrero de 2008. Hora 9:55 – 10:50. Colegio A.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión – Inicio de clase (parte I) ▪ La maestra explica cómo se representa una multiplicación de fracciones a partir de su relación con fracción de un número. ▪ Los alumnos no logran graficar dicha operación a partir de ello. Código: – *Planteamiento de la multiplicación de fracciones (representación gráfica).* – *Dificultad en los alumnos para representar gráficamente la multiplicación de fracciones.* – *Explicación directa de la docente del proceso a seguir con integración de preguntas directas (puntuales) a los estudiantes.*	La clase empieza con la revisión de la actividad que se propuso al finalizar la clase anterior, la misma que consistía en interpretar y graficar una expresión en la que se indicaba multiplicar fracciones. En la revisión, que se realiza observando los folios, generalmente los alumnos no supieron darle solución, y quienes lo lograron manifestaron haber tenido ayuda de sus mayores (fuera de la escuela). La maestra le pide a uno de los alumnos que salga al encerado y a propósito de la gráfica que hizo en la última clase (que continuaba en el encerado), empezó a explicar cómo se representaba gráficamente esa expresión. Para ello recordó que la unidad (un rectángulo) se tenía que dividir en ocho partes iguales, de las cuales se tomaban (pintaba) 4 (la expresión fue 3/5 de 4/8). Luego, como se pedía los 3/5 de 4/8 preguntó qué se tenía que hacer. Los alumnos respondieron que hallar los 3/5 de 4/8. La profesora pregunta cómo lo expresa en la gráfica, a lo que los alumnos respondieron que eso era lo que no sabían cómo hacer y no entendían.
Inicio de sesión – Inicio de clase (parte II) ▪ La profesora explica, paso a paso, cómo se elabora la gráfica. ▪ A medida que la profesora explica, pregunta a los estudiantes cómo se representa gráficamente una fracción. ▪ No todos los alumnos responden a las preguntas de la profesora. ▪ La profesora pregunta cuánto es los tres quintos de cuatro octavos a partir de la gráfica.	La profesora explica que como son los 3/5 de 4/8 había que trabajar con esa parte (los 4/8), señalándola en el gráfico: “lo que interesa es esta parte, los cuatro octavos. Lo demás, no” 

▪ Las respuestas de los alumnos son variadas. La gráfica muestra diferentes divisiones y los alumnos muestran diferentes interpretaciones. ▪ Gráficamente, los alumnos se basan en los cuatro octavos (no en la unidad completa). ▪ Otros intentan relacionar con la operación y a través de ella ver qué sucede en la gráfica. ▪ En esta operación, la gráfica no es fácil de representar y manipular de tal manera que los alumnos entiendan correctamente. ▪ La profesora justifica la gráfica (para comprender cómo sale). ▪ La profesora sistematiza el procedimiento a partir de la manipulación de sus elementos. Código: – *Desarrollo explicativo verbal – gráfico de la actividad por parte de la docente con participación indirecta de los estudiantes (casos puntuales del proceso).* – *Diálogo con preguntas directas que permiten que el estudiante intervenga en el proceso de graficación de la operación.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la graficación de la multiplicación (verbal).* – *Dificultad para considerar la unidad principal en una representación gráfica de la multiplicación de fracciones.* – *Manipulación numérica de la expresión matemática a partir de la visualización de la gráfica (estrategias "tanteadoras").*	Luego pregunta cómo hallar los 3/5 de los 4/8. Los alumnos responden que tienen que dividir entre cinco y coger 3. La profesora pregunta qué tienen que dividir entre cinco. Algunos alumnos (pocos) responden que los 4/8. La profesora recalca que "hay que dividir cada uno de los octavos que se habían tomado". La profesora acompaña su explicación señalando en el encerado cada una de esas partes. La profesora, divide en cinco cada octavo y pregunta cuántos hay que tomar. Los alumnos responden que tres y la profesora pinta de otro color tres de las cinco partes. Inmediatamente pregunta cuánto es los 3/5 de 4/8 (señalando, en la gráfica, la parte pintada de un segundo color).  Ante la pregunta anterior, Natalia responde que son "doce dieciseisavo". La profesora le pide que explique cómo lo ha hallado. La alumna empieza a explicar diciendo que cuenta las partes que están de otro color… No obstante, no termina porque Lucía manifiesta que son "12/40". Al escuchar a Lucía, la profesora le pide que explique como lo ha visto. La alumna explica que lo hace "mirando toda la unidad". Luego la profesora pregunta a todos los alumnos: ¿cuánto sale de esa unidad que tenía al principio? Se puede apreciar que no todos los alumnos lo comprenden ya que no se escucha comentario alguno. Natalia, de manera sorpresiva, expresó que ella había descubierto otra manera de hallar la multiplicación, pero la profesora no toma en cuenta esta intervención y pregunta a todos si han comprendido la gráfica. Lucía explica que a ella "le salió esa fracción porque multiplicó", aunque la gráfica no la había hecho: "lo hice así porque pensé que era así". Los alumnos se asombran pues observan que la fracción final resulta, efectivamente, de multiplicar los numeradores y los denominadores por separado (que es como lo había hecho esta alumna). La mayoría de los alumnos responde

– *Valoración por parte de la docente de la gráfica como estrategia para comprender la actividad operativa.* – *Valoración de la manipulación directa como “estrategia rápida”.* – *Explicación directa por parte de la profesora de la multiplicación de fracciones.*	afirmativamente. Natalia manifiesta que eso era lo que quería decir (ese era 'el método' que había descubierto). La profesora sonríe. La profesora explica que la gráfica es para que entiendan de dónde sale y no lo hagan mecánicamente. Acto seguido, la profesora expresa lo siguiente: “el método para resolver la multiplicación de las fracciones... eso que pide (la operación) es realmente lo mismo si multiplico los numeradores y los denominadores”. Luego pregunta: “¿cómo se multiplican las fracciones?, la manera rápida”. Los alumnos no responden inmediatamente; sin embargo, Nerea 1 dice que ella lo ha hecho diferente. La profesora se acerca y observa que lo ha hecho correctamente pero sin la gráfica. La profesora le pregunta si alguien le ha ayudado y la alumna le dice que lo hizo con ayuda de su madre, aunque ella (su madre) tampoco sabía. La profesora insiste que no resuelvan los ejercicios sin entender: “no apliquen por aplicar”, ya que primero deben entender lo que hacen.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora propone otras fracciones de fracciones para que los alumnos grafiquen las mismas. ▪ Los alumnos no resuelven inmediatamente. ▪ La profesora orienta el trabajo de la alumna a través de preguntas puntuales (si pide los dos cuartos de tres sextos, ¿de qué vas a hallar los dos cuartos?... por lo tanto debe dividir en seis partes… y tomas…). ▪ La alumna grafica siguiendo el diálogo establecido con la docente. Sin embargo, esta no es inmediata. ▪ En la relación establecida sigue prevaleciendo la fracción inicial más no la unidad inicial en su conjunto. Códigos: – *Aplicación del nuevo conocimiento a una situación similar.*	La profesora nombra a Sara para que se acerque al encerado y realice la representación gráfica de la fracción de fracción: 2/4 de 3/6. La alumna no sabe qué hacer y la profesora le pregunta qué tiene que hacer primero. La alumna dibuja un rectángulo (la unidad) pero no sabe cómo dividirlo (si elegir 2/4 o 3/6). Con ayuda de la profesora divide en 6 partes de la siguiente manera, tomando las tres de la parte superior: Profesora: Si pide los dos cuartos de tres sextos, ¿de qué vas a hallar los dos cuartos? Sara: De tres sexto Profesora: Por lo tanto, debes dividir en seis partes… Sara: (divide) Profesora: Y tomas… Sara: Tres 

– *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente).* – *Guía directa de la docente en la resolución de la actividad.* – *Dificultad para transferir el conocimiento de manera individual (por parte de la alumna).*	Una vez vista la gráfica anterior, la profesora le pregunta a Sara qué parte de los 3/6 (señalando los tres sextos) se van a tomar. La alumna responde que los 2/4. La profesora le pregunta qué tiene que hacer pero la alumna no responde inmediatamente. La profesora se dirige a toda la clase y plantea la misma pregunta. Nadia responde: “de cada parte hacemos cuatro y tomamos dos”. La alumna del encerado parte en forma de cruz cada parte tomada. La profesora le pregunta cuánto debe tomar de cada una y la alumna responde que dos; luego pinta los 2/4 de cada parte. El gráfico queda de la siguiente manera[353]:  La profesora le pregunta cómo se representa los 2/4 de 3/6. La alumna escribe: 2/4 de 3/6 = 6/12. La profesora le expresa que la unidad es “todo eso” (encerrando en un círculo todo el rectángulo). La alumna divide de igual manera (en cruz) la parte de la unidad que quedó en blanco (3/6). Luego expresa que “los 2/4 de 3/6 = 6/24. La profesora vuelve a repetir que para multiplicar las fracciones hay que multiplicar los numeradores y multiplicar los denominadores.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora resume lo trabajado hasta el momento sobre operaciones con fracciones y pregunta a los alumnos sobre los casos encontrados. ▪ Los alumnos intervienen de acuerdo a lo que han captado. No todos los alumnos exponen los casos trabajados de maneta correcta. Códigos: – *Síntesis de las operaciones con fracciones trabajadas con participación de los*	La profesora concluye que han aprendido a sumar, restar y multiplicar fracciones y expresa que en la suma hay dos casos diferentes. La profesora pregunta por esos casos. Los alumnos no saben cómo expresarlo; se confunden, al expresarse oralmente, entre una y otra operación. Los alumnos tienden a decir el proceso (se suma, se resta...), pero no explicar lo que se tiene que hacer (transformar a común denominador). La profesora insiste que expresen oralmente primero el proceso y luego escriban las operaciones implicadas. Silvia responde pero se equivoca al enunciar los elementos (“...se transforman los numeradores”). Paula 1 responde correctamente: “que los denominadores sean iguales o diferentes”. La profesora pregunta a la clase qué significa que los denominadores sean iguales o diferentes. Luego, con la ayuda de los alumnos concluye que los casos dependen de si las fracciones son homogéneas o heterogéneas.

---

[353] No con los mismos colores.

estudiantes a través de los cuestionamientos de la docente. – *Participación selectiva de los estudiantes.*	
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone que los alumnos planteen diferentes operaciones con fracciones para que los alumnos resuelvan. ▪ Según llame la docente, algunos alumnos plantean las operaciones y otros las resuelven. ▪ La profesora pregunta primero lo que implica esa operación y luego propone resolverla. ▪ Los alumnos resuelven sin dificultad las sumas y restas. ▪ La multiplicación ofrece dificultad a quien debe resolverla en el encerado. ▪ No se observa que los alumnos simplifiquen fracciones. Código: – *Orientación hacia la aplicación directa de lo aprendido a situaciones nuevas similares (operaciones directas).* – *Propuesta de los estudiantes de operaciones con fracciones.*	La profesora propone que los alumnos salgan al encerado a resolver operaciones con fracciones. Para ello llama a Bryce y elige a Nerea 2 para que esta alumna proponga la operación a Bryce. Ella propone: $\frac{5}{8}+\frac{7}{5}$. Para la resolución, la profesora sigue la misma estrategia: pregunta qué es lo que tienen que hacer para que los alumnos expliquen y luego les dice que escriban cómo lo hacen (las operaciones). La siguiente operación la resuelve Emilio y la propone Raquel ($\frac{4}{6}-\frac{3}{4}$). En este caso, la profesora cambia tres cuartos por dos cuartos. Los alumnos resuelven sus operaciones aplicando el método aprendido, sin recurrir a la gráfica. Luego, llama a Natalia y le propone la siguiente operación: $\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}$. Los alumnos preguntan si pueden hacerlo sin el dibujo. La profesora asiente pues explica que el gráfico es para entenderlo, pero una vez aprendido el método ya no es necesario. La alumna elegida pregunta si hace “el rápido o el indicado”. La profesora le dice simplemente: “hazlo”. La alumna iba a escribir solo el resultado (pues operaba mentalmente), pero la profesora le dijo que indicara cómo obtenía ese resultado. La alumna procede a indicar las operaciones que tiene que realizar y escribe lo siguiente: $\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{4}\times8\times5$. La profesora pregunta qué está haciendo y le pide que explique lo que tiene que hacer. La alumna lo hace correctamente: “multiplico los denominadores... y multiplico los numeradores”. La profesora le dice que lo haga y la alumna lo expresa correctamente. Luego escribe el resultado: $\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{2\times3\times1}{4\times8\times5}=\frac{6}{160}$ Por su parte, Bryce intenta aplicar el método aprendido para la suma y resta en la multiplicación de fracciones (transformando a común denominador). La profesora le corrige diciéndole que no necesita hacerlo ya que solo tiene que multiplicar los numeradores y los denominadores.

Final de la clase ▪ La profesora propone una hoja de trabajo para que resuelvan en casa. Código: – *Trabajo para casa (situación contextualizada).* – *Clase cerrada (tarea finalizada).*	Al finalizar la sesión, la maestra propone una hoja de trabajo sobre las rebajas para que ellos relacionen lo que están aprendiendo de fracciones con las rebajas. Uno de los alumnos comenta sobre los porcentajes. El tiempo termina y la clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Sesión observada (fragmentos)**
a) La actividad propuesta (primera propuesta) es la del día anterior. Su objetivo es que los alumnos lleguen gráficamente al resultado de la operación. Los alumnos tienen dificultad para representar gráficamente la expresión matemática. La docente orienta paso a paso dicha representación. Los alumnos utilizan estrategias operativas. Código: – *Actividad de construcción/desarrollo del conocimiento.*	a) La clase empieza con la revisión de la actividad que se propuso al finalizar la clase anterior, la misma que consistía en interpretar y graficar una expresión en la que se indicaba multiplicar fracciones… En la revisión, que se realiza observando los folios, generalmente los alumnos no supieron darle solución, y quienes lo lograron manifestaron haber tenido ayuda de sus mayores (fuera de la escuela).
a) La segunda actividad (la representación gráfica de la fracción de fracción: 2/4 de 3/6) que busca aplicar lo hecho en la situación anterior en otra similar. La actividad es desarrollada por una alumna con la guía directa de la docente.	a) La profesora nombra a Sara para que se acerque al encerado y realice la representación gráfica de la fracción de fracción: 2/4 de 3/6. La alumna no sabe qué hacer y la profesora le pregunta qué tiene que hacer primero. La alumna dibuja un rectángulo (la unidad) pero no sabe cómo dividirlo (si elegir 2/4 o 3/6).

La actividad permite asociar con el trabajo simbólico (manipulación operativa) Código: – *Actividad de aplicación (gráfica).*	Con ayuda de la profesora divide en 6 partes de la siguiente manera, tomando las tres de la parte superior
a) La tercera actividad (planteamiento y resolución de operaciones con fracciones) busca que los alumnos planteen sus propias operaciones y resuelvan las mismas; esto permite aplicar los procedimientos aprendidos. Frente a esta situación: Código: – *Actividad de aplicación (planteamiento).* – *Actividad de aplicación (procedimiento).*	a) La profesora propone que los alumnos salgan al encerado a resolver operaciones con fracciones. Para ello llama a Bryce y elige a Nerea 2 para que esta alumna proponga la operación a Bryce… $\frac{5}{8}+\frac{7}{5}$; $\frac{4}{6}-\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}$
a) La última actividad propuesta es una hoja de trabajo sobre las rebajas en la que los alumnos deben asociar los porcentajes con las mismas. Código: – *Actividad de reflexión.*	a) Al finalizar la sesión, la maestra propone una hoja de trabajo sobre las rebajas para que ellos relacionen lo que están aprendiendo de fracciones con las rebajas. Uno de los alumnos comenta sobre los porcentajes. El tiempo termina y la clase finaliza.

Caso 3

Sesión 1/Caso 3

Martes 4 de marzo de 2008. Hora 9:45 – 10:35. Colegio B

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión/inicio de clase ▪ La profesora cambia la propuesta indicando que resolverán otros problemas del libro de texto. Código: – *Resolución de problemas del libro de texto.*	La profesora tenía previsto, en la sesión de hoy, trabajar las actividades del libro de matemática en las que los alumnos debían de hacer uso del transportador y compás. Como la mayoría de los alumnos no había llevado el transportador, la profesora cambió las actividades por otras, del mismo libro.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora propone actividades del libro de texto para que los alumnos, individualmente, desarrollen. PROPUESTA DE ACTIVIDADES. ▪ Los alumnos resuelven las actividades de manera individual: PRODUCCIÓN DE SOLUCIONES. ▪ Las actividades propuestas permiten aplicar directamente el conocimiento. ▪ No se necesita realizar ninguna operación aritmética para su resolución. ▪ Las respuestas a la primera actividad no generan diferentes propuestas. Se espera que los resultados sean los mismos. ▪ Las respuestas a la segunda actividad genera diferentes propuestas. Códigos:	En las actividades propuestas, se les solicita a los alumnos escribir la medida de los ángulos propuestos, dada una pista, y en la que tenían que dibujar pares de ángulos dadas unas características específicas. Esta última actividad es parecida a una de las que se habían propuesto en la ficha de evaluación aplicada anteriormente. Básicamente, se trabajaron las siguientes dos actividades: 1. Observa que dos quesitos (se muestra la imagen de una caja circular en la que hay ocho porciones iguales de queso, luego la imagen de una circunferencia dividida en ocho partes iguales y la figura de dos porciones de quesitos formando ángulo recto) completan un ángulo recto. Teniendo esto en cuenta, copia y completa la tabla (se presenta una tabla de 7x2 en la que se debe considerar el número de porciones y el ángulo que forman. Se muestra un ejemplo, que es el que está en el enunciado. 2. Dibuja en tu cuaderno: a) Dos ángulos consecutivos; un agudo y otro obtuso b) Dos ángulos adyacentes iguales c) Dos ángulos opuestos por el vértice, ambos obtusos

– *Planteamiento directo de actividades del libro de texto para aplicar el conocimiento aprendido: reconocimiento de ángulos y construcción de ángulos* – *Participación total de los estudiantes en la resolución las cuestiones al ser una actividad propuesta de manera individual.*	
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ Los alumnos muestran sus producciones a la maestra. ▪ La docente valida sus trabajos si sus respuestas se ajustan a las indicaciones. Si no se ajusta, la maestra les dice que observen bien. ▪ Los alumnos intercambian sus producciones entre sí. VALIDACIÓN DE SOLUCIONES. Códigos: – *Dificultad para construir ángulos de acuerdo a las características planteadas (dos a la vez).* – *Interacción entre alumnos.* – *Corrección de la docente del trabajo del alumno (si hay error lo indica al estudiante).*	Los alumnos, en general, resuelven solos las actividades correctamente, sobre todo la primera de ellas; sin embargo, en la segunda, aún tienen dificultad en reconocer ángulos según las características propuestas. Se observan casos en los que consideran una característica pero no la otra (por ejemplo, ser adyacentes e iguales a la vez, o ser suplementarios: uno agudo y otro obtuso). Los alumnos muestran sus producciones a la profesora quien valida o no sus trabajos. Algunos alumnos comentan entre sí.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ TRANSFORMACIÓN DE SITUACIONES. La maestra transforma las situaciones propuestas en la segunda actividad. ▪ Los alumnos replantean sus soluciones a partir de las nuevas condiciones.	En grupo total, se intentó no sólo revisar sus producciones sino cuestionarles en base a lo que saben de lo que han aplicado. Por ejemplo, se preguntó a un alumno que había realizado las gráficas correctamente si, en el caso de los ángulos adyacentes, que se proponían que sean iguales, podía haber dos ángulos adyacentes que no sean iguales. La primera respuesta del alumno fue afirmativa. Luego se le preguntó cuándo dos ángulos eran adyacentes y el mismo alumno respondió que cuando formaban ángulo plano. Luego se le preguntó cuánto debían medir los ángulos adyacentes para que sean iguales si siempre tenían que formar ángulo plano. El alumno

▪ Todo ello, de manera oral. ▪ Los alumnos validan medidas de ángulos observando, no midiendo (si bien no todos llevaron transportador, algunos sí lo hicieron). Código: – *Reflexión grupal del trabajo realizado a través de la interacción con el alumno y la actividad matemática.* – *Transformación de las actividades como estrategia docente para la aplicación de los alumnos.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente) en la reflexión de las actividades realizadas.*	dijo que 90º. Acto seguido se le preguntó si había otra posibilidad y respondió que sí. Se le volvió a preguntar, qué otro par de ángulos pueden ser adyacentes y no medir 90º. Entonces dijo que no había. Otra cuestión fue a propósito de los ángulos opuesto por el vértice y que sean obtusos. A la alumna que presentó su respuesta y reconoció cuáles eran los ángulos obtusos se le preguntó si los ángulos opuestos por el vértice eran iguales (se le hizo la pregunta pues su gráfica mostraba ángulos relativamente diferentes, aunque parecía iguales). La alumna dudó en responder y dijo que no necesariamente.
Final de la clase ▪ La actividad se detiene por el sonido del timbre que indica que el tiempo ha finalizado. Código: – *Sin actividad para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	El timbre suena y el tiempo finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La docente propone actividades de aplicación del conocimiento. Los alumnos resuelven; sin embargo, tienen dificultad para considerar dos	a) Observa que dos quesitos (se muestra la imagen de una caja circular en la que hay ocho porciones iguales de queso, luego la imagen de una circunferencia dividida en ocho partes iguales y la figura de dos porciones de quesitos formando ángulo recto) completan un ángulo recto. Teniendo esto en cuenta, copia y completa la tabla (se presenta una tabla de

aspectos en una misma situación (segunda propuesta). Código: – *Actividades de aplicación (a través de un ejemplo).* – *Actividad de aplicación (a través de características específicas).*	7x2 en la que se debe considerar el número de porciones y el ángulo que forman. Se muestra un ejemplo, que es el que está en el enunciado. Dibuja en tu cuaderno: a) Dos ángulos consecutivos; un agudo y otro obtuso b) Dos ángulos adyacentes iguales c) Dos ángulos opuestos por el vértice, ambos obtusos
a) La segunda actividad surge a partir de la anterior, en ella la docente cambia las condiciones para que el alumno reflexione al respecto y responda. No necesita aplicar. Sin embargo, son aplicativas puesto que se producen a partir de un conocimiento aprendido. Código: – *Actividad reflexiva.*	… En grupo total, se intentó no sólo revisar sus producciones sino cuestionarles en base a lo que saben de lo que han aplicado. Por ejemplo, se preguntó a un alumno que había realizado las gráficas correctamente si, en el caso de los ángulos adyacentes, que se proponían que sean iguales, podía haber dos ángulos adyacentes que no sean iguales. La primera respuesta del alumno fue afirmativa. Luego se le preguntó cuándo dos ángulos eran adyacentes y el mismo alumno respondió que cuando formaban ángulo plano. Luego se le preguntó cuánto debían medir los ángulos adyacentes para que sean iguales si siempre tenían que formar ángulo plano. El alumno dijo que 90º. Acto seguido se le preguntó si había otra posibilidad y respondió que sí. Se le volvió a preguntar, qué otro par de ángulos pueden ser adyacentes y no medir 90º. Entonces dijo que no había… … Otra cuestión fue a propósito de los ángulos opuesto por el vértice y que sean obtusos. A la alumna que presentó su respuesta y reconoció cuáles eran los ángulos obtusos se le preguntó si los ángulos opuestos por el vértice eran iguales (se le hizo la pregunta pues su gráfica mostraba ángulos relativamente diferentes, aunque parecía iguales). La alumna dudó en responder y dijo que no necesariamente.

Sesión 2/Caso 3

Jueves, 6 de marzo de 2008. Hora: 10:35 – 11:25. Colegio B

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión/inicio de clase ▪ La sesión retoma la actividad que se iba a ejecutar la clase pasada y que no se hizo por falta de instrumentos (transportador y compás) para cada alumno. ▪ La profesora describe y explica lo que es un transportador y qué usos tiene. ▪ Los alumnos verifican en sus transportadores las características expuestas por la docente. ▪ EXPLICACIÓN DEL INSTRUMENTO Códigos: – *Descripción por parte de la docente del transportador.* – *Interés de los alumnos por el uso del transportador. Actitud exploratoria de los alumnos.*	La sesión empieza con la explicación de la profesora sobre el uso del transportador. Previamente, se cerciora que todos los alumnos tengan transportador y compás sobre sus mesas. Algunos no lo tienen. La maestra muestra el transportador del aula, que es para su uso en el encerado y está hecho de manera; les expresa que es igual al que tiene cada alumno y les explica cómo es, qué partes tiene, cómo se miden los ángulos, qué expresa cada número, por qué los números están de izquierda a derecha y viceversa, para qué sirve la línea central que coincide con los 90º, qué uso se le da al orificio que tiene el transportador, etc. Los alumnos van comprobando si sus transportadores son iguales o no al de la maestra. A diferencia del de ella, el de los alumnos, generalmente, es transparente.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La maestra explica cómo se construyen ángulos con el transportador, indicando paso a paso el proceso, a la vez que realiza cada uno con la ayuda de su transportador. ▪ La maestra se da cuenta que su transportador no es fiable y selo hace ver a los estudiantes; no obstante, intenta solucionar el problema de manera directa. ▪ Los alumnos observan sus transportadores.	Los alumnos intentan medir los ángulos que propone el libro de matemáticas, pero la maestra les dice que atiendan antes de hacer cualquier actividad, ya que así sabrán qué hacer. La maestra empieza a explicar cómo se construyen ángulos con el transportador. Para ello expresa que se dibuja una línea recta y se ayuda del transportador; luego, se señala un punto en esa línea y se hace coincidir dicho punto con el agujero que tiene el transportador (el agujero sirve para ubicar el vértice). La explicación va acompañada de la ejecución por parte de la maestra en el encerado. La maestra se da cuenta que en su transportador el agujero y los cero grados no coinciden, así que les hace saber a los alumnos que *su* transportador no es muy fiable; sin embargo, intenta hacer que el punto marcado en la línea y los cero grados coincidan, luego explica que si quiere un ángulo de cuarenta grados, por ejemplo, marca un punto donde indica esa medida. A

- Los alumnos siguen la explicación de la maestra. - La maestra propone medir ángulos haciendo uso del transportador. - EXPLICACIÓN DE USO. Códigos: – *Explicación directa de la docente del uso del transportador para la construcción de ángulos previo a su uso práctico.* – *Interés de los alumnos por el uso del transportador. Actitud exploratoria de los alumnos.*	continuación explica que para construir el ángulo se debe trazar otra línea desde el punto marcado (vértice) y el nuevo punto. Los alumnos observan sus transportadores, los comparan entre sí y siguen la explicación de la maestra.
Desarrollo de la clase (Parte II) - La maestra propone a los alumnos dibujar un ángulo y medirlo con el transportador. - Antes de medirlo, la profesora cuestiona sobre la medida que puede tener el ángulo. - Los alumnos expresan diferentes medidas, algunas cercanas a la medida real y otras muy distantes. - La profesora mide el ángulo. - No todos los alumnos están de acuerdo con la medida. - La profesora propone que un alumno mida el ángulo para verificar. - La profesora propone un tema nuevo (bisectriz y mediatriz). - Esta etapa de a clase se centra en aplicar el conocimiento expuesto a un caso concreto (APLICACIÓN). Códigos: – *Aplicación del uso del transportador para medir ángulos concretos.*	La maestra saca al encerado a uno de los alumnos para que dibuje un ángulo. El alumno dibuja un ángulo a pulso y la maestra pregunta a los alumnos cuánto puede medir el ángulo que ha dibujado el compañero. Los alumnos expresan algunas medidas: unas cercanas a la medida real y otras muy distantes. La profesora coge su transportador y mide el ángulo. Su medida es 105º. Uno de los alumnos no está de acuerdo con la medida (desde la posición de este alumno, aparentemente, el ángulo es recto). La maestra opina que la medida puede ser incorrecta pues se usó el transportador del aula. Se le propone a la maestra usar otro transportador y ella decide que uno de los alumnos lo haga con el transportador que ese alumno haya traído. El alumno sale al encerado y mide. Con su transportador, el ángulo también mide 105º. La profesora le pide que lo vuelva a hacer porque no lo ha visto. La profesora corrobora su medida. Otro de los alumnos quiere salir al encerado y probar su transportador, pero la maestra le dice que vuelva a su sitio. Los alumnos se disponen a desarrollar las actividades del libro pero la maestra les dice que antes de desarrollar las actividades verán lo que es la bisectriz y mediatriz.

– *Aplicación de instrumentos no fiables (transportador).* – *Participación selectiva de los alumnos en la construcción de ángulos (propuesta por la docente y por el alumno).* – *Diseño de ángulos de "a pulso" por parte de los alumnos.*	
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora plantea a los alumnos hallar la bisectriz de un ángulo. ▪ La profesora cuestiona sobre qué es la bisectriz. ▪ La profesora explica lo que es la bisectriz. ▪ Los alumnos muestran interés por los instrumentos. Evidencian además cierto conocimiento y uso de los mismos. Códigos: – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar saberes previos personales en los alumnos (bisectriz).* – *Explicación directa del tema (bisectriz) por la docente como requisito previo a su aplicación.* – *Interés de los alumnos por el uso del transportador para construir. Actitud exploratoria de los alumnos.*	La maestra propone a la clase hallar la bisectriz de un ángulo. Pregunta a los alumnos qué es la bisectriz. Una de las alumnas lo lee del libro, pero la maestra le dice que del libro no, que exprese lo que ella sabe sobre el tema. La alumna dice que lo sabe e intenta decir, sin ver el libro, lo que es una bisectriz. Los alumnos levantan la mano para responder. Uno de los alumnos pregunta si con el compás trazarán triángulos. La maestra le dice que ahora no, que servirá para hallar la bisectriz. El alumno intenta trazar un triángulo en un folio y luego se lo muestra a la maestra. La maestra empieza a explicar lo que es la bisectriz de un ángulo.
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La maestra propone a los alumnos trazar un ángulo para trazar su bisectriz. ▪ Los alumnos muestran interés por la actividad propuesta por la docente. ▪ Un alumno dibuja un ángulo y lo mide.	Luego de la explicación, la maestra propone a la clase hallar e indicar la bisectriz de un ángulo concreto. Para ello, la maestra le pide a otro alumno que salga al encerado y dibuje otro ángulo. Los alumnos protestan porque todos quieren salir al encerado. El alumno elegido traza dos líneas a mano alzada. Luego, con el uso de su transportador mide el ángulo. El alumno obtiene una medida; luego la maestra mide y obtiene otra. La maestra expresa que eso ha sucedido porque las líneas que ha dibujado el alumno no son rectas y que al usar transportadores distintos (de

▪ La maestra mide el ángulo también. ▪ La maestra explica el porqué de la diferencia. ▪ La profesora ‘arregla’ el ángulo y precisa una medida. ▪ A partir del ángulo, la maestra explica cómo se halla la bisectriz. ▪ Para comprobar si la bisectriz *ha cortado* por la mitad el ángulo, propone a un alumno medir el nuevo ángulo. No se obtiene la medida esperada. ▪ La maestra justifica por la imprecisión de su transportador, alegando que cuando lo hagan los alumnos saldrá exacto. ▪ Los alumnos intentan hallar las bisectrices de los ángulos que propone el libro de texto. ▪ La profesora les indica que será después. Códigos: – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción y medida de ángulos (propuesta por la docente).* – *Explicación aplicativa directa por parte de la docente de la bisectriz de un ángulo previo a su aplicación por parte de los alumnos.* – *Uso de instrumento inadecuado.* – *Interés de los alumnos por el uso del transportador. Actitud exploratoria de los alumnos.*	distinto tamaño), las medidas son diferentes. La maestra intenta hacer una línea recta sobre una de las líneas que hizo el alumno. Con esta modificación, el ángulo mide 80º. Una de las alumnas expresa que a ella le resulta difícil hacer una línea recta ya que cuando la traza se da cuenta que está “torcida”. La profesora le siguiere que use la regla, ya que con ella no es complicado hacer una línea recta[354]. La alumna responde que lo hace con la regla. A partir del ángulo anterior (80º), la maestra va explicando cómo se tiene que hallar la bisectriz usando el compás. Para ello, hace uso de *su* compás y va explicando cómo se usa: se marca un punto en uno de los lados del ángulo y haciendo centro en ese punto se marca con el compás. Se hace lo mismo con el otro lado. El compás no funciona correctamente, pero la maestra logra marcar el punto de intersección dejado por el compás. La maestra marca ese punto de intersección y luego dice a la clase que hay que trazar la recta que pase por el vértice y el punto marcado; así se obtiene la bisectriz que corta por la mitad el ángulo en cuestión. Para comprobar que la bisectriz ha cortado por la mitad el ángulo, la maestra le propone al alumno que está en el encerado que mida el nuevo ángulo. La medida no es 40º, como tendría que ser; la maestra intenta acomodar el transportador pero no logra mayor precisión, por lo que la maestra dice que eso ha ocurrido porque el compás no es bueno y que cuando ellos (los alumnos) lo hagan con su compás saldrá mejor. Los alumnos se disponen a trazar la bisectriz de un ángulo, pero la profesora les dice que antes tienen que ver cómo se construye la mediatriz.
Desarrollo de la clase (Parte V)	Acto seguido, la maestra propone trabajar la mediatriz y pregunta qué saben de la mediatriz. Un alumno expresa que esos nombres son muy extraños. Los compañeros asienten. La maestra

---

[354] Aparentemente, el alumno confunde línea horizontal con línea recta, ya que cuando intentaba explicar las manos simulaban una línea horizontal cuando ella se refería a la línea recta.

▪ La profesora propone hallar la mediatriz de un ángulo. ▪ La profesora pregunta a los alumnos qué es la mediatriz de un ángulo. ▪ La profesora explica los que es la mediatriz de un ángulo y como se construye. ▪ La profesora cuestiona sobre los diferentes elementos que participan en la construcción de la mediatriz. ▪ Los alumnos confunden algunos conceptos. ▪ El uso del instrumento no ayuda a la maestra; no obstante, logra su cometido. Códigos: – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar conocimientos previos en los alumnos sobre cuestiones relacionadas a la mediatriz.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de sus ideas previas (sobre perpendicularidad: caso mediatriz).* – *Explicación aplicativa directa de la docente sobre la mediatriz.* – *Uso de instrumento no fiable.*	expresa oralmente qué es la mediatriz, y propone construir una. Para ello, traza en el encerado un segmento. Con este segmento, la maestra pregunta por qué esa imagen es un segmento y no una recta. Uno de los alumnos hace el aporte correcto. La maestra retoma la idea de mediatriz y hace referencia a la perpendicular. Con esta idea pregunta qué es una perpendicular o cuando dos líneas son perpendiculares. Como los alumnos no responden inmediatamente, la maestra propone que miren en el aula objetos que sean perpendiculares. Los alumnos observan, pero no logran expresar dos objetos que cumplan la característica. La maestra les propone decir qué es perpendicular al tablero de la mesa de cada uno. Los alumnos que intervienen confunden la idea de perpendicularidad con la de paralelismo y mencionan ejemplos de lo que puede ser paralelo al tablero de la mesa. Uno de los alumnos dice “los lados del tablero son perpendiculares”. La maestra le explica que lo que tiene que decir es “algo” que sea perpendicular al tablero. Una alumna dice que “las patas” de la mesa. La profesora acepta la idea; los alumnos asientan y expresan, en algunos casos, que lo habían confundido con las paralelas[355]. La maestra pregunta cuándo dos líneas son perpendiculares, los alumnos intentan expresarlo con movimientos de las manos y brazos, haciendo una cruz con ellos. La profesora les plantea la posibilidad de que las líneas perpendiculares formen un ángulo de 90º. Los alumnos asienten con sorpresa. La maestra saca a uno de los alumnos al encerado para que trace una recta perpendicular al segmento. El alumno sale y no sabe cómo dibujar la recta; luego hace una línea perpendicular al segmento pero que no lo corta. La maestra le pide que haga una recta que corte el segmento. El alumno borra su trazado y mira el segmento. No sabe cómo trazar una recta que corte el segmento. Luego, “se da cuenta” que sí puede y lo hace. Al igual que en el caso anterior, los alumnos trazan las rectas a pulso, es decir, sin usar una regla o algún otro instrumento que le permita trazar con precisión la recta. La maestra coge el compás y empieza a explicar cómo usarlo para trazar la mediatriz. El compás resulta pequeño para el segmento trazado, ya que no logra abarcar los extremos, así que la profesora borra una parte, pero ya no traza la recta perpendicular al segmento. Al igual que en los usos anteriores, el compás no logra ser un buen instrumento ni marcar correctamente los trazos; sin embargo, con más esfuerzo, la profesora logra obtener el punto de intersección. La profesora indica el punto obtenido sobre el segmento y explica que necesita otro punto ya que con uno la recta puede tomar diferentes direcciones. La profesora realiza el mismo procedimiento

---

[355] Sólo dos pares de patas son rectas y perpendiculares; las otras no.

	por debajo del segmento logrando ubicar el otro punto. Luego, con una escuadra grande une con una línea los puntos, obteniendo la mediatriz del segmento.
Desarrollo de la clase (Parte VI) ▪ La maestra pregunta si han comprendido. ▪ Un alumno compara con el método que expone el libro de texto expresando que son diferentes. ▪ La maestra no se centra en ello. Códigos: – *Comprobación a través de la pregunta directa de saberes por parte de la docente.* – *Cuestionamiento del procedimiento por parte del alumno (al comparar con otro). La maestra no explica la similitud o diferencia de ambos.*	La maestra pregunta a los alumnos si han comprendido. Uno de los alumnos expresa que en el libro está de otra manera. La maestra le explica que ella ha seguido el método correcto, el alumno insiste que en el libro está de manera distinta. La profesora se acerca al alumno, revisa el libro y le dice que es una cuestión de perspectiva[356]. El alumno no logra convencerse.
Final de la clase ▪ La maestra propone actividades del libro de texto para la casa. Código: – *Propuesta de actividad para la casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La maestra manda a los alumnos a que resuelvan, en su casa, los ejercicios del libro en los que tienen que hacer uso del transportador. El tiempo finaliza y la clase culmina.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Sesión observada (fragmentos)**
a) La primera actividad propuesta por la docente se basa en la explicación del transportador y en la construcción de	a) La sesión empieza con la explicación de la profesora sobre el uso del transportador. Previamente, se cerciora que todos los alumnos tengan transportador y compás sobre sus mesas. Algunos no lo tienen. La maestra muestra el transportador del aula, que es para su

---

[356] En el libro se traza arcos a un lado y otro del segmento a la vez; la maestra lo hace por separado: hallando primero un punto y luego el otro. En el caso anterior, se hallan a la vez.

ángulos por parte de ella, por lo que el alumno ha de estar atento para su conocimiento. El alumno no interviene ni teórica ni aplicativamente. No obstante, quiere hacerlo (participar). El tratamiento de la nueva información se da directamente por la docente. Código: – *Actividad de recepción.*	uso en el encerado y está hecho de manera; les expresa que es igual al que tiene cada alumno y les explica cómo es, qué partes tiene, cómo se miden los ángulos, qué expresa cada número, por qué los números están de izquierda a derecha y viceversa, para qué sirve la línea central que coincide con los 90º, qué uso se le da al orificio que tiene el transportador, etc. Los alumnos van comprobando si sus transportadores son iguales o no al de la maestra. A diferencia del de ella, el de los alumnos, generalmente, es transparente.
a) La siguiente actividad es una propuesta para los alumnos en la que tienen que aplicar lo transmitido anteriormente. Sin embargo, se construye un ángulo a pulso (sin uso de transportador) La actividad se orienta hacia la medición de un ángulo usando el transportador. Código: – *Actividad de aplicación (de un proceso para construir ángulos).*	a) La maestra saca al encerado a uno de los alumnos para que dibuje un ángulo. El alumno dibuja un ángulo a pulso y la maestra pregunta a los alumnos cuánto puede medir el ángulo que ha dibujado el compañero. Los alumnos expresan algunas medidas: unas cercanas a la medida real y otras muy distantes. La profesora coge su transportador y mide el ángulo. Su medida es 105º.
a) La siguiente actividad propuesta explorar los conocimientos previos de los alumnos respecto a la bisectriz, pues la cuestión nueva es cómo se construye. A partir de ella, la docente explica cómo se construye una bisectriz. Código: – *Actividad de repaso (con fines de exploración de ideas previas).* – *Actividad de atención.*	a) La maestra propone a la clase hallar la bisectriz de un ángulo. Pregunta a los alumnos qué es la bisectriz. Una de las alumnas lo lee del libro, pero la maestra le dice que del libro no, que exprese lo que ella sabe sobre el tema. La alumna dice que lo sabe e intenta decir, sin ver el libro, lo que es una bisectriz. Los alumnos levantan la mano para responder. La maestra empieza a explicar lo que es la bisectriz de un ángulo.

a) La siguiente actividad propone al alumno hallar la bisectriz de un ángulo para lo cual dibuja un ángulo (a pulso). La actividad es resuelta por la docente como medio para explicar en la práctica cómo se halla la bisectriz de un ángulo. El alumno participa para comprobar si es correcto. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento para construir la bisectriz de un ángulo).*	a) Luego de la explicación, la maestra propone a la clase hallar e indicar la bisectriz de un ángulo concreto. Para ello, la maestra le pide a otro alumno que salga al encerado y dibuje otro ángulo. Los alumnos protestan porque todos quieren salir al encerado. El alumno elegido traza dos líneas a mano alzada… A partir del ángulo anterior (80º), la maestra va explicando cómo se tiene que hallar la bisectriz usando el compás. Para ello, hace uso de *su* compás y va explicando cómo se usa: se marca un punto en uno de los lados del ángulo y haciendo centro en ese punto se marca con el compás. Se hace lo mismo con el otro lado. Para comprobar que la bisectriz ha cortado por la mitad el ángulo, la maestra le propone al alumno que está en el encerado que mida el nuevo ángulo. La medida no es 40º, como tendría que ser; la maestra intenta acomodar el transportador pero no logra mayor precisión, por lo que la maestra dice que eso ha ocurrido porque el compás no es bueno.
a) La siguiente actividad propone explorar los conocimientos previos sobre mediatriz y cuestiones asociadas. A partir de ello, la docente explica cómo se traza una mediatriz. Código: – *Actividad de repaso (con fines exploratorios).* – *Actividad de atención.*	a) Acto seguido, la maestra propone trabajar la mediatriz y pregunta qué saben de la mediatriz. Un alumno expresa que esos nombres son muy extraños… … La maestra retoma la idea de mediatriz y hace referencia a la perpendicular. Con esta idea pregunta qué es una perpendicular o cuando dos líneas son perpendiculares. … La maestra coge el compás y empieza a explicar cómo usarlo para trazar la mediatriz. El compás resulta pequeño para el segmento trazado, ya que no logra abarcar los extremos, así que la profesora borra una parte, pero ya no traza la recta perpendicular al segmento.
a) La última actividad propuesta es aplicativa; sin embargo se propone para que el alumno la resuelva en su casa. Código: – *Actividad de aplicación (de procedimientos).*	a) … La maestra manda a los alumnos a que resuelvan, en su casa, los ejercicios del libro en los que tienen que hacer uso del transportador.

Sesión 3/Caso 3

Lunes 10 de marzo de 2008. Hora: 11:55 – 12:45. Colegio B.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión/inicio de clase ▪ La profesora propone actividades del libro de texto que implica la aplicación de lo visto en la clase anterior. ▪ La profesora revisa los *ejercicios* que propuso para la casa. Códigos: – *Propuesta de actividades individuales directas de aplicación – construcción.* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de actividades del libro de texto al ser propuesta de manera individual para todos.* – *Revisión de actividades por parte de la docente.*	La profesora les propone continuar la resolución de los ejercicios que aparecen en el libro de matemática a la vez que se les revisa los *ejercicios* anteriores. Las propuestas son tres: uno es de medida de ángulos: a partir de unos ángulos que propone el libro a través de imágenes, el alumno tiene que indicar cuanto mide. El segundo *ejercicio* es de construir ángulos a partir de una medida, y el tercero es de construcción de la mediatriz y la bisectriz a partir de unos ángulos. Una vez que la maestra finaliza la revisión de la actividad propuesta para casa, procede a revisar las actividades propuestas en clase.
Inicio de clase ▪ La maestra revisa en clase la actividad propuesta en la misma. ▪ La maestra solicita a los alumnos que indiquen los pasos que han seguido para medir ángulos y construir la bisectriz y mediatriz solicitada. ▪ La maestra solicita al alumno que muestra un resultado incorrecto que corrijan, haciéndoles ver su error previamente. Códigos:	A medida que se va revisando se les pregunta a los alumnos qué pasos han seguido para medir y construir lo que se les pide. Se puede observar que no hay un manejo preciso del transportador. Todos los alumnos a los que les ha corregido han tenido aciertos y errores en ambos apartados. Para corregir la primera actividad (cuando esta es incorrecta), la maestra les pide que usen su transportador u observen el ángulo formado. Los alumnos indican el ángulo y concluyen que no corresponde con el que ellos indican. La profesora les dice que corrijan.

– *Explicación oral del alumno a la docente de la actividad realizada sobre medida de ángulos.* – *Dificultad para realizar con acierto las actividades de medida de ángulos.* – *Corrección de actividades por parte del alumno con uso de instrumentos adecuados.* – *Participación total de los estudiantes en la corrección de las actividades desarrolladas.*	
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La maestra corrige la segunda actividad. ▪ Los alumnos muestran sus producciones. ▪ Los alumnos que yerran en sus producciones corrigen. Códigos: – *Explicación oral del alumno a la docente de la actividad realizada sobre construcción de ángulos.* – *Dificultad para realizar con acierto las actividades de construcción de ángulos.* – *Corrección de actividades por parte del alumno con uso de instrumentos adecuados.*	Para la segunda actividad, la maestra sigue la misma estrategia: les dice a los alumnos que midan el ángulo formado e indiquen si se corresponde con el que pide el libro. Si no se corresponde, la maestra les pregunta dónde debería ir. Los alumnos indican. Acto seguido, la maestra les dice que rehagan la tarea.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora corrige la tercera actividad. ▪ Los alumnos construyen bisectrices “al ojo” o a pulso. ▪ La profesora solicita a los alumnos que no han construido correctamente las	El tercer ejercicio se relaciona con la construcción de la mediatriz y la bisectriz. Los alumnos suelen tener más errores en este apartado. Al ir revisando la construcción de la bisectriz se les pregunta cómo hacen para ubicar dicha línea en el ángulo y construirla. Uno de los alumnos. Pedro, no vio la necesidad de construirla siguiendo el método del libro ni de la profesora y explicó que lo hizo directamente (“a ojo”). Al preguntarle que hacía la bisectriz con el ángulo, el alumno respondió que lo dividía en dos partes; luego se le preguntó cómo eran esas partes y respondió

bisectrices y mediatrices que rehagan la tarea usando compás. Códigos: – *Explicación oral del alumno a la docente de la actividad realizada sobre bisectriz o mediatriz de ángulos.* – *Dificultad para realizar con acierto las actividades de construcción de bisectrices y mediatrices.* – *Uso por parte de los alumnos de técnicas informales (sin recurrir al instrumento apropiado).* – *Corrección de actividades por parte del alumno con uso de instrumentos adecuados.*	que eran iguales. Se le propuso comprobar si los ángulos que se habían formado, al trazar la bisectriz en su trabajo, eran iguales y en los tres no lo eran, aunque en uno estaban más próximos a la igualdad, por lo que se le propuso que trazara la bisectriz usando el compás. En la revisión de la mediatriz se observó que suelen hacerlo sin hacer uso de instrumentos adecuado (lo hacen a pulso) por lo que sus construcciones no necesariamente forman ángulos de 90°. Al revisar, la maestra pregunta por las características de la mediatriz. Los alumnos responden y verifican si se cumple en sus dibujos. Si no cumple, la maestra les dice que rectifiquen.
Final de la clase ▪ La revisión culmina con la hora de clase. ▪ La maestra propone actividades del libro de texto para casa. Códigos: – *Propuesta de otras actividades de aplicación (del libro de aplicación).* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de actividades del libro de texto al ser propuesta de manera individual para todos.* – *Clase sin cerrar (suspensión de actividades).*	El tiempo finaliza y la revisión termina. La maestra propone a los estudiantes que continúen desarrollando las actividades del libro de texto.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La docente propone tres actividades para que los alumnos desarrollen en clase. Estas actividades buscan que los alumnos apliquen el conocimiento enseñado en la clase anterior. Algunos alumnos muestran dificultad en el uso del transportador. El trabajo es individual. Código: – *Actividad de aplicación (de procedimientos).*	a) Las propuestas son tres: uno es de medida de ángulos: a partir de unos ángulos que propone el libro a través de imágenes, el alumno tiene que indicar cuanto mide. El segundo ejercicio es de construir ángulos a partir de una medida, y el tercero es de construcción de la mediatriz y la bisectriz a partir de unos ángulos.

Sesión 4/Caso3

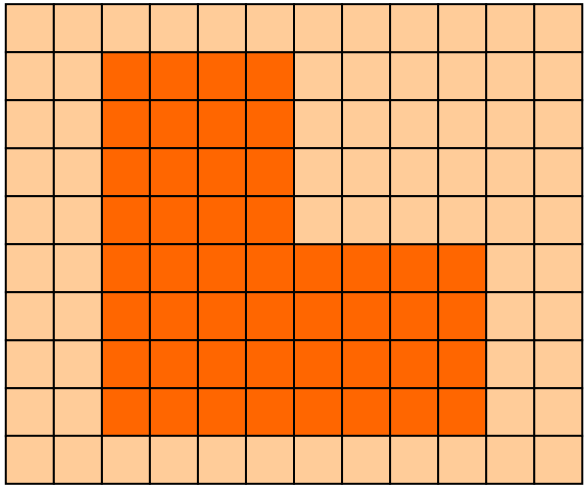
Martes 11 de marzo de 2008. Hora: 9:45 – 10:35. Colegio B

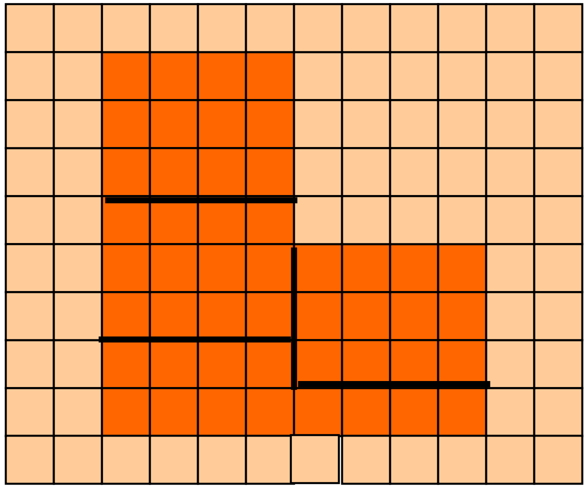
Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión/inicio de clase ▪ La sesión inicia con la propuesta de actividades sobre construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices. Códigos: – *Propuesta de actividades directas (descontextualizadas) sobre medición y construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices.* – *Participación total de los alumnos al ser propuesta como trabajo individual.*	La sesión continúa con la revisión de los ejercicios del libro de texto, mientras los alumnos realizan otros ejercicios del libro sobre medición y construcción de ángulos y bisectrices y mediatrices.

Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Los alumnos resuelven de manera individual las actividades propuestas por el libro de texto. ▪ Los alumnos construyen bisectrices y mediatrices a pulso. ▪ El uso de compás no les permite trazar correctamente las bisectrices solicitadas. ▪ Los alumnos recurren a otras estrategias. Por ejemplo, para construir bisectrices, miden el ángulo a fin de hallar la mitad del mismo, medir y trazar la bisectriz. Códigos: – *Resolución de la actividad. Uso de estrategias "informales" por parte de los alumnos para construir objetos geométricos y aspectos generales de los mismos.* – *Dificultad en los alumnos para reproducir figuras geométricas.* – *Dificultad en los alumnos manipular instrumentos geométricos.* – *Participación total de los alumnos en actividades individuales sobre medición y construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices.*	Los alumnos resuelven las actividades propuestas. Uno de los ejercicios pide que los alumnos dibujen dos polígonos en papel cuadriculado y trace las bisectrices de todos sus ángulos[357]. Los polígonos son mostrados sobre una base cuadriculada. Se puede observar en siete de los diez ejercicios revisados que los alumnos dibujan otros polígonos: un cuadrado en vez de un rectángulo y un romboide en lugar de un rombo. Las mayores diferencias se observan al dibujar el segundo polígono. Los alumnos no respetan la forma de la figura, ni sus características. Por las figuras que muestra el libro de texto, las bisectrices se pueden trazar sin usar el compás, ya que están indicadas por las líneas de la cuadrícula; sin embargo, todos los alumnos a los que se les revisó el ejercicio habían trazado las bisectrices usando el compás. Aun así, se puede observar que los alumnos no trazan correctamente las bisectrices usando compás. Para trazarlas, los alumnos dibujan el ángulo estableciendo la medida con el transportador; luego indican el ángulo: Algunos alumnos lo hacen con el compás y otros a pulso. Los alumnos no consideran que la distancia entre el vértice y un punto de ambos lados debe ser igual para luego hacer centro en ese punto. Los alumnos 'no entienden' por qué no les sale la bisectriz; son conscientes de ello cuando se les dice que midan los ángulos que se forman al trazar la bisectriz y comprobar que no son iguales. Lo mismo ocurre con las mediatrices.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ Los alumnos resuelven una segunda actividad de manera individual. ▪ Los alumnos muestran diferentes soluciones a la actividad planteada, las	Otro ejercicio que ofreció dificultad y que no pudieron resolver consistía en averiguar cómo partir una pieza de madera para tener cuatro trozos iguales. La actividad presentaba la siguiente imagen:

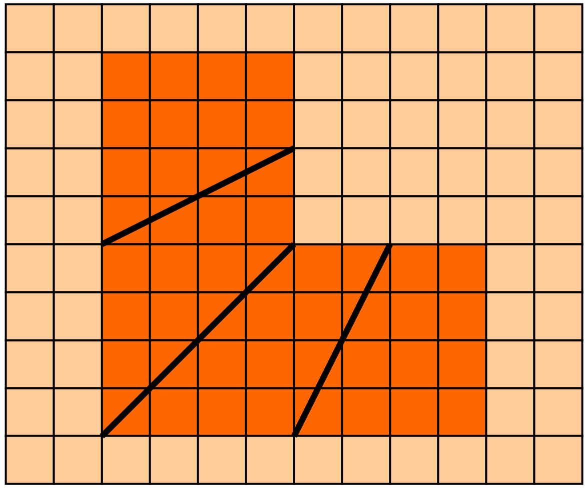
---

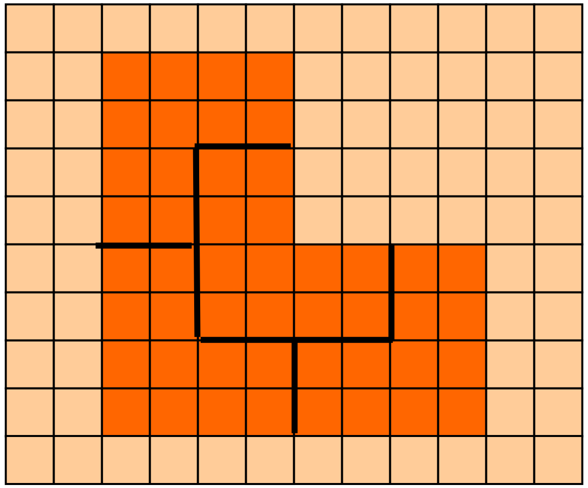
[357] La actividad dice lo siguiente: "Debuxa estes polígonos en papel cuadriculado e traza as bisectrices de todos os seus ángulos".

mismas que no cumplen el requisito planteado. ▪ La profesora muestra la solución correcta. Códigos: – *Planteamiento y resolución de actividad ‘atípica’, para la que la estrategia de solución no permite la solución inmediata.* – *Participación total de los alumnos al ser propuesta de manera individual (actividad ‘atípica’).* – *Planteamiento de soluciones que no toman en cuenta todos los elementos del problema por no acceder a ellos.* – *Exploración de las soluciones a través de la pregunta directa y exhibición y explicación (verbal) de sus producciones.* – *Transmisión directa de la solución por parte de la docente.* – *Reproducción de la imagen al tener la solución.*	 Frente a esta actividad, Nacho forma tres rectángulos iguales, de cuatro por tres cuadraditos. Al ver que el espacio que queda en la imagen tiene la misma cantidad de cuadraditos da por finalizada la actividad. Al preguntarle si esas figuras eran iguales, el alumno dijo que no, pero que tenían los mismos cuadraditos: “quizá vale”. Se propuso que pensara en figuras iguales, pero dijo que no se podía.



Juan Carlos intenta hacer figuras que tengan, todas, la misma forma, pero se da cuenta que no logra su cometido.



	Luis L. traza bisectrices y mediatrices, pero haya más formas. Los alumnos, en general, expresan que no sale. La profesora les asegura que sí y les dice que ella lo va a hacer. Cristina dice que ella lo tiene. Le muestra su dibujo a la maestra y ésta dice que no. Alejandro hace lo mismo y la maestra tampoco acepta el dibujo. Ninguno de los dibujos es el correcto. Guillermo dice que él sabe cómo tiene que ser la forma y dibuja en el encerado una forma parecida al dibujo, pero más pequeña. La profesora le pregunta cómo lo ha hecho y este alumno dice que así le dijeron que era. El alumno no supo cómo dibujar esa forma, cuatro veces, en el dibujo. La profesora les dibuja en el encerado cómo tienen que dividir la imagen:  Los alumnos reproducen la imagen. Algunos alumnos lo hacen incorrectamente.
Final de la clase ▪ La clase finaliza por el tiempo cumplido. Código: – *Sin propuesta para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La clase finaliza y los alumnos guardan sus cuadernos.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Sesión observada (fragmentos)**
La docente propone actividades del libro de texto asociadas a las temáticas desarrolladas en las últimas clases: ángulos, bisectrices y mediatrices. a) La primera actividad propuesta pide que los alumnos reproduzcan figuras geométricas e identifiquen las bisectrices y tracen las mismas. Ante esta actividad, los alumnos no reproducen exactamente la figura propuesta y tienen dificultades para usar el compás. Código: – *Actividades de aplicación (en situaciones planteadas en el libro de texto).*	La sesión continúa con la revisión de los ejercicios del libro de texto, mientras los alumnos realizan otros ejercicios del libro sobre medición y construcción de ángulos y bisectrices y mediatrices. a) Debuxa estes polígonos en papel cuadriculado e traza as bisectrices de todos os seus ángulos. Uno de los ejercicios pide que los alumnos dibujen dos polígonos en papel cuadriculado y trace las bisectrices de todos sus ángulos[358]. Los polígonos son mostrados sobre una base cuadriculada. Se puede observar en siete de los diez ejercicios revisados que los alumnos dibujan otros polígonos: un cuadrado en vez de un rectángulo y un romboide en lugar de un rombo. Las mayores diferencias se observan al dibujar el segundo polígono. Los alumnos no respetan la forma de la figura, ni sus características.
a) La segunda actividad que propone el libro de texto no se refiere al tema tratado. Esta actividad busca que los alumnos dividan un trozo de madera en cuatro trozos iguales. Los alumnos tienen dificultad en resolver correctamente la situación. Ningún alumno lo logra. La docente expone la forma final que indica cómo dividir en trozos iguales la imagen. Código: – *Actividad estratégica (de ingenio).*	a) … en averiguar cómo partir una pieza de madera para tener cuatro trozos iguales…

---

[358] La actividad dice lo siguiente: “Debuxa estes polígonos en papel cuadriculado e traza as bisectrices de todos os seus ángulos”.

Sesión 5/Caso 3

Jueves 13 de marzo de 2008. Hora: 10:35 – 11:25. Colegio B.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión/inicio de clase ▪ La profesora corrige a cada alumno las actividades del libro que propuso desarrollar a los alumnos en casa. Códigos: – *Planteamiento de actividades de aplicación sobre ángulos.* – *Planteamiento de resolución de problemas sobre números decimales.* – *Corrección de las actividades por parte de la docente.*	La clase continúa con la corrección y el desarrollo de actividades del libro de texto que se inició en la sesión anterior. La profesora hace referencia a los ejercicios y problemas matemáticos que se habían propuesto el día anterior. Las actividades son de dos tipos: medición y construcción de ángulos y resolución de problemas de aplicación de operaciones aritméticas con números decimales aplicados en contextos de medición. La corrección es individual, cada alumno se acerca a la profesora y muestran sus tareas.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora corrige el primer tipo de actividad, centrada en la construcción de ángulos. ▪ Los alumnos muestran sus producciones. ▪ La profesora identifica los errores y propone a los alumnos corregir los mismos, sin darles indicios de cuáles están correctos y cuáles no. Códigos: – *Dificultad de los alumnos para medir ángulos.* – *Dificultad de los alumnos para construir ángulos.*	La profesora revisa las primeras actividades. Los alumnos usan el transportador para medir los ángulos, aunque las medidas que expresan no son del todo correctas; en algunos casos hay errores de hasta cinco y diez grados. Para la construcción sucede lo mismo. Un mismo alumno puede tener medidas correctas e incorrectas de los ángulos. La profesora observa el trabajo de los alumnos e indica que tengan cuidado al medir pues “hay ángulos que no son correctos”. Los alumnos revisan su trabajo y, en algunos casos, corrigen.

– *Indicación de errores por parte de la docente que implica revisión personal del trabajo.*	
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ Los alumnos muestran su trabajo. ▪ Algunos alumnos expresan que no han entendido algunos problemas. ▪ Los problemas que los alumnos no han resuelto se trabajan en clase de manera individual, excepcionalmente, con la profesora. ▪ Se les sugiere volver a leer el problema para comprenderlo. ▪ Se trabaja personalmente con los alumnos que tienen dificultad, cuestionando lo que han hecho. ▪ Algunos alumnos se percatan del error, otros con mayor dificultad. Códigos: – *Resolución de actividades. Uso de estrategias operativas "puras" para resolver los problemas propuestos (sin aplicaciones gráficas).* – *Dificultad para comprender problemas de más de una etapa.* – *Dificultad para operar con números decimales (cálculo).* – *Interés de los alumnos por resolver correctamente los problemas.*	La actividad de resolución de problemas ofreció más dificultad en el sentido que algunos alumnos encuentran una dificultad para resolverlo. Paula M., frente a un problema de dos etapas[359] expresaba que no entendía el problema. Se le propuso que lo lea otra vez; la alumna lo hizo pero expresaba que no entendía. Se le preguntó sobre la situación: ¿sobre qué es el problema?, ¿qué información te da?, ¿ha recorrido las 12 vueltas?, ¿cuántas vueltas le falta recorrer?, ¿cómo puedes averiguar cuanto le falta por recorrer?... La alumna responde cada pregunta, excepto la última. Al ver que no lograba proponer un camino de solución, se le preguntó por lo que significaba cada uno de los datos. La alumna logra establecer relaciones entre los datos que el problema presenta directamente (de manera rápida los kilómetros totales y con más dificultad los kilómetros que recorrió), pero no entre aquellos que el texto le presenta indirectamente (los kilómetros por recorrer y los kilómetros recorridos), excepto si se le va indicando paso a paso: Observadora: ¿Qué hallaste en la primera operación? Paula M: (expresa el resultado de la operación) Observadora: ¿Qué te indica ese resultado? Paula M: Los kilómetros que tiene que recorrer Observadora: ¿Qué hallaste en la segunda operación? Paula M: (la alumna expresa el resultado) Observadora: ¿Qué significa? Paula M: los kilómetros que ha recorrido. Observadora: ¿Qué te pregunta el problema? Paula M: Los kilómetros que le faltan

---

[359] El problema pregunta qué distancia le falta por recorrer a un ciclista que ya ha dado tres vueltas y media y que tiene que completar doce vueltas. Se da los kilómetros que mide el circuito (una vuelta).

– *Participación total de los alumnos al resolver individualmente las actividades propuestas.*	Observadora: ¿Cómo los puedes hallar? Paula M ... Restando éste (segundo) a éste (primero). Pedro también tiene dificultades en este problema. Se le sugiere que lo vuelva a leer. El alumno lo lee pero dice que no entiende los datos. Se le pregunta qué no entiende y el alumno expresa que “los tres coma cinco”. Se le pregunta qué indica esa cantidad y el alumno expresa que las vueltas que ha dado. Se le pregunta qué distancia son esas tres vueltas. Inmediatamente, el alumno expresa que ha comprendido: “Ah, tengo que multiplicar 10,78 por 3”. Se le hace hincapié en las vueltas que ha dado. Por otro lado, Nacho tiene una dificultad respecto al mismo problema: “¿cómo tienes que dar la respuesta? Se le pregunta qué es lo que pide. El alumno dice que “la distancia que le falta por recorrer”. Se le pregunta cómo se expresa la distancia y el alumno la relaciona con los kilómetros. Sin embargo, se pudo observar que el alumno había realizado las dos operaciones que todos los observados habían planteado. Paula M. vuelve a llamar pues no entiende un problema que pide averiguar cuántos lazos se pueden hacer con doce metros de cinta si uno se hace con cuarenta centímetros. Como en el primer caso, se le pide que vuelva a leer el enunciado y se le pregunta qué tiene que hacer para averiguar cuántos lazos debe hacer con doce metros. La alumna expresa que tiene que restar. Se le pregunta qué resta y ella indica las cantidades: 12 y 40. Se le pregunta por qué tiene que hacer esa resta y ella responde que para saber cuántos lazos tiene que hacer. Se le pregunta si puede restar cosas diferentes y ella dice que no. Se le pregunta qué indican los doce y ella responde que metros; luego expresa que tiene que convertir los metros en centímetros. Se le pregunta cuántos centímetros son doce metros y ella dice que ciento veinte. Se le dice que piense bien y ella dice que no sabe calcular mentalmente. Se le sugiere que lo haga por escrito. La alumna opera y expresa que son mil doscientos. Luego se le pregunta qué hace con esa cantidad y la alumna dice que la tiene que multiplicar por cuarenta. Se le pregunta por qué multiplica y ella indica que para saber cuántos lazos tiene que hacer. La observadora le hace una comparación con tres bolígrafos, en el que cada uno mide cuarenta centímetros, se le pregunta cuánto miden en total y la alumna dice que ciento veinte. Luego se le pregunta: “si cada uno son las cintas para los lazos y si en total mide ciento veinte, ¿para cuántos lazos hay?” La alumna observa los bolígrafos y expresa que tres. Se le pregunta qué ha tenido que hacer y ella dice que multiplicar. Se le vuelve a incidir: “si

	son ciento veinte centímetros y cada uno necesita cuarenta centímetros, ¿qué haces para saber cuántos lazos pueden salir? La alumna insiste que se multiplica. Cristina llama y pregunta si su operación es correcta; ella ha dividido, para el problema anterior, 120:4=30. Se le pregunta qué indica el "120" y ella expresa que son los centímetros. Se le pregunta qué ha hecho para hallar ese resultado y ella responde que ha multiplicado "120 x 100". La alumna se da cuenta del error e intenta rehacer su solución. Juan Carlos levanta la mano y pregunta cómo se dividen decimales. Se le pregunta para qué quiere saberlo y él señala un problema. El problema piden que averigüe cuánto recibe un comprador si paga con treinta euros la compra de 1,8 k. de jamón si el kilo cuesta doce euros. Se le pregunta qué tiene que dividir y el alumno señala los kilos y los euros. Se le sugiere que lea bien el problema y se le pregunta qué indica cada dato. El alumno concluye que tiene que multiplicar el precio del kilo y los kilos que ha comprado. Se revisa las soluciones de otros alumnos. Dos de ellos (Luis L. y Alejandro), dicen que ya les revisó la profesora. Se observa que Luis L. ha cometido el mismo error que Cristina (120 centímetros en lugar de mil doscientos). El alumno se da cuenta del error y corrige. Alejandro ha terminado todos los problemas, se le pide la hoja de solución y se puede observar que tiene el mismo error que el compañero y otros errores en otros problemas. Por ejemplo, en el problema de la compra de jamón, este alumno había divido los kilos comprados entre el precio. Al preguntarle porqué había dividido, éste dice que para saber cuánto pagó. Se le sugiere que lea otra vez el problema. Luego de leerlo, expresa que tiene que multiplicar. Cristina pregunta cómo se dividen decimales. Se le dice que como números naturales pero colocando coma en el cociente cuando llegue a la coma del dividendo. Se puede observar que el resultado es diferente que en el alumno anterior pues éste también había tenido un error y se había corregido. La alumna había tenido un error de cálculo que se había ido arrastrando hasta el final.
Final de la clase ▪ Se termina de revisar el trabajo de la mayoría de alumnos; los que aún no han sido revisados se deja para después. Código: – *Sin tarea para casa.*	El tiempo termina y los alumnos guardan sus cuadernos.

– *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
Las actividades son de dos tipos. a) La primera es de medición y construcción de ángulos, por lo que forma parte de una actividad de aplicación del conocimiento aprendido. La actividad sigue generando cierta dificultad a algunos alumnos. Código: – *Actividades de aplicación (de procedimientos).*	a) La clase continúa con la corrección y el desarrollo de actividades del libro de texto que se inició en la sesión anterior. La profesora hace referencia a los ejercicios y problemas matemáticos que se habían propuesto el día anterior. Las actividades son de dos tipos: medición y construcción de ángulos… La profesora revisa las primeras actividades. Los alumnos usan el transportador para medir los ángulos, aunque las medidas que expresan no son del todo correctas; en algunos casos hay errores de hasta cinco y diez grados. Para la construcción sucede lo mismo. Un mismo alumno puede tener medidas correctas e incorrectas de los ángulos. La profesora observa el trabajo de los alumnos e indica que tengan cuidado al medir pues “hay ángulos que no son correctos”. Los alumnos revisan su trabajo y, en algunos casos, corrigen.
a) La segunda actividad involucra *problemas* matemáticos sobre decimales. Si bien no es un tema que se ha estado tratando, sí es uno que conocen por lo que el tipo de actividad es de aplicación. La docente identifica este tipo de actividades como problemas. Los alumnos evidencian dificultades de comprensión de la situación, así como dificultades para operar con números decimales. Código: – *Actividad de aplicación. (a problemas).*	a) … y resolución de problemas de aplicación de operaciones aritméticas con números decimales aplicados en contextos de medición. La corrección es individual, cada alumno se acerca a la profesora y muestran sus tareas.… Cristina llama y pregunta si su operación es correcta; ella ha dividido, para el problema anterior, 120:4=30. Se le pregunta qué indica el “120” y ella expresa que son los centímetros. Se le pregunta qué ha hecho para hallar ese resultado y ella responde que ha multiplicado “120 x 100”. La alumna se da cuenta del error e intenta rehacer su solución. … Juan Carlos levanta la mano y pregunta cómo se dividen decimales. Se le pregunta para qué quiere saberlo y él señala un problema. El problema piden que averigüe cuánto recibe un comprador si paga con treinta euros la compra de 1,8 k. de jamón si el kilo cuesta doce euros. Se le pregunta qué tiene que dividir y el alumno señala los kilos y los euros. Se le sugiere que lea bien el problema y se le pregunta qué indica cada dato. El alumno concluye que tiene que multiplicar el precio del kilo y los kilos que ha comprado. … Se observa que Luis L. ha cometido el mismo error que Cristina (120 centímetros en lugar de mil doscientos). El alumno se da cuenta del error y corrige. Alejandro ha

	terminado todos los problemas, se le pide la hoja de solución y se puede observar que tiene el mismo error que el compañero y otros errores en otros problemas. Por ejemplo, en el problema de la compra de jamón, este alumno había divido los kilos comprados entre el precio. Al preguntarle porqué había dividido, éste dice que para saber cuánto pagó. Se le sugiere que lea otra vez el problema. Luego de leerlo, expresa que tiene que multiplicar.

Sesión 6/Caso 3

Miércoles 26 de marzo de 2008. Hora: 13:55 – 14:40. Colegio B.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La sesión inicia con la entrega de unas lecturas sobre las Maravillas del mundo en las que no se indica de qué se trata; sin embargo, la profesora les dice que la lectura les puede dar pistas para descubrir de qué se trata. Los alumnos deben descubrir a qué se refiere. ▪ Los alumnos leen la información. ▪ La profesora indaga si los alumnos han descubierto de qué se trata su lectura preguntándoles a cada uno. ▪ Los alumnos descubren de qué se trata la lectura que tienen en sus manos, algunos alumnos expresan el nombre exacto y otros de manera aproximada. ▪ La profesora insiste en que deben leer y fijarse en los datos. ▪ La profesora aclara aquella información que no fue descubierta completamente.	La clase es sobre medida del tiempo. La profesora les dice a sus alumnos que les va a entregar una información para que ellos la lean y luego comenten lo que dice. Algunos alumnos trabajan individualmente y otros en pares. La profesora les comenta que cada uno, o par, tiene un texto diferente, pero que se relacionan entre sí; les dice que lo que tienen que hacer es leerlo y descubrir, con la información del texto, a qué se refiere y escribirlo en la parte superior de la ficha, en las que hay indicadas unas líneas que se corresponden con cada una de las letras del título del texto. La profesora deja un tiempo para que los alumnos lean el texto. Algunos de ellos expresa que no entiende nada, que “hay unos nombres muy raros” y que no sabe de qué se trata; otros creen saberlo, pero no encuentran las palabras exactas para expresarlo. La profesora insiste que el texto les puede dar pistas y que tienen que leerlo correctamente. Después de un tiempo, la profesora empieza a preguntar si han descubierto de qué se trata. Pregunta a Santi y a Ramón qué han logrado descubrir. Los alumnos expresan que no han logrado descifrar nada, aunque creen que se refiere a un monumento. La profesora acepta su intervención y le pregunta a Óscar si ha logrado descifrar de qué se trata. Óscar dice que piensa que se trata de la Gran Muralla China; Maite y Lucía expresan que ellas creen que se trata de los Jardines de Babilonia. Tomás y Guillermo tuvieron dos textos y lograron descifrar de qué se trataba: Mausoleo de Halicarnaso y Faro de Alejandría. Carlos había escrito “funerario de Kefrén” pero no estaba seguro pues sabía que era una pirámide pero esa palabra no encajaba en el espacio. Se le preguntó

▪ Uno de los alumnos descubre a qué se refiere todo ello y los alumnos asocian. ▪ Los alumnos asocian a que pueden ser las maravillas del mundo antiguas y modernas pues hay más de siete. ▪ Un alumno da información extra. Códigos: – *Lectura de textos referidos a cuestiones de la vida real (maravillas del mundo) para introducir cuestiones matemáticas (medida del tiempo).* – *Participación total al ser una actividad propuesta en pares.* – *Interacción entre alumnos.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para la comprensión textual.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la comprensión del texto (propuesta por la docente).* – *Consolidación (resumen) de la información por parte de la maestra.*	si se hablaba de una o varias pirámides y el alumno respondió que de varias, comprobó si 'pirámides' encajaba y vio que sí. Luego, el alumno lo asoció a las Pirámides de Egipto y dio como respuesta esta idea. La profesora le pregunta a Pedro si ha descubierto de qué se trata y éste responde que piensa que es el “Coloso de Apolo”. La profesora le dice que no, que algo no es correcto y que vuelva a leer. Daniel y Paula M. tampoco logran descifrar de qué se trata. Se les da una pista: esa maravilla es de Perú, lo que encaja en la palabra que corresponde al país. Los alumnos sólo tienen el dato que su nombre significa “montaña mayor” y preguntan cómo se dice “montaña mayor” en peruano. Se les da la el dato que el lugar es Machu Picchu. Daniel expresa que él no podría haberlo descubierto porque no sabe nada de Perú ni de Machu Picchu. Enrique y Paula F. manifiestan que ellos piensan que se trata del Imperio de Roma; Luis M. y Cristina no tienen idea de qué puede ser, escriben un nombre sin sentido, ambos expresan que su información se refiere a la Estatua de Zeus. Por su parte, Luis L. y Pablo saben que se refiere a Cristo y han escrito “El Cristo cristiano”, pero expresan que no es así. Jorge y Javier dicen que no logran identificar de qué se trata pero creen que es “el templo de algo”. Por último Ramiro y María no saben de qué se trata aunque el dato que tienen es que “está en la India”. La profesora les dice que vuelvan a leer. Algunos alumnos lo han descubierto. Los alumnos leen, Ramiro lo hace en voz alta. La profesora le dice que se fije en determinadas palabras “princesa Mumtaz Mahal” y “Taj Ganj”. El alumno asocia y logra expresar el nombre: Taj Mahal. La profesora da el nombre de las maravillas que no fueron descubiertas: Petra, Chichén Itzá y el Templo de Artemisa. Carlos dice que él sabe a qué se refiere y expresa que son las siete maravillas del mundo. Algunos alumnos asienten. Pedro dice que en el encerado la profesora ha escrito nueve. La profesora pregunta qué piensan que ha ocurrido. Tomás dice que “son las maravillas antiguas y las modernas”. Pedro y Carlos expresa que esa puede ser la razón. La profesora afirma que, efectivamente, la información se corresponde con las siete maravillas del mundo antiguo y las siete maravillas de la actualidad. Pedro comenta que las maravillas del mundo antiguo fueron elegidas por un poeta.

Inicio de clase

- La profesora cuestiona sobre si las maravillas se habrán construido el mismo tiempo. Los alumnos manifiestan que no.
- La profesora pregunta por el año y siglo en el que estamos y cómo saberlo.
- Los alumnos dan diferentes argumentos. Una de las alumnas explica cómo le enseñaron a averiguar el siglo.
- La profesora reafirma la estrategia expuesta por la alumna.
- La profesora cuestiona sobre cómo se escriben los siglos.
- Los alumnos exponen lo que conocen del tema.

Códigos:

- *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar los conocimientos adquiridos respecto a la ubicación temporal de cada maravilla.*
- *Participación selectiva de los estudiantes respecto a la ubicación temporal de las maravillas (no obstante, la mayoría) (verbal).*
- *Interacción entre alumnos (trabajo en pares).*

La profesora pregunta si todas las maravillas del mundo serán iguales, y los alumnos responden que no. Luego, la profesora añade la siguiente pregunta: "¿se habrán construido en el mismo tiempo?" Se genera el siguiente diálogo:

Profesora:	¿Se habrán construido en el mismo tiempo?
Guillermo:	No, porque cada maravilla se hizo en distintos años... o fechas.
Profesora:	¿En qué año estamos?
Pedro:	2008
Profesora:	¿A qué siglo corresponde este año?
Ramiro:	Siglo XXII
Profesora:	Paula (F), ¿cómo averiguas el siglo al que pertenece un año?... ¿Ramiro?
Ramiro:	Estamos en el siglo XXI
Profesora:	¿Por qué lo sabe?
Ramiro:	Porque han pasado veintiún siglos desde que nació Cristo
Cristina:	A mí me enseñaron
Profesora:	Cristina, explica cómo averiguar los siglos…
Cristina:	Se cogen las dos primera cifras del año y se le sumaba una cantidad que no me acuerdo… uno en el caso.
Profesora:	Efectivamente, según lo que ha dicho su compañera, ¿q qué siglo pertenece 1972?
Alumnos:	Al siglo veintiuno
Profesora:	¿Cómo se escribe siglo veintiuno?
Pedro:	Con una equis, otra equis y un palito
Profesora:	Equis, equis y palito

	Pedro: No, es una "i" mayúscula Profesora: Vale… ¿Por qué se escriben de esa manera los siglos? Juan Carlos: Porque los escribían los romanos Profesora: ¿Cuál es el valor de cada letra? Los alumnos responden a la pregunta de la maestra de acuerdo a lo que van recordando; por lo general, las intervenciones son acertadas; otras, no tanto, sin embargo los propios alumnos corrigen a sus compañero. La maestra escucha las intervenciones de los alumnos y anota en la pizarra.
Final de la clase ▪ La profesora da por concluida la clase manifestando que continuarán el día siguiente. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	No hay tiempo para más y la clase termina,

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La primera actividad propuesta es la lectura de una ficha informativa que involucra ubicación temporal. A partir de la actividad la docente realiza una comprensión de textos a fin de poder identificar a qué se refiere la lectura. La docente orienta el diálogo hacia cuestiones temporales. Código:	a) La clase es sobre medida del tiempo. La profesora les dice a sus alumnos que les va a entregar una información para que ellos la lean y luego comenten lo que dice. Algunos alumnos trabajan individualmente y otros en pares. La profesora les comenta que cada uno, o par, tiene un texto diferente, pero que se relacionan entre sí; les dice que lo que tienen que hacer es leerlo y descubrir, con la información del texto, a qué se refiere y escribirlo en la parte superior de la ficha, en las que hay indicadas unas líneas que se corresponden con cada una de las letras del título del texto.

– *Actividad de exploración de ideas (asociadas a la matemática) a partir de la lectura de un texto.*	La profesora pregunta si todas las maravillas del mundo serán iguales, y los alumnos responden que no. Luego, la profesora añade la siguiente pregunta: "¿se habrán construido en el mismo tiempo?" Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Se habrán construido en el mismo tiempo? Guillermo: No, porque cada maravilla se hizo en distintos años... o fechas. Profesora: ¿En qué año estamos? Pedro: 2008 Profesora: ¿A qué siglo corresponde este año? Ramiro: Siglo XXII Profesora: Paula (F), ¿cómo averiguas el siglo al que pertenece un año?... ¿Ramiro? Ramiro: Estamos en el siglo XXI Profesora: ¿Por qué lo sabe? Ramiro: Porque han pasado veintiún siglos desde que nació Cristo Cristina: A mí me enseñaron Profesora: Cristina, explica cómo averiguar los siglos… Cristina: Se cogen las dos primera cifras del año y se le sumaba una cantidad que no me acuerdo… uno en el caso. Profesora: Efectivamente, según lo que ha dicho su compañera, ¿q qué siglo pertenece 1972? Alumnos: Al siglo veintiuno

Sesión 7/Caso3

Jueves 27 de marzo de 2008. Hora: 10:35 – 11:25. Colegio B.

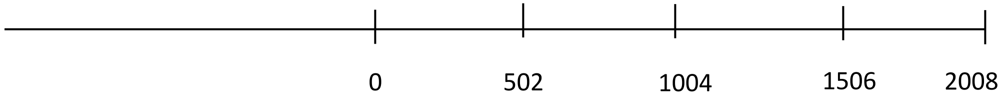
Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora retoma la sesión iniciada el día anterior y cuestiona si se puede averiguar qué maravillas son las antiguas y cuáles las modernas. ▪ Los alumnos expresan diferentes comentarios al respecto. A medida que los alumnos intervienen se escuchan comentarios asociados a la época en la que se construyeron. ▪ Los alumnos leen la información del texto referida al tiempo. Códigos: – *Repaso y exploración de ideas sobre los siglos a través del diálogo con los alumnos.* – *Diálogo a través de pregunta directa para explorar las ideas sobre la ubicación temporal y el siglo correspondiente.* – *Planteamiento de preguntas abiertas (¿cómo saber que unas son las antiguas…?) generan mayor participación.* – *Participación selectiva de los estudiantes al justificar la ubicación temporal de las maravillas (general y propuesta por la docente).* – *Diálogo a través de pregunta directa para explorar las ideas sobre la ubicación*	La profesora comienza la sesión recordando que el día anterior habían estado hablando de las catorce maravillas del mundo y que esas maravillas estaban situadas en un momento de la historia. Pregunta en qué año estamos actualmente y los alumnos responden que en el 2008. La profesora hace referencia a que este año se corresponde con un siglo y pregunta cuál es. Los alumnos responden que en el siglo XXI. Guillermo comenta que no entiende porqué tiene que añadir un uno. La profesora hace extensivo el comentario del alumno y refiriéndose a Cristina, quien había explicado cómo se formaban los siglos, le pregunta si puede explicar por qué el año 2008 correspondía al siglo XXI. Cristina responde que ella "sabe cómo se forma pero no sabe por qué es así". Ramiro levanta la mano y responde: "si el siglo comprende cien años, va de cien en cien. Hay veintiuno desde que nació Cristo". Nacho añade: "porque está entre el 2000 y el 2100". La profesora pregunta: "y cuando llegue al 2100, ¿qué pasa? Juan Carlos responde con una pregunta: "¿llegamos al veintidós? La profesora pregunta porqué y el alumno responde "porque pasaron cien años". La profesora pregunta si con la información que tenían en las hojas se podía saber cuáles eran las maravillas del mundo antiguo. Se establece el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cómo saber que unas son las antiguas y otras las modernas? Luis M: Porque en el mundo de ahora... antiguamente las maravillas del mundo eran menos maravillosas que ahora. Paula M: Porque están viejas Daniel: Por quienes las construyeron. Ramón: Porque las nuevas, la mayoría están en América y antes no conocían América, cuando hicieron las viejas. Pablo: Sabiendo cuáles son las de ahora y cuáles las antiguas.

temporal de la maravillas del mundo (año – siglo). – *Presentación de todos los casos a la vez (sobre las maravillas del mundo) para ser trabajados por pares.*	Profesora: Bien, pero cómo. Pedro: Muchas de las maravillas se construyeron en la época romana, sobre el 300 antes de Cristo. Y... después de Cristo, cuando se acaba la época de los romanos ya se sabe que las maravillas son actuales; la gente empieza a modernizarse. Cristina: Por el lugar... En Roma, el coliseo queda en Roma. Carlos: Porque (las antiguas) ya no existen, se han destruido. Javier: Las nuevas están mejor diseñadas que las viejas. Óscar: Por cómo están conservadas. Ramiro: En los años en las que se construyeron. Profesora: Bien, por los años que se construyeron. Pedro: Yo dije eso. Profesora: No exactamente. Entonces, cuáles son las del mundo antiguo. Ramiro: Las de antes de Cristo. Profesora: Puede ser. A ver...Óscar, ¿cuál tienes tú y qué piensas que es: antigua o actual? Óscar: La Muralla China, que será antigua... porque se construyó antes de Cristo. Profesora: Y tú... Luis (L), ¿cuáles crees que son las antiguas? Luis L: Las siete que se han construido antes. Profesora: Vamos a clasificar las maravillas según su antigüedad. La que tienen ustedes, Luis (L) y Pablo, ¿es del mundo actual o antiguo? Pablo: Antiguo. Profesora: ¿Por qué? Pablo: Porque fue inaugurada en 1931 y nos parece que es antiguo.

	Profesora: ¿A qué siglo corresponde 1931? Pablo y Luis L:Veinte. Profesora: Entonces, ¿pertenece al antiguo? Luis L: No, porque el siglo veinte es anterior a éste, no fue tanto tiempo. Profesora: Luis (M), Chichén Itzá, México, ¿dónde? Luis M: En el antiguo. Profesora: ¿Por qué? Luis M: Porque aquí dice que fue centro de la civilización maya entre los años 750 y 1200 antes de Cristo, pero que fue construida antes. Profesora: ¿Entre qué años? Luis M: Yo vi en el periódico, vi unas siete nuevas maravillas y no salía ésta. Cristina: En 435 y 455 después de Cristo. Esto es muy, muy antiguo. La profesora, dirigiéndose a Jorge y Javier, menciona “Petra de Jordania”, que es la maravilla que les ha tocado a ellos. Los alumnos empiezan a leer la información que tienen. La profesora les pregunta a qué pertenecen y los alumnos dice que al antiguo. A continuación, la profesora pregunta Pedro a qué grupo cree que corresponde la maravilla que le ha tocado (Coloso de Rodas) y el alumno responde que “al antiguo, porque se construyó en una época muy, muy antigua, alrededor del 300 antes de Cristo, significa que Cristo todavía no nació...”. La profesora continúa con Juan Carlos, a quien le corresponde la estatua de Zeus. El alumno responde que es antigua “porque se hizo sobre el año... antes de Cristo”[360]. El siguiente turno es para Daniel y Paula M, quienes tienen “Machu Picchu”. Ellos opinan que es moderna “porque fue hecha en el siglo XV”. La profesora le pregunta a Carlos dónde sitúa las Pirámides de Egipto y el alumno responde que en las antiguas “porque fueron hechas antes de Cristo”. La profesora le pregunta a Ramón por el Templo de Artemisa y éste responde que “en el antiguo porque fue construida en el 550 antes de

---

[360] El alumno no menciona el año e indica que se hizo antes de Cristo.

	Cristo”. Ramón y María, que son los que continúan, respondiendo que “el Taj Mahal, del siglo XVII es actual”. La profesora vuelve a preguntarle a Óscar si la Gran Muralla pertenece a las antiguas o actuales maravillas del mundo. El alumno responde que se construyó entre el siglo V y el año 1368, por lo tanto es moderna. La profesora les pregunta a Mayte y Lucía E por los Jardines de Babilonia. Lucía responde que es “antigua porque fue en el 605 antes de Cristo”. Los últimos en responder, Tomás y Guillermo mencionan que las suyas (Faro de Alejandría y Mausoleo de Halicarnaso) corresponden a las antiguas porque se construyeron antes de Cristo. La profesora comenta que algunos han confundido la clasificación, aunque es lógico porque consideraron antiguas todas las que se construyeron antes de Cristo. La profesora menciona las siete maravillas del mundo antiguo y los alumnos van comprobando si se equivocaron o no. Luis M. y Cristina no están de acuerdo con que Chichén Itzá pertenezca a las maravillas actuales pues pone que fue “el centro de la civilización maya y fue antes de Cristo”. La profesora les dice que lean las fechas y verifiquen si fue antes de Cristo.
Inicio de clase ▪ La profesora propone una línea del tiempo a fin de poder organizar temporalmente la información. ▪ La profesora construye con los alumnos una parte de la línea de tiempo, cuestionando cómo se tendría que hacer. ▪ Los alumnos expresan sus ideas sobre el tiempo transcurrido. Códigos: – *Consolidación de la información por parte de la docente con participación de los alumnos a través de preguntas directas.* – *Uso de la línea de tiempo como estrategia para estructurar el tiempo.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo.*	La profesora explica que para situar los hechos en la historia se necesita un inicio y pregunta en qué momento se empiezan a contar. Pedro responde “desde el nacimiento de Cristo” (este es un tema que han visto en clase de Historia). La profesora dibuja una línea del tiempo en el encerado, ubica el nacimiento de Cristo y pregunta qué año debe ir allí. Los alumnos responden que el cero. La profesora pregunta: “¿hasta qué año? Los alumnos responden que “dos mil ocho”; la profesora pregunta porqué y los alumnos expresan “porque estamos en el 2008”. La profesora va estructurando la línea de tiempo que dibujó en el encerado. Divide el espacio entre 0 y 2008 por la mitad y pregunta a la clase qué año corresponde. Los alumnos responden correctamente y la profesora va escribiendo el año correspondiente. Continúa la misma estrategia hasta formar la siguiente línea:  La profesora comenta que esa línea del tiempo les va a ayudar para saber “qué maravillas van a ser del mundo antiguo o, por el contrario, cuáles del mundo actual”, para ello, haciendo referencia a que desde el nacimiento de Cristo han pasado 2008 años, pregunta qué año pondrían a la

	izquierda e indica un punto concreto (señala un punto equidistante a 2008). Tomás responde: "8002…al revés". La profesora pregunta: "¿sabemos cuánto tiempo ha pasado antes del nacimiento de Cristo?", Pedro responde: "millones de años porque la creación de la Tierra ningún ser humano la recuerda". La profesora señala los años indicados en la línea y pregunta, en cada uno, qué siglo le corresponde. El mismo alumno responde que al año 502 le corresponde el siglo VI después de Cristo. La profesora escribe sobre la línea del tiempo, entre el año cero y el actual: "Después de Cristo". La profesora le pregunta a Pablo qué siglo le corresponde al año 1004 y el alumno, dudando al principio responde que el siglo XI. Luego el turno es para Paula M. quien responde que al año 1506 le corresponde el siglo XVI. La profesora le pregunta por qué y la alumna le dice que porque se lo dijo un compañero. La profesora le dice a la alumna que piense porqué es el siglo XVI, pero la alumna no responde. La profesora le pregunta a Luis L. por qué el año 1506 se corresponde con el siglo XVI y el alumno expresa: "porque se cogen las dos primeras cifras y se añade uno".
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora construye la otra parte de la línea de tiempo (antes de 0). ▪ La profesora cuestiona sobre la construcción total de la línea de tiempo en términos de años. ▪ Los alumnos van ubicando cada "maravilla del mundo" en la línea de tiempo según el año que tienen justificando su decisión. ▪ A partir de la información brindada por los alumnos, la maestra construye la línea de tiempo en la pizarra. Códigos: – *Diálogo con preguntas directas para generar la participación de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo y en la ubicación temporal de las maravillas del mundo en dicha línea.*	La profesora expone que en la información que los alumnos tienen hay fechas que ayudan a situar las maravillas del mundo actual; luego añade: "vamos a ver si todas pueden encajar aquí (refiriéndose a la línea elaborada), pero luego lo haremos". A continuación, la profesora retoma la pregunta de cuántos años pueden haber pasado antes de Cristo, señalando el punto antes indicado. Juan Carlos responde: "millones de millones de años". La profesora le dice que piense. La profesora hace referencia a que: "si desde aquí (nacimiento de Cristo) hasta aquí (actualmente) han pasado 2008 años..."; luego pregunta, "¿cuántos años han pasado desde aquí (nacimiento de Cristo) hasta aquí? (punto indicado). La profesora pregunta si hay la misma distancia y los alumnos responden afirmativamente. Luego, la profesora vuelve a preguntar cuántos años han pasado. Tomás responde que "los mismos". La profesora escribe en ese punto "2008". Luego la profesora pregunta qué diferencia hay entre ese año y el actual. Los alumnos responden que uno es antes de Cristo y el otro después. La profesora pregunta si pueden haber más años antes de Cristo y los alumnos responden que sí. La profesora señala un punto a la izquierda del 2008 a. C. y pregunta qué año puede ir allí. Los alumnos dan diversos años y la profesora escribe 3012. La profesora escribe a la izquierda del cero la frase "antes de Cristo" y recalca que los años que están a la izquierda del cero son aquellos que sucedieron antes de Cristo. La profesora pregunta si esa fecha es la más antigua que pueden colocar, según los datos que tienen. Carlos dice que las Pirámides se terminaron de construir hacia el 2570 antes de Cristo. La profesora vuelve a preguntar si alguien tiene una fecha más antigua que esa y los alumnos responden que no. La

– *Dificultad para construir la línea de tiempo (en relación a la distribución de los años).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo (con mayor afluencia).*	profesora empieza a hacer las mismas divisiones que hizo en la línea del tiempo, en la parte izquierda y recalca que “todo esto es antes de Cristo, ¿verdad?”. Luego, haciendo referencia al año que indicó Carlos, la profesora comenta: “ese año que nos dice... (Carlos) ya podríamos representarlo en la línea de tiempo, ¿dónde?”. La profesora hace la pregunta a Jorge quien responde “entre 3012 y 2008 antes de Cristo”. La profesora pregunta cuál es la diferencia entre los años antes de Cristo y los años “después”. Cristina responde: “en que se puede poner “antes de Cristo” y “después de Cristo”. La profesora pregunta por otra diferencia. Daniel dice: “que se cuentan al revés... por ejemplo un año: once, diez, nueve, ocho... hasta llegar a cero, luego crece”. La profesora pregunta a Jorge a qué siglo pertenece el año 3012. El alumno responde que al siglo veintinueve. La profesora pregunta a los alumnos, en general, si están de acuerdo. Algunos alumnos responden que no y otros que sí. Cristina opina que sí y justifican de la siguiente manera: “porque si va de atrás se resta”. Después de la intervención de Cristina, la profesora expresa lo siguiente: “han dicho que cada siglo son... cien años, y de aquí a aquí (señala desde el año cero hasta el 502), ¿cuántos años pasaron? La profesora le hace la pregunta a Enrique, quien responde correctamente. Luego la profesora pregunta: “¿con qué siglo se corresponde el 502? El mismo alumno da dos alternativas: cuatro y seis. La profesora vuelve a insistir: “¿cuántos años han pasado desde el cero al 502? Los alumnos responden. La profesora pregunta: “¿qué siglo le corresponde al 502? Tomás responde que “igual” (refiriéndose al siglo que corresponde al año 502 después de Cristo), Juan Carlos coincide con Tomás. La profesora le hace la pregunta a Luis M. quien responde que al año 502 le corresponde el siglo VI. La profesora pregunta a cada alumno el siglo que corresponde a cada año escrito “antes de Cristo”. Guillermo y Lucía responden correctamente. María no responde inmediatamente. La profesora le pregunta qué dificultad tiene y la alumna dice lo que hay que hacer “se le suma a las dos primeras cifras un uno”. La alumna logra responder. Luego la profesora les dice: “van a decir dónde situarían, dentro de qué periodo situarían su maravilla del mundo”. Los alumnos expresan correctamente entre qué años ubicarían su maravilla del mundo, justificando su decisión. La profesora va situando en la línea el año correspondiente según indican los alumnos (más cerca de 2008 que de 3012, o más cerca de 502 porque el año es 550, etc.).
Desarrollo de la clase (Parte II)	La profesora muestra cada una de las imágenes que corresponden a las catorce maravillas del mundo y pregunta a cuál corresponde. Tomás logra identificar Petra pues comenta que él la ha

▪ La profesora muestra las imágenes correspondientes a cada maravilla del mundo para que los alumnos las identifiquen según su lectura. Códigos: – *Retorno de la actividad inicial (volver hacia ella).* – *Participación selectiva de estudiantes en el reconocimiento de la imagen de acuerdo al texto leído.*	visto en un libro. Cada alumno va identificando las imágenes y justificando su decisión, según la información que aparece en las fichas: Profesora: (muestra Petra) Javier: Machu Picchu Luis M: Chichén Itzá Tomás: Petra Profesora: ¿por qué? Tomás: Porque lo vi en un libro sobre las maravillas. Profesora: (Muestra El Cristo Redentor) ¿Y éste? Pablo: El Cristo Redentor Profesora: (Muestra Machu Picchu) ¿Y esta… Daniel? Daniel: Machu Picchu Profesora: ¿Por qué? Daniel: Porque pone que es “montaña mayor” Profesora: (Muestra Chichén Itzá) ¿Y ésta,... Nacho y Daniel? Daniel: Chichén Itzá Profesora: ¿Por qué? Cristina: Porque dice que es una pirámide. Profesora: (Muestra el Coliseo de Roma) ¿Y ésta...María? María: ... Profesora: Esto deberían conocerlo todos. A ver...Santi, tú que vienes de esas tierras

	Santi: Coliseo Romano Profesora: (Muestra el Taj Mahal) Juan Carlos: El Coloso Tomás: (en voz baja) ¡Que es el Taj Mahal! Profesora: ¿Qué es “coloso”? Pablo: Gigante Profesora: (refiriéndose a Paula M.), ¿a qué maravilla corresponde? Paula M: Al Taj Mahal Profesora: ¿Por qué? Paula M: Porque lo he oído Profesora: ¿Qué puedes decir por ti misma? Paula M: Que es de la India Ramiro: Es un mausoleo Profesora: (refiriéndose a Javier) ¿Qué es esto? Javier: Varias pirámides Carlos: Las Pirámides de Egipto Profesora: (refiriéndose a Ramón) ¿Y esto? Ramón: Jardines Colgantes de Babilonia... La clase transcurre reconociendo las demás maravillas y justificando. La profesora pregunta, al final y a propósito del Faro de Alejandría si los alumnos conocen un faro parecido. Los alumnos responden la Torre de Hércules. La profesora pregunta si ambos faros cumplen la misma función y cuál es. Los alumnos expresan sus distintas opiniones al respecto.

Final de la clase ▪ La profesora propone la actividad del libro de texto para la casa. Código: – *Propuesta de actividad para la casa sobre el tema tratado.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La clase finaliza no sin antes decir a los alumnos que resuelvan la página del libro que corresponde a medida del tiempo: años y siglos.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La actividad inicial consiste en un repaso de lo trabajado en día anterior (actividad inconclusa) La profesora orienta la actividad hacia el tratamiento del tiempo y la ubicación temporal. Esto se orienta hacia la construcción del nuevo conocimiento. La profesora no hace referencia a problemas o ejercicios para referirse a las actividades propuestas; estas surgen del contexto de la situación. Código: – *Actividades de repaso (con fines de exploración de conocimiento trabajado).*	a) La profesora comienza la sesión recordando que el día anterior habían estado hablando de las catorce maravillas del mundo y que esas maravillas estaban situadas en un momento de la historia. Pregunta en qué año estamos actualmente y los alumnos responden que en el 2008. La profesora hace referencia a que este año se corresponde con un siglo y pregunta cuál es. Los alumnos responden que en el siglo XXI… La profesora pregunta si con la información que tenían en las hojas se podía saber cuáles eran las maravillas del mundo antiguo. Se establece el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cómo saber que unas son las antiguas y otras las modernas? Luis M: Porque en el mundo de ahora... antiguamente las maravillas del mundo eran menos maravillosas que ahora. Paula M: Porque están viejas
a) La siguiente actividad se centra en el tratamiento temporal de las maravillas del mundo a fin de construir una línea del tiempo y ubicar temporalmente las maravillas.	a) La profesora pregunta si con la información que tenían en las hojas se podía saber cuáles eran las maravillas del mundo antiguo. Se establece el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cómo saber que unas son las antiguas y otras las modernas?

Código: – *Actividad de construcción/desarrollo del conocimiento.*	Luis M: Porque en el mundo de ahora... antiguamente las maravillas del mundo eran menos maravillosas que ahora. Paula M: Porque están viejas … Pablo: Porque fue inaugurada en 1931 y nos parece que es antiguo. Profesora: ¿A qué siglo corresponde 1931? Pablo y Luis L: Veinte. Profesora: Entonces, ¿pertenece al antiguo? Luis L: No, porque el siglo veinte es anterior a éste, no fue tanto tiempo. … La profesora va estructurando la línea de tiempo que dibujó en el encerado. Divide el espacio entre 0 y 2008 por la mitad y pregunta a la clase qué año corresponde. Los alumnos responden correctamente y la profesora va escribiendo el año correspondiente.
a) La tercera actividad busca hacer corresponder las imágenes de las maravillas con la lectura y en base a esta (de acuerdo a la descripción). Código: – *Actividad de construcción/desarrollo del conocimiento (extramatemático).*	a) La profesora muestra cada una de las imágenes que corresponden a las catorce maravillas del mundo y pregunta a cuál corresponde. Tomás logra identificar Petra pues comenta que él la ha visto en un libro. Cada alumno va identificando las imágenes y justificando su decisión, según la información que aparece en las fichas: Profesora: (muestra Petra) Javier: Machu Picchu Luis M: Chichén Itzá Tomás: Petra Profesora: ¿por qué? Tomás: Porque lo vi en un libro sobre las maravillas.

	Profesora: (Muestra El Cristo Redentor) ¿Y éste?
a) La profesora propone las actividades del libro de texto que implica medida del tiempo. Código: – *Actividad de aplicación (del conocimiento tratado).*	a) La clase finaliza no sin antes decir a los alumnos que resuelvan la página del libro que corresponde a medida del tiempo: años y siglos.

Caso 4

Sesión 1/Caso 4

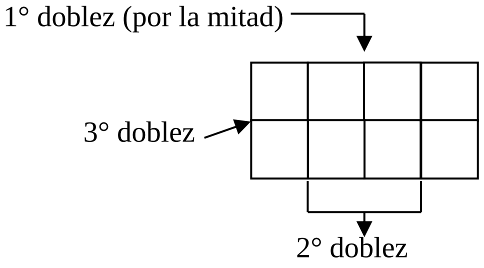
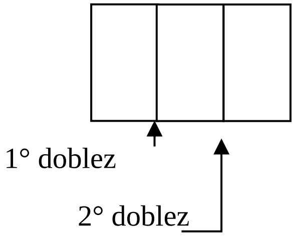
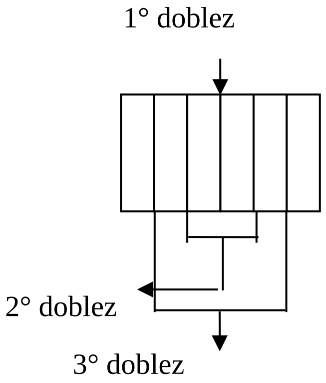
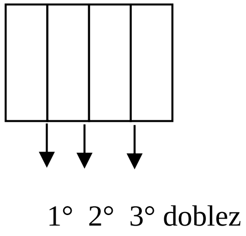
24 de julio de 2008. Colegio 3

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora recuerda las normas de convivencia y de trabajo en el aula. Códigos: – *Definición de normas de convivencia. Valoración del comportamiento adecuado dentro de la actividad matemática.*	La profesora inicia la clase recordando las Normas de Convivencia, establecidas a principio de año y “que llevan a hacer mejor el trabajo en el aula”. Para ello, plantea la pregunta acerca de cómo debe ser el trabajo y comportamiento en clase;...
Inicio de clase ▪ La profesora inicia un diálogo a partir de la interrogación acerca de lo que se puede hacer con una hoja de papel. ▪ Los alumnos enuncian diferentes usos que se le puede dar a la hoja de papel (su participación es activa). ▪ La docente permite la expresión espontánea de los alumnos hasta que uno de esos *usos* (dividirla) se relaciona con el tema en cuestión (fracción). A partir de ello, guía la participación de los alumnos en esa dirección. ▪ La profesora dobla la hoja a fin de verificar o validar las respuestas de los alumnos. Estas respuestas son hipótesis que los alumnos van formulando. ▪ Se consolida la información. Códigos:	… luego, les muestra 'una hoja y les interroga acerca de lo que pueden hacer con ella. Profesora: Tenemos una hoja, ¿qué podemos hacer? Óscar: Dibujar Álvaro: Hacer tareas Rosalía: Dividirla Profesora: ¿Cómo podríamos dividirla? Bruno: Doblándola Profesora: ¿De cuántas formas podemos doblarla? Alumnos: … Profesora: ¿En cuántas partes? Egiber: Diez

– *Presentación de una hoja de papel y reflexión en torno a ella.* – *Diálogo con pregunta directa para explorar los conocimientos previos respecto al tema (fracciones).* – *Participación selectiva de los estudiantes en el diálogo establecido por la docente (verbal).* – *Comprobación por parte de la docente de las ideas expuestas por los estudiantes a través de la manipulación directa de una hoja de papel.*	Ebert: Un montón Patricia: Dos Nataly: Cuarenta y dos Profesora: Y si doblamos y doblamos, ¿seguiría siendo la misma? Alumnos: No Profesora: Si doblamos y doblamos, ¿qué se forma? Rosalía: Cuadritos Juan Pablo: Rayitas Profesora: Del doblez salen cuadraditos La profesora presenta la hoja que acompañaba a las interrogantes y muestra cómo al doblarla se forman "rayitas" y “cuadraditos” ya que los dobleces le generan "rayas horizontales y rayas verticales".
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ Consideramos esta parte la apertura de la clase pues con ella se inicia el uso directo de términos relacionados con las fracciones y la actividad de dividir una unidad en partes iguales. ▪ Interacción alumnos – situación problemática. Los alumnos manipulan la hoja en base a la indicación de la docente. Las producciones son diversas. ▪ Interacción profesor – alumno. La maestra cuestiona las producciones de algunos alumnos (CUESTIONAMIENTO Y REFLEXIÓN INDEPENDIENTE) permitiendo que otros compañeros intervengan con sus apreciaciones. Parte de	A continuación, la profesora les propone una “situación problemática” a partir de la actividad de la hoja; para ello les dice que cojan una hoja en la que "van a trabajar con la primera parte[361] y van a representar en ella tres partes iguales". El trabajo de los alumnos muestra diferentes versiones. La profesora observa a cada uno de los alumnos y se detiene en Oriana quien ha obtenido lo siguiente:

---

[361] Los alumnos utilizan una cara de la hoja

una producción que no siguió las indicaciones adecuadamente. ▪ Los alumnos expresan diferentes interpretaciones sobre el trabajo los compañeros (unas más matemáticas, otras no). ▪ Las intervenciones permiten evidenciar el error cometido en ambos casos. ▪ La profesora intenta ver si otros han trabajado de la misma manera. ▪ Los alumnos no contestan, cuando perciben que sus producciones son incorrectas. Códigos: – *Planteamiento de actividad manipulativa para representar fracciones (dividir en tres partes iguales).* – *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para todos (dividir la hoja en tres partes iguales).* – *Dificultad de los alumnos para dividir una hoja de papel en tres partes iguales (diferentes interpretaciones).* – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar las ideas de los alumnos respecto a sus producciones.* – *Participación selectiva de los alumnos (propuesta por la docente y planteada por los alumnos) (verbal).* – *Dificultad de los alumnos para reconocer el error en la división de una hoja de papel en tres partes iguales.*	 a Otras versiones son[362]:  b  c  A partir del trabajo de Oriana se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cómo doblaste la hoja, Oriana? Oriana: Doblé tres veces Patricia: No está bien

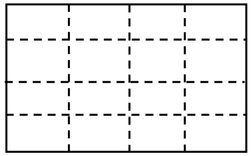
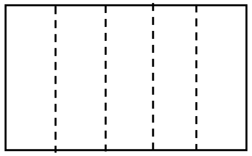
---

[362] Por lo general, los alumnos asocian el número de dobleces con el número de partes.

	Profesora: ¿Por qué? ¿Tú crees que hay partes iguales? Patricia: No… Egiber: Sí hay, pero no son tres Juan Pablo: Son diferentes formas de ver las indicaciones Profesora: Son diferentes formas de ver las indicaciones como dice Juan Pablo. Lo que yo dije fue que debían haber tres que sean iguales, pero en el caso de Oriana hay más de las que se habían indicado. ¿Por qué creen que pasó? Alumnos: … La profesora observa el trabajo de Maudy quien ha obtenido una división diferente. Su gráfica corresponde con la figura d: Profesora: Maudy, ¿cómo doblaste? Maudy: En tres partes: uno, dos, tres[363] Profesora: ¿Tiene tres partes? Maudy: … Rosalía: Tiene cuatro La profesora pregunta quienes han hecho lo mismo. La producción de Sandra se corresponde con la de Patricia, la de Lucero con la de Maudy y la de Keila con la de Oriana.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ Inicio de la segunda parte de la situación ficticia (la profesora pregunta a la alumna cuántos pastelitos tocará a cada uno). ▪ Interacción profesor – alumnos. El diálogo propuesto por la docente es directo, generando la misma profesora las preguntas que los estudiantes responden. Las	La profesora le pide a toda la clase que observen los dos trabajos, en los que ambas alumnas han realizado tres dobleces y pregunta si tienen "las mismas partes". Se genera el siguiente diálogo: Profesora; ¿Tendrán las mismas partes? Alumnos: ¡No! Profesora: (dirigiéndose a Maudy) ¿Quién tendrá más, ella o tú?

---

[363] El doblez de Maudy, a diferencia de Oriana, es en forma de acordeón o abanico.

preguntas van acompañadas de planteamiento de acciones (CUESTIONAMIENTO Y REFLEXIÓN COMPARATIVA) ▪ Interacción alumno – nueva situación. Las alumnas ejecutan la nueva propuesta de la docente a partir de la anterior. ▪ La profesora cuestiona sobre la acción realizada permitiendo que otros alumnos intervengan. Intervienen pocos alumnos. ▪ Los cuestionamientos de la profesora no siempre se consolidan y las producciones tampoco. Códigos: – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar las ideas de los alumnos respecto a las producciones de sus compañeras.* – *Participación selectiva de los alumnos en la interpretación al trabajo realizado por las compañeras.* – *Dificultad de los alumnos para reconocer el error en la división de una hoja de papel en tres partes iguales.*	Maudy: Yo Profesora: ¿Segura? Rosalía: Porque ella ha doblado en cuatro Profesora: ¿Cuatro partes y tiene más que Oriana?... ¿Será la misma cantidad de partes? Alumnos: No Alumnos: Sí Egiber: Si es la misma hoja, del mismo tamaño... solo que está doblada de diferente forma… Profesora: Si hacemos otro doblez a ambos trabajos, ¿qué pasaría? La profesora les pide que, en ambos casos, hagan otro doblez a la hoja. Maudy hace un doblez horizontal (para lo cual descarta el trabajo anterior y comienza de nuevo) y Oriana sigue doblando sobre el doblez anterior. El resultado es el siguiente: Oriana →  Maudy →  Egiber: Se obtiene el doble Profesora: ¿Qué pasa si Maudy sigue su método? ¿Cuántas obtienes, Maudy? Maudy: Cinco Profesora: ¿Por qué si dobla de una forma u otra tiene diferente número de partes? Egiber: Porque Maudy va de uno en uno y en el otro caso, va sobre los dobleces... Profesora: Oriana forma mitades sobre mitades lo que le duplica la cantidad, sin embargo, Maudy lo hace independientemente por eso es que siempre va aumentando de uno en uno… ¿Quién hizo la indicación correcta?

	Patricia: Oriana …
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ Planteamiento de una nueva situación (INTRAMATEMÁTICA). La nueva situación parte de la anterior, pero es ajena a su proceso. ▪ Interacción alumnos – nueva situación. Los alumnos realizan lo solicitado sobre sus producciones. ▪ Los resultados son diversos. ▪ La profesora pregunta sobre las fracciones producidas y otras a partir de las mismas. ▪ Los alumnos responden. ▪ La profesora contextualiza extramatemáticamente. ▪ Los alumnos brindan diferentes interpretaciones. ▪ La profesora no consolida. Códigos: – *Planteamiento de representación de fracciones en las producciones gráficas (nombrar fracciones).* – *Participación total de los alumnos al ser propuesta para todos (representar fracciones en sus producciones).* – *Participación selectiva de os estudiantes al exponer sus producciones en diálogo con la docente.* – *Uso de la contextualización ‘cotidiana’ para una mejor comprensión.*	La profesora pide que pinten una parte de la hoja y pregunta que fracción representa[364]. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué fracción del papel es cada parte coloreada? Alumnos: Un octavo Alumnos: Un doceavos Alumnos: Tres doceavos Profesora: ¿Por qué un doceavos? Egibert: doce doceavos… Se supone que todas están pintadas Profesora: ¿Qué parte vendría a ser cada una? Nataly: Un doceavos Profesora: ¿Qué parte sería la mitad? Daniel: Doce sextos… No, seis doceavos Profesora; ¿Si pinto todo? Bruno Jesús: Seis sextos Profesora: ¿Si solo es uno? Rosalía: Un sexto Profesora: ¿Por qué seis sextos? Egiber: Porque los seis están pintados y son seis

---

[364] Cada alumno pinta sobre sus producciones que no son iguales en todos los casos.

– *Dificultad para reconocer el todo y expresar las fracciones en torno a él.*	Profesora: ¿Roxana, si es más de la mitad? Roxana: Dos tercios… Dos de cada uno están pintados y son tres Profesora: Porque está divido en tres y pinto dos… Si Luciana se quiere llevar esta parte del papel[365], ¿qué fracción del papel se llevó Luciana? Rosalía: Seis sextos Profesora: ¿Qué parte se lleva la niña? Oriana: Seis Profesora: ¿Qué fracción del papel se llevó Luciana? Rosalía: Seis sextos
Final de la clase ▪ La actividad se detiene por el timbre que indica que el tiempo ha sonado. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	El timbre suena y los alumnos guardan sus materiales de matemática. La clase finaliza

---

[365] La profesora coge un papel dividido en doce partes iguales de las cuales señala la mitad.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Actividades propuestas	**Sesión observada (fragmentos)**
Las actividades planteadas son tres básicamente: pensar sobre qué se puede hacer con una hoja de papel, dividir una hoja en tres partes iguales e identificar fracciones en una hoja dividida. a) La primera actividad busca explorar los conocimientos previos, de los alumnos a través del diálogo. Los alumnos dan diferentes respuestas; sin embargo, la docente orienta hacia la planificada. Código: – *Actividad de exploración de ideas previas.*	a) La profesora… les muestra 'una hoja y les interroga acerca de lo que pueden hacer con ella Profesora: Tenemos una hoja, ¿qué podemos hacer? Óscar: Dibujar Álvaro:Hacer tareas Rosalía: Dividirla Profesora: ¿Cómo podríamos dividirla? Bruno: Doblándola Profesora: ¿De cuántas formas podemos doblarla? Alumnos: … Profesora: ¿En cuántas partes?
a) La segunda actividad es una propuesta específica: representar en una hoja tres partes iguales. No es una actividad de construcción de nuevos conocimientos pues los alumnos saben del tema; sin embargo, se evidencian dificultades en su aplicación y comprensión. La profesora reflexiona sobre las soluciones con la participación de los alumnos Código:	a) A continuación, la profesora les propone una “situación problemática” a partir de la actividad de la hoja; para ello les dice que cojan una hoja en la que "van a trabajar con la primera parte[366] y van a representar en ella tres partes iguales"… Profesora: ¿Cómo doblaste la hoja, Oriana? Oriana: Doblé tres veces Patricia: No está bien Profesora: ¿Por qué? ¿Tú crees que hay partes iguales?

---

[366] Los alumnos utilizan una cara de la hoja

– *Actividad de aplicación (de un conocimiento aprendido).*	Patricia: No… Egiber: Sí hay, pero no son tres Juan Pablo: Son diferentes formas de ver las indicaciones Profesora: Son diferentes formas de ver las indicaciones como dice Juan Pablo. Lo que yo dije fue que debían haber tres que sean iguales, pero en el caso de Oriana hay más de las que se habían indicado. ¿Por qué creen que pasó? Alumnos: … Profesora: Maudy, ¿cómo doblaste? Maudy: En tres partes: uno, dos, tres[367] Profesora: ¿Tiene tres partes? Maudy: … Rosalía: Tiene cuatro La profesora le pide a toda la clase que observen los dos trabajos, en los que ambas alumnas han realizado tres dobleces y pregunta si tienen "las mismas partes"…
a) La tercera actividad (pintar una parte de la hoja e indicar qué fracción representa) busca que el alumno identifique la fracción representada. Al ser un conocimiento que los alumnos tienen, la actividad se torna aplicativa. Los alumnos representan diferentes fracciones y exponen. La profesora introduce la contextualización (enmarca la situación dentro de una situación 'cotidiana')	a) La profesora pide que pinten una parte de la hoja y pregunta que fracción representa… Profesora: ¿Qué fracción del papel es cada parte coloreada? Alumnos: Un octavo Alumnos: Un doceavos Alumnos: Tres doceavos Profesora: ¿Por qué un doceavos? Egibert: doce doceavos… Se supone que todas están pintadas Profesora: ¿Qué parte vendría a ser cada una?

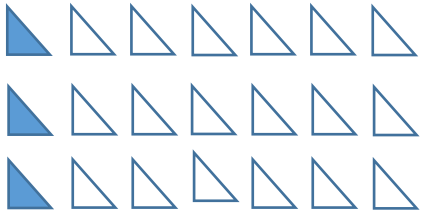
---

[367] El doblez de Maudy, a diferencia de Oriana, es en forma de acordeón o abanico.

Código: – *Actividad de aplicación (de un conocimiento aprendido).*	Nataly: Un doceavos Si Luciana se quiere llevar esta parte del papel[368], ¿qué fracción del papel se llevó Luciana?

Sesión 2/Caso 4

Jueves 14 de agosto de 2008. Hora: 9:30 a 10:20. RC

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión/Inicio de clase ▪ La sesión se inicia directamente con la propuesta de la docente, quien a partir de una gráfica y la expresión “1/7 de 21 es igual a 3”, cuestiona porqué esa afirmación es correcta. ▪ Los alumnos observan la pizarra y comentan entre sí. ▪ La profesora propone la pregunta a los alumnos de la clase, luego espera a quien levanta la mano para darle pase a su intervención. ▪ Los alumnos expresan sus opiniones a partir de la manipulación operativa de las cantidades. Uno de los alumnos hace referencia a “la regla”. Códigos: – *Representación gráfica y simbólica de la fracción de un número y su valor (1/7 de 21 es igual a 3).*	El tema de la clase es la fracción como operador. Para ello, la profesora dibuja en la pizarra 21 triángulos, pinta 3 y escribe "1/7 de 21 es igual a 3", luego pregunta por qué un sétimo de veintiuno es tres. Se genera el siguiente diálogo:  Profesora: ¿Por qué un séptimo de veintiuno es igual a tres? Rossy: Porque siete por tres es veintiuno, Angie: Veintiuno entre siete es tres Profesora: ¿Por qué un séptimo de veintiuno es igual a tres?

---

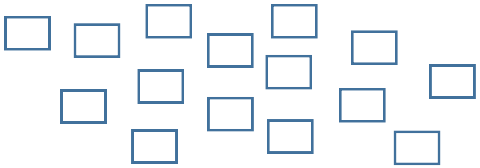
[368] La profesora coge un papel dividido en doce partes iguales de las cuales señala la mitad.

– *Cuestionamiento directo de la expresión matemática propuesta.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar las ideas de los alumnos respecto a la cuestión tratada (fracción de un número).* – *Participación selectiva de los estudiantes en base a operaciones que relacionan las cantidades y al conocimiento de la regla (verbal).*	Egiber: Es la regla de cómo se saca la fracción de un número: divido entre 7 y multiplico por uno Profesora: ¿Sirve para todos los casos? Por ejemplo, para los siguientes casos.
Desarrollo de la clase (parte I) ▪ La profesora propone casos similares para que los alumnos resuelva. ▪ Los alumnos resuelven aplicando la fórmula expuesta por el compañero. Pocos lo hacen recurriendo a la gráfica y otros no trabajan ya sea porque manifiestan no entender o porque emprenden otras acciones ▪ La maestra cuestiona sobre lo que significan dichas expresiones. ▪ Los alumnos intervienen interpretando las diferentes situaciones. ▪ Los alumnos muestran diferente nivel de dominio de las cuestiones, en algunos casos confunden la función del numerador y del denominador. ▪ La transferencia de una situación a otra, de manera gráfica no es inmediata. La maestra cuestiona paso a paso al respecto a fin de	La profesora escribe en la pizarra las siguientes situaciones: 3/5 de 15 6/9 de 45 4/6 de 60 Los alumnos[369] siguen el procedimiento que mencionó Egiber: "dividir y multiplicar", luego la profesora pregunta cómo averiguar si es correcta o no dicha respuesta. Para ello se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué indica 3/5? Luigi: Que se divide entre 3 y se toma 5 Ronny: No, que se divide entre 5 y se toma 3 Profesora: Bien, divides entre cinco y tomas tres. Recuerden que el denominador indica las partes en que se divide la unidad y el numerador, las que se toman. Ronny, representa gráficamente lo que estás diciendo

---

[369] No todos. Pocos grafican y otros observan el trabajo de los compañeros. En algunos casos se intentó averiguar si comprendían la situación y manifestaron que sí, pero que no querían trabajar, animándoles a seguir las indicaciones de la maestra En otros, no entendían el trabajo.

favorecer la comprensión de los estudiantes. ▪ Los estudiantes resuelven a partir del trabajo operativo realizado. ▪ La interpretación y la resolución no se corresponden en algunos casos. ▪ La profesora valora el uso de las representaciones gráficas para una mejor comprensión de la situación. Códigos: – *Aplicación del nuevo conocimiento (formas de hallar fracción de un número) a casos específicos similares* – *Diálogo con preguntas directas para analizar la situación (fracción de un número).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación de la expresión matemática (fracción de un número) (verbal).* – *Recurrencia a las representaciones gráficas como estrategia docente para una mejor comprensión de la acción simbólica directa.*	Ronny sale a la pizarra dibuja un rectángulo, lo divide entre cinco y pinta tres partes. La profesora pregunta a la clase si ese gráfico es correcto. Los alumnos responden afirmativamente. La profesora continúa: Profesora: En este caso, su compañero ha dibujado un rectángulo, lo ha dividido entre cinco y ha pintado tres. ¿Qué pasa cuando tienes que representar 3/5, no de un rectángulo sino de 15? Recuerden que en el primer ejemplo se mostró 1/7 de veintiún triángulos, no solamente de uno. ¿Cuántos rectángulos tendríamos que dibujar en este caso? Rosalía: Quince Profesora: Vamos a dibujar los 15 rectángulos (la profesora dibuja), ¿qué hacemos luego? Alumnos: … Profesora: ¿Qué representa 3/5? Patricia: Dividir entre 5 y tomar 3 Profesora: En este caso, qué dividimos entre cinco Patricia: Los 15 rectángulos Profesora: ¿Cómo divido entre 5 los 15 rectángulos? Juan Pablo: Da tres Profesora: ¿Tres qué? Alumnos: … Profesora: (la profesora dibuja en la pizarra quince rectángulos) Fíjense, si tengo 15 rectángulos y los divido entre cinco, me da tres. ¿Qué quiere decir?



Omaira: Que formo tres grupos.

Profesora: ¿Por qué tres grupos?

Omaira: Porque quince entre cinco es tres

Profesora: Si formo tres grupos quiere decir que lo he dividido entre tres y no entre cinco

Angie: Entonces hay que formar 5 grupos

Profesora: Al formar cinco grupos, cada grupo tiene… ¿cuántos triángulos?

Angie: Tres

Profesora: (la maestra forma los cinco grupos con los rectángulos dibujados y señala los que hay en cada grupo) Al formar cinco grupos, cada uno tiene tres rectángulos, ¿es correcto?

Angie: Sí

Profesora: Al dividir 15 entre 5 grupos me da los rectángulos que hay en cada grupo. Pero la fracción me dice 'tres quintos de quince', ¿qué quiere decir?

Maudy: Que cojo tres rectángulos

Profesora: ¿Es correcto?, ¿tengo que coger solamente tres rectángulos?

Marjori: No, tengo que coger tres grupos porque cada parte es un grupo

	Profesora: Y al coger tres grupos de tres cada uno, ¿cuántos rectángulos cojo? Marjori: Nueve Profesora: Por lo tanto, los 3/5 de 15 es... Marjori: Nueve Egiber: Pero porqué tanto problema, si con la regla sale igual Profesora: Es correcto, pero demostramos que efectivamente "Tres quintos de quince es nueve" ya que divides quince en cinco grupo. Cada grupo tiene tres rectángulos. Luego coges tres grupos y hallas el número de rectángulos que representan los tres quintos de quince Egiber: No sé, me parece que pierdes tiempo Bruno: Pero así lo entiendes mejor. Egiber: No sé. La regla te lo dice. Si ya la sabes… Profesora: Pues ahora sabes comprobarlo y además la conocen todos tus compañeros.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora transforma la actividad siguiente en una actividad en pares de forma que cada miembro del grupo utilice un procedimiento distinto para hallar la fracción de la cantidad propuesta. ▪ Los alumnos comparten sus soluciones y verifican si llegan al mismo resultado. ▪ Representar gráficamente ofrece dificultad a los alumnos. Código: – *Propuesta de aplicación de las dos formas de hallar fracción de un número y comparación.*	La profesora propone resolver los *ejercicios* restantes y comprobar gráficamente. Para ello pide que un grupo aplique la regla y otro represente gráficamente. Una vez finalizada la actividad por ambas partes, los alumnos comparan sus soluciones y verifican. En general, los alumnos tienen dificultad en la representación gráfica. Antes de hacerla, dividen el número entre el denominador para hallar la cantidad de triángulos que deben haber en cada grupo, luego representan gráficamente de acuerdo al resultado (si el resultado es cinco dibujan de cinco en cinco hasta completar la cantidad indicada) y pintan los grupos que dice el numerador: Profesora: ¿Qué haces para representar? Patricia: Tengo que hacer seis grupos de diez Profesora: ¿Por qué son de diez?

– *Preferencia de la forma simbólica sobre la gráfica por parte de los estudiantes.* – *Participación total de los estudiantes al ser una propuesta individual.*	Patricia: Porque sesenta entre seis es diez Profesora: Luego, ¿qué haces? Patricia: Pinto cuatro grupos Profesora: ¿Cuántos son cuatro sextos de sesenta triángulos? Patricia: Son cuatro grupos que son cuarenta triángulos
Final de la clase ▪ El tiempo corta la clase y la profesora da por finalizada la misma. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

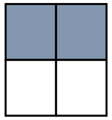
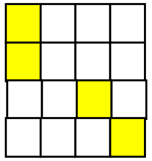
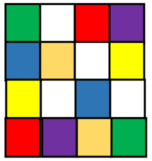
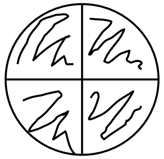
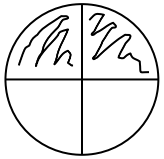
	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La primera actividad propuesta por la docente busca que los alumnos interpreten una expresión matemática a partir de su representación gráfica. El tema no es nuevo para los alumnos; sin embargo, la forma de plantearlo sí. La profesora busca que los alumnos relacionen a partir de la gráfica. Sin embargo, los alumnos lo hacen de manera simbólica.	a) El tema de la clase es la fracción como operador. Para ello, la profesora dibuja en la pizarra 21 triángulos, pinta 3 y escribe "1/7 de 21 es igual a 3", luego pregunta por qué un sétimo de veintiuno es tres. Profesora: ¿Por qué un séptimo de veintiuno es igual a tres? Rossy: Porque siete por tres es veintiuno", Angie: Veintiuno entre siete es tres Profesora: ¿Por qué un séptimo de veintiuno es igual a tres? Egiber: Es la regla de cómo se saca la fracción de un número: divido entre 7 y multiplico por uno

El conocimiento de la forma directa de resolver fracción de un número inhibe la forma gráfica. Código: – *Actividad constructiva/desarrollo del conocimiento (a través de su representación gráfica).*	Profesora: ¿Sirve para todos los casos? Por ejemplo, para los siguientes casos.
a) La siguiente actividad propuesta por la docente se centra en verificar si la regla se aplica en otros casos concretos y contrastar con la forma gráfica. Los alumnos aplican la forma simbólica para representar gráficamente. Código: – *Actividad de aplicación.*	Profesora: ¿Sirve para todos los casos? Por ejemplo, para los siguientes casos. La profesora escribe en la pizarra las siguientes situaciones: 3/5 de 15 6/9 de 45 4/6 de 60

Sesión 3/Caso 4

Lunes 18 de agosto de 2008. Hora: 7:40 a 9:10. RC

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión/Inicio de clase ▪ La profesora propone una actividad inicial en la que los alumnos tienen que dibujar una figura geométrica, dividirla en partes iguales y pintar las partes o fracciones que deseen. ▪ Los alumnos realizan diferentes gráficas, unas más simples y otras más complejas, libremente.	La profesora les propone a los alumnos hacer una unidad entera en su cuaderno. Los alumnos preguntan qué significa “hacer una unidad entera” y la profesora les dice que dibujen la figura geométrica que ellos deseen: un cuadrado, un rectángulo, un rombo... Los alumnos generalmente dibujan un cuadrado aunque en algunos casos se observa que dibujan círculos y rectángulos. Luego, la profesora les pide que dividan esa figura en partes iguales, haciéndolo de manera libre y a continuación indica que de esas partes divididas tomen "las fracciones" que quieran: una, dos, etc. Algunas de las gráficas son las siguientes:

▪ La profesora solicita a los alumnos que trasladen su trabajo a otras representaciones que ella propone en la pizarra. ▪ Los alumnos que salen a la pizarra trasladan su trabajo a otras formas de representar la “unidad entera”. No hay dificultad en ello. ▪ La profesora se centra en el tema de fracciones y cuestiona qué se puede hacer con ellas. ▪ Los alumnos expresan que con las fracciones se puede operar y convertir a mixtos. Códigos: – *Planteamiento de actividad gráfica que involucra fracciones.* – *Dificultad en el uso del lenguaje (unidad entera).* – *Participación total de los alumnos en la actividad gráfica que involucra fracciones (al ser una propuesta individual).* – *‘Traslación’ del trabajo realizado a otra representación gráfica y expresión a través e fracciones concretas.* – *Exploración de conocimientos previos sobre qué se puede hacer con las fracciones a partir de preguntas directas.* – *Participación selectiva del estudiante en la exploración de conocimientos sobre fracciones.*	   La profesora les pide a unos alumnos que salgan a la pizarra y representen gráficamente lo que han hecho, pero en las unidades que ella les propone (círculos de cartulina que ha adherido a la pizarra). Los alumnos dividen los círculos en tantas partes como dividieron sus respectivas figuras. Las siguientes son representaciones de lo elaborado por los estudiantes[370]:  3/7  4/4  2/4 Una vez representados en los círculos el trabajo de cada alumno que salió a la pizarra, la profesora pregunta qué se puede hacer con las fracciones. Los alumnos responden que se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir; además de convertirlas en mixtos[371].

---

[370] El trabajo de los estudiantes no es perfecto; es decir, sus divisiones no obtienen partes iguales, pero intentan que así sea.

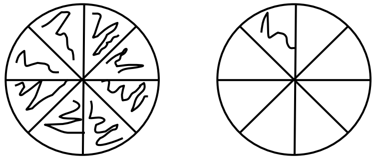
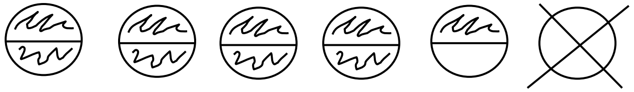
[371] En ningún caso se observó graficas de mixtos con más de una fracción; sin embargo, se mencionó el hecho de transformar a mixto una fracción.

– *Tendencia de los alumnos a manipular los números (operar con ellos).*	
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora solicita comparar las fracciones que se han indicado en los dibujos de la pizarra. ▪ Los alumnos comparan las fracciones y hay errores en ello. ▪ La profesora cuestiona sobre los criterios para indicar que una fracción es mayor que otra. ▪ Los alumnos exponen diferentes casos en función de los elementos y en relación a las características de la unidad fraccionada. ▪ La profesora propone casos concretos en lo que los alumnos deben argumentar porqué es mayor o menor una fracción respecto a otra. ▪ La profesora genera un caso de fracción impropia. Códigos: – *Diálogo a partir de preguntas directas planteadas por la docente como estrategia en la comparación de fracciones.* – *Participación selectiva de los alumnos en la exploración de ideas sobre la comparación de fracciones (verbal).* – *Dificultad de los alumnos para expresar correctamente las ideas relacionadas con la comparación de fracciones.* – *Planteamiento de fracciones puntuales para ser comparadas (iguales a la unidad, mayores que la unidad).*	Luego, la profesora pregunta cuál es la mayor, a lo que todos los alumnos, inmediatamente, responden que la primera. Los alumnos escriben la siguiente relación: 3/7>4/4>2/4. El alumno que dibujó la primera imagen dice que no es 3/7 sino 3/8. La profesora cambia la fracción y pregunta cuándo una fracción es mayor que otra. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cuándo una fracción es mayor que otra? Luigui: Cuando el denominador es mayor que el numerador Profesora: ¿Pero con qué lo relaciono al decir esto: con la unidad o con el resto de fracciones? Luigui: Con el resto de fracciones Profesora: Lo que Luigui acaba de decir es con relación a la unidad. Vamos a ver si estamos en lo cierto. 3/8 es mayor que uno: $\frac{3}{8} > 1$. Esto es lo que dice Luigui. ¿Estará bien? Maryori: Una fracción es mayor que la unidad cuando el numerador es mayor que el denominador Profesora: Tú me dices que el numerador es mayor que el denominador. Tú me dices que 3/8 en relación con la unidad va a ser ¿mayor o menor? Maryori: Menor Egiber: Es menor, porque de los ocho se han tomado solo tres Profesora: Supongamos que Milagros solo pintó tres partes, ¿será cierto que 3/8 será menor que uno? Egiber: Sí Profesora: ¿Por qué?

	Maryori:	Porque la unidad está completa y al otro le faltan cinco partes
	Profesora:	Por lo tanto va a ser menor que la unidad, ¿no es cierto? ¿Qué puedo decir de esto?
	Patricia:	Que 3/8 es menor que uno
	Profesora:	3/8 es menor que 1, pero porqué
	Patricia:	Porque 3/8 no pinta toda la unidad
	Roxana:	Y el numerador es menor y el denominador es mayor y el numerador es menor que el denominador
	Profesora:	¿4/4? ¿Qué puedo decir?
	Bruno:	Que es igual
	Profesora:	¿Por qué?
	Allisson:	Porque el numerador y el denominador son iguales y va a ser igual que la unidad
	Profesora:	Si hago esto...[372] ¿qué me queda? ¿A qué es igual si simplifico?
	Egiber:	A solo la unidad
	Profesora:	En ese caso tomas la unidad. ¿2/4 será mayor, menor o igual?
	Patricia:	Menor
	Profesora:	Menor, ¿por qué?
	Bruno:	Porque son cuatro partes de torta pero se comen dos
	Patricia:	Porque el numerador es menor que el denominador
	Profesora:	¿Cuándo se supone esto: 1 >?

---

[372] La profesora intenta simplificar el numerador y el denominador.

	Rosalía: Cuando el numerador es menor que el denominador Profesora: Supongamos que tengo 9/2 Rosalía: Es mayor
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora pide representar gráficamente la fracción impropia generada a partir de la actividad de comparación de fracciones. ▪ Los alumnos tienen opiniones encontradas: algunos dicen que no se puede y otros que sí[373]. ▪ Se evidencian dos formas de representar que son las expuestas por dos alumnas: una coincide con las características de los elementos de las fracciones y la otra, no. ▪ La profesora solicita a las alumnas explicar sus gráficas. ▪ Las alumnas explican en función de lo que han representado (caso incorrecto) o de las características de la fracción (caso correcto). ▪ Los argumentos de los alumnos se basan en situaciones específicas. A veces no se corresponde con la idea. ▪ Aun cuando los alumnos no participan directamente, se evidencia que algunos siguen el trabajo de las alumnas y la profesora. Código:	Profesora: Vamos a representar 9/2 Un grupo de alumnos expresa que no se puede representar, sin embargo Angie y Patricia dicen que sí, por lo que la profesora les dice que salgan a la pizarra a representar la fracción. Ambas alumnas representan de la siguiente manera: Angie:  Patricia:[374]  A partir de las gráficas... Profesora: Vamos a ver lo que piensa cada una de las alumnas de lo que ha hecho. Angie, ¿nos puedes explicar lo que has hecho? Angie: Ocho más ocho, dieciséis y de los dieciséis pinto nueve Profesora: ¿Por qué Angie? Angie: …[375]

---

[373] El tema de las fracciones impropias se trabaja en cuarto grado en el que se propone que los alumnos interpreten y representen fracciones propias e impropias (DCN 2005).

[374] Patricia dibujó seis círculos, pero al pintar solo cinco, borra el sexto.

[375] Angie pregunta a la observadora si está mal lo que ha hecho. La observadora le pregunta porque divide entre ocho y por qué no entre nueve. Angie dice que porque deben haber dos unidades.

– *Planteamiento de representación gráfica de una fracción impropia (caso 1).* – *Dificultad representar gráficamente una fracción impropia y explicar el trabajo realizado.* – *Diálogo a través de pregunta directa para cuestionar el conocimiento matemático involucrado en las actividades (sobre la representación gráfica de una fracción impropia).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la representación gráfica y explicación de una fracción impropia (caso 1).*	Profesora: Angie no nos puede explicar en este momento. Vamos a dejarle un tiempo para que piense y preguntemos a Patricia... Patricia: Yo no puedo partir el dos en un círculo… no puedo pintar nueve, entonces lo que hago son cinco veces: dos, cuatro, seis hasta diez en total y como pide nueve… Tengo que pintar nueve. Profesora: ¿Y por qué sobra? Patricia: Porque nueve es un número impar y para eso he tenido que coger dos Profesora: ¿Por qué no en tres? Patricia: Porque esta es una fracción impropia Profesora: ¿Cuándo una fracción es impropia? Patricia: Cuando el denominador es menor que el numerador Natalia: El dos no significa que sean dos unidades sino que la unidad está dividida en dos partes. Si mi numerador me va a indicar las partes en las que divido mi fracción... ¿estoy en lo cierto?
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora involucra a la clase en la problemática encontrada ▪ La profesora transmite tolerancia en las intervenciones. ▪ Algunas intervenciones son más precisas. Otras se basan en uno de los elementos de la fracción y no en ambos. ▪ Los alumnos se involucran en la situación. ▪ La profesora consolida la información. ▪ La profesora solicita a los alumnos que digan qué representación es correcta y justifiquen.	Profesora: ¿Qué piensan, niños? Omaira: Sí Egiber: ¡No! Profesora: ¿Se respeta el pensamiento de los demás? Alumnos: Sí Profesora: Aquí estamos para aprender. Estos pensamientos nos van a llevar a una idea de lo que son las cosas. ¿Cuál es la unidad? ¿Por qué cinco unidades? ¿Álvaro? Álvaro: Porque piden nueve medios y la unidad se va a dividir en dos y no puede en una sola por eso ha dividido en cinco. Por eso tiene diez y coge nueve

▪ La profesora asocia con las fracciones propias. Códigos: – *Diálogo basado en preguntas reflexivas sobre las intervenciones de los compañeros.* – *Explicación de los alumnos del trabajo realizado por los compañeros (sobre las representaciones gráficas de las fracciones impropias).* – *Diferentes interpretaciones a la fracción impropia (algunas no consideran las condiciones de la misma).* – *Explicación por parte de la docente de la solución correcta recurriendo a la representación gráfica.* – *Participación selectiva de los estudiantes sobre la representación gráfica de una fracción impropia.*	Profesora: ¿Alguien más que pueda explicar? Egiber: Ha dibujado cinco unidades y las cinco las dividió por la mitad y de ahí pinta nueve porque es nueve medios Rosalía: Dividió a cinco partes, hizo diez pero solo pintó nueve Profesora: ¿Por qué cinco unidades? ¿Óscar?... ¿Sandra? Sandra: Tiene que llegar a la fracción que le han indicado Profesora: ¿Y dónde me indica? Sandra: Ahí está pintado... nueve Óscar: Yo creo que tiene que dividir en nueve y pintarlos[376] Profesora: (a partir del trabajo de Óscar) ¿Y de ahí qué va a tener? Óscar: Las nueve que piden Egiber: El denominador indica dos Óscar: Entonces hay que dividir en dos, pero no hay nueve Profesora: ¿Quién piensa diferente? Algunos alumnos levantan la mano y opinan que el gráfico de Patricia es mejor. La profesora vuelve a preguntar por qué se tienen que representar cinco unidades. Profesora: ¿Por qué cinco unidades? Lucero: Cinco por dos es diez y como me han pedido nueve, he pintado cinco Juan Pablo: Puedo hacer tres círculos, divido en tres y tomo tres, tres y tres Óscar: Porque piden nueve medios y tenía que hallar al resultado

---

[376] Óscar dibuja dos unidades divididas en nueve partes y pinta una unidad entera.

	Rosalía: El numerador tiene las partes que le han pedido y como nueve es impar tengo que llegar al diez . Lucero: Tomando de dos en dos para tomar nueve La profesora vuelve a dibujar un círculo y lo divide en dos, enfatizando que el denominador indica que hay que realizar dicha división; luego explica la necesidad de hacer más círculos: "Dibujo una unidad y la divido en dos partes, como indica el denominador; como no alcanza con estos dos, debemos dibujar otra igual... ". Una vez que la profesora termina la explicación, Angie le pregunta si su representación está bien. La profesora pregunta a la clase cuál de las dos representaciones es la correcta (la de Angie o la de Patricia). Profesora: ¿Cuál de las dos representaciones es la correcta? Alumnos: (la mayoría) ¡La de Patricia! Profesora: ¿Por qué la de Patricia, Allyson? Allyson: Porque pide las partes y el numerador lo que pinto Profesora: ¿Qué me indica el numerador?... ¿Cristian?[377] Cristian: Las partes que voy a tomar Profesora: ¿Y el denominador?... ¿Grace? Grace: Las partes divididas… Profesora: ¿Qué voy a encontrar de diferente? Alumnos: … Profesora: ¿Qué de diferente tiene con las otras fracciones? Maryori: Que es impropia… Profesora: Es otra clase de fracciones

---

[377] A cada pregunta, los alumnos levantan la mano y esperan a que la profesora nombre alguno de ellos para responder.

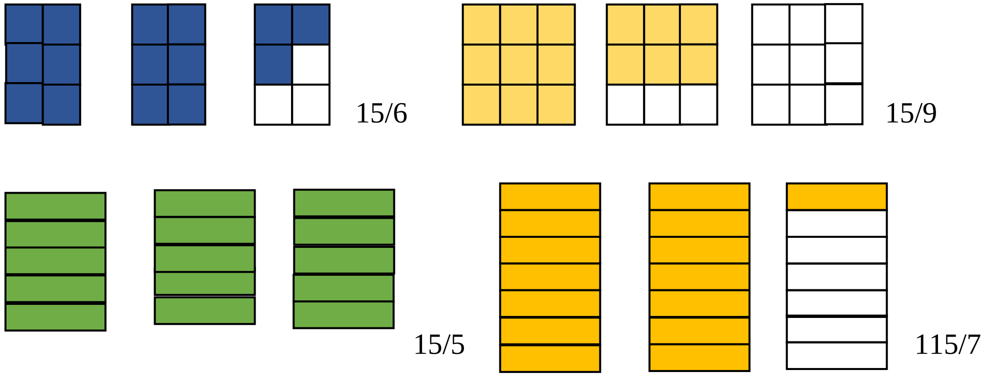
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora plantea una *pequeña situación problemática* que involucra los elementos de la fracción trabajada. ▪ Los alumnos representan gráficamente la situación de manera similar a la fracción anterior dividiendo por la mitad cada *queque*. Sin embargo, la pregunta no conducen a la fracción anterior. ▪ La profesora compara la representación gráfica de una fracción impropia (caso concreto trabajado) con la de una propia (caso concreto trabajado). Códigos: – *Explicación simbólica de la cuestión a través de preguntas directas que generen la participación de los alumnos.* – *Traslado del tratamiento directo de la fracción impropia a una situación 'cotidiana' para una mejor comprensión (caso 2).* – *Resolución de la situación 'cotidiana' a partir de la 'respuesta' (el alumno sabe a dónde tiene que llegar).* – *Dificultad para resolver la situación inmediatamente. Cuestionamiento por parte de los alumnos.* – *Planteamiento no estructurado de la situación (genera que los alumnos no tengan claro los datos, pero da la posibilidad de diferentes soluciones).* – *Participación selectiva de los estudiantes al resolver la situación 'cotidiana' (caso 2).*	Los alumnos van mencionando lo que significa cada elemento de la fracción y cómo tienen que representar la fracción indicada. Luego, la profesora les dice que va a plantear el mismo *problema* en una *situación*. Profesora: En una fracción impropia también hay numerador y denominador, pero ¿cómo es el numerador? Maryori: Es mayor Profesora: ¿Y el denominador? Egiber: Menor Profesora: Como es menor, no alcanza y debemos hacer otras unidades iguales hasta poder pintar las que piden… ¿Comprenden? Alumnos: ¡Sí, señorita! Profesora: Me alegra que sean tan inteligentes. Vamos a plantearla como situación: Podemos decir que la mamá de Jesús tiene cinco queques. Si son nueve los visitantes, ¿qué puedo hacer para repartidos? En un principio los alumnos no responden. La clase se queda en silencio. La profesora llama a uno por uno para que dé alguna respuesta. Egiber: Dividir entre dos cada queque Bruno: Son nueve más Jesús, diez Profesora: Buena observación, Bruno; pero pensemos que Jesús no come de ese queque… Angie: Entonces, va a sobrar una parte Profesora: Exacto, pero así se hace para que a cada uno le toque la mitad. La profesora pide que uno de los alumnos salga a la pizarra y represente gráficamente la situación. Uno de los alumnos intenta dibujar un queque; sin embargo le resulta difícil. La profesora relaciona con la situación de los círculos:

	Profesora: Es igual que los círculos. No entiendo porque tanto problema si ya está (la profesora dibuja los círculos). ¿El dos por qué niños? ¿Luigui? Luigi: Para dividirlos… repartidos Maryori: ¿Porque cinco partes en dos? Angie: Para que alcance para todos y aún sobra una parte Gabriel: Lo más equitativo es dividir en dos partes Profesora: Cinco… y quiere nueve… dividido entre dos… ¿Por qué el número cinco? Egiber: … La manera más equitativa de dar nueve partes a nueve amigos Profesora: ¡Cómo en el otro hablan y en el otro se quedan callados!... Les cuento una pequeña situación problemática. ¿Cuándo aprenden mejor? Bruno: Cuando nos cuenta algo Profesora: Si pido que de cada uno tomen dos, ¿cuántos voy a tener que hacer para tener nueve? ¿Qué puedes decir, Patricia?, ¿voy a hacer uso de más cantidades? Patricia: Sí Profesora: Acá la unidad es suficiente[378], acá no.
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ La profesora plantea una fracción impropia para que los alumnos grafiquen. ▪ Los alumnos grafican. Algunos dividen según el denominador y otro según el numerador de la fracción. ▪ La profesora *contextualiza* en una situación la fracción. Códigos:	La profesora propone la siguiente actividad: ¿Me pueden hacer este gráfico: 12/5? Angie: … Si es una pizza y está dividida en 12 Los alumnos comienzan a hacer sus representaciones gráficas. Todos dibujan círculos, algunos los dividen en cinco y otros en 12 partes.

---

[378] Refiriéndose a 3/8.

– *Planteamiento de una fracción impropia directa para ser graficada (caso 3).* – *Dificultad para reconocer el significado de cada elemento en una fracción impropia.* – *Participación total de los estudiantes al ser una propuesta individual (caso 3).*	
Desarrollo de la clase (Parte VI) ▪ La profesora contextualiza la fracción impropia en una *situación problemática*. ▪ Los alumnos leen e interpretan la situación problemática antes de resolverla. Códigos: – *Planteamiento de situaciones cotidianas que involucra reparto (caso 4).* – *Planteamiento no estructurado (mal definido). Análisis de la situación por parte del alumno. Los alumnos no ven la necesidad de representar a través de fracciones (caso 4).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de la situación (caso 4) (verbal).*	Luego de unos minutos, la profesora da contexto a la situación planteando lo siguiente a la vez que escribe en la pizarra: "La mamá de Darleny prepara tamales muy ricos. Tiene doce tamales. Darleny llegó a casa con diez amigos y amigas. Si su mamá les invitó tamales a todos, con zarza y ají, ¿cómo los pudo repartir?, ¿le sobró o le faltó? ¿Cuánto? Escribe tres gráficas y representa en fracciones". Los alumnos escriben el problema y lo leen, luego dibujan doce tamales. Algunos alumnos manifiestan que “alcanza uno para cada uno y sobra uno”. Otros dicen que “falta saber cuántos son en la familia”. La profesora les dice que “son los que aparecen en el problema”. Los alumnos plantean sus soluciones.
Desarrollo de la clase (Parte VII) ▪ La profesora expone una situación problemática nueva con distinta información pero siguiendo el mismo planteamiento. ▪ Los alumnos realizan diferentes gráficas que muestran a la profesora. ▪ Los alumnos dan diferentes interpretaciones a los gráficos realizados.	Mientras los alumnos esbozan sus soluciones, la profesora plantea otra situación que también escribe en la pizarra: "En el cumpleaños de Álvaro hicieron tres fuentes de causa de pollo con mayonesa y aceitunas. Si llegaron quince invitados, ¿cuántas porciones fueron repartidas en cada fuente? Representa en un gráfico y fracción".

Códigos: – *Planteamiento de situaciones cotidianas que involucra reparto (caso 5).* – *Planteamiento abierto de la situación (caso 6).* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de la situación (caso 5).* – *Participación selectiva de los estudiantes en el análisis de las soluciones expuestas (caso 6).*	La profesora pregunta cómo se tendría que representar y los alumnos muestran las siguientes versiones, luego de escribir en sus cuadernos el problema:  La profesora deja las correcciones para después ya que la hora de clase llegó a su fin. Sin embargo les pregunta a los alumnos si es que los gráficos son correctos. En algunos casos opinan que quince quintos es el correcto porque "no sobra nada y se reparte todo"; mientras que otros opinan que con los otros se puede volver a repartir "por si quieran repetir". Se les pregunta qué pasaría si todos quieren repetir a lo que Maudy dice que "de lo que sobra se pueden hacer quince partes, pero toca un poquito" Profesora: ¿En cuáles se puede hacer las quince partes iguales? Rosalía: En todos menos en quince novenos Profesora: ¿Por qué? Rosalía: Porque sobran doce y es difícil Egiber: Lo que se puede hacer es que los últimos que repitan se partan entre dos.
Final de la clase ▪ El timbre suena. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas /Fragmentos de la sesión observada
a) La actividad inicial propuesta por la docente a los alumnos busca graficar diferentes fracciones. No es una actividad de construcción del conocimiento puesto que los alumnos conocen el tema. Los alumnos representan diferentes gráficos. La actividad conduce a la generación de fracciones con la finalidad de trabajar directamente con ellos (comparándolas). El tema no es nuevo para los alumnos, por lo que las actividades exploran conocimientos aprendidos en los alumnos. Código: – *Actividad de aplicación (de conocimiento aprendido).*	a) La profesora les propone a los alumnos hacer una unidad entera en su cuaderno. Los alumnos preguntan qué significa "hacer una unidad entera" y la profesora les dice que dibujen la figura geométrica que ellos deseen: un cuadrado, un rectángulo, un rombo... Los alumnos generalmente dibujan un cuadrado aunque en algunos casos se observa que dibujan círculos y rectángulos. Luego, la profesora les pide que dividan esa figura en partes iguales, haciéndolo de manera libre y a continuación indica que de esas partes divididas tomen "las fracciones" que quieran… La profesora les pide a unos alumnos que salgan a la pizarra y representen gráficamente lo que han hecho, pero en las unidades que ella les propone (círculos de cartulina que ha adherido a la pizarra). Los alumnos dividen los círculos en tantas partes como dividieron sus respectivas figuras. Las siguientes son representaciones de lo elaborado por los estudiantes Una vez representados en los círculos el trabajo de cada alumno que salió a la pizarra, la profesora pregunta qué se puede hacer con las fracciones. Los alumnos responden que se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir; además de convertirlas en mixtos. Luego, la profesora pregunta cuál es la mayor, a lo que todos los alumnos, inmediatamente, responden que la primera.
a) La segunda actividad surge de la anterior. La profesora les propone a los alumnos representar gráficamente una fracción impropia. Ante esta actividad. Si bien, es un conocimiento que el alumno sabe, genera dificultades de representación inmediata y pertinente en todos los alumnos y en la comprensión del tipo de fracción. Las diferentes respuestas conducen a la profesora a trabajar sobre el tema Código:	a) Profesora: Vamos a representar 9/2 Profesora: ¿Alguien más que pueda explicar? Egiber: Ha dibujado cinco unidades y las cinco las dividió por la mitad y de ahí pinta nueve porque es nueve medios Rosalía: Dividió a cinco partes, hizo diez pero solo pintó nueve Profesora: ¿Por qué cinco unidades? ¿Óscar?... ¿Sandra? Sandra: Tiene que llegar a la fracción que le han indicado Profesora: ¿Y dónde me indica?

– *Actividad de aplicación (mediante una gráfica).* – *Actividad de reflexión (de un conocimiento).*	Sandra: Ahí está pintado... nueve Óscar: Yo creo que tiene que dividir en nueve y pintarlos[379] Profesora: (a partir del trabajo de Óscar) ¿Y de ahí qué va a tener? Óscar: Las nueve que piden Egiber: El denominador indica dos Óscar: Entonces hay que dividir en dos, pero no hay nueve Profesora: ¿Quién piensa diferente?
a) La siguiente actividad es una situación problemática que la maestra propone para una mejor comprensión de la situación. Los alumnos se enfrentan a la situación de dos maneras: interrogando la misma o planteando directamente la solución. La docente orienta a una solución directa. Código: – *Actividad de comprensión/desarrollo (contextualiza la expresión matemática).*	a) Profesora: Me alegra que sean tan inteligentes. Vamos a plantearla como situación: Podemos decir que la mamá de Jesús tiene cinco queques. Si son nueve los visitantes, ¿qué puedo hacer para repartidos? …
a) En la siguiente actividad la profesora propone representar gráficamente otra fracción impropia. Esta actividad busca que los alumnos apliquen a un caso concreto un conocimiento trabajado previamente. La actividad es aplicativa. Algunos alumnos recurren a transformarla en situación ‘cotidiana’ para resolver.	a) La profesora propone la siguiente actividad: ¿Me pueden hacer este gráfico: 12/5? Angie: … Si es una pizza y está dividida en 12 Los alumnos comienzan a hacer sus representaciones gráficas. Todos dibujan círculos, algunos los dividen en cinco y otros en 12 partes.

---

[379] Óscar dibuja dos unidades divididas en nueve partes y pinta una unidad entera.

Se observan dificultades en la comprensión de la fracción. La actividad no se llega a resolver. Código: – *Actividad de aplicación (gráfica).*	
a) Las siguientes actividades se proponen con el fin de contextualizar el conocimiento matemático y darle sentido. La maestra propone situaciones que permitan una mejor representación y uso de las fracciones impropias. La última propuesta se acopla mejor que las anteriores. Los alumnos brindan diferentes formas que la docente aprovecha para reflexionar en torno a ellas. Código: – *Actividades de construcción/desarrollo del conocimiento.* – *Actividad de reflexión (de la situación).*	a) "La mamá de Darleny prepara tamales muy ricos. Tiene doce tamales. Darleny llegó a casa con diez amigos y amigas. Si su mamá les invitó tamales a todos, con zarza y ají, ¿cómo los pudo repartir?, ¿le sobró o le faltó? ¿Cuánto? Escribe tres gráficas y representa en fracciones"… Mientras los alumnos esbozan sus soluciones, la profesora plantea otra situación que también escribe en la pizarra: "En el cumpleaños de Álvaro hicieron tres fuentes de causa de pollo con mayonesa y aceitunas. Si llegaron quince invitados, ¿cuántas porciones fueron repartidas en cada fuente? Representa en un gráfico y fracción".

Sesión 4/Caso 4

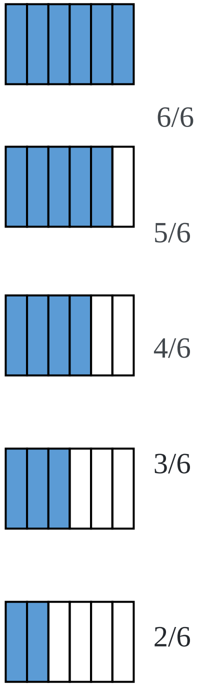
Miércoles 20 de agosto de 2008. Hora: 7:40 a 9:10.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión – inicio de la clase ▪ La profesora propone una *situación problemática* gráfica y solicita a los alumnos decir qué pueden observar.	La profesora propone la siguiente situación: Tenemos cinco barras de chocolate que se reparten de la siguiente manera:

- Los alumnos observan las imágenes.
- La primera idea se asocia a fracciones (el alumno descontextualiza la situación cotidiana y la circunscribe al ámbito de las fracciones propiamente).
- La profesora cuestiona sobre las fracciones.
- Las primeras cuestiones se refieren al tipo de fracciones.
- La profesora cuestiona sobre la acción para saber el total de partes tomadas.
- Los alumnos asocian a las operaciones básicas: suma.

Códigos:

- *Planteamiento de una situación contextualizada en cuestiones ordinarias que involucra fracciones.*
- *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de las gráficas y tratamiento de las fracciones.*
- *Cuestionamiento directo por parte de la docente para orientar hacia el tema a tratar (suma de fracciones).*
- *Tendencia del alumno a ‘ver’ directamente las cuestiones numéricas (fracciones propias) frente a la situación expuesta (reparto de barras de chocolate).*
- *Diálogo como estrategia docente para la exploración y tratamiento de la información involucrada (se evidencia conocimiento sobre suma de fracciones homogéneas).*



Una vez dibujado las gráficas en la pizarra, la profesora les pregunta qué pueden observar. Se genera el siguiente diálogo:

Profesora:	¿Qué pueden observar?
Álvaro:	Que son (fracciones) propias
Profesora:	¿Cuándo las fracciones son propias?
Álvaro:	Cuando el numerador es menor que el denominador
Patricia:	Profesora, yo observo que a cada uno se le quita barritas de chocolate
Profesora:	¿Qué puedo hacer para indicar cuantas barritas se han quitado?

– *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de las gráficas y tratamiento de las fracciones.*	Bruno: Sumar lo pintado. Pedro: Sumar fracciones Óscar: Veinte sextos. Sumo todo Maryori: Todas son homogéneas Profesora: ¿Qué significa? Maryori: Que el denominador es el mismo
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora cuestiona sobre la suma de fracciones. ▪ Los alumnos explican cómo se suman y restan fracciones homogéneas y heterogéneas. Códigos: – *Planteamiento directo de una cuestión diferente (suma de fracciones heterogéneas) a partir de la actividad anterior (suma de fracciones homogéneas).* – *Preguntas directas para explorar el conocimiento involucrado.* – *Recurrencia a la 'regla'. Guía directa de la docente.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de una suma de fracciones heterogéneas (verbal).*	Profesora: ¿Qué pasa si tengo un medio y un tercio?... ¿Y si quiero sumar cómo hacerlo? Maryori: Sacar el mínimo común múltiplo de tres y dos Roxana: Es un quinto Luigi: Saca mínimo común múltiplo y operas un medio más un tercio. Es igual a cinco sextos Profesora: Intentemos recordar la regla: al sacar el mínimo común múltiplo va a ser igual a seis. ¿Qué voy haciendo en el camino?... El denominador es seis. ¿Es igual así: $\frac{}{6}$ y así: $\frac{}{6}+\frac{}{6}$[380]? Alumnos: Sí Alumnos: No Profesora: Tres sextos más dos sextos es igual a cinco sextos Bruno: Es igual al otro Profesora: ¿Están de acuerdo?

---

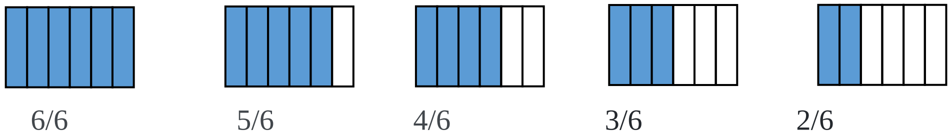
[380] La profesora se refiere a si la forma de expresar la suma es igual al hacerlo junto, como lo hizo Luigi, que al hacerlo por separado y desarrolla esta forma

	Alumnos: Sí Profesora: ¿Qué puedo decir de estas fracciones? Ronny: Que son homogéneas Profesora: ¿Primero? Ronny: Heterogéneas Profesora: Y luego para poderlas sumar, ¿qué hacía? Ronny: Las convertía a homogéneas Profesora: ¿Qué puedo decir de la suma de fracciones heterogéneas? Cristian: Que hay que sacarles en mínimo común múltiplo Profesora: Para convertirlas en... Bruno: A un solo denominador Profesora: Para poder. .. Juan de Dios: Las voy a convertir en homogéneas para poderlas sumar Profesora: Supongamos que tengo 7/9 - 3/6 Maryori: Hay que sacarles el mínimo común múltiplo Profesora: ¿Cuál es el objetivo? Jossy: Convertirlas en homogéneas
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora propone escribir en el cuaderno las ideas expuestas y el ejemplo correspondiente. ▪ La profesora pregunta sobre el procedimiento.	La profesora les dice a sus alumnos que escriban en sus cuadernos lo que han hecho (la suma y resta de fracciones heterogéneas) y resuelvan las operaciones. La profesora va preguntando qué hay que hacer.

Códigos: – *Consolidación (resumen) escrito por parte del alumno y resolución de caso concreto (aplicando el procedimiento). Participación total del estudiante al ser una actividad propuesta para toda la clase.*	Egiber: Buscar mínimo común múltiplo Patricia: Para llegar a las homogéneas. Es dieciocho Egiber: Es lo mismo que la resta de homogéneas
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone una suma de tres fracciones heterogéneas para que los alumnos resuelvan. ▪ Los alumnos resuelven sacando el m.c.m. ▪ La profesora cuestiona sobre el m.c.m. encontrado en las dos operaciones resueltas. ▪ Los alumnos relacionan según el tipo de denominador. ▪ La profesora resume las ideas expuestas. ▪ Los alumnos llegan a conclusiones a partir de casos concretos. Código: – *Propuesta de actividades similares con un nivel de complejidad mayor (tres fracciones).* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de la suma.* – *Exploración de las características de los denominadores y el denominador común (relación).* – *Participación selectiva del estudiante en el análisis de los denominadores.*	La profesora les propone una suma de tres fracciones heterogéneas: $\frac{9}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}$ Los alumnos sacan el mcm. Se llega a que es dieciséis. La profesora pregunta qué diferencia hay entre ese mcm. y el anterior (el obtenido al sumar un medio más un tercio). Los alumnos no saben qué responder. La profesora les pide que observen ambos casos y digan “algo” sobre los denominadores. Allison: No entiendo porque es seis Maudy: Porque son fracciones heterogéneas Álvaro: Para convertirlas en homogéneas Angie: Dos por tres es seis Jossie: Dieciséis es uno de los denominadores Profesora: ¿Cuándo puede ser el mínimo común múltiplo igual a uno de los denominadores? Alumnos: … Profesora: Seis no es ninguno de los denominadores y dieciséis es uno de ellos, ¿el menor o el mayor? Rosalía: El mayor Profesora: ¿Cuándo el mínimo común múltiplo es el denominador mayor?

– *Sistematización del trabajo por uno de los estudiantes.* – *Sistematización de la docente del conocimiento matemático trabajado (suma de fracciones heterogéneas).*	Egiber: Cuando, por ejemplo, multiplicas ocho por dos te da dieciséis y cuatro por cuatro te da dieciséis. Dieciséis es múltiplo de ocho y cuatro Profesora: ¿Cuándo podemos decir que el mínimo común múltiplo es uno de los denominadores de las fracciones? Patricia: Cuando son múltiplos. Profesora: ¿Dos y tres son múltiplos? Alumnos: ¡No! Profesora: ¿Y su mínimo común múltiplo es uno de ellos? Alumnos: ¡No! Profesora: ¿Cuatro y ocho son múltiplos de dieciséis? Jossy: Sí Profesora: ¿Y cuál es el mínimo común múltiplo? Ronny: Dieciséis Egiber: Para sacar el mínimo común múltiplo puedo multiplicar los denominadores o poner el mayor si el mayor es múltiplo de los otros. La profesora resume las ideas que han ido expresando a lo largo de la clase: “nos damos cuenta que para sumar fracciones heterogéneas podemos transformarlas en homogéneas sacando el mínimo común múltiplo de los denominadores (de las fracciones que voy a sumar), así se puede sumar a partir de las fracciones homogéneas”.
Final de la clase ▪ No hay tiempo para más y se finaliza la actividad. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase cerrada (actividad finalizada).*	La clase termina.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuesta /Fragmentos de la sesión observada
a) La primera actividad propuesta por la docente, si bien se contextualiza de manera extramatemática tiene una clara orientación hacia el tratamiento directo de las fracciones al asociarlas a las mismas. La propuesta sirve a la docente para centrarse en las fracciones, descontextualizándolas de la situación y tratar directamente el conocimiento (suma de fracciones homogéneas y posteriormente suma y resta de heterogéneas) El tema no es nuevo para los alumnos por lo que es una actividad de repaso. Al finalizar el diálogo, los alumnos resuelven las operaciones en sus cuadernos. Código: – *Actividad de repaso (con fines de conexión).*	a) La profesora propone la siguiente situación: Tenemos cinco barras de chocolate que se reparten de la siguiente manera:  Una vez dibujado las gráficas en la pizarra, la profesora les pregunta qué pueden observar. Profesora: ¿Qué puedo hacer para indicar cuantas barritas se han quitado? Bruno: Sumar lo pintado. Pedro: Sumar fracciones Óscar: Veinte sextos. Sumo todo Maryori: Todas son homogéneas Profesora: ¿Qué significa? Maryori: Que el denominador es el mismo Profesora: ¿Qué pasa si tengo un medio y un tercio?... ¿Y si quiero sumar cómo hacerlo? Maryori: Sacar el mínimo común múltiplo de tres y dos Roxana: Es un quinto Luigi: Saca mínimo común múltiplo y operas un medio más un tercio. Es igual a cinco sextos
a) La segunda actividad (suma de tres fracciones heterogéneas) busca, en primer	a) La profesora les propone una suma de tres fracciones heterogéneas: $\frac{9}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}$ Se llega a que es dieciséis. La profesora pregunta qué diferencia hay entre ese mcm. y el anterior

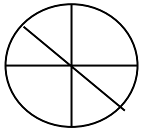
lugar que los alumnos resuelvan la operación usando el método conocido. Algunos alumnos muestran dificultad en la comprensión de la situación. La profesora reflexiona sobre los denominadores y sistematiza Código: – *Actividad de aplicación.* – *Actividad de reflexión.*	(el obtenido al sumar un medio más un tercio). Los alumnos no saben qué responder. La profesora les pide que observen ambos casos y digan “algo” sobre los denominadores. Allison: No entiendo porque es seis Maudy: Porque son fracciones heterogéneas Álvaro: Para convertirlas en homogéneas Angie: Dos por tres es seis Jossie: Dieciséis es uno de los denominadores Profesora: ¿Cuándo puede ser el mínimo común múltiplo igual a uno de los denominadores? Alumnos: … Profesora: Seis no es ninguno de los denominadores y dieciséis es uno de ellos, ¿el menor o el mayor? La profesora resume las ideas que han ido expresando a lo largo de la clase: “nos damos cuenta que para sumar fracciones heterogéneas podemos transformarlas en homogéneas sacando el mínimo común múltiplo de los denominadores (de las fracciones que voy a sumar), así se puede sumar a partir de las fracciones homogéneas”.

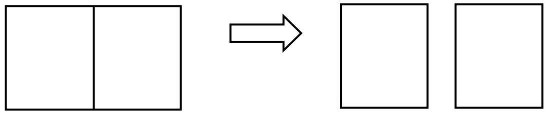
Sesión 5/Caso 4

Lunes 1° de setiembre de 2008. Hora 7:30 a.m. a 9:10 a.m.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La actividad inicia con la propuesta de corrección de cuatro *problemas* propuestos para casa.	La clase se inicia con la corrección de cuatro *problemas* que se propusieron para la casa. La profesora saca a cuatro a alumnos a resolver los primeros cuatro problemas.

▪ Cuatro alumnos elegidos por la docente salen a la pizarra. ▪ Una alumna busca a la profesora para que corrija su solución ya que no está segura de su respuesta. ▪ La profesora cuestiona a la alumna sobre el problema y esta lo lee nuevamente. ▪ La profesora pregunta a la alumna cuánta harina se necesita para hacer 26 pasteles y esta responde indicando la operación que hay que hacer. ▪ La profesora cuestiona paso a paso y la alumna responde. No obstante, aún no tiene seguridad sobre si la solución es correcta. ▪ La profesora pide a los alumnos de la pizarra que lean y expliquen el problema resuelto. ▪ Los alumnos leen y explican. ▪ La profesora cuestiona a la clase si lo que han hecho los compañeros es correcto. Los alumnos asienten. ▪ La profesora y los alumnos validan la solución de los problemas. Si esta no es correcta, se le dice que corrija. Códigos: – *Revisión de la solución de problemas en clase.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por a docente) en la reproducción de sus soluciones.* – *Resolución de problemas contextualizados en situaciones ‘cotidianas’ con guía docente a través de preguntas sobre el problema.*	Angie, quien permanece en su mesa, pregunta si uno de los problemas en particular lo ha resuelto correctamente pues no está segura de su respuesta. El problema dice lo siguiente: Para hacer un pastel se necesita 2/8 de kilo de harina. ¿Cuánto se necesita para hacer 26 pasteles? La alumna ha propuesto multiplicar 26 por 8 y dividir el resultado entre 2. El resultado final es 104. Antes de decirle si su respuesta es correcta o no se le pregunta qué es lo que dice y plantea el problema. La alumna lo lee correctamente. Luego de la lectura se le pregunta cuántos kilogramos de harina necesita para hacer los 26 pasteles, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cuántos kilogramos de harina se necesitan para hacer 26 pasteles? Angie: Hay que multiplicar 8 por 26 y dividirlo entre 2. Profesora: ¿Cuánto necesitas para hacer un pastel? Angie: 2/8 kilo de harina Profesora: ¿Cuánto necesitarías para hacer dos pasteles? Angie: 2/8 más 2/8 Profesora: ¿Cuánto necesitarías para tres pasteles? Angie: 2/8 más 2/8 más 2/8 Profesora: ¿Qué operación tienes que hacer? Angie: Sumar Profesora: ¿Cuánto de harina necesitarías para hacer 26 pasteles? Angie: 2/8 más 2/8 más 2/8 más… Profesora: Sumas 2/8 hasta completar 26 veces". Angie: Sí Profesora: ¿Qué operación puede simplificar dicha suma?

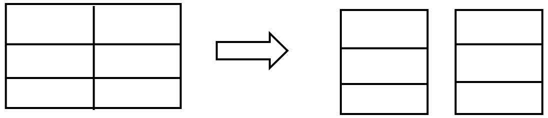
– *Dificultad para comprender y resolver problemas matemáticos en algunos alumnos.* – *Tendencia por parte de los alumnos a una traducción matemática inmediata de la situación y aplicación directa de las operaciones.* – *Procedimientos cerrados para la resolución de problemas (se orienta al alumno por un camino específico).* – *Comprobación de la Resolución de problemas.* – *Tendencia a una traducción matemática inmediata de la situación y aplicación directa de las operaciones.* – *Procedimientos cerrados para la resolución de problemas (se orienta al alumno por un camino específico). No se evidencia fase de exploratoria de la situación.*	Angie: La multiplicación Profesora: ¿Qué multiplicarías? Angie: 2/8 por 26 La alumna multiplica correctamente y al preguntarle cuál es el resultado ella responde con acierto, pero no asocia a lo que le plantea el problema. La alumna vuelve a preguntar si su planteamiento es correcto o no. La profesora pide a cada uno de los alumnos que resolvieron en la pizarra que lean el enunciado de su problema. Uno de los problemas dice lo siguiente: "Carlos saca los 5/8 de su torta de chocolate, de los cuáles 3/8, por casualidad, se le cayeron al piso. ¿Qué porción de torta le quedó para repartir? El alumno realiza la siguiente resta: $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ Los alumnos asienten cuando la profesora les pregunta si lo que ha hecho el alumno es correcto. Los demás problemas no ofrecieron dificultad para el planteamiento de la solución, aunque en algún caso hubo errores en la operación y en el planteamiento de la respuesta (Owen se olvidó de colocar el denominador, además de errar en el hallazgo de uno de los numeradores. Por su parte, Jesús corrigió el numerador, pero también olvidó el denominador).
Inicio de clase ▪ La profesora propone una situación sobre fracciones y saca a dos alumnas a resolverla. ▪ Ambas ofrecen una solución simbólica, aunque una de ellas incluye una gráfica en la misma. ▪ La profesora cuestiona las soluciones y pregunta a la clase cuál es la correcta. ▪ Los alumnos se decantan por una.	La profesora propone que los cuatro problemas restantes los corrijan en la próxima clase y acto seguido les enuncia la siguiente situación: "¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta?". Lucero propone el siguiente planteamiento y respuesta:  $1=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$ Por su parte Patricia plantea: $\frac{1}{6}+5=\frac{6}{6}$

▪ La profesora conduce la solución del *problema*, apoyándose en una gráfica y cuestionando, paso a paso, a los alumnos. ▪ Los alumnos proponen distintas operaciones para resolver la pregunta. La profesora se decanta por una de ellas (la división, sin argumentar su elección). ▪ La profesora cuestiona como se divide. ▪ Los alumnos expresan dos maneras: sacando mcm e invirtiendo la fracción (un sexto) y multiplicando (sin especificar) ▪ La profesora plantea una división con los datos del problema. La profesora cuestiona el resultado obtenido explicando su obtención (a través del proceso de dividir entre fracción). ▪ Una de las alumnas cuestiona el proceso y los alumnos apoyan ▪ La profesora se apoya en el gráfico para explicar y plantea una operación con números naturales. ▪ Los alumnos no comprenden el proceso anterior (con fracciones). Códigos: – *Planteamiento directo de una situación ‘cotidianas’ simple que involucra fracciones (objetivo: división de fracciones).* – *Propuesta de resolución directa de los alumnos.* – *Diálogo con preguntas directas para orientar la resolución del problema.*	Al preguntarles por sus respuestas, la primera alumna responde que "la torta es uno y la mitad es 3/6; luego se le resta 1/6 para que le dé 2/6". Patricia no sabe qué responder ante su planteamiento. La profesora pregunta (a los alumnos) si creen que lo que hizo Lucero es correcto. Los alumnos responden que sí[381]. Se puede observar que algunos alumnos sólo reproducen lo que Lucero ha escrito en la pizarra. La profesora vuelve a preguntar cuántas porciones de un sexto de torta hay en media torta. No obtiene respuesta; luego dibuja un rectángulo simulando que es la torta y a continuación dibuja dos rectángulos indicando que cada uno representa media torta. Se genera el siguiente diálogo:  Profesora: ¿Me dicen que voy a trabajar con toda la torta? Alumnos: Con la mitad Profesora: ¿Cuál mitad? Alumnos: cualquiera Profesora: ¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta? (la profesora señala uno de los rectángulos que representan media torta). Alumnos: Dos sextos Profesora: 1/6 por 2 nos da 2/6. Qué creen, ¿qué tipo de operación voy a hacer? Alumnos: Resta... suma... dividir[382]. Profesora: Vamos a ver porqué dividir. ¿Cómo se divide? Alumnos: Sacando mínimo común múltiplo. Profesora: Otra forma

---

[381] Se puede observar que los alumnos escriben el procedimiento seguido por Lucero ya que esta alumna suele tener aciertos en el área y los alumnos confían en sus respuestas.

[382] Diferentes alumnos son los que responden.

– *Dificultad en los alumnos para resolver la cuestión planteada (cuántas porciones de un sexto hay en media torta). Planteamientos inconsistentes por parte de los alumnos (aun cuando usan información de la situación, la relación establecida no es la correcta. Uso incorrecto de los signos matemáticos. Dificultad para asociar la situación con una división de fracciones (la tendencia es suma y resta, que podría haberlo resuelto. Los alumnos intentan ‘adivinar’ la operación pertinente).* – *Valoración del trabajo de una alumna por parte de los compañeros.* – *Planteamiento de la solución por parte de la docente a través de preguntas directas que se asocian a la traducción matemática y resolución de la misma. La solución resultó compleja para los alumnos.* – *Recurrencia a la representación gráfica como estrategia para la comprensión del tema en cuestión (en la docente).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la solución (dirigida por la docente): caso principal (verbal).*	Lucero: De un sexto, el denominador se convierte en numerador y el numerador el denominador. Luego se multiplica. A partir de lo que Lucero ha mencionado, la profesora planeta la siguiente operación: $\frac{1}{2} \div \frac{6}{1} = \frac{6}{2} = 3$ La profesora pregunta a la clase porqué el resultado es tres. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Por qué el resultado es tres? Maryorie: Porque tres entre uno es tres… No, tres por uno es tres Profesora: El denominador pasó a ser numerador y el numerador pasó a ser denominador… ¿Esto soluciona mi problema o no? Lucero: Un sexto no se convierte sino un medio. La respuesta sería dos sextos. La profesora vuelve a incidir en el gráfico, representando los sextos correspondientes, pero los alumnos insisten que es 2/6. El diálogo continúa:  Jesús: La torta entera son seis sextos. Profesora: ¿A qué es igual seis sextos? Jesús: A uno Profesora: ¿Cuántas partes hay si preguntan por la mitad de la torta? Jesús: Tres Profesora: ¿Pero en realidad, cuántas partes de la torta van a ser? Jesús: Tres sextos

	Profesora: Hay seis sextos y me dicen media torta, entonces 6:2=3. De ahí nos salen 3 porciones de la torta. Los alumnos aún no comprenden porqué la profesora plantea la operación invirtiendo un sexto y no un medio, por ello contextualiza la operación en una situación de reparto.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora replantea la situación situándola en un contexto extramatemático[383]. ▪ Los alumnos dan diferentes respuestas a la situación, asociadas a las operaciones de multiplicar y dividir sin especificar qué. ▪ La profesora valida la idea de dividir. ▪ La alumna insiste que se invierte un sexto. ▪ La profesora reafirma que su solución es la correcta y retoma el gráfico elaborado asociándolo a una torta y pregunta cuántas porciones de un sexto se tienen que hacer. ▪ Los alumnos dan dos respuestas: tres y un tercio. La profesora se decanta por la correcta. ▪ Una de las alumnas sigue el proceso de la profesora hasta el final. Código: – *Contextualización de la cuestión matemática en situaciones ‘cotidianas’ que involucra fracciones como estrategia para reconocer la división como operación. No es un planteamiento similar.*	La profesora plantea la siguiente situación para explicar la anterior: "imagínense que nuestra mamá decide repartir la torta cuando ya está por terminar el cumpleaños, a las 7, pero a las 7:10 llegan más invitados. Si ya tiene las porciones divididas, ¿qué puede hacer?”. Los alumnos responden: Alumnos 1[384]: Hay que multiplicar Alumnos 2: Dividir Profesora: Claro, esto se puede hacer dividiendo en partes más pequeñas Lucero: Pero el que se invierte es un sexto y no un medio Profesora: ¿El año pasado vieron este tema? Alumnos: ¡No![385] Profesora: La forma como yo lo he resuelto es la correcta. Observen el gráfico: de una unidad de la torta tengo que hacer porciones de 1/6, ¿cuántas voy a hacer? Alumnos: Un tercio Alumnos: Tres Alumnos: Dos tercios Profesora: ¿Tres o un tercio?

---

[383] Los problemas de contexto extramatemático se asocian a situaciones del mundo real.

[384] No se anotó el nombre, Cuando se indica alumno o alumna es uno solo sin recordar el nombre. Cuando se indica en plural es porque la intervención fue masiva.

[385] El tema de fracciones se trabaja desde tercer grado, año en el que el alumno deberá ser capaz de interpretar y representar gráficamente fracciones usuales y representar gráficamente e identificar fracciones equivalentes. En cuarto grado se hace lo mismo con las fracciones propias e impropias.

– *Confusión entre multiplicación y división en la situación propuesta (los alumnos responden cualquiera de esas operaciones).* – *La docente no responde a partir del error de la alumna sino en base a su planteamiento directo (así se desarrolla).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la solución (dirigida por la docente): caso secundario (verbal).*	Maryorie: Tres Profesora: ¿Por qué? Maryorie: Porque voy a tomar un medio Profesora: Que es lo que está en el gráfico: un, dos y tres partes.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora cuestiona sobre lo que se ha visto en clase. ▪ Los alumnos asocian la clase a un tema específico: la división de fracciones. ▪ La profesora explica cómo se dividen fracciones apoyándose en la situación trabajada. ▪ La profesora pide que se explique cuándo se divide fracciones. ▪ La alumna que siguió el proceso final responde (cuando el numerador es mayor que el denominador. ▪ Los demás alumnos no saben qué responder. Códigos: – *Sistematización (resumen) del tema trabajado con preguntas directas a los estudiantes.* – *Dificultad para comprender el tema en cuestión. No se aclara las dificultades.*	La profesora pregunta qué se ha visto en la clase de hoy; los alumnos responden “división de fracciones”; luego explica el proceso que hay que seguir apoyándose en la situación trabajada. A medida que explica, pregunta a los alumnos qué paso sigue en ese procedimiento. Al final, la profesora recalca que en media torta hay tres porciones de un sexto de torta. La profesora pide que expliquen cuándo se divide fracciones. Maryorie dice que cuando el numerador es mayor que el denominador; otros alumnos no saben qué responder.

Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone una división para resolver siguiendo los pasos trabajados. ▪ Los alumnos resuelven la operación. ▪ Algunos alumnos solicitan que se les explique otra vez. ▪ La profesora transmite la pregunta a la clase. La alumna anterior insiste en su respuesta. ▪ La profesora explica, paso a paso, apoyada en la división-situación explicada anteriormente y los alumnos agradecen. Códigos: – *Planteamiento de una división directa de fracciones (al final)* – *Aplicación del método rápido (invertir la segunda fracción y multiplicar).* – *Dificultad para comprender la situación inicial* – *La explicación final fue más directa.* – *No se aclara el error de los alumnos (p.e. se dividen fracciones cuando el numerador es mayor que el denominador…).*	La profesora les propone resolver una división siguiendo los pasos que ha explicado. Los alumnos copian la operación en sus cuadernos y algunos alumnos resuelven invirtiendo la segunda fracción; otros piden que les expliquen otra vez cómo hay que hacer y lo resuelven. La profesora explica, paso a paso: Profesora: ¿Cuándo se dividen fracciones? Maryorie: Cuando el numerador es mayor que el denominador Profesora: ¿Owen? Owen: … Profesora: ¿Darleny? Darleny: … Profesora: Vamos a resolver una división diferente siguiendo los pasos explicados Bruno: Señorita, ¿puede explicar otra vez? Profesora: Nos piden saber cuántas porciones de un sexto hay en media torta. Media torta es un medio por lo que divido un medio entre un sexto… para saber cuántas hay. Invertimos un sexto y nos queda un medio por seis… que es tres Bruno: Gracias, señorita. Profesora: Recuerden que la segunda fracción se invierte y se multiplica.
Final de la clase ▪ El tiempo culmina y la clase finaliza. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La clase finaliza

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas /Fragmentos de la sesión observada
a) Las primeras actividades propuestas consisten en resolver problemas matemáticos sobre fracciones (operaciones). Algunos alumnos muestran dificultad e incomprensión en algunos problemas aun cuando proponen una solución. Los problemas son de aplicación directa, por lo que no hay cuestionamiento sobre los mismos. Código: – *Actividades de aplicación (en problemas matemáticos).*	a) La clase se inicia con la corrección de cuatro *problemas* que se propusieron para la casa. La profesora saca a cuatro a alumnos a resolver los primeros cuatro problemas. El problema dice lo siguiente: Para hacer un pastel se necesita 2/8 de kilo de harina. ¿Cuánto se necesita para hacer 26 pasteles? Carlos saca los 5/8 de su torta de chocolate, de los cuáles 3/8, por casualidad, se le cayeron al piso. ¿Qué porción de torta le quedó para repartir? Angie, quien permanece en su mesa, pregunta si uno de los problemas en particular lo ha resuelto correctamente pues no está segura de su respuesta. El problema dice lo siguiente: Para hacer un pastel se necesita 2/8 de kilo de harina. ¿Cuánto se necesita para hacer 26 pasteles? La alumna ha propuesto multiplicar 26 por 8 y dividir el resultado entre 2. El resultado final es 104. Antes de decirle si su respuesta es correcta o no se le pregunta qué es lo que dice y plantea el problema. La alumna lo lee correctamente. Luego de la lectura se le pregunta cuántos kilogramos de harina necesita para hacer los 26 pasteles
a) La siguiente actividad cumple las características de la anterior por lo que se le puede llamar *problema*. Sin embargo, involucra una operación nueva con fracciones (división). No obstante, la docente dice que el tema lo han visto el año pasado (aunque los alumnos expresen que no) por lo que se consideraría una actividad de aplicación. Los alumnos muestran dificultades gráficas y operativas para resolver la cuestión, por lo que la docente opta para explicar la misma. Los alumnos no brindan una respuesta correcta de manera inmediata, por lo que la	a) … ¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta?... Al preguntarles por sus respuestas, la primera alumna responde que "la torta es uno y la mitad es 3/6; luego se le resta 1/6 para que le dé 2/6". Patricia no sabe qué responder ante su planteamiento. La profesora pregunta (a los alumnos) si creen que lo que hizo Lucero es correcto Profesora: ¿Me dicen que voy a trabajar con toda la torta? Alumnos: Con la mitad Profesora: ¿Cuál mitad? Alumnos: cualquiera Profesora: ¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta? (la profesora señala uno de los rectángulos que representan media torta).

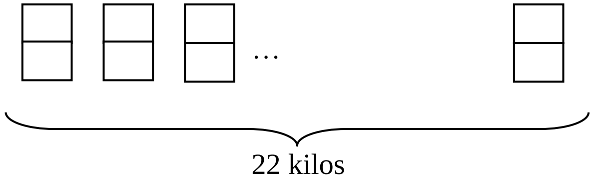
docente sigue cuestionando (la respuesta puede ser irreflexiva). La profesora contextualiza la situación para una mejor comprensión de la aplicación de la operación (división) Código: – *Actividad de aplicación.*	Alumnos: Dos sextos Profesora: 1/6 por 2 nos da 2/6. Qué creen, ¿qué tipo de operación voy a hacer? Alumnos: Resta... suma... dividir La profesora plantea la siguiente situación para explicar la anterior: "imagínense que nuestra mamá decide repartir la torta cuando ya está por terminar el cumpleaños, a las 7, pero a las 7:10 llegan más invitados. Si ya tiene las porciones divididas, ¿qué puede hacer?”.
a) La tercera actividad se centra en resolver una operación sin enmarcarla dentro de un contexto. Los alumnos no tienen claro cuando se dividen fracciones (sus respuestas se basan en las características de las fracciones) Código: – *Actividad de aplicación (operativa directa).*	a) La profesora les propone resolver una división siguiendo los pasos que ha explicado.

Sesión 6/Caso 4

Miércoles 03 de setiembre de 2008. Hora: 7:40 a.m. a 9:10 a.m.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión – Inicio de clase ▪ La profesora comienza la clase proponiendo un problema sobre fracciones. ▪ La profesora cuestiona sobre lo que hay que hacer. ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y tres alumnos: **Ronny, Juan Pablo y**	La profesora comienza la clase proponiendo un *problema sobre fracciones*: “Jorge ha notado que los paquetes de arroz de la marca que él prefiere pesan tres cuartos de kilo. Como su familia es numerosa ahora piensa comprar el arroz por sacos. ¿A cuántos paquetes de arroz de tres cuartos de kilo equivale un saco de veintidós kilos y medio de arroz?”. A continuación se genera el siguiente diálogo:

Maryori. Ronny responde sobre la operación que hay que hacer y qué se divide, Juan Pablo responde sobre qué hacer con uno de los datos (el mixto) y Maryori responde sobre cómo se convierte el mixto en fracción. El diálogo acaba cuando la maestra pregunta por un dato que no es explícito en el problema. ▪ La maestra grafica parte de la situación para ayudar a los alumnos a darse cuenta del dato. ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y tres alumnos: **Egiber, Luigui y Bruno**. Egiber responde sobre cuántos medio kilo que hay en veintidós kilos, Luigui sobre cuántos kilos compró (dato) y Bruno cuántos medio kilo representa esa cantidad y cómo se escribe en fracción. Las respuestas son acertadas. ▪ La profesora formula las preguntas. ▪ La profesora se centra en la forma cómo se transforma un mixto a fracción. ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y cuatro alumnos: **Maryori, Bruno, Rosalía y Egiber**. ▪ La profesora recuerda la forma de transformar en fracción un mixto, Rosalía lo asocia al procedimiento. ▪ Una pregunta es propuesta por una alumna (Rosalía) que está en función de la fracción obtenida transformando el mixto. ▪ La respuesta de Egiber (porque la unidad se ha dividido en dos) no se corresponde	Profesora: ¿Qué hay que hacer? Ronny: Una división Profesora: ¿Qué hay que dividir? Ronny: Veintidós un medio entre tres cuartos Profesora: ¿Qué hacemos con el mixto? Juan Pablo: Se convierte en fracción Profesora: ¿Cómo se realiza la conversión de mixto a fracción? Maryori: Hay unos pasos. Profesora: Primero fíjense en el mixto... ¿En cuántas partes está dividida la unidad? Maryori: En dos Profesora: Por lo tanto el denominador es dos. ¿Todos de acuerdo? Alumnos: Sí Profesora: Si hay 22 enteros, ¿cuántas unidades enteras hay? Ronny: Veintidós Profesora: Por lo tanto, en 22 unidades ¿cuántos medios hay? Alumnos: … Al ver que los alumnos no responden, la profesora dibuja en la pizarra un rectángulo y les dice que se imaginen que ese rectángulo representan un kilo de arroz, luego divide entre dos el rectángulo y dibuja otros iguales; a la vez pregunta cuántos kilos son. Los alumnos responden que 22. A partir de la imagen se genera el siguiente diálogo:

directamente con la pregunta (¿por qué ponemos el mismo denominador?). Códigos: – *Planteamiento de problemas matemáticos que implica dividir fracciones.* – *Exploración de la solución bajo la dirección de la docente (a través de las preguntas directas).* – *Resolución de problemas centrada en el tratamiento de la información matemática (¿Qué hay que hacer?...Una división).* – *Explicación de la docente del proceso de conversión de un mixto a fracción apoyada en preguntas directas a los estudiantes.* – *Uso de la representación gráfica por parte de la docente como estrategia de comprensión de la conversión de mixto a fracción.* – *Participación selectiva de los estudiantes en el proceso de conversión de mixto a fracción (verbal).* – *Exposición por parte de la docente del procedimiento para convertir un número mixto en fracción (procedimiento rápido).* – *Uso de la pregunta directa para evidenciar la comprensión de los alumnos sobre la conversión de números mixtos en fracciones.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación del procedimiento rápido.*	 Profesora: En veintidós kilos, ¿cuántos medios kilos hay? Egiber: Cuarenta y cuatro Profesora: ¿Por qué? Egiber: Porque cada kilo tiene dos medios kilos y son 22 kilos, multiplicas 22x2. Es 44. Profesora: Bien, ¿pero solo fueron 22 kilos? Alumnos: No Luigui: Compró 22 kilos y medio Profesora: Por lo tanto, ¿cuántos medios kilos son? Bruno: 45 Profesora: Por lo tanto, si hemos cogido 45 medios kilos y cada bolsa se ha dividido en dos medios kilos, ¿cuál es la fracción? Bruno: 45/2 Profesora: Ustedes recuerdan que para transformar en fracción un mixto, multiplicábamos el entero por el denominador y le sumábamos el numerador; luego, poníamos el mismo denominador. Maryori: Ese es el procedimiento Profesora: Ese es el procedimiento rápido, pero ahora sabemos por qué lo hacemos. ¿Por qué multiplicamos 22x2?

	Bruno: Porque son 22 veces medio kilo Profesora: ¿Por qué sumamos medio kilo? Maryori: Porque hay medio kilo más Rosalía: ¿Por qué ponemos el mismo denominador? Profesora: ¿Alguien quiere responder esa pregunta? Egiber: Porque la unidad se ha dividido en dos
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora continúa con la solución al problema, luego de haber transformado el mixto a fracción. La profesora pregunta sobre qué hacer después. ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y tres alumnos: **Angie, Bruno y Egiber**. Angie responde que hay que dividir. ▪ La profesora transforma la situación en una menos compleja: cuántas veces está un medio en 45/2 y plantea la operación conveniente (división). Sin resolver la operación, Bruno responde positivamente a la situación y expresa que hay 45 veces un medio. ▪ La profesora concluye que el resultado de la operación es 45. ▪ La profesora retoma el planteamiento del problema, asociando a la situación desarrollada: Si en lugar de querer… ¿Qué debo hacer? ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y dos alumnos: **Bruno y Egiber**. Bruno expresa qué división se ha de hacer y	Profesora: Hemos convertido el mixto en fracción. Ahora qué debemos hacer Angie: Dividir Profesora: Lo que vamos a averiguar es cuántas veces está un medio en 45/2. Para ello, la operación que nos puede ayudar es la división. ¿Cuánto es $\frac{45}{2} \div \frac{1}{2}$? Bruno: Hay 45 veces un medio Profesora: Por lo tanto $\frac{45}{2} \div \frac{1}{2} = 45$ La profesora escribe en la pizarra la operación y el resultado recalcando que cuarenta y cinco medios entre un medio es cuarenta y cinco. Luego retoma la situación del problema. Profesora: Si en lugar de querer saber cuántos medios kilos hay en 45/2 necesitamos saber cuántos paquetes de tres cuartos hay, ¿qué debo hacer? Bruno: Dividir 45/2 entre tres cuartos Profesora: ¿Cuánto será eso? Egiber: Treinta Profesora: ¿Por qué?

Egiber el resultado de la misma, justificando su respuesta. ▪ La profesora pregunta a la clase si están de acuerdo con lo expresado por Egiber. Los alumnos, en general, no responden. Código: – *Retorno a la situación inicial (dividir fracciones).* – *Transformación de la situación inicial (cuántos ¾ hay en 45/2) en una menos compleja (cuántos ½ hay en 45/2).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de las operaciones.* – *Pregunta directa como estrategia aplicada a los alumnos para seguir el proceso de resolución planteado.* – *Retorno a la situación inicial (dividir 45/2 entre ¾).* – *Planteamiento de una forma de dividir fracciones por parte de un alumno (transformando a equivalentes y anulando denominadores).*	Egiber: Porque 45/2 es 90/4. Ahora puedo quitar los denominadores y queda 90 entre 3 que es treinta Profesora: ¿Por qué quitas los denominadores? Egibert: Porque en 45/2 entre un medio es 45. Se quitan los denominadores y 45x1 es 45. Profesora: ¿Están de acuerdo? Alumnos: …
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora retoma la gráfica para explicar lo trabajado anteriormente y pregunta en cuántas partes debe estar dividido si se quiere saber cuántas bolsas de tres cuartos hay. ▪ Uno de los alumnos responde, sin embargo la casi totalidad de la clase no. La profesora cambia la pregunta y saca a Angie para que represente tres cuartos en un rectángulo... y en los dos siguientes.	La profesora les pide que observen la gráfica de los rectángulos, luego les pregunta en cuántas partes deben estar dividido si se quiere saber cuántas bolsas de tres cuartos hay. Ronny dice que entre cuatro. Los alumnos no comprenden y la profesora cambia la pregunta: Profesora: Tenemos en un rectángulo un kilo de arroz. En un kilo, ¿cuántos paquetes de tres cuartos puedo hacer? Alumnos: … Profesora: Angie, representa tres cuartos en este rectángulo

Luego pregunta si se puede saber cuántos paquetes de tres cuartos se puede hacer. ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y tres alumnos: **Angie, Maryori y Bruno**. ▪ La profesora representa mediante una operación de división lo obtenido a través de una gráfica. A partir de ello, va elaborando operaciones parciales. Los alumnos en mención responden con acierto. ▪ La profesora pide que observen las cuatro divisiones desarrolladas, incluyendo la inicial propuesta por un alumno y les solicita pensar cómo operar esas cantidades para que el resultado sea el mismo. ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y cinco alumnos: **Maryori, Bruno, Owen, Ronny y Egiber**. Egiber aplica su procedimiento a las nuevas divisiones. Maryori expresa que ella conoce la regla para dividir aunque expresa que no sabe por qué se hace así. Maryori aplica la regla a la división de Egiber. ▪ La profesora valida ambos procesos al dar ambas los mismos resultados. ▪ Bruno comenta sobre las formas seguidas y concluye que la de Maryori es más rápida. ▪ La profesora cuestiona sobre la solución de Egiber y pregunta que se puede hacer antes de operar. ▪ Egiber comenta que para multiplicar no se necesita sacar mcm. Bruno simplifica y resuelve.	Angie divide entre cuatro el rectángulo y pinta tres partes. Luego le pide que haga lo mismo en otro rectángulo y hace la misma pregunta. Le dice que haga lo mismo en otro rectángulo e igual. A partir de ello se genera el siguiente diálogo: Angie: Se pueden hacer 3 paquetes de tres cuartos Profesora: ¿Con los cuartos que sobran se puede hacer otro paquete de tres cuartos? Angie: Sí Profesora: En 3 kilos se pueden hacer cuatro paquetes de tres cuartos: $3 \div \frac{3}{4} = 4$ ¿Cuántos paquetes de tres cuartos se harán con 6 kilos? Maryori: Ocho Profesora: (escribiendo en la pizarra) $6 \div \frac{3}{4} = 8$ ¿Y en doce kilos? Bruno: Dieciséis Al final, la profesora tiene las siguientes operaciones: $3 \div \frac{3}{4} = 4$ $6 \div \frac{3}{4} = 8$ $12 \div \frac{3}{4} = 16$ $24 \div \frac{3}{4} = 32$ La profesora les pide que observen las divisiones. Además añade lo que expresó Egiber: $\frac{45}{2} \div \frac{3}{4} = 30$ y les dice que piensen cómo tienen que operar esos números para que el resultado sea el mismo. Profesora: Egiber transforma los enteros en fracciones, así 6 se convierte en 24/4, 12 en 48/4 y así sucesivamente, luego anula los denominadores y divide los numeradores. Maryori: Yo conozco la regla para dividir. A mí me la enseñó mi tío. Creo que había que invertir la segunda fracción y multiplicar. No sé porque, pero así se hace.

Códigos: – *Recurrencia a cuestiones cotidianas (kilos) para aclarar cuestiones matemáticas (fracciones).* – *Dirección guiada a través de preguntas directas de la docente en el trabajo de los alumnos.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la identificación de tres cuartos en kilos (a propuesta de la docente y por iniciativa de los alumnos).* – *Consolidación por parte de la docente de las expresiones matemáticas surgidas de la representación gráfica* – *Propuesta de análisis de operaciones para 'descubrir' el procedimiento de división de fracciones (se trabajó en la sesión anterior).* – *Estrategias personales de resolución de división de fracciones (transformar el entero en una fracción homogénea a la que divide) por parte de un alumno.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de las divisiones (aplicación de la regla por parte de una alumna).*	Profesora: Maryori, ¿puedes salir a explicar a la pizarra? Maryori: (lo hace con la división de fracciones) Quedaría 45/2 por 4/3. Da 180/6 que es 30. Profesora: Efectivamente esa es una forma de dividir fracciones y que al dar lo mismo que Egiber ambas formas son correcta. Bruno: La forma de Maryori es más rápida. Profesora: Antes de operar ¿qué se puede hacer? Bruno: Sacarle la mitad, tercia… Profesora: Owen, ¿qué hacías cuando tienes fracciones de diferente denominador? Owen: Sacarle mcm. de 2 y 3 Ronny: Es seis Profesora: ¿Y ahora qué realizamos? Egiber: Está mal. Cuando se multiplica no se saca mcm. Profesora: ¿Qué se hace? Bruno: Se multiplica. Sale 180/6 Profesora: ¿Podría simplificarlo? Bruno: 90/3 que es 30
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora reconstruye el problema y paso a paso, pregunta a los alumnos lo que se tiene que hacer. ▪ Se establece un diálogo entre la profesora y alumnos con participación directa de **Bruno, Angie, Rosalía, Jossy y Juan de**	La profesora reconstruye el problema y va preguntando a sus alumnos, paso a paso, lo que tienen que hacer: Profesora: Si tengo una cantidad mayor y los quiero hacer en paquetitos de tres cuartos ¿qué voy a hacer?... ¿Voy a…?

Dios, quienes responden a las preguntas de la profesora sobre datos puntuales. Códigos: – *Reconstrucción de la solución al problema como estrategia de comprobación y síntesis.* – *Pregunta directa como estrategia de exploración de conocimientos.* – *Aplicación a nuevas situaciones similares (dentro del mismo contexto cotidiano).* – *Participación selectiva de los estuantes en la resolución de la situación nueva (verbal).* – *Validación por parte de la docente de diferentes estrategias utilizadas por los alumnos para llegar a la solución e importancia de llegar a la solución correcta (una solución).*	Alumnos: Dividir Profesora: Si cada taza es un cuarto, ¿para tres tazas cuánto voy a usar? Bruno: 3/4 Profesora: Si junto un cuarto más un cuarto… Angie: Medio kilo Profesora: Y un cuarto más... Bruno: Tres cuartos Profesora: ¿Cuánto falta para el kilo? Rosalía: Un cuarto Profesora: Casi el kilo o falta Alumnos: Falta Profesora: ¿Cuánto falta? Jossy: Un cuarto Profesora: ¿Qué se hacía para dividir una fracción? Juan de Dios: Primero es fracción mixta y luego hay que convertirla a fracción... Luego se divide. Profesora: Vamos a poner otros ejemplos. De un saco que tiene 50 kilos, ¿cuántos medios kilos puedo hacer? Los alumnos dan diferentes respuestas. Como primera respuesta, la profesora escucha 25, producto de haber dividido entre dos el total de kilos; sin embargo, otro grupo, aunque reducido, dice que 100 porque “si en un kilo hay dos medios kilos en cincuenta se duplica la cantidad”. La profesora asiente y pregunta ahora por cuántos cuartos habrán en 50 kilos. La profesora recalca que cada niño tiene una estrategia de trabajo y que lo importante es llegar a la operación correcta: “lo importante es que tienden que llegar al mismo resultado”, luego les plantea otra situación:

Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora propone plantear otra situación y pregunta a los alumnos con qué podría ser. ▪ La profesora propone que los alumnos creen un problema de fracciones teniendo en cuenta “que es de azúcar… con los kilos que quieran”. ▪ Los alumnos expresan sus propuestas. La profesora precisa en algunos casos y en otros pregunta qué operación se va a realizar. ▪ La profesora reorienta el planteamiento de los problemas hacia problemas que se resuelvan mediante división. ▪ La profesora cuestiona sobre cómo se realiza una división de fracciones específica y Maryori responde acertadamente. Códigos: – *Propuesta a los alumnos de planteamiento de problema.* – *Dificultad de los alumnos para plantear problemas similares (división de fracciones).* – *Participación total de los alumnos en el planteamiento de los problemas matemáticos al ser una actividad propuesta pata toda la clase.* – *Propuestas directas (descontextualizadas de situaciones cotidianas) de la docente sobre división de fracciones.* – *Aplicación de la fórmula por parte de los alumnos.*	Profesora: Planteamos otra situación. ¿Con qué podría ser...? Patricia: Con azúcar Profesora: Puede cada uno crear un problema de fracción teniendo en cuenta que es azúcar… con los kilos que ustedes quieran Algunos alumnos crean sus problemas considerando números naturales como datos numéricos. La profesora recalca que se tienen que utilizar fracciones. Óscar: Si en un saco de azúcar tiene 50 kilos, ¿cuántos de tres cuartos y un cuarto saldrán en los 50 kilos de azúcar? Profesora: Podría ser ¿cuántas bolsitas de un tres cuartos y cuántas de un cuarto pueden ser? Maryori: César lleva siempre a su casa 9/9 de azúcar. Si su mamá en dos días saca 5/2 ¿cuánta azúcar le va a quedar? Profesora: ¿Qué tipo de operación va a realizar? Bruno: Una resta Profesora: Otra situación... Patricia: Un saco de azúcar pesa 60 k. Si mamá saca 2 kilos ¿Cuánto le quedará? Profesora: Con fracciones Bruno: Un saco de arroz pesa 28 kilos. ¿Cuántas bolsitas de un cuarto se pueden hacer? Profesora: Bien Rosalía: Un saco de arroz pesa 60 kilos. ¿Cuántas bolsitas de un medio se pueden hacer? Marco: Un saco de arroz pesa 49 kilos. ¿Si vende 5/2 y saca 5/4…? Profesora: Tengamos claro algo: si tengo una cantidad y uso otra… Suponiendo que tengo 3 kilos de arroz y en su familia sumaron 7... La mamá tiene que hacer paquetitos de todo. Si de los 3 kilogramos mi mamá va a usar 2, 3, 8. ¿Cuánto me queda? ... Si

	tengo una cantidad y la quiero repartir en cantidades pequeñas ahí sí se divide. El problema que tengo que crear es de división. Angie: Si tengo 30 caramelos y los quiero repartir en cinco niños, ¿cuánto le toca a cada uno? Gabriel: Tengo 50 kilogramos y medio de azúcar. Cada uno consume medio kilo. ¿Cuántos medios kilos gastarán en 23 días? Pedro: No tiene en cuenta el valor de las cantidades Profesora: ¿Qué debo tener en cuenta para crear un problema en este momento? Angie: La división de fracciones Rosalía: Si son 60 y medio; 60 por medio no me sale Angie: Pero hay que dividir Profesora: ¿Cómo divido 30/8 entre un quinto? Maryori: Hay que invertir 5 y multiplicamos: $\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ La profesora plantea un problema similar al desarrollado para que los alumnos resuelvan. ▪ Se genera un diálogo entre la profesora y dos alumnos: Nataly y Bruno, Egiber y Maryori. ▪ Los alumnos informan sobre el resultado y sobre cómo operar. ▪ La profesora cambia las características del problema y pregunta a los alumnos por su solución.	La profesora plantea un problema para que los alumnos resuelvan: “A la tienda de Bruno llevaron 25 kilogramos de menestras. Si su mamá las embolsa en paquetitos de un cuarto ¿cuántas bolsitas saldrán?”. Después de algunas soluciones se escucha: Nataly: Salen cien bolsitas de un cuarto Bruno: La segunda fracción se invierte para poder hallar la respuesta. Profesora: Escuchen, si la mamá de Bruno decide dividir el azúcar en bolsitas de tres kilos 2/4, ¿cuántas obtendrá? Alumnos: …[386]

---

[386] Algunos alumnos se entusiasman e intentan resolver aplicando operaciones. En primer lugar comentan que deben transformar a fracción.

▪ Se genera un diálogo entre la profesora y cuatro alumnos: **Nataly, Bruno, Egiber y Maryori**. ▪ Las respuestas no son inmediatas. Los alumnos indican la operación que deben hacer y cómo transformar el mixto en fracción. ▪ La profesora no resuelve hace referencia a la respuesta final del alumno. Códigos: – *Planteamiento de problemas matemáticos similares por parte de la docente.* – *Aplicación del procedimiento directo para resolver divisiones de fracciones.* – *Preguntas directas de la docente para guiar la solución (propuesta operativa).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de la situación.* – *Orientación directa a la traducción simbólica y resolución de la operación.*	Profesora: ¿Qué debo tener en cuenta para dividir? Piensen un poco y luego intenten dar la respuesta Nataly: Es igual que 25 entre un cuarto que es cien Bruno: Se divide entre tres y dos cuartos Egiber: Hay que convertirlo en fracción Maryori: Dos cuartos es un medio Profesora: ¿Cómo quedaría...? Egiber: Siete medios. Hay que dividir 25 entre siete medios Profesora: ¿Qué hacemos con los siete medios? Nataly: Lo invertimos Profesora: ¿Y luego? Bruno: Multiplicamos Profesora: ¿Cuánto sale?, ¿cuál sería la solución? Bruno: Sale siete y sobra uno Profesora: ¿Qué representa ese uno? Bruno: Un kilo
Final de la clase ▪ La clase finaliza sin cerrar la actividad. La maestra no propone tarea para la casa. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La clase finaliza...

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas /Fragmentos de la sesión observada
a) La primera actividad es la propuesta de un *problema* sobre fracciones. La actividad busca aplicar una división, a partir de la cual la maestra desarrolla (con participación de los alumnos) la división de fracciones. El problema queda al margen al centrarse en la manipulación operativa de los datos numéricos involucrados. Si bien es una actividad de resolución de problemas, es de tipo aplicativo puesto que los estudiantes conocen el tema. La maestra la utiliza para explicar un conocimiento a partir de su representación gráfica, orientando hacia la manipulación simbólica. La profesora busca una mejor comprensión de la división de fracciones. Código: – *Actividad de aplicación (resolución de problemas).*	a) La profesora comienza la clase proponiendo un *problema sobre fracciones*: “Jorge ha notado que los paquetes de arroz de la marca que él prefiere pesan tres cuartos de kilo. Como su familia es numerosa ahora piensa comprar el arroz por sacos. ¿A cuántos paquetes de arroz de tres cuartos de kilo equivale un saco de veintidós kilos y medio de arroz?”… Profesora: ¿Qué hay que hacer? Ronny: Una división Profesora: ¿Qué hay que dividir? Ronny: Veintidós un medio entre tres cuartos Profesora: ¿Qué hacemos con el mixto? Juan Pablo: Se convierte en fracción Profesora: ¿Cómo se realiza la conversión de mixto a fracción? Maryori: Hay unos pasos. Profesora: Primero fíjense en el mixto... ¿En cuántas partes está dividida la unidad? Maryori: En dos
a) La siguiente actividad es una propuesta de problema con la finalidad de aplicar lo aprendido. La resolución de este tipo de tareas no es clara para todos los alumnos. Código: – *Actividad de aplicación (en problemas matemáticos).*	a) Profesora: Vamos a poner otros ejemplos. De un saco que tiene 50 kilos, ¿cuántos medios kilos puedo hacer? Los alumnos dan diferentes respuestas. Como primera respuesta, la profesora escucha 25, producto de haber dividido entre dos el total de kilos; sin embargo, otro grupo, aunque reducido, dice que 100 porque “si en un kilo hay dos medios kilos en cincuenta se duplica la cantidad”. La profesora asiente y pregunta ahora por cuántos cuartos habrán en 50 kilos. La profesora recalca que cada niño tiene una estrategia de trabajo y que lo

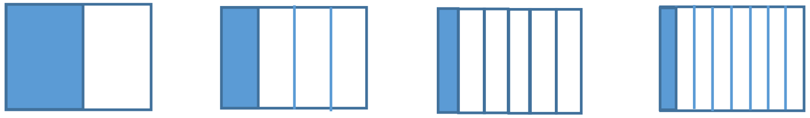
	importante es llegar a la operación correcta: “lo importante es que tienden que llegar al mismo resultado”, luego les plantea otra situación:
a) Los alumnos plantean situaciones diversas. El planteamiento no es claro en los alumnos (hay dispersión). Las propuestas suelen ser similares a la situación modelo. Las propuestas no se resuelven, La profesora reorienta hacia la aplicación directa (planteando una operación específica). Código: – *Actividad de aplicación (planteamiento por parte de los alumnos).*	a) Profesora: Puede cada uno crear un problema de fracción teniendo en cuenta que es azúcar… con los kilos que ustedes quieran … Óscar: Si en un saco de azúcar tiene 50 kilos, ¿cuántos de tres cuartos y un cuarto saldrán en los 50 kilos de azúcar? Profesora: Podría ser ¿cuántas bolsitas de un tres cuartos y cuántas de un cuarto pueden ser? Maryori: César lleva siempre a su casa 9/9 de azúcar. Si su mamá en dos días saca 5/2 ¿cuánta azúcar le va a quedar? Profesora: ¿Qué tipo de operación va a realizar? Bruno: Una resta Profesora: Otra situación... Patricia: Un saco de azúcar pesa 60 k. Si mamá saca 2 kilos ¿Cuánto le quedará? Profesora: Con fracciones Bruno: Un saco de arroz pesa 28 kilos. ¿Cuántas bolsitas de un cuarto se pueden hacer? Profesora: Bien Rosalía: Un saco de arroz pesa 60 kilos. ¿Cuántas bolsitas de un medio se pueden hacer? Marco: Un saco de arroz pesa 49 kilos. ¿Si vende 5/2 y saca 5/4…? Profesora: Tengamos claro algo: si tengo una cantidad y uso otra… Suponiendo que tengo 3 kilos de arroz y en su familia sumaron 7... La mamá tiene que hacer paquetitos de todo. Si de los 3 kilogramos mi mamá va a usar 2, 3, 8.

	¿Cuánto me queda? ... Si tengo una cantidad y la quiero repartir en cantidades pequeñas ahí sí se divide. El problema que tengo que crear es de división. Angie: Si tengo 30 caramelos y los quiero repartir en cinco niños, ¿cuánto le toca a cada uno? Gabriel: Tengo 50 kilogramos y medio de azúcar. Cada uno consume medio kilo. ¿Cuántos medios kilos gastarán en 23 días? …
a) La siguiente actividad es un problema similar al trabajado para que resuelvan los alumnos, por lo que se puede catalogar como de aplicación. No obstante, la docente guía la solución. A partir de esta actividad, la docente cambia los datos a fin de resolverla con una nueva condición. El tiempo no permite terminar el diálogo. Código: – *Actividad de aplicación (en problemas matemáticos).*	a) La profesora plantea un problema para que los alumnos resuelvan: “A la tienda de Bruno llevaron 25 kilogramos de menestras. Si su mamá las embolsa en paquetitos de un cuarto ¿cuántas bolsitas saldrán?”…. Nataly: Salen cien bolsitas de un cuarto Bruno: La segunda fracción se invierte para poder hallar la respuesta. Profesora: Escuchen, si la mamá de Bruno decide dividir el azúcar en bolsitas de tres kilos 2/4, ¿cuántas obtendrá? Alumnos: … Profesora: ¿Qué debo tener en cuenta para dividir? Piensen un poco y luego intenten dar la respuesta Nataly: Es igual que 25 entre un cuarto que es cien Bruno: Se divide entre tres y dos cuartos Egiber: Hay que convertirlo en fracción Maryori: Dos cuartos es un medio Profesora: ¿Cómo quedaría...?

Caso 5

Sesión 1/Caso 5

21 de agosto de 2008.

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de la sesión – Inicio de clase La profesora inicia la sesión con una actividad de doblado de papel a partir de ciertas fracciones propuesta a los estudiantes. La estrategia de los alumnos permite dividir sucesivamente $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\, y\, \frac{1}{8}$, pero no $\frac{1}{6}$. Los alumnos no logran definir una estrategia a partir de la hoja ya que no ven fácil representar un sexto cuando la hoja ya está dividida en cuatro partes iguales. La docente descarta una fracción (un sexto) y solicita que continúen con un octavo (descartan un problema generado a partir de una actividad: ¿Cómo representar un sexto si ha unidad está dividida en cuatro partes iguales?) ▪ La profesora parte de las imágenes para comparar las fracciones representadas en cada hoja con el fin de hacer evidente, visualmente, el mayor valor de una respecto a otra. ▪ Los alumnos no muestran problema en ello. Sin embargo, sus respuestas inmediatas están asociadas a las imágenes opuestas.	La profesora pide representar en una hoja las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$; los alumnos cogen una hoja blanca A4 y dividen según indica la profesora. Al querer representar un sexto, no saben cómo hacerlo (los alumnos doblan en la misma dirección; algunos cogen otra hoja), por lo que la profesora les pide que dividan en un octavo. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué dificultad han encontrado? Luis: No es fácil representar un sexto Profesora: Es más fácil dividir en cantidades pares que impares. La profesora les pide que pinten la fracción indicada en cada caso; luego que lo expongan en la pizarra. Los alumnos salen a la pizarra y exponen el trabajo realizado. Una representación de lo realizado es lo siguiente:  Una vez expuestas las diferentes fracciones, la profesora pregunta qué fracción indica más, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿A qué (fracción) supone más? Ivana: Un medio Profesora: ¿Y menos? Danitza: Un octavo

Códigos: – *Planteamiento de una actividad directa (representar fracciones en una hoja de papel) a partir de lo cual se analizará el conocimiento matemático involucrado* ***(propuesta docente).*** – *Los alumnos evidencian diferentes formas de enfrentar una situación (representar fracciones en una hoja de papel)****(respuesta del estudiante).*** – *Comparación gráfica de fracciones por parte de los alumnos* ***(respuesta del estudiante).*** – *Desinterés docente por el tratamiento de la dificultad del estudiante al intentar representar un sexto en la misma hoja que representaban las fracciones anteriores: un medio y un cuarto* ***(actitud del docente).*** – *Participación selectiva de los estudiantes al evidenciar sus dificultades al representar distintas fracciones en una hoja de papel (solo algunos estudiantes expresan verbalmente su dificultad)* ***(conducta del estudiante).*** – *Participación total de los alumnos en la representación de fracciones al ser una actividad individual* ***(conducta del estudiante).*** – *Diálogo generado por la docente con pregunta directa para el tratamiento inmediato del conocimiento matemático involucrado (comparación gráfica de fracciones)* ***(propuesta docente).***	Profesora: ¿Qué fracción es mayor? Alumnos: Un medio Profesora: ¿Y menor? Alumnos: Un octavo Profesora: ¿Cuál figura es mayor: un cuarto, un sexto o un octavo? Los alumnos indican un cuarto y la profesora compara gráficamente las fracciones indicando que la parte sombreada es mayor en un cuarto.

– *Participación selectiva de los estudiantes al comparar gráficamente las fracciones (verbal)* ***(conducta del estudiante).*** – *Bloqueo del estudiante ante la pregunta de la docente (¿Cuál figura es mayor…?)* ***(conducta del estudiante).***	
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora vuelve sobre el primer ejemplo y solicita que a partir de la representación simbólica de las fracciones indiquen por qué una es mayor que otra. ▪ Se genera un diálogo entre la profesora y diferentes alumnos que sin embargo, se ve silenciado ante la aclaración de la profesora de no responder a lo que se les pregunta. No obstante, los alumnos buscan caminos matemáticos para responder a la pregunta (comparando equivalentes es más fácil indicar cuál es mayor). ▪ La profesora retoma una de las ideas expuestas para continuar su estrategia de pregunta – respuesta. Al no obtener respuesta, se apoya en las gráficas construidas. A partir de ello, el diálogo se retoma. ▪ La profesora expone la forma directa de reconocer cuándo una fracción es mayor que otra en el caso expuesto. Códigos: – *Orientación de la comparación de fracciones a partir de las características de sus elementos (se deja la comparación gráfica)* ***(propuesta docente).***	La profesora vuelve a preguntar por qué un medio es mayor que un octavo. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Por qué dirían que un medio es mayor que un octavo? Observen las fracciones Luis: Tienen el mismo numerador Danitza: Cuando son distintas hay que hallar las equivalentes Ana: Las equivalentes representan la misma cantidad Profesora: No es lo que se les pregunta (Silencio) Profesora: Entonces, las fracciones equivalentes representan la misma parte… ¿Por qué un medio es mayor que un octavo? (Silencio) Profesora: Cuando se repiten los números de arriba, el mayor será el que tiene el número menor abajo. Miren los gráficos. María Pía: Porque está coloreado más Profesora: ¿Cómo están las partes? ¿Más o menos partes? (indicando un octavo) Alumnos: Más Profesora: ¿Y aquí? (indicando un medio)

– *Pregunta directa para dirigir las respuestas hacia un aspecto concreto de la situación (comparación de fracciones basada en la relación entre sus elementos)* ***(propuesta docente).*** – *Exposición del método directo* ***(propuesta docente).*** – *Participación selectiva de los estudiantes al comparar fracciones teniendo en cuenta las características de sus elementos* ***(conducta del estudiante).*** – *Los alumnos expresan otra forma de comparar fracciones (hallando equivalentes)* ***(conducta del estudiante).***	Alumnos: Menos
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora contextualiza la situación en un marco extramatemático. ▪ Se genera un interrogatorio más fluido entre profesora y alumna. ▪ La profesora incluye preguntas que buscan razones (por qué…). ▪ La profesora plantea una pregunta que los alumnos no responden inmediatamente. Códigos: – *Uso del contexto ‘cotidiano’ simple como estrategia docente para una mejor comprensión de la situación a explicar (comparación de fracciones basada en las características de sus elementos).* – *Pregunta directa para dirigir las respuestas hacia un aspecto concreto de la situación.*	La profesora varía la situación: Profesora: ¿En cuántas partes se ha dividido la unidad?… Si tengo cinco hijos... ¿Cuánto a cada uno? Luis: Un quinto Profesora: ¿Si tengo dos? Luis: Un medio Profesora: ¿Cuándo reciben más? Luis: Cuando son dos Profesora: ¿Cuándo reciben menos? Luis: Cuando son más Profesora: Mientras el denominador sea más bajo, hay más cantidad… ¿Quién lleva más torta: los veinte o cincuenta?

– *Sistematización (consolidación) de la docente (los alumnos orientan sus respuestas en función del contexto no de las fracciones involucradas).* – *Participación selectiva de los estudiantes en el análisis de la situación (contexto 'cotidiano') (verbal)* – *Uso de diferentes casos de fracciones para comparar en base a sus elementos.*	María Pía:	Cuando son menos
	Profesora:	A más partes dividida la unidad menor es la parte que se tiene. Aquí: ¿quién es mayor: $\frac{1}{12} o \frac{1}{20}$?
	Diego:	Uno sobre doce
	Profesora:	¿Por qué?
	Diego:	Porque la unidad se ha dividido en menos partes: doce
	Profesora:	Vamos a comparar dos quintos, un medio y un sexto (la profesora escribe las fracciones)
	María Pía:	Un medio es mayor porque se ha dividido entre dos
	Profesora:	¿Cuál sigue: un sexto o dos sextos?
	(Silencio)	
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora pregunta directamente por otras formas de comparar fracciones. Las respuestas no son inmediatas. ▪ Se genera un intercambio de información en el que los alumnos recuerdan las distintas formas ▪ La profesora amplía la información en algunos casos; en otros, pide a los alumnos que los expliquen a partir de pistas que la profesora brinda. Códigos:	Profesora:	Hay otras formas de comparar fracciones… ¿Qué casos hemos visto?
	(Silencio)	
	Luis:	Productos cruzados
	Profesora:	¿Otra opinión?
	Ana María:	Simplificar
	Profesora:	Puedo simplificar para comparar las fracciones
	María Pía:	Comparo los denominadores
	Profesora:	Cuando el denominador es igual, mayor es el mayor en el numerador… ¿Cuando el denominador es diferente?

– *Exploración de conocimientos sobre el tema en cuestión (formas de comparar fracciones).* – *Pregunta directa para dirigir las respuestas hacia un aspecto concreto de la situación (formas de comparar fracciones).* – *Participación selectiva de los estudiantes al exponer las formas de comparar fracciones.* – *Planteamiento de casos concretos (por parte de la profesora) para validar las respuestas.*	Luz: Buscamos equivalencias para que sean homogéneas Profesora: ¿Qué tipo de fracciones son? Luz: heterogéneas Profesora: Sí… ¿y cómo se hallan las equivalentes? Luis: Sacando el m.c.m. Profesora: Bien, ¿hay otra forma? Ana María: Simplificando Profesora: Podemos simplificar esto (refiriéndose a dos quintos y un sexto) Alumnos: ¡No! Ana María: Multiplicando Danitza: En aspa Renato: ¿Seis? Profesora: Acuérdense que debe dividir exactamente esos tres números. Ya les di un camino. María Pía: Tres por dos es seis Renato: dos por cinco es diez Ana María: tres por cinco es quince Renato: Si multiplicamos por seis es treinta Profesora: ¿Y puedo hallar el numerador? Renato: Multiplicando igual
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a una dada.	Renato sale a la pizarra y realiza la multiplicación del numerador como del denominador por seis. La profesora pregunta:

▪ Uno de los alumnos sale a la pizarra y multiplica el numerador y denominador de la fracción por seis. ▪ A partir de ello, la profesora pregunta por el par de fracciones generándose un diálogo entre la profesora y cinco alumnos (Luz, Luis, Ana María, Renato y María Pía). Sus intervenciones son puntuales. ▪ Las preguntas son planteadas por la docente; sin embargo una es propuesta por una alumna. Códigos: – *Participación selectiva de los estudiantes al hallar fracciones equivalentes y compararlas.* – *Pregunta directa aplicada por la docente para generar respuestas simples y únicas.* – *Propuesta por parte de los alumnos de casos concretos de fracciones para comparar.* – *Se plantean los casos pero no se llegan a resolver completamente (se proponen otras).*	Profesora: ¿Qué son esas fracciones? Luz: Homogéneas Profesora: No, estas (refiriéndose a $\frac{2}{5}\ y\ \frac{12}{30}$) Luis: Equivalentes Profesora: ¿Es fácil comparar fracciones homogéneas? Alumnos: ¡Sí! Profesora: Por lo tanto, ¿podemos compararlas? … ¿Cómo es de menor a mayor? Luis: Un sexto es la menor Luz: Un medio es la mayor Profesora: ¿Y dos quintos?... Veamos los numeradores: dos quintos y un medio… ¿Cómo?... Hallando la equivalencia Ana María: ¿Y cuándo es de dos? Profesora: Puedo aplicarlo también. Por ejemplo dos tercios y cuatro quintos Renato: Quince Profesora: Dos tercios comparado con cuatro quintos María Pía: Es menor
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ La profesora plantea pares de fracciones para que los alumnos mencionen denominadores comunes. ▪ Se genera un intercambio de información e ideas entre la profesora y seis alumnos:	Profesora: Vamos a decir algunos casos para poder hallar… dos tercios y cuatro doceavos (a medida que menciona las fracciones, las escribe en la pizarra) Ana María: Veinticuatro Profesora: ¿Otro?

Ana María, Luz, Diego, Danitza, Renato y Salma). ▪ La profesora propone pares de fracciones en las que el denominador común es el denominador mayor, cuestiona porqué sucede, pero no hay respuesta. La docente aclara y define el caso especial. Códigos: – *Aplicación del método (equivalencias) a casos de fracciones (directamente).* – *Análisis de denominadores comunes (para establecer relaciones).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la generación de fracciones equivalentes y en el análisis de sus denominadores.* – *Pregunta directa aplicada por la docente para orientar rectamente al análisis.*	Luz: Doce Profesora: Siete tercios y cuatro quinceavos… ¿Cuál será el denominador común? Diego: Quince Profesora: ¿$\frac{1}{6}\ y\ \frac{2}{36}$? Danitza: Treinta y seis Profesora: ¿$\frac{1}{6}\ y\ \frac{2}{20}$? Renato: Veinte Profesora: ¿Por qué? (Silencio) Profesora: Porque veinte es múltiplo de cuatro[387] Renato: Porque todos son múltiplos de un número Profesora: Caso especial: si el número es múltiplo del otro, el común denominador va a ser… Salma: El mayor
Desarrollo de la clase (Parte VI) ▪ La profesora pide a los alumnos que den ejemplos en los que se cumpla que el denominador común es el mayor de las fracciones elegidas. ▪ Los alumnos dan ejemplos acertados excepto uno que sin embargo, no responde si es apropiado o no su ejemplo. (No hay trabajo a partir del error).	Profesora: Claudia, da un ejemplo. La profesora propone que los diferentes alumnos mencionen dos pares de fracciones. Los alumnos mencionan diferentes pares de fracciones. En todos los casos un denominador es múltiplo del otro, excepto en el octavo ejemplo, de Diego, que propone: $\frac{9}{11}\ y\ \frac{7}{9}$. La profesora pregunta si será apropiado el ejemplo; sin embargo Diego no responde. Una vez escritos los pares de fracciones, los alumnos salen a la pizarra para hallar sus equivalentes. Una vez resueltos todos los casos, la profesora propone otros casos, en los que los números que corresponden a los denominadores son

---

[387] La profesora supuso que era un cuarto en lugar de un sexto como estaba planteado y actuó bajo ese criterio.

▪ La profesora cambia la característica de los denominadores (primos entre sí) y cuestiona sobre los mismos a partir de las soluciones dadas. ▪ Se genera un diálogo entre la docente y cinco alumnos: César, Danitza, Luis, Renato y Ana María. ▪ Los alumnos responden y la profesora consolida. Códigos: – *Aplicación del método (análisis de los denominadores) a casos específicos de fracciones (directamente).* – *Planteamiento de otro caso (primos entre sí) a través de pares de fracciones. Resolución por parte de los alumnos para hallar las fracciones equivalentes (aplicación del método).* – *Pregunta de la docente para guiar la participación del alumno en el reconocimiento de las cuestiones buscadas (relación entre los denominadores y el denominador común para el caso de primos entre sí).* – *Participación selectiva de los estudiantes al analizar los denominadores y relacionarlos con el denominador común.*	primos entre sí ($\frac{2}{3} y \frac{3}{5}; \frac{1}{2} y \frac{4}{7}; \frac{2}{5} y \frac{6}{12}; \frac{4}{8} y \frac{3}{5}$). La profesora propone resolver estos casos; al final de los mismos, pregunta qué particularidades observan. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué particularidades observan? César: Que se multiplican Profesora: ¿En todos los casos se multiplica? César: Sí Danitza: No Profesora: ¿Tienen algún divisor común? Luis: 28 Profesora: Eso es múltiplo Renato: No tienen ningún divisor en común Profesora: ¿Cuándo multiplicamos? Ana María: Cuando no tienen divisores comunes Profesora: Es decir, cuando sean primos entre sí Ana María: ¡Esa palabrita! Profesora: Esa palabrita: PESI: que no va a tener divisores en común, excepto la unidad Ana María: Está en el libro
Desarrollo de la clase (Parte VII) ▪ La profesora propone actividades del libro para que los alumnos comparen fracciones heterogéneas aplicando la equivalencia de fracciones.	La profesora propone diferentes ejercicios del libro para que los alumnos, a partir de hallar las fracciones equivalentes homogéneas, comparen las mismas. Los alumnos van saliendo a la pizarra a resolver los casos propuestos, a medida que ello ocurre, la profesora recalca la forma de resolver: transformando a homogéneas y comparando los numeradores:

▪ Los alumnos resuelven y exponen. No hay comentarios al respecto. Códigos: – *Aplicación directa a casos nuevos propuestos en el libro de texto (comparación directa de fracciones).* – *Tendencia a aplicar directamente el procedimiento antes de analizar las fracciones.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación de sus soluciones.* – *Participación total de los estudiantes al ser una actividad planteada para toda la clase.*	Renato: Un sexto es menor que cinco tercios porque esto es tres dieciochoavos y treinta dieciochoavos. Como treinta es mayor, cinco tercios es mayor. Sara: Veinticinco quintos es mayor que siete décimos porque se convierte en cincuenta décimos y siete décimos. María Pía: Once octavos es menor que siete cuartos porque once octavos es menor que catorce octavos.
Final de la clase – La actividad se detiene por el sonido del timbre que indica que el tiempo ha finalizado. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	Fin de la clase.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Síntesis temática	**Actividad propuesta/ Fragmento de la sesión observada**
a) La actividad de inicio. propuesta por la profesora a los alumnos, busca que estos representen diferentes fracciones. Es una actividad de aplicación de un conocimiento aprendido.	a) La profesora pide representar en una hoja las siguientes fracciones: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8}$; los alumnos cogen una hoja blanca A4 y dividen según indica la profesora. Al querer representar un sexto, no saben cómo hacerlo (los alumnos doblan en la misma dirección; algunos cogen otra hoja), por lo que la profesora les pide que dividan en un octavo. Se genera el siguiente diálogo:

La forma como se enfrentan a la misma permite que surjan inconvenientes en la situación. Sin embargo, la docente reorienta para que estos inconvenientes no generen distracción. La actividad sirve para comparar fracciones de manera gráfica y luego hacerlo de manera simbólica a través de diferentes procedimientos que el alumno va recordando. La profesora busca reflexionar sobre el conocimiento aplicado a fin de encontrar otros métodos. La docente recurre a la contextualización para una mejor comprensión Código: – *Actividad de aplicación (para explorar un conocimiento aprendido).* – *Actividad de reflexión (del resultado obtenido).*	Profesora: ¿Qué dificultad han encontrado? Luis: No es fácil representar un sexto Profesora: Es más fácil dividir en cantidades pares que impares. La profesora les pide que pinten la fracción indicada en cada caso; luego que lo expongan en la pizarra. Los alumnos salen a la pizarra y exponen el trabajo realizado La profesora varía la situación: Profesora: ¿En cuántas partes se ha dividido la unidad?… Si tengo cinco hijos... ¿Cuánto a cada uno? Luis: Un quinto Profesora: ¿Si tengo dos? Profesora: ¿$\frac{1}{6}$ *y* $\frac{2}{36}$? Danitza: Treinta y seis Profesora: ¿$\frac{1}{6}$ *y* $\frac{2}{20}$? Renato: Veinte Profesora: ¿Por qué? (Silencio) Profesora: Porque veinte es múltiplo de cuatro[388] Renato: Porque todos son múltiplos de un número

---

[388] La profesora supuso que era un cuarto en lugar de un sexto como estaba planteado y actuó bajo ese criterio.

	Profesora: Caso especial: si el número es múltiplo del otro, el común denominador va a ser… Salma: El mayo
a) La siguiente actividad intenta que los alumnos apliquen el conocimiento trabajado. Código: – *Actividad de aplicación.* – *Actividad de reflexión.*	Profesora: Vamos a decir algunos casos para poder hallar… dos tercios y cuatro doceavos (a medida que menciona las fracciones, las escribe en la pizarra) … La profesora propone que los diferentes alumnos mencionen dos pares de fracciones. Los alumnos mencionan diferentes pares de fracciones…
a) La siguiente actividad busca que los alumnos apliquen el procedimiento conocido y reflexionen sobre el denominador obtenido de manera que se concrete otra forma de hallar fracciones equivalentes. Códigos: – *Actividad de aplicación (procedimiento).* – *Actividad de reflexión (del resultado obtenido).*	b) … la profesora propone otros casos, en los que los números que corresponden a los denominadores son primos entre sí ($\frac{2}{3}\ y\ \frac{3}{5};\frac{1}{2}\ y\ \frac{4}{7};\frac{2}{5}\ y\ \frac{6}{12};\frac{4}{8}\ y\ \frac{3}{5}$)…
a) La última actividad propone que los alumnos comparen fracciones heterogéneas a partir de las equivalentes homogéneas. Es una actividad aplicativa, en la que el alumno elegirá el método que mejor se ajuste a las fracciones. Códigos: – *Actividad de aplicación (procedimiento).*	a) La profesora propone diferentes ejercicios del libro para que los alumnos, a partir de hallar las fracciones equivalentes homogéneas, comparen las mismas…

Sesión 2/Caso 5

S/f entre el 21 de agosto y 3 de setiembre

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión – Inicio de clase ▪ La profesora inicia la clase con una actividad de reconocimiento de fracciones y relaciones observadas. ▪ A través de ella se genera un diálogo entre la profesora y los alumnos, interviniendo individualmente tres alumnas: Sara, Danitza y Salma. ▪ La profesora lanza una pregunta y a partir de las respuestas lanza la siguiente. ▪ Los alumnos que intervienen muestran conocimiento del tema. No obstante, algunas preguntas no se responden precisamente sino a través de otra información. ▪ A través del diálogo, la profesora llega al propósito del mismo: identificar fracciones equivalentes. ▪ Los alumnos en cuestión mencionan fracciones equivalentes a otra. Códigos: – *Presentación directa del objeto matemático para ser analizado (conjunto de fracciones equivalentes, excepto una).* – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar seguidamente al objetivo deseado.*	La profesora escribe seis fracciones en la pizarra, a saber: $\frac{3}{7},\frac{6}{14},\frac{12}{28},\frac{21}{49},\frac{15}{35},\frac{19}{44}$, luego pregunta qué ven. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué ven? Alumnos: Fracciones Profesora: ¿Qué es una fracción? Sara: Una fracción divide en partes iguales Profesora: La fracción divide en partes iguales a la unidad. ¿Toma nombre esa unidad? Danitza: El todo Profesora: Es importante saber lo siguiente: la fracción divide en partes iguales. ¿Qué observan? Salma: Que algunas son equivalentes Profesora: … Encuentra la fracción que no es equivalente. Sara: Son equivalentes las que son múltiplos de 7 Profesora: ¿Todas son equivalentes? Alumnos: No Profesora: Por ejemplo, si quiero saber las equivalentes a cuatro sextos, ¿cuáles serían? Los alumnos mencionan las siguientes: $\frac{8}{12},\frac{12}{18},\frac{16}{24},\frac{20}{42}$.

– *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de los conocimientos sobre el conjunto de fracciones (verbal).*	
Desarrollo de la clase (parte I) ▪ La profesora hace referencia a las estrategias para hallar fracciones equivalentes: simplificando y productos cruzados, y expone dos apoyándose en un ejemplo concreto. ▪ A medida que explica la profesora pregunta a los alumnos casos concretos (¿será equivalente a cuatro séptimos?...). ▪ Los alumnos argumentan la pertinencia de la situación analizando los elementos de la misma, pero sus respuestas no son correctas. ▪ La profesora responde y propone otra situación en la que los alumnos pueden simplificar y estos simplifican no sin antes decir qué se le puede “sacar”. Códigos: – *Exposición directa del contenido por parte de la docente (formas de hallar fracciones equivalentes; no obstante, es conocido por el alumno).* – *Dificultad de los alumnos para justificar correctamente un hecho (sus respuestas son parcialmente correctas).* – *Participación selectiva de los estudiantes al justificar una no equivalencia de fracciones y al simplificar una fracción (verbal).*	Acto seguido, la profesora expresa que “hay unas estrategias” para hallar fracciones equivalentes o saber si son equivalentes. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: Primero: el proceso de simplificación. Segundo: productos cruzados. $\frac{20}{42}$ es equivalente a $\frac{4}{6}$ porque al simplificar me da cuatro sextos. ¿Será equivalente a cuatro séptimos? Salma: No Profesora: ¿Por qué? Salma: No, porque no es reducible Profesora: Sí es reducible… ¿Quién me dice? Ana María: Porque no tiene ningún divisor Profesora: Sí tienen, pero no tiene divisor común. ¿Alguien más? Alumnos: …. Profesora: Simplifiquen la siguiente fracción: $\frac{180}{270}$ … ¿Qué le puedo sacar? Mauricio: Noventava Diego: Décima Los alumnos simplifican la fracción a partir de las propuestas de los dos alumnos.

– *Propuesta operativa para aplicar el conocimiento transmitido (aplicación del método a una fracción: caso 1).*	
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora propone otro caso concreto. Esto le permite que el alumno aplique lo aprendido (recordado). ▪ Cada alumno realiza una parte de la simplificación. Códigos: – *Propuesta operativa para aplicar el conocimiento transmitido (aplicación del método a una fracción: caso 2).* – *Participación selectiva de los estudiantes al aplicar la estrategia y salir a la pizarra (caso 2).*	La profesora propone otra fracción ($\frac{60}{72}$) para que los alumnos simplifiquen. Cada alumno dice qué se le puede sacar y sale a la pizarra a simplificar.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone una actividad que se orienta a otro aspecto del tema en cuestión: números mixtos y propone transformar fracciones a números mixtos y graficarlas. ▪ Los alumnos realizan la actividad siguiendo caminos diferentes para transformar en mixto: primero simplifican o transforman directamente. ▪ La profesora valida los pasos seguidos por los estudiantes. Códigos: – *Presentación directa de una fracción impropia para ser convertida a número mixto (nuevo caso).*	Una vez finalizada la actividad, la profesora propone convertir a mixto y graficar las siguientes fracciones: $\frac{27}{4}, \frac{30}{8}$. La conducta inmediata de los alumnos sigue uno de los tres caminos siguientes: simplificar, graficar o transformar a mixto. La profesora valora las tres formas y propone que cada alumno salga a la pizarra a explicar cómo lo ha trabajado. Tres alumnos salen a la pizarra: Luis, Salma y Diego. Luis explica que primero simplificó “para hacer más fácil el trabajo”; Salma expresa que lo transformó en mixto para “representar fácilmente los enteros” y Diego indica que graficó porque “así se representan las fracciones”. La profesora consolida manifestando que por cualquiera de los tres caminos se puede responder y son válidos.

– *Valoración de los distintos caminos que siguen los alumnos para trabajar el conocimiento matemático.* – *Participación total de los alumnos al convertir a números mixtos una fracción impropia.* – *Participación selectiva de los estudiantes al exponer sus productos (formas de transformar una fracción impropia en número mixto).* – *Exposición del alumno al grupo total de su trabajo realizado (números mixtos).* – *Consolidación de la maestra (respecto a los números mixtos).*	
Final de la clase ▪ El timbre suena y la clase termina. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase con cierre (actividad finalizada).*	La clase finaliza

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Síntesis temática	**Actividad propuesta/ Fragmentos de la sesión observada**
a) La primera actividad busca que los alumnos describan y establezcan relaciones entre fracciones. A partir de esta actividad, la docente propone buscar las equivalentes a otra fracción (aplicación)	a) La profesora escribe seis fracciones en la pizarra, a saber: $\frac{3}{7},\frac{6}{14},\frac{12}{28},\frac{21}{49},\frac{15}{35},\frac{19}{44}$, luego pregunta qué ven. … Profesora: Por ejemplo, si quiero saber las equivalentes a cuatro sextos, ¿cuáles serían?

A partir de esta, la docente busca reflexionar sobre las fracciones equivalentes. Los alumnos muestran dificultades para justificar una situación Código: – *Actividad de aplicación (de un conocimiento).* – *Actividad de aplicación (de un procedimiento).* – *Actividad de reflexión (de un producto obtenido).*	… Profesora: ... $\frac{20}{42}$ es equivalente a $\frac{4}{6}$ porque al simplificar me da cuatro sextos. ¿Será equivalente a cuatro séptimos? Salma: No Profesora: ¿Por qué? Salma: No, porque no es reducible Profesora: Sí es reducible… ¿Quién me dice? Ana María: Porque no tiene ningún divisor Profesora: Sí tienen, pero no tiene divisor común. ¿Alguien más? … Profesora: ... Simplifiquen la siguiente fracción: $\frac{180}{270}$ … ¿Qué le puedo sacar? … La profesora propone otra fracción ($\frac{60}{72}$) para que los alumnos simplifiquen. …
a) La actividad busca aplicar un procedimiento aprendido. Los alumnos aplican diferentes formas La docente valida las mismas. Código: – *Actividad de aplicación (procedimientos).*	a) … la profesora propone convertir a mixto y graficar las siguientes fracciones: $\frac{27}{4}, \frac{30}{8}$. La profesora consolida manifestando que por cualquiera de los tres caminos se puede responder y son válidos.

Sesión 3/Caso 5

Sin fecha

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión – Inicio de clase ▪ La profesora escribe en la pizarra tres fracciones equivalentes y a partir de la central explica cómo se obtienen fracciones equivalentes menores o mayores a una dada. Códigos: – *Presentación directa del objeto matemático para ser expuesto por la docente.* – *Explicación por parte de la docente del tema a tratar (forma de hallar fracciones equivalentes a una dada).* – *Actitud receptiva de los estudiantes.*	La profesora inicia la sesión retomando el tema de la clase anterior: fracciones equivalentes y simplificación de fracciones. Para ello escribe en la pizarra: $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{32}{40}$ Acto seguido les explica que si divide ocho y diez entre dos, le da como resultado cuatro quintos, que es la fracción inicial, pero que si multiplica por cuatro le da 32 y cuarenta, lo que se indica en la fracción siguiente. De esta manera: “pueden haber fracciones equivalentes menores o mayores a una dada”.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a una fracción específica, indicándoles que para ello deben multiplicar por los números naturales. ▪ Los alumnos resuelven individualmente. ▪ La profesora propone otra fracción para ser resuelta en la pizarra con la ayuda de todos. ▪ Los alumnos, individualmente van nombrando la fracción equivalente a la fracción dada de manera creciente; es decir, el primer alumno indica aquella, producto de multiplicar por dos, el siguiente por tres y así sucesivamente.	La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a cinco tercios, para lo cual les recuerda que “deben multiplicar por los números naturales”. Los alumnos resuelven en sus cuadernos la propuesta. Una vez finalizada la actividad y supervisada por la maestra, esta les propone hallar fracciones equivalentes a cinco sextos, resolviendo en la pizarra a partir de las aportaciones de los estudiantes. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: Vamos a hallar las fracciones equivalentes a cinco sextos Luis: Diez doceavos Salma: Quince dieciochoavos María Pía: Veinte sobre veinticuatro

▪ La profesora cuestiona si dos fracciones equivalentes a una tercera serán equivalentes entre sí. ▪ Los alumnos argumentan a partir del procedimiento seguido. ▪ La maestra aplica el segundo procedimiento (multiplicación en aspa) al par inicial para que los alumnos comprueben que da los mismo (por lo tanto son equivalentes). ▪ Los alumnos aplican al par propuesto verificando que "da lo mismo". ▪ La maestra propone otra fracción para que los alumnos encuentren las equivalentes. Códigos: – *Propuesta de un caso concreto para hallar fracciones equivalentes a una dada (caso 1).* – *Diálogo basado en la pregunta directa con referencia directa al procedimiento (u otras cuestiones clave).* – *Propuesta de pregunta 'conflictiva' que genera conflicto en el alumno.* – *Participación selectiva de los estudiantes para hallar fracciones equivalentes y reflexión en torno a ellas (caso 1).* – *Participación total al ser un caso propuesto para toda la clase.*	Danitza: Veinticinco sobre treinta Diego: Treinta, treinta y seisavos Profesora: Observen que todas estas fracciones son equivalentes de esta primera, ¿ $\frac{10}{12}$ será equivalente a $\frac{15}{18}$? (Silencio) Profesora: ¿Qué opinan? Luz: Es confuso Profesora: ¿Por qué? Luz: Porque diez por ningún número da quince Profesora: Observen: $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ … Si multiplico en aspa… ¿qué sucede? Salma: Te da lo mismo Profesora: Y entonces digo que son equivalentes… ¿Qué pasa sin multiplico en aspa estas fracciones? (refiriéndose al par anterior) Ana María: Da lo mismo. Profesora: Entonces sí son equivalentes. Vamos a hallar las fracciones equivalentes a tres séptimos.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ A partir de la propuesta, los alumnos hayan las equivalentes.	La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a otra fracción (tres séptimos). Los alumnos resuelven multiplicando tres y siete por cada uno de los números naturales, a partir del dos. A partir de este trabajo la profesora pregunta si $\frac{9}{21}$ es equivalente a $\frac{21}{49}$. Los alumnos manifiestan que sí "porque si multiplican en aspa da lo mismo", expresado por Alessandra. La

▪ La maestra plantea el mismo cuestionamiento anterior a partir de dos equivalentes obtenidas. ▪ Los alumnos multiplican en aspa y verifican la equivalencia. ▪ Uno de los alumnos[389] aplica otro procedimiento para verificar si son equivalentes. ▪ La profesora consolida el procedimiento del alumno. Códigos: – *Propuesta de otro caso para hallar sus fracciones equivalentes (caso 2).* – *Preguntas directas para orientar inmediatamente a la cuestión requerida* – *Participación selectiva de los estudiantes para hallar fracciones equivalentes a una dada y reflexionar sobre ellas (caso 2).* – *Propuesta directa del conocimiento matemático.* – *Participación selectiva de los alumnos y propuesta de una forma distinta de comprobación de fracciones equivalentes (dividiendo N entre D).* – *Participación total al ser un caso propuesto para toda la clase.*	profesora le dice a Alessandra que salga a la pizarra a resolver, pero la alumna dice que no; la profesora propone a Diego para que resuelva y Diego realiza en la pizarra las multiplicaciones respectivas: 49x9 y 21x21. Por su parte, Luis manifiesta que sí porque al dividir 21 entre 9 y 49 entre 21 el resultado es 2,3. La profesora felicita al alumno y dirigiéndose a la clase, les expresa que también se puede hallar el valor de una fracción dividiendo "ya que la fracción indica división" y añade: "si el resultado es el mismo, las fracciones son equivalentes".
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone resolver sumas y restas de fracciones homogéneas que aparecen en el libro de texto Códigos:	La profesora plantea resolver las actividades del libro, las mismas que proponen sumas y restas de fracciones homogéneas. Diego intenta simplificar las fracciones; no obstante, la profesora les pregunta si conviene simplificar como lo está haciendo el compañero. Se genera el siguiente diálogo:

---

[389] Luis es uno de los alumnos más hábiles según la profesora.

– *Propuesta de casos concretos de sumas y restas de fracciones (uso del libro de texto)* – *Aplicación de lo aprendido (simplificar) a casos nuevos (suma y resta de fracciones homogéneas)* – *Validación de los procedimientos usados (la maestra no se orienta a usar un solo procedimiento por la simplificación del trabajo sino por la comprensión del alumno).*	Profesora: ¿Será conveniente simplificar como lo hace Diego? Luis: No porque se transforman en heterogéneas María Pía: Pero sí se pueden restar Luz: Si esto no se puede simplificar, esto tampoco... (refiriéndose a la primera y segunda fracción, respectivamente) Profesora: Sí se puede. Si les resulta fácil operar con heterogéneas, simplifican. Los alumnos siguen resolviendo las actividades del libro; la profesora supervisa la actividad y resuelve las dudas de los alumnos. Las actividades involucran operaciones de suma y resta, comparación y fracciones equivalentes.
Final de la clase ▪ Los alumnos resuelven las actividades del libro de manera individual hasta que el timbre suena y la clase finaliza. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cierre (actividad suspendida).*	La clase finaliza

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La actividad propuesta por la docente para los alumnos busca que apliquen un procedimiento a un caso concreto. La actividad previa es ejecutada por la docente en la que los alumnos atienden básicamente. A partir de la actividad propuesta, la docente cuestiona (reflexiona) sobre los	a) La profesora inicia la sesión retomando el tema de la clase anterior: fracciones equivalentes y simplificación de fracciones. Para ello escribe en la pizarra: $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{32}{40}$

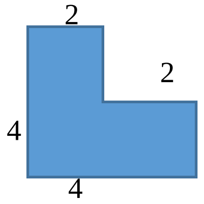
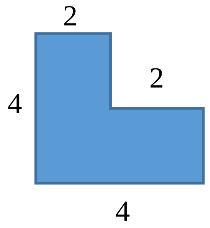
resultados obtenidos y propone otras formas de hallar la equivalencia. A partir de ello, propone otro caso concreto en el que debe hallar fracciones equivalentes. Código: – *Actividad de atención (recepción).* – *Actividades de aplicación.* – *Actividad de reflexión (de una cuestión obtenida).*	Acto seguido les explica que si divide ocho y diez entre dos, le da como resultado cuatro quintos, que es la fracción inicial, pero que si multiplica por cuatro le da 32 y cuarenta, lo que se indica en la fracción siguiente… La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a cinco tercios, para lo cual les recuerda que “deben multiplicar por los números naturales”. Profesora: Observen que todas estas fracciones son equivalentes de esta primera, ¿ $\frac{10}{12}$ será equivalente a $\frac{15}{18}$?... Profesora: ¿Qué opinan? Luz: Es confuso Profesora: ¿Por qué? Luz: Porque diez por ningún número da quince Profesora: Observen: $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ … Si multiplico en aspa… ¿qué sucede? …
a) La actividad propuesta busca que los alumnos apliquen el procedimiento trabajado y afiancen el mismo a partir de propuestas similares. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento… y afianzamiento).*	b) Profesora: Entonces sí son equivalentes. Vamos a hallar las fracciones equivalentes a tres séptimos. …
a) La última actividad busca resolver sumas y restas de fracciones, por lo que es una actividad aplicativa.	b) La profesora propone resolver las actividades del libro, las mismas que proponen sumas y restas de fracciones homogéneas… Las actividades involucran operaciones de suma y resta, comparación y fracciones equivalentes.

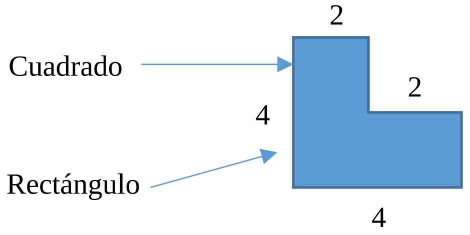
Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento).* .	

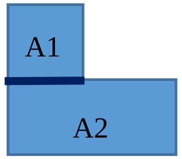
Sesión 4/Caso 5

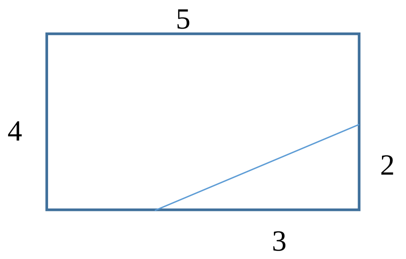
Martes, 9 de setiembre de 2008 (sin hora)

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora inicia la sesión recordando las fórmulas para hallar el área de las figuras geométricas para lo cual pide a los alumnos que indiquen cómo se halla el área de distintas figuras. ▪ Los alumnos mencionan las del cuadrado, rectángulo y triángulo pero no recuerdan la del rombo. ▪ La profesora les dice que esto es importante para hallar el área de figuras compuestas y dibuja una. Códigos: – *Exploración directa de conocimientos previos (áreas de figuras simples).* – *Propuesta de problemas matemáticos sobre áreas (actividades de aplicación a situaciones más complejas).* – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar inmediatamente al objetivo propuesto (hallar áreas de figuras compuestas).*	Profesora: Chicos, ustedes saben cómo se halla el área de las figuras geométricas… Alumnos: Sí Luz: Yo no me acuerdo de todas… Profesora: ¿Cómo se halla el área del cuadrado? Luis: Lado al cuadrado Profesora: ¿Y del rectángulo? Salma: Base por altura Profesora: ¿Cómo se halla el área del triángulo? Diego: Base por altura sobre dos Profesora: ¿El área del rombo? Alumnos: … Profesora: También las hemos visto, pero ahora no es necesario recordarla. Acto seguido, la maestra les dice que estas fórmulas les servirán para hallar el área de otras figuras: “figuras compuestas” y les dibuja una figura en la pizarra:

– *Participación selectiva de los estudiantes (en la exposición del procedimiento seguido para hallar el área de la figura compuesta).* – *Dificultad para recordar inmediatamente el conocimiento matemático.*	
Inicio de clase ▪ Al ver la figura uno de los alumnos expresa de qué polígono se trata. ▪ La profesora hace referencia a que esas figuras ya han sido enseñadas. ▪ Los alumnos se refieren al perímetro de la misma e indican cómo hallarlo. ▪ La profesora les propone hallar el perímetro de la figura. ▪ Los alumnos suman las medidas del contorno y exponen sus resultados de manera voluntaria. Códigos: – *Planteamiento directo del camino de solución al problema planteado (a partir del área de figuras simples).* – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar el proceso hacia el objetivo propuesto (reconocimiento de formas simples para hallar su área).* – *Confusión de los alumnos de los conocimientos involucrados (superficie y área).* – *Dificultad para resolver inmediatamente el problema planteado.*	A partir de la imagen y de las palabras de la profesora se genera el siguiente diálogo: Profesora: Era necesario recordar las fórmulas de las áreas de figuras simples… Ayer les dije por qué: Vamos a hallar áreas de figuras compuestas, por ejemplo la siguiente:  Luis: Es un pentágono… hexágono Profesora: ¿Yo les he enseñado? (Silencio) Profesora: ¿Cómo? (Silencio) Mauricio: Sumamos sus medidas Profesora: ¿Qué hallamos al sumar? Salma: El perímetro María Pía: Sale seis metros cuadrados

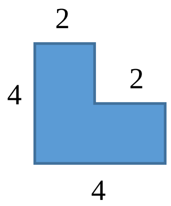
– *Participación total de los alumnos al ser una actividad propuesta para ser resuelta individualmente (caso 1).* – *Participación selectiva de los alumnos (al exponer el proceso o parte de él).*	Sara: Hay que sumar cuatro más cuatro más dos más dos Alexandra: ¡Hagámoslo! Los alumnos suman las medidas del contorno de la figura y expresan a la maestra el resultado. Algunos alumnos solo suman las medidas expuestas. La maestra pregunta cómo lo han hecho y los alumnos exponen. Solo exponen los que hicieron correctamente la suma.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora se centra en las áreas y recuerda que los alumnos ya conocen el área del cuadrado y del rectángulo. ▪ Una de las alumnas relaciona ambas figuras con la imagen de la pizarra. ▪ Algunos alumnos reconocen que en la figura se puede hallar el área del rectángulo. ▪ La profesora hace referencia a que se forman dos áreas: A1 y A2 y pregunta cuál sería cada una. ▪ Dos alumnos: Luis y María Pía, indican la medida de cada una. ▪ La profesora da por finalizada la actividad. Códigos: – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar el proceso hacia el objetivo propuesto (reconocimiento de formas simples).* – *Participación selectiva de los estudiantes (al participar en la resolución oral de problema con la guía de la docente).* – *Reflexión de los estudiantes a partir de las preguntas de la docente.* – *Resolución parcial de la actividad.*	La profesora retoma el diálogo: Profesora: ¿Ustedes ya conocen el área del cuadrado? Alumnos: ¡Sí! Profesora: ¿Y del rectángulo? Alumnos: ¡Sí! María Pía: Si lo combino: un rectángulo y un cuadrado… Esto sería… Puede ser esta figura Profesora: ¿Por qué puede ser así? Sara: Puede completar Profesora: ¿Qué figura es? Sara: Un cuadrado y un rectángulo  La alumna señala las partes de la figura que se corresponde con un cuadrado y un rectángulo. Profesora: Sí… ¿Puedo hallar el área del rectángulo?

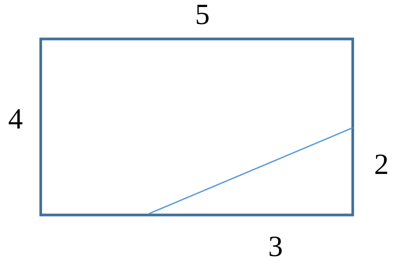
	María Pía: No Luis: Sí Profesora: Entonces esto sería A1 y esto A2… ¿Cuánto sería A1?  Luis: Dos por dos, cuatro metros cuadrados Profesora: Y A2 sería… María Pía: Ocho metros cuadrados La profesora da por finalizada la actividad…
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora propone otras figuras compuestas para que los alumnos hallen sus áreas, ante de ello, cuestiona sobre qué figuras simples reconocen en cada una de ellas. ▪ Los alumnos nombran las figuras y proceden a hallar sus áreas. Códigos: – *Propuesta de actividades de aplicación similares a la actividad inicial.* – *Orientación directa hacia la forma de resolver el problema.* – *Resolución de los casos por los alumnos.*	… y propone otra figuras compuestas. A partir de ellas, el primer paso es reconocer qué figuras simples componen la figura compuesta; acto seguido, la maestra pide que hallen el área de dichas figuras. Al final recalca que el área de la figura compuesta es la suma de las figuras simples.

Desarrollo de la clase (Parte IV) - La profesora propone una figura simple seccionada en alguna. - Sin embargo, el timbre suena y la actividad queda sin resolver; sin embargo, un alumno quiere mostrar su solución. Código: – *Propuesta de actividades de aplicación con cierta variante.* – *Reconocimiento de figuras simples en otras más complejas.*	Luego propone imágenes en las que no se les pide hallar el área de toda la figura sino de parte de ella. La siguiente es una de las figuras compuestas propuesta y en la que los alumnos reconocieron un triángulo y un rectángulo  Los alumnos preguntan a la profesora cómo hacer. No obstante, Luis dice que cree saber cómo y muestra a la maestra su trabajo.
Final de la clase - La clase finaliza Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (Actividad suspendida).*	La maestra le dice que la próxima clase ven el caso. No hubo tiempo para analizar más la figura y la clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

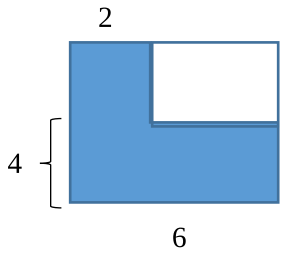
Síntesis temática	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La primera actividad busca indagar el conocimiento que los alumnos tienen sobre un tema específico. Código: – *Actividades de repaso (con fines exploratorios).*	a) Profesora: Chicos, ustedes saben cómo se halla el área de las figuras geométricas…. Alumnos: Sí Luz: Yo no me acuerdo de todas…. Profesora: ¿Cómo se halla el área del cuadrado?

	Luis: Lado al cuadrado Profesora: ¿Y del rectángulo? Salma: Base por altura Profesora: ¿Cómo se halla el área del triángulo? Diego: Base por altura sobre dos Profesora: ¿El área del rombo? Alumnos: … Profesora: También las hemos visto, pero ahora no es necesario recordarla.
a) La segunda actividad busca que los alumnos apliquen el conocimiento aprendido en situaciones nuevas. La maestra guía el proceso de resolución. Código: – *Actividades de aplicación (de un procedimiento).*	a) … Vamos a hallar áreas de figuras compuestas, por ejemplo la siguiente:  Profesora: ¿Cómo? (Silencio) Mauricio: Sumamos sus medidas Profesora: ¿Qué hallamos al sumar? Salma: El perímetro María Pía: Sale seis metros cuadrados Sara: Hay que sumar cuatro más cuatro más dos más dos Alexandra: ¡Hagámoslo!

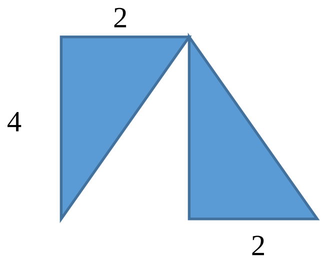
a) Las siguientes actividades son de aplicación a casos concretos. La última actividad que es una propuesta diferente, no logra resolverse en clase. Código: – *Actividades de aplicación (de un procedimiento).*	a) Luego propone imágenes en las que no se les pide hallar el área de toda la figura sino de parte de ella. La siguiente es una de las figuras compuestas propuesta y en la que los alumnos reconocieron un triángulo y un rectángulo: 

Sesión 5/Caso 5

SF

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión – Inicio de clase ▪ La profesora propone una actividad en la que los alumnos deben hallar la parte sombreada de la figura. ▪ Los alumnos resuelven y la maestra observa el trabajo de cada uno. Código: – *Planteamiento directo de casos concretos (siguiendo la sesión anterior) de áreas de figuras planas complejas (figuras cerradas).* – *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (primer caso).*	La maestra les propone resolver problemas de áreas de figuras compuestas (continuando la clase anterior). Los alumnos resuelven los problemas propuestos. La maestra se acerca a la mesa de Ivana y observa que está sumando tres más cuatro y multiplicando el resultado por seis a partir de la imagen siguiente en la que se pide hallar el área de la parte sombreada: 

– *Aplicación del procedimiento seguido (reconocer figuras simples y hallar sus áreas).*	
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora pregunta a Ivana lo que hace. ▪ Ivana explica que halla el área de la figura grande en la que reconoce un rectángulo y luego el área del rectángulo blanco. ▪ La profesora pregunta a los alumnos qué piensan de la respuesta de su compañera. ▪ César expresa que él primero halla lo que falta. ▪ La profesora pregunta cómo se obtiene cada parte. ▪ Los alumnos van indicando diferentes resultados obtenidos que no necesariamente coinciden con la pregunta de la docente. ▪ La profesora resume que para hallar la parte sombreada a resta 42 (área total), 12 (área no sombreada) y propone otro *problema*. Códigos: – *Diálogo basado en preguntas directas para orientar inmediatamente a la cuestión requerida (hallar el área de la figura compleja).* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente: primer caso).* – *Exposición/explicación del proceso seguido.*	La maestra le pregunta a Ivana qué está haciendo. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué haces? Ivana: Hallo el área de la figura Profesora: ¿Qué figura es? Ivana: Un cuadrado… Un rectángulo Profesora: ¿Cuánto tiene de base? Ivana: Seis Profesora: ¿Y de alto? Ivana: Siete Profesora: ¿Será un cuadrado? María Pía: No, un rectángulo Profesora: ¿Cómo se halla el área del rectángulo? Ivana: El área del rectángulo es seis por siete. Cuarenta y dos centímetros cuadrados. (Silencio) Ivana: Y luego hallo el área del rectángulo que queda Profesora: (dirigiéndose a la clase). ¿Lo ha dicho bien, Ivana? ¿Qué piensan ustedes? (Silencio) Profesora: Primero vas a hallar…

– *Exposición al grupo total del proceso seguido por uno de los alumnos para ser comentado.*	César: Lo que falta Profesora: Está muy bien la estrategia que han empleado ustedes… La parte que no está sombreada forma un rectángulo, entonces vamos a hallar el área de la parte no sombreada y eso nos da… César: Treinta Profesora: Treinta es la parte sombreada… ¿Cómo obtengo la parte sombreada? Luis: Doce Profesora: Resto a cuarenta y dos, doce y obtengo treinta centímetros cuadrados. Resolvamos el siguiente problema.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora propone otra imagen y pide que hallen su área. A diferencia de la anterior la imagen no está dentro de otra. ▪ La estrategia de Antonella es completar la figura encuadrándola dentro de otra. ▪ En el diálogo entre la profesora y Antonella se observa que la alumna no consolida su estrategia. ▪ Alejandra que ella ha hallado el área de un triángulo y después la del otro reconociendo dos triángulos iguales. ▪ La profesora expresa que se pueden usar caminos diferentes para resolver y llegar a la misma solución. Códigos: – *Planteamiento directo de un caso concreto con características diferentes (figuras abiertas).*	La profesora dibuja una imagen en la pizarra y pide que hallen el área de la figura:  La profesora observa el trabajo de los alumnos deteniéndose en Antonella pues observa que la alumna ha formado un triángulo a partir de la misma.; luego se acerca a la pizarra y pregunta a Antonella sobre su solución. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: Antonella, ¿qué puedes hacer, qué has formado? Antonella: Un triángulo Profesora: ¿Y qué puedes hacer?

– *Diálogo basado en preguntas directas para orientar al objetivo buscado (hallar el área solicitada).* – *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (segundo caso).* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente: segundo caso).* – *Uso de estrategias distintas seguidas por los alumnos: completar y trabajar con las figuras de modelo.* – *Exposición/explicación del proceso seguido.* – *Confusión parcial de los alumnos al resolver este tipo de situaciones.*	Antonella:	Hallar su área
	Profesora:	¿Cómo?
	(Silencio)	
	Profesora:	¿Cuál es el área del triángulo?
	Antonella:	Base por altura…. Sobre dos
	Profesora:	¿Cuál es la base de ese triángulo?
	Antonella:	Cuatro… ¡No!... Sí, cuatro
	Profesora:	¿Y la altura?
	Antonella:	Cuatro
	Profesora:	¿Cuál es el área?
	Antonella:	Dieciséis
	Profesora:	El área del triángulo es cuatro por cuatro…
	Alumnos:	Sobre dos
	Profesora:	Y eso da…
	Antonella:	Ocho
	Profesora:	¿Y el otro triángulo?
	Antonella:	También es ocho
	Profesora:	¿Y ahora qué haces?
	Antonella:	Tengo que hallar el área de la parte sombreada
	Profesora:	¿Cómo?

	Antonella: Se puede partir por la mitad Profesora: ¿Y qué formas? Antonella: Un triángulo Profesora: ¿Cuánto es su área? Antonella: Ocho Profesora: ¿Por qué? Antonella: Porque es igual al otro Profesora: ¿Y el otro triángulo? Antonella: Ocho Profesora: ¿Cuánto mide la parte sombreada? Antonella: Ocho por ocho Profesora: ¿Por qué? (Silencio) Profesora: ¿Cuánto mide cada triángulo? (Silencio) Profesora: ¿Cuánto mide la parte sombreada? Antonella: Dieciséis Alejandra manifiesta que ella ha hallado primero un triángulo y luego del otro “porque hay dos triángulos iguales”; añade: “Dos triángulos por la mitad. En el primero en la parte de abajo y en el segundo en la parte de arriba… y puedes pasarlo al otro (lado)”. A partir de la propuesta de Alejandra, la profesora explica que “se pueden usar diferentes caminos y estrategias y ustedes pueden llegar a la misma solución”.

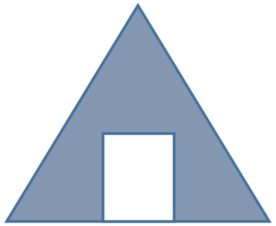
Desarrollo de la clase (Parte II)

- La profesora propone otra imagen para que hallen su área. La imagen está encuadrada dentro de una cuadrícula y advierte que cada cuadrado mide un centímetro cuadrado.
- Los alumnos resuelven identificando un rectángulo y dos triángulos. Siguen la estrategia previa y la aplican en esta situación.
- Los alumnos dan por resuelto el problema: a) al hallar las áreas parciales o b) al sumar las áreas parciales.

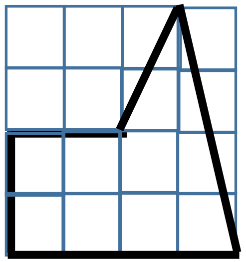
Códigos:

- *Planteamiento directo de casos concretos con ciertas características diferentes (figuras expuestas, enmarcadas dentro de una cuadrícula).*
- *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (tercer y cuarto casos).*
- *Dificultad para responder correctamente la cuestión planteada (algunos no responde, otros hallan las áreas parciales).*

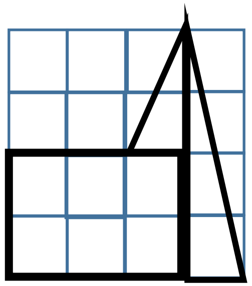
Los siguientes dos casos, tienen la misma estructura del anterior. Una de las figuras es la siguiente, indicando que la base del triángulo es 10 y su altura 6, además que el rectángulo mide 3 cm de base y 2 de altura. La maestra pide hallar la parte sombreada:

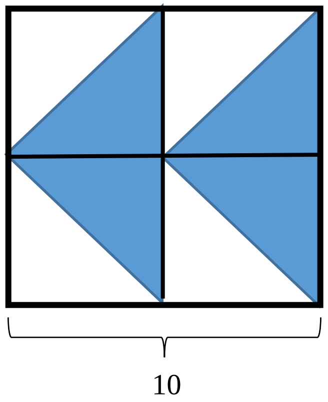


Acto seguido, la profesora propone la siguiente imagen para hallar el área de la figura e indica que cada cuadrado mide un centímetro cuadrado:

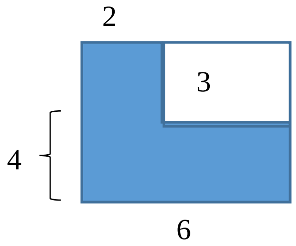
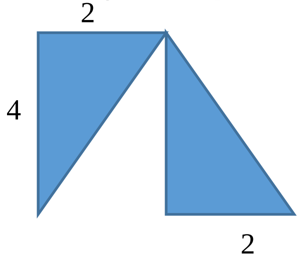


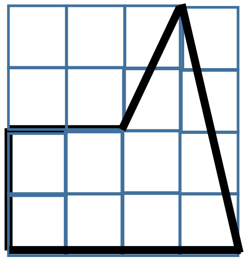
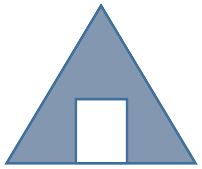
Los alumnos intentan resolver, para lo cual identifican un rectángulo y dos triángulos:

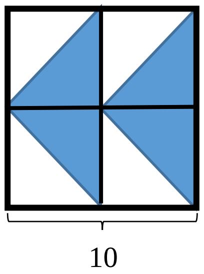


	Los alumnos hayan las áreas de las figuras encontradas y en algunos casos suman las áreas y en otros no, dando por concluido el problema. Al preguntarles si ya habían terminado y porqué indicaban que porque ya habían hallado el área de las figuras encontradas. La profesora pregunta si han terminado y propone otro problema.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone una nueva imagen y una nueva estrategia para hallar el área de la parte sombreada: trasladar imágenes. ▪ Los alumnos resuelven aplicando la estrategia de la profesora. ▪ Diego concluye que con esta estrategia hace una operación y con la otra dos (aunque ambas fáciles). Códigos: – *Planteamiento directo de otro caso concreto similar.* – *Exposición directa de la docente de una estrategia nueva para resolver antes de operar.* – *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (quinto caso).* – *Participación selectiva de los estudiantes.*	La profesora les expresa que "hay figuras que tengo que resolver haciendo traslados" e inmediatamente les propone la siguiente figura, indicando que la figura está dividida en cuatro partes iguales y cada lado del cuadrado mide 10 cm:  La profesora les sugiere trasladar los triángulos antes de resolver, sabiendo que todos son iguales. Los alumnos trasladan y forman un rectángulo. La maestra les dice que "en lugar de dos figuras ahora tienen una más fácil". Diego expresa que el área es cincuenta centímetros cuadrados y añade: "tengo que hacer una operación y en la otra dos, aunque son fáciles". La profesora asiente y propone otros casos que los alumnos van resolviendo a partir de trasladar las figuras hasta que la clase finaliza.
Final de la clase ▪ La clase finaliza por cumplimiento del tiempo. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cierre (actividad suspendida).*	La clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Síntesis temática	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La primera actividad propuesta por la docente propone que los alumnos hallen las áreas de figuras compuestas hallando las áreas de las figuras simples identificadas. La profesora guía el proceso de solución. Código: – *Actividades de aplicación (de un procedimiento).*	a) La maestra les propone resolver problemas de áreas de figuras compuestas…  Profesora: ¿Qué haces? Ivana: Hallo el área de la figura Profesora: ¿Qué figura es? Ivana: Un cuadrado… Un rectángulo
a) La segunda actividad propuesta también busca que los alumnos hallen áreas de figuras compuestas. La diferencia en este caso, es que la figura no está enmarcada dentro de otra y se aprecia fácilmente las figuras que la compone. La docente observa el trabajo de los alumnos y cuestiona a una de ellos. La alumna muestra cierta inconsistencia en su explicación; sin embargo, llega a la solución. Otra alumna muestra otra forma de resolver	a) La profesora dibuja una imagen en la pizarra y pide que hallen el área de la figura:  Profesora: Antonella, ¿qué puedes hacer, qué has formado? Antonella: Un triángulo

La docente valida ambos justificando que “se pueden usar diferentes caminos y estrategias y ustedes pueden llegar a la misma solución”. Código: – *Actividad de aplicación (en un caso diferente).*	Profesora: ¿Y qué puedes hacer? Antonella: Hallar su área Profesora: ¿Cómo? (Silencio) Profesora: ¿Cuál es el área del triángulo? Alejandra manifiesta que ella ha hallado primero un triángulo y luego del otro “porque hay dos triángulos iguales”; añade: “Dos triángulos por la mitad. En el primero en la parte de abajo y en el segundo en la parte de arriba… y puedes pasarlo al otro (lado)”. A partir de la propuesta de Alejandra, la profesora explica que “se pueden usar diferentes caminos y estrategias y ustedes pueden llegar a la misma solución”.
a) La siguiente actividad busca que los alumnos hallen el área de figuras compuestas pero a diferencia de las anteriores esta figura está dentro de una cuadrícula. No obstante, es una actividad aplicativa. Código: – *Actividad de aplicación (del proceso) con cierta variante*	a) Acto seguido, la profesora propone la siguiente imagen para hallar el área de la figura e indica que cada cuadrado mide un centímetro cuadrado: 
a) La profesora nombra como problemas de áreas de figuras compuestas a estas actividades. Código: – *Actividades de aplicación (del proceso) con cierta variante.*	a) Una de las figuras es la siguiente, indicando que la base del triángulo es 10 y su altura 6, además que el rectángulo mide 3 cm de base y 2 de altura. La maestra pide hallar la parte sombreada: 

a) La siguiente actividad es similar a las anteriores, puesto que el alumno ha de aplicar el conocimiento para resolverla. El conocimiento lo expone directamente la docente. Código: – *Actividades de aplicación (del proceso) con cierta variante.*	a) La profesora les expresa que "hay figuras que tengo que resolver haciendo traslados" e inmediatamente les propone la siguiente figura, indicando que la figura está dividida en cuatro partes iguales y cada lado del cuadrado mide 10 cm: 

Sesión 6/Caso 5

Martes 28 de octubre de 2008 (Sin hora)

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión - La profesora les plantea una ecuación en la pizarra y pregunta a sus alumnos qué observan. - Los alumnos (en general) expresan que es una ecuación. - La profesora cuestiona sobre porqué es una ecuación. - Los alumnos expresan que una ecuación hay letras/ hay incógnita. Código: – *Presentación directa del objeto matemático (una ecuación).*	La sesión de hoy es sobre ecuaciones, la profesora les propone una ecuación a partir de la cual reconocen sus miembros: $x+68=145$ La profesora les pregunta qué es lo que observan, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué observan? Alumnos: Ecuación Profesora: ¿Por qué será ecuación? María Pía: Porque hay letras Jorge: En una ecuación hay una incógnita

– *Exploración de ideas sobre el tema planteado.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para encaminar inmediatamente al objetivo planteado (reconocer ecuaciones).* – *Participación selectiva de los alumnos en la exploración de ideas base (verbal).*	
Inicio de la clase ▪ La profesora plantea una situación en la que involucra las cantidades de la ecuación previa y cuestiona sobre cómo representa una cantidad que no se hace explícita (su dinero). ▪ Uno de los alumnos indica que con una equis. ▪ La profesora expresa que es con una letra (sin especificar cuál) y cuestiona qué es en la ecuación. ▪ Ivana y Alejandra expresan que es la incógnita y la cifra desconocida, respectivamente. Alejandra cambia su idea con la de la compañera. ▪ Los alumnos expresan la operación que se podría realizar y la profesora cuestiona a partir de la misma. ▪ Los alumnos que intervienen validan la resta como la operación que permite hallar la cantidad desconocida. ▪ La profesora cuestiona sobre “cómo tendrán que resolver… para que dé 77” haciendo referencia al resultado de la resta. ▪ Luis reemplaza el 77 con la equis, poniéndola al inicio de la operación.	Profesora: Mi dinero ha aumentado en 68 es 145. ¿Cómo he representado mi dinero? Luis: Con una equis Profesora: Con una letra, esa letra viene a ser ¿qué en la ecuación? Ivana: La incógnita Alejandra: La cifra desconocida Profesora: En esa situación… Alejandra: La incógnita Renato: 145 – 68 Profesora: ¿Qué me da esa operación? Diego: El número de la incógnita Profesora: Mi dinero: o sea el dinero que tengo… ¿César, cómo hallarías tú cuánto dinero tengo? César: Restando 145 menos 68 María Pía: Restando Profesora: ¿Cómo tendrán que resolver aquí para que dé 77?

▪ La profesora reformula la pregunta a Luis y este responde. No obstante, la profesora reformula la pregunta. ▪ La profesora observa la solución de Luis, quien sale a escribirla en la pizarra. Códigos: – *Contextualización del tema tratado (dinero).* – *Diálogo basado en la pregunta directa para encaminar inmediatamente al objetivo planteado (reconocer ecuaciones).* – *Participación selectiva de los alumnos* – *Resolución de la situación por parte de los alumnos (no es un tema nuevo).*	Luis: Pones equis igual ciento cuarenta y cinco menos sesenta y ocho; luego equis igual setenta y siete. Profesora: Equis es lo que vas a encontrar, equis es lo que estás buscando. ¿Cómo plasmar la respuesta? Luis: 77+68 Profesora: Esa sería la comprobación. ¿Qué ha pasado con el 68?... A ver Luis La profesora se detiene a observar la solución que dio Luis, quien sale a la pizarra a escribirla. $x+68=145$ $x=145-68$ $x=77$
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora cuestiona a Luis su solución y el hecho de “pasar” una cantidad al otro miembro. ▪ El alumno responde. ▪ La profesora explica que (lo que ha hecho Luis) es transposición de términos que significa “cambiar”, apoyándose en el caso expuesto. ▪ La profesora cuestiona sobre las diferentes operaciones y cómo serían estas si pasan al otro miembro (inversas). Los alumnos responden. Código: – *Diálogo basado en la pregunta directa para encaminar inmediatamente al*	Luego que Luis ha plasmado su solución en la pizarra, la profesora les dice a los alumnos que observen dicha solución. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Por qué has hecho esto? Luis: Porque el positivo pasa negativo Profesora: Tú has pasado el 68 que es positivo al otro miembro, ¿por qué? (Silencio) Profesora: Porque se tiene que restar, ¿verdad? Lo que se ha hecho es transposición de términos. María Pía: Es una ecuación Profesora: ¿Qué es transportar?... significa cambiar… ¿Qué tenemos que transportar? Jorge: 68

objetivo planteado (reconocer ecuaciones). – *Participación selectiva de los alumnos.* – *Resolución de la situación por parte de los alumnos (no es un tema nuevo).* – *Cuestionamiento de la docente sobre el proceso seguido por los estudiantes.* – *Precisión de términos matemáticos para las cuestiones aplicadas ("trasposición de términos").*	Profesora: ¿Cómo está: positivo o negativo? Alejandra: Ahí está positivo Profesora: Y lo he pasado con signo negativo porque la suma y sustracción son operaciones inversas (Silencio) Profesora: Igual sucede con otras operaciones. Si está multiplicando… Alejandra: Dividiendo Profesora: Y si estás dividiendo… Diego: Multiplicando Profesora: Porque son operaciones inversas.
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora propone que los alumnos planteen situaciones similares y da un tiempo para ello. ▪ Los alumnos expresan sus situaciones y la profesora orienta directamente en la solución (cómo represento…). ▪ Para algunos alumnos los planteamientos de solución son "evidentes". Otros alumnos intentan responder en función de los datos del problema o la incógnita. Códigos: – *Propuesta de planteamiento de situaciones ("reales") por parte de los alumnos.* – *Los alumnos plantean situaciones similares al modelo.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para encaminar inmediatamente al*	Profesora: Vamos a ver otra situación, ustedes piensen en situaciones como la que les he planteado y la vamos a convertir en ecuación… Tiempo para que los alumnos piensen en la situación que van a proponer. Profesora: A ver Salma… ¿Otra situación? Salma: El número de mis canicas disminuido en 45 es igual a 28 Profesora: Cómo represento: ¿x-45 o 45-x? ¿Cuántas son mis canicas?... Esas son… Alumnos: ¡Equis! Profesora: Disminuido… María Pía: equis menos cuarenta y cinco Profesora: ¿Cuántas canicas tengo? (Silencio)

objetivo planteado (reconocer ecuaciones). – *Participación selectiva de los alumnos.* – *Resolución de la situación por parte de los alumnos (no es un tema nuevo).* – *Relevancia de la traducción y operación frente a la situación (la resolución de centra en el planteamiento inmediato de la ecuación: caso 1).*	Profesora: ¿Qué representa el número de mis canicas? Ivana: La equis… la incógnita Profesora: x=45+28. ¿Por qué habría sumado? Alejandra: Porque así se resuelve Profesora: ¿Cómo verificar? Luis: Restando 73 menos 45 Profesora: Bien, vamos a resolver otro caso, María Pía: ¡Yo!
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora pregunta a otro alumno la situación que ha planteado. ▪ El alumno plantea su solución y la docente sigue la misma estrategia que en la anterior situación para resolverla (cómo represento…). No obstante, cambia el dato y el problema se torna confuso (para una alumna “no sale”). ▪ La profesora se centra en que los alumnos planteen correctamente el problema. ▪ El problema se transforma hasta que la solución es aceptable. Código: – *Propuesta de planteamiento de situaciones (“reales”) por parte de los alumnos.* – *Los alumnos plantean situaciones similares al modelo; no obstante incluyen otras relaciones (doble) que involucran*	Profesora: Vamos a preguntar a Franco Franco: El doble de mis canicas aumentado en cinco es igual a 45 Profesora: ¿Cómo representar, matemáticamente, esto: el doble de mis canicas…? Franco: Dos equis Profesora: Bien; aumentado en cinco igual cuarenta y ocho[390]… ¿Cuántas canicas tengo? (Silencio) Luis: Miss, no sale Profesora: ¿Cuánto sale? Luis: Veintiuno Profesora: ¿Qué has hecho? (Silencio)

---

[390] La profesora escribe en la pizarra lo que va expresando. No obstante, cambió 45 por 48.

otras operaciones (multiplicación y división). – *Diálogo basado en la pregunta directa para encaminar inmediatamente al objetivo planteado (reconocer ecuaciones).* – *Participación selectiva de los alumnos* – *Resolución de la situación por parte de los alumnos (no es un tema nuevo).* – *Relevancia de la traducción y operación frente a la situación (la resolución de centra en el planteamiento inmediato de la ecuación: caso 2).*	Profesora: Pueden hacerlo pero no en la ecuación (sin reemplazarlo) (Silencio) Profesora: Realizando la trasposición de términos, ¿cómo sería?... Tenemos que despejar primero la variable… ¿Alessandra? Alessandra: Primero pasaría esta… (Silencio) Alessandra: Ah, ya, x=21x2 Profesora: ¿Cuál 21? Salma: 47-5 Franco: 2x=42 Luz: Sería 2x=42+5… No, 42/2 Profesora: Ojo, tenemos que hallar el valor de la variable, no de 2 Salma: No he encontrado Profesora: ¿Cómo lo tiene que pasar? Salma: Dividiendo Profesora: ¿Cuánto es? La alumna Salma sale a la pizarra y escribe: 2x=42:2, luego escribe: x=21. La profesora da por finalizada la actividad.
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora entrega una ficha técnica en la que se expone el tema de transposición de términos e indica en pocas palabras qué deben hacer y qué significa.	La profesora les entrega una ficha sobre transposición de términos. Los alumnos leen; la profesora les recalca que deben poner la operación inversa porque “lo que voy a despejar, ¿qué significa?... Lo voy a dejar solito que es la variable”. Añade: “la transposición de términos, simple y llanamente cambia al otro miembro”.

Códigos: – *Presentación escrita y explicación de la información trabajada (ficha técnica).* – *Lectura individual por parte de los alumnos,*	
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ La profesora indica a los alumnos desarrollar las actividades (ejercicios) del folleto de clase sobre ecuaciones. ▪ Los alumnos resuelven. Códigos: – *Propuesta de actividades de aplicación del tema trabajado (ecuaciones).*	Luego, la profesora les dice que cojan su folleto de ejercicios y resuelvan la página 54. Los alumnos resuelven los ejercicios hasta que el timbre de cambio de hora suena.
Fin de la clase ▪ El tiempo se agota y la clase finaliza. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cierre (actividades suspendidas).*	La clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La primera actividad expone un tema *nuevo* si bien es conocido por los alumnos; por ello la actividad busca explorar los conocimientos previos sobre el tema. A partir de esta actividad, la docente cuestiona sobre el tema y cómo se resuelve	a) La sesión de hoy es sobre ecuaciones, la profesora les propone una ecuación a partir de la cual reconocen sus miembros: $x + 68 = 145$ La profesora les pregunta qué es lo que observan, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué observan?

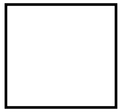
La docente se vale de la contextualización para una mejor comprensión. La docente precisa terminología matemática a las situaciones surgidas. Código: – *Actividad de exploración (de conocimiento aprendido).*	Alumnos: Ecuación Profesora: ¿Por qué será ecuación? María Pía: Porque hay letras Jorge: En una ecuación hay una incógnita Profesora: Mi dinero ha aumentado en 68 es 145. ¿Cómo he representado mi dinero? Luis: Con una equis Profesora: Con una letra, esa letra viene a ser ¿qué en la ecuación? Ivana: La incógnita Alejandra: La cifra desconocida Profesora: En esa situación… Alejandra: La incógnita Renato: 145 – 68 Luego que Luis ha plasmado su solución en la pizarra, la profesora les dice a los alumnos que observen dicha solución. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Por qué has hecho esto? Luis: Porque el positivo pasa negativo Profesora: Tú has pasado el 68 que es positivo al otro miembro, ¿por qué? (Silencio) Profesora: Porque se tiene que restar, ¿verdad? Lo que se ha hecho es transposición de términos.

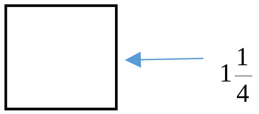
a) La siguiente actividad busca que los alumnos planteen y resuelvan situaciones similares. Los alumnos plantean situaciones siguiendo el modelo. Código: – *Actividades de aplicación (planteamiento y resolución de problemas).*	a) Profesora: Vamos a ver otra situación, ustedes piensen en situaciones como la que les he planteado y la vamos a convertir en fracción… Salma: El número de mis canicas disminuido en 45 es igual a 28 … Franco: El doble de mis canicas aumentado en cinco es igual a 45
a) Las siguientes actividades buscan que los alumnos apliquen lo aprendido en casos nuevos. A estas actividades la maestra las llama ejercicios, porque son ecuaciones directas. Código: – *Actividades de aplicación (procedimiento).*	a) Luego, la profesora les dice que cojan su folleto de ejercicios y resuelvan la página 54. Los alumnos resuelven los ejercicios hasta que el timbre de cambio de hora suena. ..

Caso 6

Sesión 1/Caso 6

Lunes, 13 de octubre de 2008 (sin hora)

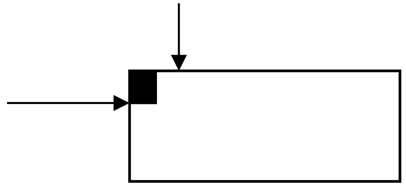
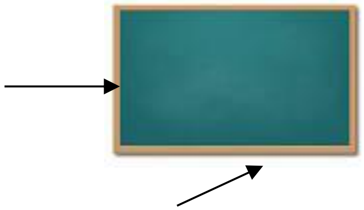
Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora advierte que dará inicio a la clase de matemática e indica la forma de trabajar en la asignatura (atención y participación). ▪ La profesora parte de una propuesta para los alumnos: identificar características de una figura geométrica. ▪ Los alumnos intervienen a partir del cuestionamiento de la docente. ▪ Los alumnos que intervienen muestran conocimiento y desconocimiento de ciertos contenidos. Hay un intercambio entre vocabulario coloquial y matemático para identificar la figura en cuestión. ▪ La profesora orienta hacia el uso de lenguaje propio de la matemática. Códigos: – *Valoración, por parte de la docente, de la participación y atención como estrategias de aprendizaje.* – *Exploración de conocimientos previos puntuales a través de la pregunta directa y el análisis de imágenes.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de ideas previas (generales).*	La profesora expresa que iniciará la clase de matemática no sin antes hacer referencia a la presencia de otra docente, externa, quien estará con ellos durante un tiempo observando cómo trabajan en matemática, así que “deben estar atentos y participar como siempre”. Acto seguido, dibuja un cuadrado en la pizarra y pregunta:  Profesora: ¿Qué características presenta un cuadrado? ¿Cuántos lados tiene? César: Cuatro… Profesora: ¿Y esquinitas? (Silencio) Profesora: ¿Cómo se llaman? César: Puntas Leonardo: Vértices María P: Ángulos Profesora: ¿Ángulos…? María P: Rectos Profesora: Cada “esquinita” se llama vértice.

Inicio de clase ▪ A partir de la imagen, la docente propone una situación: hallar la medida del perímetro, ▪ La participación de los estudiantes no es inmediata[391] (no hay respuestas). ▪ La profesora explica en qué consiste dicho concepto y cómo hallarlo, aunque esta parte de manera indirecta (REFORZAMIENTO). ▪ Los alumnos intercambian ideas al respecto orientando el proceso de solución. ▪ La orientación de la docente es directa; es decir sus preguntas van directo a lo que se quiere lograr, de forma que los estudiantes brinden una respuesta precisa. ▪ La profesora refuerza las operaciones realizadas indicando cómo se obtiene el resultado (multiplicación). ▪ Sistematiza lo logrado. Códigos: – *Planteamiento de la situación concreta (hallar el perímetro) a partir de la actividad introductoria (exploración de conocimientos)* – *Dificultad de los estudiantes para conectar con las preguntas directas de la docente* – *Exposición de conocimiento puntual clave para orientar la participación de los alumnos (respuestas)* – *Intercambio de ideas entre los estudiantes*	La profesora señala el borde del cuadrado e indica:  Profesora: Cada uno tiene la medida del lado de un cuadrado (1¼). Si cada lado mide lo mismo y me piden hallar el perímetro… (Silencio) Profesora: El perímetro equivale a decir la medida de todos los lados. ¿Qué tengo que hacer? (Silencio) Profesora: Hemos dicho que el perímetro es la longitud del contorno de la figura… (Señala la figura). Expresado en suma eso es… (Silencio) Profesora: … Ese contorno se llama perímetro. Entonces al modelo (el contorno), lo que sale es el perímetro… Si esta es la medida de cada lado, ¿cuánto medirá su perímetro? Los alumnos intercambian ideas, manifestando que el perímetro es el contorno y que tienen que sumar la medida de su lado o multiplicarla por cuatro. La profesora interviene: Profesora: Si los lados miden $\frac{5}{4}$ el perímetro es… Jorge Luis: $\frac{20}{4}$ … transforma a fracción Profesora: Para que la operación sea fácil… ¿La suma de qué realizamos?...

---

[391] Perímetro es un tema que se trabaja en cuarto grado de primaria. De acuerdo al DCN 2005, en cuarto grado los alumnos resuelven problemas que implican el cálculo y la estimación del perímetro de figuras geométricas en unidades oficiales de medida: m, dm, cm. El DCN no dice nada al respecto en quinto grado; sin embargo, se retoma el tema en sexto en el que propone que los alumnos establezcan relaciones entre áreas y perímetros de figuras geométricas,

– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución del perímetro (verbal)* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente* – *La actividad se usa para introducir un tema matemático concreto: suma de fracciones homogéneas y su transformación en multiplicación de fracción por entero)*	Jorge Luis: De los lados del cuadrado Profesora: También se puede expresar en multiplicación. ¿Cuántas veces se repite? Samanta: Cuatro Profesora: Entonces se expresa $4\times\frac{5}{4}$… Vemos acá que el cuatro (4) multiplica a cinco (5). 4x5=20 y el cuatro (4) multiplica a su denominador. ¿Cuál será? Uno (1)… Es lo mismo. Simplificando, ¿cuánto será? Cinco… Cinco enteros… Si la medida está expresada en metros, ¿el perímetro en qué estará expresado? César: En metros Profesora: $\frac{5}{4}$ m + $\frac{5}{4}$ m +… La profesora deja indicada la suma y hace referencia, de manera verbal que se suma cuatro veces recalcando la unidad de medida e indicando que el perímetro es veinte cuartos metros.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora propone una situación nueva pero similar. "Nueva" porque se vale de una figura distinta y "similar" porque se orienta a hallar el perímetro. ▪ El tratamiento sigue la misma estructura que la primera propuesta hasta llegar a los lados de la figura. La docente cuestiona sobre las características del rectángulo y los alumnos responden. ▪ Las respuestas de los alumnos son cerradas ya que las preguntas planteadas también lo son. ▪ Al igual que en la primera propuesta, los alumnos muestran ciertas deficiencias en el dominio de contenido involucrado.	La profesora dibuja un rectángulo y pregunta por la cantidad de lados, vértices y ángulos que tiene.  Profesora: ¿Cuánto miden sus ángulos? Alumno: Un metro Profesora: No… ¿Cómo se llama el ángulo? Samantha: Recto… Profesora: El ángulo recto tiene una medida… César: 90°.

Códigos: – *Planteamiento de un caso distinto a partir del anterior (rectángulo).* – *Exploración de ideas sobre la imagen expuesta.* – *Exposición de conocimiento puntual clave para orientar la participación de los alumnos (respuestas).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de ideas previas (generales): caso rectángulo.*	Profesora: ¿Qué significa ese ángulo recto?... Mikail: Que mide noventa grados Profesora: Sí, pero también que esta recta y esta recta son perpendiculares (señala la figura).  La profesora observa la pizarra y dirigiéndose a los alumnos dice: Profesora: Miren, la pizarra es un modelo de rectángulo. Miren la línea de la base y de arriba (señala el lado perpendicular), ¿medirán igual?  Alumno: Diferentes Profesora: ¿La superior y la inferior? Alumno: Igual Profesora: Sí, miden igual y son paralelas; es decir, que nunca se llegan a chocar ni intersectar… Se llaman paralelas. (Silencio)

Profesora: Tenemos dos líneas más, paralelas (la profesora señala los lados restantes de la figura). Si sucede ese caso estamos hablando de un rectángulo. Si tenemos la misma medida (de todos sus lados) es un cuadrado. ¿Cuál es la diferencia entre este cuadrado y este rectángulo? (señala las figuras de la pizarra)

...

Rosita: Que todos (los lados) son iguales.

Profesora: El superior y el inferior, y el de acá y el de acá. El superior e inferior tienen su nombre: largo; y el de la izquierda y derecha: ancho. ¿Recuerdan otro nombre?

(Silencio)

Profesora: Base y altura

La profesora observa la puerta y pregunta a los alumnos:

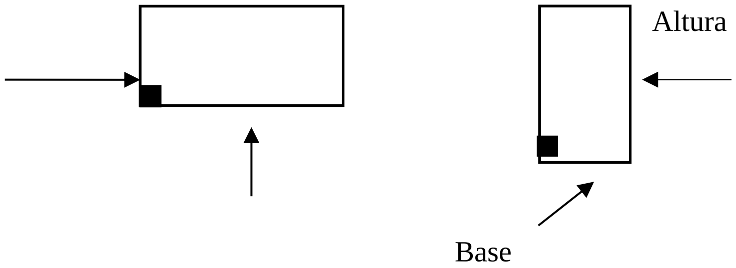
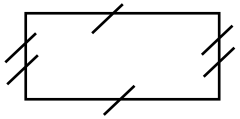
Profesora: Miren la puerta… tiene la misma forma (rectangular). ¿Qué ha pasado?

Alumno: Se ha volteado

Profesora: Se ha invertido

La profesora dibuja el mismo rectángulo girando noventa grados y menciona (refiriéndose al nuevo rectángulo):

Profesora: Ya la base será esto y la altura esta parte porque la figura ha sido girada nada más.

	 Profesora: Este lado es igual que el de acá (a medida que señala, la profesora marca de la misma manera los lados iguales de la figura). De esa manera se define el rectángulo:  Profesora: ¿Qué medidas tiene?[392] …
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La participación de los alumnos en esta etapa es más ágil (parten de una actividad similar). ▪ La maestra hace un tratamiento más rápido a la forma de hallar perímetro del rectángulo que el empleado para el cuadrado y se centra en el tratamiento de los denominadores (a propósito de haber	Profesora: Si me piden el perímetro de la figura ¿qué tendré que hacer para encontrar el perímetro? (Silencio) Marcos: Multiplicamos cada una de las medidas por dos Profesora: ¿Y luego? Marcos: Sumar

---

[392] La profesora escribe las medidas del rectángulo, según sea el largo y ancho de la misma: $1\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

obtenido fracciones heterogéneas), cuestionando sobre los mismos. ▪ Las respuestas de los alumnos son variadas; sin embargo, llegan a lo que la maestra pretende. ▪ Si bien la maestra intenta que los alumnos establezcan relaciones entre los denominadores a fin de simplificar el proceso de sacar m.c.m. los alumnos no lo ven de esa forma. Insisten en que se saca m.c.m. ▪ La profesora plantea otra forma de obtener el resultado, a partir de la simplificación previa. Los alumnos siguen las explicaciones de la docente. Códigos: – *Planteamiento directo de la cuestión a desarrollar (perímetro de la imagen) a través de otro caso con cierta variante (manipulación de fracciones heterogéneas).* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente.* – *La actividad se usa para introducir un tema matemático concreto: suma de fracciones heterogéneas y su transformación en multiplicación de fracción por entero).* – *Tratamiento minucioso de la situación (paso a paso). Exploración por pasos dados (¿cuál es el mcm?, ¿por qué es cuatro?, ¿…en todos los casos es igual…?).*	Profesora: Efectivamente, para hallar el perímetro de un rectángulo multiplicamos por dos la medida del largo y la medida del ancho. Luego sumamos los resultados parciales. La suma total es la medida del perímetro. ¿Hay otra forma? Anthony: sumar todos los lados. Profesora: ¿Qué significa?... Este lado es igual que el de acá… Lo sumaría dos veces: $\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+1\frac{3}{4}+1\frac{3}{4}=$ $\frac{2}{2}+\underbrace{\frac{7}{4}+\frac{7}{4}}$ $\frac{2}{2}+\frac{14}{4}=$ Profesora: Si en el camino se presenta esta opción, ¿qué harían? Samantha: Sacar el mínimo común múltiplo al denominador César: Dieciocho cuartos Profesora: ¿Cuál es (el mcm)? César: Cuatro Profesora: ¿Por qué es cuatro? César: Porque da cuatro Profesora: Porque es el mayor. ¿Y en todos los casos es igual (refiriéndose a que el denominador mayor es el m.c.m)? (Silencio)

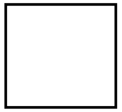
– *Participación selectiva de los estudiantes sobre operaciones con fracciones (verbal).*	Profesora: ¿Cuándo? (Silencio) Samantha: Cuando el número menor es… Marco: Cuando el número menor sea diferente Anthony: Cuando los dos primeros números menores se multipliquen (refiriéndose al número dos de dos medios) Dana: 2 es divisor de 4 La profesora escucha todas las intervenciones de los alumnos, e incluso permite que sigan expresándolas. No obstante a partir de la intervención de Dana vuelve a intervenir. Profesora: A ver… El mayor era cuatro (señalando los denominadores) Leonardo: Dos está contenido en cuatro Profesora: Bien, porque al dividir cuatro, que es el mayor, significa que tiene mitad y ambos tienen mitad, pero este (refiriéndose a la segunda fracción) tiene dos veces mitad. ¿Cuál es el proceso? César: Sacas m.c.m. y divides y multiplicas por cada uno. Te da 18/4. Profesora: Se puede simplificar César: 9/2. Profesora: Esa no es la única manera. Luego eso lo puedo transformar en mixto también. La profesora regresa a la suma: $\frac{2}{2}+\frac{14}{4}$ … ¿qué tienen de parecido? Son… (Silencio) Profesora: ¿Reducibles o irreducibles?

	Alumnos: Reducibles Profesora: ¿Por qué son reducibles? Alumnos: Porque se puede simplificar Profesora: ¿A cuánto equivale? (señalando dos medios) Alumno: uno Profesora: ¿Y catorce cuartos? Rosita: Siete medios Profesora: Un número natural sumado a una fracción se puede transformar a mixto: César: Se puede escribir como uno siete medios Profesora: ¿Y un entero, siete medios es lo mismo que nueve medios? Alumnos: Sí Profesora: Muy bien.
Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone una suma de entero y fracción diferentes y pregunta cómo se resuelve. ▪ Un alumno responde. Códigos: – *Propuesta de una suma de entero y fracción (a propósito del trabajo paso a paso…).* – *Diálogo, pregunta directa para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente. La actividad se usa para reforzar una idea previa (“un número natural sumado a una fracción se puede transformar a mixto”).*	La profesora da por concluida esta actividad y propone una operación: $2+\frac{5}{4}$ A partir de la operación pregunta: Profesora: La forma práctica, ¿cuál será? Leonardo: Dos, cinco cuartos Profesora: ¿Y la otra? Leonardo: Trece cuartos, porque multiplicas y sumas. Es igual. Profesora: Muy bien.

– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de un entero más una fracción (verbal).*	
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora propone otra actividad que difiere de las anteriores porque se basa en un hexágono regular. ▪ El tratamiento del hexágono es inmediato; es decir, no se centra en describirlo con la participación de los alumnos. Va directamente a la información precisa que le permite hallar el perímetro. ▪ La manipulación numérica cobra importancia por la complejidad de las fracciones involucradas; sin embargo, el cuestionamiento directo de la docente, permite que las respuestas de los alumnos sean simples: si son correctas, se continúa, si no, reformula. Códigos: – *Planteamiento directo de la cuestión a desarrollar (perímetro de la imagen) a través de otro caso con cierta variante (resultado).* – *Transformación de la actividad a una más simple (con números naturales).* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de un perímetro (tercer caso).*	La profesora dibuja un hexágono regular. A medida que lo hace, César expresa que “también sale nueve medios”. La profesora asiente y refiriéndose al hexágono manifiesta: Profesora: Se llama regular porque cada lado mide lo mismo. Si mide dos… César: Doce Profesora: Su perímetro es doce…En el hexágono del libro la medida de su lado no es dos sino… César: Uno, cinco sextos Profesora: Que como fracción será equivalente a… César: Once sextos Profesora: ¿Cuántos lados son? Alumnos: Seis María Fe: Hay que sumarlo por seis Profesora: Para hallar el perímetro, ¿por cuánto hay que multiplicar? María Fe: Por seis Profesora: Multiplicarlo por seis o sumar seis veces 11/6 que es lo mismo Samantha: Sale sesenta y seis sextos Profesora: (La profesora resuelve la operación llegando a los sesenta y seis sextos) Y esto simplificado es…

	César: Once Profesora: Es decir, estoy eliminando el seis y ahí queda el 11 (refiriéndose al numerador)…
Final de la clase ▪ La profesora finaliza la clase al terminar la hora asignada. Códigos: – *Sin tarea para la casa.* – *Clase cerrada (actividad finalizada).*	Guarden todo.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Síntesis temática	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La primera actividad propuesta busca que los alumnos interactúen con un *objeto matemático* a fin de recordar cuestiones trabajabas en torno al mismo. La docente se vale de esta actividad para introducir el tema a trabajar (operaciones con fracciones). El tema no es nuevo para los alumnos; sin embargo, el contexto en el que se trabaja, sí (perímetro de figuras geométricas). La docente desarrolla paso a paso, con la ayuda de los alumnos, la situación propuesta y los casos particulares surgidos. Código: – *Actividad de repaso (exploración de un concepto).*	a) Acto seguido, dibuja un cuadrado en la pizarra y pregunta:  Profesora: ¿Qué características presenta un cuadrado?... Profesora: Cada uno tiene la medida del lado de un cuadrado (1¼). Si cada lado mide lo mismo y me piden hallar el perímetro… (Silencio) Profesora: El perímetro equivale a decir la medida de todos los lados. ¿Qué tengo que hacer?...

– *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (con la docente).*	Profesora: Si los lados miden $\frac{5}{4}$ el perímetro es… Jorge Luis: $\frac{20}{4}$ … transforma a fracción Profesora: Para que la operación sea fácil… ¿La suma de qué realizamos?... Jorge Luis: De los lados del cuadrado Profesora: También se puede expresar en multiplicación. ¿Cuántas veces se repite? Samanta: Cuatro Profesora: Entonces se expresa $4 \times \frac{5}{4}$… Vemos acá que el cuatro (4) multiplica a cinco (5). 4x5=20 y el cuatro (4) multiplica a su denominador. ¿Cuál será? Uno (1)… Es lo mismo. Simplificando, ¿cuánto será? Cinco… Cinco enteros… Si la medida está expresada en metros, ¿el perímetro en qué estará expresado? César: En metros Profesora: $\frac{5}{4}$ m + $\frac{5}{4}$ m +…
a) La segunda actividad plantea una cuestión similar a la anterior, en cuanto a procedimiento y objetivo en la que los alumnos recuerdan aspectos de la figura, la maestra amplía información y finalmente han de hallar el perímetro de una figura geométrica. Los alumnos muestran inconsistencias en el conocimiento de ciertas cuestiones asociadas. Al igual que en el caso anterior, la docente se vale de esta actividad para introducir el	a) La profesora dibuja un rectángulo y pregunta por la cantidad de lados, vértices y ángulos que tiene.  Profesora: ¿Cuánto miden sus ángulos? Alumno: Un metro Profesora: No… ¿Cómo se llama el ángulo?

tema a trabajar (operaciones con fracciones). Las operaciones con fracciones tienen una particularidad diferente al caso anterior debido a la naturaleza de la figura (en este caso se suma y se multiplica) El tema no es nuevo para los alumnos; sin embargo, el contexto en el que se trabaja, sí (perímetro de figuras geométricas). La docente desarrolla paso a paso, con la ayuda de los alumnos, la situación propuesta y los casos particulares surgidos. Código: – *Actividad de repaso (exploración de un concepto).* – *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (con la guía docente).*	Samantha: Recto… Profesora: El ángulo recto tiene una medida… César: 90°. … Profesora: Si me piden el perímetro de la figura ¿qué tendré que hacer para encontrar el perímetro? (Silencio) Marcos: Multiplicamos cada una de las medidas por dos Profesora: ¿Y luego? Marcos: Sumar Profesora: Efectivamente, para hallar el perímetro de un rectángulo multiplicamos por dos la medida del largo y la medida del ancho. Luego sumamos los resultados parciales. La suma total es la medida del perímetro. ¿Hay otra forma? Anthony: sumar todos los lados. … Profesora: Si en el camino se presenta esta opción, ¿qué harían? Samantha: Sacar el mínimo común múltiplo al denominador César: Dieciocho cuartos Profesora: ¿Cuál es (el mcm)? César: Cuatro Profesora: ¿Por qué es cuatro?

	… Profesora: Se puede simplificar César: 9/2. Profesora: Esa no es la única manera. Luego eso lo puedo transformar en mixto también.
a) La siguiente actividad (suma de entero y fracción) tiene por finalidad incidir en el proceso de resolución de esta operación, en la que se hace evidente dos formas una de las cuales es práctica. La profesora la extrae de la actividad anterior a fin de darle un tratamiento independiente. Los alumnos muestran conocimiento al respecto. Código: – *Actividad de repaso (con fines de reforzamiento).*	a) La profesora da por concluida esta actividad y propone una operación: $2+\frac{5}{4}$ … Profesora: La forma práctica, ¿cuál será? Leonardo: Dos, cinco cuartos Profesora: ¿Y la otra? Leonardo: Trece cuartos, porque multiplicas y sumas. Es igual. Profesora: Muy bien.
a) La siguiente actividad propone hallar el perímetro de otra figura geométrica. El caso es levemente diferente en cuanto al producto final. La profesora se vale de la situación para guiar el desarrollo de la misma y el tratamiento de las operaciones con fracciones. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (con guía de la docente).*	a) La profesora dibuja un hexágono regular. A medida que lo hace, César expresa que “también sale nueve medios”. La profesora asiente y refiriéndose al hexágono manifiesta: Profesora: Se llama regular porque cada lado mide lo mismo. Si mide dos… César: Doce Profesora: Su perímetro es doce…En el hexágono del libro la medida de su lado no es dos sino… César: Uno, cinco sextos

	Profesora: Que como fracción será equivalente a… César: Once sextos Profesora: ¿Cuántos lados son? Alumnos: Seis María Fe: Hay que sumarlo por seis

Sesión 2/Caso 6

Miércoles 15 de octubre de 2008

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión – Inicio de clase - La profesora plantea la resolución de operaciones que fueron objeto de trabajo en casa. - Los alumnos intentan expresar el resultado de las mismas. - La profesora propone el desarrollo, paso a paso, de las operaciones cuestionando, en primero lugar qué características tienen. - Los alumnos participan indicando, paso a paso, lo que se tiene que hacer (y porqué) según cuestione la docente. - En el transcurso, el proceso es minucioso pues la docente se centra en detalles que surgen a medida que se desarrolla el proceso (por ejemplo los números PESI).	Al iniciar la clase, la profesora plantea la *operación*[393] que se indica, a propósito de una actividad propuesta para casa[394], generándose el siguiente diálogo: $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$ Profesora: ¿Cuántas fracciones hay? Alumnos: Cuatro Alumnos: Dos Profesora: ¿Esta línea, qué operación simboliza? (refiriéndose a la que separa cada suma de fracciones). Alumnos: Una división

---

[393] La docente nombra como operación esta propuesta.

[394] Los alumnos traen las actividades resueltas de casa.

▪ La docente introduce términos *nuevos* a medida que los alumnos explican lo que se ha hecho (por ejemplo, productos de extremos y medios). Códigos: – *Planteamiento y desarrollo de una actividad operativa con fracciones (fracciones complejas) (no se puede llamar corrección de la tarea para casa pues la docente desarrolla la misma con intervención directa de los alumnos.* – *Exploración y aplicación de conocimientos previos puntuales a través de la pregunta directa y el análisis de la expresión matemática.* – *Participación selectiva de los estudiantes exponiendo el proceso.* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad).* – *Tratamiento minucioso de la información matemática involucrada por parte de la docente con participación de los estudiantes.* – *Consolidación por parte de la maestra.*	Alumna: Miss, sale siete octavos en todo Profesora: Ahora veremos… ¿Qué hay en la parte superior? Alumnos: Una suma de fracciones Profesora: ¿Y en la inferior? Alumnos: También suma de fracciones Profesora: Muy bien, suma de fracciones… ¿Qué hay que hacer para sumar? Alumno: Convertirlo en fracción homogénea Profesora: ¿Otro? Alumno: Sacarle el m.c.m. Profesora: ¿Cuál es el denominador en el primer caso? Alumnos: Doce (la profesora empieza a desarrollar la operación anterior) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{\quad}{12}}{\frac{\quad}{\quad}}$ Profesora: ¿Por qué doce? Samantha: Los números son PESI Profesora: Muy bien, la alumna ha recordado que los denominadores de esta primera suma son PESI ¿Cuándo los números son PESI? Samantha: Cuando no tienen nada en común Profesora: Cuando tienen al uno en común

Marcos: Entonces el m.c.m. es su producto (Maripili, César y Anthony avalan la respuesta de Marcos)

Anthony: Miss, los denominadores son 12 y 6

Profesora: Seis, ¿por qué?

César: Porque dos está contenido en seis

Profesora: Es decir, seis es múltiplo de dos… Luego, ¿qué se hace?

Jorge: Suma tres más uno y tres más cuatro

La profesora completa la resolución de la suma inicial, siguiendo la suma de Jorge; es decir completando los numeradores en cada fracción resultante

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{4}{6}}$$

Luego se genera el siguiente diálogo:

Profesora: Una vez que tenemos esa expresión, ¿qué harán?

Andrea: Multiplico siete por seis y doce por cuatro

Profesora: ¿Cómo se llama esta propiedad?

Andrea: … ¿Propiedad de extremos y medios?

Profesora: Producto de extremos sobre producto de medios… ¿Cuánto será los extremos?

Leslie: Cuarenta y dos

Profesora: ¿Y los medios?

Jorge: Cuarenta y ocho

	Profesora:	Antes de escribir la fracción… ¿Puedo simplificar?
	Alumnos:	Sí
	Profesora:	¿Cuál de los dos?
	Leslie:	Doce y seis
	Marco:	Seis y cuatro
	Profesora:	Para simplificar una fracción debe simplificarse tanto el numerador como el denominador. Simplificar siempre es más directo
	César:	Se saca sexta
	Profesora:	Puedo optar por las dos formas. Puedo simplificar antes de operar o al final de la operación. Si simplificamos antes, tenemos: sexta: uno; sexta: dos. ¿Ya no puedo simplificar?
	Alumnos:	No
	Profesora:	Ya no puedo simplificar. ¿Cuál será el resultado?
	César:	Siete octavos
	Profesora:	Bien, ¿esa fracción es propia o impropia?
	Samantha:	Propia
	Profesora:	¿Por qué?
	Samantha:	Porque el numerador es menor que el denominador
	Profesora:	Recuerden que toda fracción propia no puede ser transformada a mixto, pero la impropia, sí.

	$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{4}{6}}=\frac{42}{48}=\frac{7}{8}$$ La profesora completa la resolución de la operación propuesta, tal como se indica arriba, dando por finalizada la operación.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La docente propone otra de las actividades desarrolladas en casa. ▪ En su resolución, la profesora introduce conceptos nuevos (inverso multiplicativo) explicando su uso correcto. ▪ La profesora pregunta sobre distintos “inversos multiplicativos” según la cantidad expresada. ▪ Los alumnos nombran correctamente (en su mayoría) el inverso multiplicativo de acuerdo a la cifra nombrada por la docente. ▪ La maestra asocia el inverso multiplicativo con fracciones a partir de la multiplicación de una fracción con su inverso multiplicativo. Códigos: – *Planteamiento y desarrollo de una actividad operativa con fracciones complejas (no se puede llamar corrección de la tarea para casa pues la docente desarrolla la misma con intervención directa de los alumnos).* – *Explicación directa de la docente del planteamiento y solución.* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para*	La profesora escribe en la pizarra lo siguiente: Calcula A x B, si: $A=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$ $B=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}$ Generándose el siguiente diálogo: Profesora: Me dice que A equivale a uno sobre uno más un tercio o uno dividido entre uno más un tercio; y B es dos sobre uno menos un tercio (Silencio) Profesora: … Debemos reducir A que equivale a uno sobre uno más tres o uno dividido… (Silencio) Profesora: El otro día vimos que un número multiplicado por su inverso nos daba uno. Por ejemplo, tres cuartos por cuatro tercios es uno (la profesora escribe la operación en la pizarra). Esto se llama el inverso multiplicativo. Si me piden el inverso multiplicativo de cinco cuartos… Mikail: Cuatro quintos Profesora: Si me piden de un tercio… César: Tres Profesora: De diez

orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad). – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación expositiva del contenido expuesto.* – *Tratamiento minucioso de la información matemática involucrada por parte de la docente con participación de los estudiantes.*	María Fe: Diez Leonardo: Uno sobre diez Profesora: Un décimo. El diez tiene denominador uno, por lo tanto, cuando hallas el inverso multiplicativo se transforma en un décimo… ¿El inverso multiplicativo de veinticinco? César: Un veinticincoavos. La profesora retoma la operación: $\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$ y expresa que si “cuatro tercios que está multiplicando pasa dividiendo” a la vez que lo plasma en la pizarra: $\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{\frac{4}{3}}$ Se continúa el siguiente diálogo: Profesora: … Uno sobre una fracción va a resultar el inverso de esa fracción. Si divido un entre tres medios, ¿cuál es el resultado? César: Dos tercios Profesora: Y dos tercios es el inverso de tres medios $\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora retoma el planteamiento anterior y desarrolla la operación a la vez que plantea preguntas puntuales a los estudiantes que le permite continuar el proceso (la profesora pregunta que hacer y al responder sumar, desarrolla el proceso).	La profesora retoma la propuesta de multiplicar A x B y pregunta a sus alumnos qué tendrán que hacer primero, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué tendremos que hacer primero?

▪ La profesora justifica los pasos dados y los alumnos escuchan. ▪ Los alumnos están pendientes de expresar directamente los resultados. Códigos: – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad).* – *Participación selectiva de los estudiantes exponiendo ideas concretas del tema en cuestión.* – *Tratamiento minucioso de la información matemática involucrada por parte de la docente con participación de los estudiantes.*	César: Sumar Profesora: El uno (numerador principal de A) queda porque lo que voy a hacer primero es la suma. Leonardo: El uno (1) tiene denominador uno (1). Dana: Uno más un tercio es equivalente a un mixto Profesora: ¿Cuál es el mixto? Dana: Uno, un tercio Antes de continuar, la profesora pregunta si con cualquier operación ocurre que se puede transformar a mixto. Los alumnos responden entre positiva y negativamente. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cuándo tengo que transformarlo en mixto? Andrea: Cuando es una suma Profesora: En la resta, no… Entonces, cambiamos la expresión. ¿Cuándo cambiamos la expresión? César: Cinco tercios Profesora: Cuando no es una suma. En teoría lo vas a hacer cuando tengas un entero y una fracción en suma Cesar: Sale tres cuartos en A Profesora: En el denominador de A, tenemos un entero, un tercio que es cuatro tercios. Tenemos uno (numerador) sobre cuatro tercios. Toda fracción (denominador) dividida en uno (numerador) me dice que tengo el inverso. (Los alumnos escuchan)

	Profesora: Para justificar esa respuesta es importante hacer lo siguiente: Tú ya sabes que sale tres cuartos (porque es el inverso), pero hay que justificarlo. La profesora expresa que el uno tiene denominador uno y que esto está sobre cuatro tercios, luego pregunta qué propiedad se aplica para poder resolver, a lo que los alumnos responden: producto de extremos sobre producto de medios. César hace referencia que solo se aplica con uno y la profesora añade que, con un número diferente, “ya no es lo mismo porque el resultado cambia”. Un alumno menciona que el resultado en B es seis quintos. La profesora retoma toda la propuesta. Profesora: Jorge, ¿qué dice la pregunta? Jorge: Que calculemos A por B Profesora: Por lo tanto no basta con hallar A y B sino que hay que multiplicar. Observen, al dividir A, la respuesta es tres cuartos. Al dividir B, la respuesta es… Mikail: Seis quintos[395] Profesora: Si B es seis quintos, podemos simplificar Alumnos: Sí Profesora: ¿Qué simplificamos? Mikail: 4 y 6 Profesora: ¿Puedo seguir? Alumno: Ya no Profesora: ¿Cuál es la respuesta? César: Nueve décimos
Final de la clase ▪ No hay tiempo para más y la clase finaliza.	La clase finaliza.

---

[395] Los alumnos trabajaron con 2 – 1/3.

Código: – *Sin tarea para la casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Síntesis temática	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
La clase se centra en el desarrollo de dos operaciones propuestas para casa. La docente propone desarrollar paso a paso cada una de estas actividades. a) La primera actividad es una fracción completa. La docente de vale de la misma para desarrollar paso a paso, las operaciones con fracciones y hacer evidentes cuestiones surgidas. Al ser una actividad que los alumnos han desarrollado en casa, su participación en el desarrollo es fluida. Si bien es una actividad aplicativa, introduce el tratamiento minucioso del tema a trabajar. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (con guía de la docente)*	a) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$ Profesora: ¿Cuántas fracciones hay? Alumnos: Cuatro Alumnos: Dos Profesora: Esta línea, qué operación simboliza? (refiriéndose a la que separa cada suma de fracciones). Alumnos: Una división Alumna: Miss, sale siete octavos en todo Profesora: Ahora veremos… ¿Qué hay en la parte superior? Alumnos: Una suma de fracciones … Profesora: Muy bien, suma de fracciones… ¿Qué hay que hacer para sumar? Alumno: Convertirlo en fracción homogénea

Profesora: ¿Otro?

Alumno: Sacarle el m.c.m.

Profesora: ¿Cuál es el denominador en el primer caso?

…

Profesora: ¿Por qué doce?

Samantha: Los números son PESI

Profesora: Muy bien, la alumna ha recordado que los denominadores de esta primera suma son PESI ¿Cuándo los números son PESI?

Samantha: Cuando no tienen nada en común

Profesora: Cuando tienen al uno en común

Marcos: Entonces el m.c.m. es su producto (Maripili, César y Anthony avalan la respuesta de Marcos)

Anthony: Miss, los denominadores son 12 y 6

Profesora: Seis, ¿por qué?

César: Porque dos está contenido en seis

Profesora: Es decir, seis es múltiplo de dos… Luego, ¿qué se hace?

Jorge: Suma tres más uno y tres más cuatro

…

Profesora: Una vez que tenemos esa expresión, ¿qué harán?

Andrea: Multiplico siete por seis y doce por cuatro

Profesora: ¿Cómo se llama esta propiedad?

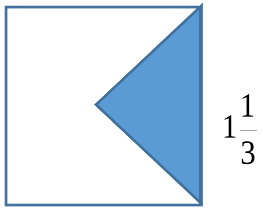
	Andrea: … ¿Propiedad de extremos y medios? Profesora: Producto de extremos sobre producto de medios… ¿Cuánto será los extremos? Leslie: Cuarenta y dos Profesora: ¿Y los medios? Jorge: Cuarenta y ocho Profesora: Antes de escribir la fracción… ¿Puedo simplificar? Alumnos: Sí Profesora: ¿Cuál de los dos?
a) La siguiente propuesta es distinta a la anterior en cuanto involucra fracciones y números naturales; además estas operaciones son medio para calcular otra que involucra letras. Al igual que en el caso anterior, la docente se vale de esta actividad para desarrollar paso a paso el tratamiento de las operaciones con fracciones y dar nombre a cuestiones surgidas. Al ser actividades ya desarrollada, el alumno está más pendiente de dar el resultado. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (con la guía de la docente).*	a) Calcula A x B, si: $A=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$ $B=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}$ Profesora: Me dice que A equivale a uno sobre uno más un tercio o uno dividido entre uno más un tercio; y B es dos sobre uno menos un tercio (Silencio) Profesora: … Debemos reducir A que equivale a uno sobre uno más tres o uno dividido… (Silencio) Profesora: El otro día vimos que un número multiplicado por su inverso nos daba uno. Por ejemplo, tres cuartos por cuatro tercios es uno (la profesora escribe la operación en la pizarra). Esto se llama el inverso multiplicativo. Si me piden el inverso multiplicativo de cinco cuartos… Mikail: Cuatro quintos

	Profesora: Si me piden de un tercio… … Profesora: … Uno sobre una fracción va a resultar el inverso de esa fracción. Si divido un entre tres medios, ¿cuál es el resultado? César: Dos tercios Profesora: Y dos tercios es el inverso de tres medios … Profesora: ¿Qué tendremos que hacer primero? César: Sumar Profesora: El uno (numerador principal de A) queda porque lo que voy a hacer primero es la suma. Leonardo: El uno (1) tiene denominador uno (1). Dana: Uno más un tercio es equivalente a un mixto Profesora: ¿Cuál es el mixto? Dana: Uno, un tercio … Profesora: ¿Cuándo tengo que transformarlo en mixto? Andrea: Cuando es una suma Profesora: En la resta, no… Entonces, cambiamos la expresión. ¿Cuándo cambiamos la expresión? César: Cinco tercios

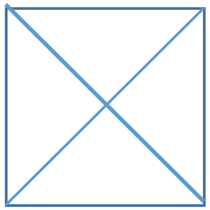
	Profesora: Cuando no es una suma. En teoría lo vas a hacer cuando tengas un entero y una fracción en suma Cesar: Sale tres cuartos en A

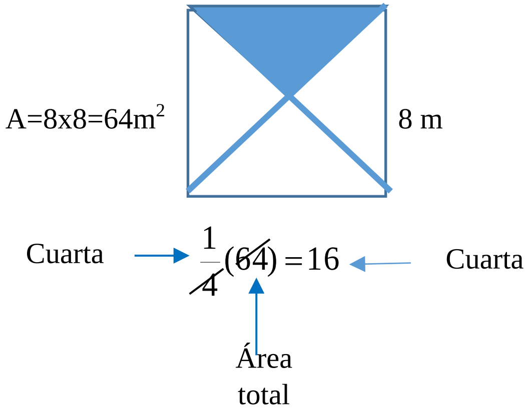
Sesión 3/Caso 6

Jueves, 16 de octubre de 2008

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión –Inicio de clase ▪ La profesora propone hallar el área de figuras geométricas cuyas medidas involucran fracciones. ▪ Los alumnos aplican el conocimiento previo en la resolución de esta actividad. ▪ Previo a su resolución, la profesora transforma la situación en una situación que involucra cantidades enteras. ▪ Los alumnos van expresando cómo se halla el área del cuadrado a partir de la nueva situación. La maestra desarrolla a medida que pregunta a los alumnos y estos responden. Códigos: – *Propuesta de revisión de tarea sobre áreas de figuras cuyas medidas se expresan en fracciones.* – *Presentación del caso (área sombreada de la figura).* – *Propuesta de revisión de tarea sobre áreas de figuras cuyas medidas se expresan en fracciones.*	La clase comienza con la propuesta de la profesora de revisar la tarea asignada, centrándose en la solución “del siguiente problema: Halla el área sombreada en la siguiente figura”:  A partir de la gráfica, algunos alumnos manifiestan que la medida del lado es un cuarto, mientras que otros dicen que es cuatro tercios. La profesora cuestiona ambos datos, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿La medida del lado es un cuarto o cuatro tercios? Alumnos: Cuatro tercios Profesora: Bien, ¿cuál es la característica principal del cuadrado? César: Tiene partes iguales Profesora: ¿Cómo se llaman?

- *Presentación del caso (área sombreada de la figura).*
- *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad).*
- *Transformación de la actividad en una más simple (número enteros. Esta estrategia la empleó anteriormente).*
- *Tratamiento minucioso (paso a paso) de la resolución de la propuesta.*
- *Dificultad para manipular fracciones (números mixtos. Los alumnos han participado anteriormente de una experiencia que los involucra).*
- *Participación selectiva de los estudiantes.*

César:	Lados
Profesora:	La parte sombreada representa un cuarto del total, ¿qué significa la palabra “un cuarto del total”?
Samantha:	El cuarto de toda la figura
Profesora:	Imaginemos que este cuadrado tiene por área… Si su lado es ocho, ¿cómo determinados el área del cuadrado?
César:	Multiplicando lado por lado
Profesora:	¿Cuánto es?
César:	Sesenta y cuatro metros cuadrados
Profesora:	Si nos dicen que tiene sesenta y cuatro metros cuadrados ($64cm^2$) y yo lo divido así, en cuatro partes (la profesora hace cuatro partes como sigue)
	
Profesora:	Una de ellas… ¿Cuánto mide si todo mide 64?
María:	Dieciséis metros cuadrados
Profesora:	Por lo tanto $16m^2$ es un cuarto ¿de qué?
César:	De sesenta y cuatro
Profesora:	Miren, $\frac{1}{4}(64)$ La cuarta parte de sesenta y cuatro es…

	María: Dieciséis. Profesora: Sesenta y cuatro es el área del cuadrado… ¿por qué?... porque su lado es ocho y el área se obtiene multiplicando ocho por ocho… ¿cuánto tiene que dar? Alumnos: Dieciséis A medida que se comunica con los estudiantes, la profesora realiza lo siguiente en la pizarra:  Profesora: Dieciséis es la cuarta parte. Observen (señalando la parte operación): Rosita: Ahí me piden un cuarto (señala la imagen del problema inicial)… es igual pero…
Inicio de clase (Parte I) ▪ La profesora retoma la situación inicial. Los alumnos aplican una multiplicación de fracciones y hallan el área del cuadrado. ▪ La profesora pregunta si se opera o se realiza otra acción antes. Los alumnos indican que hay que simplificar. ▪ La profesora transforma la multiplicación de fracciones iguales en una potencia de fracciones.	Profesora: El área sombreada, ¿equivale a cuánto?... Observen, ¿es verdad que es un cuarto del total? Alumnos: Sí Profesora: ¿Un cuarto de qué? Alumnos: De cuatro tercios Profesora: ¿De qué área?

▪ La profesora diferencia entre área y perímetro preguntando a los alumnos como se halla esta última. ▪ La profesora resuelve la situación referida al área de la parte sombreada de la figura inicial y pregunta por la respuesta a lo que los alumnos responden. Códigos: – *Regreso a la cuestión inicial luego de la transformación en una más simple.* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad en manos de la docente).* – *Tratamiento minucioso de la información matemática involucrada por parte de la docente con participación de los estudiantes.* – *Participación selectiva de los estudiantes.* – *Sistematización individual de la docente del trabajo realizado.*	Alumnos: Del cuadrado Profesora: ¿Cómo hallo el área del cuadrado? Mikail: Cuatro tercios por cuatro tercios… dieciséis novenos Profesora: ¿Multiplico o hago antes otros procesos?... (Silencio) Profesora: ¿Puedo simplificar? Joao: Cuatro novenos Profesora: ¿Qué significa cuatro novenos? (Silencio) Profesora: La expresión cuatro tercios por cuatro tercios es equivalente a cuatro tercios elevado al cuadrado… $\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$ (Los alumnos atienden a las explicaciones de la profesora) Profesora: ¿En que se mide el área, cuáles son las unidades del área? Dana: Ahí, en metros cuadrados Profesora: ¿Qué representa el perímetro? Miguel: La suma de sus lados Profesora: El contorno de la figura, ¿correcto? Si nos piden hallar el perímetro sería… Dana: Cuatro por cuatro tercios Profesora: Dieciséis tercios. ¿Y el área del cuadrado?

Dana: Dieciséis novenos

Profesora: ¿Cuál es el denominador de cuatro?

Alumnos: Uno

Profesora: ¿Cómo haces para multiplicar?

La alumna sale a la pizarra y multiplica, indicando:

$$4x4=16$$

$$1x3=3$$

Profesora: ¿Cuál es la respuesta?

Dana: Dieciséis tercios

La profesora realiza las siguientes operaciones en la pizarra, a fin de sintetizar lo trabajado:

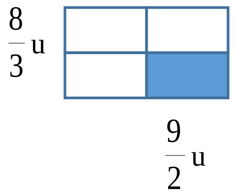
$$\text{As=}\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\text{As= }\frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{16}}{9}\right)$$

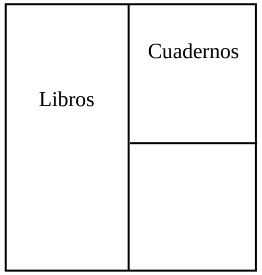
$$\text{As= }\frac{4}{9}m^2$$

$$\text{Perímetro = }\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{4}{1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

	$= \frac{16}{3}$ Profesora: ¿Cuál es la respuesta? Alumnos: 16/3
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora propone un planteamiento nuevo, en el que solicita hallar el área de la parte sombreada, esta vez de un rectángulo. ▪ La profesora expresa que no es complicado como parece y pide a una de las alumnas que salga a resolver. ▪ La alumna resuelve. ▪ La profesora añade que la simplificación volvió la operación fácil ya que se trabajó con enteros. Códigos: – *Planteamiento de un caso similar para ser desarrollado.* – *Exposición general por parte de la docente del proceso a seguir (en el segundo caso).* – *Resolución de la actividad por parte de los alumnos (caso nuevo).* – *Consolidación por parte de la docente.*	Profesora: Siguiente La siguiente tarea presenta la siguiente imagen y pide hallar la parte sombreada:  Antes de proceder a resolver, la profesora manifiesta que no es difícil “aunque los números parezcan complicados” y añade: “Tiene que aplicar una operación y simplificar. La profesora pide a Leslie salir a la pizarra a resolver la tarea, teniendo en cuenta las medidas de los lados del rectángulo grande. La alumna realiza lo siguiente: AT= $\frac{9}{2} \times \frac{8}{3}$ AT= 12u^2 As=3u^2 A partir de la solución brindada por Leslie, la profesora dice: Si todo mide 12 unidades cuadradas y se pinta una parte, ¿cuánto mide ella? Los alumnos responden: Tres. La profesora añade: al simplificar nos dio un número entero y la operación fue más fácil.

Desarrollo de la clase (Parte III) ▪ La profesora propone un tema nuevo, el mismo que asocia a otro conocido pero aplicado a fracciones. ▪ La profesora pregunta por las propiedades involucradas en el nuevo tema y los alumnos responden. La profesora añade que las propiedades son útiles para operar. ▪ La profesora parte de una situación de contexto extramatemático a través de la cual introduce la multiplicación de fracciones iguales que la llevará a la potenciación de fracciones. ▪ La profesora pregunta por la situación y grafica según exponen los alumnos. ▪ La profesora recalca que la fracción se expresa respecto del total (y no de las partes surgidas). ▪ La profesora resalta el valor del exponente y cuestiona sobre cuál de las siguientes potencias de fracciones es mayor: ▪ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 o \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ▪ Los alumnos responden según los conocimientos trabajados con números natural. ▪ La profesora cuestiona las potencias y los alumnos responde, luego pregunta cuál es mayor generándose dos respuestas distintas: una que se decanta por un resultado (un octavo) y otra por el otro. ▪ La profesora solicita indicar cómo verificar que una es mayor que otra.	La profesora finaliza la corrección de tarea y escribe en la pizarra “Potenciación y radicación de fracciones”, luego añade que “lo que hacemos con naturales lo retomamos con fracciones” y declara el objetivo de la clase: “hoy vamos a aprender a resolver operaciones aplicando las propiedades de la potenciación y radicación”. La profesora pregunta por alguna de estas propiedades que los alumnos van mencionando: “Cuando se expone a cero, el resultado es uno”, “cuando se expone a uno el resultado es el mismo número”. La profesora añade que las propiedades son útiles para operar. Acto seguido les propone la siguiente situación: “Betania ordena su estante de la siguiente manera: ½ para libros ½ de ½ para cuadernos ½ de ½ de ½ para sus muñecas La pregunta es: ¿qué espacio del estante destina a las muñecas? A partir de la situación, se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Qué ordena? Alumnos: Muñecas Alumnos: Libros César: Libros, cuadernos y muñecas Profesora: ¿Cómo? Jorge: La mitad para libros Profesora: ¿Qué significa la mitad para libros? Jorge: Que la mitad del estante es para libros Profesora: ¿Y la mitad de la mitad para cuadernos? César: Que la mitad la partes

▪ Los alumnos dan diferentes procedimientos (simplificando, multiplicando en aspa) y la profesora introduce uno distinto observando los elementos de las fracciones). ▪ Una de las alumnas concluye que la que tiene menor denominador es mayor (cuando los numeradores son iguales). Código: – *Cambio de actividad. Introducción a un tema nuevo.* – *Exposición directa del objetivo (tema a desarrollar) y exploración directa de conocimientos previos.* – *Propuesta de una actividad contextualizada.* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para precisar el trabajo del alumno con la guía de la docente (exploración de conocimientos sobre multiplicación de fracciones).* – *Uso de representaciones gráficas para introducir multiplicación de fracciones.* – *Descontextualización de la situación y trabajo directo con la expresión matemática y las operaciones que las involucran. Propuesta directa de un caso (¿qué es mayor?: potencias de igual base y diferente exponente).* – *Exploración de conocimientos a partir de la pregunta directa (sobre comparación de potencias).*	Profesora: Vamos a representar en la pizarra lo que están diciendo. La profesora dibuja un rectángulo que divide por la mitad; en una de ellas, escribe “libros”; luego manifiesta que sobra una mitad en la que va a colocar los cuadernos, pero que no puede usar todo porque dice que es “la mitad de la mitad”. Luego pregunta por las muñecas:  Profesora: ¿Qué espacio usa para sus muñecas? César: Un medio de un medio de un medio. Profesora: Esto sería de esta manera (divide el gráfico y escribe muñecas)… ¿Sobraría espacio? Alumnos: Un espacio Profesora: ¿Cómo sería ese espacio, porque este es un espacio y este también? (refiriéndose a dos espacios distintos de la gráfica) Leonardo: Un cuarto Mikail: Un octavo Profesora: No lo olviden que es respecto del total. Cada vez que multiplicamos las fracciones varias veces el exponente es importante. ¿Qué es mayor: un medio al cubo o un medio al cuadrado? (la profesora escribe en la pizarra)

– *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación de los conocimientos previos de manera expositiva.* – *Sistematización (resumen) de la información por parte de la docente.*	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 o \left(\frac{1}{2}\right)^2$	
	Alumnos:	Al cubo
	Profesora:	Eso funciona para los naturales. Observa: ¿Cuánto es un medio al cubo?
	Alumnos:	Un octavo
	Profesora:	¿Y cuánto es un medio a la cuarta?
	César:	Un dieciseisavos
	Profesora:	¿Qué es mayor?
	Jorge:	Un dieciseisavos
	Alumno:	Un octavo
	Profesora:	¿Cómo saben que lo que les dice el compañero es verdad?
	Anthony:	dieciséis es mayor que ocho. Por lo tanto un dieciseisavos es mayor que un octavo
	Profesora:	¿Otra justificación? ¿Cómo compruebo que las fracciones… una es mayor que la otra?
	César:	Simplificando
	Dana:	Multiplicando en aspa
	Profesora:	Uno por dieciséis es dieciséis y uno por ocho es ocho
	Rosita:	Un octavo
	Profesora:	Observa el signo: Si el numerador es uno y el denominador es ocho es mayor el que tiene menor denominador. Como puedes ver esto hay un rectángulo dividido en dieciséis partes y coges uno y otro dividido en ocho partes…

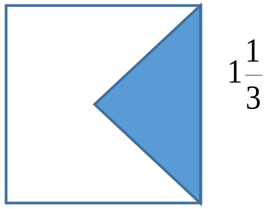
	Rosita: Un octavo es mayor.
Desarrollo de la clase (Parte IV) ▪ La profesora explica la potencia de fracciones a partir de la potencia de números naturales reconociendo los elementos de la misma e identificando la fracción con la base de una potencia. ▪ La profesora explica cómo actúa el exponente al afectar a una fracción. ▪ La profesora recapitula lo explicado y hace referencia a consultar el libro de texto. Códigos: – *Contextualización del nuevo tema en situaciones matemáticas previas (números naturales).* – *Dificultad para trabajar con variables (a/b) (se escucharon respuestas correctas cuando el número era una fracción especifica).* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para precisar el trabajo del alumno con la guía de la docente.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación de los conocimientos previos de manera expositiva.* – *Tratamiento minucioso (paso a paso) de las cuestiones involucradas en el tratamiento directo de la expresión matemática.*	La profesora expresa que van a trabajar las propiedades y añade lo siguiente, a medida que escribe: 1x1=1 2x2=4 Se genera el siguiente diálogo: Profesora: Uno por uno es igual a uno; dos por dos es igual a cuatro (escribe en la pizarra). Pero estas expresiones resultan de multiplicar dos veces uno y de multiplicar dos veces dos. Eso de multiplicar dos veces uno equivale a decir uno al cuadrado. Alumnos: (Escuchan) Profesora: Por lo tanto, generalizamos: Si la expresión es esta: $\frac{a}{b}$ lo cual puede ser cualquier número y la elevamos a este exponente *n*… ¿Cuánto sale? Alumnos: (Silencio) Profesora: ¿Cómo se llama este ene? Alumnos: Exponente Profesora: ¿*a* sobre *b*? Alumnos: (Silencio) Profesora: En este ejemplo (dos elevado al cuadrado), ¿dos qué viene a ser? Alumnos: La base Profesora: Aquí (refiriéndose a a/b) la base es una fracción. Lo que resulta se llama… Marco: Potencia

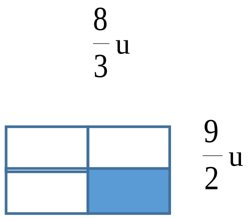
– *Valoración del uso del libro, como fuente de información, antes de resolver (para consultar).*	Profesoras: Esas dos expresiones (escribe en la pizarra: $\left(\frac{a}{b}\right)^n \equiv \left(\frac{a^n}{b^n}\right)$) son equivalentes… El resultado de la potenciación se llama… Gloria: Potencia Profesora: Recapitulando, cuáles son las propiedades básicas… con sus propias palabras. Viviana: Para comparar dos fracciones multiplicamos en aspa Profesora: ¿Cuáles son los términos? Gloria: Base, potencia y exponente Profesora: ¿La base es un número natural o una fracción? Gloria: Fracción Profesora: Es importante consultar el libro, ahí están las propiedades.
Desarrollo de la clase (Parte V) ▪ La profesora parte de un caso concreto (multiplicación de fracciones eleva a un exponente) para explicar las propiedades de la potenciación. ▪ La profesora con la ayuda de Marco y María Fe resuelve la potencia de la multiplicación de fracciones explicando que se eleva cada elemento de la fracción al exponente indicado; luego plantea desarrollar una multiplicación de fracciones en la que cada una está elevada al mismo exponente. La profesora resuelve y pregunta si son los mismos resultados. ▪ La profesora resume la propiedad. Códigos:	La profesora escribe en la pizarra: Potencia y producto, luego escribe la siguiente expresión: $(a\times b)^e \qquad \left(\frac{c}{d}\right)^e$ Y añade: Propiedades de la potenciación: $\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)^2$ Profesora: Si no sabes cómo, demostraremos… Marco: Primero multiplicamos

– *Propuesta de casos concretos (potencias) para aplicar propiedades del conocimiento involucrado (aplicación a fracciones de las propiedades de la potenciación).* – *Valoración del conocimiento a partir de la demostración.* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para precisar el trabajo del alumno con la guía de la docente.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación de los conocimientos.* – *Consolidación (resumen) por parte de la docente.*	Profesora: ¿Cuánto sale? Marco: Tres octavos Profesora: Luego… Marco: Lo elevamos al cuadrado Profesora: Cuando elevamos al cuadrado una fracción, se eleva al cuadrado cada elemento, tanto el numerador como el denominador: $\frac{3^2}{8^2}$ ¿Cuánto sale? María Fe: Nueve sobre sesenta y cuatro Profesora: Desarrollemos una multiplicación de fracciones: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$ Profesora: ¿Son los mismos resultados? Alumnos: Sí. Profesora: Cuando la multiplicación de fracciones está dentro del paréntesis, primero se multiplica y luego se eleva al cuadrado cada elemento… Cuando son bases distintas y los exponentes distintos, se resuelve por separado. …
Desarrollo de la clase (Parte VI) ▪ La profesora propone otra situación: bases iguales y distinto exponente. ▪ La profesora desarrolla la operación y al continuar con la clase el timbre suena. Códigos: – *Propuesta directa de otro caso aplicado a fracciones (bases iguales diferente exponente).*	Profesora: ¿Qué pasará si las bases son iguales?: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$

	Profesora: (antes de escribir el resultado) ¿En aspa? Alumnos: No Profesora: El “n” ¿a qué operación?
Final de la clase ▪ El timbre suena y la clase se queda inconclusa. Código: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	El timbre suena por lo que la maestra da por finalizada la clase.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Síntesis temática	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada (fragmentos)**
La sesión se divide en dos partes: una primera sobre áreas de figuras geométricas y otra sobre potenciación y radicación de fracciones. Primera parte a) La actividad propuesta a través de la revisión d tareas se centran en hallar el área de la parte sombreada de dos figuras geométricas. La docente se vale de esta actividad para trabajar minuciosamente el proceso operativo de resolución. Al ser una actividad que los alumnos han desarrollado su seguimiento es más fluido (al menos con quienes participan); sin embargo, la docente de vale de ella, para introducir el tema en cuestión y su desarrollo, paso a paso.	a) La clase comienza con la propuesta de la profesora de revisar la tarea asignada, centrándose en la solución “del siguiente problema: Halla el área sombreada en la siguiente figura”:  … Profesora: ¿La medida del lado es un cuarto o cuatro tercios? Alumnos: Cuatro tercios Profesora: Bien, ¿cuál es la característica principal del cuadrado? César: Tiene partes iguales

Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (con fines constructivos) (con la guía docente).*	Profesora: ¿Cómo se llaman? César: Lados Profesora: La parte sombreada representa un cuarto del total, ¿qué significa la palabra “un cuarto del total”? Samantha: El cuarto de toda la figura Profesora: Imaginemos que este cuadrado tiene por área… Si su lado es ocho, ¿cómo determinados el área del cuadrado?
a) La siguiente actividad es un caso similar por lo que su fin es aplicativo; sin embargo, tiene connotaciones diferentes (en su producto). La docente se vale de estas situaciones para aplicar el conocimiento matemático y hacer más fácil su resolución. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (con fines constructivos) (con la guía docente).*	a) La siguiente tarea presenta la siguiente imagen y pide hallar la parte sombreada: 
Segunda parte a) La docente introduce una situación concreta (extramatemática) para introducir un tema *nuevo* (potenciación y radicación de fracciones) La docente se vale del conocimiento aplicado en otro contexto (números naturales) para aplicarlo en el campo de las fracciones.	a) … La profesora añade que las propiedades son útiles para operar. Acto seguido les propone la siguiente situación: “Betania ordena su estante de la siguiente manera: ½ para libros ½ de ½ para cuadernos ½ de ½ de ½ para sus muñecas La pregunta es: ¿qué espacio del estante destina a las muñecas?

El tratamiento de la información sigue el proceso aplicado en cada una de sus clases: con la participación de los alumnos va construyendo paso a paso, el tema implicado y aplicándolo a una situación específica. En el desarrollo, los alumnos aplican diferente conocimiento para un buen desarrollo de las operaciones y aplicación de las propiedades. Las generalizaciones (tratamiento con variables) no es fácilmente asimilable por los alumnos. Código – *Actividad de aplicación (procedimiento) (con fines de construcción/desarrollo del conocimiento en un nuevo contexto) (con la guía de la docente).*	… Profesora: ¿Qué ordena? … Profesora: ¿Cómo? Jorge: La mitad para libros Profesora: ¿Qué significa la mitad para libros? Jorge: Que la mitad del estante es para libros Profesora: ¿Y la mitad de la mitad para cuadernos? César: Que la mitad la partes Profesora: Vamos a representar en la pizarra lo que están diciendo. … Profesora: No lo olviden que es respecto del total. Cada vez que multiplicamos las fracciones varias veces el exponente es importante. ¿Qué es mayor: un medio al cubo o un medio al cuadrado? (la profesora escribe en la pizarra) … Alumnos: Al cubo Profesora: Eso funciona para los naturales. Observa: ¿Cuánto es un medio al cubo? Alumnos: Un octavo Profesora: ¿Y cuánto es un medio a la cuarta? César: Un dieciseisavos

Profesora: ¿Qué es mayor?

Jorge: Un dieciseisavos

Alumno: Un octavo

Profesora: ¿Cómo saben que lo que les dice el compañero es verdad?

Anthony: dieciséis es mayor que ocho. Por lo tanto un dieciseisavos es mayor que un octavo

Profesora: ¿Otra justificación? ¿Cómo compruebo que las fracciones… una es mayor que la otra?

César: Simplificando

Dana: Multiplicando en aspa

Profesora: Uno por dieciséis es dieciséis y uno por ocho es ocho

Rosita: Un octavo

Profesora: Observa el signo: Si el numerador es uno y el denominador es ocho es mayor el que tiene menor denominador. Como puedes ver esto hay un rectángulo dividido en dieciséis partes y coges uno y otro dividido en ocho partes…

Rosita: Un octavo es mayor.

…

Profesora: Por lo tanto, generalizamos: Si la expresión es esta: $\frac{a}{b}$ lo cual puede ser cualquier número y la elevamos a este exponente n… ¿Cuánto sale?

Alumnos: (Silencio)

a) La profesora cambia de caso y propone otro para el tratamiento de otra propiedad. Los alumnos aplican sus conocimientos y la docente orienta hacia el tratamiento de fracciones. Código – *Actividad de aplicación (procedimiento) (con fines de construcción/desarrollo del conocimiento en un nuevo contexto) (con la guía de la docente).*	a) La profesora escribe en la pizarra: Potencia y producto, luego escribe la siguiente expresión: $(a\times b)^e \qquad \left(\frac{c}{d}\right)^e$ Y añade: Propiedades de la potenciación: $\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)^2$ Profesora: Si no sabes cómo, demostraremos… Marco: Primero multiplicamos Profesora: ¿Cuánto sale? Marco: Tres octavos Profesora: Luego… Marco: Lo elevamos al cuadrado Profesora: Cuando elevamos al cuadrado una fracción, se eleva al cuadrado cada elemento, tanto el numerador como el denominador: $\frac{3^2}{8^2}$ ¿Cuánto sale? María Fe: Nueve sobre sesenta y cuatro … Profesora: ¿Son los mismos resultados? Alumnos: Sí.

	Profesora: Cuando la multiplicación de fracciones está dentro del paréntesis, primero se multiplica y luego se eleva al cuadrado cada elemento… Cuando son bases distintas y los exponentes distintos, se resuelve por separado. …
a) La docente propone otro caso (bases iguales), pero no logra concretarse por falta de tiempo, Sin embargo su tratamiento sigue la línea de los anteriores. Código – *Actividad de aplicación (procedimiento) (con fines de construcción/desarrollo del conocimiento en un nuevo contexto) (con la guía de la docente).*	a) Profesora: ¿Qué pasará si las bases son iguales?: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ Profesora: (antes de escribir el resultado) ¿En aspa? Alumnos: No Profesora: El "n" ¿a qué operación?

Sesión 4/Caso 6

Viernes, 17 de octubre de 2008

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de la sesión – Inicio de clase ▪ La profesora retoma la actividad de la clase anterior en la que se estaba tratando el tema de potencias con igual base y diferente exponente aplicado al tema de las fracciones.	La profesora retoma la operación de la sesión anterior [396] (que seguía en la pizarra) y pregunta si las fracciones son iguales o diferentes. Los alumnos contestan que son iguales. A continuación, la maestra guía la participación de los estudiantes: Profesora: Tenemos que un medio lo multiplicamos tres veces y un medio lo multiplicamos dos veces. De esta manera tenemos:

---

[396] La operación de la clase anterior es la siguiente: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

▪ La profesora cuestiona sobre las características de las potencias y los alumnos exponen sus apreciaciones. ▪ La profesora hace referencia a las propiedades y una de las alumnas (Dana) la recuerda. La profesora escribe en la pizarra el proceso seguido. ▪ La profesora hace referencia al uso de paréntesis. Dana y Marcos responden con acierto. ▪ La profesora resalta el papel de los paréntesis. Códigos: – *Tratamiento directo de la cuestión matemática. Presentación de un caso específico (potencia de fracciones).* – *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos.* – *No aplicación a situaciones nuevas parecidas.*	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ Profesora: ¿Cómo son las bases? Alumnos: Diferentes Alumnos 2: Iguales Profesora: Si contamos las veces que se repite nos da cinco veces. Observamos que la primera fracción estaba elevada al cuadrado y la segunda al cubo. Entonces, cuando las bases son iguales… Dana: Los exponentes se suman. La profesora escribe la operación: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{32}$ Profesora: Si no pongo el paréntesis, ¿cómo es la expresión y cuál es el resultado? Dana: Un medio Profesora: ¿Y si tiene esto ( )? Marcos: Una a la quinta y dos a la quinta… treinta y dos. Profesora: Es decir… Marcos: Uno sobre treinta y dos. Profesora: Por lo tanto es importante usar paréntesis cuando tengo un exponente que afecta a la fracción.
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora propone otro caso: potencia de potencia.	La profesora propone otra operación y pide a los alumnos que la observen, Los alumnos observan e intentan recordar las reglas aprendidas.

▪ Los alumnos recuerdan de qué se trata aunque este no es del todo exacto y claro. ▪ Los alumnos expresan diferentes ideas, la profesora trata de orientar a la correcta pero el tiempo finaliza. Códigos: – *Tratamiento directo de la cuestión matemática. Presentación de un caso específico (potencia de potencia de fracciones).* – *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos.* – *No aplicación a situaciones nuevas parecidas.*	$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$ Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Quién recuerda cómo se llama esta propiedad? Andrea: Potencia de potencia Profesora: Muy bien. Diego, ¿qué se hace? Diego: Se suman Maripili: Se multiplica Profesora: Piensen: ¿se suma o se multiplica? Maripili: Yo recuerdo que se multiplica Profesora: ¿Cuándo se sumaban? Diego: Cuando la base es igual… pero es igual si multiplicas tres veces un tercio… Profesora: ¿Un tercio también se eleva al cuadrado en los corchetes? Piensen
Final de la clase ▪ La clase queda inconclusa ya que el tiempo de la misma termina. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar.*	El timbre suena y la clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La actividad propuesta es la última de la sesión anterior.Las actividades propuestas por la docente buscan que los alumnos recuerden las propiedades de la potenciación de números a fin de aplicarlo al caso de las fracciones. Código – *Actividad de aplicación (procedimiento) (con fines de construcción/desarrollo del conocimiento en un nuevo contexto) (con la guía de la docente).*	a) Profesora: Tenemos que un medio lo multiplicamos tres veces y un medio lo multiplicamos dos veces. De esta manera tenemos: $$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$ Profesora: ¿Cómo son las bases? Alumnos: Diferentes Alumnos 2: Iguales Profesora: Si contamos las veces que se repite nos da cinco veces. Observamos que la primera fracción estaba elevada al cuadrado y la segunda al cubo. Entonces, cuando las bases son iguales… Dana: Los exponentes se suman. … Profesora: Si no pongo el paréntesis, ¿cómo es la expresión y cuál es el resultado? Dana: Un medio Profesora: ¿Y si tiene esto ( )? Marcos: Una a la quinta y dos a la quinta… treinta y dos. Profesora: Es decir… Marcos: Uno sobre treinta y dos. Profesora: Por lo tanto es importante usar paréntesis cuando tengo un exponente que afecta a la fracción.

a) La siguiente actividad es un caso específico para trabajar otra propiedad. La profesora orienta al recuerdo de la propiedad con la finalidad de aplicarla al caso de fracciones. Respecto a la propiedad, los alumnos no tienen ideas comunes Código – *Actividad de aplicación (procedimiento) (con fines de construcción/desarrollo del conocimiento en un nuevo contexto) (con la guía de la docente).*	a) La profesora propone otra operación y pide a los alumnos que la observen, Los alumnos observan e intentan recordar las reglas aprendidas. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{2}$ Profesora: ¿Quién recuerda cómo se llama esta propiedad? Andrea: Potencia de potencia Profesora: Muy bien. Diego, ¿qué se hace? Diego: Se suman Maripili: Se multiplica Profesora: Piensen: ¿se suma o se multiplica? Maripili: Yo recuerdo que se multiplica Profesora: ¿Cuándo se sumaban? Diego: Cuando la base es igual… pero es igual si multiplicas tres veces un tercio… Profesora: ¿Un tercio también se eleva al cuadrado en los corchetes? Piensen

Sesión 5/Caso 6

Jueves, 23 de octubre de 2008 (sin hora)

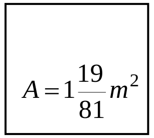
Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de clase – Inicio de clase ▪ La profesora propone dos potencias de fracciones resueltas y su relación con dos raíces cuadradas. ▪ La profesora pregunta por la diferencia.	La profesora escribe en la pizarra: “Radicación de fracciones” e indica a los alumnos que el tema de hoy es ese. Acto seguido escribe lo siguiente:

▪ Los alumnos identifican la raíz cuadrada. ▪ La profesora hace referencia a que la radicación es la inversa de la potencia ▪ Las participaciones de los alumnos no son tan inmediatas. ▪ La profesora explica cómo se desarrolla una raíz en la que se involucra fracciones, explicando cómo se obtiene el resultado. ▪ Los alumnos atienden. ▪ La profesora propone otra raíz de fracción que Samantha responde inmediatamente y Dana ratifica el resultado. Códigos: – *Declaración del tema (radicación de fracciones)* – *Propuesta directa de las cuestiones matemáticas aplicada a fracciones (potencia y radicación).* – *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Dificultad para recordar las propiedades y aplicarlas a fracciones.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos* – *Aplicación a números específicos para una mejor explicación.*	$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{9}} =$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{}{} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{}{}} = \frac{2}{3}$ Luego se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Cuál es la diferencia? (Silencio. No obstante, los alumnos comentan que ese tema lo aprendieron con números naturales. Algunos alumnos intentan recordar las propiedades) Profesora: Esto lo manejan con números naturales, lo único que cambia es que la base es una fracción. Cesar: Hay raíz cuadrada Profesora: La radicación es la inversa de la potencia… Cada parte pasa a ser… (Silencio. Los alumnos comienzan a enunciar, para ellos, los elementos de la radicación) Profesora: Los términos de la radicación serían… Maripili: Raíz cuadrada Profesora: … de veinticinco… Te vas a preguntar qué número multiplicado dos veces por sí mismo da veinticinco… Si me piden encontrar la $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ sería $\frac{2}{3}$ porque dos por dos cinco veces es treinta y dos y tres por tres cinco veces es doscientos cuarenta y tres. (Los estudiantes atienden) Profesora: Ahora van a hallar la $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

	Samantha: Es un medio Dana: También me dio un medio
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora propone otra expresión en la que involucra raíz de una potencia. César responde cuánto es. Samantha desarrolla en la pizarra la operación obteniendo como resultado una fracción igual a la de César. ▪ La profesora propone una raíz de potencia con números naturales ya que se da cuenta que algunos alumnos no siguen el proceso. ▪ Los alumnos expresan sus ideas respecto a la expresión. La profesora cuestiona si es lo mismo $\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3$. Los alumnos expresan ideas opuestas. La profesora explica el proceso. ▪ Los alumnos atienden pero no participan de las preguntas de la docente, quien las responde. Códigos: – *Propuesta directa de las cuestiones matemáticas aplicada a fracciones (otros casos específicos).* – *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos.*	Profesora: Bien, ahora van a hallar la $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} =$ César: Es $\frac{8}{27}$ Samantha sale a la pizarra y escribe: $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$ La profesora observa que algunos alumnos no siguen el proceso, y propone la siguiente situación: Profesora: ¿Cuánto es $\sqrt{4^3}$? La clase queda en silencio. Sin embargo, algunos alumnos mencionan que es dos al cubo; otros indican que “hay que sacar el exponente” o que “Dos es la raíz cuadrada de cuatro”. Sus intervenciones indican que los alumnos que intervienen conocen las propiedades. La profesora escucha las intervenciones y continúa. La profesora escribe en la pizarra el proceso de resolución a la vez que explica a los alumnos: “Para hallar la raíz cuadrada de cuatro al cubo, primero multiplico cuatro por cuatro por cuatro y al resultado le saco la raíz cuadrada. Es ocho… Acto seguido, les plantea la siguiente pregunta: ¿Será lo mismo: $\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3$?, generándose el siguiente diálogo: Profesora: ¿Será lo mismo: $\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3$? Alumnos: No… Sí.

– *Transformación de la situación a una menos compleja para una mejor explicación.*	Profesora: Hallas primero la raíz cuadrada y el resultado lo elevas al cubo… Esto es ocho. Esta propiedad la vas a aplicar en la medida que… ¿4 y 9 tienen raíz cuadrada exacta? Si dicen sí, aplican la propiedad… ¿Con qué finalidad saco el tres? (Silencio) Profesora: Con la finalidad que los dos tengan raíz exacta… Dos tercios elevado al cubo, ¿qué significa? Samantha: Multiplicar al número tres veces Profesora: ¿Ahora entendemos para qué aplicamos la propiedad? (Silencio) Profesora: Para hacer más fácil la operación
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora presenta una actividad en la que intervienen diferentes raíces, explicando la complejidad de las mismas. ▪ A medida que procede la resolución, la maestra pregunta a los alumnos qué pasa con cada elemento. Los alumnos expresan según sus saberes y la profesora aplica a la situación concreta, resaltando la importancia de las propiedades. ▪ A medida que desarrolla, la maestra expone las propiedades y las aplica a ejemplos concretos partiendo de situaciones en las que se involucra números naturales. ▪ La profesora resuelve la expresión inicial a partir de los resultados parciales. Códigos:	La profesora propone otra operación: $A=\sqrt{\frac{9}{16}}\,;\ B=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\,;\quad \sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}}$ Y pide calcular: *(A:C):B*. La profesora menciona que A y B son más simples. Los alumnos mencionan sus respuestas que valida la profesora: $A=\frac{3}{4}$ y $B=\frac{1}{4}$. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: La “C” es más elaboradita… ¿Cómo se llama la propiedad? César: raíz de raíz Profesora: ¿Qué se hace con los índices? César: Multiplico Profesora: ¿Cuánto sería la raíz? Anita: Veinte

– *Propuesta de operaciones complejas (que combinan varias propiedades).* – *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos y desarrollo de la operación* – *Tratamiento minucioso de la cuestión matemática.* – *Orientación al tratamiento de la operatividad como actividad matemática.*	Profesora:	Quedaría $\sqrt[20]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}$ … ¡Qué complicado sería si no conociéramos las propiedades!...
		Hay una propiedad nueva: $\sqrt[n]{a^n}$ … Si se elimina ene, ¿cuánto es la respuesta?
	Jorge Luis:	“a”
	Profesora:	Ponemos otro ejemplo: $\sqrt[4]{3^4}$, ¿cuál es la respuesta?
	Leslie:	Tres
	Joao:	Pero veinte y cuarenta no son iguales
	César:	A veinte y cuarenta le sacamos veinteava
	Profesora:	¿Qué pensaríamos si tengo esta expresión: $\sqrt[4]{5^8} = ?$
	Leonardo:	Sacamos cuarta
	Profesora:	Observen… no existe raíz 1… ¿a partir de qué número?
	César:	Dos
	Profesora:	Este radical se elimina… ¿Cuánto es cinco al cuadrado?
	César:	Sería tres quintos al cuadrado: $C = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$
	Profesora:	Le falta algo…
	César:	Paréntesis
	Profesora:	¿Qué pasaría si tengo: $\sqrt[40]{\left(\frac{3}{5}\right)^{20}}$?... Hago el mismo procedimiento, ¿sí, verdad?
	Alumnos:	…

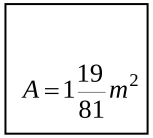
	Profesora: La raíz es de tipo… César: Cuadrada Samantha: No se puede resolver Profesora: Porque tres y cinco no tienen… Samantha: Mitad Profesora: ¿Mitad? César: Raíz cuadrada exacta Profesora: Su raíz es inexacta… Ahí (refiriéndose a la operación) no tienen problema La profesora resuelve (A:C):B: $\left(\frac{3}{4}\div\frac{9}{25}\right)\div\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{50}{12}=\frac{25}{6}$
Desarrollo de la clase (Parte III) - La profesora plantea una situación en la que se pide hallar la medida de cada lado de un cuadrado conociendo su área. La medida involucra un número mixto. - Uno de los alumnos resuelve en la pizarra aplicando un método concreto. - La profesora propone una solución más simplificada transformando el mixto y expone el proceso. - La profesora sugiere no resolver sin darse cuenta de los resultados. Códigos: – *Propuesta de aplicación del conocimiento trabajado en una situación matemática sobre áreas (aplicación a problemas matemáticos escolares).*	A continuación propone resolver otra de las actividades propuestas: Calcula la medida de cada lado de la figura:  $A=1\frac{19}{81}m^2$ La profesora asocia a la potencia y a la radicación diciendo que esta situación se puede desarrollar cambiando a raíz la potencia. Uno de los alumnos resuelve en la pizarra: $\sqrt{1\frac{19}{81}}\Rightarrow\sqrt{1}\times\sqrt{\frac{19}{81}}\Rightarrow 1\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{81}}=1\frac{\sqrt{19}}{9}$; no obstante, les dice que esto se puede simplificar si transforman el mixto a fracción, de manera que: $\sqrt{\frac{100}{81}}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$. La profesora les dice que se les aplicará un paso corto, indicándoles que; "si recuerdas, aplicas; si no, recordar o adivinar. Al que no recuerda… No resuelvan sin darse cuenta de los resultados".

– *Resolución por parte de la docente (de la actividad propuesta).*	
Final de la clase ▪ La clase finaliza pues el tiempo culmina. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	El timbre suena y la clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

Síntesis temática	**Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada**
a) La profesora propone actividades que le permiten introducir un tema conocido al campo de las fracciones. Los alumnos aplican sus conocimientos; sin embargo, visualizarlos en fracciones crea cierta confusión. Código – *Actividad de aplicación (procedimiento) (con fines de construcción/desarrollo del conocimiento en un nuevo contexto) (con la guía de la docente).*	a) La profesora escribe en la pizarra: "Radicación de fracciones" e indica a los alumnos que el tema de hoy es ese. Acto seguido escribe lo siguiente: $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{9}} =$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{\ }{\ } \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{\ }{\ }} = \frac{2}{3}$ Profesora: ¿Cuál es la diferencia? (Silencio. No obstante, los alumnos comentan que ese tema lo aprendieron con números naturales. Algunos alumnos intentan recordar las propiedades) Profesora: Esto lo manejan con números naturales, lo único que cambia es que la base es una fracción. Cesar: Hay raíz cuadrada Profesora: La radicación es la inversa de la potencia… Cada parte pasa a ser…

a) La siguiente actividad se desprende de la anterior, por lo que busca aplicar un tema con fines de refuerzo. La docente propone diferentes cuestiones en las que hay que aplicar las propiedades. Código: – *Actividad de repaso (con fines de reforzamiento).*	a) Profesora: Ahora van a hallar la $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ Samantha: Es un medio Dana: También me dio un medio Profesora: Bien, ahora van a hallar la $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} =$ César: Es $\frac{8}{27}$ … Profesora: ¿Cuánto es $\sqrt{4^3}$? … Profesora: ¿Será lo mismo: $\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3$? Alumnos: No… Sí. Profesora: Hallas primero la raíz cuadrada y el resultado lo elevas al cubo… Esto es ocho. Esta propiedad la vas a aplicar en la medida que… ¿4 y 9 tienen raíz cuadrada exacta? Si dicen sí, aplican la propiedad… ¿Con qué finalidad saco el tres?
a) La siguiente actividad propuesta combina diferentes propiedades. Al igual que la estrategia anterior, la docente guía directamente la resolución de la misma. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento y propiedades).*	a) La profesora propone otra operación: $A = \sqrt{\frac{9}{16}}\ ;\ B = \sqrt[4]{\frac{1}{16}}\ ;\quad \sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}}$ Profesora: La “C” es más elaboradita… ¿Cómo se llama la propiedad?

	César: raíz de raíz Profesora: ¿Qué se hace con los índices? César: Multiplico Profesora: ¿Cuánto sería la raíz? Anita: Veinte Profesora: Quedaría $\sqrt[20]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}$ … ¡Qué complicado sería si no conociéramos las propiedades!... Hay una propiedad nueva: $\sqrt[n]{a^n}$ … Si se elimina ene, ¿cuánto es la respuesta?
a) La última actividad es una situación en la que solicita hallar el lado de una figura conociendo su área. La docente introduce esta actividad para contextualizar el uso de las propiedades trabajadas en el campo de las fracciones, asociando a casos concretos conocidos. La docente resuelve la misma. Código: – *Actividad de aplicación (de un procedimiento y propiedades).*	a) A continuación propone resolver otra de las actividades propuestas: Calcula la medida de cada lado de la figura:  …

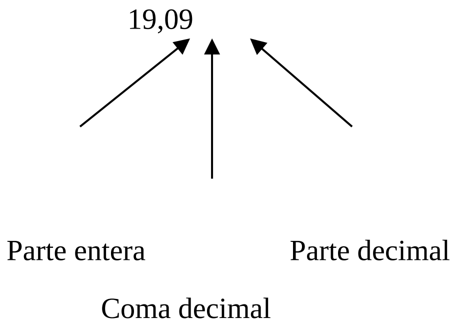
Sesión 6/Caso 6

Viernes, 24 de octubre de 2008

Síntesis temática	**Sesión observada**
Inicio de sesión ▪ La profesora expone directamente el tema, aclarando que este no es nuevo, pero que se verá en mayor profundidad. Códigos: – *Declaración directa del contenido matemático a trabajar (números decimales).*	La sesión de hoy se inicia exponiendo el tema: números decimales, para ello, la profesora les dice que es un tema que conocen (del año pasado), pero que van a ver “un poco más profundo”.
Inicio de clase ▪ La profesora propone una situación de contexto extramatemático que incluye a unos alumnos y que involucra números decimales. ▪ A partir de la situación, la profesora propone comparar las cantidades e indicar su elección. ▪ Los alumnos expresan sus ideas y argumentan en base a la situación (porqué Kike va primero… porque es el menor… por qué….porque está con cero coma nueve…). ▪ La profesora explica que el menor va a la izquierda de la recta numérica (partiendo de la explicación con dos números naturales). Códigos:	Acto seguido, les dice que van a suponer que algunos de sus compañeros han reunido una cantidad de soles: Mikail: 19,8 (diecinueve, coma, ocho) Kike: 19,09 (diecinueve, coma, cero nueve) Renzo: 19,14 (diecinueve, coma, catorce) Luego pregunta quién gana a quién. Se genera el siguiente diálogo: Profesora: ¿Quién gana? Dana: Mikail y Renzo Profesora: ¿Quién reúne menos? Dana: Kike Profesora: ¿Cuál iría primero? Diego: ¿del menor al mayor?

– *Planteamiento de situación problemática cotidiana para introducir tema matemático.* – *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos.* – *Orientación hacia el tratamiento directo de la cuestión matemática (descontextualización de la situación cotidiana).*	Renzo:	Kike
	Profesora:	¿Por qué?
	Renzo:	Porque es el menor
	Profesora:	¿Por qué?
	Renzo:	Porque está con cero coma nueve
	María Fe:	Es el menor de todos
	Profesora:	Si tuvieran una línea imaginaria, recta numérica, y tenemos los tres valores para colocar… ¿El valor mayor o el menor?
	Alumno:	El menor y luego el mayor
	Profesora:	Si tengo 4 y 5 ¿qué número va a la derecha?
		⟷
	Marcos:	Cinco
Desarrollo de la clase (Parte I) ▪ La profesora explora las ideas de los alumnos y explica cómo se comparan los decimales, a partir de la manipulación de sus cifras. ▪ A partir de la explicación anterior, la docente pide comparar las cantidades decimales. ▪ La profesora va recordando algunos aspectos de los números decimales y de la comparación de los mismos. ▪ Los alumnos asocian los decimales con el sistema monetario nacional y el valor de las cosas. La profesora expone ejemplos	Profesora:	Por lo tanto, el menor a la izquierda… Si tenemos 19,8 y 19,14… ocho se transforma en 80 y… ochenta
	Joao:	ocho es menor que catorce
	Profesora:	¿Renzo?
	Samantha:	Catorce es mayor que ocho
	Profesora:	Para comparar los dos números, lo que tiene que hacer es primero colocar el número 19,8 y 19,14. Primero: al llegar al número decimal si tiene una cifra decimal y acá tiene dos le agregas un cero para que se puedan comparar. Segundo: eliminamos la coma y comparamos como si fueran naturales: 1980 1914

concretos referidos a este contexto. También asocian a las divisiones. ▪ La profesora pregunta si la división de enteros siempre da un número decimal y los alumnos exponen ejemplos en los que no sucede. ▪ La profesora asocia un número entero con una expresión decimal. ▪ Los alumnos dividen dos enteros obteniendo decimales (dos resultados diferentes). Códigos: – *Diálogo con pregunta directa e inclusión de contenido específico y ejemplos para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos.* – *Contextualización de números decimales por parte de los alumnos.*	¿Quién es mayor? Alumnos: 1980 Profesora: Por lo tanto, tenemos que tener las mismas cifras decimales. Si no agregamos un cero, ocho no se podría comparar con catorce fácilmente (Los alumnos escuchan a la docente; algunos asienten) Profesora: De aquí voy a deducir unas cositas… ¿los números los leo de izquierda a derecha o de derecha a izquierda? Alumnos: De izquierda a derecha Profesora: Los números con coma son números decimales, ¿desde qué expresión obtenemos un número decimal? Samantha: Se puede representar en la plata Profesora: … Si tengo cien soles (S/.100) y gasto quince soles, cincuenta céntimos (S/.15,5) César: ocho entre tres Anthony: En los soles y en los céntimos César: En la división te puede dar un número decimal Profesora: Si tengo dos números y los divido necesariamente tengo un decimal, ¿no? Samantha: Cuatro entre dos es dos Profesora: ¿Es decimal? Maripili: Es natural Profesora: Cuatro entre dos es dos, pero también lo podemos representar como decimal: $\frac{4}{2} = 2 = 2{,}00000 \ldots ¿\frac{3}{2}?$

	María FS: Sale 1,01 Rosita: Uno con cinco Profesora: 1,5=1,50… Cuando compras algo a cincuenta céntimos (50 c), lo expreso como 0,50, pero también lo puedo expresar así: 0,5. ¿Cuánto cuesta una fotocopia? Alumnos: Cinco céntimos Profesora: Que se escribe: 0,05...
Desarrollo de la clase (Parte II) ▪ La profesora describe un número decimal (regla) y el proceso de obtención de decimales a partir de una división. ▪ La profesora propone otro caso de fracción como división y solicita a los alumnos que resuelva. Se dan dos resultados. ▪ Una de las alumnas sale al encerado y resuelve. Códigos: – *Cambio de tema (escritura de números decimales).* – *Explicación directa del conocimiento por parte de la docente.* – *Interacción docente – alumno – conocimiento a través de las preguntas directas propuestas por la docente.* – *Participación selectiva de los estudiantes para aplicar el conocimiento aprendido.*	Profesora: ...Vamos a escribir decimales y a utilizar el TVP. ¿Qué hemos hecho? Alumnos: Expresar números decimales María FS: Comparar Profesora: Anotamos la regla: en este número: 19,09 tenemos una parte entera (19), una parte decimal (09) y la coma decimal…  Si divido tres entre dos 3 | 2 1 1

<table>
<tr>
<td></td>
<td>La profesora escribe la división en la pizarra, al llegar al residuo expresa:
Profesora: Si le sobra (señalando el 1 del residuo), le pongo una coma. Para expresarlo en decimales añado un cero al dividiendo… ¿A cuánto equivale $\frac{5}{4}$ en decimal?
Los alumnos resuelven e intervienen:
Joao: Uno, coma ocho
María FS: Uno, coma, veinticinco
Maripili: Uno con ocho.
Rosita sale a la pizarra y divide cinco entre cuatro obteniendo 1,25.</td>
</tr>
<tr>
<td>Desarrollo de la clase (Parte III)
▪ La profesora, a través de un caso concreto expone la manera (técnica) de leer decimales.
Códigos:
– <i>Exposición directa del tema a tratar (lectura de decimales). Presentación de un caso directo (un número decimal para su lectura).</i></td>
<td>La profesora escribe en la pizarra:
<table>
<tr><td>…</td><td>d</td><td>c</td><td>m</td><td>dm</td><td>cm</td><td>mll</td><td>dmll</td><td>cmll</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
A continuación, les dice: Hay una técnica que ayudará a leer los decimales. Fijarse en la parte entera y en la parte decimal. La parte entera como si fueran números naturales. Separamos de tres en tres la parte decima de derecha a izquierda:
<table>
<tr><td>715</td><td>030</td><td>298, 21</td><td>034</td><td>679</td></tr>
</table>
Luego la parte decimal se lee: veintiún millones, treinta y cuatro mil, seiscientos setenta y nueve cienmillonésimas.</td>
</tr>
<tr>
<td>Desarrollo de la clase (Parte IV)
▪ La profesora propone diferentes números decimales (con varias cifras decimales) para que los alumnos los lean aplicando la técnica.</td>
<td>La profesora propone diferentes números para ser leídos correctamente, de acuerdo a la técnica aprendida:
8000342,000002
1200,1033</td>
</tr>
</table>

▪ Los alumnos leen, evidenciándose ciertos errores en ello. Algunos no hacen referencia a la parte decimal. Código: – *Aplicación de la técnica a situaciones concretas (otros números decimales).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación del conocimiento nuevo.* – *Dificultad para acertar inmediatamente en la aplicación del nuevo conocimiento.*	28042,120035 Los alumnos salen a la pizarra, separan los números decimales de tres entres e intentan leer la parte decimal; sin embargo, confunden millares con millones: María Fe: Ocho millones trescientos cuarenta y dos, coma, dos cienmilésimos. Rosita: Ocho millones trescientos cuarenta y dos enteros, dos millonésimas Maripili: Mil doscientos, coma mil treinta y tres… Diego: Mil doscientos enteros, coma mil treinta y tres diezmilésimas César: Veintiocho mil cuarenta y dos con ciento veinte mil treinta y cinco millonésimas Profesora: Alumnos, es fácil tiene que fijarse en la tabla para nombrar el orden decimal que corresponde a la última cifra. Apóyense en el cuadro. Joao: Son muchas cifras…
Final de la clase ▪ El tiempo asignado llega a su fin. Códigos: – *Sin tarea para casa.* – *Clase sin cerrar (actividad suspendida).*	La clase finaliza.

Sobre la actividad de resolución de problemas en las clases

	Actividades propuestas/Fragmentos de la sesión observada
a) La actividad inicial propuesta por la docente se circunscribe dentro de un contexto extramatemático en el que introduce números decimales. La actividad le sirve a la docente para contextualizar un tema matemático	a) Acto seguido, les dice que van a suponer que algunos de sus compañeros han reunido una cantidad de soles: Mikail: 19,8 (diecinueve, coma, ocho) Kike: 19,09 (diecinueve, coma, cero nueve)

específico (comparación de fracciones) y su tratamiento descontextualizado posterior. Código: – *Actividad de aplicación (en un contexto ‘cotidiano’).*	Renzo: 19,14 (diecinueve, coma, catorce) … Profesora: ¿Quién gana? Dana: Mikail y Renzo Profesora: ¿Quién reúne menos? Dana: Kike Profesora: ¿Cuál iría primero? Diego: ¿del menor al mayor? Renzo: Kike Profesora: ¿Por qué? Renzo: Porque es el menor … Profesora: Por lo tanto, el menor a la izquierda… Si tenemos 19,8 y 19,14… ocho se transforma en 80 y… ochenta Joao: ocho es menor que catorce Profesora: ¿Renzo? Samantha: Catorce es mayor que ocho Profesora: Para comparar los dos números, lo que tiene que hacer es primero colocar el número 19,8 y 19,14. Primero: al llegar al número decimal si tiene una cifra decimal y acá tiene dos le agregas un cero para que se puedan comparar. Segundo: eliminamos la coma y comparamos como si fueran naturales:

	1980 1914 ¿Quién es mayor? Alumnos: 1980 Profesora: Por lo tanto, tenemos que tener las mismas cifras decimales. Si no agregamos un cero, ocho no se podría comparar con catorce fácilmente
a) La siguiente actividad propuesta por la docente para los alumnos propone leer decimales a partir de la explicación proporcionada. Previo a ello, la docente explica cómo se escriben los números en el TVP y su lectura respectiva. Los alumnos leen los números con ciertas imprecisiones. Código: – *Actividad de atención (de un nuevo conocimiento).* – *Actividad de aplicación (de un procedimiento) (sin la guía directa de la docente).*	a) La profesora propone diferentes números para ser leídos correctamente, de acuerdo a la técnica aprendida: 8000342,000002 1200,1033 28042,120035

ANEXO D: Categoría de las actividades

Caso 1

Sesión 1/Caso 1

Caso codificado				**Códigos Sesión 1/Caso 1**
Sesión 1/ Caso 1	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exploración directa de los conocimientos previos	– *Resumen verbal ejemplificativo de las distintas interpretaciones de las fracciones*
			Planteamiento de la actividad	– *Propuesta de una actividad directa sobre fracción de un número (trabajo individual a partir de una ficha interactiva)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Propuesta de una actividad directa sobre fracción de un número (trabajo individual a partir de una ficha interactiva)*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Propuesta a los alumnos de comparación y análisis entre dos formas de graficar la misma situación (una propuesta en la gráfica y otra desarrollada por los estudiantes)* – *Descontextualización de la fracción de un número (o fracción como operador) de la representación gráfica y relación con las operaciones que lo involucran (división y multiplicación).* – *Contextualización posterior de la expresión matemática en situaciones 'cotidianas'*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de un caso similar (adaptación de la actividad a una más simple: fracción propia)* – *Manipulación gráfica de la expresión para una mejor visualización y comprensión*
		Contextos	De la vida diaria	– *Contextualización posterior de la expresión matemática en situaciones 'cotidianas' (planteamiento de situaciones)*
			De la actividad matemática	– *Propuesta de una actividad directa sobre fracción de un número (trabajo individual a partir de una ficha interactiva) (inicial)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con preguntas directas interpretativas e ideas clave para establecer relaciones entre los elementos de la expresión matemática y lograr la comprensión de los alumnos*

				– *Diálogo con preguntas directas para orientar la explicación del trabajo realizado por el estudiante* – *Valoración de una gráfica distinta generada realizada por un estudiante y exposición a la clase* – *Diálogo con preguntas directas reflexivas sobre el tema general (fracciones) (exploración de conocimientos)* – *Diálogo con preguntas directas e ideas clave que orientan la participación de los estudiantes a la reflexión de las dos gráficas* – *Diálogo con preguntas aclaratorias para orientar la explicación de los alumnos (¿quieres decir…?)* – *Diálogo con preguntas directas para guiar en los alumnos la comprensión de la situación*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por el docente y por iniciativa de los alumnos)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la interpretación del trabajo realizado por el compañero* – *Participación selectiva de los estudiantes de acuerdo a las preguntas formuladas en torno a la idea de fracción* – *Participación selectiva de los estudiantes con respuestas simples (sin argumentar)* – *Participación selectiva de los estudiantes de acuerdo a las gráficas expuestas* – *Participación selectiva de los estudiantes de acuerdo a la pregunta formulada (La comprensión se hace evidente en una alumna)* – *Participación selectiva de los estudiantes en el análisis interpretativo de la fracción como operador (o fracción de un número)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la contextualización de la expresión matemática (parcial)*
			Total	– *Participación total de los estudiantes al ser una actividad propuesta de manera individual*

		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Participación total de los estudiantes al ser una actividad propuesta de manera individual* – *Dificultad en los alumnos para desarrollar solos la actividad* – *Resolución de acuerdo al modelo por parte de los alumnos* – *Dificultad para explicar la propuesta de solución de acuerdo al modelo.* – *Dificultad para identificar la similitud de ambas gráficas* – *Dificultad en los alumnos para explicar la expresión "fracción como operador" (o fracción de un número) en función de la naturaleza de sus elementos* – *Dificultad de los alumnos para contextualizar fracción de un número en situaciones cotidianas*

Sesión 2/Caso 1

Caso codificado				**Códigos Sesión 2/Caso 1**
Sesión 2/ Caso 1	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exploración directa de los conocimientos previos	– *Resumen verbal ejemplificativo de las distintas interpretaciones de las fracciones centrándose en la fracción como operador* –
			Planteamiento de la actividad	– *Orientación del diálogo generado hacia el desarrollo del conocimiento matemático (situaciones 'cotidianas' que involucren la fracción como operador (contextualización)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Orientación del diálogo generado hacia el desarrollo del conocimiento matemático (situaciones 'cotidianas' que involucren la fracción como operador (contextualización): 20%*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Asociación directa por parte del docente del porcentaje con fracciones simples (mitad) y aplicación a otros casos concretos (quinta)* – *Orientación de la clase hacia la representación e interpretación de porcentaje*

				– *Contextualización del conocimiento matemático (fracción como operador)* – *Síntesis por parte del docente del trabajo realizado (asociación porcentaje – fracción)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Asociación directa por parte del docente del porcentaje con fracciones simples (mitad) y aplicación a otros casos concretos (quinta)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Contextualización del conocimiento matemático (fracción como operador)*
			De la actividad matemática	– *Asociación directa por parte del docente del porcentaje con fracciones simples (mitad) y aplicación a otros casos concretos (quinta)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con pregunta directa interpretativa/reflexiva sobre fracción como operador* – *Valoración de las intervenciones de los estudiantes a través de las cuales genera reflexión de la situación en los estudiantes* – *Orientación del diálogo generado hacia el desarrollo del conocimiento matemático (situaciones ‘cotidianas’ que involucren la fracción como operador (contextualización)* – *Diálogo basado en la pregunta directa para la síntesis de la información con participación de los alumnos* – *Diálogo con preguntas directas para conectar la situación concreta (descuentos en porcentajes) con la idea de fracción de un número)* – *Diálogo con preguntas directas reflexivas e ideas claves para reconstruir el conocimiento trabajado*
		Vertical (al exponer)		–
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la expresión matemática y sus implicancias* – *Participación selectiva de los estudiantes para contextualizar la fracción de un número (cuestiones a las que una minoría llega).* – *Participación selectiva de los estudiantes para interpretar el porcentaje en términos de fracción*

				– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución en la resolución de casos concretos (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la reconstrucción del nuevo conocimiento* – *Participación selectiva de los estudiantes en la contextualización de la expresión matemática (dificultad)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Participación total de los estudiantes en la contextualización de la expresión matemática al ser una actividad propuesta individualmente*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Dificultad para contextualizar la fracción como operador en situaciones 'cotidianas'* – *Dificultad para contextualizar a otros casos fracción de un número (aun cuando los alumnos han experimentado una situación específica es difícil que la trasladen a otros casos).* – *Facilidad para manipular simbólicamente frente a la dificultad para contextualizar.*

Sesión 3/Caso 1

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/caso 1**
Sesión 3/ Caso 1	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exploración directa de los conocimientos previos	– *Exploración de conocimientos sobre situaciones (rebajas) que involucran conocimiento matemático (porcentaje) y diferentes formas de representarlo*
			Planteamiento de la actividad	
			Planteamiento de caso concreto	
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Planteamiento de casos concretos sobre rebajas para el análisis por parte de los alumnos.* – *Uso constante de lo 'cotidiano' para contextualizar el conocimiento matemático* – *Orientación a través de la pregunta directa Orientación hacia el uso de las fracciones simples para un trabajo más directo*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de casos concretos sobre rebajas para el análisis por parte de los alumnos.*

		Contextos	De la vida diaria	– *Uso constante de lo ‘cotidiano’ para contextualizar el conocimiento matemático*
			De la actividad matemática	– *Diálogo con preguntas directas y casos concretos que orientan la participación del estudiante hacia la relación entre porcentaje y fracción y hacia la comprensión de los mismos.*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con preguntas directas y casos concretos que orientan la participación del estudiante hacia la relación entre porcentaje y fracción y hacia la comprensión de los mismos.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar al alumno hacia la expresión y análisis de diferentes formas (matemáticas) de expresar descuentos (contexto cotidiano) y su implicancia en las personas.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar al alumno hacia la expresión y análisis de diferentes formas (matemáticas) de expresar descuentos (contexto cotidiano) (otros casos)* – *Diálogo con preguntas directas que orientan a la reflexión en torno al tema de las rebajas*
		Vertical (al exponer)		
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la comprensión de los porcentajes* – *Participación selectiva de los estudiantes al mencionar diferentes formas de expresar una rebaja* – *Participación selectiva de los estudiantes al interpretar las diferentes formas de descuento (interpretaciones numéricas y situacionales)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Reflexión sobre la situación en torno a las implicancias generales de las rebajas*

Sesión 4/Caso 1

Caso codificado				**Códigos Sesión 4/Caso 1**
Sesión 4/ Caso 1	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exploración directa de los conocimientos previos	– *Reflexión sobre el tema de las rebajas a través del diálogo entre docentes y estudiantes*
			Planteamiento de la actividad	
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de un caso ‘nuevo’*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Planteamiento de otras formas de representar rebajas (diferentes a las trabajadas en la sesión anterior)* – *Planteamiento de casos concretos ‘descontextualizados’ sobre porcentajes en los que se aplica fracciones* – *Planteamiento de un caso ‘nuevo’* – *Síntesis final del docente sobre la fracción como operador en el contexto de los porcentajes*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	
		Contextos	De la vida diaria	– *Reflexión en torno a las diferentes formas de expresar rebajas a través del diálogo entre docente y estudiantes*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de casos concretos ‘descontextualizados’ sobre porcentajes en los que se aplica fracciones* – *Planteamiento de un caso ‘nuevo’*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Reflexión en torno a las diferentes formas de expresar rebajas a través del diálogo entre docente y estudiantes* – *Reflexión en torno a la forma de expresar y resolver el porcentaje ‘nuevo’* – *Diálogo en torno a los planteamientos de los estudiantes.*
		Vertical (al exponer)		
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre el tema de las rebajas* – *Participación de los estudiantes en la resolución de los casos concretos*

				– *Participación selectiva de los estudiantes en la sistematización del docente.*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Participación de los estudiantes en la resolución de los casos concretos* – *Reflexión en torno a las diferentes formas de expresar rebajas a través del diálogo entre docente y estudiantes* – *Reflexión en torno a la forma de expresar y resolver el porcentaje 'nuevo'*

Sesión 5/Caso 1

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 1**
Sesión 5/ Caso 1	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exploración directa de los conocimientos previos	– *Reflexión 'operativa' en torno a las rebajas* – *Exploración oral del trabajo realizado por los estudiantes orientando a la explicación del proceso seguido.*
			Planteamiento de la actividad	– *Planteamiento de casos concretos (contextualizados en situaciones 'cotidianas') sobre rebajas con participación de los estudiantes en su elaboración*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Planteamiento de casos concretos (contextualizados en situaciones 'cotidianas') sobre rebajas con participación de los estudiantes en su elaboración* – *Retorno a la interpretación del porcentaje en términos de fracción para una mejor comprensión de la situación* – *La gráfica como estrategia de comprensión de la situación.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de casos concretos directos sobre porcentajes*
		Contextos	De la vida diaria	– *Planteamiento de casos concretos (contextualizados en situaciones 'cotidianas') sobre rebajas con participación de los estudiantes en su elaboración*

			De la actividad matemática	– *Propuesta de casos concretos directos sobre porcentajes*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar el trabajo de los estudiantes y que estos reflexionen en torno a él.* – *Diálogo basado en las preguntas directas como estrategia para la comprensión de la situación.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para generar la comprensión de la situación por parte de los alumnos. Planteamiento de la intervención de los estudiantes en las resoluciones de los compañeros.*
		Vertical (al exponer)		
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes sobre la forma cómo se halla una rebaja (expresada en porcentaje)* – *Participación selectiva de los estudiantes en el planteamiento de los casos concretos.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por el docente y por iniciativa de los estudiantes)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación de la transformación de porcentajes a fracciones simples, basadas en la representación gráfica.* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por el docente)*
			Total	– *Participación total de los estudiantes en la resolución de los porcentajes*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Participación selectiva en…* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de los porcentajes* – *Dificultad para reconocer el precio final y la rebaja* – *Confusión en algunos alumnos para interpretar la fracción de un número.* – *Dificultad en algunos alumnos para interpretar fracciones* – *Dificultad en algunos alumnos para aplicar el conocimiento adquirido a situaciones concretas.*

				– *Reflexión en torno a la obtención de los porcentajes* – *Dificultad en algunos alumnos para identificar relaciones entre porcentajes.* – *La gráfica como estrategia de comprensión de la situación.*

Sesión 6/Caso 1

Caso codificado				**Códigos Sesión 6/Caso 1**
Sesión 6/ Caso 1	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exploración directa de los conocimientos previos	– *Reflexión inicial en torno al tema de los porcentajes.* – *Orientación hacia el uso de los porcentajes en otros contextos (diferente al de rebajas)*
			Planteamiento de la actividad	
			Planteamiento de caso concreto	
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Contextualización de los porcentajes en diferentes situaciones generales y reflexión en torno a algunos contextos* – *Planteamiento de situaciones concretas contextualizadas parcialmente* – *Planteamiento de casos concretos de porcentajes (mismo porcentaje a diferentes cantidades) y reflexión en torno a los resultados.* – *Planteamiento de casos concretos contextualizados de porcentajes (diferentes porcentajes, diferentes cantidades mismos resultados finales) y reflexión en torno a los resultados.* – *Sistematización final del docente del trabajo realizado en clase.* – *Propuesta de trabajo para la casa*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de casos concretos de porcentajes (mismo porcentaje a diferentes cantidades) y reflexión en torno a los resultados.* – *Planteamiento de casos concretos contextualizados de porcentajes (diferentes porcentajes, diferentes cantidades mismos resultados finales) y reflexión en torno a los resultados.*
		Contextos	De la vida diaria	– *Contextualización de los porcentajes en diferentes situaciones generales y reflexión en torno a algunos contextos*

				– *Planteamiento de situaciones concretas contextualizadas parcialmente*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de casos concretos de porcentajes (mismo porcentaje a diferentes cantidades) y reflexión en torno a los resultados.* – *Planteamiento de casos concretos contextualizados de porcentajes (diferentes porcentajes, diferentes cantidades mismos resultados finales) y reflexión en torno a los resultados.*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo como estrategia docente para la contextualización y comprensión de situaciones generales en las que intervienen los porcentajes.* – *Diálogo basado en la pregunta directa para reflexionar sobre los porcentajes a partir de casos específicos* – *Diálogo con preguntas directas que se orientan a la explicación del procedimiento seguido.* – *Reflexión en torno a un porcentaje específico que oriente a la comprensión de la situación* – *Reflexión en torno a la utilidad del conocimiento aprendido (forma de hallar los porcentajes*
		Vertical (al exponer)		
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre los porcentajes (interpretaciones en torno al contexto en el que se usa)* – *Participación selectiva de los estudiantes al indicar porcentajes en diferentes noticias.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la interpretación de los porcentajes en diferentes contextos.* – *Participación selectiva de los estudiantes para interpretar diferentes porcentajes* – *Participación selectiva de los estudiantes al explicar el proceso seguido.* – *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre los resultados obtenidos*

				– *Participación selectiva de los estudiantes al reflexionar sobre los resultados obtenidos*
			Total	– *Participación total de los estudiantes al hallar los porcentajes*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Participación selectiva…* – *Participación total de los estudiantes al hallar los porcentajes* – *Reflexión en torno a un porcentaje específico que oriente a la comprensión de la situación* – *Reflexión en torno a la utilidad del conocimiento aprendido (forma de hallar los porcentajes).*

Resumen Caso 1:

Profesor que promueve la reflexión del conocimiento matemático en general

- El docente plantea la situación matemática dentro de un contexto
- El docente reflexiona con los alumnos sobre el contexto y sobre la situación matemática
- Se ‘construye’/desarrolla el conocimiento con los aportes de los estudiantes
- Se profundiza con el docente
- No se plantean problemas matemáticos escolares dentro de clase

Caso 2

Sesión 1/Caso 2: Fracción como operador (fracción de un número)

Caso codificado				**Códigos Sesión 1/Caso 2**
Sesión 1/ Caso 2	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Reproducción de la actividad realizada en casa (sobre equivalencia de fracciones)* – *Exposición directa por parte de la docente del nuevo tema (fracción como operador)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Contextualización del tema (fracción como operador) a situaciones (cotidianas) concretas con implicancias numéricas.*
			Exposición/explicación del tema	– *Exposición directa por parte de la docente del nuevo tema (fracción como operador)* – *Indicaciones directas para orientar la actuación del estudiante hacia el objetivo planteado (representar en fracción)* – *Uso de la representación gráfica para una mejor traducción y visualización del producto* – *Exposición directa del conocimiento matemático por parte de la docente*. – *Exposición directa del conocimiento matemático por parte de la docente*. – *Descontextualización del tema para un análisis independiente (centrándose en la expresión matemática)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Aplicación del nuevo conocimiento a situaciones concretas (planteadas al inicio).*
		Contextos	De la vida diaria	– *Contextualización del tema (fracción como operador) a situaciones (cotidianas) concretas con implicancias numéricas.*
			De la actividad matemática	–
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Guía directa (preguntas puntuales y palabras "clave") como estrategia docente para dirigir la propuesta del trabajo de la estudiante.*

				– *Diálogo a través de la pregunta directa para abstraer el conocimiento matemático (traducción matemática de la situación)*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva del estudiante en el desarrollo de la actividad y en la ‘construcción’ del conocimiento a través de la traducción del lenguaje verbal al gráfico y posteriormente al simbólico (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la descontextualización*
			Total (todos participan)	– *Participación total del estudiante en el desarrollo de la actividad y traducción al lenguaje simbólico* – *Participación total del estudiante en el proceso de exposición de la docente (al escucharla)* – *Participación total del estudiante en el proceso de exposición de la docente (al escucharla)*
			Aplicación práctica	– *Participación total del estudiante en el desarrollo de la actividad y traducción al lenguaje simbólico* – *Dificultad en algunos los alumnos para aplicar el conocimiento matemático aprendido.* – *Dificultad de los alumnos para aplicar el conocimiento matemático en situaciones nuevas.* – *Dificultad de los alumnos para traducir en términos de fracción una situación que no implica dividir una unidad propiamente.* – *Transferencia por parte del alumno del nuevo conocimiento a situaciones concretas (logrado por un alumno)*

Sesión 2/Caso 2: Fracción como operador (fracción de un número)

Caso codificado				**Códigos Sesión 2/Caso 2**
Sesión 2/ Caso 2	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Repaso expositivo del tema (fracción como operador) por parte de la docente* – *Planteamiento de situaciones ‘cotidianas’ por parte de la docente para traducir en términos de fracción*

			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de situaciones ‘cotidianas’ por parte de la docente para traducir en términos de fracción*
			Exposición/explicación del tema	– *Orientación directa a través de indicaciones explícitas de la docente en la actividad del alumno a fin de lograr el objetivo (representar en términos de fracción como operador).* – *Recurrencia a la representación gráfica como medio para interpretar la situación y traducir al lenguaje simbólico.* – *Planteamiento directo de la situación por parte de la docente para una mejor compresión (uso de expresiones “cortadas” para que los alumnos completen).* – *Recurrencia al planteamiento textual del problema para una mejor resolución (volver al texto)* – *Cambio de propuesta (de 5/3 a 3/5) a una menos compleja.* – *Explicación previa de la docente del ejemplo propuesto* – *Corrección directa del docente al trabajo planteado incorrectamente.* – *Explicación/interpretación de la situación previo a la resolución del problema.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de problema matemático escolar sobre fracción como operador para resolver aplicando directamente el conocimiento trabajado* – *Planteamiento de problemas matemáticos escolares por parte de los alumnos en los que se aplique el conocimiento aprendido.*
		Contextos	De la vida diaria	– *Contextualización del objeto matemático en situaciones ‘cotidianas’ a fin de ser identificado en ellas.* – *Propuesta de problema matemático escolar sobre fracción como operador para resolver aplicando directamente el conocimiento trabajado*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento gráfico-simbólico de fracción como operador (descontextualizada de situaciones ‘cotidianas’)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Interrogación de la docente sobre el proceso seguido en la resolución de problemas* – *Interrogación literal sobre la situación previo a la explicación para centrar la atención del alumno*

	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los alumnos en la traducción a lenguaje matemático de situaciones 'cotidianas'* – *Participación selectiva del estudiante en la ejecución de la actividad (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes en el desarrollo de la actividad 'cotidiana' (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes en el desarrollo del problema (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes en el planteamiento y resolución de los problemas (propuesta por la docente y por el alumno).*
			Total (todos participan)	– *Participación total del estudiante al ser una actividad propuesta para todos de manera individual*
			Aplicación práctica	– *Dificultad de los estudiantes para expresar como fracción una situación que implica manipulación directa de números enteros* – *Guía directa (indicaciones directas) de la docente del trabajo del estudiante.* – *Dificultad en los estudiantes para expresar (o aplicar) como fracción una cuestión asociada a cantidades enteras.* – *Dificultad en los alumnos para representar gráficamente a partir de un ejemplo (propuesto en la hoja de actividad).*

Sesión 3/Caso 2: Primera parte: Fracción como operador (aplicación a ejercicios y problemas)

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/Caso 2: Primera parte**
Sesión3/ Caso 2: Primera parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Planteamiento directo a los alumnos de una fracción de un número (fracción como operador)* – *Planteamiento directo a los alumnos de problema matemático que involucra fracción de un número*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento directo a los alumnos de una fracción de un número (fracción como operador)* – *Planteamiento directo a los alumnos de problema matemático que involucra fracción de un número*

			Exposición/explicación del tema	– *Orientación directa de la docente en el desarrollo de la propuesta (fracción como operador) a través de preguntas explícitas* – *Orientación de la docente hacia el uso explícito de fracciones en la resolución del problema propuesto.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de casos similares (fracción de un número directamente)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Planteamiento directo a los alumnos de problema matemático que involucra fracción de un número*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento directo a los alumnos de una fracción de un número (fracción como operador)*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Orientación directa de la docente en el desarrollo de la propuesta (fracción como operador) a través de preguntas explícitas* – *Orientación de la docente hacia el uso explícito de fracciones en la resolución del problema propuesto.*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de fracciones de un número planteadas directamente (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución del problema (propuesta por la docente y por iniciativa de los estudiantes*
			Total (todos participan)	–
			Aplicación práctica	– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución del problema (propuesta por la docente y por iniciativa de los estudiantes* – *Descripción/justificación por parte de los alumnos del proceso seguido (verbal)*

Sesión 3/Caso 2: Segunda parte: Suma y resta de fracciones homogéneas

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/Caso 2: Segunda parte**
Sesión 3/ Caso 2; Segunda parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Planteamiento directo de una suma de fracciones homogéneas a través de su representación gráfica y simbólica*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento directo de una suma de fracciones homogéneas a través de su representación gráfica y simbólica* – *Planteamiento verbal ‘situacional’ (uso de palabras clave) de una resta de fracciones homogéneas*
			Exploración de ideas sobre el tema	– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar ideas sobre el tema (suma de fracciones homogéneas)*
			Exposición/explicación del tema	– *Explicación directa por parte de la docente de la transformación gráfica de una suma de fracciones homogéneas* – *Explicación directa por parte de la docente de la transformación gráfica de una resta de fracciones homogéneas*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Planteamiento directo de una suma de fracciones homogéneas a través de su representación gráfica y simbólica* – *Planteamiento verbal ‘situacional’ (uso de palabras clave) de una resta de fracciones homogéneas*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo a través de pregunta directa para comprobar la comprensión de lo explicado en el caso concreto propuesto (los alumnos conocen el tema*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la suma de fracciones homogéneas (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la resta de fracciones homogéneas (verbal)*
			Total (todos participan)	
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación teórica	– *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la suma de fracciones homogéneas (verbal)*

				– *Participación selectiva de los estudiantes en torno a la resta de fracciones homogéneas (verbal)*

Sesión 4/Caso 2: Suma y resta de fracciones heterogéneas

Caso codificado				**Códigos Sesión 4/Caso 2**
Sesión 4/Caso 2	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Planteamiento directo de una suma de fracciones heterogéneas*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento directo de una suma de fracciones heterogéneas*
			Exploración de ideas sobre el tema	– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar ideas sobre la suma de fracciones heterogéneas*
			Exposición/explicación del tema	– *Exposición directa del proceso a seguir en una suma de fracciones heterogéneas* – *Manipulación numérica y representación gráfica como estrategias docente para una mejor comprensión de la situación simbólica* – *Cuestionamiento del procedimiento seguido en la situación nueva (engorroso) para su orientación hacia otro procedimiento* – *Exposición de la nueva forma por parte de la docente (multiplicar denominadores).* – *Truncamiento de actividades (no se terminó de resolver la suma de tres fracciones).* – *Guía directa de la docente para un desarrollo correcto de la actividad (para que el alumno no se disperse)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de situaciones nuevas similares (suma de tres fracciones en lugar de dos)* – *Planteamiento de casos similares por parte de los estudiantes* – *Propuesta de actividades similares del libro para su casa.*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de situaciones nuevas similares (suma de tres fracciones en lugar de dos)*

				– *Planteamiento de casos similares por parte de los estudiantes* – *Propuesta de actividades similares del libro para su casa.*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con pregunta directa para orientar la suma de fracciones heterogéneas basado en situaciones contextualizadas (suma de objetos iguales)* – *Diálogo con pregunta directa para orientar a los alumnos en el desarrollo de la suma (obtención de fracciones equivalentes)* – *Diálogo y pregunta directa para orientar la explicación y resolución de las situaciones similares*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los alumnos en la propuesta y aplicación de situaciones similares*
			Total (todos participan)	– *Participación masiva de los estudiantes en el diálogo con la docente (en general) (verbal)* – *Participación total de los estudiantes en la suma de fracciones a través del primer procedimiento*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación teórica (en la exploración de conocimientos)	– *Discrepancias entre estudiantes en torno a la suma de fracciones heterogéneas*
			Aplicación práctica	– *Aplicación del procedimiento a situaciones nuevas semejantes.*

Sesión 5/Caso 2: Suma y resta de fracciones

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 2**
Sesión 5/ Caso 2:	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Revisión verbal de la tarea sobre suma y resta de fracciones (homogéneas y heterogéneas)* – *Planteamiento de problemas matemáticos escolares para resolver sobre sumas y restas de fracciones homogéneas*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exploración de ideas sobre el tema	– *Diálogo y pregunta directa para generar la explicación del alumno al planteamiento de la operación, previo a la resolución.*

			Exposición/explicación del tema	– *Consolidación por parte de la docente sobre la forma de sumar o restar fracciones heterogéneas* – *Consolidación de la información con ayuda de los estudiantes (a través de frases fragmentadas que el alumno debe completar)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	
		Contextos	De la vida diaria	– *Planteamiento de problemas matemáticos escolares para resolver sobre sumas y restas de fracciones homogéneas*
			De la actividad matemática	– *Revisión verbal de la tarea sobre suma y resta de fracciones (homogéneas y heterogéneas)*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Valoración del esfuerzo y búsqueda de soluciones* – *Diálogo y pregunta directa para generar la explicación del alumno al planteamiento de la operación, previo a la resolución.* – *Preguntas directas de la docente durante la resolución con el fin de guiar la misma.*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la pizarra (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos (propuesta por la docente)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes en la resolución de la suma de fracciones* – *Participación total de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación ‘teórica’ (expresan verbalmente)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la pizarra (propuesta por la docente) para explicar y resolver* – *Participación selectiva de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos (propuesta por la docente) para explicar y resolver* – *Participación selectiva de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos (propuesta por la docente) para explicar y resolver*

			Aplicación práctica (ejecutan)	– *Participación total de los alumnos en la resolución de operaciones y problemas matemáticos* – *Dificultad en los alumnos para sumar fracciones heterogéneas individualmente* – *Tendencia en los alumnos a responder en función de la operación (de manera general) y usando lenguaje impreciso* – *Preguntas directas de la docente durante la resolución con el fin de guiar la misma.*

Sesión 5/Caso 2: Multiplicación de fracciones

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 2**
Sesión 5/ Caso 2	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Introducción directa de la multiplicación de fracciones*
			Planteamiento de caso concreto	– *Presentación directa de una multiplicación de fracciones para ser interpretada y graficada*
			Exploración de ideas sobre el tema	– *Exploración de conocimientos sobre fracción como operador a través de un caso directo*
			Exposición/explicación del tema	– *Recurrencia a la representación gráfica para establecer relación entre esta y la forma simbólica de la fracción como operador*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Presentación directa de una multiplicación de fracciones para ser interpretada y graficada*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con pregunta directa para guiar el procedimiento hacia el objetivo buscado (representar simbólicamente la fracción de un número)* – *Guía directa de la docente a través de preguntas directas para orientar el trabajo del estudiante a través de representaciones gráficas y asociación con fracción como operador (experiencias directas previas)*

	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la interpretación de la expresión (bajo la guía docente)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes al ser una actividad propuesta individualmente*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación Teórica	
			Aplicación práctica	– *Dificultad para representar gráficamente la multiplicación de fracciones. Tendencia a representar por separado o manipular simbólicamente*

Sesión 6/Caso 2: Multiplicación de fracciones (continuación)

Caso codificado				**Códigos Sesión 6/Caso 2**
Sesión 6/ Caso 2	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad/tema	– *Planteamiento de la multiplicación de fracciones (representación gráfica)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de la multiplicación de fracciones (representación gráfica)*
			Exploración de ideas sobre el tema	
			Exposición/explicación del tema	– *Explicación directa de la docente del proceso a seguir con integración de preguntas directas (puntuales) a los estudiantes.* – *Desarrollo explicativo verbal – gráfico de la actividad por parte de la docente con participación indirecta de los estudiantes (casos puntuales del proceso).* – *Valoración por parte de la docente de la gráfica como estrategia para comprender la actividad operativa.* – *Valoración de la manipulación directa como "estrategia rápida".* – *Explicación directa por parte de la profesora de la multiplicación de fracciones.*

				– *Síntesis de las operaciones con fracciones trabajadas con participación de los estudiantes a través de los cuestionamientos de la docente.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Aplicación del nuevo conocimiento a una situación similar.* – *Orientación hacia la aplicación directa de lo aprendido a situaciones nuevas similares (operaciones directas)*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de la multiplicación de fracciones (representación gráfica)*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo dirigido)		– *Diálogo con preguntas directas que permiten que el estudiante intervenga en el proceso de graficación de la operación.* – *Guía directa de la docente en la resolución de la actividad*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la graficación de la multiplicación (verbal).* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes.*
			Total (todos participan)	
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación Teórica	
			Aplicación práctica	– *Dificultad en los alumnos para representar gráficamente la multiplicación de fracciones* – *Dificultad para considerar la unidad principal en una representación gráfica de la multiplicación de fracciones.* – *Manipulación numérica de la expresión matemática a partir de la visualización de la gráfica (estrategias "tanteadoras").* – *Dificultad para transferir el conocimiento de manera individual (por parte de la alumna).* – *Propuesta de los estudiantes de operaciones con fracciones.* – *Trabajo para casa (situación contextualizada)*

Resumen Caso 2:

Docente que resalta la explicación de un proceso previo a su aplicación operativa

- La docente expone directamente el contenido
- Plantea situaciones concretas para que los estudiantes construyan/desarrollen el contenido matemático
- La docente guía directamente la participación de los estudiantes en la construcción/desarrollo del contenido
- Se proponen situaciones concretas (operaciones y problemas) para aplicar el contenido
- Los problemas (u operaciones) se resuelven con la guía de la docente.

Caso 3

Sesión 1/Caso 3: Resolución de problemas sobre ángulos

Caso codificado				**Códigos Sesión 1/Caso 3**
Sesión 1/ Caso 3	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento directo de actividades del libro de texto para aplicar el conocimiento aprendido: reconocimiento de ángulos y construcción de ángulos*
			Planteamiento de caso concreto	– *Cambio de planes: Resolución individual de problemas sobre ángulos*
			Exposición/explicación del tema	– *Corrección de la docente del trabajo del alumno (si hay error lo indica al estudiante).*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Transformación de las actividades como estrategia docente para la aplicación de los alumnos*
		Contextos	De la vida diaria (indirectamente)	– *Planteamiento directo de actividades del libro de texto para aplicar el conocimiento aprendido: reconocimiento de ángulos*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento directo de actividades del libro de texto para aplicar el conocimiento aprendido: construcción de ángulos*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Reflexión grupal del trabajo realizado a través de la interacción con el alumno y la actividad matemática*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente) en la reflexión de las actividades realizadas*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes en la resolución de las cuestiones al ser una actividad propuesta de manera individual*
			Aplicación práctica	– *Participación total de los estudiantes en la resolución de las cuestiones al ser una actividad propuesta de manera individual* – *Dificultad para construir ángulos de acuerdo a las características planteadas (dos a la vez)* – *Interacción entre alumnos.*

Sesión 2/Caso 3: Bisectriz y mediatriz de un ángulo

Caso codificado				**Códigos Sesión 2/Caso 3**
Sesión 2/ Caso 3	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exposición/explicación del tema	– *Descripción por parte de la docente del transportador* – *Explicación directa de la docente del uso del transportador para la construcción de ángulos previo a su uso práctico* – *Explicación directa del tema (bisectriz) por la docente como requisito previo a su aplicación* – *Explicación aplicativa directa por parte de la docente de la bisectriz de un ángulo previo a su aplicación por parte de los alumnos* – *Explicación aplicativa directa de la docente sobre la mediatriz*
			Aplicación a casos	– *Propuesta de actividad para la casa.*
			Uso de instrumentos	– *Aplicación de instrumentos no fiables (transportador)*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Explicación directa…*
	Relación profesor – alumnos	Semi Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar saberes previos personales en los alumnos (bisectriz)* – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar conocimientos previos en los alumnos sobre cuestiones relacionadas a la mediatriz* – *Comprobación a través de la pregunta directa de saberes por parte de la docente*
		Vertical (al no establecer diálogo ‘constructivo’)		– *Explicación directa…* – *Cuestionamiento del procedimiento por parte del alumno (al comparar con otro). La maestra no explica la similitud o diferencia de ambos.*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los alumnos en la construcción de ángulos (propuesta por la docente y por el alumno)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción y medida de ángulos (propuesta por la docente)*

				– *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de sus ideas previas (sobre perpendicularidad: caso mediatriz)*
			Total (todos participan)	
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación práctica	– *Aplicación del uso del transportador para medir ángulos concretos* – *Diseño de ángulos de "a pulso" por parte de los alumnos.*
			Interés	– *Interés de los alumnos por el uso del transportador. Actitud exploratoria de los alumnos.* – *Interés de los alumnos por el uso del transportador. Actitud exploratoria de los alumnos.* – *Interés de los alumnos por el uso del transportador para construir. Actitud exploratoria de los alumnos.* – *Cuestionamiento del procedimiento por parte del alumno (al comparar con otro). La maestra no explica la similitud o diferencia de ambos.*

Sesión 3/Caso 3: Ángulos, bisectrices y mediatrices (aplicación práctica)

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/Caso 3**
Sesión 3/ Caso 3	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Propuesta de actividades individuales directas de aplicación – construcción*
			Aplicación a casos	– *Propuesta de actividades individuales directas de aplicación – construcción*
		Contexto	De la actividad matemática	– *Propuesta de actividades individuales directas de aplicación – construcción* – *Propuesta de otras actividades de aplicación (del libro de aplicación)*

	Relación profesor – alumnos	Vertical (al no establecer diálogo ‘constructivo’)		– *Revisión de actividades por parte de la docente* – *Explicación oral del alumno a la docente de la actividad realizada sobre medida de ángulos* – *Explicación oral del alumno a la docente de la actividad realizada sobre construcción de ángulos* – *Explicación oral del alumno a la docente de la actividad realizada sobre bisectriz o mediatriz de ángulos*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes en la resolución de actividades del libro de texto al ser propuesta de manera individual para todos* – *Participación total de los estudiantes en la corrección de las actividades desarrolladas* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de actividades del libro de texto al ser propuesta de manera individual para todos*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación práctica	– *Corrección de actividades por parte del alumno con uso de instrumentos adecuados (en cada caso).* – *Dificultad para realizar con acierto las actividades de medida de ángulos* – *Dificultad para realizar con acierto las actividades de construcción de ángulos* – *Dificultad para realizar con acierto las actividades de construcción de bisectrices y mediatrices* – *Uso por parte de los alumnos de técnicas informales (sin recurrir al instrumento apropiado)*

Sesión 4/Caso 3: Resolución de actividades sobre ángulos, mediatrices y bisectrices

Caso codificado				**Códigos Sesión 4/Caso 3**
Sesión 4/ Caso 3	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Propuesta de actividades directas (descontextualizadas) sobre medición y construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices* – *Planteamiento y resolución de actividad ‘atípica’, para la que la estrategia de solución no permite la solución inmediata.*

			Aplicación a casos	– *Propuesta de actividades directas (descontextualizadas) sobre medición y construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices*
		Contexto	De la actividad matemática	– *Propuesta de actividades directas (descontextualizadas) sobre medición y construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices* – *Planteamiento y resolución de actividad ‘atípica’, para la que la estrategia de solución no permite la solución inmediata.*
	Relación profesor – alumnos	Vertical (al no establecer diálogo ‘constructivo’)		– *Exploración de las soluciones a través de la pregunta directa y exhibición y explicación (verbal) de sus producciones* – *Transmisión directa de la solución por parte de la docente.*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Total (todos participan)	– *Participación total de los alumnos al ser propuesta como trabajo individual* – *Participación total de los alumnos en actividades individuales sobre medición y construcción de ángulos, bisectrices y mediatrices.* – *Participación total de los alumnos al ser propuesta de manera individual (actividad ‘atípica’)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación práctica	– *Dificultad en los alumnos para reproducir figuras geométricas* – *Dificultad en los alumnos manipular instrumentos geométricos* – *Uso de estrategias “informales” por parte de los alumnos para construir objetos geométricos y aspectos generales de los mismos.* – *Planteamiento de soluciones que no toman en cuenta todos los elementos del problema por no acceder a ellos.* – *Reproducción de la imagen al tener la solución*

Sesión 5/Caso 3

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 3**
Sesión 5/ Caso 3	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento de actividades de aplicación sobre ángulos* – *Planteamiento de resolución de problemas sobre números decimales*
			Aplicación a casos	– *Planteamiento de actividades de aplicación sobre ángulos*

				– *Planteamiento de resolución de problemas sobre números decimales*
		Contexto	De la vida diaria	– *Planteamiento de resolución de problemas sobre números decimales*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de actividades de aplicación sobre ángulos*
	Relación profesor – alumnos	Vertical (al no establecer diálogo ‘constructivo’)		– *Corrección de las actividades por parte de la docente* – *Indicación de errores por parte de la docente que implica revisión personal del trabajo.*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Total (todos participan)	– *Participación total de los alumnos al resolver individualmente las actividades propuestas.*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación práctica	– *Dificultad de los alumnos para medir ángulos* – *Dificultad de los alumnos para construir ángulos* – *Dificultad para comprender problemas de más de una etapa* – *Dificultad para operar con números decimales (cálculo)* – *Interés de los alumnos por resolver correctamente los problemas* – *Uso de estrategias operativas “puras” para resolver los problemas propuestos (sin aplicaciones gráficas)*

Sesión 6/Caso 3

Caso codificado				**Códigos Sesión 6/Caso 3**
Sesión 6/ **Caso 3**	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Lectura de textos referidos a cuestiones de la vida real (maravillas del mundo) para introducir cuestiones matemáticas (medida del tiempo)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar los conocimientos adquiridos respecto a la ubicación temporal de cada maravilla*
			Exploración de conocimientos previos	– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar los conocimientos adquiridos respecto a la ubicación temporal de cada maravilla*

			Exposición/explicación del tema	– *Consolidación (resumen) de la información por parte de la maestra.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar los conocimientos adquiridos respecto a la ubicación temporal de cada maravilla(son diferentes casos expuestos a la vez)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Lectura de textos referidos a cuestiones de la vida real (maravillas del mundo) para introducir cuestiones matemáticas (medida del tiempo)*
			De la actividad matemática	
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en la pregunta directa para la comprensión textual*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la comprensión del texto (propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes respecto a la ubicación temporal de las maravillas (no obstante, la mayoría) (verbal)*
			Total (todos participan)	– *Participación total al ser una actividad propuesta en pares* – *Interacción entre alumnos (trabajo en pares)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes respecto a la ubicación temporal de las maravillas (no obstante, la mayoría) (verbal)*
			Aplicación práctica	

Sesión 7/Caso 3

Caso codificado				**Códigos Sesión 7/Caso 3**

Sesión 7/ **Caso 3**	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Repaso y exploración de ideas sobre los siglos a través del diálogo con los alumnos*
			Interacción con el objetivo planteado	– *Diálogo a través de pregunta directa para explorar las ideas sobre la ubicación temporal y el siglo correspondiente.*
			Exploración de conocimientos previos	– *Diálogo a través de pregunta directa para explorar las ideas sobre la ubicación temporal y el siglo correspondiente.*
			Exposición/explicación del tema	– *Consolidación de la información por parte de la docente con participación de los alumnos a través de preguntas directas.* – *Uso de la línea de tiempo como estrategia para estructurar el tiempo.* – *Retorno de la actividad inicial (volver hacia ella)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Presentación de todos los casos a la vez (sobre las maravillas del mundo) para ser trabajados por pares*
		Contextos	De la vida diaria	– *Presentación de todos los casos a la vez (sobre las maravillas del mundo) para ser trabajados por pares*
			De la actividad matemática	– *Propuesta de actividad para la casa sobre el tema tratado.*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Planteamiento de preguntas abiertas (¿cómo saber que unas son las antiguas…?) generan mayor participación.* – *Diálogo a través de pregunta directa para explorar las ideas sobre la ubicación temporal de la maravillas del mundo (año – siglo)* – *Diálogo con preguntas directas para generar la participación de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo y en la ubicación temporal de las maravillas del mundo en dicha línea*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva total de los estudiantes al justificar la ubicación temporal de las maravillas (general y propuesta por la docente)* – *Participación selectiva total de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo.*
			Total (todos participan)	

				– *Participación selectiva total de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo (con mayor afluencia)* – *Participación selectiva total de estudiantes en el reconocimiento de la imagen de acuerdo al texto leído*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes al justificar la ubicación temporal de las maravillas (general y propuesta por la docente)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la línea de tiempo (con mayor afluencia)* – *Participación selectiva de estudiantes en el reconocimiento de la imagen de acuerdo al texto leído* – *Dificultad para construir la línea de tiempo (en relación a la distribución de los años)*
			Aplicación práctica	

Resumen Caso 3:

Docente que favorece la práctica constante a través de la resolución de operaciones y problemas

- La docente propone actividades prácticas
- Los alumnos trabajan de manera individual
- La docente corrige el trabajo de los estudiantes
- Los temas nuevos se exponen directamente y se aplican luego en problemas matemáticos o actividades de aplicación directa.

Caso 4

Sesión1/Caso 4: Representación gráfica de fracciones

Caso codificado				**Códigos Sesión1/Caso 4**
Sesión1/ Caso 4	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Presentación de una hoja de papel y reflexión en torno a ella* – *Planteamiento de actividad manipulativa para representar fracciones (dividir en tres partes iguales)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de representación de fracciones en las producciones gráficas (nombrar fracciones)*
			Exploración de conocimientos previos	– *Diálogo con pregunta directa para explorar los conocimientos previos respecto al tema (fracciones)*
			Exposición/explicación del tema	– *Comprobación por parte de la docente de las ideas expuestas por los estudiantes a través de la manipulación directa de una hoja de papel* – *Uso de la contextualización ‘cotidiana’ para una mejor comprensión*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de representación de fracciones en las producciones gráficas (nombrar fracciones)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Uso de la contextualización ‘cotidiana’ para una mejor comprensión*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de representación de fracciones en las producciones gráficas (nombrar fracciones)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar las ideas de los alumnos respecto a sus producciones* – *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar las ideas de los alumnos respecto a las producciones de sus compañeras* – *Valoración del comportamiento adecuado dentro de la actividad matemática*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en el diálogo establecido por la docente (verbal)*

				– *Participación selectiva de los alumnos (propuesta por la docente y planteada por los alumnos) (verbal)* – *Participación selectiva de los alumnos en la interpretación al trabajo realizado por las compañeras (verbal)* – *Participación selectiva de os estudiantes al exponer sus producciones en diálogo con la docente (verbal)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para todos(dividir la hoja en tres partes iguales)* – *Participación total de los alumnos al ser propuesta para todos (representar fracciones en sus producciones)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes en el diálogo establecido por la docente (verbal)* – *Participación selectiva de los alumnos (propuesta por la docente y planteada por los alumnos) (verbal)* – *Participación selectiva de los alumnos en la interpretación al trabajo realizado por las compañeras (verbal)* – *Participación selectiva de os estudiantes al exponer sus producciones en diálogo con la docente (verbal)*
			Aplicación práctica	– *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para todos(dividir la hoja en tres partes iguales)* – *Participación total de los alumnos al ser propuesta para todos (representar fracciones en sus producciones)* – *Dificultad de los alumnos para dividir una hoja de papel en tres partes iguales (diferentes interpretaciones)* – *Dificultad de los alumnos para reconocer el error en la división de una hoja de papel en tres partes iguales* – *Dificultad de los alumnos para reconocer el error en la división de una hoja de papel en tres partes iguales* – *Dificultad para reconocer el todo y expresar las fracciones en torno a él.*

Sesión 2/Caso 4: Fracción de un número

Caso codificado				**Códigos Sesión 2/Caso 4**
Sesión 2/ Caso 4	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Cuestionamiento directo de la expresión matemática apoyada en una representación gráfica*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exploración de conocimientos previos	– *Diálogo basado en la pregunta directa para explorar las ideas de los alumnos respecto a la cuestión tratada (fracción de un número)*
			Exposición/explicación del tema	– *Recurrencia a las representaciones gráficas como estrategia docente para una mejor comprensión de la acción simbólica directa*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Aplicación del nuevo conocimiento (formas de hallar fracción de un número) a casos específicos similares*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Aplicación del nuevo conocimiento (formas de hallar fracción de un número) a casos específicos similares*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con preguntas directas para analizar la situación (fracción de un número).*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en base a operaciones que relacionan las cantidades y al conocimiento de la regla (verbal).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación de la expresión matemática (fracción de un número) (verbal)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes al ser una propuesta individual*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes en base a operaciones que relacionan las cantidades y al conocimiento de la regla (verbal).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación de la expresión matemática (fracción de un número) (verbal)*

			Aplicación práctica	– *Propuesta de aplicación de las dos formas de hallar fracción de un número y comparación* – *Preferencia de la forma simbólica sobre la gráfica por parte de los estudiantes.*

Sesión 3/Caso 4: Comparación de fracciones (Primara Parte)

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/Caso 4: Primera parte**
Sesión 3/ Caso 4: Primera parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento de actividad gráfica que involucra fracciones*
			Planteamiento de caso concreto	– *'Traslación' del trabajo realizado a otra representación gráfica y expresión a través e fracciones concretas Tendencia de los alumnos a manipular los números (operar con ellos).*
			Exploración de conocimientos previos	– *Exploración de conocimientos previos sobre qué se puede hacer con las fracciones a partir de preguntas directas.*
			Exposición/explicación del tema	– *Diálogo a partir de preguntas directas planteadas por la docente como estrategia en la comparación de fracciones.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de fracciones puntuales para ser comparadas (iguales a la unidad, mayores que la unidad)*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de fracciones puntuales para ser comparadas (iguales a la unidad, mayores que la unidad)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo a partir de preguntas directas planteadas por la docente como estrategia en la comparación de fracciones.*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva del estudiante en la exploración de conocimientos sobre fracciones* – *Participación selectiva de los alumnos en la exploración de ideas sobre la comparación de fracciones (verbal)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los alumnos en la actividad gráfica que involucra fracciones (al ser una propuesta individual).*

		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los alumnos en la exploración de ideas sobre la comparación de fracciones (verbal)* – *Dificultad en el uso del lenguaje (unidad entera)* – *Dificultad de los alumnos para expresar correctamente las ideas relacionadas con la comparación de fracciones.*
			Aplicación práctica	– *Participación total de los alumnos en la actividad gráfica que involucra fracciones (al ser una propuesta individual).* – *Traslación’ del trabajo realizado a otra representación gráfica y expresión a través e fracciones concretas Tendencia de los alumnos a manipular los números (operar con ellos).*

Sesión 3/Caso 4: Números mixtos (Segunda Parte – aunque surge en la comparación de fracciones se desliga de esta)

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/caso 4: Segunda parte**
Sesión 3/ Caso 4: Segunda parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento de representación gráfica de una fracción impropia (caso 1) (caso concreto)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de representación gráfica de una fracción impropia (caso 1)*
			Exploración de conocimientos previos	– *Exploración de conocimientos previos sobre qué se puede hacer con las fracciones a partir de preguntas directas*
			Exposición/explicación del tema	– *Explicación por parte de la docente de la solución correcta recurriendo a la representación gráfica.* – *Planteamiento no estructurado de la situación (genera que los alumnos no tengan claro los datos, pero da la posibilidad de diferentes soluciones)* – *Planteamiento no estructurado (mal definido). Análisis de la situación por parte del alumno. Los alumnos no ven la necesidad de representar a través de fracciones (caso 4)* – *Planteamiento abierto de la situación (caso 5)* – *Explicación simbólica de la cuestión a través de preguntas directas que generen la participación de los alumnos.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de una fracción impropia directa para ser graficada (caso 3)*

				– *Planteamiento de situaciones cotidianas que involucra reparto (caso 4)* – *Planteamiento de situaciones cotidianas que involucra reparto (caso 5)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Traslado del tratamiento directo de la fracción impropia a una situación 'cotidiana' para una mejor comprensión (caso 2)* – *Planteamiento de situaciones cotidianas que involucra reparto (caso 4)* – *Planteamiento de situaciones cotidianas que involucra reparto (caso 5)*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de una fracción impropia directa para ser graficada (caso 3)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo a través de pregunta directa para cuestionar el conocimiento matemático involucrado en las actividades (sobre la representación gráfica de una fracción impropia).* – *Diálogo basado en preguntas reflexivas sobre las intervenciones de los compañeros*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la representación gráfica y explicación de una fracción impropia (caso 1)* – *Participación selectiva de los estudiantes sobre la representación gráfica de una fracción impropia.* – *Participación selectiva de los estudiantes al resolver la situación 'cotidiana' (caso 2)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de la situación (caso 4) (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en el análisis de las soluciones expuestas (caso 5)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes al ser una propuesta individual (caso 3)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de la situación (caso 4) (verbal)* – *Explicación de los alumnos del trabajo realizado por los compañeros (sobre las representaciones gráficas de las fracciones impropias)*

			Aplicación práctica	– *Dificultad representar gráficamente una fracción impropia y explicar el trabajo realizado.* – *Diferentes interpretaciones a la fracción impropia (algunas no consideran las condiciones de la misma).* – *Resolución de la situación 'cotidiana' a partir de la 'respuesta' (el alumno sabe a dónde tiene que llegar)* – *Dificultad para resolver la situación inmediatamente. Cuestionamiento por parte de los alumnos* – *Dificultad para reconocer el significado de cada elemento en una fracción impropia*

Sesión 4/Caso 4: Suma y resta de fracciones heterogéneas

Caso codificado				**Códigos Sesión 4/Caso 4**
Sesión 4/ Caso 4	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento de una situación contextualizada en cuestiones ordinarias que involucra fracciones*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento directo de una cuestión diferente (suma de fracciones heterogéneas) a partir de la actividad anterior (suma de fracciones homogéneas)*
			Exploración de conocimientos previos	– *Diálogo como estrategia docente para la exploración y tratamiento de la información involucrada (se evidencia conocimiento sobre suma de fracciones homogéneas).* – *Preguntas directas para explorar el conocimiento involucrado.*
			Exposición/explicación del tema	– *Recurrencia a la 'regla'. Guía directa de la docente.* – *Sistematización de la docente del conocimiento matemático trabajado (suma de fracciones heterogéneas).*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de actividades similares con un nivel de complejidad mayor (tres fracciones)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Planteamiento de una situación contextualizada en cuestiones ordinarias que involucra fracciones*
			De la actividad matemática	– *Propuesta de actividades similares con un nivel de complejidad mayor (tres fracciones)*

	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Cuestionamiento directo por parte de la docente para orientar hacia el tema a tratar (suma de fracciones)*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de las gráficas y tratamiento de las fracciones.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de una suma de fracciones heterogéneas (verbal).* – *Participación selectiva del estudiante en el análisis de los denominadores*
			Total (todos participan)	– *… Participación total del estudiante al ser una actividad propuesta para toda la clase*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de una suma de fracciones heterogéneas (verbal).*
			Aplicación práctica	– *Tendencia del alumno a ‘ver’ directamente las cuestiones numéricas (fracciones propias) frente a la situación expuesta (reparto de barras de chocolate)* – *Consolidación (resumen) escrito por parte del alumno y resolución de caso concreto (aplicando el procedimiento). Participación total del estudiante al ser una actividad propuesta para toda la clase.* – *Participación total de los estudiantes en la resolución de la suma* – *Exploración de las características de los denominadores y el denominador común (relación)* – *Sistematización del trabajo por uno de los estudiantes.*

Sesión 5/Caso 4: Resolución de problemas que involucra suma, resta y multiplicación de fracciones (Primera Parte)

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 4: Primera parte**
Sesión 5/ Caso 4: Primera parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Revisión de la solución de problemas en clase*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de problemas contextualizados en situaciones ‘cotidianas’*
			Exploración de conocimientos previos	
			Exposición/explicación del tema	
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	
		Contextos	De la vida diaria	– *Planteamiento de problemas contextualizados en situaciones ‘cotidianas’*
			De la actividad matemática	
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por a docente) en la reproducción de sus soluciones*
			Total (todos participan)	
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Dificultad para comprender y resolver problemas matemáticos en algunos alumnos.*
			Aplicación práctica	– *Tendencia a una traducción matemática inmediata de la situación y aplicación directa de las operaciones* – *Procedimientos cerrados para la resolución de problemas (se orienta al alumno por un camino específico). No se evidencia fase de exploratoria de la situación.*

Sesión 5/Caso 4: Situaciones que involucran división de fracciones (Segunda Parte)

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 4: Segunda Parte**
Sesión 5/ Caso 4: Segunda Parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento directo de una situación 'cotidianas' simple que involucra fracciones (objetivo: división de fracciones)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento directo de una situación 'cotidianas' simple que involucra fracciones (objetivo: división de fracciones)*
			Exploración de conocimientos previos	– *Propuesta de resolución directa de los alumnos*
			Exposición/explicación del tema	– *Planteamiento de la solución por parte de la docente a través de preguntas directas que se asocian a la traducción matemática y resolución de la misma. La solución resultó compleja para los alumnos.* – *Recurrencia a la representación gráfica como estrategia para la comprensión del tema en cuestión (en la docente).* – *Sistematización (resumen) del tema trabajado con preguntas directas a los estudiantes.* – *La docente no responde a partir del error de la alumna sino en base a su planteamiento directo (así se desarrolla).* – *No se aclara el error de los alumnos (p. e. se dividen fracciones cuando el numerador es mayor que el denominador…)* – *La explicación final fue más directa.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de una división directa de fracciones (al final)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Contextualización de la cuestión matemática en situaciones 'cotidianas' que involucra fracciones como estrategia para reconocer la división como operación. No es un planteamiento similar*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de una división directa de fracciones (al final)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con preguntas directas para orientar la resolución del problema*
		Vertical (al no considerar la participación del alumno)		– *La docente no responde a partir del error de la alumna sino en base a su planteamiento directo (así se desarrolla).*

	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la solución (dirigida por la docente): caso principal (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la solución (dirigida por la docente): caso secundario (verbal)*
			Total (todos participan)	
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la solución (dirigida por la docente): caso principal (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la construcción de la solución (dirigida por la docente): caso secundario (verbal)*
			Aplicación práctica	– *Dificultad en los alumnos para resolver la cuestión planteada (cuántas porciones de un sexto hay en media torta). Planteamientos inconsistentes por parte de los alumnos (aun cuando usan información de la situación, la relación establecida no es la correcta. Uso incorrecto de los signos matemáticos. Dificultad para asociar la situación con una división de fracciones (la tendencia es suma y resta, que podría haberlo resuelto. Los alumnos intentan ‘adivinar’ la operación pertinente)* – *Valoración del trabajo de una alumna por parte de los compañeros.* – *Confusión entre multiplicación y división en la situación propuesta (los alumnos responden cualquiera de esas operaciones).* – *Dificultad para comprender el tema en cuestión. No se aclara las dificultades* – *Aplicación del método rápido (invertir la segunda fracción y multiplicar).* – *Dificultad para comprender la situación inicial*

Sesión 6/Caso 4: División de fracciones en problemas matemáticos (o situaciones)

Caso codificado				**Códigos Sesión 6/Caso 4**
Sesión 6/ Caso 4	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento de problemas matemáticos que implica dividir fracciones*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de problemas matemáticos que implica dividir fracciones*
			Exploración de conocimientos previos	– *Exploración de la solución bajo la dirección de la docente (a través de las preguntas directas)*
			Exposición/explicación del tema	– *Resolución de problemas centrada en el tratamiento de la información matemática (¿Qué hay que hacer?...Una división).* – *Explicación de la docente del proceso de conversión de un mixto a fracción apoyada en preguntas directas a los estudiantes.* – *Uso de la representación gráfica por parte de la docente como estrategia de comprensión de la conversión de mixto a fracción* – *Exposición por parte de la docente del procedimiento para convertir un número mixto en fracción (procedimiento rápido)* – *Retorno a la situación inicial (dividir fracciones)* – *Transformación de la situación inicial (cuántos ¾ hay en 45/2) en una menos compleja (cuántos ½ hay en 45/2).* – *Retorno a la situación inicial (dividir 45/2 entre ¾)* – *Recurrencia a cuestiones cotidianas (kilos) para aclarar cuestiones matemáticas (fracciones)* – *Consolidación por parte de la docente de las expresiones matemáticas surgidas de la representación gráfica* – *Reconstrucción de la solución al problema como estrategia de comprobación y síntesis* – *Orientación directa a la traducción simbólica y resolución de la operación.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Aplicación a nuevas situaciones similares (dentro del mismo contexto cotidiano).*
		Contextos	De la vida diaria	– *Aplicación a nuevas situaciones similares (dentro del mismo contexto cotidiano).*

				– *Planteamiento de problemas matemáticos similares por parte de la docente*
			De la actividad matemática	– *Propuestas directas (descontextualizadas de situaciones cotidianas) de la docente sobre división de fracciones*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Uso de la pregunta directa para evidenciar la comprensión de los alumnos sobre la conversión de números mixtos en fracciones* – *Dirección guiada a través de preguntas directas de la docente en el trabajo de los alumnos,* – *Propuesta de análisis de operaciones para 'descubrir' el procedimiento de división de fracciones (se trabajó en la sesión anterior).* – *Pregunta directa como estrategia de exploración de conocimientos.* – *Preguntas directas de la docente para guiar la solución (propuesta operativa).*
		Vertical (al no considerar la participación del alumno)		
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en el proceso de conversión de mixto a fracción (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación del procedimiento rápido.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de las operaciones.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la identificación de tres cuartos en kilos (a propuesta de la docente y por iniciativa de los alumnos)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de las divisiones (aplicación de la regla por parte de una alumna).* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de la situación.*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los alumnos en el planteamiento de los problemas matemáticos al ser una actividad propuesta pata toda la clase*

		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Exploración de la solución bajo la dirección de la docente (a través de las preguntas directas)* – *Participación selectiva de los estudiantes en el proceso de conversión de mixto a fracción (verbal)* – *Participación selectiva de los estuantes en la resolución de la situación nueva (verbal)*
			Aplicación práctica	– *Planteamiento de una forma de dividir fracciones por parte de un alumno (transformando a equivalentes y anulando denominadores)* – *Estrategias personales de resolución de división de fracciones (transformar el entero en una fracción homogénea a la que divide) por parte de un alumno* – *Validación por parte de la docente de diferentes estrategias utilizadas por los alumnos para llegar a la solución e importancia de llegar a la solución correcta (una solución)* – *Propuesta a los alumnos de planteamiento de problema* – *Dificultad de los alumnos para plantear problemas similares (división de fracciones)* – *Aplicación de la fórmula por parte de los alumnos* – *Aplicación del procedimiento directo para resolver divisiones de fracciones.*

Resumen Caso 4:

Docente que desarrolla el conocimiento a partir de la exploración de las ideas del alumno respecto al tema

- La docente plantea una situación práctica o aplicativa para que el estudiante la resuelva.
- La actividad sirve para contextualizar el tema
- Se desarrolla el tema en base a los conocimientos de los alumnos
- Se plantean problemas o actividades directas para aplicar.

Caso 5

Sesión 1/Caso 5: Comparación de fracciones

Caso codificado				**Códigos Sesión 1/Caso 5**
Sesión 1/ Caso 5	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento de una actividad directa (representar fracciones en una hoja de papel) a partir de lo cual se analizará el conocimiento matemático involucrado*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exploración de conocimientos previos	– *Exploración de conocimientos sobre el tema en cuestión (formas de comparar fracciones)*
			Exposición/explicación del tema	– *Orientación de la comparación de fracciones a partir de las características de sus elementos (se deja la comparación gráfica)* – *Sistematización (consolidación) de la docente (los alumnos orientan sus respuestas en función del contexto no de las fracciones involucradas)* – *Se plantean los casos pero no se llegan a resolver completamente (se proponen otras)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Uso de diferentes casos de fracciones para comparar en base a sus elementos* – *Planteamiento de casos concretos (por parte de la profesora) para validar las respuestas* – *Aplicación del método (análisis de denominadores) a casos específicos de fracciones (directamente)* – *Aplicación del método (equivalencias) a casos de fracciones (directamente)* – *Planteamiento de otro caso (primos entre sí) a través de pares de fracciones. Resolución por parte de los alumnos para hallar las fracciones equivalentes (aplicación del método)* – *Aplicación directa a casos nuevos propuestos en el libro de texto (comparación directa de fracciones)*

		Contextos	De la vida diaria	– *Uso del contexto ‘cotidiano’ simple como estrategia docente para una mejor comprensión de la situación a explicar (comparación de fracciones basada en las características de sus elementos)*
			De la actividad matemática	– *Planteamiento de una actividad directa (representar fracciones en una hoja de papel) a partir de lo cual se analizará el conocimiento matemático involucrado* – *Uso de diferentes casos de fracciones para comparar en base a sus elementos* – *Planteamiento de casos concretos (por parte de la profesora) para validar las respuestas* – *Planteamiento de otro caso (primos entre sí) a través de pares de fracciones. Resolución por parte de los alumnos para hallar las fracciones equivalentes (aplicación del método)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con pregunta directa para el tratamiento inmediato del conocimiento matemático involucrado (comparación gráfica de fracciones)* – *Pregunta de la docente para guiar la participación del alumno en el reconocimiento de las cuestiones buscadas (relación entre los denominadores y el denominador común para el caso de primos entre sí)* – *Pregunta directa para dirigir las respuestas hacia un aspecto concreto de la situación (formas de comparar fracciones)* – *Pregunta directa para dirigir las respuestas hacia un aspecto concreto de la situación (comparación de fracciones basada en la relación entre sus elementos)* – *Pregunta directa para dirigir las respuestas hacia un aspecto concreto de la situación* – *Pregunta directa aplicada por la docente para generar respuestas simples y únicas* – *Pregunta directa aplicada por la docente para orientar rectamente al análisis*
		Vertical (al no considerar la participación del alumno)		– *Desinterés docente por el tratamiento de la dificultad del estudiante*

	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes al evidenciar sus dificultades al representar distintas fracciones en una hoja de papel (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes al comparar gráficamente las fracciones (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes al comparar fracciones teniendo en cuenta las características de sus elementos* – *Participación selectiva de los estudiantes en el análisis de la situación (contexto 'cotidiano') (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes al exponer las formas de comparar fracciones* – *Participación selectiva de los estudiantes al hallar fracciones equivalentes y compararlas* – *Participación selectiva de los estudiantes en la generación de fracciones equivalentes y en el análisis de sus denominadores* – *Participación selectiva de los estudiantes al analizar los denominadores y relacionarlos con el denominador común* – *Participación selectiva de los estudiantes en la explicación de sus soluciones* – *Participación total de los estudiantes al ser una actividad planteada para toda la clase*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los alumnos en la representación de fracciones al ser una actividad individual.*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes al evidenciar sus dificultades al representar distintas fracciones en una hoja de papel (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes al comparar gráficamente las fracciones (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes al comparar fracciones teniendo en cuenta las características de sus elementos* – *Participación selectiva de los estudiantes en el análisis de la situación (contexto 'cotidiano') (verbal)*

			Aplicación práctica	– *Tendencia a aplicar directamente el procedimiento antes de analizar las fracciones* – *Comparación gráfica de fracciones por parte de los alumnos* – *Los alumnos evidencian diferentes formas de enfrentar una situación (representar fracciones en una hoja de papel)* – *Los alumnos expresan otra forma de comparar fracciones (hallando equivalentes)* – *Propuesta por parte de los alumnos de casos concretos de fracciones para comparar* – *Análisis de denominadores comunes (para establecer relaciones)*

Sesión 2/Caso 5: Fracciones equivalentes

Caso codificado				**Códigos Sesión 2/Caso 5**
Sesión 2/ Caso 5	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Presentación directa del objeto matemático para ser analizado (conjunto de fracciones equivalentes, excepto una).*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exploración de conocimientos previos	– *Participación selectiva de los estudiante en la exploración de los conocimientos sobre el conjunto de fracciones (verbal)*
			Exposición/explicación del tema	– *Exposición directa del contenido por parte de la docente (formas de hallar fracciones equivalentes; no obstante, es conocido por el alumno)* – *Consolidación de la maestra (respecto a los números mixtos)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta operativa para aplicar el conocimiento transmitido (aplicación del método a una fracción: caso 1)* – *Propuesta operativa para aplicar el conocimiento transmitido (aplicación del método a una fracción: caso 2)*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Propuesta operativa para aplicar el conocimiento transmitido (aplicación del método a una fracción: caso 1 y caso 2)*

	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar seguidamente al objetivo deseado.* – *Valoración de los distintos caminos que siguen los alumnos para trabajar el conocimiento matemático*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiante en la exploración de los conocimientos sobre el conjunto de fracciones (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes al justificar una no equivalencia de fracciones y al simplificar una fracción (verbal).* – *Participación selectiva de los estudiantes al aplicar la estrategia y salir a la pizarra (caso 2)* – *Participación selectiva de los estudiantes al exponer sus productos (formas de transformar una fracción impropia en número mixto)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los alumnos al convertir a números mixtos una fracción impropia*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	– *Participación selectiva de los estudiantes al justificar una no equivalencia de fracciones y al simplificar una fracción (verbal).* – *Dificultad de los alumnos para justificar correctamente un hecho (sus respuestas son parcialmente correctas).*
			Aplicación práctica	– *Participación total de los alumnos al convertir a números mixtos una fracción impropia* – *Exposición del alumno al grupo total de su trabajo realizado.*

Sesión 3/Caso 5: Equivalencia de fracciones (mayores y menores a una dada. Método de la simplificación y ampliación)

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/Caso 5**
Sesión 3/Caso 5	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Presentación directa del objeto matemático para ser expuesto por la docente*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exploración de conocimientos previos	

			Exposición/explicación del tema	– *Explicación por parte de la docente del tema a tratar (forma de hallar fracciones equivalentes a una dada)* – *Propuesta directa del conocimiento matemático*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de un caso concreto para hallar fracciones equivalentes a una dada (caso 1)* – *Propuesta de otro caso para hallar sus fracciones equivalentes (caso 2)* – *Propuesta de casos concretos de sumas y restas de fracciones (uso del libro de texto)*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Presentación directa del objeto matemático para ser expuesto por la docente* – *Propuesta de un caso concreto para hallar fracciones equivalentes a una dada (caso 1 y caso 2)* – *Propuesta de casos concretos de sumas y restas de fracciones (uso del libro de texto)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Preguntas directas para orientar inmediatamente a la cuestión requerida* – *Diálogo basado en la pregunta directa con referencia directa al procedimiento (u otras cuestiones clave)* – *Propuesta de pregunta ‘conflictiva’ que genera conflicto en el alumno* – *Validación de los procedimientos usados (la maestra no se orienta a usar un solo procedimiento por la simplificación del trabajo sino por la comprensión del alumno)*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes para hallar fracciones equivalentes y reflexión en torno a ellas (caso 1)* – *Participación selectiva de los estudiantes para hallar fracciones equivalentes a una dada y reflexionar sobre ellas (caso 2)* – *Participación selectiva de los alumnos y propuesta de una forma distinta de comprobación de fracciones equivalentes (dividiendo N entre D).*
			Total (todos participan)	– *Participación total al ser un caso propuesto para toda la clase (caso 1 y 2)*

		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	
			Aplicación práctica	– *… propuesta de una forma distinta de comprobación de fracciones equivalentes (dividiendo N entre D).* – *Aplicación de lo aprendido (simplificar) a casos nuevos (suma y resta de fracciones homogéneas)* – *Actitud receptiva de los estudiantes*

Sesión 4/Caso 5: Área de figuras compuestas

Caso codificado				**Códigos Sesión 4/Caso 5**
Sesión 4/ Caso 5	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Propuesta de problemas matemáticos sobre áreas (actividades de aplicación a situaciones más complejas)*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exploración de conocimientos previos	– *Exploración directa de conocimientos previos (área de figuras simples)*
			Exposición/explicación del tema	– *Planteamiento directo del camino de solución al problema planteado (a partir del área de figura simples)* – *Orientación directa hacia la forma de resolver el problema*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de actividades de aplicación similares a la actividad inicial* – *Propuesta de actividades de aplicación con cierta variante (actividad pendiente)*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Propuesta de problemas matemáticos sobre áreas (actividades de aplicación a situaciones más complejas)* – *Propuesta de actividades de aplicación similares a la actividad inicial* – *Propuesta de actividades de aplicación con cierta variante*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar inmediatamente al objetivo propuesto (hallar áreas de figuras compuestas)*

				– *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar el proceso hacia el objetivo propuesto (reconocimiento de formas simples para hallar su área).* – *Diálogo basado en la pregunta directa para orientar el proceso hacia el objetivo propuesto (reconocimiento de formas simples).*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes (en la exposición del procedimiento seguido para hallar el área de la figura compuesta)* – *Participación selectiva de los estudiantes (al exponer el proceso o parte de él)* – *Participación selectiva del estudiante (al participar en la resolución oral de problema con la guía de la docente)*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los alumnos al ser una actividad propuesta para ser resuelta individualmente* – *Resolución de los casos por los alumnos*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	
			Aplicación práctica	– *Resolución de los casos por los alumnos* – *Resolución parcial de la actividad* – *Reflexión de los estudiantes a partir de las preguntas de la docente* – *Reconocimiento de figuras simples en otras más complejas* – *Dificultad para recordar inmediatamente el conocimiento matemático* – *Confusión de los alumnos de los conocimientos involucrados (superficie y área).* – *Dificultad para resolver inmediatamente el problema planteado*

Sesión 5/Caso 5: Resolución de problemas sobre áreas de figuras compuestas (continuación de la sesión anterior)

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 5**
Sesión 5/ Caso 5	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Presentación de la actividad	– *Planteamiento directo de casos concretos (siguiendo la sesión anterior) de áreas de figuras planas complejas (figuras cerradas)*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exposición/explicación del tema	– *Exposición directa de la docente de una estrategia nueva para resolver antes de operar*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento directo de un caso concreto con características diferentes (figuras abiertas)* – *Planteamiento directo de casos concretos con ciertas características diferentes (figuras expuestas, enmarcadas dentro de una cuadrícula)* – *Planteamiento directo de otro caso concreto similar*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Planteamiento directo de casos concretos (siguiendo la sesión anterior) de áreas de figuras planas complejas (figuras cerradas)* – *Planteamiento directo de un caso concreto con características diferentes (figuras abiertas)* – *Planteamiento directo de casos concretos con ciertas características diferentes (figuras expuestas, enmarcadas dentro de una cuadrícula)* – *Planteamiento directo de otro caso concreto similar*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en preguntas directas para orientar inmediatamente a la cuestión requerida (hallar el área de la figura compleja)* – *Exposición al grupo total del proceso seguido por uno de los alumnos para ser comentado.*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente: primer caso)* – *Participación selectiva de los estudiantes (propuesta por la docente: segundo caso)*

				– *Participación selectiva de los estudiantes*
			Total (todos participan)	– *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (primer caso)* – *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (segundo caso)* – *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (tercer y cuarto caso)* – *Participación total de los estudiantes al ser propuesta la actividad para resolverla individualmente (quinto caso)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente, sin aplicación práctica)	
			Aplicación práctica	– *Aplicación del procedimiento seguido (reconocer figuras simples y hallar sus áreas)* – *Uso de estrategias distintas seguidas por los alumnos: completar y trabajar con las figuras de modelo* – *Exposición/explicación del proceso seguido* – *Confusión parcial de los alumnos al resolver este tipo de situaciones.* – *Dificultad para responder correctamente la cuestión planteada (algunos no responde, otros hallan las áreas parciales)*

Sesión 6/Caso 5: Ecuaciones: reconocimiento, contextualización y resolución (trasposición de términos)

Caso codificado				**Códigos Sesión 6/Caso 5**
Sesión 6/ Caso 5	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Exploración específica del tema (centrada en la cuestión a desarrollar)	– *Exploración de ideas sobre el tema planteado.*
			Presentación de la actividad	– *Presentación directa del objeto matemático (una ecuación)*
			Planteamiento de caso concreto	
			Exposición/explicación del tema	– *Exposición del conocimiento por parte de la docente (para justificar)*

				– *Relevancia de la traducción y operación frente a la situación (la resolución de centra en el planteamiento inmediato de la ecuación: caso 1)* – *Relevancia de la traducción y operación frente a la situación (la resolución de centra en el planteamiento inmediato de la ecuación: caso 2)* – *Precisión de términos matemáticos para las cuestiones aplicadas (“trasposición de términos”)* – *Presentación escrita y explicación de la información trabajada (ficha técnica)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de planteamiento de situaciones (“reales”) por parte de los alumnos*
		Contextos	De la vida diaria	– *Contextualización del tema tratado (dinero)*
			De la actividad matemática	– *Presentación directa del objeto matemático (una ecuación)*
	Relación profesor – alumnos	Horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo basado en la pregunta directa para encaminar inmediatamente al objetivo planteado (reconocer ecuaciones).* – *Cuestionamiento de la docente sobre el proceso seguido por los estudiantes*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los alumnos en la exploración de ideas base (verbal)* – *Participación selectiva de los alumnos al interactuar con la ecuación en una situación concreta (mi dinero aumentado en 68 es 145) (verbal)* – *Participación selectiva de los alumnos al desarrollar la ecuación (modelo)* – *Participación selectiva de los alumnos en la resolución de otros planteamientos similares (caso aplicativo)* – *Participación selectiva de los alumnos al desarrollar otros planteamientos de ecuaciones (caso aplicativo)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *… en la exploración de ideas base (verbal)* – *… al interactuar con la ecuación en una situación concreta (mi dinero aumentado en 68 es 145) (verbal)*

			Aplicación práctica	– *Resolución de la situación por parte de los alumnos (caso modelo. No es un tema nuevo)* – *Resolución de la situación por parte de los alumnos (caso aplicativo 1)* – *Resolución de la situación por parte de los alumnos (caso aplicativo 2)* – *Los alumnos plantean situaciones similares al modelo (contextualizado en situaciones "reales")* – *Propuesta de planteamiento de situaciones similares por parte de los alumnos (descontextualizada de situaciones cotidianas)* – *Propuesta de planteamiento de situaciones ("reales") por parte de los alumnos* – *Los alumnos plantean situaciones similares al modelo (contextualizado en situaciones "reales")* – *Los alumnos plantean situaciones similares al modelo; no obstante incluyen otras relaciones (doble) que involucran otras operaciones (multiplicación y división)* – *Propuesta de actividades de aplicación del tema trabajado (uso del libro de texto)* – *Resolución de actividades del libro de texto por parte de los alumnos*
			Lectura de textos	– *Lectura individual por parte de los alumnos.*

Resumen Caso 5:

Docente que se orienta hacia el tratamiento operativo del conocimiento matemático

- La docente plantea directamente la situación.
- Se trabaja con la participación de los alumnos.
- Se utiliza el contexto (el conocimiento matemático aplicado a situaciones ‘cotidianas’) esporádicamente.
- La docente expone aspectos puntuales del proceso seguido (‘teoría’ puntual).
- Se aplica a otros casos concretos (directamente a una expresión matemática).

Caso 6

Sesión 1/Caso 6: Operaciones con fracciones a través del perímetro de figuras planas

Caso codificado				**Códigos Sesión 1/Caso 6**
Sesión 1/ Caso 6	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Declaración inicial (del tema o de la actividad)	
			Exploración específica del tema (centrada en la cuestión a desarrollar)	– *Exploración de conocimientos previos puntuales a través de la pregunta directa y el análisis de imágenes.* – *La actividad se usa para introducir un tema matemático concreto: suma de fracciones homogéneas y su transformación en multiplicación de fracción por entero)* – *Exploración de ideas sobre la imagen expuesta*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de la situación concreta (hallar el perímetro) a partir de la actividad introductoria (exploración de conocimientos)* – *Planteamiento de un caso distinto a partir del anterior (rectángulo)* – *Propuesta de una suma de entero y fracción (a propósito del trabajo paso a paso…)*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Exposición de conocimiento puntual clave para orientar la participación de los alumnos (respuestas)* – *Tratamiento minucioso de la situación (paso a paso). Exploración por pasos dados (¿cuál es el mcm?, ¿por qué es cuatro?, ¿…en todos los casos es igual…?)* – *Transformación de la actividad a una más simple (con números naturales)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento directo de la cuestión a desarrollar (perímetro de la imagen) a través de otro caso con cierta variante (manipulación de fracciones heterogéneas)* – *Planteamiento directo de la cuestión a desarrollar (perímetro de la imagen) a través de otro caso con cierta variante (resultado)*

		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Exploración de conocimientos previos puntuales a través de la pregunta directa y el análisis de imágenes.* – *Exploración de ideas sobre la imagen expuesta*
		Forma de trabajo en el aula		– *Valoración, por parte de la docente, de la participación y atención como estrategias de aprendizaje.*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente* – *Diálogo, pregunta directa para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente. La actividad se usa para reforzar una idea previa ("un número natural sumado a una fracción se puede transformar a mixto").* – *Exposición de conocimiento puntual clave para orientar la participación de los alumnos (respuestas)*
		Vertical (al desarrollar solo)		– *Exposición de conocimiento puntual clave para orientar la participación de los alumnos (respuestas)*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de ideas previas (generales)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución del perímetro (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de ideas previas (generales): caso rectángulo.* – *Participación selectiva de los estudiantes sobre operaciones con fracciones (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de un entero más una fracción (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de un perímetro (tercer caso)*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de ideas previas (generales)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exploración de ideas previas (generales): caso rectángulo.*

				– *Participación selectiva de los estudiantes sobre operaciones con fracciones (verbal)* – *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de un entero más una fracción (verbal)* – *Intercambio de ideas entre los estudiantes* – *Dificultad de los estudiantes para conectar con las preguntas directas de la docente*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la resolución de un perímetro (tercer caso)*

Sesión 2/Caso 6: Resolución de fracciones complejas

Caso codificado				**Códigos Sesión 2/Caso 6**
Sesión 2/ Caso 6	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Declaración inicial (del tema o de la actividad)	– *Planteamiento y desarrollo de una actividad operativa con fracciones (fracciones complejas) (no se puede llamar corrección de la tarea para casa pues la docente desarrolla la misma con intervención directa de los alumnos)*
			Exploración específica del tema (centrada en la cuestión a desarrollar)	– *Exploración y aplicación de conocimientos previos puntuales a través de la pregunta directa y el análisis de la expresión matemática*
			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento y desarrollo de una actividad operativa con fracciones (fracciones complejas)…*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Tratamiento minucioso de la información matemática involucrada por parte de la docente con participación de los estudiantes* – *Explicación directa de la docente del planteamiento y solución*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido y más)	– *Planteamiento y desarrollo de una actividad operativa con fracciones complejas (no se puede llamar corrección de la tarea para casa pues la docente desarrolla la misma con intervención directa de los alumnos)*
		Contextos	De la vida diaria	

			De la actividad matemática	– *Planteamiento y desarrollo de una actividad operativa con fracciones (fracciones complejas)…*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad)*
		Vertical (al desarrollar solo)		– *Consolidación por parte de la maestra*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes exponiendo el proceso* – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación expositiva del contenido expuesto* – *Participación selectiva de los estudiantes exponiendo ideas concretas del tema en cuestión*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Participación selectiva de los estudiantes exponiendo el proceso* – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación expositiva del contenido expuesto* – *Participación selectiva de los estudiantes exponiendo ideas concretas del tema en cuestión*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	*(las actividades se desarrollaron en casa)*

Sesión 3/Caso 6: Área de figuras geométricas

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/Caso 6: Primera Parte**
Sesión 3/ Caso 6: Primera Parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Declaración inicial (del tema o de la actividad)	– *Propuesta de revisión de tarea sobre áreas de figuras cuyas medidas se expresan en fracciones.*
			Exploración específica del tema (centrada en la cuestión a desarrollar)	– *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad)*
			Planteamiento de caso concreto	– *Presentación del caso (área sombreada de la figura)*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Transformación de la actividad en una más simple (número enteros. Esta estrategia la empleó anteriormente)*

				– *Regreso a la cuestión inicial luego de la transformación en una más simple* – *Tratamiento minucioso (paso a paso) de la resolución de la propuesta.* – *Tratamiento minucioso de la información matemática involucrada por parte de la docente con participación de los estudiantes* – *Exposición general por parte de la docente del proceso a seguir (en el segundo caso)* – *Consolidación por parte de la docente.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Planteamiento de un caso similar para ser desarrollado*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Presentación del caso (área sombreada de la figura)*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad en manos de la docente)*
		Vertical (al desarrollar solo)		– *Sistematización individual de la docente del trabajo realizado*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes* – *Participación selectiva de los estudiantes*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para orientar el trabajo del alumno con la guía de la docente (y desarrollar la actividad)*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Resolución de la actividad por parte de los alumnos (caso nuevo)* – *Dificultad para manipular fracciones (números mixtos. Los alumnos han participado anteriormente de una experiencia que los involucra)*

Sesión 3/Caso 6: Potenciación y radicación de fracciones

Caso codificado				**Códigos Sesión 3/Caso 6: Segunda Parte**
Sesión 3/ Caso 6: Segunda Parte	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Declaración inicial (del tema o de la actividad)	– *Cambio de actividad. Introducción a un tema nuevo* – *Exposición directa del objetivo (tema a desarrollar) y exploración directa de conocimientos previos*
			Exploración genera del tema	– *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para precisar el trabajo del alumno con la guía de la docente (exploración de conocimientos sobre multiplicación de fracciones).* – *Exploración de conocimientos a partir de la pregunta directa (sobre comparación de potencias).*
			Planteamiento de caso concreto	– *Descontextualización de la situación y trabajo directo con la expresión matemática y las operaciones que las involucran. Propuesta directa de un caso (¿Qué es mayor?: Potencias de igual base y diferente exponente).* – *Propuesta directa de otro caso aplicado a fracciones (bases iguales diferente exponente)*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Tratamiento minucioso (paso a paso) de las cuestiones involucradas en el tratamiento directo de la expresión matemática.* – *Consolidación (resumen) por parte de la docente* – *Uso de representaciones gráficas para introducir multiplicación de fracciones* – *Valoración del conocimiento a partir de la demostración.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de casos concretos (potencias) para aplicar propiedades del conocimiento involucrado (aplicación a fracciones de las propiedades de la potenciación).*
		Contextos	De la vida diaria	– *Propuesta de una actividad contextualizada*
			De la actividad matemática	– *Contextualización del nuevo tema en situaciones matemáticas previas (números naturales)*

				– *Descontextualización de la situación y trabajo directo con la expresión matemática y las operaciones que las involucran. Propuesta directa de un caso.*
		Libro de texto		– *Valoración del uso del libro, como fuente de información, antes de resolver (para consultar)*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para precisar el trabajo del alumno con la guía de la docente.* – *Diálogo, pregunta directa e introducción de conocimiento puntual clave para precisar el trabajo del alumno con la guía de la docente.*
		Vertical (al desarrollar solo)		– *Sistematización (resumen) de la información por parte de la docente*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación de los conocimientos previos de manera expositiva.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación de los conocimientos.*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación de los conocimientos previos de manera expositiva*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación de los conocimientos* – *Dificultad para trabajar con variables (a/b) (se escucharon respuestas correctas cuando el número era una fracción especifica)*

Sesión 4/Potencia de fracciones (continuación de la clase anterior)

Caso codificado				**Códigos Sesión 4/Caso 6**
Sesión 4/ Caso 6	Tratamiento del	Secuencia	Declaración inicial (del tema o de la actividad)	*(se declaró en la clase anterior)*

	conocimiento matemático		Exploración específica del tema (centrada en la cuestión a desarrollar)	– *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.*
			Planteamiento de caso concreto	– *Tratamiento directo de la cuestión matemática. Presentación de un caso específico (potencia de fracciones)* – *Tratamiento directo de la cuestión matemática. Presentación de un caso específico (potencia de potencia de fracciones)*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *No aplicación a situaciones nuevas parecidas (se trabaja el caso y se continúa con otro)*
		Contextos	De la vida diaria	
			De la actividad matemática	– *Tratamiento directo de la cuestión matemática. Presentación de un caso específico (potencia de fracciones)* *Tratamiento directo de la cuestión matemática. Presentación de un caso específico (potencia de potencia de fracciones)*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.*
		Vertical (al desarrollar solo)		
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	

Sesión 5/Caso 6: Radicación de fracciones

Caso codificado				**Códigos Sesión 5/Caso 6**
Sesión 5/ Caso 6	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Declaración inicial (del tema o de la actividad)	– *Declaración del tema (radicación de fracciones)*
			Exploración general del tema	– *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.*
			Planteamiento de caso concreto	– *Propuesta directa de las cuestiones matemáticas aplicada a fracciones (potencia y radicación)*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Tratamiento minucioso de la cuestión matemática* – *Orientación al tratamiento de la operatividad como actividad matemática* – *Resolución por parte de la docente* – *Transformación de la situación a una menos compleja para una mejor explicación.*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Propuesta de operaciones complejas (que combinan varias propiedades)* – *Propuesta de aplicación del conocimiento trabajado en una situación matemática sobre áreas (aplicación a problemas matemáticos escolares)*
		Contextos	De la vida diaria	–
			De la actividad matemática	– *Propuesta de operaciones complejas (que combinan varias propiedades)* – *Propuesta de aplicación del conocimiento trabajado en una situación matemática sobre áreas (aplicación a problemas matemáticos escolares)*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.*

				– *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.*
		Vertical (al desarrollar solo)		– *Resolución por parte de la docente (de la actividad propuesta)*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos* – *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos y desarrollo de la operación*
		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Dificultad para recordar las propiedades y aplicarlas a fracciones.* – *Aplicación a números específicos para una mejor explicación.*

Sesión 6/Caso 6: Números decimales: Lectura y escritura (uso del TVP)

Caso codificado				**Códigos Sesión 6/Caso 6**
Sesión 6/ Caso 6	Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia	Declaración inicial (del tema o de la actividad)	– *Declaración directa del contenido matemático a trabajar (números decimales)* – *Exposición directa del tema a tratar (lectura de decimales). Presentación de un caso directo (un número decimal).*
			Exploración general del tema	– *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Diálogo con pregunta directa e inclusión de contenido específico y ejemplos para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.*

			Planteamiento de caso concreto	– *Planteamiento de situación problemática cotidiana para introducir tema matemático (comparación de números decimales)* – *… Presentación de un caso directo (un número decimal para su lectura).*
			Exposición/explicación del tema a través de un caso concreto	– *Explicación directa del conocimiento por parte de la docente* – *Orientación hacia el tratamiento directo de la cuestión matemática (descontextualización de la situación cotidiana)*
			Propuesta de casos nuevos (para aplicar lo aprendido)	– *Aplicación de la técnica a situaciones concretas (otros números decimales)*
		Contextos	De la vida diaria	– *Planteamiento de situación problemática cotidiana para introducir tema matemático (comparación de números decimales)* – *Contextualización de números decimales por parte de los alumnos*
			De la actividad matemática	– *… Presentación de un caso* directo (un número decimal para su *lectura).*
	Relación profesor – alumnos	Semi horizontal (al establecer diálogo)		– *Diálogo con pregunta directa para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Diálogo con pregunta directa e inclusión de contenido específico y ejemplos para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.* – *Interacción docente – alumno – conocimiento a través de las preguntas directas propuestas por la docente*
		Vertical (al exponer)		– *Explicación directa del conocimiento por parte de la docente*
	Participación del alumno	En el desarrollo de la actividad	Selectiva (solo algunos. Los alumnos eligen participar. Suele darse en la propuesta de preguntas)	– *Participación selectiva de los estudiantes en la exposición de los conocimientos previos* – *Participación selectiva de los estudiantes para aplicar el conocimiento aprendido.* – *Participación selectiva de los estudiantes en la aplicación del conocimiento nuevo*

		En la interacción con el conocimiento	Aplicación expositiva (indicando verbalmente)	– *Diálogo con pregunta directa e inclusión de contenido específico y ejemplos para orientar la participación de los alumnos hacia la aplicación del conocimiento matemático involucrado.*
			Aplicación práctica (trabajando directamente con el caso concreto)	– *Aplicación de la técnica a situaciones concretas (otros números decimales)* – *Dificultad para acertar inmediatamente en la aplicación del nuevo conocimiento.*

Resumen Caso 6:

Docente que busca la profundización de la parte operativa

- La docente plantea directamente la situación.
- Se trabaja directamente con la docente.
- Se pregunta cada paso a los alumnos.
- Se profundiza con la docente.
- Los problemas (u operaciones) se resuelven paso a paso en clase con la docente.

Categoría de las actividades de las sesiones. Resumen por Caso

Caso 1 (Resumen)

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Estrategias de introducción/aplicación del conocimiento	Exploración de conocimientos	Sondeo teórico y/o aplicativo del conocimiento adquirido. El sondeo teórico responde a la pregunta ¿qué?, mientras que el sondeo aplicativo se circunscribe a ejemplos concretos.
		Planteamiento de la actividad	Propuesta de actividad (general) de enseñanza – aprendizaje que permitirá conectar con el conocimiento matemático.
		Planteamiento de casos concretos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta directa del conocimiento matemático (desenmarcado de cualquier actividad que lo conecte)
		Planteamiento de nuevos casos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta de casos similares para aplicar el conocimiento aprendido (trabajo operativo)
		Planteamiento de situaciones generales	Propuesta de cuestiones generales cotidianas que involucran conocimiento matemático
	Secuencia: estrategias de desarrollo del conocimiento	Comparación gráfica y simbólica de una cuestión matemática y análisis	Cotejo de dos cuestiones diferentes (gráfica y simbólica) a fin de interpretar la más abstracta (simbólica)
		Comparación gráfica de una misma cuestión matemática	Cotejo de dos cuestiones diferentes a fin de extraer ideas comunes
		Descontextualización del conocimiento matemático para su	Desprendimiento/desarticulación del conocimiento de la

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		tratamiento directo (análisis de la expresión matemática)	situación que lo contiene.
		Contextualización del conocimiento matemático	Enmarcación del conocimiento matemático en situaciones cotidianas
		Manipulación gráfica	Recurrencia al uso de gráficas para representar el conocimiento matemático (la expresión matemática involucrada)
		Planteamiento de preguntas a los estudiantes sobre el conocimiento matemático	Interrogación diversa sobre el conocimiento matemático involucrado
		Intervención de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación de los estudiantes en la generación del conocimiento matemático
		Intervención de los alumnos en la aplicación del conocimiento	Participación de los estudiantes en la aplicación del conocimiento a diferentes cuestiones concretas
		Uso de casos concretos	Situaciones específicas (contextualizadas o no) que involucran el conocimiento matemático para su reconocimiento inmediato
		Síntesis del conocimiento	Resumen del trabajo realizado circunscrito al conocimiento aplicado
		Reflexión sobre el tema	Toma de conciencia sobre las situaciones (cotidianas) que involucran el

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
			conocimiento matemático
		Tratamiento de la situación general	A partir de la cual se genera el conocimiento matemático (diverso)
		Tratamiento constante del nuevo conocimiento	Reincidencia en la interacción con el nuevo conocimiento (no se agota en una sola clase o en un solo caso)
		Contextualización a nuevas situaciones generales	Transferencia del nuevo conocimiento a situaciones generales diferentes
	Contextos	De la vida diaria	Contextualización en una situación cotidiana de la cuestión matemática desarrollada o por desarrollar
		De la actividad matemática	Descontextualización del objeto matemático de toda situación cotidiana para tratarlo directamente
Relación profesor – alumno	horizontal	Diálogo continuo	Generación de preguntas que permiten una comunicación fluida (preguntas a partir de las respuestas)
	Semi horizontal	Diálogo cortante	Generación de preguntas que permiten una comunicación detenida, con respuestas simples y cortantes.
Participación del alumno (s)	En el desarrollo de la actividad	Selectiva	Elección personal de participación por parte del estudiante o propuesta por el o la docente. No participa toda la clase.
		Total	Participación total de la clase en el desarrollo de la actividad.

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
	En interacción con el conocimiento	Teórica	Exposición verbal del conocimiento matemático (conceptual o procedimental)
		Práctica	Aplicación personal del conocimiento en situaciones que requieren de su uso (contextualizando o aplicando directamente)
		Fácil	Interacción inmediata y directa, ya sea de manera teórica o práctica
		Difícil	Dificultad para acceder al conocimiento matemático o aplicarlo correctamente

Caso 2 (Resumen)

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia: estrategias de introducción/aplicación del conocimiento	Revisión en pizarra de la tarea	Sondeo práctico del conocimiento matemático aprendido
		Exposición directa inicial	Declaración del tema a trabajar y/o explicación simplificada del mismo
		Planteamiento de casos concretos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta directa del conocimiento matemático (desenmarcado de cualquier actividad que lo conecte)
		Planteamiento de nuevos casos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta de casos similares para aplicar el conocimiento aprendido (trabajo operativo)
		Planteamiento de problemas matemáticos	Propuesta de situaciones que exponen una cuestión y solicitan hallar un dato con la información brindada.
	Secuencia: estrategias de desarrollo del conocimiento	Comparación gráfica y simbólica de una cuestión matemática y análisis	Cotejo de dos cuestiones diferentes (gráfica y simbólica) a fin de interpretar la más abstracta (simbólica)
		Exposición directa	Explicación del tema sin mayor intervención de los estudiantes
		Descontextualización del conocimiento matemático para su tratamiento directo (análisis de la expresión matemática)	Desprendimiento/desarticulación del conocimiento de la situación que lo contiene.
		Contextualización del conocimiento matemático	Enmarcación del conocimiento matemático en situaciones cotidianas
		Manipulación gráfica	Recurrencia al uso de gráficas para representar el conocimiento

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
			matemático (la expresión matemática involucrada)
		Planteamiento de preguntas a los estudiantes sobre el conocimiento matemático aplicado	Interrogación diversa sobre el conocimiento matemático aplicado en la resolución de una actividad
		Intervención selectiva de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación directa de un estudiante en la generación del conocimiento matemático
		Intervención de los alumnos en la aplicación del conocimiento	Participación de los estudiantes en la aplicación del conocimiento a diferentes cuestiones concretas
		Guía directa en la docente en el trabajo del estudiante	Acompañamiento constante y secuencial de la docente
		Uso de casos concretos	Situaciones específicas (contextualizadas o no) que involucran el conocimiento matemático para su reconocimiento inmediato
		Síntesis del conocimiento	Resumen del trabajo realizado circunscrito al conocimiento aplicado
		Contextualización a nuevos casos concretos (operaciones y problemas)	Transferencia del nuevo conocimiento a situaciones concretas diferentes
	Contextos	De la vida diaria	Contextualización en una situación cotidiana de la cuestión matemática desarrollada o por desarrollar
		De la actividad matemática	Descontextualización del objeto matemático de toda situación cotidiana para tratarlo directamente

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Relación profesor – alumno	Semi horizontal	Diálogo cortante	Generación de preguntas que permiten una comunicación detenida, con respuestas simples y cortantes.
	vertical	Exposición	Comunicación en una sola dirección, generalmente de parte del maestro.
Participación del alumno (s)	En el desarrollo de la actividad	Selectiva	Elección personal de participación por parte del estudiante o propuesta por el o la docente. No participa toda la clase.
		Total	Participación total de la clase en el desarrollo de la actividad.
	En interacción con el conocimiento	Teórica	Exposición verbal del conocimiento matemático (conceptual o procedimental)
		Práctica	Aplicación personal del conocimiento en situaciones que requieren de su uso aplicativo.
		Fácil	Interacción inmediata y directa, ya sea de manera teórica o práctica
		Difícil	Dificultad para acceder al conocimiento matemático o aplicarlo correctamente

Caso 3 (Resumen)

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia: estrategias de introducción/aplicación del conocimiento	Planteamiento de actividades del libro de texto	Planteamiento de actividades del libro de texto para aplicar conocimiento matemático aprendido
		Exploración de conocimientos	Sondeo teórico y/o aplicativo del conocimiento adquirido. El sondeo teórico responde a la pregunta ¿qué?, mientras que el sondeo aplicativo se circunscribe a ejemplos concretos.
		Exposición directa inicial	Declaración del tema a trabajar y/o explicación simplificada del mismo
		Planteamiento de casos concretos (cuestiones directas)	Propuesta directa del conocimiento matemático (desenmarcado de cualquier actividad que lo conecte)
		Planteamiento de nuevos casos (cuestiones directas)	Propuesta de casos similares para aplicar el conocimiento aprendido (trabajo operativo)
	Secuencia: estrategias de desarrollo del conocimiento	Corrección individual	Corrección de las actividades propuestas a los alumnos de manera individual
		Transformación de actividades ya resueltas	Cambio de algún aspecto de la actividad propuesta para una transformación del producto
		Reflexión grupal de la actividad desarrollada	Intercambio de ideas sobre el proceso seguido en la resolución de una actividad
		Exposición directa	Explicación del tema sin mayor intervención de los estudiantes

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		Descontextualización del conocimiento matemático para su tratamiento directo (análisis de la expresión matemática)	Desprendimiento/desarticulación del conocimiento de la situación que lo contiene.
		Contextualización del conocimiento matemático	Enmarcación del conocimiento matemático en situaciones cotidianas
		Manipulación gráfica	Recurrencia al uso de gráficas para representar el conocimiento matemático (la expresión matemática involucrada)
		Intervención de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación de los estudiantes en la generación del conocimiento matemático
		Intervención de los alumnos en la aplicación del conocimiento	Participación de los estudiantes en la aplicación del conocimiento a diferentes cuestiones concretas
	Contextos	De la vida diaria	Contextualización en una situación cotidiana de la cuestión matemática desarrollada o por desarrollar
		De la actividad matemática	Descontextualización del objeto matemático de toda situación cotidiana para tratarlo directamente
Relación profesor – alumno	Semi horizontal	Diálogo cortante	Generación de preguntas que permiten una comunicación detenida, con respuestas simples y cortantes.
	vertical	Exposición	Comunicación en una sola dirección, generalmente de parte del maestro.

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Participación del alumno (s)	En el desarrollo de la actividad	Selectiva	Elección personal de participación por parte del estudiante o propuesta por el o la docente. No participa toda la clase.
		Total	Participación total de la clase en el desarrollo de la actividad.
	En interacción con el conocimiento	Teórica	Exposición verbal del conocimiento matemático (conceptual o procedimental)
		Práctica	Aplicación personal del conocimiento en situaciones que requieren de su uso aplicativo.
		Fácil	Interacción inmediata y directa, ya sea de manera teórica o práctica
		Difícil	Dificultad para acceder al conocimiento matemático o aplicarlo correctamente

Caso 4 (Resumen)

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia: estrategias de introducción/aplicación del conocimiento	Exploración de conocimientos	Sondeo teórico y/o aplicativo del conocimiento adquirido. El sondeo teórico responde a la pregunta ¿qué?, mientras que el sondeo aplicativo se circunscribe a ejemplos concretos.
		Planteamiento de la actividad	Propuesta de actividad (general) de enseñanza – aprendizaje que permitirá conectar con el conocimiento matemático.
		Planteamiento de casos concretos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta directa del conocimiento matemático (desenmarcado de cualquier actividad que lo conecte)
		Planteamiento de nuevos casos (expresiones matemáticas directas)	Propuesta de casos similares para aplicar el conocimiento aprendido (trabajo operativo)
		Planteamiento de problemas matemáticos	Propuesta de situaciones que exponen una cuestión y solicitan hallar un dato con la información brindada.
	Secuencia: estrategias de desarrollo del conocimiento	Corrección en plenaria	Corrección de la actividad propuesta delante de toda la clase
		Descontextualización del conocimiento matemático para su tratamiento directo (análisis de la expresión matemática)	Desprendimiento/desarticulación del conocimiento de la situación que lo contiene.
		Contextualización del conocimiento matemático	Enmarcación del conocimiento

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
			matemático en situaciones cotidianas
		Manipulación gráfica	Recurrencia al uso de gráficas para representar el conocimiento matemático (la expresión matemática involucrada)
		Exposición directa	Explicación del tema sin mayor intervención de los estudiantes
		Planteamiento de preguntas a los estudiantes sobre el conocimiento matemático	Interrogación diversa sobre el conocimiento matemático involucrado
		Intervención de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación de los estudiantes en la generación del conocimiento matemático
		Intervención de los alumnos en la aplicación del conocimiento	Participación de los estudiantes en la aplicación del conocimiento a diferentes cuestiones concretas
		Uso de casos concretos	Situaciones específicas (contextualizadas o no) que involucran el conocimiento matemático para su reconocimiento inmediato
		Síntesis del conocimiento	Resumen del trabajo realizado circunscrito al conocimiento aplicado
		Traslación del conocimiento de una gráfica a otra	Representación del conocimiento matemático en una gráfica distinta
		Planteamiento de problemas matemáticos (no	Propuesta de situaciones que exponen una cuestión y solicitan hallar un dato

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
		estructurados, abiertos, cerrados)	con la información brindada.
		Guía directa en la docente en el tratamiento de la información	Acompañamiento constante y secuencial de la docente en el tratamiento de la información
		Transformación de casos o situaciones a otros más simples	Cambio de una situación a otra más sencilla
	Contextos	De la vida diaria	Contextualización en una situación cotidiana de la cuestión matemática desarrollada o por desarrollar
		De la actividad matemática	Descontextualización del objeto matemático de toda situación cotidiana para tratarlo directamente
Relación profesor – alumno	horizontal	Diálogo continuo	Generación de preguntas que permiten una comunicación fluida (preguntas a partir de las respuestas)
	Semi horizontal	Diálogo cortante	Generación de preguntas que permiten una comunicación detenida, con respuestas simples y cortantes
	vertical	Exposición	Comunicación en una sola dirección, generalmente de parte del maestro
Participación del alumno (s)	En el desarrollo de la actividad	Selectiva	Elección personal de participación por parte del estudiante o propuesta por el o la docente. No participa toda la clase.
		Total	Participación total de la clase en el desarrollo de la actividad.
		Teórica	Exposición verbal del conocimiento

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
	En interacción con el conocimiento		matemático (conceptual o procedimental)
		Práctica	Aplicación personal del conocimiento en situaciones que requieren de su uso (contextualizando o aplicando directamente)
		Fácil	Interacción inmediata y directa, ya sea de manera teórica o práctica
		Difícil	Dificultad para acceder al conocimiento matemático o aplicarlo correctamente

Caso 5 (Resumen)

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia: estrategias de introducción/aplicación del conocimiento	Exploración de conocimientos	Sondeo teórico y/o aplicativo del conocimiento adquirido. El sondeo teórico responde a la pregunta ¿qué?, mientras que el sondeo aplicativo se circunscribe a ejemplos concretos.
		Exposición directa inicial	Declaración del tema a trabajar y/o explicación simplificada del mismo
		Planteamiento de casos concretos (cuestiones directas)	Propuesta directa del conocimiento matemático (desenmarcado de cualquier actividad que lo conecte)
		Planteamiento de nuevos casos (cuestiones directas)	Propuesta de casos similares para aplicar el conocimiento aprendido (trabajo operativo)
	Secuencia: estrategias de desarrollo del conocimiento	Exposición directa	Explicación del tema sin mayor intervención de los estudiantes
		Descontextualización del conocimiento matemático para su tratamiento directo (análisis de la expresión matemática)	Desprendimiento/desarticulación del conocimiento de la situación que lo contiene.
		Contextualización del conocimiento matemático	Enmarcación del conocimiento matemático en situaciones cotidianas
		Reflexión grupal de la actividad desarrollada	Intercambio de ideas sobre el proceso seguido en la resolución de una actividad
		Uso directo método	Aplicación del método convencional para

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
			resolver operaciones matemáticas
		Planteamiento de problemas matemáticos (cerrados)	Propuesta de situaciones que exponen una cuestión y solicitan hallar un dato con la información brindada.
		Uso de ficha informativa	Ficha que contiene información teórica y casos concretos del conocimiento matemático trabajado
		Intervención de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación de los estudiantes en la generación del conocimiento matemático
		Intervención de los alumnos en la aplicación del conocimiento	Participación de los estudiantes en la aplicación del conocimiento a diferentes cuestiones concretas
	Contextos	De la vida diaria	Contextualización en una situación cotidiana de la cuestión matemática desarrollada o por desarrollar
		De la actividad matemática	Descontextualización del objeto matemático de toda situación cotidiana para tratarlo directamente
Relación profesor – alumno	Semi horizontal	Diálogo cortante	Generación de preguntas que permiten una comunicación detenida, con respuestas simples y cortantes.
	vertical	Exposición	Comunicación en una sola dirección, generalmente de parte del maestro.
		Selectiva	Elección personal de participación por parte

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Participación del alumno (s)	En el desarrollo de la actividad		del estudiante o propuesta por el o la docente. No participa toda la clase.
		Total	Participación total de la clase en el desarrollo de la actividad.
	En interacción con el conocimiento	Teórica	Exposición verbal del conocimiento matemático (conceptual o procedimental)
		Práctica	Aplicación personal del conocimiento en situaciones que requieren de su uso aplicativo.
		Fácil	Interacción inmediata y directa, ya sea de manera teórica o práctica
		Difícil	Dificultad para acceder al conocimiento matemático o aplicarlo correctamente

Caso 6 (Resumen)

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
Tratamiento del conocimiento matemático	Secuencia: estrategias de introducción/aplicación del conocimiento	Exploración de conocimientos	Sondeo teórico y/o aplicativo del conocimiento adquirido. El sondeo teórico responde a la pregunta ¿qué?, mientras que el sondeo aplicativo se circunscribe a ejemplos concretos
		Exposición directa inicial	Declaración del tema a trabajar y/o explicación simplificada del mismo
		Planteamiento de casos concretos (cuestiones directas)	Propuesta directa del conocimiento matemático (desenmarcado de cualquier actividad que lo conecte)
		Planteamiento de nuevos casos (cuestiones directas)	Propuesta de casos similares para aplicar el conocimiento aprendido (trabajo operativo)
	Secuencia: estrategias de desarrollo del conocimiento	Corrección en plenaria con la docente	Corrección de las actividades propuestas a los alumnos en grupo total
		Descontextualización del conocimiento matemático para su tratamiento directo (análisis de la expresión matemática)	Desprendimiento/desarticulación del conocimiento de la situación que lo contiene.
		Contextualización del conocimiento matemático	Enmarcación del conocimiento matemático en situaciones cotidianas
		Transformación de casos o situaciones a otros más simples	Cambio de una situación a otra más sencilla
		Tratamiento minucioso del conocimiento en su aplicación operativa	Desarrollo, paso a paso, de una cuestión en la que

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
			interviene conocimiento matemático
		Uso directo método	Aplicación del método convencional para resolver operaciones matemáticas
		Planteamiento de problemas matemáticos (cerrados)	Propuesta de situaciones que exponen una cuestión y solicitan hallar un dato con la información brindada.
		Intervención de los estudiantes en el desarrollo del conocimiento	Participación de los estudiantes en la generación del conocimiento matemático
		Intervención de los alumnos en la aplicación del conocimiento	Participación de los estudiantes en la aplicación del conocimiento a diferentes cuestiones concretas
	Contextos	De la vida diaria	Contextualización en una situación cotidiana de la cuestión matemática desarrollada o por desarrollar
		De la actividad matemática	Descontextualización del objeto matemático de toda situación cotidiana para tratarlo directamente
Relación profesor – alumno	Semi horizontal	Diálogo cortante	Generación de preguntas que permiten una comunicación detenida, con respuestas simples y cortantes
	vertical	Exposición	Comunicación en una sola dirección, generalmente de parte del maestro
Participación del alumno (s)	En el desarrollo de la actividad	Selectiva	Elección personal de participación por parte del estudiante o propuesta

Categoría	Sub-categoría	Códigos	Definición
			por el o la docente. No participa toda la clase.
		Total	Participación total de la clase en el desarrollo de la actividad.
	En interacción con el conocimiento	Teórica	Exposición verbal del conocimiento matemático (conceptual o procedimental)
		Práctica	Aplicación personal del conocimiento en situaciones que requieren de su uso aplicativo.
		Fácil	Interacción inmediata y directa, ya sea de manera teórica o práctica
		Difícil	Dificultad para acceder al conocimiento matemático o aplicarlo correctamente

ANEXO E: Memos Interpretativos

Código de estudiantes

La codificación de las y los estudiantes se realizó teniendo en cuenta dos criterios; a saber:

1. Clase a la que pertenecen, según el profesor/a
2. Orden alfabético

CODIGO DE ESTUDIANTES – CASO 1

Nombre del Estudiante	**Código**
Andrea B.B.	P1A1
Ángel	P1A2
Francia M.	P1A3
Lucía M. B.	P1A4
Enrique N.C,	P1A5
Iago O.F.	P1A6
Eduardo P.L.	P1A7
Andrea P.T.	P1A8
Elba Q.B.	P1A9
María R.R.	P1A10
Nerea R.L.	P1A11
Raúl R.C.	P1A12
Andrea R.M.	P1A13
Alba R.L.	P1A14
Daniel S.M.	P1A15
Pablo V. C.	P1A16
Verónica Y.O.	P1A17
Asmaá G.E.	P1A18

CODIGO DE ESTUDIANTES – CASO 2

Nombre del Estudiante	Código
Carmen B.R.	P2A1
Natalia B.N.	P2A2
Lucía B.V.	P2A3
Jazmín B.B.	P2A4
Nerea B.A,	P2A5
Nerea B.C.	P2A6
Sara B.P.	P2A7
Nadia C.L.	P2A8
Antía C.T.	P2A9
Zaira C.R.	P2A10
Brais C.N.	P2A11
Iría C.T.	P2A12
Manuel C.S.	P2A13
Paula C.L.	P2A14
Silvia C.C.	P2A15
Raquel C.C.	P2A16
Aaron G. C.	P2A17
Emilio P.	P2A18
Paula S.F,	P2A19
Rocío S.C.	P2A20

CODIGO DE ESTUDIANTES – CASO 3

Nombre del Estudiante	**Código**
Alejandro M.M.	P3A1
Carlos G.L.	P3A2
Cristina Z.D.	P3A3
Daniel M.M.	P3A4
Enrique D.M.	P3A5
Guillermo R.V.	P3A6
Javier R.M.	P3A7
Jorge D	P3A8
Juan M.R.	P3A9
Lucía V.P.	P3A10
Luis M.S.	P3A11
Luis L.M.	P3A12
Maite N.C.	P3A13
María K.V.	P3A14
Nacho F.L.	P3A15
Óscar R.	P3A16
Pablo A.M.	P3A17
Paula F.S.	P3A18
Paula M.L.	P3A19
Pedro C.	P3A20
Ramón C.L.	P3A21
Santi L.S.	P3A22
Tomás B.P.	P3A23
Uxía G.C.	P3A24
Ramiro A.M.	P3A25

CODIGO DE ESTUDIANTES – CASO 4

Nombre del Estudiante	**Código**
Bruno A.A.	P4A1
Alejandro A.S.	P4A2
Óscar A.Q,	P4A3
Allyson A.A.	P4A4
Rosalía C.V.	P4A5
Lucero C.B.	P4A6
Pedro C.V.	P4A7
Bibi C.P.	P4A8
Marco C.R.	P4A9
Juan D.R.	P4A10
Gabriel D.L.	P4A11
Patricia E.B.	P4A12
Daniel E.C.	P4A13
Maryori G.R.	P4A14
Fabián G.C.	P4A15
Keyla G.N.	P4A16
Grace G.R.	P4A17
Egiber H-V.	P4A18
Angie I.C.	P4A19
Darwin L.C.	P420
Miguel L.C.	P4A21
Carmen M.V.	P4A22
Nataly M.R.	P4A23
Luigui M.B.	P4A24
Maudy P.A.	P4A25
Sandra P.S.	P4A26
Hebert P.V.	P4A27
Cristhian P.V.	P4A28
Alvaro P.J.	P4A29
Nataly R.P.	P4A30
Darleny R.S.	P4A31
Jhosy R.M.	P4A32
Roxana S. A.	P4A33

Juan S.C.	P4A34
Owen S.V.	P4A35
Romil S.S.	P4A36
Héctor S.I.	P4A37
Jesús S.S.	P4A38
Álvaro T.R.	P4A39
Oriana V.P.	P4A40

CODIGO DE ESTUDIANTES – CASO 5

Nombre del Estudiante	Código
Ana A.A.	P5A1
Renato B.P.	P5A2
Jordan B.E.	P5A3
Claudia C.A,	P5A4
César C.C.	P5A5
Salma C.M.	P5A6
Diego D.L.	P5A7
Luis G.C.	P5A8
Sara G.	P5A9
Alejandra M.V.	P5A10
José M.S.	P5A11
Antonella M.C.	P5A12
Luz O.A.	P5A13
Ivanna R.S.	P5A14
María S.M.	P5A15
Mauricio S.C.	P5A16
Jorge S.G.	P5A17
Alessandra S.P.	P5A18
Danitza V.P.	P5A19
Franco V.S.	P5A20

CODIGO DE ESTUDIANTES

Nombre del Estudiante	**Código**
Rosita A.I.	P6A1
María B.S.	P6A2
Jorge C.R.	P6A3
Viviana C.M.	P6A4
Diego C.L.	P6A5
Marcos C.M.	P6A6
Dana D.U.	P6A7
Mikail D.A,	P6A8
María E.Z.	P6A9
Joao G. B.	P6A10
Leonardo H.P.	P6A11
César M. V.	P6A12
Linda O.T.	P6A13
Gloria R.A.	P6A14
Andrea R.C.	P6A15
Anthony R.C,	P6A16
María S.M.	P6A17
María Z.G.	P6A18

Memos interpretativos. Análisis de las sesiones de cada clase docente

Caso 1

Sesión 1 / Caso 1

Si bien el inicio de la sesión (introducción o primera parte) fue directo[397] por cuanto el docente indagó, sin recurrir a situaciones cotidianas o problemas verbales, sobre las diferentes interpretaciones de las fracciones que los estudiantes habían trabajado en sesiones anteriores, a continuación de la misma, el docente ha intentado explorar la actuación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades y en la contextualización[398] del tema matemático propuesto: fracción de un número. Intenta que los alumnos tengan más participación personal y grupal en la comprensión, desarrollo y explicación de lo que elaboran. El profesor se transforma en guía para ayudar a los alumnos a observar, relacionar y expresar aquello que se les presenta de tal manera que estos se den cuenta del conocimiento matemático implícito y, además, si es conocido o no. En primer lugar, quiere saber si los alumnos son capaces de darse cuenta de ese hecho; luego, de usar conocimiento matemático aprendido para darle sentido a la situación y construir conocimiento nuevo.

Los estudiantes evidencian conocimiento de las tres interpretaciones de fracción; cuando responden lo hacen correctamente pues saben a qué se refiere cada una y lo expresan de manera oral. Todos de la misma forma.

El primer ejercicio propuesto en la ficha de actividades (anexo Clases observadas: Sesión 1/Caso 1) busca averiguar si los alumnos son capaces de representar gráficamente la *fracción de un número* y, a través de ello, hallar “la transformación”, sin aplicar, en primera instancia las operaciones necesarias (división y multiplicación de acuerdo a los elementos de la fracción). Los alumnos saben cómo hallar “la fracción de un número” a través de la manipulación simbólica (clase previa y repaso), pero sin haber construido, a partir de su actividad, dicho conocimiento.

Podemos observar en la sesión (págs. 1 y 2), que P1A7[399] responde correctamente a la actividad a partir de la manipulación gráfica de la situación: tres quintos de quince son nueve. Él presenta la gráfica y sin hacer ninguna operación aritmética, da la respuesta. No obstante, su primer razonamiento es distinto al generado en el diálogo. P1A16 y P1A4

---

[397] El profesor expone el resultado sin centrarse en la intervención del niño para que ellos ‘descubran’ el conocimiento en una situación concreta, a partir de un problema observado.

[398] Cuando nos referimos a ‘contextualización’ o ‘dar contexto’ queremos expresar la idea de ‘ubicar un conocimiento matemático en una situación, ya sea cotidiana o no’.

[399] El código corresponde al alumno/a 7 del profesor/a 1. Los códigos siguientes, indican profesor/a (P1) y alumno, de acuerdo a un orden (A1, A2, A3, etc.)

expresan ese primer razonamiento, que también es válido: dividir cada triángulo – o cuadrado – en cinco partes iguales y coger tres de cada uno. Las diferentes formas que expresan los alumnos para resolver una misma actividad nos lleva a pensar que estos aplican diferentes estrategias y tienen diferentes puntos de vista ante una misma situación. Incluso P1A7 lo 've' de dos maneras distintas, aunque se declina por una; quizá, para él, la que más se ajusta al modelo y con la que, por ello, tendría menos posibilidades de equivocarse.

Por su parte, P1A14 intenta seguir el modelo propuesto al sugerirle a P1A7 que lo hiciera como aquel. No sabemos si P1A14 ha comprendido la transformación y si razona la gráfica, aunque podemos pensar que no lo hace, a juzgar porque no hizo nada en su folio y por su respuesta posterior, cuando el profesor pregunta por la diferencia entre una y la otra gráfica respondiendo que hay diferente cantidad en ambas gráficas (nueve y quince, respectivamente), por lo que no representan lo mismo.

Aun cuando ambas gráficas representen lo mismo y se pueda llegar a ellas, los alumnos no ven, inmediatamente, las relaciones entre ambas ya que la estructura física de las mismas es distinta, sin embargo, si el profesor orienta hacia ello, la relación es evidente. Muchas de las conductas de los estudiantes siguen el patrón de P1A14 en esta situación: intentan copiar procesos sin comprenderlos. P1A14 pretende seguir el mismo proceso pero no sabe cómo (al menos intenta que P1A7 lo siga: "tienes que dibujar igual que la ficha"). A veces esta conducta lleva a la respuesta correcta. Muchos estudiantes siguen procesos correctos, básicamente cuando las siguientes actividades son una copia fiel de la original y los cambios son mínimos (se puede pensar que en lugar de veintiún triángulos dibujo quince y en lugar de siete partes divido en cinco; luego en lugar de tomar una, tomo tres. Al final cuento). Presentar este tipo de situaciones no es incorrecto, pero es necesario permitir que los alumnos piensen sobre ellas y logren establecer relaciones de tal manera que les permitan construir (o reconstruir) conocimiento matemático. Si les presentamos una única forma o método de trabajar sin la posibilidad de cuestionarlo o compararlo con otros, su pensamiento se verá limitado. Estos alumnos pueden no ver otra forma porque la que les dieron a conocer anulan cualquier intento nuevo y personal. Sin proponérnoslo promovemos la "pereza de pensamiento" ya que no damos la posibilidad de pensar y, sobretodo, de expresar ese pensamiento. Preguntar por lo que han hecho permite saber hasta dónde los alumnos han comprendido y sobre todo que 'razonen sus razonamientos'. Permitir otras formas de solución y pensar sobre ellas posibilita la apertura del pensamiento hacia nuevos caminos y sistematizaciones personales.

Lo que buscamos se puede observar en P1A7, P1A16 y P1A4, básicamente. P1A7 no tuvo dificultad en ver un conjunto de quince triángulos como una unidad que había que dividir en partes iguales e indicar la fracción del número expuesto, sin embargo, su primer razonamiento fue similar al de P1A16 y P1A4. Estos alumnos tratan cada figura como una unidad, y no el conjunto de quince figuras (rectángulos, cuadrados o triángulos) como la unidad requerida; sin embargo, por este camino, también llegan a la respuesta correcta ya que 'vuelven' a integrar las figuras. Además logran establecer la relación entre ambas gráficas y predecir la respuesta de la segunda, incluso antes de recomponer los cuadrados. P1A4 y P1A16 no parten del "conjunto de muchas unidades como una unidad mayor", como en la actividad modelo, ellos hacen uso de ideas previas a este trabajo y a través de ellas pueden darse cuenta de lo que representa la fracción de esa cantidad, logrando, incluso establecer relaciones entre las mismas y equipararlas.

Se pudo observar en los alumnos que no participaron en el diálogo, dificultades para representar lo que se les pedía. En la mayoría de los casos no se veía ninguna producción; sin embargo en otros, en los que sí se observó, miraban sus soluciones con desconfianza (P1A8., P1A6 y P1A12, básicamente). Estos habían logrado representar los quince triángulos en dos filas o en una y no sabían cómo dividir en cinco grupos.

Por el desarrollo de la clase se puede observar que los alumnos que participaron son capaces de razonar correctamente sus respuestas, si es que se les orienta correctamente, aunque en muchas ocasiones no saben expresarlas con precisión. El profesor intenta, a través de lo que los alumnos manifiestan que ellos se den cuenta que su expresión no es la correcta. Por ejemplo, ante la expresión de P1A1 de que 'triángulos y cuadrados eran lo mismo', el profesor sabe a qué se refiere, pero la expresión es incorrecta y se lo hace notar. O ante la respuesta de P1A7 en la que indica que de cada "cinco coge tres", lo que realmente hizo el alumno fue dibujar columnas de tres triángulos y pintar las tres primeras, por lo tanto su segunda justificación se corresponde con lo que hizo gráficamente. Su primera expresión también es correcta, pero no es como lo graficó. Si el profesor no permitiera que los alumnos expresaran lo que piensan, hacen y cómo interpretan las situaciones, los alumnos no tendrían oportunidad de mejorar su capacidad reflexiva, propia del pensamiento matemático. Además ayuda a precisar ideas y pensar en sus pensamientos. El profesor, con la ayuda de los alumnos, hace evidente que las dos formas de graficar son correctas, aunque siguen caminos distintos.

Pedir a los alumnos que piensen situaciones en las que este tema esté inmerso permite conocer hasta qué punto un alumno es capaz de relacionar las matemáticas con las situaciones concretas, y qué entienden por éstas. En un primer momento se puede observar que los alumnos no son capaces de contextualizar el tema en cuestión (fracción de un número) en una situación cotidiana, aun cuando conozcan y apliquen ‘la fórmula’ para hallarlo; de ahí que no necesariamente un alumno que sepa operar sea capaz de resolver problemas en los que estén inmersas dichas operaciones. Tampoco, si es capaz de operar, necesariamente, tiene que ser capaz de contextualizar esa operación. Observamos que en la actividad propuesta, los alumnos aplican el conocimiento, aunque no se percaten directamente. Por ejemplo, al graficar, P1A7, de antemano, piensa en una forma de ordenar los triángulos que se relaciona con los elementos de la fracción. Esto no ocurre con P1A8., P1A6 y P1A12 que lo hacen indistintamente. Sin embargo, cuando se les pregunta cómo se logra la transformación no saben qué responder y sus soluciones se centran en el aspecto gráfico de la situación, mas no en su relación simbólica.

Por otro lado, el profesor pide que piensen situaciones en las que las fracciones, según las otras interpretaciones se puedan dar. Enunciar problemas según estas interpretaciones resulta más fácil para los alumnos. Las primeras situaciones que enuncian siguen el formato de *problemas matemáticos de aplicación*, con las características que tienen los problemas matemáticos escolares de este tipo[400]. Se observa una idea clara de situación como problema matemático enunciado mediante palabras (o texto). El profesor inmediatamente detiene esta idea y pide situaciones generales, no problemas enunciados. Establece así una diferencia entre ambas palabras: situaciones y problemas[401]. Los alumnos reflexionan sobre lo que dice el profesor, pero vuelven a enunciar problemas de este tipo. La idea de trabajar a partir de lo que dice el alumno vuelve a aparecer en este caso. A partir de los enunciados, el profesor intenta introducir la palabra situación para que ellos la identifiquen en la *situación* que ellos proponen. Esta acción permite que los alumnos vean las situaciones como contextos amplios, en los que no necesariamente se tienen que enunciar directamente los datos numéricos y formular inmediatamente la pregunta, que es lo que suelen hacer. Por ejemplo, en la primera interpretación los alumnos intentaban enunciar lo siguiente: “Se tiene una torta y queremos repartirla entre… ¿cuánto le toca…?”. A partir de este enunciado, el profesor intenta que los alumnos digan la situación en la que está contenida: por ejemplo una situación de reparto. De esta manera se está trabajando una idea de situación no como

---

[400] Se presenta una situación en la que se enuncian unos datos no numéricos y, necesariamente, numéricos; y luego se formula una pregunta que precisa aplicación de operaciones matemáticas para ser respondida.

[401] Refiriéndose a este tipo de problemas matemáticos escolares, que son los que generalmente se proponen en el libro de texto que ellos utilizan.

problema matemático tipo, aunque dentro de ella se pueden descubrir muchos de ellos. El que los alumnos expresen diversas situaciones, nos lleva a pensar que son capaces de incluir temas matemáticos en situaciones cotidianas.

Contextualizar el tema de fracción como operador, resultó más difícil para la mayoría de la clase. Incluso el de fracción como división, en el que generalmente planteaban problemas de división[402]. Fueron pocos los que lograron expresar y explicar una situación de esta naturaleza[403]. Para el tema de la fracción como división, quizá habría que insistir en cuándo es factible dejar una división expresada como fracción, ya que no todas las divisiones se dejan indicadas de esa manera, sobre todo aquéllas en las que el cociente es conocido o de fácil acceso. Los niños no tienden a ver ‘fracciones’ en esa división, excepto cuando el profesor pide que lo indiquen como tales.

Hay en los alumnos una tendencia a operar directamente, sin pensar en la situación, abstrayendo todo el contexto en el que la posible operación matemática está ubicada. Cuando se les pide explicaciones de lo que tienen que hacer, directamente lo asocian con las operaciones matemáticas aprendidas (“tengo que sumar”, “dividir y multiplicar”). Esta acción puede influir para que los alumnos se alejen de la situación y operen sin pensar en ella. Esta acción, la de abstraer de todo contexto concreto, la actividad matemática, no es incorrecta pues el alumno ha de llegar, en su momento, a ‘matematizar’ la situación; sin embargo hacerlo de manera inmediata, aparentemente sin reflexionar en la situación puede llevar a que el alumno no regrese a la misma y opere por la acción de operar en sí y no por la necesidad de resolver la ‘dificultad’ en la situación planteada, si la identifica. Las matemáticas se basan en la resolución de problemas, pero para esto, hay que descubrirlos en las diversas situaciones. Lo que se intenta a partir de identificar situaciones cotidianas en las que la matemática esté inmersa, además, permite que el alumno descubra los posibles problemas matemáticos contenidos en dichas situaciones, a partir del contacto con ellas. Los alumnos deben ver en las situaciones dificultades que pueden resolver. No sólo problemas en los que hay una pregunta previamente establecida.

---

[402] Los alumnos conocen esta interpretación pero aún no saben cuándo es conveniente usarla, es decir, dejar expresada mediante fracción, una división.

[403] Hay dos o tres alumnos y alumnas que siempre intervienen con buenas ideas, el resto lo hace de manera más lenta. Estos alumnos son P1A7, P1A5), P1A16, P1A4 y P1A1.

Sesión 2 / Caso 1

Ante la pregunta "¿qué quiere decir tres cuartos de veinticuatro?", los alumnos basan sus respuestas en lo que harían para hallar un resultado. Hay una tendencia a "resolver" antes que "pensar" por una asociación, casi inmediata, de las matemáticas a los resultados numéricos como lo más importante. Es el caso de P1A15 y de P1A7 que aunque el segundo no expresó resultados como el primero, sí planteó la operación, incluyendo paréntesis y dejándola indicada. La idea de fracción, como parte de un entero o de una cantidad, pierde importancia y es sustituida por "lo que se tiene que hacer para hallar una cantidad". Quizá la respuesta más acertada hubiera estado entre "un número que se obtiene de…", "es una parte de veinticuatro" o, específicamente "son tres partes de cuatro en que se ha dividido…". A través del ejemplo de la fracción de un número y de pedir que expliquen qué significa la expresión, el profesor intenta que los alumnos no sólo resuelvan una expresión matemática directamente ni de manera mecánica, sino que, previo a ello, la expliquen con palabras, así se lleva al alumno a reflexionar sobre la misma para, posteriormente, construir conocimiento y analizar la conveniencia de su uso en determinadas situaciones. Este objetivo, usualmente, no se trabajan en las clases de matemáticas escolares a nivel primario. La idea básica es aplicar conocimiento, adquirido directamente a través del profesor, en situaciones concretas. Aparentemente en esta asignatura no se tiene que explicar nada con palabras, ya que se piensa que las operaciones 'hablan por sí mismas' y que su proceso lógico es fácil de entender y seguir. Si bien, los alumnos de quinto de primaria pueden seguir diferentes procesos y reproducirlos fielmente, esto no asegura que los comprendan o puedan expresar su sentido, aunque sí aplicarlos si se recuerdan. Es conveniente crear las condiciones para que los alumnos de este nivel no solo sigan un proceso elaborado, en lo cual se pueden desempeñar convenientemente, sino que sean capaces de pensar a partir de diferentes situaciones de tal manera que tengan la posibilidad de construir el conocimiento, lo cual le da mayor significatividad, comprensión y dominio.

Por lo general, la primera acción de los alumnos frente a una operación matemática es resolverla, aplicando una operación, si saben cómo hacerlo, y expresando el resultado. Lo que el profesor intenta en esta primera acción es permitir que los alumnos expresen a través de un ejemplo concreto, que él mismo presenta, y básicamente numérico, lo que significa esa expresión, no sólo que la resuelvan; de esta manera, en un futuro, podrán darle sentido a la operación u operaciones que utilizan (en este caso, porqué al buscar la fracción de un número se divide dicho número por el denominador de la fracción y el resultado se multiplica por el numerador de la misma fracción). Fijémonos que al darle directamente el proceso, los alumnos no tienen oportunidad de construirlo, de establecer relaciones, de aplicar personalmente conocimiento y ver diferentes alternativas, y de elegir la que, matemáticamente – aunque desde un punto de vista escolar – es mejor. Es decir, de hacer efectiva su capacidad de pensar.

Al asociar la fracción de un número (tres cuartos de veinticuatro) a un número concreto (trece), como se presenta en la segunda actividad, el profesor intenta que los alumnos *vean* en dicha expresión (la primera) una cantidad y no únicamente dos operaciones, analicen dicha cantidad (es una parte de veinticuatro, es menor que veinticuatro, es más de la mitad, es la mitad más un cuarto, etc.) e intenten llegar a ella, expresándola de diferente manera. De esta forma, su producto, cuando se obtenga, tiene sentido y se ajusta a sus conocimientos previos. Muchos niños dan respuestas absurdas a planteamientos matemáticos ya que no tienen la capacidad de 'darse cuenta' pues su actuar se centra en la traducción matemática únicamente y no en lo factible del producto. Hay unos pasos previos a la aplicación de operaciones (traducción matemática y ejecución) que les permite a los alumnos buscar alternativas de solución personales, y basadas en su experiencia. Ocurre cuando P1A16 expresa otra fracción para hallar el veinte por ciento de cien en la que P1A5 dice que es "la quinta parte" mientras que P1A16 añade que se puede aplicar "dos décimos". Con ello se logra integrar aspectos de la matemática de manera natural, producto del establecimiento de relaciones. El alumno se da cuenta que hay fracciones que "dan lo mismo". Si el tema de las fracciones equivalentes es un tema ya tratado, los alumnos aplican y recuerdan dicho conocimiento: lo hacen funcional; si no, permite construir la idea del mismo a partir de situaciones específicas y naturalmente espontáneas.

Las situaciones planteadas pueden estar en el ámbito de la matemática escolar, centradas en un tema específico (en este caso el de la fracción de un número) o en la vida diaria (la compra, las rebajas, etc.). La significatividad de una actividad o propuesta didáctica está en relación al grado de interacción matemática que el alumno pueda tener con la misma, sea en el ámbito de la matemática escolar o en el de la vida "ordinaria". En este caso, podemos observar que la actividad, para el que aplica matemática no se hace más o menos significativa si se presenta en uno u otro contexto ya que ambos pueden ofrecerle dificultad que él está dispuesto a superar.

Trabajar a partir de situaciones abiertas, relacionadas con la vida diaria: social, familiar, etc., permite que los alumnos expresen aquello que ven diariamente, lo relacionen con las matemáticas (no sólo con cifras, sino con la acción matemática), y le den sentido a su aprendizaje, reflexionando sobre qué y cómo lo representan. Esto lo hemos podido constatar al observar que P1A16 ha relacionado el tema de los porcentajes con el de las fracciones, a partir de una situación cotidiana (la actividad en las gasolineras) y a través de las distintas formas de expresar un descuento; además asocia dicha fracción con una cantidad (la quinta parte de 200 es 50, aunque en este caso sería la cuarta parte). Tratado de esta manera, el profesor puede ir introduciendo nueva información y relacionando diferentes temas matemáticos, como el caso de los porcentajes y el de la fracción de un número y el uso práctico del tema. Este hecho permite observar, además, que los alumnos son capaces de relacionar conocimientos y que pueden ‘traerlos’ a clase según sus necesidades, a partir de situaciones ordinarias. No obstante, pocos son los alumnos de la misma clase que lo hacen. Es necesario tener cierto perfil, cierta base bien construida.

Trabajar de manera abierta puede tener sus inconvenientes. El primero puede parecer trivial. Hemos observado que en el transcurso de la sesión no hay clase copiada en la carpeta, que es lo que más preocupa a los profesores y padres de familia, incluso a los alumnos puesto que estos, generalmente, preguntan si deben sacar su cuaderno y copiar lo que hay en el encerado, el que tiene ideas sueltas que el profesor va reforzando de manera oral, pero que no pide que copien. Por otro lado, son ideas trabajadas con los alumnos, producto de las relaciones que ellos establecen.

Si bien, las actividades propuestas son amplias y deberían permitir la participación de toda la clase, no todo lo hacen. El perfil de alumno que responde es de aquel que hace uso del conocimiento que tiene asimilado y aplica, de aquel que es hábil relacionando ideas propias de la matemática escolar. Para aquel que no lo es, se observa la dispersión de ideas y su poca capacidad para retenerlas e integrarlas convenientemente. Los alumnos – aunque pocos – van respondiendo a las preguntas del profesor y reflexionando sobre lo que expresan, no obstante, si ellos no logran visualizar esas ideas (ya sea porque el profesor las expresa constantemente o las escribe en el encerado a manera de resumen) éstas se dispersan y pierden sentido. Los nuevos conocimientos o relaciones deben ser constantemente reformuladas para su total compresión e integración y el alumno debe saber hacia dónde lleva su razonamiento, qué ideas precisas se extraen de él, etc.

Una de las soluciones a la idea anterior es que el profesor ponga límite a sus preguntas y a las intervenciones de los alumnos para que estos sean conscientes del camino que siguen y hacia donde los dirige. No podemos centrar la actividad en los alumnos que ‘saben’ aunque no podemos prescindir de ellos. Hay que saber sistematizar oportunamente la información brindada por los alumnos, así se puede ir estructurando adecuadamente, de lo contrario todo es como una mezcla de ideas sueltas que, aunque guarden relación, ésta es difícilmente asimilada.

A través de los ejemplos de los alumnos se puede observar que si bien estos conocen las diferentes interpretaciones o significados de las fracciones aún no son capaces de darles un contexto situacional real. Prevalece en las situaciones propuestas la idea de fracción como partes de una unidad, la noción más sencilla, mientras que la de división no se comprende fácilmente. Las situaciones que proponen tienen una estructura fija (de datos y pregunta), que sin embargo, se van generalizando a situaciones más amplias. El profesor hace una clara diferencia entre situación y problema, entendiendo éste como aquéllos que se proponen en los libros de texto, mientras que las situaciones no proponen directamente un problema, aunque lo pueden incluir. La fracción como operador, se empieza a entender en situaciones de descuento, asociándola directamente a él, aunque no es fácilmente observable por toda la clase, incluso los alumnos más hábiles.

Sesión 3 / Caso 1

En esta sesión, el tema matemático “fracciones y porcentajes” se pretende trabajar a partir de una situación ordinaria, propia del quehacer cotidiano; como es el de “las rebajas” que, en determinadas épocas del año tiene mayor repercusión. Los alumnos conocen de su existencia como se pudo observar en la sesión anterior; por ello, el profesor retoma el tema pidiendo ya no ejemplos de rebajas sino preguntando qué entienden por la misma. La idea es extraer de esa actividad ordinaria, el conocimiento matemático implicado (mitad-tanto por ciento: fracciones-porcentajes), definirlo, relacionarlo y utilizarlo correctamente. Una pregunta como “qué son las rebajas” implica para su definición y uso apoyarse en vocabulario e ideas matemáticas. Una de las definiciones que la Real Academia Española (RAE) da sobre ‘rebaja’ es la de “disminución, reducción o descuento, especialmente de los precios”, que es el contexto en el que se genera la actividad. Este ‘descuento’ conlleva el uso de porcentajes y fracciones y, por ende, su comprensión.

Como primera acción, el profesor propone definir. La actividad de *definir* implica abstraer lo esencial de un objeto o concepto y *fijar con claridad, exactitud y precisión su significación*, como lo indica también la RAE. Una palabra y su definición son equivalentes en el sentido que la primera resume la segunda. Si el alumno es capaz de usar la palabra en el contexto correcto es capaz de darle sentido, aunque a veces no sepa expresar su definición a través de una oración correctamente elaborada. Por ejemplo, analicemos la primera respuesta: "*es cuando una prenda de vestir está rebajada la mitad*". La "definición" se entiende, puesto que la niña usa la idea de "mitad" para reforzar la idea de "rebaja" o "rebajada" como "disminución". Sin embargo, los expertos en el manejo de la lengua expresan que en una buena definición nunca se utiliza la fórmula "es cuando" porque 'cuando' es un adverbio de tiempo y no indica clase alguna, que es lo propio de las definiciones. También aseguran dichos expertos que lo definido no debe aparecer en la definición. En el caso propuesto, se comenten estos dos errores por lo que, desde el punto de vista lingüístico, no habría una definición propiamente dicha, basada en la explicación general de la palabra propuesta, sin embargo su uso correcto se puede dar solo en la medida en que conozcamos su significado. Esto se rescata en el ejemplo; específicamente, P1A10 conoce la definición de dicha palabra ya que es capaz de usarla en el contexto correcto, aunque no de expresar una buena definición. De hecho, podemos decir que P1A10 hace uso de ideas matemáticas (mitad) para explicar lo que le preguntan. La mitad implica disminución y este término, según la RAE está en la definición de rebaja. Sin embargo, al pedir la definición de porcentaje, los alumnos no son capaces de dar, inmediatamente, una definición correcta aunque hayan expresado ejemplos de los mismos en un contexto apropiado e identificado su forma concreta como lo expresa P1A1. Pasando a la idea de mitad, expresada por P1A6, este alumno tampoco es capaz, en primera instancia, de explicar con palabras lo que significa 'mitad', aunque sí contextualiza, utilizando el mismo vocablo o haciendo uso de representaciones 'gráficas' en el aire para expresar su idea; no obstante, con la guía del profesor, logra una definición al indicar que para expresar la mitad "tienen que ser dos partes iguales". Si bien en cualquiera de los tres casos, los alumnos tienen dificultad para definir correctamente, es en el caso de las ideas matemáticas en los que tienen mayor dificultad de expresión oral, aunque no escrita; es decir, manejan la representación simbólica, basando sus definiciones en ejemplos concretos.

Se puede observar en esta sesión que los alumnos tienen más facilidad para dar ejemplos concretos que para definir un concepto, al menos en primera instancia; sin embargo, si se crean las condiciones para lo segundo, como en el caso de P1A6 podemos orientar no solo a que los alumnos expresen una auténtica definición de conceptos sino que puedan sintetizar las mismas hacia lo específico. Podemos decir que las definiciones brindadas en esta clase son producto del pensamiento de los alumnos ya que parte de lo que los alumnos conocen, de su experiencia e interrelación. Ese conocimiento que en un primer momento es específico y único se convierte en general, a partir de las ideas de los alumnos y de su trabajo de relación con la orientación del profesor.

De lo anterior, por ejemplo, podemos observar la intervención de P1A10 cuando trata de definir el término “rebajas”, para lo cual da un ejemplo utilizando el término que ha de definir. Si la definición consistiera en dar ejemplos, los conceptos tendrían muchas definiciones; todas ellas válidas; sin embargo la actividad del alumno no superaría lo concreto, lo observable por los sentidos; no sería capaz de establecer relaciones. Es necesario que dichas ideas específicas que tienen sobre un concepto se concreten en una idea general, que abarque todos los casos concretos expuestos. No obstante, dichos ejemplos, le permiten hacerlo. Es decir, a partir de los ejemplos propuestos por ellos mismos, los alumnos logran definir con la orientación del docente.

En el caso en el que el profesor les pide a los alumnos que expresen de diferente manera la idea de ‘mitad’ que surgió a partir de la intervención de P1A10, el profesor necesita especificar la situación (comer pizza) para que los alumnos se den cuenta de hacia dónde quiere llegar, incluso no todos los alumnos lo descubren inmediatamente. Los alumnos asocian directamente el 50% con la fracción 50/100, pero no con la fracción ½, excepto cuando se trabaja a partir de la fracción (¿de qué otra manera puedo indicar 50/100, en fracción?, o al querer comer la mitad de una pizza). En algunos casos, hay situaciones específicas que los alumnos asocian a determinados eventos matemáticos de la escuela.

La lluvia de ideas como estrategia de enseñanza-aprendizaje no sólo permite conocer hasta dónde saben los alumnos sino que les lleva a organizar mejor esas ideas. Por otro lado, los alumnos en general expresan ideas correctas sobre un asunto (las rebajas, los porcentajes, las fracciones), pero estas no son completas de ahí que es un buen recurso permitir a más de uno expresar lo que sabe, para luego generalizar.

Plantear la matemática escolar a partir de situaciones concretas pero abiertas le permitió a los alumnos, en este caso, aplicar diferente matemática conocida (fracciones, porcentajes, etc.) pensar en el significado de cada expresión matemática empleada; establecer relaciones y aprender a discernir el significado de cada una según la situación. Además genera la comunicación matemática, no solo para expresar un resultado, sino para construir una definición y emplear cada idea adecuadamente en contextos determinados.

Sesión 4 / Caso 1

Podemos observar que la sesión de hoy retoma las preguntas formuladas en la sesión anterior sobre las rebajas; en este caso se espera que las intervenciones cuenten con el asidero de lo trabajado sobre el tema. Las intervenciones de los alumnos son mejores en cantidad y calidad ya que son precisas y directas, centrándose en aspectos generales o universales, válidas para cualquier situación de rebajas: disminución, precio, ventas; todos estos, términos que se incluyen en una correcta definición de ‘rebajas’, según los expertos en lingüística y la RAE. Además, los ejemplos son variados y no se centran en uno específicamente (P1A9 menciona diferentes rebajas – 60%, 50%, 20% - frente a la “mitad” que mencionó P1A10 en la clase anterior).

Evidentemente, esta sesión no se centra únicamente en definir de manera correcta el término ‘rebaja’ o ‘rebajas’ sino en conocer y aplicar adecuadamente las matemáticas necesarias entorno a este tema. Si usamos correctamente un término, en el contexto adecuado, es indicio de conocimiento de ese término, y por tanto, de su idea y concepto. A través de las situaciones abiertas, como es este el caso, se intenta que los alumnos expresen diferentes ideas; entre ellas, las relacionadas con las matemáticas que deben conocer y aplicar; sin embargo, no solo se intenta desarrollar capacidades de esa naturaleza, sino – inclusive – aquellas sobre las que deben pensar y sobre las cuales construir. Se intenta que las matemáticas escolares orienten el pensamiento-razonamiento del alumno, desde las situaciones próximas. Un primer acercamiento con la situación permite que el alumno manifieste los conocimientos que tiene al respecto y las ideas matemáticas involucradas. Podemos recordar que este primer acercamiento se dio en la sesión anterior. El tema de las rebajas tiene muchas ideas matemáticas y es propicio para utilizarlas y construirlas, sobre todo las referidas a porcentajes y las fracciones, que es lo que se pretende desde esta situación. Por ejemplo, P1A16 incluye las fracciones en la situación de la gasolina; P1A1 expresa otra forma de escribir las rebajas. Un primer objetivo que se logra es que los alumnos ubiquen un contenido matemático específico en las situaciones cotidianas, de manera ordinaria.

En esta oportunidad se retoma el tema para darle más precisión en su uso matemático. El objetivo es que el alumno no sólo identifique un porcentaje en una situación de rebaja sino que sea capaz, a través de lo que observa y escucha, de expresar qué significa, y diferenciarlos de otras formas de descuento. Toda intervención es válida, siempre y cuando oriente el aprendizaje de los alumnos. El papel del profesor es básico. Podemos pensar, por ejemplo, que la intervención de P1A16, sobre el precio de los productos, es una intervención descontextualizada, que se pudo descartar inmediatamente, pero el profesor opta por acogerla para abordar un tema relacionado con el valor de los productos. Al escuchar que solo se rebajan los productos caros, el profesor no deja pasar desapercibida dicha intervención porque forma parte del tema general de la sesión (las rebajas), aunque no del tema matemático (fracciones y porcentajes); sin embargo, es una intervención que ayuda a comprender la situación. Con ello se intenta que los alumnos no sólo aprecien y memoricen los métodos o algoritmos necesarios para resolver un problema matemático, ni que se asocie la matemática a una situación sin volver a ella, sino que sean capaces de reflexionar, discernir y relacionar los conocimientos matemáticos en las situaciones de la vida diaria.

La forma cómo el profesor aborda la situación coloca el tema de fracciones y porcentajes en segundo plano, después del tema general: las rebajas, pero antes de cualquier forma distinta de expresar las mismas. Al intentar varios modos, el profesor busca no solo identificarlos, sino relacionarlos, indicando sus similitudes y diferencias. En ese proceso, utilizan conocimiento matemático; incluso lo construyen, como sucede en la situación final en la que precisan buscar un método nuevo para hallar un porcentaje.

Centrándonos en la última situación de la sesión, podemos observar que hay otra idea implícita que surge al usar la noción de porcentaje: su relación con la idea de ‘cien’. Ya en una clase pasada P1A16 expresó que el 20% indicaba “veinte de cada cien” y en esta sesión P1A14 responde que el cuarenta por ciento es “cuarenta sobre cien”. La idea de cien se ha fijado a partir de las intervenciones anteriores y los alumnos son capaces de expresarla. El profesor intenta no solo que los alumnos aprendan la fórmula para hallar un porcentaje sino cuándo es conveniente usarla y cuándo no. En este caso, al proponer un ejemplo sencillo como es el 50% de algo, se logra que los alumnos apliquen directamente la idea de mitad, asociada a la forma de hallarla o reconocerla inmediatamente. Los alumnos asocian directamente la idea de 50% con la idea de mitad y su operación matemática es inmediata: dividir entre dos, incluso algunos alumnos no realizan dicha operación algorítmicamente sino que asocian directamente. Tal es el caso de P1A5 y P1A16; otros como P1A18 o P1A15, operan. No obstante, este caso, no hay necesidad de aplicar la fórmula conocida, o de aplicar la idea de fracción como multiplicación y división ya que el producto “se anula”. El profesor, inmediatamente, propone otros porcentajes similares en su resolución, por ejemplo el veinticinco por ciento o el diez por ciento. En estos casos, podemos conocer que P1A5 expresa que 25 es la cuarta parte o P1A17 que el 10% es la décima parte; definitivamente, en cualquiera de los dos casos, se están refiriendo a la cuarta o décima parte de cien y ochenta a la vez, ya que establecen la asociación. Como podemos observar, hay conocimientos que están en el pensamiento del alumno y que a través de preguntas bien formuladas ellos pueden hacer explícitos de tal manera que a partir de estos conocimientos pueden construir los nuevos, o estructurar mejor los previos.

Elegir porcentajes 'fáciles' como el 50% y a partir de él, el 25% o el 10% permite que los alumnos establezcan relaciones rápidas entre el porcentaje y lo que indica, así como entre ellos y las fracciones sencillas. También es cierto que no todos los alumnos lo descubren al mismo tiempo, podemos observar que son pocos los nombres que se describen en cada situación y algunos de manera constante; pero que sean ellos quienes lo hacen les permite involucrarse más en la construcción del conocimiento y que la actividad sea más interesante ya que ellos forman parte de dicha construcción. Las intervenciones son producto de su pensamiento. De hecho, a través de las mismas, los alumnos llegan a una fórmula que les permite hallar dichos porcentajes: reconocer las partes de cien que representan y dividir la cantidad entre el numeral que la representa, así si indica la cuarta parte se divide entre cuatro, y si representa la décima parte se divide entre diez, o si es la mitad entre dos, etc.

Proponer el último ejemplo de porcentaje (37% de 80) ofrece un 'problema' u obstáculo en el procedimiento utilizado por los alumnos ya que estos no son capaces de reconocer, inmediatamente, las partes de cien que las representa ni la fracción simple correspondiente. Algunos alumnos lo intentan, sin éxito. Permite además, validar la fórmula construida hasta el momento y verificar si es funcional o no para todos los casos de porcentaje. Hasta los casos anteriores, los alumnos transformaban el porcentaje en fracción y ésta en una fracción más sencilla. Con el 50%, 25% y 10%, incluso el 20% de la clase anterior se podía encontrar fracciones equivalentes que permitían hallar rápidamente el valor del porcentaje (en todas ellas las equivalentes tienen como numerador la unidad). Este último ejemplo lleva a los alumnos a plantearse otra solución; ya no se puede simplificar dicha fracción y obtener una cuyo numerador sea uno; sin embargo, no descartan, inmediatamente, el problema, sino que intentan buscar otro camino. Es importante la orientación del profesor al respecto. Transformar el porcentaje en una fracción, es inmediato, pero les resulta difícil hallar una fracción 'más sencilla', básicamente porque no la hay; se reconoce esta como una fracción irreducible, aunque no se exprese textualmente. Entonces el método para saber cuánto es el 37% de 80 varía y se recurre a la fracción como "multiplicación y división". Con la orientación del profesor, podemos decir que los alumnos han podido hacer explícito un método para hallar porcentajes, que vale en estas situaciones: transformar el porcentaje en fracción, buscar una fracción más pequeña y dividir la cantidad por el denominador o las partes. Si no es posible, se multiplica por el numerador de la fracción.

Sesión 5 / Caso 1

A pesar de ser un tema que se ha venido trabajando en clases anteriores, se observa que no ha sido consolidado por toda la clase ya que podemos apreciar errores asociados a la comprensión de la situación o a la del procedimiento utilizado. La asimilación de un aspecto del tema (porcentajes) no conlleva la comprensión de otros aspectos relacionados. Queda claro, aparentemente, que los alumnos saben a qué hace referencia el cincuenta por ciento de algo. En su mayoría, los alumnos responden que el "cincuenta por ciento es la mitad", más cuando tienen que aplicar 'la operación' para hallar esa mitad, la cantidad de alumnos disminuye. Podemos decir que, en alumnos como P1A10 y otros, no hay una correspondencia previa y aplicable entre los conocimientos que poseen sobre el tema y su aplicación en la solución de una situación. Dicho de otro modo, se evidencia en algunos alumnos de quinto grado que cuando se enfrentan a un problema descontextualizan el procedimiento. En este caso, saben dos cosas: que hay que 'multiplicar y dividir' (forma de llegar a la solución) y que 'el cincuenta por ciento es la mitad' (idea de la situación implicada); mas, para el primero aún no encuentran las relaciones correctas, o: no logra establecer la relación entre los dos conocimientos. Obsérvese a P1A8, quien por el resultado de su operación, y por lo que hizo en su folio, ha multiplicado cincuenta por cien, dividiendo el resultado entre cuarenta. Ella utiliza las cantidades que la situación proporciona, pero no de la manera correcta. De hecho, el resultado de esa operación es 125, mas su respuesta es 12. Hay una manipulación de cantidades, pero no de la manera correcta. Al preguntársele porqué es doce respondió "porque no puede ser ciento veinticinco". No obstante, P1A8 valida el razonamiento de P1A17, pensado como, aparentemente, esta lo había hecho. 'Dividir entre cincuenta' le parece más lógico y creíble puesto que sus herramientas – las de P1A17 –, su manipulación de las cantidades, es más matemática.

Para P1A17, la situación es distinta. Ella divide 40 entre 50 (la cantidad entre el porcentaje anunciado); y, si observamos su procedimiento, podemos decir que resuelve la operación correctamente (hay que aplicar una división), aunque el resultado no es el adecuado ni se ajusta a los requerimientos de la situación. A diferencia de P1A8, P1A17 se dio cuenta de su error al hacerlo evidente en el encerado, con la ayuda del profesor, mientras que P1A8, no; ya que no reflexionó con el experto sobre lo que había trabajado y la manera de hacerlo. Por ello, incluso, acepta lo que P1A17 ha pensado y el procedimiento propio no tiene consistencia.

El caso de P1A10 es diferente a los anteriores. Mientras que en los primeros podemos decir que hay un conocimiento de la operación (más no de la situación, completamente), en P1A10 cobra peso el significado de 'rebaja' como descuento, disminución, resta y no el de la idea de cincuenta por ciento como mitad y división; y lo aplica directamente, sin fijarse – o detenerse – en la naturaleza de los elementos que va a restar. Todos sabemos que no podemos 'restar cosas diferentes'; para ello, hay que transformarlas en iguales, buscando su similitud (no podemos restar manzanas de peras, pero sí frutas de frutas); sin embargo, este conocimiento no es aplicable en la solución de la alumna. Si preguntásemos a P1A10 qué significa el cincuenta por ciento es probable que nos responda que 'la mitad'[404] más en su proceso no lo tiene en cuenta, o al menos no lo evidencia; quizá no lo recuerde. Sin una reflexión posterior con ayuda de un experto, la alumna puede dar por zanjada, o resuelta, la situación; quizá sí, o no, muy convencida de lo que ha hecho.

Sin embargo, no todos los alumnos de la sesión que se analiza actúan de la misma manera. Recordemos que la última actividad de la sesión anterior proponía una situación en la que ya no era suficiente el camino que habían elegido para hallar porcentajes (dividir únicamente entre el denominador), sino que, al ampliar el campo de los mismos, había que 'ampliar' la manera de hacerlo: multiplicando por el numerador; es decir, aplicando la idea de fracción como "multiplicar y dividir". En este caso, las dos operaciones tienen que evidenciarse. Esta idea se consolida con P1A4 quien indica qué se multiplica (por el numerador) y qué se divide (por el denominador). Tanto P1A4 como P1A9 muestran conocimiento sobre formas de hallar un porcentaje de 'algo' y establecen las relaciones correctas. De hecho, escogen el segundo método, el más general; no el que ejecuta solo la división, aunque en la práctica lo utilizan debido a las condiciones. Aquél incluye al primero, el de los casos específicos (cuando el numerador es uno). Cabe recalcar, además, que estas alumnas participan constantemente en las sesiones y con acierto.

Una vez que se ha recordado el procedimiento, el profesor propone hallar rebajas indicadas en porcentajes simples y directos. Las alumnas antes mencionadas aplican la

---

[404] Recuérdese que en clases anteriores es P1A10 quien expresa que el cincuenta por ciento corresponde a la mitad.

división directa: dividen entre dos, cuatro y diez, según sea el caso. Otros alumnos, como P1A6, también. Y otros, que no han sido mencionados en la descripción de la sesión, como P1A16 y P1A5, igualmente; estos últimos participan constantemente en las sesiones y con acierto. Se observa que otros alumnos, sin embargo, como P1A18, P1A15, P1A3, P1A14 escriben la fracción decimal correspondiente y aplican las dos operaciones. No operan con la fracción equivalente irreducible. En este caso podemos decir que estos alumnos aplican el método general, aun cuando conocen el tema de las fracciones equivalentes y han participado de sesiones que las han incluido en los procedimientos para hallar porcentajes, no lo utilizan en este caso de manera directa e inmediata.

Obsérvese que, teóricamente, las primeras alumnas tienen "un método" para resolver porcentajes, pero en la práctica utilizan otro más directo, y por ende, más sencillo. Son capaces de escoger entre dos opciones la que mejor convenga. De hecho, el profesor tiene como regla en su clase de matemática "conocer varios caminos matemáticos para llegar a una solución y escoger el que mejor convenga". Estas alumnas lo hacen. No queremos decir que los últimos alumnos no, ya que para ellos el método que utilizan es el que más les conviene, ya sea porque lo han deducido o porque lo han escuchado.

En la resolución de las actividades, podemos decir que los alumnos han captado la idea de mitad y cincuenta por ciento, incluso pueden relacionarlas; sin embargo no todos aplican las mismas operaciones para hallar su equivalencia en euros respecto al precio sin rebaja. Cada niño y niña utiliza la estrategia que mejor lo orienta o conocen más. El caso de P1A17 es especial y significativo tanto para ella, como para el profesor y la clase en general. Ella sigue otro razonamiento pero la misma estrategia: división, aunque divide el precio entre el porcentaje, básicamente porque puede haber seguido una asociación errónea. P1A17 establece la división, que es el camino seguido por todos (algunos en conexión con la multiplicación); no obstante, inmediatamente se desliga de lo que es la situación para centrarse en un procedimiento de división, el cual aplica correctamente. Darle la oportunidad de volver sobre su solución y cuestionarla ayuda a la alumna a pensar que lo que ha hecho es incorrecto no para resolver la operación sino para la solución del problema. La idea al enfrentar a los alumnos a los problemas matemáticos escolares no es únicamente llegar a una operación y ejecutarla, sino resolver el problema entendiendo por 'resolver' el análisis y solución de una situación.

Obsérvese que la situación en mención (hallar el cincuenta por ciento de ochenta) ni siquiera necesita aplicar una operación aritmética y el algoritmo correspondiente puesto que se establece una relación fácil y directa[405]. Los alumnos, teniendo conocimiento de lo que significa el 50% realizan la asociación: la mitad de 40 es 20. Sin embargo, al conocer el cociente, se crea un conflicto cognitivo entre el resultado de la operación y lo que ella conoce de mitad o cincuenta por ciento; asociándose, además, a las relaciones establecidas para llegar a la operación seleccionada. Lo importante en este caso, es darse cuenta que si no se le permite al alumno volver sobre su actuación, difícilmente podrá conocer los errores que ha cometido y, a partir de ellos, rectificar, como ha sucedido. La intervención del profesor y el exponer la situación a la clase fue positivo puesto que le permitió a la alumna una participación significativa para ella ya que le permitió darse cuenta y resolver dudas y a la clase reflexionar sobre otros razonamientos y argumentarlos.

No hay que olvidar la dificultad añadida en la operación: la división propuesta por P1A17 no es resoluble directamente, sin embargo la alumna se da cuenta de ello y trata de aplicar un “truco” enseñado por la madre. Obsérvese que dicho conocimiento ha sido enseñado por el docente; sin embargo, la niña recuerda el truco de la madre más no la enseñanza del docente. Los alumnos aprenden los conocimientos de diferentes maneras y en diferentes tiempos; no necesariamente cuando el docente se los propone, aunque en este momento tengan contacto con el nuevo saber.

Es importante que, a medida que un alumno se involucra en un tema nuevo, éste forma parte de la construcción de nuevos conocimientos, ya sea de manera directa o indirecta. Recordar los conocimientos previos no solo ayuda a reforzarlos, sino que permite la construcción y reforzamiento de los nuevos.

Aparentemente, el tema es sencillo de entender y aplicar en situaciones relativamente nuevas[406]. La metodología que actualmente se conoce como tradicional se basa en este supuesto: proporcionar directamente al alumno el nuevo saber y situaciones puntuales para que lo aplique, estas situaciones puntuales pueden ser preguntas directas o problemas tipo. Sin embargo, hemos podido observar que no basta que el alumno aplique, es positivo llevarlos hacia la reflexión y comunicación de lo que hacen aunque a veces acierten y otras, no.

---

[405] Para quinto grado son cantidades y conocimientos manejables. Con asociaciones simples se puede llegar a la solución correcta de manera inmediata.

[406] Una situación es nueva cuando las circunstancias de la misma también lo son y crean en el alumno un conflicto cognitivo que desorganiza su mente, pero es capaz de volver a poner en equilibrio. No basta con cambiar datos numéricos o no en un problema para que este se convierta en una situación nueva o desequilibrante. Esto depende de las herramientas del alumno y lo que pone en acción para resolverla. Su percepción es importante.

P1A10 y P1A8 también presenta un error de interpretación. Aun cuando las alumnas comprendan una parte del tema estudiado no necesariamente comprenden otro. Las manipulaciones simbólicas, sin comprensión de la situación llevan a resultados absurdos, y el hecho de no comprenderlo, imposibilita a estas alumnas a pensar en estrategias de reconstrucción del procedimiento.

Por último, a los alumnos les resulta difícil dar razones y las mismas, generalmente, 'caen' en una reiteración de la afirmación y redundancia en dos ideas asociadas. No se observa en la sesión que los alumnos definan correctamente algún concepto o idea trabajada, pero aun cuando esto no suceda son capaces de utilizarla en la solución de problemas si se les permite hacerlo. Si los alumnos no son capaces de usarlas espontáneamente, es positivo que el experto cree las condiciones de hacerlo ya que posibilita la resolución de la situación y la conceptualización de la idea que paso a paso irá consolidando.

Sesión 6 / Caso 1

El profesor inicia la clase planteando una pregunta de definición sobre un concepto que los alumnos y el docente han estado trabajando de manera práctica: los porcentajes. De hecho, el tema de los porcentajes no parece ser desconocido para algunos de los alumnos. En clases anteriores, los alumnos han asociado la idea de porcentajes a las rebajas como una forma que se observa de expresar las mismas en los escaparates (no como sinónimos). A partir de ello, han ido estableciendo formas de hallar dichos porcentajes y conocer las rebajas. La clase pasada se ha centrado en un procedimiento más general. En esta oportunidad, el profesor intenta saber qué idea tienen los alumnos de porcentaje a partir del trabajo realizado con el mismo.

Los alumnos relacionan inmediatamente el porcentaje con las ideas de descuento y rebajas ya que ambas forman parte de la situación en la que están trabajando dicho tema. Tanto en P1A8 como en P1A12 la idea de "parte" del total está presente, pero en función de los descuentos; es decir, aunque no es explícita la palabra se asocia el porcentaje a una parte de algo o un todo (una cantidad de otra). La idea expresada por los dos alumnos es cierta más no completa ya que limitan su actuar a los descuentos y los porcentajes no solo hacen referencia a los mismos. Más es positiva dicha asociación y que ha sido establecida por los alumnos desde sus conocimientos previos y experiencia. De hecho, la respuesta es esperada pues se basa en lo que los alumnos han ido trabajando[407].

Para ampliar la idea de porcentaje y, por tanto su comprensión y definición, el profesor recurre a la actividad de buscar situaciones en las que se involucre dicho tema e intenta que los alumnos hagan explícitas las mismas. No dice directamente que ‘las rebajas’ no es el único contexto en el que aparecen los porcentajes sino que permite que los alumnos ‘descubran’ dicho contexto y por lo tanto amplíen la idea en cuestión. Los alumnos mencionan los diferentes titulares o situaciones que incluyen porcentajes, pero de todos ellos, el que es explicado por uno de ellos es aquél que se relaciona con el descuento (idea trabajada en las rebajas). Se hace explícito que aquella situación que conocen más es la que los alumnos pueden explicar.

No obstante, ampliar los contextos, aunque no sean del ámbito directo del alumno, permite hacer más extensible su uso. Los porcentajes pueden ‘nacer’ como “la parte que me indica descuento” pero puede extenderse a “otras partes” en otros contextos. El hecho concreto de que el profesor pregunte qué es el 20% de ‘algo’ permite generalizar esa situación: ese ‘algo’ puede ser un precio, un conjunto de personas, etc. A partir de esta situación, los alumnos responden de manera general: es la quinta parte, setenta de cada cien, cincuenta centésimos, etc.

Sin embargo, aunque introduzcamos diferentes contextos, no necesariamente los alumnos ubicarán el nuevo tema (los porcentajes) en los mismos de manera espontánea. Se puede pensar que al introducir los nuevos contextos, los alumnos ampliarán la idea de porcentaje que tienen inmediatamente. Esto no se logra de esta manera. No podemos decir que sea correcto ni incorrecto, necesita tiempo, pero puede hacernos reflexionar como docentes sobre porqué cuando los alumnos resuelven correctamente problemas matemáticos en unas situaciones, no lo hacen en otras, aun cuando se haya introducido el tema o contexto. Los alumnos realizan aquello que dominan, aún en contextos en que no sea conveniente. No obstante, introducirlo permite que en situaciones posteriores, los alumnos hagan presente dichos conocimientos nuevos. Obsérvese que es el profesor mediante ejemplos concretos quien concluye que los porcentajes se usan en diferentes contextos, aun cuando algunos alumnos hayan participado de esa construcción. El profesor, por el momento, tampoco exige más. Mediante las respuestas dadas a la pregunta sobre qué es el porcentaje o tanto por ciento, podemos observar que hay

---

[407] A diferencia de P1A1., P1A12 es un alumno que tiene una participación media, a menos, en la clase.

diferentes niveles de comprensión del tema y cada una realiza un aporte, tanto para el profesor como para los alumnos.

Cuando el profesor hace presente un tema ya trabajado y en el que los alumnos han tenido bastante experiencia, la situación cambia. Al preguntar sobre qué es el 20% de algo, las intervenciones son más espontáneas. Es un tema que han trabajado. Obsérvese cómo P1A14 participa; ella lo hace de manera espontánea ya que es un tema en el que, en anteriores sesiones, ha tenido participaciones positivas. Por ello, esta vez lanza su respuesta de manera segura. Lo mismo ocurre con P1A18. El resto, son alumnos que generalmente participan y a los que el profesor permite su participación porque suele ser buena y positiva para la clase.

A partir de un tema conocido (los porcentajes y su equivalente en fracciones), el profesor lanza una pregunta de reflexión, lo que les permite a los alumnos intercambiar ideas y comunicarlas. Mas las respuestas son brindadas por P1A4, P1A1, P1A5 y P1A16, alumnos cuyo nivel de comprensión y participación es mayor que el del resto de sus compañeros. Aun cuando el docente esperaba participación del resto de alumnos, estas no llegaron.

Seguida de la pregunta de reflexión, se propone una pregunta de aplicación: el 50% de €60. Esta situación ya ha sido trabajada y lo más probable es que cualquiera desee responder, pero es P1A5 quien tiene la palabra inmediatamente. No obstante, la mayoría de los presentes levantó la mano para hacerlo. Para la siguiente situación podemos observar que la respuesta no se ajusta a lo que se pide; hay un buen procedimiento puesto que el 25% corresponde a la cuarta parte y por lo tanto se puede dividir directamente. En este caso hay un conflicto ya que el alumno asumió una situación que no había sido propuesta, transformando lo requerido. Por su parte P1A12 desarrolla otro tipo de conflicto, aparentemente tiene una mezcla de situaciones que no logra encajar, incluso sin percatarse de ello., pero la respuesta no se ajusta. Debido a esta confusión, el docente vuelve sobre lo anterior: porcentajes y fracciones de tal manera que los alumnos tengan claro entre qué se debe dividir y porqué. Para ello, generalmente recurre a los alumnos que brindan respuestas acertadas e inmediatas (tal es el caso de P1A4, e incluso P1A7[408]).

Las siguientes situaciones corroboran lo que se dijo anteriormente: los alumnos han captado con bastante precisión el 50% ya que todos los que contestaron lo hicieron correctamente, incluso los alumnos menos aplicados. Por otro lado, con estos ejemplos,

---

[408] P1A7 es un buen alumno, pero no es constante su asistencia a clase.

el profesor asocia los porcentajes a las rebajas lo que corrobora lo que decíamos de P1A16[409], quien intenta adelantarse a los hechos.

Otra situación propuesta a partir de estos tres casos, es analizar la similitud de los mismos. Véase que con esto no solo se busca aplicar una operación, sino reflexionar, comparar y hallar utilidad a lo que se hace o propone hacer. Las operaciones son un medio para resolver situaciones y darles sentido. Las preguntas de este tipo suelen desconcertar a los alumnos. Obsérvese que el maestro pregunta por la clase de rebaja, intentando que los alumnos establezcan una relación entre las mismas; sin embargo, los alumnos no logran ver esa característica común si es que el profesor no pone los medios para ello. Necesita transformar la pregunta y hacerla más visible a los alumnos. Las preguntas que se formulan son fundamentales. Se puede observar que los alumnos no logran responder porque no comprenden la pregunta. Cuando ésta se reformula hasta que el alumno la comprende, las respuestas se dan con naturalidad. Antes de dar la respuesta correcta, el profesor transforma la misma para que los alumnos comprendan lo que se pregunta pues la dificultad muchas veces no está en la matemática que ellos conocen y aplican sino en la comprensión del lenguaje oral. Este lenguaje y el matemático van muy unidos y el primero hace comprensible y asequible el segundo. Una vez comprendido el primero, los alumnos logran darle significado.

A diferencia de la situación anterior, el siguiente grupo presenta las rebajas ‘iguales’ en el sentido que se expresan con la misma cantidad. Antes de compararlas, el profesor hace preguntas independientes. Como hemos observado, no el mejor alumno, siempre responde correctamente, sin embargo, es capaz de darse cuenta de su error si es capaz de volver sobre la situación.

Ante las dificultades, el profesor combina lo que les propone con lo que se ha hecho, de tal manera que el alumno recuerde el conocimiento que debe aplicar. No deja que los alumnos lo recuerden sin ninguna orientación, ya que su trabajo independiente puede complicar la situación puesto que los alumnos no son capaces de trabajar bajo diferentes puntos de vista sin intervención de alguien que le ayude a hacerlo, al menos no en estos momentos. Muchas sesiones, actualmente, promueven el trabajo independiente del alumno, pero esta independencia si no tiene la orientación y guía del docente puede no ser aprovechada por el alumno significativamente en el momento adecuado, perdiéndose tiempo valioso para su aprendizaje.

---

[409] Es una actitud constante en P1A16. En algunas oportunidades, el profesor intenta desatender dichas intervenciones pues perjudican la secuencia de la clase.

Al ser las situaciones cotidianas abiertas, estas no se centran únicamente en hallar un número a través de una operación. Las situaciones abiertas incluyen una problemática amplia; las ideas son diversas y permiten relacionarlas con otras. Por ejemplo, el hecho de saber discernir en qué situación hay una mejor rebaja para luego ser capaces de decantarse por la mejor[410]. Sin embargo, una de las desventajas que se puede observar al trabajar las matemáticas desde situaciones cotidianas abiertas es que las ideas que se pueden expresar son tan variadas que si no se sistematizan con tiempo, los alumnos no tienen claro cuál de ellas vale o conviene. Por otro lado, es difícil recordar, a largo plazo, una serie de ideas variadas que cuando se intente hacerlo se pueden haber olvidado algunas que son importantes. Por ello, es necesario retomarlas constantemente, una vez que se han introducido, a través de su uso en la construcción del conocimiento.

Preguntar a los alumnos tiene la ventaja de conocer qué están aprendiendo y cómo expresan sus ideas, pero éstas deben que seguir un hilo conductor: pensar en función de un tema concreto. Preguntar ayuda a los alumnos a reflexionar sobre lo que hacen y darle sentido situacional a su actividad matemática, les permite comprender las situaciones, traducirlas a lenguaje matemático e interpretarlas a partir de éste. Los alumnos descubren las matemáticas en las situaciones, e intentan ver las mismas con sentido matemático.

Los alumnos que mejor dominan las matemáticas, intervienen más en la construcción de nuevo conocimiento y en el establecimiento relaciones entre los temas matemáticos. Los alumnos que conocen la matemática pero no la dominan, no logran establecer esas relaciones inmediatamente. Dominan los temas de manera parcial, sin establecer relaciones[411]. Estos alumnos, a medida que se van conectando más los temas, menos intervención tienen. Sucede con dos alumnas que pueden enunciar correctamente algunas reglas pero que no son capaces de aplicarlas en situaciones nuevas.

En general, los alumnos tienen clara la relación entre porcentajes y fracciones, y ven éstas como otra manera de escribir los porcentajes, además de valerles para saber a cuánto equivale el porcentaje de una cantidad. Asocian a varias fracciones algunos porcentajes como 50%, 25%, 10%, mientras que otras la asocian sólo a fracciones decimales con denominador 100: 37%, 52%, etc. Los alumnos son capaces de establecer relaciones y ampliar las mismas, haciendo más rica su actividad matemática, en el sentido de poder hacer uso de más recursos para enfrentarse a las situaciones. Aun cuando no

---

[410] Definitivamente, hay otros factores como el producto, la calidad del mismo y la necesidad, etc.

[411] P1A10, por ejemplo, sabe que el 10% es la décima parte, y que es 10/100, pero no sabe cuánto corresponde a cada una de esas partes según una cantidad concreta. Tampoco relaciona que para saberlo tiene que dividir entre 10, o hacer diez grupos y ver cuántas hay en cada uno.

tengan expresada formalmente la fórmula para hallar los porcentajes, los alumnos pueden hallarlos, de manera más fácil unos (dividiendo únicamente); otros aplicando la fracción de un número.

Caso 2

Sesión 1 / Caso 2

La sesión inicia con la corrección de la tarea asignada; en este parte de la clase, los estudiantes escriben en el encerado sus soluciones a fin de poder mostrarlas a la maestra y a toda la clase y verificar su validez; si es necesario, la docente corrige las mismas. Por lo general, la maestra pregunta a la clase si la solución de la alumna o alumno es correcta. Si lo es, la solución permanece para que quien lo necesite, la copie; si no, otro alumno sale a resolver. En otros casos, la maestra guía la solución con la participación de los estudiantes.

La segunda parte de la sesión, se centra en la introducción y desarrollo de un tema nuevo. La profesora presenta el tema, su importancia y la situación concreta en la que deben verlo para ser comprendido. En primera instancia, la expresión “la fracción puede funcionar como operador” utiliza lenguaje con el que, evidentemente, los estudiantes han interactuado, aunque no en este contexto. Un operador es, según la RAE[412], un “símbolo matemático que denota un conjunto de operaciones que han de realizarse”; ajustado a este contexto, un operador es “un símbolo que sirve para operar” como lo son: +, -, x, ÷. Como señala Pimm (1990), las capacidades lingüísticas más importantes consisten en ser capaz de asignar sentido a lo que se escucha o lee, y de transmitir las propias intenciones a través de los canales hablados o escritos. Según Thom (1973, citado por Pimm: 1990), el problema fundamental de la enseñanza de las matemáticas consiste en la construcción de significados más que en la cuestión del rigor. Cuando la docente se comunica con los estudiantes, transmite información que presume el alumno comprende, no de inmediato, pero sí a medida que se va mostrando la situación y el contexto en el que se ubica. A veces, esa comprensión no es como pensamos, puesto que el estudiante tiene consigo conocimiento y experiencias que van más allá de lo que recibe directamente en clase. Nótese como la conducta de la alumna difiere de la pensada por la docente, ya que aquella divide entre dos cada unidad y no entre cuatro como propone la maestra. No obstante, en

---

[412] La RAE expone otras definiciones; sin embrago, en este caso, se toma aquella que más se ajusta al contexto que estamos analizando.

términos de fracción, a cada alumna le corresponde un medio, dos cuartos o “la mitad”, tal como lo propuso la alumna.

Las respuestas brindadas por otros niños, quienes sugieren que es “dos octavos” nos permiten observar ciertas deficiencias en la adquisición del significado del término fracción, y que muchas veces no es profundizado, que les conduce a utilizarlo erróneamente; aun cuando los alumnos sean capaces de seguir un procedimiento preestablecido, que les permita resolver una suma, es menos probable que su capacidad se traslade a evidenciar dominio del significado del tema (fracciones) que están manipulando. Conocer y comprender se relacionan, pero no son lo mismo. Por las actitudes y respuestas de los estudiantes, sabemos que conocen sobre el tema, saben diferentes aspectos, pero comprenden poco del mismo, aunque son capaces de aplicar diferente conocimiento para resolver cualquier situación. El conocimiento precede a la comprensión. Nótese cómo en el campo de los números naturales, la alumna es capaz de generar[413] conocimiento, al expresar que a cada alumna le corresponde dos pastelitos ya que: o divide ocho entre cuatro de manera simbólica o lo hace gráficamente; mientras que en el campo de las fracciones no, puesto que no ubican este tema en un contexto nuevo como es el de un conjunto de objetos. Aun cuando la división gráfica es correcta, y que parte de un resultado hallado previamente, como lo muestra la imagen, le es difícil expresarlo mediante fracción. Nótese que la fracción que usa es un octavo, sumándola cuatro veces y obteniendo cuatro octavos, dato que no es correcto ni que le es útil para responder. Sin embargo, intenta encontrar una manera de introducir en este contexto el tema de las fracciones: lo más probable es que “un octavo” sea producto de escoger un pastelito, que en un contexto ordinario, es lo que le corresponde a una persona, de ocho que es la cantidad total; la suma es porque hay cuatro “partes”. La alumna muestra cierto conocimiento y dominio de la suma de fracciones (homogéneas), pero no le es suficiente para adecuarlo a la situación propuesta; para ello, necesita un mejor conocimiento y dominio del tema.

El diálogo establecido es un intento de conducir a la alumna, y a la clase, por el camino correcto; la maestra pretende que los alumnos asocien la actividad previa (dividir entre cuatro) con esta y la utilicen; no obstante, la facilidad con que se puede enunciar mediante números enteros (o naturales) impide que puedan expresar en el contexto de las fracciones. Sin embargo, la persistencia de la docente, asociando paso a paso (“¿si son

---

[413] En el sentido de organizar y componer, mas no en el de inventar.

CUATRO y UNO le das a tu compañero?”) con la imagen elaborada permite que la alumna establezca la relación deseada y la exprese en términos de fracción: “un cuarto de ocho”. El trabajo propuesto por la docente, ha orientado a los alumnos hacia la construcción de una nueva forma de expresar una cantidad; los alumnos *leen* la actitud de la docente y su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje planteado ya que el diálogo establecido nos permite observar que la alumna responde como la maestra desea; de alguna manera *entiende* lo que la profesora busca. No obstante, aun cuando la alumna, y con ella la clase, hayan seguido el planteamiento de la docente, es difícil asociar inmediatamente este a cualquier circunstancia; ya que esto implica pensar (o elaborar) individualmente los pasos que hay que seguir para hallar la respuesta. Es la profesora quien retoma el procedimiento y guiando a los alumnos, estos logran asociar y responder. La participación del alumno se centra en ir realizando lo que el maestro le va diciendo, relacionándolo con lo que el alumno ya conoce. De alguna manera la actividad se centra en lograr la asociación gráfica-lenguaje matemático. La situación en sí se aprecia que no es problemática (repartir la merienda entre cuatro) sino como identificar en ella la fracción como operador y expresarlo.

El penúltimo bloque de la sesión está orientado a explicar el papel de la fracción en este contexto, indicando la función de cada elemento. El ejemplo usado por la docente difiere de los generados después ya que mientras que para las tortas hay que dividir cada una de las unidades, para los pastelitos y para los bombones no es necesario. La fracción hallada para saber cuánto de torta le corresponde a cada uno es dos cuartos que visualmente nos indica que cada alumno se lleva la “mitad de torta” (o un cuarto de una y un cuarto de otra). Sin embargo “2/4 de 2”, que es uno, no se visualiza como la mitad, que es la imagen que capta el niño; de ahí su sorpresa. ¿Quiere decir que lo expresado por la docente es incorrecto? Lo que podemos decir es que está en dos planos diferentes: si de las dos tortas hacemos cuatro “medias tortas” definitivamente a cada alumno le toca uno (o una mitad). Aparentemente, es más fácil observarlo en un conjunto de elementos en el que es suficiente separarlos (como es el caso de “dos cuartos de ocho que es cuatro), que en un conjunto de elementos en el que tienes que dividir cada uno (cuyos elementos son menos que la cantidad entre la que tienes que repartir) y para el que la imagen producida es conocida y tiene asignado un significado y nombre (mitad).

La última parte se genera a partir de la explicación de la forma de hallar la fracción de un número. En su mayoría, los alumnos no muestran inmediatamente su nivel de captación de la situación, es un solo alumno quien brinda la respuesta, la misma que es aceptada por la clase. Las gráficas propuestas se elaboran a partir del esquema de los pastelitos, es decir de dos en dos o a partir de la respuesta brindada, es decir en grupos de seis; en estos se parte del resultado que ya ha sido encontrado. Más allá del contenido matemático que debe aprender el niño, el maestro muestra una forma de generar el aprendizaje, por ello, además de mostrar cierto conocimiento al alumno, el docente crea las condiciones para que los estudiantes generen aprendizajes, mostrándoles el cómo y no solo el qué aprender.

Sesión 2 / Caso 2

Según la RAE, *metodología* significa "ciencia del método"; de ello, *ciencia* se define como el "Conjunto de conocimientos obtenidos mediante la observación y el razonamiento, sistemáticamente estructurados y de los que se deducen principios y leyes generales" y *método* como el "Procedimiento que se sigue en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla". En el proceso de enseñanza aprendizaje existen diversos métodos declarados por los expertos, en los cuales el papel del docente o formador es fundamental, ya que es él quien planifica la forma cómo los alumnos han de aprender en su clase. Si bien, hoy en día el proceso de enseñanza-aprendizaje se centra en el estudiante, buscando que sea este quien construya el conocimiento, a partir de su interacción con las situaciones y con aquel; es correcto pensar que el papel del docente no es menos importante. Esta sesión nos presenta tres núcleos o aspectos resaltantes del proceso: profesor[414], alumnos y contenido; los dos primeros tienden a dirigirse hacia el tercero. En primer lugar, la maestra centra su actuación en un contenido (fracción de un número) y en situaciones en las cuales se pueda aplicar, ya sea reconociéndolo en ellas (como en el primer párrafo) o como medio para hallar un dato (a través de los problemas planteados). Una parte esencial de su gestión de enseñanza en esta sesión es permitir que los estudiantes reflexionen sobre las situaciones propuestas; no basta con hacer lo que hay que hacer (operaciones) sino que antes de ello, expliquen la situación y porqué se llega a ese camino, es decir por qué se aplica tal o cual operación.

La actitud frecuente de un alumno frente a un problema matemático planteado en la escuela es la de resolverlo, identificando qué tipo de operaciones debe realizar; influye la cercanía con el tema de estudio ya que si el problema se propone dentro de un contexto de aprendizaje de un determinado tema, su resolución se concebirá aplicando lo

---

[414] Profesora, específicamente.

aprendido. No obstante, emplear con acierto una “fórmula” no garantiza que el alumno comprenda la matemática implícita y aprendida. Uno de los cinco principios de enseñanza y aprendizaje, en el marco de una educación matemática realista es la reflexión; para la maestra una buena ocasión para ello es la resolución de un problema que, aunque el problema en cuestión puede considerarse como “problema de solución tipo” ya que tiende a dar una única respuesta y seguir un único camino, se puede analizar el mismo y la forma de resolverlo antes de aplicar cualquier operación. Se evidencia que no es sencillo para el alumno pues tiene una forma de trabajar que lo conduce a “resolver” directamente. La maestra busca que los alumnos sean capaces de expresar aquello que el problema les presenta justificando cada paso propuesto para su resolución. La reflexión es personal.

Para que los estudiantes comprendan lo que se debe hacer es necesario que se involucren personalmente en la situación, de tal manera que les permita vislumbrar lo que el problema le presenta, lo que la maestra propone y los que los compañeros exhiben. Aun cuando el estudiantes de quinto grado están en la etapa, según Piaget, de operaciones concretas y son capaces de considerar diferentes puntos de vista; observamos que no es inmediato aceptar otras formas de trabajar y transformar la propia cuando ya se ha desarrollado una personal. En la sesión expuesta, en un primer momento, P2A5 es incapaz de vislumbrar lo que la maestra le propone (expresarlo como fracción). En primer lugar, la alumna tiene una solución, con lo cual el problema está resuelto; para P2A5, el problema ha llegado a su fin y, por lo tanto, no le falta nada. Otros alumnos, sí han captado lo que plantea la maestra y manifiestan lo que la maestra espera: “un tercio de treinta”. No obstante, la alumna aún no es capaz de seguir el razonamiento de sus compañeros y escribe una fracción en base a los que considera oportuno: un tercio de treinta como 1/30 (que no es lo que se espera). Al final, cuando la maestra repite la expresión, la alumna percibe la “transformación del lenguaje común al lenguaje matemático” y lo escribe correctamente. Al solicitarle la maestra que explique lo que ha hecho se espera que la alumna exprese que encuentra un tercio de treinta y que para eso divide entre tres, que es el denominador y multiplica por uno que corresponde al numerador. No obstante, la alumna manifiesta que divide “treinta entre tres”; para ella, ese es el camino. Probablemente, el ejemplo no es el mejor para poder expresar la respuesta deseada, puesto que basta con una división directa para hallar el resultado (la operación por uno, indicado por el numerador, no es necesaria).

Lo anterior nos lleva a analizar la complejidad de resolver, desde la visión de la estudiante, un problema desde distintos caminos, sobretodo, pensados y razonados por la misma persona: la alumna lo resuelve desde división de números naturales y la maestra desde fracción de un número; la alumna lo hace desde la manipulación simbólica y la profesora desde la gráfica. Nuevamente, la alumna actúa sobre el resultado dibujando los diez círculos, que representan las monedas gastadas. Solo cuando la maestra le expresa que dibuje todas las monedas, P2A5 lo hace y al preguntarle que explique lo que ha realizado, la alumna vuelve a referirse al resultado encerrando los diez círculos. Aun cuando la alumna haya "interactuado" con el tema en cuestión, visualizarlo directamente en el problema o en la gráfica no es sencillo. La alumna observa los treinta elementos, las divisiones correspondientes e indica que una de ellas representa un tercio, pero no como un tercio de treinta; la unidad se percibe como tal, más no como treinta elementos, por ello no expresa que es fracción de número; esta idea aún no está interiorizada en su contexto. La alumna responde que dos tercios de treinta son veinte, asociando los dos tercios restantes en la gráfica y las veinte "monedas" restantes. Al consultarle cómo saber que son veinte, la respuesta de la alumna se dirige al planteamiento que siguió desde el principio, por ello, manifiesta que se divide y se resta; es decir, se divide la cantidad total entre tres y se resta este resultado a la cantidad total; aún no logra comprenderlo como fracción de un número. Es P2A3 quien responde en función del tema; P2A5 solo asiente. Tanto P2A5 como P2A3 utilizan lo que comprenden; lo que no es asequible a su entendimiento no tiene cabida; y con estos casos podemos destacar que en un aula interactúan estudiantes con diferentes niveles de comprensión.

De lo anterior, podemos decir que ante situaciones que se pueden manejar con números naturales (dividir directamente y que la división no ofrezca dificultad para el alumno), estos tienen mayor uso frente a las fracciones. Los alumnos no suelen usar las fracciones cuando no las necesitan, sobre todo si tienen otras herramientas. Los alumnos, generalmente, usan las herramientas que más dominan, en este caso los números naturales y la división con ellos. Aun cuando la fracción indique que se toma más que una parte, si las cantidades son fácilmente manejables por los alumnos mediante operaciones con números naturales, estos no ven la necesidad de expresarlo mediante fracción (si tienen que multiplicar por dos, los alumnos prefieren sumar). Esta idea general se observó en la sesión anterior y en ésta, cuando se le pide a la alumna que indique lo que gasta en el hermanito y lo indique mediante fracción. Como las cantidades son asequibles (30 entre 3 u 8 entre 4), los alumnos aplican divisiones directamente. Identifican los resultados como partes del total, pero no suelen expresarlo como fracción, no inmediatamente.

La forma de trabajar, mediante este tipo de situaciones o *problemas*[415], ayuda a que los alumnos identifiquen cada vez más rápido, formas de expresar en texto la idea de fracción de un número, explicar lo que se pide y practicar el procedimiento para resolver. Se puede observar a través de la propuesta de problemas por parte de los alumnos que siguen un formato específico de elaboración, de tal manera que su expresión y comprensión matemática sea directa e inmediata.

Sesión 3 / Caso 2

La experiencia presentada nos permite analizar la forma cómo la maestra afronta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura *Matemática* en su aula. Ante situaciones planteadas, como las propuestas en clase o en el libro de trabajo, la docente busca que los alumnos sean capaces, no solo de exponer un camino de solución, sino de explicar, con sus propias palabras, lo que se debe hacer, incluso antes de ejecutar cualquier operación, aun cuando esta, se sabe, guíe directamente a la solución. Penrose[416] insiste en que las palabras son casi inútiles en el pensamiento matemático… el pensamiento no es lenguaje, pero sin él puede morir prematuramente en la cabeza, refiere el mismo autor. A partir de su propuesta, la maestra busca que los niños sean capaces de explicar, habilidad que le permite al estudiante la toma de decisiones personales en el proceso de solución. Nótese como al preguntar a P2A5 qué tiene que hacer, la alumna responde “coger tres filas”. Independientemente de la intención de la maestra, que se evidencia en volver a formular la misma pregunta, la alumna toma una decisión sobre su actuación frente al problema para poder resolverlo: “coger tres filas” o “juntar en partes”.

A propósito de la intervención de P2A5, la propuesta de solución presentada por esta alumna nos permite ver una gráfica que aparentemente no guarda relación directa con la fracción expuesta (dos tercios), aunque sí con la cantidad total (veinticuatro). Podemos decir que la alumna no emplea ningún “truco”[417] para ello. A partir de esta imagen podríamos preguntarnos si este hecho dificulta la actividad de la alumna para poder responder con acierto. La respuesta de la alumna (coger tres filas) nos encamina en la respuesta ya que su contestación inmediata no se orienta a la solución: $\frac{2}{3} de 24 = 16$,

---

[415] En los que se enuncia una situación, se presentan unos datos (los necesarios) y se plantea la pregunta que se resuelve a partir de la manipulación de esos datos.

[416] Lamote de Grignon, C. Antropología Neurofilosófica. ISBN: 84-291-5557-0. Pág. 343.

[417] Este “truco” podría haber consistido en hacer una gráfica basándose en la fracción. Para ello, P2A5 tendría que haber dividido el total entre tres (que es la cantidad de grupos) y diseñar la gráfica en tres columnas (cantidad de grupos) y ocho filas (cantidad en cada grupo). Si no se sabe cómo (truco), la alumna tendría que haber establecido relaciones previas.

puesto que “coger tres filas” implica seleccionar 18 elementos, dos más de los correctos[418]. No obstante, la decisión/acción posterior de la alumna señala que se ejecuta en base a la fracción presentada: la alumna forma tres grupos tal como lo indica el denominador de la fracción y coge dos como especifica el numerador; para ella no es un obstáculo la forma como ha distribuido la cantidad pues a partir de la misma puede dividir (o agrupar) según le propone la fracción; supuestamente es fácil visualizarlo. “Aprender haciendo” es una frase actual en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos en edad escolar que espera que sean los propios estudiantes quienes generen sus propias formas de aprender a partir de la propuesta docente. En este caso, observamos que P2A5 idea una forma de resolver que no se ajusta al parámetro establecido, tal como lo menciona una de las alumnas, pero que posteriormente no es obstáculo para resolver la situación; la maestra permite que la alumna asuma el reto. Solo la alumna es capaz de hacerlo porque ella ha generado dicho proceso. La otra alumna en cuestión no, al menos no inmediatamente, porque esta no ha ideado el camino y no lo visualiza en el suyo; aún no muestra esa apertura. Solo se entiende lo que se razona y se razona a partir de situaciones que ofrecen cierta actuación independiente y de docentes que las generan. Para Ortiz Rodríguez, la fuerza motriz de la matemática se constituye por: los problemas, los ejemplos y el contexto; los primero, deben abrir ante nosotros perspectivas totalmente nuevas; los segundos, deben permitir contextos más propios del problema. El contexto debe ser familiar al alumno y dentro de este contexto, se encuentra la actividad matemática como tal.

La forma de explicar la situación y la solución propuesta se asocia a la capacidad del estudiante para comprender lo que aquella le expone y propone y lo que de la matemática sabe. Los problemas o situaciones planteados por la docente no son nuevos, en el sentido de ser propuestos por primera vez; de hecho, su estructura verbal/escrita es similar en cualquier caso, por lo que un alumno podría, simplemente, transcribir la estructura matemática y remplazar las cantidades por aquellas que correspondan al problema por resolver, reforzando un procedimiento adquirido. ¿Podemos decir frente a esta situación que los alumnos comprenden el problema?, ¿saber qué es lo que tienen que hacer es comprender la situación problemática, asociándola a una o más operaciones o procesos? Más allá de responder inmediatamente estas preguntas, observamos que darle la oportunidad de explicar, más allá de mostrar limitaciones en su expresión oral (en

---

[418] Si a alumna se refiere a las columnas, serían 12 elementos, lo cual tampoco se corresponde con la cantidad final.

cuanto a fluidez y uso correcto de vocabulario), los alumnos expresan su comprensión de la situación, lo que les permite una mejor asimilación de la misma. La comprensión de la situación por parte del estudiante se basa en poder exponer lo que se hace (acción) más no lo que se busca (finalidad). Analizando la situación entre la maestra y P2A6 en la que la profesora le pregunta a la alumna "¿qué cantidad son cinco sextos de trescientos?", la alumna responde cómo la ha de hallar: "trescientos lo multiplico por cinco y lo divido entre seis". Esta actitud es comprensible pues la alumna aún no conoce la cantidad aunque sí como llegar a ella; una vez resuelta la operación, la cantidad independiente es evidente. Por otro lado, permitir que los estudiantes expresen de diferente manera una cantidad, ya sea a través de un número o una operación le permite visualizar la flexibilidad de aquella (la cantidad) y aquel (el número), lo que le conduce a una mejor manipulación de este y a la posibilidad, a través de la experiencia, de un mejor dominio del concepto. Los siguientes ejercicios se resuelven de manera similar por lo que se potencia la asociación.

El problema siguiente ofrece cierta dificultad al estudiante en cuanto que el alumno propone una operación correcta, pero que no es suficiente para responder acertadamente la pregunta. De alguna manera, el estudiante sigue el mismo camino aplicado en los casos anteriores, en los que la pregunta se ajustaba directamente a los datos expuestos. Sin embargo, logra darse cuenta del error y rectifica; a partir de lo elaborado, el estudiante halla la respuesta correcta; es decir, para él no es necesario volver hacia atrás y empezar de cero ya que lo que ha realizado le permite resolver la cuestión, procurándole un dato necesario. Hay que tener en cuenta, además, que la actitud de la docente, frente a la propuesta inicial del estudiante, fue la de intentar, sin decirle directamente que estaba incorrecto, que se diera cuenta del error; esta conducta de la docente fue entendida por el estudiante quien se orientó a la palabra clave ("niñas") y logró asociar lo que le proporcionaba y lo que le pedía el problema. Ante este problema, los alumnos muestran diferentes formas de resolverlo. Podemos decir que el pensamiento del niño de estas edades se muestra variado en cuanto a formas de entender el problema y de idearse una solución, aun cuando todos (o ambos en este caso) reciben la misma formación en el colegio; aunque tal vez no en el hogar[419]. Nótese la propuesta de P2A13, quien busca la forma de expresar la cantidad de niños de tal manera que le lleve directamente a la respuesta. Este alumno intenta llevar a una expresión matemática, diferente, la cantidad total de alumnos (que se expresa a través de números naturales);

---

[419] Un cierto porcentaje de estos niños, recibe clases particulares.

hace evidente otros conocimientos de la temática en cuestión. Permitir expresar sus pensamientos y producciones y hacer evidentes otros caminos de solución favorece la libertad de pensamiento para comprender una situación y para tener la posibilidad de pensar que el camino matemático es variado.

A través de esta propuesta de ejercicios y soluciones, podemos observar que la docente considera importante la práctica como modo de interiorización del nuevo conocimiento, por ello, no solo propone estas actividades que buscan que los alumnos apliquen lo aprendido, sino que en esa aplicación y exposición posterior frente a clase, reflexionen y comprendan mejor; de una manera más personal. La experiencia permite observar que no todos los estudiantes idean la misma forma gráfica de proceder, sino aquella que está más acorde con su forma de actuar. Ocurre con P2A5 a quien en una clase pasada le resultaba difícil representar gráficamente la situación; hoy lo hace a través de una gráfica que difiere de la idea de otra compañera; también con P2A18 y P2A13. Este hecho nos permite pensar que aun cuando los estudiantes se enfrentan al mismo proceso de enseñanza en el aula, el aprendizaje es personal y las estrategias empleadas llevan consigo un componente propio de la persona que las emplea. En ello, nos damos cuenta que los estudiantes, buscan estrategias personales que les permita no solo resolver una situación, sino comprenderla.

La última parte de la sesión se centra en la suma de fracciones; para su tratamiento, la maestra se basa en dos gráficas y sus respectivas fracciones, preguntando si se pueden sumar; los alumnos responden afirmativamente, indicando la fracción resultante. Se evidencia en esta primera parte (de la última) que los alumnos tienen información de fracciones que les permite interactuar con ellas; los conocimientos que se están trabajando no son nuevos para ellos, aunque hay algunos que no dominan a cabalidad (fracciones equivalentes, en las que toman en cuenta solo la continuidad del numerador, pero no el denominador); no obstante, son capaces de darse cuenta del error.

Sesión 4 / Caso 2

La primera intervención nos muestra que no es fácil para los alumnos utilizar correctamente el conocimiento previo con el fin de darle sentido a un nuevo saber. Recordando la sesión anterior, podemos decir que los alumnos saben el procedimiento para sumar fracciones homogéneas; en dicha sesión, los alumnos recordaron que se suman los numeradores y se coloca el mismo denominador. Bajo ciertas condiciones (fracciones homogéneas), conocen el “truco”, la forma de hacerlo. No obstante, la propuesta de esta clase cambia la condición: las fracciones son heterogéneas, por lo tanto no se puede colocar el mismo denominador pues hay más de uno. Darse cuenta de ello es un primer paso y pensar cómo hacerlo es el siguiente; sin embargo lo último implica una serie de conocimientos que es necesario tener en cuenta y que va más allá de lo recordado en la clase previa. Esta condición exige un cambio de decisión: ¿elegir uno de los dos denominadores… si es así, cuál?, ¿sumarlos y "generar" uno nuevo?, lo cierto es que solo un número representa las partes en las que se divide la unidad... y por ello hay que encontrar una solución. Frente a esta problemática, cualquier respuesta es posible; cada una tendría un tipo de error diferente: de concepto, de comprensión, de interpretación… La alumna se decantó por la segunda solución: sumar los denominadores. Para ello, pudo haber considerado que números diferentes se suman (como ocurre con los numeradores) o haber interpretado las fracciones como dos razones. No hubo oportunidad de saber la causa.

Comprender y expresar el porqué de las acciones realizadas o procedimientos empleados, dándoles sentido desde la situación, no determina cuan bien pueda aplicarlo; es decir, justificar adecuadamente porqué se coloca el mismo denominador no condiciona el que lo pueda hacer. Los alumnos son capaces de resolver sumas de fracciones homogéneas. Este aprendizaje se centra, básicamente, en adquirir unas herramientas que le permita actuar correctamente frente a cualquier situación que implique aplicar directamente la matemática. Sin embargo, el no saberlo o traerlo a la situación puede limitar la construcción correcta del nuevo saber. No es fácil para los alumnos pensar de inmediato de manera correcta; aquellos conocimientos previos no son fácilmente actualizados ni asociados con el nuevo. La relación que establece el alumno es más concreta: si hablamos de suma, se suma; si los numeradores, que eran diferentes se sumaban, los denominadores que son diferentes se deberían sumar. Se razona, aparentemente, en función de la imagen (la operación como imagen), o del "truco" y no sobre lo que estos (particularmente los denominadores) representan. Por otro lado, podríamos suponer que, a partir de saber que solo se pueden sumar "cosas iguales" no podemos pensar que los denominadores de las fracciones por sumar se sumen. No ocurre así. Trasladar un conocimiento a una situación nueva no es tan sencillo para estos alumnos. Lo que busca la maestra al plantear esta propuesta es que los estudiantes descarten el camino seguido por no ajustarse a la naturaleza del concepto. Los alumnos lo tienen más claro con las frutas, que son peras y manzanas, fácilmente manipulables física, gráfica o simbólicamente, pero no con los denominadores de las fracciones. Los estudiantes aún no hacen evidente la asociación con las fracciones homogéneas: la transformación. No obstante, la propuesta de la docente genera un conflicto, consciente o inconsciente[420], en el estudiante que lo conduce a idear una forma diferente.

Frente a este hecho, la propuesta de la docente es directa: "eso no sirve pues los denominadores son distintos", las fracciones, que son heterogéneas, tienen que ser homogéneas; y para ello: ¿cómo consigue fracciones equivalentes que, por ende, permitan obtener fracciones homogéneas? Frente a esta acción, los alumnos no se dan cuenta de la intención de la maestra, aun cuando acompañan su actuación… por ello, la profesora se detiene luego del cuarto intento pues en él ya hay un par de fracciones homogéneas equivalentes a las originales que los alumnos no perciben inmediatamente o no lo asocian con el objetivo de la acción. ¿Podemos pensar que al acompañar la actuación de la docente, los alumnos interactúan con el razonamiento de la maestra?, ¿ellos actúan en función del objetivo final o del inmediato? El objetivo final de la maestra (conseguir fracciones homogéneas) precisa de hechos concretos: obtener fracciones equivalentes, para lo cual ha de multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número. Esto, el alumno es capaz de seguirlo ya que sabe cómo conseguir fracciones equivalentes; por otro lado, la maestra precisa fracciones homogéneas para poder sumarlas y su actuación se centra en ello, por eso al conseguirlas ya no continua; el alumno no, ya que está centrado en conseguir fracciones equivalentes (objetivo inmediato); por ello, la maestra se detiene, para hacerle ver al alumno que ya se consiguió el objetivo final. Solo con una pregunta directa (¿observan algo?) el alumno se enfoca en lo que la docente propone y lo expresa. No todos lo logran. Para una mejor comprensión y visualización del proceso seguido, la maestra representa gráficamente la transformación, de tal manera que el estudiante pueda observar que el valor de la fracción no cambia; solo la manera de expresarlo. Con ello, el alumno ha conocido una forma de sumar fracciones heterogéneas, a partir de una serie de pasos.

Es necesario comentar la capacidad de estudiante para establecer distintas relaciones frente a un mismo hecho; aunque en la sesión se expresaron dos, la segunda nos confirma que dichas relaciones se construyen teniendo en cuenta los elementos involucrados de manera independiente y no necesariamente considerando lo que estos representan como un todo. Al relacionar los numeradores de las fracciones equivalentes

---

[420] En alguna oportunidad, la maestra pregunta a P2A11 porque piensa que debe hacer algo o cambiar de estrategias y el alumno responde que "porque si no, no preguntarías". Este ejemplo lo considero "inconsciente" ya que aún no obra con conocimiento de lo que hace.

de la primera fracción con los denominadores de las fracciones equivalentes de la segunda fracción, lo que hace la alumna es tomarlos independientemente. Este hecho puede permitir a la docente orientar a los alumnos sobre lo adecuado o no de sus intervenciones, permitiéndoles descartar las relaciones que no se ajustan a la naturaleza del objeto involucrado o encontrar la relación, aunque esta no sea importante para el caso en cuestión. Ante la misma situación, la intervención de P2A9 va más allá, podemos decir que se desliga de la intención de la acción realizada ya que se centra en otro aspecto. Sin embargo, esta le permite pensar sobre lo que se está realizando: las fracciones equivalentes no solo se consiguen multiplicando, sino también dividiendo… si hay fracciones equivalentes con “números mayores”, también las hay con “números menores”… ¿qué pasa si los números (del numerador y del denominador) no son compatibles como en el caso propuesto? Definitivamente hay un desconocimiento, no solo en P2A9 sino en P2A3 también, de cierto aspecto de las fracciones, relacionado con sus equivalentes y la posibilidad de reducir o amplificar las mismas. Sin embargo, antes de tener ese conocimiento, el alumno se cuestiona sobre el mismo y a partir de ello, lo va construyendo. A propósito de las diferentes intervenciones de las alumnas, frente a una situación podemos decir que la apertura del alumno hacia la actividad, favorece la gama de intervenciones, pero también puede desviar el campo de acción hacia otros rumbos que les lleva a olvidar el objetivo final de la acción. Nótese como, a propósito de la misma actividad y en función de las intervenciones de sus compañeras, P2A2 pregunta qué pasa si los numeradores son iguales… No obstante, esta intervención le permite reorientar la actividad a la maestra hacia la naturaleza de las fracciones que opera.

Los alumnos evidencian que para sumar (o restar) fracciones heterogéneas tienen que buscar fracciones equivalentes. El primer paso les ha quedado claro; el siguiente también, porque conocen la forma de hacerlo; sin embargo, este paso tiene un inconveniente que la maestra hace evidente a sus estudiantes: es un proceso largo. Este proceso les puede llevar a perder tiempo, a desviarse de la naturaleza de la acción o, por la cantidad de datos obtenidos, a no percibir lo que se busca. Al cuestionarles sobre una forma de hallar la solución a la problemática, los alumnos no encuentran una respuesta satisfactoria. Para los estudiantes, se torna difícil pensar sobre algo para lo cual no tiene herramientas o alguna orientación directa, al menos no inmediatamente. Tal vez la propuesta ideal, por parte de la docente, hubiese sido solicitar a los alumnos pensar en un número que sea múltiplo de los tres números que indican los denominadores o qué número puede dividir a los tres denominadores a la vez, acción que los estudiantes hubiesen resuelto al azar, aunque siguiendo un patrón… No obstante, la acción de la maestra conduce a observar una forma de hallar ese número, yendo directamente al número por el cual multiplicar. A través de esta decisión, los alumnos captan la solución: en el caso de tres fracciones, se multiplican los tres denominadores. No hay comprobación pues esta se dio para el caso anterior. En esta oportunidad se asume que ese es el camino. Y los alumnos aceptan. Para los estudiantes es más fácil seguir una ruta que construirla a partir de la aplicación de conocimiento base y de la toma de decisiones. La docente primero muestra el camino y luego reflexiona sobre él. Nótese como luego de indicar cómo se resuelve este tipo de operaciones, pregunta qué significa transformar orientando la palabra hacia "cambiar a común denominador". Sin embargo, si se plantean las situaciones que les permitan pensar sobre lo que hacen, los alumnos piensan y expresan.

Sesión 5 / Caso 2

Antes de comentar cómo se desarrolla la sesión podemos centrarnos en la primera actitud mostrada por algunos de los alumnos frente a una operación para cuya solución, aparentemente, estaban capacitados; si bien la operación pedía únicamente restar fracciones heterogéneas, actividad a la cual no se habían enfrentado directamente en la sesión anterior, se esperaba que pudieran resolverla sin inconvenientes puesto que el procedimiento base para operar este tipo de fracciones estaba aprendido ya que los alumnos habían participado positivamente en el aprendizaje del mismo. Proponer una actividad de esta naturaleza, es decir, "distinta" a las trabajadas en clase busca observar la capacidad de acción del estudiante, así como de adaptación a nuevas situaciones y de uso de conocimiento previo. La resta de fracciones heterogéneas no fue una actividad desarrollada de manera explícita en la sesión anterior pero sí la suma de fracciones heterogéneas (con dos o tres sumandos); por otro lado, la suma y resta de fracciones homogéneas es un tema que ya estaba interiorizado. Al resolver operaciones, los alumnos aplican algo aprendido; asocian una imagen (en este caso la operación propuesta) con otra (el procedimiento seguido): se establece una relación directa entre una y otra. Estas imágenes también pueden expresarse en términos de lenguaje cotidiano:

$$\overbrace{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}}^{\text{Primera imagen}}=\overset{\text{Segunda imagen}}{\overset{\downarrow}{\frac{5}{7}}}\;\Rightarrow\;\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{\text{Lenguaje cotidiano}}$$

Tres séptimos más dos séptimos es igual a cinco séptimos

Al sumar fracciones homogéneas se suman los numeradores y se escribe el mismo denominador

Fracción homogénea más fracción homogénea es igual a fracción homogénea

$$\overbrace{\frac{2}{4}+\frac{1}{3}}^{\text{Primera imagen}}=\overbrace{\frac{6}{12}+\frac{4}{12}}^{\text{Segunda imagen}}=\frac{10}{12}\;\Rightarrow\;\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{\text{Lenguaje cotidiano}}$$

Dos cuartos más un tercio es igual a seis doceavos más cuatro doceavos que es igual a diez doceavos.

Al sumar fracciones heterogéneas se suman transforman a fracciones homogéneas y se suman estas fracciones.

Fracción heterogénea más fracción heterogénea es igual a fracción heterogénea.

En el caso de fracciones heterogéneas, la imagen creada tiene la suma como operación. Nótese cómo al recordar cómo se resolvía, uno de los alumnos completa la idea con la palabra “sumarlos”, lo cual nos puede sugerir que no ha realizado la transformación interna. Al enfrentarnos a una operación para la cual no tenemos una imagen correspondiente, es necesario crearla. Lo más propio es hacerlo a partir de las imágenes construidas; al seguir este camino, se establecen relaciones directas y transformaciones internas en la imagen que tenemos. En el primer caso, el trabajo es personal, puesto que los estudiantes idearían una forma particular; en el segundo, no ya que pueden buscar la forma en algún libro o en alguien que conozca cómo hacerlo. La primera acción es lograda por algunos alumnos y no por otros de la clase.

En el proceso de comunicación de la actividad realizada por los alumnos, la profesora insiste en que esta sea clara y completa. Obsérvese cómo corrige al alumno cuando este responde que hay que sumar. No es incorrecta la respuesta ya que, efectivamente, lo que tiene que resolver es una suma, pero insistir en precisar la frase busca centrar la atención en una suma especial que no se resuelve como cualquier otra suma conocida o desconocida y esto le lleva a buscar, dentro de todas las soluciones manejadas, la que se ajusta a la propuesta; no solo a este alumno; se espera que también a toda la clase (si está atenta) que participa indirectamente del diálogo establecido. Quizá no sea adecuada la expresión “lo que quiero saber es tu opinión[421] antes de resolver”; no

---

[421] En Grecia, la opinión se estudiaba desde una perspectiva filosófica, situándola en uno de los cuatro niveles del conocimiento; este se alcanza por la fe (dogma), por la evidencia (axioma) o por métodos científicos que conduzcan a la certeza (episteme); cuando no es posible, solo se tiene opinión (doxa): algo más que ignorancia pero menos que conocimiento… Frente al desdén de Platón,

obstante, logra que el alumno exprese con precisión la acción. Inmediatamente no se observan esas respuestas en los demás estudiantes ya que, como podemos darnos cuenta, las siguientes alumnas responden como lo hizo el alumno al principio; con ello, la profesora vuelve a establecer el mismo diálogo con las niñas. El diálogo como estrategia busca generar una conversación a partir de la cual los interlocutores, en este caso los alumnos, puedan llegar al conocimiento de la verdad. El diálogo aplicado por la docente es una forma directa de comunicar, no exige contrastación de pareceres o formas de pensar puesto que se genera a partir de una pregunta cerrada, la cual exige una respuesta cerrada; no obstante, actuar bajo esta forma, permite pensar sobre lo que se dialoga, ya sea en los mismos interlocutores como en quienes escuchan. Esto nos lo permite pensar la actitud de la alumna que expresa que ella ha encontrado otra forma; la alumna participa indirectamente de este ambiente de clase, de esos diálogos establecidos. La maestra no incide en la propuesta de la alumna puesto que busca que los alumnos se centren en el procedimiento enseñado; sin embargo, la actuación de algunos alumnos va más allá de lo que la docente se propone en última instancia.

La forma de afrontar la resolución de un problema matemático escolar como el planteado por la docente centra nuestra atención en la importancia de la traducción frente a la interacción con el texto desde el primer contacto. El contenido es leído centrando la atención en los datos numéricos y en lo que se busca con ellos; la maestra no se detiene en el problema, en comprender su texto, porque asume que es fácil de comprender. El alumno muestra cierto dominio de los contenidos involucrados pues logra resolver correctamente las preguntas planteadas por las docentes, aun cuando el dato no es explícito en el problema. La siguiente situación nos invita a reflexionar sobre cuán difícil es explicar lo que se realiza; la alumna que resuelve la suma es capaz de hacerlo; sin embargo, muestra dificultad para expresarlo con palabras; para los alumnos es más fácil *hacer* que *explicar* y cuando hacen lo último se apoyan en la acción realizada.

El tema de la multiplicación de fracciones es difícil de tratar a partir de situaciones concretas. La multiplicación como operación se entiende fácilmente como una suma reiterada o una suma abreviada en el campo de los números naturales – así se introduce –, aunque en el libro de Carlos Maza Gómez (1991) se lea que esto es falso[422]. Esta idea, tal como se aplica en el contexto de los números naturales, es poco probable aplicarla al

---

el realismo de Aristóteles valora la opinión como “conocimiento probable”: no todo puede ser conocido pero entre tanto es opinable (En Gran Enciclopedia RIALP, tomo XVII: nombre – Pasargada, pág. 313).

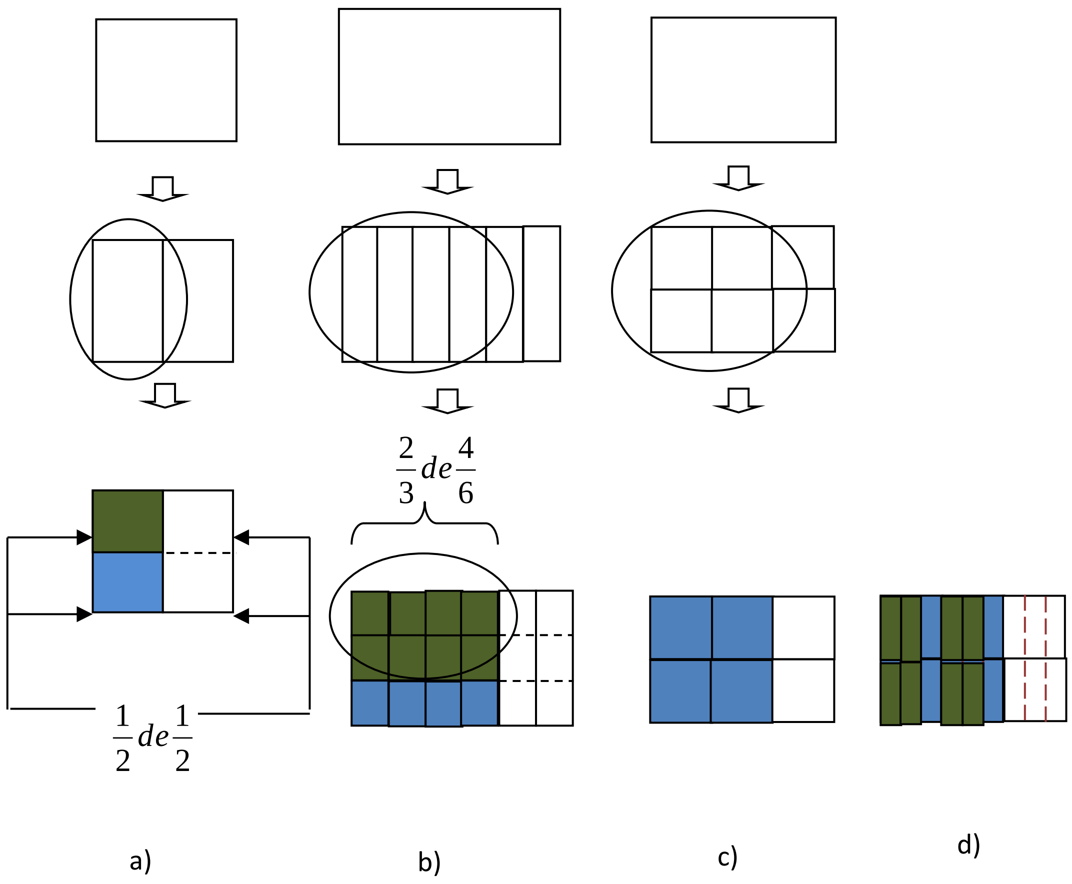
[422] Carlos Maza Gómez (1991) nos dice que la multiplicación debe entenderse como una operación aritmética entre números naturales. El punto de partida de esta operación son dos números y el punto de llega otro número distinto (o no) de los anteriores.

campo de las fracciones, ya que no se percibe que una cantidad se sume *n* veces y este ‘*n’* represente una fracción: no se puede visualizar rápidamente ni de forma concreta ni gráfica. Nótese como los alumnos no pueden representar gráficamente $\frac{3}{5}\times\frac{4}{8}$; lo que los estudiantes logran hacer es construir gráficas por separado, pero indicar en una misma gráfica la transformación, no. Es más fácil trabajar gráficamente con la idea de fracción de un número ya que este número está en el campo de los Naturales, por ello el conjunto de diez propuesto por el alumno le permite “dividir y agrupar” (de hecho estructuró en cinco filas que es lo que indica el denominador: dividir en cinco grupos y coger tres; por ello tres quintos de diez es seis. El tratamiento, en el aula, de la multiplicación de fracciones es más simbólico, es decir se construye a partir de la manipulación directa de los números implicados y la asociación con otros casos (fracción de un número).

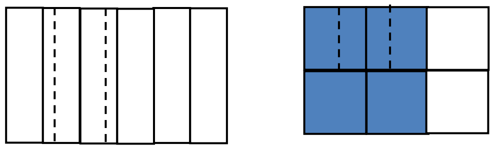
Previo a este aprendizaje, los alumnos han aprendido que se puede obtener la fracción de un número y que esta idea se puede expresar como una multiplicación, de tal manera que “los tres quintos de diez” se pueden expresar como “tres quintos por diez”, lo cual se resuelve “multiplicando y dividiendo”. Aun cuando este tema forme parte del bagaje de conocimientos de los alumnos, no se observa que puedan utilizarlo para *construir* uno nuevo, aun cuando la docente lo “traiga” a la memoria en esta clase. No se aprecia esta transferencia de conocimiento. Si bien, el pensamiento del niño es reversible, según Piaget, esta característica no se manifiesta espontáneamente en esta situación. Las pistas de la docente tampoco cumplen su objetivo. Aunque el término ‘transferencia’ nace en el psicoanálisis, hoy en día escuchamos hablar de la ‘habilidad de transferir’ como aquella que nos permite trasladar un aprendizaje, estudiado en un contexto, a una situación nueva de tal manera que permita comprenderla y también se pueda aprender. Para los alumnos en cuestión no es fácil lograr esa transferencia aun cuando estén frente a la situación que la genera; para ellos, no es tan evidente. Probablemente necesiten de la guía directa y minuciosa del docente. Al final, la profesora propone directamente la operación ya no como una multiplicación sino como ‘fracción de un número’ estableciendo ella misma la asociación. Para resolverla, los alumnos intentan graficar unidades enteras, como en el ejemplo en el que pide hallar tres quintos de diez, lo cual descartan por lo conducirlos por ningún camino comprensible; otros, dibujan unidades absurdas para el campo de las fracciones, por ejemplo, tantas unidades como el producto del numerador por el denominador. Se evidencia en los estudiantes una falta de comprensión de la cuestión a pesar de saber qué es multiplicar, y de saber cómo se halla la fracción de un número, o en su defecto, como se representa. Al darse cuenta que los alumnos no saben qué gráfica representar, la maestra busca que los estudiantes dibujen la gráfica correcta, asociando con la acción realizada cuando el número del que voy a hallar una parte no es una fracción, situación que los alumnos tienen mejor asimilada ya que inmediatamente se percatan que lo que representan es diez: la cantidad que está después de la palabra *de*. Los alumnos asocian correctamente ya que a partir de ese diálogo indicaron que lo que debían dibujar era cuatro octavos: la cantidad que está después de la palabra *de*. La maestra logra el objetivo.

Sesión 6 / Caso 2

La noción de fracción en la escuela se inicia asociada a la idea de 'parte y todo'. Los alumnos se enfrentan a este significado a partir de una unidad (un folio, una pizza, una naranja, una barra de chocolate, etc.) que se divide en un número determinado de partes iguales de las cuales se toman algunas (o todas, aunque este concepto: fracciones iguales a la unidad, se trabaja después), lo cual, posteriormente, se representa como fracción. Desarrollada a partir de esta estrategia, el alumno reconoce el 'todo' en cada una de las unidades propuestas (un folio, una pizza, una naranja, etc.). Más allá de lo que se proponga transmitir, el alumno siempre ha dividido una unidad una sola vez, ya que así suele representarse el tema. Para otra fracción, otra unidad. La idea de fracción de fracción implica que la unidad propuesta sea dividida más de una vez y no solo esto sino que además hay que dividir una imagen que se visualiza dividida. No es lo mismo, visualmente hablando, un medio de un medio que dos tercios de cuatro sextos:



En el primer caso, la unidad que se divide se visualiza como un todo y la parte también; en el segundo caso, la unidad a dividir se visualiza como un todo, pero la parte no ya que está dividida en cuatro partes iguales y, por lo tanto, hay que idear la manera de dividir que permita una mejor partición y visualización de la partición. Partir como se suele partir o siguiendo la división base no generaría partes iguales.



Tanto la gráfica b) como la c) representan la misma expresión base: cuatro sextos; sin embargo, representar en la segunda los dos tercios resulta más complejo ya que no es fácil obtener partes iguales de los cuatro sextos en su conjunto, excepto si la división se hace en cada una de ellas de manera independiente, como se ha intentado en la última gráfica (d). En este caso, la "parte de la parte" no se ve como algo integrado, como en los dos primeros casos. Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) indican que la noción de fracción en su aspecto parte-todo sostenida por los niños se apoya en siete atributos (citado por

SUYDAM, 1979, pág. 15), entre los cuales se encuentra las partes también se pueden considerar como totalidad.

Al concluir la sesión anterior advertíamos que a los estudiantes les resultaba difícil graficar una multiplicación de fracciones ya sea como tal o a partir de su interpretación de 'fracción de un número', aun cuando eran capaces de resolver, mediante operaciones, dicha expresión, o cuando eran capaces de aplicar una estrategia operativa para resolverla. No es si no con la ayuda de la docente que una de las alumnas logra identificar qué fracción representaba en la unidad inicial. En esa oportunidad, la asociación es directa; se podría confundir incluso con la estructura gramatical de la expresión. La profesora parte de la relación entre "fracción de un número", que los alumnos identifican sin mayores complicaciones, hacia "fracción de fracción". La pregunta clave está en cualquiera de los dos casos es: ¿*de* qué debo hallar la fracción?: *de* diez, *de* cuatro octavos, *de* cuatro sextos… La cantidad está después de esta palabra que indica pertenencia. A través de sus diálogos, la maestra logra que al menos un alumno (y más de uno en algunos casos) establezca las relaciones que la docente propone. No todos los estudiantes responden a la vez ni inmediatamente, los cual nos dice que no todos comprenden igual o tienen el mismo ritmo de aprendizaje; sin embargo, les da la posibilidad de continuar el esquema de trabajo y construcción: qué debo hacer primero, qué después… Los puntos clave, los resuelve la maestra: "hay que dividir cada uno de los octavos que se habían tomado". Los alumnos comprenden lo que la expresión indica: se divide entre cinco y se coge tres. Gráficamente, la expresión final es diferente a cuando se ejecuta con fracción de un número; y operativamente también, ya que en el caso de *fracción de un número* se trabaja siempre con la misma cantidad; para la *fracción de fracción*, primero se trabaja con una unidad, luego con otra (que está dentro de la primera) y para expresarla "con propiedad" debemos volver a la primera. Esto no es algo que el alumno pueda "descubrir" con la manipulación gráfica de la situación[423]. Nótese cómo P2A2 expresa que los tres quintos de los cuatro octavos es "doce dieciseisavos"; aun cuando su respuesta sea equivocada, nos informa que 'obra' con la nueva unidad (no regresa a la primera; por lo que no expresa

---

[423] La profesora les insiste que al hallar la fracción de un número: "se expresa mediante una multiplicación de la fracción por la cantidad, que es un número natural", pero la diferencia está en que en este caso: "la siguiente cantidad ya no es un número [natural] sino una fracción". Se puede observar que la pista no aclara la gráfica que tendrían que elaborar los alumnos, por ello, la profesora propone una gráfica a partir de los datos de la expresión (3/5 x 4/8)[423]. En este caso, sólo les propone la gráfica de los 4/8 y les dice que, a partir de ello, representen los 3/5. Las respuestas de los alumnos están influenciadas por las gráficas en casos en los que se halla la fracción de un número, aunque ahora intentan considerar los elementos de las fracciones. Los alumnos cambian sus gráficas dibujando tantos círculos como indican el producto de los elementos de las fracciones; intentan dibujar dos gráficas por separado.

en función de esta). En ello, puede influir la forma como preguntamos: ¿Cuánto es los tres quintos de los cuatro octavos? En realidad, los tres quintos de los cuatro octavos se puede entender como 'tres quintos'; luego, esto de la unidad 'total' se expresa de otra manera.

A propósito de la intervención de P2A3, quien manifiesta la fracción adecuada, la alumna expresa que 'miró toda la unidad'… no sin antes haber resuelto la expresión "multiplicando". La alumna aplicó una operación sin saber si era la adecuada: "lo hice así porque pensé que era así"; sin embargo, su resultado se vio expresado en la gráfica, por lo tanto lo relaciona. La alumna ha 'descubierto' el procedimiento amparada en un 'presentimiento', una 'sospecha'; en una lógica concreta: si se pide multiplicar, multiplicamos… ¿Conlleva la acción de la alumna a afirmar que ella ha comprendido el tema o ha intervenido la casualidad?, ¿'descubrió' o 'construyó' el nuevo conocimiento?, ¿qué sucederá si le piden dividir? Lo cierto es que la maestra valida su procedimiento no solo manifestando que es correcto, y asociándolo a una manera rápida de resolver, sino trasladándolo a una expresión gráfica que lo avala; no obstante, la gráfica resultó más compleja de elaborar. El razonamiento seguido por la alumna y la maestra a través del diálogo establecido no nos asegura que este llegue de la misma manera a toda la clase. Un tema nuevo no es fácilmente asimilable por quienes no han participado directamente de su elaboración. Nótese como al preguntar a la clase por la forma como se multiplica, los alumnos no responden; de hecho, P2A5 manifiesta que lo tiene diferente aun cuando la maestra comprueba que es el mismo. En este caso, P2A5 no ha razonado el procedimiento, aun cuando el razonamiento pudo haber sido al 'azar' como el de P2A3, sino que lo adquirió directamente por otros, lo cual, parece ser que no le permite 'hacerlo suyo' y por lo tanto no darle sentido propio. Algo similar ocurre con P2A7 quien debe representar gráficamente una fracción de fracción y resolverla; es decir, ha de ejecutar la misma actividad que realizó la maestra al finalizar la clase de ayer y al comenzar esta. No lo hace, no obstante, no se parte de cero, ya que la alumna dibuja un rectángulo que hay que dividir, aunque no sabe cómo, o al menos, no lo expresa sino con ayuda de la docente. Sin embargo, P2A8 sí captó rápidamente el procedimiento gráfico y lo expresa. A partir de ello, P2A7 realiza la gráfica correcta; sin embargo, el resultado a través de una fracción no es el adecuado, ya que considera la parte tomada de la unidad y no toda ella. Esto exige considerar más de un aspecto a la vez.

Cabe resaltar que P2A7, aun cuando no exprese lo que tiene que hacer, luego de expresarle la forma, la ejecuta con acierto. Aparentemente, necesita la guía de la docente o de alguien (su compañera) que le diga lo que tiene que hacer para realizarlo con éxito.

El repaso oral de lo aprendido forma parte del trabajo de la maestra, quien al finalizar la temática hace una recapitulación general que le permita comprobar qué han aprendido los alumnos, así como resolver algunos ejercicios simples. Los alumnos muestran más facilidad para aplicar directamente la operación que explicarlo a través de una gráfica. El trabajo presentado por P2A2, al multiplicar las tres fracciones nos permite analizar el grado de comprensión obtenido de ejemplo anterior, en el que trabajó con dos fracciones. La alumna conoce el método (multiplicar los numeradores y los denominadores) y lo expresa; no obstante, la forma de expresar no se ajusta a lo que manifiesta oralmente. Para intentar entender la actuación de P2A2, antes de mostrar la operación o expresión correcta, podemos decir que la alumna busca alternativas que le conduzcan a la solución. P2A2 sabe cómo se hace, pero quiere indagar otros caminos. Lo mismo ocurre con P2A11, quien intenta caminos que manipula mejor como es el de la transformación a común denominador. Esta idea, aparentemente, aquí no es válida; sin embargo, no es tan absurda, puesto que:

$$\frac{2}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{20}{40}\times\frac{15}{40}\times\frac{8}{40}=\frac{2400}{64000}$$

Las fracciones obtenidas son equivalentes, aunque estas con cantidades muy grandes que indican muchas partes iguales. Con ello, podemos decir que hay caminos que los alumnos se suelen plantear, que dependen de su grado de comprensión e interacción con el conocimiento; todos tienen una razón de ser; todos parten de unos conocimientos adquiridos y de su capacidad de relación. Cuando no hay una guía que los oriente, estos caminos se estancan o desaparecen y aparece una idea del hacer matemático más directo, más preciso.

Finalmente, los resultados (el producto de la suma, resta y multiplicación) que hasta ahora se han producido al operar con fracciones son de diferente tipo. Básicamente se puede observar que una suma de fracciones puede originar una fracción propia o una impropia. No se observa reflexión al respecto. Los alumnos, hasta ahora, no piensan sobre el resultado final. A los alumnos, aparentemente, les pasa desapercibido este techo, aun cuando quizá hayan estudiado los tipos de fracciones, o en su defecto, saber cómo se originan[424]. La actividad está centrada hallar el procedimiento correcto para resolver la operación a partir de la elaboración y comprensión gráfica. Al estar el interés en ese aspecto (procedimiento), los otros no resaltan inmediatamente (características del resultado), aun cuando sí aparezcan. ¿Hasta dónde es posible que los alumnos de quinto curso reflexionen sobre este tema y hasta qué punto son capaces de comprenderlo mediante su razonamiento?, ¿cuánto pueden observar?, ¿cuánto pueden aprehender?, ¿depende de la metodología de enseñanza empleada? Nosotros reflexionamos sobre qué puede ser mejor en el proceso de enseñanza y aprendizaje y qué 'invita' al alumno a pensar, reflexionar, conocer, descubrir, relacionar: ¿exponerles el tema, explicando paso a paso, todos los contenidos matemáticos, de manera secuenciada, claro está, para que ellos los aprendan y apliquen ya sea en un ejercicio o un problema matemático, y que en su uso constante, a través de esas actividades, u otras, reflexionen y comprendan porqué se hace de esa manera, o generar directamente esa reflexión y a partir de ella descubrir el contenido? ¿Cuándo son capaces de reflexionar? Si la única y definitiva posibilidad de conocimiento de la verdad reside, pues, en la reflexión, ¿cuánto son capaces de conocer los alumnos?

El alumno es capaz de conocer aquello para lo cual está preparado. Algunos estudiantes captan mejor unas ideas y otros, otras. Para un tipo de conocimiento, su mente está abierta y para otro, cerrada. En cualquiera de los casos, su mente necesita establecer ciertas relaciones que le permitan seguir una secuencia de acción, dándole sentido; y el maestro ha de saber organizar el tiempo de los estudiantes de tal manera que todos ellos puedan hacer manifiesto su pensamiento sobre lo que hacen. El conocimiento físico deriva del objeto, está en él; el conocimiento lógico-matemático depende de la capacidad del estudiante.

---

[424] Por ejemplo, si saben que una fracción representa una parte o más partes que se toman de las que se ha dividido la unidad, cómo es posible que se tomen más de las que se han originado. Por otro lado, si conocen los tipos de fracciones, 'descubrir' cómo se originan las impropias, etc.

Caso 3

Sesión 1 / Caso 3

La sesión inicia con una actividad que no se llegó a concretar por no contar con los instrumentos necesarios. Si bien, la disposición de los instrumentos es necesaria para los objetivos planteados, se pudo aprovechar esta carencia para favorecer la puesta en marcha de soluciones a la misma. La elaboración de un transportador y de un compás *casero* exige uso de conocimiento matemático que se pudo aplicar en la propuesta, de esta manera, los alumnos emprenden otro tipo de "tareas" que implica usar el conocimiento matemático necesario: ¿cómo tendría que ser un instrumento para medir ángulos?, ¿cómo se construye un ángulo?, ¿se tiene algún referente de transportador y compás?, ¿cómo son?, ¿qué características tienen?, ¿Qué pasa si son de diferente tamaño?, ¿cómo elaborar uno más pequeño?, etc. Además surgen términos o conceptos que la docente puede introducir someramente. Estas preguntas parten de la situación, de la limitación que se tiene frente a la misma y de las relaciones que establece entre los conocimientos previos que posee (la situación no es del todo desconocida). La primera fase en la resolución de problemas es la comprensión, esta es la fase del cuestionamiento y de la identificación de datos e incógnitas. Entender el problema, según Polya (citado por Boscán y Klever, 2010), es apropiárselo; concretarlo en tan pocas palabras que pueda ser reformulado de manera distinta sin modificar la idea.

La sesión en cuestión es básicamente de resolución de actividades planteadas directamente cuyo fin es que los alumnos apliquen conocimiento aprendido en su resolución. Es una actividad constante en la escuela que los alumnos apliquen el conocimiento adquirido en situaciones planteadas intencionalmente para ese fin, lo cual permite no solo reforzar el mismo sino contextualizarlo en situaciones nuevas, ya sean del ámbito del tema en cuestión directamente o asociadas a situaciones cotidianas, del ámbito familiar (como comer quesitos). Si este tipo de actividad es persistente en la escuela, hablamos de problemas rutinarios. Un problema *es rutinario* cuando puede ser resuelto aplicando directa y mecánicamente una regla que el estudiante no tiene ninguna dificultad para encontrar; la cual es dada por los mismos profesores o por el libro de texto (MINEDU). El alumno adquiere cierta práctica en la aplicación de una regla única al resolver problemas como estos. Este tipo de problemas no desafía la inteligencia del estudiante ya que este no necesita planificar una solución, pues se sabe de antemano cómo proceder. Se busca que los estudiantes resuelvan problemas No-Rutinarios ya que favorecen la actividad mental constructiva de los alumnos y el desarrollo efectivo de la habilidad de resolución de problemas al ser desafíos para ellos; sin embargo, Jiménez (2008), respondiendo a la pregunta: ¿dónde se encuentra el origen del fracaso de los Problemas No-Rutinarios?, considera que el fallo puede tener su origen en las prácticas escolares más que en la incapacidad de los estudiantes. La revisión exhaustiva de la literatura le ha permitido extraer algunas de las características de los problemas escolares que estarían originando un conjunto de creencias incorrectas que llevan a los alumnos a proceder de un modo estereotipado:

- Son problemas que se solucionan con una o varias operaciones aritméticas simples
- Suelen presentarse en los libros de texto agrupados en función del algoritmo que están estudiando
- La operación aritmética puede ser fácilmente detectada por medio de estrategias de resolución superficiales
- Incluyen exclusivamente la información numérica que es necesaria para resolver el problema.
- Los contextos que describen suelen ser típicos y en algunos casos irreales.

La actividad de clase tiene una estructura simple y lineal; es decir, su planteamiento no permite explorar diversos caminos o situaciones, dejando la actividad del alumno reducida a un único camino y una única solución, sin importar otras. No obstante, los alumnos naturalmente tienden a intercambiar producciones lo cual permite comparar respuestas, ampliando las mismas en el bagaje de soluciones cuando esto es posible. Díaz y Poblete (2001) manifiestan que en general, la resolución de un problema de contexto real, realista o fantasista, necesita la matematización de la situación dada (su traducción al lenguaje matemático); en un problema, este proceso de matematización debe exigir una búsqueda por parte del alumno. Si el alumno puede matematizar de manera casi automática y sin esfuerzo, entonces no se trata de un problema de contexto sino más bien de un ejercicio de matematización. La intervención final de la docente permite no circunscribir la actividad del docente a una mera revisión de las propuestas estudiantiles, sino que favorece en el alumno la reflexión de situaciones y el cuestionamiento de otras a partir de aquellas.

Sesión 2 / Caso 3

La sesión propuesta por la maestra se basa en la explicación de su parte de tres procesos de construcción de elementos geométricos. La idea es que los alumnos visualicen la acción de estos procedimientos a fin de que puedan reproducirlos posteriormente en casos específicos. Para Malaspina (2013) convertir la información en conocimientos requiere creatividad, razonamiento lógico, capacidad para identificar y resolver problemas, capacidad de autoaprendizaje… por ello, una adecuada enseñanza de la matemática estimulará y desarrollará estas capacidades para lo cual es fundamental contar con profesores que, además de conocimientos y habilidades matemáticas, tengan estas capacidades y sepan trasmitirlas vivencialmente a sus alumnos, usando métodos que vayan más allá de las clases expositivas y de las tareas rutinarias. Si bien, se puede observar que la maestra favorece la visualización en acción de los procesos en mención, los alumnos muestran interés por la actividad práctica (de construcción de estos elementos) personal, la misma que se ve relegada a un segundo plano. La maestra puede aprovechar este interés de los alumnos y los conocimientos previos adquiridos para favorecer la participación activa de los estudiantes en la construcción de los elementos tratados. En un estudio (Morell, 2007a. Citado por Morell, 2009) donde se tuvo en cuenta las perspectivas de los profesores y alumnos que tienen experiencia en clases participativas, los segundos destacaron como beneficios la posibilidad de ejercer y mejorar destrezas de expresión oral, expresar dudas, dar ejemplos, expresar sus opiniones, aumentar el interés y la motivación, tomar parte activa en el proceso de comprensión y aprendizaje. Un estudio anterior (Morell, 2000) comprobó las ventajas de la interacción sobre la retención y comprensión de los alumnos. Nótese que los alumnos participantes no muestran un conocimiento real de ciertos contenidos que son previos (perpendicularidad, por ejemplo), lo cual nos lleva a pensar que estos no han sido del todo asimilados por los estudiantes en mención y que adolecen de ciertas experiencias que les permita un mejor conocimiento. No podemos decir que no sea significativo dicho conocimiento, pero no es del todo comprendido por el alumno y esto inhibe un mejor aprendizaje posterior de temas o elementos que estén relacionados. En el aprendizaje significativo, la nueva información se relaciona con algún elemento ya existente en la estructura cognitiva del sujeto y relevante para el material que se intenta aprender; en el memorístico, la nueva información queda asilada y se almacena de forma arbitraria (Alonso, 2010).

La matemática implicada en la clase observada se basa en tres conceptos básicos: ángulos, bisectriz y mediatriz, sin embargo, estos exigen otros que favorecen su construcción. Si bien, los alumnos no tienen una participación activa evidenciada en la construcción de estos conocimientos, estos muestran interés y los exponen, internamente están interactuando con los elementos que llaman su atención que no necesariamente son los que la maestra muestra. Nótese al alumno que quiso, y lo hizo, construir triángulos con el compás. Aprovechar estas circunstancias favorece una clase más vivencial pues parte de los intereses del alumno y se orientan hacia los conocimientos en mención: el triángulo tiene los tres elementos tratados en clase. Una buena construcción de un triángulo conlleva visualizar diferentes ángulos, diferencias y similitudes entre las mediatrices y bisectrices, etc.

El planteamiento y la resolución de problemas en clase se ven relegados a un segundo plano. De hecho, en la resolución de actividades no debería haber *problemas* ya que el alumno cuenta con las herramientas necesarias para poder resolver cualquier actividad que se le presente y que implique usarlas. Las actividades son de aplicación y refuerzo, más que de construcción y descubrimiento.

Sesión 3 / Caso 3

Muchas de las limitaciones que nuestros alumnos manifiestan sobre su comprensión acerca de temas de Geometría se deben al tipo de enseñanza que han tenido… el tipo de enseñanza que emplea el docente depende, en gran medida, de las concepciones que él tiene sobre el tema en cuestión, sobre cómo se enseña y del dominio del tema. Para Guerrero (2010) las tareas que se realizan en clase al estudiar figuras geométricas de dos y tres dimensiones son tres: de conceptualización, de investigación y de demostración con las que se espera que el alumno desarrolle su pensamiento geométrico; sin embargo, el tipo de enseñanza empleado (enseñanza ostensiva) favorece un conocimiento externo y limitado de la situación al mostrar directamente los contenidos geométricos, los mismos que estarán restringidos por las características de las imágenes o palabras presentadas. La enseñanza previa propuesta por la docente sigue en líneas generales el tipo de enseñanza ostensiva. Con ella, se espera que los alumnos capten directamente la forma de actuar y, por consiguiente, apliquen en situaciones similares de forma que se pueda lograr el objetivo deseado. Sin embargo, su actuación no genera los resultados esperados, los alumnos cometen errores producto de su inexperiencia con la situación. Se podría pensar que a partir de esta actividad, en la que ellos se involucran directamente y en la que ponen en juego sus decisiones, los alumnos inician el proceso de construcción del nuevo conocimiento al poder interactuar con las situaciones que lo involucran. Al aplicar otros procedimientos que para ellos producen el mismo efecto (procedimientos informales) y al permitir verificar la pertinencia de su estrategia, el alumno se dará cuenta de la fiabilidad de los mismos, intentando buscar otras formas de resolver la situación de tal manera que cumpla con lo preestablecido. Una de las fases en la resolución de problemas con los que el resolutor está comprometido es la fase de verificación, esta fase permite revisar el proceso y sacar consecuencias de él (De Guzmán, 1991, citado por ALDA EDUCA, 2007), lo que le permite reorientar su solución si esta no es correcta.

La actividad de la maestra se centra en la resolución de *ejercicios* planteados para que los alumnos trabajen. La diferencia entre *ejercicio* y *problema* en las aulas se asocia muchas veces al uso de contexto o no en su planteamiento o si está propuesta como aplicación de una estructura matemática ya conocida. Sin embargo, muchos docentes los catalogan indistintamente. La actividad de resolución de ejercicios y problemas (tipo o rutinarios), posterior a la clase *magistral* se justifica en la necesidad de ejercitar y poner en práctica el conocimiento aprendido en situaciones diferentes a las utilizadas previamente. Pérez (2009) afirma que la principal función de los ejercicios es la consecución de destrezas (tanto del dominio de algoritmos como a la adquisición de conceptos y al uso de un lenguaje apropiado), de manera que tras su repetición puedan realizarse en el menor tiempo posible, y no supongan un atasco en el aprendizaje posterior. Para la autora, la escaza valoración y empleo (o carencia) de uno de ellos produce parálisis y pérdida del vigor de la razón, del discurso y de la autoestima. Por ello, la actividad en clase no debe circunscribirse a la realización de ejercicios, descuidando la actividad de resolución de problemas. El maestro ha de proponer problemas que añadan algo nuevo al alumno, permitiéndole hacer más que aplicar lo ya conocido sin posibilidad de explorar, experimentar, etc.

Sesión 4 / Caso 3

La propuesta de actividades en el aula ha de diferir de la propuesta de las mismas para casa, ya que en esta el docente no puede guiar el proceso de trabajo pero en aquellas sí. La actividad en el aula tiene dos sujetos diferenciados: profesor y alumno, cada uno con unas características y responsabilidades diferentes. Para Porras y Martínez (2007), cuando se considera la importancia del trabajo matemático que realiza el alumno, la función principal del maestro será la de orientar el proceso del alumno, trabajando a partir de sus conjeturas, ejemplos… y tendiendo a hacer evolucionar los conocimientos temporales, incompletos y a veces erróneos de los alumnos.

Las dos actividades propuestas por la docente a través del libro de texto, generan conflicto en los alumnos que son incapaces de resolver. A través de estos conflictos, la maestra puede orientar no solo en la solución del mismo sino que son propicios para generar actividad matemática por parte de los alumnos. Darle la respuesta al problema, permite que el alumno sepa la solución mas no que pueda ser capaz de generarla, limita su capacidad de reflexión, conjetura, argumentación, que podría desarrollarse con la orientación de la maestra. "*Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño"* (Vergnaud, 1990), idea que comparten Bueno el al. (2012) y que amplían expresando que los conceptos no se pueden dominar de inmediato; para asimilarlos necesitan un tiempo determinado y una serie de tareas de aprendizaje (resolución de problemas) de tal manera que en su resolución los alumnos logren identificar y validar propiedades de las figuras, así como el uso de estas propiedades para producir nuevas relaciones y obtener soluciones a nuevos problemas, poniendo el énfasis no solo en el resultado sino en el modo de justificar la validez de dichos resultados.

Sesión 5 / Caso 3

En la resolución de problemas de varias operaciones se puede observar que los alumnos no se plantean preguntas intermedias que los lleven a idearse una posible solución al problema. Se puede ver que la dificultad en la resolución del problema aparece cuando la cuestión que se quiere averiguar no se relaciona con los datos que el enunciado presenta directamente. Estos datos llevan a otro u otros que van a ser con los que los alumnos tienen que operar directamente. Los alumnos que tienen problemas en idearse un camino de resolución no hacen explícitas esas 'insuficiencias' del enunciado, que sin embargo, a través del mismo, los alumnos podrían averiguar. Si bien, los alumnos están habituados a resolver problemas enunciados textualmente, no todos estos problemas tienen las mismas características intrínsecas, aun cuando la mayoría se resuelva aplicando operaciones aritméticas; de ahí que cada tipo ofrezca dificultades diferentes. Una óptima resolución de problemas implica una etapa de comprensión del mismo que va más allá de pensar directamente en la operación a realizar. Tener destreza en la resolución de problemas de una etapa no implica estar preparado para enfrentar problemas de dos o más etapas. En primer lugar, porque el alumno tiene un patrón determinado para este tipo de problemas, el cual lo predispone a buscar una operación (y solo una) que lo traduzca. El alumno ha de idearse un esquema de solución que involucre resultados parciales. Muñoz (2011) citando a Echenique (2006) llama a este tipo Problemas Aritméticos de Segundo Nivel ya para su resolución es necesario realizar varias operaciones en un cierto orden, son más complejos que los de primer nivel puesto que supone establecer relaciones más complejas entre los datos del enunciado. Dentro de este grupo, la autora distingue diferentes clases según el criterio seguido. Muñoz y Lasalle (2002) manifiestan que solo con un tratamiento adecuado en la resolución de problemas se puede contribuir al verdadero aprendizaje de las matemáticas, su mera inclusión en las actividades de aula no garantiza nada.

Otra dificultad, que no está en la comprensión, es la del dominio de las operaciones básicas. Los alumnos presentan equivocaciones, pero no son capaces de darse cuenta de las mismas, excepto cuando vuelven sobre ellas; el problema está en que, generalmente, los alumnos no retornan al problema para comprobar que lo que han planteado y ejecutado es correcto o no. El caso de P3A9 hace pensar que éste opera, en algunos casos, sin pensar si esa operación que ha ejecutado es la que lo va a llevar a la solución, aun cuando, aparentemente, comprende el problema. Él se da cuenta que la operación es incorrecta, sólo después de haberla revisado. Por otro lado, se puede pensar que los alumnos ven los resultados de sus operaciones sólo como resultados, con lo cual el alumno no lo asocia al contexto en relación con los datos del problema. En el caso anterior dividir 1.8 (que son los kilos que compra) entre 2 (que es lo que cuesta cada kilo) da como resultado 0,9 (lo que pagaría por la compra). El alumno no reflexiona sobre ese resultado y lo absurdo de pagar menos por comprar más. Molina (2011) citando a Baroody (1997) y Hildebrand, (1987) afirma que un objetivo central de la enseñanza matemática es la comprensión: si no se fomenta, niños y adultos aprenden datos, definiciones y procedimientos matemáticos de memoria pero sin comprensión, con lo cual no servirá lo aprendido.

Sesión 6 / Caso 3

La clase en mención se desarrolla en dos etapas. La primera se expone en esta primera parte en la que la maestra propone una actividad *ajena* a la actividad matemática escolar para introducir el tema (medida del tiempo). La idea es motivar al alumno a través de situaciones o datos curiosos, interesantes y reales que se pueden asociar a cuestiones matemáticas. En su mayoría los alumnos trabajaron en pares, introduciendo una forma de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo es básicamente una forma sistemática de organizar la realización de tareas en pequeños equipos de alumnos… la responsabilidad del proceso de enseñanza y aprendizaje no recae exclusivamente en el profesor sino en el equipo de alumnos. Se aprende de una forma más sólida cuando las interacciones y las ayudas mutuas entre los alumnos se suceden de una manera continuada (López Haro, 2012).

En este caso, los alumnos intercambiaron información del texto. Algunos datos resultaron desconocidos para los estudiantes en cuanto que no les era conocido de manera directa; otros, sí. Sin embargo, el texto les permite construir o descubrir información que pueden deducir a partir del mismo y que involucra conocimiento matemático. La intervención de la docente ayuda a orientar el diálogo hacia el conocimiento matemático que se quiere poner en evidencia y trabajar.

Sesión 7 / Caso 3

La sesión desarrollada se distingue de las anteriores porque la maestra parte de una actividad distinta. A diferencia de las previas, les propone a los alumnos una lectura sobre cuestiones no matemáticas, pero que sin embargo, involucra conocimiento de la matemática escolar (números naturales, medida del tiempo). El conocimiento matemático en cuestión no es nuevo; es decir, los alumnos saben de qué se trata este: ubican temporalmente un hecho comparando los años referentes, reconocen siglos. El tratamiento de la información matemática se da de manera espontánea al ser parte de una cuestión más general (las maravillas del mundo); sin embargo, su aplicación correcta le permite comprender mejor la cuestión general (reconocimiento de maravillas antiguas y actuales, y ubicación). Para Queraltó[425] lo que le enseñemos a nuestros alumnos debe tener una aplicación práctica fuera del aula de forma que el estudiante se dé cuenta de que todo lo que ha trabajado en clase, en un momento dado, le podrá ser de utilidad en su vida real. Si bien, la propuesta no trasciende el aula como espacio, ya que se desarrolla dentro de la misma, sí trasciende la cuestión matemática directa y la circunscribe en un hecho ajeno.

---

[425] En: http://www.usal.edu.ar/archivos/pad/docs/queralto.pdf

A través de la actividad, los alumnos muestran interés por el tema y usan la matemática como medio de profundización en los mismos. El trabajo en equipo permite una mayor interacción entre estudiantes y la información (matemática) no es expuesta directamente por la docente. Nótese que la estrategia para indicar el siglo la proporciona una alumna. Esto permite que los alumnos intercambien información, apliquen la que tienen y adquieran nueva (para quienes aún no la hacen suya). Si bien, todos los alumnos, particularmente, pasan por el mismo proceso de enseñanza, sobre todo si pertenecen a una misma clase o grupo, su aprendizaje es personal, algunos captan mejor las cuestiones y otros, no. Interactuar les permite escuchar, reforzar y/o reestructurar. Revelles (2004) concibe el aprendizaje de los contenidos matemáticos como un proceso de construcción socialmente mediado; es decir, los alumnos no aprenden recibiendo y acumulando pasivamente información del entorno, sino que lo hacen a través de un proceso activo de elaboración de significados y de atribución de sentidos. La interacción personal con el conocimiento, le permite pensar en él en términos conscientes, ya que se usan para dar sentido a una actividad. Ello, permite que la información que tiene cobre otro significado.

En la sesión prevalece la pregunta por parte de la docente, lo que permite que los alumnos participen directamente de la actividad a través de sus intervenciones, las mismas que si no son adecuadas, la maestra reorienta la cuestión o traslada la interrogante a la clase entera, responsabilizando a la misma de su solución. La técnica de la pregunta suele estar presente en el aula, aunque esta ha sido más para comprobar si los aprendizajes han sido logrados o no; o dentro de los problemas matemáticos propuestos. Forero (2014) citando a Gadamer (2005), el arte de preguntar es el arte de pensar, “Solo puede poseer algún saber el que tiene preguntas”. Las preguntas forman parte de la actividad de resolución de problemas no porque éste la formule directamente sino porque el resolutor las plantea para poder comprender y resolver el problema. Forero señala, además que preguntarse o preguntar es como poner en suspenso las cosas, es ponerse en camino, es el inicio de una indagación. Por ello, introducir las preguntas en clase, posibilita que los estudiantes las formulen como parte de su trabajo en la misma.

Si bien, no se aprecia una actividad de resolución de problemas propiamente, la gestión de la clase transita por ese camino. La resolución de problemas implica interacción, conocimiento, preguntarse, etc. La solución de problemas implica a menudo la revisión y evaluación de la información y de las estrategias aplicadas. Esto es posible si el resolutor se cuestiona sobre las mismas.

Caso 4

Sesión 1 / Caso 4

La sesión propuesta por la docente se centra en el tratamiento de las fracciones; para ello, parte de una actividad que los alumnos han realizado anteriormente: representar fracciones. Esta es una de las primeras actividades que los alumnos realizan cuando se inician en la conceptualización de fracción, incluso antes de llegar a quinto grado. Se espera que los estudiantes, en este grado, no tengan dificultad en dividir unidades de acuerdo a lo solicitado por la docente: dos, tres o cuatro partes iguales. Previo a esto, la docente toma una hoja y cuestiona sobre lo que se puede hacer con ella. En el tratamiento de las fracciones y de las figuras geométricas la hoja de papel juega un rol importante para representar fracciones o graficar figuras geométricas. Una de las cuestiones básicas en el tratamiento de las fracciones es que "el todo" se mantiene independientemente de las partes en las que se haya dividido. Uno de los alumnos en cuestión, P4A18, lo expresa al indicar que "…es la misma hoja, del mismo tamaño... solo que está doblada de diferente forma". Otra de las ideas clave es que el número de cortes no se corresponde con el número de partes; esta idea no es igualmente captada por todos los alumnos de la clase quienes confunden el número de partes con el número de cortes. Ruiz y Pachano (2002) manifiestan que el aprendizaje de la matemática supone un aprendizaje del uso del lenguaje científico, sin embargo, este lenguaje que puede parecer transparente para el maestro de ciencias y de matemática, no lo es tanto para los estudiantes por lo que ocurren interferencias comunicativas. El lenguaje usado en matemáticas escolares no siempre es asequible inmediatamente al alumno, de ahí que este debe participar en una serie de actividades que lo involucre y pueda mejorar su comprensión y uso.

La profesora aprovecha esta situación para cuestionar a los alumnos sobre la misma, involucrando a toda la clase en una situación que surge a partir de las soluciones de sus compañeros, esto permite que los alumnos intervengan en una situación real estableciendo diferentes relaciones, dando sus diferentes puntos de vista y generando más participaciones. El término diálogo sugiere la participación de al menos dos partes en un acto comunicativo. Planas y Gorgorió (Aula de Innovación Educativa Núm. 132) señalan que sin diálogo resulta muy complicado enseñar y aprender en un entorno donde coexisten sistemas de reglas distintos. Para las autoras, un modelo de enseñanza basado en la interacción crea un modo de vivir, de convivir y conforma una red social determinada que conjuga objetividad y subjetividad, incluye valor al saber personal.

Es importante, no obstante consolidar el trabajo realizado a fin de poder sistematizar la información surgida a partir del trabajo realizado por los alumnos, no solo de tipo conceptual, sino procedimental y actitudinal que se genera cuando el trabajo surge de una situación más amplia. Mora (2003), refiriéndose al método de proyectos expresa que las presentaciones parciales hechas durante la ejecución del proyecto ayudan a la preparación y presentación final de los resultados. En este sentido, los docentes tienen que preparar adecuada y sistemáticamente aquellos contenidos específicos propios de las asignaturas integradas al proyecto y consolidar tales contenidos, ya que el método de proyectos tiene la particularidad de que se descuidan, en muchos casos, algunos contenidos concretos de las áreas y el nivel respectivo. Trasladando esta idea al trabajo de la profesora, es necesario consolidar los contenidos a fin de reorientar y darles firmeza y solidez dentro de la sesión.

Sesión 2 / Caso 4

La docente plantea una situación gráfico – simbólica a partir de la cual busca que los estudiantes participen intercambiando ideas sobre un mismo asunto: $\frac{1}{7} de 21 = 3$. En primera instancia, las participaciones de los alumnos se orientan a lo simbólico y no a lo gráfico; es decir las justificaciones expuestas están en función de la manipulación operativa de los elementos implicados. P4A18 lo expone directamente: “Es la regla…”. A partir de este caso concreto y descontextualizado, la maestra intenta generalizar a otras situaciones. Las reglas son propias de la actividad matemática escolar. Algunos profesores les llaman *trucos*. Las reglas que se aplican en las matemáticas escolares son, casi siempre, deducciones sencillas de razonamientos poco complejos; sin embargo, cuando sólo se aprenden “la regla” sin que sea el resultado de una reflexión propia... la actuación puede ser casi automática (sin entender) en la que la memoria es el único recurso para ello y en la que los resultados no cobran sentido. Las reglas se enuncian o se construyen. Soto y Cantoral (2011) concluyen que el *discurso matemático escolar* presente en los textos de estudio, generan una *violencia simbólica*, en el sentido de que imponen una única argumentación y que además los significados y procedimientos que emergen de ella giran en torno a los objetos matemáticos, no considerando el papel de los actores del sistema didáctico en la construcción de estos. En los libros de texto, aparecen las reglas generalmente expuestas, sobre todo cuando estas tienen nombre propio (regla de tres); en algunos casos, se exponen sin hacer referencia a un nombre específico (como el caso de "la regla" para hallar fracción de un número).

Conocer la regla o forma simbólica de actuar guía el proceder del estudiante ya que basta aplicarla y el resultado es igual para todos (actividades cerradas que promueven un mismo camino y solución a la que se espera lleguen todos). Si la situación es simple, el camino es certero y sin cuestionamientos ya que coincide con lo que se espera; si la situación tiene un ingrediente añadido, la regla es certera también, pero la comprensión de la misma va disminuyendo. Nótese cómo en el primer caso, la respuesta inmediata se corresponde con los datos de la situación ($3\times 7=21$ o $21\div 7=3$), mientras que en el segundo no totalmente. Hay que hacer evidente la segunda operación. Algunos alumnos se quedan en la primera parte y dan como solución el resultado de la misma. Aun cuando la regla se aplique a todos los casos en las mismas condiciones, las interpretaciones son diferentes en cada estudiante. La manipulación simbólica descontextualiza la significatividad de la misma: efectivamente 15:5=3 (a lo que apuntaba las respuestas del primer caso); sin embargo, en primera instancia, los alumnos no comprenden cabalmente qué significa ese tres (lo asumen como el resultado o como los grupos formados) dándole significados incorrectos aunque el resultado sea el adecuado. Es la maestra quien interpreta correctamente lo expresado por la alumna (si formo tres grupos quiere decir que he dividido entre tres y no entre cinco); de esta manera P4A19 responde correctamente. Para Carrillo (2009) la enseñanza tradicional ha estado dominada, en general, por tendencias formalistas que se han basado más en la manipulación sintáctica de los símbolos y reglas que en el significado de las mismas, su uso sin justificación no solo conducen a que sean olvidadas con facilidad o mal utilizadas, sino que el efecto de esta práctica sobre la actitud global del alumno hacia las matemáticas puede resultar desastrosa.

El diálogo, nuevamente, permite que los estudiantes reflexionen sobre lo que exponen personalmente o sobre las respuestas y razonamientos de sus compañeros. En algunos casos son otros los alumnos que responden de manera adecuada aun cuando el diálogo haya sido entre profesora y otro alumno (ocurre con la terna: profesora – P4A40 – P4A19 y con: profesora – P4A25 – P4A14). La gráfica, por su parte busca que los estudiantes visualicen la situación de tal manera que se convierta en un medio para ayudar a comprenderla. P4A1 lo asume de esta manera; sin embargo, para P4A18 saber la regla es comprender el tema y tener la herramienta necesaria para poder resolver este tipo de situaciones. Para entender algún concepto matemático o cualquier otro, en primer lugar el alumno debe hacerse representaciones del mismo (Ríos, 2007).

Los alumnos consideran la manipulación simbólica como mejor estrategia para resolver cuestiones matemáticas; frente a esta, el empleo de gráficas resulta engorrosa y poco atractiva (es más cómodo para ellos saber cuántos elementos debe tener un grupo y representar grupo por grupo que hacer los cinco grupos e ir añadiendo elementos a cada uno, por ello recurren a la división).

A través de esta sesión no se refleja explícitamente el tratamiento de un tema nuevo para los estudiantes (dado que se hace evidente que conocen "la regla" para resolver las situaciones que plantea la maestra); sin embargo, permite que los estudiantes usen lenguaje matemático constantemente para poder interpretar y representar la realidad y apliquen el conocimiento aprendido lo que permite observar el nivel de propiedades aplicadas, las argumentaciones que usan para explicar su conducta matemática, las mismas que se basan en la experiencia y aplicación de casos concretos, así como los procedimientos seguidos y el conocimiento adquirido. Matute (2010), citando a Polya (1965) señala que una de las tareas más importantes y nada fáciles es ayudar a los alumnos, lo cual requiere tiempo, práctica, dedicación y buenos principios; de manera discreta y sin imposición, tratando de comprender lo que ha pasado por su mente, planteando preguntas o indicando algún camino que podría habérsele ocurrido al mismo alumno (pág. 26).

Sesión 3 / Caso 4

La idea de unidad es abstracta para los alumnos; sin embargo esta se asocia a cualquier figura geométrica. La idea de fracción se relaciona con las partes obtenidas en una unidad dividida (cada parte es una fracción). La primera actividad permite que los estudiantes se expresen libremente. A través de las primeras propuestas e intervenciones se observa que la idea de fracción trasciende la imagen que la representa pues esta se puede hacer en un cuadrado o en un círculo. Los alumnos lo aceptan al trasladar su trabajo a una imagen diferente.

Asimismo, las diferentes intervenciones evidencian lo que los alumnos conocen sobre las fracciones y lo que se puede hacer con ella (se puede operar y transformar en mixtos). También se puede apreciar que están en proceso de dominio y comprensión de la fracción propiamente: aun cuando la iniciación formal en la misma haya empezado dos años atrás, los alumnos muestran ciertos errores que; sin embargo, la profesora intenta corregir. Nótese la relación inmediata que establecen al comparar las fracciones en la que tres séptimos es mayor que cuatro cuartos y que dos cuartos (entre estas dos últimas fracciones la comparación ha sido correcta). En algunos casos, el criterio es mayor cantidad en el denominador. La profesora reorienta las intervenciones de los estudiantes a fin de poder evidenciar la inconveniencia de la respuesta. Para Puzzo (2012) numerosos alumnos no logran representar números fraccionarios, operar con ellos o establecer equivalencias… Los errores, los relacionan con actividades que presentan las fracciones, tanto vinculadas a la medida como con el reparto, alejadas de las acciones y centradas en *configuraciones perceptivas* de materiales continuos y discretos que no toman cuenta ni peso, ni volumen. En su investigación, la autora afirma que el 66% de alumnos de 1º de secundaria evaluados no han construido los aprendizajes sobre números fraccionarios considerados prioritarios para alumnos de 4º año del nivel primario.

A medida que la profesora intenta que los estudiantes se den cuenta del error, se puede observar que la variedad de justificaciones transitan entre dos formas: quienes se apoyan en la idea de fracción y quienes lo hacen en la manipulación simbólica. Nótese que P4A24 hace referencia a las características de los elementos de la fracción para compararlas o P4A14 cuando hace alusión a la regla; mientras que P4A18 se basa en lo que sucede con la unidad dividida (“Es menor, porque de los ocho se han tomado solo tres”), contextualizando las cantidades. Lo mismo ocurre con P4A12 (Porque 3/8 no pinta toda la unidad) o nuevamente P4A14 (porque la unidad está completa y al oro le faltan cinco). P4A1, por su parte, contextualiza la situación para poder explicarla (porque son cuatro partes de torta pero se comen dos).

Algunas propiedades sobre fracciones se han interiorizado correctamente, como las expuestas por P4A25 (fracciones mayores a la unidad) o P4A4 (fracciones menores a la unidad). No obstante, no todos los alumnos tienen un mismo dominio del conocimiento adquirido, lo que se evidencia a medida que la complejidad del mismo crece. Por otro lado, aun cuando los estudiantes tienen cierto conocimiento de la situación, comunicar verbalmente sus hallazgos no es tan sencillo para todos. Adviértase cómo P4A12 realiza una gráfica correcta de lo que se le pide (9/2); sin embargo, su justificación verbal es confusa (“yo no puedo partir el dos en un círculo…”… ¿Por qué no tres? Porque es una fracción impropia). Lo mismo ocurre con P4A5 para la misma situación (“Dividió a cinco partes, hizo diez…”).

La idea de representar más de una unidad cuando la fracción es impropia está bastante clara para los estudiantes, pero la forma de dividir cada una, no, tal como lo manifiestan P4A19, anteriormente, y P4A10 luego (“Puedo hacer tres círculos, divido en tres y tomo tres, tres y tres”).

Si bien los estudiantes participan activamente en la clase, expresando matemáticamente lo que piensan de las actividades desarrolladas, la maestra se percata que no todos tienen el mismo nivel de comprensión: hay una variedad de conocimiento que, sin embargo, permite que los estudiantes vayan reflexionando sobre los propios y los de los demás, depurando los mismos.

Luego del trabajo simbólico con las fracciones, que transita entre una representación e interpretación de fracciones impropias, comparación de estas y a propósito del surgimiento de fracciones mayores a la unidad, representación e interpretación de las mismas, la maestra contextualiza la última fracción (9/2) en una situación concreta. Esta situación, plateada como se expresa, conlleva varias vías de solución, pero la misma transita por una sola, asociada a la actividad anterior. P4A18 sigue dicho planteamiento, que le sirve para resolver (Dividir entre dos cada queque), P4A1 nota que los datos le brindan más información de la que podría usar directamente; sin embargo la solución sigue el mismo camino. La profesora nota que la situación no ha sido del todo clara y sencilla para los estudiantes y retorna a un trabajo más simbólico (¿Me pueden hacer este gráfico: 12/5?). Algunos alumnos prefieren contextualizar inmediatamente, luego la maestra hace lo mismo. La propuesta de la docente no es tan clara para los alumnos como la referida anteriormente. En primera instancia se siguen viendo los mismos errores que al inicio del caso anterior; con la situación planteada por una parte intentan escribir 12/5 y por otra, representar gráficamente doce tamales. Al igual que el caso, anterior, los estudiantes trabajan con diferente información, cuestionándose los datos del problema. Aparentemente, el problema es fácil de resolver y no necesitó del uso de fracciones propias ni impropias. La última situación propuesta, plantea claramente la idea de repartir las unidades en partes iguales. Es una situación extramatemática del contexto de los niños[426] que origina diferentes representaciones gráficas por lo que sus soluciones pueden ser variadas. Si bien, las situaciones propuestas permiten una mayor apertura de los alumnos hacia sus soluciones, falta dar solución conjunta de la situación de forma que los estudiantes vean las diferentes respuestas y por lo tanto, puntos de vista. ¿Cómo contextualizar y dejar pensar la matemática? Para Sánchez (2013) esta pregunta

---

[426] El colegio está ubicado en una zona de clase media alta al que van alumnos que en su mayoría son de clase media baja cuyas familias por lo general se dedican a las actividades de compra y venta de abarrotes o preparan comida para vender.

se responde simplemente siendo crítico ante el discurso tradicional, con una mente abierta, creativa, sin ese incondicional apego al texto.

Sesión 4 / Caso 4

La clase que gestiona la profesora busca la participación de los alumnos en el tratamiento del tema en cuestión. Si bien, los alumnos muestran conocimiento del mismo (no es un tema nuevo), la actividad permite reflexionar sobre el tema y aplicarlo en situaciones concretas para un mejor desarrollo de la misma (saber si dos fracciones son homogéneas permite aplicar una estrategia de suma y saber que son heterogéneas, otra estrategia). A través de la propuesta, los alumnos van explorando sus conocimientos sobre el tema, aplicándolo y validando o reestructurando los mismos. No todos los estudiantes muestran el mismo nivel de comprensión y aplicación del conocimiento matemático; sin embargo, la interacción permite que dicho conocimiento se use en situaciones concretas, permitiendo su aplicación. Aun cuando los alumnos han iniciado el trabajo con fracciones en tercer grado, estas ideas siguen en proceso de comprensión, ampliación y dominio, lo cual se va logrando a medida que los estudiantes interactúen y reflexionen sobre ellos.

Las actividades de aplicación propuestas por la docente se centran en el desarrollo directo de operaciones; sin embargo, el conocimiento de las mismas permite reflexionar sobre el proceso; en esa reflexión, el alumno ha de darse cuenta de lo que sucede en el mismo; es decir, dominar una técnica o regla permite que el trabajo procedimental se realice con mayor destreza la actividad matemática se centre en otros aspectos (como el de la relación entre el mcm y los denominadores de las fracciones que se van a sumar o restar).

La actividad de resolución de problemas como tal no se aprecia pues no se proponen problemas matemáticos a los alumnos que desafíen su capacidad de planteamiento de resolución de los mismos. Las actividades planteadas si bien, favorecen la participación de los alumnos, esta es una intervención vertical, aplicando directamente el conocimiento sin ningún factor que bloquee este intercambio de ideas que no sea la falta de dominio del tema.

Las preguntas de la docente, en su mayoría tienden a unas respuestas únicas, directas; en algunos casos permiten la relación ente situaciones (qué relación hay entre el mcm y los denominadores, por ejemplo); esta pregunta es posible si la actividad del alumno no se centra en la aplicación de una fórmula o procedimiento, ni en la respuesta a una pregunta sino en la reflexión de lo que va apareciendo y que permiten descubrir nuevas formas de acceder a una solución. Favorecer este tipo de actividades permite que el alumno al enfrentarse solo a situaciones de esta naturaleza adopte la conducta mostrada por la docente y tienda a ser más reflexivo.

Sesión 5 / Caso 4

La sesión de hoy se centra en la *resolución de problemas*. La maestra llama *problemas* al tipo de actividades propuestas. Según sus características, un problema es una situación que requiere solución; contienen información numérica y no numérica. Los problemas planteados por la docente se resuelven mediante procedimientos matemáticos. Exceptuando la información no numérica, lo expuesto se asocia con lo que Alfaro y Barrantes (2008) exponen como problema de acuerdo a un texto de matemática de 1940 (Repetto, Linskens y Fesquet, 1967, p. 207) en el que se indicaba que “existen numerosos problemas cuya resolución se reduce a la de una ecuación de primer grado con una incógnita. Por ejemplo el siguiente: Un número es tal que su duplo disminuido en 3 unidades es igual a dicho número aumentado en 2. ¿Cuál es ese número?” Desde entonces, el concepto de *problema matemático* ha evolucionado y considera otros aspectos.

Para Muñoz y Lasalle (SIGMA, nº 21), profesoras de infantil y primaria, un problema matemático es algo cuyo resultado o solución se desconoce, conlleva una dificultad que no puede resolverse automáticamente; supone una necesidad de resolverlo y la posibilidad de hacerlo de modo matemático… Es una actividad mental compleja que incluye deseo de resolución, herramientas matemáticas y lógicas, paciencia, perseverancia... Esta idea es avalada por la OECD (vol. V, p.1. Citado por PISA 2012) quienes afirman que *“Los problemas son situaciones sin una solución obvia. Si no hay que pensar, no hay problema”* y Sanz (PISA, 2012) para quien los problemas son situaciones conflictivas cuya solución no resulta evidente. Centrándonos en la actividad de resolver problemas, Polya (citado por Rodríguez, 2005), indica que resolver un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata. Para Rodríguez (2005) el resolutor debe disponer de los medios necesarios para resolver el problema, pero no puede tratarse de problemas que comprueben simplemente que se posee un conocimiento inerte, sino que deben implicar una transferencia del mismo. Las definiciones expuestas evidencian que las situaciones propuestas por la maestra son problemas para los alumnos, principalmente porque su planteamiento de solución no es claro para ellos, aun cuando proponen uno. La resolución de problemas exige un proceso de construcción personal basado en los conocimientos que se poseen, implica desarticular todos los elementos del problema, cuestionarlo, replantearlo, comprenderlo e idear la solución posible. Estas fases previas a su solución evidencian compromiso con el mismo.

La solución propuesta por P4A19 en la primera parte de la clase supone una actuación irreflexiva, ya que la alumna plantea una solución pero no sabe si es correcta o no. El acompañamiento de la docente, tampoco le permite ser consciente de su propuesta aun cuando “resolvió” el problema con la maestra. El problema sobre Carlos y la torta de chocolate tiene una solución esperada que es la que da el alumno y validan la maestra y los compañeros. Sin embargo, el problema dice: "Carlos saca los 5/8 de su torta de chocolate, de los cuáles 3/8, por casualidad, se le cayeron al piso. ¿Qué porción de torta le quedó para repartir?”. Pensar sobre el problema antes de plantear una solución esperada[427] es indagar sobre su propuesta: si bien le queda dos octavos o un cuarto de torta para repartir, ¿por qué no coger los tres octavos que no cogió inicialmente? El problema no dice nada al respecto, pero da pie a reflexionar sobre aquello. Las situaciones reales son muy amplias e implican diferentes factores. No pensar en ello, centra la actividad de resolución de problemas en la aplicación de una operación únicamente, más allá de eso… nada (muchas veces ni la respuesta). Pérez y Ramírez (2011) manifiestan que en las últimas décadas se ha acentuado la preocupación de que la resolución de problemas matemáticos sea aplicada como una actividad de pensamiento, debido a que es frecuente que los maestros trabajen en sus aulas problemas rutinarios que distan mucho de estimular el esfuerzo cognitivo de los educandos.

El trabajo que realiza la profesora en el proceso de resolución de problemas se centra en brindarle la solución paso a paso; sin embargo, los alumnos no responden positivamente en la comprensión del mismo. Si bien, se observa que los alumnos responden a las preguntas formuladas por la profesora, sus respuestas son variadas y no se evidencia una reflexión sobre la pertinencia de las mismas. La conducta de la maestra es aceptar la respuesta que coincida con su propuesta y actuar en consecuencia. El papel que desempeña el profesor en el aprendizaje de estrategias generales de resolución de problemas es muy importante. Pifarré y Sanuy (2001) mencionan cuatro elementos que deberían estar presentes en el diseño de propuestas de enseñanza – aprendizaje que tengan

---

[427] $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

como objetivo mejorar el proceso y las estrategias de resolución de problemas, basados en un estudio realizado con alumnos de ESO:

- Contextualizar los problemas a resolver por el alumno en situaciones cotidianas de su entorno;
- Utilizar métodos de enseñanza que hagan visibles las acciones para resolver un problema, proceso poco conocido desde el punto de vista del alumno;
- Diseñar diferentes tipos de materiales didácticos que guíen la selección, la organización, la gestión y el control de los diferentes procedimientos para resolver un problema; y
- Crear espacios de discusión y de reflexión alrededor de este proceso como, por ejemplo, el trabajo en pequeños grupos o en parejas.

Sesión 6 / Caso 4

La propuesta de clase de la docente sigue el lineamiento de la sesión anterior, en tanto se proponen *problemas matemáticos* para que los alumnos resuelvan aplicando la división de fracciones. Asimismo, la guía de la docente en este proceso se basa en la dirección vertical de la misma, planteando preguntas puntuales muy marcadas y que cambian de orientación rápidamente (qué hay que hacer… cómo se divide… qué hay que hacer con el número mixto… como se transforma en fracción… etc.) generando respuestas simples, directas e independientes, sin cuestionar la respuesta, lo que invitaría a la reflexión y argumentación. Solar y Piqué (2015) hacen referencia a tipos de preguntas que favorecen la argumentación, a partir de un estudio de caso realizado con docentes:

- aquellas que favorecen la explicación por sobre un sí o no;
- no hacer preguntas retóricas, es decir, hacer la pregunta y responder inmediatamente,
- realizar contra-preguntas a los estudiantes a partir de sus respuestas,
- plantear preguntas que no cambien de foco rápidamente y
- tratar que las preguntas promuevan que las ideas evolucionen.

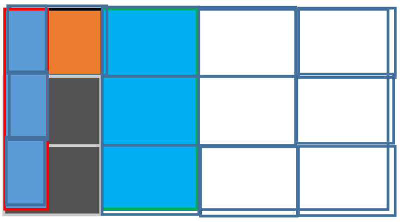
Podemos decir que las preguntas formuladas en esta sesión por la docente si bien conducen directamente a la operación y ejecución de la misma que permite dar respuesta a la pregunta del problema, rápidamente se descontextualiza de él y se centra en la operatividad de los datos. No obstante, el trabajo de la maestra genera distintas formas de actuar en los estudiantes que pueden ser aprovechadas por la docente para promover un pensamiento más reflexivo en los alumnos a partir de sus propias respuestas, no quedando la clase en la mera resolución, construcción y aplicación de operaciones sino en la reflexión del trabajo realizado. Sin embargo, hay que notar que transformar el problema en uno más sencillo es una estrategia que favorece la resolución de problemas. Viar (2007) propone que la simplificación, particularización es una buena estrategia para principiantes ya que les permite adquirir confianza y en otros casos proporciona ayuda en atasco mediante la manipulación de datos más asequibles al resolutor. Dentro de las estrategias heurísticas que propone Polya menciona resolver un problema similar más simple. Alfaro (2006) sugiere que el problema original se puede variar enfocándolo a un problema análogo… cambiando alguna condición. Refiriéndose a Polya afirma que eso genera un poco de movilización y organización de los conocimientos que saldrán a flote a partir de estas variaciones. Sin embargo, es necesario que el maestro oriente a que sea el alumno quien proponga este tipo de estrategias. La guía del docente ha de permitir el trabajo responsable y consciente del alumno; solo así se puede decir que este ha participado de un proceso de resolución de problemas que ha hecho suyo.

Un factor importante en la clase es la propuesta de planteamiento de problemas por parte de los alumnos. El planteamiento de problemas por parte de los alumnos es una actividad poco promovida en las aulas. El tiempo se agota en la resolución de problemas.

Caso 5

Sesión 1 / Caso 5

La sesión de clase propuesta tiene como propósito medular que los alumnos comparen fracciones. Para ello, la maestra parte de una situación manipulativa en la que los estudiantes tienen que representar fracciones unitarias conocidas. La idea es que comparen gráficamente, al menos en un inicio. La actividad genera una dificultad en los alumnos, que algunos resuelven eliminando lo trabajado previamente por no encontrar relación con la propuesta. La maestra descarta el *problema* generado y acepta la solución de los alumnos, lo que le permite no desviarse del fin requerido (que es lograr que los alumnos representen gráficamente cuatro fracciones unitarias). Ante esta situación, pensamos que la actividad propuesta por la docente generó un problema que si bien fue resuelto por un grupo pudo tener otras vías de solución en las que se podría involucrar el conocimiento en cuestión (fracciones) y a toda la clase planteándoles un problema real suscitado a partir de una actividad manipulativa: ¿cómo obtener un sexto en esta hoja de papel que está dividida en cuatro partes iguales? Este *problema* no ha sido planteado por la docente, ha surgido de la actividad del alumno: ¿cómo resolverlo? La solución a la comparación inmediata de las fracciones generadas puede estar en la representación de las cuatro fracciones en una sola gráfica y no en cuatro distintas:



Resolver problemas de matemática es una tarea cognitivamente compleja que se debe desarrollar en las aulas de matemáticas, uno de cuyos objetivos es conectar las matemáticas escolares con la vida real. En esta conexión, los docentes proponen problemas matemáticos como situaciones cotidianas con una incógnita en las que suceden hechos que involucran cantidades que los alumnos tienen que manipular para darle solución. Chamoso, Vicente, Machado y Núñez (2013) hacen referencia a la resolución *superficial* de problemas, cuando se pasa de los datos directamente a la operación sin razonamiento. Este tipo de resolución se manifiesta en problemas realistas "aquellos que necesitan de un razonamiento que debe considerar aspectos reales". Los problemas reales no se proponen, aparecen; cuando se proponen no son reales, simulan o representan la realidad. El resolutor ha de saber identificar el problema cuando este surja y pensar en él en términos matemáticos (si es que es de este campo). Los alumnos en esta actividad han identificado un problema. La NCTM dice que los buenos resolutores de problemas tienden naturalmente a analizar cuidadosamente las situaciones en términos matemáticos y a proponer problemas basados en las situaciones que ven… de ahí que el papel del profesor en la elección de tareas y problemas matemáticos es crucial. Ayllón y Gómez (2014) manifiestan que en ocasiones se presenta la invención de problemas como una variable que ayuda a predecir la capacidad de un individuo para resolver problemas. Citando a Kilpatrick (1987) expresan que los estudiantes que son capaces de inventar problemas matemáticos son buenos resolutores de problemas. Potencialmente, los alumnos demuestran capacidad para descubrir algo nuevo o no conocido para ellos; la maestra ha de estar atenta para orientar su actuación de manera que esta sea productiva. Nótese cómo con cierta orientación, los alumnos son capaces de encontrar relaciones entre los datos, lo que les permite hallar diferentes formas de acceder a un conocimiento, de forma que estos sean conscientes de que la información o el conocimiento no solo llega de parte del profesor o del libro de texto sino que él es capaz de generarlo. Interactuar con actividades que buscan hacer pensar al estudiante le permite ser consciente de ello y pensar más allá de lo que ve. El tipo de preguntas que la maestra utilice orientará hacia una acción u otra al estudiante. En la situación propuesta, la maestra plantea preguntas que buscan que los alumnos analicen matemáticamente la situación y justifiquen sus respuestas. Por lo general, las respuestas son puntuales por el tipo de actividad planteada. A medida que la actividad es más clara, las soluciones también lo son y por lo tanto, las respuestas son concretas (Ante una suma si se pregunta ¿qué hay que hacer? La respuesta inmediata es Sumar…).

Sesión 2 / Caso 5

La historia de la matemática muestra que su avance obedece a la solución de problemas externos e internos a la propia disciplina; no obstante se concibe como una ciencia abstracta ¿resultan contextos igualmente apropiados para el aprendizaje? SEA (2014) citando a Seoane, Seoane (2011) revela que los contextos de aplicación extra matemática se explican cuando ofrecen al alumno elementos para pensar, abordar, resolver o validar los problemas que están enfrentando. En tanto, el contexto intramatemático es valioso para entender la matemática como producto cultural, como práctica, como forma de pensamiento, como modo de argumentación y para comprender la lógica interna de la Matemática. A partir de las actividades propuestas, la maestra busca que los alumnos piensen sobre los contenidos matemáticos propiamente, de forma que en ese interactuar directo, se pueda observar detenidamente la situación. Puede ayudar a pensar sobre los mismos la problemática surgida a propósito de indicar si 20/42 era equivalente a cuatro séptimos. Esta pregunta se responde inmediatamente con un sí o no y de acuerdo a ello, la maestra puede dar la respuesta directamente o permitir que los alumnos respondan comprendiendo la situación: ¿Cuándo dos fracciones son equivalentes?, ¿por qué tengo que multiplicar o dividir ambos términos por el mismo número?, ¿qué pasa con las parte divididas si reduzco/amplío el número de partes tomadas?, ¿por qué no puedo simplificar independientemente? En alguna clase, una alumna manifestó saber cómo se hacía para indicar los siglos pero no saber por qué. Muchos alumnos son capaces de seguir un procedimiento y no equivocarse en ello y no saber por qué. Esto conduce a un hacer sin pensar; sin embargo, conocer algo le permite pensar en él (no se piensa sobre lo que no se conoce al menos en parte), detenerse en la situación y hacerla suya. Si bien la alumna en mención sabía lo que tenía que hacer, aún no hacía suyo ese conocimiento. Cada niño hace propio el conocimiento a través de la investigación y esta se da sobre algo en lo que se piensa. ¿Por qué P5A6 dice que "no es reducible"?, ¿qué quiso decir con ello? ¿Y P5A1, porqué dice que no tiene divisor común? Forero (2014) categoriza las preguntas que se hacen en clase de acuerdo a la función que cumplen (cognitiva, informativa, de continuidad, regulativa, imaginativa, evaluativa, metacognitiva, etc.). Plantear preguntas que favorezcan las funciones cognitivas y metacognitivas, por ejemplo, permite que los alumnos contrasten, justifiquen, anticipen y tomen conciencia sobre el propio pensamiento. Todo ello, favorece la capacidad de resolver problemas. Dar la respuesta, permite que el alumno la conozca y la reproduzca, a veces correctamente y otras no, pero no le da la posibilidad de construir adecuadamente la misma y descubrir el producto de su pensamiento. Perkins (2004) hacer referencia a que el pensamiento es básicamente invisible e incita a los educadores a trabajar para hacer el pensamiento mucho más visible de lo que suele ser en el aula. Si esto se hace, dice el autor, se ofrece a los estudiantes más oportunidades desde dónde construir u aprender. A través de la última actividad de simplificación, al conocer esta estrategia y aplicarla en diferentes casos, el alumno puede mejorar la misma… ¿Por qué simplificar sacando primero mitad y después tercia si puedo sacar sexta directamente?

Las actividades propuestas por la maestra, el conocimiento del alumno y su motivación hacia la tarea favorecen un aprendizaje significativo y la percepción de desafíos o dudas que le permiten actuar.

Sesión 3 / Caso 5

La docente sigue la misma línea de trabajo desarrollada en la clase anterior al proponer actividades descontextualizadas de la realidad; es decir, sin ninguna referencia a casos de la vida real o situaciones cotidianas pero que involucren conocimiento matemático. Barrantes (2010) refiere que un contexto intra-matemático es aquel en el que la tarea específica a realizar se refiere solamente a objetos matemáticos tales como estructuras o símbolos. En las tareas aplicadas, los alumnos aplican el conocimiento en cuestión, son capaces de expresar fracciones equivalentes, pero de forma línea, es decir siguiendo un patrón predeterminado (por ejemplo, multiplicando secuencialmente, casi de manera automática). Esto es positivo y negativo. Positivo, porque permite afianzar un conocimiento; negativo, si es que la situación se queda ahí ya que no hay mucho más que hacer para adquirir destreza en esta acción. Por otro lado, esto no es garantía que se aplique correctamente siempre. No obstante, las preguntas de la docente permiten que ello no ocurra ya que cuestiona a los alumnos sobre las producciones realizadas estableciendo relaciones y creando conflictos que sacan de ese ambiente de confort en el que se ha ubicado el alumno (al lanzar respuestas casi automatizadas).

> Nada determina más a un ser humano que su "zona de confort". Significa el modo en que se ha acostumbrado a pensar y vivir. Lo que hace, lo que deja de hacer, lo que piensa, lo que deja de pensar. Cómo resuelve un problema y cómo deja de resolverlo. El ser humano se instala en su zona de confort y no quiere abandonarla por nada del mundo. Inventa motivos, argumentos lógicos, toda clase de cosas con tal de no tener que cambiar de zona. Max Landorff (2012)

Gregory Cajina, autor del libro Rompe con tu zona de confort (Oniro, 2013) incita a los maestros a fomentar la independencia, la creatividad e la investigación en la escuela para que los alumnos salgan de su zona de confort. Un buen maestro de matemáticas enseña a sus alumnos a salir de esta zona en las actividades matemáticas, para ello el docente ha de dar el primer paso. Los alumnos son personas desafiantes, algunos más que otros. Por ejemplo, P5A8, crea su propio procedimiento para comprobar que dos fracciones son equivalentes, no se conforma con el que la maestra le transmite: crea situaciones y piensa más allá. La propia actividad en la escuela genera diferentes actitudes y reacciones en los alumnos, unos más propensos a permanecer en la zona de confort (por seguridad, por falta de conocimiento, etc.) y otros a salir de ella. La combinación permite dar mixtura a la clase, facilitando el intercambio de ideas, propuestas y razonamientos, participando de diferentes puntos de vista, desafiando el propio.

Las actividades del libro de texto retornan al alumno a su zona de confort (o monotonía) si es que se orientan a aplicar lo aprendido, sin propiciar en el estudiante actitudes diferentes que le lleven a aplicar el conocimiento matemático capturado. Esto se hace mejor en clase, con la ayuda de la maestra, pero debe preparar para que el estudiante al trabajar solo tenga una actitud similar. Esto es posible si las actividades que tenga que hacer solo le permitan esta actitud desafiante frente a las distintas situaciones. Pino y Blanco (2008) en un análisis de libros de texto de matemática para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y Chile en elación con los contenidos de proporcionalidad concluyen que la mayoría de problemas que se proponen son del tipo de ejercicios de reconocimiento y ejercicios algorítmicos y problemas de traducción simple que son las categorías de menor complejidad, proponiendo que estos incluyan la resolución de problemas de una amplia variedad que vayan desde los simples hasta los más desafiantes, investigativos y que impliquen el uso de estrategias heurísticas más propias del quehacer matemático.

Sesión 4 / Caso 5

La propuesta didáctica de la docente busca que los estudiantes apliquen un conocimiento previo en situaciones nuevas diferentes. Los alumnos no se han enfrentado a situaciones en las que tienen que hallar el área de figuras compuestas ni tienen *una* fórmula para ello. (Fernández, 2010) manifiesta que ante las situaciones novedosas, el estudiante puede responder con un alto grado de motivación e interés… No obstante, si a un niño se le dice ‘así se suma’, ‘así se multiplica’, ‘así…’, se está grabando en su cerebro que no se puede sumar o multiplicar de otra manera. Se limita considerablemente, con esta forma de proceder, el desarrollo de la intuición, la observación, el razonamiento y las posibles combinaciones creativas que podría realizar.

El contexto es intramatemático lo que permite centrarse en el conocimiento a aplicar. Se hace evidente la importancia de manejar el conocimiento previo para poder responder a las nuevas propuestas. El manejo del mismo permite un mejor enfrentamiento de la nueva situación, cuya dificultad no está en descubrir una fórmula para hallar el área de figuras complejas sino en reconocer las figuras simples en ellas y aplicar la fórmula conocida. Luego, unir.

La respuesta inmediata de los estudiantes no evidencia una relación directa entre lo que la maestra les ha dicho previamente (…servirán para hallar el área de otras figuras: “figuras compuestas”) sino que es la maestra quién se los hace evidente a través de preguntas directas (¿ustedes ya conocen el área del cuadrado?... ¿y del rectángulo?). Los alumnos necesitan la guía de la docente para poder crear esas relaciones que inmediatamente no genera. Para Fernández (2012), según el constructivismo, la enseñanza no es solo una transmisión de conocimientos sino que es una organización de métodos de apoyo que permitan a los alumnos construir su propio saber; parte del supuesto que los alumnos son alguien que tiene comprensión y medios suficientes para abordar situaciones novedosas…Un buen ambiente para el proceso de enseñanza – aprendizaje ha de facilitar la interacción dinámica entre los alumnos y el profesor, de manera que ambos aporten preguntas e ideas. Hay que escuchar al estudiante y permitir que él escuche sus razonamientos. De esta manera, el nuevo conocimiento se adquiere pensando, construyendo, creando relaciones con un conocimiento previo, a ser posible promoviendo la curiosidad de los estudiantes y proponiendo retos interesantes.

El trabajo realizado evidencia que los alumnos reconocen el tipo de figura, reconocen en ella que pueden hallar el perímetro de la misma aunque no todos lo hacen correctamente: algunos se dejan llevar por los datos explícitos de la imagen sin considerar que todos ellos se corresponden con los seis lados de la misma. Consideran solo un aspecto del problema. Estas situaciones se dejan de lado, se descartan y se aceptan y hacen públicas las experiencias exitosas, es decir aquellas que brindan directamente la solución de forma que las bases estén *cimentadas* para que se siga construyendo. Para quienes captan inmediatamente la situación, están cimentadas, para quienes no, van acumulando vacíos que luego no les aporta nada y genera inconsistencias en su conocimiento.

El lenguaje matemático utilizado permite centrarse en lo que hay que hacer en dicha actividad (hallar el área de figuras compuestas), generándose, indirectamente, otro tipo de figuras geométricas o polígonos que el alumno puede reconocer (tal es el caso de P5A8). El diálogo entre profesor y alumno permite que el estudiante no solo resuelva el problema o situación sino que piense sobre ella.

La gestión de la clase de la docente facilita la adquisición del aprendizaje… De algunos se hace evidente; de otros, no se puede decir si lo aprehendieron o no porque no intervienen. Quienes tienen garantizada la continuidad son aquellos que participan acertadamente, aunque no la eficacia necesariamente, ya que si el aprendizaje se logra desde fuera, la consistencia es débil.

Sesión 5 / Caso 5

La sesión propuesta por la docente se centra en la resolución de problemas de áreas de figuras compuestas como ella los nombra. En efecto, son problemas porque desde el punto de vista de quien los propone cumple con la característica básica de un problema matemático: involucra conocimiento matemático y se resuelven aplicando conocimiento matemático. Los problemas matemáticos que el maestro plantea en la escuela tienen un formato directo: brindan los datos (necesarios o no según sea el caso) y una consigna (que puede estar en forma de pregunta o de manera directa. En este caso, se da directamente). Frente a ellos, el maestro aplica una forma de resolverlos.

La maestra propone estos problemas con la finalidad de que los alumnos lo resuelvan; para ello, les transmite directamente la estrategia general para su solución (hallar las áreas de las figuras simples, trasladar figuras y formar otras más simples, por ejemplo) de esta forma, los alumnos aplican directamente y hallan el área solicitada.

En el transcurso de su resolución, los alumnos usan sus conocimientos previos y formas de pensar. A pesar que todos deben seguir un mismo proceso (el propuesto por la docente) su enfrentamiento con el problema es personal; de ahí que los procesos no necesariamente sean iguales (aunque lleguen al mismo final), tienen ciertas variaciones o apreciaciones. Las variaciones o apreciaciones permiten ver que el problema es entendido por el alumno, al menos en esa fase. El maestro ha de orientar al alumno en ese camino de tal manera que este se vaya fortaleciendo y haciendo consistente.

Si bien la maestra transmite directamente la forma de resolver un problema de este tipo de forma que los alumnos apliquen y resuelvan correctamente el problema, también cuestiona el hacer del alumno. En este cuestionamiento el alumno piensa sobre lo que hace. No todos los alumnos son capaces de darse cuenta si están errando, para algunos como en este caso, el proceso no es fácil. Es importante la labor de la maestra de tal manera que el alumno no se quede con la duda (si es que se ha creado) o con la idea (que también es negativo) de haberlo desarrollado correctamente. Hay que abrir y cerrar un proceso, esta apertura y cierre debe ser una actividad consciente del alumno quien es el actor principal de la resolución elaborada, ya que es su propuesta (entendida o no). El docente debe aspirar a que la propuesta del alumno aunque se base en la suya sea una propuesta entendida de forma que pueda hacerla suya.

La resolución de problemas se centra entonces en resolver situaciones concretas aplicando estrategias específicas que lo conduzcan por el camino seguro en ese proceso. La dificultad en estos problemas estaría en lograr reconocer las imágenes previas que le permitan identificar alguna que se ajuste a las fórmulas conocidas.

Sería interesante que la maestra dé libertad a los alumnos en el proceso de solución, de forma que estos no inicien una actividad de resolución de problemas pensando directamente en la forma de resolverlo sino en el problema mismo, de esta manera el enfrentamiento con el problema inicia en la actividad de interacción con la situación. Cuando la maestra le expone la situación y le dice al alumno lo que tiene que hacer el primer paso de este con el problema es el procedimiento seguido; el primer contacto del alumno con el problema son los datos mas no la situación general; de ahí que algunos alumnos al resolver las operaciones den por finalizado el problema. Es importante volver al problema, a la situación para dar por finalizado aquel. Para Mauri (1999), el conocimiento se construye mediante un proceso de elaboración personal en que ningún alumno o alumna pueden ser sustituidos por otro, es decir, algo que nadie puede realizar en su lugar.

En la clase observamos que los alumnos si bien se enfrentan al problema, no todos tienen el mismo nivel de aplicación del conocimiento. Si bien, en quinto grado muchos de los temas ya se han trabajado en años anteriores, estos no están consolidados, necesitan refuerzo, madurez en la forma de poseerlos; esto es posible con una mayor interacción y con una mejor calidad de la misma. No basta que lo sepa sino que piense en eso que conoce. Aprovechar las intervenciones de los alumnos, de aquellos, que van por delante en este proceso permite que la clase se torne interactiva, una interacción que promueve la docente pero que asumen los estudiantes. Dejar a estos como "tutores instantáneos" les ayuda a pensar sobre aquello que conoce, usarlo, explicarlo, cuestionarlo, etc.

Sesión 6 / Caso 5

La propuesta de la maestra busca que los alumnos recuerden un conocimiento previo a fin de poderlo aplicar correctamente en situaciones nuevas. Esta aplicación conduce a la introducción de un nuevo concepto: "transposición de términos". La actividad de los alumnos permite aplicar una forma de proceder y darle nombre propio.

Los alumnos muestran sus conocimientos sobre el tema en cuestión y una visión de lo que es ello. Para los alumnos una ecuación tiene letras e incógnita o en ella un número *pasa* negativo al otro miembro porque está positivo. Sus conceptos se fundan en lo que observan y en lo que realizan. Sin embargo, sus respuestas se bloquean cuando se les cuestiona las razones de su proceder. Más allá de porque “así se hace” no hay argumentos consistentes (por ejemplo, hay que despejar la incógnita y para ello, el número que lo acompaña tenemos que…).

La resolución de problemas se basa en lograr una traducción matemática (matematización) de la situación “real” asociada a las ecuaciones y resolver esa expresión. La ecuación se convierte en una forma distinta de expresar una situación en términos matemáticos en la que la incógnita tiene presencia. Nótese cómo los alumnos resuelven el problema de P5A6 de manera directa; en este caso los alumnos no ‘confunden’ el *problema* con una suma (por el término “aumentado”); sin embargo, hay un retorno a expresarla de esta manera (como una suma) debido a la presencia de la incógnita. Una vez resuelta la incógnita no hay un regreso explícito a la situación, la misma que pasa a un segundo (o último) plano cuando “x” ha sido develada. Las preguntas de la docente conducen a construir paso a paso la expresión requerida y darle trámite en su resolución.

El planteamiento de situaciones similares por parte del alumno lo conduce a incluir la matemática en contextos “reales” o extramatemáticos, pero además a seguir un patrón fijo y establecido para este tipo de situaciones. A sugerencia de la maestra, los alumnos siguen la estructura planteada por la docente que los conduce a plantear situaciones aceptables que permiten una interpretación y traducción inmediata de la misma al lenguaje matemático. Los problemas matemáticos cobran “una forma de ser” que les permite ser identificados directamente en el ambiente escolar. Los alumnos crean problemas siguiendo patrones predeterminados; no obstante, si tienen un poco de libertad, sus planteamientos se tornan complejos. Malaspina (2013) indica que el aprendizaje de las matemáticas está vinculado a la resolución de problemas y ésta a la creación de problemas.

No todos los alumnos participan de este intercambio de ideas generado y promovido por la docente, el mismo que se basa principalmente en preguntar qué hay que hacer o identificar aspectos puntuales de la situación… esporádicamente: por qué se hace así (casi nunca si se podría hacer de otra forma). Algunos alumnos hacen más evidente su nivel de conocimiento de la situación y otros, no, con lo cual la clase se circunscribe a unos cuantos. Las preguntas de los alumnos son escasas lo que no permite medir el nivel de reflexión que este tiene respecto a la actividad, con lo cual se aprecia que más allá de interactuar con un problema “real” interactúa con un problema propuesto en el que se hace evidente qué hay que hacer para resolverlo, configurando un tipo de conducta en los alumnos frente al mismo. Los problemas reales son más complejos, lo cual viene dado por las condiciones de la situación; los problemas matemáticos escolares son complejos en la medida que el contenido (conceptual o básicamente procedimental) sea más complejo (involucre más operaciones, otras variables, etc.). Más allá de reflexionar la estrategia esta viene dada por las indicaciones de la docente, incluso en la fase de resolución de *ejercicios* pues estos se proponen a propósito de lo trabajado en clase. De esta manera, el fin último es conocer y aplicar; también justificar, una justificación fundada en el proceso. Malaspina (2013) expresa que "cuando se pretende estimular la participación de los estudiantes, se incentiva las respuestas de los alumnos a preguntas que formula el profesor, pero se presta poca atención al estímulo a la formulación de preguntas de los alumnos, lo cual es fundamental para desarrollar su actitud crítica y su pensamiento científico…plantearse preguntas no es solo un primer paso para crear problemas; también es fundamental para resolver problemas y es parte del proceso de comprensión de conceptos, definiciones, teorías, demostraciones e interrelaciones no solo en el campo de la matemática".

Caso 6

Sesión 1 / Caso 6

La propuesta de clase de la maestra incluye el trabajo de actividades con contexto matemático centrado en la manipulación directa de las cuestiones matemáticas. La docente parte de un supuesto: el alumno conoce dos aspectos que en esta clase se integran: suma de fracciones y perímetro de figuras planas. A partir de ellas plantea una situación que le permite integrar otro conocimiento previo: multiplicación, la misma que se asocia a la suma reiterada. Relacionando ambas, la docente introduce la multiplicación de fracciones (por un número natural), en la que a partir del resultado obtenido con la suma, asocia el mismo a los factores (…Entonces se expresa $4 \times \frac{5}{4}$… Vemos acá que el cuatro (4) multiplica a cinco…). Este nuevo conocimiento se introduce en situaciones nuevas (las dos siguientes actividades en las que se pide hallar el perímetro) a fin de aplicarlo en la resolución de las mismas. La transferencia no es inmediata en todos los estudiantes, pues algunos alumnos (al menos quienes participan) hacen evidente el uso de la multiplicación y otros de la suma; no obstante, la docente incide en el uso de esta última a fin de integrarlo y manipularlo.

La maestra dirige el proceso de enseñanza – aprendizaje de estas cuestiones a través de las preguntas formuladas a los estudiantes. Las preguntas son básicamente canalizadas por la docente y se circunscriben directamente al tratamiento de la cuestión. A medida que los estudiantes responden, la docente amplía o afina la información surgida en el intercambio de ideas expresando términos del lenguaje matemático. En esta sesión, el alumno no plantea ninguna cuestión. Las preguntas de la maestra se orientan por lo general a hacer evidente un paso del proceso; la maestra aprovecha esta forma de proceder para afinar el nuevo conocimiento o aplicación.

La manipulación de las fracciones en el proceso de operar es dirigida por la docente quien a medida que se van escribiendo las operaciones y operando fracciones cuestiona sobre el proceso de operar propiamente, de tal manera que cada detalle no quede al margen. Esta forma de trabajar genera que en el proceso surjan diferentes cuestiones que la maestra va recordando y resumiendo (por ejemplo en el caso de los denominadores o tratamiento de mixtos). La maestra busca que los estudiantes apliquen paso a paso todos los conocimientos previos.

La participación de los alumnos es parcial. Algunos estudiantes destacan respecto a otros porque participan con mayor asiduidad en las preguntas de la maestra.

La profesora no nombra de ninguna manera las actividades propuestas, las plantea directamente y su tratamiento es directo. La actividad del alumno en esta clase consiste principalmente en recordar e ir adquiriendo o afinando el conocimiento, de forma que adquiera mayor precisión en el mismo.

Las actividades propuestas pueden definirse como *problemas matemáticos* desde un corte tradicional cuyo planteamiento es directo y preciso, con los datos necesarios y la herramienta conocida para poder aplicarla y resolver el problema. Sin embargo, estos casos el *problema* o dificultad no está en hallar el perímetro de las figuras, ni en la manipulación de las fracciones en ese intento. Un *problema* es un desafío, reto o dificultad a resolver y para el cual no se conoce de antemano una solución (Rutas de Aprendizaje, 2015); Minotta-Valencia (2014) define problema como "un estado tolerable de incertidumbre con respecto a un interrogante lanzado al intelecto y que éste acepta como un reto, cuya respuesta no se sabe de antemano, en parte porque la información disponible y accesible que hace inteligible la incógnita se presenta en apariencia incompleta y con inconsistencias y en consecuencia se convierte en una tarea del intelecto llegar a un estado final caracterizado por la supresión sistemática y gradual de la perplejidad e inconformidad que causan las lagunas e inconsistencias de la información que configuran el interrogante". Si bien, la definición de problema implica aceptación por parte de quien resuelve, también la idea de que no se conoce de antemano la forma de llegar a la solución por lo que resulta una tarea o reto para el intelecto del sujeto que resuelve.

Sesión 2 / Caso 6

La propuesta de actividades como la que inicia esta sesión no es una propuesta que se trabaje generalmente en clase, pero sí en casa, aun cuando son de corte intramatemático. En clase, los ejemplos son más sencillos para facilitar la adquisición del conocimiento base (una suma directa de fracciones por ejemplo), esperándose que la base sea suficiente para aplicarla en contextos más complejos, aunque poco transitados. No todos los estudiantes desarrollan la tarea en casa y dentro de quienes lo hacen, la ayuda de personas mayores (hermanos, padres, profesor particular) es una constante. La transferencia del conocimiento a situaciones más complejas no es simple ya que el patrón de la misma cambia. Si el estudiante sabe sumar fracciones simples ($\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=$) este conocimiento se bloquea al enfrentarse a un esquema distinto. Si no existe la ayuda de un adulto o de un experto que oriente su actuación, la propuesta del alumno no surge o lo hace de manera limitada (Antes de escribir la fracción… ¿Puedo simplificar?[428]), sus propuestas de solución son más lineales en el sentido que se aplica directamente sin establecer otras relaciones.

El esquema *dialógico* de la maestra continúa, el mismo que permite traer a la clase una serie de contenidos y lenguaje matemáticos que el estudiante conoce. La variedad de alumnos que participan en clase (entre niños que son capaces de reconocer la matemática involucrada de manera inmediata, mediata y los que no), transporta al aula una serie de contenidos, pero además activa en el estudiante los mismos, de manera que les hace pensar en ellos y usarlos (entonces el mcm es su producto). La actitud del experto, en este caso, la docente, valida o reorienta los significados de los mismos (Cuándo los números son PESI – Cuando no tienen nada en común – cuando tienen al uno en común).

El alumno parte de un conocimiento empírico de la situación que se consolida en casos concretos. Estos casos concretos permiten ver en ellos la propuesta matemática de la docente; los casos concretos más complejos, también propuestos por la docente, les permite ampliar el campo de acción de los mismos y su relación con otros conocimientos implicados (la siguiente propuesta involucra inverso multiplicativo que es un tema visto con anterioridad; sin embargo no es fácil que los estudiantes lo transporten al presente de manera inmediata). La idea de la profesora es aplicar otros conocimientos involucrados que hagan más fácil su solución permitiendo una mejor manipulación de los contenidos matemáticos (por ejemplo, en lugar de aplicar producto de extremos y medios, aplicar el inverso multiplicativo). Los casos concretos similares, refuerzan el concepto y lo hacen evidente. En esta propuesta, se busca la manipulación de diferentes contenidos matemáticos de manera espontánea, de forma que los estudiantes puedan recordarlos, relacionarlos con la nueva situación y aplicarlos en la solución de la misma. No obstante, al desarrollar A en la segunda actividad, luego de la explicación del inverso multiplicativo, y expresar que “Toda fracción (denominador) dividida en uno (numerador) me dice que tengo el inverso” y preguntar qué propiedad se aplica en A, los alumnos responden producto de extremos sobre producto de medios; no el inverso multiplicativo que es lo que se ha estado trabajando. Si bien una propuesta concreta permite presentar el conocimiento matemático, y darle comprensión directa al estudiante

---

[428] Simplificar es una acción que los docentes promueven en los estudiantes antes de realizar cualquier operación; sin embargo, es una acción que los estudiantes no toman en cuenta de manera inmediata, mas sí la operación directa.

ya que lo torna más visible, lo que ya se conoce prevalece sobre la nueva situación de forma que se prefiera usar la primera respecto a la segunda; sin embargo, se puede observar que su uso es posterior (el trabajo sobre reconocimiento del denominador común se inició en la sesión pasada; en embargo, en esta se torna más fluido).

La resolución de problemas se da en la medida que los alumnos apliquen el conocimiento a las situaciones propuestas. La maestra no nombra como *problema*, ninguna de las actividades propuestas por lo que no se hace evidente que haya un problema al que los alumnos tengan que enfrentarse. Los alumnos se enfrentan a *cálculos* que deben desarrollar correctamente, aplicando el conocimiento conocido. Desde la definición de problema matemático, este tipo de actividades propuestas por la docente no son consideradas como tal ya que no cumplen las condiciones básicas que requiere la definición real y amplia de problema matemático; de ahí que el proceso de resolución se encamine a la resolución de cálculos matemáticos. Desde la matemática escolar, el problema cumple las mismas funciones que el cálculo.

Sesión 3 / Caso 6

La clase de hoy sigue el mismo patrón que las anteriores. La maestra parte de situaciones intramatemáticas, planteadas a través de problemas bien definidos en sus datos, operaciones e interrogante, y que los estudiantes han resuelto en casa. El problema propone hallar el área sombreada por lo que el planteamiento de solución requiere de un dato numérico específico que el problema no presenta directamente y que hay que hallarlo previamente para poder obtener el dato numérico necesario.

En el proceso de solución, los alumnos siguen el patrón iniciado por la docente en clases anteriores. No brindan directamente la solución, sino que inician la misma con el reconocimiento de los datos del problema. La estrategia planteada por la docente se dirige a resolver un problema similar, más simple; no pregunta por el resultado obtenido[429] sino que transforma el problema percibiendo la dificultad del mismo (cambia el valor de cada lado usando números naturales). Una vez comprobada la participación oportuna de los estudiantes en este problema más simple, la maestra retoma el problema anterior.

Al usar fracciones, los estudiantes manifiestan correctamente lo que se tiene que hacer para hallar el área del cuadrado (multiplico la medida del lado dos veces). La maestra asocia esta forma de proceder (multiplicando) con otra (potencia) de forma que

---

[429] Recuérdese que es un problema planteado para casa, por lo que se espera que los alumnos (al menos la mayoría) lo haya llevado resuelto.

los estudiantes relacionen las mismas y conozcan otra forma de plantear la solución. Asimismo, plantea su solución en una sola propuesta de forma que las dos acciones involucradas (primero hallar el área total y después la cuarta parte) se fusionen. Esto permite integrar otro elemento o símbolo usado en la manipulación operativa de las cantidades: el uso de paréntesis. El uso de lenguaje y conocimiento matemático abarca diferentes frentes, la propuesta de la docente hace evidente su recurrencia y uso constante.

En esta sesión la docente propone, para el tratamiento de un tema nuevo, que sin embargo, ha introducido en la primera parte de la clase (potenciación), una situación extramatemática, a través de un planteamiento directo y bien definido[430]. La propuesta de solución planteada por la docente exige un análisis del problema (¿qué ordena?, ¿cómo?) que le permita comprender la situación y estructurar una propuesta de solución. La representación gráfica intenta facilitar la visualización de lo propuesto no solo de la parte expuesta (un medio) sino de esta en relación al total (estante). Sin embargo, los estudiantes no logran representar y extraer de manera clara el dato requerido.

Si bien el tema de potenciación y radicación se ha trabajado con números naturales, su aplicación a las fracciones no es igual dada la naturaleza de estas. El planteamiento para este tema retoma las situaciones intramatemáticas. La transferencia de conocimiento a situaciones nuevas se da inmediatamente al preguntar qué es mayor: si una fracción al cubo o al cuadrado. En el campo de los naturales, un número elevado al cubo es mayor y este conocimiento lo trasladan al de las fracciones. Los estudiantes saben además que en una fracción cuyo numerador es la unidad, es mayor la que tiene menor denominador (dado que las partes son más grandes). Sin embargo, en el caso de P6A16, su respuesta descontextualiza las cantidades del campo de las fracciones (dieciséis es mayor que ocho); este conocimiento no es fácilmente transportado a la nueva situación, pues prevalece el valor de la potencia independientemente de la base a la que se refiere y de las cantidades independientemente del papel que cumplen (denominador en una fracción). El nuevo conocimiento (potenciación de fracciones) evidencia diferentes respuestas y un bajo nivel de relación de los conocimientos en situaciones que los involucra. Los alumnos consideran un aspecto de la realidad a la vez. Si la docente no lo hace evidente, los alumnos tampoco, al menos de manera inmediata. La profesora

---

[430] Las situaciones bien definidas se corresponden con lo que Noda (2001) indica para los problemas de encontrar y que se corresponden con algunos problemas del ámbito escolar; al negar las condiciones de este, las situaciones restantes las llama problemas de encontrar “mal definidos” en los que sobran datos, faltan datos o no tienen datos. También se habla de problemas bien estructurados para requerirse a los “bien definidos”. Los problemas bien estructurados, según el equipo docente en ABP de la Facultad de Psicología de la Universidad de Murcia indica que este tipo de problemas forma parte de los métodos docentes deductivos o expositivos del ámbito escolar en los que primero la teoría y luego la práctica.

reorienta la discrepancia de respuestas preguntando formas de comprobación que los alumnos conocen y exponen (simplificar, multiplicar en aspa). En cualquiera de los casos son procedimientos que el alumno ha asimilado y expone directamente, basándose en la manipulación de las cantidades y en su comparación interna (“dieciséis es mayor que ocho”, “simplificando”, “multiplicando en aspa”).

El estudiante aprende procedimientos o reglas que es capaz de usar y comprender en base a los procesos seguidos (por ejemplo la multiplicación en aspa), pero no describe en función de las fracciones comparadas (el valor de un octavo es mayor que el valor de un dieciseisavos). El tratamiento es a partir de casos concretos y manipulación simbólica de la situación, estableciendo relaciones entre las cantidades manipuladas. La maestra transmite las reglas de manera directa a través de situaciones concretas y particulares para que estas sean conocidas en contextos óptimos y el estudiante pueda comprenderlas y aplicarlas en situaciones similares (“Si el numerador es uno el denominador es ocho es mayor el que tiene menor denominador”, “cuando elevamos al cuadrado una fracción, se eleva al cuadrado cada elemento…”). A partir de casos concretos que permitan evidenciar la regla o propiedad, la maestra generaliza para todo caso (a/b), incidiendo en el uso adecuado del lenguaje matemático involucrado, ya sea natural u oral como simbólico.

Sesión 4 / Caso 6

La clase propuesta sigue el planteamiento de las anteriores, en el sentido que la docente parte de situaciones intramatemáticas concretas para poder, a partir de su manipulación simbólica, extraer las distintas relaciones y consolidar las propiedades requeridas (“… un medio lo multiplicamos tres veces y un medio lo multiplicamos dos veces” en relación a un medio al cubo y cuadrado, respectivamente); de esta manera al plantear $(1/2)^3.(1/2)^2$, la docente estructura cada una por separado pero integrándolas en una sola operación de forma que los estudiantes puedan visualizar la relación establecida (bases iguales, multiplicadas cinco veces) y asociarla a la multiplicación planteada de potencia de fracciones de igual base.

El carácter *dialógico* de la clase, en la que la maestra pregunta y el estudiante responde, no exime de la guía directa de la maestra hacia lo que busca que conozcan y relacionen los alumnos. No se agota solo en exponer la propiedad sino que busca demostrar porqué es de esa manera en el campo de las fracciones a través de la aplicación de las operaciones. Prevalece en su propuesta el carácter magistral de la misma con ciertos matices dialógicos que permiten una participación directa del estudiante en la secuencia propuesta, la misma que no se altera por las respuestas de los estudiantes dado que estas no la afectan directamente puesto que el control del conocimiento de la docente reorienta la participación del estudiante.

Asimismo, la maestra aprovecha cualquier situación para aplicar distintas propiedades ("si no pongo el paréntesis, ¿cómo es la expresión y cuál es el resultado?") lo que permite transportar la mayor cantidad de conocimiento matemático implicado y aplicarlo en una sola situación.

Se percibe, por parte de los estudiantes, confusión entre los elementos de la operación; que sin embargo, no afecta el desarrollo de la sesión a partir de la guía de la docente ya que es la maestra quien controla el conocimiento que se va a aplicar. El alumno participa, principalmente, al ejecutar las operaciones o al recordar alguna propiedad que sin embargo no siempre domina. El ejemplo de potencia de potencia no es el más apropiado puesto que la suma y la multiplicación da el mismo resultado; los alumnos aparentemente intentan adivinar la operación implicada; no obstante, la profesora, en este caso, les hace recordar cuando sucedía una acción que previamente se había trabajado (sumar exponentes cuando la operación implicaba multiplicar dos fracciones iguales elevadas a diferentes potencias) de forma que puedan hacer evidente la diferencia entre una operación (multiplicación de fracciones) y otra (potencia de potencia de una fracción). Sin embargo, no hay tiempo para más y la clase finaliza.

La manipulación simbólica permite operar con los números, aplicar lo conocido pero inhibe el carácter significativo de la operación cuando el conocimiento es nuevo; es decir, puede resultar menos frecuente darse cuenta del error cuando el trabajo se da de manera simbólica que de manera gráfica o contextual.

La actividad de *resolución de problemas* aparece en la medida que los estudiantes perciban un problema en la situación planteada de forma que intenten pensar en ello y en la solución al mismo. No obstante, la definición de problema matemático está orientada hacia una definición tradicional en la que se toma en cuenta el proceso de resolución (situación en la que tienes que aplicar unas operaciones) más que a una definición que involucre al resolutor y a la actividad creativa en su resolución. Si bien se percibe que la maestra toma en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, estos no los aplican personalmente en un proceso propio de resolución. Para Fernández Bravo (2006) "la función del profesor no es la de transmitir la información que posee, sino la de provocar su realización. Haciendo uso del conocimiento que se tiene se elaborarán actividades cuya finalidad esté ligada, más a generar ideas, que a escuchar contenidos... El trabajo del alumno consiste en crear las preguntas que, a partir del enunciado, se corresponden con todas y cada una de las distintas soluciones”

Sesión 5 / Caso 6

La propuesta de hoy se diferencia de las anteriores ya que la docente parte de una situación parcialmente desarrollada a partir de la cual intenta que construyan (o desarrollen) otra. No obstante, se parte de una situación intramatemática, como en la mayoría de casos anteriores. El carácter dialógico de la sesión continúa a través de preguntas directas que permiten que la docente desarrolle paso a paso el proceso que lleva a resolver la operación y aplicar o hacer referencia a las reglas o propiedades implicadas. Los alumnos participan indirectamente en la misma, pues es la docente quien hace explícito el desarrollo de la misma. La profesora parte de un conocimiento previo (incluso trabajado en la clase anterior) que conecta inmediatamente con el nuevo. Ambos (potenciación y radicación) no son conocimientos totalmente nuevos para los alumnos y la maestra recurre a ello para tratarlos en otro campo de números: las fracciones: una potencia es igual a la raíz de la misma (de su resultado). La profesora espera que los alumnos establezcan la relación y sean capaces de expresarla, además de completarla siendo capaces, a través de esta relación, de hallar la raíz de una fracción (y su radicando). No obstante, las respuestas que la maestra espera de los alumnos no son inmediatas. Efectivamente, los alumnos recuerdan el tema y hacen explícito aquello que recuerdan: es una raíz cuadrada. Acto seguido, la profesora explica lo que ha plasmado en la pizarra para lo cual recurre a otros ejemplos que desarrolla a media que va explicando. Los alumnos escuchan la explicación de la maestra y son capaces de aplicarlo a situaciones nuevas (para aclarar, no todos los alumnos lo hacen), aplican las reglas y obtienen resultados correctos.

La profesora observa que no todos los alumnos siguen los planteamientos de los compañeros ya que involucra situaciones nuevas (raíz cuadrada de cuatro novenos elevado al cubo) y plantea la misma situación con números simples. Los alumnos en cuestión expresan lo que significa la expresión y lo que hay que hacer en ese caso. La profesora, posteriormente, plantea cómo se resuelve. La profesora cuestiona diferentes situaciones, escucha las apreciaciones de los estudiantes (si es que se dan) y procede a explicar. A partir de ello, la profesora propone más situaciones extramatemáticas en la que involucra raíces y potencias para que los alumnos resuelvan. Lo que es complejo, lo resuelve la profesora.

El planteamiento de clase propuesto por la docente se centra en la exposición del conocimiento matemático, de tal manera que los alumnos observen cómo se aplica el mismo en casos o contextos diferentes. A través de la propuesta, los alumnos participan de la actividad aplicando el mismo en situaciones concretas. La finalidad es que los estudiantes puedan resolver una situación aplicando las reglas conocidas o conocer nuevas y más fáciles caminos que recorrer aplicando el conocimiento matemático.

La clase propuesta por la docente, es una actividad de resolución de problemas en la que inicialmente es la propia docente quien los propone (¿qué *problema* percibe la maestra?), explica (la expresión involucra fracciones) y resuelve (si me piden encontrar la $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ sería $\frac{2}{3}$ porque dos por dos…) , lo que no da posibilidad al alumno de identificar la situación como problema (si es que lo fuere) sino como una situación (u operación) inconclusa que se resolverá con la ayuda (o aporte) de la profesora; el alumno frente a este hecho concreto observa una expresión matemática, la describe parcialmente, pero no tiene tiempo de pensar cómo se resuelve ya que la labor de la docente es proporcionarle la manera de hacerlo.. Las propiedades que la maestra da a conocer a los alumnos, le permiten seguir los pasos adecuados en la resolución de los casos expuestos. El planteamiento posterior de situaciones son *problemas matemáticos* (comúnmente llamados ejercicios) en cuanto se resuelven operando, aplicando conocimiento matemático; no necesariamente porque sea una situación en la que el alumno sea quien identifique el problema cuya solución no sea inmediatamente accesible dado que no cuenta con un algoritmo que la resuelva inmediatamente, aspectos que se consideran esenciales en la definición de problema matemático.

Sesión 6 / Caso 6

En la sesión de hoy, la maestra propone una situación extramatemática en la que involucra el tema que se desarrollará en la clase. La maestra advierte que no es un tema nuevo, pero que lo verán con mayor profundidad. A través de la propuesta de la docente, los alumnos hacen uso de sus conocimientos previos para comparar números decimales, estos conocimientos les ayuda a expresar cuándo un número es mayor que otro; sin embargo, no todos los alumnos que expusieron tienen claro este tema; algunos comparan la parte decimal como si fueran naturales. Según Martín Socas (Citado por Piñero, 2011), “la mayoría de los autores consideran que los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales que los alumnos emplean en la resolución de la situación problemática y son consecuencia de las experiencias anteriores en Matemáticas" (Socas, 2007). Según Castro (2001, p.325, 326.) "los números naturales son un obstáculo para el aprendizaje de los decimales. Durante la etapa del aprendizaje de los decimales muchos niños suelen extender su conocimiento de los naturales y aplicarlo de manera equivocada a los decimales, predominando el conocimiento ya consolidado del número natural sobre el conocimiento en construcción de los decimales....". Si bien el tratamiento de los números decimales, se inicia años anteriores y los alumnos son capaces de reconocerlos como tales, no todos los alumnos de quinto logran niveles óptimos de comparación de los mismos, los mismos que disminuyen a medida que los números decimales se vuelven más complejos al incluir varias cifras decimales. El contacto con este tipo de decimales (que incluyan más de cinco cifras) no es usual pero sí con aquellos que involucran de una a cuatro cifras decimales, por lo que es importante reconocer correctamente el valor de ellas.

El planteamiento de la maestra sigue una línea: proporcionar directamente a los alumnos los conocimientos necesarios para poder responder con acierto cualquier cuestión que los involucre. En ese proceso, involucra otros conocimientos que va introduciendo (por ejemplo, la expresión decimal de un número entero o que 1,5=150). Por parte hay un conocimiento que la maestra hace explícito y en el cual índice y otro, transversales, que se genera a partir de las intervenciones de los alumnos. Para una mejor comparación de los números decimales, y de lo que el alumno presenta, la maestra expone una "forma de…" En el caso de la comparación de números decimales: transformarlos a números naturales y leerlos como tales. Para la lectura de decimales complejos, la estrategia es similar; brindar a los alumnos la forma de hacerlo, de esta manera aplica lo aprendido en situaciones *nuevas*. Hoy en día (y desde hace varios años) se aboga por una metodología activa en la que el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje. Si bien la maestra busca constantemente la participación de los alumnos en el proceso de enseñanza – aprendizaje propuesto a través de su intervención en clase, es la maestra quien genera y dirige linealmente dicha participación en el sentido que los alumnos por lo general actúan de acuerdo al camino trazado por la maestra, un camino que es corto y que solo busca que los estudiantes recuerden cierta información, la apliquen directamente y esporádicamente, justifiquen por qué… sin que esta pregunta tenga un tratamiento más a fondo. La lección magistral transmite conocimientos y activa procesos cognitivos en el estudiante que sin embargo, no siempre se hacen evidentes en su proceso de enseñanza – aprendizaje. Hoy en día, las diferentes propuestas metodológicas abogan por un cambio de metodología que trascienda la lección magistral y conduzca a hacer más evidente y significativa la participación de los alumnos. En un estudio realizado por Pachano y Terán (SF) con alumnos de sexto grado "generó resultados altamente positivos para la maestra en su práctica pedagógica, al actuar como mediadora de aprendizajes significativos y, para los niños, al brindársele la oportunidad de construir sus propios aprendizajes a partir del trabajo cooperativo". Jean Piaget dijo "*El principal objetivo de la educación consiste en formar personas que sean capaces de hacer cosas nuevas y no simplemente de repetir lo que otras generaciones han realizado".* Bajo esta premisa, observamos que los alumnos repiten lo que la maestra ha realizado, de forma. Algunos harán eso únicamente. En palabras de Paul Lockhart (Pérez, 2008):

> Si privas a los alumnos de tener la oportunidad de participar en esta actividad —de proponer problemas, hacer sus propias conjeturas y descubrimientos, de estar equivocados, de estar creativamente frustrados, de tener una inspiración, y de improvisar sus propias explicaciones y demostraciones— les estás privando de las matemáticas en sí mismas. Así que no, no estoy protestando por la presencia de hechos y fórmulas en las clases de matemáticas, estoy protestando por la falta de matemáticas en las clases de matemáticas.

Los alumnos cometerán errores en ese proceso de enseñanza – aprendizaje, aun cuando el conocimiento matemático nuevo se haga explícito. No tratar el error desde quien lo comete conduce a no saber salir del mismo.

Memos interpretativos. Síntesis de las sesiones

a) Las actividades en las clases de matemáticas

Toda sesión de clase se caracteriza por la aplicación y desarrollo de actividades. El proceso de enseñanza – aprendizaje como tal implica acción. Esta acción depende de las actividades propuestas para poner en marcha dicho proceso. Las actividades que forman parte del proceso de enseñanza – aprendizaje pueden enfocarse en el profesor, en el alumno o en ambos. Una actividad en el proceso escolar se conoce como una actividad de enseñanza – aprendizaje. Villalobos (2003) citando a Cooper (1999), Richards y Rodgers (1992) la define como un procedimiento que se realiza en el aula para facilitar el conocimiento de los estudiantes. Sanz (2003), Verdú y Valcárcel (2005), Grandgenett, (2011) establecen diferentes criterios para clasificarlas.

Las sesiones observadas se caracterizan por las actividades propuestas. En cada sesión siempre se observa que "alguien" hace "algo": o el profesor explica, resuelve, pregunta (enfocada en el profesor) o los estudiantes exponen, resuelven, plantean cuestiones (enfocada en el alumno). En toda sesión hay al menos una actividad que permite que alguien actúe. La cantidad y calidad de estas depende de la apertura de la misma en la propuesta planteada. Una actividad puede agotarse en una sola acción o generar otras actividades.

En las sesiones observadas se pueden advertir actividades propuestas por el docente y actividades propuestas por los estudiantes; actividades que inician un proceso y actividades derivadas de aquellas; actividades que buscan introducir, descubrir, construir, aplicar, relacionar conocimiento como tal o resolver problemas que los involucran. En el primer caso dependen de uno de los agentes del proceso enseñanza – aprendizaje: profesor o alumno; en el segundo caso, las actividades pueden ser planificadas con anterioridad o surgir en el proceso de desarrollo de la anterior (derivadas). Las actividades que inician una sesión por lo general inician un proceso, son planteadas por el docente y buscan cualquiera de los objetivos antes mencionados. Las actividades derivadas pueden desencadenar en una actividad que inicie un proceso.

En las sesiones observadas las actividades son propuestas por el o la docente. Es él o ella quien planifica de antemano la actuación del alumno, aquella que, espera, le permita hacerse o ampliar un conocimiento. En cualquiera de ellas la conexión la da el diálogo que entabla el profesor con los estudiantes, un diálogo que por lo general se circunscribe a plantear preguntas que permiten que los estudiantes exploren sus conocimientos previos y los apliquen directamente. A partir de ello, el o la docente construirá el nuevo conocimiento o lo consolidará.

La actividad de resolución de problemas es explícita. En primer lugar, se observa una distinción entre ejercicio, problema, situación. No todos los docentes hacen explícita esta distinción. Los primeros están asociados a cálculos directos (operaciones aritméticas). Los problemas, se refieren a cálculos a partir de situaciones que los involucran y que permiten relacionar la matemática con las situaciones cotidianas simples (pueden ser de contexto intra o extra matemático). Las situaciones pueden tener un carácter más amplio en algunos casos (Caso 1) y en otros se confunden con los problemas escolares (en el resto de docentes). Estos problemas aparecen como actividades que inician un proceso, como aquellas derivadas de las anteriores. Su objetivo está en aplicar el conocimiento aprendido o ser medio para desarrollar un tema (prevalece el primero). Cuando se busca aplicar un conocimiento, los alumnos conocen previamente el mismo, de tal manera que al aplicarlo puedan comprobar su eficacia. La propuesta de diferentes soluciones a un problema es esporádica; se da en algunos casos. Si la propuesta de problema es para la *construcción* de un nuevo conocimiento, su resolución recae en la responsabilidad del docente. No obstante, puede, a través del diálogo, requerir la intervención del alumno ya sea para hilar el proceso seguido o para realizar tareas concretas.

Los problemas se formulan directamente. Por lo general son propuestas por el o la docente de manera explícita o a través del libro de texto. En algunos casos, los proponen los estudiantes a solicitud del o la docente. En este caso, su estructura es similar al planteado por el o la docente: son directos y con la información precisa.

La actividad del alumno frente a la resolución de problemas no es espontánea sino casi totalmente dirigida por el docente (a través del diálogo que administra). Los docentes buscan que los alumnos apliquen ciertos conocimientos y se espera que a partir de ellos resuelvan los problemas. La actividad de resolución de problemas es individual, cada alumno genera su solución la que siempre es única. El intercambio de soluciones es esporádico, mas no la explicación de la misma. Los profesores solicitan a los estudiantes explicar su solución, comunicarla a toda la clase. Esa comunicación es dirigida por el docente quien conecta la actividad (de resolución) con el alumno y con el grupo. Quien corrige suele ser el docente. La corrección del compañero es esporádica.

Las siguientes tablas muestran las actividades propuestas por cada uno de los docentes en las seis sesiones analizadas. En el cuadro se observa actividades que inician un proceso y otras que se derivan de la anterior. Las actividades derivadas surgen para explicar algún proceso (ya sea por parte del alumno o por parte del o la docente) o comprender una realidad; para transformar una actividad en otra menos compleja, para contextualizar alguna situación matemática que permita una mejor comprensión del tema tratado o para desagregar información que surge a partir de aquella, para aplicar un conocimiento nuevo en situaciones nuevas similares.

Caso 1	Actividad que inicia un proceso	Actividad derivada 1	Actividad derivada 2	Actividad derivada 3
Sesión 1/Caso 1	El docente hace un repaso de la clase anterior sobre las fracciones (trabajo del docente)	El docente pregunta por cada interpretación y ejemplos de las mismas (diálogo docente – alumno)		
	A continuación se les propone una hoja de actividades para que los alumnos resuelvan (Trabajo del alumno)	El docente pide a los alumnos que se centren en el primer ejercicio y lean lo que dice (trabajo individual de los alumnos).	El docente cuestiona sobre lo observado en la ficha de trabajo (diálogo docente – alumnos)	
		El docente propone hacer la siguiente actividad de la ficha (trabajo individual del alumno)	El docente propone explicar el trabajo realizado (diálogo docente – alumnos)	El docente pregunta a la clase… si da lo mismo ‘cuadrados que triángulos’ (diálogo docente – alumnos)
	El docente retoma las tres interpretaciones de fracción y les pide que piensen situaciones en las que la fracción (como reparto, como división) esté incluida (trabajo del alumno individual)			
	El docente deja como tarea proponer situaciones en las que se aplique la fracción			

	como operador (trabajo individual del alumno).			
Sesión 2/Caso 1	El docente empieza la clase recapitulando los tres significados de fracciones (trabajo del docente)	Intervención de los alumnos (trabajo espontáneo del alumno. Diálogo docente – alumno)	El docente pregunta si es necesario poner los paréntesis (diálogo docente – alumno)	
			El docente les plantea lo siguiente: “si quiero decir una cantidad, por ejemplo trece, ¿sería mejor así (escribe “13”) o de esta manera (señala la fracción de un número)?” (diálogo docente – alumno)	El docente pregunta “*qué significa pagar más*” y “*cuál es la diferencia entre precio y coste*”. (diálogo docente – alumno)
	El docente cuestiona sobre las situaciones en las que la idea de fracción como operador esté involucrada (trabajo individual del alumno. Diálogo docente – alumno)	El docente cuestiona sobre las expresiones porcentuales en diferentes contextos (diálogo docente – alumno)	Relación porcentaje – fracción (Actividad del docente. Diálogo docente – alumno)	Identificar situaciones de fracción como operador en la prensa (actividad el alumno. Diálogo docente – alumno).
Sesión 3/Caso 1	El docente retoma el tema de las rebajas (Actividad del docente)	El docente pregunta qué son las rebajas (Diálogo docente – alumnos).	El docente pide que observen las tres representaciones de una misma idea… acto seguido pregunta otra manera de expresar “la mitad” (Trabajo individual del alumno. Diálogo docente – alumno).	El docente pregunta por la relación entre dos fracciones (Diálogo docente – alumnos).
	El docente pregunta por los porcentajes (diálogo docente – alumno).			

	El docente pregunta sobre las rebajas y diferentes formas de expresarlas (diálogo docente – alumnos).	El docente pregunta por el comportamiento de la gente durante este periodo (rebajas) (Diálogo docente –alumnos).		
Sesión 4/Caso 1	Recapitulación del tema “rebajas” (Actividad del docente. Diálogo docente – alumnos).	Cuestionamiento sobre si lo que se rebaja tiene que ser caro (Diálogo docente – alumnos, alumnos – alumnos).		
	El docente pregunta por otras formas de expresar las rebajas (actividad del alumno. Diálogo docente – alumnos).	El docente pregunta “¿qué significa eso de 50%?”. (Diálogo docente – alumno).	El docente propone el 25% de 80 (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).	El docente propone 37% de 80 (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).
	Recapitulación fracción como operador y su relación con el porcentaje (Actividad del docente. Participación esporádica de un alumno).			
Sesión 5/Caso 1	Cuestionamiento sobre qué hacer para saber que se ha rebajado un producto (Diálogo docente – alumnos).			
	Propuesta de situación para hallar diferentes porcentajes (Trabajo personal del alumno)	Explicación del trabajo realizado (Diálogo docente – alumnos. Trabajo del alumno).	El docente retoma el significado de 50% (mitad) y pregunta si hay otra manera de escribirlo (diálogo docente alumnos).	
	El docente propone otras situaciones aunque ahora conservando un mismo precio:	Explicación del trabajo realizado (Actividad del		

	70 €, variando el porcentaje (trabajo del alumno).	alumno. Diálogo docente – alumnos).		
Sesión 6/Caso 1	La clase empieza con un repaso de todo lo que se ha visto sobre porcentajes y su relación con las fracciones (Trabajo del docente).	Cuestionamiento sobre ¿qué es el porcentaje de ‘algo’? (Diálogo docente – alumnos).	Cuestionamiento sobre en qué otras situaciones han visto el % (Actividad del alumno. Diálogo docente – alumno).	Consolidación de ideas (Actividad del docente).
	El docente plantea la siguiente interrogante: ¿el cincuenta por ciento de sesenta euros? (Actividad del alumno. Diálogo docente – alumnos).	El docente plantea la siguiente interrogante: ¿el veinticinco por ciento de sesenta? (Actividad del alumno. Diálogo docente – alumnos).		
	El docente propone hallar el 50% de tres cantidades (Actividad del alumno. Diálogo docente – alumno).			
	El docente propone hallar tres porcentajes distintos de tres cantidades diferentes cuyo resultado es la misma cantidad (Actividad del alumno. Diálogo docente – alumnos).	El docente pregunta a la clase “qué nos manda a hacer 1/10 como operador” (diálogo docente – alumno).	Para sintetizar, el docente pregunta de qué depende el precio final (diálogo docente – alumnos).	
	El docente les propone una ficha de trabajo para su casa.			

Caso 2	Actividad que inicia un proceso	Actividad derivada 1	Actividad derivada 2	Actividad derivada 3
Sesión 1/Caso 2	Revisión de *ejercicios* del libro sobre equivalencia de fracciones (Actividad del alumno. Participación de la docente).			
	Introducción/exposición del tema (Actividad de la docente)	Resolución de *situación ficticia* (Planteamiento de la docente. Actividad del alumno. Participación del alumno. Participación de la docente. Diálogo docente - alumnos)	Sistematización (Actividad de la docente. Diálogo docente – alumnos)	
Sesión 2/Caso 2	Repaso de la sesión anterior (Actividad de la docente)	Luego la profesora facilita algunas situaciones "de la vida diaria" para que los alumnos indiquen en términos de fracción (Actividad del alumno)		
	Planteamiento de situación extramatemática en la que interviene la idea de fracción como operador (Planteamiento de la docente. Participación de los alumnos. Actividad del alumno. Participación de la docente).			

	La profesora propone otro ejemplo: “Un libro tiene 75 páginas y leí los 2/5 del libro, ¿cuánto leí?” (Actividad del alumno. Participación de la docente).		
	La profesora propone una hoja de Trabajo para el alumno (Trabajo individual del alumno. Participación de la docente).	Análisis de la actividad (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).	Explicación/Revisión de la actividad (Actividad de la docente)
	La profesora les propone a sus alumnos que inventen una situación en la que se aplique lo que han visto (Trabajo individual del alumno).	Resolución de la situación y explicación (Trabajo del alumno).	
Sesión 3/Caso 2	Resolución de actividades del libro propuestas para la casa (Trabajo del alumno. Participación de la docente).		
	La profesora le propone un *problema* de los que se encuentran en el libro y que designó para resolver en casa (Trabajo del alumno. Participación de la docente).		
	Representación gráfica y simbólica de una suma y resta	Cuestionamiento sobre la suma y resta de fracciones	

	de fracciones homogéneas (Trabajo de la docente)	homogéneas (Participación del alumno).	
Sesión 4/Caso 2	Cuestionamiento sobre una suma de fracciones heterogéneas (Participación del alumno. Diálogo docente – alumno).	Propuesta de *truco* (estrategia) para resolver suma de fracciones heterogéneas (Trabajo de la docente. Participación de los alumnos).	Relación entre fracciones equivalentes de dos fracciones distintas (Trabajo del alumno. Participación de la docente. Participación del alumno).
	La profesora propone resolver: $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$ (Trabajo del alumno. Participación de la docente).	Propuesta de estrategia para hallar rápidamente las fracciones homogéneas equivalentes (Trabajo de la docente. Participación del alumno).	
	La profesora propone resolver la siguiente suma: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=$ (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno).		
	Planteamiento de operaciones por parte de los alumnos (Propuesta de la docente. Trabajo del alumno).	Resolución de operaciones con fracciones (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno).	
	Ejercicios para casa		
Sesión 5/Caso 2	Revisión de tarea (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno).		

	Resolución de problemas del libro (Trabajo del alumno. Participación de la docente).		
	Resolución de suma y resta de fracciones heterogéneas (Trabajo del alumno. Participación de la docente).		
	Propuesta de hoja de trabajo para el alumno en la que tienen que interpretar y graficar una multiplicación de fracciones (Trabajo del alumno. Participación de la docente. Diálogo docente – alumnos).	Representación gráfica de un medio un cuarto y tres cuartos (Propuesta de la docente. Trabajo del alumno).	Representación gráfica de la fracción (Trabajo de la docente).
Sesión 6/Caso 2	Revisión de la actividad anterior (Trabajo de los alumnos. Participación de la docente).	Representación/explicación de una multiplicación de fracciones (Trabajo de la docente. Participación de los alumnos).	
	Representación gráfica de dos cuartos de tres sextos (Trabajo del alumno. Participación de la docente).	Resumen (Trabajo de la docente. Participación de los alumnos).	
	Resolución de operaciones con fracciones (Trabajo del alumno. Participación de la docente).		
	Propuesta de hoja de trabajo sobre las rebajas y su relación		

con fracciones (Trabajo individual del alumno).

Caso 3	Actividad que inicia un proceso	Actividad derivada 1	Actividad derivada 2	Actividad derivada 3
Sesión 1/Caso 3	Propuesta de *actividades* del libro de texto (Trabajo del alumno).	Revisión de las actividades del libro de texto (Diálogo docente – alumno).	Variación de actividades (Propuesta de la docente. Participación del alumno).	
Sesión 2/Caso 3	Explicación sobre el uso del transportador (Trabajo de la docente. Atención/observación de los alumnos)	Construcción de un ángulo (Trabajo del alumno. Interacción docente – alumno).		
	Cuestionamiento sobre la bisectriz (Trabajo del alumno. Participación de la docente)	Explicación sobre la manera de construir la bisectriz (Trabajo de la docente. Atención/observación de los alumnos).	Construcción de un ángulo (Trabajo del alumno. Interacción docente – alumno).	
	Cuestionamiento sobre la mediatriz (Trabajo del alumno. Participación de la docente)	Explicación sobre la mediatriz (Trabajo de la docente)	Construcción de una mediatriz (Trabajo de la docente)	Interrogación sobre segmentos y perpendiculares (Diálogo docente – alumnos).
	Propuesta de ejercicios para la casa (trabajo individual del alumno).			
Sesión 3/Caso 3	Revisión y resolución de ejercicios del libro de texto (trabajo del alumno. Trabajo de la docente).	Explicación/Corrección de la resolución (Trabajo del alumno. Participación de la docente. Diálogo docente – alumno).		

	Propuesta de *actividades* del libro de texto.			
Sesión 4/Caso 3	Revisión y propuesta de ejercicios del libro de texto (trabajo individual del alumno. Trabajo de la docente).	Exposición de la resolución de la actividad (trabajo de la docente).		
Sesión 5/Caso 3	Corrección y ejecución de actividades del libro de texto (Trabajo del alumno. Trabajo de la docente).	Revisión de problemas (Trabajo dirigido observadora – alumna)		
Sesión 6/Caso 3	Lectura de texto (Trabajo del alumno)	Interpretación del texto (Diálogo docente – alumnos).	Ubicación temporal (Diálogo docente – alumnos)	Relación año – siglo/escritura de siglo (diálogo docente – alumnos)
Sesión 7/Caso 3	Repaso de la sesión anterior (Trabajo de la docente. Participación de los alumnos).	Ubicación temporal (Diálogo docente – alumnos)	Explicación de la ubicación temporal/estructuración de una línea de tiempo (Trabajo de la docente. Participación del alumno)	Construcción de la línea de tiempo (Diálogo docente – alumnos).
	Asociación imagen – texto (Trabajo del alumno. Participación de la docente).			

Caso 4	Actividad que inicia un proceso	Actividad derivada 1	Actividad derivada 2	Actividad derivada 3	Actividad derivada 4
Sesión 1/Caso 4	Interrogación sobre lo que se puede hacer con una hoja de papel (Trabajo de los alumnos. Diálogo docente – alumnos).	Situación problemática: representar en una hoja tres partes iguales (trabajo individual del alumno)	Revisión del trabajo (Participación del alumno. Diálogo docente – alumnos)	Hacer un doblez más a la hoja (trabajo del alumno) Pintar una parte de la hoja dividida (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos) Análisis de situación problemática (diálogo docente – alumno)	
Sesión 2/Caso 4	Cuestionamiento sobre por qué 1/7 de 21 es igual a 3 (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos). Hallar directamente la fracción indicada de tres números específicos (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).				
Sesión 3/Caso 4	Dividir una unidad y pintar fracciones de ella (Trabajo del alumno).	Representar en otra unidad en trabajo anterior (Trabajo del alumno)	Comparación de fracciones (trabajo de los alumnos. Diálogo docente – alumno).		

	Representar gráficamente un número mixto (trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Interpretación del trabajo realizado (Diálogo docente – alumnos).	Resolución de situación en contexto extramatemático (planteamiento de la docente. Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).	Graficar 12/5 (trabajo del alumno).	Resolución de situación en contexto extramatemático (Trabajo del alumno. Participación de la docente)
				Si es una pizza y está divida en 12 (propuesta de la alumna)	
	Resolución de situación en contexto extramatemático (Trabajo del alumno)	Interpretación de gráficos realizados (Diálogo docente – alumno).			
Sesión 4/Caso 4	Análisis de situación gráfica contextualizada de manera extramatemática (Trabajo del alumno. Diálogo docente - alumno)	Interpretación de una suma de fracciones heterogéneas (Diálogo docente – alumno)	Transferir al cuaderno el trabajo realizado (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)		
	Resolución de suma de fracciones heterogéneas (trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)				
	Resumen de la clase (Trabajo de la docente).				

Sesión 5/Caso 4	Corrección de *problemas* propuestos para casa (trabajo del alumno. Participación de la docente).			
	Planteamiento de situación: "¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta?" (Planteamiento de la docente. Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).	Interpretación de operación (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Contextualización de expresión matemática (planteamiento de la docente. Diálogo docente – alumnos)	
	Resumen/consolidación de la clase (Diálogo docente – alumnos).	Resolver división de fracciones (Trabajo del alumno. Diálogo docente - alumnos)		
Sesión 6/Caso 4	Planteamiento de problema sobre fracciones (planteamiento de la docente. Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).	Transformación de la situación (planteamiento de la docente. Diálogo docente – alumnos).	Análisis e interpretación de divisiones entre decimales (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno).	Síntesis de la actividad inicial (Trabajo de la docente. Participación de los alumnos).
	Planteamiento de situaciones sobre fracciones por parte de los alumnos (propuesta de la docente. Trabajo de los alumnos. Diálogo			

docente – alumnos – alumnos).

Resolución de situación (planteamiento de la docente. Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).

Caso 5	Actividad que inicia un proceso	Actividad derivada 1	Actividad derivada 2	Actividad derivada 3	Actividad derivada 4	Actividad derivada 5
Sesión 1/Caso 5	Representación de fracciones en una hoja (Trabajo del alumno. Diálogo docente - alumnos)	Comparación gráfica de fracciones (Trabajo alumnos. Diálogo docente – alumnos).	Comparación simbólica de fracciones (Trabajo alumnos. Diálogo docente –alumnos).	Contextualización de fracciones a situaciones extrametmáticas (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos).	Expresar otras formas de comparar fracciones (Diálogo docente – alumnos. Trabajo del alumno).	Hallar el denominador común de un par de fracciones heterogéneas (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)
	Propuesta de ejemplos por parte de alumnos (propuesta de la docente. Trabajo del alumno)	Propuesta de ejemplos por parte de la docente (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Desarrollo de ejercicios del libro de texto (trabajo de los alumnos. Diálogo docente – alumnos)			
Sesión 2/Caso 5	Interpretación de un grupo de fracciones (en la que la mayoría son equivalentes (Trabajo de los alumnos. Diálogo docente – alumnos)	Propuesta de estrategia (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)	Simplificar 180/270 (trabajo del alumno. Participación de la docente).	Simplificar 60/72		
	Conversión de fracción a mixto (Trabajo de los alumnos)	Consolidación (trabajo de la docente)				
Sesión 3/Caso 5	Explicación de fracciones equivalentes (Trabajo de la docente)					

	Hallar fracciones equivalentes a cinco tercios (trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).	Pensar si dos fracciones equivalentes a una tercera son equivalentes entre sí (trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos)	Hallar fracciones equivalentes a otra fracción
	Resolver actividades del libro sobre suma y resta de fracciones homogéneas (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos)		
Sesión 4/Caso 5	Indicar cómo se halla el área de las figuras geométricas (Diálogo docente – alumnos)		
	Hallar el área de figuras compuestas 1 (Trabajo alumno. Diálogo docente – alumnos).		
	Hallar el área de figuras compuestas 2 (Trabajo alumno. Diálogo docente – alumnos).		
Sesión 5/Caso 5	Resolución de problemas sobre áreas de figuras compuestas 1 (Trabajo del		

	alumno. Diálogo docente – alumnos).		
	Resolución de problemas sobre áreas de figuras compuestas 2 (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).		
	Resolución de problemas sobre áreas de figuras compuestas 3 (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).		
	Resolución de problemas sobre áreas de figuras compuestas 4 (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos).		
Sesión 6/Caso 5	Interpretación de una ecuación (propuesta de la docente. Diálogo docente – alumnos).	Traducción a una situación extramatemática (propuesta de la docente. Diálogo docente – alumnos)	Explicación de la solución a la ecuación (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)
	Planteamiento/traducción en ecuación de situaciones por parte de los alumnos (propuesta de la docente. Diálogo docente – alumno).		

Propuesta de resolución de ejercicios del folleto de actividades (Actividad individual del alumno)

Caso 6	Actividad que inicia un proceso	Actividad derivada 1	Actividad derivada 2	Actividad derivada 3
Sesión 1/Caso 6	Descripción de un cuadrado (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Hallar el perímetro de un cuadrado (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Descripción/interpretación de una multiplicación por fracción (Trabajo de la docente).	
	Descripción de un rectángulo (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Hallar el perímetro de un rectángulo (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Manipulación/análisis de operaciones con fracciones (Diálogo docente – alumnos).	Resolver $2+\frac{5}{4}$ (trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos)
	Hallar el perímetro de un hexágono cuya medida del lado se expresa en fracción (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)	Hallar el perímetro de un hexágono cuyo lado mide una cantidad entera (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumno)		
Sesión 2/Caso 6	Resolución de operaciones propuestas para casa 1 (Diálogo docente – alumnos)			
	Resolución de operaciones propuestas para casa 2 (Diálogo docente – alumnos)	Explicación del inverso multiplicativo (Trabajo docente. Diálogo docente – alumnos).		
Sesión 3/Caso 6	Revisión de tarea asignada sobre áreas de figuras en las que intervienen medidas expresadas en fracciones 1 (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumno)	Área de la figura con medidas expresadas en números enteros (trabajo de la docente. Diálogo docente – alumno)		

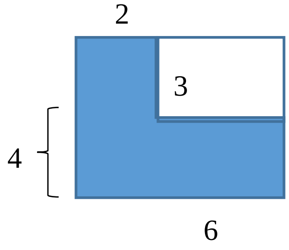
	Revisión de tarea asignada sobre áreas de figuras en las que intervienen medidas expresadas en fracciones 2 (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumno)			
	Propuesta de situación que involucra una multiplicación de fracciones (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)	Representación gráfica de la situación (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)	Comparación entre $\left(\frac{1}{2}\right)^3 o \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)	Sistematización (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)
	Resolución de una multiplicación de fracciones elevada a un exponente (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)	Resolución de una multiplicación de dos fracciones cada una elevada a un exponente distinto (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos).		
Sesión 4/Caso 6	Continuación: Resolución de una multiplicación de fracciones elevada a un exponente (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)			
	Uso de paréntesis en una situación de potencia (Diálogo docente – estudiantes).	Resolución de la expresión (diálogo docente – estudiantes).		
	Solución de una potencia de potencia (Diálogo docente – alumnos)			

Sesión 5/Caso 6	Relación entre potenciación y radicación: caso aplicado a las fracciones (Diálogo docente – alumnos).	Encontrar $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ (trabajo docente)	Hallar $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ (trabajo alumnos)	
	Hallar $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^{3}} =$ (Trabajo alumnos).	Resolver cuánto es $\sqrt{4^{3}}$ (trabajo alumnos. Diálogo docente – alumnos)	Explicación de lo anterior (Trabajo de la docente).	
	Hallar: $A=\sqrt{\frac{9}{16}}\,;\ B=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\,;\ \sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}}$ (Trabajo docente. Diálogo docente – alumnos)	Hallar $\sqrt[4]{3^{4}}$ (Trabajo alumnos. Diálogo docente – alumnos).	¿Qué pensaríamos si tengo esta expresión: $\sqrt[4]{5^{8}} =$ (Trabajo de los alumnos, Diálogo docente – alumno)	
	Calcular la medida del lado de la siguiente figura (trabajo del alumno)	Propuesta de solución distinta (Trabajo de la docente).		
Sesión 6/Caso 6	Propuesta de situación extramatemática (Trabajo de los alumnos. Diálogo docente – alumno)	Método para comparar fracciones (Trabajo de la docente. Diálogo docente – alumnos)	Decimales en diferentes contextos (Trabajo del alumno. Diálogo docente – alumnos)	Explicación de los decimales (Trabajo de la docente)
	Forma de leer decimales (Trabajo de la docente)	Lectura de decimales (Trabajo de los alumnos)		

b) Los problemas matemáticos en la clase de matemáticas

La actividad de *resolución de problemas* en las clases de matemática observadas no se circunscribe a los *problemas* planteados abiertamente; es decir, a aquellos que se reconocen como tales, ya sea por los alumnos o por el o la docente. Hemos mencionado que los profesores llaman de distinta manera las actividades matemáticas que exigen resolución a partir de la manipulación operativa de sus cantidades: ejercicios, problemas, situaciones, situaciones ficticias o actividades incluyendo dentro de estas a todas las anteriores. Estos son propuestos adrede y por ello con cierta estructura fácilmente reconocible que posibilite su resolución a través de un procedimiento conocido:

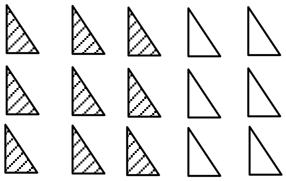
a) Situación + pregunta: Para hacer un pastel se necesita 2/8 de kilo de harina. ¿Cuánto se necesita para hacer 26 pasteles? (Sesión 5 / Caso 4)
b) Situación + actividad: Observa que dos quesitos (se muestra la imagen de una caja circular en la que hay ocho porciones iguales de queso, luego la imagen de una circunferencia dividida en ocho partes iguales y la figura de dos porciones de quesitos formando ángulo recto) completan un ángulo recto. Teniendo esto en cuenta, copia y completa la tabla (se presenta una tabla de 7x2 en la que se debe considerar el número de porciones y el ángulo que forman (Sesión 1 / Caso 3)
c) Pregunta: ¿Cuánto es los 2/4 de la caja de bombones? (Sesión 1 / Caso 2)
d) Actividad + gráfica: Halla el área de la parte sombreada: (Sesión 5 / Caso 5)



e) Entre otras…

Los autores llaman a este tipo de problemas “problemas matemáticos escolares”, problemas estructurados o problemas bien definidos. Para Simon (1973) la mayoría de problemas matemáticos que se realizan en el colegio se corresponden con los problemas bien estructurados, indicándolos como aquellos en los que los pasos que nos conducen hasta la solución pueden establecerse de forma explícita y evidente. Haciendo referencia a los problemas bien definidos en ellos está claro cuál es el contenido del estado final y todos los sujetos que se enfrenten al problema deben alcanzar el mismo estado final para que se considere resuelto (Gros, 1990).

Sin embargo, a través de las sesiones podemos observar que la actividad matemática desarrollada en la escuela genera espontáneamente situaciones problemáticas en los estudiantes (no en todos, naturalmente[431]), aun cuando estas partan de conocimientos previos que faciliten la adquisición de nuevas cuestiones. Al enfrentarse con la actividad propuesta, el pensamiento natural del estudiante va a un ritmo distinto que su pensamiento forzado, aquel que se ajusta a los parámetros de un procedimiento predeterminado. En la Sesión 3/Caso 4, la alumna P4A12, al intentar explicar cómo había representado 9/2, decía: "Yo no puedo partir el dos en un círculo… no puedo pintar nueve, entonces lo que hago son cinco veces: dos, cuatro, seis hasta diez en total y como pide nueve… Tengo que pintar nueve". La alumna se pronuncia en términos de la expresión, intentando analizarla, lo cual le produce complicaciones. Hace uso de una forma de pensar forzada. P4A19, aunque lo hizo mal fue más coherente con su gráfica, su pensamiento es más natural. Si el alumno piensa por sí mismo, es capaz de generar formas de acceder al conocimiento distintas a las propuestas por los docentes: algunas válidas y otras no. Nótese como en la Sesión 1/Caso 1, al pedirle el profesor a P1A7 que explique la gráfica que representa 3/5 de 15, este dice que "de cada cinco coge dos". La gráfica es la siguiente:



La respuesta esperada es "Haces cinco partes (o haces cinco grupos) y coges tres partes de las cinco", pero Eduardo ve de distinta manera la situación. En su interpretación, Eduardo no se basa en las partes divididas a partir de las cuales coge las que indica el numerador aun cuando toma en cuenta el denominados (cinco) y el numerador (tres), pero su proceso le permite responder con acierto… ¿es válido?, ¿aplica para cualquier situación?, ¿qué sucede entonces?, ¿se puede interpretar de esta manera cuando la fracción se refiere a una cantidad distinta de 1?

---

[431] Está el carácter subjetivo del problema. Agre (1982) definía que "lo que es un problema para una persona puede no serlo para otra, y lo que es un problema para una persona un día, puede no serlo otro día". Y Adler (1987) afirma que el concepto de problema, considerado en sentido estricto se caracteriza por tres rasgos fundamentales. En primer lugar la subjetividad: "el problema debe su existencia a mi decisión de crearlo, o de reconocerlo como tal" (Citados por Contreras, 2010).

En la Sesión 4/Caso 2, al plantear la docente cuánto es $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$, P2A2 indica que se suman los numeradores y los denominadores. ¿Por qué la primera acción es sumar si saben que los denominadores son distintos y referenciales? (estáticos). La respuesta de la alumna debería plantear distintas interrogantes. En primer lugar es evidente que los alumnos no están seguros de la respuesta, "algo" anda mal. De hecho, hay respuestas opuestas… ¿Qué ocurre? El problema fue observado por los alumnos, pero no fue expresado por ellos. Una de las fases en la resolución de problemas es su comprensión, lo cual implica reconocerlo. Los alumnos logran identificar el problema (no todos)… además tienen una estrategia que les permite resolver sumas de fracciones heterogéneas, ¿por qué dudan al usarla?

En la Sesión 5/Caso 3 se resuelven solo dos actividades, esto porque generaron dificultad en su solución. ¿Por qué sus respuestas no son inmediatas?, ¿existen otras formas de graficar la bisectriz de un ángulo?, ¿en qué casos el uso del compás es adecuado? Ante esta actividad, los alumnos recurren a estrategias más informales… ¿qué grado de efectividad tienen estas estrategias? La siguiente actividad aun fue más engorrosa ya que en este caso, ningún alumno pudo responder correctamente. Este último problema se conoce como problemas No Rutinarios, no estructurado o mal definido. Para su resolución, los alumnos recurren a ciertos elementos del problema, ¿qué tan efectivos son?, ¿cómo debería ser la situación para que se torne "fácil"?, ¿qué formas son posibles y cuáles no?

Por otro lado, en la Sesión 3/Caso 4, al solicitar la maestra cómo puede repartir cinco queques si tiene nueve visitantes, P4A1 cuestiona la cantidad de alumnos que hay que considerar; sin embargo la docente fuerza la situación, lo que conlleva forzar el pensamiento del alumno:

Profesora: *... Vamos a plantearla como situación: Podemos decir que la mamá de Jesús tiene cinco queques. Si son nueve los visitantes, ¿qué puedo hacer para repartidos?*

En un principio los alumnos no responden. La clase se queda en silencio. La profesora llama a uno por uno para que dé alguna respuesta.

P4A18: *Dividir entre dos cada queque*

P4A1: *Son nueve más Jesús, diez*

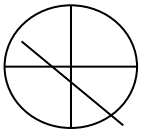
Profesora: *Buena observación, P4A1; pero pensemos que Jesús no come de ese queque…*

P4A19: *Entonces, va a sobrar una parte*

Profesora: *Exacto, pero así se hace para que a cada uno le toque la mitad.*

Un buen problema surgió en la Sesión 5/Caso 4al solicitar indicar cuántas partes de un sexto hay en media torta. Las dos soluciones planteadas fueron erróneas.

a)



$$1 = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

b)

$$\frac{1}{6} + 5 = \frac{6}{6}$$

Este *problema* se resuelve fácilmente contando. Trasladarlo al ámbito de las operaciones con fracciones genera dificultad al alumno…. ¿cuál es la necesidad de trasladarlo a este campo? ¿Cómo entiende el niño la división de un medio entre un sexto en este contexto? Los alumnos podrán resolver divisiones de fracciones pero difícilmente podrán aplicarlo en un caso extramatemático.

En la Sesión 1/Caso 5 la primera actividad (representar un sexto) generó un problema que pudo aprovecharse para, a partir de él, descubrir las relaciones entre las fracciones y compararlas *naturalmente*, ¿cómo transformar la hoja para representar un sexto?

Los problemas están en la actividad matemática propiamente. Los alumnos son capaces de toparse con ellos, su sensibilidad natural los orienta a percibirlos; sin embargo, la linealidad de las sesiones, el saber que se tiene que ir por un camino y no por otro, los vuelve insensibles ante ello, o los conduce a descartarlos cuando se identifican. Asociado a su concepto, el problema es tal cuando la estrategia de solución no resulta obvia de forma inmediata (OCDE, 2014, p. 12. Citado en PISA, 2012), lo que ocurre con algunos cuando expresan que no se puede resolver la situación. Para Granados y Rodríguez (2011), "…un problema es una situación desconocida que demanda la realización de ciertas acciones, también es cualquier situación que produce incertidumbre, al cual se le desconoce la vía de solución y necesita de la actividad del estudiante". Los alumnos generan ciertas respuestas de acuerdo a sus conocimientos, de todas maneras, intentan resolver el problema: algunos descartando sus propuestas anteriores, como en la Sesión 1/Caso 5; otros, enfrentándolas con lo que tienen, aunque generen errores (como P1A17 en la Sesión 5/Caso 1, quien se da cuenta que su estrategia no le permite llegar a la respuesta que de antemano la conoce, pero que le es difícil acceder a ella). Los problemas matemáticos están presentes en las aulas de manera explícita como implícita. Los primeros son reconocidos por todos (o por la mayoría) con nombre propio. Los otros no tanto ya que el *modelo* con el que se compara no se ajusta a estos y no se piensa en ellos en términos de problemas matemáticos.

c) La actividad de la resolución de problemas en las clases de matemáticas

La actividad de resolución de problemas es un aspecto medular dentro de la matemática escolar. Los problemas matemáticos forman parte de la propuesta didáctica de los docentes y de los libros de texto: tanto en la planificación de sesiones como en la estructura de los libros de texto o actividades hallamos *actividades* referidas a la resolución de problemas. De Castro (2011) afirma que se ha de conceptualizar la actividad matemática como una actividad de resolución de problemas recogiendo el término "problema" en sentido amplio, como un tipo de situación que parte del interés del niño, que desea hacer algo que supone cierta dificultad para lo cual debe elaborar una técnica (o procedimiento). Cruz (2006) sostiene que resolver problemas es un signo distintivo de la actividad matemática, considerando la Matemática como una disciplina dinámica y cambiante que está en constante desarrollo y reajuste ante las nuevas situaciones problémicas. Ambas definiciones conllevan unas características propias de los problemas matemáticos o situaciones problemas que deben poseer los problemas que se planteen en clase de matemática de forma que puedan favorecer el bloqueo en el resolutor, a la vez que una actitud de enfrentarse al mismo y querer resolverlo.

En los apartados anteriores hemos visto que las clases de matemáticas se caracterizan por gestionar actividades que permitan que el alumno *conecte* con la actividad matemática y con el conocimiento matemático: advirtiéndolo, observándolo, reconociéndolo, ampliándolo; relacione la matemática con situaciones extramatemáticas y sea capaz de resolver ejercicios, problemas o actividades que los contenga.

La actividad de resolución de problemas generada a partir de un problema explícitamente declarado, se ha trabajado en las seis aulas observadas. Si nos centramos en los problemas propuestos por el libro de texto, esta actividad se inicia fuera del ámbito de las aulas. Por lo general, son propuestos para que los estudiantes los resuelvan en sus casas. No obstante, se llevan a clase para su revisión, explicación y corrección. Los problemas propuestos por los docentes se suelen trabajar en clase y permiten introducir, afianzar o ampliar el conocimiento. Son dirigidos principalmente por los docentes. Los problemas propuestos por el estudiante no siempre se resuelven, en algunos casos, sí, y son resueltos por los mismos compañeros. Por otro lado, los problemas que se generan por la actividad matemática desarrollada dependen de cómo se conciban para su solución.

Empecemos por los declarados "problemas matemáticos" (aunque en el transcurso se dé pie a otros). Con ello, no podemos introducir la segunda actividad que inicia un proceso propuesto en la Sesión 1/Caso 1, ya que el mismo docente la nombra como ejercicio. No obstante, podemos intuir que para resolverla (son varias situaciones similares) el alumno, al menos, debe comprender el procedimiento expuesto identificando las variables que permitirán aplicar la forma aprendida a situaciones parecidas; sin embargo, no todos los estudiantes son capaces de resolver una nueva propuesta siguiendo un modelo previo. Para el docente, se necesita cierto seguimiento que verifique el nivel de comprensión; por ello, lo hace explícito (genera un diálogo). A partir del ejemplo, lo que tiene que hacer el estudiante es aplicar la forma y graficar para hallar la fracción de un número. El *ejercicio* (por ejemplo, hallar un séptimo de veintiuno o tres quintos de quince) se resuelve, pero no únicamente siguiendo la propuesta de la hoja de actividades. Cada estudiante puede usar sus propios recursos para resolver la propuesta. La siguiente actividad, se dirige a la propuesta de *situaciones* (por ejemplo: reparto de chuches). Las situaciones se asocian más a los problemas matemáticos, pues se entiende que en ellas, las matemáticas se contextualizan extramatemáticamente, dándoles significado *real*. El maestro pide a los alumnos que piensen en situaciones en las que la idea de fracción esté inmersa. En este caso no hay resolución de problemas propiamente, ya que los alumnos no incluyen datos numéricos en su propuesta, solo situaciones y los términos asociados a la idea de fracción: repartir y dividir. No obstante el docente solicita que expliquen cómo se resolvería la situación, asociándolo a la actividad de resolución de problemas (las situaciones que involucran cuestiones matemáticas tienen solución). Podría decirse que esta propuesta, a pesar de involucrar cuestiones matemáticas, es más cualitativa que cuantitativa en el sentido de que no se busca un dato numérico (no es el fin) sino una forma de entender la situación y de expresarse utilizando conocimiento matemático. Ocurre con las actividades propuestas en la Sesión 2/Caso 1 en la que no se plantean problemas propiamente sino preguntas que buscan interpretar una información o idea. En la sesión 4 /Caso 1, el docente propone hallar el 25% de 80. Para algunos alumnos esta proposición es un problema matemático (una de las propuestas de P1A16 como problema matemático que le haya planteado su profesor en clase sobre porcentajes es: ¿Cuánto es el 70% de 200?, y para P1A8 es el siguiente: ¿Cuánto es $\frac{3}{3}+\frac{2}{3}$?; actividades que se consideran como ejercicios).

Frente al *problema matemático* propuesto por el docente (25% de 80), los estudiantes aplican dos estrategias básicas: dividir directamente entre cuatro o transformar la situación a fracción de un número. La estrategia es fruto de la relación previa entre porcentajes y fracciones. Para algunos casos, como el anterior, es factible utilizar la fracción que conlleve una división directa y para otros (como hallar el 37% de 80) la fracción de un número. Este *problema*, como le puede llamar alguno de sus estudiantes, sirve al docente para relacionar porcentajes y fracciones. En cualquiera de los casos, su resolución es directa, aplicando un procedimiento establecido, ya que la situación es directa. Las demás actividades propuestas se asocian a la primera. Aun cuando estén enmarcadas en un contexto extramatemático (hallar la rebaja de determinados productos, en la sesión 5 /Caso 1), los estudiantes las resuelven aplicando directamente los procesos indicados. En estos casos, no se percibe una fase de comprensión del problema para idear un plan de acción puesto que su planteamiento es bastante directo. El proceso de resolverlo es el centro de la actividad. No obstante, la verificación se percibe en algunos casos aunque no se llegue directamente a rectificar el camino (Caso de P1A17 en P1S5).

En el caso de la Sesión 1 / Caso 2, la maestra plantea una *situación ficticia* (tal como la nombra):

> *La maestra… plantea una situación ficticia… una de las alumnas, a propósito de haber sido su cumpleaños, decide invitar a tres amigos a su casa… la maestra supone que como la madre es atenta decide hacerles dos tortas de diferente sabor (chocolate y nata), ocho pastelitos y doce bombones… tiene que repartir lo que la madre ha preparado entre los invitados, incluyéndose a ella*

La propuesta introduce un tema visto descontextualizado de cualquier entorno cotidiano en una situación que puede suceder (aunque es ficticia). Frente a la actividad, la alumna aplica su conocimiento sobre fracciones y divide la unidad en dos partes iguales, de esta manera a cada una le toca media torta. Como la consigna posterior es que cada una coma de las dos, la alumna divide cada torta en cuatro partes, de esta manera a cada una le toca dos cuartos. El uso de fracciones no es tan evidente en el segundo caso, pues la cantidad de elementos permite un reparto simple de la situación sin recurrir a las fracciones. El proceso de resolución para lo cual ha sido formulado el problema por la docente es dirigido por la propia docente, quien indica a la alumna cómo proceder. La alumna se deja guiar por la maestra y realiza lo que esta le indica. No obstante, la comprensión del mismo no es tan evidente aun cuando haya planteado la solución deseada. Los planteamientos le sirven a la docente para explicar la forma de hallar la fracción de una cantidad (directamente) de tal manera que cuando se enfrenten a este tipo de problemas, puedan aplicarla directamente. El tercer caso (el de los bombones, la situación ficticia tiene tres partes) se plantea directamente: ¿Cuánto es los 2/4 de la caja de bombones? Sin embargo la asociación no es tan obvia. Quien lo hace evidente es un alumno quien aplica directamente la forma enseñada por la maestra. Cabe resaltar que en este momento, el trabajo se apartó de la *situación ficticia* pues en esta se pedía repartir entre cada niña, con lo cual la fracción tendría que ser un cuarto y no dos cuartos como planteó la docente.

Para iniciar la clase en la Sesión 2 /Caso 2, la maestra propone otra situación ficticia:

> *"Supongamos que nuestro dinero ahorrado es de treinta euros y Nerea quiere gastar un tercio de su dinero en su hermanito pequeño… ¿Cuánto gastas en tu hermanito?"*

Aunque no la nombra como tal, esta situación ficticia es parecida a la de la clase anterior, pero a diferencia de aquella en esta la pregunta es directa. La solución que la alumna aplicó le permitió responder rápidamente (una división directa como explica posteriormente). El planteamiento como se trabajó en la clase pasada (fracción de un número) no es claro (tal vez tampoco necesario) para la alumna; sin embargo, con la dirección de la docente, logra formularlo. El objetivo de estas situaciones es representar como fracción de un número las mismas, más allá de resolver la cuestión o actividad formulada. En la misma sesión, la maestra propone el típico problema matemático que comúnmente aparece en los libros de texto:

"Un libro tiene 75 páginas y leí los 2/5 del libro, ¿cuánto leí?"

El alumno que sale a resolverlo y aplica directamente la operación: setenta y cinco entre cinco. El alumno piensa en términos de fracción: "… se hacen cinco partes… se reparten todas las páginas en cinco grupos". No hace evidente una fase de comprensión del problema que le permita transitar mejor por el mismo. Lo deja ahí; sin embargo, con ayuda de la docente logra dar una mejor respuesta. Hay que resaltar que la actitud del alumno frente al problema es espontánea (tal vez irreflexiva), incluso no transmite incertidumbre frente a su solución ni cuando corrige. El alumno aplica lo que conoce y da por concluida la actividad.

La siguiente actividad es la misma que la aplicada en la Sesión /Caso 1 sobre la representación gráfica de "fracción de un número". El tratamiento es similar: los alumnos han de resolver las actividades apoyándose en un ejemplo; pero, este no les permite transferir directamente a la nueva situación. Sin embargo, para resolverla grafican (tal como se les pide); no obstante, la gráfica limita la comprensión de lo que se les pide. El alumno no se plantea una forma de resolver, esta viene dada sin aparentemente una comprensión previa. La profesora corrige a cada uno.

La siguiente propuesta de la sesión es que los alumnos planteen problemas. Para Villanueva (2009) el planteamiento de problemas ha sido el ingrediente perdido, aunque las investigaciones realizadas lo estiman esencial para el aprendizaje de las matemáticas, y sugiere diferentes estrategias que crean las condiciones y favorecen el planteamiento de problemas. En este cao, la propuesta de planteamiento es directa:

"*…inventen una situación en la que se aplique lo que han visto".*

Algunos de los problemas planteados son los siguientes:

- *"El depósito tiene 63 litros y gastó 5/7 de 63. ¿Cuántos litros gastó?".*

- *“En una biblioteca hay 100 libros. Yo ya leí la tercera parte. ¿Cuántos libros me quedan por leer?”*
- *“En una tienda de animales hay 85 iguanas y yo quiero 2/5, ¿cuántas iguanas compro?”*
- *“Un árbol tiene 75 hojas y están podres 2/3, ¿cuántas hojas (podres) tiene en total el árbol?”*

Los problemas planteados tienen la misma estructura que el problema expuesto por la docente anteriormente (y que fue extraído del libro de texto). Los alumnos saben de antemano como se resuelven estos problemas y aplican la estrategia conocida, a la que se van directamente:

> *… Ante esta situación, algunos alumnos expresan que tienen que multiplicar y otros que dividir.*

No siempre con éxito inmediato, por lo que su comprensión aun cuando los planteen *correctamente* está en proceso. Sin embargo, es una actividad que favorece el proceso de resolución de problemas y el aprendizaje de la matemática. El planteamiento no tan correcto se puede ver en el segundo problema ya que el resultado de la operación es una cantidad que no se ajusta a las condiciones del problema (se lee un número exacto de páginas, no uno periódico puro); sin embargo, se desiste de su solución sin analizar el mismo, tal vez porque la alumna percibió el *problema*. En la Sesión 3 /Caso 2 el tratamiento de los problemas es similar y sus objetivos también:

> *“En una clase de quinto hay 24 alumnos/as. Las 2/3 partes son niñas, ¿cuántos niños hay?”*

No obstante, aun cuando se resuelve manipulando fracciones, las operaciones son diversas, lo cual genera diferentes vías para llegar a la respuesta final (la vía de los naturales o la vía de las fracciones). La docente orienta a los que alumnos al planteamiento de la segunda vía. Las situaciones referidas a suma y resta de fracciones homogéneas son conocidas por los alumnos, por lo que no se evidencia ningún problema en su solución, al menos con los alumnos que intervienen. Su tratamiento es directo y la maestra confirma las respuestas. Sin embargo, esto no ocurre con el planteamiento de suma de fracciones heterogéneas (Sesión 4 /Caso 2). Aun cuando se parta de un planteamiento simple, este ha generado un problema en los alumnos al observar dos posiciones opuestas. La profesora hace evidente la dificultad y procede a dirigir su aclaración. Aclarado el tema, la profesora propone situaciones similares (no contextualizadas), o plantea que las presenten los alumnos, con la finalidad de aplicar lo aprendido o de observar otra dificultad y poder introducir un nuevo tema (o una nueva estrategia para hallar fracciones equivalentes). Las propuestas de los alumnos son similares (aunque en algunos casos tienden a considerar fracciones un tanto engorrosas para manipular). En el transcurso se puede observar que algunos alumnos se involucran con la situación, no tanto para hallar las fracciones equivalentes a otras dos sino en tanto qué ocurre con fracciones con características distintas (Nótese a P2A2 quien cuestiona por las fracciones con igual numerador, evidenciando un pensamiento más allá de una aplicación directa). Los alumnos evidencian diferentes niveles de involucramiento en una situación, lo que les genera curiosidad frente a sus interrogantes y deseos de saber a partir de ellas. En la Sesión 5 /Caso 2 se refuerza el manejo de operaciones (suma y resta) con fracciones a través de resoluciones directas; luego se propone un *problema matemático*:

> *"De un depósito de agua se sacaron primero 5/10…sacaron 5/10". Después 4/10…*
> *y te pide que expreses en fracción la cantidad de agua que se sacó"*

La propuesta de problema es indirecta, en el sentido que la maestra no transmite el planteamiento tal como se presenta en el libro, sino interpretado por ella, diciéndole directamente lo que pide. El alumno escribe los datos necesarios y la pregunta, a partir de lo cual gestiona su propuesta. No obstante, la aplicación se centra en el alumno y la interpretación en la maestra. Este problema es suficiente para verificar la aplicabilidad del conocimiento aprendido. La siguiente actividad propuesta en la Sesión 5 /Caso 2 no tiene formato de problema, pero lo generó. Se plantea explicar qué significa la siguiente expresión: "3/5 x 4/8" y si pueden graficarla. La primera parte no es difícil, los estudiantes reconocen que se trata de una multiplicación de fracciones; la segunda, genera dificultad ya que no conciben graficar dicha multiplicación, evidenciándose diferentes formas de afrontarla: desde las simbólicas hasta las gráficas. En ello, se observa la aplicación de los conocimientos previos, que pueden limitar o facilitar el acceso al nuevo conocimiento. ¿Cómo se enfrenta el estudiante a esta situación? Definitivamente, hay un bloqueo en la actividad consciente del estudiante. Aun cuando la docente ha recordado la idea de fracción de un número y su relación con la multiplicación, el alumno no es capaz de traer esa información a la situación actual. Sus gráficas muestran las fracciones por separado lo que no le permite "ver" la multiplicación de ambas. No se hace evidente cuestionamientos por parte de los alumnos que permitan identificar su nivel de comprensión de la situación y del problema generado. Ante una situación nueva para el alumno, este no cuenta con la capacidad para poner en juego sus conocimientos de manera personal, inmediata. Los problemas novedosos, distintos, que siguen parámetros diferentes, limitan la actuación del estudiante. El estudiante no tiene experiencia en ellos, por lo que su capacidad para actuar se ve reducida. Ortiz, Rico y Castro (2004) citados por Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) afirman que los profesores en ejercicio tienen dificultades para plantear problemas novedosos a sus alumnos y aseguran que la creación de enunciados no es tarea fácil. No obstante, favorecen aprendizajes significativos.

La propuesta de actividad de resolución de problemas en el Caso 2 se centra en problemas que conduzcan al estudiante por una vía de acceso a su resolución, previo conocimiento de la misma. Además permiten hacer evidente la matemática en situaciones extramatemáticas.

Las sesiones 1 a 5 del Caso 3 basan su actividad de resolución de problemas en problemas propuestos por el libro de texto. En un estudio realizado por Pino y Blanco (2008) analizando los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad concluyen que la mayoría de los problemas que se proponen son del tipo de ejercicios de reconocimiento y ejercicios algorítmicos y problemas de traducción simple que son las categorías de menor complejidad… El soporte que se usa preferentemente para los enunciados de los problemas consiste en el texto escrito e información en tablas… Estas características se aprecian en los problemas formulados que a continuación exponemos:

2. *Observa que dos quesitos (se muestra la imagen de una caja circular en la que hay ocho porciones iguales de queso, luego la imagen de una circunferencia dividida en ocho partes iguales y la figura de dos porciones de quesitos formando ángulo recto) completan un ángulo recto. Teniendo esto en cuenta, copia y completa la tabla (se presenta una tabla de 7x2 en la que se debe considerar el número de porciones y el ángulo que forman. Se muestra un ejemplo, que es el que está en el enunciado.*
3. *Dibuja en tu cuaderno:*
   - *B. Dos ángulos consecutivos; un agudo y otro obtuso*
   - *C. Dos ángulos adyacentes iguales*
   - *D. Dos ángulos opuestos por el vértice, ambos obtusos*
4. *Las propuestas son tres: uno es de medida de ángulos: a partir de unos ángulos que propone el libro a través de imágenes, el alumno tiene que indicar cuanto mide. El segundo ejercicio es de construir ángulos a partir de una medida, y el tercero es de construcción de la mediatriz y la bisectriz a partir de unos ángulos.*
5. *Uno de los ejercicios pide que los alumnos dibujen dos polígonos en papel cuadriculado y trace las bisectrices de todos sus ángulos.*
6. *El problema pregunta qué distancia le falta por recorrer a un ciclista que ya ha dado tres vueltas y media y que tiene que completar doce vueltas. Se da los kilómetros que mide el circuito (una vuelta).*
7. *… un problema que pide averiguar cuántos lazos se pueden hacer con doce metros de cinta si uno se hace con cuarenta centímetros.*

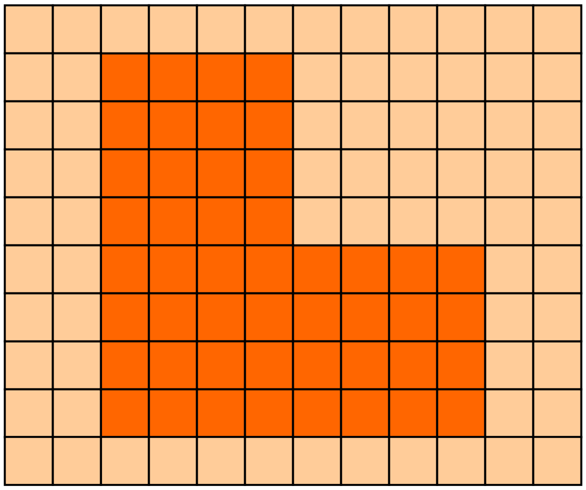
8. *El problema piden que averigüe cuánto recibe un comprador si paga con treinta euros la compra de 1,8 k. de jamón si el kilo cuesta doce euros.*

La maestra propone estos problemas para que los alumnos los resuelvan en casa. Se espera que no tengan dificultad en ello, puesto que cuentan con las herramientas necesarias para su resolución. Resolver problemas en casa no permite observar las fases que siguen, desde su lectura hasta que dan por finalizado el asunto; solo el producto, mucha veces reducido a una hoja en limpio. Campistrous y Rizo (2013) afirman que el aprender a resolver problemas no ha sido una de las razones para tratarlos en clase, sino que estas han estado centradas en fijar algunos procedimientos matemáticos que han sido explicados en el aula, introducir nuevos contenidos, justificar la importancia de la matemática y del tema que se desarrolla mostrando su aplicación a diferentes situaciones de la vida y desarrollar la capacidad de resolución de problemas. El plantear problemas para casa, luego de visualizar el tema y estrategia para resolverlo permite confirmar lo expuesto por los autores. Poseer la estrategia no es garantía de resolver un problema matemático escolar aun cuando este sea planteado con ciertas condiciones que conduzcan a ello.

Las dificultades que han encontrado los alumnos al resolver los problemas anteriores hacen evidente la complejidad de los mismos en algún aspecto, principalmente en la fase de comprensión cuando el problema se plantea a través de texto escrito o en el manejo y dominio de las cantidades involucradas (cuando son números decimales). Como son problemas que no deberían ofrecer dificultad en su comprensión, la revisión se centra en la estrategia aplicada (por lo general una o más operaciones). La actividad de resolución de problemas se centra en la aplicación/explicación de la estrategia aprendida. En la Sesión 6 /Caso 3 no hay problemas planteados propiamente aunque se proponen actividades del libro para la casa (es una consigna constante).

En la Sesión 4 /caso 3 se propuso el siguiente problema:

9. *Otro… averiguar cómo partir una pieza de madera para tener cuatro trozos iguales. La actividad presentaba la siguiente imagen:*



Este problema es distinto a los anteriores, en su planteamiento y en la estrategia de resolución. Los alumnos utilizan la información de manera parcial; al ver que no corresponde, van probando. No encuentran una forma aceptable. La actividad de resolución de problemas propuesta en clase consistió en proponer el problema para que los alumnos lo resuelvan de manera individual. Ninguno logró hacerlo. No obstante, la docente plantea la solución y los alumnos copian la misma. Mínguez (2009), a partir de unas experiencias realizadas en la secundaria obligatoria afirma que hay que reconocer que la enseñanza debe individualizarse en el sentido que permita a cada alumno trabajar a su ritmo y con independencia, pero es necesario promover la colaboración y el trabajo grupal ya que se establecen mejores relaciones y aprenden más entre otras bondades. Escuchar al par permite pensar otras formas de actuación frente a una misma problemática.

Para la Sesión 1 /caso 4, la actividad de resolución de problemas se basa en la propuesta de *situaciones problemáticas*. La primera que se plantea en esta actividad es relativamente sencilla (*representar en una hoja tres partes iguales*), excepto porque algunas alumnas no tienen clara la idea de “tres partes iguales”. Esto generó un diálogo que la maestra lleva a toda la clase a fin de poder participar en la resolución de la situación planteada (No la de la situación problemática en sí, sino las dos soluciones distintas). La propuesta de situación problemática tiene otra finalidad (que se visualiza posteriormente): representar y nombrar fracciones: sin embargo, el tratamiento de esta exigió un intercambio de ideas entre los alumnos, para posteriormente llegar a consenso sobre las implicancias surgidas. Al finalizar el asunto, retoma su idea original: representar y nombrar fracciones. La actividad propuesta en la Sesión 2 /caso 4 ha sido planteada en las dos primeras escuelas, en escenarios distintos y con participaciones diferentes. Para la maestra, la propuesta se basa en *ejercicios* (no situaciones problemáticas o simplemente problemas). Para estos alumnos el asunto es fácil: se aplica la regla que permite resolver la situación. Del *truco* pasamos a la *regla* (*fórmula* para otros). Los *ejercicios*, entonces, se resuelven aplicando la regla. Una vez conocida, no se piensa en otra forma de hacerlo. Las *situaciones* a las que se enfrentan los alumnos aparecen en la Sesión 3 /caso 4 en la que la maestra propone una situación para contextualizar una expresión matemática (una fracción impropia, a propósito de representar 9/2) y pueda facilitar su comprensión. La situación es como sigue:

- *... Vamos a plantearla como situación: Podemos decir que la mamá de Jesús tiene cinco queques. Si son nueve los visitantes, ¿qué puedo hacer para repartidos?*

Frente a la situación, los estudiantes actúan de diferente manera: unos, como P4A1, se centran en la situación expuesta y la cuestionan; otros, como P4A18, piensan en cómo hacer. No obstante, los alumnos intentan ajustar la solución de la situación a las características de la situación que le dio origen (la representación gráfica de nueve medios). Tal vez esta no sea la forma más equitativa de repartir cinco queques entre nueve niños, pero sí la que más se ajusta a las condiciones previas. En este caso, la resolución del problema tiene un objetivo que no está en su resolución sino en que esta se adecue a otros factores. Dos situaciones más se proponen en esta clase:

- *"La mamá de Darleny prepara tamales muy ricos. Tiene doce tamales. Darleny llegó a casa con diez amigos y amigas. Si su mamá les invitó tamales a todos, con zarza y ají, ¿cómo los pudo repartir?, ¿le sobró o le faltó? ¿Cuánto? Escribe tres gráficas y representa en fracciones".*
- *"En el cumpleaños de Álvaro hicieron tres fuentes de causa de pollo con mayonesa y aceitunas. Si llegaron quince invitados, ¿cuántas porciones fueron repartidas en cada fuente? Representa en un gráfico y fracción".*

El primero surge a propósito de representar gráficamente 12/5; sin embargo, no se ajusta como el caso anterior. No obstante, los alumnos intentan resolver la situación, y, como en el caso anterior, sus planteamientos se dirigen directamente a resolverlo o a analizar la situación. Quienes intentan resolverlo directamente grafican los doce tamales que hay que repartir, lo cual les lleva a observar que “alcanza uno para cada uno” con lo cual la referencia a fracciones queda descartada, tal como lo propone la situación, así como las tres gráficas solicitadas. La maestra no se centra en el problema (ni en las soluciones) y propone el siguiente (el de P4A29). En este caso, la situación indica representar en un gráfico y los alumnos presentan tres, en alusión a las *tres fuentes*. Las cuestiones sobre la cantidad de gente se dejan de lado, se entiende que se considera solo los invitados (los demás no comen de esas fuentes). La pregunta es simple: ¿cuántas porciones fueron repartidas en cada fuente?, pero imprecisa: ya que se pueden hacer quince partes, más o menos. Esto origina un intercambio de ideas que permite un tratamiento de la fracción más amplio, incluso la manipulación de las partes restantes como unidades independientes que se pueden volver a repartir (P4A25). Lamentablemente, el problema no se volvió a tratar. En la Sesión 4 /Caso 4 se plantea una situación que se orienta a una manipulación directa de las fracciones (se llega a una suma de fracciones y cómo hacer para sumarlas), relegando la propuesta a un segundo plano. Los alumnos expresan, paso a paso, el procedimiento para sumar fracciones (sacar mcm). En el proceso, la profesora cuestiona sobre el mismo. Alguna alumna va más lento; pero sigue las explicaciones. En la Sesión 5 /Caso 4 se trabajan cuatro problemas que fueron propuestos para la casa, por lo que el planteamiento de la clase es revisar la resolución propuesta por cuatro alumnos. Dos de los problemas son los siguientes:

- *Para hacer un pastel se necesita 2/8 de kilo de harina. ¿Cuánto se necesita para hacer 26 pasteles?*
- *"Carlos saca los 5/8 de su torta de chocolate, de los cuáles 3/8, por casualidad, se le cayeron al piso. ¿Qué porción de torta le quedó para repartir?*

El primero ofrece dificultad a una de las alumnas, quien no está segura de su respuesta. Frente a la pregunta ¿cuántos kilogramos de harina se necesitan para hacer 26 pasteles, la alumna responde que hay que multiplicar… Responde a través de un procedimiento y no en función de la situación. El proceso de comprensión de la situación es previo al del planteamiento de solución; si aquel no está bien establecido, este no es consistente, como ocurre con la alumna. Algunos alumnos recurren directamente al planteamiento sin ser conscientes de una auténtica comprensión de la situación. Díaz (2010) indica que entre los factores más influyentes en la comprensión del enunciado de un problema está la falta de conocimiento, la colocación de los datos en el problema, el lugar de la incógnita, la poca claridad en la formulación del problema. A medida que la docente cuestiona a la alumna esta va estableciendo relaciones entre los datos del problema, la profesora transforma la situación (la torna fácil), pero la alumna no lo asocia con su solución. Resuelve el problema, sin darse cuenta.

La docente deja de lado estos problemas y plantea otra situación, a saber:

- *"¿Cuántas porciones de 1/6 de torta hay en media torta?".*

Esta situación tiene un planteamiento distinto a las anteriores, no solo por la matemática implicada sino porque se desvincula de cualquier contexto cotidiano o extramatemático para centrarse en su resolución directa. Ambas soluciones expuestas en la pizarra muestran una operación (una de ellas, añade una gráfica). Los alumnos piensan directamente en la operación a realizar, el análisis de la situación, lo que le da comprensión pasa desapercibida o en su defecto se inhibe ante la idea *inminente* de aplicar una operación. El proceso de comprensión facilita el planteamiento de solución. Cuando la comprensión del enunciado lo requiera se representará gráficamente la situación planteada. Diferentes autores hablan sobre las fases en la resolución de problemas. Pérez (2011) hace referencia a la comprensión lectora como primera fase, la que está asociada a la primera fase que plantea Polya (1945) denominada comprensión del problema que permite concebir un plan (previo a la ejecución) y validarlo antes de ejecutarlo. En la Sesión 6 /Caso 4 se confirma el trabajo de resolución de problemas a partir del planteamiento y dirección de la docente, quien a través de sus preguntas conduce la solución del problema:

- *"Jorge ha notado que los paquetes de arroz de la marca que él prefiere pesan tres cuartos de kilo. Como su familia es numerosa ahora piensa comprar el arroz por sacos. ¿A cuántos paquetes de arroz de tres cuartos de kilo equivale un saco de veintidós kilos y medio de arroz?".*

La resolución del problema se realiza en forma grupal, toda la clase puede participar aunque son pocos los que hacen efectiva esa participación. El proceso se centra en ellos. En el proceso se evidencia que los alumnos saben qué operación aplicar. No obstante, es la docente quien dirige la resolución, planteando preguntas que el alumno (uno de ellos u otro) responde. Nótese que la docente vuelve a emplear la estrategia de transformación de la situación a una menos compleja (en lugar de buscar cuantos tres cuartos hay plantea un medio), así como el apoyo en recursos gráficos para una mejor comprensión del proceso simbólico que los alumnos conocen. En la solución al problema original, P4A18 plantea su proceso: transforma una de las fracciones para obtener un par de fracciones homogéneas y poder quitar los denominadores (tal como se vio en el ejemplo de la docente, aunque no se hizo explícito). Aun cuando el alumno ha resuelto la situación, la profesora emplea la estrategia gráfica para resolver la situación original permitiéndole traducir a una forma simbólica lo realizado:

P4A19 divide entre cuatro el rectángulo y pinta tres partes. Luego le pide que haga lo mismo en otro rectángulo y hace la misma pregunta. Le dice que haga lo mismo en otro rectángulo e igual. A partir de ello se genera el siguiente diálogo:

P4A19: Se pueden hacer 3 paquetes de tres cuartos

Profesora: *¿Con los cuartos que sobran se puede hacer otro paquete de tres cuartos?*

P4A19: Sí

Profesora: *En 3 kilos se pueden hacer cuatro paquetes de tres cuartos:* $3 \div \frac{3}{4} = 4$ *¿Cuántos paquetes de tres cuartos se harán con 6 kilos?*

P4A14: Ocho

Profesora: *(escribiendo en la pizarra)* $6 \div \frac{3}{4} = 8$ *¿Y en doce kilos?*

P4A1: *Dieciséis*

El problema le sirve para introducir divisiones entre entero y fracción y establecer relaciones que puedan conducir al descubrimiento de la regla o procedimiento. En este momento, la situación pasa a un segundo. ¿Se llega a dar respuesta realmente? La profesora les propone a los estudiantes crear sus propios problemas. Algunos planteamientos se tornan complejos, otros se desvían del objetivo (problemas que impliquen división). Los problemas no se resuelven y la docente opta por plantear una operación directa:

- *¿Cómo divido 30/8 entre un quinto?*

La alumna que conoce la regla la aplica parcialmente. La sabe (de hecho la expresó correctamente), pero en la situación concreta, no la aplicó. La profesora retoma el planteamiento de situaciones y propone uno:

- *"A la tienda de Bruno llevaron 25 kilogramos de menestras. Si su mamá las embolsa en paquetitos de un cuarto ¿cuántas bolsitas saldrán?".*

Las respuestas son inmediatas. Los alumnos que responden han aplicado el procedimiento, lo que les da seguridad para enunciar el resultado. La maestra transforma el problema complicando la situación:

- *Escuchen, si la mamá de Bruno decide dividir el azúcar en bolsitas de tres kilos 2/4, ¿cuántas obtendrá?*

El problema ofrece cierta dificultad y se escuchan diferentes interpretaciones. El tratamiento es grupal, todos los alumnos pueden intervenir, quienes manipulan las cantidades de acuerdo a los procesos que hay que seguir: plantear la división, transformar el mixto en fracción, invertirlo y multiplicar. Sin embargo, el tiempo no permite consolidar el proceso seguido.

La propuesta de resolución de problemas de la maestra tiene por objetivo aplicar y descubrir procedimientos que permitan una mejor resolución de los mismos; involucra a toda la clase bajo la guía o dirección de la docente. En clase, los problemas se resuelven con la docente.

En las Sesiones 1 a 6 del caso 5, la actividad matemática se centra en la manipulación directa de las expresiones matemáticas, ya sea a través de su representación gráfica o el trabajo simbólico. Si bien en la Sesión 1 /Caso 5 la maestra propone representar gráficamente unas fracciones:

- *…representar en una hoja las siguientes fracciones:* $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8}$

Esto es para que los alumnos las comparen gráficamente, representen dicha comparación de manera simbólica y establezcan relaciones a partir de ello. La profesora consolida las intervenciones de los alumnos. En esta situación tal como se presenta no hay un enfrentamiento a una actividad de resolución de problemas porque no hay ninguno planteado, las propuestas tienen a algún alumno que sabe cómo resolverla. El nuevo conocimiento lo expone la maestra y este es aplicado posteriormente en situaciones similares. No obstante, la actividad inicial generó un problema que no fue tratado por la docente, aprovechando el mismo y a partir de ello compara las fracciones. En las sesiones 2 y 3 del caso 5 la propuesta de actividades sigue la misma línea que en la anterior:

- $\frac{3}{7},\frac{6}{14},\frac{12}{28},\frac{21}{49},\frac{15}{35},\frac{19}{44}$ *¿Qué ven?* (Sesión 2 /Caso 5)
- *La profesora propone hallar las fracciones equivalentes a tres séptimos* (Sesión 3 /Caso 5)

El conocimiento requerido para el tratamiento de la propuesta (la maestra no los nombra ni *ejercicios* ni *problemas*) es conocido por el alumno, por lo que puede continuar el proceso (al menos los que participan). No hay un problema propiamente sino una aplicación de los conocido y una mayor comprensión del mismo. Si no se conoce, la docente orienta directamente hacia su aplicación:

Profesora: *Vamos a hallar las fracciones equivalentes a cinco sextos*

P5A8: *Diez doceavos*

P5A6: *Quince dieciochoavos*

P5A15: Veinte sobre veinticuatro

P5A19: Veinticinco sobre treinta

P5A7: *Treinta, treinta y seisavos*

Profesora: *Observen que todas estas fracciones son equivalentes de esta primera, ¿* $\frac{10}{12}$ *será equivalente a* $\frac{15}{18}$ *?*

(Silencio)

Profesora: *¿Qué opinan?*

P5A13: *Es confuso*

Profesora: *¿Por qué?*

P5A13: *Porque diez por ningún número da quince*

Profesora: *Observen:* $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ *… Si multiplico en aspa… ¿qué sucede?*

P5A6: *Te da lo mismo*

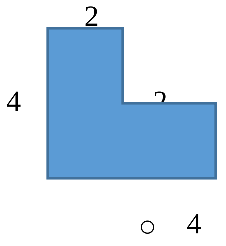
Profesora: *Y entonces digo que son equivalentes… ¿Qué pasa sin multiplico en aspa estas fracciones? (refiriéndose al par anterior)*

P5A1: *Da lo mismo.*

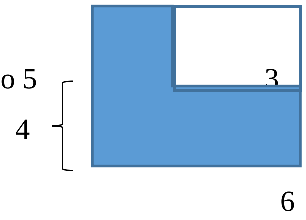
Profesora: *Entonces sí son equivalentes. Vamos a hallar las fracciones equivalentes a tres séptimos.*

Una vez adquirido el nuevo conocimiento, los alumnos resuelven actividades similares para aplicarlo. En este caso, la actividad será problemática en tanto los alumnos no tengan destreza en aplicar las operaciones implicadas. El proceso de comprensión de la situación es directo al plantear directamente lo que se tiene que hacer. En las Sesiones 4 y 5 del caso 5 la maestra propone hallar áreas de figuras complejas como las siguientes:

- Sesión 4/Caso 5



- Sesión 5/Caso 5



Los alumnos enfrentan las situaciones siguiendo la estrategia previamente expuesta por la docente: a través de reconocer figuras simples y hallar sus áreas. La resolución de dichos problemas (al menos los primeros en una clase) tiene la guía exclusiva de la docente, quien los dirige a través de sus preguntas directas. Luego, los alumnos podrán resolver solos los problemas, aplicando el procedimiento enseñado.

El planteamiento de problemas por parte de los alumnos se aprecia en la Sesión 6 /caso 5, sesión en la que la maestra les solicita a los alumnos plantear situaciones “como las que les he planteado” que involucren ecuaciones. Los alumnos plantean situaciones que siguen el mismo formato.

- *Mi dinero ha aumentado en 68 es 145* (propuesta de la profesora)
- *El número de mis canicas disminuido en 45 es igual a 28* (propuesta de la estudiante)
- *El doble de mis canicas aumentado en cinco es igual a 45* (propuesta del estudiante)

Su resolución irá acompañada por la profesora a través de las preguntas que permiten transformarla en ecuación:

Profesora: *A ver P5A6… ¿Otra situación?*

P5A6: *El número de mis canicas disminuido en 45 es igual a 28*

Profesora: *Cómo represento: ¿x-45 o 45-x? ¿Cuántas son mis canicas?... Esas son…*

Alumnos: *¡Equis!*

Profesora: *Disminuido…*

P5A15: *equis menos cuarenta y cinco*

Profesora: *¿Cuántas canicas tengo?*

(Silencio)

Profesora: *¿Qué representa el número de mis canicas?*

P5A14: *La equis… la incógnita*

Profesora: *x=45+28. ¿Por qué habría sumado?*

…

P5A20: *El doble de mis canicas aumentado en cinco es igual a 45*

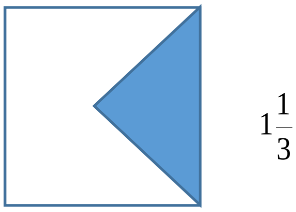
Profesora: *¿Cómo representar, matemáticamente, esto: el doble de mis canicas…?*

P5A20: *Dos equis*

Profesora: *Bien; aumentado en cinco igual cuarenta y ocho*[432]*… ¿Cuántas canicas tengo?*

En las sesiones 1 a 5 del caso 6, la propuesta es similar a las sesiones 1 y 2 del caso 5 ya que la maestra presenta a los alumnos situaciones que transmiten directamente el conocimiento matemático a trabajar. No podemos decir que los temas son nuevos para los alumnos sino que estos se trabajan con mayor detenimiento y detalle en el proceso de aplicación. La maestra plantea situaciones que pueden ser consideradas problemas matemáticos escolares u operaciones directas, cuyo objetivo es reconocer la matemática implícita y aplicarla:

- *Si me piden el perímetro de la figura ¿qué tendré que hacer para encontrar el perímetro?* (Sesión 1 / Caso 6)
- $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$ (P6S2)
- *Halla el área sombreada de a siguiente figura:* (Sesión 3 /Caso 6)



- *Resuelve:* $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$ (Sesión 4 /Caso 6)

Frente a estas actividades, los alumnos aplican lo conocido, la maestra a partir de ellos, profundiza en cada proceso de tal manera que los alumnos vayan ampliando el conocimiento de los mismos, tal como ocurre en P6S1 al plantear hallar el perímetro de un rectángulo:

Profesora: *Si me piden el perímetro de la figura ¿qué tendré que hacer para encontrar el perímetro?*

(Silencio)

P6A6: *Multiplicamos cada una de las medidas por dos*

Profesora: *¿Y luego?*

---

[432] La profesora escribe en la pizarra lo que va expresando. No obstante, cambió 45 por 48.

P6A6: *Sumar*

Profesora: *Efectivamente, para hallar el perímetro de un rectángulo multiplicamos por dos la medida del largo y la medida del ancho. Luego sumamos los resultados parciales. La suma total es la medida del perímetro. ¿Hay otra forma?*

P6A16: *sumar todos los lados.*

Profesora: *¿Qué significa?... Este lado es igual que el de acá… Lo sumaría dos veces:*

…

Profesora: *Si en el camino se presenta esta opción, ¿qué harían?*

P6A17: *Sacar el mínimo común múltiplo al denominador*

P6A12: *Dieciocho cuartos*

Profesora: *¿Cuál es (el mcm)?*

P6A12: *Cuatro*

Profesora: *¿Por qué es cuatro?*

P6A12: *Porque da cuatro*

Profesora: *Porque es el mayor. ¿Y en todos los casos es igual (refiriéndose a que el denominador mayor es el m.c.m)?*

Para la resolución del segundo planteamiento (hallar el área sombreada), la maestra transforma la situación a una más sencilla, antes de trabajar con los datos de problema (que incluye fracciones), de esta forma traslada un procedimiento para que sea aplicado en otra situación:

Profesora: *¿La medida del lado es un cuarto o cuatro tercios?*

Alumnos: *Cuatro tercios*

Profesora: *Bien, ¿cuál es la característica principal del cuadrado?*

P6A12: *Tiene partes iguales*

Profesora: *¿Cómo se llaman?*

P6A12: *Lados*

Profesora: *La parte sombreada representa un cuarto del total, ¿qué significa la palabra "un cuarto del total"?*

P6A17: *El cuarto de toda la figura*

Profesora: *Imaginemos que este cuadrado tiene por área… Si su lado es ocho, ¿cómo determinados el área del cuadrado?*

P6A12: *Multiplicando lado por lado*

Profesora: *¿Cuánto es?*

P6A12: *Sesenta y cuatro metros cuadrados*

Profesora: *Si nos dicen que tiene sesenta y cuatro metros cuadrados (*$64cm^2$*) y yo lo divido así, en cuatro partes (la profesora hace cuatro partes como sigue)*

El tratamiento de los problemas en clase está bajo la dirección y guía de la docente quien a través de las preguntas que plantea logra seguir el camino de resolución.

Memos interpretativos: Análisis de las hojas de trabajo

Hoja de Trabajo 1 – Pregunta 1 (H1Q1)

H1Q1: ¿Qué significa operar con fracciones?

Al consultar qué es una operación aritmética, Bressan (s/f) menciona que la primera operación con números no es sumar, sino contar. Define la aritmética como el arte de contar, teniendo en cuenta el origen griego y latino del término. Por otro lado, al operar con números se obtiene otro número, producto del cálculo realizado, por ello, Pérez et al (2004) expresan que una operación aritmética es hallar un número mediante otros conocidos. Idea que avala la RAE al definir una operación en matemática como el "Conjunto de reglas que permiten, partiendo de una o varias cantidades o expresiones, llamadas datos, obtener otras cantidades o expresiones llamadas resultados". Las operaciones siempre se han asociado al cálculo y este al uso de reglas o procedimientos.

En Primaria, el aprendizaje de las fracciones finaliza en su uso para resolver problemas que involucre operar con ellas. Esta es la consigna en los diseños curriculares en los últimos años[433]. Por ello, los alumnos operan constantemente con fracciones. La idea de plantear esta pregunta es saber cómo el estudiante concibe una acción propia de la matemática escolar, a la vez que permite conocer qué tipo de conocimiento involucra en su respuesta.

Caso 1

Tipo de respuestas ante la pregunta: ¿Qué significa operar con fracciones?

- Asociadas al término general (operaciones)
- Asociadas ala las cuatro operaciones básicas (indicándolas)
- Asociada a la idea de transformar la fracción
- Asociadas a la idea de generar una fracción
- Asociada a la idea de problema

---

[433] El DCN Peruano 2009 plantea como competencia del V ciclo (Quinto y Sexto grados) la siguiente: "Resuelve y formula. Con autonomía y seguridad, problemas que requieren del establecimiento de relaciones entre números naturales, decimales y fracciones, y sus operaciones, argumentando los procesos empleados en su solución e interpretando los resultados obtenidos" Para ello, formula como capacidades: "Resuelve y formula problemas que implican adición y sustracción de fracciones heterogéneas" y plantea como conocimiento a trabajar: "Adición y sustracción de fracciones heterogéneas". El DCN actual (2015) expresa las competencias y capacidades de manera más general; la competencia referida a fracciones se incluye en "Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad". Las capacidades planteadas son comunes a todas las competencias (cuatro): Matematiza situaciones, Comunica y representa ideas matemáticas, Elabora y usa estrategias y Razona t argumenta generando ideas matemáticas. No obstante, diferencia el logro de cada una de acuerdo a un indicador de desempeño. Para Quinto grado cuatro de los indicadores propuestos se refieren a fracciones: "Plantea relaciones entre los datos en problemas que impliquen repartir, medir longitudes, partir superficies; expresándolos en un modelo de solución con fracciones", "Plantea relaciones entre los datos en problemas de una etapa expresándolos en un modelo de solución aditiva con fracciones", "Plantea relaciones entre los datos en problemas; expresándolos en un modelo de solución multiplicativo de una fracción por un natural", "Emplea un modelo de solución aditivo o multiplicativo con fracciones .

La imagen anterior nos muestra que los estudiantes responden a esta pregunta, básicamente, por la experiencia que tienen frente a la misma; es decir, por las acciones que realizan directamente, basadas en el tipo de operación realizada con la fracción. En el primer caso, los alumnos responden utilizando el mismo término de la pregunta (o derivado), sin hacer referencia a acciones más concretas. En el segundo, tercero y cuarto grupos, los alumnos hacen referencia a esas acciones concretas. En el segundo asocian a las operaciones básicas: suma. Resta, multiplicación y división; en el tercero a la idea de transformar la fracción y en el cuarto a generarla. En estos dos casos, el alumno asocia la operación con manipulación de la fracción como ente individual y no asociado, necesariamente, a otros. En el último caso, y menos frecuente en este grupo, se asocia a los problemas (matemáticos).

Respuestas de los alumnos del Caso 1 ante la pregunta: ¿Qué significa operar con fracciones?

1. **Asociada al término general (operaciones)**
   “Hacer operaciones con fracciones” (P1A1H1Q1)
   “Hacer operaciones con fracciones” (P1A3H1Q1)
   “Significa que con dos o más fracciones, se hacen operaciones” (H1P1A5H1Q1)
   “~~Que hay números, hay comas. Por ejemplo: 1592’52:53~~. Significa operar con números pero de distinta manera” (P1H1P1A11Q1)
   “Hacer operaciones utilizando las fracciones” (P1A16H1Q1)
2. **Asociada a las cuatro operaciones básicas (indicándolas)**
   “Operar con fracciones es sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas” (P1A8H1Q1)
   “Significa que hay que hacer operaciones con las fracciones. Sumar, restar, dividir, multiplicar” (P1A9H1Q1)
   “Hacer operaciones entre fracciones de; +, -, x y :” (P1A15H1Q1)
   “Significa sumar, restar, multiplicar o dividir fracciones” (P1A17H1Q1)
   “Trabajar con fracciones” (P1A4H1Q1)
   “Significa hacer operaciones y trabajar con fracciones. Por ejemplo como: (2/3 + 4/3 + 6/3 = 12/3)” (P1A19H1Q1)
   “Para hacer sumas, restas, multiplicaciones, divisiones...” (P1A14H1Q1)
3. **Asociada a la idea de transformar la fracción**
   “Pasar fracciones a unidades” (P1A2H1Q1)
   “Significa que hay que partir en las partes que nos dice o sea dividir y coger las partes que nos dices o sea multiplicar” (P1A12H1Q1)

“… o cambiarlo a número decimal.” (P1A14H1Q1)

4. **Asociada a la idea de generar una fracción**

   “Operar con fraccione significa saber cuánta parte has hecho y cuánto has cogido” (P1A13H1Q1)

5. **Asociada a la idea de Problemas**

   “Para hacer… problemas…” (P1A14H1Q1)

6. **No responde**

   (P1A6H1Q1)

   (P1A7H1Q1)

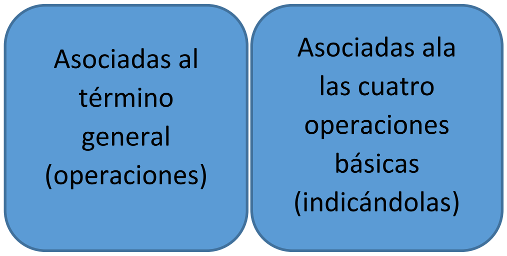
   (P1A10H1Q1)

Cabe resaltar que P1A14 transmite tres ideas distintas en su respuesta, incluyendo la de ‘problemas’, concibiendo aquellas como un medio para resolver estos.

No Obstante, no todos los alumnos son capaces de responder, dejando en blanco su respuesta. En estos casos, los alumnos indicaban que no comprendían.

Finalmente, P1A11 planteó una respuesta confusa puesto que aparentemente confunde la naturaleza de los números; sin embargo, tachó esta respuesta y generó otra asociada a números en general, pero siendo consciente que la forma de operar es distinta. Aparentemente, para esta alumna su expresión ‘números’ se refiere a Números Naturales. Nótese con este ejemplo, que la alumna es capaz de proponer una operación (aunque no la más apropiada) pero no explicar qué significa.

Caso 2



Los estudiantes del Caso 2 asocian directamente la idea a la acción de operar, ya sea de manera general o especificando las operaciones involucradas. En ningún caso, asocian esta idea a la de resolución de problemas o a la de manipulación (transformación) del número como en el caso anterior.

Respuestas de los alumnos del Caso 2 ante la pregunta: ¿Qué significa operar con fracciones?

1. **Asociada al término general (operaciones)**

"Hacer operaciones repartidas" (P2A1H1Q1)

"Hacer operaciones con fracciones" (P2A2H1Q1)

"Hacer operaciones con fracciones" (P22A18H1Q1)

"Hacer operaciones" (P2A6H1Q1)

"Hacer operaciones con fracciones" (P2A12H1Q1)

"Hacer operaciones con fracciones" (P2A14H1Q1)

"Hacer operaciones con fracciones" (P2A16H1Q1)

"Hacer operaciones con fracciones que son partes de algo" (P2A13H1Q1)

"Significa no operar con partes enteras o operar con partes enteras y otras no enteras" (P2A3H1Q1)

2. **Asociada a las cuatro operaciones básicas (indicándolas)**

"Significa sumar, multiplicar, etc. las fracciones para que te dé una cantidad" (P2A4H1Q1)

"Sumar, restar, dividir o multiplicar fracciones de algo" (P1A7H1Q1)

"Operar con fracciones significa que hacemos cuentas con fracciones por ejemplo: + - x :" (P2A8H1Q1)

"Significa hacer operaciones: sumar, restar, multiplicar, dividir con fracciones" (P2A9H1Q1)

"Es sumar, restar, multiplicar o dividir las fracciones" (P2A15H1Q1)

"Significa multiplicar, dividir, sumar, restar" (P2A17H1Q1)

"Son fracciones que sirven para sumar, restar, multiplicar y dividir" (P2A19H1Q1)

"Significa cuando se hace cuentas con números decimales" (P2A20H1Q1)

3. **No responde**

(P2A5H1Q1)
(P2A10 H1Q1)
(P2A11 H1Q1)

En el primer grupo, P2A3 y P2A13 hacen referencia a la naturaleza de las fracciones resaltando la misma (partes de un entero).

No todos los estudiantes logran responder a esta pregunta.

Caso 3

Asociadas al término general (operaciones)

Asociadas ala las cuatro operaciones básicas (indicándolas)

Asociada a la idea de transformar la fracción

Asociadas a la idea de generar una fracción

Asociada a la idea de problema

Los alumnos responden a esta pregunta por la experiencia que tienen frente a la misma; es decir, por las acciones que realizan directamente, que pueden basarse en el tipo de operación realizada o en el tipo de actividad escolar.

En el primer caso, la asociación directa es con las cuatro operaciones básicas conocidas: suma, resta, multiplicación y división; Por ello, al responder a la pregunta ¿Qué significa operar con fracciones?, por lo general responden indicando cada una (o al menos una) de las operaciones mencionadas:

- **Asociada a las cuatro operaciones básicas**
  “Significa que debemos multiplicar, dividir, sumar o restar” (P4 H1P1A1)
  “Resolver suma, resta, división y multiplicación” (P4 H1P1A3)
  “Significa sumar, restar, multiplicar, dividir las fracciones” (P4 H1P1A5)
  “Hacer operaciones como suma y resta” (P4 H1P1A6)
  “Significa operar resolver unas fracciones como las sumas cuando sumas operas es igual pero como que llevas las fracciones” (P4 H1P1A11)
  “Significa sumar todas las fracciones” (P4 H1P1A15)
  “Significa hacer resolver cualquier tipo de operación así sea suma, resta, multiplicación, división de fracciones” (P4 H1P1A14)
  “Es sumar, efectuar, resolver, etc.” (P4P1A17)
  “Significa que cuando hacemos sustracción, adiciones” (P4 H1P1A22)
  “Significa operar con sumas y restas” (P4 H1P1A23)
  “Significa sumar, restar, multiplicar con fracciones” (P4 H1P1A24)
  “Significa sumar, restar, multiplicar o dividir” (P4 H1P1A39)

“Resolver, sumar, restar” (P4 H1P1A16)
“Operar fracciones significa sumar denominadores, con numeradores” (P4 H1P1A29)
“Hago con fracciones sumo resto multiplico y divido” (P4 H1P1A30)
“Que hacer operaciones con fracciones como x,+,-, :” (P4 H1P1A31)
“Cuando resolvemos operaciones de divisiones, multiplicaciones, suma y resta” (P4 H1P1A37)
“Ejemplo: 2,4´8,3-12.6=2,4+04.3=06,7” (P4H1P1A9)
“Es… suma, resta, multiplicación y división” (P4 H1P1A33)
“Significa trabajar operaciones usando las fracciones” (P4H1P1A18)

No obstante, otros relacionan la acción de “operar con las fracciones” con la idea de transformarlas, ejecutando con ellas otras acciones que decantan en las anteriores pero que no se perciben como tales:

- **Asociada a otros procesos**
  “Sacarle el M.C.M., resolverlas o sacando la 3cia.” (P4 H1P1A12)
  “Operar con fracciones es también es operar con números, lo único que lo diferencia es la raya de la fracción” (P4 H1P1A13)
  “Se significa que la fracción tiene que operar” (P4 H1P1A25)
  “Significa resolver las fracciones, hacer operaciones” (P4 H1P1A40)
  “Simplificar” (P4 H1P1A28)
  “… simplificar” (P4 H1P1A27)

Un tercer grupo asocia a la idea de “operar con fracciones” a las actividades escolares que las involucran, como lecciones, resolver ejercicios (cálculos directos) y problemas (texto):

- **Ejercicio**
  “Resolver algún ejercicio de número” (P4H1P1A8)
- **Problemas**
  “Resolver los problemas que nos das hallar el resultado adecuado y responder bien a las preguntas” (P4P1A10)
  “Significa para saber el resultado de un problema” (P4H1P1A38)
- **Lección**
  “Una lección más” (P4 H1P1A36)

Es importante destacar otro grupo de respuestas en las que se destaca la actividad como un medio para aprender, más allá de operar con ellas:

- **Logros trascendentales**

  "Aprender más y desarrollar mis conocimientos" (P4 H1P1A4)
  ~~"Aprender más~~…" (P4 H1P1A27)
  "Es aprender un poco más…" (P4 H1P1A33)
  "Significa aprender…" (P4 H1P1A34)
  "Saber más en nuestro aprendizaje y estudios" (P4 H1P1A35)

Las operaciones son situaciones que no están resueltas; esta es la idea que transmiten los siguientes alumnos. En este caso, los alumnos ven el segundo lado de la expresión antes que el primero.

- **Responder**

  "Es responder las fracciones" (P4H1P1A19)

- **Resolver**

  "Significa resolver fracciones" (P4 H1P1A7)
  "Significa resolver operaciones" (P4 H1P120)
  "Resolver las fracciones" (P4 H1P1A32)
  "… resolver fracciones" (P4 H1P1A34)

Algunos alumnos no logran responder la pregunta o responden no saber:

- **No sé/no responde**

  "No sé" (P4 H1P1A2)
  "No sé" (P4 H1P1A21)
  (P4 H1P1A26)

Caso 5

Son dos las ideas que se desprenden de las respuestas a esta pregunta. En el primer grupo, los alumnos responden con la palabra en cuestión, redundando en la idea; sin embargo, P5H1P1A10 hace referencia a la estructuración de la fracción y lo fácil que percibe operar con ellas. P5H1P1A9 introduce la idea de resultado en la actividad, mientras que P5H1P1A11 lo asocia a los números naturales. Esta idea puede asociarse a las características de los elementos de la fracción que son números naturales.

El siguiente grupo es más específico al hacer referencia al tipo de operaciones que se realizan, centrándose en las cuatro básicas, que son las que se asocian directamente al término “operación”.

Un grupo de alumnos no logra responder la pregunta y en un caso expresa no saber qué es. No sabe puede estar asociado a no tener conocimiento o no saber expresarlo, el segundo produce un bloqueo en el alumno que le impide responder (aunque puede tener la idea).

1. **Asociada al término general (operaciones)**
   “Significa hacer operaciones con las fracciones” (P5H1P1A18)
   “Significa hacer diferentes operaciones con fracciones” (P5H1P1A12)
   “Es la operación que me ayuda a saber el resultado” (P5H1P1A9)
   “Significa que las fracciones son muy fáciles las fracciones tienen denominador y numerador con las fracciones se pueden hacer muchas operaciones” (P5H1P1A10)
   “Operar con números naturales” (P5H1P1A11)
2. **Operaciones básicas**
   “Tengo que operar cuando sumo, resto, multiplicar o dividir” (P5H1P1A3)
   “Se significa sumar, restar, multiplicar, dividir, bueno esas son las únicas operaciones que me sé” (P5H1P1A6)
   “Sumar, restar, dividir o multiplicar una fracción” (P5H1P1A7)
   “Significa sumar, restar o multiplicar. También dividir con fracción” (P5H1P1A8)
   “Es sumar, restar, multiplicar y dividir pero con fracciones para llegar a un resultado” (P5H1P1A14)
   “Sumar, restar, multiplicar y dividir con fracciones” (P5H1P1A15)
   “Sumar, restar, multiplicar y/o dividir con fracciones” (P5H1P1A16)
   “Multiplicar, dividir” (P5H1P1A17)
   “Es resolver sumas, restas, multiplicación de fracciones” (P5H1P1A19)
   “Sumar, dividir, restar, multiplicar con fracciones” (P5H1P1A20)
3. **No responde/no se acuerda**
   (P5H1P1A1)
   (P5H1P1A2)
   (P5H1P1A4)
   (P5H1P1A5)

No sé (P5H1P1A13)

Caso 6

Para los alumnos de C5P6 el significado de operar con fracciones está asociado a varios aspectos. En primer lugar a la idea de operación propiamente, que aparece en los grupos 1 y 2. En el primero, hacen uso del mismo término operar poniendo énfasis en los números implicados. En uno de los casos (P6H1P1A12) asocia las fracciones a los números naturales. En el segundo grupo, los alumnos hacen explícitas las operaciones que se realizan con los números naturales: suma, resta, multiplicación y división.

Los tres grupos siguientes ven el operar con fracciones como una manipulación de la fracción misma ya sea para transformarla, generarla u operar con sus elementos. Conciben la operación aplicada a la fracción independientemente de otra.

Un sexto grupo no es capaz de responder a la pregunta.

1. **Asociada al término general (operaciones)**
   “Operar con fracciones significa operar con números fraccionarios” (P6H1P1A5)
   “Significa operar con números naturales” (P6H1P1A12)
2. **Asociada a las cuatro operaciones básicas (indicándolas)**
   “Significa realizar sumas, restas, multiplicaciones, etc. con fracciones” (P6H1P1A7)
   “Significa sumar, restar, multiplicar y dividir números fraccionarios” (P6H1P1A10)
   “Significa hacer operaciones como: suma, resta, multiplicación, división con el uso de fracciones” (P6H1P1A16)
   “Significa sumar, restar, multiplicar o dividir” (P6H1P1A17)
3. **Hace referencia a los elementos (numerador y denominador)**
   “Es operar con un denominador y con un numerador” (P6H1P1A1)
   “Es operar con un denominador y un numerador” (P6H1P1A4)
4. **Asociada a la idea de transformar la fracción**
   “Significa tratar de poner las fracciones como decimales” (P6H1P1A3)
   “Significa convertir una fracción impropia y propia mixta” (P6H1P1A8)
5. **Asociada a la idea de generar una fracción**
   “Significa la unidad dividida en varias partes” (P6H1P1A9)
   “Se significa dividir la unidad en varias partes” (P6H1P1A14)
   “Significa dividir la unidad en partes iguales” (P6H1P1A15)
6. **No responde**

(P6H1P1A2)

(P6H1P1A6)

(P6H1P1A11)

(P6H1P1A13)

(P6H1P1A18)

Hoja de Trabajo 1 – Pregunta 2 (H1Q2)

H1Q2: ¿Crees que saber operar con números naturales te es útil para poder operar con fracciones? ¿Por qué?

Los alumnos aprenden a operar con los números naturales, estos presentan las operaciones y les dan sentido *natural*[434]. Con la ayuda de estos números, los alumnos saben qué significa cada una de las operaciones y cómo manipular las cantidades de acuerdo a estas, concibiendo una idea del resultado de las mismas. Si bien, en las operaciones con fracciones la idea es la misma, el procedimiento no lo es y el resultado no se ajusta claramente a los parámetros iniciales[435].

Preguntar: ¿crees que saber operar con números naturales te es útil para poder operar con fracciones y por qué?, busca conocer cómo los alumnos relacionan estas dos cuestiones matemáticas.

Caso 1

Para los alumnos saber operar con números naturales sí les es útil para operar con fracciones. Entre las razones, está que hace más fácil la operación, viendo el sentido utilitario de los conocimientos previos frente a los nuevos. En el primer caso tienen clara la idea, pero no son capaces de indicar cómo. En el segundo grupo, se considera un requisito (más simple) que permite operar con las fracciones. Es una idea desde la manipulación simbólica de la expresión.

En el tercer grupo se hace necesario porque puede convenir operar con naturales. En este caso, no se ve como un requisito, sino como otra alternativa de realizar una operación (transformándola). En este grupo también se incluye el uso o generación de números naturales a través de las operaciones con fracciones, lo cual brinda una idea de transformación de la fracción no solo en fracción sino en un número natural. Cabe resaltar que se aprecia cierta confusión entre fracciones y números decimales o entre números decimales y números naturales.

P1H1P2A2 percibe que es necesario, pero se centra en un aspecto (fracciones).

1. **Hace más fácil la operación**

---

[434] Al sumar y multiplicar, la cantidad “crece”, al restar y dividir, “disminuye” o se “parte”. Estas ideas no son fácilmente percibidas al operar con fracciones, sobre todo al multiplicar y dividir.

[435] Dos por cuatro es igual a ocho y un medio por un cuarto es un octavo En el primer caso el aumento es evidente, puesto que ocho es mayor que dos y que cuatro; en el segundo, un octavo es menor que las cantidades anteriores; sin embargo, la multiplicación de una parte por cuatro, generó mayor cantidad de partes (que son ocho). En tanto que el niño visualiza 2x4 como dos grupos de cuatro objetos, que es posible separar y contar o sumar, el significado que pueda asignarle a la multiplicación de fracciones dista de estar claro. El uso del área del rectángulo para introducir la multiplicación de fracciones, permite visualizar el aumento de partes (divididas y tomadas) que se han generado al multiplicar las fracciones; sin embargo, la fracción resultante es menor.

“Sí, porque ahí te es más fácil hacer la operación” (P1H1P2A1)

“Sí porque así ya es más fácil.” (P1H1P2A11)

“Sí porque así te es más fácil” (P1H1P2A15)

“Sí, porque es mucho más fácil operar con números naturales que con números decimales y creo que te puede ayudar para operar con fracciones.” (P1H1P2A18)

2. **Es un requisito**

“Sí, porque si para saber operar con fracciones tengo que saber operar con números naturales” (P1H1P2A8)

“Sí. Porque si no, no sabrías ~~sumar~~ hacer operaciones como sumar ½ + ½ que es igual a sumar 1+1 y añadir el dos abajo” (P1H1P2A9)

“Sí, porque si no sabes sumar, restar, multiplicar o dividir un número natural no vas a saber operar con ~~números~~ fracciones” (P1H1P2A10)

“Sí. ~~Porque los números naturales se pueden oper pasar a fracción~~. Porque con los números naturales, como por ejemplo, si se sabe sumar 5+1, se sabe con una fracción” (P1H1P2A17)

3. **Puedes requerir transformar la fracción en natural (o viceversa) o el resultado puede ser un número natural.**

“Sí porque a veces salen números naturales y es importante saber hacerlo. 3/5 + 2 = 5/6” (P1H1P2A3)

“Sí. Porque te es útil cuando tienes que pasar una fracción a números naturales para multiplicar, para (~~dividir~~), para sumar y para restar” (P1H1P2A4)

“Sí. Porque si no puedes sumar o restar fracciones, las pasas a números naturales y es más fácil” (P1H1P2A5)

“Si porque a veces hay que pasar la fracción a números naturales” (P1H1P2A6)

“Sí, porque a veces tienes que pasar una fracción en un número natura que se hace dividiendo el denominador entre el numerador: ¼ = 10:4=0’25” (P1H1P2A7)

“Sí, porque en algunos casos hay que pasar de naturales a fracciones” (P1H1P2A12)

“Sí, porque con los naturales se pueden pasar a fracciones o una fracción a un número natural. Por ejemplo: ½ = 0’5” (P1H1P2A13)

“Sí, porque puedes dividirlo, multiplicarlo o… puedes pasarlo a fracción” (P1H1P2A14)

“Sí porque las fracciones se pueden pasar a números naturales (~~o decimales o a los dos juntos~~) con más facilidad. Ejemplo: 15/3 + 24/8 = 5+3=8” (P1H1P2A16)

4. **Se centra en un aspecto**

“Sí, porque cuando quieras repartir algo necesitas la fracción” (P1H1P2A2)

Caso 2

Los alumnos piensan que operar con números naturales es útil para operar con fracciones. El primer grupo lo relaciona con la similitud de las operaciones, aunque diferencia la naturaleza de las cantidades. El segundo grupo observa que uno es requisito del otro, por lo que hay que saber operar con números naturales para poder operar con fracciones. P2H1P2A14 es más explícito al decir que la naturaleza del número ayuda ya que los números naturales son “los números de las fracciones”. De alguna manera, se orienta a la manipulación simbólica de las cantidades.

El tercer grupo lo asocia a la utilidad de hacer más fácil la operación, puede verse como un requisito; sin embargo, se centra en la ayuda que brinda. También podría asociarse al primer grupo.

P2H1P2A5 se centra en la simplicidad de las operaciones con los naturales, su respuesta se orienta a otra pregunta, lo mismo sucede con el siguiente grupo, quienes responden a la pregunta con ideas que se distancian de la misma y que puede interpretarse de varias maneras. P2H1P2A2 hace referencia a su habilidad con las operaciones, P2H1P2A6 a que de esta manera sabe operar con los dos tipos de cantidades. Podríamos incluir dentro del primer grupo la respuesta de P2H1P2A7; sin embargo, la idea de “números normales” es muy general: puede referirse a la fracción como tal o a cada uno de los elementos de la misma. P2H1P2A9 también hace referencia a la naturaleza de las cantidades y no a las operaciones, mientras que P2H1P2A8 y P2H1P2A20 a las operaciones propiamente.

Un último grupo, no expresa una respuesta o aquella no logra consolidarse.

1. **Son operaciones parecidas**
   “Sí es algo parecido pero las fracciones son partes” (P2H1P2A13)
   “Sí, porque solo hay que sumar los numeradores y sacas los denominadores es como una operación normal y después, le pones el denominador.” (P2H1P2A17)
2. **Es requisito**
   “Me parece que sí. Porque antes de operar con fracciones tienes que saber operar con números enteros” (P2H1P2A3)
   “Sí porque si no sé hacer operaciones con números naturales no sabría hacer operaciones con fracciones” (P2H1P2A12)
   “Sí porque si sabes sumar números, sabes sumar con los números de las fracciones” (P2H1P2A14)
   “Sí, porque si no sabes sumar, restar, multiplicar o dividir tendrás que aprender a hacerlo para operar fracciones” (P2H1P2A15)

3. **Hace más fácil la operación**

   “Sí porque te puede ayudar” (P2H1P2A16)

   “Sí, porque es más fácil” (P2H1P2A1)

   “Si porque así es más fácil” (P2H1P2A10)

   “Sí porque es más fácil” (P2H1P2A18)

4. **Es más fácil**

   “Sí porque no hay tanto lío que si son homogéneas o si son heterogéneas” (P2H1P2A5)

5. **Respuesta confusa**

   “Sí, porque se me da bien, sumar, dividir, restar y multiplicar” (P2H1P2A2)

   “Sí, porque así se opera con las dos” (P2H1P2A6)

   “Sí porque en realidad son números normales” (P2H1P2A7)

   “Sí porque para sumar por ejemplo tienes que saber multiplicar” (P2H1P2A8)

   “Sí porque así sabes de que cantidad habla el problema” (P2H1P2A9)

   “Sí porque si sabes dividir o multiplicar se es más fácil” (P2H1P2A20)

6. **No sabe/no responde**

   “Sí porque” (P2H1P2A19)
   (P2H1P2A4)
   (P2H1P2A11)

Caso 4

A través de sus respuestas, los alumnos sí perciben que saber operar con números es útil para operar con fracciones. Para quienes argumentan esta respuesta, lo muestran como un conocimiento previo, necesario en la manipulación de fracciones o que facilita el desarrollo de las mismas:

- **Respuesta simple (sin justificaciones)**

  “Sí” (P4H1P2A21)

  “Sí” (P4H1P2A31)

- **Conocimiento previo**

  “Sí porque de los números naturales hemos hecho fracciones” (P4H1P2A1)

  “Sí porque para operar fracciones primero hay que aprender a operar números naturales” (P4H1P2A18)

  “Sí porque en las fracciones se utilizan los números” (P4H1P2A20)

  “Sí porque sin los números naturales no podríamos sumar, restar ni multiplicar” (P4H1P2A24)

  “Sí, pero primero con naturales” (P4H1P2A33)

“Sí nos permite aprender a hacer una fracción” (P4H1P2A38)

“Sí porque si sabes operar con naturales también lo podrás hacer con fracciones” (P4H1P2A39)

- **Como facilitador del proceso**

“Sí porque nos ayudan, seguro aún más con las multiplicaciones” (P4H1P2A12)

“Sí me es útil porque se restar, sumar, multiplicar y dividir, pero tienes que saber el procedimiento de las fracciones” (P4H1P2A14)

“Sí porque es más fácil” (P4H1P2A25)

“Para poder ver las mitades de los números naturales y fracciones” (P4H1P2A27)

“Sí porque ahí saco las mitades de los números pares” (P4H1P2A28)

“Sí porque para el día del examen se nos hará más fácil” (P4H1P2A6)

“Sí porque en las fracciones también hay números y también se suman o restan casi como los números naturales” (P4H1P2A34)

“Sí porque solo tengo que aplicar el resto y hago la operación” (P4H1P2A13)

Otros sin embargo, encuentran argumentos más trascendentales que están asociados a su uso fuera de la escuela o a la mejora propiamente:

- **Para la vida**

“Sí porque si tu jefe te llama y te dice que le traigas una fracción” (P4H1P2A3)

“Sí porque te ayuda mucho en la vida” (P4H1P2A11)

- **Aprendo más**

“Sí porque aprendo más” (P4H1P2A4)

“Sí porque podemos saber un poco más” (P4H1P2A5)

“Sí porque así vamos aprendiendo a trabajar fracciones o cualquier operación” (P4H1P2A35)

“Sí porque lo aprendo mucho” (P4H1P2A17)

“Sí, porque al resolver también sale el resultado exacto y es útil para mejorar mis estudios” (P4H1P2A32)

Si bien el siguiente grupo concibe que es útil, hace referencia a que operar con números naturales es más fácil que hacerlo con fracciones o que ya han logrado el conocimiento. En ninguno de los casos, consideramos dentro del segundo grupo por que no se aprecia que hagan referencia a la idea de facilitar la actividad con fracciones.

- **Es más fácil (con números naturales)**

  “Sí porque se trata de números que ya conoces y es muy fácil” (P4H1P2A7)

  “Yo creo que mejor es operar con números naturales porque con fracciones es un poco difícil” (P4H1P2A10)

  “Sí porque es más fácil” (P4H1P2A15)

  “Sí porque es más fácil” (P4H1P2A16)

  “Sí, porque en números naturales son fáciles, pero en fracciones un poquito complicado porque a veces no te sale” (P4H1P2A37)

  “Con números naturales se me hace más fácil” (P4H1P2A23)

  “Sí porque los números pares puedo sumar sin ninguna equivocación y los números impares no” (P4H1P2A8)

- **Sabe cómo operar**

  “Sí porque yo ya sé operar bien las fracciones ya que me han enseñado resolverlas bien” (P4H1P2A29)

  “Sí porque ya me sé todo el procedimiento” (P4H1P2A36)

Un grupo no sabe que responder y otro responde que no es útil:

- **No sabe/no responde**

  “No sé” (P4H1P2A2)

  (P4H1P2A9)

  (P4H1P2A26)

  “No lo entiendo” (P4H1P2A40)

- **No**

  “No porque las fracciones son otra cosa que los números naturales” (P4H1P2A19)

  “No me es útil” (P4H1P2A22)

  “No es útil”(P4H1P2A30)

Caso 5

Por lo general, los alumnos perciben útil saber operar con números naturales para hacer lo propio con las fracciones, relacionando ambos conocimientos. En este sentido, los contenidos matemáticos se relacionan. Esta relación tiene dos orientaciones: operar con números naturales es requisito para operar con fracciones y operar con números naturales facilita la operación con fracciones. Ambas se relacionan y el segundo puede entenderse como consecuencia del primero.

P5H1P2A15 no percibe la relación, sino la diferencia entre ambas lo que le orienta a señalar que no es útil.

El tercer grupo si bien percibe la utilidad de lo primero, sus respuestas son confusas: indican ideas correctas, en las que no se distingue la relación directa con la pregunta. La respuesta de P5H1P2A14 puede referirse a una suma de fracciones heterogéneas que al hallar el denominador común y los numeradores correspondientes, se torna fácil. P5H1P2A10 expresa que se trabaja de la misma manera aunque con distinto tipo de número. Operativamente hablando, operar con fracciones es realizar operaciones parciales con números enteros (naturales).

Un grupo no responde a la pregunta.

1. **Es un requisito**

   "Sí porque si no sé sumar con naturales no sabré con fracción" (P5H1P2A3)
   "Sí porque las fracciones tienen números naturales" (P5H1P2A4)
   "Sí es útil porque si no sabes las operaciones fundamentales no podrás realizar lo otro" (P5H1P2A12)
   "Sí, porque así aprendemos primero con números naturales" (P5H1P2A16)
   "Sí, porque si no sabes multiplicar no puedes multiplicar las fracciones" (P5H1P2A17)
   "Sí, porque si sabemos hacer operaciones con números naturales las podemos hacer con fracciones" (P5H1P2A18)
   "Sí porque aplico estas operaciones cuando hacemos fracciones" (P5H1P2A19)
   "Sí porque en las fracciones hay números decimales 4/6+40/6+20/6=64/6" (P5H1P2A20)
   "Sí porque sabiendo sumar con naturales podrás sumar fácilmente en las fracciones" (P5H1P2A8)
2. **Lo hace fácil**

   "Sí porque se me haría más fácil" (P5H1P2A9)
   "Porque opero con números naturales me va a ser más fácil**"** (P5H1P2A11)
   "Sí porque nos ayuda a no estar sumando con los dedos para hacerlo mentalmente" (P5H1P2A6)
3. **Respuesta confusa**

   "Sí porque en las fracciones hay miembros" (P5H1P2A7)
   "Sí me es útil trabajar con números naturales porque son iguales como se trabaja sino que una es fracciones y otro números naturales" (P5H1P2A10)
   "Sí porque es fácil con fracciones" (P5H1P2A13)
   "Sí porque al final que hayas todo sumas sus elementos que hayas" (P5H1P2A14)

4. **No responden**
   (P5H1P2A1)
   (P5H1P2A2)
   No sé (P5H1P2A5)
5. **No**
   “No porque no se puede operar. No porque no es igual operar con números naturales que con fracciones” (P5H1P2A15)

Caso 6

Los alumnos creen que operar con fracciones es útil porque lo consideran un requisito: si no se sabe operar con naturales tampoco se podrá con fracciones, además consideran existen o son parte de los naturales y que estos son la base de todas las operaciones.

Por otro lado, dos opinan que no porque son distintas o porque las fracciones no se pueden expresar en naturales. P6H1P2A11 no responde y P6H1P2A9 considera que es casi lo mismo.

Un grupo de alumnos, si bien considera que es útil saber operar con naturales para operar con fracciones, sus argumentos son no son precisos o no se ajustan a la formulación de la pregunta.

1. **Es un requisito**
   “Sí porque si no sabes resolver las operaciones con n° naturales menos lo vas a hacer con fracciones” (P6H1P2A4)
   “Sí porque si no sabes operar con números naturales tampoco lo harás con números fraccionarios” (P6H1P2A5)
   “Sí porque los números son la base de todas las operaciones” (P6H1P2A12)
   “Sí porque desde estos números existen los otros” (P6H1P2A13)
   “Sí porque las fracciones son partes de los números naturales” (P6H1P2A6)
2. **Hace más fácil la operación**
   “Sí porque te puede ayudar un poco así como en la multiplicación, resta, etc.” (P6H1P2A1)
   “Sí porque sería más fácil y las operaciones saldrían rápidamente” (P6H1P2A3)
   “Sí porque te ayuda a operar más rápido” (P6H1P2A7)
   “Sí porque son cualquier número pero me facilita cuando lo pongo en fracción, es decir no me demoro” (P6H1P2A15)
   Sí, porque sabiendo operaciones con números naturales se nos va a hacer más fácil operar con fracciones” (P6H1P2A17)

3. **Similitud**

   “Sí, porque es casi lo mismo” (P6H1P2A9)

4. **No**

   “No, porque son expresiones que no me pueden expresar en números naturales o enteros por ejemplo ½ Kg de arroz” (P6H1P2A10)

   “No porque cuando operamos con números naturales es muy diferente a operar con fracciones” (P6H1P2A16)

5. **No responde**

   (P6H1P2A11)

6. **Respuesta imprecisa**

   “Sí porque sí se puede” (P6H1P2A2)

   “Sí porque para mí es fácil operar fracciones” (P6H1P2A8)

   “Sí porque en todo momento vas a necesitar saber las sumas” (P6H1P2A14)

   “Sí porque en todo momento vas a necesitar saber una suma” (P6H1P2A18)

Hoja de Trabajo 1 – Pregunta 3 (H1Q3)

H1Q3: ¿Qué diferencia encuentras entre operar con números naturales y operar con fracciones?

Operar con fracciones implica una serie de acciones que no son necesarias con los números naturales, dadas las diferencias entre ambas cantidades. Al preguntar por las diferencias que encuentran entre operar con números naturales y con fracciones, buscamos indagar cuán presente está el conocimiento en el alumno, qué resalta más para él frente al mismo y si es capaz de comunicarlo tal como lo aplica en clase y a través de la resolución de problemas.

Caso 1

Todos los alumnos encuentran diferencias entre operar con números naturales y operar con fracciones. Las dos primeras hacen referencia a la simplicidad de las operaciones con números naturales en las que el trabajo es directo o más fácil. En el primer grupo, los alumnos hacen referencia directa a la necesidad de transformación en algunas operaciones, especificando en el tratamiento de las fracciones heterogéneas cuando se indica sumar o restar, que no es necesario al operar con números naturales. El segundo grupo responde de manera general, sin hacer referencia a las acciones que eso implica.

El tercer grupo encuentra la diferencia, pero no la explica, solo en un caso en el que confunde los números naturales con los números decimales. La confusión con decimales también se observa en el primer grupo.

La respuesta de P1H1P3A14 es confusa y P1H1P3A3 no responde.

1. **Simplicidad de la operaciones con números naturales**

   "En que las fracciones a veces hay que transformarlas para hacer una operación; en los naturales, no" (P1H1P3A1)

   "Que al operar con números naturales, por ejemplo, al sumar y al restar, no tienes que buscar números iguales, pero al sumar y restar fracciones tienes que buscar denominadores iguales, si no los tienes" (P1H1P3A4)

   "Que operar con números operas y ya está pero al operar con fracciones a lo mejor tienes que pasar las operaciones o buscar números equivalentes etc…" (P1H1P3A6)

   "~~Que con números naturales no lleva coma y con las fracciones, sí.~~ Que con los naturales ya lo haces directamente y con las fracciones no." (P1H1P3A11)

“Que si operas con números naturales es más fácil que operar con fracciones, y con números naturales puedes sumar fácilmente, sin buscar números equivalentes a otros” (P1H1P3A9)

“~~Que con números naturales~~. Que con fracciones es un poco difícil, porque cuando tienes que sumar ~~por ejemplo 1/5 + 2/3 hay~~ fracciones heterogéneas tienes que ~~pasar~~ reducir a común denominador y con los números naturales no” (P1H1P3A17)

2. **Es más fácil**

“Que operar con números naturales resulta más fácil” (P1H1P3A5)

“La diferencia es que operar con números naturales es más fácil y operar con fracciones es más difícil” (P1H1P3A9)

“Que operar con ~~números~~ fracciones puede resultar más complicado que operar con números naturales” (P1H1P3A10)

“Que operar con fracciones es más difícil y operar con números naturales es más fácil” (P1H1P3A13)

“Solo una. Que operar con la fracción es más difícil que con números naturales” (P1H1P3A15)

“Que operar con números naturales me parece más sencillo, aunque las fracciones tienen otras utilidades. Ejemplo: Quero comer la quinta parte de una torta. Expresado en fracción: Quero comer 1/5 de una torta” (P1H1P3A16)

“La diferencia es que operar con números naturales, ya es más fácil y menos lioso y más rápido que operar con fracciones” (P1H1P3A18)

3. **Son dos formas distintas**

“Que son de formas diferentes” (P1H1P3A2)

“Que cuando haces una operación natural te pueden dar comas y en las fracciones no se pueden utilizar comas. 2’5:1’0=2’5” (P1H1P3A7)

“Que se hace de forma distinta operar con números naturales que con fracciones” (P1H1P3A12)

4. **Argumento confuso**

“No dice cuántos tenías antes en las fracciones si” (P1H1P3A14)

Caso 2

Las diferencias expuestas por este grupo de estudiantes, están asociadas a la simplicidad de las operaciones. Por lo general, esta decanta en las operaciones con números naturales en las que son conscientes que se realiza de manera directa; sin embargo, para P2H1P3A17 son más simples las fracciones porque las cantidades son simples (cambiando el criterio de clasificación). Lo mismo puede ocurrir con P2H1P3A10.

El siguiente grupo encuentra la diferencia tomando en cuenta la naturaleza y características de las cantidades. En uno de los casos se hace evidente una confusión entre decimales y fracciones.

No todos los alumnos logran manifestar una respuesta a la pregunta.

1. **Asociada a la simplicidad de la operación**

   "Que con fracciones hay armarse un lío y con los naturales no" (P2H1P3A2)

   "Los números naturales son difíciles y los otros no" (P2H1P3A10)

   "Que operar con números naturales suele haber grandes cantidades y cuando operas con fracciones son trozos más pequeños y te es más fácil" (P2H1P3A17)

   "Con números naturales solo tienes que hacer una sola y con fracciones dos" (P2H1P3A12)

   "Que en las fracciones, el denominador si es distinto no se puede operar y en los naturales como no tiene denominador no hay problema" (P2H1P3A3)

   "Que no hay que sumar los numeradores y los denominadores si son homogéneas o heterogéneas" (P2H1P3A5)

   "Que cuando + - : números naturales se + tal cual se: tal cual etc. En cambio para – fracciones hay que multiplicar y después +" (P2H1P3A8)

2. **Asociada a la naturaleza de las cantidades**

   "Los números naturales son como 3+2 y con fracciones es 3/5 + 2/5" (P2H1P3A16)

   "Un número natural son cantidades. Una fracción son como partes de un número" (P2H1P3A7)

   "Que si multiplicas con números naturales sabes las cantidades" (P2H1P3A9)

   "Que al operar con números sumas todos los números que hay y en las fracciones no" (P2H1P3A14)

   "Que operar con fracciones es como operar con partes de algo" (P2H1P3A13)

   "Que las fracciones son partes que coges de algo" (P2H1P3A15)

   "Que las fracciones tienen una raya en el medio y los naturales no" (P2H1P3A19)

   "Que con fracciones tienes una coma para separar y con números naturales no tienes esa coma" (P2H1P3A20)

3. **No responde**

   (P2H1P3A1)
   (P2H1P3A4)
   (P2H1P3A6)
   (P2H1P3A11)
   (P2H1P3A18)

Caso 4

En este caso, las respuestas no hacen referencia a resolución de problemas, se basan en los procedimientos que se siguen en una y otra operación; se aprecia, además la referencia a aspectos de las mismas que (ya sea desde el punto de vista de la operación o de la cantidad). No obstante, sus explicaciones son generales y cuando son específicas tienen a la impresión.

El primer tipo de respuestas hace referencia al nivel de complejidad de una operación frente a la otra. Los alumnos centran la diferencia en ello, considerando las operaciones con números naturales más fáciles que las aplicadas a fracciones. No obstante, no hacen referencia a ningún aspecto del proceso de resolución.

- **Es más fácil (con los naturales)**

  "Que en el número natural es más fácil que el de las fracciones" (P4H1P3A7)

  "En que los números naturales es fácil pero con las fracciones es un poco difícil" (P4H1P3A4)

  "Que si opero con números naturales me parece fácil y con las fracciones que confundo mucho" (P4H1P3A8)

  "Que los números naturales son fáciles para operar" (P4H1P3A21)

  "Que operar con números naturales es un poco fácil y operar con fracciones es difícil pero aprendemos más" (P4H1P3A35)

  "Que los números naturales puedes sumar varios, en cambio en las fracciones heterogéneas es más difícil y en las operaciones homogéneas es más fácil" (P4H1P3A40)

En el siguiente grupo, sin embargo, la justificación involucra cierta referencia a algún aspecto de las mismas, ya sea la naturaleza o características de los números, o a la idea de un proceso diferente.

- **Señala algún aspecto de los números o sus elementos**

  "Que en la suma de números naturales son diferentes que las sumas de fracciones. {4+9=13} es diferente que {3/8+5/4= ¿______?}" (P4H1P3A12)

  "No es igual porque los números son diferentes" (P4H1P3A31)

  "Que ¾ no es igual que 5" (P4H1P3A24)

  "Que los naturales son 1, 2, 3, 4… y las fracciones 1/3, 2/2, 4/5, etc." (P4H1P3A5)

  "Nada porque no son números iguales" (P4H1P3A9)

  "Que con números naturales no se escribe sobre un número y en las fracciones sí" (P4H1P3A23)

“Sumar con número naturales es facilito porque el denominador debe estar con el mismo número y fracciones es bien difícil de dividir con números mayores” (P4H1P3A37)

“En que en número natural no hay denominador y numerador y en fracción sí hay” (P4H1P3A33)

“Que en fracciones saco la de 2 números y en naturales de uno solo” (P4H1P3A28)

“Que naturales es fácil en cambio con fracciones también pero la fracción tiene denominador y numerador y el número natural no” (P4H1P3A19)

- **Indica un proceso (o parte de él)**

“No, pero solo en que la suma de números naturales se colocan en rectas y en las fracciones en extremos” (P4H1P3A6)

“Encuentro que los números naturales porque no tengo que aplicar el resto de cosas y en fracciones es difícil porque tengo que aplicar todo lo que se escribe en cada fracción” (P4H1P3A13)

“Que en los naturales se opera normal, pero en las fracciones se hace un procedimiento” (P4H1P3A14)

“Porque con números naturales te da un buen resultado e igual con fracciones pero de diferente forma” (P4H1P3A29)

“Que ahí tienes otro procedimiento que es la suma” (P4H1P3A11)

“En operar números naturales se necesita + x : - y en la operación con fracciones convertir a mixta” (P4H1P3A38)

“Que en los naturales no se sacan el mínimo común múltiplo y que las fracciones también tienen fracciones mixtas” (P4H1P3A34)

“En que con números naturales no se saca M.C.M. en las heterogéneas pero en las fracciones sí” (P4H1P3A20)

“Operar con fracciones tienes que sacar M.C.M. y en cambio los números naturales nada más se suman” (P4H1P3A15)

“Yo encuentro las diferencias entre las fracciones y números naturales: Se utilizan muchas operaciones para hallar el resultado. Que solo son dos alternativas” ((P4H1P3A10)

“Que las fracciones se operan diferente” (P4H1P3A39)

“Que no se hace el mismo procedimiento” (P4H1P3A36)

“Que no son iguales que son diferentes al resolver” (P4H1P3A32)

“Que no son iguales” (P4H1P3A25)

“En sumar y restar” (P4H1P3A30)

Si bien el siguiente grupo hizo referencia a características o aspectos del proceso, confundieron con los números decimales:

- **Confunden con decimales**
  “Que sumar con números naturales no se utiliza la coma y en sumas de decimales sí” (P4H1P3A17)
  “Que los números naturales no llevan coma y se pueden sumar. En cambio al sumar o restar números decimales se le puede aumentar ceros y también poner la coma” (P4H1P3A16)
  “Porque a los naturales se les pone coma y a las fracciones no” (P4H1P3A3)
  “Que cuando sumas números naturales no se utiliza coma y en los decimales sí” (P4H1P3A1)

Por último, algunos alumnos no logran completar una idea, no responden o manifiestan que no saben.

- **Ideas incompletas**
  “Que los números naturales o un número” (P4H1P3A27)
  “Que operar con números naturales y operar con fracciones” (P4H1P3A22)
- **No sabe/no responde**
  “No sé” (P4H1P3A2)
  (P4H1P3A26)
  (P4H1P3A18)

Caso 5

Los alumnos expresan que la diferencia entre operar con números naturales y operar con fracciones está en la simplicidad de las primeras. Para quienes dan razones al respecto, la diferencia se identifica con el procedimiento seguido y con la naturaleza o estructura de las cantidades (las fracciones tienen numerador y denominador).

P5H1P3A16 expresa que no hay diferencia, aunque no especifica porqué. P5H1P3A19 intenta dar una respuesta pero esta es incompleta.

1. **Simplicidad de las operaciones con números naturales**
   “Que operar con fracciones es más difícil y con números naturales más fácil” (P5H1P3A4)
   “Que con números naturales es más fácil y con fracciones no tanto” (P5H1P3A9)
   “Que con números naturales es más fácil” (P5H1P3A11)

2. **Simplicidad de la operaciones con números naturales asociada a la cantidad de pasos (u operaciones simples)**

   "Que con números naturales es más rápido hallar en cambio con fracciones haces más operaciones con ella" (P5H1P3A14)

   "En que naturales sumas dos y fracciones sumas 4" (P5H1P3A8)

   "No sé. En que los números naturales son de una cifra y las fracciones tenemos que hacer un procedimiento un poco más grande." (P5H1P3A15)

   "Porque en fracciones se multiplica dos veces y en naturales se multiplica una vez y en la suma hay que sacar m.c.m." (P5H1P3A17)

   "Que con los naturales es más fácil porque no tengo que sacar m.c.m." (P5H1P3A3)

3. **Simplicidad de las operaciones con números naturales asociada a sus elementos**

   "Que en las fracciones se usa el término sobre además en las fracciones hay dos tipos de números que es numerador y denominador" (P5H1P3A6)

   "Que en los números naturales no tiene denominador ni numerador mientras las fracciones sí tienen hay un montón de diferencias…" (P5H1P3A10)

   "La diferencia es que en las fracciones se trabaja con numerador y denominador" (P5H1P3A12)

   "Fracciones: las realizamos con números menores a la unidad. N. Naturales: se hacen con números enteros" (P5H1P3A18)

   "Que las fracciones tienen dos cifras separadas" (P5H1P3A20)

4. **No hay diferencia**

   "Ninguna" (P5H1P3A16)

5. **Idea incompleta**

   "Que cuando operamos con números naturales" (P5H1P3A19)

6. **No responden**

   (P5H1P3A1)
   (P5H1P3A2)
   No sé (P5H1P3A5)
   No sé (P5H1P3A7)
   No sé (P5H1P3A13)

Caso 6

Los alumnos diferencian entre ambas operaciones, las mismas que están asociadas a la simplicidad de la fracción, precisando algunas de las acciones que hay que realizar o refiriéndose a la cantidad de operaciones. Asociada a esta idea están las respuestas del segundo grupo quienes aprecian las operaciones con números naturales más fáciles que con fracciones, sin precisar aspectos concretos de las mismas.

Un tercer grupo se decanta por las características que los números implicados para establecer las diferencias, ya sea en función de los números a operar o de los resultados obtenidos. Al respecto, P6H1P3A8 expresa que al operar con una u otra cantidad los resultados son de la misma naturaleza. P6H1P3A2 no encuentra diferencia, sin precisar y P6H1P3A11 no responde.

Se observan dos respuestas que se decantan por observar la diferencia pero los argumentos no son claros.

Simplicidad de la operaciones con números naturales

"Que al desarrollar fracciones tengo que utilizar ciertos métodos como: el mínimo común múltiplo, simplificación y otros; para poder encontrar la solución" (P6H1P3A1)

"En que los números naturales se operan directamente ya que no tienen denominador" (P6H1P3A3)

"Diferencias: que el número natural no tiene denominador ni numerador y que es más fácil con números naturales" (P6H1P3A4)

"Bueno, que operar con números naturales es más fácil y sencillo que operar con fracciones, además que las fracciones tienen como una pista para resolverla" (P6H1P3A7)

"Que los números naturales se operan simplemente y los fraccionarios se hacen una serie de operaciones" (P6H1P3A10)

"Que los números naturales no tienen numerador y denominador en cambio con las fracciones sí tienen y se te hace más fácil resolver los números naturales en vez de fracciones" (P6H1P3A17)

"Que operar números naturales es más fácil y operar con fracciones es más procedimiento" (P6H1P3A18)

"Que operar números naturales es más fácil y operar con fracciones es más procedimiento" (P6H1P3A14)

"Que las fracciones son partes y pueden haber más operaciones y los números naturales son enteros" (P6H1P3A6)

Es más fácil

"Que operar con fracciones es más complicado" (P6H1P3A5)

"Al operar con números naturales es mucho más sencillo que al hacerlo con fracciones" (P6H1P3A16)

“En que los números naturales son mucho más fáciles de resolver que en fracciones” (P6H1P3A12)

Naturaleza de los números

“Con números naturales los resultados o me dan números naturales y en operar con fracciones por lo general los resultados son fracciones” (P6H1P3A8)

“Que fracciones son parte de un todo y los números naturales no” (P6H1P3A13)

No encuentra diferencia

“Ninguno” (P6H1P3A2)

Confuso

“Que la fracción es la unidad dividida en varias partes en cambio en el tablero de valor posicional se divide en órdenes y tres órdenes forman una clase” (P6H1P3A9)

“Que los números naturales son como cualquier número y fracciones igual solo que se utilizan en compras, bueno en todo caso y en algunas fracciones te van a dar un número natural” (P6H1P3A15)

No responde

(P6H1P3A11)

Hoja de Trabajo 2 – Pregunta 1(H2Q1)

H2Q1: ¿Cómo harías para sumar dos fracciones? Explica por qué y escribe un ejemplo

Sumar fracciones implica pensar en dos casos muy marcados: suma de fracciones homogéneas y suma de fracciones heterogéneas. El proceso de enseñanza de la suma de fracciones ha partido de su representación gráfica para finalizar en la manipulación simbólica a través de la aplicación del procedimiento aprendido.

La primera pregunta busca conocer cómo los alumnos suman fracciones, qué procedimiento siguen, y la segunda pregunta intenta observar si consideran que hay otro método, uno distinto. La tercera pregunta indaga sobre los argumentos que expresa ante una operación que suele hacer casi mecánicamente.

Caso 1

Para explicar, los alumnos exponen los dos casos (Grupo 1), ya sea explicando el procedimiento en cada uno o considerando la existencia de uno (fracciones homogéneas) y explicando el otro (fracciones heterogéneas). Cabe indicar que si bien P1H2P1A4 expone los dos casos en uno de ellos confunde el procedimiento que sin embargo indica correctamente al explicar el segundo. Cabe indicar que los ejemplos brindados no ofrecen dificultad a los estudiantes, excepto en un caso: P1H2P1A1, al aplicar la suma de fracciones heterogéneas propone unos numeradores que no se corresponde con las fracciones originales. Asimismo, en ninguno de los casos, los alumnos simplifican las fracciones, acción que generalmente se explica en clase “para hacer más fácil la suma”. Por otro lado, los alumnos no responden al porqué de su forma excepto en el caso de P1H2P1A7 y P1H2P1A13 quienes argumentan que no podría sumarse con diferente denominador y por las características del numerador y denominador de la fracción.

1. **Se refieren a los dos casos**
   a) Expone los dos casos directamente
   “Primero mirar si los denominadores son iguales. Si lo son empiezas a sumar el numerador + el numerador y el denominador + el denominador. Si no lo son tenemos que mirar un número para los denominadores. El número tiene que ser igual y los denominadores no se suman. Después tenemos que dividir el denominador por el nuevo denominador y por lo que

tuviéramos que multiplicar lo multiplicamos por el numerador y solo nos queda sumar. $\frac{14}{8}+\frac{16}{9}=\frac{128}{72}+\frac{126}{72}=\frac{254}{72}$” (P1H2P1A4)

“Pues mirando si tienen los denominadores iguales. Si los tienen ya me vale ese denominador y si no lo tienen busco el más grande y lo divido entre los demás y si no cabe lo multiplico por el doble y si no me cabe; por el triple, etc. Y después cuando ya tengo el denominador exacto, tengo que saber qué número tuve que multiplicar para saberlo, y después se suma normal. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$” (P1H2P1A8)

“Si el denominador de las fracciones son iguales ya se puede hacer si no hay que buscar denominador común. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}+\frac{2}{4}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4}{8}$” (P1H2P1A10)

“Si los denominadores son iguales se puede hacer la suma. Por ejemplo. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$. Si los denominadores son diferentes hay que buscar denominador común, por ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}$” (P1H2P1A9)

b) Condiciona uno a otro (explica el de fracciones heterogéneas)

“Si el denominador es diferente lo pondría a común denominador. Después sumaría solo los numeradores y dejaría el denominador como está. Ejemplo 1. $\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$. Ejemplo 2. $\frac{7}{10}+\frac{9}{8}=\frac{4}{40}+\frac{5}{40}=\frac{9}{40}$” (P1H2P1A1)

“Primero tendría que mirar si son iguales los denominadores. Si no lo son tenemos que buscar el denominador más grande y pasar a común denominador porque no se puede sumar con los denominadores distintos. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$” (P1H2P1A7)

“Si no tienen el mismo denominador reducir a común denominador. $\frac{3}{4}+\frac{2}{2}=\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}$” (P1H2P1A15)

Por otro lado, tenemos que los alumnos hacen referencia a un solo caso, ya sea para sumar fracciones homogéneas o sumar fracciones heterogéneas, sin especificar la existencia del otro tipo de fracciones. En este caso, resaltamos la propuesta de P1H2P1A13 quien simplificó la fracción obtenida. Esta no es una conducta que se suele apreciar en las respuestas observadas aun cuando las fracciones que los mismos alumnos proponen pueden ser sujetas a simplificación previa o posterior (a partir de los resultados).

2. **Se refieren a la suma de fracciones homogéneas**

   “$\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=\frac{10}{2}$. Así se puede repartir algo como una torta” (P1H2P1A2)

   “Primero sumo los de arriba y después y después si hay n°s iguales lo pongo. $\frac{2}{12}+\frac{7}{12}=\frac{9}{12}$” (P1H2P2A3)

   “Sumar los numeradores como por ejemplo: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$” (P1H2P1A6)

   “Porque los números de arriba se suman, pero los de abajo se dejan igual. $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$” (P1H2P1A11)

   “Sumar los numerales y el denominador dejarlo como está. Porque el numerador son las partes que has cogido y el denominador las partes que has hecho. Por ejemplo: $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$” (P1H2P1A13)

   “Lo haría así, si los denominadores son iguales, sumaría los numeradores y dejaría los denominadores iguales. Por ejemplo así: $\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=\frac{14}{2}$” (P1H2P1A18)

3. **Se refieren a la suma de fracciones heterogéneas**

   “Buscando un denominador común, porque si no, no se puede sumar. $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}=\frac{4}{10}+\frac{15}{10}=\frac{19}{10}$” (P1H2P1A5)

   “Primero hay que reducir a común denominador para poder encontrar el denominador exacto y eso se hace dividiendo el denominador más grande entre los demás y si no da se divide por el doble y si no por el triple. Cuando ya tengamos el denominador tenemos que encontrar el numerador y eso lo hacemos dividiendo entre el denominador común y multiplicando lo que nos dé y luego ya se puede sumar. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{6}{4}$” (P1H2P1A12)

   “Reducirlas a común denominador, sumar los numeradores y dejar el denominador como está, después poner el resultado. Ejemplo: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}$” (P1H2P1A16)

“Para sumar dos fracciones, hay que reducir a común denominador y después ya pasado sumas. Ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}$” (P1H2P1A17)

Finalmente, P1H2P1A14 plantea un procedimiento para la suma de un tipo de fracción (homogénea) que no conduce a la suma de dichas fracciones, incluso si la suma se efectuara como lo explica[436], por ello se le denomina procedimiento absurdo.

4. **Plantea un tipo de fracción (procedimiento absurdo)**
   “Sumaría en diagonal y después depende de arriba o abajo. $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{7}{8}$” (P1H2P1A14)
5. **Responde al porqué**
   “Primero tendría que mirar si son iguales los denominadores. Si no lo son tenemos que buscar el denominador más grande y pasar a común denominador porque no se puede sumar con los denominadores distintos. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7}{8}$” (P1H2P1A7)

“Sumar los numerales y el denominador dejarlo como está. Porque el numerador son las partes que has cogido y el denominador las partes que has hecho. Por ejemplo: $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$ ” (P1H2P1A13)

Caso 2

Para responder a esta pregunta, los alumnos hacen referencia los pasos que hay que seguir para sumar fracciones, sobre todo los que corresponden a la suma de fracciones homogéneas. Explican a partir de los denominadores; es decir, indicando qué hay que hacer si los denominadores son iguales o diferentes. No explican por qué. Cuando se refieren a fracciones heterogéneas, los pasos expuestos son más generales, o específicos pero incompletos; los ejemplos, expuestos muestran más acciones que las que exponen textualmente. En muchos casos, son correctos, en otros tienen algún fallo al final del mismo o al inicio del proceso. Los fallos son de concepto como el caso de P2H2P1A6 o P2H2P1A16. Los alumnos explican el mismo proceso para suma de fracciones homogéneas y el mismo para todos los casos de suma de fracciones heterogéneas.

---

[436] De esta forma el resultado sería $\frac{12}{7}0\frac{7}{12}$.

Aun cuando los alumnos han aprendido que se debe simplificar las fracciones para un mejor trabajo, los alumnos no simplifican en los ejemplos que han expuesto cuando la situación lo ha ameritado.

Las distintas respuestas muestran las siguientes referencias:

1. **Exponen un procedimiento para cada tipo de suma (si los denominadores son iguales o si son diferentes)**

   “Si los denominadores son iguales sumo los numeradores y si los denominadores son diferentes los hago iguales y sumo. $\frac{8}{20}+\frac{6}{20}=\frac{14}{20};\frac{8}{5}+\frac{9}{6}=\frac{8\times 6}{5\times 6}+\frac{9\times 5}{6\times 5}=\frac{48}{30}+\frac{45}{30}=\frac{93}{30}$„ (P2H2P1A14)

2. **Explican un solo procedimiento (ya sea si los denominadores son iguales, diferentes o sin hacer referencia a ellos)**

   Denominadores iguales

   “En una suma de fracciones homogéneas se suman solo el numerador de las fracciones y se pone como está el denominador” (P2H2P1A4)

   Denominadores diferentes

   “Primero con un cálculo pondría los numeradores iguales: $\frac{3}{7}+\frac{5}{5}=\frac{3\times 5}{7\times 5}+\frac{5\times 7}{5\times 7}=\frac{15}{35}+\frac{35}{35}=\frac{50}{35}$” (P2H2P1A9)

   “Si los denominadores son desiguales hay que pasarlos a iguales. $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3+6}{4+6}+\frac{5+4}{6+4}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10}=\frac{18}{10}$” (P2H2P1A6)

   “Pues por ejemplo $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}$ lo que tienes que hacer es pasar los números para que sean iguales: $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{5\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{23}{12}$” (P2H2P1A15)

   “Primero conseguir que los denominadores sean iguales por si no lo son, luego poner el Sumar los numeradores y poner el mismo denominador. Ejemplo: $\frac{5}{6}+\frac{2}{6}=\frac{7}{6}$” (P2H2P1A13)

   “Multiplicar por un número para que los denominadores sean iguales y poder sumar. $\frac{8}{8}+\frac{7}{8}=\frac{15}{8}$” (P2H2P1A1)

   Sin especificar tipo de denominadores

“Primero multiplico el numerador con el denominador de la otra fracción y con los otros números: $\frac{3}{3}+\frac{2}{4}=\frac{2\times 5}{3\times 4}+\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}+\frac{10}{12}=\frac{20}{24}$” (P2H2P1A16)

“Multiplico el numerador de la 1ª fracción por el denominador de la otra con quien la quieres sumar. Por ejemplo: $\frac{2}{6}+\frac{6}{11}=\frac{2\times 11}{6\times 5}+\frac{2\times 11}{5\times 6}=\frac{22}{30}+\frac{22}{30}=\frac{44}{60}$” (P2H2P1A8)

“Sumas los numeradores y dejo los denominadores $\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}$” (P2H2P1A17)

“Multiplicando los denominadores por los denominadores y los numeradores por los denominadores $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{2\times 8}{5\times 8}+\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}=\frac{31}{40}$” (P2H2P1A18)

“Se suma los numeradores y se deja el denominador $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$” (P2H2P1A19)

“Sumando el numerador y el denominador” (P2H2P1A10)

“Se suman los numeradores y se deja el mismo denominador $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$” (P2H2P1A12)

3. **Hace referencia directa a la igualdad de denominadores, sin explicar algún procedimiento**

“Pues los denominadores son iguales $\frac{4}{14}+\frac{7}{14}=\frac{11}{14}$” (P2H2P1A2)

“Teniendo el denominador igual” (P2H2P1A11)

4. **Hace referencia a ambos casos de denominadores y explican el proceso de uno de ellos**

“Primero miraría que el denominador fueran iguales, si son distintos los transformaría a común denominador, luego sumaría los numeradores y pondría el denominador que se hicieron anteriormente iguales. $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{24}$” (P2H2P1A3)

“Se o denominador e iguel como $\frac{12}{3}\frac{9}{3}$ e o numerador no solo se sumaría el numerador por ejemplo: Homoxeneas $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}$ e os hetero son co denominador distinto” (P2H2P1A7)

“Sumar los numeradores y dejar los mismos denominadores. $\frac{4}{8}+\frac{4}{8}=\frac{8}{8}$. Sumando todo si sin heterogénea” (P2H2P1A5)

5. **Confunde con decimales**

“Pues pongo los decimales con los decimales las comas con las comas, etc… porque así es como se tiene que hacer por ejemplo: $3{,}8+5{,}03=8{,}83$” (P2H2P1A20)

Caso 4

Los alumnos asocian las formas de sumar fracciones a los dos casos existentes: suma de fracciones homogéneas y suma de fracciones heterogéneas. No hacen referencia explícita al tipo de fracciones, necesariamente, sino al tipo de denominadores que aparecen en la suma: si son iguales o si no lo son.

Para la suma de fracciones homogéneas el procedimiento explícito no es tan claro, preciso o completo (P4H2P1A12, P4H2P1A14, P4H2P1A20, P4H2P1A25).

Para la suma de fracciones heterogéneas siguen un proceso específico: sacar mínimo común múltiplo a los denominadores para transformarlos en “iguales”. En algunos casos el procedimiento indicado expresa que hay que sumar los denominadores. Por lo general, la explicación del procedimiento es más escueta que su aplicación (indican que se saca mcm pero no cómo), en la que los alumnos evidencian más acciones realizadas.

La idea de hacer hincapié en la simplificación es verificar si los alumnos ejecutan una acción que los docentes recomiendan para que la fracción se torne fácil (la idea es reducirla a la mínima expresión de esta manera las operaciones son más simples. Por otro lado, es una idea de tener claro que al simplificar fracciones trabajas con una fracción equivalente a la anterior e indirectamente se está transformando la suma a otra más simple). Se observa que los alumnos eligen para sus ejemplos fracciones que pueden simplificarse antes de operar, incluso que pueden transformar en enteros. En una propuesta externa (de la maestra, por ejemplo), la primera acción recomendable es simplificar fracciones; sin embargo, los alumnos no ejecutan la misma. En casos puntuales simplifican fracciones al obtener el resultado final. Las diferentes respuestas se pueden resumir de la siguiente forma:

La característica de este primer grupo es que los alumnos hacen referencia a los dos tipos de suma, explicitando el tipo de fracción o el tipo de denominador, excepto P4H2P1A6 que se refiere al tipo de denominador. Cabe indicar que P4H2P1A25 indica el procedimiento correcto para sumar fracciones heterogéneas hallando el mcm adecuado, pero el numerador no corresponde a las características de la operación. Por otro lado, P4H2P1A12 le sacaría mcm a ambos miembros.

1. **Explican dos procedimientos**

   “Homogéneas: Primero se suman los numeradores y luego los denominadores $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8}{8}=1$.

   Heterogéneas: $\frac{5}{2}+\frac{3}{8}=\frac{20+3}{8}=\frac{23}{8}$ Primero se saca el m.c.m., luego se divide con la fracción del denominador y luego se multiplica, luego se suma” (P4H2P1A14)

“Si son homogéneas se suman pero si son heterogéneas tienes que sacar M.C.M.” (P4H2P1A20)

“Si son homogéneas se pone el denominador igual y el numerador se cambia y si son heterogéneas se saca mínimo común múltiplo $\frac{7}{5}+\frac{9}{5}=\frac{16}{5}$ $\frac{8}{3}+\frac{5}{6}=\frac{40}{6}$” (P4H2P1A25)

“Si son homogéneas: sumamos nomás el numerador. Si son heterogéneas: La sacaríamos el M.C.M. al numerador, al denominador. Homogéneas: $\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=\frac{9}{9}$ Heterogéneas: $\frac{3}{8}+\frac{5}{9}=$ ¿_______?” (P4H2P1A12)

“$\frac{10}{10}+\frac{35}{10}=\frac{45}{10}$ Operaciones homogéneas. Se suman los numeradores y se copia el mismo denominador $\frac{10}{20}+\frac{20}{24}=\frac{}{144}+\frac{}{144}$ Operaciones heterogéneas se saca el M.C.M multiplican los números.” (P4H2P1A40)

“En la suma si el denominadores son iguales puedes sumar fácilmente pero si los denominadores son diferentes tengo que sacar m.c.m. $\frac{9}{3}+\frac{6}{3}=\frac{15}{3}$” (P4H2P1A6)

En el segundo grupo (Explican un procedimiento), los alumnos explican uno de los procedimientos anteriores. Dentro de este grupo, observamos diferentes casos. En primer lugar, los alumnos explican un procedimiento sin especificar el caso al que se aplica; es decir, de plantea de manera general. Suelen indicar que para sumar fracciones se saca mcm (P4H2P1A9, P4H2P1A10, P4H2P1A13, P4H2P1A15, P4H2P1A34), para lo que ejemplifican con una suma de fracciones heterogéneas (en ningún caso fracciones homogéneas) pero también otros procedimientos como sumar denominadores (P4H2P1A18, P4H2P1A19, P4H2P1A32, P4H2P1A35). El caso de P4H2P1A33 no es claro pues no está claro si se refiere a sumar numeradores y denominadores por separado o de manera conjunta. Por su parte P4H2P1A31 indica que hay que simplificar; sin embargo, no lo aplica en si ejemplo, en el que se puede aplicar esta acción. P4H2P1A21 y P4H2P1A36 resaltan la importancia de seguir “los pasos” para efectuar bien las sumas y ejemplifican a través de una suma de fracciones heterogéneas, mientras que P4H2P1A17 no ejemplifica pero al indicar que si “si sumaría de abajo no estaría bien efectuada”, sugiere una suma de fracciones homogéneas.

2. Explican un procedimiento

a) Sin especificar en qué casos se aplica

“Sacando el mínimo común múltiplo. Ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=\frac{4+15}{6}=\frac{19}{6}$” (P4H2P1A5)

“Sacar el M.C.M. para que me salga el resultado. Ejemplo: $\begin{array}{l}\frac{2}{4}+\frac{4}{2}=\frac{8}{4}\\ \frac{2+8}{4}=\frac{8}{4}\end{array}$” (P4H2P1A9)

“$\frac{10}{9}+\frac{8}{10}=\frac{18}{90}$ Primero se saca el mínimo común múltiplo de los denominadores y después el resultado se pone como denominador y se suma los numeradores” (P4H2P1A10)

“Para sumar 2 fracciones tengo que sacarle el m.c.m. al denominador. $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$” (P4H2P1A13)

“Sacaría el m.c.m. y después lo sumaría porque así son las reglas. $\frac{6}{7}+\frac{8}{4}=\frac{24}{28}+\frac{56}{28}=\frac{80}{28}$” (P4H2P1A15)

“Primero: saco los denominadores y les saco el M.C.M. Segundo: los numeradores los paso al costado y les pongo como denominador el M.C.M. Tercero: Resuelvo la operación de los numeradores y sigo con el denominador. $\frac{5}{3}+\frac{7}{4}=\frac{5}{12}+\frac{7}{12}=\frac{12}{12}$” (P4H2P1A34)

“Sumaría numerador con numerador, denominador con denominador y luego simplifico: $\frac{1}{5}+\frac{3}{3}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$” (P4H2P1A18)

“Lo haría de la siguiente forma: a los numeradores los sumaría y los denominadores también. Una vez que me dé el resultado, lo simplifico. Ejemplo: $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$” (P4H2P1A29)

“Los ordeno y sumo con el numerador y el numerador e igual con el denominador con el denominador. $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{6}{12}$” (P4H2P1A32)

“Sumo el numerador con el numerador y también el denominador con el denominador. $\frac{4}{4}+\frac{6}{5}+\frac{8}{6}=\frac{18}{15}$” (P4H2P1A35)

“Lo que haría es sumar el denominador y el numerador para que me pueda salir el resultado. Ejm. $\frac{2}{4}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$” (P4H2P1A33)

“Simplificar porque hay números mayores $\frac{10}{12}+\frac{20}{18}=\frac{5}{6}+\frac{10}{9}=\frac{15}{15}$” (P4H2P1A31)

“Yo haría para sumar fracciones seguir los pasos, porque con los pasos me sale bien. $\frac{2}{4}+\frac{5}{10}=\frac{10}{20}+\frac{10}{20}=\frac{\overset{1}{20}}{\underset{1}{20}}=1$” (P4H2P1A21)

“Seguir todos los pasos, para llegar al resultado. $\frac{3}{15}+\frac{2}{3}=\frac{3+10}{15}=\frac{13}{15}$” (P4H2P1A36)

“Sumaría de arriba abajo porque si sumaría de abajo no estaría bien efectuada. $\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$” (P4H2P1A17)

El subgrupo siguiente especifica el tipo de denominador al que aplica el procedimiento que transita entre si son iguales o diferentes. En el primer caso, el procedimiento no se indica; no obstante el ejemplo lo hace evidente (P4H2P1A8. P4H2P1A23, P4H2P1A37). En el segundo, el procedimiento es sacar mcm (P4H2P1A1, P4H2P1A19, P4H2P1A28), cada cual detalla con mayor precisión su proceso. Cabe indicar que P4H2P1A19 simplifica su fracción resultante.

b) En base al tipo de denominador

“Tengo que ver si el denominador es igual $\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$” (P4H2P1A8)

“Sumamos los numeradores y si los denominadores son iguales se nos hace más fáciles. Ejemplo: $\frac{4}{6}+\frac{8}{6}=\frac{12}{6}$” (P4H2P1A23)

“Cuando el denominador es igual. Ejm. $\frac{8}{4}+\frac{6}{4}=\frac{4+5}{4}=\frac{9}{4}$” (P4H2P1A37)

“Si son diferente denominador se sacaría M.C.M. Después sumarlo. Porque si no, no podríamos sumar. $\frac{3}{10}+\frac{2}{6}=\frac{9+10}{30}=\frac{19}{30}$” (P4H2P1A1)

“Sacar el m.c.m. Porque si los denominadores son diferentes se saca el m.c.m. Ejm. $\frac{11}{10}+\frac{9}{8}=\frac{\overset{\overset{1}{10}}{20}}{\underset{\underset{10}{20}}{40}}=\frac{1}{10}$” (P4H2P1A19)

“Primero se saca el m.c.m. de el D si son diferentes y de ahí el resultado se divide por el D y se multiplica con el N de ahí se suma el N y está listo. Ejem. $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{8}=\frac{8+18+6}{24}=\frac{32}{24}$” (P4H2P1A28)

El subgrupo que a continuación se presenta es parecido al anterior, la diferencia está en que detalla el tipo de fracción al que aplica el procedimiento, mientras que en el anterior la perspectiva es el tipo de denominador. En este caso, el procedimiento implica mcm; no obstante, si es número mixto el procedimiento empleado por P4H2P1A4 es sumar primero los números naturales. Su ejemplo no los incluye.

c) En base al tipo de fracción

“Primero si es número mixto se suma los números naturales. Después saco m.c.m. a los denominadores. Después el números que salió después de multiplicarlo lo ponemos de denominador, lo sacamos con los demás denominadores lo dividimos y los numeradores lo multiplicamos lo ponemos de denominador el resultado y ya está. $\frac{9}{10}+\frac{5}{20}+\frac{6}{18}=\frac{162+45+60}{180}=\frac{267}{180}$” (P4H2P1A4)

“$\frac{2}{5}+\frac{6}{3}=\frac{6+30}{15}=\frac{36}{15}$ Heterogéneas. Primero le saco m.c.m. a los denominadores, después el número que sale los dividimos con denominadores, después lo multiplico con el resultado que salió lo sumo. Porque así es su procedimiento” (P4H2P1A22)

El grupo que a continuación se detalla basa su proceso en la posición de los sumandos. Para el caso de las fracciones, la ubicación indica que el numerador debe estar en la parte superior y el denominador en la inferior. Se suele escribir las fracciones de la forma a/b, lo cual podría sugerir que esta es la forma horizontal. En este grupo se observa la tendencia a identificar como fracciones los números decimales.

d) En base a la posición/ubicación de las cantidades

“Las dos fracciones las pongo en forma horizontal…[437]” (P4H2P1A3)

---

[437] Coloca verticalmente la suma de dos números decimales: 0,35+ 0,25=0,60

“Poniendo una sobre otra. Ejemplo…[438]” (P4H2P1A16)

“Lo colocaría en forma vertical porque si no lo pones en forma vertical no se puede hacer la operación $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$ ” (P4H2P1A24)

“Primero lo pondría en vertical y lo sumaría porque una suma no debe tener la coma así: Por ejemplo…[439]” (P4H2P1A30)

P4H2P1A2 basa su procedimiento en operaciones que incluyen signos de agrupamiento; sin embargo, ejemplifica a través de una suma de números enteros.

e) En base a la relación entre los sumandos

“Sumo lo que está en el paréntesis y luego sumo lo que está al costado $213+(350+700)+800$ ” (P4H2P1A2)

El siguiente gripo de alumnos no expresa ningún procedimiento específico pero sí una operación concreta, por lo general homogénea. En P4H2P1A39 se observa la tendencia a relacionar fracciones con números decimales. En casos como P4H2P1A11, P4H2P1A38 hay una tendencia a expresar la suma como se sigue al sacar mcm en el que se coloca en denominador común y en el numerador se indica la suma producto de dividir el mcm por el denominador y multiplicarlo por los denominadores.

3. No explica procedimiento pero plantea una operación (<u>el “saber” como forma</u>)

“Saber cómo se suma y luego desarrollarla. Porque en cada fracción se sabe cómo sumar. $\frac{2}{5}+\frac{8}{5}=\frac{10}{5}$ ” (P4H2P1A7)

“ $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{2+2}{4}=\frac{4}{4}=1$ ” (P4H2P1A11)

“ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ ” (P4H2P1A27)

“ $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}=\frac{4+5}{4}=\frac{9}{4}$ Porque quiero saber el resultado” (P4H2P1A38)

“2,05+

---

[438] Coloca verticalmente la suma de dos números decimales: 36,40+33.50=69,90

[439] Coloca verticalmente la suma de dos números decimales: 3.4+0.10=

3,08
6,03” (P4H2P1A39)

P4H2P1A26 no responde esta pregunta ni las siguientes.

4. **No responde**
   (P4H2P1A26)

Caso 5

Para responder a esta pregunta los alumnos suelen basarse en una suma de fracciones heterogéneas, aplicando uno de los procedimientos que se enseñan en la escuela; por lo general, el último. La enseñanza de la suma de fracciones heterogéneas empieza con la propuesta de hallar fracciones equivalentes de manera independiente; luego multiplicando los denominadores o a través del mcm: este se expone como el más efectivo; de ahí que el primer paso, para los alumnos, es hallar el mcm., excepto en P5H2P1A11 que hace referencia a otro tipo de números. En P5H2P1A5 y P5H2P1A14 no es explícita la referencia; sin embargo, el proceso indica que el primer paso es este:

1. **Hacen referencia al mcm sin hacerlo explícito**
   “Primero lo convierto a homogéneas, luego lo divido denominador y denominador, lo multiplico con el numerador y luego lo sumo. $\frac{4}{2}+\frac{9}{3}=\frac{12}{6}+\frac{8}{6}=\frac{30}{6}=5$ ” (P5H2P1A5)

   “Primero cojo los denominadores y los simplifico y luego multiplico. Después lo divido con el 1er denominador y lo multiplico con el numerador y hago lo mismo con el otro y luego lo sumo” (P5H2P1A14)
2. **No hace referencia al mcm de manera clara.**
   “Multiplicando el número natural” (P5H2P1A11)

Por lo general, los alumnos tienen presente este paso y lo hacen evidente. Otros no. Los pasos restantes se exponen o no, algunos alumnos con más detalle que otros. Sin embargo, para quienes ejemplifican, las soluciones evidencian el procedimiento completo.

3. **Exponen los pasos a seguir**
   Detalla pasos

“1°Hallamos el mínimo común múltiplo. 2°Dividimos el denominador con el otro denominador. 3°Se multiplica e resultado que me dio con la división y si es necesario “simplifica”. Ejemplo: $\frac{3}{5}+\frac{5}{3}=\frac{9}{15}+\frac{25}{15}=\frac{34}{15}$” (P5H2P1A2)

“Se le saca m.c.m. al denominador, después los multiplicas y los divides con los denominadores anteriores y multiplicarlo con los numeradores. $\frac{4}{5}+\frac{2}{4}=\frac{16+10}{20}=\frac{26}{20}$” (P5H2P1A3)

“Poner las fracciones, sacar el mínimo común múltiplo, luego sumo y simplifico” (P5H2P2A4)

“Haré hallar el mínimo común múltiplo y luego sumar los numeradores porque así podemos realizar la operación y simplifico. $\frac{2}{10}+\frac{14}{25}=\frac{10}{50}+\frac{28}{50}=\frac{38}{50}=\frac{19}{25}$” (P5H2P1A6)

“Sacar el mínimo común múltiplo y dividirlo con el denominador y finalmente sumo. Sumaría el numerador y dejaría igual el denominador. $\frac{6}{3}+\frac{7}{3}=\frac{13}{3}$” (P5H2P1A7)

“Sumamos el numerador y el denominador, si es igual al segundo se deja igual y si no sacamos m.c.m. $\frac{5}{20}+\frac{19}{20}=\frac{24}{20}$; $\frac{5}{25}+\frac{17}{25}=\frac{15}{75}+\frac{85}{75}=\frac{100}{75}$. Sumo el numerador con el numerador y el denominador quedaría igual: $\frac{4}{10}+\frac{6}{15}=\frac{10}{25}$” (P5H2P1A8)

“Primero sacando M.C.M. para saber el cociente. Ej. $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=\frac{8}{28}+\frac{21}{28}=\frac{29}{28}$ Transformando las dos en homogéneas y sumando numerador con numerador y repitiendo en denominador” (P5H2P1A9)

“Saco el mínimo común múltiplo a los denominadores y luego sumarlos. $\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$ Los sumo como número natural los numeradores y se pone el mismo denominador” (P5H2P1A16)

“Sacando MCM cuando son diferentes los números $\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=\frac{5+6}{4}=\frac{30}{4}$ Sumar y sacar mínimo. $\frac{8}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}=\frac{72+9+1}{27}=\frac{92}{71}$” (P5H2P1A19)

No detalla pasos (textualmente)

“Sumar los numeradores $\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$. Saco el M.C.M.” (P5H2P1A20)

Hay dos términos que sobresalen: “sumar normal” o “sumar directo” aplicados cuando la suma se trata de fracciones homogéneas. Para los alumnos, esta suma es más evidente y no se explica.

4. Procedimiento para sumar fracciones homogéneas describiéndolo en una frase

“Primero hallo el m.c.m. Después sumo normal y luego si se puede se simplifica al final o se convierte a mixto. $\frac{23}{20}+\frac{30}{10}=\frac{23}{20}+\frac{60}{20}=\frac{83}{20}=4\frac{3}{20}$ ” (P5H2P1A1)

“Sacar el mínimo cuando son fracciones heterogéneas y cuando son homogéneas se suman directo. $\frac{2}{3}+\frac{10}{8}=\frac{16+30}{24}=\frac{46}{24}$ ” (P5H2P1A13)

Quienes justifican el procedimiento (que se basa en hallar el mcm) se basan en que es la forma de hacerlo para poder sumar y/o hallar el resultado ((P5H2P2A10, P5H2P2A12, (P5H2P2A15). Por otro lado, está P5H2P2A18, quien justifica que es lo principal y P5H2P2A18 a quien así le enseñaron. De esta forma, las justificaciones están en el uso del procedimiento para un fin posterior y no necesariamente en la naturaleza de las fracciones, aun cuando re refieran a ellas o a la igualdad o diferencia de los denominadores.

5. Justificación del procedimiento seguido

“Primero sumo los numeradores que me dan si no son iguales el denominador se le saca mínimo común múltiplo $\frac{2}{8}+\frac{9}{10}+\frac{5}{3}=\frac{12}{48}+\frac{36}{48}+\frac{80}{48}=\frac{128}{48}$ Por el tienen que sacar el m.c.m. para poder sumar las fracciones. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ ” (P5H2P1A10)

“Sacando el m.c.m. porque si no, no puedo dividir y sacar el resultado. Ejemplo: $\frac{2}{4}+\frac{6}{8}=\frac{4}{8}+\frac{6}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ Depende del denominador. Si el denominador es igual se suman los numeradores y se deja el mismo denominador. Si es distinto el denominador primero se saca MCM y después se suman los numeradores.” (P5H2P1A12)

“Le tengo que sacar el M.C.M. porque así obtenemos el resultado para poder sumar. Ejemplo. $\frac{4}{2}+\frac{1}{5}=\frac{24}{10}+\frac{51}{10}=\frac{75}{10}$. Se halla el mínimo común múltiplo. $\frac{8}{4}+\frac{3}{7}=\frac{56}{28}+\frac{12}{28}=\frac{68}{28}$ ” (P5H2P1A15)

“Sacar mínimo común múltiplo, dividirlo entre el denominador y multiplicar, y después sumar y simplificarlo si se puede o convertirlo a fracción. Porque así me enseñaron.

$\frac{2}{30}+\frac{7}{30}=\frac{15}{30}+\frac{7}{30}=\frac{22}{30}$ "Tienes que sacar m.c.m. si las fracciones son heterogéneas: $\frac{5}{20}+\frac{4}{2}=\frac{5}{20}+\frac{40}{20}=\frac{45}{20}$" (P5H2P1A17)

"Primero sacarle el mínimo común múltiplo. Porque es lo principal. Ej. 4 – 5… =20" (P5H2P1A18)

Caso 6

Los alumnos conocen el procedimiento para sumar fracciones, lo que se ha evidenciado en las clases observadas, en las que a través de la resolución de diferentes operaciones con fracciones los alumnos exponen la forma de ejecutarlas. En clase, la resolución de este tipo de actividades es con la dirección de la maestra. El objetivo de esta pregunta es observar si los alumnos pueden comunicar y explicar la forma de sumar dos fracciones, teniendo en cuenta que la suma de fracciones toma en cuenta dos casos distintos: la suma de fracciones homogéneas y la suma de fracciones heterogéneas.

De acuerdo a sus respuestas, los alumnos exponen una forma para cada tipo de fracción o para una de ellas ya sea para el caso de fracciones homogéneas o heterogéneas haciendo referencia explícita a las mismas o a las características de sus denominadores:

1. **Exponen ambas (homogéneas y heterogéneas)**

   "En el caso de fracciones homogéneas se suman los numeradores y se pone el mismo denominador, en fracciones heterogéneas se saca e mínimo común múltiplo. Ejemplo. Homogéneas $\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{9}{3}=3$ Porque son fracciones homogéneas. Heterogéneas $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{12+10}{15}=\frac{22}{15}$ porque son fracciones heterogéneas" (P6H2P1A1)

   "Si son homogéneas solo sumo sus numeradores y si son heterogéneas tengo que sacarle el mínimo común múltiplo a los denominadores, después tengo que dividir el número entre el denominador y multiplicar por el numerador, finalmente se sumas. a) $\frac{21}{8}+\frac{10}{8}=\frac{31}{8}$ b) $\frac{9}{5}+\frac{2}{10}=\frac{18+2}{10}=\frac{20}{10}=2$" (P6H2P1A7)

   "Para sumar dos fracciones si son homogéneas se suman los numeradores y se coloca el mismo denominador $\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=\frac{11}{4}$ Si son fracciones heterogéneas se saca mínimos común denominador y se procede a dividir con cada denominador y se multiplica con su respectivo numerador. $\frac{4}{7}+\frac{5}{6}=\frac{24+35}{42}=\frac{59}{42}$" (P6H2P1A10)

"Primero revisas si son homogéneas o heterogéneas. Si son homogéneas solo se suman los numeradores. Ej: $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ Y si son heterogéneas tienes que sacarle m.c.m. a los denominadores; luego que ya lo hallaste lo divides con el denominador y lo multiplicas con el numerador de cada uno. Ej:" (P6H2P1A12)

"Primero ver si es heterogénea u homogénea. $\frac{9}{3}+\frac{2}{6}=\frac{54+10}{30}=\frac{64}{30}=\frac{32}{15}=2\frac{2}{3}$" (P6H2P1A13)

Los casos expuestos muestran una misma forma de sumar fracciones. Para el caso de las fracciones heterogéneas, el primer paso es hallar el mcm. Las explicaciones de este proceso no es claro de manera textual; sin embargo, al aplicar un ejemplo, este se comprende mejor. No obstante, algunos de los alumnos yerran al aplicarlo (P6H2P1A13).

2. **Exponen una: heterogéneas**

"Los convierto a fracciones homogéneas porque sería una fórmula más rápida para llegar a la solución. Ejemplo. $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{6}{8}+\frac{7}{8}=\frac{13}{8}=1\frac{5}{8}$" (P6H2P1A3)

"Primero se saca el mcm y luego se divide entre denominador y resultado se multiplica por numerador. $\frac{10}{8}+\frac{5}{2}+\frac{1}{6}=\frac{30+60+4}{24}=\frac{\overset{47}{94}}{\underset{12}{24}}$" (P6H2P1A8)

"Fracción heterogénea. Primero se le saca el m.c.m. al denominador, después se divide con el denominador izquierdo luego se divide con el derecho cuando tenga el resultado se suma y le sale el resultado. $\frac{4}{8}+\frac{4}{6}=\frac{12+16}{24}=\frac{28}{24}$" (P6H2P1A17)

3. **Exponen una: homogéneas**

"Fracciones homogéneas. Sumaría su numerador pero el denominador sería el mismo. $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$" (P6H2P1A4)

"Fracciones homogénea $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}$" (P6H2P1A5)

“Para sumar fracciones homogéneas se suman los numeradores como números naturales y el denominador es el mismo que el de los sumandos y luego se simplifica (si se puede) $\frac{8}{4}+\frac{10}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$” (P6H2P1A6)

“Si son del mismo denominador se suman los numeradores y se coloca el mismo denominador $\frac{5}{6}+\frac{4}{8}=\frac{12+12}{24}=\frac{24}{24}$ $\frac{5}{9}+\frac{6}{9}=\frac{11}{9}$” (P6H2P1A14)

“Si son del mismo denominador se suman los numeradores y se coloca el mismo denominador. $\frac{3+4}{6+8}=\frac{12+12}{24}=\frac{24}{24}$ $\frac{5}{9}+\frac{6}{9}=\frac{11}{9}$” (P6H2P1A18)

En el grupo anterior, P6H2P1A14 expone la forma para fracciones homogéneas sin embargo propone un ejemplo de fracciones heterogéneas que sin embargo, resuelve incorrectamente.

El siguiente grupo no indica el tipo de fracción o denominadores a los que les aplica su procedimiento; sin embargo, P6H2P1A15 y P6H2P1A16 explica una suma de fracciones heterogéneas, lo que se corrobora con su ejemplo. P6H2P1A9 y P6H2P1A2 proponen como ejemplo una suma de fracciones heterogéneas cuyo procedimiento no se ajusta a los válidos para resolverlas.

4. **No especifica el tipo de fracciones sumadas (homogéneas o heterogéneas)**

“Sacar el m.c.m. de los denominadores y después dividirlo por el denominador izquierdo y multiplicarlo con el numerador, lo mismo con el denominador derecho. Porque si no se hace el procedimiento estará mal el resultado. Ejemplo: $\frac{1}{4}+\frac{9}{5}=\frac{5+36}{20}=\frac{41}{20}$” (P6H2P1A15)

“Primero escribo las fracciones, luego pongo signo igual, trazo una raya, extraigo el menor de los denominadores entonces este número lo coloco debajo de la raya y lo divido con el primer denominador, luego el resultado lo divido entre el numerador, el resultado lo pongo en la raya coloco el signo + luego lo mismo con la otra fracción luego sumo los dos números de arriba coloco el resultado después el de abajo y simplifico si es necesario. $\frac{9}{4}+\frac{6}{10}=\frac{45+12}{20}=\frac{57}{20}$ En el ejemplo no se puede simplificar porque 57 tiene tercia y 20 tiene mitad, cuarta, quinta y décima” (P6H2P1A16)

“Sumaría el denominador con el denominador y el numerador con el denominador por ejem. $\frac{12}{4}+\frac{17}{20}=\frac{29}{24}$” (P6H2P1A9)

“Se suma como naturales $\frac{2}{4}+\frac{3}{3}=\frac{5}{7}$” (P6H2P1A2)

P6H2P1A11 no responde la cuestión.

Hoja de Trabajo 2 – Pregunta 2 (H2Q2)

H2Q2: ¿De qué otra manera podrías sumar dos fracciones?

Caso 1

Los alumnos plantean un procedimiento distinto, independientemente del tipo de fracciones sumadas, considerando que hay otras formas de sumar dos fracciones. Por lo general, hacen referencia a la transformación de fracciones en números decimales o naturales y sumar a partir de ellos. Cabe indicar que P1H2P2A7 aplica la transformación a decimales, se desprende de las comas decimales, efectúa la suma como si fueran enteros sin retomar su naturaleza decimal con lo que el resultado es una cantidad que extralimita las condiciones de la suma propuesta (un octavo más un cuarto no puede ser ciento cincuenta).

1. **Plantea un procedimiento nuevo independientemente de la fracción**

“Transformando las fracciones en (~~decimales~~) números naturales, después sumaba los decimales y me daba el resultado pero si quiero transformo el resultado el fracción” (P1H2P2A1)

“Pues dividiendo el numerador y el denominador de las dos fracciones, o varias, y sumar los dos resultados y el resultado ponerlo en fracción” (P1H2P2A4)

“Pasando las fracciones a números enteros y decimales. $\frac{4}{5}+\frac{2}{4}=0'8+0'5=1'3$.” (P1H2P2A5)

“Transformando las fracciones en números naturales y sumar” (P1H2P2A6)

“Dividiendo el denominador por el numerador de las fracciones y después lo que me da lo sumo. $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=10\div 4=0'25;\frac{1}{8}=10\div 8=1'25;125+25=150$ ” (P1H2P2A7)

“Pasándolas a números decimales y sumándolas” (P1H2P2A12)

“Pasándolas a números y sumando. Ejemplo: $\frac{2}{4}+\frac{2}{10}=0'50+0'20=0'70$ ” (P1H2P2A16)

“Pasando las fracciones en números decimales” (P1H2P2A17)

El segundo caso está entre el anterior y el que le sigue, pues P1H2P2A13 indica un procedimiento distinto para la suma sin especificar el tipo de suma y, además, explica la forma de sumar dos fracciones heterogéneas que no fue explicado en su intervención previa.

2. **Plantea otro procedimiento y el otro tipo de fracción**

“Pasar todo a números naturales o si tienes, por ejemplo. $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$; hay que reducir a común denominador, que eso se hace cogiendo el denominador más grande y dividirlo entre los dos denominadores o los que haya hasta que nos dé un denominador igual al dividir entre los denominadores y después se multiplica por el número que hemos dividido los numeradores y al final se suma todo” (P1H2P2A13)

Continuando con la descripción, este grupo explica un procedimiento distinto que se aplica a un tipo diferente de suma, pensando en función del otro caso y no del mismo.

3. **Plantean el procedimiento para el otro tipo de fracción**

“Por ejemplo $\frac{3}{12}+\frac{5}{10}$ que no serían homogéneas y lo único que tienes que hacer es hacerlas homogéneas” (P1H2P2A11)

“Si tienen el mismo denominador: $\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}$” (P1H2P2A15)

“Lo haría así: Si los denominadores no son iguales buscaría un denominador común que sirviera para todos los denominadores, pero eso sí tendrían que ser con el mismo denominador o sea con el mismo número. Por ejemplo: $\frac{2}{4}+\frac{3}{2}=\frac{2}{4}+\frac{6}{4}=\frac{8}{4}$” (P1H2P2A18)

Este grupo de alumnos plantea como otra forma de sumar dos fracciones la misma explicada en su primea intervención; no obstante en el primer casos, P1H2P2A8 lo describe de distinta manera.

4. **Plantea el mismo procedimiento (para el mismo tipo de fracción)**

“Podría hacerlo buscando fracciones equivalentes: $\frac{3}{3} y \frac{6}{6}$ son fracciones equivalentes y se pueden sumar” (P1H2P2A8)

“Podría sumar fracciones también si los denominadores no son iguales. Habría que buscar denominador común por ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}$” (P1H2P2A9)

“Buscando denominador común” (P1H2P2A10)

P1H2P2A2 indica un ejemplo de suma sin explicar el procedimiento; no obstante se refiere al mismo tipo de suma indicado en su primera intervención. La misma no es efectuada; sin embargo, en su respuesta a la pregunta anterior, su planteamiento de solución fue correcto. Por su parte, P1H2P2A14 plantea un procedimiento que no se ajusta a las características de la suma, sin especificar una necesariamente ya que hace referencia a “el numerador y el denominador”. Finalmente P1H2P2A3 no responde.

5. **Plantea una operación distinta con el mismo tipo de fracciones**

   “$\frac{5}{2}+\left(\frac{6}{2}+\frac{5}{2}\right)\times 6=$” (P1H2P2A2)
6. **Plantea otro procedimiento absurdo**

   “Sumando el numerador y el denominador y me da el resultado.” (P1H2P2A14)
7. **No responde**

   (P1H2P2A3)

Caso 2

Esta pregunta se plantea con la finalidad de observar si los alumnos son capaces de generar procedimientos distintos para un mismo tipo de suma. Esto es importante en la resolución de problemas ya que permite actuar frente al mismo no desde el procedimiento aprendido sino desde el problema planteado.

Las respuestas formuladas por los alumnos se orientan a explicar el procedimiento para otro tipo de suma más no otro procedimiento para la misma. Así, si en la primera pregunta hicieron referencia a la suma de fracciones heterogéneas en este explican homogéneas. De esta manera, los alumnos exponen un solo procedimiento para la suma de fracciones homogéneas y uno para la suma de fracciones heterogéneas. En otros casos, hacen referencia al mismo caso expuesto en la primera pregunta.

Dada la limitación en la explicación verbal utilizada por los alumnos, algunas respuestas son confusas; sin embargo, por el procedimiento utilizado por los alumnos en la suma de fracciones heterogéneas, se deduce que se refieren a este tipo de suma.

Varios alumnos no respondieron y P2H2P2A14 indicó que ya había respondido en la primera pregunta. Por otro lado, P2H2P2A5 plantea un proceso incorrecto para suma de fracciones heterogéneas en su respuesta anterior y en esta hace referencia a un aspecto correcto de la misma: transformar a común denominador. P2H2P2A13 expone que no hay otro procedimiento ya que los que aplica le llevan a obtener denominadores iguales que es la meta en cualquiera de los casos expuestos.

1. **Hace referencia al otro caso de suma de fracciones**

“Multiplicando los denominadores y el numerador” (P2H2P2A2).

“Pues si los denominadores fueran iguales se sumaría el numerador y se pondría el denominador que sería igual. $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$” (P2H2P2A3)

“Sumando tal cual. Por ejemplo: $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$” (P2H2P2A8)

“Si los denominadores son iguales” (P2H2P2A6)

“En una suma de fracciones heterogéneas primero se hace que se puedan sumar multiplicando los dos denominadores y sumando los numeradores” (P2H2P2A4)

“Pues por ejemplo $\frac{5}{6}+\frac{7}{6}$ tienes que sumar lo de arriba y lo de abajo se deja igual: $\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=\frac{12}{6}$” (P2H2P2A15)

“Con distinto denominador” (P2H2P2A19)

2. **Hace referencia al caso explicado**

“Si los denominadores son iguales” (P2H2P2A1)

“Transformar a común denominador” (P2H2P2A5)

“Sumando el numerador con el denominador y el denominador con el denominador” (P2H2P2A10)

“Sumando los numeradores con numeradores y los denominadores con los denominadores” (P2H2P2A16) primero heterogéneas

“Sacando los denominadores y sumando los numeradores” (P2H2P2A17)

“Respondí esta pregunta en la primera” (P2H2P2A14)

3. **No hay otro procedimiento**

“No porque los denominadores tienen que ser iguales” (P2H2P2A13)

“Se podría sumar en forma homogénea” (P2H2P2A20)

4. **No responden**

(P2H2P2A7)
(P2H2P2A9)
(P2H2P2A11)
(P2H2P2A12)
(P2H2P2A18)

Caso 4

Los alumnos que conciben otra forma de sumar dos fracciones asocian la misma a la aplicada en uno de los tipos que hay: homogéneas o heterogéneas. No se muestra una forma distinta para una misma suma que implique otra vía. Por lo general indican la suma que no indicaron en la primera pregunta como dos formas diferentes de sumar fracciones (P4H2P2A1, P4H2P2A5[440], P4H2P2A8, P4H2P2A22, P4H2P2A23, P4H2P2A27, P4H2P2A28, P4H2P2A33, P4H2P2A34, P4H2P2A37); siempre considerando la manipulación de las fracciones, es decir, operando con ellas:

1. **Se refieren a uno de los tipos de suma (distinto al de la primera pregunta)**

De igual denominador pero ya no se saca M.C.M. $\frac{8}{5}+\frac{7}{5}=\frac{15}{5}$” (P4H2P2A1)

“Sumamos nomás los denominadores $\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{12}{3}$” (P4H2P2A5)

“Sacando el mínimo común múltiplo: $\frac{2}{6}+\frac{4}{8}=\frac{8+12}{24}=\frac{\overset{\overset{5}{10}}{20}}{\underset{\underset{6}{12}}{24}}=\frac{5}{6}$” (P4H2P2A8)

“ $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}$ Homogénea” (P4H2P2A22)

“Cuando el denominador no es igual al numerador se saca M.C.M. Ejemplo: $\frac{3}{8}+\frac{4}{6}=\frac{9+16}{24}=\frac{25}{24}$” (P4H2P2A23)

“Homogéneas $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$” (P4H2P2A27)

“Sumando el numerador y el denominador no” (P4H2P2A28)

“De manera homogénea. Ejm. $\frac{3}{9}+\frac{7}{9}=\frac{10}{9}$” (P4H2P2A33)

“De forma mixta o cuando el denominador sea igual no hacemos M.C.M.” (P4H2P2A34)

“Cuando no está el denominador no es igual. Ejm. $\frac{6}{3}+\frac{9}{2}=\frac{3}{3}+\frac{3}{1}=\frac{4}{1}$ y tengo que sacarle tercia y mitad.” (P4H2P2A37)

Otros sin embargo, redundan en el mismo caso, explicándolo o expresando un procedimiento distinto erróneo. P4H2P2A40 explica el ejemplo que desarrolló en la primera parte, se podría entender que una forma es desarrollando la operación y otra explicándola, mientras que P4H2P2A18 redunda. P4H2P2A10 se refiere al mismo procedimiento (sacar mcm) pero en diferente posición, además cambia el mismo al indicar que se suman los denominadores y no los numeradores como en la primera respuesta. Algo similar ocurre con P4H2P2A13. P4H2P2A32 también explica el mismo caso, aunque con mayor precisión que en la primera pregunta en la que su explicación no correspondía con el

---

[440] Para este caso, el proceso no se corresponde con el ejemplo; sin embargo, se puede pensar que algunos alumnos confunden los términos numerador y denominador al momento de nombrarlos.

ejemplo expuesto. Algo parecido ocurre con P4H2P2A35 quien en la primera pregunta expone una forma incorrecta y en esta pregunta, aunque no llega a ejemplificar o detallar el proceso es certero (sacar mcm y luego resolverlas). P4H2P2A9 muestra el mismo ejemplo pero con un resultado diferente (erróneo). Si bien, P4H2P2A19 explica el caso distinto al indicado en la primera pregunta, también explica aquel de una manera confusa.

2. **Redundan en el mismo caso**

“Porque las fracciones homogéneas además se suman los numeradores y se pone el mismo denominador” (P4H2P2A40)

“Si se podría simplificar o lo que voy usando la operación” (P4H2P2A18)

“Primero sumando los dos denominadores y después sacar el M.C.M” (P4H2P2A10)

“También se podría sumar 2 fracciones es numerador por numerador y denominador por denominador luego sacarle el m.c.m.” (P4H2P2A13)

“Poniendo el denominador igual o sea sacando el mcm” (P4H2P2A32)

“Sacándole el mínimo común múltiplo y luego resolverlas” (P4H2P2A35)

“$\frac{2}{4}+\frac{4}{2}=\frac{8}{8}=1$” (P4H2P2A9)

“Cuando el numerador son diferente lo sumo y cuando el denominador es igual pongo el mismo denominador” (P4H2P2A19)

Los siguientes casos son confusos. P4H2P2A38 asocia la suma de fracciones con una operación combinada, pero su ejemplo, igual al del primer caso, lo resuelve de distinta manera, tal como ocurre con P4H2P2A9, en el grupo anterior. P4H2P2A6 hace referencia a una manera directa, pero no detalla y P4H2P2A7 hace suponer que se refiere a una suma de fracciones heterogéneas porque en el primer caso expuso homogéneas.

3. **Procedimientos confusos**

“De otra manera como la directa” (P4H2P2A6)

“Sabiendo cuál es el denominador y cuál es el numerador” (P4H2P2A7)

“Porque es operación combinada” (P4H2P2A38)

Los casos siguientes hacen referencia a números decimales, en todos los casos para una u otra pregunta su respuesta está centrada en estos números, excepto para P4H2P2A29 quien en el primer caso se centró en fracciones, por lo que concibe otra forma asociada a otro tipo de números. Lo mismo puede ocurrir con P4H2P2A36. P4H2P2A2 centra su respuestas en los números naturales y el uso de paréntesis exponiendo como otra forma, una suma diferente, pero con las mismas características (uso de paréntesis).

4. **Referencia a otro tipo de números**

“En forma vertical” (P4H2P2A3)
“Poniendo como una línea horizontal” (P4H2P2A16)
“Puedo sumarlo en horizontal pero debo tener en cuenta la coma” (P4H2P2A30)
“7,8+
8,10

15.90” (P4H2P2A39)

“35,40+

22,51

11,04

68,95” (P4H2P2A29)

“Con números naturales” (P4H2P2A36)

“248 + (840 (485+988)” (P4H2P2A2)

Cabe indicar que P4H2P2A12 expresa como forma distinta el operar mentalmente.

Un buen grupo de alumnos manifiesta no conocer o saber otra forma (P4H2P2A4, P4H2P2A11, P4H2P2A17, P4H2P2A21, P4H2P2A24), otros aseguran que no hay otra manera (P4H2P2A14), que no se puede (P4H2P2A20) o simplemente “ya no tengo más ideas” (P4H2P2A25). Asimismo, están quienes no responden; dos de ellos, anteriormente respondieron a una forma: una asociada al mcm y al uso de reglas (P4H2P2A15) y el otro indicó el simplificar como procedimiento (P4H2P2A31).

5. **No se puede/no hay otra/no conozco**

“Yo que sepa no” (P4H2P2A4)
“No sé otra manera” (P4H2P2A11)
“No, no hay de otra manera” (P4H2P2A14)
“No conozco otra” (P4H2P2A17)

"No se puede" (P4H2P2A20)
"Solo eso es mi manera" (P4H2P2A21)
"No conozco otra forma" (P4H2P2A24)
"Ya no tengo más ideas" (P4H2P2A25)

6. **No responde**
   "¿?" (P4H2P2A15)
   (P4H2P2A26)
   (P4H2P2A31)

Caso 5

Para responder a esta pregunta, los alumnos hacen referencia al uso de la calculadora, distinguiendo una forma "manual" y otra con el uso de la calculadora:

1. **Usando la calculadora**
   "Usando la calculadora" (P5H2P2A2)
   "Con la calculadora" (P5H2P2A3)
   "Con la calculadora. Sacando el mínimo común múltiplo (MCM)" (P5H2P2A16)

Otros asocian otra forma con un tipo de operación distinta debido a la característica de sus denominadores (según sean fracciones homogéneas o heterogéneas):

2. **Asociada a otro tipo de suma (fracciones homogéneas o heterogéneas)**
   "Si el denominador es igual sacamos mínimo común múltiplo. Sacando el mínimo común múltiplo" (P5H2P2A8)
   "Con homogéneas hallas el mínimo común múltiplo lo divides con los denominadores, lo multiplicas con el numerador y lo sumas $\frac{40}{60}+\frac{20}{100}=\frac{5}{300}+\frac{60}{300}=\frac{65}{300}=\frac{13}{60}$ Sumando los que están arriba" (P5H2P2A20)
   "No sé. Los de las homogéneas" (P5H2P2A17)
   "No sé. Sacando Mínimo común múltiplo cuando los denominadores son diferentes" (P5H2P2A7)

P5H2P2A1 expone una forma distinta de hallar el mcm (observando los denominadores). Esta forma ha sido trabajada en clase cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro, así como la expuesta por P5H2P2A19. Para P5H2P2A10, P5H2P2A14 y P5H2P2A18 la otra forma es a través de la simplificación de fracciones. Este paso se incluye dentro del procedimiento general en el que la simplificación puede darse al inicio, en el proceso o al final. Para P5H2P2A12 la forma distinta es dividiendo. En algunos, casos, los alumnos dividen la fracción transformando la suma en una de números decimales. Sin embargo, para otros hay muchas formas o no hay ninguna otra que la expuesta e indican que no la hay o no saber si la hay.

3. **Formas distintas sin hacer referencia al tipo de fracciones sumadas**

   “Viendo si el número es múltiplo de otro y después se divide y se multiplica y al final sumas” (P5H2P2A1)
   “Multiplicando los denominadores y hallando un múltiplo de los dos. Sumando los dos” (P5H2P2A19)
   “Sumando de varias manera si el denominador es igual. Simplificando las fracciones” (P5H2P2A10)
   “Simplificando” (P5H2P2A14)
   “Simplificándolas” (P5H2P2A18)
   “Dividiendo” (P5H2P2A12)
   “No hay” (P5H2P2A5)
   “No sé otra manera. No hay otra” (P5H2P2A9)
   “No sé” (P5H2P2A13)
   “No sé. No sé, no hay” (P5H2P2A15)
   “De ninguna otra forma, es lo único que me sé” (P5H2P2A6)
   “De muchas” (P5H2P2A4)

P5H2P2A11 responde en base a los números naturales: “Sumando los números naturales” (P5H2P2A11)

Caso 6

El objetivo de esta pregunta es observar si los alumnos plantean formas distintas de resolver operaciones, lo que les es favorable en la resolución de problemas ya que permite idear un camino personal de resolución del mismo de acuerdo a sus conocimientos previos y capacidad de operatividad cuando los problemas son aritméticos.

Los alumnos asocian otras formas a otro tipo de fracciones, de esta manera si en la primera pregunta explicaron según la suma es de fracciones homogéneas en esta exponen o hacen referencia a la suma de fracciones heterogéneas (y viceversa).

1. **Hacen referencia al otro caso:**

   "Sacando el m.c.m. a los denominadores" (P6H2P2A3)

   "Fracciones heterogéneas. ¿?" (P6H2P2A4)

   "Fracciones heterogéneas: $\frac{3}{7}+\frac{7}{4}=\frac{12}{28}+\frac{49}{28}=\frac{12+49}{28}=\frac{61}{28}$" (P6H2P2A5)

   "Para sumar fracciones heterogéneas se saca el m.c.m. de los denominadores para dar al resultado del denominador, se divide entre los denominadores y se multiplica por los numeradores $\frac{15}{10}+\frac{10}{20}+\frac{20}{10}=\frac{10+10+40}{20}=\frac{60}{20}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=3$" (P6H2P2A6)

   "Solo si son fracciones homogéneas se suman los numeradores se suman y se coloca el mismo denominador" (P6H2P2A16)

Los casos siguientes solo exponen una suma de fracciones sin indicar forma alguna de resolverla; sin embargo P6H2P2A13 ejemplifica el caso distinto, P6H2P2A17 el mismo y P6H2P2A10 uno de los anteriores, con lo cual la forma expuesta como distinta es la misma.

2. **Exponen una suma resuelta**

   "$\frac{4}{6}+\frac{4}{6}=\frac{8}{6}$" (P6H2P2A13)

   "$\frac{12}{9}+\frac{3}{9}=\frac{17}{18}$" (P6H2P2A10)

   "$\frac{6}{6}+\frac{7}{3}=\frac{6+14}{6}=\frac{20}{6}$" (P6H2P2A17)

Los casos siguientes no indican para qué tipo de suma exponen su propuesta; sin embargo, se decantan por procedimientos distintos para hallar el mcm (P6H2P2A15) o a través de la manipulación de los sumandos (P6H2P2A7 y P6H2P2A18). En estos casos, son parte del proceso general que P6H2P2A7 no aplicó en su primera respuesta y P6H2P2A8, sí.

3. **No hacen referencia al tipo de suma**

   "Convirtiendo las fracciones a números mixtos. Ejm. $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ 5:3=1 (2)" (P6H2P2A7)

   "Sacándole mitad para que me dé las operaciones $\frac{4}{4}+\frac{9}{5}=\frac{9+13}{20}=\frac{\overset{11}{22}}{\underset{10}{20}}=\frac{11}{10}$" (P6H2P2A8)

“Multiplicando en aspa x de una fracción con otra y al resultado lo suma $\frac{1}{4}+\frac{9}{5}=\frac{5+36}{20}=\frac{41}{20}$ ” (P6H2P2A15)

Finalmente, P6H2P2A14 y P6H2P2A18 ven como una forma distinta el uso de la fórmula. En su primera respuesta explicaron la suma de fracciones homogéneas aunque ejemplificaron las dos, por lo que “la fórmula” puede referirse al caso de fracciones heterogéneas en las que hay que seguir un paso previo (para hallar el denominador común).

4. **Uso de la fórmula**

“Utilizando la fórmula” (P6H2P2A14)
“Utilizando la fórmula” (P6H2P2A18)

Un grupo de alumnos no responde la pregunta, argumenta no saber o no haber otra forma.

5. **No responde/no sabe/no existe**

(P6H2P2A1)
(P6H2P2A11)
“No se” (P6H2P2A2)
“No sé” (P6H2P2A12)
“De ninguna otra” (P6H2P2A9)

Hoja de Trabajo 2 – Pregunta 3 (H2Q3)

H2Q3: ¿Por qué al sumar fracciones homogéneas, el resultado es una fracción con el mismo denominador que las fracciones que has sumado?

Caso 1

Las respuestas brindadas por los alumnos son de dos tipos: el primero redunda sobre la idea; es decir, tienden a emplear las mismas palabras usadas en la pregunta. El segundo tipo intenta explicar en base a las características del denominador y su función dentro de la fracción. Los alumnos, por lo general, describen textualmente la situación; sin embargo, P1H2P3A5 lo hace a partir de un caso concreto. Retomando la idea anterior, si bien las operaciones son correctas, P1H2P1A18 no simplifican cuando podría hacerlo.

1. **Explica sobre la misma idea**

   "Porque al sumar fracciones con el mismo denominador, no se debe cambiar por otro número. Por ejemplo: $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}$" (P1H2P3A18)

   "Porque para sumar fracciones homogéneas, el denominador no cambia, cambia el numerador" (P1H2P3A17)

   "Porque el denominador no se suma" (P1H2P3A15)

   "Porque el denominador se deja como está" (P1H2P3A11)

   "Porque el denominador de una fracción y otro denominador de otra fracción son iguales, el resultado de la fracción en el denominador va a dar lo mismo" (P1H2P3A10)

   "Porque el denominador no puede cambiar" (P1H2P3A2)

   "Porque el denominador es igual" (P1H2P3A3)

   "Porque el denominador no se suma" (P1H2P3A4)

   "Porque el denominador no cambia y porque no se puede sumar con distinto denominador" (P1H2P3A7)

2. **Explica describiendo la función del denominador**

   "Porque el numerador solo indica el número de partes iguales en las que está dividida la unidad, en cambio, el numerador indica cuántas partes tienes. Ejemplo: Indica cuántos tienes $\frac{3}{4}$ Indica que la unidad divide en cuartos" (P1H2P3A16)

   "Porque el denominador son las partes que has hecho" (P1H2P3A13)

"Porque se está trabajando con las mismas partes" (P1H2P3A9)
"Porque el denominador no hay que sumarlo solo te indica cuántas partes tiene, por ejemplo, una tarta" (P1H2P3A6)
"Porque si sumas, 3/4+2/4, no te pueden dar dos quintos" (P1H2P3A5)

Un tercer grupo, si bien busca una explicación más allá de incidir en la expresión de la pregunta, sus justificaciones no aclaran la pregunta. En el caso de P1H2P3A12, la propiedad conmutativa no se corresponde con la forma de sumar dos fracciones y en el caso de P1H2P3A8, se entiende que justifica en función de una suma de fracciones heterogéneas en las que buscas dos fracciones equivalentes que sean homogéneas, pero no dice nada de por qué no se suman los denominadores en esta. A esta pregunta, dos alumnos no respondieron.

3. **Explica en función de ideas que no corresponden**
   Asociada a la propiedad conmutativa
   "Porque la suma tiene la propiedad conmutativa" (P1H2P3A12)
   Asociada a la equivalencia
   "Porque las fracciones homogéneas son equivalentes" (P1H2P3A8)
4. **No responde**
   (P1H2P3A14)
   (P1H2P3A1)

Caso 2

Los alumnos suelen realizar un proceso porque "así se hace" o porque "así me han enseñado". Algunas de las clases observadas, como la C1P2 se han caracterizado por insistir que los alumnos expliquen lo que hacían o tenían que hacer frente a un problema, situación problemática u operación con fracciones, diferenciando en "qué tienes que hacer" (por ejemplo, hallar la fracción de un número) y "cómo lo tienes que hacer" (multiplicando el número por el numerador y dividiendo por el denominador). De esta manera, los alumnos ante una suma de fracciones homogéneas escriben el mismo denominador porque así es el procedimiento (o el truco). A este grupo, la docente le ha explicado gráficamente cómo se genera la suma de fracciones homogéneas, llegando a la forma simbólica de la misma; es decir, los alumnos visualizaron gráficamente el comportamiento del numerador y del denominador de las fracciones a través de un caso concreto.

Frente a la pregunta se espera que los alumnos tengan en cuenta esta transformación y la usen para responder a esta pregunta: ¿Por qué al sumar fracciones homogéneas, el resultado es una fracción con el mismo denominador que las fracciones que has sumado?

Las respuestas brindadas hacen referencia al trabajo operativo y a la característica de los denominadores (iguales). De esta manera:

1. **Responden con la "regla" (o parte de ella)**

   "Porque tienen el mismo denominador" (P2H2P3A5)
   "Porque siempre se pone el mismo denominador" (P2H2P3A6)
   "Porque el denominador no se suma" (P2H2P3A9)
   "Porque no cambia" (P2H2P3A7)
   "Porque el denominador no se suma" (P2H2P3A10)
   "Porque se le suman los numeradores" (P2H2P3A13)
   "Porque solo se suman las partes que tú coges no las que haces" (P2H2P3A14)
   "Porque has hecho las mismas partes en los dos sitios por ejemplo hacemos en dos pasteles diez partes y nos comemos dos en cada ¿cuántos trozos nos comimos? $\frac{2}{10}+\frac{2}{10}=\frac{4}{10}$ de los dos pasteles" (P2H2P3A17)

2. **Responden con un procedimiento**

   "Porque el denominador se transforma, se multiplican los dos denominadores y el numerador con el denominador de la otra fracción" (P2H2P3A3)
   "Porque primero multiplicas y después sumas" (P2H2P3A16)
   "Porque el denominador se multiplica por el otro denominador y el resultado es una fracción con el mismo denominador" (P2H2P3A18)
   "Porque depende de la forma que lo pongas siempre da lo mismo" (P2H2P3A2)

   Si bien P2H2P3A17 se basa en la manipulación de las unidades, se decanta por la similitud de las partes: "has hecho las mismas partes en los dos sitios", lo que lo lleva a ubicarse en la "regla" o procedimiento indicado: "denominadores iguales, se coloca el mismo denominador". El caso ejemplo expuesto refuerza esta idea.

Por otro lado, la respuesta de P2H2P3A2 es un poco confusa; no obstante, tiende a explicar un procedimiento, por ello, se asocia al segundo grupo.

En ninguno de los casos, los alumnos expusieron el carácter estático o permanente del denominador, más bien como el caso de P2H2P3A3 asocian este a la transformación que debe sufrir.

3. **No responde**
   (P2H2P3A1)
   (P2H2P3A4)
   (P2H2P3A8)
   (P2H2P3A11)
   (P2H2P3A12)
   (P2H2P3A15)
   (P2H2P3A19)
   (P2H2P3A20)

Caso 4

Las respuestas a esta pregunta están en función de las características del denominador de las fracciones homogéneas (son iguales). No hay un fundamento diferente o asociado a la función del denominador de una fracción. En algunos casos expresan que así es la regla, por lo tanto la justificación se basa en seguir una regla y aplicarla como se indica.

1. **Relación del denominador de las fracciones homogéneas**
   "Porque las fracciones homogéneas tienen el mismo denominador" (P4H2P3A1)
   "Porque el numerador tiene que ser diferente y el denominador igual" (P4H2P3A3)
   "Porque no vamos a sacar m.c.m. a los números iguales" (P4H2P3A4)
   "Porque el denominador es igual. Ejm: $\frac{2}{4}+\frac{8}{4}=\frac{10}{4}$" (P4H2P3A5)
   "Porque en el denominador no se suma excepto cuando es diferente se saca el mínimo común múltiplo" (P4H2P3A7)
   "Porque siempre tienen igual denominador" (P4H2P3A10)
   "Porque tiene el mismo denominador" (P4H2P3A11)
   "Porque son igual denominador, porque si fuera de otro denominador lo sacaríamos diferente o de otra manera" (P4H2P3A12)
   "Porque en ese caso, cuando los denominadores son iguales no es necesario sacar el m.c.m." (P4H2P3A14)
   "Porque no se saca m.c.m." (P4H2P3A15)
   "Porque el denominador siempre deben ser iguales" (P4H2P3A16)
   "Porque la suma es de igual denominador" (P4H2P3A17)

"Porque los denominadores son iguales por eso se pone el mismo denominador" (P4H2P3A18)

"$\frac{2}{4}+\frac{8}{4}=\frac{10}{4}$ Porque si los denominadores de las dos fracciones que voy a sumar son iguales al resultado le pongo el mismo denominador" (P4H2P3A19)

"Porque las fracciones homogéneas son las que tienen el N diferente y el D igual" (P4H2P3A28)

"Porque si el denominador es igual y al sumar te da cantidad, el denominador no cambia. Ejem. $\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\frac{4}{2}$" (P4H2P3A29)

"Porque $\frac{3}{4}$ es igual a $\frac{6}{4}$ por el mismo denominador" (P4H2P3A30)

"Porque el denominador no cambia" (P4H2P3A31)

"Porque el denominador no le va a sacar m.c.m." (P4H2P3A22)

"Porque el denominador es el mismo y cuando es el mismo sigue siendo el mismo denominador" (P4H2P3A34)

"Porque en las homogéneas el numerador tiene que ser diferente y el denominador va a ser el mismo" (P4H2P3A35)

"Porque el denominador es igual" (P4H2P3A36)

"Porque el denominador es igual se puede sumar normal pero cuando el denominador no igual es difícil." (P4H2P3A37)

"Porque tiene el mismo resultado $\frac{5}{2}+\frac{6}{2}=\frac{11}{2}$ $\frac{9}{3}+\frac{5}{3}=\frac{14}{3}$" (P4H2P3A38)

Las siguientes respuestas tienen una orientación similar a la anterior (se basan en las similitudes y diferencias de sus elementos: numerador y/o denominador), sin embargo, sus justificaciones son confusas

2. Respuestas confusas

"Porque si sumas los dos denominadores iguales obvio que va a ser igual" (P4H2P3A6)

"Porque el numerador es diferente que el denominador" (P4H2P3A9)

"Si al sumar fracciones homogéneas si el denominador es igual cuando lo vas a resolver el mismo que el denominado" (P4H2P3A13)

"Porque siempre el denominador de las fracciones si son heterogéneas se saca M.C.M. para que el denominador sea igual" (P4H2P3A20)

“Porque cuando sumas fracciones el denominador no suma solo en las fracciones homogéneas” (P4H2P3A21)
“Porque así va sucesivamente” (P4H2P3A24)

En los siguientes casos, los alumnos centran su justificación en una regla, en la enseñanza de la maestra o en una respuesta afirmativa directa, sin justificaciones. No obstante, la intervención de P4H2P3A40 es confusa; sin embargo no se ajusta al criterio anterior en la que se incluían a todas aquellas respuestas que siendo confusas tienen orientación hacia la comparación de los elementos.

3. **Uso de la regla**

“Porque así me enseñó la profesora: $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{10}{8}$” (P4H2P3A23)
“Porque se tiene que seguir la regla” (P4H2P3A25)
“Porque así es la regla de fracciones homogéneas y las heterogéneas no pueden tener el mismo denominador porque así es su regla.” (P4H2P3A33)
“Porque se saca el mínimo común múltiplo y la regla dice o indica que el denominador de la operación debe ser igual a los demás” (P4H2P3A32)
“Porque sí.” (P4H2P3A27)
“Porque sí” (P4H2P3A39)
“Podría restarla (-) multiplicarla (x), dividirla (:), etc.” (P4H2P3A40)

Finalmente, tres alumnos no respondieron la pregunta.

4. **No responde**

(P4H2P3A2)
(P4H2P3A8)
(P4H2P3A26)

Caso 5

Las respuestas a esta pregunta se basan en la naturaleza de los denominadores de las fracciones homogéneas y en el procedimiento seguido. Su respuesta está en función de las características *visibles* de las dos fracciones.

1. **De acuerdo a la igualdad de los denominadores y al procedimiento**

“Porque las fracciones homogéneas tienen el mismo denominador Porque en las fracciones homogéneas solo cambia el numerador, el denominador queda igual” (P5H2P3A8)

“Porque son denominadores iguales” (P5H2P3A13)

“Porque no se suman los denominadores. Porque” (P5H2P3A16)

“Porque ese denominador ha sido hallado por medio de mínimo común múltiplo y así tiene que se” (P5H2P3A6)

“Porque así es. Porque el denominador representa la pizza y el numerador representa las partes que hemos comido” (P5H2P3A9)

“Porque al hallar el m.c.m. es un denominador de los dos” (P5H2P3A1)

“Porque es lo que hallas” (P5H2P3A14)

“$\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=\frac{12}{2}$ El denominador no cambia porque en los 2 son iguales” (P5H2P3A19)

“Porque le hemos hallado el M.C.M. $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ Porque el denominador nunca va a cambiar” (P5H2P3A20)

Otros, sin embargo, lo asocian a las características internas de los denominadores como tales, independientemente de la relación que hay entre los dos (o más) que se suman. De esta forma, hacen referencia a que el denominador indica las partes en que se divide la unidad, las que hay y no cambia.

2. **De acuerdo a la característica interna del denominador.**

“No me acuerdo las fracciones homogéneas. Porque el denominador indica las partes que hay” (P5H2P3A7)

“Porque el denominador sus partes se dividen y no varían” (P5H2P3A10)

“Porque no se suman y se trabaja con el mismo denominador. Porque no cambia, porque no haga más partes” (P5H2P3A17)

No obstante, esta es una pregunta que un buen grupo de alumnos no supo responder.

3. **No responden/ no saben/no se acuerdan**

“No me acuerdo” (P5H2P3A3)

“Ya me olvidé” (P5H2P3A4)

“No sé” (P5H2P3A11)

“No sé” (P5H2P3A12)

“Porque las fracciones. No sé” (P5H2P3A5)

“Porque son homogéneas. No sé porqué” (P5H2P3A15)

“¿??” (P5H2P3A18)

Caso 6

Al responder esta pregunta, los alumnos basan sus respuestas en la igualdad de los denominadores de las fracciones homogéneas, mediante la cual se escribe el mismo denominador (o no se suma); como una idea asumida para este tipo de denominadores. En ningún caso, se hace referencia a la naturaleza del denominador de una fracción propiamente o a su función. Aunque P6H2P3A13 no lo explicita con palabras, el ejemplo es una referencia directa.

1. **Se basan en la igualdad de los denominadores y a la supremacía del procedimiento**

“Porque se debe repetir el denominador de las fracciones. Ejm. $\frac{8}{4}+\frac{2}{4}=\frac{10}{4}$ El denominador es igual” (P6H2P3A1)

“Porque solo se suma el numerador” (P6H2P3A2)

“Porque las fracciones homogéneas tienen el mismo denominador y como tal al sumarlas coloca el mismo denominador” (P6H2P3A3)

“Porque el denominador es el mismo...” (P6H2P3A4)

“Porque el denominador seguiría siendo el mismo” (P6H2P3A5)

“Porque las fracciones homogéneas tienen el mismo denominador” (P6H2P3A6)

“Porque solo se suma los numeradores además son homogéneas si fueran heterogéneas tendríamos que ponerle el mismo denominador a las 2 o más fracciones” (P6H2P3A7)

“Porque lo estás sumando y te sale una fracción al sumarlas y por eso te sale el resultado. La unidad fue dividida en partes iguales y por lo tanto va a tener el mismo denominador” (P6H2P3A8)

“Porque es un grupo de fracciones donde todos sus denominadores son iguales” (P6H2P3A9)

“$\frac{12}{8}+\frac{13}{8}=\frac{25}{8}$ En las sumas homogéneas el denominador siempre va a ser el mismo nunca cambia y el numerador se suman o restan” (P6H2P3A10)

“Por $\frac{4}{6}+\frac{4}{6}=\frac{4+4}{6}=\frac{8}{6}$ ” (P6H2P3A13)

“Porque como son del mismo denominador no se suman y se coloca el mismo número” (P6H2P3A14)

“Porque si tienen igual denominador no se suman, se colocan igual, los numeradores cambian. Ejemplo: $\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{5}{5}=$ y si se simplifica sería $\frac{1}{1}=1$” (P6H2P3A15)

“Porque como son homogéneas solo se suman los numeradores y el denominador es igual” (P6H2P3A16)

“Porque el denominador es igual…” (P6H2P3A17)

“Porque como son del mismo denominador no se suman y se coloca el mismo número…” (P6H2P3A18)

2. **No responde/no sabe**

(P6H2P3A11)

“No sé” (P6H2P3A12)

Hoja de Trabajo 3 – Pregunta 1 (H3Q1)

H3Q1: ¿Qué relación hay entre el denominador que resulta de sumar dos fracciones heterogéneas y los denominadores de las fracciones que has sumado? Explica tu respuesta.

Por lo general, los alumnos han expuesto en la hoja de trabajo 2: Fracciones: Operaciones, que para sumar dos fracciones se halla el mínimo común múltiplo (mcm) o denominador común cuando las fracciones son heterogéneas o tienen diferente denominador, o bien se coloca el mismo denominador si son fracciones homogéneas o sus denominadores son iguales.

La pregunta: ¿Qué relación hay entre el denominador que resulta de sumar dos fracciones heterogéneas y los denominadores de las fracciones que has sumado? Explica tu respuesta, se asocia a la anterior en cuanto se refiere a lo que los alumnos aplican cuando se trata de este tipo de operaciones: ya sea al buscar fracciones equivalentes, al multiplicar los denominadores, al buscar el múltiplo de los denominadores o el mayor; siempre se busca el denominador común, o el mínimo común múltiplo. Si al sumar fracciones heterogéneas se busca el mcm, el denominador resultante, entonces, es el mcm o el denominador común de las anteriores. También es aceptable que sea el producto de ambos o el múltiplo, etc. ya que surge a partir de ello o ellos.

Si bien en la hoja anterior, los alumnos asocian directamente la forma de sumar fracciones con la búsqueda del denominador común o el mínimo común múltiplo, al responder esta pregunta, no necesariamente hacen referencia a esta relación, sobre todo en P1 y P4, en los que las asociaciones son menores. Hay diferencias entre los grupos. P5 y P6 tienden a establecer la relación entre los denominadores a sumar y el de la suma propiamente. Por lo general, las relaciones están en función de las características de los denominadores (si son diferentes o iguales). La referencia al mínimo común múltiplo se evidencia al explicar que al ser fracciones heterogéneas se debe buscar este (o el denominador común), pero no hacen explícita la relación. En este apartado se puede apreciar la además la confusión que aún se da entre fracciones homogéneas y heterogéneas, con menor frecuencia en los grupos P5 (0) y P6 (1). Asimismo, es una pregunta que los alumnos han respondido en menor frecuencia, superando el 30% de las mismas.

A continuación se detalla, por grupo, los tipos de respuestas emitidas por los alumnos:

Caso 1

1. **Establece la relación directamente, indicando qué es**

   "Que es un múltiplo el denominador del resultado de los otros denominadores." (P1H3P1A5)

2. **Indica la acción a realizar cuando las fracciones son heterogéneas**

“Que en los dos hay que reducir a común denominador.” (P1H3P1A12)

“Que si sumas dos fracciones heterogéneas hay que reducir a común denominador y con las que he sumado también” (P1H3P1A13)

“Que los denominadores del principio se han cambiado para que coincidan, cambiando al mismo tiempo numerador (reducir a común denominador)” (P1H3P1A16)

3. **Cambia la naturaleza de las fracciones heterogéneas**

“Que son iguales” (P1H3P1A2)

“Que el denominador es el mismo porque los denominadores no se suman porque son las partes que has hecho y no pues sumar 1/4 + 2/12” (P1H3P1A4)

“Que dan el mismo número” (P1H3P1A11)

“Que son el mismo. Por ejemplo:1/3+3/3=4/3” (P1H3P1A15)

“La relación es muy sencilla: que al sumar dos fracciones con el denominador igual, no hay que cambiar el denominador porque no se suma.” (P1H3P1A18)

4. **Otras relaciones**

“Que son equivalentes: 1/2+2/4+3/8=4/8+4/8+3/8=11/8” (P1H3P1A7)

“Que el denominador de antes, está dividido por un número exacto.” (P1H3P1A17)

5. **No responden**

(P1H3P1A1)
(P1H3P1A3)
(P1H3P1A6)
(P1H3P1A8)
(P1H3P1A9)
(P1H3P1A10)

Caso 4

En este siguiente grupo, P4H3P1A2, si bien indica la acción a realizar, esta no es correcta. Por otro lado, P4H3P1A7 se refiere a un trabajo gráfico.

1. **Indica la acción a realizar cuando las fracciones son heterogéneas**

“Que en la fracción debes sacar el mínimo común múltiplo” (P4H3P1A5)

“Que las heterogéneas tenemos que sacar M.C.M” (P4H3P1A6)

“Que las heterogéneas se saca M.C.M.” (P4H3P1A23)

“Que en la fracción debemos sacar el M.C.M. y el porcentaje de 100” (P4H3P1A17)

“Que el denominador es diferente y se tieneque sacar el mínimo común múltiplo” (P4H3P1A30)

"Al sacar el mínimo común múltiplo, dividir y multiplicar" (P4H3P1A33)

"Cuando tiene diferente denominador sumas todos los denominadores y suma el nuevo" (P4H3P1A2)

2. **Indica la acción a realizar sin hacer referencia al tipo de fracción**

"Que haga la fracción en forma dibujada y sacas el porcentaje" (P4H3P1A7)

3. **Indica las características de las fracciones heterogéneas**

"Que las fracciones heterogéneas tienen diferente denominador" (P4H3P1A16)

"Que las heterogéneas tienen denominador diferente" (P4H3P1A21)

"Que el denominador a veces no es igual sino es diferente, que el denominador es diferente."

"Que los denominadores de las fracciones heterogéneas tienen el mismo denominador y otras fracciones distintos." (P4H3P1A1)

"Que no son iguales y son diferentes" (P4H3P1A32)

"Porque no son mismos denominadores" (P4H3P1A3)

4. **Se refiere a las fracciones homogéneas o cambia la naturaleza de las fracciones heterogéneas**

"Homogéneas. Es porque al sumar pasa esto" (P4H3P1A10)

"Que va a salid igual denominador" (P4H3P1A14)

"Que las heterogéneas son las que tienen los denominadores iguales" (P4H3P1A28)

"Homogéneas" (P4H3P1A39)

"Que son iguales" (P4H3P1A38)

"Que en las heterogéneas son las que tienen el mismo denominador" (P4H3P1A34)

5. **Otras relaciones**

"Que son fracciones" (P4H3P1A20)

"Un propio" (P4H3P1A35)

"Que el denominador nos igual aun es denominador que al sumar es fácil" (P4H3P1A37)

6. **No responden**

(P4H3P1A4)

(P4H3P1A8)

(P4H3P1A9)

(P4H3P1A11)

"¿?" (P4H3P1A12)

(P4H3P1A13)

(P1H3P1A14)

(P4H3P1A15)

(P4H3P1A18)

(P4H3P1A19)

(P4H3P1A22)

(P4H3P1A24)

(P4H3P1A25)

(P4H3P1A26)

(P4H3P1A27)

(P4H3P1A29)

(P4H3P1A31)

(P4H3P1A36)

(P4H3P1A40)

Caso 5

En este grupo, las relaciones han sido más directas, haciendo referencia al mcm o múltiplo de los denominadores. P5H3P1A16 hace la relación inversa y se refiere a divisores.

1. **Establece la relación directamente, indicando qué es**
   “La relación que existe que ambos denominadores se multiplican o también extraemos un mínimo común múltiplo. Que es el resultado de denominador” (P5H3P1A3)
   “Que al multiplicarse los denominadores se puede sacar el denominador exacto, además es el mínimo común múltiplo” (P5H3P1A7)
   “El M.C.M. es la relación entre los denominadores heterogéneos” (P5H3P1A8)
   “Que es m.c.m.” (P5H3P1A10)
   “La relación es que el denominador es el M.C.M. de los denominadores.” (P5H3P1A12)
   “Que es el m.c.m” (P5H3P1A17)
   “Que es múltiplo de los dos denominadores sumados” (P5H3P1A19)
2. **Establece la relación a través de un ejemplo**
   “5/7+1/2=10/14+7/14=17/14= Porque catorce es múltiplo de dos y siete.” (P5H3P1A9)
   “5/6+4/5=24/30+49/30=1 19/30 Que 6 y 5 son divisores de 30” (P5H3P1A16)
   “2/5+3/4=20 M.C.M.” (P5H3P1A20)
3. **Indica la acción a realizar**
   “Sacar el M.C.M. se divide y se multiplica” (P5H3P1A13)
   “2/3+5/5=25/15 En sacarle el M.C.M.” (P5H3P1A15)
4. **Otras relaciones**
   “Que son distintos los resultados” (P5H3P1A6)

5. **No responden**
   (P5H3P1A1)
   (P5H3P1A2)
   (P5H3P1A4)
   (P5H3P1A5)
   (P5H3P1A11)
   (P5H3P1A14)
   (P5H3P1A18)

Caso 6

En P6, si bien P6H3P1A17 propone un ejemplo, no hace referencia explícita al mismo. La operación es una suma de fracciones heterogéneas resuelta, pero no se explica y establece relación verbal.

1. **Establece la relación directamente, indicando qué es**
   "En el caso de fracciones homogéneas hay una relación de igualdad entre el denominador final y los denominadores de las fracciones. En fracciones heterogéneas la relación es de diferencia, porque el denominador final es el m.c.m. de los denominadores de las fracciones" (P6H3P1A1)
   "El denominador de la suma resulta ser un número múltiplo y común a los otros dos denominadores" (P6H3P1A10)
   "La relación es de que el denominador que resulta de la suma de las dos fracciones es que se puede dividir entre los dos denominadores de las fracciones heterogéneas" (P6H3P1A16)
2. **Indica la acción a realizar cuando las fracciones son heterogéneas**
   "Que cuando para resolver se saca el mínimo común múltiplo se divide entre el denominador y se multiplica por el numerador" (P6H3P1A14)
   "Que las fracciones heterogéneas son de diferente denominador entonces saco m.c.m. y los multiplico así: 4/9+5/3=4+15/9=19/9" (P6H3P1A15)
3. **Indica las características de los denominadores**
   "Los denominadores son diferentes" (P6H3P1A4)
   "Que unos son diferentes y otros denominadores" (P6H3P1A5)
   "Que los denominadores son iguales" (P6H3P1A7)
4. **Establece relación de transformación**
   "En que los dos se pueden convertir en fracción homogéneas" (P6H3P1A3)
5. **Establece la relación a través de un ejemplo, pero no explica**

- “5/4+9/5=25+36/20=61/20” (P6H3P1A17)

6. **Otras relaciones**
    - “Tiene relación si lo sumas con un número con otro numerador, me sale el resultado sale heterogéneas” (P6H3P1A8)
    - “La respuesta está en el problema 1de la 2° como de la 1° hoja” (P6H3P1A12)
7. **No responden**
    - (P6H3P1A2)
    - (P6H3P1A6)
    - (P6H3P1A9)
    - (P6H3P1A11)
    - (P6H3P1A13)
    - (P6H3P1A18)

Hoja de Trabajo 3 – Pregunta 3 (H3Q3)

H3Q3: Si sumas dos fracciones propias, ¿qué tipo de fracción puede ser el resultado? ¿Por qué?

La pregunta: Si sumas dos fracciones propias, ¿qué tipo de fracción puede ser el resultado? ¿Por qué? (Código de la pregunta: H3P3) se relaciona directamente con la pregunta 1 y 2 de la hoja de trabajo 2 (H2P1 y H2P2) ya que en ellas los alumnos brindan diversos ejemplos de sumas de fracciones homogéneas y/o heterogéneas cuyos resultados son variados. También se aprecia algunos casos específicos en la hoja de trabajo 1. Para ejemplificar los alumnos hacen uso de fracciones propias, fracciones impropias y fracciones iguales a la unidad, cuyos resultados, entre correctos e incorrectos son diversos e incluyen diferentes tipos de fracciones tomando en cuenta la relación entre sus elementos. Por ejemplo, para una suma de fracciones propias, el resultado puede ser una fracción propia, una impropia o una igual a la unidad (aparente). A continuación se muestran algunos casos:

Ejemplos de suma de fracciones impropias con resultados diversos

- $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$" (P1H2P1A8)
- $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}$ (P1H2P1A9)
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$ (P1H2P1A6)
- $\frac{8}{20}+\frac{6}{20}=\frac{14}{20}$ (P2H2P1A14)
- $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3+6}{4+6}+\frac{5+4}{6+4}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10}=\frac{18}{10}$ (P2H2P1A6)
- $\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}$ (P2H2P1A17)
- $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$" (P4H2P1A13)
- $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{8}=\frac{8+18+6}{24}=\frac{32}{24}$ (P4H2P1A28)
- $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8}{8}=1$ (P4H2P1A14)
- $\frac{2}{10}+\frac{14}{25}=\frac{10}{50}+\frac{28}{50}=\frac{38}{50}=\frac{19}{25}$" (P5H2P1A6)

- $\frac{4}{5}+\frac{2}{4}=\frac{16+10}{20}=\frac{26}{20}$ (P5H2P1A3)
- $\frac{4}{7}+\frac{5}{6}=\frac{24+35}{42}=\frac{59}{42}$ (P6H2P1A10)
- $\frac{5}{6}+\frac{4}{8}=\frac{12+12}{24}=\frac{24}{24}$ (P6H2P1A14)

Si bien, los ejemplos expuestos por los alumnos muestran diferentes resultados que se pueden clasificar en propias, impropias y aparentes, al responder qué tipo de fracción origina, las respuestas tienen a indicar que se genera el mismo tipo de fracción, resaltando que cuando se suman dos fracciones propias, el resultado tiene que ser una propia. Pocos alumnos admiten varias posibilidades y otros, una, amparados en el ejemplo expuesto. De esta manera, la conexión entre una respuesta y otra disminuye de al variar la pregunta. En sus respuestas se evidencia cierta confusión entre fracciones impropias y propias (P6H3P3A3, P6H3P3A7, P6H3P3A8) y de estas con heterogéneas (P1H3P3A13, P1H3P3A2) y homogéneas (P4H3P3A16, P4H3P3A20, P4H3P3A21, P4H3P3A23, P4H3P3A26, P4H3P3A35).

Caso 1

Admiten otro tipo de fracción o número

- “Puede ser un número natural” (P1H3P3A11)
- “Puede ser una fracción impropia porque puede que haya que reducir a común denominador” (P1H3P3A13)
- “Cualquiera. Porque entre las dos puede dar más de uno, uno o menos de uno. Ejemplo: 2/4+1/2=2/4´2/4=4/4 Aparente 3/5+2/6=18/30+10/30=28/30 propia 4/6+4/5=20/30+24/30=4/3 impropia” (P1H3P3A16)

Propias

- “Propias. Porque si sumas propias no te pueden pasar a ser otra cosa porque las estás sumando en una unidad” (P1H3P3A8)
- “El resultado es otra fracción propia porque se está haciendo la suma con las mismas cosas” (P1H3P3A9)
- “Una fracción propia. Porque al dividir el numerador y el denominador del resultado sale una fracción propia 1/2+1/5=5/10+2/10=7/10 →7:10=0’7” (P1H3P3A12)

- “Propia. Porque sumas propias y propias quedan propias. Y si sumas naranjas y naranjas lograrán” (P1H3P3A15)

Asocia a homogéneas/heterogéneas

- “Porque aunque lo sumemos al revés va a dar lo mismo heterogenia” (P1H3P3A2)

No especifica

- “Normal, porque se suma igual que otras fracciones.” (P1H3P3A18)

No responden

- (P1H3P3A1)
- (P1H3P3A3)
- (P1H3P3A4)
- (P1H3P3A5)
- (P1H3P3A6)
- (P1H3P3A7)
- (P1H3P3A10)
- (P1H3P3A14)
- (P1H3P3A17)

Caso 4

Propias

- “Propia. Porque si sumas una fracción propia con otra sale propia” (P4H3P3A1)
- “Propia. Porque se suman 2 fracciones propias” (P4H3P3A3)
- “Propia, porque propias con propias tiene que salir propia” (P4H3P3A4)
- “Sale una fracción propia porque estás que sumas dos fracciones propias.” (P4H3P3A7)
- “Porque al multiplicar propia es igual propio” (P4H3P3A8)
- “Sale propia porque cuando se suma propia más propia sale propia” (P4H3P3A11)
- “Propia, porque cuando suma propia + propia = a propia” (P4H3P3A12)
- “Tendrá fracción propia, porque estoy sumando números propios” (P4H3P3A14)
- “Propias porque se suman las mismos fracciones” (P4H3P3A38)
- “3/8+4/12=9/24+8/24=17/24 Puede ser propia” (P4H3P3A32)

Admite otras

- “Fracción mixta tiene una parte entera y parte quebrada” (P4H3P3A2)
- “Puede salir propia o impropia” (P4H3P3A28)
- “Si bien sale propia o impropia” (P4H3P3A34)
- “En fracciones impropias” (P4H3P3A10)
- “Una fracción impropia” (P4H3P3A15)
- “Una fracción impropia” (P4H3P3A18)
- “Fracción impropia” (P4H3P3A33)
- “Impropias” (P4H3P3A39)

Homogénea

- “Fracciones homogéneas, porque las fracciones son homogéneas” (P4H3P3A16)
- “Una homogénea” (P4H3P3A20)
- “Homogénea porque tiene un denominador igual” (P4H3P3A21)
- “Fracción homogénea porque el denominador es igual” (P4H3P3A23)
- “Exacto porque una fracción propia equivale a una fracción homogénea” (P4H3P3A26)
- “Una fracción homogénea” (P4H3P3A35)

No indica/no especifica/confuso

- “Porque al multiplicar naturales o fracciones es igual” (P4H3P3A5)
- “4/8+6/8=10/8” (P4H3P3A22)
- “3/8+56/2=4+224/8=228/8 puede ser 228/8 porque es sumada y también se saca el m.c.m.” (P4H3P3A30)
- “5/4+7/8=10+7/8=17/8 Fue 17/8 tuve que sacarle el m.c.m. para que salga el resultado” (P4H3P3A37)
- “Que son diferentes” (P4H3P3A40)

No responden

- (P4H3P3A6)
- (P4H3P3A9)
- (P4H3P3A13)
- (P4H3P3A17)
- (P4H3P3A19)
- (P4H3P3A24)
- (P4H3P3A25)
- (P4H3P3A27)

- (P4H3P3A29)
- (P4H3P3A31)
- (P4H3P3A36)

Caso 5

Propias

- "1/5+2/7= 7+10/35=17/35 Se obtiene otra fracción otra fracción propia. 8/4+7/4= El resultado es una fracción propia porque el denominador es igual" (P5H3P3A3)
- "Si las sumas resulta fracción propia porque al sumar el numerador se va a aumentar" (P5H3P3A7)
- "Propia, porque las fracciones propias son mayores a la unidad y si sumamos 2 de ellas el resultado será mayor" (P5H3P3A8)
- "El resultado puede ser una fracción propia" (P5H3P3A9)
- "Propia porque el numerador es mayor" (P5H3P3A19)
- "8/5+9/8=propia porque las fracciones son propias" (P5H3P3A20)
- "Propia, porque si sumas dos propias y el resultado tiene que ser el denominador mayor que el numerador" (P5H3P3A16)

Otras formas

- "Entero porque así sale" (P5H3P3A4)
- "Fracción impropia" (P5H3P3A13)

Ambiguo

- "Propia porque el resultado tiene que ser mayor la unidad" (P5H3P3A10)
- "Mayor que la unidad porque las fracciones propias representan mayor que la unidad" (P5H3P3A17)

Compara denominadores

- "La heterogénea porque son casi iguales" (P5H3P3A6)

Incluye en la suma una fracción impropia

- "6/5+9/3= mayor, porque si lo estás sumando va a ser mayor" (P5H3P3A15)

No sabe/no responden

- "No sé" (P5H3P3A12)

- (P5H3P3A1)
- (P5H3P3A2)
- (P5H3P3A5)
- (P5H3P3A11)
- (P5H3P3A14)
- (P5H3P3A18)

Caso 6

Propia

- "13/4+16/5. Me saldría una fracción propia porque el denominador será siempre menor" (P6H3P3A5)
- "Me va a salir una fracción propia, porque estoy sumando dos fracciones propias por lo tanto sale propia" (P6H3P3A15)
- "8/9+6/9=17/9 propia porque si la fracción es propia todo el resultado debe ser igual" (P6H3P3A17)

Impropia

- "El resultado sería una fracción impropia porque el numerador del resultado es mayor al denominador" (P6H3P3A1)
- "Impropia" (P6H3P3A4)
- "Puede ser reductible o impropia porque el resultado varía" (P6H3P3A16)

Ambas

- "Propia o impropia" (P6H3P3A14)
- "Pueden salir propias o impropias" (P6H3P3A10)
- "2/3+3/6=4+3/6=7/6. La mayoría son impropias porque al sumar te da una cantidad a veces mayor que el denominador" (P6H3P3A12)

Mixtos

- "Pueden ser distintos: 15/24+10/12=15+20/24=35/24 Puede dar una fracción mixta 4/6+2/3=4+4/6=8/6 también pueden dar propias" (P6H3P3A6)

Confunde con impropias

- “El resultado es una fracción propia porque la fracción propia tiene el numerador mayor” (P6H3P3A3)
- “Saldría otra fracción propia porque al sumar los denominadores que son mayores que los numeradores sería igual” (P6H3P3A7)
- “Me dada resultado porque si lo sumas te sale la fracción” (P6H3P3A8)

No responden

- (P6H3P3A2)
- (P6H3P3A9)
- (P6H3P3A11)
- (P6H3P3A13)
- (P6H3P3A18)

Hoja de Trabajo 4 – Pregunta 4 (H4Q4)

H4Q4: Realiza la siguiente operación: $2/3+\frac{1}{2}-4/6+\frac{3}{4}=$

Para Sánchez, Carrillo, Vicente y Juárez (2015), citando en Díaz y Poblete (2001) los ejercicios son tareas cuyo resultado es calculado mediante una mera reproducción de contenidos aprendidos previamente, mientras que problema (citando a Díaz et al., 2001, p.34) son aquellas tareas que, para un alumno, "requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas, si éste comprende la tarea, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución y, finalmente, si es motivado para buscar una solución". Es decir, mientras que en un ejercicio se reproduce, en un problema se construye. Desde este punto de vista, una situación textual y una operación pueden ser consideradas *problemas* si el resolutor no tiene un proceso algorítmico que le lleve con seguridad a la solución; en contrapartida no son *problemas* si cuenta con dicho proceso.

La operación planteada ha sido resuelta por los alumnos de un aula española y tres peruanas. Su resolución nos permite observar, en primer lugar, cómo los alumnos enfrentan este tipo de tarea, que puede ser un problema para ellos, o no. Desde la perspectiva del docente, esta actividad, si es planteada luego de seguir un proceso de enseñanza – aprendizaje, puede considerarse un ejercicio, pero esta categorización no depende del maestro, aunque es una referencia, sino del resolutor quien es el que va a resolverlo y quien establecerá la relación entre lo que conoce y la propuesta. Nótese cómo la tarea no es resuelta por el 100% de los estudiantes, lo que es un indicador del grado de dificultad que puede generar en los alumnos. Los alumnos no resuelven tareas para las cuales no están seguros de cómo proceder. Sin embargo, podrían intentar hacerlo.

Otro grupo sí la resuelve; entre ellos, quienes lo hacen llegando a la solución correcta y quiénes no. Para quienes exponen un procedimiento este tiene ciertas peculiaridades que pueden ser comunes a un grupo grande o propias de resolutores específicos.

Caso 1

Observando a quienes resuelven correctamente la suma, los alumnos transforman la suma a otra de fracciones equivalentes; luego de ello, hay dos caminos: operar directamente o hacerlo por grupos (P1H4P4A17, P1H4P4A18); en ambos casos siguiendo el orden de las operaciones.

- P1H4P4A5, P1H4P4A7, P1H4P4A9, P1H4P4A11, P1H4P4A12, P1H4P4A14, P1H4P4A15, P1H4P4A16, P1H4P4A17, P1H4P4A18

Caso 4

A diferencia del grupo anterior estos alumnos plantean la operación agrupando en una sola expresión de forma que no se observan cuatro fracciones equivalentes homogéneas sino una expresión cuyo denominador es el denominador común y cuyo numerador es una operación combinada. Tanto en el primer grupo como en el segundo, los alumnos no hacen evidente una cancelación de datos ni la simplificación o transformación del resultado.

- P4H4P4A22, P4H4P4A30

Caso 5

El siguiente grupo sigue procedimientos que combina los anteriores; es decir, se observa quiénes transforman la operación en otra con las fracciones equivalentes homogéneas evidentes y quienes lo expresan de forma simplificada, prevaleciendo esta última. No obstante, en casos puntuales, transforman el resultado a número mixto (P5H4P4A16), simplifica y convierte a mixto (P5H4P4A16) y cancela cantidades, simplifica y convierte a mixto (P5H4P4A3).

- P5H4P4A3[441], P5H4P4A7, P5H4P4A8, P5H4P4A9, P5H4P4A10[442], P5H4P4A13, P5H4P4A16, P5H4P4A17, P5H4P4A19, P5H4P4A20

Caso 6

Los alumnos del siguiente grupo siguen la los pasos del segundo expuesto (P4), con casos en los que manipulan el resultado transformándolo a mixto (P6H4P4A3), simplifican (P6H4P4A9) y cancelan y simplifican (P6H4P4A15). Cabe indicar que P6H4P4A9 no transformó la operación en fracciones homogéneas o a través de un denominador común general, sino que operó por bloques de dos operaciones, siguiendo el orden establecido.

- P6H4P4A3, P6H4P4A5, P6H4P4A6, P6H4P4A9, P6H4P4A10, P6H4P4A15.

---

[441] En su segunda propuesta.

[442] En su segunda propuesta que sin embargo, solo indica el resultado.

Errores en la ejecución de la operación

En el caso de las propuestas erróneas estas presentan diferentes casuísticas, desde un error comprensivo, asociado a la noción de fracción o a la idea de suma o resta, hasta uno operativo.

Caso 1

- P1H4P4A3 solo coloca una fracción como respuesta, la cual no se ajusta a la operación propuesta.
- El caso de P1H4P4A4 no toma en cuenta el orden de las operaciones de un mismo nivel y agrupa las mismas.
- P1H4P4A6 obvia una fracción, cambiando la operación propuesta. No obstante, no hay error en su propuesta.
- P1H4P4A8 no considera negativo el resultado de la resta.
- P1H4P4A13 cambió un signo operativo y actuó en consecuencia, realizando una operación correcta, pero diferente a la propuesta.

Exceptuando a P1H4P4A3, que no presenta un proceso de resolución, los alumnos de este grupo cometen errores de orden (P1H4P4A4), por omisión (P1H4P4A6), naturaleza del resultado (P1H4P4A8), alteración (P1H4P4A13).

Caso 4

- P4H4P4A1 suma o resta directamente los numeradores sin transformarlos en función del denominador nuevo, además no toma en cuenta el resultado negativo de la resta.
- P4H4P4A3 cambia un signo y la operación se transforma (P1H4P4A13)
- P4H4P4A4 opera los numeradores iniciales sin transformarlos en relación al nuevo denominador, transforma un signo y suma incorrectamente.
- P4H4P4A5, P4H4P4A8 si bien no resuelve la operación, tiende a resolver primero las sumas sin respetar el orden de las operaciones.
- P4H4P4A7, P4H4P4A28, P4H4P4A34 expone el resultad en el que el denominador es el mcm y el numerador el resultado de operar con los numeradores tal como se proponen (sin transformarlos de acuerdo al numerador) y sin considerar la naturaleza negativa de un resultado parcial.

- P4H4P4A11 agrupa las sumas sin considerar el orden en la operación combinada, suma y resta directamente los numeradores y denominadores según sea la operación y no considera el carácter negativo del resultado de la resta.
- P4H4P4A12, agrupa las sumas, simplifica de manera cruzada; es decir en numeradores y denominadores de distintas fracciones, no toma en cuenta las propiedades de la suma o resta. Podría pensarse que actúa como si la operación fuera multiplicación en la que su estrategia valdría, excepto para el tercer caso en el que simplifico sin una relación entre los elementos.
- P4H4P4A14, al igual que otros compañeros agrupa sin considerar el orden de las operaciones. Además, altera el orden en la resta, cambiando la operación según la conveniencia de la misma (en el campo de los naturales, la resta planteada es imposible).
- P4H4P4A15 halla un mcm incorrecto (opera mal) que no es mcm de todos los denominadores. Los numeradores se ajustan a los reales (obviando uno) pero no a su propuesta.
- P4H4P4A18 plantea una operación parecida a la de P4H4P4A15, con los mismos datos obtenidos.
- P4H4P4A19 agrupa las sumas sin considerar el orden, suma los numeradores iniciales sin transformarlos. No culmina la operación.
- P4H4P4A20 opera los numeradores sin transformarlos de acuerdo al denominador común y no considera el carácter negativo del resultado de una resta.
- P4H4P4A21 agrupa las sumas, simplifica de manera cruzada y considera un resultado que no se ajusta a los sumandos obtenidos. Podría considerarse que no aplica la operación y escribe directamente el número distinto a 1.
- P4H4P4A25, P4H4P4A31 suma los numeradores sin transformarlos de acuerdo al denominador común. Cambia un signo, alterando la propuesta.
- P4H4P4A26 expone el resultado que no se ajusta a la operación.
- P4H4P4A32 opera con una fracción que no es equivalente a la inicial, cambiando la operación combinada.
- P4H4P4A33 agrupa las sumas y las restas; sin embargo, esta obtiene un entero como resultado, el mismo que no se ajusta a las características de los números operados.

En este grupo se puede observar que los alumnos cometen los mismos errores que el grupo anterior, pero de manera combinada, cometiendo más de un error. Además se observa otros errores; entre ellos, una omisión distinta: no transformar los numeradores (y en algunos casos los denominadores) y operar directamente con los originales, aun cuando se ha transformado el denominador, asimismo, la simplificación cruzada y el regirse por la expresión a+1=a o a-1=a. Los errores se orientan a una comprensión de la temática.

Caso 5

- P5H4P4A3[443] agrupa las sumas y las resuelve sumando numeradores y denominadores. Lo mismo ejecuta en la resta, además no considera el carácter negativo del resultado de la resta.
- P5H4P4A4 comienza bien su proceso; sin embargo, no hay seguridad en lo que realiza (indica que no se acuerda cómo se hace). En la operación final suma los numeradores y los denominadores para resolver. No obstante, ejecuta acciones que pocos han hecho: simplificar, cancelar.
- P5H4P4A6 plantea un resultado que no se ajusta a las características de la operación. No se puede determinar el camino seguido.
- P5H4P4A10 agrupa las sumas sin considerar el orden y resuelve correctamente las mismas; sin embargo, no ejecuta la resta (tal vez como indicio de que "algo" está mal[444]).
- P5H4P4A12 especifica no saber.
- P5H4P4A15 agrupa las sumas sin considerar el orden y yerra al multiplicar las cantidades. No culmina la operación, argumentando que no se puede, percibiendo que "algo" anda mal. Nótese que el numerador de la segunda fracción es mayor que el de la primera, lo cual puede haber bloqueado su proceso.

Los errores de este grupo se asocian a los anteriores, y como en P4 se combinan en un solo alumno/a.

Caso 6

- P6H4P4A1 yerra al aplicar una operación simple con lo cual altera el resultado.
- P6H4P4A4 agrupa las sumas sin considerar el orden de las mismas dentro de la operación combinada. El procedimiento se muestra incompleto.
- P6H4P4A7 simplifica de manera cruzada. No culmina la operación. Nótese que el numerador de la segunda fracción es mayor que el de la primera.
- P6H4P4A8 si bien transforma en mixtos, que es una estrategia pertinente, la manipulación de los mismos no considera su naturaleza periódica, lo que arrastra hasta el final.

---

[443] En su primera propuesta.

[444] Esto es posible porque a los alumnos aun no les enseñan los números negativos y aunque los conozcan a veces no operan con ellos porque "aun no les han enseñado". En otros casos, simplemente lo consideran absurdo ya que en el campo en el que operan es en el de los números naturales (positivos).

- P6H4P4A12 agrupa las sumas sin considerar su orden en la operación combinada y cambia los miembros de la resta para que esta se ajuste a una “apropiada” en la que el minuendo sea mayor que el sustraendo.
- P6H4P4A14 llega al mismo resultado que P6H4P4A12 sin cambiar el orden de los miembros de la resta, con lo cual no considera la naturaleza negativa del resultado.
- P6H4P4A16 agrupa las sumas sin considerar el orden e invierte el segundo miembro de la resta al “observar” que esta “no podría ejecutarse”.
- P6H4P4A17 agrupa las sumas sin considerar el orden, obtiene numeradores errados (siempre con los mismos denominadores; 12 y 6 que al dividirlos y multiplicarlos por sus respectivos numeradores, el resultado es incorrecto) que alteran el transcurso de sus operaciones.

Los alumnos evidencian los mismos errores que en los apartados anteriores, añadiendo uno asociado al cambio de orden de los elementos de la fracción. Por lo general, se aprecia más de un error en una persona.

De acuerdo a las respuestas expuestas, los alumnos siguen un proceso de resolución de este tipo de tareas que se ajusta al tratamiento de las fracciones heterogéneas; sin embargo, no todos toman en cuenta todas las consideraciones de las mismas y aplican los pasos parcialmente. Para quienes no logran plantear una solución, la actividad resuelta ser un problema ya que no cuentan con las herramientas necesarias para resolverlo, o al menos no organizadas de tal manera que le permitan una solución inmediata. Para quienes lo resuelven incorrectamente la percepción del mismo no es como problema pues consideran que lo han resuelto correctamente; un proceso de verificación del resultado ayudaría a pensar cuán válida es su respuesta y optar por otros caminos de solución, aun en el campo de la manipulación numérica directamente,

Hoja de Trabajo 7 – Pregunta 1 (H7Q1)

H7Q1: Si me descuentan el 60% del precio de un pantalón y el 50% del precio de un jersey, ¿puedo saber qué porcentaje total me han descontado por las dos prendas? Por qué

El problema sobre “la edad del capitán”[445] es una experiencia conocida del “equipo elemental del IREM de Grenoble” que encuentra respuestas generadas con los datos del mismo. Un planteamiento distinto lo expone Peralta (2005) a propósito de una carta que Flaubert escribió a su hermana Carolina con motivo que esta estaba estudiando geometría y trigonometría al referirse a los automatismos en la resolución de problemas.

El presente planteamiento busca indagar cómo enfrentan los alumnos de quinto grado una situación que involucra datos numéricos asociados a temas trabajados en la clase de matemática (porcentajes). La pregunta anexada no se refiere a hallar numérico específico (como el caso de la edad del capitán cuya pregunta es ¿cuál es la edad del capitán?), sino conocer los argumentos que los alumnos usan para la misma y los ejemplos que propone.

El planteamiento fue resuelto por los alumnos de los tres grupos de aulas peruanas y las respuestas son dos: sí o no, con argumentos variados. Cabe decir que la actividad no fue resuelta por todos los alumnos.

Caso 4

- P4A4-H7Q1, P4A8-H7Q81, P4A14-H7Q1 y P4A26-H7Q1 precisan que no se puede, argumentando que faltan datos (el valor de las prendas).
- P4A32-H7Q1 plantea una regla de tres para cada caso, añadiendo el dato que falta: el valor de las prendas (dato tan irreal y real como el de la situación). Al efectuar la operación halla los descuentos (o rebajas) tal como expresa; sin embargo, los iguala a los porcentajes (porcentaje de descuento=descuento).
- P4A1-H7Q1 suma las cantidades considerándolas como el valor de las prendas (que, sin embargo, llama “denominales”). Responde el cómo pero no el porqué. El uso de la terminología no es claro.

Otros casos como P4A10-H7Q1 y P4A35-H7Q1 si bien no hacen explícito el signo referido a dinero si hace referencia a “descuentos” directamente, con lo cual se pueden percibir como el valor

---

[445] El problema dice: En un barco hay 26 corderos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán? Un problema similar es el siguiente: En una clase hay 4 filas de 6 alumnos. ¿Cuál es la edad de la maestra?

descontado. De esta manera se desprenden de la naturaleza del dato numérico replanteando su contexto (descuento=porcentaje de descuento).

- P4A12-H7Q1 y P4A20-H7Q1 suma las cantidades exponiendo el resultado en términos de porcentaje, considerando que la suma de porcentajes permite ver el porcentaje total.
- P4A34-H7Q1 considera que es suficiente el porcentaje de los productos para conocer el porcentaje total, sumando ambos.
- P4A39-H7Q1 suma los porcentajes cambiando uno de ellos.
- P4A11-H7Q1 aunque no hace explícita ninguna operación, su respuesta conduce a la aplicación de una suma, aunque esta no se corresponde a la suma de los porcentajes expuestos, pero se acerca.
- P4A7-H7Q1 tiene dos respuestas, una en la que responde que se puede averiguar el precio usando la regla de tres simple y otra en la que suma los porcentajes. P4A16-H7Q1 coincide con P4A7-H7Q1 en la primera opción; en ningún caso, se explica cómo ni porqué.
- P4A22-H7Q1 responde a la pregunta en dos ocasiones. En la primera sigue la línea de P4A12-H7Q1 y compañía y la segunda la de P4A4-H7Q1 y demás.
- P4A23-H7Q1 manifiesta que sumando los descuentos como el caso de P4A10-H7Q1; sin embargo, los resta; es decir, realiza la acción contraria.
- P4A30-H7Q1 también brinda dos respuestas. La primera da un dato como descuento, argumentando que es el descuento (asociado al descuento de una de las prendas). La segunda se acopla a la respuesta de P4A4-H7Q1, es decir, indica que falta un dato: el valor de la prenda.
- P4A31-H7Q1 responde con un rotundo “no” sin argumentar o justificar.
- P4A33-H7Q1 resta los porcentajes tomando el resultado como el descuento (valor en soles, unidad monetaria)
- P4A37-H7Q1 expone un porcentaje (indicando el porcentaje de descuento total) que no se corresponde con los expuestos en la situación.

En los casos expuestos las orientaciones están marcadas. En el primer caso, los alumnos consideran que es necesario otros datos: el precio de las prendas, sin los cuales es imposible saber el porcentaje total de descuento.

1. **Respuesta negativa**

   “No, porque ni me han dado cuanto valía la prenda” (P4A4-H7Q1)

“No, porque no me han dado el precio del pantalón, jersey” (P4A8-H7Q1)
“No, porque no me están dando el precio del pantalón y del jersey” (P4A14-H7Q1)
“No, porque no me han dado el precio de las prendas” (P4A22-H7Q1 (segunda propuesta)
“No, porque no dan los precios de las dos prendas” (P4A26-H7Q1)
“No porque no me han dado lo que valía la prenda” (P4A30-H7Q1)
“No” (P4A31-H7Q1)

En el siguiente caso, la respuesta es positiva, indicando la forma de saberlo. Para ello, se basan en los datos expuestos en la situación considerando que son suficientes para responder a la cuestión. Por lo general, identifican el porcentaje con el descuento directamente.

2. **Respuesta positiva (suma)**

“Sí sumando los denominales” (P4A2-H7Q1)
“Sí sumando los descuentos” (P4A10-H7Q1) segunda propuesta
“Sí, ¿Por qué? Porque se suman los descuentos” (P4A10-H7Q1)
“Sí, sumando los descuentos” (P4A23-H7Q1)
“Sí Porque se suman los descuentos” (P4A35-H7Q1)
“120%” (P4A11-H7Q1

“Me han descontado el 110%” (P4A12-H7Q1)

“En el pantalón 60% y en el jersey 50%. Sí el 110%” (P4A20-H7Q1)

“60+40=100” (P4A39-H7Q1)

Las siguientes respuestas se pueden asociar al grupo anterior, ya que para los alumnos el porcentaje del producto es suficiente para saber el porcentaje total; sin embargo, no lo hacen explícito.

3. **Respuesta positiva (datos suficientes)**

“Sí, porque dan el porcentaje del pantalón” (P4A22-H7Q1) primera propuesta
“Sí, porque sí dan el porcentaje del producto” (P4A34-H7Q1)

Los siguientes alumnos proponen una regla de tres. Solo en el último caso se aplica añadiendo un valor numérico a cada prenda, el mismo que no está en el planteamiento de la situación.

4. **Respuesta positiva (regla de tres)**

   “Usando la regla de tres simple” (P4A4-H7Q1)
   “Sí, haciendo la regla de tres simple” (P4A16-H7Q1)

   “Te han descontado por las dos prendas el 100% porque son las dos rebajas de cada prenda” (P4A32-H7Q1)

Las propuestas siguientes hacen uso de los datos de la situación restando los mismos. Se entiende que al preguntar por el “porcentaje” total, podría haber influenciado para que los alumnos sumen, sin embargo, estos restan. Se ha considerado a P4A37-H7Q1 dentro de este grupo porque la cantidad que expone es menor a las expuestas en la situación.

5. **Restan**

   “10, porque es el descuento 50%” (P4A30-H7Q1)

   “10 soles al restarlo” (P4A33-H7Q1)

   “Han descontado 30%” (P4A37-H7Q1)

Caso 5

- P5A3-H7Q1 y P5A13-H7Q1 tienen un planteamiento similar. Manipulan las cantidades para responder a la pregunta considerando que estas conducen a la respuesta. Obtienen un resultado que es válido para ellos. Suman los porcentajes restándole a la suma el producto de los mismos entre cien (100 se refiere a porcentaje: 100%). Establece relación directa entre porcentaje y descuento.
- P5A4-H7Q1 considera que operando sale el resultado; no obstante no hace explícito qué se opera. La tendencia es operar los porcentajes parciales.
- P5A6-H7Q1 es más explícita al indicar la suma; sin embargo, tampoco hace referencia a qué se suma. La tendencia es sumar los porcentajes parciales.
- P5A7-H7Q1, P5A8-H7Q1, P5A9-H7Q1 hacen referencia a la falta de datos. Cabe resaltar que P5A9-H7Q1 considera que el precio del pantalón es mayor que el del jersey observando en su respuesta la idea que el porcentaje de descuento es igual al descuento.

- P5A10-H7Q1 plantea correctamente el 60% del pantalón al estructurarla en función de un valor desconocido, lo cual no le permite obtener una cantidad conocida.
- P5A15-H7Q1 establece una relación directa entre el porcentaje de descuento y el precio de la prenda, aquel se puede obtener si se conoce este.
- P5A16-H7Q1 si bien responde que falta el precio de las prendas, también indica la suma de los porcentajes, considerando que estos se pueden sumar.
- P5A17-H7Q1 hace evidente la falta de datos o la falta de relación entre los datos expuestos.
- P5A19-H7Q1 argumenta considerando que la suma de los datos no es posible.
- P5A20-H7Q1 realiza una suma indicando el resultado como el descuento, sin hacer referencia explícita al porcentaje.

Si bien, muchos no respondieron, entre quienes responde, la gran mayoría tiene claro que no se puede saber el porcentaje total, básicamente porque faltan los datos del precio de cada prenda o porque la suma entre los datos no es posible como descuento (los descuentos suelen ser menores a 100).

1. Respuesta negativa

"No porque no se puede descontar 110%" (P5A19-H7Q1)

"No porque no me han puesto el precio. Si sumas porcentajes sale 110%" (P5A16-H7Q1)

"No porque no se pueden sacar cuentas" (P5A17-H7Q1)

"No, porque no sabemos el precio" (P5A15-H7Q1)

"no puedo hallar porque falta lo que vale cada prenda" (P5A10-H7Q1)

"Sí, porque el precio de un pantalón es mayor que el precio de un jersey, el porcentaje total no lo "puedo saber porque no sé el precio de cada prenda" (P5A9-H7Q1)

"Sí, pero falta el precio" (P5A8-H7Q1)

"No porque no está el precio actual" (P5A7-H7Q1)

Las respuestas positivas son mostradas en pocos alumnos; sin embargo, las que se emiten argumentan que la suma o el operar (con los datos) es la manera de hallarlo.

2. Respuesta positiva (operar)

"Me descontaron 110" (P5A20-H7Q1)

“Sí, porque lo sumamos” P5A6-H7Q1

“Sí, porque lo operan y sale el resultado” (P5A4-H7Q1)

3. **No responde**
   P5A1-H7Q1
   P5A2-H7Q1
   P5A18-H7Q1
   P5A14-H7Q1

   P5A12-H7Q1

   P5A11-H7Q1

   P5A5-H7Q1

Caso 6

Entre las respuestas de esta aula, las que indican que no es posible son muy pocas en relación a las que indican que sí. En el primer caso, P6A15-H7Q1 indica que es porque el porcentaje dependen de cada una de las prendas, mientras que P6A4-H7Q1 lo asocia a la relación parte – todo. Tal como lo expone es poco comprensible su argumento; sin embargo, puede hacer referencia al precio total y al descuento.

1. **Respuesta negativa**
   “No porque no hay parte todo” (P6A4-H7Q1)
   “No, porque depende del precio de cada una de las prendas” (P6A15-H7Q1)

Entre las respuestas positivas, la suma de los porcentajes es el argumento básico

2. **Respuesta positiva (suma)**
   “Sí, porque la suma de los descuentos también representan un porcentaje” (P6A1-H7Q1)
   “Sí puedo saber porque sumo los dos porcentajes” (P6A3-H7Q1)
   “Sí, porque sumo el porcentaje” (P6A5-H7Q1)
   “Porque se suma los 2 porcentajes de descuento” (P6A7-H7Q1)
   “Si sumando dos porcentajes y dividirlo entre 2 o sumando los descuento y luego sacando el porcentaje total” (P6A8-H7Q1)

“Sí porque el porcentaje total de un número es 100. Como da de resultado 110 sería 10” (P6A9-H7Q1)

“Sí, porque al sumarlo se sabe” (P6A13-H7Q1)

Si bien los siguientes alumnos responden positivamente, la justificación no es tan clara o no es explícita.

3. **Respuestas confusas**

   “Sí porque ya me lo dan en el problema” (P6A16-H7Q1)

   “Sí, porque son descuentos de prendas diferentes” (P6A10-H7Q1)

   “$\frac{60}{50}\times 100$” (P6A14-H7Q1)

4. **No responde**

   P6A2-H7Q1

   P6A6-H7Q1

   P6A11-H7Q1

   P6A12-H7Q1

   P6A17-H7Q1

   P6A18-H7Q1

Hoja de trabajo 17 – Pregunta 2 y Hoja de Trabajo 7 – Pregunta 3 (H17Q2 – H7Q3)

H17Q2: Por retrasarme en el pago de una multa, tengo un recargo del 20%. ¿Cuánto tengo que pagar si la multa es de 300 €?

H7Q3: Si por no pagar en la fecha indicada la cuota del club, a María le recargan el 10%, ¿cuánto tendría que pagar? Explica tu respuesta

Las dos situaciones anteriores se enmarcan dentro de contextos reales (multas y recargos), pues son escenas que suceden a determinadas personas. Ambas se refieren a porcentajes y buscan que los alumnos los identifiquen en situaciones concretas. La diferencia entre una y otra es el porcentaje en cuestión y la cantidad con el que se relaciona, ya que en la primera situación se hace explicita dicha cantidad y en la segunda no se especifica. El primer problema fue planteado por el docente del aula y el segundo por la investigadora. El docente creyó conveniente transformar el problema precisando el dato, ya que el primer planteamiento podría confundirlos un poco.

Caso 1

La cuestión del porcentaje se enmarca dentro del campo de las fracciones como una forma distinta de expresarlos y que permite hallar el porcentaje en cuestión. Al resolver la situación, los alumnos P1A8, P1A12 y P1A15, hacen evidente esta idea y la aplican directamente, transformando el porcentaje en cuestión a fracción decimal (o reducida) y planteando este como operador: $\frac{20}{100} de 300$. No obstante, la aplicación de la operación no fue óptima en los tres casos ni la respuesta ajustada a la misma. Otros alumnos (P1A5 y P1A6), que responden la cuestión, y evidencian un procedimiento seguido multiplican el porcentaje por tres: 20×3. Esta operación es una propuesta simplificada de la anterior. Se puede observar que los alumnos P1A10, P1A11 y P1A18 hacen un planteamiento parecido sin embargo operan de manera inversa o contradictoria; además simplifican las mismas incorrectamente, lo cual les genera resultados bastante lejos de aproximarse a la realidad. Reflexionar sobre el resultado, o proponer una respuesta aproximada antes de operar podría orientar mejor la elección de la respuesta.

En dos casos P1A2, P1A13 y P1A17 la respuesta fue 320 (€); lo que lleva a pensar que los alumnos sumaron las cantidades expuestas, las mismas que representan realidades diferentes. Como ellos, P1A1 y P1A16 expresan una cantidad, pero que se ajusta a las características de la situación. Por su parte P1A3, P1A7 y P1A14 hacen un planteamiento no explicado del mismo que sin embargo, resulta confuso. En el primer caso iguala el 20% a 300, en el segundo indica que el 20% de 300 es 3 y en el tercero plante la operación 300x20.

En general la situación no es igualmente comprendida por todos los alumnos de la clase; para muchos, el planteamiento es conocido; sin embargo, pocos son capaces de plantear una solución correcta; el proceso se desvirtúa al aplicar las operaciones; en otros casos, no logran plantear con sentido la solución y establecen relaciones imprecisas o equivocadas.

Caso 4 – Caso 5 – Caso 6

Para los siguientes alumnos, la propuesta fue distinta ya que no indicaba el porcentaje de la multa, con lo cual el planteamiento no es directo ni expone todos los datos necesarios para ser resuelto como en el caso anterior. En este solo se proporciona el porcentaje de recargo. Aun cuando el monto sobre el que se aplica el porcentaje, no se conoce se sabe que este representa el 100%, con lo cual se podría responder en términos de porcentaje ya que son los datos que se manejan y se conocen. No obstante, la pregunta se refiere a una cantidad que suele asociarse a un valor, no a un porcentaje.

Caso 4

- P4A4 no plantea ninguna operación y responde en función de los datos de la situación: “no porque no pagó”; “le dio por ciento”, “10%”. La respuesta es incierta ya que no se sabe si se refiere a que paga el 10% o que paga, además el 10%, lo cual no es explícito.
- P4A7 la solución plantea una regla de tres simple en la que halla el 10% de 60 (asignando un valor a la cuota) y suma el resultado a esta cantidad. Si bien su planteamiento es correcto, no responde directamente la pregunta.
- P4A8 indica que hay una suma y que esta es el 10%. Su respuesta es confusa ya que no hay relación entre ambas (la suma estaría representada de la siguiente manera: cuota+10% de la cuota=total a pagar). Los planteamientos textuales de los alumnos suelen ser confusos y en algunos casos no corresponder a lo que operativamente plantean.
- P4A10, P4A23 asignan un valor a la cuota y plantean una solución asociada a la regla de tres simple mediante la cual hallan el valor del recargo; sin embargo, su procedimiento finaliza ahí, sin responder a la pregunta formulada y sin saber qué significado le da a lo que plantea.
- P4A11 expresa un porcentaje que no se ajusta a las condiciones de la situación. Tampoco responde directamente a la pregunta.

- P4A12 plantea una suma; sin embargo no hace referencia a la misma; además, consigna un sumando que no pertenece a los datos del problema, aunque sí a los dos porcentajes. No hay más datos expuestos por el alumno.
- P4A14 plantea una regla de tres simple a partir de un dato asignado por el resolutor que le permite hallar el 10% de recargo, sumándolo al valor de la multa. Responde en función del porcentaje de recarga; sin embargo a través de sus propuestas operativas indica el pago total. P4A34 y P4A35 hacen un planteamiento similar a este.
- P4A16 proporciona una respuesta ambigua, ya que, efectivamente, el 10% de la multa es menor que la multa; sin embargo, esta respuesta no se ajusta a la pregunta.
- P4A22 por el contrario precisa su respuesta referida al porcentaje del recargo indicando que es una rebaja, confundiendo, al menos textualmente, el sentido del porcentaje de recargo.
- P4A26 y P4A33 siguen el planteamiento de P4A22, pero asignan un valor a la multa, trabajando a partir de él.
- P4A30 presenta dos respuestas. Sus respuestas no son claras, pero ambas asocian el porcentaje con el descuento.
- P4A31 responde correctamente en función del dato de recargo; sin embargo aplica una operación que no justifica, por lo que no se sabe a qué corresponde: podría ser un valor asignado o el porcentaje total.
- P4A32 también asigna un valor al que le aplica el 10%; sin embargo su respuesta considera que este valor es un porcentaje, con lo cual se evidencia una incongruencia en la misma.

Frente a esta situación, por lo general los alumnos responden asignando un valor al dato que no lo presenta: la multa, a partir del cual hallan el 10% de la recarga. No obstante, no siempre se considera este como el valor del recargo. Cabe resaltar que un buen grupo de alumnos de esta clase no plantea una solución ni respuesta, excepto P4A2 que indica no saber.

No responde ni muestran ninguna solución ni respuesta: P4A1, P4A3, P4A5, P4A6, P4A9, P4A13, P4A15, P4A17, P4A18, P4A19, P4A20, P4A21, P4A24, P4A25, P4A27, P4A28, P4A29, P4A36, P4A37, P4A38, P4A39, P4A40.

Caso 5

- P5A4 brinda una respuesta que podríamos catalogar de incorrecta si pensamos en función del porcentaje asignado, el cual aumenta el valor inicial pero no de manera exorbitante con lo cual la respuesta estaría muy lejos de la realidad.

- P5A6 sigue el mismo camino que el anterior ya que su respuesta también es imprecisa “cierta cantidad” ofrece diferentes opciones, muchas de las cuales no se ajustarían al planteamiento de la solución.
- P5A7 tiene claro el significado del porcentaje de recargo. Si bien, asigna un valor al precio de la multa este se presenta como ejemplo para precisar su respuesta, no como el valor “real” de la multa.
- P5A8 este caso es parecido al anterior sin embargo, no precisa el dato expuesto como un ejemplo, sino como un dato impuesto.
- P5A9 también asigna un valor a la multa y responde en función de él, considerando que el recargo le subirá el valor a pagar; sin embargo, este no se corresponde al 10%. Coincidentemente corresponde al 10%, con lo cual podríamos pensar que suma a la multa el porcentaje de rebaja como tal.
- P4A10 asigna un valor a la multa y un valor al porcentaje de recarga que se corresponde con el 10% del valor asignado a la multa con los cual su respuesta aun cuando se expresa por separado y sin hacer referencia directa a su significado, puede ser aceptable.
- P4A13 asigna un valor al que halla el 10% que suma a aquel. No obstante, no responde explícitamente.
- P4A15 considera que no se puede saber porque faltan datos que le permitan hallar el porcentaje indicado. No considera la posibilidad de sumar al porcentaje total el porcentaje de recargo.
- P4A16 asigna un valor a la cuota, utilizando el condicional “si… (… entonces…)” esto le da carácter de posibilidad con lo cual el dato no aparece impuesto en la resolución, sino propuesto. Lo mismo ocurre con P4A19 y P4A20.
- P4A17 responde en función de la suma de los porcentajes, considerando que ello es factible. No lo aplica a un caso concreto.

Observamos en este grupo la tendencia a asignar un valor al dato desconocido, tal como ocurre con el grupo anterior; sin embargo, no aplican regla de tres simple (excepto P4A13), sus planteamientos son más directos. Asimismo, aparece la posibilidad de sumar los porcentajes como resolución.

Hay que resaltar que no todos los estudiantes que se enfrentan a la situación, la resuelven. Un grupo la deja en blanco.

No responden: P5A1, P5A2, P5A3, P5A5, P5A11, P5A12, P5A14, P5A18.

Caso 6

- P6A1 responde que tendría que pagar más ejemplificando con un caso concreto. Como en casos anteriores (en otras aulas) no impone el valor, lo propone como posibilidad.
- P6A3 si bien asigna un valor a la multa y otro al porcentaje de recargo, que asocia al 100% y 10%, respectivamente, responde en función de un porcentaje total que es la suma de los dos anteriores.
- En P6A4 y P5A5, si bien no hacen explícita una operación consideran que es posible pagar más del 100%, ampliando su campo de porcentajes. En el primer caso no hay una respuesta directa.
- P4A6 sigue el planteamiento de los tres casos anteriores, considerando que se puede pagar más del 100%, exactamente, 110%; sin embargo, hay que añadir que en este caso se aplica este porcentaje a un número asignado (que ha de corresponderse con la multa), hallando su valor en "dinero".
- P6A7 asigna un valor a la cuota (o multa). Para hallar el porcentaje a partir de este lo divide directamente entre diez (considerando probablemente que el 10%% representa la décima parte) Pocos casos, plantean los datos en la solución. La alumna responde en función del resultado final.
- P6A8 responde en función de un porcentaje mayor al 100%, ejemplificando con un caso concreto.
- P6A10 responde en función del porcentaje total y asigna un valor y aplica fracción como operador para hallar el porcentaje transformando este en fracción y culminando el proceso operativo.
- P6A13 considera que se puede sumar los porcentajes como en los casos anteriores, asignando un valor a la multa, asociándola directamente al 100%. No aplica una operación, halla directamente el porcentaje y lo consigna.
- P6A14 consigna los datos que le permiten hallar el porcentaje de recargo, para lo cual asigna un valor al pago que se debe efectuar. Transforma el porcentaje en fracción simplificando la expresión antes de operar. No hay una respuesta explícita; sin embargo, culmina el proceso.
- P6A15 trabaja en función del porcentaje que transforma en fracción. Su planteamiento es ambiguo pues no es claro si se refiere a que paga "la décima parte de la cuota" o que el 10% representa el 10% de la cuota.

A través de las respuestas observamos que los alumnos son más conscientes de la posibilidad de sumar los porcentajes como respuesta a la pregunta; sin embargo, también se hace referencia a la posibilidad de asignar un valor al dato desconocido, en algunos casos de manera impuesta y en otros sugerida, la referencia al uso de regla de tres o fracción de número es menor.

Cabe indicar que un grupo de alumnos no respondió a la situación planteada:

No responden; P6A2, P6A9, P6A11, P6A12 (no sé), P6A16, P6A17, P6A18

Hoja de Trabajo 11 – Pregunta 1 (H11Q1)

H11Q1 (a –b – c): Haz una lista de dos problemas matemáticos distintos que te haya planteado tu profesor/a en clase sobre: a) Operaciones con fracciones, b) porcentajes y c) SMD

En un artículo de 1999, Clements planteaba dos actividades *relevantes curricularmente así como matemática y educativamente "enriquecedoras"*. La primera pide cortar un trozo de una cuerda de 10 metros cuya longitud sea igual a la altura media del grupo (para ello, se forman grupos de 5 integrantes); además se les dice que pasados los 10 minutos de los que disponen para resolver la actividad, deberán explicar al resto de la clase el método que han utilizado. La segunda, pide ubicar en una recta numérica la fracción $3/8$, elegir tres opciones, votar por la que consideren mejor, comprobar cuál es la más acertada usando una cuerda y tijeras y explicar el método seguido. Las consecuencias de la aplicación de los problemas no se describen en el artículo, excepto del primero, las mismas que fueron positivas.

El planteamiento de problemas es importante, no solo como actividad del estudiante sino del profesor. El estudiante aprehenderá del docente no solo los temas matemáticos involucrados en el desarrollo de la clase sino el tipo de "problemas" que le plantee y las consecuencias del mismo. "El concepto de problema que tiene el maestro es el concepto de problema que transmite a sus alumnos. Y de este concepto se desprende, lógicamente, el uso de los problemas en la clase de matemáticas" (Alsina, 2006).

Una cuestión esencial de la literatura referida a 'problema matemático' es que este es tal si el sujeto lo percibe así (como problema). Definir una situación como problema está asociado a la experiencia que se tenga en ello. Consideramos una actividad como problema si vemos el problema en ella o si otros catalogan la situación como problema, aunque no se perciba como tal (con cierta duda en algunos casos).

Los alumnos observados han propuesto diferentes ejemplos de *problemas matemáticos* que les ha planteado su profesor en clase, transmitiendo una idea de lo que ellos consideran como problema matemático a partir de la actividad realizada en el aula.

El primer caso expuesto, planteado por una alumna (P1A1) nos expone dos situaciones o actividades que concibe como problemas matemáticos:

- “De que un niño se comió $\frac{3}{4}$ de chocolate y el otro $\frac{1}{4}$ y tenía que averiguarlo” (P1A1-H11Q1a)
- “De que tenía que transformar las fracciones en porcentajes” (P1A1-H11Q1a)

Sus planteamientos son distintos: la primera tiende a una estructura de problema escolar y la segunda a una situación general. No obstante, ambas requieren acciones concretas y específicas. D’Amore y otros (1999) define problema rutinario a partir de un caso concreto: “ejercicios en los que se debe calcular el volumen de una pirámide recta de base cuadrada, cuando se dan las medidas del lado de la base y de la arista lateral. El estudiante aplica un procedimiento bien adquirido usando dos veces el teorema de Pitágoras… la difusión de este ejercicio es tal que parece razonable hacer la hipótesis de que un alto porcentaje de estudiantes lo resolverá correctamente”. Baroody (1988) citado por Santos y Velásquez (2013) señala que en este tipo de problemas, los datos y la incógnita están claramente especificados, hay una única solución y el camino para obtenerla es fácilmente deducible (pág. 376). Los problemas no rutinarios no cumplen estas condiciones o son diametralmente opuestas: la información es insuficiente, los datos sobran, las estrategias de solución son diversas, pueden plantearse distintas soluciones o ninguna, etc.

De acuerdo a las propuestas de los estudiantes de cuatro aulas distintas (dos peruanas y dos españolas), los problemas planteados tienen características de problemas rutinarios ya que son planteamientos directos de situaciones con un inicio, un medio y un fin determinados: hay una única solución y el camino para obtenerla es fácilmente deducible. Algunos ejemplos son los siguientes:

Caso 1

- “Hay que pasar 600ℓ a botellas de $\frac{1}{4}$ de ℓ. Cuántas botellas se necesitan” (P1A3-H11Q1a)
- “Luis compró una tarta y la partió en ocho cachos iguales. Laura comió $\frac{4}{8}$ y Luis $\frac{1}{8}$. ¿Cuánta tarta quedó sin comer?” (P1A4-H11Q1a)
- “Una vez pedí una pizza y me comí $\frac{8}{9}$. ¿Cuánto no me comí?” (P1A7-H11Q1a)

Caso 2

- “Un niño bebe $\frac{13}{24}$ y otro $\frac{26}{48}$ ¿Cuál bebió más?” (Lucía BV)

- “Si tengo $\frac{4}{5}$ de tarta y como $\frac{1}{5}$ ¿Cuánto me queda de torta?” (Manuel CS)
- “Emilio comprau un ordenador de 590€ se pagou a $\frac{1}{10}$. Canto le falta por pagar” (Antía)

Caso 5

- “Si Joe compra un $\frac{1}{4}$ de Fruta y Fredi un kilo de carne, ¿cuánto más tiene Fredi?” (Jordan)
- “Lorena tiene una propina igual a la mitad de los $\frac{2}{3} de \frac{1}{3}$ de s/.300. ¿Cuánto es la propina de Lorena?” (Antonella)
- “El lunes corrí $1\frac{2}{3}$ km, el martes $\frac{4}{3}$ km y el miércoles $\frac{1}{3}$ ¿Cuánto corrí?” (Mauricio CS)

Caso 6

- “Juan recibe de propina s/. $12\frac{1}{2}$, Manuel s/. $8\frac{1}{4}$ más que David y Diana s/. $2\frac{3}{4}$ menos que José. ¿Cuánto recibe Diana?” (Jorge CR)
- “Renzo tenía s/.58 y gastó s/.12. ¿Qué parte de su dinero ha gastado?” (Marcos CM)
- “Para preparar una receta de cocina se necesita $4\frac{1}{2}$ de leche, si tengo $2\frac{3}{4}$ ℓ de leche, ¿cuánto falta?” (Andrea RC)

Uno de los tipos de problemas que más se plantean en las aulas son los denominados problemas verbales, es decir, aquellos problemas en los que es necesario la respuesta de una o varias preguntas mediante operaciones matemáticas con datos expuestos en el propio problema (Verschaffel, Greer y De Corte, 2000. Cit. Dewolf, Van Dooren y Verschaffel, 2011. Citado por Sánchez et al, 2015). García (2011) expresa que los problemas planteados con palabras (problemas verbales) son enunciados que expresan relaciones entre cantidades numéricas… es necesario traducir los enunciados en expresiones matemáticas que por lo general implican el uso de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Puig y Cerdán (1988) nos dicen que los problemas aritméticos son, en general, problemas de aplicación, lo que hace que aparezcan enunciados en contextos variados. Los alumnos plantean por lo general problemas de este tipo, ya que cumplen las características antes descritas, tal como se observa en los ejemplos anteriores. No obstante, no son las únicas propuestas, ya que consideran como problema matemático, las operaciones aritméticas propiamente (se observa en mayor medida en el apartado “Operaciones con porcentajes” que en los siguientes, tal vez porque haya sido más explícita la propuesta):

Caso 1

- “$\frac{4}{12}+\frac{8}{12}=\frac{12}{16}$” (P1A6)
- “¿Cuánto es $\frac{3}{3}+\frac{2}{3}$?” (P1A8)
- “$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$” (P1A10)

Caso 2

- “$\frac{5}{10}+\frac{3}{8},\frac{3}{12}+\frac{4}{12}...$” (P2A16)
- “2.342’84x897’12=” (P2A18)
- “Multiplicaciones” (P2A19

Caso 5

- “$\frac{3}{2}+\frac{7}{4}$” (P5A7)
- “$\frac{9}{15}+\frac{5}{15}=\frac{14}{15}$” (P5A8)
- “$2\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}$” (P5A13)

Caso 6

- “¿Cuánto es: $\frac{2}{3}-\frac{3}{10}+\frac{10}{9}$?” (P6A7)
- “Suma con multiplicación… Suma con división” (P6A8)
- “$\frac{\sqrt{5}}{25}\times\frac{14}{20}\div\frac{19}{12}\left(\sqrt{20^2-\sqrt{\frac{5}{6}-\frac{2}{6}}}\right)^2$” (P6A13)

En menor medida un problema matemático es una cuestión matemática teórica:

- “¿Qué son los porcentajes? ¿Para qué se utilizan?” (P2A17)
- ¿Qué significa SMD? (P2A13)

Resumiendo, los alumnos plantean como problemas matemáticos propuestos en clase:

- Un problema verbal (con características de problemas rutinarios, contextualizados matemática y extramatemáticamente en mayor o menor medida)
- Una operación matemática directa (más o menos compleja)
- Una pregunta sobre cuestiones matemáticas teóricas.
- En menor medida, una cuestión abierta.

Todo ello, puede suponer que los docentes solo plantean problemas rutinarios; sin embargo, también que los alumnos, y en algunos casos los docentes, reconozcan y definan como problemas matemáticos solo los problemas rutinarios y no actividades más generales que generen bloqueos o limitaciones a los alumnos para resolverlos inmediatamente, pero que con la ayuda del docente y de los conocimientos previos puedan llegar a resolverlas.

La propuesta de los alumnos también nos permite reflexionar sobre las características que se observan en el problema verbal propuesto. De acuerdo a los ejemplos referidos a operaciones con fracciones, los problemas son:

- Directos: es decir, que su planteamiento conduce claramente a la solución inmediata.
- Operaciones únicas: por lo general, involucran una sola operación: suma, resta, multiplicación o una división. Los problemas de división en contextos extramatemáticos son los menos propuestos.
- Dentro de los problemas de suma y resta, los de cambio y combinación son los que más se han propuesto, frente a los de comparación e igualación.
- Los problemas que involucran fracción de un número se proponen descontextualizados de situaciones extramatemáticas.
- Inconsistentes e imposibles: en algunos casos, los datos involucrados no han permitido resolver el problema.

Hoja de Trabajo 11 – Pregunta 2 (H11Q2)

H11Q2: ¿Por qué son problemas los ejemplos anteriores?

En un estudio realizado con alumnos de enseñanza media costarricense (Barrantes, 2008), se observa que existe preferencia por pensar que un problema puede considerarse como un ejercicio para verificar conocimientos, por lo que no puede presentar información que no sea pertinente, solo tiene una respuesta correcta y el enunciado presenta las claves de su solución. Estas ideas no dista de las expuestas por dos de los grupos de alumnos (ambos de aulas españolas) sobre problema matemático y que se ven ejemplificadas (ya por los seis grupos de alumnos, incluidos: tres peruanos y tres españoles) en los problemas planteados como tales, ya sea como problemas propuestos por su profesor en clase o que pueden presentársele en el día a día en la escuela, en la casa o en la calle:

Caso 1

- “Porque no sabes la respuesta y hay que averiguarla” (P1A1-H11Q2)
- “Porque lo pone en el enunciado” (P1A2-H11Q2)
- “Porque se resuelve con operaciones” (P1A3-H11Q2)
- “Porque son situaciones que hay que resolver” (P1A4-H11Q2)
- “Porque no se pueden resolver a simple vista y hay que realizar operaciones para resolverlos” (P1A5-H11Q2)
- “Porque hay que operar“(P1A6-H11Q2)
- “Porque tienen números y preguntas“(P1A7-H11Q2)
- “Porque cada uno contiene alguna cosa que hay que resolver” (P1A8-H11Q2)
- “Porque son operaciones que hay que resolver” (P1A10-H11Q2)
- “Porque tienes que pensar y después hacer operaciones” (P1A11-H11Q2)
- “Porque son situaciones en las que tenemos que pensar una solución para resolver el problema” (P1A12-H11Q2)
- “Porque hay que resolverlos” (P1A13-H11Q2)
- “Porque hay que resolverlo” (P1A14-H11Q2)
- “Porque no se sabe hacer y son difíciles” (P1A15-H11Q2)
- “Porque son datos que te dan para que con ellos puedas averiguar otro dato” (P1A16-H11Q2)

- “Porque estais en un caso que tienes que averiguar lo que le diga la pregunta y hacer operaciones distintas para hallar lo que le pidan para con algunos datos que…” (P1A18-H11Q2)

Caso 2

- “Porque hay que pensar mucho” (P2A1-H11Q2)
- “Porque sí” (P2A2-H11Q2)
- “Porque dice qué número hace cada cosa y se hacen una o varias preguntas que podrían ser distintas” (P2A3-H11Q2)
- “Porque tienes que averiguar una cantidad según los datos que te dan” (P2A4-H11Q2)
- “Porque tienes que adivinar una cifra” (P2A5-H11Q2)
- “Ya que no puse ninguno no sé, Pero un problema le presenta un “problema” que tienes que resolver con unos datos” (P2A7-H11Q2)
- “Porque te plantean la cosa (problema) y tienes que responder” (P2A8-H11Q2)
- “Porque hay que pensar el resultado” (P2A10-H11Q2)
- “Porque tienen solución y son” (P2A13-H11Q2)
- “Porque tienes que responder en ellos una pregunta” (P2A15-H11Q2)
- “Porque tienes que averiguar el resultado” (P2A16-H11Q2)
- “Porque son cosas que la profesora te lo puede poner en un examen o ejercicios” (P2A18-H11Q2)
- “Porque sirven para contestar” (P2A19-H11Q2)
- “Porque se suman o se restan o se multiplican” (P2A20-H11Q2)

Las ideas centrales en la justificación de las propuestas como problema realizadas por estos estudiantes, son las siguientes:

a) El desconocimiento. En todo problema se desconoce “algo”: un dato, un resultado, la respuesta (P1A1-H11Q2, P1A16-H11Q2, P1A18-H11Q2, P2A4-H11Q2, (P2A5-H11Q2, P2A16-H11Q2).
b) La resolución. Se tienen que resolver para poder desvelar lo desconocido; de ahí su planteamiento (P1A4-H11Q2, P1A13-H11Q2, P1A14-H11Q2, P2A7-H11Q2).
c) La solución. Lograda a través de la aplicación de operaciones con los datos del problema (P1A12-H11Q2, P2A13-H11Q2).

d) Unos datos. Información que permite dar sentido al problema (P1A8-H11Q2, P1A16-H11Q2, P1A18-H11Q2, P2A7-H11Q2, P2A4-H11Q2).
e) Las cantidades. Necesarias para operar con ellas (son los datos numéricos) (P1A7-H11Q2, P2A3-H11Q2, P2A4-H11Q2, P2A5-H11Q2).
f) Las operaciones. Que permiten resolver el problema utilizando las cantidades incluidas (P1A3-H11Q2, P1A5-H11Q2, P1A6-H11Q2, P1A10-H11Q2, P1A11-H11Q2, P1A18-H11Q2, P2A20-H11Q2).
g) La dificultad. Que impide resolver "a simple vista" el problema o desvelar lo desconocido (P1A15-H11Q2).
h) El pensamiento. O la necesidad de pensar lo que tienes que hacer antes de actuar. El pensar conduce a "darse cuenta" (P1A11-H11Q2, P2A1-H11Q2, P2A10-H11Q2).
i) La propuesta. Los problemas tienen un planteamiento externo; es decir, se construyen a partir de una situación construida por alguien; no se descubren o identifican en una situación, ni se plantean a partir de la misma. Tiene estatus propio (P1A2-H11Q2, P1A16-H11Q2, P2A18-H11Q2).

La idea de problema coincide, por tanto con la expuesta por D´Amore (2010, p. 18), quien escribe que "Los ingredientes necesarios para tener lo que en la escuela se llama problema: son datos numéricos, situación ficticia pero comprensible e imaginable, ensimación semántica de las operaciones necesarias... ¡un verdadero problema escolar!". Por otro lado, los elementos constitutivos del mismo, se puede asociar a los expuestos por Borasi (1986):

- Formulación (no necesariamente explicita) que lleva, de forma natural, a plantearse problemas más que a resolverlos.
- Contexto: todo lo que el texto dice de forma explícita o implícita, con el fin de encuadrar el problema, y que provee la información necesaria para resolverlos; por tanto: datos, pero también preguntas (inventadas, culturales,...) que el contexto trae in mente.
- Soluciones: una, varias, incluso ninguna; este último punto es importante, ya que aquí se pasa de la búsqueda de soluciones a la presentación de la cero de las soluciones.
- Métodos de resolución: que sean lo más amplios y diferenciados posibles (p. 173. Citado por Beyoda y Ospina, 2014).

Definitivamente, los problemas planteados por los alumnos tienen los elementos que Borasi enuncia pero en sentido limitado puesto que en estos se visualiza un método de solución o una única solución y una formulación necesariamente explícita. Es decir, tienen los ingredientes de los auténticos problemas; pero de manera reducida.

“Los problemas son situaciones conflictivas cuya solución no resulta evidente” (Pisa 2012). Por otro lado la OECD afirma que “Los problemas son situaciones sin una solución obvia. Si no hay que pensar, no hay problema” (vol V. p.1). En estas dos definiciones, se evidencia el carácter retador y constructor de un problema, esperando que su solución sea el resultado de un proceso de construcción personal por parte del resolutor, a partir de los conocimientos previos que no necesariamente utiliza de manera directa. Un problema no es solo hallar un resultado, sino descubrir un procedimiento, una estrategia, etc. La idea de reto no está presente en las definiciones expuestas, más sí el de dificultad; sin embargo, esta dificultad está asociada a la capacidad del estudiante de aplicar correctamente el conocimiento aprendido.

La respuesta a la segunda pregunta orienta a pensar que la actividad de resolución de problemas es posible gracias a las herramientas adquiridas, sin las cuales no se puede resolver ninguna situación: problema, ejercicio, actividad matemática propiamente. Esto es correcto; no obstante, anula la capacidad de intentar hacerse de una estrategia que resulte interesante y pertinente (o no), pero que resulte de la actividad propia del resolutor. En las respuestas a la pregunta, pocos son los alumnos que piensan que podrían sumar dos fracciones heterogéneas si se imaginaran cómo hacerlo, si pensaran o razonaran (ambos de colegios españoles) o plantea una forma que no requiera operar directamente con las fracciones. En un caso, la alumna (de colegio peruano) sugiere la capacidad de hacerlo pero lo poco práctico que podría resultar su estrategia. Estas respuestas, abogan por una idea de reto del problema ya que este es posible si el alumno se esfuerza en la tarea aplicando lo que conoce (que no es el procedimiento propiamente) para acceder a una forma distinta de solución. En su mayoría, todas las escuelas, destacan la idea de *no ser posible* sumar dos fracciones heterogéneas porque no cuenta con el método lo la fórmula, o *sí es posible* porque es lo mismo (o más o menos). Un dato importante, lo enuncia un alumno (de escuela peruana) al decir que si no sabe el método se entretendría en lo que sabe. Efectivamente, sin una guía adecuada, el alumno no sabría cómo actuar frente a un problema, al menos tardaría más en hacerlo. La ayuda oportuna de un experto le ayuda a seguir un mejor camino y desarrollar su capacidad con mejores herramientas.

Hoja de Trabajo 12 – Preguntas 1, 2 y 3 (H12Q1, H12Q2 Y H12Q3)

H12Q1: ¿Piensas que una niña y/o niño que no conoce ninguna operación concreta para hallar la superficie de un rectángulo, puede descubrir cuánto mide la superficie de ese rectángulo? Explica tu respuesta.

H12Q2: Halla la superficie del siguiente triángulo. Explica cómo lo has hecho.

H12Q3: ¿Cómo aprendiste a hallar el volumen de los objetos?

Porras y Martínez (2007) citando a Brousseau (1993) expresan que investigaciones en Didáctica de la Matemática muestran que en la cultura escolar se da mucha importancia a la enseñanza; vista como la presentación organizada y coherente del contenido a estudiar; ocultándole a los alumnos el proceso de descubrimiento que, en la comunidad matemática, condujo a comprender la naturaleza de los objetos o los sistemas en cuestión. Esta forma de afrontar la enseñanza de la matemática suele acarrear la pérdida del sentido de su estudio. Los autores mencionan que Chevallard (1997:63) relaciona esta pérdida con un fenómeno didáctico que llama *irresponsabilidad matematica de los alumnos.* Molinolo (2010) manifiesta que cuando la matemática se exhibe como dominio de una técnica, la actividad en el aula se circunscribe a que el estudiante reconozca qué definición debe aplicar, qué operación debe realizar, qué algoritmo tiene que usar. Así, ante un problema, sólo se dedica a ver qué hacer (o qué aplicar). Efectivamente, el alumno puede aprender *qué hacer*, desde *un hacer* sin reflexión personal sobre *ese hacer* aprendido.

En contraposición, la actividad matemática en el aula propiamente se ha de plantear como una actividad dinámica; a través de ella se busca que los alumnos, desde muy pequeños, participen activamente en la construcción, descubrimiento y generación del conocimiento matemático por medio de la interacción con la realidad o con situaciones concretas que requieran de este conocimiento. ¿Cuánto piensa el alumno que es capaz de ello?, ¿Qué espera de la actividad matemática en el aula? El que el alumno participe del proceso mismo de construcción más allá de obtener el método para resolver situaciones problemáticas que lo requieran, le permite desarrollar procesos propios de la actividad matemática: construir, buscar regularidades, formular, probar, definir, generalizar, proponer problemas, etc.

Al plantear la primera pregunta se busca indagar esa actitud de intromisión en situaciones nuevas, se espera que el alumno exprese una idea de la actividad matemática asociada a otras opciones de estrategias o al menos, que puedan manifestar que “si no conocen la estrategia la pueden construir, crear o descubrir”.

La segunda pregunta es un problema cerrado con una particularidad: no expone directamente los datos numéricos necesarios para resolverlo. Se busca que los alumnos identifiquen los mismos y los extraigan del gráfico a fin de resolver el problema y no se estanquen en el proceso de resolución por no observar directamente dichos datos. De esta forma, el alumno no espera que todos los datos les sean expuestos directamente.

La tercera pregunta se orienta hacia las formas de aprendizaje que los alumnos experimentan en la clase de matemática.

H12Q1: ¿Piensas que una niña y/o niño que no conoce ninguna operación concreta para hallar la superficie de un rectángulo, puede descubrir cuánto mide la superficie de ese rectángulo? Explica tu respuesta.

Respecto a la primera cuestión, los alumnos del primer grupo (C1P1) hacen mención a dos formas básicas de hallar la superficie de un rectángulo: una forma operativa (a través de la aplicación de la fórmula) y otra gráfica (a través de cuadricular la imagen). Esta última es mencionada por dos alumnos del grupo C4P5.

Caso 1

- “No porque si no conoce una de las dos formas no puedes porque después de medir no sabría qué hacer” (P1A1-H12Q1)
- “Sí. Porque se puede medir” (P1A2-H12Q1)
- “Sí porque también puede cuadricular la figura y contar los cuadrados” (P1A3-H12Q1)
- “Sí, porque se cuadricula el rectángulo y después los cuentas todos, ya tiene a superficie” (P1A4-H12Q1)
- “Sí. Lo cuadricula y cuenta los cuadraditos” (P1A5-H12Q1)
- “No porque puede que en vez de multiplicar la base por el alto multiplique base por largo” (P1A6-H12Q1)
- “No porque sin fórmula no sabe cómo hallar la superficie” (P1A7-H12Q1)
- “No puede porque la fórmula es la que te dice las operaciones que se tiene que hacer” (P1A8-H12Q1)
- “Sí. Porque también puede cuadricular la figura y contar los cuadraditos” (P1A9-H12Q1)
- “Sí, midiendo y operando” (P1A10-H12Q1)

- “No, porque no sabría resolverlo” (P1A11-H12Q1)
- “Sí, puede cuadricular y contar los cuadraditos” (P1A12-H12Q1)
- “Sí porque si sabe cuadricular y contar hace eso y ya lo sabe” (P1A13-H12Q1)
- “Porque puede ver porque tiene los lados paralelos dos a dos y tiene los ángulos iguales” (P1A14-H12Q1)
- “Sí, cuadricular y contar” (P1A15-H12Q1)
- “No, porque es muy difícil calcular contando cuadraditos la superficie de un cuadrado, y mucho más la de un rectángulo” (P1A16-H12Q1)
- “No, porque si se quiere hallar la superficie de “algo”, hay que saber cómo se hace y la fórmula” (P1A17-H12Q1)
- “Sí, pero si mido el largo y el alto y multiplicarlos, pero si no sabe medir el largo y el alto no lo puede saber” (P1A18-H12Q1)

Caso 5

- “Se multiplica uno de los lados por el otro” (P4A3-H12Q1)
- “Sí, lo mide con una regla” (P4A4-H12Q1)
- “Primero mido la altura y la base y luego lo multiplico y lo divido” (P4A6-H12Q1)
- “No porque no sabe la fórmula” (P4A7-H12Q1)
- “Sí porque se puede medir o comparar y luego cuadricularlo” (P4A8-H12Q1)
- “$\begin{array}{l} b\times h \\ 5\times 1=5cm \end{array}$” (P4A10-H12Q1)
- “…Si no sabe la fórmula entonces multiplica el largo por el ancho” (P4A13-H12Q1)
- “No, porque no sabe” (P4A15-H12Q1)
- “¡No! Porque debe saber la fórmula” (P4A16-H12Q1)
- “Sí, puse □ adentro y los medí todos, es decir, lo comparo.” (P4A17-H12Q1)
- “No sé. Sé que tengo que medir lo de adentro pero no sé cómo” (P4A19-H12Q1)

Caso 6

- “Rp. Pienso que sí, ya que si no tiene fórmulas haría uso de la regla” (P6A3-H12Q1)
- “No porque si no sabe lo básico no va a saber lo más difícil” (P6A5-H12Q1)
- “Tal vez lo haga por tanteo pero eso no es lo correcto porque con tanteo no es mejor” (P6A7-H12Q1)

- “No porque para hallar la superficie necesariamente tiene que aplicar una fórmula” (P6A8-H12Q1)
- “Multiplicando el largo x el ancho” (P6A10-H12Q1)
- “Sí porque ya lo sabe hacer” (P6A12-H12Q1)
- “No, si no sabe cómo podría responder” (P6A13-H12Q1)
- “x + x + x + x…” (P6A14-H12Q1)
- “…Conoce la medida de $1m^2$ y comienza a medir en el tamaño del rectángulo y cuenta cuántos cuadraditos hay” (P6A15-H12Q1)
- “Jamás lo va a hacer porque no sabe cómo hacerlo” (P6A16-H12Q1)
- “No, porque si no sabe la fórmula que es lo principal y que de ahí se saca el resultado, no puede” (P6A17-H12Q1)
- “x + x + x + x…” (P6A18-H12Q1)

En general, estos alumnos manifiestan que no pueden hallar la superficie del rectángulo si no se conoce la fórmula para ello; sin embargo, expresan que pueden hacerlo si aplican la otra forma. En cualquiera de los casos, no hacen referencia directa a la capacidad del alumno de crear su propio procedimiento o estrategia de resolución. Parten de la idea de que existen dos formas, una de las cuales pueden aplicar. Los alumnos de los grupos C4P5 y C5P6 tienden, en su mayoría a afirmar que el conocimiento de la fórmula es fundamental.

De esta manera, frente a la posibilidad de construcción del conocimiento o estrategia matemática, los alumnos:

Sobre la actividad matemática

- Consideran la actividad matemática con un matiz aplicativo y no constructivo. La fórmula es útil para resolver la situación.
- La actividad matemática se centra en la aplicación de fórmulas que permiten un trabajo directo y efectivo de la solución de cualquier problema.

Sobre el conocimiento matemático

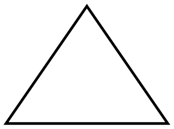
- Si los alumnos no conocen la fórmula, no sabrán qué hacer frente a una situación problemática nueva.
- El conocimiento matemático es necesario para resolver situaciones problemáticas.

- No todos los alumnos tienen claro el conocimiento sobre la superficie de un rectángulo ni de la fórmula para hallarla.

Sobre la resolución de problemas

- Existen formas (o estrategias) efectivas y no efectivas. La fórmula es una forma efectiva; el tanteo o cuadricular la superficie, no.
- La resolución de problemas es efectiva si el alumno cuenta con procedimientos adecuados.
- Los problemas se pueden resolver si se conoce y aplica la forma de hacerlo.

H12Q2: Halla la superficie del siguiente triángulo. Explica cómo lo has hecho.



La resolución de problemas de este tipo exige que el alumno se apropie de los datos necesarios a partir de una imagen muda (es decir, que no indica ningún dato numérico), en la cual el estudiante ha de seleccionar una información (medida de la base, medida de la altura) y descartar otra (medida de los lados del triángulo, medida de los ángulos, medida del perímetro, etc.).

Quienes resuelven el problema, efectivamente, buscan información en la imagen presentada y aplican una fórmula, una operación u otra estrategia que permita relacionar correctamente los datos y resolver el problema. No obstante, los alumnos comete ciertos errores al aplicarla y los resultados no son los ideales.

Caso 1

Los alumnos resuelven la situación, básicamente, utilizando la fórmula del área del triángulo. Algunos de ellos, confunden la misma con la fórmula del área del rectángulo. Asimismo, para su aplicación identifican las medidas de la base y altura en la figura:

Área del triángulo

- “Multipliqué la base por el alto y lo dividí entre 2…” P1A1-
- “Primero medí el alto y luego la base y después ya hice la fórmula: $\frac{b \times a}{2}$ y después las operaciones…” P1A4

- “$A:(4\times 6):2=24:2=12cm^2$” (P1A6-
- “Primero medí el alto y el largo. Después lo multipliqué y por último lo dividí entre dos:..” (P1A7
- “Yo primero medí la recta que va desde el vértice de ARRIBA HASTA la base. Después medí la base y lo que me dio de medir lo multipliqué y lo dividí entre 2…” P1A8
- “He hecho lo que me dice la fórmula de $\triangle = \frac{base \times altura}{2}$” P1A12
- “Lo he hecho midiendo y operando. Primero pongo la fórmula y después mido la base y la altura porque es lo que nos dice la fórmula. Luego opero como nos dice la fórmula y ya me sale el resultado… $A=\frac{base \times altura}{2}$ …” P1A13
- “La superficie es de 12 cm^2. Imaginándome otro triángulo igual, juntándolos para hacer un cuadrado, y como la altura y la base no cambia multiplicándolas para hallar la superficie del cuadrado, pero como el triángulo era medio cuadrado, dividí el resultado entre dos” P1A16
- “La superficie es de 12cm^2. Hice así: en el triángulo medí la base y después la altura… Después lo que mide la base y la altura lo multiplico y después lo divido” P1A17

Área del rectángulo

- “Midiendo base por alto” P1A2
- “Medí la base y la altura del triángulo y multipliqué” P1A5
- “La superficie es de 24 cm. Lo que he hecho utilizando la fórmula del triángulo que es base por altura y me dio la superficie” P1A9
- “24. Midiendo su alto y su base con una regla y luego multiplicar alto y base” P1A15
- “La superficie del triángulo es de: 24 centímetros… se multiplica: largo x alto y da la superficie del triángulo…” P1A18

Otra fórmula

- “8cm… 4 triángulos iguales por dos porque el triángulo es la mitad del rectángulo” P1A10
- “16cm por si mides el triángulo la base es 6 y los lados 5. Lo sumas y te da 16 cm” P1A14

No precisan

- “Lo he hecho midiendo la superficie” (P1A11)
- P1A3, quien cuadricula la figura.

Caso 5

Los alumnos basan su respuesta en la aplicación de la fórmula del área del triángulo; no obstante algunos cuadriculan la imagen o no precisan ninguna operación aritmética, solo cómo lo han hecho:

Área del triángulo

- “Se multiplica base x altura sobre 2” P5A3
- “$\frac{6\times 4}{2}=12$” P5A6
- P5A8 realiza una multiplicación de la base por la altura. Luego indica la mitad de ese valor como el área del triángulo.
- “$\frac{b\times h}{2}$ …” P5A10
- “$\frac{b\times h}{2}$ …” P5A13
- “$\frac{a\times l}{2}$” P5A16
- “4x2:2=4” P5A19
- “18x5=90   90:2=45” P5A20

Otra fórmula o forma

- “$x+y$” (P1A7)
- “Subrayando” P5A9 (cuadriculando)
- P5A17 cuadricula la figura

No precisa fórmula

- “Lo he medido con una regla” P5A4

Caso 6

Los alumnos aplican la fórmula del área del triángulo, identificando la base y altura; sin embargo, otros trabajan directamente con los lados del mismo.

Área del triángulo

- “$\frac{b\times h}{2}=$” P6A4

- “Aplicando la fórmula $\frac{b\times A}{2}=\frac{4\times 6}{2}=12cm$ ” P6A5
- “Midiendo con una regla” P6A10 No obstante, aplica la fórmula del área del triángulo.
- “ $\frac{b\cdot h}{2}$ Multipliqué la base por la altura y la dividí entre 2” P6A15

Otra fórmula

- “5x5x5” P6A6
- “5cm+5cm+6cm… 16cm… Sumando cuanto medían sus lados” P6A7
- “x + x + x =3x” P6A14
- “x + x + x =3x” P6A18

No precisa fórmula

- “He medido sus lados haciendo uso de la regla” P6A3

En general, a través de la resolución de este problema, en base al trabajo operativo y gráfico realizado, se puede observar que los alumnos:

Respecto a la información:

- Buscan la información en la imagen propuesta: pertinente, necesaria, o no. Esto se evidencia, principalmente, a través de las gráficas trabajadas.
- Completan la imagen con la información obtenida (pertinente, necesaria o no)
- No usan la imagen (se circunscriben a la fórmula sin aplicar cantidades específicas)

Respecto a la estrategia de resolución:

- Aplica la fórmula directamente (en algunos casos aplican la fórmula del área del rectángulo).
- Identifican los elementos en la imagen, miden e indican sus medidas sin aplicar ninguna operación.
- Usan variables para indicar (y dar valor) las medidas necesarias
- Usan valores hipotéticos (no ven la necesidad de medir la imagen sino asignan un valor concreto (número natural) o abstracto (variable x o y).
- Miden y operan
- Cuadriculan la imagen
- Transforman el triángulo en rectángulo, hallan el área del rectángulo y dividen entre dos.
- Aplican operaciones inconsistentes que no se ajustan a las características de lo solicitado.

- Subrayan (una de las estrategias de comprensión de problemas verbales es subrayar: los datos conocidos, necesarios con un color y la incógnita con otro color).
- Manipulan cantidades desconocidas a través de la asignación de una variable (solo en un grupo de alumnos peruanos).

Respecto a la pertinencia de la solución:

- Los alumnos resuelven correctamente aplicando la fórmula aprendida o a través de la manipulación gráfica y simbólica (multiplican y dividen sin especificar que están aplicando la fórmula).
- No todos los alumnos resuelven concretamente el problema. Se observan errores de interpretación de la superficie del triángulo.
- No todos los alumnos brindan respuestas acertadas al problema formulado. Algunos confunden perímetro con área.

H12Q3: ¿Cómo aprendiste a hallar el volumen de los objetos?

De acuerdo a Varga Merina (2007), de modo general y según la naturaleza de los fines que pretende alcanzar, los métodos de enseñanza pueden ser agrupados en tres grupos: métodos de investigación, métodos de organización y métodos de transmisión. La enseñanza de la matemática aboga por un aprendizaje significativo. “Una instrucción matemática significativa debe atribuir un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso del profesor, a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas El maestro… debe ser consciente de la complejidad de la tarea de la enseñanza si se desea lograr un aprendizaje matemático significativo” (Godino, 2003). El mismo autor afirma que la resolución de problemas “no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. Por ello, los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo”. Con ello, plantea que la resolución de problemas no es la actividad final de un proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática sino el medio para lograr dicho aprendizaje, es inherente a dicho proceso. ¿Qué papel juegan los problemas matemáticos y la actividad de resolución de problemas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en las aulas de quinto grado de primaria?, ¿los alumnos son conscientes del papel que cumplen los problemas matemáticos en este proceso?, ¿cómo piensan los alumnos que aprenden matemáticas? En sus respuestas no se evidencia el trabajo cooperativo, la resolución de problemas como tal, aunque sí la referencia a experiencias concretas y acciones operativas.

Caso 1

Los alumnos de este grupo hacen referencia a la manipulación de los datos, así como a formas gráficas (cubiculando, que se hizo en la pizarra) y a la enseñanza del docente. Asimismo, consideran una experiencia didáctica que les permitió aprender dicho concepto.

Operando

- “Midiendo alto, largo, y ancho y multiplicando” P1A5
- “Cubiculando un cubo o multiplicando largo, por ancho, por alto” P1A6
- ¨Multiplicando el largo x el ancho y luego x el alto” P1A12

Midiendo (no especifica la acción siguiente)

- “Midiendo” P1A2
- “Midiendo alto y ancho” P1A11
- “Midiéndolo” P1A14
- “Midiendo la base y el alto y el largo” P1A15

A través de una experiencia

- “Por ejemplo, con una piedra llevas un frasco graduado, 4ℓ echas una piedra y sube un ℓ, 5ℓ, la piedra tiene capacidad 1dm^{3}” P1A4. Esta experiencia fue relatada por P1A8, P1A9 (esta alumna indicó otra forma que tachó: “buscando figuras que tienen 3 dimensiones…”), P1A16, P1A18
- “Lo aprendí” P1A13

Otros factores: enseñanza del profesor

- “Me lo enseñó el profesor” P1A1

Caso 5

Este grupo se caracteriza por hacer referencia al aspecto operativo del mismo; sin embargo incluyen otros factores como el estudio y la atención. Asimismo, un grupo especifica no haber aprendido.

Fórmula del volumen

- “Se multiplican sus 3 dimensiones: largo, ancho y altura” P5A3
- “Por medio de una fórmula o conversiones” P6A13
- “Multiplicando largo, ancho y altura” P1A16

Otros factores

- “Atendiendo en las clases” P5A6
- “Estudiando la lámina” P8A6

Caso 6

La manipulación numérica o el uso de la fórmula caracterizan a este grupo de alumnos respecto a la forma de aprender a hallar la medida del volumen. El aprendizaje se centra básicamente en el uso de la operación o fórmula necesarias, más no en la estrategia metodológica que realizaron. No obstante, otros indican otras operaciones:

Fórmula del volumen

- “Multiplicando sus tres dimensiones: largo x ancho x altura” P6A3
- “Conociendo ciertas medidas de los objetos y aplicando sus fórmulas” P6A4
- “Lo aprendí usando la fórmula” P6A5
- “(2cm)(2cm)(2cm)… $(2^3)(m^3)$… $8cm^{3.}$ Hay que ver la altura, el ancho y la capacidad del cubo” (P6A7)
- “Aplicando la siguiente fórmula: Volumen=largo x ancho x altura” P6A8
- “Multiplicando el largo, ancho y la altura de la cosa” P6A10
- “Aplicando fórmula” P6A14
- “$V=a^3$… Volumen= $arista^{3”}$P6A15
- “Sí, en un cubo multiplicando 3 veces como por ejemplo…” P6A17

Otras fórmulas

- “Sumándolos” P6A18
- “Midiendo cada lado y los multiplico” P6A6 Cabe indicar que este alumno dibujó un triángulo.
- “Dividiéndolo entre tres” P6A16

A través de la cuestión planteada, los alumnos exponen lo que consideran fue la forma de aprender el volumen de los objetos. Entre las formas de aprendizaje planteadas tenemos las siguientes:

A través de terceros (resaltan el papel del experto):

- Me lo enseñó el profesor

- Me lo han enseñado

A través de estrategias específicas (destacan la aplicabilidad o magnitud del conocimiento):

Referidas a cuestiones matemáticas (el conocimiento es básico)

- Aplicando operaciones
- Por medio de una fórmula o conversiones

- **Referidas a cuestiones metodológicas (la acción concreta ayuda)**
- Con una experiencia
- Midiendo
- Cubiculando
- Buscando figuras (objetos) que tienen tres dimensiones

Referidas a aspectos cognitivos (trabajo personal)

- Atendiendo en clase
- Estudiando la lámina

No definido

- De muchas formas
- Lo aprendí

Hoja de Trabajo 13 – Preguntas 2, 3 y 4 (H13Q2 – 13Q3 Y H13Q4)

H13Q2: ¿Cómo son las matemáticas para ti? ¿Por qué?

H13Q3: ¿Qué son las matemáticas para ti?

H13Q4: ¿Cómo aprendes matemática?

Dado que la actividad básica de la matemática y la matemática escolar es (o debería ser) la resolución de problemas, se les planteó a los alumnos responder a tres preguntas a fin de poder encontrar una relación entre la matemática y la resolución de problemas matemáticos.

- ¿Cómo son las matemáticas para ti? ¿Por qué? (H13Q2)
- ¿Qué son las matemáticas para ti? (H13Q3)
- ¿Cómo aprendes matemática? (H13Q4)

H13Q2: ¿Cómo son las matemáticas para ti? ¿Por qué?

Caso 1

Los alumnos expresan diferentes ideas sobre las matemáticas, algunas relacionadas con la actividad que se realiza en ella (calcular, resolver problemas, situaciones, operar… pensar), así como el grado de dificultad o no, que les genera ello. Estos alumnos consideran las matemáticas divertidas, geniales o aburridas, lo primero porque la actividad expuesta les gusta y se aprende cosas nuevas, y lo segundo porque a veces no entienden o consideran que las cuestiones se repiten. Desde la percepción de los alumnos, la actividad de resolución de problemas está presente en la matemática escolar:

- “Son difíciles porque a veces me es difícil calcular algo” (P1A1-H13Q2)
- “Un poco aburridas. Porque siempre estamos con lo mismo” (P1A2-H13Q2)
- Vacío (P1A3-H13Q2)
- “Son divertidas. Porque tienes que resolver problemas, situaciones y también son entretenidas” (P1A4-H13Q2)
- “Importantes. Porque la mayoría de los problemas se resuelven con las matemáticas” (P1A5-H13Q2)
- “Divertidas porque me gusta hacer operaciones y además aprendo” (P1A6-H13Q2)

- “Divertidas porque paso el tiempo, me gusta hacer problemas, hacer operaciones, etc.” (P1A7-H13Q2)
- “Son interesantes. Porque si no hubiera matemáticas no aprenderíamos a sumar fracciones, a sumar, a restar, etc.” (P1A8-H13Q2)
- “A veces son aburridas y otras divertidas porque a veces te explican cosas que ya sabes y otras no las sabes y no te aburres” (P1A9-H13Q2)
- “Un poco difíciles porque algunas veces te equivocas y se te lía todo” (P1A10-H13Q2)
- “Un poco difíciles porque hay que pensar mucho” (P1A11-H13Q2)
- “Interesantes. Porque se aprenden muchas cosas como a sumar fracciones, a dividir decimales, a calcular el área de un cuadrado” (P1A12-H13Q2)
- “Fáciles, un poco, porque se aprenden fáciles” (P1A13-H13Q2)
- “Divertidas porque ~~esta clase~~ me gusta” (P1A14-H13Q2)
- “Divertidas. Porque cada día aprendo cosas nuevas” (P1A15-H13Q2)
- “Como una forma sencilla de hacer cálculos. Porque tienen explicación” (P1A16-H13Q2)
- “Son geniales porque aprendo coas nuevas y~~ me recuerda cosas que ya sabía”~~ (P1A17-H13Q2)
- “Muy importantes. Porque sin matemáticas no podríamos repartir, sumar, restar, dividir, multiplicar, medir. ¡Buf! Muchas cosas que no sabríamos” (P1A18-H13Q2)

Caso 2

Al igual que el grupo anterior, los alumnos expresan diferentes ideas sobre las matemáticas; sin embargo, la referencia a la actividad que en ella se realiza es mínima, solo se evidencia una asociada a la ejecución de operaciones aritméticas. Sus respuestas se centran en expresar la percepción que tienen de la misma; de acuerdo a ello, destaca el que las matemáticas se perciban como útiles, interesantes, importantes, fáciles, divertidas, complicadas, difíciles, aburridas, que gusta o que no. De acuerdo a ello, la actividad que se realiza en el aula genera cierta dificultad en algunos alumnos, cuando no en otros.

- “Son muy útiles y muy aburridas porque no me gustan los deberes. Son útiles porque cuando seas mayor se utilizan mucho” P2A1-H13Q2
- “Ni muy malas ni muy buenas. No sé.” P2A2-H13Q2
- “Las matemáticas para mí son un poco difíciles y aburridas ya que prefiero a escribir a que escuchar y en matemáticas nos pasamos mucho tiempo explicando” P2A3-H13Q2

- “No es mi asignatura favorita, ni la peor” P2A4-H13Q2
- “Importantes para la hora de cobrar el dinero de mayor” P2A5-H13Q2
- “Buenas porque aprendo mucho” P2A6-H13Q2
- “Hombre!, complicadas porque no las entiendo” P2A7-H13Q2
- “Mi clase favorita aunque no saque notables es muy importante para la vida y no pienso desperdiciarlas” P2A8-H13Q2
- “Divertidas. Para que te comese coco” P2A9-H13Q2
- “Aburridísimas porque son muy difíciles” P2A10-H13Q2
- “Fáciles y útiles. A mi familia y a mí nos encantan las mates” P2A11-H13Q2
- “Son regulares porque me lío un poco” P2A12-H13Q2
- “Es una asignatura que me encanta porque me gustan” P2A13-H13Q2
- “Es una asignatura que me gusta porque las matemáticas son muy útiles y porque me divierto en clase” P2A14-H13Q2
- “Me gusta más que coñe y que lengua y lingua porque no es un rollo” P2A15-H13Q2
- “Muy útiles para otras cosas porque quiero ser inventora del futuro y tengo que saber los porcientos y otras cuentas” P2A16-H13Q2
- “Me gustan mucho porque hay menos letras” P2A17-H13Q2
- “Muy útiles pero a veces es aburrida porque siempre usas las matemáticas pero a veces te lías con las cosas” P2A18-H13Q2
- “Son mis preferidas porque se me dan bien” P2A19-H13Q2
- “Son divertidas para algunas cosas, complicadas porque es divertidas sumar, multiplicar, restar, etc.” P2A20-H13Q2

Caso 3

Al igual que los grupos anteriores, los alumnos manifiestan diferentes sentimientos sobre la matemática, o la actividad matemática que se realiza en el aula. No siempre se comprenden. La idea de *utilidad* no se aprecia tanto como en casos anteriores, aunque sí la de *divertida*. Se observa que la actividad que se asocia a la matemática es la que se orienta al cálculo, ejercicios y problemas; la actividad lúdica también se hace presente.

- “Depende de si es algo que me suena fáciles, si no, difíciles.” (P3A1-H13Q2)
- “R=Una diversión. R=Porque en 3º y 4º he tenido un profesor que me ha hecho comprenderlas” (P3A2-H13Q2)

- “Con Milagros son divertidas, porque aprende, pero también te diviertes. Con A3 son más aburridas porque no dibuja nada en la pizarra” (P3A3-H13Q2)
- “Un poco difícil por el cálculo” (P3A4-H13Q2)
- “Divertidas porque al mismo tiempo hacemos diver mates” (P3A5-H13Q2)
- “Lo que me gusta de las matemáticas son los ejercicios de ordenar, los de expresar las unidades en otras…” (P3A6-H13Q2)
- “Siempre desde pequeño he tenido problemas con las matemáticas porque me parecen difíciles” (P3A7-H13Q2)
- “No sé cómo expresarlo” (P3A8-H13Q2)
- “Larguísimas porque A3 no nos deja de poner deberes de mate” (P3A9-H13Q2)
- “Divertidas porque está Milagros” P3A10-H13Q2
- “Algunas divertidas y algunas fáciles” P3A11-H13Q2
- “Muy importante porque si quieres un trabajo tienes que saber todo” P3A12-H13Q2
- “Ahora divertidas y a veces aburridas” P3A13-H13Q2
- “No me gustan mucho, pero alguna vez sí, con juegos” P3A14-H13Q2
- “Están bien porque no es tan difícil aparte de los problemas” P3A15-H13Q2
- “Fáciles porque me gustan” P3A16-H13Q2
- “Fáciles porque se me da bien el cálculo” P3A17-H13Q2
- “Fáciles. Porque me gustan aunque alguna vez son difíciles” P3A18-H13Q2
- “Un poco difíciles porque hay veces que no entiendo las cosas” P3A19-H13Q2
- “Fáciles porque son divertidas” P3A20-H13Q2
- “Fáciles porque solo hay que hacer cuentas” P3A21-H13Q2
- “Divertidas porque me gusta hacerlas” P3A22-H13Q2
- “Divertidas porque aprendo” P3A23-H13Q2
- “Guays. Porque a veces me parece divertida” P3A24-H13Q2
- “Normales, porque las entiendo” P3A25-H13Q2

Caso 5

Los alumnos expresan diferentes formas de entender la matemática, las que coinciden con los grupos anteriores en cuanto manifiestan que pueden ser divertidas como aburridas, fáciles o difíciles, no obstante son importantes para la vida o el estudio posterior. Hacen referencia a las temáticas asociadas: números, porcentajes, no obstante, la actividad que sobresale es la de ejecución de ejercicios. Asimismo, se percibe la actividad matemática como problemas que se pueden presentar en la vida diaria.

- “Divertidas cuando trabajamos en equipo y no son divertidas cuando nos enseñan cosas difíciles” (P5A3-H13Q2)
- “Son un poco aburridas pero sirven para aprender y también para las carreras que quieres estudiar, porque son importantes” (P5A4-H13Q2)
- “Son muy animadas porque me ayudan en muchas cosas” (P5A6-H13Q2)
- “Las matemáticas son problemas que se pueden presentar en la vida” (P5A7-H13Q2)
- “Son divertidas porque te enseñan números” (P5A8-H13Q2)
- “Son fáciles pero cuando la miss Tania llega son difíciles” (P5A9-H13Q2)
- “Son más o menos para mí porque algunos ejercicios sé y otros no” (P5A10-H13Q2)
- “Aburridas porque no me gustan los números” (P5A12-H13Q2)
- “Bonitas, porque tienen números” (P5A13-H13Q2)
- “Fáciles y un poco aburridas, porque a veces tienes que pensar y no sabes” (P5A15-H13Q2)
- “Aburridas porque todo es número y me parecen fáciles y me gusta lo difícil, el problema de las jarras me gusta porque fue complicado” (P5A16-H13Q2)
- “Más o menos divertidas porque a veces me enseñan cosas divertidas, el porcentaje” (P5A17-H13Q2)
- “Un poco aburridas porque hay cosas que no sé y no me acuerdo” (P5A19-H13Q2)
- “Fáciles porque pienso que solo son largo ejercicios matemáticos” (P5A20-H13Q2)

Caso 6

La dificultad que generan es apreciada por los estudiantes; no obstante, algunos las consideran divertidas e importantes para la vida. Prevalece, además la idea de razonar en la matemática. El papel de la profesora como experta se acuña en este grupo. Respecto al contenido. Se asocia a las reglas y al uso de procedimientos.

- “Son muy complicadas y debemos tomar atención para aprender porque si no tomamos atención y practicamos no sabremos resolverlo” (P6A3-H13Q2)
- “Son divertidas porque están en todo lado y son parte de mi vida” (P6A4-H13Q2)
- “Las matemáticas para mí son muy fáciles” (P6A5-H13Q2)
- “Divertidas y porque podemos jugar. Para aprender pero también son importantes para la vida” (P6A6-H13Q2)

- “Es un curso que lleva varias ramas y que es muy importante en la vida. Porque es muy esencial. Y nos hace razonar, pensar” (P6A7-H13Q2)
- “Difícil, porque si no sabes preguntas a la persona o profesora” (P6A8-H13Q2)
- “Buenas porque te sirven para cualquier cosa” (P6A9-H13Q2)
- “Es un poco difícil” (P6A10-H13Q2)
- “Un poco difíciles” (P6A12-H13Q2)
- “Razonamiento, porque pienso y razono para ala respuesta” (P6A13-H13Q2)
- “Complejas y con bastantes procedimientos porque si te esfuerzas logras a que eso no sea sí” (P6A14-H13Q2)
- “… Son reglas que utilizamos cuando somos grandes para saber el precio, cuánto gastaré, cuánto mide, etc. Porque me enseña a aprender y en caso de que algo falte puedo darme cuenta de lo que pasa y decirle a aquello que:…” (P6A15-H13Q2)
- “Un poco difíciles porque es mucho” (P6A16-H13Q2)
- “Fáciles porque nada más hay que razonar. Si no pensamos no podemos resolver.” (P6A17-H13Q2)

En general, a través de sus respuestas, se observa que perciben las matemáticas como:

a) Difíciles/complicadas
b) Fáciles
c) Aburridas/larguísimas
d) Divertidas/animadas
e) Importantes
f) Interesantes
g) Explicativas/directas
h) Geniales
i) Útiles
j) Ni malas ni buenas/regulares/normales
k) Razonamiento
l) Son reglas, procedimientos (esto vale para el anterior apartado: concepción de la matemática)

H13Q3: ¿Qué son las matemáticas para ti?

Caso 1

Los alumnos conciben las matemáticas como una asignatura o clase, también como el conjunto de actividades y contenidos que en ella se realizan (métodos, problemas, operaciones, fracciones, geometría, números, resolver problemas). La actividad de resolución de problemas no es percibida directamente por la clase en general, no obstante, quien hace referencia a esta actividad (P1A12-H13Q3) concibe un problema como la resolución de una multiplicación (un poco compleja).

- "Pues una asignatura" (P1A1-H13Q3)
- "Una clase" (P1A2-H13Q3)
- "Un método de aprendizaje muy importante" (P1A3-H13Q3)
- "Las matemáticas son una asignatura más, pero diferente al resto de las asignaturas" (P1A4-H13Q3)
- "Una asignatura divertida" (P1A5-H13Q3)
- "Las matemáticas para mí son formas de aprender sobre los números como: saber calcular, saber sumar fracciones, etc." (P1A6-H13Q3)
- "Algo que todo el mundo tiene que aprender, porque si no la gente no podría hacer muchas cosas como comprar, como contar, los goles de un partido, etc." (P1A7-H13Q3)
- "Son una asignatura importante porque te aporta muchas cosas." (P1A8-H13Q3)
- "Para mí las matemáticas son una asignatura bastante difíciles en algunas cosas" (P1A9-H13Q3)
- "Problemas, operaciones, fracciones, geometría, etc." (P1A10-H13Q3)
- "Las matemáticas para mí es aprender a hacer operaciones, cuentas, etc." (P1A11-H13Q3)
- "Son cosas que te ayudan a resolver problemas. Como por ejemplo: gracias a las matemáticas puedo resolver cuánto es 30x10289." (P1A12-H13Q3)
- "Son ~~divertidas~~" (P1A13-H13Q3)
- "Divertidas." (P1A14-H13Q3)
- "Una asignatura muy divertida" (P1A15-H13Q3)
- "Una manera de conseguir datos necesarios que quieres para hacer algo o por curiosidad." (P1A16-H13Q3)
- "Las matemáticas para mí son súper geniales (a veces)" (P1A17-H13Q3)
- "Es una asignatura como cualquier otra pero que se trabaja con los números en vez de letras. Y es muy importante" (P1A18-H13Q3)

Caso 2

Si bien la idea de asignatura o clase, así como la referencia a las acciones y contenidos que se trabajan están presente en este grupo, destaca su carácter importante o utilitario. La referencia a la actividad de resolución de problemas como parte de la actividad matemática se observa en uno de los alumnos (P2A14-H13Q3), indirectamente, a través de (P2A4-H13Q3), orientado a la idea de problemas característicos de la actividad escolar.

- “Importantes” (P2A1-H13Q3)
- “Útiles” (P2A2-H13Q3)
- “Las matemáticas para mí es una asignatura más del colegio que se me da bastante bien” (P2A3-H13Q3)
- “Son una ayuda para saber muchas cosas como cuántos m^2 mide la escuela, cuánta agua bebo al día, etc.” (P2A4-H13Q3)
- “La forma de hacer operaciones con números” (P2A5-H13Q3)
- “Números” (P2A6-H13Q3)
- “Horribles. Muy, muy, muy, muy complicadas aunque reconozco te van a servir siempre.” (P2A7-H13Q3)
- “Mi clase favorita” (P2A8-H13Q3)
- “Números” (P2A9-H13Q3)
- “Difíciles” (P2A10-H13Q3)
- “Un estudio, una asignatura” (P2A11-H13Q3)
- “Son una materia de clase que hay que estudiar y aprender” (P2A12-H13Q3)
- “Números” (P2A13-H13Q3)
- “Son como problemas que tengo que plantear” (P2A14-H13Q3)
- “Una clase que doy en el colegio” (P2A15-H13Q3)
- “Muy útiles” (P2A16-H13Q3)
- “Muy importantes” (P2A17-H13Q3)
- “Una lección que aunque se use muchas es una de las que menos me gusta” (P2A18-H13Q3)
- “Son para aprender muchas cosas” (P2A19-H13Q3)
- “Son chulas” (P2A20-H13Q3)

Caso 3

La idea de asignatura destaca en este grupo; no obstante se asocia a un método o fuente de aprendizaje o a un juego; son importantes, útiles y divertidas, aunque complicadas en algunos casos. Destaca la actividad de hacer cuentas en la misma. La referencia a la resolución de problemas no está presente directamente en la respuesta a la pregunta.

- “Una asignatura importante” (P3A1-H13Q3)
- “R= La mejor asignatura” (P3A2-H13Q3)
- “Una materia que puede resultad divertida” (P3A3-H13Q3)
- “Una fuente de aprendizaje” (P3A4-H13Q3)
- “Importantes” (P3A5-H13Q3)
- “Una asignatura a veces divertida” (P3A6-H13Q3)
- “Es una asignatura que te sirve para la vida diaria” (P3A7-H13Q3)
- “No sé cómo expresarlo” (P3A8-H13Q3)
- “Una cosa en la que si te confundes en algo, te confundes en todo” (P3A9-H13Q3)
- “Una asignatura” (P3A11-H13Q3)
- “Una asignatura muy importante” (P3A12-H13Q3)
- “Una asignatura” (P3A13-H13Q3)
- “Una asignatura que estudiamos en el cole, aunque a veces ayuda con algunas cosas” (P3A14-H13Q3)
- “Son matemáticas” (P3A15-H13Q3)
- “Un modo de aprender” (P3A16-H13Q3)
- “Aprender unidades de medida, hacer operaciones, etc.” (P3A17-H13Q3)
- “Una asignatura interesante” (P3A18-H13Q3)
- “Una asignatura más” (P3A19-H13Q3)
- “Una asignatura para aprender” (P3A20-H13Q3)
- “Hacer cuentas, mirar cosas” (P3A21-H13Q3)
- “Una asignatura” (P3A22-H13Q3)
- “Un juego” (P3A23-H13Q3)
- “Aprender números” (P3A24-H13Q3)
- “Otra asignatura más” (P3A25-H13Q3)

Caso 5

La idea de situación o problema asociada a la matemática está presente en este grupo de alumnos, así como la de ejercicios u operaciones, prevaleciendo estas. Otra de las actividades presentes es la de razonamiento. Se concibe, además, la matemática como una ciencia.

- "Son situaciones que nos dejan para resolver. Escribiendo el resultado" (P5A3-H13Q3)
- "Es la ciencia de los números" (P5A4-H13Q3)
- "Son muy usables para jugar algunos juegos de mesa" (P5A6-H13Q3)
- "Son problemas" (P5A7-H13Q3)
- "Un curso" (P5A8-H13Q3)
- "Son operaciones" (P5A9-H13Q3)
- "Son más o menos divertidas depende de los temas que sé" (P5A10-H13Q3)
- "Son la base de todo" (P5A12-H13Q3)
- "Son razonamiento o donde calculas un número" (P5A13-H13Q3)
- "Es una ciencia" (P5A15-H13Q3)
- "Amplias en el sentido que tienen muchos temas" (P5A16-H13Q3)
- "Sumar, restar, dividir, etc." (P5A17-H13Q3)
- "Son problemas con números que puedes resolver" (P5A19-H13Q3)
- "Grandes ejercicios" (P5A20-H13Q3)

Caso 6

Destaca la actividad operativa con indicios de resolución de problemas; sin embargo, los alumnos también hacen referencia a que la matemática está presentes en la vida misma.

- "Las matemáticas para mí es una de las áreas más importantes, la cual necesita de mucha atención y práctica" (P6A3-H13Q3)
- "Parte de mi vida" (P6A4-H13Q3)
- "Las matemáticas son muy importantes" (P6A5-H13Q3)
- "Algo muy importante para la vida porque todo es matemática" (P6A6-H13Q3)
- "Es 1 curso que lleva varias ramas y que es importante porque nos ayuda en la vida diaria." (P6A7-H13Q3)
- "Son muy divertidas y se hace muy difícil aprenderla" (P6A8-H13Q3)
- "Es un curso con el cual puedo hallar otra cosa o resolver otras cosas" (P6A9-H13Q3)
- "Aprender toda la vida. Prestándoles atención al profesor" (P6A10-H13Q3)

- “Operar” (P6A12-H13Q3)
- “Problemas con números” (P6A13-H13Q3)
- “Problemas que hay que hallar o resolver” (P6A14-H13Q3)
- “Son cosas que aprendes para cuando crezcas te sea más fácil hacer las cosas que tengan que ver con números.” (P6A15-H13Q3)
- “Son operaciones con signos +, -, x, :, √, etc. Con signos de agrupación como (), [], {} y con números.” (P6A16-H13Q3)
- “Son un juego de números” (P6A17-H13Q3)

En general, la matemática se concibe como:

a) Una asignatura
b) Un método
c) Una clase
d) Contenidos
e) Operaciones
f) Problemas
g) Juego
h) Acciones
i) Ciencia
j) No se puede expresar

También se hace referencia al:

a) Nivel de dificultad (apertura hacia el alumno: son fáciles, difíciles, horribles, divertidas)
b) Estatus (importantes, útiles, necesarias)

H13Q4: ¿Cómo aprendes matemática?

A través de las respuestas anteriores se observa que la matemática no es una materia o actividad fácil, a la que se le debe prestar atención para comprenderlas; no obstante, a algunos alumnos les resulta fácil la misma. No obstante, el estudio y la presencia del docente son necesarios para aprenderla.

Caso 1

La enseñanza del profesor y la atención a la clase (explicaciones) son claves para aprender matemática. No obstante, se destaca el papel de la práctica. Destaca la intervención de P1A11-H13Q4 quien hace referencia a la actividad asociada a los problemas en la que indica que es importante pensar y entender los problemas. P1A17-H13Q4 también se refiere a la actividad de resolución de problemas como propia de la actividad matemática y consecuencia de la actividad operativa. El repaso es una estrategia destacada por P1A4-H13Q4.

- “Me enseña el profesor” (P1A1-H13Q4)
- “Enseñándome el profesor” (P1A2-H13Q4)
- “Atendiendo las explicaciones y repasando en cuadernillos repitiendo los problemas de la libreta que me fueron mal hasta entenderlo, repasando las cuentas en casa” (P1A4-H13Q4)
- “Atendiendo en clase y fijándome bien en los ejercicios para no hacerlos mal” (P1A5-H13Q4)
- “Escuchando las explicaciones que da el profesor y practicando operaciones” (P1A6-H13Q4)
- “Atendiendo atentamente a la pizarra mientras el profesor explica algo. También aprendí en casa con mis padres” (P1A7-H13Q4)
- “Aprendo matemáticas atendiendo al profesor y siguiendo sus explicaciones” (P1A8-H13Q4)
- “Aprendo matemática cuando el profe nos explica. Hacemos cosas de matemáticas en la libreta, fichas, etc.” (P1A9-H13Q4)
- “Explicándote el profesor todo y después haciendo muchos ejercicios” (P1A10-H13Q4)
- “Las aprendes atendiendo, pensando y entendiendo los problemas” (P1A11-H13Q4)
- “Atendiendo a las explicaciones de mi profesor e intentar hacer los ejercicios lo mejor que pueda” (P1A12-H13Q4)
- “Haciendo práctica” (P1A13-H13Q4)
- “Pensando en que esto es esto y tal” (P1A14-H13Q4)
- “Poniéndonos ejemplos en el encerado nuestro profesor Tito” (P1A15-H13Q4)
- “Comprendiéndolas y practicando” (P1A16-H13Q4)
- “Primero sumando y restando, después sumando, restando y multiplicando, haciendo problemas. Y después sumando, restando, multiplicando y dividiendo, haciendo problemas” (P1A17-H13Q4)

- “Aprendo matemáticas como cualquier otra cosa, escuchando a los profesores que saben y por supuesto estudiando mucho” (P1A18-H13Q4)

Caso 2

La presencia del docente, la atención en clase y la práctica también son ideas características de este grupo. Destaca, además, estudiar propiamente o estudiar del libro. Destacan la actitud frente a las mismas, así como dos estrategias personales: cantar y hacer nombres. Estas estrategias se asocian a conceptos matemáticos y pasos a seguir.

- “Estudiando, atender en la clase de matemática, etc…” (P2A1-H13Q4)
- “Con números.” (P2A2-H13Q4)
- “Pues con la ayuda de mi profesora que me explica las cosas y con el libro que utilizo para estudiar y practicar con ejercicios” (P2A3-H13Q4)
- “Atendiendo, estudiando, con la profe y con los libros,” (P2A5-H13Q4)
- “Con la profe” (P2A6-H13Q4)
- “Intentando pensar que me gustan y esforzándome al máximo” (P2A7-H13Q4)
- “Atendiendo y estudiando” (P2A8-H13Q4)
- “Con la profe” (P2A9-H13Q4)
- “Estudiando” (P2A10-H13Q4)
- “Me la enseña A3” (P2A11-H13Q4)
- “Haciendo ejercicios y atendiendo a las explicaciones de la profesora” (P2A12-H13Q4)
- “Con la profe” (P2A13-H13Q4)
- “Con lo que explica la profesora y estudiando por el libro” (P2A14-H13Q4)
- “Estudiando” (P2A15-H13Q4)
- “A veces cantando” (P2A16-H13Q4)
- “Aprendo matemáticas por libros” (P2A17-H13Q4)
- “Atendiendo y escuchando” (P2A18-H13Q4)
- “Estudiando y atendiendo en clase” (P2A19-H13Q4)
- “Practicando, estudiando, haciendo nombres con las cosas difíciles” (P2A20-H13Q4)

Caso 3

Si bien coinciden en algunos aspectos con los grupos anteriores, como atender, practicar, con el profesor, y con el libro, se aprecia la idea de preguntar cuando hay dudas, repasar y leer como otras estrategias de estudio de la materia.

- “Atendiendo en clase” (P3A1-H13Q4)
- “R=Mediante mi profesor/a y mi libro” (P3A2-H13Q4)
- “De muchas maneras desde con un libro hasta con cosas” (P3A3-H13Q4)
- “Atendiendo” (P3A4-H13Q4)
- “Haciendo ejercicios y repasando en la pizarra” (P3A5-H13Q4)
- “Estudiando y preguntando las dudas que tengo” (P3A6-H13Q4)
- “Con una profesora” (P3A7-H13Q4)
- “Estudiando y practicando” (P3A8-H13Q4)
- “Por el libro, por los deberes y por la profe” (P3A9-H13Q4)
- “No lo sé” (P3A10-H13Q4)
- “Estudiando” (P3A11-H13Q4)
- “Haciendo ejercicios y atendiendo” (P3A13-H13Q4)
- “Estudiando en el libro de mate” (P3A14-H13Q4)
- “Con los profes y mis padres” (P3A15-H13Q4)
- “Atiendo” (P3A16-H13Q4)
- “Haciendo operaciones y estudiando del libro” (P3A17-H13Q4)
- “Estudiando por el libro o con mi madre” (P3A18-H13Q4)
- “Me enseña mi profesora” (P3A19-H13Q4)
- “Con la ayuda de A3” (P3A20-H13Q4)
- “Haciendo cuentas” (P3A21-H13Q4)
- “En clase” (P3A22-H13Q4)
- “Leyendo el libro” (P3A23-H13Q4)
- “Gracias a los profesores y esforzándome” (P3A24-H13Q4)
- “Me enseñan, mi profe y mi padre” (P3A25-H13Q4)

Caso 5

En el presente grupo destacan las estrategias comunes a todos los grupos; no obstante, aparecen otras como recurrir a otros medios (internet) y reducirlas a pequeñas operaciones. Por otra parte el aprendizaje de las matemáticas requiere concentración, comprensión y pensamiento.

- “Estudiando un libro y yendo al colegio” (P5A3-H13Q4)
- “Estudiando mucho y practicando” (P5A4-H13Q4)
- “Con alegría y muy contenta” (P5A6-H13Q4)
- “Con la profesora” (P5A7-H13Q4)
- “Entendiéndolas y concentrándome” (P5A8-H13Q4)
- “Con la miss Milagros” (P5A9-H13Q4)
- “Mi profesora me enseña” (P5A10-H13Q4)
- “Practicando y pensando en lo que hago” (P5A12-H13Q4)
- “Practico” (P5A13-H13Q4)
- “Atendiendo a mis profesoras” (P5A15-H13Q4)
- “Como todos, con una profesor(a) que te enseña” (P5A16-H13Q4)
- “Con mi profesora, busco por internet” (P5A17-H13Q4)
- “Estudiando y practicando” (P5A19-H13Q4)
- “Reduciéndolas a pequeñas operaciones” (P5A20-H13Q4)

Caso 6

Destaca en este grupo las formas generales expuestas en los grupos anteriores; sin embargo haremos referencia a lo expuesto por P6A7-H13Q4 quien expone unos pasos en el proceso de aprendizaje: enseñanza del tema o procedimiento, resolución de ejercicios. Por otro, P6A1-H13Q4 hace referencia a plantearse ejemplos, más allá de los proporcionados por la docente o por el libro de texto, mientras que P6A17-H13Q4 destaca su práctica en forma de juego.

- “Tomando atención, escuchar, practicando, poniéndome yo sola ejemplos y estudiando” (P6A1-H13Q4)
- “Poniendo atención a las clases, estudiando y practicando mucho en casa” (P6A3-H13Q4)
- “Practicando y prestando atención” (P6A4-H13Q4)
- “Con ayuda de mis padres y maestros” (P6A5-H13Q4)
- “Haciendo los ejercicios del libro, atendiendo en clase” (P6A6-H13Q4)

- “Primero que nos enseñen el tema o el procedimiento para resolverlo y luego que salgamos a la pizarra para desarrollar un ejemplo” (P6A7-H13Q4)
- “Haciendo las tareas y practicando mucho” (P6A8-H13Q4)
- “En el colegio, estudiando” (P6A9-H13Q4)
- “Escuchando al profesor lo que él dice. No estar jugando en las clases” (P6A10-H13Q4)
- “Practicando” (P6A12-H13Q4)
- “Leyendo libros sobre ella” (P6A13-H13Q4)
- “Prestando atención y practicando” (P6A14-H13Q4)
- “Escuchando a una profesora, a mis padres, cuando hablan y dicen muchas cosas que tengan que ver con números” (P6A15-H13Q4)
- “Cuando el profesor nos enseña en el colegio” (P6A16-H13Q4)
- “Atendiendo en clase, practicando en forma de juego con cantidades reales” (P6A17-H13Q4)

De acuerdo a lo expuesto por los alumnos de las cinco sesiones, sobre cómo aprenden matemática, destacan las siguientes formas:

a) Con la ayuda del profesor (explica, enseña) u otros (padres, libro, objetos, internet)
b) Atendiendo
c) Practicando
d) Actitud positiva
e) Pensando
f) Comprendiendo
g) Procesualmente (de lo simple a lo complejo, de lo explicativo a lo aplicativo)
h) Con estrategias personales (cantar, creando códigos, transformando, transfiriendo, jugando)

Hoja de Trabajo 13 – Pregunta 1 (H13Q1)

H13Q1 (a – b – c): Escribe algunos ejemplos de problemas matemáticos que se te pueden presentar en el día a día en: a) La escuela, b) tu casa, c) la calle

Los alumnos destacan la actividad matemática, o la matemática propiamente como importante para la vida diaria ya que permite resolver distintos problemas o situaciones que se relacionen con ella. A través de H13Q2 – H12Q3 y H13Q4, la referencia a esta relación no es mayoritaria, así como tampoco a la actividad de resolución de problemas propiamente, destacando la actividad asociada a las operaciones; sin embargo aparece. Si bien, en estas preguntas los alumnos distinguen entre problemas y ejercicios u operaciones, en H11Q1 la distinción no es clara, asumiendo como problemas, las denominadas operaciones matemáticas (o ejercicios).

Esta actividad se relaciona con H11Q1, ya que ambas se refieren a problemas matemáticos; sin embargo, en la primera se pregunta por problemas matemáticos que propone el profesor y en esta por problemas matemáticos que se les pueda presentar en el día a día, ya sea en la escuela (H13Q1a), en la casa (H13Q1b) y en la calle (H13Q1c), a fin de observar cómo perciben los problemas más allá de las aulas escolares y qué planteamiento les dan.

Los problemas planteados por los alumnos se basan en cuestionen numéricas, en los que tienen que calcular, operar, contar, asociados a contextos en los que han sido presentados; por ejemplo, si intervienen porcentajes, se enmarcan dentro de las rebajas, y si presentan fracciones en contextos de reparto.

H13Q1a: …en la escuela.

Los problemas matemáticos que se presentan en la escuela están asociados a la actividad propia del docente como generador de dichos problemas, a la actividad matemática en el aula y a la actividad propia del alumno dentro de la escuela (no necesariamente en la clase de matemática). Asimismo, los alumnos proponen como problemas, textos con características propias de los problemas matemáticos escolares o situaciones generales que no necesariamente impliquen actividad propia del estudiante. Pocos, trascienden las cuestiones matemáticas propiamente.

Actividad propia del docente

Caso 1

- “El profesor dice que calculemos uno” (P1A1-H13Q1a)
- “Cuando el profesor pone algún problema” (P1A3-H13Q1a)
- “Cuando me mandas sumar, restar, multiplicar…” (P1A6-H13Q1a)
- “Los problemas de operaciones que pone el profe para que hagamos en la libreta.” (P1A9-H13Q1a)
- “Que el profesor escriba un problema en la pizarra que diga que cuánto es 20x198.” (P1A12-H13Q1a)

Caso 3

- “Los problemas de los controles” (P3A13-H13Q1a)

Caso 5

- “Si en el colegio la miss nos da un problema (de multiplicación)” (P5A3-H13Q1a).
- “La miss me deja un problema de sumas: 24+32=56” (P5A7-H13Q1a)

Actividad matemática en el aula

Caso 1

- “Un problema de € y porcentajes. Uno de una ficha que ponía ¿Qué cuánto te rebajan?” (P1A13-H13Q1a)
- “De fracciones, de magnitudes, de porcentajes” (P1A17-H13Q1a)

Caso 5

- “De suma, resta, multiplicación” (P5A19-H13Q1a)
- “En la tarea. En ejercicios matemáticos” (P5A20-H13Q1a)

Caso 6

- “En operaciones combinadas. Resolver problemas con números naturales, fracciones y porcentajes” (P6A8-H13Q1a)

- “Los problemas de matemática” (P6A6-H13Q1a)

Propuestos como problemas matemáticos escolares (con una estructura definida)

Caso 1

- “En una clase hay 20 alumnos y han acabado el examen 8. ¿Cuántos no han acabado el examen?” (P1A5-H13Q1a)
- “Laura, en la escuela, hace 3 sumas, 20 restas, 10 divisiones y 5 fracciones. ¿Cuántas cuentas hizo en total?” (P1A8-H13Q1a)
- “$\frac{5}{4}:\frac{6}{8}=\frac{40}{24}$ $\frac{7}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{14}{18}$” (P1A10-H13Q1a)
- “Jugando a las canicas tenía 24 y he perdido 5. ¿Cuántas canicas me quedan?” (P1A11-H13Q1a)
- “La escuela mide 9m y otro colegio mide 900 cm. ¿Cuál mide más?” (P1A14-H13Q1a)

Caso 2

- “Tengo deberes de inglés 3 y 3 de gallego y 4 de coñe. ¿Cuántos deberes tengo?” (P2A1-H13Q1a)
- “¿Cuánto mide el patio de los pequeños?” (P2A2-H13Q1a)
- “Están cambiando la red de la pista verde de 6º, ¿cuánta red necesitaron si mide de largo 50m y de ancho 20m?” (P2A4-H13Q1a)
- “¿Cuántos libros tiene toda la clase en total?” (P2A5-H13Q1a)
- “¿Cuánto mide la clase de largo?” (P2A6-H13Q1a)
- “En la clase hay 33 alumnos, cada uno tiene 7 libros. ¿Cuántos libros hay en clase?” (P2A7-H13Q1a)
- “Si somos 20 en total y cada 1 tiene 6 libros. ¿Cuántos libros hay en clase sin mí?” (P2A8-H13Q1a)
- “Si a la clase 5ºA le echan la bronca 5 veces al día, ¿cuántas veces le echarán la bronca durante un mes de 31 días?” (P2A9-H13Q1a)
- “Las operaciones” (P2A10-H13Q1a)

- “En la escuela nos pueden decir que tienes7 ejercicios de mate, 4 de coñe y 4 de inglés, ¿cuántos deberes tengo?” (P2A17-H13Q1a)

Caso 3

- “Tengo 50 min. para recorrer algo de Coruña. Si estoy en la Torre de Hércules, ¿cuántos monumentos puedo visitar?” (P3A1-H13Q1a)
- “Si el colegio mide 749 m y yo ya he caminado 319. ¿Cuántos metros me faltan por recorrer?” (P3A2-H13Q1a)
- “Si tengo dos lápices y la profe me coge uno, ¿cuántos me quedan? Tengo 17 caramelos para repartir a 3 niños. ¿Cuántos le doy a cada uno? ¿Me sobra alguno?” (P3A3-H13Q1a)
- “Un avión llega a Perú a las 17:45, si el vuelo duró 4:55h, ¿cuándo se efectuó la salida?” (P3A4-H13Q1a)
- “María ve una película de 2 horas: 45 minutos:15 segundos y Enrique otra de 1h:20m:15s. ¿Cuánto duraron las dos películas?” (P3A5-H13Q1a)
- “¿Si un apartamento mide 85 metros cuadrados, cuánto mide una escuela que mide el triple pero en decímetros?” (P3A7-H13Q1a)
- “La escuela mide de alto 5m y de largo 10m. ¿Cuál es la superficie del colegio?” (P3A8-H13Q1a)
- “A cun nombres le va a salir el bus a las 1:20 pm. Si son las 7:30 am., ¿cuánto queda para que salga el bus de cun nombres?” (P3A9-H13Q1a)
- “El recreo empieza a las 11:25 y acaba a las 11:45. ¿Cuánto dura el recreo?” (P3A10-H13Q1a)
- “En mi clase somos 25 niños. Cinco están enfermos y tres se fueron de vacaciones. ¿Cuántos quedamos?” (P3A11-H13Q1a)
- “La escuela mide 300 m y calcularon la mitad. ¿Cuánto mide?” (P3A12-H13Q1a)
- “En el colegio hay 2000 niños y niñas. Si hay 400 niñas, ¿cuántos niños hay?” (P3A15-H13Q1a)
- “Se acaba una caja de 75 bolis, se reponen dos cajas. De una se cogen un cuarto y de (otra) $\frac{1}{2}$ ¿Cuántos bolis quedan?” (P3A16-H13Q1a)
- “De tu casa a la escuela hay 24 veces el recorrido a casa de tu mejor amigo. La casa de tu mejor amigo está un hectómetro, ¿a cuántos metros está la escuela?” (P3A17-H13Q1a)

- “Son las 10:10 y el recreo es a las 11:25. ¿Cuánto tiempo falta para las 11:25?” (P3A18-H13Q1a)
- “Hay cuatro niños en clase, llegan todos y ahora hay 25. ¿Cuántos niños llegaron?” (P3A19-H13Q1a)
- “Si el largo de la pizarra es de 4m y el ancho 3, ¿cuál es la superficie?” (P3A20-H13Q1a)
- “Si un matemático compra 40 libros a 4 millones y le pide un préstamo al banco pero el banco solo le deja 3 millones, el matemático le pide un préstamo a otro banco, ¿cuánto tendrá que pagar cada mes si lo hace 19 meses?” (P3A21-H13Q1a)
- “Pidieron sumar 2+2.” (P3A22-H13Q1a)
- “Tengo 25 lápices en mi estuche, pierdo 7, y recupero 5 y vuelvo a comprar 5 más. ¿Cuántos lápices tengo?” (P3A23-H13Q1a)
- “Unos niños salen a las 2:00 de la escuela y empiezan a las 8:00 de la mañana. ¿Cuántas horas están en el colegio?” (P3A24-H13Q1a)
- “En el curso de 5º hay tres clases, en cada clase hay 25 niños y un profesor. ¿Cuánta gente hay en total?” (P3A25-H13Q1a)

Caso 5

- “Si Daniel tiene 15 canicas y Juan 25, ¿cuántas más tiene Juan?” (P5A3-H13Q1a)
- “Si una camisa cuesta s/.150 y le rebajan el 25%. ¿Cuánto costará la camisa?” (P5A4-H13Q1a)
- “En la escuela de Jordan hay 40 alumnos y el 20% son hombres. ¿Cuántas mujeres hay?” (P5A6-H13Q1a)
- “En mi salón hay 20 niños y el profesor reparte a cada uno 2 caramelos. ¿Cuánto suman por todo?” (P5A10-H13Q1a)
- “Juego básquet, en 5 minutos y realizo 18 canastas. ¿Cuántas canastas realizo en 10 minutos?” (P5A13-H13Q1a)
- “María tiene 20 soles, Luisa el doble y Juan el triple que Luisa. ¿Cuánto tienen los tres juntos?” (P5A15- H13Q1a)

Caso 6

- “En el salón de 5º grado hay 20 niños, 6 usan lentes, 14 no usan lentes. ¿Cuántos niños utilizan lentes?” (P6A3-H13Q1a)

- “Cuando le debo s/.0.50 a mi amiga y le pago con s/. Cuando formamos grupos de trabajo” (P6A4-H13Q1a)
- “María me prestó 10 soles y yo le tengo que pagar el dinero más el interés en un mes. ¿Cuánto es la tasa de interés?” (P6A7-H13Q1a)
- “Chary, Carlos y Lorena son amigos y quieren saber cuántos alumnos(as) hay en el colegio. Chary dice que la suma de sus años sea 36 a la quinta por 7 da el resultado. ¿Cuántos alumnos hay?” (P6A9-H13Q1a)
- “Pedro compra 7K y 3K de pescado y frejoles. ¿Cuántos K compró en total?” (P6A14-H13Q1a)
- “Si le dije a mi amigo que me preste s/.800 y le dije que se los devolvía en 2 años y él me dijo que mejor me devolviera s/.1000. ¿Cómo se conoce esto?” (P6A16-H13Q1a)
- “En el colegio Santa Ana hay un total de 180 pers. en el 5º y en el 6º su total de niños 80. ¿Cuánto será el resto de gente para llenar el colegio?” (P6A17-H13Q1a)

Propuestos como actividad propia del alumno en la que aplique el conocimiento matemático (no como actividad escolar)

Caso 1

- “Si quieres dividir los caramelos que trajiste” (P1A1-H13Q1a)
- “Cuando juegas a las tazas, restando y sumando, las tazas que pierdes y las tazas que ganas” (P1A4-H13Q1a)
- “En educación física somos 18 y queremos que en un equipo haya el mismo número de alumnos que en el otro: 18:2=9 niños para cada equipo.” (P1A7-H13Q1a)
- “Un niño trae caramelos para su cumpleaños y le tiene que dar mismo número de caramelos a cada niño” (P1A16-H13Q1a)

Caso 2

- “Saber las páginas que llevamos de un libro que no las tiene numeradas” (P2A3-H13Q1a)

Caso 5

- “En mi cumpleaños traigo una torta y tengo que dividirla en partes.

- “Hay que formar equipos de fútbol” (P5A8-H13Q1a)
- “Cuando compro en el quiosco y tengo que saber cuánto es y cuál será mi vuelto” (P5A12-H13Q1a)
- “El ángulo de como pateo el balón” (P5A17-H13Q1a)
- “No se me ha presentado ninguno” (P5A9-H13Q1a)

Caso 6

- “Cuando quiero contar cuántas notas malas o sumas tengo” (P6A5-H13Q1a)
- “Al comprar en el kiosko” (P6A10-H13Q1a)
- “El quiosco” (P6A12-H13Q1a)
- “Al hacer esquemas” (P6A13-H13Q1a)

Problemas no matemáticos

Caso 1

- “No entender las fracciones” (P1A2-H13Q1a)
- “Que me castiguen sin recreo” (P1A15-H13Q1a)

Situaciones generales (no como actividades escolares ni propias)

Caso 2

- “Mirar la superficie de una pista de fútbol” (P2A11-H13Q1a)
- “Averigua los m^3 que mide el comedor” (P2A13-H13Q1a)
- “Cuánto mide la clase de alto” (P2A14-H13Q1a)
- “Cuántos escalones hay en el colegio” (P2A16-H13Q1a)
- “Calcula el área del encerado de tu clase” (P2A18-H13Q1a)
- “Cuánto mide la superficie de la clase” (P2A19-H13Q1a)
- “Cuánto mide el pabellón del colegio” (P2A20-H13Q1a)

Caso 3

- “Para repartir algunos lápices entre la clase” (P3A14-H13Q1a)

Caso 5

- "En mi lonchera me mandan 3 paquetes de galletas, uno contenía 6, otro 5 y otro 8" (P5A16-H13Q1a)

Caso 6

- "Cuando mi amigo me pregunta cuántos caramelos compraste y yo le respondo 4 por 40 céntimos.
- Cuando me piden contar cuántos árboles hay en el colegio y yo digo 5 por 1 patio." (P6A15-H13Q1a)
- "El horario en el colegio" (P6A6-H13Q1a)

H13Q1b: … En la casa

Los alumnos reconocen como problemas matemáticos "en casa" aquellas situaciones generales que involucran cuestiones numéricas (incluye datos numéricos) o que involucra actividad matemática (contar, medir), no necesariamente se plantean como problemas matemáticos escolares. No obstante, la tendencia es plantear como problemas matemáticos que se presentan en el día a día en la casa aquellos problemas matemáticos escolares propiamente contextualizados en situaciones que suceden en casa. Algunas propuestas no están definidas y otras trascienden el ámbito de la actividad matemática.

Planteadas como situaciones generales

Caso 1

- "Cuando tengo que hacer los deberes del conservatorio me mandan a buscar una 4ªJ ascendente, a partir de una nota, o descendente. Tengo que contar." (P1A4-H13Q1b)
- "Somos cuatro en casa y tenemos que hacer las tareas de casa: 1ª lavar los platos, 2ª hacer las camas, 3ª fregar la casa, 4ª tirar la basura, 5ª tender la ropa, 6ª hacer la comida, 7ª colocar la mesa, 8ª recoger los platos y ponerlos en el fregadero: 8:4 (personas). 2 tareas cada uno." (P1A7-H13Q1b)
- "Una suma al contar dinero de la ucha" (P1A13-H13Q1b)
- "Que tengas que repartir tus canicas con tu hermano a partes iguales y tú tienes 50 canicas." (P1A12-H13Q1b)

- “Hay 4 salchichas y tengo que repartirlas entre mi hermano y yo.” (P1A16-H13Q1b)

Caso 2

- “Saber cuántos litros bebemos de agua” (P2A3-H13Q1b)
- “¿Cuántos mililitros toma mi hermano en total?” (P2A5-H13Q1b)
- “¿Cuánto mide mi cama?” (P2A6-H13Q1b)
- “La superficie de la mesa” (P2A11-H13Q1b)
- “Cuántas escaleras hay que subir desde el portal hasta el 8º” (P2A14-H13Q1b)
- “Cuántos pasos tengo que dar desde la puerta hasta el salón” (P2A16-H13Q1b)
- “Averigua la superficie de la cama” (P2A19-H13Q1b)
- “Cuánto mide tu cama” (P2A20-H13Q1b)

Caso 3

- “Cuando mi madre me dijo que midiera un mantel.” (P3A3-H13Q1b)
- “Va a ser mi cumpleaños y mi padre me manda contar todos los invitados. Calcular cuántos kilos de carne tengo que comprar” (P3A4-H13Q1b)
- “¿Cuánto mide la mesa?” (P3A7-H13Q1b)
- “Cuando estoy jugando un juego que me pone algo de mate y no puedo descubrirlo” (P3A13-H13Q1b)
- “Si en la cocina quieres repartir una torta en trozos iguales” (P3A14-H13Q1b)
- “Cuando me pillé el dedo y calculé cuántos kilómetros habías hasta el hospital” (P3A22-H13Q1b)

Caso 5

- “Mi mamá me dice que compre huevos para los huevos revueltos y 2 para los huevos fritos” (P5A7-H13Q1b)
- “Traen de cenar una pizza y tienen que repartirla en partes iguales. Hay seis asientos y quiero saber cuántos entran” (P5A8-H13Q1b)
- “Cuando tengo una bolsa de caramelos y la tengo que dividir entre mis 3 hermanos” (P5A12-H13Q1b)
- “Cómo parten la pizza” (P5A17-H13Q1b)

Caso 6

- “Cuando cuento la plata” (P6A4-H13Q1b)
- “Para cambiar las figuritas de mis álbumes” (P6A5-H13Q1b)
- “Al tiempo de cocinar” (P6A6-H13Q1b)
- “El horario en casa” (P6A6-H13Q1b)
- “Cuando me envían a pagar pago con un billete grande y debo averiguar el vuelto que me entregan” (P6A8-H13Q1b)
- “Cuenta cuantas frutas hay aquí y aquí; respondo: en la refri de acá hay 20 frutas y en la refri de mi abuela hay 21 frutas. Cuantos colores me faltan? 2 colores de 12.” (P6A15-H13Q1b)
- “Cuando cuento mis colores” (P6A-H13Q1b)
- “Cocinar y fracción” (P6A13-H13Q1b)

Problemas matemáticos escolares contextualizados

Caso 1

- “Hay 6 molestas moscas y mato 4 con el matamoscas. ¿Cuántas quedan vivas?” (P1A5-H13Q1b)
- “Yo en mi casa tengo: 10 muñecas, 6 barbies, 1 pelota y 1 bicicleta. ¿Cuántos juguetes tengo en total?” (P1A8-H13Q1b)
- “200 g de jamón que había en un paquete, 50 g que me comí en la merienda. Solo quedan 150” (P1A10-H13Q1b)
- “En una estantería tengo 24 libros y llevo a la biblioteca del colegio 10 libros. ¿Cuántos libros me quedan?” (P1A11-H13Q1b)
- “Mi casa mide de largo 2 m y la de mi madrina 20 cm. ¿Cuál mide más?” (P1A14-H13Q1b

Caso 2

- “Mi madrina compró un carricoche que le costó 200€ y un biberón de 3€. ¿Cuánto le costó?” (P2A1-H13Q1b)
- “¿Cuántos vasos lavamos al mediodía si los que comemos somos 4?” (P2A2-H13Q1b)
- “Para subir a mi casa, tengo que subir 20 escalones por cada piso, si el edificio tiene 5 pisos, ¿cuántos escalones subiré?” (P2A4-H13Q1b)
- “Tengo 6 peluches y en las bolsas solo caben4. ¿Cuántas bolsas tengo?” (P2A7-H13Q1b)

- “Si tú haces y deshaces las camas de tu casa siete veces, ¿cuántas veces haces y deshaces la cama?” (P2A8-H13Q1b)
- “Si se rompe un collar de 45 bolas, un $\frac{1}{5}$ se perdió, ¿cuántas son?” (P2A9-H13Q1b)
- “Tengo diez huevos para hacer una tortilla. Al cogerlos se me rompen 4 y otros cuatro se los dejé a la vecina. ¿Cuántos huevos tengo?” (P2A12-H13Q1b)
- “¿Cuántos Dg pesa el sillón de tu salón?” (P2A13-H13Q1b)
- “Mi madre tiene 35años y estamos en 2008. ¿Cuándo nació?” (P2A17-H13Q1b)
- “Un programa de la tele lo echan a las 8:27 y otro a las 10:52 que diferencia de tiempo hay entre las dos horas” (P2A18-H13Q1b)

Caso 3

- “En la vajilla de cada hay 10 platos, se compran4 y se compran 3. Al día siguiente se rompen 5 y se compran 7. ¿Cuántos platos quedan en la vajilla?” (P3A5-H13Q1b)
- “Hace falta un armario que mida 3,84cm de alto, 27 de ancho y 1,35 de largo. Expresa en metros cada cosa” (P3A9-H13Q1b)
- “Mi madre sale a comprar a ñas 15:00 y vuelve a las 24:00. ¿Cuánto tiempo está en el súper?” (P3A10-H13Q1b)
- “El año pasado mi casa medía 100m^2 y este año le añadimos 50m^2 más. ¿Cuántos m^2 tiene mi casa?” (P3A11-H13Q1b)
- “La cocina mide 15m^2 y toda la casa mide 5 veces más. ¿Cuánto mide la casa?” (P3A12-H13Q1b)
- “En mi casa hay 12 niños, 14 niñas. ¿Cuántos niños y niñas hay en total?” (P3A15-H13Q1b)
- “Mi madre sale de casa a las 11:30 y llega a las 19:45. ¿Cuánto tiempo sale?” (P3A16-H13Q1b)
- “Tu casa mide dos veces el palacio de la Ópera. Si el Palacio de la Ópera mide 2,5 Km, ¿cuánto mide tu casa?” (P3A17-H13Q1b)
- “Hay 2 bollos para repartir entre 5 personas. ¿Cuánto le toca a cada uno si uno no quiere bollo?” (P3A18-H13Q1b)
- “Hay dos tortugas, cinco perros y un loro. El jefe trae 52 perros de caza. ¿Cuántos animales hay ahora?” (P3A19-H13Q1b)
- “Si en mi casa lanzo un helicóptero desde 2 m de altura, ¿cuántos metros le faltan para caer al suelo si el alto son 4 metros?” (P3A20-H13Q1b)

- “Tengo 20 metones pero pierdo 1… ¿Cuántos tengo ahora?” (P3A21-H13Q1b)
- “El hermano de Sara mide 1,30m y Sara 20 cm más. ¿Cuánto mide Sara?” (P3A24-H13Q1b)
- “En mi casa somos 3 y cada día consumimos un cartón de leche de 1 litro. ¿Cuántos cl consumimos en un mes?” (P3A25-H13Q1b)
- “Mi hermano tiene 17 años y yo 6 menos que él. ¿Cuántos años tengo?” (P3A1-H13Q1b)
- “Mi mesilla mide 77cm y mi mesa 85. ¿Cuánto más mide mi mesa? ¿Cuánto miden en total?” (P3A2-H13Q1b)

Caso 5

- “En mi casa venden una sala comedor a s/.500 con 40% de descuento. ¿Cuánto cuesta?” (P5A3-H13Q1b)
- “Si las luces de mi casa se venden a s/.100 con 20%. ¿Cuánto costarán las luces?” (P5A4-H13Q1b)
- “En la casa de Teresa hay 6 personas. Si el 4% quiere una pizza y los demás quieren ceviche. ¿Halla el porcentaje?” (P5A6-H13Q1b)
- “Tengo 20 canicas se me pierde la tercera parte. ¿Cuántas canicas se me perdieron?” (P5A10-H13Q1b)
- “Mi mamá todos los días utiliza ½ Kg de arroz. ¡Cuánto usará en un mes?” (P5A13-H13Q1b)

Caso 6

- “Papá compra una refrigeradora en s/.900, un televisor en s/.1500, una lavadora en s/.1200. ¿Cuánto pagará por los tres artefactos?” (P6A3-H13Q1b)
- “Mi mamá me compró un polo de s/.100 y le dieron de rebaja 10%. ¿Cuánto le costó?” (P6A7-H13Q1b)
- “María Fe quiere saber cuántas personas mínimo entran en su casa. Su mamá dice que haciendo la edad de su abuelita podría saber cuál es el resultado. Su abuelita dice que ella es del año 1931. ¿Cuántas personas mínimo entran en la casa?” (P6A9-H13Q1b)
- “Mi mamá compra 8 K de pescado y 8 K de camote= Si cada K cuesta 1 sol. ¿Cuánto tiene que pagar?” (P6A14-H13Q1b)
- “¿Cuánto me dieron de vuelto si pagué con un billete de s/.200 y lo que compré costaba s/.1875? Sí, porque con un billete de s/.10 me dieron de vuelto s/.3. ¿Cuánto costó lo que compré? (P6A16-H13Q1b)

- “Preparé una torta y mi primar 4 más para c/u y lo repartimos a 16 familias para ganar dinero, pero después mi tío nos da el doble de lo recibido. ¿Cuánto tendremos?” (P6A17-H13Q1b)

No definido

Caso 1

- “De operaciones.” (P1A17-H13Q1b)

Caso 5

- “De multiplicación” (P5A19-H13Q1b)

Problemas no matemáticos

Caso 1

- “No hacer los deberes” (P1A2-H13Q1b)
- “Pues un día que llegas y te encuentras con la puerta cerrada de tu casa y no puedes entrar para comer, hay que ir a la casa de algún vecino a comer o a llamar a tus padres” (P1A9-H13Q1b)
- “Quedarme encerrado en el baño” (P1A15-H13Q1b)
- “Cuando mi madre me pregunta la tabla de multiplicar” (P1A6-H13Q1b)

Caso 2

- “Los deberes” (P2A10-H13Q1b)

Caso 6

- “Hacer mi tarea” (P6A6-H13Q1b)

H13Q1c;…En la calle

Los alumnos conciben como problemas matemáticos que suceden en el día a día en la calle aquellas situaciones que involucra la aplicación de conocimiento matemático, planteándolas de manera general, sin incluir datos numéricos, o específica precisándolos sin necesidad de indicar una pregunta cuantitativa en base a ellos; no obstante, pueden platearlos como preguntas sin especificar datos concretos que puedan resolverlas. Por otro lado, los alumnos plantean estos problemas siguiendo la estructura de los problemas matemáticos escolares, es decir como actividades que hay que resolver a partir de los datos expuestas y la pregunta formulada, en base a datos que se pueden observar o suceder en la calle. Algunas cuestiones no están bien definidas y otras trascienden el ámbito de la actividad matemática.

Situaciones generales

Caso 1

- "Cuando ponen en el escaparate que descuentan el tal por ciento y tengo que calcularlo para saber cuánto cuesta ahora" (P1A1-H13Q1c)
- "Por ejemplo cuando te rebajan el precio de alguna cosa y hay que calcular el %-" (P1A3-H13Q1c)
- "Cuando en una tienda veo un pantalón que está al 20% y antes costaba 40€ y en otra tienda el mismo pantalón que antes costaba 40€ y ahora cuesta 10€. Tengo que resolver cuál es más barato." (P1A4-H13Q1c)
- "Cuando voy de compras con mi madre y quiere saber cuánto es el 30% de algo." (P1A6-H13Q1c)
- "Tener que calcular la distancia de las calles con un mapa para saber el camino más rápido a un lugar." (P1A16-H13Q1)
- "10€ que llevo en el bolsillo – 7 que uso para comprar la comida= a 3€ que me sobran" (P1A10-H13Q1c)
- "En la tienda comprando un juguete" (P1A13-H13Q1c)
- "De porcentajes, de rebajas." (P1A17-H13Q1c)

Caso 2

- "Saber cuántos pasos doy cuando doy un paseo." (P2A3-H13Q1c)
- "Me mandan ir a comprar mortadela 100%, chorizo 50%." (P2A11-H13Q1c)
- "¿Cuántas farolas hay en la calle Barcelona?" (P2A2-H13Q1c)
- "¿Cuánto mide el edificio?" (P2A6-H13Q1c)
- "¿Cuántos Km mide la calle Barcelona?" (P2A13-H13Q1c)

- "Medir cuántos m^2 hay desde mi casa hasta el cole" (P2A16-H13Q1)
- "Cuánto mide el árbol" (P2A20-H13Q1c)
- "Cuántos pasos hay que dar desde mi casa hasta el colegio" (P2A14-H13Q1c)
- "Cuando mi padre me dijo que le sumara cuánto le costaba los calzoncillos si le hacían un descuento." (P3A3-H13Q1c)
- "Si vas a la tienda tienes que contar el dinero para cobrar bien y que te den bien la vuelta" (P3A14-H13Q1c)
- (P3A17-H13Q1c)
- "Calcular cuántas plantas tiene un piso" (P3A4-H13Q1c)

Caso 5

- "Solo a mi papa al momento de pagar para saber cuánto va a dar cada uno." (P5A9-H13Q1c)
- "Cuando mi mamá me manda a comprar a la tienda" (P5A12-H13Q1c)
- "En juego de básquet a veces sumamos los puntos" (P5A19-H13Q1c)
- "Cuando compro algo" (P5A20-H13Q1c)
- "Para rodar con mi bicicleta sumas unos ángulos" (P5A17-H13Q1c)
- "Me voy en una combi y por cada persona cobran 50 céntimos y son 8 personas. Estoy en un concurso y me dan 1:30 y son 20 problemas" (P5A8-H13Q1c)
- "Un cartel que diga que antes un pantalón costaba 28 soles." (P5A7-H13Q1c)
- "Hay 2 Costos en la calle central y 1 en la calle residencial. Hay 25 perritos contando con uno que está por allá" (P6A15-H13Q1c)

Caso 6

- "Cuando compro" (P6A4-H13Q1c)
- "Descuentos en compras" (P6A8-H13Q1c)
- "Gasolina" (P6A12-H13Q1c)
- "Comprar. ¿Cuánto pago?" (P6A13-H13Q1c)
- Cuando pago el pasaje" (P6A4-H13Q1c)
- "Cuando quieres medir una casa" (P6A5-H13Q1c)
- "Comprar. Medir. construir" (P6A6-H13Q1c)

Planteados como problemas matemáticos escolares

Caso 1

- “Encuentro 5 canicas y le doy a mi hermano 2 canicas. ¿Cuántas me quedan?” (P1A5-H13Q1c)
- “En la calle donde vivo hay 5 farolas, 3 bancos. ¿Cuántas farolas y bancos hay en total?” (P1A8-H13Q1c)
- “Cuando iba caminando por la calle encontré 5€ y tengo 10€. ¿Cuánto dinero tengo ahora?” (P1A11-H13Q1c)
- “Que estás en la calle con tus amigos y vais a la heladería y tú pides un helado de fresa que cuesta 50€ y uno de tus amigos pide uno de chocolate que cuesta 80€. ¿Cuánto tendrás que pagar?” (P1A12-H13Q1c)

Caso 2

- “En la calle juego al béisbol y en la primera partida hice 8 homraws y en la segunda 9. ¿Cuántos homraws hice?” (P2A1-H13Q1c)
- “Si hay en 1 metro 5 bancas, ¿cuántas habrá en 15 metros?” (P2A5-H13Q1c)
- “Hay 7 farolas en una acera y hay 3200 calles en una ciudad. ¿Cuántas farolas hay en la ciudad?” (P2A7-H13Q1c)
- “Si para ir al súper recorro 10 m, ¿cuántos cm recorro?” (P2A9-H13Q1c)
- “Desde la calle Barcelona hasta Los Castros, ¿cuántos metros tendré que andar?” (P2A4-H13Q1c)
- “Tengo 30€ y utilizo 10€ para comprarle un regalo a mi madre y se me pierden 26€ en la calle, ¿cuántos euros me quedan?” (P2A17-H13Q1c)
- “Un coche va 30Km por hora y una moto va a la mitad de 60Km por hora, ¿cuál va más rápido la moto o el coche?” (P2A18-H13Q1c)
- “Si cuento todos los coches rojos de la acera, ¿cuántos coches rojos hay?” (P2A8-H13Q1c)

Caso 3

- “Si la farola mide 2 m y 40 cm más que mi madre. ¿Cuánto mide mi madre?” (P3A2-H13Q1c)
- “A cun nombres le hacen falta 329 euros para ter mil. ¿Cantos euros ten cun nombres?” (P3A9-H13Q1c)

- “Esta calle mide 50m de largo y de ancho la mitad. ¿Cuánto mide de ancho?” (P3A11-H13Q1c)
- “La calle de mi casa mide de largo 20m de largo y 7 de ancho. ¿Cuántos metros mide toda la calle en total?” (P3A12-H13Q1c)
- “Tengo 1€25 céntimos y quiero dos chocolatinas que me costaron 75 céntimos. ¿Cuánto me sobra? ¿Cuánto me cuesta cada chocolatina?” (P3A18-H13Q1c)
- “Hay 22 casas construidas. Tiran 14 y hacen 31, ¿cuántas casas hay ahora?” (P3A19-H13Q1c)
- “Una calle es de 4 m de ancho. ¿Está permitido construir una calle así si la anchura permitida son 5m?” (P3A20-H13Q1c)
- “Una señora entra una tienda con 4€ y sale con 2,20€. ¿Cuánto gastó?” (P3A24-H13Q1c)
- “En la calle somos 27 niños y niñas. Si 17 somos niños, ¿cuántas niñas hay?” (P3A25-H13Q1c)
- “En otro mundo hay 4000 personas y 200 de ellas están en casa. ¿Cuántos habrá en la calle?” (P3A15-H13Q1c)
- “A un vagabundo le dan 80 cent., 1€, 75 cent. Y 2€. ¿Cuánto dinero tiene?” (P3A16-H13Q1c)
- “Vas por la calle y entras en una carnicería. ¿Cuánto te cuesta 12 kilos de carne si un kilo cuesta 12,56?”
- “Expresa en cm o que mide a rúa (3m)” (P3A8-H13Q1c)
- “Tengo 56 caramelos y hay 25 niños en clase. ¿Cuántos les toca a cada uno?” (P3A1-H13Q1c)
- “Si un autobús mide 3 m y el de al lado mide el triple, ¿cuánto mide el del triple?” (P3A7-H13Q1c)

Caso 5

- “Si (en) la calle venden un terreno de 200^2 x 100^2 a s/.14.000 con 10% de descuento. ¿Cuánto cuesta el terreno?” (P5A3-H13Q1c)
- “Un señor vende cuadros a 445 con 10% de descuento. ¿Cuánto costará un cuadro?” (P5A4-H13Q1c)
- “En la calle hay 420 personas caminando y las otras en auto. Si el 40% son gordos de 45 años, ¿cuántas personas son llenas?” (P5A6-H13Q1c)
- “Me compré 5 juguetes y se me cayeron 2 juguetes. ¿Cuántos juguetes me quedan?” (P5A10-H13Q1c)

- “De mi casa donde mi abuelita me demoro 20 minutos, ¿cuánto me demoro en una semana?” (P5A13-H13Q1c)
- “Compro 25 caramelos, si le invito 2 caramelos a 6 amigos, ¿Cuántos caramelos me quedan?” (P5A16-H13Q1)

Caso 6

- “Juan compra 10 álbum a s/.5 cada uno, Carlos 8 álbum a s/.6 cada uno. ¿Quién de los dos niños pagó menos?” (P6A3-H13Q1c)
- “Yo caminé $\frac{3}{5}$ del camino y salí a las 8:00 am, luego 8:15 am. ¿Cuánto me falta por recorrer y a qué hora llegaría?” (P6A7-H13Q1c)
- “En la calle 24 hay un grupo de mujeres y hombres. Se sabe que unidos suman 36 y que hay la misma cantidad de mujeres como hombres. También se sabe que hay solo 12 mujeres que viven en casas y 12 que viven en casa y en la calle. ¿Cuántos hombres solo en la calle?” (P6A9-H13Q1c)
- “¿Cuánto será $11 \times 2 + 2.50$? ¿Cuánto será $2 \times 40 \div 4 + 600.541 - 21$?” (P6A16-H13Q1c)
- “Hay 40 tiendas en el centro y 100 personas entran en c/u de estas. ¿Cuántas personas entraron en total?” (P6A17-H13Q1c)
- “Compré 5 caramelos a 50 céntimos. Si le doy un billete de 10, ¿cuánto me da de vuelto?” (P6A14-H13Q1c)

No definido

- “Divisiones con fracciones. Decimales con divisiones” (P6A10-H13Q1c)

Cuestiones no matemáticas

Caso 1

- “No saber dónde vive tu abuela” (P1A2-H13Q1c)
- “Pues que cuando vas a algún sitio apurado y está cortada la calle por la que vas tienes que ir a dar la vuelta por otras calles y a lo mejor llegas tarde” (P1A9-H13Q1c)
- “No tener las llaves y quedarme fuera” (P1A15-H13Q1c)

Caso 2

- “Jugar” (P2A19-H13Q1c)

Caso 3

- “Al principio de mi vida anduve en 4 patas, luego a tres y de viejo a tres. ¿Quién soy?” (P3A21-H13Q1c)
- “Cuando me caí y tuve que llamar a mi madre por teléfono,” (P3A22-H13Q1c)

De acuerdo a las propuestas y en cuanto a su planteamiento o estructura, a través de sus respuestas, se observa que:

Los alumnos proponen como ejemplos de problemas matemáticos:

a) Hechos concretos generales (proponen un hecho sin incorporar información matemática)
b) Hechos concretos específicos (proponen un hecho incorporando información matemática).

La información matemática del problema se incorpora a través de:

a) Temas matemáticos (hacen referencia a un tema general sin aplicaciones concretas)
b) Datos numéricos (presentan cantidades definidas o indefinidas)
c) Operaciones a realizar (presenta la operación aritmética propiamente)

La información que presenta el problema permite

a) Resolverlo (la información es precisa y directa)
b) No resolverlo (La información es imprecisa, incompleta, ambigua; no se sabe qué buscar)

Los problemas matemáticos propuestos dan una idea de:

a) Hecho: “algo” que sucede (acciones)
b) Cálculo (operaciones que realizar)
c) Tarea (deber)
d) Dificultad (no se puede resolver)

e) Bloqueo (limita su accionar)

Los problemas matemáticos propuestos:

a) Tienen una estructura fija (siguen una secuencia lineal de hechos)
b) No tienen una estructura (no siguen una secuencia lineal de hechos

Los problemas planteados contienen:

a) Datos (Información numérica y/o verbal que proporciona el problema de manera explícita o implícita)
b) Metas (objetivos a alcanzar que suelen estar definidos a través de una pregunta)
c) Restricciones (elementos que limitan el camino o dificultan la solución)
d) Estrategias (suelen ser operaciones a realizar. Constituyen el procedimiento específico de resolución de problemas. Algunos alumnos las hacen evidentes y otros no, pero se deducen a través del planteamiento),

Los problemas son planteados:

a) Mediante texto
b) Mediante operaciones matemáticas

Los problemas matemáticos planteados conducen a:

a) No aplicar operaciones
b) Aplicar una operación
c) Aplicar varias operaciones

Semánticamente, los problemas propuestos son de:

a) Cambio
b) Combinación
c) Comparación
d) Igualación
e) Razón

Hoja de Trabajo 14 – Preguntas 1, 2 y 3 (H14Q1 – H14Q2 Y H14Q3)

H14Q1: ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se necesitan para envasar 600 litros de refresco? Indica cómo harías para saberlo y explica tu respuesta.

H14Q2: En un centro educativo de 800 alumnos aprueban el curso en junio 425 alumnos y en septiembre 175. Calcula el porcentaje total de aprobados y explica por qué eliges ese procedimiento.

H14Q3: Se quiere pasar de un depósito a otro siete litros de agua y solo disponemos de dos jarras: una de 3 litros y otra de 5 litros (ni los depósitos ni las jarras no son graduados). ¿Cómo pasarías, exactamente, siete litros de un depósito a otro?

Se les plantea a los alumnos tres *problemas matemáticos*[446] que se proponen en el contexto escolar. El primero y el tercero son sobre medidas, y el segundo sobre porcentajes. Los dos primeros son problemas Rutinarios y el tercero es No Rutinario; los primeros abundan en la tarea docente y discente y el tercero, no. Si bien, el primero y el segundo se asocian directamente a la aplicación de cálculos para resolverlos (se pide hallar una cantidad), mientras que el tercero a una estrategia de solución (se solicita una forma de actuar), los tres son problemas de carácter cuantitativo, entendidos como una situación habitualmente cuantitativa o que requiere técnicas matemáticas para su resolución[447]. El tercero, además, está catalogado como problema de ingenio (también acertijo matemático). Se añade a los dos primeros la necesidad de explicar cómo se haría (1º) y porqué de esa manera (2º). Los problemas se resolvieron posteriormente (aunque no de manera inmediata) a la clase sobre los temas mencionados.

---

[446] Recuérdese que un problema es aquel para lo cual el resolutor desconoce la acción que deberá llevar a cabo o no conoce ningún algoritmo para resolverlo.

[447] Fernández, Gómez, Macero y Zapata definen problemas de carácter cuantitativo a “una situación que implica un objetivo o propósito que hay que conseguir, hay obstáculos para alcanzar ese propósito, y requiere deliberación, ya que quien lo afronta no conoce ningún algoritmo para resolverlo. La situación es habitualmente cuantitativa o requiere técnicas matemáticas para su resolución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema"

H14Q1: ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se necesitan para envasar 600 litros de refresco? Indica cómo harías para saberlo y explica tu respuesta.

Caso 1

Para resolver este problema, los alumnos siguen uno de los dos procesos finales: dividir o multiplicar los datos. Ambas son acciones inversas. En el primer caso, se plantea la división entre la cantidad de litros y la capacidad de cada botella y en el segundo se halla la fracción de un número es decir.

Los alumnos plantean la solución (respuesta o dato final) o su proceso directamente. En algún caso (P1A3-H14Q1) hace evidente la extracción de los datos del problema.

En el proceso de aplicación de la multiplicación, el proceso es directo: dividir entre el denominador y multiplicar por el numerador.

En el proceso de aplicación de la división, hay una vía: transformar los datos o alguno de ellos antes de operar. La transformación recae en la fracción, principalmente convirtiéndola en número decimal.

En el proceso de ejecución de la división, los alumnos evidencian dominio de la situación o ciertas inconsistencias en el manejo de los números decimales, lo que les conduce a resultados erróneos.

Los resultados incorrectos resultan exorbitantes; no obstante los alumnos los brindan como respuesta o producto final. Una reflexión previa a la situación juzgaría a groso modo cuántas botellas podrían necesitarse.

P1A1-H14Q1

1. Transforma litros a cl: 6000
2. Calcula los ¾ de 10 (para transformar en cl)
3. Divide los 6000 dl entre 7,5 dl
4. Dato final: Necesita 8

P1A3-H14Q1

1. Extrae los datos
2. Plantea una división inconclusa

P1A4-H14Q1

1- Representa los ¾ de 600
2- Opera: divide entre 4 y multiplica por tres
3- Dato final: 450 botellas
4- Razón: porque hay que repartir 660 ℓ en botellas de ¾ de ℓ

P1A5-H14Q1

1. Transforma la fracción a decimal
2. Divide los litros entre la capacidad de la botella: 600:0,75
3. Dato final: 800

P1A6-H14Q1

1. Transforma ¾ en decimal
2. Divide 600 entre 0,75
3. Dato final: 80 botellas
4. Observación: explica que dividió 0,75 entre 600

P1A7-H14Q1

1. Dato final: 80 botellas
2. Observación: No indica proceso

P1A8-H14Q1

1. Divide ¾ (0,75)
2. Divide 600 entre 75
3. Dato final: 8
4. Observación: transforma el decimal en entero y divide.

P1A9-H14Q1 - P1A11-H14Q1 - P1A12-H14Q1 - P1A14-H14Q1

1. Establece relación entre los datos: ¾ de 600
1. Resuelve la operación: divide entre cuatro y multiplica por tres
2. Dato final: 450 botella de ¾ de litro
3. Observación: aplica fracción de un número o la fracción como operador

P1A10-H14Q1

1. Observación: No resuelve

P1A13-H14Q1

1. Establece relación entre los datos: ¾ de 600

2. Resuelve la operación: divide entre cuatro y multiplica por tres
3. Dato final: 450 botella de ¾ de litro
4. Observación: porque hay que repartir

P1A15-H14Q1

1. Divide 600 entre 4 y multiplica por 3
2. Dato final: 45
3. Observación: multiplicando y dividiendo

P1A16-H14Q1

1. Divide ¾ (0,75)
2. Dato final: 800
3. Observación: dividí el total entre la capacidad de la botella…

P1A17-H14Q1

1. Extrae los datos
2. Establece la relación entre los datos: había ¾ de 600
3. Opera
4. Dato final: 450/100 de ℓ
5. Observación: los datos se extraen correctamente.

P1A18-H14Q1

1. Transforma la fracción en decimal
2. Divide los litros entre la capacidad de la botella en decimal
3. Dato final: 0,008 botellas de ¾ de ℓ

Caso 5

Al igual que el grupo anterior, plantea dos formas de relacionar los datos: multiplicando o dividiendo. Además se aprecian dos planteamientos de ecuaciones (P5A6-H14Q1 - P5A20-H14Q1) y dos aproximaciones (P5A15-H14Q1 - P5A19-H14Q1). Las aproximaciones no se acercan a la cifra real.

Al multiplicar, esta se ejecuta directamente con los datos del problema; en un caso (P5A13-H14Q1a) la simplificación es previa. El planteamiento de la multiplicación puede ser entre los datos, entre la cantidad de litros y la fracción inversa (P5A16-H14Q1) o entre un número distinto y la capacidad de la botella (P5A10-H14Q1).

Al dividir, se observa la multiplicación en aspa o la trasposición de términos (el numerador y denominador de la fracción se invierten).

P5A3-H14Q1

1. Plantea la división entre la totalidad de litros y la capacidad de la botella en fracción.
2. Plantea la división en términos de fracción.
3. Aplica producto de extremos y medios.
4. Simplifica
5. Dato final: 800 botellas
6. Observación: divide cantidad de litros entre cada botella (apropiadamente: entre la capacidad de cada botella)

P5A6-H14Q1

1. Establece una relación de multiplicación entre los datos.
2. Plantea una ecuación
3. Resuelve
4. Dato final: 800
5. Observación: el planteamiento no se corresponde con la ecuación.

P5A7-H14Q1

1. Plantea una multiplicación con un dato incorporado.
2. No resuelve.
3. Dato final: 600
4. Observación: el dato final coincide con la cantidad de litros a envasar.

P5A8-H14Q1

1. Plantea una división entre la cantidad de litros y la capacidad de la botella.
2. Transforma la fracción y multiplica (multiplica 600 por la inversa de ¾)
3. Simplifica el resultado.
4. Dato final: 800
5. Observación: coloca denominador al entero

P5A9-H14Q1

1. Plantea una división entre la cantidad de litros y la capacidad de la botella.
2. Resuelve: multiplica en aspa.
3. Dato final: 800 botellas.

P5A10-H14Q1

1. Multiplica la capacidad de la botella por diferentes cifras, incluida el resultado final.
2. Opera: multiplica y divide.
3. Dato final: 800
4. Observación: utiliza cifras que no corresponden a los datos del problema.

P5A12-H14Q1

1. Plantea una división entre la cantidad de litros y la capacidad de la botella.
2. Transforma la fracción y multiplica (multiplica 600 por la inversa de ¾)
3. Dato final: 800

P5A13-H14Q1

1. Plantea una multiplicación entre los datos.
2. Simplifica
3. Opera: multiplica.
4. Dato final: 450

P5A15-H14Q1

1. Plantea una respuesta aproximada.
2. Dato: no aplicó ninguna operación

P5A16-H14Q1

1. Plantea una multiplicación entre los litros totales y la inversa de la fracción
2. Resuelve: multiplica y divide.
3. Dato final: 800

P5A17-H14Q1

1. Establece una relación entre botellas de un litro y 600 litros (600 botellas)
2. Establece una relación entre ¾ de litro y 600 litros
3. Opera: multiplica en aspa y divide
4. Dato final: 800
5. Observación: para la relación usa el signo de la división

P5A19-H14Q1

1. Aproxima la cantidad: 1200
2. Observación: la cantidad es exorbitante

P5A20-H14Q1

1. Establece una relación de división entre la capacidad de la botella y la cantidad de litros.

2. Plantea una ecuación
3. Resuelve: multiplica en aspa, traspone términos correctamente
4. Dato final: 800
5. Observación: en la relación no colocó “x” debajo de 600

Caso 6

Los alumnos multiplican o dividen los datos, principalmente, lo primero. Asimismo, se observa la conversión de las cantidades a otras unidades de medida (P6A20-H14Q1a lo hace correctamente. Se aprecian otras conversiones pero de manera incorrecta), la transformación de la fracción a número decimal (P6A6-H14Q1) y el planteamiento de una igualdad (P6A3-H14Q1).

También se aprecia manipulación de datos de manera inconsistente (P6A8-H14Q1)

P6A3-H14Q1

1. Plantea una igualdad entre los datos (conocidos e incógnita)
2. Opera: multiplica en aspa
3. Dato final: x=800
4. Observación: no usa la incógnita sino hasta el final. A la igualdad le llama “plantearía la ecuación.

P6A4-H14Q1

1. Plantea una multiplicación entre los litros totales y la inversa de la fracción, colocando 1 como denominador de 600
2. Dato final: 800 botellas

P6A5-H14Q1

1. Divide 600000 entre 700
2. Simplifica y opera
3. Dato final: 85300
4. Observación: transforma los datos iniciales con la finalidad de operar con enteros, no obstante es incorrecta la transformación.

P6A6-H14Q1

1. Transforma la fracción en número decimal
2. Divide la cantidad de litros entre el número decimal
3. Aumenta ceros al dividendo

4. Multiplica la fracción por el resultado
5. Dato solicitado: 800
6. Observación: realiza un proceso de verificación. Sin embargo, el planteamiento de la división tiene errores.

P6A7-H14Q1

1. Establece una relación de multiplicación entre la fracción y los litros.
2. Simplifica
3. Dato final: 450 botellas
4. Observación: relación incorrecta.

P6A8-H14Q1

1. Divide la cantidad de litros entre cuatro
2. Suma a la cantidad de litros el resultado de la operación anterior
3. Dato final: 750 botellas
4. Observación: proceso incorrecto.

P6A10-H14Q1

1. Divide los litros entre la capacidad de la botella
2. Invierte la fracción y simplifica
3. Dato final: 800 botellas

P6A14-H14Q1

1. Divide los litros entre la capacidad de la botella
2. Dato final: 800 botellas
3. Observación: no se aprecia el desarrollo de la operación

P6A15-H14Q1

1. Divide los litros entre la capacidad de la botella
2. Invierte la fracción
3. Dato final: 800 botellas
4. Observación: no se observa el desarrollo de la operación.

P6A16-H14Q1

1. Establece una relación de multiplicación entre los litros y la capacidad de la botella
2. Simplifica y multiplica
3. Dato final: 450 botellas
4. Observación: relación errónea

P6A17-H14Q1

1. Establece una división entre los litros y la capacidad de la botella
2. Multiplica extremos y medios y divide
3. Dato final: 800 botellas

P6A18-H14Q1

1. Transforma a mililitros la capacidad de la botella
2. Transforma los litros a mililitros
3. Dato final: 800 botellas
4. Observación: no se evidencia el proceso.

H14Q2: En un centro educativo de 800 alumnos aprueban el curso en junio 425 alumnos y en septiembre 175. Calcula el porcentaje total de aprobados y explica por qué eliges ese procedimiento.

Caso 1

Por lo general, el proceso tiene tres fases: 1. sumar las cantidades parciales que indican los aprobados en cada fecha, 2. dividir el resultado entre el total de alumnos y 3. Transformar el resultado en entero y asociarlo al porcentaje. Si bien, muchos alumnos han respondido correctamente, algunos muestran en sus borradores diferentes operaciones con los datos en cuestión. Otra forma de proceder asociada a esta es restar el total de alumnos entre el número de aprobados y hallar el porcentaje en base a este nuevo dato

Se observan otras formas de proceder: manipular datos que no aparecen en el texto del problema (P1A6-H14Q2), hallar el porcentaje en función de los aprobados (P1A11-H14Q2 - P1A15-H14Q2)

En un caso (P1A17-H14Q2) extrae los datos del enunciado, pero no resuelve; en otros solo exponen el resultado por lo que no se puede comentar el procedimiento; sin embargo, sus respuestas en la mayoría sus respuestas no se aproximan a la real e incluso se alejan demasiado.

Entre las razones que exponen sobre la elección del procedimiento argumentan que es más fácil, excepto P1A13-H14Q2 quien hace referencia a la elección de uno de los pasos: dividir el total de aprobados sobre el total de alumnos argumentando que así se halla el porcentaje. Los alumnos no suelen explicar o justificar sus acciones matemáticas.

P1A1-H14Q2

1. Suma los alumnos que aprueban en cada fecha
2. Divide el resultado entre el total de alumnos
3. Transforma el resultado en fracción
4. Dato final: 75%
5. Observación: dividió 600:800 y 800:600, así como 600:75 y 600’0:7’5.

P1A2-H14Q2

1. Dato final: 300 alumnos
2. Observación: No muestra procedimiento.

P1A3-H14Q2

1. Observación: escribe “Datos”

P1A4-H14Q2

1. Suma los alumnos que aprobaron en cada fecha
2. Resta la cantidad de alumnos menos el resultado
3. Divide el resultado entre la cantidad de alumnos
4. Asocia el resultado con el 25% y con 25/100.
5. Razón: …es más fácil que hacer primero 10/10 de 80 y después dividir 600:80.
6. Observación: dividió 600 entre 800, transformando el resultado en porcentaje y fracción, pero lo rechazó.

P1A5-H14Q2

1. Suma los alumnos aprobados en las dos fechas
2. Divide los alumnos desaprobados entre el total de alumnos
3. Resta 25% a 100%
4. Dato final: 75%
5. Razón: … es más fácil
6. Observación: tachó “75% de 800”

P1A6-H14Q2

1. Según explica: Multiplicó 200 por 4. Multiplicó 200 por 3. “Supo” que era 75% porque 100:4=25 y como multiplicó 25x3 “dio” 75%.
2. Observación: en el proceso operativo: Suma los alumnos aprobados en cada fecha, resta a la cantidad total de alumnos los aprobados y plantea la división de 800 entre 600. También plantea 800:100x600

P1A7-H14Q2

1. Suma los alumnos aprobados en cada fecha
2. Resta al total de alumnos la suma anterior
3. Divide la cantidad de alumnos desaprobados entre el total de alumnos
4. Asocia el resultado con el 25%
5. Dato final: 25% suspendieron
6. Observación: establece la relación 85/100=85% aprobaron pero descarta como respuesta.

P1A8-H14Q2

1. Suma los alumnos aprobados en cada fecha
2. Divide la suma entre el total de alumnos
3. Asocia el resultado con el 75%
4. Dato final: el porcentaje es 75%
5. Observación: en el proceso resta 425-125, divide 2,50:800 y el resultado entre 8; divide 6,00:0’75; 600:75; 60:8

P1A9-H14Q2

1. Suma los aprobados en cada fecha
2. Divide el resultado entre la cantidad total de alumnos
3. Asocia el resultado al porcentaje

P1A10-H14Q2

1. Dato final: 600%
2. Razón: es el más fácil
3. Observación. No hay proceso de solución.

P1A11-H14Q2

1. Divide 125 entre 425
2. Asocia el resultado con un porcentaje
3. Dato final: 41% de aprobados
4. Razón: … este proceso… es más fácil
5. Observación: en el proceso divide 1750 entre cada uno de los aproados cada mes.

P1A12-H14Q2

1. Suma todos los alumnos que aprueban
2. Divide el resultado entre el total
3. Asocia el resultado con el porcentaje

4. Dato final: 70%
5. Observación: resultado incorrecto

P1A13-H14Q2

1. Suma los aprobados
2. Divide el resultado entre 800
3. El resultado lo transforma en porcentaje
4. Dato final: 75%
5. Razón: divide porque es como “si me diera una fracción…”

P1A14-H14Q2

1. Suma los aprobados parciales
2. Divide el resultado entre el total de alumnos
3. Transforma el resultado en porcentaje
4. Observación: el resultado es incorrecto.

P1A15-H14Q2

1. Suma los alumnos aprobados en cada fecha
2. Divide los aprobados en la primera fecha entre el total de alumnos
3. Asocia el resultado con el porcentaje
4. Observación: no es la pregunta.

P1A16-H14Q2

1. Suma los alumnos aprobados en cada fecha
2. Divide el resultado entre el total de alumnos
3. Asocia el resultado con el 75%
4. Dato final: el 75%... aprobaron
5. Razón: es el más fácil
6. Observación: intentó dividir 800:200 y 800:600

P1A17-H14Q2

1. Extrae los datos del enunciado
2. Observación: no resuelve

P1A18-H14Q2

1. Dato final: 75%
2. Razón: menos lioso y más fácil y más rápido.
3. Observación: no muestra procedimiento.

Caso 5

Para resolver este problema los alumnos aplican una regla de tres simple (P5A3-H14Q2 – P5A12-H14Q2 – P5A13-H14Q2), introduciendo la incógnita como dato (desconocido) dentro del proceso de solución o suman las cantidades parciales de alumnos aprobados y establecen una relación de porcentaje entre el resultado y el total de alumnos. No obstante, no todos los alumnos exponen el proceso seguido y algunos solo aplican la suma, dando como respuesta el resultado de la misma (P5A6-H14Q2 – P5A7-H14Q2) o aproximando el porcentaje (P5A15-H14Q2). La comprensión es menor cuando en la manipulación numérica se suman todos los datos del problema y más (P5A19-H14Q2) o exponen como respuesta datos que no se ajustan al planteamiento (P5A4-H14Q2).

Entre las razones por las que siguen el procedimiento está en que es el que se debe usar aunque no lo evidencia (P5A4-H14Q2), se suma (P5A12-H14Q2), indicando la suma de los aprobados parciales, es el método indicado para el porcentaje, haciendo referencia a la regla de tres simple (P5A12-H14Q2) o es más fácil (P5A16-H14Q2). Tanto en el primer como en el último caso, las respuestas y el planteamiento, en el último, no se ajustan al problema. El segundo lo resuelve parcialmente.

P5A3-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Aplica una regla de tres simple considerando el total de alumnos (100%) y el total de aprobados (incógnita)
3. Opera
4. Dato final: 75%
5. Observación: asocia su procedimiento con una regla de tres simple.

P5A4-H14Q2

1. Dato final: 2080
2. Razón: porque es ese el que se debe usar
3. Observación: no expone el proceso.

P5A6-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Dato final: 600
3. Razón: porque es suma
4. Observación: responde en función de la cantidad no del porcentaje

P5A7-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Dato final: 600
3. Observación: responde en función de la cantidad no del porcentaje

P5A8-H14Q2

1. Relaciona la cantidad de aprobados entre la cantidad total de alumnos.
2. Simplifica
3. El resultado lo multiplica por 100. Opera
4. Dato final: 75%
5. Observación: no hace evidentes pasos previos.

P5A10-H14Q2

1. Multiplica 600 por 100
2. Divide el resultado entre 800
3. Dato final: 75%
4. Observación: no evidencia pasos previos.

P5A12-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Establece una regla de tres simple entre la cantidad total de alumnos (100%) y la cantidad de alumnos aprobados (incógnita)
3. Traduce a operación.
4. Simplifica y opera
5. Dato final: 75%
6. Razón: es el método indicado para el porcentaje

P5A13-H14Q2

1. Extrae datos del enunciado
2. Establece relación entre la cantidad de aprobados y los alumnos aprobados un mes.
3. A través de una regla de tres simple relaciona la cantidad total de alumnos (100%) y los aprobados (incógnita)
4. Traduce a operación.
5. Simplifica y opera
6. Dato final: 75%

P5A15-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos que aprueba cada fecha

2. Dato final: más del 50%
3. Observación: la alumna aproxima en función del resultado y la cantidad total de alumnos.

P5A16-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha.
2. Divide el total de alumnos entre ocho
3. Multiplica 12,5 por 7.
4. Dato final: 87,5%
5. Razón: es más fácil
6. Observación: Opera datos que no pertenecen al texto de la situación. Suma incorrectamente.

P5A17-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Dato final: 75%
3. Observación: no evidencia el procedimiento completo.

P5A19-H14Q2

1. Suma el total de alumnos y la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha.
3. Datos finales: 1400 y 600
4. Observación: No responde.

P5A20-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Establece relación entre la cantidad de alumnos aprobados y la cantidad total y los porcentajes.
3. Multiplica en aspa
4. Dato final: 133

Caso 6

Los alumnos hacen uso de la regla de tres simple para resolver este problema y del porcentaje como fracción; ambos procesos se usan para hallar el porcentaje total de aprobados como el porcentaje parcial de los mismos, en este caso, la acción siguiente es sumar los porcentajes. Al establecer la relación entre los datos, los alumnos P6A3-H14Q2 – P6A7-H14Q2 – P6A10-H14Q2 – P6A15-H14Q2 – P6A17-H14Q2 simplifican antes de operar.

P6A13-H14Q2 sigue un procedimiento que acopla a su respuesta final y a los datos del enunciado, sin justificar esta acción.

P6A3-H14Q2

1. Suma los aprobados parciales
2. Establece una relación de regla de tres simple entre el total de alumnos (100%) y el total de aprobados (incógnita)
3. Transforma a operación, simplifica y divide
4. Dato final 75

P6A4-H14Q2

1. Halla el porcentaje de aprobados en la primera fecha dividiendo la cantidad de aprobados en la primera fecha entre el total de alumnos y multiplicando por 100
2. Halla el porcentaje de aprobados en la segunda fecha dividiendo la cantidad de aprobados en la segunda fecha entre el total de alumnos y multiplicando por 100
3. Suma los porcentajes parciales
4. Dato final: 75,00%

P6A5-H14Q2

1. Divide el total de aprobados entre ocho
2. Dato final 75
3. Observación: no hace evidente todos los pasos seguidos.

P6A6-H14Q2

1. Establece una regla de tres simple entre el total de alumnos (100%) y la cantidad de aprobados en la primera fecha (incógnita)
2. Establece una regla de tres simple entre el total de alumnos (100%) y la cantidad de aprobados en la segunda fecha (incógnita)
3. Establece la relación operatoria en ambas
4. Halla el resultado
5. Suma los porcentajes parciales.
6. Dato final: 75,000%

P6A7-H14Q2

1. Establece una regla de tres simple entre el total de alumnos (100%) y la cantidad de aprobados en la primera fecha (incógnita)
2. Establece una regla de tres simple entre el total de alumnos (100%) y la cantidad de aprobados en la segunda fecha (incógnita)
3. Establece la relación operatoria en ambas
4. Halla el resultado
5. Suma los porcentajes parciales.
6. Dato final: 75,000%

P6A8-H14Q2

1. Suma las cantidades de aprobados parciales
2. Relaciona la suma con el total de alumnos (600 de 800)
3. Dato final: 75%
4. Observaciones: no evidencia proceso para hallar el porcentaje

P6A10-H14Q2

1. Suma las cantidades parciales de aprobados.
2. Establece una regla de tres simple entre el total de alumnos (100%) y el total de aprobados (incógnita)
3. Plantea la operación
4. Simplifica y divide.
5. Dato final: 75%
6. Razón: uso de regla de tres simple

P6A13-H14Q2

1. Responde: 7.5%
2. Razón: multiplica el total de alumnos por 7,5
3. Quita dos ceros.
4. Observación: No se aprecia como obtiene 7,5

P6A14-H14Q2

1. Plantea la división entre el total de aprobados y el total de alumnos y lo multiplica por cien. No
2. Plantea la división de 300 entre cuatro
3. Dato final: 75%
4. Observación. No resuelve las operaciones y no responde.

P6A15-H14Q2

1. Indica el total de alumnos (aprobados)
2. Plantea la división del total de alumnos aprobados entre el total de alumnos y lo multiplica por cien.
3. Simplifica y opera
4. Dato final: 75%
5. Observación: plantea la división 300/400 pero tacha los dos ceros a 400 (previamente ya lo había simplificado quedando 300/4)

P6A17-H14Q2

1. Suma la cantidad de alumnos aprobados en cada fecha
2. Establece una regla de tres simple entre el total de alumnos (100%) y el total de aprobados (incógnita)
3. Plantea la operación en función de la incógnita
4. Dato final: 75%

H14Q3: Se quiere pasar de un depósito a otro siete litros de agua y solo disponemos de dos jarras: una de 3 litros y otra de 5 litros (ni los depósitos ni las jarras no son graduados). ¿Cómo pasarías, exactamente, siete litros de un depósito a otro?

Caso 1

La situación planteada tiene ciertas restricciones. Las primeras acciones son un intento de los estudiantes de usar ambas jarras tal como son, esto implica darse cuenta que de esta manera se obtiene más de lo que solicita la situación; este bloqueo permite que los alumnos se detengan o avances, En el primer caso, P1A7-H14Q3 finaliza la situación trasvasando las dos jarras con lo cual los litros son más de lo solicitado y para P1A18-H14Q3 no es posible ya que no se obtiene la cantidad exacta.

Para el segundo caso, los estudiantes intentan verter lo sobrante. En este intento, hay dos caminos: quienes trasvasan sin considerar las restricciones de la situación; es decir, trasvasan 1, 2 o más litros, exactamente, sin tener en cuenta que no se dispone de jarras exactas para ello (P1A11-H14Q3) y quienes sí lo consideran. En este caso, manipulan las dos jarras a fin de obtener las cantidades ideales u otras (P1A2-H14Q3).

Los alumnos emplean en su mayoría estrategias gráficas para resolver la situación; no obstante, P1A8-H14Q3 emplea la manipulación operativa de las cantidades de una manera confusa, lo que la distancia de la realidad de la situación. A continuación se resume, por estudiante, algunas ideas sobre la resolución del problema:

- P1A1-H14Q3: no considera las restricciones de la propuesta (traspasa directamente los 7ℓ)
- P1A2-H14Q3: No considera las restricciones de la propuesta (traspasa 1ℓ sin emplear las características de las jarras). No toma en cuenta la propuesta final (7ℓ). Elabora una gráfica de las jarras de 5 y 3 litros que iguala traspasando 1ℓ.
- P1A3-H14Q3: La respuesta empieza clara pero se torna confusa ("… botamos el resto…), incluye datos que no se presentan directamente en la situación (10ℓ). Expone una gráfica en la que indica lo que hay que hacer.
- P1A4-H14Q3: Su respuesta textual y gráfica no son tan claras; sin embargo, en la última de las tres gráficas previas el proceso es más claro y ajustado a una solución correcta.
- P1A5-H14Q3: Su respuestas textual y gráfica son claras y responden con acierto. Sus tres gráficas previas no tomaban en cuenta las condiciones de la situación y tienen menos conexiones.
- P1A6-H14Q3: su explicación textual es más clara que la gráfica, esta si bien indica con flechas la dirección de la acción no establece el orden. Indica mediante operaciones de suma y resta la transformación ejecutada. Su gráfica previa es más compleja que la versión final.
- P1A7-H14Q3: la explicación textual no se ajusta a lo solicitado. La gráfica reafirma lo expuesto en el texto.
- P1A8-H14Q3: Su respuesta no se ajusta a lo solicitado en la situación. Planea una manipulación operativa que no se ajusta a las condiciones de la situación. Su gráfica indica la capacidad de dos jarras y lo que se quiere llenar en el depósito.
- P1A9-H14Q3: Su respuesta textual y gráfica explican claramente le proceso llegando a cumplir las condiciones de la situación. Su primera gráfica no consideraban las condiciones (el depósito no tenía 7 ℓ sino que había que llenarlo con esa cantidad). La segunda se corresponde con la versión final.
- P1A10-H14Q3: su gráfica no es clara, no determina el orden de las acciones realizadas. Su gráfica previa indica más movimientos (trasvases) que a versión final.
- P1A11-H14Q3: su respuesta textual no considera las restricciones de la situación y no indica cómo trasvasa cantidades que no se ajustan a las condiciones de los modelos. Su gráfica previa indica un proceso pero no el orden del mismo.
- P1A12-H14Q3: su explicación textual no responde correctamente a la situación planteada. La gráfica previa se corresponde con la explicación textual. Trasvasa 8 litros.

- P1A13-H14Q3: su explicación gráfica y textual responden correctamente a la situación planteada; sin embargo, esta última no indica el orden seguido, el mismo que se entiende mejor si se lee el texto que lo acompaña.
- P1A14-H14Q3: su explicación gráfica final (no explicó textualmente) indica las acciones a realizar pero no el orden. Considera un solo depósito con 7 ℓ. Las tres gráficas anteriores siguen la misma secuencia; no obstante una de ellas consideró el depósito vacío del cual se trasvasaba cierta cantidad de líquido.
- P1A15-H14Q3: la gráfica empleada (no explica textualmente) considera las acciones realizadas pero no el orden, Hace uso de las operaciones de suma y resta para hacer evidente el cambio producido al trasvasar. Considera datos de los que no es claro cómo accedió a ellos (5-1=4 ℓ). Sus dos gráficas previas siguen la misma estructura que la versión final.
- P1A16-H14Q3: su explicación a través de un cuadro (no explica textualmente) no indica el orden seguido en el proceso, No obstante, parte de un depósito de 7 ℓ y llega a otro, también, de 7 ℓ (no considera las restricciones de la situación.
- P1A17-H14Q3: su explicación gráfica indica la acción realizada pero no el orden de las mismas. No hay claridad
- P1A18-H14Q3: considera que con las condiciones de la situación no se puede resolver. La gráfica representa los datos de la situación y parte del proceso. La gráfica previa indica cuánto se debe verter en el depósito y cuánto miden las jarras.

Caso 5

Los alumnos hacen uso de la manipulación operativa de los datos para responder a la situación. Al igual que el grupo anterior, el primer intento es trabajar con las jarras a disposición, sumando sus medidas. A partir de ello, P5A9-H14Q3, P5A15-H14Q3, P5A20-H14Q3 no dudan en expresar que se resta 1ℓ sin especificar cómo, mientras que P5A12-H14Q3 añade un instrumento nuevo para poder responder la situación. Para quienes resuelven correctamente, suman y restan las medidas de la jarra a fin de obtener el dato propuesto (7ℓ). Las propuestas son diversas: P5A7-H14Q3 suma dos veces ambas jarras y resta tres la de menor medida, P5A9-H14Q3 resta tres a la de cinco y añade cinco a lo que queda. Las soluciones de P5A8-H14Q3 y P5A17-H14Q3 no incluyen manipulación operativa; sin embargo, sus propuestas permiten responder correctamente la situación; ambas son iguales. Finalmente, P5A13-H14Q3 las distintas posibilidades de obtener una capacidad especifica de litros sin especificar cómo (aunque algunas son evidentes) ni concluir en la solicitada. A continuación se detalla, por alumno, algunas ideas de la solución expuesta:

- P5A3-H14Q3: su explicación textual es clara. No representa gráficamente.
- P5A6-H14Q3: concluye que no es posible porque las condiciones de la situación no permiten llenar exactamente el depósito. Explica la situación para que sea posible.
- P5A7-H14Q3: resuelve la situación operando las cantidades según la capacidad de cada jarra. Su solución es acertada. No grafica ni explica lo realizado.
- P5A8-H14Q3: su explicación textual es clara y acertada. No expone un trabajo gráfico.
- P5A9-H14Q3: resuelve la situación operando las cantidades según la capacidad de cada jarra. Su solución es acertada. No grafica ni explica lo realizado. Su versión es distinta a la de P4A7-H14Q3.
- P5A10-H14Q3: su explicación textual es clara y conduce a una respuesta aceptable.
- P5A12-H14Q3: cambia las condiciones de la situación para resolver con éxito la misma.
- P5A13-H14Q3: establece relaciones entre la cantidad de jarras y litros de agua que no conducen a resolver la situación.
- P5A15-H14Q3: su respuesta no responde a lo solicitado. Es inconclusa ya que no indica cómo "deshacerse" de lo que sobra.
- P5A16-H14Q3: parte de un dato (o dos) que no existe. Su gráfica representa lo textual de manera general, sin indicar secuencia de pasos.
- P5A17-H14Q3: respuesta parcial que no responde a lo solicitado.
- P5A20-H14Q3. Considera que no, que hay que retirar (como P5A15-H14Q3).

Caso 6

Este grupo resuelve la situación recurriendo principalmente a la manipulación gráfica y con menor frecuencia la operativa (P6A10-H14Q3). Asimismo, en su mayoría trabajan con las condiciones de la situación y en menor medida transforman las mismas, especificando cómo (P6A5-H14Q3) o no (P6A13-H14Q3, P6A14-H14Q3), a fin de obtener el dato solicitado. Para quienes consideran las condiciones, intentan buscar el dato solicitado manipulando las jarras entre sí (P6A4-H14Q3, P6A7-H14Q3, P6A8-H14Q3) o finalizan la situación al llenar las dos jarras, sin tener en cuenta el dato solicitado (P6A16-H14Q3). A continuación se detalla, por alumno, algunas ideas de la resolución:

- P6A3-H14Q3: su respuesta es positiva pero no responde al cómo.
- P6A4-H14Q3 su explicación textual es más detallada (y correcta) que su gráfica, la misma que es muy simple.

- P6A5-H14Q3: su respuesta se orienta a transformar las condiciones de la situación.
- P6A7-H14Q3: Hace un proceso de extracción de los datos de la situación. Su explicación textual es clara y secuenciada, se acompaña con el gráfico respectivo.
- P6A8-H14Q3: su explicación textual podría ser clara pero confunde un dato.
- P6A10-H14Q3: su explicación textual es clara. Se apoya en la manipulación operativa (diferente a la de dos compañeros) según las jarras.
- P6A13-H14Q3: no toma en cuenta las restricciones del planteamiento.
- P6A14-H14Q3: no toma en cuenta las restricciones del planteamiento.
- P6A15-H14Q3: su explicación textual no es clara. La gráfica indica la capacidad de cada jarra.
- P6A16-H14Q3: su respuesta no conduce a la solución, ya que plantea sumar las dos jarras.

En base a la solución de los tres planteamientos, se puede apreciar los diferentes aspectos:

Respecto a las fases (o método):

a) Fases transitadas
   - Fases explícitas (planteamiento de la solución – aplicación de la solución – operación)
   - Fases implícitas (familiarización con el problema – comprensión del problema – raciocinio)

b) Fases no transitadas (Verificación – revisión – solución – respuesta)

Respecto a las estrategias

Tipos por la acción realizada

a) Operativas
   - Generales (aplicable a cualquier situación con las mismas características, por lo general las aplican la mayoría de resolutores. Se les conoce como “el método”)
   - Personales (son más rudimentarias; de estas se desprenden las anteriores; se basan en operaciones y acciones simples)

b) Gráficas
   - Dibujos
   - Cuadros
   - Esquemas

Tipos por la forma de proceder

c) Reflexivas (hacen coincidir directamente el planteamiento, proceso y solución)
d) Irreflexivas (No hacen coincidir el planteamiento, proceso y solución)

Hoja de Trabajo 16 – Pregunta 7 (H16Q7)

H16Q7: ¿Qué formas puede tener un terreno de diez metros cuadrados de superficie? Dibuja y explica tu respuesta

La pregunta fue planteada a los alumnos del grupo P3 (solo a ellos). La propuesta está en plural, en el sentido que consulta por "formas" que puede tener un terreno de diez metros cuadrados de superficie. Dada sus características es una cuestión que acepta múltiples alternativas.

Los alumnos en cuestión muestran distintas respuestas en base a la cantidad de imágenes que diseñan y a la forma de las mismas. Dos formas prevalecen: un cuadrado y un rectángulo.

- Podemos observar que P3H16P7A2 parte de un metro cuadrado a partir del cual construye dos imágenes con la misma forma y medidas, pero distinta posición (figuras congruentes).
- P3H16P7A3 presenta una forma distinta: un pentágono de 2m de lado, hallando la medida del perímetro sin hacer referencia a la superficie. Numéricamente coinciden (10).
- P3H16P7A4 indica un cuadrado como la forma que puede tener un cuadrado de 10 metros cuadrados. No indica otra forma.
- P3H16P7A6 propone tres formas pero se queda con dos, estas están constituidas por diez cuadrados iguales, excepto en la que descartó, la misma que está compuesta por formas diferentes. No obstante, sus propuestas no tienen 10 metros cuadrados de área sino más. Tampoco la unidad (cuadrado) referencial, que en el segundo caso tiene 100m2 y en el primero 50m2 (no siendo un cuadrado propiamente como se indica en la imagen).
- P3H16P7A7 propone una cancha de baloncesto, la misma que tiene forma rectangular (por lo tanto propone una forma). Como forma es válida; sin embargo, aclara que esta es una cancha pequeña.
- P3H16P7A9 también propone una forma rectangular aunque con menor cantidad de unidades cuadradas que las requeridas. Sin embargo, considera a la unidad con la medida que debería tener la forma propuesta. De esta manera su forma tiene más área que la indicada.
- P3H16P7A10 plantea una superficie rectangular, indicando cuál es su largo y cuál el ancho. No da más detalle por lo que no se puede indicar si su superficie mide $10m^2$.
- P3H16P7A11propone un cuadrado (una forma) de 10 m (enseña esta medida para superficie obviando la unidad cuadrada) e indica que al unir diez metros cuadrados queda un metro. Su idea se asocia a la medida de longitud en la que al unir diez decímetros se forma un metro.

- P3H16P7A13 propone dos imágenes con formas similares pero se decanta por una (cuadrado) en la que indica que la medida del lado es 10m por lo que su superficie es 100m^2 lo que no coincide con la propuesta. La imagen descartada se asemeja mucho aun cuadrado; sin embargo, está divida en ocho partes, algunas distintas de otras.
- P3H16P7A14 propone un cuadrado (una forma) dividido en diez partes rectangulares iguales, indica que cada lado mide 10m por lo que su área será de 100m^2. Además resalta que tiene que ser "cuadrado" por la expresión "diez metros cuadrados", asociando la última palabra a la forma.
- P3H16P7A15 propone dos formas (cuadrado y rectángulo) pero descarta una (la rectangular); en ambas indicó que la medida de su superficie es de 10m2. Sin embargo, se decanta por la forma cuadrada por la expresión ("si son diez metros cuadrados…"). Esta idea es detallada posteriormente por P3H16P7A21.
- P3H16P7A16 propone una cancha de básquet en la que indica que mide 10m^2; sin embargo, aclara que cada lado de la figura mide 10m, con lo cual contradice la medida del área. La forma de la cancha es más cuadrada que rectangular.
- P3H16P7A17 manifiesta que no estuvo en clase pero propone dos formas: un cuadrado y un rectángulo, indicando que ambos pueden medir "diez metros". No hace referencia a las unidades cuadradas, pero admite dos posibilidades, con lo cual asume que puede haber, al menos, dos formas distintas (aunque similares).
- P3H16P7A18 propone las mismas imágenes que P3H16P7A17, indicando que en cada una "caben" diez metros cuadrados, con lo cual admite dos formas diferentes que pueden tener una misma medida.
- P3H16P7A19 luego de aclarar que no estuvo en clase, propone dos líneas paralelas inclinadas. No da más detalle.
- P3H16P7A20 grafica un cuadrado (o lo que él considera que lo es). No da más detalle ni otra forma.
- P3H16P7A21 aclara que la forma tiene que ser un cuadrado, haciendo referencia a los "metros cuadrados" ya que si no, serían "metros rectangulares". Asocia directamente una única forma relacionada con la unidad de medida.
- P3H16P7A22 muestra una forma rectangular (una forma) que ha sido construida con diez cuadrados iguales. Asocia los 10 metros cuadrados a las partes o unidades que debe tener la forma y no a la medida total de su área.
- P3H16P7A23 presenta un cuadrado, sin comentar el mismo.

- P3H16P7A24 propone dos canchas deportivas distintas con la misma forma (una forma), asociando las distintas “figuras” a superficie de distinta medida, pero con la misma forma.
- P3H16P7A25propone un cuadrado, pero aclara no haber entendido.
- P3H16P7A1, P3H16P7A5, P3H16P7A8, P3H16P7A12 no indicaron ninguna forma que pudiera tener 10 metros cuadrados de área.

Las distintas respuestas se orientan a exponer formas geométricas clásicas, unas más comunes (cuadrado y rectángulo) que otras (pentágono, octógono); en su mayoría convexas y en menor frecuencia cóncavas, estas suelen ser más complejas. No se exponen otras formas (menos comunes o no poligonales) y tampoco hacen referencia a que pueden existir diversas. Sus respuestas son puntuales, circunscribiéndose a un ejemplo concreto (o dos) que exponen.

Por lo general, muestran una forma sola forma, prevaleciendo el cuadrado, asociado a las características de la unidad de medida de la superficie (metro cuadrado) que se refuerza al considerar otras formas compuestas por cuadrados de un metro cuadrado. Asocian los $10m^2$ a la unidad de medida y no a la medida del terreno, de ahí que propongan formas con más de 10 metros cuadrados de área. Aún se observa confusión entre perímetro y superficie. Si bien prevalece la idea de superficie como “la parte de arriba”, “la parte de dentro” o “la parte plana” de una figura, haciendo referencia a una extensión 8dos dimensiones), el cómo medirla es menos preciso.

1. **Idea de perímetro:**
   “…La parte de arriba de un objeto” (P3H16P1A1)
   “La superficie es la parte de dentro de una figura” (P3H16P1A4)
   “La parte (~~de arriba~~) plana de algo” (P3H16P1A6)
   “Es lo que está dentro del perímetro” (P3H16P1A13)
2. **Idea de cómo se mide**
   “Con metro” (P3H16P1A1)
   “Sabiendo su perímetro” (P3H16P1A4)
   “En 1, 2 o 3 dimensiones” (P3H16P1A16)
   “Dividiendo el borde” (P3H16P1A18)
   “Mides el ancho y el largo y lo sumas” (P3H16P1A22)
3. **Similitudes entre perímetro y superficie**
   “Que tienen la misma medida” (P3H16P1A4)
   “Que el perímetro es la anchura de un objeto y la superficie es la parte de arriba y se parecen en que las dos son planas” (P3H16P1A6)
   “Que si tienes el perímetro tienes la superficie” (P3H16P1A8)

“Tienen líneas rectas” (P3H16P1A18)
“Que las dos miden ancho y largo” (P3H16P1A21)
“Abarcan lo mismo” (P3H16P1A23)

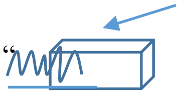
Hoja de Trabajo 16 – Pregunta 1 (H16Q1)

H16Q1: ¿Qué es una superficie?

Al definir “superficie” los alumnos recurren a su ubicación en el objeto (dónde se encuentra), identificándola en la “parte de arriba” del mismo, en “la parte de dentro”, como lo que rodea al objeto o la base del mismo. No obstante, en figuras planas no hay “parte de arriba”, con lo cual si se refiere a objetos tridimensionales como es el caso de P3H16P1A2 o P3H16P1A7, la definición queda estrecha. Nótese como obvia la cara lateral de la imagen como superficie y solo indica la parte superior. Cuando se refiere al “interior” o reseña la palabra “dentro”, la idea es confusa, pues los objetos tridimensionales como el cubo tienen una parte interior que se asocia a su capacidad, con lo cual se estarían igualando ambos términos. En este caso, la superficie estaría asociada a su exterior y no a su interior. Por su parte, “lo que rodea al objeto” puede entenderse, en figuras planas, como el borde del mismo o lo externo más cercano. En cualquiera de los casos, no corresponde con la idea real.

1. **Idea de superficie considerando su ubicación en el objeto**

“…La parte de arriba de un objeto” (P3H16P1A1)

“ ” (P3H16P1A2)

“La parte de arriba de un objeto” (P3H16P1A9)
“La parte de dentro de algo” (P3H16P1A25)
“Es la parte de dentro de algo” (P3H16P1A5)
“El interior de una figura plana” (P3H16P1A16)
“Es lo que está dentro del perímetro” (P3H16P1A13)
“La superficie es la parte de dentro de una figura” (P3H16P1A4)
“La superficie es lo que está dentro de lo ancho y lo largo” (P3H16P1A15)
“Son 10 metros cuadrados que tiene por dentro” (P3H16P1A3)
“Lo que rodea el objeto” (P3H16P1A14)
“La superficie es lo que aguanta la figura o algo” (P3H16P1A24)

Por otro lado, se define superficie en base a una característica de la figura que la contiene, influenciada por el contexto en el que se utilizan: las figuras planas, asociada a la medida del área. De esta manera, los objetos tienen superficie si son planos o tienen una parte plana.

2. Idea de superficie considerando una característica del objeto que la contiene

“La parte plana de algo” (P3H16P1A19)
“Una extensión plana” (P3H16P1A18)
“Un terreno plano” (P3H16P1A11)
“Parte plana de un objeto” (P3H16P1A10)
“La parte (~~de arriba~~) plana de algo” (P3H16P1A6)

Desde otro ángulo, el concepto se asocia a otras magnitudes, distanciándola de su verdadero significado. En este caso, no hablamos de definiciones estrechas ni demasiado amplia sino irreales.

3. Asociada a otras magnitudes

“~~El terreno~~. El largo y el ancho de un objeto.” (P3H16P1A20)
“El espacio que ocupa una figura” (P3H16P1A22)
“La masa de un objeto plano” (P3H16P1A21)

La definición brindada por P3H16P1A23 es real y esencial, pues dice la realidad del objeto y en pocas palabras. Considera un punto de vista no matemático, su significado es más general. La definición de P3H16P1A11 se puede enmarcar dentro de este grupo. Las definiciones de P3H16P1A8, P3H16P1A12 son amplias pues abarcan otros aspectos.

4. Desde un ángulo extramatemático

“Es una extensión de terreno” (P3H16P1A23)
“Es un terreno” (P3H16P1A8)
“El terreno” (P3H16P1A12)
“La portada de un libro es la superficie” (P3H16P1A7)

La definición de P3H16P1A7 es confusa; sin embargo, en base a P3H16P7A7 la característica de “movible” puede referirse a variado ya que incluye dos formas distintas con la misma medida de su superficie.

5. Idea confusa

“…Un espacio movible.” (P3H16P1A17)

Hoja de Trabajo 16 – Pregunta 3 (H16Q3)

H16Q3: ¿Cómo puedes medir una superficie?

Si bien, la definición más extensa de superficie la asocia a un espacio bidimensional, la medida de la misma no sigue la misma trayectoria, ya que la relacionan con objetos unidimensionales, ya sea como instrumentos (metro, pies…) o como magnitudes (perímetro, largo, ancho…). De esta manera, las ideas sobre los objetos matemáticos se aprecian en la resolución de la actividad propuesta en H16P7.

1. **Con la medida del perímetro**

   "Midiendo su perímetro" (P3H16P3A2)
   "Calculando su perímetro." (P3H16P3A3)
   "Sabiendo su perímetro" (P3H16P3A4)
   "Sabiendo el perímetro" (P3H16P3A8)

La referencia a la medida del largo y el ancho permite asociar la superficie a figuras planas concretas en las que estas medidas son necesarias para hallar la superficie (el área) de las mismas. Sin embargo, las respuestas son muy generales lo que nos permite observar la comunicación de las ideas son parciales y carecen de precisión.

2. **Con la medida de su largo y ancho**

   "Midiendo el largo y el ancho de la cancha x2" (P3H16P3A5)
   "Midiendo el largo y el ancho" (P3H16P3A12)
   "Midiendo el largo y el ancho de la superficie" (P3H16P3A21)
   "Midiendo el largo y el ancho" (P3H16P3A25)
   "Sumando su largo y su ancho." (P3H16P3A20)
   "Mides el ancho y el largo y lo sumas" (P3H16P3A22)
   "Cogiendo la medida de los lados y sumarlos" (P3H16P3A24)

Los instrumentos de medida indicados son válidos para medir longitudes, lo que se corresponde con la idea anterior en la que la relación se asocia a magnitudes de una dimensión:

3. **Uso de instrumentos de medida**

   "Con metro" (P3H16P3A1)
   "Con el metro, con los pies…" (P3H16P3A6)
   "Con un metro" (P3H16P3A13)
   "Con metros" (P3H16P3A15)

“Con un metro” (P3H16P3A23)

“Con el metro, con pies, con manos.” (P3H16P3A10)

“…Con palmas, con pies, con metros. Con un metro.” (P3H16P3A17)

“Con la regla o con el metro” (P3H16P3A19)

“Con una regla” (P3H16P3A7)

“Con una regla, cinta métrica…” (P3H16P3A14)

“Midiéndola con muchas reglas o con una cinta. Se mide el ancho y el largo y se suma” (P3H16P3A11)

P3H16P3A9 asocia la medida de la superficie a “metros cuadrados”; se puede entender esta referencia a las unidades de medida. El cómo se corresponde con la manera de medir. La forma más común es el uso de la fórmula de las figuras geométricas.

4. Unidades de medida

“En metros cuadrados” (P3H16P3A9)

Las dos ideas siguientes, expresadas por P3H16P3A16 y P3H16P3A18 son controversiales, puesto que puede suponer que se entiende que la superficie de un objeto abarca diferentes ángulos del mismo (P3H16P3A16) y que al dividir el borde lo que se hace realmente es cuadricular la superficie lo que permite medirla.

5. Ideas controversiales

“En 1, 2 o 3 dimensiones” (P3H16P3A16)

“Dividiendo el borde” (P3H16P3A18)

Hoja de Trabajo 16 – Pregunta 5 (H16Q5)

H16P5: ¿Es lo mismo "superficie" y "perímetro"? Escribe en qué se parecen y en qué se diferencian

Los alumnos entablan una estrecha relación entre el perímetro y la superficie, de tal manera que hallando la primera se puede medir la segunda. La medida del perímetro no necesariamente permite hallar la medida de la superficie pues depende de la forma de esta. En algunos casos, las respuestas brindadas en H16P5 las reconoce como iguales:

Se parecen en:

"El modo de calcularlos" (P3A3-H16P5)

"Que tienen la misma medida" (P3A4-H16P5)

"Que si tienes el perímetro tienes la superficie" (P3A8-H16P5)

"En que es igual de largo" (P3A15-H16P5)

"Que las dos miden ancho y largo" (P3A21-H16P5)

Sin embargo, cuando la respuesta se relaciona con la diferencia entre ambas, esta es más precisa. No obstante, no transmiten una idea general clara de ambas:

Se diferencian en:

"A veces el perímetro y la superficie tienen distintas medidas y que un terreno tiene superficie cuadrada y un perímetro no" (P3A3-H16P5)

"Que el perímetro es lo que limita la superficie" (P3A4-H16P5)

"No lo sé" (P3A8-H16P5)

"En que la superficie es lo de dentro y el perímetro es lo que lo rodea" (P3A15-H16P5)

"Que el perímetro es el borde y la superficie es lo de dentro" (P3A21-H16P5)