

OPTIMIZACIÓN DEL RENDIMIENTO EN SISTEMAS DE CONTROL MEDIANTE ENTROPÍA

A. Ruiz-Alba, Ken Sharman y Sergio Sáez

Instituto Tecnológico de Informática (ITI), Universitat Politècnica de València
{aruizalba, ken,ssaez}@iti.es

Resumen

Calculamos, analizamos y medimos la entropía relativa en sistemas de control. Los datos obtenidos se pueden utilizar para detectar errores en su funcionamiento o para ajustar los recursos de cálculo de los componentes, mejorando su rendimiento. Evaluamos la ventaja del método a través de un experimento de simulación.

Keywords: Entropía, sistemas de control, adaptación del periodo, control de rendimiento.

1. INTRODUCCIÓN

Los controladores están presentes en la tecnología con diferentes roles, como estabilizar dinámicas inestables o aumentar el rendimiento [8]. A menudo contienen algunas funciones de control que requieren una ejecución duradera y continua en entornos cambiantes. Para conseguir una adaptación continua, durante su funcionamiento, se puede obtener conocimiento sobre su comportamiento de ejecución.

El controlador mide características del sistema, decide la acción a tomar y actúa sobre el sistema. En este proceso, obtiene cierta información sobre el sistema y la utiliza para reducir la entropía [1]. La reducción de la entropía del sistema debido a su interacción con el controlador de retroalimentación se investiga en [2].

Antes de desplegar el sistema en su campo de acción, solo existe un conocimiento limitado sobre la dinámica del sistema y las interacciones entre diferentes aspectos del entorno. Podemos mejorar esto si se observa el comportamiento real de un sistema en tiempo de ejecución. Ya se han propuesto métodos de adaptación que utilizan monitoreo en línea [3] [4] para mejorar el rendimiento del control.

La entropía está asociada con la cantidad de incertidumbre en el sistema. Se puede reducir si damos más potencia de cálculo a los elementos que participen en el cálculo del controlador. Cuanta más información tenga el controlador, mejor funcionará

el algoritmo de control. El aprendizaje por refuerzo utiliza esta idea en algunos algoritmos, como la búsqueda de políticas de entropía relativa [7].

Los índices de rendimiento se emplean en aplicaciones de control para evaluar su eficiencia. Están asociados con el error de control [5], el cual está influenciado por aspectos que a veces no se pueden mejorar elevando las capacidades de la computación [9].

En este artículo, presentamos un método que utiliza la entropía como parámetro de rendimiento. Esto aporta importantes ventajas; permite distinguir cuando una degradación en el comportamiento del sistema es debida a fuentes de ruido producidas por el entorno, o es debida a un ajuste deficiente de los parámetros de control. También permite adaptar, en tiempo de ejecución, los recursos computacionales con más precisión.

En la sección 2, calculamos la reducción de entropía en los sistemas controladores usando un conjunto continuo de estados. El resultado nos permite establecer un parámetro de rendimiento que se puede utilizar para asignar recursos computacionales. En la sección 3, ilustramos la aplicabilidad y usabilidad de los resultados con un simple péndulo invertido. Finalmente, resumimos los resultados del artículo en la sección 4.

2. REDUCCIÓN DE ENTROPÍA EN SISTEMAS CONTROLADOS

Para lograr la operación deseada del sistema, el controlador ejecuta los pasos de control. En cada uno de los cuales realiza las siguientes funciones; estima el estado del sistema, calcula la acción de control teniendo en cuenta el estado estimado y actúa en consecuencia. Por lo tanto, el controlador trabaja utilizando un agente externo que conduce al sistema hasta el estado deseado. Denotamos por $C_k = c$ la acción de control que en el momento t_k tiene el valor c .

Denotamos por $X_k := X(t_k)$ el estado del sistema en el momento t_k . La entropía del sistema justo

antes del primer paso de control es

$$S_1^b = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{X_1}(x) \ln p_{X_1}(x) =: H(X_1), \quad (1)$$

con $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ como el conjunto de posibles estados del sistema, $p_{X_1(x)}$ es la probabilidad de cada estado x en el momento t_1 . En este momento, el controlador mide el estado del sistema, determinando la acción que tomará el controlador. Así, si la medida implica una acción de control $C_1 = c_1$, la entropía del sistema disminuirá a

$$S_1^a = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{X_1|C_1}(x|c_1) \ln p_{X_1|C_1}(x|c_1) \\ := H(X_1|C_1 = c_1). \quad (2)$$

Se consigue una reducción de la entropía gracias a la información adquirida por el sistema de control. La reducción de entropía en el k ésimo paso es

$$\Delta S_k = S_k^a - S_k^b \quad (3)$$

La información utilizada por el controlador en M pasos es utilizada para reducir la entropía. La reducción de entropía total tras realizar M pasos de control es

$$\Delta S_{\text{info}} = \sum_{k=1}^M \Delta S_k. \quad (4)$$

Nos centraremos ahora en el caso en el que el estado del sistema se compone de variables continuas, como la posición y la velocidad. El estado discreto X_k se puede obtener dividiendo un estado continuo X_k^c en rodajas de ancho Δ con una muestra $i\Delta$ dentro de las rodajas, es decir

$$X_k = i\Delta, \quad \text{if } i\Delta \leq X_k^c \leq (i+1)\Delta. \quad (5)$$

Usamos la entropía diferencial $h(X_k^c|C^k = c^k)$, que es la entropía de una variable aleatoria continua después del paso de control k . Es similar a la entropía discreta pero con algunas diferencias significativas [6]. Existe una conexión importante entre la entropía diferencial y la entropía discreta si la densidad de probabilidad de la variable aleatoria X_k^c es integrable de Riemann, en este caso, podemos escribir esta conexión como

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} H(X_k|C^k = c^k) = h(X_k^c|C^k = c^k) - \ln \Delta. \quad (6)$$

De todas las distribuciones con la misma desviación estándar, la normal maximiza la entropía [6]. La entropía diferencial de una distribución normal es $\ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$, lo que da una buena cota superior en términos de la desviación estándar de la variable aleatoria. Usando las ecuaciones (6) y (3),

podemos escribir la reducción de entropía en el paso k como

$$\Delta S_k = h(X_k^c|C^k = c^k) - h(X_k^c|C^{k-1} = c^{k-1}) \\ = \ln \frac{\sigma_k^b}{\sigma_k^a}. \quad (7)$$

Donde σ_k^b y σ_k^a son las desviaciones estándar de X_k^c antes y después de la acción de control k , respectivamente.

Normalmente se desea especificar cuantitativamente el rendimiento deseado del sistema. Por lo tanto, en la fase de diseño, se puede establecer un umbral en la incertidumbre del sistema, que se corresponde con una entropía $S_{\text{th}} = \ln(\sigma_{\text{th}}\sqrt{2\pi e})$, donde σ_{th} es la desviación estándar máxima del ruido que se puede aceptar. Definimos la entropía relativa como la diferencia entre la entropía después del k ésimo paso de control y la entropía umbral. Podemos expresar esta diferencia como

$$\Delta S_k^{\text{th}} = S_{\text{th}} - S_k^a = \ln \frac{\sigma_{\text{th}}}{\sigma_k^a}. \quad (8)$$

En una aplicación real, donde tenemos miles de pasos de control, es útil promediar estas diferencias de entropía para calcular el rendimiento. Por lo tanto, definimos la entropía relativa media como la diferencia media entre la entropía después de un paso de control y la entropía umbral como

$$\Delta S^{\text{th}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \Delta S_k^{\text{th}}. \quad (9)$$

Podemos evaluar esta expresión, y cuando su valor es negativo, se puede reconfigurar el sistema para reducir la incertidumbre.

La reducción de entropía en el sistema debido a la información utilizada por el controlador es un ingrediente fundamental en los sistemas de control con retroalimentación. Una vez que sepamos cómo calcularlo, podemos mejorar el rendimiento de estos sistemas. En particular, en la sección 3, mostramos cómo evaluar la entropía y decidir cómo adaptar los recursos de cálculo en un sistema de control que gobierna a un péndulo invertido.

3. APLICACIÓN: SISTEMA DE CONTROL DE UN PÉNDULO INVERTIDO

La idea de utilizar la entropía en la evaluación del rendimiento es distinguir cuando las desviaciones se deben a fuentes de incertidumbre o una mal configuración de los parámetros del sistema. Podemos reconfigurar el sistema con más precisión teniendo en cuenta la entropía relativa. Para mostrar estas ventajas, empleamos el controlador de

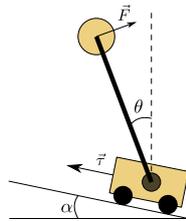


Figura 1: Diagrama del péndulo con las fuerzas que actúan sobre él. El punto de equilibrio inestable se establece en $\theta = 0$

un péndulo invertido. La figura 1 muestra el sistema físico utilizado, que es un péndulo montado en un carro, que puede moverse bajo el control de un sistema de servos. El ángulo entre el suelo y la línea horizontal es α . Establecemos el punto de equilibrio inestable en $\theta = 0$. El servo actúa sobre el carro con un empuje τ que produce una fuerza F . El sensor es un acelerómetro de dos ejes que se encuentra en la parte superior del péndulo.

Las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del péndulo son

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + m(l\ddot{\theta} \cos(\theta + \alpha) - l\dot{\theta}^2 \sin(\theta + \alpha)) &= F - Mg \sin \alpha \\ l\ddot{\theta} + g(\sin \alpha \cos(\theta + \alpha) - \cos \alpha \sin(\theta + \alpha)) &= -\ddot{x} \cos(\theta + \alpha). \end{aligned} \tag{10}$$

Donde m y M son las masas del péndulo y el vehículo respectivamente, l es la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad y x es el desplazamiento del vehículo en el plano inclinado. Se modificará el valor de α para simular un entorno donde no conocemos con precisión todos los parámetros. De esta manera podremos estudiar como afecta este desconocimiento en el rendimiento del control. Este valor puede estar en el intervalo $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$ donde α_{min} y α_{max} son los valores mínimo y máximo de α .

La figura 2 muestra la arquitectura para controlar el sistema físico. El controlador lee una señal de error $e[k]$ y calcula la entrada del actuador $u_d[k]$. El actuador (servo) transforma la señal discreta $u_d[t]$ en una señal continua $\tau(t)$, que actúa sobre el sistema físico. Los sensores obtienen la salida de la planta $a(t)$ y producen una señal discreta $y_{accel}[k]$. Finalmente, el estimador de estado calcula el ángulo del péndulo $\theta_s[k]$ con los datos obtenidos de los sensores. La diferencia entre $\theta_s[k]$ y una señal de referencia $r[k]$ es la señal de error $e[k]$.

El controlador procesa la información obtenida del estimador de estado y actúa en la planta para obtener el estado deseado. El sistema tiene varias fuentes de incertidumbre; Las condiciones ambien-

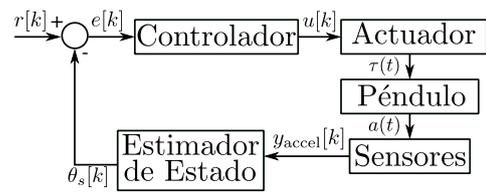


Figura 2: Diagrama de bloques del sistema de control utilizado para estabilizar un péndulo.

tales y las conversiones digitales afectan el comportamiento de los sensores y actuadores. El controlador también tiene fuentes de incertidumbre, como la precisión del reloj del procesador y la planificación de las diferentes tareas que está ejecutando.

Para mantener clara esta demostración, solo tenemos en cuenta el ruido del acelerómetro. La salida de este se puede escribir como:

$$\begin{aligned} y_{accel,x}[k] &= a_x(kT_s) + \eta_{accel,x}[k] \\ y_{accel,y}[k] &= a_y(kT_s) + \eta_{accel,y}[k]. \end{aligned} \tag{11}$$

Donde $y_{accel,x}[k]$ y $y_{accel,y}[k]$ son la aceleración medida por los sensores en el eje x y y , respectivamente. a_x y a_y son las aceleraciones reales en cada eje, T_s es el período de muestreo y $\eta_{accel,x}$ y $\eta_{accel,y}$ son variables aleatorias con una distribución normal de media cero y la misma desviación estándar σ_s .

El estimador procesa las salidas del acelerómetro para obtener $\theta_s[k]$. Por lo tanto, está influenciado por el ruido de los sensores. En nuestra aplicación, el estimador de estado consiste en filtros de paso bajo para reducir el ruido del sensor y en un cálculo de atan2 para obtener el ángulo estimado θ_s :

$$\begin{aligned} \theta_s[k] &= \text{atan2}(\text{LPF}(y_{accel,x}[k]) - F[k], \\ &\quad \text{LPF}(y_{accel,y}[k])) = \hat{\theta}_s[k] + \eta_\theta[k]. \end{aligned} \tag{12}$$

Donde $\text{LPF}(\cdot)$ Representa el operador del filtro de paso bajo, $F[k]$ es la fuerza sobre el péndulo producida por el empuje del automóvil, y $\hat{\theta}_s[k]$ es el valor esperado del sensor sin ruido. $\eta_\theta[k]$ es el error propagado, que es una variable aleatoria con una desviación estándar $\sigma_\theta[k]$. Como mencionamos en la sección anterior, para una desviación estándar dada, la distribución que maximiza la entropía es la normal. Por lo tanto, para obtener un límite de entropía, asumimos que $\eta_\theta[k]$ es una distribución normal de media cero con desviación estándar $\sigma_\theta[k]$.

Para evaluar el rendimiento del controlador diseñado, usamos ΔS^{th} dado en la ecuación (9) y configurando $\sigma_k^a = \sigma_\theta[k]$. En el apéndice se muestra un método para obtener un valor estimado

de $\sigma_\theta[k]$, teniendo en cuenta que es la desviación estándar de una distribución normal. También usamos el coste de control, que puede tener múltiples definiciones, pero elegimos la Integral de Error Absoluto (IAE), que tiene la forma general.

$$J = \int_0^{t_{ss}} |e(t)| dt. \quad (13)$$

Donde $e(t)$ es la señal de error, que se integra de $t = 0$, cuando la referencia comienza a cambiar, a $t = t_{ss}$ cuando el sistema está en estado estable.

En este ejemplo, el sistema de control intenta sostener el péndulo. Su posición inicial es $\theta = \frac{\pi}{4}$, y evoluciona a $\theta = 0$. Realizamos varias simulaciones de esta maniobra con diferentes ruidos de sensor. La figura 3 (a) muestra el costo de control y la entropía para diferentes desviaciones estándar del sensor σ_s . Cuando la desviación estándar aumenta, el estado estimado es más inexacto y, por lo tanto, la entropía también aumenta. Las acciones del controlador son aún más inexactas y, en consecuencia, el costo de control también aumenta.

La figura 3 (b) muestra el costo de control y la entropía para diferentes ángulos α . En este caso, la entropía no aumenta porque la desviación estándar estimada para θ es similar en todas las simulaciones. Por otro lado, el costo de control aumenta porque los parámetros del controlador no se configuran teniendo en cuenta el nuevo ángulo.

Si medimos un incremento de entropía como en la figura 3 (a), las fuentes de ruido deben revisarse antes de establecer nuevos valores en los parámetros del sistema de control. Por otro lado, si la entropía relativa es menor que un valor específico, podemos relajar los recursos en el estimador y asignarlos a otras unidades. Por tanto, es posible detectar si las desviaciones se deben a un estado estimado incorrecto, a causa del ruido, o a un ajuste de control impreciso, lo que permite reconfigurar el sistema con mayor precisión. En sistemas más complejos, con más sensores y con más variables de estado, este método permite adquirir más información útil que usando solamente costes de control.

4. CONCLUSIÓN

En este artículo, hemos presentado una descripción de la entropía relativa para sistemas de control. El enfoque propuesto permite detectar las fuentes de error en el funcionamiento del control o los procesos que pueden transferir recursos computacionales a otros, mejorando su rendimiento total. Hemos demostrado, mediante la simulación de un péndulo invertido, la aplicabilidad del método.

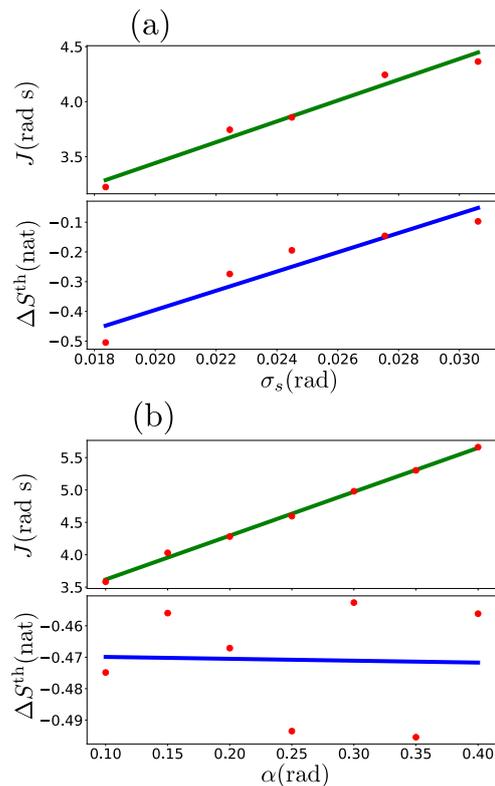


Figura 3: Coste de control J y entropía relativa ΔS^{th} para diferentes desviaciones estándar del sensor σ_s (a) y ángulo α con la horizontal (b).

5. APÉNDICE

σ_k^a es una variable desconocida y debe estimarse. Dividimos el tiempo de simulación en M rodajas de longitud T . Hacemos N medidas en este intervalo de tiempo, obteniéndose el valor y_k , que se puede expresar como

$$y_{k,i} = x_{k,i} + \sigma_{k,i}^a, \quad (14)$$

donde $k = (1, \dots, N)$, $i = (1, \dots, M)$ y $x_{k,i} = x(kT_s + iT)$ es el estado del sistema en el momento $kT_s + iT$. La evolución del sistema en el período de tiempo T puede ser aproximadamente como

$$x_i(t) = a_i + b_i t, \quad (15)$$

donde a_i y b_i son constantes que se estiman con el método de mínimos cuadrados. Entonces σ_k^a se puede estimar como

$$\hat{\sigma}_i^a = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^N (y_{k,i} - x_{k,i})^2. \quad (16)$$

La diferencia entre la entropía estimada en el momento iT y la entropía umbral es $\Delta \hat{S}_i^{th} = \ln \frac{\sigma_i^{th}}{\hat{\sigma}_i^a}$. Finalmente, teniendo en cuenta todos los interva-

los de tiempo, obtenemos:

$$\Delta \hat{S}^{\text{th}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Delta \hat{S}_i^{\text{th}} \quad (17)$$

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto CPS4EU de la Comisión Europea (ECSEL-JU, contract 826276).

English summary

PERFORMANCE OPTIMIZATION IN CONTROL SYSTEMS USING ENTROPY

Abstract

We calculate, analyze and measure the relative entropy in control systems. The data obtained can be used to detect a source of malfunction or to adjust the computation resource of the components improving its performance. We evaluate the advantage of the method through a simulation experiment.

Keywords: Entropy, control systems, rate adaptation, control performance.

Referencias

- [1] J. Bechhoefer, “Feedback for physicists: A tutorial essay on control”, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 77, pp. 783, 2005.
- [2] F. J. Cao and M. Feito, “Thermodynamics of feedback controlled systems”, *Phys. Rev.*, vol. 79, 2009.
- [3] X. Dai and A. Burns, “Period Adaptation of Real-Time Control Tasks with Fixed Priority Scheduling”, 2019.
- [4] M. M. Ben Gaid, Arben Cela, Yskandar Hamam, and Cosmin Ionete. “Optimal scheduling of control tasks with state feedback resource allocation”, In *American Control Conference*, 2006, pages 6–pp. IEEE, 2006.
- [5] C. Lozoya, P. Marti, M. Velasco, and J. M. Fuertes. “Control performance evaluation of selected methods of feedback scheduling of real-time control tasks”. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):10668–10673, 2008.

- [6] T. M. Cover and J. A. Thomas, “Elements of Information Theory” (Wiley, New York, 1991).
- [7] J. Peters, K. Mülling, and Y. Altun, “Relative entropy policy search”. In *AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2010.
- [8] S.Y. Liang, L.H. Rogelio, G.L. Robert “Machining process monitoring and control: the state-of-the-art”. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, pp. 297-310, 126 (2004)
- [9] A. Cervin, J. Eker, and L. Sha. “An introduction to control and scheduling co-design”. In *Decision and Control*, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on, volume 5, pages 4865–4870. IEEE, 2000



© 2021 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution CC BY-NC-SA 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>).