

CÁLCULO DE FUERZAS DE CONTACTO PARA PRENSIONES BIMANUALES

Abiud Rojas-de-Silva

Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona, francisco.abiud.rojas.de.silva@upc.edu

Raúl Suárez

Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials (IOC)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Barcelona, raul.suarez@upc.edu

Resumen

En este artículo se presenta un método para calcular fuerzas de contacto para prensiones bimanuales. El método propuesto utiliza dos funciones de coste para optimizar la distribución de la fuerza de las manos con las que se realiza la prensión bimanual y para minimizar la fuerza ejercida por los dedos. Las funciones de coste y las restricciones del problema de optimización se han formulado en función de los torques de las articulaciones tomando como base la relación existente entre las fuerzas de contacto, la matriz jacobiana de la mano y los torques de las articulaciones. Adicionalmente se presenta un índice para medir la distribución de la fuerza entre las manos. El artículo incluye algunos ejemplos prácticos del enfoque propuesto.

Palabras clave: Fuerzas de contacto, prensiones bimanuales, optimización.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la manipulación de objetos realizado por seres humanos es un tópico que ha sido analizado a lo largo de varios años, cuyos resultados han generado una vasta fuente de conocimiento que ha sido utilizado en diferentes dominios, por ejemplo en el área de rehabilitación con el desarrollo de dispositivos protésicos y en el área de robótica con el diseño de dispositivos mecánicos para sujetar objetos, así como la implementación de estrategias teóricas para calcular configuraciones adecuadas para tales dispositivos a fin de sujetar los objetos de forma robusta.

El uso de dispositivos mecánicos, tales como pinzas o manos mecánicas para sujetar y manipular objetos conlleva el desarrollo de dos fases [4], la primera es la *síntesis de la prensión*, que consiste en encontrar los puntos de contacto sobre la superficie del objeto que sean alcanzables por la

mano, cumpliendo al mismo tiempo algunas restricciones básicas; la segunda fase puede denominarse como la *fase de sostenimiento* que consiste en mantener la prensión del objeto mientras es manipulado. Para ello es necesario calcular las fuerzas que los dedos de la mano deben ejercer sobre el objeto con la finalidad de contrarrestar las perturbaciones externas que pueden aparecer durante su manipulación. La fase de sostenimiento ha sido ampliamente estudiada, en la sección 2 se discuten algunos trabajos relacionados. Sin embargo, con el desarrollo de sistemas robóticos bimanuales equipados con manos antropomorfas se añade un grado de complejidad extra en la búsqueda de prensiones bimanuales y sus correspondientes fuerzas de contacto.

En este trabajo se presenta un método para calcular fuerzas de contacto para sistemas robóticos bimanuales considerando las limitaciones de torque en las articulaciones de las manos. Adicionalmente se propone un índice que describe la distribución de las fuerzas entre las manos del sistema bimanual.

2. TRABAJOS RELACIONADOS

El cálculo de las fuerzas de contacto para compensar perturbaciones externas se ha abordado a través de diferentes enfoques. Uno de los primeros enfoques dio solución al problema utilizando la matriz de la prensión y descomponiendo las fuerzas de contacto en dos componentes: las fuerzas de manipulación y las fuerzas de prensión [16, 10]. Estas dos componentes son conocidas como las soluciones particular y homogénea del problema de las fuerzas de contacto para prensiones estáticas. Las fuerzas de contacto pueden encontrarse resolviendo la componente homogénea del problema, conocida también como *las fuerzas internas* de la prensión. Algunos investigadores han caracterizado estas fuerzas internas como enlaces virtuales con actuadores virtuales que representan el objeto sujetado de tal manera que cuando una fuerza

se aplica en cada uno de los puntos de contacto se generan fuerzas articulares en el mecanismo virtual [20, 22]. Muchos de los primeros trabajos que adoptaron el concepto de las fuerzas internas para calcular las fuerzas de contacto solo consideraban presiones de precisión, i.e., contactando solo con la yema de los dedos [1, 6, 14]. Sin embargo en trabajos posteriores se demostró que en las presiones envolventes (usando toda la mano y no solo la yema de los dedos) existen contactos que ejercen fuerzas no controlables sobre el objeto [2, 3]. Este hecho se ha analizado descomponiendo el espacio de fuerzas de contacto en cuatro subespacios que representan las fuerzas activas y pasivas y las fuerzas internas controlables y no controlables [23, 24, 25].

El uso de las fuerzas internas del objeto para calcular las fuerzas de contacto implica la formulación de un problema con una gran cantidad de variables y con un infinito número de posibles soluciones. Para hacer frente a este tipo de problemas se han utilizado diferentes tipos de optimización con la finalidad de obtener las fuerzas de contacto óptimas, o al menos encontrar una solución subóptima. La mayoría de los métodos de optimización utilizados han tenido que hacer frente a la no linealidad de los modelos de fricción de los contactos modelándolos como matrices de inequaciones [8, 21], matrices simétricas [4] o bien modelando el problema entero de forma que cumpla los requerimientos necesarios para ser resuelto como un problema dual de programación lineal [7].

Uno de los principales retos en el cálculo de las fuerzas de contacto consiste en desarrollar métodos que permitan calcularlas tan rápido como sea posible de forma que puedan ser utilizados en aplicaciones de ejecución en tiempo real. Para ello se han utilizado enfoques de optimización convexa y optimización con gradientes que permiten encontrar soluciones óptimas o subóptimas con tiempos de computo relativamente pequeños [8, 13, 9, 5, 17].

El uso de métodos de optimización para calcular las fuerzas de contacto para sistemas bimanuales es un área de investigación activa debido a la complejidad que los sistemas bimanuales imponen, sin embargo los trabajos desarrollados en éste ámbito son escasos [12, 18]. Por tal motivo, en este trabajo se presenta un método para calcular las fuerzas de contacto para presiones bimanuales utilizando un método de optimización lineal considerando las limitaciones de torque de las articulaciones de los dedos de las manos. Adicionalmente, se propone un índice para medir la distribución de las fuerzas entre las manos.

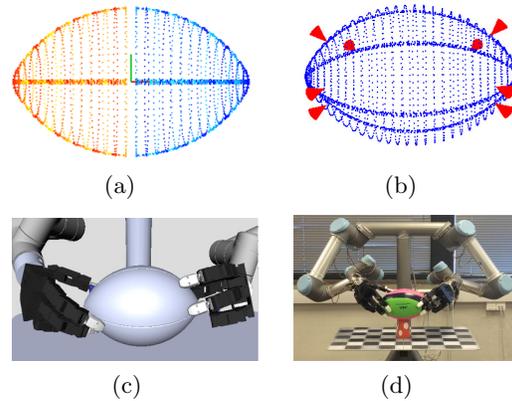


Figura 1: Planificador bimanual de presiones basado en un método de segmentación por rebanadas. a) El objeto es segmentado en rebanadas. b) Puntos de contacto obtenidos. c) Simulación de la presión bimanual. d) Ejecución de la presión bimanual en un sistema real.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En un trabajo previo, se presentó un planificador de presiones para objetos grandes utilizando sistemas bimanuales [15]. El alcance de ese trabajo incluye la búsqueda de los puntos de presión para dos manos en objetos grandes a través de la segmentación del objeto en rebanadas (Ver Fig.1). Durante la experimentación real los puntos sobre el objeto que son el objetivo de contacto de las manos se proyectaron una cierta distancia hacia el interior siguiendo la dirección del vector normal de la superficie del objeto en tales puntos con la finalidad de generar fuerzas de contacto lo suficientemente grandes utilizando solo el control de la posición de los dedos. Con ese enfoque es posible que la contribución de la fuerza entre las manos no esté balanceada. Por lo tanto, el problema a resolver consiste en calcular fuerzas de contacto adecuadas para presiones bimanuales con la finalidad de compensar perturbaciones externas durante la manipulación del objeto con una distribución uniforme de fuerzas entre las manos. Las suposiciones consideradas en el enfoque propuesto son las siguientes:

- Solo se consideran presiones de precisión con contactos rígidos con fricción (Sin embargo, el enfoque puede ser adaptado fácilmente para ser utilizado contactos blandos).
- La fricción entre el objetos y los dedos de la mano se describe mediante el modelo de fricción de Coulomb.
- Ambas manos utilizan igual número de dedos.
- El torque máximo es el mismo para todas las articulaciones de los dedos.

- El peso del objeto es conocido, e inicialmente es la única fuerza a ser compensada por las fuerzas de prensión.

4. ENFOQUE PROPUESTO

Dado el peso del objeto, se deben hallar las fuerzas que los dedos de la mano deben ejercer sobre el objeto para contrarrestarlo. La ecuación general que describe dicho balance de fuerzas se puede expresar como:

$$\mathbf{GF} = -\mathbf{w}_e \quad (1)$$

donde $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}^T$ es el vector de fuerzas aplicadas por los n dedos sobre el objeto, \mathbf{G} es la matriz de grasp y \mathbf{w}_e es la fuerza generalizada externa producida por el peso del objeto que debe ser compensado.

Con la finalidad de encontrar \mathbf{F} , se propone optimización con dos diferentes funciones de coste, una para minimizar la norma infinito (L_∞) del cociente entre los torques de las articulaciones de los dedos para una configuración dada y el máximo torque articular, y la segunda función para minimizar la norma de mínimos cuadrados (L_2) de los torques articulares de los dedos para una configuración dada, con la finalidad de balancear las fuerzas entre las manos y minimizar la fuerza ejercida por los dedos.

4.1. FORMULACIÓN DE LAS RESTRICCIONES DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Cuando una prensión es redundante (i.e., el número de puntos de contacto es mayor que el mínimo necesitado para sujetar un objeto), como en el caso de las prensiones bimanuales con mas de dos dedos por mano, existen infinitas combinaciones de fuerzas que podrían compensar una perturbación externa dada, sin embargo no todas esas combinaciones de fuerzas pueden ser ejercidas por los dedos. Con la finalidad de determinar las fuerzas que cada dedo puede ejercer, se considera una hipersfera en el espacio del torque articular expresada por:

$$\boldsymbol{\tau}_i^T \boldsymbol{\tau}_i = 1 \quad (2)$$

donde $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^m$ es el vector de los torques articulares del i -ésimo dedo con m articulaciones. La relación entre

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{J}_i^T \mathbf{f}_i \quad (3)$$

donde \mathbf{J}_i y \mathbf{f}_i son la matriz Jacobiana y la fuerza aplicada por el i -ésimo dedo, proyecta la esfera

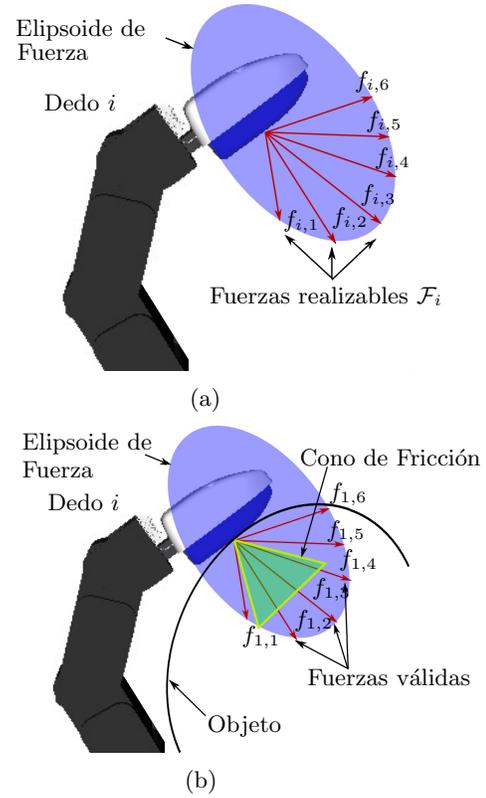


Figura 2: a) Ejemplo ilustrativo de las fuerzas realizables pertenecientes al Elipsoide de Fuerza de un dedo para una configuración articular dada y $|\boldsymbol{\tau}_i| \leq 1$. b) Fuerzas realizables válidas para un coeficiente de fricción dado.

unitaria de torque en un elipsoide en el espacio de fuerzas de las yemas de los dedos,

$$\mathcal{F}_i^T \mathbf{J}_i \mathbf{J}_i^T \mathcal{F}_i = 1 \quad (4)$$

El elipsoide representado en (4) indica las fuerzas $\mathcal{F}_i = \{\mathbf{f}_{i,j}, \dots, \mathbf{f}_{i,\infty}\}$ que cada dedo puede ejercer con un conjunto de torques $|\boldsymbol{\tau}_i| \leq 1$ para una configuración dada (ver Fig.2-a). Por lo tanto, si se conoce el máximo torque de las articulaciones de un dedo, es posible calcular la fuerza \mathbf{f}_i que éste puede hacer para una configuración específica a través de:

$$\mathbf{f}_i = (\mathbf{J}_i^\dagger)^T \boldsymbol{\tau}_i \quad (5)$$

donde \mathbf{J}_i^\dagger es la matriz pseudo inversa de \mathbf{J}_i . Dado que \mathbf{F} in eq. (1) representa las fuerzas ejercidas por n dedos, eq. (5) se puede extender de manera que:

$$\mathbf{F} = (\mathcal{J}^\dagger)^T \boldsymbol{\mathcal{T}} \quad (6)$$

donde $\mathcal{J}^\dagger = \text{diag}(\mathbf{J}_1^\dagger, \dots, \mathbf{J}_n^\dagger)$ es la matriz diagonal a bloques de las matrices jacobianas pseudo invertidas de n dedos y $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{\boldsymbol{\tau}_{1,1}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{n,m}\}^T$ es el vector que contiene los torques articulares de los n dedos.

Reemplazando eq. (6) en eq. (1) es posible contrarrestar \mathbf{w}_e considerando el espacio del torque articular:

$$\mathbf{G}(\mathcal{J}^\dagger)^T \mathcal{T} = -\mathbf{w}_e \quad (7)$$

Adicionalmente, para evitar que los dedos se deslicen sobre el objeto como consecuencia de las fuerzas aplicadas, éstas deben estar dentro de los correspondientes conos de fricción (ver Fig. 2-b) definidos por:

$$\frac{\mathbf{f}_i}{\|\mathbf{f}_i\|} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (8)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_i$ es la normal unitaria en el i -ésimo punto de contacto y μ es el coeficiente de fricción entre los dedos y el objeto. Por conveniencia, eq. (8) puede expresarse como:

$$\mathbf{f}_i^T (I - (1 + \mu^2) \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i^T) \mathbf{f}_i \leq 0 \quad (9)$$

y extendiendo la ineq (9) para los n dedos se obtiene:

$$\mathbf{F}^T (I - (1 + \mu^2) \mathcal{N}) \mathbf{F} \leq 0 \quad (10)$$

donde $\mathcal{N} = \text{diag}(\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{n}}_n^T)$ es la matriz diagonal a bloques de $\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i^T$ de los n dedos.

Usando la eq. (6), la eq. (10) puede ser reformulada como:

$$\mathcal{T}^T \mathbf{B} \mathcal{T} \leq 0 \quad (11)$$

donde $\mathbf{B} = \mathcal{J}^\dagger (I - (1 + \mu^2) \mathcal{N}) (\mathcal{J}^\dagger)^T$.

Si se formula un problema de optimización para balancear la contribución de fuerza entre las manos o para minimizar la fuerza ejercida por los dedos en función de los torques articulares, las eq. (7) y (11) pueden ser utilizadas como restricciones del problema y el máximo torque articular τ_{max} puede utilizarse como límites superiores e inferiores de las variables que se optimizarán, de forma que el problema de optimización puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathcal{T}}{\text{minimizar}} \quad \Phi \\ & \text{sujeto a} \quad -\tau_{max} \leq \mathcal{T} \leq \tau_{max} \\ & \quad \mathcal{T}^T \mathbf{B} \mathcal{T} \leq 0 \\ & \quad \left\| \mathbf{G}(\mathcal{J}^\dagger)^T \mathcal{T} + \mathbf{w}_e \right\|^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

donde Φ es una representación genérica de una función de coste.

4.2. FUNCIONES DE COSTE

Dos funciones de coste diferentes fueron seleccionadas para realizar la optimización de las fuerza

de contacto. La primera permite una distribución uniforme de las fuerza entre los dedos de las manos, lo que significa que para una prensión bimanual si cada mano usa el mismo número de dedos, las fuerzas que aportan las mano deberían estar balanceadas. Esta función de coste está basada en la minimización de la norma infinito (L_∞) del vector de torque \mathcal{T} dividido entre el máximo torque articular τ_{max}

$$\Phi_0 = \left\| \frac{\mathcal{T}}{\tau_{max}} \right\|_{L_\infty} \quad (13)$$

La segunda función de coste permite minimizar la magnitud del vector de torques \mathcal{T} que eventualmente podría minimizar las fuerzas ejercidas por los dedos. Sin embargo, a diferencia de la primera función de coste, ésta no puede asegurar una distribución proporcional de las fuerzas entre los dedos de las manos. Esta función de coste está basada en la minimización de la norma de mínimos cuadrados (L_2) del vector de torque \mathcal{T} ,

$$\Phi_1 = \|\mathcal{T}\|_{L_2} \quad (14)$$

Para resolver el problema con el menor tiempo de computo posible, se utilizó un algoritmo basado en gradientes descendentes [19] implementado en el paquete NLOpt [11]. Por tal motivo es necesario formular los gradientes de las funciones de coste y de las restricciones del problema calculando sus derivadas parciales en función de \mathcal{T} .

El gradiente de la función de coste Φ_0 es:

$$\nabla \Phi_0 = \begin{cases} \frac{\tau_i}{\tau_{max}}, & \text{if } \tau_i = \tau_{max_i}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (15)$$

y el gradiente de la función de coste Φ_1 es:

$$\nabla \Phi_1 = 2\mathcal{T} \quad (16)$$

y los gradientes de las restricciones de la eq. (12) son:

$$\begin{aligned} \nabla c_1 &= 2\mathcal{T}^T \mathbf{B} \\ \nabla c_2 &= 2(\mathbf{G}(\mathcal{J}^\dagger)^T \mathcal{T} + \mathbf{w}_e)^T \mathbf{G}(\mathcal{J}^\dagger)^T \end{aligned} \quad (17)$$

4.3. INDICE DE DISTRIBUCIÓN DE FUERZA

Con la finalidad medir la distribución de fuerzas entre las manos que intervienen en una prensión bimanual se ha propuesto el Índice de Distribución de Fuerza (IDF):

$$FDI = \frac{H_1^f}{H_2^f} \quad (18)$$

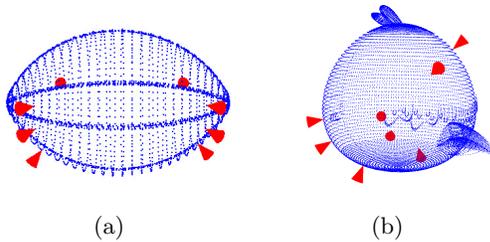


Figura 3: Puntos de contacto para un balón de rugby y un juguete.

donde $H_j^f = \sum_{i=0}^{n/2} \|\mathbf{f}_i\|$ es la suma de las magnitudes de las fuerzas ejercidas por los dedos de la mano j , $j \in \{1, 2\}$ con $j = 1$ correspondiente a la mano con la menor sumatoria, i.e $H_1^f < H_2^f$. IDF indica la distribución de la fuerza entre las manos, cuando este índice tiende a uno significa que las fuerzas están balanceadas entre las dos manos y tiende a cero cuando la contribución de fuerza de cada mano está en desequilibrio.

5. EXPERIMENTACIÓN

Para demostrar el desempeño del enfoque propuesto, se han usado dos objetos, un balón de rugby y un juguete. Para cada objeto se calculó una presión bimanual (ver Fig. 3-a y 3-b). Para cada presión se calcularon las fuerzas de contacto optimizando las funciones de coste Φ_1 y Φ_2 con el peso original del objeto. Posteriormente se recalcularon las fuerzas de contacto en 9 ocasiones añadiendo 100 g al peso del objeto en cada una.

Las Tablas 1 y 2 muestran las fuerzas de contacto resultantes para contrarrestar las fuerzas generalizadas $\mathbf{w}_e^{Rug} = [0, 0, -2,13858, 0, 0, 0]^T$ y $\mathbf{w}_e^{Toy} = [0, 0, -3,500, 0, 0, 0]^T$ causados por el peso del balón de rugby y el juguete respectivamente.

El tiempo promedio para calcular las fuerzas de contacto es de 150 y 1500 ms, respectivamente para cada objeto.

La Fig. 4 muestra la contribución de fuerza de cada mano así como el Índice de Distribución de Fuerza (IDF) resultantes después de optimizar Φ_0 y Φ_1 para la presión bimanual del balón de rugby y del juguete. En las figuras 4-a y 4-b, se muestran las contribuciones de fuerza para las presiones bimanuales correspondientes a cada objeto. En ellas se muestran cuatro líneas: dos líneas continuas coloreadas en rojo y azul representan la contribución de fuerza de la mano izquierda y derecha respectivamente obtenidas a través de la optimización de la función de coste Φ_0 y dos líneas punteadas coloreadas en magenta y cian representan la distribución de las

fuerzas utilizando la función de coste Φ_1 . Como se puede apreciar, las líneas continuas presentan un patrón similar en cada iteración, indicando una distribución uniforme de las fuerzas entre las dos manos. Por otra parte, las líneas punteadas muestra una disparidad considerable entre ellas, sin embargo las magnitudes de las fuerzas son menores en comparación con las observadas en las líneas continuas.

Las figuras 4-c y 4-d, muestran el IDF para las dos funciones de coste. La línea roja representa los resultados obtenidos con Φ_0 y la línea azul los obtenidos con Φ_1 . La línea roja siempre se encuentra por encima de 0.8 indicando que existe una buena distribución de fuerzas entre las manos que realizan la presión bimanual, lo cual es coherente con los resultados mostrados por las líneas continuas azul y roja en las gráficas 4-a y 4-b). Sin embargo, la línea azul está por debajo de 0.5 en casi todos los casos, indicando una pobre distribución de fuerza entre las manos. Debido a que la configuración articular de las manos depende de la localización de los puntos de contacto sobre el objeto, la aportación de fuerza que cada mano puede hacer puede variar considerablemente. Por lo tanto si la presión bimanual es simétrica las contribuciones de fuerza de las manos serán proporcionales obteniendo un IDF muy cercano a 1.

6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se ha presentado un método para optimizar las fuerzas de contacto para presiones bimanuales considerando los límites de los torques articulares de las manos. El método está basado en la optimización de la distribución de fuerzas entre las manos y la minimización de las fuerzas ejercidas por los dedos. La optimización se realizó utilizando dos funciones de coste diferentes. La primera minimiza permite balancear la contribución de fuerza entre las manos que intervienen en una presión bimanual. La segunda función de coste minimiza los torques articulares lo que eventualmente podría minimizar las fuerzas ejercida por los dedos de las manos.

Adicionalmente, se ha presentado un Índice de Distribución de Fuerza para medir el grado de distribución de la fuerza entre las manos que intervienen en una presión bimanual.

Los experimentos muestran buenos resultados utilizando cualquiera de las dos funciones de coste, con un tiempo de computo promedio de 150 y 1500 ms para cada objeto respectivamente. Finalmente el IDF ha mostrado que la función de

Tabla 1: Fuerzas de contacto resultantes para compensar el peso $\mathbf{w}_e = [0, 0, -2,13858, 0, 0, 0]^T$ del balón de rugby

\mathbf{f}^T	x	y	z	m_x	m_y	m_z
\mathbf{f}_1^T	1.682	-1.824	-0.903	-0.009	-0.040	0.063
\mathbf{f}_2^T	1.326	0.204	0.061	0.005	-0.013	-0.060
\mathbf{f}_3^T	-0.444	5.552	0.594	0.347	0.057	-0.270
\mathbf{f}_4^T	-0.504	-3.376	1.043	-0.223	0.068	0.112
\mathbf{f}_5^T	0.979	-1.378	1.945	0.132	-0.055	-0.105
\mathbf{f}_6^T	-1.435	1.792	-0.182	-0.058	-0.030	0.158
\mathbf{f}_7^T	-2.023	2.605	-0.950	-0.035	0.060	0.239
\mathbf{f}_8^T	0.419	-3.575	0.531	-0.164	-0.040	-0.143
$(\Sigma \mathbf{f})_{Rug}^T$	0.000	0.000	2.139	-0.004	0.006	-0.006
\mathbf{w}_e^{Rug}	0.000	0.000	-2.138	0.000	0.000	0.000

Tabla 2: Fuerzas de contacto resultantes para compensar el peso $\mathbf{w}_e = [0, 0, -3,500, 0, 0, 0]^T$ del juguete

\mathbf{f}^T	x	y	z	m_x	m_y	m_z
\mathbf{f}_1^T	1.838	-1.307	-0.618	0.525	-0.054	0.224
\mathbf{f}_2^T	0.955	0.364	0.269	0.047	0.019	-0.234
\mathbf{f}_3^T	-1.471	0.108	1.170	0.008	0.086	-0.010
\mathbf{f}_4^T	-1.320	0.304	0.822	-0.048	0.043	-0.102
\mathbf{f}_5^T	1.531	1.321	-0.222	-0.047	0.036	0.168
\mathbf{f}_6^T	-1.282	0.130	0.572	0.030	-0.032	0.076
\mathbf{f}_7^T	-0.148	-0.183	1.238	0.002	-0.082	-0.007
\mathbf{f}_8^T	-0.102	-0.737	0.218	-0.517	-0.010	-0.120
$(\Sigma \mathbf{f})_{Toy}^T$	0.001	-0.001	3.449	0.003	0.007	-0.005
\mathbf{w}_e^{Toy}	0.000	0.000	-3.500	0.000	0.006	-0.006

coste Φ_0 efectivamente permite una distribución uniforme de las fuerzas entre las manos. Por otra parte, utilizando la función de coste Φ_1 el IDF muestra una pobre distribución de fuerzas entre las manos. Sin embargo Φ_1 muestra que las fuerzas ejercidas son menores que las obtenidas a través de la optimización de Φ_0 .

Vale la pena remarcar que cuando los puntos de prensión de cada mano se encuentran distribuidos sobre el objeto de forma simétrica, el IDF podría alcanzar fácilmente valores muy cercanos a uno. Sin embargo, cuando la prensión bimanual no es simétrica, la distribución de la fuerza podría no estar totalmente balanceada pero existe un comportamiento uniforme en la contribución de fuerza de cada mano, es decir, que la fuerza ejercida por cada mano aumenta o disminuye proporcionalmente de acuerdo con la magnitud de la fuerza externa que actúa sobre el objeto.

Como trabajo futuro se planea: 1) implementar el enfoque propuesto junto con un controlador híbrido de posición-fuerza con la finalidad de realizar experimentación real, y, 2) generalizar el enfoque propuesto a casos en donde cada mano usa diferente número de dedos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de España a través de los proyectos DPI2013-40882-P y DPI2016-80077-R. A. Rojas-de-Silva fue parcialmente apoyado por la beca doctoral mexicana CONACyT 313768.

Referencias

- [1] M. Aicardi, G. Cannata, and G. Casalino. Grasp force planning for the coordinated Manipulation of Rigid Objects. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1525–1530, May 1992.
- [2] A. Bicchi. Force distribution in multiple whole-limb manipulation. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 2, pages 196–201, May 1993.
- [3] A. Bicchi and D. Prattichizzo. New Issues in the Kineto-Statics, Dynamics, and Control of Whole-Hand Manipulation. In T. Takamori and K. Tsuchiya, editors, *Robotics, Mechatronics and Manufacturing*

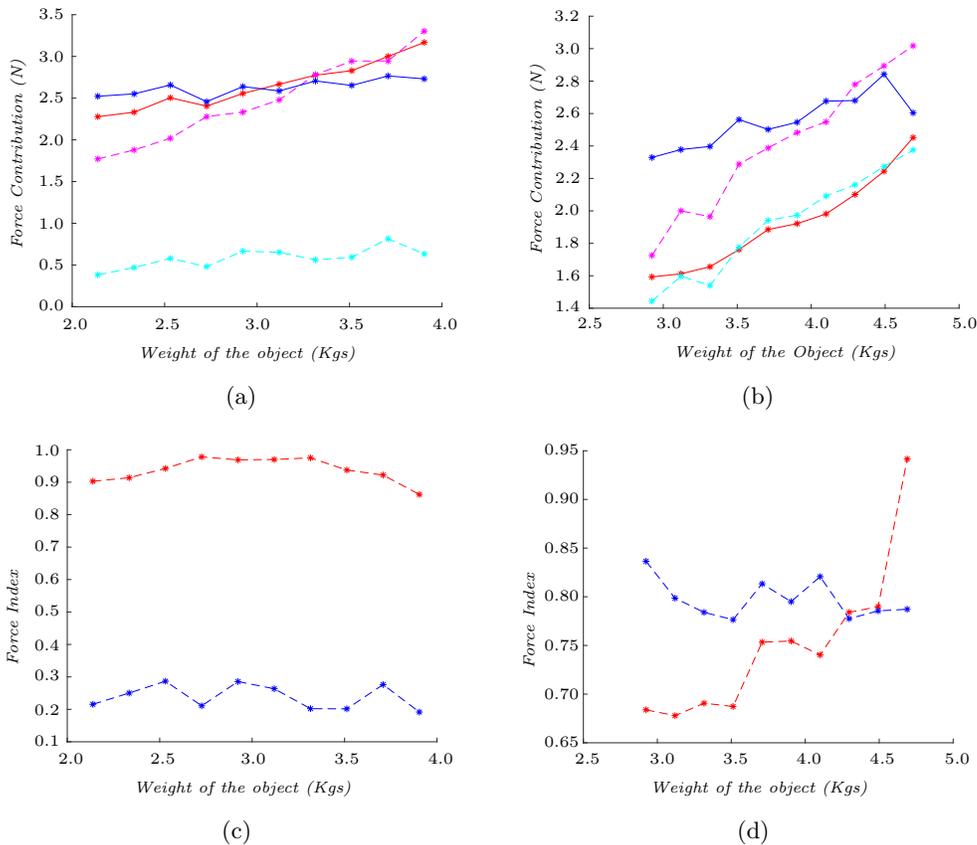


Figura 4: Gráficas de los resultados de la optimización de las fuerzas utilizando las funciones de coste Φ_0 y Φ_1 . a) y b) Contribución de fuerzas de cada mano para la presión correspondiente al balón de rugby y del juguete respectivamente: Las líneas continuas coloreadas en rojo y azul representan las contribuciones de fuerza de cada mano obtenidas a través de la optimización de Φ_0 y las líneas punteadas coloreadas en magenta y cyan representa las contribuciones de fuerzas obtenidas a través de la optimización de Φ_1 . c) y d) Índice de Distribución de Fuerza (IDF), la línea roja muestra los resultados obtenidos utilizando la función de coste Φ_0 y la línea azul muestra los resultados obtenidos utilizando la función de coste Φ_1

- Systems*, pages 373–3790. North Holland, Amsterdam, 1993.
- [4] M. Buss, H. Hashimoto, and J. B. Moore. Dextrous Hand Grasping Force Optimization. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(3):406–418, Jun 1996.
- [5] M. Buss, L. Faybusovich, and J. B. Moore. Dikin-type algorithms for dextrous grasping force optimization. *International Journal of Robotic Research*, 17(8):831–839, 1998.
- [6] D. P. Chevallier and S. Payandeh. On Computing the Friction Forces Associated with Three-Fingered Grasp. *International Journal of Robotics Research*, 13(2):119–126, 1994.
- [7] J. Cornella, R. Suárez, R. Carloni, and C. Melchiorri. Grasping force optimization using dual methods. In *8th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, volume 39, pages 629–634, 2006.
- [8] L. Han, J. C. Trinkle, and Z. X. Li. Grasp analysis as linear matrix inequality problems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(6):663–674, Dec 2000.
- [9] U. Helmke, K. Hper, and J. B. Moore. Quadratically converget algorithms for optimal dexterous hand grasping. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 168(2):138–146, 2002.
- [10] Z. Ji and B. Roth. Direct Computation of Grasping Force for Three-Finger Tip-Prehension Grasps. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 110(4):405–413, Dic 1988.
- [11] S. G. Johnson. The nlopt nonlinear-optimization package. URL <http://ab-initio.mit.edu/nlopt>.
- [12] V. Lippiello, B. Siciliano, and L. Villani. A grasping force optimization algorithm for dexterous robotic hands. In *IEEE International Conference on Robotics and*

- Automation (ICRA)*, pages 4170–4175, May 2012.
- [13] G. Liu and Z. Li. Real-time grasping-force optimization for multifingered manipulation: theory and experiments. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 9(1):65–77, March 2004.
- [14] B. Mirtich and J. Canny. Easily computable optimum grasps in 2-D and 3-D. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pages 739–747, May 1994.
- [15] A. Rojas-de Silva and R. Suárez. Grasping bulky objects with two anthropomorphic hands. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 877–884, Oct 2016.
- [16] J. K. Salisbury and B. Roth. Kinematic and Force Analysis of Articulated Mechanical Hands. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 105(1): 35–41, March 1983.
- [17] J. P. Saut, C. Remond, V. Perdereau, and M. Drouin. Online computation of grasping force in multi-fingered hands. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 1223–1228, Aug 2005.
- [18] A. M. Sundaram, O. Porges, and M. A. Roa. Planning realistic interactions for bimanual grasping and manipulation. In *IEEE-RAS 16th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pages 987–994, Nov 2016.
- [19] K. Svanberg. A class globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM Journal on Optimization*, 12(2):555–573, 2002.
- [20] D. Williams and O. Khatib. The virtual linkage: a model for internal forces in multi-grasp manipulation. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pages 1025–1030, May 1993.
- [21] Z. Xue, M. Schmidt, J. M. Zoellner, and R. Dillmann. Internal force computation of grasped object using joint torques. In *SICE Annual Conference*, pages 2795–2800, Aug 2008.
- [22] T. Yoshikawa. Virtual truss model for characterization of internal forces for multiple finger grasps. In 3, editor, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2389–2395, May 1998.
- [23] Y. Zhang and W. A. Gruver. Definition and force distribution of power grasps. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 2, pages 1373–1378, May 1995.
- [24] Y. Zhang and W. A. Gruver. Force distribution of power grasps based on the controllability of contact forces. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Intelligent Systems for the 21st Century*, volume 1, pages 83–88, Oct 1995.
- [25] Y. Zhang, F. Gao, and W. A. Gruver. Determination of contact forces in grasping. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, volume 3, pages 1038–1044, Nov 1996.