

OBTENCIÓN DEL MODELO DINÁMICO SIMBÓLICO DE ROBOTS RAMIFICADOS UTILIZANDO GRUPOS DE LIE Y GRAFOS

J.A. Escalera, F.J. Abu-Dakka, P.J. Alhama y M. Abderrahim
Robotics Lab, Universidad Carlos III de Madrid,
{jescaler,fabudakk,palhama,mohamed}@ing.uc3m.es

Resumen

En este artículo se presenta una formulación matricial simbólica para el modelado dinámico de robots ramificados, los cuales están compuestos por varias cadenas cinemáticas lineales abiertas. El método propuesto utiliza la mecánica geométrica basada en la teoría de Screws y grupos de Lie para derivar la ecuación de movimiento de Newton-Euler geométrica. La formulación es válida para cualquier robot formado por cuerpos rígidos acoplados mediante juntas de un grado de libertad (por tanto, rotacionales y/o prismáticas) sin formar cadenas cinemáticas cerradas. Bajo estas condiciones, estos robots pueden ser representados en forma única como un grafo de tipo árbol dirigido. Finalmente combinando la teoría de grafos con la mecánica geométrica se obtiene el modelo dinámico complete de robots ramificados. Además, la formulación propuesta presenta los parámetros intrínsecos del robot explícitamente en términos aislados. De este modo, la ecuación resultante se puede utilizar en algoritmos tales como identificación, simulación y control.

Palabras clave: Modelado dinámico, robots ramificados, grupos de Lie, teoría de grafos.

1. INTRODUCCIÓN

En general, un sistema robótico se puede considerar como un conjunto articulado de cuerpos rígidos. Por esta razón, su modelo dinámico puede obtenerse mediante la ley de Newton-Euler o aplicando la ecuación de movimiento de Lagrange. Sin embargo, estas ecuaciones pueden volverse extremadamente complejas con sistemas de muchos grados de libertad (GDL). Esta complejidad ha exigido un esfuerzo a los científicos para buscar formas de reducir la complejidad de computación de estas ecuaciones [1]. El incremento en la complejidad de los sistemas robóticos y los métodos para la planificación de trayectorias y control está influyendo en la búsqueda de formulaciones de la dinámica más sistemáticas y compactas. En esta línea, el modelado geométrico ha sido empleado satisfactoriamente en robótica (tanto cinemática

como dinámica) [8, 14, 15, 17, 19]. Featherstone, en 1984, propuso en su tesis una formulación espacial basada en vectores espaciales de 6 dimensiones que combinaban el aspecto lineal y angular de la cinemática y dinámica de sistemas articulados de cuerpos rígidos [7]. Posteriormente, describió la relación de la fuerza espacial y la aceleración de un cuerpo rígido del sistema usando la matriz de inercia de ese cuerpo, considerando la dinámica del sistema articulado [8]. Además, propuso un algoritmo recursivo de complejidad $O(n)$ para resolver el problema dinámico directo en el espacio articular para robots ramificados. Featherstone en su libro, deriva parcialmente un modelo simbólico matricial.

Otras alternativas usan los conceptos de grupos de Lie y geometría diferencial para derivar las ecuaciones dinámicas de sistemas robóticos [4, 15, 17, 19]. Esta técnica puede aplicarse a sistemas robóticos ya que el grupo Euclidiano especial $SE(3)$, usado en su modelado, reúne las condiciones de un grupo de Lie. Por tanto, la dinámica de robots puede expresarse aplicando propiedades de los grupos de Lie y su estructura algebraica asociada [4, 12]. Park et al, propusieron un algoritmo recursivo para formular la dinámica de robots usando grupos de Lie [14]. Un año después, éstos extendieron su algoritmo para expresar la ecuación de movimiento de Lagrange en términos de grupos de Lie [15].

Duindam y Stramigioli combinaron la juntas Euclidianas y otras juntas más generales, i.e. juntas que pueden ser descritas por el grupo $SE(3)$ o uno de sus subgrupos [6] en un método más general y basado en el Lagrangiano. Posteriormente, se propone una extensión de este método para modelar sistemas móviles con manipulador [10]. La consiguiente derivación explícita de esta ecuación dinámica para diferentes espacios de configuraciones, muestra que cuando se reduce a la dinámica de un único cuerpo, ésta es equivalente a la formulación clásica para cuerpos rígidos, concretamente a las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler y Lagrange [9].

La principal contribución de este artículo es la derivación simbólica de la ecuación de movimiento

Cuadro 1: Notación de los elementos básicos del modelado geométrico.

Ψ_i	Sistema de coordenadas fijo al cuerpo i .
\mathbf{H}_j^i	Matriz de transformación homogénea del sistema Ψ_j con respecto al sistema Ψ_i .
$\underline{\mathbf{s}}_k^{i,j}$	<i>Screw</i> relativo del cuerpo k con respecto al cuerpo j expresado en el sistema Ψ_i .
$\overline{\mathbf{s}}_k^{i,j}$	<i>Co-screw</i> de la fuerza que el cuerpo k ejerce sobre el cuerpo j expresado en Ψ_i .
$\underline{\mathbf{t}}_k^{i,j}$	<i>Twist</i> relativo del cuerpo k con respecto al cuerpo j expresado en el sistema Ψ_i .
$\overline{\mathbf{w}}_k^{i,j}$	<i>Wrench</i> ejercido por el cuerpo k sobre el cuerpo j expresado en el sistema Ψ_i .
$\overline{\mathbf{w}}^{i,j}$	<i>Wrench</i> neto ejercido sobre el cuerpo j y expresada en el sistema Ψ_i .
$\underline{\mathbf{r}}_i^{k,j}$	Vector desde el punto j al punto i expresado en el sistema Ψ_k .
$\tilde{\mathbf{x}}$	Matriz anti-simétrica del vector \underline{x} .

de Newton-Euler desde la perspectiva geométrica. Para tal fin, se han utilizado las teorías de *Screw*, de Lie y de Grafos. Está formulación es válida para cualquier robot formado por cuerpos rígidos y cuyas juntas tienen un GDL (rotacional o prismática). Además, éstos deben estar formados por cadenas cinemáticas abiertas de tal forma que el robot admita una representación mediante un grafo de árbol dirigido. Entre este tipo de robots se encuentran, por ejemplo, manos robóticas y humanoides. Además, la formulación propuesta deja en forma explícita los parámetros intrínsecos del robot, lo cual es deseable para su aplicación en algoritmos de identificación, simulación, síntesis y control.

2. CONCEPTOS Y NOTACIÓN DEL MODELADO GEOMÉTRICO

Esta sección presenta una breve introducción de los elementos del modelado geométrico aplicado a robots. No se pretende proporcionar una explicación detallada del tema sino clarificar la notación empleada en este artículo, la cual se muestra en la tabla 1. Para un completo entendimiento de los conceptos expuestos en esta y siguientes secciones el lector puede revisar [4, 17].

La base del modelado geométrico se fundamenta en dos teoremas duales: el teorema de *Chasles* y el teorema de *Poinsot* [2]. El primero enuncia que cualquier movimiento entre dos cuerpos puede describirse mediante una rotación seguida por una traslación sobre un mismo eje o *screw*. Este teorema admite otra interpretación haciendo tender a cero desplazamiento y tiempo. De esta manera

se obtiene la velocidad instantánea generalizada relativa, o *twist*, entre los cuerpos.

Mientras que el segundo, dual del primero, enuncia que cada sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo es equivalente a una fuerza y un par aplicados sobre el mismo eje o *co-screw*. Esta fuerza generalizada recibe el nombre de *wrench*.

De la primera interpretación del teorema de *Chasles* surge una interesante equivalencia entre desplazamientos expresados mediante *screws* y matrices homogéneas $\mathbf{H} \in SE(3)$ [17] (formalmente el desplazamiento entre dos sistemas de referencia fijos cada uno a un cuerpo). De igual manera se puede obtener una relación entre *twists* y matrices homogéneas de la segunda interpretación. Esta relación se concreta mediante el álgebra de Lie. El grupo Euclidiano especial de matrices $SE(3)$ es un grupo de Lie cuyo espacio tangente en la identidad tiene estructura de álgebra de Lie y se denota $\mathfrak{se}(3)$. Como se muestra en [17], los *twists* son elementos de $\mathfrak{se}(3)$. Por tanto, la derivada temporal de *screws* es equivalente a la derivada temporal de matrices homogéneas $\dot{\mathbf{H}}$. De tal manera que se establece la siguiente relación entre estos campos vectoriales: $\dot{\mathbf{H}}_i^j = \mathbf{H}_i^j \tilde{\mathbf{t}}_i^{j,j}$ ($\dot{\mathbf{H}}_i^j = \tilde{\mathbf{t}}_i^{j,j} \mathbf{H}_i^j$).

Como *twists* y *wrenches* son elementos duales, los *wrenches* pertenecen al espacio dual del álgebra de Lie $\mathfrak{se}(3)$ denotado $\mathfrak{se}^*(3)$. La dualidad proviene de la mecánica y pone de manifiesto que el producto dual entre un *wrench* $\overline{\mathbf{w}}^{k,i}$ actuando en un cuerpo i y su *twist* absoluto $\underline{\mathbf{t}}_i^{k,0}$, es la potencia instantánea desarrollado por el cuerpo. En forma matemática se tiene: $\overline{\mathbf{w}}^{k,i}(\underline{\mathbf{t}}_i^{k,0}) = \overline{\mathbf{w}}^{k,i^T} \cdot \underline{\mathbf{t}}_i^{k,0} = \text{potencia}$.

2.1. CAMBIO DE SISTEMAS DE REFERENCIA

Twists y *wrenches* son vectores/co-vectores de sus correspondientes álgebras de Lie. Como tal, pueden sumarse en su correspondiente espacio vectorial siempre que están expresados en el mismo sistema de referencia.

Para cambiar el sistema de referencia en el que están expresados *twists* y *wrenches* se utiliza [18]:

$$\underline{\mathbf{t}}_i^{l,j} = \mathbf{Ad}_{H_k^l} \cdot \underline{\mathbf{t}}_i^{k,j}, \quad (1)$$

$$\overline{\mathbf{w}}_i^{l,j} = \mathbf{Ad}_{H_k^l}^T \cdot \overline{\mathbf{w}}_i^{k,j}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{Ad}_{H_k^l} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_k^l & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}}_k^{l,l} \cdot \mathbf{R}_k^l & \mathbf{R}_k^l \end{pmatrix}$ es la representación matricial del adjunto de la conjugación para matrices homogéneas $\mathbf{H}_k^l(\mathbf{R}_k^l, \underline{\mathbf{r}}_k^{l,l})$ que transforman las coordenadas del sistema Ψ_k al sistema Ψ_l .

La derivada temporal de este adjunto es un elemento clave en las ecuaciones de las siguientes sec-

ciones.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Ad}_{H_i^j} = \mathbf{Ad}_{H_i^j} \mathbf{ad}_{\underline{t}_i^{k,j}} = \mathbf{ad}_{\underline{t}_i^{k,j}} \mathbf{Ad}_{H_i^j} \quad (3)$$

donde $\mathbf{ad}_{\underline{t}_i^{k,j}} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i^{k,j} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{v}}_i^{k,j} & \tilde{\omega}_i^{k,j} \end{pmatrix}$ es la representación matricial del adjunto del *twist* $\underline{t}_i^{k,j} = (\underline{\omega}_i^{k,j}, \underline{v}_i^{k,j})$.

3. REPRESENTACIÓN DE ROBOTS EN FORMA DE GRAFOS

Un robot puede considerarse como un conjunto de cuerpos rígidos acoplados mediante pares cinemáticos que permiten el movimiento relativo entre sus partes. Además, los sistemas de cuerpo rígidos articulados admiten un representación abstracta en forma de grafo. Para obtener tal representación, cada cuerpo rígido del robot se representa por un vértice y a cada par cinemático se le asocia un arco [5]. Adicionalmente, los arcos pueden ser dirigidos. Este tipo de grafos se denomina *grafo cinemático*. Tales representaciones de robots como grafos cinemáticos son el vínculo adecuado para aplicar técnicas de teoría de Grafos [11] al modelado de robots.

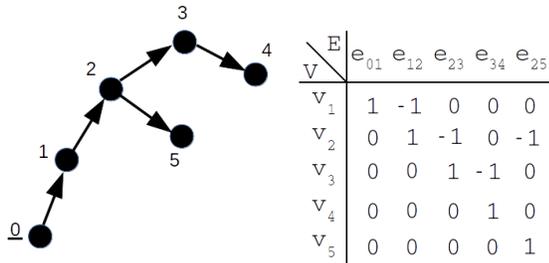


Figura 1: (Izquierda) Representación como grafo de un robot compuesto por seis cuerpos rígidos (vértices) y cinco juntas (arcos). Cada arco está además dirigido lo que indica una relación “relativo a” entre los vértices que une. (Derecha) Matriz de incidencia modificada del grafo con la fila del vértice de referencia global eliminada, que en este caso es el vértice cero (subrayado).

La notación de grafos sigue las siguientes reglas. Cada vértice tiene un único identificador i que identifica el vértice como v_i . Debido a que los arcos siempre vinculan dos vértices, su identificador está compuesto por los índices de los vértices adyacentes, i.e. e_{ij} define el arco que va del vértice v_i al v_j . Además, en grafos dirigidos, esta notación muestra que el arco deja v_i y entra en v_j . La figura 1 muestra un ejemplo. Asimismo, dado un grafo G , el conjunto de todos los vértices se denota por V

y el conjunto de todos los arcos por E . Por tanto $G = G(V, E)$.

Una propiedad importante de los grafos es que cualquier grafo es isomórfico a una matriz. Hay dos representaciones matriciales de un grafo: la *matriz de adyacencia* y la *matriz de incidencia*. La matriz de incidencia tiene dimensión $n \times m$, donde n es el número de vértices y m es el número de arcos. Para construir esta matriz, los arcos se colocan en columnas y los vértices en filas. Cada entrada $a_{i,j}$ será -1 si el arco de la j -ésima columna deja el vértice de la i -ésima fila, 1 si el arco de la j -ésima columna entra al vértice de la i -ésima fila y 0 en otro caso [11].

La formulación que se explica más adelante utiliza una matriz de incidencia modificada. Primeramente, uno de los vértices del grafo se marca como referencia inercial. Para distinguirlo, su etiqueta se subraya. Posteriormente se elimina de la matriz de incidencia la fila correspondiente a este vértice. En esta matriz de incidencia modificada, cada entrada se transforma de un escalar a una matriz 6×6 . El cambio consiste en substituir cada ± 1 por la matriz unidad $\pm I_6$ y cada 0 por la matriz nula 0_6 . Esta *matriz de incidencia modificada* (MIM) se representa como \mathbf{B} . La figura 1 muestra un ejemplo de como un grafo dirigido se coloca en forma de MIM.

3.1. PARES CINEMÁTICOS Y RELACIONES DE LOS TWISTS DEL ROBOT

Como se ha indicado en la sección anterior, cada par cinemático lleva asociado un arco del grafo. Un par cinemático acopla dos eslabones del robot de tal manera que permite un movimiento relativo entre ellas. Debido a que el movimiento relativo entre dos cuerpos puede ser descrito por un *screw* $\in \mathbb{R}^6$, la combinación de seis *screws* linealmente independientes describe cualquier movimiento relativo en el espacio. Seleccionando un subconjunto de este sistema se obtiene un subespacio que describe sólo aquellos movimiento relativos que son permitidos por la junta. El subespacio complementario contiene los movimiento relativos que son impedidos por la junta.

Existen dos grupos de pares cinemáticos: los inferiores y los superiores [16]. En el alcance de este artículo sólo se tratan los pares cinemáticos inferiores. Este grupo, a su vez, contiene seis tipos de juntas. Sin embargo, sólo dos de ellos pueden considerarse como elementales ya que combinándolos se consiguen movimientos relativos idénticos a los de los otros pares. Estos dos elementos son las juntas rotacional y prismática. Ambas son juntas de un GDL de tal manera que su subespacio de mo-

vimiento relativo queda definido por un sistema de un único *screw*. Por tanto, cualquier arco $e_{i,j}$ del grafo tiene asociado un *screw* $\underline{s}_i^{j,j}$. Obsérvese que si el *screw* está expresado con respecto a un sistema de referencia fijo a alguno de los cuerpos adyacente al arco, dicho *screw* es constante.

Otra ventaja de usar juntas de un GDL es que la magnitud del *screw* queda definida por un único parámetro. Por consiguiente, para calcular el desplazamiento relativo o la velocidad relativa entre los cuerpos unidos por la junta, únicamente se necesita su posición generalizada q o su velocidad generalizada \dot{q} respectivamente.

Por tanto, dado un sistema articulado de cuerpos rígidos el cual admite un representación en grafo etiquetado en forma de árbol dirigido $G(V, E) \in \mathbb{R}^{n \times n-1}$, la ecuación de movimiento simbólica geométrica puede formularse en forma compacta definiendo los siguientes elementos:

Definición: Una matriz diagonal a bloques $\mathbf{S}_A^b \in \mathbb{R}^{6n \times n}$ que contiene todos los *screws* asociados con cada arco de $G(V, E)$ y formada como sigue

$$\mathbf{S}_A^b = \text{diag} \left(\underline{s}_i^{j,j} \right) \quad \forall e_{i,j} \in E \quad (4)$$

se denomina *screw conjunto de las juntas* y es constante.

Definición: Una matriz diagonal a bloques $\mathbf{Ad}_{H_B^0} \in \mathbb{R}^{6n \times 6n}$ formada por las matrices de transformación del sistema local al inercial de cada *twists* de los vértices de $G(V, E)$ se denomina *transformación conjunta de coordenadas* cuya forma es:

$$\mathbf{Ad}_{H_B^0} = \text{diag} \left(\mathbf{Ad}_{H_i^0} \right) \quad \forall v_i \in \{V - 0\} \quad (5)$$

Para obtener la transformación homogénea entre sistemas de coordenados de cuerpos adyacentes a la misma junta $e_{i,j}$ se utiliza el aplicación exponencial [13] siguiente:

$$\mathbf{H}_i^j(q_j) = \mathbf{H}_i^j(0) \cdot \mathbf{e}^{\underline{s}_i^{j,j} \cdot q_j} = \mathbf{e}^{\underline{s}_i^{j,j} \cdot q_j} \cdot \mathbf{H}_i^j(0) \quad (6)$$

La secuencia completa de transformaciones desde el sistema coordinado de referencia Ψ_0 hasta el sistema Ψ_j se obtiene mediante el producto de exponenciales [3].

Definición: Un vector $\underline{t}_K^0 \in \mathbb{R}^{6n \times 1}$ que agrupa los *twists* asociados con los arcos del grafo $G(V, E)$ se denomina *twist conjunto articular* y satisface la siguiente igualdad:

$$\underline{t}_K^0 = \text{col} \left(\underline{t}_i^{0,j} \right) = \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \mathbf{S}_A^b \cdot \underline{\dot{q}} \quad \forall e_{i,j} \in E, \quad (7)$$

donde $\underline{\dot{q}} = \text{col}(\dot{q}_j)$ es el vector columna de todas las velocidades de las juntas.

Definición: Un vector $\underline{t}_B^0 \in \mathbb{R}^{6n \times 1}$ que agrupa los *twists* relativos entre cada vértice y el vértice de referencia de $G(V, E)$ (concretamente su sistema coordinado asociado) se denomina *twist conjunto absoluto* y su estructura es la siguiente:

$$\underline{t}_B^0 = \text{col} \left(\underline{t}_j^{0,0} \right) \quad \forall v_j \in V - \{0\} \quad (8)$$

Existe una relación fundamental entre el *twist* conjunto absoluto, el *twist* conjunto articular y la MIM que es [18]:

$$\underline{t}_K^0 = -\mathbf{B}^T \cdot \underline{t}_B^0, \quad (9)$$

Para comprender dicha relación (9), se debe observar que cada fila de $-\mathbf{B}^T$ relaciona su correspondiente junta con los dos cuerpos que enlaza. Por tanto, cada fila (i.e $e_{i,j}$) multiplicada por \underline{t}_B^0 da como resultado la suma de los correspondientes elementos $\underline{t}_i^{0,0}$ y $\underline{t}_j^{0,0}$. Debido a la relación de orden impuesta por los arcos y el signo menos de (9) la suma es $\underline{t}_i^{0,0} - \underline{t}_j^{0,0}$ o de forma equivalente $\underline{t}_i^{0,0} - (\underline{t}_i^{0,0} + \underline{t}_j^{0,i})$. Que resulta en $\underline{t}_i^{0,j}$ como sería deseable para $e_{i,j}$.

Finalmente, el corolario 4.2.6 de [11] prueba la existencia de \mathbf{B}^{-1} , con lo que se verifica la ecuación recíproca siguiente:

$$\underline{t}_B^0 = -\mathbf{B}^{-T} \cdot \underline{t}_K^0 = \mathbf{C} \cdot \underline{t}_K^0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \mathbf{S}_A^b \cdot \underline{\dot{q}} \quad (10)$$

donde para simplificar la notación, $-\mathbf{B}^{-T}$ se representa por \mathbf{C} .

4. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO GEOMÉTRICO PARA ROBOTS RAMIFICADOS

Esta sección proporciona una deducción completa de la ecuación de movimiento de Newton-Euler desde la perspectiva de la mecánica geométrica introducida en las secciones anteriores. La formulación de esta ecuación está expresada en forma cerrada de tal modo que puede ser integrada naturalmente en otras expresiones matemáticas para ser manipulada simbólicamente. Además, la formulación propuesta exhibe explícitamente los parámetros intrínsecos del mecanismo. Este trabajo extiende el trabajo [7] dando una formulación simbólica completa de la ecuación de Newton-Euler y el [15] ampliando la aplicación de la ecuación a robots ramificados. Respecto a su rango de aplicación, éste engloba cualquier robot formado por cuerpos rígidos unidos entre sí mediante junta de un GDL y libre de bucles, i.e. todas las cadenas

cinemáticas que forman el robot son abiertas. Este tipo de robots tiene por tanto n cuerpos y $n - 1$ juntas de un GDL. Obsérvese que la combinación de juntas rotacionales y/o prismáticas con cuerpos de masa despreciable da lugar a otro tipo de juntas utilizadas habitualmente por los robots (juntas universales, esféricas, etc), por consiguiente la formulación propuesta abarca un mayor número de casos de los que a priori cabría esperar.

4.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO GEOMÉTRICA DE NEWTON-EULER

En mecánica clásica, la segunda ley de Newton enuncia que la fuerza neta ejercida sobre un cuerpo es igual a la derivada temporal del momento lineal de tal cuerpo. Análogamente, la ecuación de Euler establece que el momento neto aplicado a un cuerpo es igual a la derivada temporal del momento angular. Ambas expresiones unidas forman la ecuación de Newton-Euler. Obsérvese que todos los elementos involucrados deben estar expresados en un sistema coordenado inercial.

Tales ecuaciones pueden aplicarse de manera análoga en mecánica geométrica partiendo del momento geométrico. Como se expone en [17], el momento geométrico resulta de la acción de un tensor sobre los elementos de $\mathfrak{se}(3)$ transformándolos en elementos de $\mathfrak{se}^*(3)$. Dicho tensor se denomina tensor de inercia geométrico. El tensor es un operador matricial simétrico y definido positivo cuyas entradas son los parámetros dinámicos intrínsecos del cuerpo colocados del siguiente modo:

$$\mathbf{M}^{k,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{k,CM_i} - m_i \left(\tilde{\mathbf{r}}_{CM_i}^{k,i} \right)^2 & m_i \tilde{\mathbf{r}}_{CM_i}^{k,i} \\ -m_i \tilde{\mathbf{r}}_{CM_i}^{k,i} & m_i \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

donde \mathbf{I}^{k,CM_i} es el tensor de inercia clásico del cuerpo i en su centro de masa (CM_i), relativo a un sistema coordenado en el centro de masa con ejes paralelos al sistema fijo en el cuerpo body i (Ψ_i), m_i es la masa del cuerpo i , $\tilde{\mathbf{r}}_{CM_i}^{k,i}$ es el vector desde el origen del sistema del cuerpo i al centro de masa del cuerpo i y $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz identidad. Además, todos los elementos están expresados en el sistema Ψ_k .

Debido a que el tensor de inercia geométrico relaciona vectores de $\mathfrak{se}(3)$ con co-vectores de $\mathfrak{se}^*(3)$ entonces su transformación entre diferentes sistemas coordenados debe satisfacer:

$$\mathbf{M}_j^{l,i} = \mathbf{Ad}_{H_i^k}^T \cdot \mathbf{M}_j^{k,i} \cdot \mathbf{Ad}_{H_i^k} \quad (12)$$

Como se ha mencionada anteriormente, aplicando el tensor de inercia geométrico sobre un *twist* se

obtiene el momento geométrico:

$$\bar{\mathbf{p}}^{k,i} = \mathbf{M}^{k,i} \cdot \underline{\mathbf{t}}_i^{k,0}. \quad (13)$$

Finalmente, después de la definición del momento geométrico se expresa la ecuación de Newton-Euler en el dominio de la mecánica geométrica como:

$$\bar{\mathbf{w}}^{0,i} = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{p}}^{0,i}, \quad (14)$$

donde $\bar{\mathbf{w}}^{0,i}$ es el *wrench* neto actuando sobre el cuerpo i y $\bar{\mathbf{p}}^{0,i}$ es el momento geométrico del cuerpo i , ambos expresados en el sistema inercial Ψ_0 .

Al igual que en la sección 3.1, a continuación se definen los siguiente elementos extendidos a todo el conjunto.

Definición: Una matriz diagonal a bloques $\mathbf{M}_B^0 \in \mathbb{R}^{6n \times 6n}$ formada por el tensor de inercia geométrico correspondiente a cada vértice se denomina *tensor conjunto de inercia* cuya composición es:

$$\mathbf{M}_B^0 = \text{diag}(\mathbf{M}^{0,i}) \quad \forall v_i \in \{V - 0\} \quad (15)$$

Definición: Un co-vector $\bar{\mathbf{w}}_B^0 \in \mathbb{R}^{6n \times 1}$ que agrupa los *wrenches* netos de cada vértice expresados en el sistema de referencia inercial Ψ_0 se denomina *wrench conjunto absoluto* y su estructura es la siguiente:

$$\bar{\mathbf{w}}_B^0 = \text{fila}(\bar{\mathbf{w}}^{0,j}) \quad \forall v_j \in V - \{0\} \quad (16)$$

Si (13) se substituye convenientemente en (14) y se extiende a todo el robot teniendo en cuenta (8), (15) y (16) se obtiene la ecuación geométrica de Newton-Euler del robot ramificado:

$$\bar{\mathbf{w}}_B^0 = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}_B^0 \cdot \underline{\mathbf{t}}_B^0), \quad (17)$$

A continuación, substituyendo (10) en (17) y aplicando la derivada temporal resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_B^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{M}_B^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \mathbf{S}_A^b \cdot \underline{\dot{q}} + \\ \mathbf{M}_B^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \mathbf{S}_A^b \cdot \underline{\dot{q}} + \\ + \mathbf{M}_B^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \mathbf{S}_A^b \cdot \underline{\ddot{q}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Antes de continuar se precisa calcular la derivada temporal del tensor conjunto de inercia. Primero, cada entrada se transforma del sistema inercial al local (fijo en el propio cuerpo) aplicando (12). De tal manera que el tensor conjunto de inercia resultante queda constante. Entonces se calcula la derivada temporal:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_B^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-T} \cdot \mathbf{M}_B^b \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-1} + \\ \mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-T} \cdot \mathbf{M}_B^b \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Nótese que $\mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-1} = \mathbf{Ad}_{(H_B^0)^{-1}} = \mathbf{Ad}_{H_B^b}$. Donde $\mathbf{Ad}_{H_B^b}$ y \mathbf{M}_B^b son análogos a $\mathbf{Ad}_{H_B^0}$ y \mathbf{M}_B^0 respectivamente salvo que sus elementos están expresados en coordenadas locales de cada cuerpo.

Substituyendo (3) en (19) anterior, se obtiene el resultado final de la derivada temporal del tensor conjunto de inercia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_B^0 &= \mathbf{ad}_{\underline{t}_B^0}^{-T} \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-T} \cdot \mathbf{M}_B^b \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-1} + \\ &\mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-T} \cdot \mathbf{M}_B^b \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0}^{-1} \cdot \mathbf{ad}_{\underline{t}_B^0}^{-1} = \\ &\mathbf{ad}_{\underline{t}_B^0}^{-T} \cdot \mathbf{M}_B^0 + \mathbf{M}_B^0 \cdot \mathbf{ad}_{\underline{t}_B^0}^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Finalmente, si se aplica (20) en (18) se obtiene la expresión matricial simbólica de la ecuación geométrica de movimiento de Newton-Euler:

$$\begin{aligned} \bar{w}_B^0 &= \left(\mathbf{ad}_{\underline{t}_B^0}^{-T} \cdot \mathbf{M}_B^0 + \mathbf{M}_B^0 \cdot \mathbf{ad}_{\underline{t}_B^0}^{-1} \right) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \\ &\mathbf{S}_A^b \cdot \dot{q} + \mathbf{M}_B^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{ad}_{\underline{t}_B^0} \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \mathbf{S}_A^b \cdot \dot{q} + \\ &\mathbf{M}_B^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Ad}_{H_B^0} \cdot \mathbf{S}_A^b \cdot \ddot{q}. \end{aligned} \quad (21)$$

4.2. MODELO DINÁMICO SIMBÓLICO DE ROBOTS RAMIFICADOS

En esta sección se deriva la expresión del modelo dinámico inverso que obtiene los *wrenches* que actúan sobre cada una de las juntas en función del movimiento del robot (posición, velocidad, y aceleración) y de los *wrenches* exteriores que actúan sobre el mismo. Los *wrenches* presentes en cada junta se deben a las fuerzas/pares impuestos por la junta para restringir ciertos movimientos, así como las fuerzas/pares generados por el actuador asociado a cada junta.

Para obtener tal ecuación, primero se aísla un cuerpo i del robot y se establece el balance de *wrenches* actuando sobre él obteniendo:

$$\bar{w}^{0,i} = \sum_{j=1}^N \bar{w}_j^{0,i} - \sum_{k=1}^M \bar{w}_i^{0,k} + \bar{w}_e^{0,i}, \quad (22)$$

donde $\bar{w}_j^{0,i}$ son *wrenches* que el cuerpo i recibe de otros cuerpos j adyacentes, $\bar{w}_i^{0,k}$ son *wrenches* que el cuerpo i ejerce sobre otros cuerpos k unidos a él, y $\bar{w}_e^{0,i}$ son *wrenches* debido a agentes externos.

Entre los *wrenches* exteriores el más general es el *wrench* debido a la gravedad. Éste manifiesta su acción como una fuerza pura en el centro de masa del cuerpo, por lo tanto no ejerce ningún momento. Para obtener se valor se analiza el sistema con el *wrench* gravitatorio como única acción sobre él. Es este supuesto, el *twist* impuesto por la gravedad al cuerpo, expresado en un sistema inercial, y su momento geométrico son:

$$\underline{t}_i^{0,0} = \begin{pmatrix} 0_3 \\ -\underline{k}^0 \end{pmatrix} v_g \rightarrow \bar{p}^{0,i} = \mathbf{M}^{0,i} \cdot \underline{t}_i^{0,0}, \quad (23)$$

donde v_g es la magnitud de la velocidad instantánea y \underline{k}^0 es el vector dirección de la gravedad respecto al sistema inercial.

Substituyendo (17) en el momento geométrico debido a la gravedad (23) y sustituyéndolo en (20) resulta el *wrench* gravitatorio:

$$\begin{aligned} \bar{w}_g^{0,i} &= \left(\mathbf{ad}_{\underline{t}_i^{0,0}}^{-T} \cdot \mathbf{M}^{0,i} + \mathbf{M}^{0,i} \cdot \mathbf{ad}_{\underline{t}_i^{0,0}}^{-1} \right) \cdot \underline{t}_i^{0,0} + \\ &\mathbf{M}^{0,i} \cdot \frac{d}{dt} \underline{t}_i^{0,0} = \mathbf{M}^{0,i} \cdot \begin{pmatrix} 0_3 \\ -\underline{k}^0 \end{pmatrix} g, \end{aligned} \quad (24)$$

donde $g = \frac{d}{dt} v_g$ es la aceleración de la gravedad. Puesto que el *twist* absoluto $\underline{t}_i^{0,0}$ es igual a $\underline{t}_i^{0,0}$, el primer sumando se anula. Este resultado coincide con el dado en [17].

Para extender la formulación al robot completo se define el siguiente término:

Definición: Un co-vector $\bar{w}_E^0 \in \mathbb{R}^{6n \times 1}$ que agrupa los *wrenches* externos de cada vértice de $G(V, E)$ expresados en el sistema de referencia inercial Ψ_0 se denomina *wrench conjunto exterior* y su estructura es la siguiente:

$$\bar{w}_E^0 = \text{fila} \left(\sum_l \bar{w}_{e_l}^{0,i} \right) \quad \forall v_j \in V - \{0\} \quad (25)$$

Extendiendo (22) y (24) a todo el sistema y substituyendo (25) se obtiene la expresión del modelo dinámico completo:

$$\bar{w}_B^0 = \mathbf{B} \cdot \bar{w}_K^0 + \mathbf{M}_B^0 \cdot \underline{t}_g^0 + \bar{w}_E^0 \quad (26)$$

donde $\underline{t}_g^0 = \text{col} \left([0_3^T, -\underline{k}^T]_i^T \right) \cdot g$ para todo $v_i \in V - \{0\}$. La igualdad $\bar{w}_B^0 = \mathbf{B} \cdot \bar{w}_K^0$ surge razonando de manera análoga a (9) cuando los únicos *wrenches* presentes en el sistema son los debidos a las juntas.

5. CONCLUSIONES

En este artículo la ecuación de movimiento de Newton-Euler es obtenida en el dominio de la mecánica geométrica. Como resultado se obtiene una expresión cerrada analítica para obtener el modelo dinámico de robots ramificados. La validez de este método se extiende a cualquier robot formado por cuerpos rígidos y enlazados por juntas de 1 GDL (prismáticas y/o rotacionales) cuya representación como grafo es un árbol dirigido. Por tanto, el robot no contiene ninguna cadena cinemática cerrada. Al ser una expresión simbólica matricial, ésta puede ser manipulada como tal aplicando técnicas de cálculo y/o algebraicas para combinarlas con algoritmos utilizados en robótica. Adicionalmente, la expresión resultante agrupa explícitamente los parámetros intrínsecos del

robot en forma de matrices lo cual es atractivo en tareas de identificación. Por tanto, la ecuación simbólica propuesta proporciona una notación más completa y compacta que las actualmente existentes.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido principalmente financiado por el MINISTERIO DE ECONOMIA Y COMPETITIVIDAD en el proyecto con referencia RTC-2014-3070-5. Además ha sido parcialmente financiado por el proyecto RoboCity2030-III-CM (Robótica aplicada a la mejora de la calidad de vida de los ciudadanos. fase III; S2013/MIT-2748), financiado por Programas de Actividades I+D en la Comunidad de Madrid y cofinanciado por Fondos Estructurales de la EU.

Referencias

- [1] Constantinos A. Balafoutis and Rajnikant V. Patel. *Dynamic Analysis of Robot Manipulators*. Springer US, 1991.
- [2] Robert Stawell Ball. *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge university press, 1998.
- [3] Roger W Brockett. Robotic manipulators and the product of exponentials formula. In *Mathematical theory of networks and systems*, pages 120–129. Springer, 1984.
- [4] Francesco Bullo and Andrew D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*. Springer-Verlag New York, 2005.
- [5] FRE Crossley. The permutations of kinematic chains of eight members or less from the graph-theoretic viewpoint. *Developments in theoretical and applied mechanics*, 2:467–486, 1964.
- [6] Vincent Duintam and Stefano Stramigioli. Singularity-free dynamic equations of open-chain mechanisms with general holonomic and nonholonomic joints. *Robotics, IEEE Transactions on*, 24(3):517–526, 2008.
- [7] Roy Featherstone. *Robot dynamics algorithms*. Boston/Dordrecht/Lancaster: Kluwer Academic Publishers, 1987.
- [8] Roy Featherstone. *Rigid body dynamics algorithms*. Springer, 2014.
- [9] Johan From. An explicit formulation of singularity-free dynamic equations of mechanical systems in lagrangian form—part one: Single rigid bodies. *Modeling, Identification and Control*, 33(2):45–60, 2012.
- [10] Pål J From, Vincent Duintam, Kristin Y Pettersen, Jan T Gravdahl, and Shankar Sastry. Singularity-free dynamic equations of vehicle–manipulator systems. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 18(6):712–731, 2010.
- [11] Dieter Jungnickel and Tilla Schade. *Graphs, networks and algorithms*. Springer, 2008.
- [12] Jerrold E. Marsden and Tudor Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag New York, 1999.
- [13] Richard M Murray, Zexiang Li, S Shankar Sastry, and S Shankara Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press, 1994.
- [14] F.C. Park and J.E. Bobrow. A recursive algorithm for robot dynamics using lie groups. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1535–1540, Salt Palace Convention Center, Salt Lake City, UT, 1994.
- [15] Frank C. Park, James E Bobrow, and Scott R Ploen. A lie group formulation of robot dynamics. *The International Journal of Robotics Research*, 14(6):609–618, 1995.
- [16] Franz Reuleaux. *The Kinematics of Machinery: Outlines of a Theory of Machines. Translated and Edited by Alexander BW Kennedy, and with a New Introd. by Eugene S. Ferguson*. Dover Publications, 1963.
- [17] Jon M Selig. *Geometric fundamentals of robotics*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [18] Stefano Stramigioli. *From differentiable manifold to interactive robot control*. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology, 1998.
- [19] Stefano Stramigioli. *Modeling and IPC control of interactive mechanical systems: a coordinate-free approach*. Springer-Verlag New York, Inc., 2001.