



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



Escola Politécnica Superior

**Trabajo Fin de Máster**

**CURSO 2019/2020**

---

*EFECTO DEL MODELO DE MÚSCULO EN LA  
EFICIENCIA Y PRECISIÓN DEL  
ANÁLISIS/SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO HUMANO*

---

**Máster en Ingeniería Industrial**

**ALUMNA/O**

Rosalía Chans Veres

**TUTORAS/ES**

Urbano Lugrís Armesto

Francisco José Mouzo Murujosa

**FECHA**

JULIO 2020

## RESUMEN

En el análisis y simulación del movimiento humano, un factor que influye de manera decisiva es el modelo de músculo usado. Los modelos más habituales en la bibliografía son pesados computacionalmente, lo que los hace poco adecuados para simulaciones en tiempo real. Por ello en este proyecto se desarrollarán varios de estos modelos, desde uno más complejo en el que se tiene en cuenta la dinámica de activación y de contracción hasta otros más sencillos con diferentes simplificaciones. De esta manera se analizará cómo influyen parámetros característicos de los músculos en la validez de los resultados obtenidos. Se implementarán en primer lugar en un péndulo simple y a continuación se incorporarán en un modelo de humano completo con músculos en la pierna, pudiendo así extraer conclusiones acerca de la eficiencia y precisión de cada uno de ellos.

Na análise e simulación do movemento humano, un factor que inflúe de maneira decisiva é o modelo de músculo usado. Os modelos máis habituais na bibliografía son pesados computacionalmente, o que fai que sexan pouco adecuados para simulacións en tempo real. Así neste proxecto desenvolveranse varios destes modelos, desde un máis complexo no que se teñen en conta a dinámica de activación e de contracción ata outros máis sencillos con diferentes simplificacións. Desta maneira analizarase cómo influyen parámetros característicos dos músculos na validez dos resultados obtidos. Implementaranse en primeiro lugar nun péndulo simple e a continuación incorporaranse nun modelo de humano completo con músculos na perna, podendo así extraer conclusión da eficiencia e precisión de cada un deles.

An influential factor in the análisis and simulation of the human movement is the muscle model used. The most common models in the literature are computationally heavy, making them unsuitable for real-time simulations. For this reason in this project several of this models will be developed, from a more complex where the activation dynamics and contraction dynamics are taken into account to simpler ones where different simplifications were made. In this way, it will be analyzed how characteristic parameters of the muscles influence the validity of the obtained results. To achieve this, it will be first implemented the muscle models in simple pendulum, next they will be added to a complete human body model with muscles in one leg, all this will be enough to draw conclusions from efficiency and precisión.





UNIVERSIDADE DA CORUÑA



Escola Politécnica Superior

**TRABAJO FIN DE MÁSTER  
CURSO 2019/2020**

---

*EFECTO DEL MODELO DE MÚSCULO EN LA  
EFICIENCIA Y PRECISIÓN DEL  
ANÁLISIS/SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO HUMANO*

---

**Máster en Ingeniería Industrial**

**Documento**

**MEMORIA**



# ÍNDICE

1	Introducción.....	11
2	Objetivos .....	13
3	Estado del arte .....	15
3.1	Biomecánica Humana .....	15
3.1.1	UNIDAD MÚSCULO-TENDÓN .....	15
3.1.2	HUESOS Y ARTICULACIONES .....	16
3.2	Modelos Biomecánicos.....	17
3.2.1	MODELOS BIOMECÁNICOS DEL SISTEMA LOCOMOTOR .....	17
3.2.2	MODELOS MÚSCULO-TENDÓN .....	22
4	Metodología: Dinámica del conjunto músculo-tendón.....	25
4.1	Dinámica de activación.....	25
4.2	Contracción dinámica del músculo-tendón .....	26
4.3	Propiedades del músculo y tendón.....	28
4.3.1	CURVA FUERZA-LONGITUD .....	28
4.3.2	CURVA FUERZA-VELOCIDAD.....	29
4.3.3	CURVA FUERZA-TENSIÓN .....	30
5	Metodología: Modelos de Músculo propuestos e integración de la dinámica del músculo-tendón en la dinámica multicuerpo .....	32
5.1	Dinámica del péndulo simple.....	32
5.2	Dinámica del péndulo simple anclado por dos músculos.....	33
5.3	Integrador propuesto .....	34
5.3.1	FORWARD EULER.....	35
5.3.2	REGLA TRAPEZOIDAL .....	35
5.4	Modelos de músculo propuestos .....	36
5.4.1	Modelo de músculo completo.....	36
5.4.2	Modelo de músculo con tendón rígido.....	41
5.4.3	Modelo de músculo con activación inmediata.....	42
6	Obtención de resultados y discusión .....	44
6.1	Comparación de los modelos músculo variando la frecuencia en la excitación .....	44
6.2	Comparación de los modelos de músculo con distintas fuerzas isométricas máximas.....	49
6.3	Respuesta de los modelos de músculo a una entrada escalón .....	52
6.4	Comparación de los resultados del modelo de músculo completo y el modelo de músculo completo aplicando el método alternativo .....	55

6.5 Modelo de humano completo con músculos en la pierna derecha.....	55
7 Conclusiones.....	61
8 Bibliografía .....	63

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Detalle de fibras musculares en el conjunto de un músculo.....	16
Figura 2. Algunos ejemplos de articulaciones.....	17
Figura 3. Esquema de la trayectoria del CdG en el modelo de los seis determinantes de la marcha.....	17
Figura 4. Analogía del caminar con el modelo de péndulo invertido. ....	18
Figura 5. Analogía del caminar con el modelo de péndulo invertido. ....	18
Figura 6. Modelo del doble eslabón.....	19
Figura 7. Modelos de cinco y siete eslabones. ....	19
Figura 8. Modelo biomecánico de García Vallejo.....	20
Figura 9. Modelo biomecánico Silva y Ambrosio. ....	21
Figura 10. Modelo biomecánico utilizado en este proyecto. ....	21
Figura 11. Representación del Modelo de Músculo de Hill. ....	23
Figura 12. Esquema de un músculo: detalle aponeurosis y ángulo de penación. .	23
Figura 13. Curvas fuerza-longitud $f_l(\tilde{l}^M)$ y $f_{PE}(\tilde{l}^M)$ de los elementos del músculo activo contráctil (CE) y pasivo elástico (PE).....	29
Figura 14. Curva fuerza-velocidad ( $f_v(\tilde{v}^M)$ ) del elemento activo contráctil del músculo. ....	30
Figura 15. Curva fuerza-tensión ( $f_T(\epsilon^T)$ ) del tendón. ....	31
Figura 16. Esquema del péndulo simple.....	32
Figura 17. Esquema del péndulo con músculos. ....	33
Figura 18. Resumen esquemático de la dinámica del músculo-tendón.....	34
Figura 19. Regla trapezoidal.....	36
Figura 20. Comparación de las fuerzas del músculo 1 obtenidas por las tres soluciones.....	39
Figura 21. Comparación de las fuerzas del músculo 2 obtenidas por las tres soluciones.....	40
Figura 22. Resumen esquemático de la dinámica del músculo-tendón para el modelo alternativo de músculo completo. ....	40
Figura 23. Representación de los valores de la excitación y activación en función del tiempo para $\varphi = 1$ .....	44
Figura 24. Representación de los valores de la excitación y activación en función del tiempo para $\varphi = 0,5$ . ....	45
Figura 25. Representación en Matlab del sistema de péndulo anclado por dos músculos. ....	45
Figura 26. Respuesta en frecuencia de los distintos modelos de músculo. ....	48
Figura 27. Respuesta de los distintos modelos de músculo al variar la fuerza isométrica máxima.....	51

Figura 28. Representación en Matlab del sistema de péndulo anclado por un músculo.....	52
Figura 29. Respuesta de los distintos modelos de músculo a una entrada escalón variando la fuerza isométrica máxima con un solo músculo.....	54
Figura 30. Fotograma del movimiento de marcha utilizado para la extracción de resultados.....	57
Figura 31. Fuerzas del músculo-tendón a lo largo del tiempo de simulación en el músculo soleo.....	59

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Error cuadrático medio entre los modelos de músculo al variar la frecuencia de excitación. ....	49
Tabla 2. Error cuadrático medio entre los modelos de músculo al variar la fuerza isométrica máxima. ....	51
Tabla 3. Error cuadrático medio modelo un músculo con entrada escalón músculo al variar la fuerza isométrica máxima. ....	54
Tabla 4. Valores de los parámetros musculares para cada uno de los músculos de la pierna derecha del modelo humano 3D. ....	56
Tabla 5. Tiempo de simulación del modelo humano 3D para cada uno de los modelos de músculo estudiados. ....	58
Tabla 6. Error RMS existente entre las fuerzas obtenidas con los diferentes modelos de músculo estudiados. ....	59

## 1 INTRODUCCIÓN

El sistema músculo-esquelético del cuerpo humano es un conjunto de elementos cuyo funcionamiento es un tema permanente de estudio debido a su elevada complejidad.

En concreto, los músculos son sistemas que se ven afectados por multitud de parámetros, de manera que determinar cómo se comporta cada uno de ellos es una labor de gran dificultad. Sin embargo, si se da respuesta a esta cuestión, pueden llegar a producirse grandes avances en campos como la medicina, fisioterapia, ergonomía, deporte, etc.

Una de las dificultades a la hora de analizar/simular el comportamiento muscular es que los modelos musculares suelen ser complejos y pesados computacionalmente. Esto dificulta su integración en aplicaciones en las que el tiempo de cálculo es un factor determinante, como por ejemplo todas aquellas que requieren de análisis/simulación en tiempo real.

En este proyecto se desarrollarán diferentes modelos donde la unidad músculo-tendón está basada en el modelo tipo Hill. Se desarrollará un primer modelo completo donde se tiene en cuenta la dinámica de activación y de contracción y a continuación se realizarán simplificaciones obteniendo así prototipos más sencillos que en muchos casos pueden ser lo suficientemente buenos.

Todos estos modelos desarrollados se introducirán en simulaciones que incluyen un péndulo simple soportado por uno o dos músculos que van anclados al suelo y al propio péndulo. De aquí se extraerán conclusiones acerca de cómo afectan determinados parámetros en cada modelo de músculo así como del comportamiento de cada uno de ellos.

También se incluyen estos modelos de músculo en un modelo de humano con músculos en una pierna para ver las diferencias entre introducir el modelo completo y las simplificaciones desarrolladas en este proyecto.



## 2 OBJETIVOS

En el presente proyecto se estudian diferentes modelos del conjunto músculo-tendón.

El primero de ellos es un modelo completo que contiene las ecuaciones correspondientes a la dinámica de activación y la dinámica de contracción muscular, de manera que implica integrar las correspondientes ecuaciones diferenciales de primer orden para obtener como resultado las fuerzas del músculo-tendón. Por otro lado, también se estudian simplificaciones al primer modelo, una de ellas es un modelo de músculo con tendón rígido y dinámica de activación y otra es un modelo con tendón rígido y activación inmediata.

El objetivo de este proyecto consiste, por tanto, en evaluar la eficiencia y precisión de estos modelos de músculo, probándolos en diferentes configuraciones y sometiéndolos a diferentes tipos de movimiento: variando la frecuencia de excitación, las fuerzas isométricas máximas, el perfil de excitaciones, etc.

De esta manera, se compararán los resultados de la fuerza del músculo-tendón obtenidos en los modelos simplificados con los resultados del modelo completo, pudiendo así determinar los movimientos y características para los cuales las simplificaciones son lo suficientemente eficientes y precisas.

Por último, también se extraerán conclusiones de los modelos simplificados al introducirlos en un modelo realista de humano completo con músculos en una pierna y probarlo en un movimiento de gran interés biomecánico como es el movimiento de marcha.



## 3 ESTADO DEL ARTE

### 3.1 Biomecánica Humana

La biomecánica humana es una disciplina científica que tiene por objeto el estudio de los movimientos del cuerpo humano así como las consecuencias mecánicas que derivan de su actividad.

El objeto principal de esta disciplina reside en resolver los problemas que surgen en las diversas condiciones a las que puede verse sometido el cuerpo humano.

El elemento principal de estudio de esta disciplina es el sistema músculo-esquelético, encargado de generar el movimiento. Lo podemos dividir en los siguientes elementos:

- Los músculos, dan lugar a las contracciones y distensiones que provocan el movimiento.
- Los huesos, son los eslabones que actúan a modo de palanca en el movimiento.
- Las articulaciones, son las juntas que unen a los diferentes huesos entre sí, permitiendo el movimiento entre ellos.
- Los tendones, unen los músculos a los huesos de manera que transmiten las fuerzas generadas por los músculos.
- Los ligamentos, son unas largas tiras fibrosas que unen a los diferentes huesos entre sí.

El conjunto de todos estos elementos da lugar a un sistema complejo que depende de infinidad de variables y que es capaz de generar posturas y movimientos innumerables.

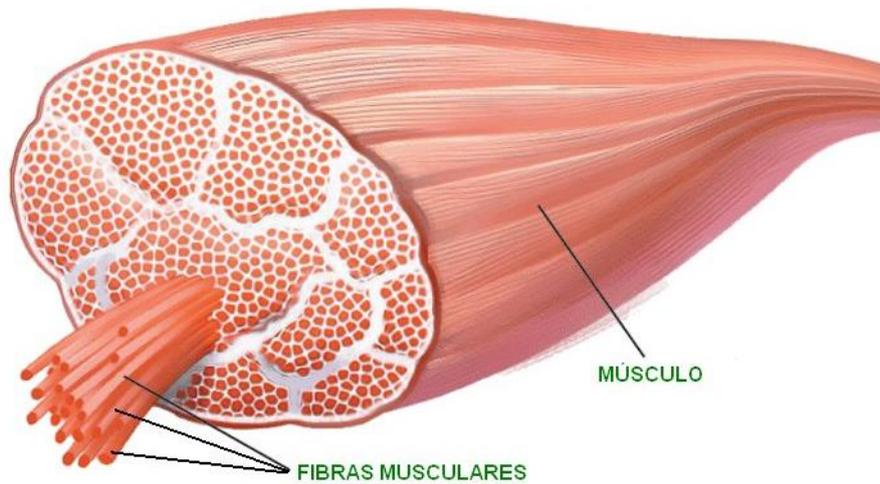
Es por ello que la biomecánica es una disciplina que a día de hoy permanece siendo estudiada debido a que cuenta con varias indeterminaciones que todavía permanecen sin resolver.

#### 3.1.1 UNIDAD MÚSCULO-TENDÓN

El conjunto músculo tendón es el elemento principal de estudio en este trabajo y, como su propio nombre indica, está formado por un músculo y un tendón.

Los músculos, como se ha explicado anteriormente, son tejidos que tienen la capacidad de generar movimiento al contraerse y relajarse.

El tejido muscular está formado por células especializadas llamadas miocitos que son capaces de aumentar y disminuir su longitud cuando están estimuladas por impulsos eléctricos procedentes del sistema nervioso. Los miocitos (fibras musculares) se agrupan formando fascículos que, a su vez, se reúnen para formar un músculo completo.



**Figura 1. Detalle de fibras musculares en el conjunto de un músculo.**

Hay tres tipos de tejidos musculares: el tejido muscular cardíaco que conforma el corazón; el tejido muscular liso, que se encuentra en la pared de diferentes órganos como la vejiga, los bronquios o el útero; y el tejido muscular estriado, que será el que se estudie en este presente proyecto y que es el que constituye los músculos voluntarios.

Por otra parte, los tendones son tejidos conectivos fibrosos que unen los músculos con los huesos. La unión que une el músculo y el tendón se conoce como unión miotendinosa, mientras que la que une el tendón y el hueso es la entesis.

Principalmente están compuestos por fibras de colágeno tipo I que proporcionan la fuerza para resistir altas tensiones, sin embargo, no tienen capacidad de contracción. Su función principal es transmitir la fuerza de los músculos a los huesos.

### **3.1.2 HUESOS Y ARTICULACIONES**

Los elementos que reciben las fuerzas generadas por los músculos y que rigidizan el conjunto músculo-esquelético permitiendo así el movimiento son los huesos.

Los huesos están constituidos por un material duro que da al esqueleto muy buenas propiedades mecánicas.

Al ser estructuras rígidas, para permitir el movimiento, estos elementos están unidos entre sí mediante las articulaciones.

Teóricamente, existen diversos tipos de articulaciones, algunas de ellas se describen a continuación:

- Bisagra: permite el giro relativo alrededor de un solo eje.
- Rótula: permiten girar libremente a un sólido sobre otro teniendo así 3 grados de libertad.
- Prismática: permite el movimiento relativo de traslación, permitiendo el movimiento a lo largo de un eje.

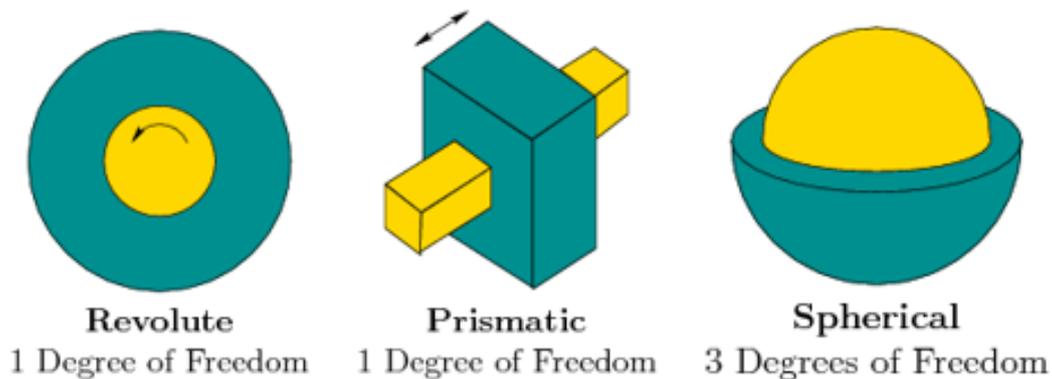


Figura 2. Algunos ejemplos de articulaciones.

Las articulaciones descritas son ideales, sin embargo, en el cuerpo humano las uniones son más complejas. Normalmente, según la aplicación se pueden aproximar a pares esféricos o de revolución.

## 3.2 Modelos Biomecánicos

Para poder estudiar los diferentes puntos que integra la biomecánica, es necesario generar un modelo computacional del cuerpo humano.

Para ello, es imprescindible estudiar los parámetros que influyen en el movimiento, así como los elementos que lo componen. Sin embargo, es imposible reproducir a la perfección el movimiento tal y como se produciría en la realidad, es por ello que se desarrollan una serie de modelos simplificados para los diferentes componentes que forman el sistema músculo-esquelético, llegando así a aproximaciones muy eficaces.

### 3.2.1 MODELOS BIOMECÁNICOS DEL SISTEMA LOCOMOTOR

El propio cuerpo humano en su conjunto puede simplificarse en gran medida de manera que solo se tengan en cuenta parámetros como la masa corporal, longitudes y ángulos.

Teniendo en cuenta estos parámetros podemos considerar los siguientes modelos del sistema locomotor.

#### 3.2.1.1 Modelo de los seis determinantes de la marcha

Esta teoría asume que el centro de gravedad (CdG) del sistema locomotor sigue una trayectoria lineal. Tal y como se ve en la siguiente figura, los puntos verdes representan el centro de gravedad y la línea sería la trayectoria que sigue.



Figura 3. Esquema de la trayectoria del CdG en el modelo de los seis determinantes de la marcha.

La trayectoria está asociada a las relaciones existentes entre los seis determinantes de la marcha (rotación e inclinación de la pelvis, flexión de rodilla en la fase de apoyo, mecanismos de pie y rodilla y desplazamiento lateral de la pelvis). Cualquier variación del CdG de su trayectoria rectilínea se relacionaría con la presencia de una marcha patológica.

### 3.2.1.2 Modelo de péndulo invertido

Este modelo del sistema locomotor está representado por un péndulo invertido que oscila. El centro de masas del cuerpo corresponde con la masa del péndulo y el centro de presiones del pie es análogo al pivote del péndulo.

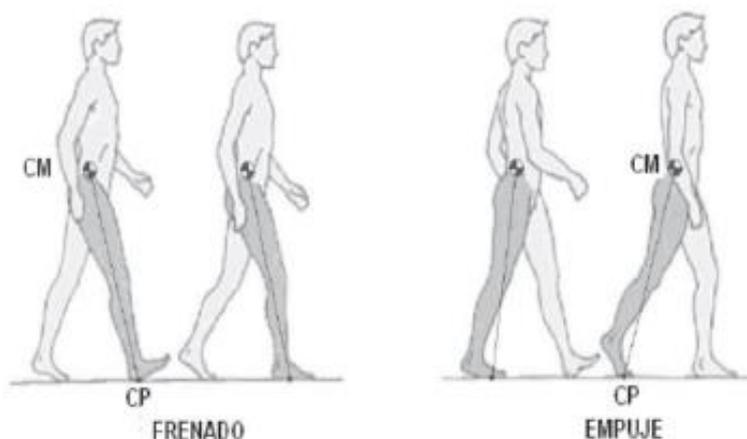


Figura 4. Analogía del caminar con el modelo de péndulo invertido.

La trayectoria descrita por el péndulo invertido puede aproximarse al movimiento global del cuerpo humano.

### 3.2.1.3 Modelo del doble péndulo invertido

Este modelo está constituido por un péndulo doble. Al igual que en el modelo de péndulo simple invertido, el centro de masas del cuerpo corresponde con la masa del péndulo y el centro de presiones del pie es análogo al pivote del péndulo. Sin embargo, existe otro péndulo intermedio que representa la articulación de la rodilla.

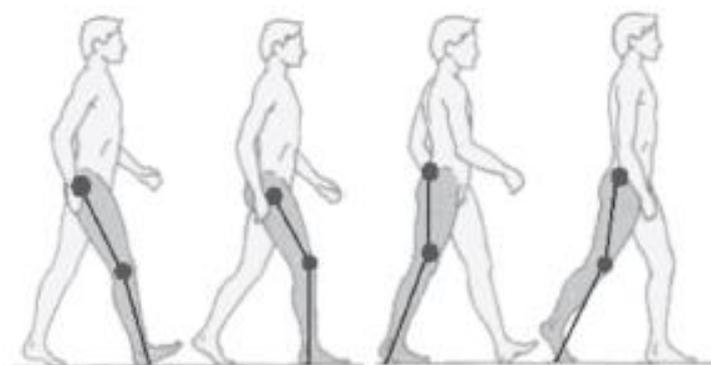


Figura 5. Analogía del caminar con el modelo de péndulo invertido.

### 3.2.1.4 Modelo del doble eslabón

Este modelo está conformado por dos eslabones consecutivos que representan muslo y pierna. El eslabón inferior está anclado al suelo por una articulación que representa al tobillo.

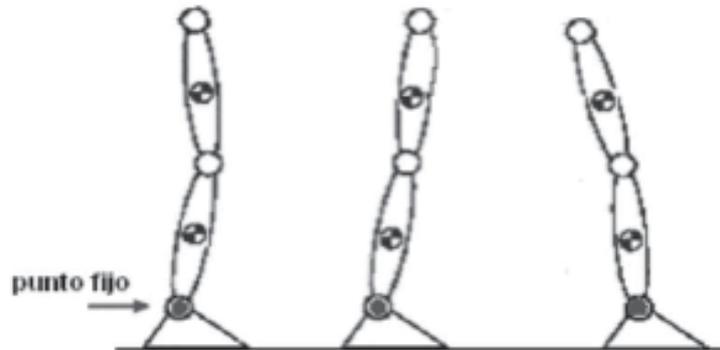


Figura 6. Modelo del doble eslabón.

Cada uno de los eslabones tiene masa y momento de inercia propios.

### 3.2.1.5 Modelo de cinco y siete eslabones

Estos modelos, a diferencia de los anteriores, incluyen las dos piernas. Cada eslabón tiene su propia masa, momento de inercia y longitud. También está caracterizado por la distancia entre el centro de masas de cada eslabón y la articulación predecesora, así como el ángulo con respecto a la vertical.

En el modelo de siete eslabones, a diferencia de en el de cinco, los pies también forman un eslabón.

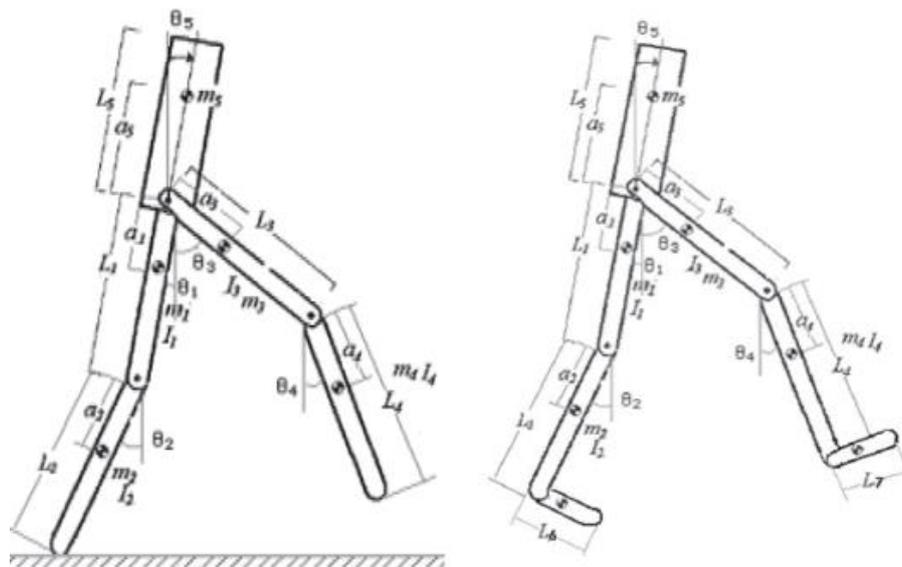


Figura 7. Modelos de cinco y siete eslabones.

### 3.2.1.6 Modelo humano completo 3D

Los modelos de humano completo, a diferencia de los anteriores, incluyen también la parte superior del cuerpo humano. Además, los modelos 3D, incluyen también los movimientos del cuerpo en planos distintos al sagital.

Dentro de este grupo se pueden diferenciar aquellos que consideran la parte superior del cuerpo como un solo sólido y, por otro lado, los que diferencian cabeza, brazos y tronco por separado.

Pertenciente al primer grupo existen varios modelos, entre ellos se encuentra el desarrollado por Anderson y Pandy [1], este modelo presenta 23 gdl y está formado por 10 eslabones. En 2006, Ackerman y Schiehlen [2] proponen otro modelo con 27 gdl en el que todas las articulaciones son de tipo esférico para estudiar trastornos de la marcha humana. En 2010, García Vallejo presenta un modelo más simplificado [3] en el que diferencia siete eslabones (el conjunto superior, los dos muslos, las dos piernas y los dos pies) unidos entre sí mediante articulaciones esféricas y de revolución.

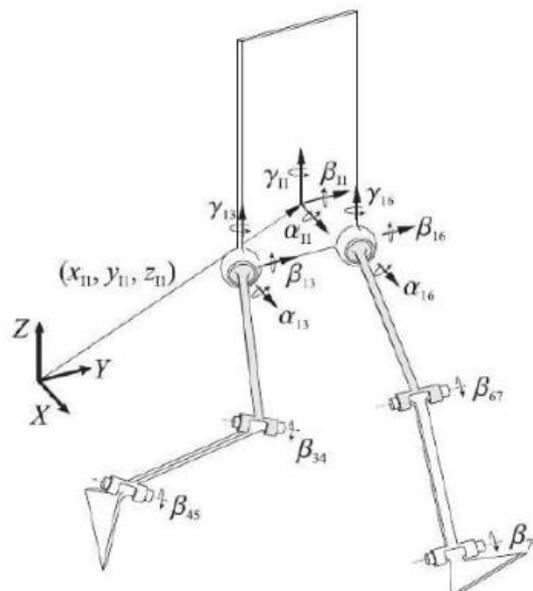
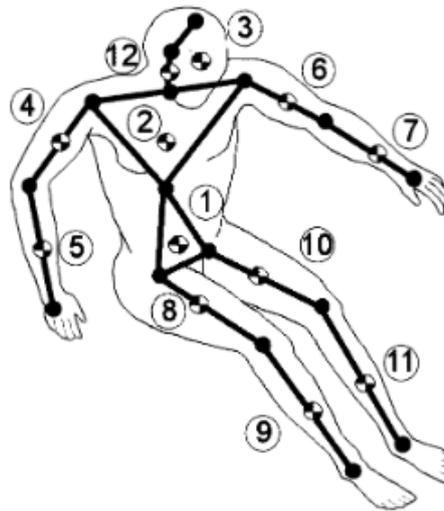


Figura 8. Modelo biomecánico de García Vallejo.

Por otro lado, en el grupo que considera la parte superior no como un solo sólido, sino como un conjunto de diferentes cuerpos (tronco, cabeza y brazos), destaca el modelo propuesto por Silva y Ambrosio en 1996 [4] con un total de 33 eslabones y 44 gdl.

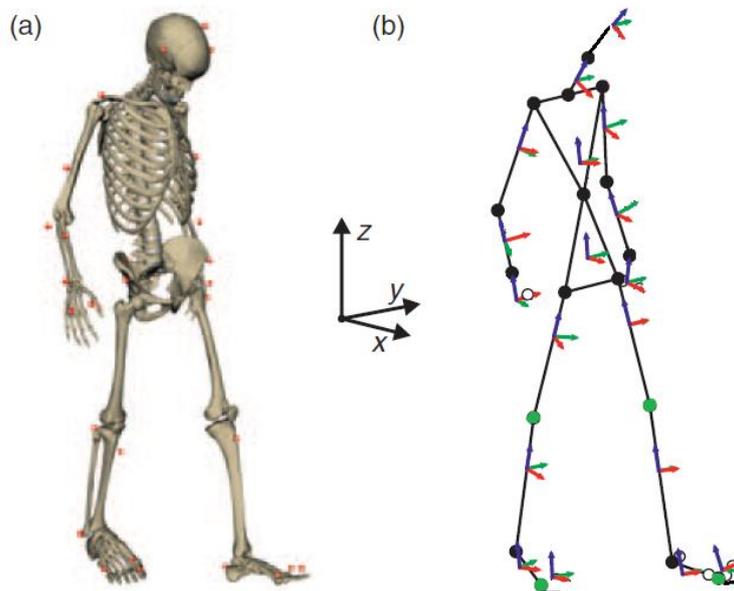


**Figura 9. Modelo biomecánico Silva y Ambrosio.**

El nivel de detalle de los modelos utilizados depende de la naturaleza de la investigación, es por ello que dependiendo de lo que se quiera analizar en un proyecto u otro, el modelo biomecánico tiende al detalle en unas partes u otras.

Para el caso de este proyecto, el modelo biomecánico usado pertenece al segundo grupo que se ha citado, ya que diferencia torso, brazos y cabeza en la parte superior.

Incluye 18 sólidos con sus correspondientes sistemas de coordenadas.



**Figura 10. Modelo biomecánico utilizado en este proyecto.**

Los sólidos están unidos entre sí mediante dos tipos de articulaciones.

- Juntas esféricas: tienen 3 gdl y están representadas con bolas negras.
- Juntas de revolución: tienen 1 gdl y están representadas con bolas verdes.

Teniendo en cuenta que el sólido base tiene 6 gdl, el número de grados de libertad totales asciende a un total de 49.

### 3.2.2 MODELOS MÚSCULO-TENDÓN

Para el análisis de la marcha humana, un elemento de vital importancia es el conjunto músculo-tendón. Este elemento es complejo debido a que también depende de muchos parámetros. A diferencia de los modelos descritos anteriormente para el sistema locomotor, en el caso del conjunto músculo-tendón, habrá que añadir elementos generadores de fuerza.

#### 3.2.2.1 Modelos computacionales

La mayor parte de los modelos computacionales realizados para el estudio del Músculo-Tendón se basan en el **Modelo de Músculo de Hill** [5], aunque también hay otras alternativas como el modelo de Huxley [6]. En este proyecto usaremos el primero de ellos como referencia para generar nuestros propios modelos de músculo, ya que es menos pesado computacionalmente que el de Huxley.

Conociendo la manera de actuar de cada uno de los elementos del conjunto músculo-tendón, puede hacerse una asimilación de manera que se vean sustituidos por elementos mecánicos.

El elemento muscular que propone el Modelo de Músculo de Hill está compuesto por las siguientes partes:

- Un elemento activo contráctil (CE).
- Un elemento paralelo elástico pasivo (PE).
- Un elemento elástico en serie (SE).

Si hacemos corresponder cada uno de estos elementos a los integrantes de un músculo real, la analogía sería la siguiente. El elemento activo contráctil se corresponde al sarcómero, que es el conjunto de las proteínas contráctiles: actina y miosina. El elemento paralelo elástico pasivo representa el elemento pasivo del músculo, es decir, epimisio, endomisio y perimisio. Por último, el elemento elástico en serie representa los tendones.

En este modelo, el elemento paralelo elástico pasivo y elemento elástico en serie son elementos pasivos y se representan con muelles no lineales. El elemento contráctil es representado como un actuador.

Cada elemento tiene su longitud y posición determinada, quedando tal y como se muestra en la siguiente figura.

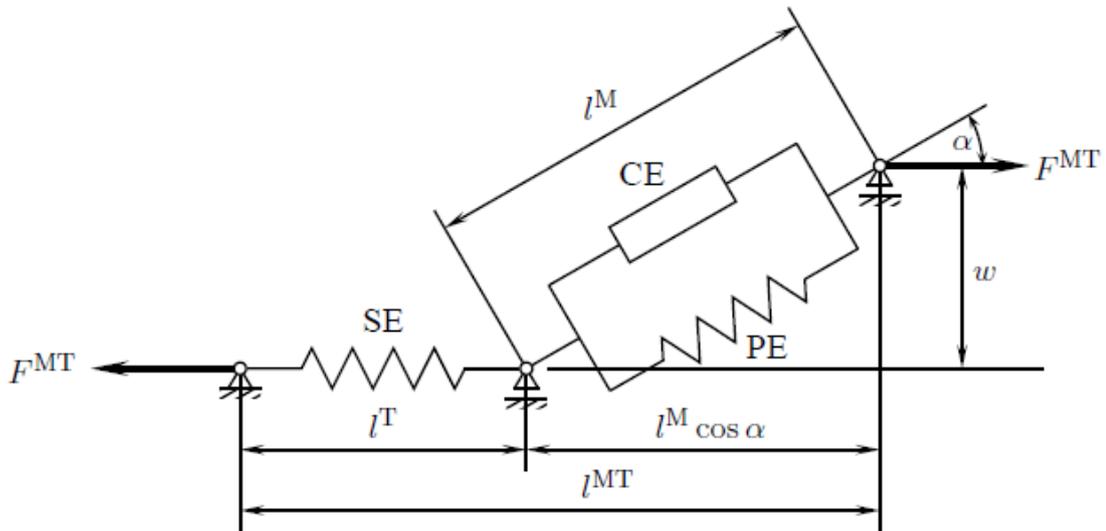


Figura 11. Representación del Modelo de Músculo de Hill.

Como se ve, cada elemento tiene su propia longitud y las fibras del músculo tienen un ángulo con respecto a la horizontal denominado  $\alpha$ , para representar el ángulo formado por los fascículos y la aponeurosis. Este ángulo tiene que ser mayor o igual que cero y se denomina ángulo de penación.

La aponeurosis es la parte interna del tendón, es decir, lo que conecta el tendón con las fibras del músculo.

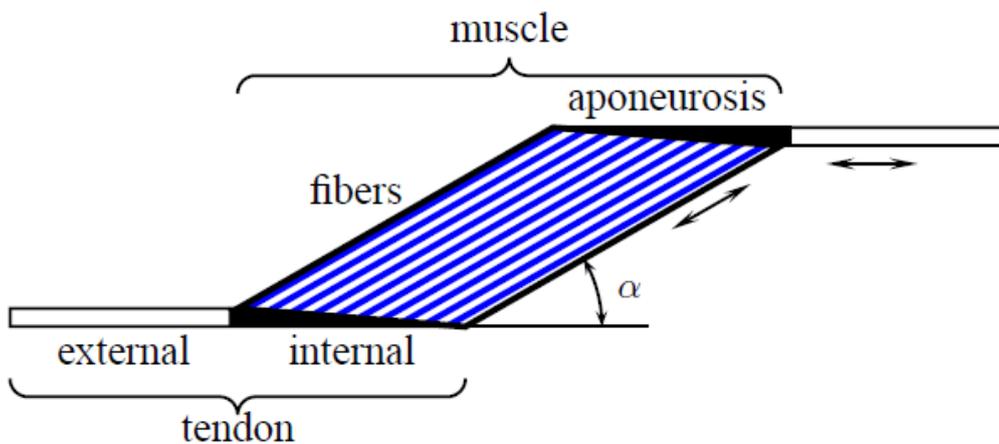


Figura 12. Esquema de un músculo: detalle aponeurosis y ángulo de penación.

La parte interna y externa del tendón tienen las mismas propiedades.

Del esquema de la Figura 11 se deduce que:

$$l^{MT} = l^M \cos \alpha + l^T \quad (3.1)$$

Donde  $l^{MT}$  es la longitud del conjunto músculo-tendón,  $l^M$  es la longitud de la fibra muscular y  $l^T$  es la longitud del tendón.

Si la anchura del músculo  $\omega$  permanece constante durante la contracción del músculo se cumple que:

$$\omega = l_0^M \sin \alpha_0 = l^M \sin \alpha = cte \quad (3.2)$$

Este parámetro se supone constante para simular el efecto de que el músculo mantiene el volumen constante durante la contracción.

Donde  $l_0^M$  es la longitud óptima de la fibra muscular y  $\alpha_0$  es el ángulo de penetración que corresponde a  $l_0^M$ .

De las dos ecuaciones anteriores se deduce:

$$v^{MT} = \frac{v^M}{\cos \alpha} + v^T \quad (3.3)$$

Donde, análogamente a las notaciones de las longitudes,  $v^{MT}$  es la velocidad del conjunto músculo-tendón,  $v^M$  es la velocidad de la fibra muscular y  $v^T$  es la velocidad del tendón.

## 4 METODOLOGÍA: DINÁMICA DEL CONJUNTO MÚSCULO-TENDÓN

Una vez definidos los modelos anteriormente descritos, el siguiente paso reside en resolver el problema biomecánico correspondiente. Muchas veces este problema trata de identificar la acción de uno o más grupos de músculos sobre el sistema esquelético. Este asunto se puede plantear desde dos puntos de vista diferentes.

El primero de ellos es la dinámica inversa, en la que se parte de un movimiento concreto y se busca obtener propiedades como las fuerzas, longitudes y velocidades propias de cada uno de los músculos durante ese movimiento.

El otro punto de vista a la hora de resolver el problema es el de la dinámica directa. En este caso, lo que definimos son las propiedades de los músculos y sus excitaciones para finalmente obtener cómo es el movimiento del conjunto. Éste será el tipo de estudio que se realice en este proyecto.

La dinámica del actuador músculo-tendón se puede dividir en dinámica de activación y dinámica de contracción del músculo-tendón.

### 4.1 Dinámica de activación

La dinámica de activación es la transformación de una excitación neuronal en una activación del aparato contráctil.

Está descrita por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que contiene la relación entre la activación del músculo  $a = a(t)$ , su derivada  $\dot{a} = \dot{a}(t)$  y la excitación neuronal  $u = u(t)$ :

$$\dot{a} = (u - a) \frac{u}{\tau_{act}} + [u - (a - a_{min}) - (u - a) u] \frac{1}{\tau_{deact}} \quad (4.1)$$

$\tau_{act}$  es la constante de tiempo para la acumulación de la activación cuando el músculo es completamente excitado. Por el contrario,  $\tau_{deact}$  es la constante de tiempo para la relajación de la activación cuando el músculo es desactivado. Por otro lado,  $a_{min}$  es el límite inferior de la activación.

Asumiremos que todos los músculos tienen la misma dinámica de activación.

Los valores que se le han dado en este trabajo a las constantes son los siguientes:

$$\tau_{act} = 15 \text{ ms}$$

$$\tau_{deact} = 50 \text{ ms}$$

$$a_{min} = 0,001$$

Por tanto, la ecuación de la dinámica de activación puede expresarse como:

$$\dot{a}(t) = f(a(t), u(t)) \quad (4.2)$$

Los valores de la excitación neuronal varían entre unos límites de 0 y 1.

## 4.2 Contracción dinámica del músculo-tendón

La contracción dinámica del músculo-tendón se refiere a la transformación de la activación en una fuerza muscular.

Está descrita por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se rige por la ecuación de la dinámica de activación.

Esta dinámica es más compleja que la de activación debido a la interacción con la propia dinámica del cuerpo.

Para simplificar, se asume que los elementos musculares no tienen masa y se ignora la fricción.

La ecuación del equilibrio de fuerzas queda:

$$F^{MT} = (F_{CE}^M + F_{PE}^M) \cos \alpha \quad (4.3)$$

Donde  $F_{CE}^M$  es la fuerza activa ejercida por CE y  $F_{PE}^M$  es la fuerza pasiva ejercida por PE;  $F^{MT}$  es la fuerza del conjunto músculo-tendón.

La fuerza producida por el elemento contráctil depende de la longitud de la fibra muscular ( $l^M$ ), de la velocidad de la fibra muscular ( $v^M$ ) y del nivel de activación ( $a$ ).

$$F_{CE}^M = F_0^M \cdot a \cdot f_l(\tilde{l}^M) \cdot f_v(\tilde{v}^M) \quad (4.4)$$

Donde  $F_0^M$  es la fuerza isométrica máxima del músculo;  $\tilde{l}^M$  es la longitud normalizada de la fibra muscular;  $\tilde{v}^M$  es la velocidad normalizada de la fibra muscular;  $f_l$  y  $f_v$  son relaciones adimensionales fuerza-longitud y fuerza-velocidad, respectivamente.

La longitud normalizada de la fibra del músculo se expresa como:

$$\tilde{l}^M = \frac{l^M}{l_0^M} \quad (4.5)$$

Donde  $l^M$  es la longitud de la fibra muscular y  $l_0^M$  es la longitud óptima, que es un parámetro del músculo.

La velocidad normalizada de la fibra muscular se expresa como:

$$\tilde{v}^M = \frac{v^M}{v_{MAX}} \quad (4.6)$$

Donde  $v^M$  es la velocidad de la fibra muscular y  $v_{MAX}$  la velocidad máxima de contracción obtenida como:

$$v_{MAX} = \frac{l_0^M}{\tau_c} \quad (4.7)$$

Donde  $\tau_c$  es el parámetro escala temporal, al que se le dará un valor de 0,1 s.

Las fuerzas del elemento paralelo pasivo y las fuerzas del tendón se pueden expresar como:

$$F_{PE}^M = F_0^M \cdot f_{PE}(\tilde{l}^M) \quad (4.8)$$

$$F^{MT} = F_0^M \cdot f_T(\varepsilon^T) \quad (4.9)$$

$f_{PE}$  es un factor adimensional que expresa la relación fuerza-longitud y  $f_T$  es un factor adimensional que expresa la relación fuerza-tensión.

Por otro lado,  $l_S^T$  es la longitud del tendón cuando está flojo y  $\varepsilon^T$  es la deformación unitaria del tendón, que se obtiene a través de la siguiente fórmula:

$$\varepsilon^T = \frac{l^T - l_S^T}{l_S^T} \quad (4.10)$$

La expresión de la derivada de la fuerza del conjunto músculo-tendón con respecto del tiempo es:

$$\dot{F}^{MT} = k^T \cdot v^T \quad (4.11)$$

Esta expresión será una de las más relevantes de este proyecto ya que integrándola podremos obtener la fuerza del conjunto músculo-tendón en cada instante de tiempo, que es una de las principales incógnitas en la dinámica directa.

Por ello, a continuación, se desarrolla esta expresión para que quede completamente definida.

$$k^T = \frac{dF^{MT}}{dl^T} \quad (4.12)$$

La expresión de la velocidad normalizada del músculo se puede obtener de las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.8) obteniendo:

$$\tilde{v}^M = f_v^{-1} \left( \frac{F^{MT} / \cos \alpha - F_0^M \cdot f_{PE}(\tilde{l}^M)}{F_0^M \cdot a \cdot f_l(\tilde{l}^M)} \right) \quad (4.13)$$

$f_v^{-1}$  representa la inversa de la relación fuerza-velocidad de la fibra del músculo.

La expresión de la velocidad del tendón se puede obtener desarrollando las ecuaciones (3.3), (4.6) y (4.13).

$$v^T = v^{MT} - \frac{v_{MAX}}{\cos \alpha} f_v^{-1} \left( \frac{F^{MT} / \cos \alpha - F_0^M \cdot f_{PE}(\tilde{l}^M)}{F_0^M \cdot a \cdot f_l(\tilde{l}^M)} \right) \quad (4.14)$$

Sustituyendo la ecuación (4.14) en la ecuación (4.11) se obtiene la ecuación de la derivada de la fuerza del conjunto músculo-tendón completamente definida.

$$\dot{F}^{MT} = k^T \left[ v^{MT} - \frac{v_{MAX}}{\cos \alpha} f_v^{-1} \left( \frac{F^{MT} / \cos \alpha - F_0^M \cdot f_{PE}(\tilde{l}^M)}{F_0^M \cdot a \cdot f_l(\tilde{l}^M)} \right) \right] \quad (4.15)$$

El valor de la longitud normalizada del músculo lo obtendremos de la siguiente ecuación, que deriva del desarrollo de (3.1), (3.2) y (4.5).

$$\tilde{l}^M = \frac{1}{l_0^M} \sqrt{(l^{MT} - l^T)^2 + w^2} \quad (4.16)$$

También será necesario obtener la ecuación de  $l^T$  desarrollando (4.9) y (4.10) de manera que se exprese como:

$$l^T = l_S^T \left[ 1 + f_T^{-1} \left( \frac{F^{MT}}{F_0^M} \right) \right] \quad (4.17)$$

Donde  $f_T^{-1}$  expresa la inversa de la relación fuerza-tensión del tendón.

En resumen, la ecuación diferencial que define la fuerza del conjunto músculo-tendón queda en función de:

$$\dot{F}^{MT}(t) = f(F^{MT}(t), l^{MT}(t), v^{MT}(t), a(t)) \quad (4.18)$$

Donde  $l^{MT}(t)$  y  $v^{MT}(t)$  se obtienen a partir del movimiento del esqueleto conociendo las distancias entre los puntos de inserción en cada instante de tiempo.

### 4.3 Propiedades del músculo y tendón

Parte de los parámetros vistos en el apartado anterior son propiedades características de los músculos y los tendones.

En este apartado se definirán dichos parámetros para poder resolver la dinámica directa.

#### 4.3.1 CURVA FUERZA-LONGITUD

La relación fuerza-longitud del elemento activo contráctil de músculo se puede expresar como:

$$f_l(\tilde{l}^M) = e^{-[(\tilde{l}^M - 1)/\gamma]^2} \quad (4.19)$$

Donde  $\gamma$  es un parámetro que indica la anchura de la curva  $f_l = 1/e$  cuyo valor es de  $\sqrt{0,45}$ .

De esta manera, el músculo ejerce la máxima fuerza cuando su longitud es igual a  $l_0^M$  y, cuando se alarga o contrae, la fuerza disponible va disminuyendo.

La relación fuerza-longitud del elemento elástico pasivo del músculo se expresa como:

$$f_{PE}(\tilde{l}^M) = \frac{e^{k_{PE}(\tilde{l}^M - 1)/\varepsilon_0^M} - 1}{e^{k_{PE}} - 1} \quad (4.20)$$

Donde  $k_{PE}$  es un factor de forma exponencial al que se le ha dado un valor de 5 y  $\varepsilon_0^M$  es la tensión de la parte pasiva del músculo si  $F^M = F_0^M$  al que se le asigna un valor de 0,6.

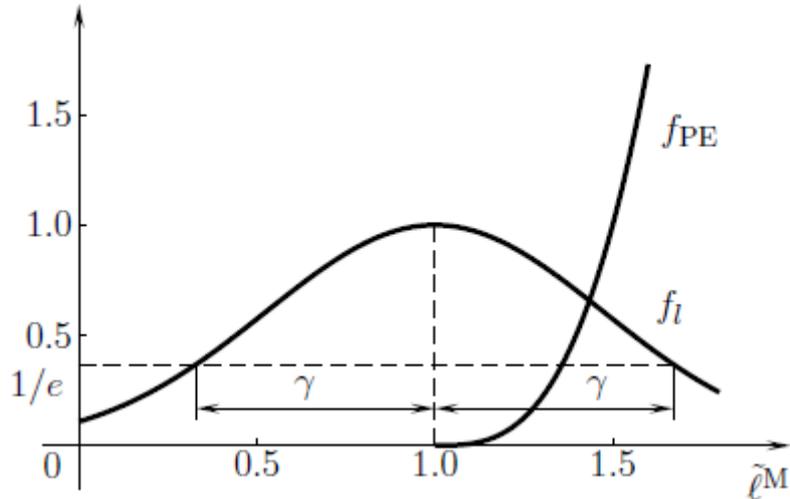


Figura 13. Curvas fuerza-longitud  $f_l(\tilde{l}^M)$  y  $f_{PE}(\tilde{l}^M)$  de los elementos del músculo activo contráctil (CE) y pasivo elástico (PE).

#### 4.3.2 CURVA FUERZA-VELOCIDAD

La relación existente entre la fuerza y la velocidad es diferente cuando el músculo se acorta y se alarga.

Cuando se acorta, se cumple que  $\tilde{v}^M < 0$ , por el contrario, cuando se alarga,  $\tilde{v}^M > 0$ .

La función que define la curva fuerza-velocidad es  $f_v(\tilde{v}^M)$ .

El valor de este parámetro depende directamente del valor de  $\tilde{v}^M$ , definiéndose con la siguiente función a tramos:

$$f_v(\tilde{v}^M) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{v}^M \leq -1 \\ \frac{1+\tilde{v}^M}{1-\tilde{v}^M/k_{CE1}} & \text{si } -1 < \tilde{v}^M \leq 0 \\ \frac{1+\tilde{v}^M f_v^{max}/k_{CE2}}{1+\tilde{v}^M/k_{CE2}} & \text{si } \tilde{v}^M > 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

La constante  $k_{CE1}$  indica lo rápido que la fuerza converge en cero cuando el músculo se está acortando. Se le ha dado un valor de 0,25.

La constante  $k_{CE2}$  indica lo rápido que la fuerza converge a su valor máximo cuando el músculo se está alargando.

$f_v^{max}$  es la fuerza máxima que el músculo puede realizar cuando se está alargando. Se le asigna un valor de 1,4.

El valor de  $k_{CE2}$  depende de  $k_{CE1}$  y  $f_v^{max}$  tal y como se muestra en la siguiente ecuación:

$$k_{CE2} = \frac{f_v^{max} - 1}{2} \frac{k_{CE1}}{1 + k_{CE1}} \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta los valores citados de  $k_{CE1}$  y de  $f_v^{max}$ ,  $k_{CE2}$  valdrá 0,04.

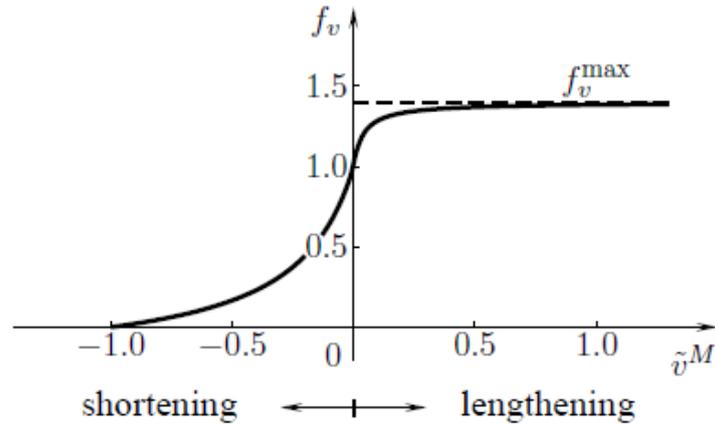


Figura 14. Curva fuerza-velocidad ( $f_v(\tilde{v}^M)$ ) del elemento activo contráctil del músculo.

### 4.3.3 CURVA FUERZA-TENSIÓN

La curva fuerza-tensión del tendón depende directamente del alargamiento unitario del tendón  $\varepsilon^T$ :

$$f_T(\varepsilon^T) = \begin{cases} 0,10377(e^{91\varepsilon^T} - 1) & \text{si } 0 \leq \varepsilon^T < 0,01516 \\ 37,526 \varepsilon^T - 0,26029 & \text{si } 0,01516 \leq \varepsilon^T < 0,1 \end{cases} \quad (4.23)$$

Desarrollando las ecuaciones (4.10) y (4.23) podemos expresar  $k^T$  como:

$$k^T = \begin{cases} 9,44307 \frac{F_0^M}{l_s^M} e^{91\varepsilon^T} & \text{si } 0 \leq \varepsilon^T < 0,01516 \\ 37,526 \frac{F_0^M}{l_s^M} & \text{si } 0,01516 \leq \varepsilon^T < 0,1 \end{cases} \quad (4.24)$$

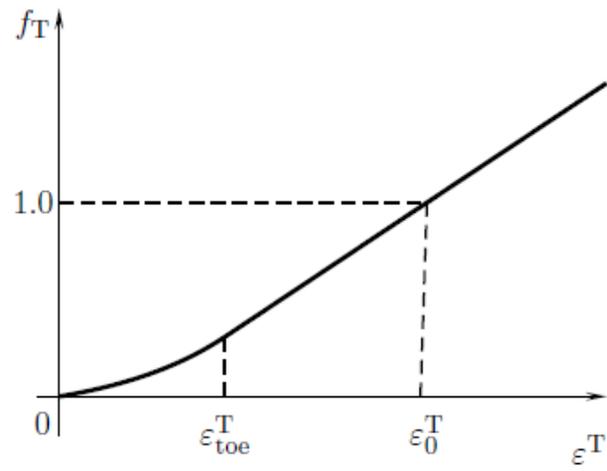


Figura 15. Curva fuerza-tensión ( $f_T(\varepsilon^T)$ ) del tendón.

## 5 METODOLOGÍA: MODELOS DE MÚSCULO PROPUESTOS E INTEGRACIÓN DE LA DINÁMICA DEL MÚSCULO-TENDÓN EN LA DINÁMICA MULTICUERPO

Una vez conocidas las ecuaciones que definen la dinámica del músculo, lo que se busca es formularlas de la manera correcta para integrarlas en la simulación dinámica.

Para evaluar los distintos métodos que se estudian en este trabajo se ha creado un modelo sencillo que incluye un péndulo simple anclado por dos músculos, uno a cada lado. En él se incluyen las ecuaciones de la dinámica del músculo, se introduce a los músculos una historia de excitación y se extrae como resultado las fuerzas del músculo-tendón.

Asimismo, se han generado simulaciones con tres modelos de músculo diferentes de manera que finalmente se extraigan conclusiones acerca de si las simplificaciones del modelo son lo suficientemente buenas en determinados casos.

### 5.1 Dinámica del péndulo simple

Un péndulo simple se define como una partícula de masa  $m$  que se encuentra suspendida del punto de anclaje por una barra inextensible de longitud  $L$  y masa despreciable.

El movimiento que describe la masa puntual es circular y de radio  $L$ .

Al ángulo formado entre el péndulo y el eje  $x$  se le ha denominado theta.

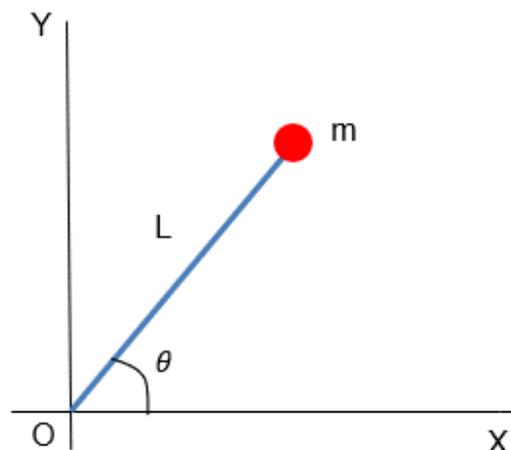


Figura 16. Esquema del péndulo simple.

Por tanto, la derivada de theta con respecto al tiempo,  $\dot{\theta}$ , es la velocidad angular. De la misma manera, la derivada de  $\dot{\theta}$  con respecto al tiempo,  $\ddot{\theta}$ , es la aceleración angular.

Para obtener la ecuación del movimiento del péndulo simple basta con realizar el sumatorio de momentos.

$$\sum M_o = I_o \cdot \alpha \quad (5.1)$$

Dado que el sumatorio de momentos se realiza en el punto O, la única fuerza que genera momento es el peso.

Se obtiene por tanto la ecuación del movimiento expresada como:

$$m \cdot g \cdot L \cdot \cos \theta = m \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} \quad (5.2)$$

Simplificando:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \cos \theta \quad (5.3)$$

Donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

## 5.2 Dinámica del péndulo simple anclado por dos músculos

Sin embargo, en el caso que se estudia en este trabajo, la ecuación de movimiento no será tan simple, ya que el péndulo está actuado por dos músculos que ejercen una fuerza sobre él tal y como se representa en la siguiente figura.

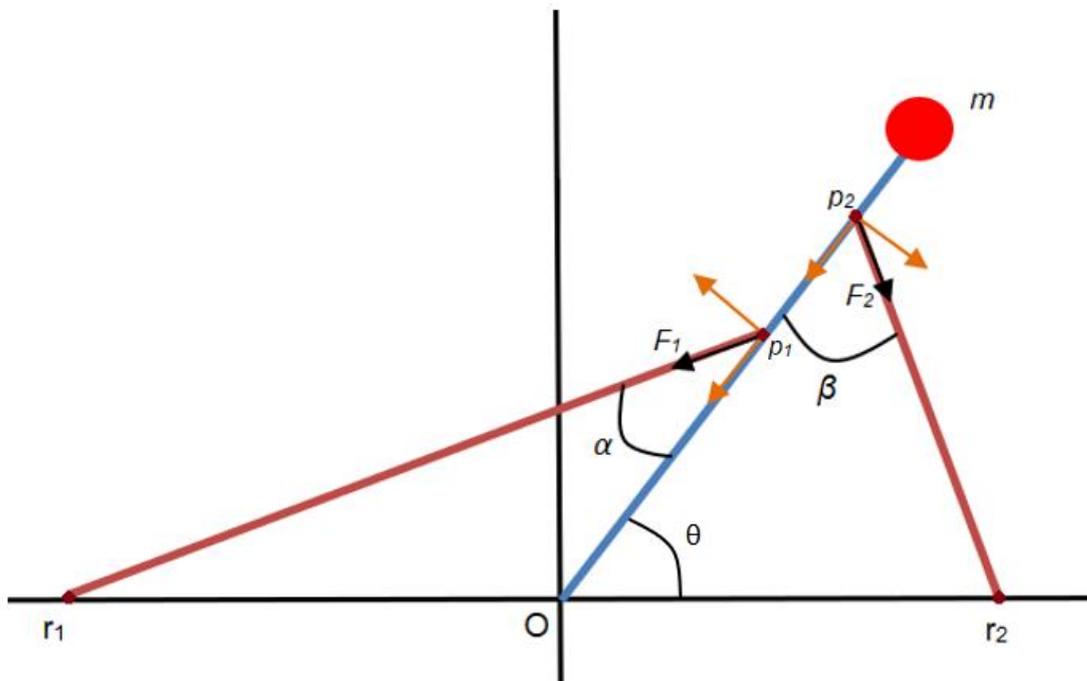


Figura 17. Esquema del péndulo con músculos.

El músculo 1 es el de la izquierda y el músculo 2 el de la derecha.

Cada fuerza muscular se puede descomponer en dos componentes: una paralela a la barra, y otra perpendicular.

La componente paralela no contribuye al movimiento, ya que su línea de acción pasa por la articulación O, así que su momento es nulo.

El momento que ejerce cada músculo será igual al producto de la componente de la fuerza perpendicular a la barra por el brazo de momento, que será la distancia entre el punto de anclaje correspondiente ( $r_1, r_2$ ) y la articulación O.

Por tanto, la ecuación del movimiento queda:

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{L} \cos \theta + F_1 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \overline{Or_1} - F_2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \overline{Or_2} \quad (5.4)$$

Donde  $F_1$  y  $F_2$  son las fuerzas del músculo-tendón en la dirección de cada uno de los músculos y  $\alpha$  y  $\beta$  se obtienen a través de las siguientes expresiones:

$$\alpha = \text{asin} \left( \frac{\overline{Or_1} \cdot \sin(\pi - \theta)}{l_1^{MT}} \right) \quad (5.5)$$

$$\beta = \text{asin} \left( \frac{\overline{Or_2} \cdot \sin(\theta)}{l_2^{MT}} \right) \quad (5.6)$$

### 5.3 Integrador propuesto

Como se ha visto, en el punto 4 de este presente trabajo se han descrito las ecuaciones de la dinámica del conjunto músculo-tendón. Todas ellas se pueden resumir en lo siguiente.

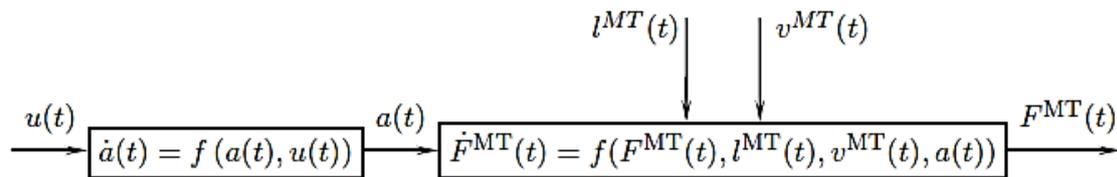


Figura 18. Resumen esquemático de la dinámica del músculo-tendón.

Se introduce una función de excitación  $u = u(t)$  que nos permitirá calcular la derivada de la activación  $\dot{a} = \dot{a}(t)$ . Integrando esta variable se obtiene  $a = a(t)$ . Este parámetro junto con  $l^{MT}(t)$  y  $v^{MT}(t)$  permiten obtener la derivada de la fuerza del músculo-tendón que, al integrarla, nos permite obtener el resultado que buscábamos, es decir,  $F^{MT}(t)$ .

Como vemos es necesario recurrir a la integración de varias variables a lo largo de la simulación, por lo que se han desarrollado varios integradores que incluiremos en el modelo de simulación para poder obtener los resultados.

Los integradores que utilizaremos para este trabajo son para integrar ecuaciones diferenciales de primer orden (ODE's).

La forma genérica de un sistema ODE's de primer orden en forma explícita es:

$$\dot{y} = f(y, t) \quad (5.7)$$

Sin embargo, para la obtención de  $\theta$  a través de las ecuaciones del movimiento, contamos con una ecuación de segundo orden, lo cual implica que aparezcan segundas derivadas. Es por ello por lo que, en este caso, se recurre a la siguiente conversión:

$$y = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad \dot{y} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}$$

Por tanto, en un instante determinado  $t$ , se conoce el vector de variables  $y$ , que contiene posiciones y velocidades. Con las ecuaciones dinámicas podemos obtener el vector  $\dot{y}$ , dándonos así el vector que contiene velocidades y aceleraciones. Las velocidades se obtendrán simplemente copiándolas del vector  $y$ .

### 5.3.1 FORWARD EULER

El integrador Forward Euler es de tipo explícito, esto implica que presenta la solución en  $n+1$  en función de valores de la solución y su derivada en instantes anteriores. Este tipo de integradores requieren un menor esfuerzo de cálculo, ya que no implica resolver un sistema de ecuaciones no lineal en cada paso de tiempo. Pueden llevar a la necesidad de establecer pasos de tiempos muy pequeños cuando la solución posea frecuencias elevadas.

En concreto, el método de Euler es el más simple para integrar una ecuación diferencial de primer orden. Se basa en la siguiente ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + t \cdot \dot{y}_n \quad (5.8)$$

Donde  $t$  es el paso de tiempo.

### 5.3.2 REGLA TRAPEZOIDAL

Se trata de un integrador de tipo implícito. Los integradores implícitos, al contrario de los explícitos, presentan la solución en el instante  $n+1$  en función de valores de la solución y su derivada en instantes previos, pero también en el propio instante  $n+1$ , lo que obliga a resolver un sistema de ecuaciones no lineal para cada paso de integración. Por ello, este tipo de integradores se resuelven de modo iterativo, para hacerlo, en este trabajo se aplica la técnica del punto fijo, que consiste en calcular una estimación de la solución con un integrador explícito (predictor) y posteriormente se evalúa la función iterativamente aplicando las ecuaciones del propio integrador implícito (corrector), hasta que se consigue la convergencia.

Para calcular la primera estimación de la solución (predictor), se aplica la siguiente ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + t \cdot \dot{y}_n \quad (5.9)$$

Donde  $t$  es el paso de tiempo.

La ecuación por la que se rige la regla trapezoidal es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{y}_n + \dot{y}_{n+1}) \quad (5.10)$$

Esta ecuación se obtiene del cálculo del área bajo la curva de diferentes trapezios que se van construyendo a partir de la función a estudiar. El ancho de cada trapezoido está determinado por el paso de tiempo tal y como se muestra en la siguiente figura.

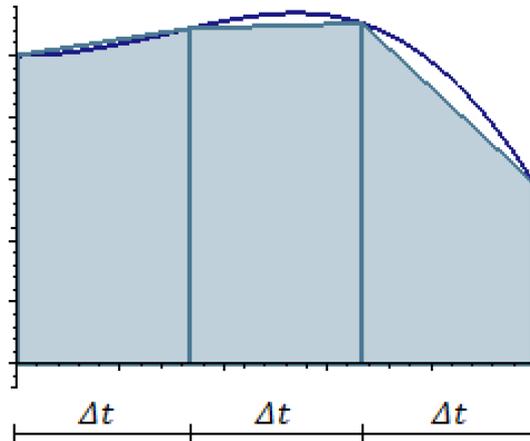


Figura 19. Regla trapezoidal.

Tras varias pruebas con ambos integradores, se ha optado utilizar en este trabajo la regla trapezoidal ya que es más precisa y conducirá a menos errores de integración, lo que permitirá evaluar mejor las diferencias entre los modelos de músculo planteados.

## 5.4 Modelos de músculo propuestos

Las ecuaciones de la dinámica del músculo descritas en apartados anteriores definen un modelo de músculo muy completo. Sin embargo, en determinados movimientos, pueden obtenerse resultados lo suficientemente buenos con modelos más simplificados.

Es por ello que, en este proyecto, se han desarrollado tres modelos de músculo con diferentes características.

### 5.4.1 Modelo de músculo completo

Este modelo de músculo completo se rige por las ecuaciones descritas en el punto 4.

Éste es el modelo más complejo que se estudia en este trabajo, ya que tiene en cuenta la totalidad de los parámetros.

Esto implica que, para calcular la  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ , las fuerzas del músculo-tendón y la activación, sea necesario un integrador que resuelva las ecuaciones diferenciales que definen a cada uno de estos parámetros en cada paso de tiempo. Por ello se han agrupado estas cuatro variables en un mismo vector tal que,

$$y = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ a_1 \\ a_2 \\ F_1^{MT} \\ F_2^{MT} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Los resultados obtenidos en este modelo se asume que son los más próximos a la realidad, sin embargo, la simulación es más pesada y en muchos casos eso es un inconveniente.

#### 5.4.1.1 PROBLEMAS DE INTEGRACIÓN DEL MODELO COMPLETO

Al comienzo del desarrollo de este modelo, los resultados de las fuerzas del músculo-tendón obtenidas ( $F$ ) se desviaban a valores negativos al cabo de cierto tiempo de simulación, esto era debido a la manera de calcular la velocidad normalizada del músculo  $\tilde{v}^M$ .

$\tilde{v}^M$  se calcula a partir de la ecuación (4.21) en la que, conociendo  $f_v$ , lo único que hay que hacer es invertirla, quedando:

$$\tilde{v}^M(f_v) = \begin{cases} \frac{f_v - 1}{f_v/k_{CE1} + 1} & \text{si } 0 < f_v \leq 1 \\ \frac{(f_v - 1)k_{CE2}}{f_v^{max} - f_v} & \text{si } 1 < f_v \leq f_v^{max} \end{cases} \quad (5.12)$$

Pero teniendo en cuenta cómo es la forma de la gráfica de la Figura 14, no se debería dar el caso de  $f_v < 0$  ni de  $f_v \geq f_v^{max}$ . Cuando en las iteraciones del integrador se sobrepasaban estos límites es cuando en la simulación los valores de la fuerza pasaban a ser negativos. Para evitar esta situación irreal, se han propuesto tres posibles soluciones.

#### **SOLUCIÓN 1. Forzar a $f_v$ a estar dentro del intervalo**

Como se ha explicado,  $f_v$  no debería tener valores menores a 0 ni tampoco mayores a  $f_v^{max}$ .

Por ello, en esta solución se propone añadir la siguiente ecuación por tramos previa a la ecuación (5.12):

$$\begin{cases} f_v = 0 & \text{si } f_v < 0 \\ f_v = 0,99 \cdot f_v^{max} & \text{si } f_v \geq f_v^{max} \end{cases} \quad (5.13)$$

De esta manera,  $f_v$  nunca se saldrá del intervalo.

**SOLUCIÓN 2. Dar valores fijos a  $\tilde{v}^M$  cuando se salga de los límites.**

La solución en este caso reside en añadir dos tramos más a la ecuación (5.12) que contemplen la posibilidad de que  $f_v$  se salga de los límites. De esta forma, la nueva ecuación quedaría:

$$\tilde{v}^M(f_v) = \begin{cases} -1 & \text{si } f_v < 0 \\ \frac{f_v - 1}{f_v/k_{CE1} + 1} & \text{si } 0 < f_v \leq 1 \\ \frac{(f_v - 1)k_{CE2}}{k_{CE1} - f_v} & \text{si } 1 < f_v \leq f_v^{max} \\ 1 & \text{si } f_v \geq f_v^{max} \end{cases} \quad (5.14)$$

De esta forma, cuando  $f_v$  se salga de los límites,  $\tilde{v}^M$  tomará valores razonables.

**SOLUCIÓN 3. Cambiar valores de las constantes  $k_{CE1}$  y  $f_v^{max}$**

En esta solución se han estudiado los diferentes resultados obtenidos cambiando los valores asignados de las constantes  $k_{CE1}$  y  $f_v^{max}$ . Estas constantes tenían un valor inicial de:

$$k_{CE1} = 0,25$$

$$f_v^{max} = 1,40$$

**5.4.1.2 APLICACIÓN AL CASO DE PÉNDULO CON DOS MÚSCULOS**

Para poder comparar las soluciones y extraer conclusiones acerca de cuál de ellas es la mejor, se han comparado los resultados de cada una de ellas al incluir los músculos en un esquema como el de la Figura 17. Esquema del péndulo con músculos.7, donde dos músculos se anclan a un péndulo y al suelo.

Para la obtención de los resultados se dan los siguientes valores a las constantes que definen el sistema (todos los parámetros que son vectores de dos componentes, cada componente corresponde a un músculo):

$l_s^T = [0.08 \ 0.07]$	$F_0^M = [1 \ 1]$	$v_{MAX} = [3.4175 \ 2.4446]$
$l_0^M = [0.93 \ 0.7]$	$\alpha_0 = [20 \ 20] \cdot \frac{\pi}{180}$	$a_0 = [0.01 \ 0.01]$

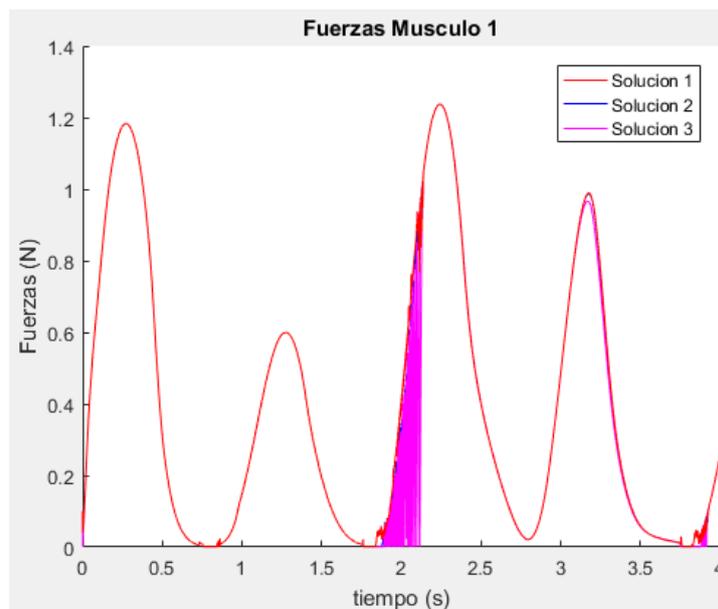
$\dot{\theta} = 0$	$\theta_0 = \pi/4$	$F_0 = [0.1 \ 0.1]$
$\overline{Op_1} = 0.65$	$\overline{Or_1} = -0.35$	$\overline{Or_2} = 0.5$
$\overline{Op_2} = 0.45$		

Donde  $\overline{Or_1}$  y  $\overline{Or_2}$  son las distancias en el eje x desde el punto O hasta el punto de anclaje del músculo en el suelo. Todos los parámetros están expresados en unidades SI.

La expresión que define el valor de la excitación  $u(t)$  en este apartado es la descrita en la siguiente ecuación:

$$u(t) = 0,5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) + 0,5 \quad (5.15)$$

Los resultados de fuerzas del músculo 1 y músculo 2 se muestran a continuación.



**Figura 20. Comparación de las fuerzas del músculo 1 obtenidas por las tres soluciones.**

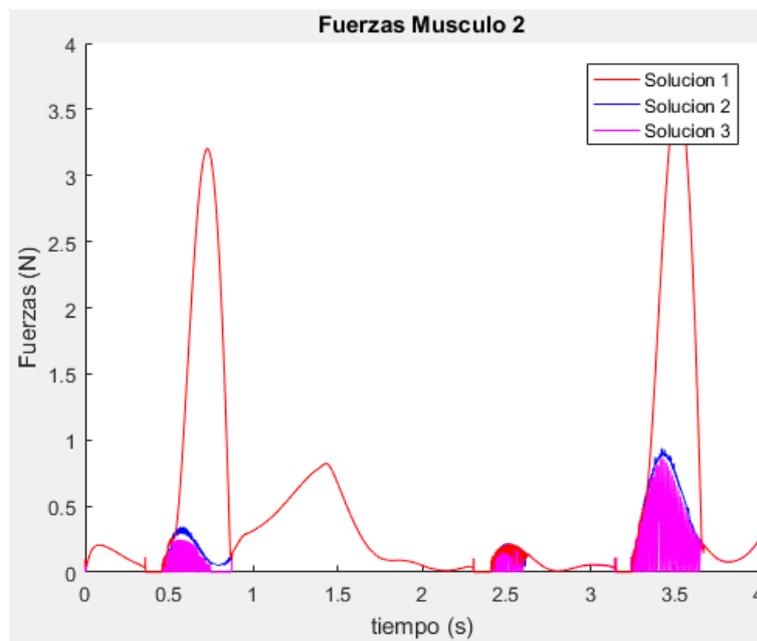


Figura 21. Comparación de las fuerzas del músculo 2 obtenidas por las tres soluciones.

De las figuras de los resultados se puede concluir que la mejor solución es la 1 debido a que los resultados de las fuerzas toman unos valores continuos, mientras que con las soluciones 2 y 3 aparecen muchos más picos.

Cabe decir que para el caso de la solución 3, se ha probado con numerosas variaciones de los valores de los parámetros  $k_{CE1}$  y  $f_v^{max}$ , sin embargo, siempre se obtienen resultados de fuerzas también escalonadas.

### 5.4.1.3 MÉTODO ALTERNATIVO PARA LA INTEGRACIÓN DEL MODELO DE MÚSCULO COMPLETO

En este apartado se realizan una serie de cambios sobre el modelo de músculo completo de manera que, en la ecuación diferencial de la fuerza, en lugar de obtener como resultado la derivada de la fuerza del músculo tendón, lo que se obtenga sea la derivada de la longitud del músculo y, por tanto, lo que haya que integrar en cada paso de tiempo sea esta variable.

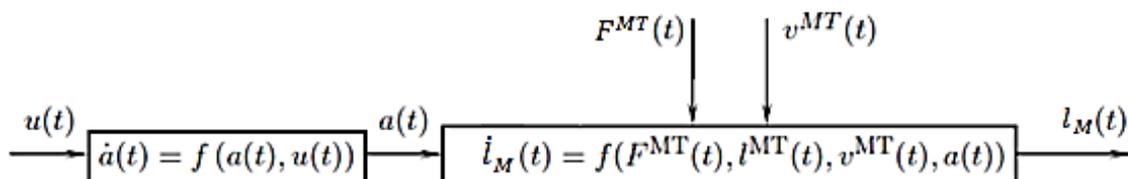


Figura 22. Resumen esquemático de la dinámica del músculo-tendón para el modelo alternativo de músculo completo.

Lo que se pretende con esto es ver si se puede reducir el número de iteraciones con respecto a la configuración original, ya que esto mejoraría la eficiencia y, al final, se trata de un modelo completamente equivalente.

Para poder obtener la derivada del músculo como resultado de la ecuación diferencial, es necesario realizar una serie de cambios en los cálculos.

Para empezar, tal y como se ha explicado en apartados anteriores, las variables a integrar en el código se guardan en un vector  $\dot{y}$  que, en este caso, cambiará de componentes para pasar a estar compuesto por:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{l}_{M1} \\ \dot{l}_{M2} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

El procedimiento de obtención de  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$  y  $\dot{a}$  es el mismo que en el modelo original. Sin embargo, habrá que redistribuir las ecuaciones de la dinámica del músculo-tendón de manera que se obtenga como resultado  $\dot{l}_M$ .

Para empezar, calculo la longitud del tendón  $l_T$ ,

$$l_T = l^{MT} - l^M \cdot \cos \alpha \quad (5.17)$$

En este modelo,  $l^M$  es conocido en cada instante de tiempo debido a que es el resultado de la integración de  $\dot{l}_M$ .

Por tanto, ya se puede calcular  $\varepsilon^T$  con la ecuación (4.10).

Seguidamente, se calcula  $f_t$  a partir de la función a tramos (4.23) pudiendo así calcular  $F^{MT}$  con la ecuación (4.9).

Por tanto, con la ecuación (4.8) se obtiene  $F_{PE}^M$  teniendo datos suficientes para calcular  $F_{CE}^M$  aplicando la ecuación (4.3).

Una vez conocido  $F_{CE}^M$  ya se tienen datos suficientes para calcular  $f_v$  aplicando la ecuación (4.4).

Conocido  $f_v$ , ya se calcula  $\tilde{v}^M$ , esta variable nos permite finalmente calcular la derivada de la longitud del músculo  $\dot{l}_M$  como:

$$\dot{l}_M = \tilde{v}^M \cdot l_0^M \quad (5.18)$$

#### 5.4.2 Modelo de músculo con tendón rígido

En este modelo se aplican una serie de simplificaciones en la dinámica de contracción del músculo. De esta manera se agilizan los procesos de integración a la hora de simular.

La simplificación consiste en rigidizar el tendón de manera que  $l^T = l_S^T$ , por tanto, la ecuación para calcular la fibra del músculo quedaría:

$$l^M = \sqrt{(l^{MT} - l_S^T)^2 + w^2} \quad (5.19)$$

En consecuencia,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{w}{l^M}\right)^2} \quad (5.20)$$

Y la velocidad de la fibra muscular queda:

$$v^M = v^{MT} \cos \alpha \quad (5.21)$$

Por tanto, se pueden calcular  $F_{CE}^M$  y  $F_{PE}^M$  a partir de las ecuaciones (4.4) y (4.8) ya que todos los parámetros de los que dependen son conocidos.

Finalmente, se obtiene  $F^{MT}$  a partir de la ecuación (4.3).

A diferencia de en el modelo de músculo completo, en este caso no será necesario recurrir al integrador para obtener  $F^{MT}$ , esto implica una importante simplificación del modelo. Por ello, el parámetro  $y$  que contiene las variables a incluir en el integrador pasa a ser el siguiente,

$$y = \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

### 5.4.3 Modelo de músculo con activación inmediata

Este modelo de músculo es una modificación del Modelo de Músculo con Tendón Rígido, por lo que ya se parte de la premisa de que la fuerza del músculo-tendón se calcula directamente sin necesidad de un integrador.

A mayores se realiza otra modificación en el cálculo de la activación. En este modelo, se cumple lo siguiente,

$$a(t) = u(t) \quad (5.23)$$

La activación se iguala a la excitación, ignorando así el tiempo de respuesta del músculo.

En consecuencia, se calcula  $a(t)$  sin necesidad de pasar por un integrador, por lo que el vector  $y$  queda,

$$y = \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Debido a este cambio el valor de  $F^{MT}$  se moverá entre un mínimo y un máximo definidos por,

$$F_{min}^{MT} = F_{PE}^M \cdot \cos \alpha \quad (5.25)$$

$$F_{max}^{MT} = (F_0^M \cdot f_l(\tilde{l}^M) \cdot f_v(\tilde{v}^M) + F_{PE}^M) \cdot \cos \alpha \quad (5.26)$$

## 6 OBTENCIÓN DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para evaluar la eficiencia y precisión de los modelos de músculo con tendón rígido y modelo de músculo con activación inmediata, en este proyecto se realizan varias pruebas que se describen detalladamente en los siguientes apartados.

Se emplean en estas pruebas el modelo de péndulo del apartado 5 y un modelo 3D de humano con músculos en su pierna derecha.

### 6.1 Comparación de los modelos músculo variando la frecuencia en la excitación

Para evaluar la respuesta del modelo muscular en función de la frecuencia del movimiento se utiliza como ejemplo el modelo de péndulo con dos músculos de apartados anteriores, empleando una función de excitación sinusoidal similar a la utilizada en el apartado 5.4.1, en la que se incluye el parámetro  $\varphi$  que, en función del valor que tome, variará el valor de la frecuencia de excitación.

$$u(t) = 0,5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t \cdot \varphi) + 0,5 \quad (6.1)$$

A mayor valor de  $\varphi$ , mayor será la frecuencia tal y como se puede ver en las siguientes figuras.

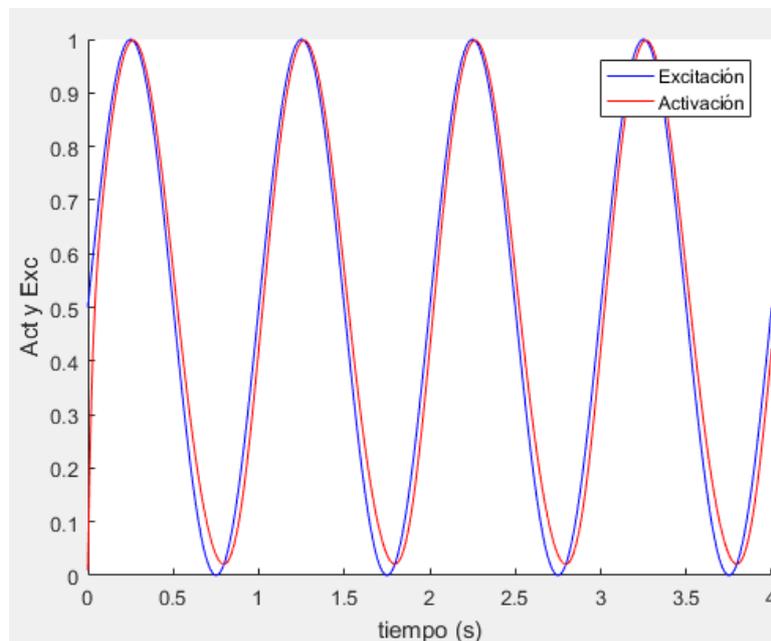
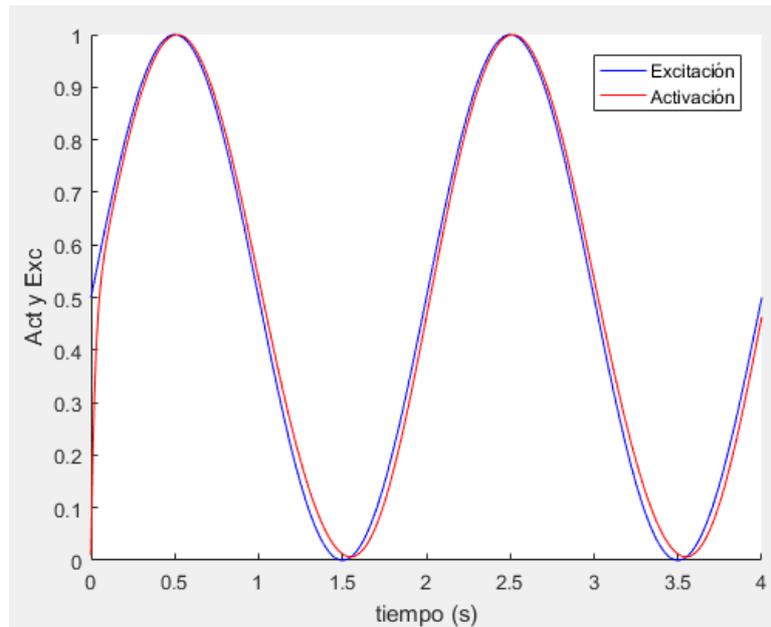
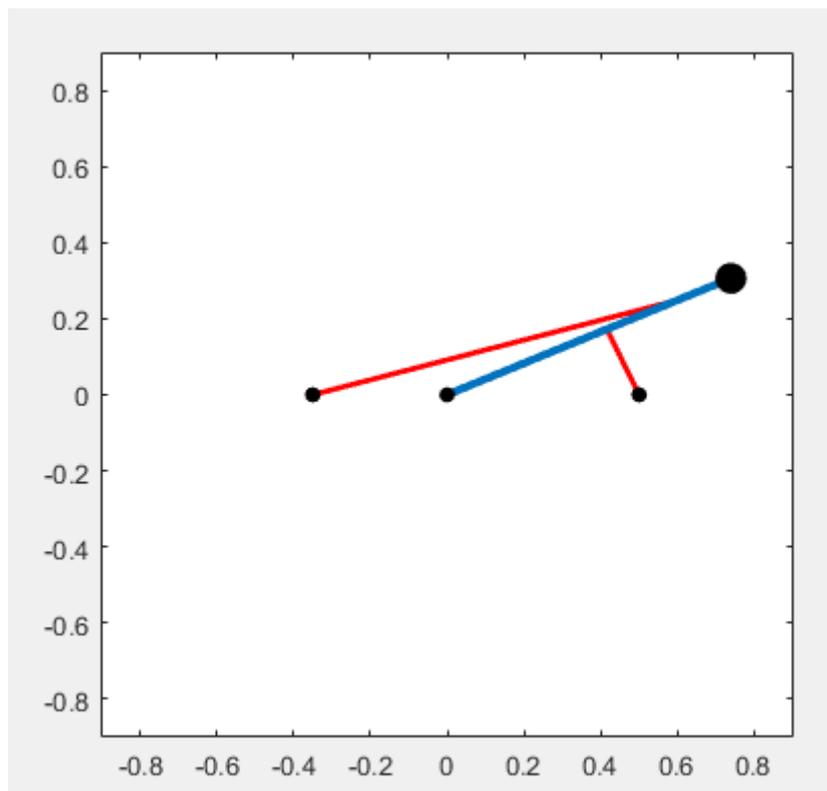


Figura 23. Representación de los valores de la excitación y activación en función del tiempo para  $\varphi = 1$ .



**Figura 24. Representación de los valores de la excitación y activación en función del tiempo para  $\varphi = 0,5$ .**

El sistema está constituido por un péndulo anclado por dos músculos.



**Figura 25. Representación en Matlab del sistema de péndulo anclado por dos músculos.**

Los valores de los parámetros que definen al sistema son los siguientes:

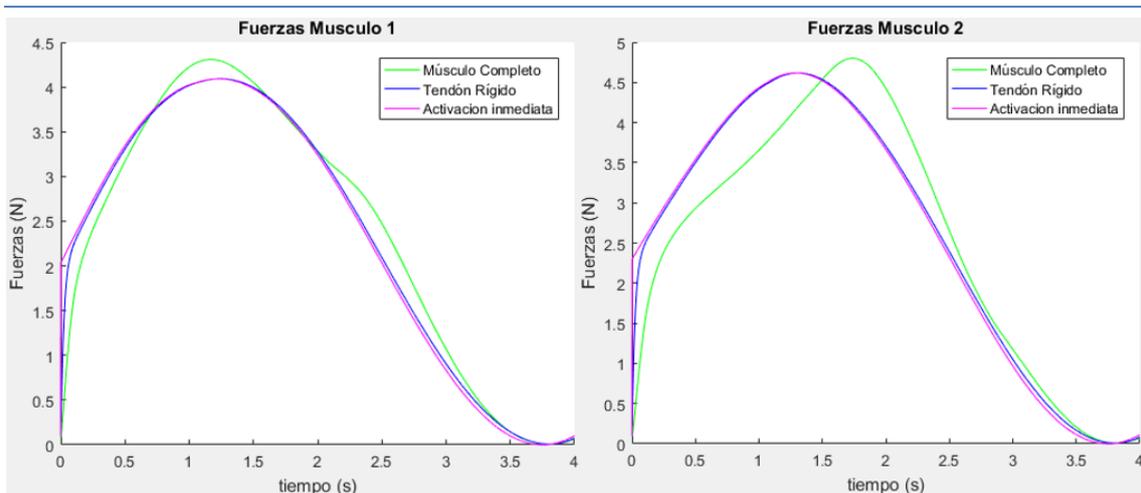
$l_S^T = [0.08 \ 0.07]$	$F_0^M = [5 \ 5]$	$v_{MAX} = [3.4175 \ 2.4446]$
$l_0^M = [0.93 \ 0.7]$	$\alpha_0 = [20 \ 20] \cdot \frac{\pi}{180}$	$a_0 = [0.01 \ 0.01]$
$\dot{\theta} = 0$	$\theta_0 = -\pi/2$	$F_0 = [0.1 \ 0.1]$
$\overline{Op_1} = 0.65$	$\overline{Or_1} = -0.35$	$\overline{Or_2} = 0.5$
$\overline{Op_2} = 0.45$		

El tiempo total de la simulación es de 4 segundos.

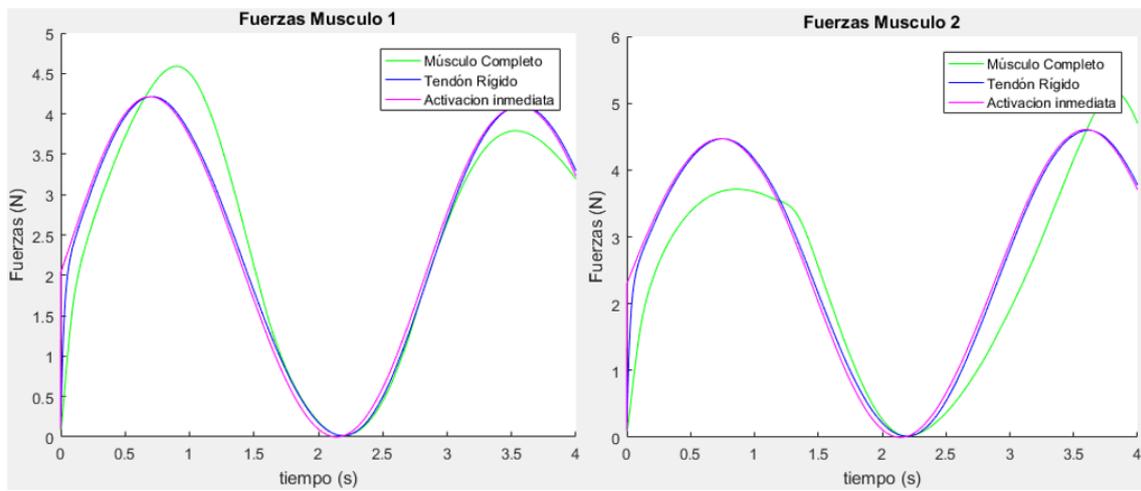
Hay que destacar que lo que nos interesa con esta prueba no son los resultados en sí, ya que no corresponden a un ejemplo realista, sino la diferencia entre el comportamiento de los distintos modelos

Veremos entonces a continuación como influye el hecho de variar  $\varphi$  en los resultados de los tres modelos de músculo. Los resultados que nos interesa comparar en este caso son los de la fuerza del músculo-tendón, por lo que las gráficas obtenidas únicamente representarán este parámetro en función del tiempo.

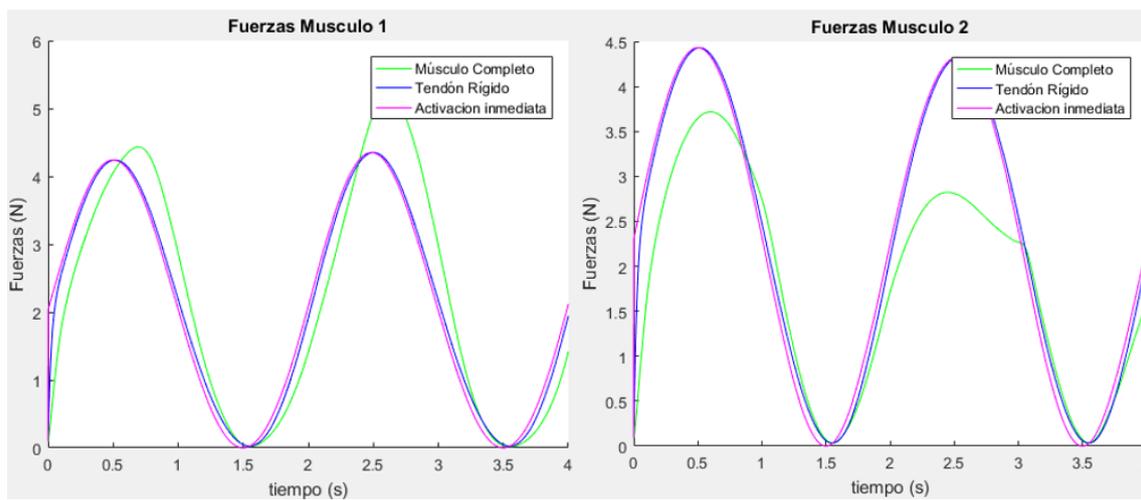
$$\varphi = 0,2$$



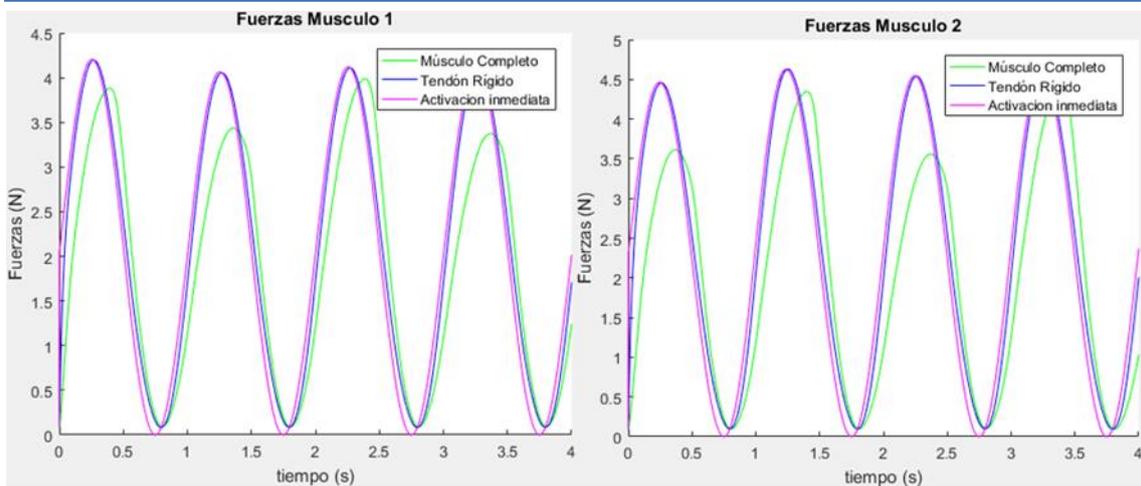
$$\varphi = 0,35$$



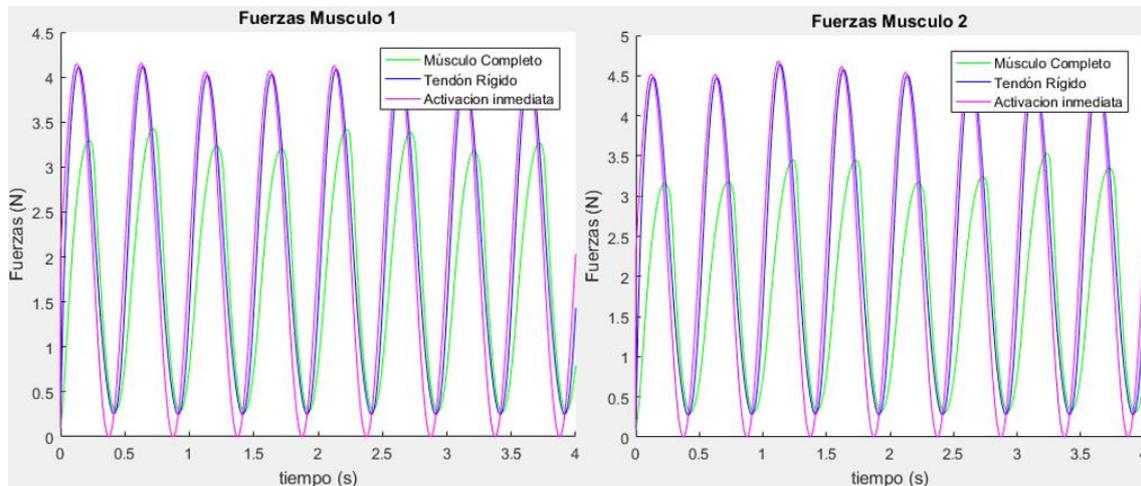
$$\varphi = 0,5$$



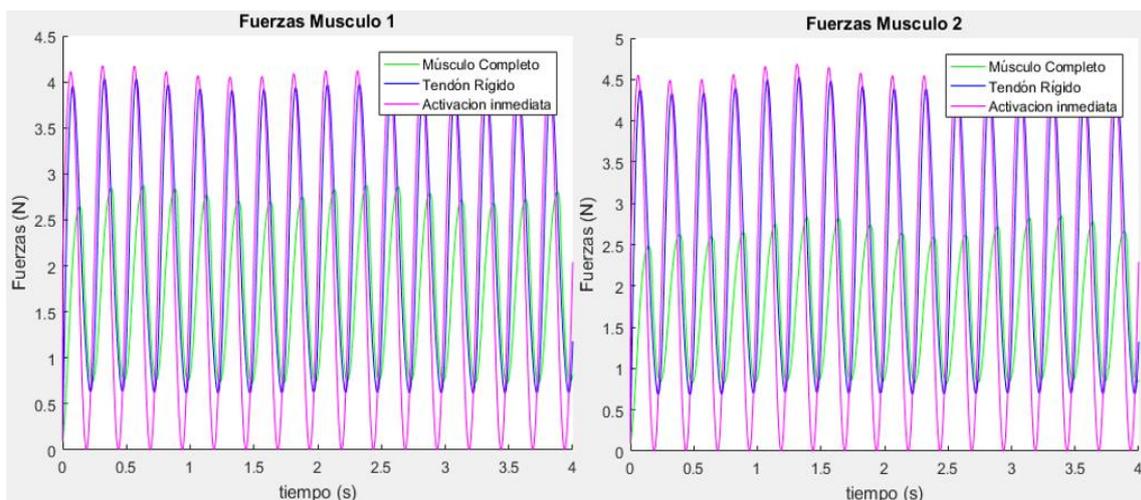
$$\varphi = 1$$



$$\varphi = 2$$



$$\varphi = 4$$



**Figura 26. Respuesta en frecuencia de los distintos modelos de músculo.**

El cálculo del error cuadrático medio nos da una idea de si los modelos simplificados se desvían mucho del modelo de músculo completo. Se calcula con la siguiente expresión:

$$RMS = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (F_{MCi} - F_{Simpli})^2} \quad (6.2)$$

Donde  $F_{MCi}$  es el valor de la fuerza en el modelo de músculo completo para cada instante de tiempo y  $F_{Simpli}$  es el valor de la fuerza para los modelos simplificados (tendón rígido o activación inmediata) en cada instante de tiempo.

Así en la siguiente tabla se plasman los valores de los errores para cada caso.

**Tabla 1. Error cuadrático medio entre los modelos de músculo al variar la frecuencia de excitación.**

	FRECUENCIA	Error Modelo Completo - Tendón Rígido	Error Modelo Completo - Activación Inmediata
<b>Musculo 1</b>	x0.2	0,4906	0,7386
	x0.35	0,5889	0,8406
	x0.5	0,6866	0,9397
	x1	0,8539	1,1139
	x2	0,9497	1,3410
	x4	1,1662	1,6797
<b>Músculo 2</b>	x0.2	0,7604	1,0005
	x0.35	0,9092	1,1524
	x0.5	1,0470	1,2911
	x1	1,2490	1,4917
	x2	1,3040	1,6749
	x4	1,5289	1,9964

Como se ve, al aumentar la frecuencia de excitación, el error RMS aumenta también.

Además, el error es mayor para el modelo con activación inmediata que para el modelo con tendón rígido. Esto es lógico ya que el modelo con tiempo de respuesta ignorado contiene más simplificaciones y por tanto es menos preciso.

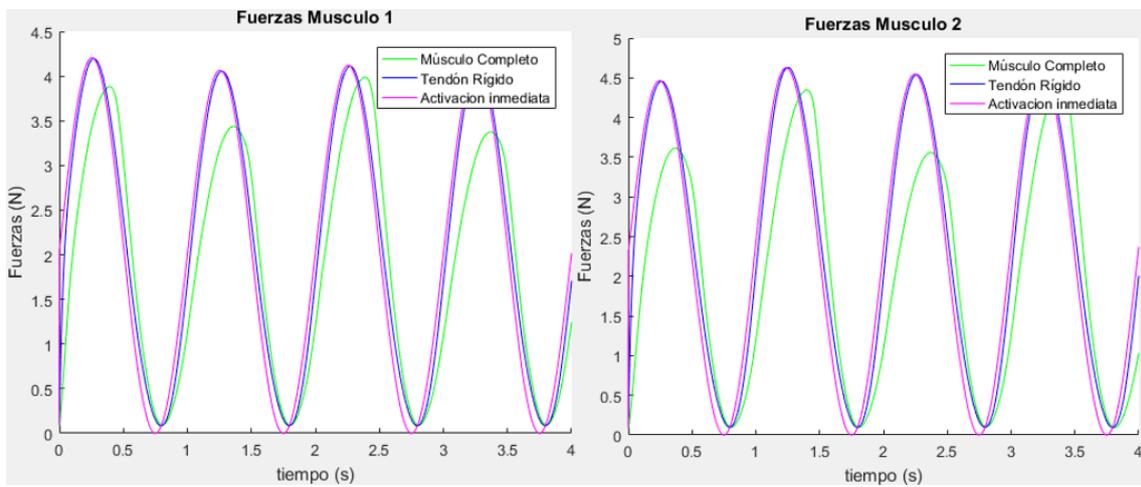
De todos estos resultados podemos concluir que los modelos simplificados propuestos se comportan bastante bien para movimientos de baja frecuencia, pero pierden precisión a medida que esta aumenta, por lo que no son adecuados para movimientos de alta frecuencia. Esto es especialmente cierto para el modelo con activación inmediata, que resulta ser más sensible a la frecuencia que el caso de tendón rígido.

## **6.2 Comparación de los modelos de músculo con distintas fuerzas isométricas máximas**

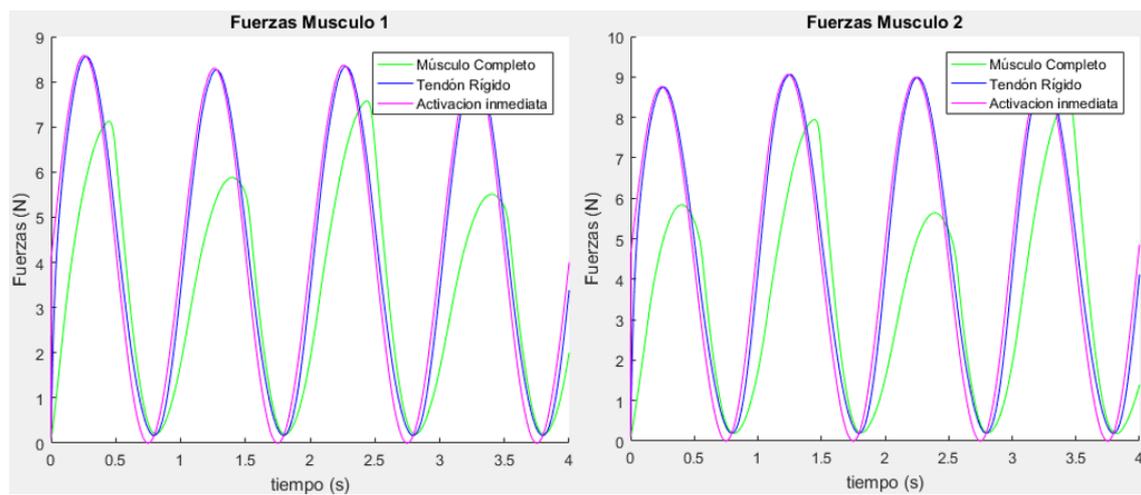
En este apartado se comparan los resultados de fuerza del músculo-tendón obtenidos al ir variando la fuerza isométrica máxima de cada uno de los músculos.

Los valores de los parámetros que definen al sistema son los mismos que en el apartado 6.1 a diferencia de  $F_0^M$ , cuyo valor variará en cada caso.

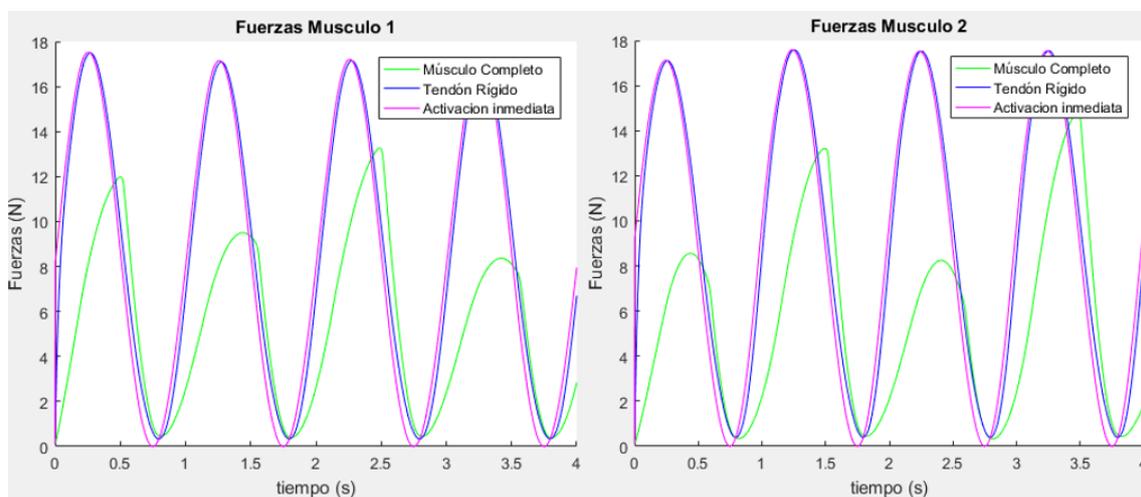
$$F_0^M = [5 \ 5]$$



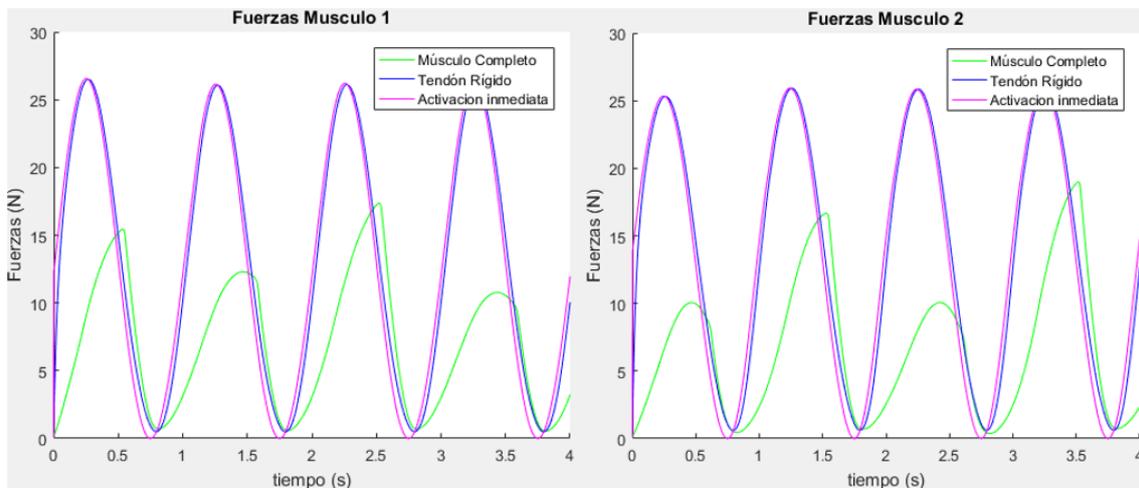
$$F_0^M = [10 \ 10]$$



$$F_0^M = [20 \ 20]$$



$$F_0^M = [30 \ 30]$$



**Figura 27. Respuesta de los distintos modelos de músculo al variar la fuerza isométrica máxima.**

Al igual que en el caso anterior, en la siguiente tabla se plasman los valores de los errores cuadráticos medios.

**Tabla 2. Error cuadrático medio entre los modelos de músculo al variar la fuerza isométrica máxima.**

	$F_{m0}$	Error Modelo Completo - Tendón Rígido	Error Modelo Completo- Activación Inmediata
<b>Musculo 1</b>	5 5	0,8539	1,1139
	10 10	2,7915	3,2136
	20 20	8,3033	8,9861
	30 30	14,9027	15,8150
<b>Músculo 2</b>	5 5	1,2490	1,4917
	10 10	3,6659	4,0491
	20 20	9,6828	10,2955
	30 30	16,3465	17,1651

En este caso es evidente que, al aumentar el valor de la fuerza isométrica máxima, aumenta el error cuadrático medio entre los modelos simplificados y el modelo de músculo completo.

De estos resultados podemos concluir que los modelos simplificados funcionarán mejor en músculos con fuerzas isométricas máximas bajas.

En este caso, no obstante, los resultados obtenidos con el modelo de tendón rígido y el modelo con activación inmediata son muy parecidos.

### 6.3 Respuesta de los modelos de músculo a una entrada escalón

A diferencia de los apartados anteriores, en este caso, solo se incorpora un músculo anclado al péndulo por su parte izquierda.

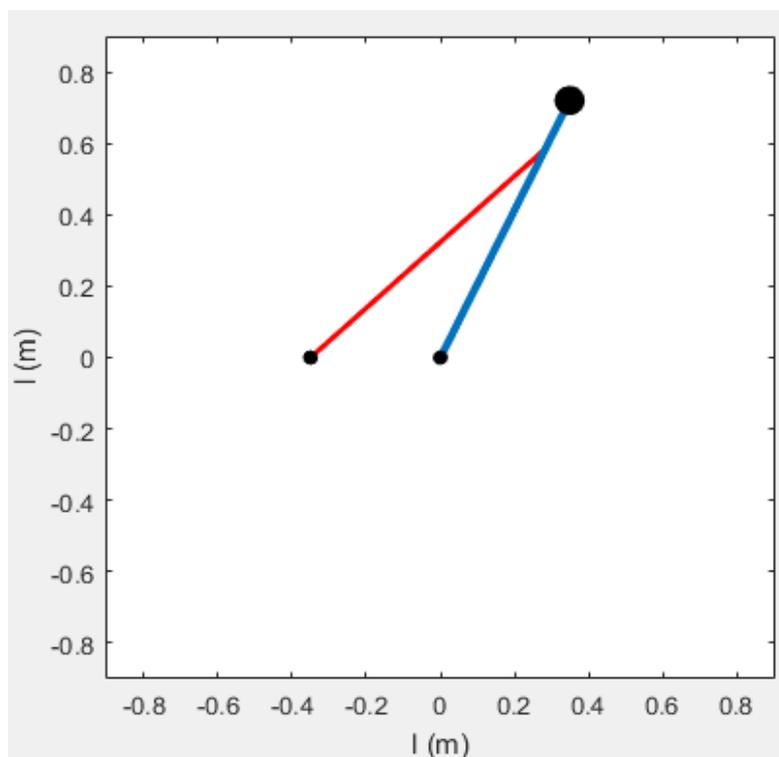


Figura 28. Representación en Matlab del sistema de péndulo anclado por un músculo.

Además, la función de excitación introducida deja de tener forma sinusoidal para pasar a ser de tipo escalón.

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{si } t < 2 \text{ s} \\ u(t) = 1 & \text{si } t > 2 \text{ s} \end{cases} \quad (6.3)$$

Donde el tiempo de simulación total es de 20 s.

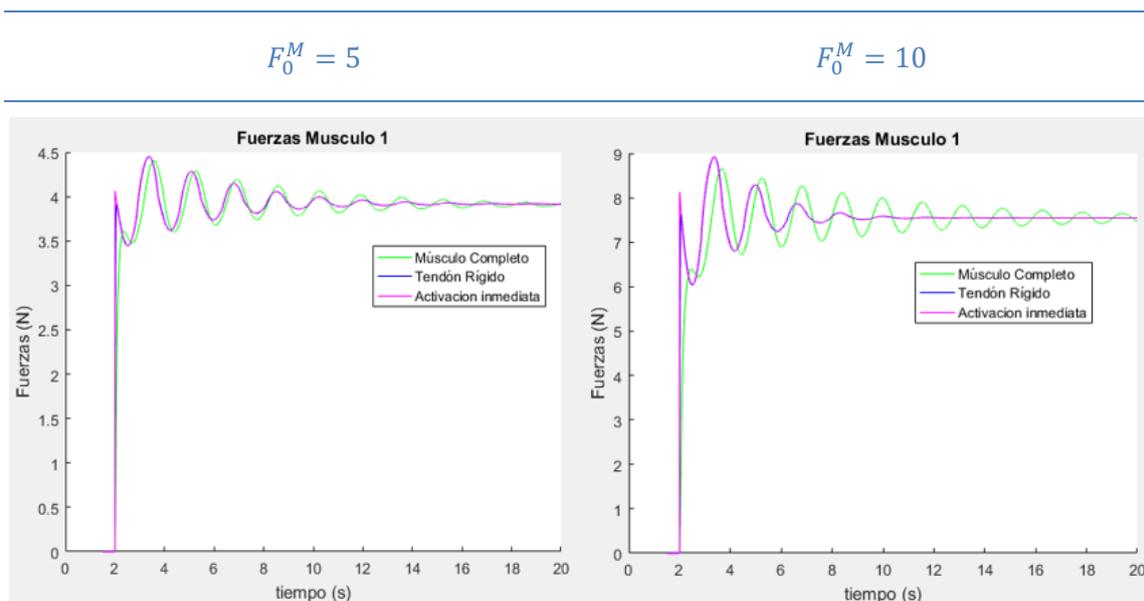
Los parámetros que definen al sistema son los siguientes.

$l_S^T = 0.08$	$a_0 = 0.01$	$v_{MAX} = 3.4175$
$l_0^M = 0.93$	$\alpha_0 = 20 \cdot \frac{\pi}{180}$	$\theta_0 = -\pi/2$
$\dot{\theta} = 0$	$\overline{Or_1} = -0.35$	$\overline{Op_1} = 0.65$
$F_0 = 5$		

El parámetro que se varía es, de nuevo, la fuerza isométrica máxima.

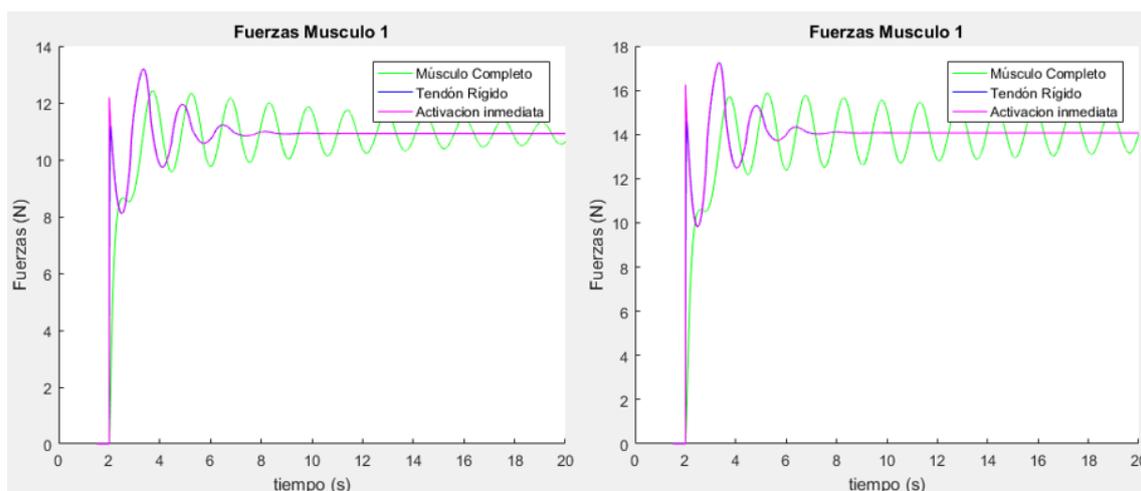
Como hasta los 2 segundos no hay excitación, las gráficas representan las fuerzas a partir del segundo 1.

Los resultados que se obtienen pueden verse en la siguiente figura.



$$F_0^M = 15$$

$$F_0^M = 20$$



**Figura 29. Respuesta de los distintos modelos de músculo a una entrada escalón variando la fuerza isométrica máxima con un solo músculo.**

Como se puede ver, el sistema tiende a estabilizarse en un valor de fuerza determinado.

Los errores cuadráticos medios se recogen en la siguiente tabla.

**Tabla 3. Error cuadrático medio modelo un músculo con entrada escalón músculo al variar la fuerza isométrica máxima.**

	$F_{m0\_}$	Error Músculo Completo - Tendón Rígido	Error Músculo Completo-Activación Inmediata
<b>Musculo 1</b>	5	1,0514	1,3445
	10	2,8508	3,3000
	15	4,8419	5,4089
	20	6,8650	7,5308

Al igual que en el apartado 6.2, el aumento del valor de la fuerza isométrica máxima supone un aumento en el error cuadrático medio obtenido.

De estos resultados podemos concluir que los modelos simplificados no son buenos para reproducir eventos bruscos en la excitación muscular como una entrada escalón, especialmente para músculos con altas fuerzas isométricas máximas.

Además, de nuevo, se observa que es muy similar la respuesta de los modelos con tendón rígido y con activación inmediata.

## **6.4 Comparación de los resultados del modelo de músculo completo y el modelo de músculo completo aplicando el método alternativo**

En el apartado 5.4.1.3 se describe un modelo alternativo de músculo completo en el que el resultado de la ecuación diferencial es la longitud del músculo en lugar de la fuerza del músculo-tendón. Se trata de un modelo totalmente equivalente, por ello, en este apartado se extraen conclusiones acerca de cuál de los dos es más eficiente.

El valor de los parámetros que definen el sistema es el descrito en el apartado 6.1, con el valor de la excitación  $u(t)$  expresado en la ecuación (5.13).

Como se explica en el apartado 5.3, el integrador propuesto para los modelos es de tipo implícito y se calcula aplicando la Regla Trapezoidal.

El parámetro que nos indicará la eficiencia del modelo es el número de iteraciones en punto fijo obtenidas en el bucle de integración durante todo el movimiento. Cuantas más iteraciones, más pesado es el modelo y, por tanto, menos eficiente.

En el caso del modelo de músculo completo de referencia, el número de iteraciones totales es 25789.

El caso del modelo alternativo de músculo completo no llega a converger. Tal y como está programado el integrador, el modelo converge cuando el error es menor a  $1e-10$  en un número máximo de iteraciones de 200 por cada paso de tiempo.

El valor del error está determinado por el error existente entre el valor del predictor definido en la ecuación (5.6), y el valor de  $y_{n+1}$  determinado por la ecuación (5.7).

Por tanto, este modelo alternativo necesita más de 200 iteraciones por cada paso de tiempo para llegar a una solución. Lo cual supone un número de iteraciones totales mucho más elevado que en el modelo de referencia.

Sin embargo, este modelo alternativo de músculo completo sí se comporta de manera adecuada si en lugar de utilizar el integrador de Regla Trapezoidal, se utiliza el integrador Forward Euler, y se reduce asimismo el paso de integración un orden de magnitud.

Por todo ello se puede concluir que el modelo alternativo de músculo completo es menos eficiente utilizando el integrador de Regla Trapezoidal y el esquema de iteración de punto fijo que el modelo de músculo completo de referencia.

## **6.5 Modelo de humano completo con músculos en la pierna derecha**

Tras haber definido completamente los tres modelos de músculo propuestos (modelo de músculo completo, modelo de músculo con tendón rígido y modelo de músculo con tendón rígido y activación inmediata), en este apartado se plasman los resultados tras haber introducido las tres alternativas de músculo a un modelo biomecánico de humano completo con músculos en la pierna derecha.

El modelo humano 3D utilizado es el descrito en el apartado 3.2.1.6. A diferencia de los modelos anteriores, que fueron desarrollados en Matlab, este modelo está escrito en lenguaje compilado (C++), y la resolución de la dinámica multicuerpo se realiza mediante un código estándar (BIOLIM, desarrollado en el Laboratorio de Ingeniería

Mecánica). Esto lo convierte en el candidato más adecuado para obtener los resultados de eficiencia en tiempo de cálculo entre los distintos modelos.

El número de músculos introducidos en la pierna derecha es de 43, y cada uno de ellos tiene asociado unos valores de los parámetros musculares que se representan en la siguiente tabla.

**Tabla 4. Valores de los parámetros musculares para cada uno de los músculos de la pierna derecha del modelo humano 3D.**

Músculo	Fm0 (N)	lm0 (m)	Lts (m)	Alfa (rad)
m01.gluteo_medio_1	819,000	0,044	0,084	0,140
m02.gluteo_medio_2	573,000	0,065	0,073	0,000
m03.gluteo_medio_3	653,000	0,061	0,093	0,332
m04.gluteo_menor_1	270,000	0,037	0,071	0,175
m05.gluteo_menor_2	285,000	0,048	0,066	0,000
m06.gluteo_menor_3	323,000	0,051	0,052	0,017
m07.semimembranoso	1288,000	0,126	0,322	0,262
m08.semitendinoso	410,000	0,124	0,409	0,087
m09.biceps_femoral	896,000	0,107	0,343	0,000
m10.biceps_femoral_cabeza_corta	804,000	0,132	0,135	0,401
m11.sartorio	156,000	0,104	0,520	0,000
m12.aductor_largo	627,000	0,108	0,149	0,105
m13.aductor_corto	429,000	0,086	0,080	0,000
m14.aductor_mayor_1	381,000	0,081	0,079	0,087
m15.aductor_mayor_2	343,000	0,068	0,159	0,052
m16.aductor_mayor_3	488,000	0,052	0,299	0,087
m17.tensor_fascia_lata	233,000	0,051	0,511	0,052
m18.pectineo	266,000	0,078	0,071	0,000
m19.gracil	162,000	0,099	0,415	0,052
m20.gluteo_mayor_1	573,000	0,087	0,127	0,087
m21.gluteo_mayor_2	819,000	0,091	0,138	0,000
m22.gluteo_mayor_3	552,000	0,113	0,130	0,087
m23.iliaco	1073,000	0,069	0,158	0,122
m24.psoas	1113,000	0,071	0,172	0,140
m25.cuadrado_femoral	381,000	0,018	0,041	0,000
m26.gemelo_inf	164,000	0,016	0,074	0,000
m27.piriforme	444,000	0,025	0,107	0,175
m28.recto_femoral	1169,000	0,110	0,471	0,087
m29.vasto_medial	1294,000	0,103	0,270	0,087
m30.vasto_intermedio	1365,000	0,107	0,235	0,052
m31.vasto_lateral	1871,000	0,102	0,296	0,087
m32.gastrocnemio_medial	1558,000	0,100	0,400	0,297
m33.gastrocnemio_lateral	683,000	0,101	0,401	0,140
m34.soleo	3549,000	0,044	0,301	0,436
m35.tibial_posterior	2588,000	0,014	0,330	0,209

m36.flexor_largo_dedos	610,000	0,021	0,447	0,122
m37.flexor_largo_dedogordo	622,000	0,017	0,381	0,175
m38.tibial_anterior	905,000	0,098	0,223	0,087
m39.peroneo_corto	435,000	0,050	0,161	0,087
m40.peroneo_largo	943,000	0,049	0,345	0,175
m41.tercer_peroneo	180,000	0,079	0,100	0,227
m42.extensor_dedos	512,000	0,102	0,345	0,140
m43.extensor_dedogordo	162,000	0,111	0,305	0,105

La velocidad máxima definida para todos los músculos es de 10 m/s.

El movimiento simulado para la extracción de los resultados es la réplica de un movimiento de marcha obtenido mediante captura de movimiento, durante un ciclo de marcha completo (1,38 s).



**Figura 30. Fotograma del movimiento de marcha utilizado para la extracción de resultados.**

La metodología usada para resolver el problema de dinámica directa en el modelo biomecánico de humano completo es la siguiente.

En primer lugar, se resuelve la dinámica inversa del movimiento capturado obteniendo así las fuerzas en cada articulación.

Estas fuerzas habrá que dividir las de manera que se asignen a cada uno de los músculos que estén anclados a la articulación. Para asignar las fuerzas a cada músculo se tienen en cuenta criterios fisiológicos de manera que no haya músculos excesivamente cargados ni descargados y que, además, las fuerzas no sean muy dispares a las obtenidas en el instante anterior.

El siguiente paso consiste en calcular las excitaciones que hay que imponer para pasar de las fuerzas asignadas a cada músculo de un instante al siguiente.

Conociendo las excitaciones, ya se tiene información suficiente para realizar la dinámica directa.

Para realizar todo este proceso existen algoritmos en la bibliografía como el CMC (Computed Muscle Control) [7]. En este trabajo se emplea una modificación del método CMC que utiliza un algoritmo de co-simulación [8]. Este esquema de co-simulación permite integrar las ecuaciones multicuerpo mediante un código estándar, mientras que la dinámica muscular se integra en un marco diferente.

Se utilizó un integrador implícito, en un esquema predictor-corrector, para integrar tanto las ecuaciones multicuerpo como las ecuaciones de la dinámica muscular. Concretamente, se usa en ambos casos el integrador de Regla Trapezoidal con iteración de Newton-Raphson.

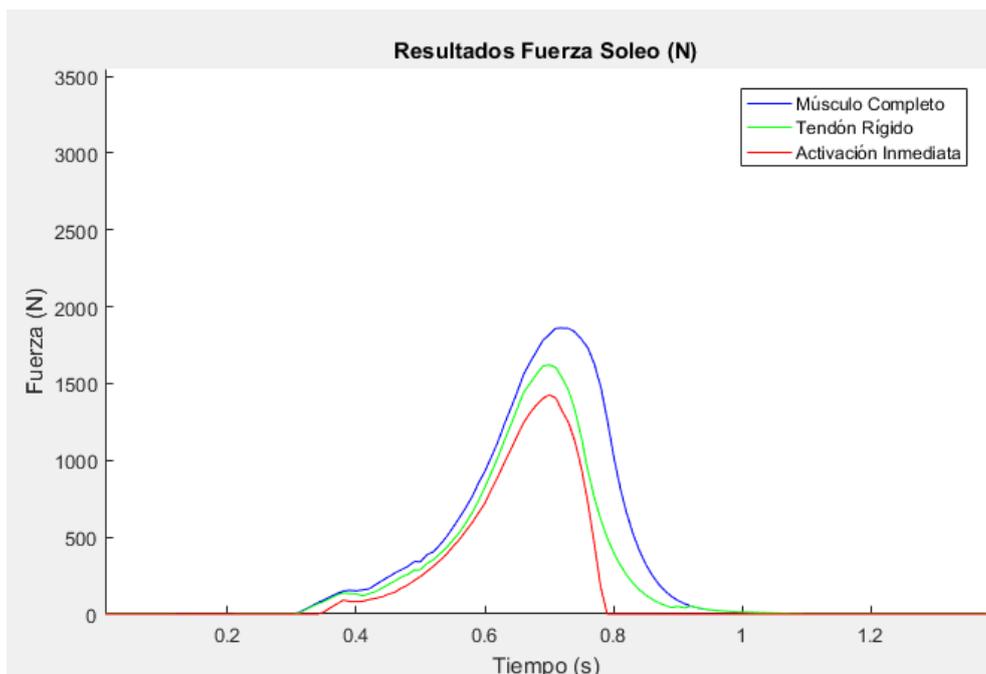
Una vez realizados estos cálculos para cada uno de los modelos de músculo, los resultados que se extraen en este apartado son, en primer lugar, el tiempo de simulación para cada uno de los tres modelos. Este parámetro es representativo de lo pesado que es el modelo en cuestión.

**Tabla 5. Tiempo de simulación del modelo humano 3D para cada uno de los modelos de músculo estudiados.**

	<b>Tiempo (s)</b>
<b>Modelo Músculo Completo</b>	20,7
<b>Modelo con Tendón Rígido</b>	2,65
<b>Modelo con Activación Inmediata</b>	1,06

Como se ve, el tiempo para el caso del modelo de músculo completo es diez veces mayor que en el modelo con tendón rígido y 20 veces mayor que el modelo con activación inmediata. Esto nos da una idea de lo mucho que se aligeran los modelos aplicando estas simplificaciones.

El resultado de fuerza del músculo-tendón se obtiene para cada uno de los músculos y en función del modelo de músculo usado, difieren los resultados tal y como se puede ver en la siguiente imagen en la que se representan las fuerzas del músculo-tendón a lo largo de todo el tiempo de simulación en el músculo Soleo.



**Figura 31. Fuerzas del músculo-tendón a lo largo del tiempo de simulación en el músculo soleo.**

A partir del resultado de las fuerzas del músculo-tendón, al igual que se ha realizado en apartados anteriores, puede obtenerse el valor del error cuadrático medio existente entre las fuerzas obtenidas en los modelos simplificados y las obtenidas con el modelo de músculo completo.

Para plasmar este resultado de una manera más simplificada, se ha hecho una media de los errores de todos los músculos de la pierna, obteniendo los siguientes resultados.

**Tabla 6. Error RMS existente entre las fuerzas obtenidas con los diferentes modelos de músculo estudiados.**

	<b>Error RMS</b>
<b>Modelo Músculo Completo – Modelo Tendón Rígido</b>	3,66
<b>Modelo Músculo Completo – Modelo Activación Inmediata</b>	10,5

Como se ve, el error aumenta considerablemente en el Modelo con Activación Inmediata con respecto al Modelo con Tendón Rígido.

De estos resultados podemos concluir que en un movimiento de las características de la marcha, los modelos simplificados funcionan muy bien, y permiten mejorar

muchísimo la eficiencia de la simulación. El mejor compromiso entre eficiencia y precisión lo ofrece el modelo con tendón rígido.

## 7 CONCLUSIONES

A lo largo de este proyecto se han llegado a una serie de conclusiones que se resumen en este apartado.

El modelo de músculo completo desarrollado en este proyecto es muy completo ya que incluye la dinámica de activación y de contracción. Sin embargo, al principio daba problemas cuando en el esquema iterativo del integrador se obtenían a veces como resultado valores de las fuerzas del músculo-tendón negativas.

Para solventar esto, se desarrollaron tres posibles soluciones teniendo en cuenta que el origen del problema residía en el cálculo de la velocidad normalizada del músculo. Este parámetro depende directamente de  $f_v$  y se calcula invirtiendo la ecuación (4.21). Teniendo en cuenta la forma asintótica de la curva de la Figura 14, es imprescindible que  $f_v$  esté comprendido entre  $0 \leq f_v \leq f_v^{max}$ , de lo contrario, no podría invertirse la ecuación y, en consecuencia, no podría calcularse la velocidad normalizada del músculo.

Por tanto, tras estudiar y aplicar las tres posibles soluciones en el modelo de péndulo simple propuesto, se ha concluido que la primera de las soluciones generaba resultados más continuos y, por tanto, mejores. Esta solución forzaba a  $f_v$  a permanecer dentro del intervalo comprobando su valor en cada paso de tiempo de manera que, si se salía del intervalo, se forzase a que estuviese dentro.

Otra de las conclusiones a las que se ha llegado en este proyecto tiene que ver con el modelo alternativo de músculo completo desarrollado en este trabajo. Este modelo obtiene como resultado de la ecuación diferencial la longitud del músculo en lugar de la fuerza del músculo-tendón. Es un modelo totalmente equivalente al modelo de músculo completo de referencia, por lo que se han comparado para llegar a una conclusión acerca de cuál de los dos es más eficiente.

Un modelo es más eficiente cuando, siendo menos pesado computacionalmente ofrece resultados lo suficientemente buenos. El parámetro considerado para valorar la eficiencia ha sido el número de iteraciones en punto fijo del integrador durante la totalidad del movimiento.

En el modelo de músculo completo alternativo, el número de iteraciones en punto fijo era tan alto que no llegaba a converger teniendo en cuenta que el modelo convergía cuando el error era menor a  $1e-10$  en un número máximo de iteraciones de 200 por cada paso de tiempo.

Por tanto, el modelo de músculo completo de referencia es más eficiente que el modelo de músculo completo alternativo.

En este trabajo, por otro lado, se desarrollan dos simplificaciones al modelo de músculo completo. En la primera de ellas, se tiene en cuenta que el tendón es rígido y, por tanto,  $l^T = l_S^T$ . Este hecho simplifica el modelo en gran medida haciéndolo menos pesado computacionalmente.

La segunda simplificación propuesta es una modificación de la segunda, ya que, además de considerar el tendón rígido, se da por hecho que la activación y la excitación valen lo mismo y no hay un desfase entre ellas:  $a(t) = u(t)$ .

Por tanto, se evaluaron estos tres modelos de músculo sometidos a variaciones en algunos de sus parámetros, para ver su comportamiento ante distintas circunstancias.

En primer lugar, se extrajeron resultados de los tres modelos modificando el valor de la frecuencia de excitación de manera que se pudo concluir si la variación de este parámetro influía en el error existente entre el modelo de músculo completo y las simplificaciones.

En segundo lugar, se extrajeron los resultados de los tres modelos pero, esta vez, variando el valor de la fuerza isométrica máxima.

En tercer lugar, se modificó la forma de la función de activación, pasando de tener forma sinusoidal a ser una entrada escalón, para observar la respuesta de los modelos ante un cambio brusco en la excitación.

Finalmente, se introdujeron los tres modelos de músculo propuestos en un modelo biomecánico de humano completo en el que se simulaba una marcha de 1,38 segundos y que incluía 43 músculos en la pierna derecha.

Se extrajeron los resultados de las fuerzas para cada uno de los músculos de cada uno de los modelos, pudiendo así calcular el error RMS entre las fuerzas del modelo completo y de las simplificaciones.

De estas pruebas se han podido extraer las siguientes conclusiones:

Los modelos simplificados propuestos son muy sensibles a la frecuencia del movimiento, ya que el aumento en la frecuencia de excitación hace que aumente mucho el error RMS con respecto al modelo de músculo completo. Esto permite concluir que los modelos simplificados propuestos no son adecuados para reproducir movimientos de alta frecuencia.

Los modelos simplificados propuestos funcionan mejor en músculos con bajas fuerzas isométricas máximas.

Los modelos simplificados propuestos no son adecuados para reproducir movimientos que impliquen cambios muy bruscos en la excitación.

Los modelos simplificados propuestos implican una mejora espectacular en la eficiencia de la simulación, con mejoras en el tiempo de cálculo de un orden de magnitud.

Los modelos simplificados propuestos funcionan muy bien en movimientos como la marcha, que cumple con las características de ser un movimiento de baja frecuencia y de baja intensidad, en el que los músculos no sufren cambios bruscos en la excitación. El modelo activación inmediata es el que consigue una mejor eficiencia (reducción del tiempo en 20x), pero a costa de un mayor error. El modelo de tendón rígido (reducción del tiempo en 10x) es el que ofrece un mejor compromiso entre eficiencia y precisión en estas circunstancias.

Por tanto, se concluye que los modelos simplificados propuestos pueden ser muy útiles en la simulación eficiente de movimientos tan importantes como la marcha, o en general cualquier movimiento humano que no implique movimientos bruscos o de alta frecuencia. Esto los hace adecuados para el análisis/simulación de la mayoría de los movimientos humanos, incluyendo casi todas las actividades cotidianas o laborales, pero exceptuando las actividades deportivas.

## 8 BIBLIOGRAFÍA

- [1] F. C. Anderson y M. G. Pandy, «Dynamic optimization of human walking», *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 123(5), pp. 381-390, 2001.
- [2] M. Ackermann y W. Schiehlen, «Dynamic analysis of human gait disorder and metabolic cost estimation», *Archive of Applied Mechanics*, vol. 75, p. 569–594, 2006.
- [3] G. Vallejo, «Simulación de la marcha humana mediante optimización paramétrica», *XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. Sevilla*, 2010.
- [4] M. P. T. Silva, J. A. C. Ambrósio y M. S. Pereira, «Biomechanical model with jointresistance for impact simulation», *Multibody System Dynamics*, vol. 1, p. 65–84, 1996.
- [5] A. V. Hill, «The heat of shortening and the dynamic constants of the muscle», *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 126, pp. 136-195, 1938.
- [6] A. F. Huxley, «Muscle structure and theories of contraction. In Progress in biophysics and biological chemistry», *Prog Biophys Biophys Chem*, vol. 7, pp. 255-318, 1957.
- [7] D. Thelen, F. Anderson y S. Delp, «Generating dynamic simulations of movement using computed muscle control», *Journal of Biomechanics*, vol. 36, pp. 321-328, 2003.
- [8] F. Michaud, U. Ligris y J. Cuadrado, «A Co-integration Approach for the Forward-dynamics Based Solution of the Muscle Recruitment Problem», *7º Congresso Nacional de Biomecânica. Guimaraes, Portugal*, 2017-02.
- [9] J. M. Wang, S. R. Hamner, S. L. Delp y V. Koltum, «Optimizing Locomotion Controllers Using Biologically-Based», *ACM Transactions on graphics*, vol. 31, 2012.
- [10] Y. Ou, «An Analysis of Optimization Methods for Identifying», *PhD Thesis*, 2012.
- [11] F. Michaud, «Neuromusculoskeletal human multibody models for the gait of healthy and spinal-cord-injured subjects», *PhD Thesis*, 2020.
- [12] G. Pipeleers, B. Demeulenaere, I. Jonkers, P. Spaepen, G. V. d. Perre, A. Spaepen, J. Swevers y J. D. Schutter, «Dynamic simulation of human motion: Numerically efficient inclusion of muscle physiology by convex optimization», *Optimization and Engineering* 9, vol. 213, 2008.
- [13] D. Thelen y F. Anderson, «Using computed muscle control to generate forward dynamic simulations of human walking from experimental data», *Journal of Biomechanics*, vol. 39, pp. 1107-1115, 2006.