

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SINGULARIDADES AISLADAS EN ROBOTS PARALELOS MEDIANTE DESARROLLOS DE TAYLOR DE SEGUNDO ORDEN

Adrián Peidro, Óscar Reinoso, Arturo Gil, José María Marín, Luis Payá

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad Miguel Hernández, Avenida de la Universidad s/n, 03202 Elche (Alicante), España

{adrian.peidro, o.reinoso, arturo.gil, jmarin, lpaya}@goumh.umh.es

Resumen

Cuando el diseño geométrico de un robot paralelo es no-genérico, su lugar de las singularidades puede exhibir puntos aislados. Es bien sabido que dichos puntos aislados son inestables, ya que éstos se destruyen o generan/revelan cúspides cuando el diseño geométrico del robot se desvía ligeramente de un diseño no-genérico, afectando posiblemente a la habilidad del robot para reconfigurarse sin cruzar singularidades indeseables. Este artículo presenta un método basado en expansiones de Taylor de segundo orden para determinar cómo se transforman las singularidades aisladas cuando se perturban los diferentes parámetros geométricos de un robot no-genérico. El método propuesto consiste en aproximar el lugar de las singularidades por una curva cónica en el entorno de la singularidad aislada, para clasificar a continuación dicha cónica en función de las perturbaciones de los diferentes parámetros geométricos. El método presentado se ilustra mediante dos robots paralelos no-genéricos de ejemplo: los robots 3RPR y 2RPR-PR.

Palabras clave: Cúspide, Estabilidad, Robot paralelo, Serie de Taylor, Singularidad aislada

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta un método basado en desarrollos de Taylor de segundo orden para estudiar la estabilidad de singularidades cinemáticas aisladas en robots paralelos. Las singularidades aisladas son un tipo de singularidad de orden superior de gran importancia en la cinemática de estos robots, ya que guardan relación con la habilidad del robot para reconfigurarse y ampliar su espacio de trabajo sin atravesar singularidades indeseables.

Considérese un robot paralelo de 2 grados de libertad (GDL), como es habitual en el estudio de transiciones no-singulares [7], para poder visualizar las singularidades del robot en el plano. Si el robot tuviera más de 2 GDL, simplemente se bloquean todos sus actuadores salvo dos, o bien se analiza un sub-mecanismo independiente de 2 GDL del robot [13, 1]. Denotemos las coordenadas articula-

res actuadas (o variables de entrada) del robot por $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, y denotemos las variables de salida (que definen la posición y/u orientación de la plataforma móvil del robot) por $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$. Debido a la cinemática del robot, \mathbf{x} e \mathbf{y} están relacionadas mediante dos ecuaciones de entrada-salida:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{y} \quad f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (1)$$

donde f_1 y f_2 son funciones de restricción. El problema cinemático directo consiste en resolver \mathbf{y} del sistema (1) dado \mathbf{x} . Para un \mathbf{x} dado, generalmente este problema tiene varias soluciones distintas que suelen llamarse *modos de ensamblado*.

Este artículo se centra en las singularidades del problema cinemático directo, que son las configuraciones en las que $\det(\mathbf{J}) = 0$, donde $\mathbf{J} = \{j_{pq}\}$ es la matriz Jacobiana 2×2 formada por las derivadas de $\{f_1, f_2\}$ con respecto a las variables de salida: $j_{pq} = \frac{\partial f_p}{\partial y_q}$ ($p, q \in \{1, 2\}$). La condición $\det(\mathbf{J}) = 0$ define el lugar geométrico de las singularidades del robot, que es un conjunto de curvas singulares que pueden visualizarse en los planos (x_1, x_2) o (y_1, y_2) . Cuando el robot se aproxima a una curva singular en el plano (x_1, x_2) , al menos dos modos de ensamblado distintos convergen. Cuando se cruza una singularidad, se producen problemas de control de la plataforma móvil del robot.

En este artículo estamos interesados en analizar la estabilidad de los puntos aislados del lugar de las singularidades. Cuando el diseño geométrico de un robot paralelo satisface determinadas condiciones (que dependen de la arquitectura del robot), se dice que su geometría es *no-genérica* y, en tal caso, el lugar de las singularidades exhibe puntos aislados (u otras singularidades de orden superior [13]). Dichas singularidades aisladas son inestables, ya que se destruyen o se transforman en curvas cerradas cuspidales cuando la geometría del robot se desvía ligeramente de un diseño no-genérico debido a pequeñas tolerancias en la manufactura [13, 3, 2].

Como bien se sabe, trazando trayectorias que encierran las cúspides de las curvas singulares cuspidales en el plano (x_1, x_2) , el robot puede modificar su modo de ensamblado sin atravesar singularidades [15, 5, 4, 14, 9], lo cual es beneficioso para ampliar el rango de operación del robot sin

incurrir en pérdidas de control. Por tanto, perturbar la geometría de un robot no-genérico puede afectar a su habilidad para realizar tales transiciones no-singulares entre modos de ensamblado. Por ejemplo, si dicha perturbación transforma una singularidad aislada en una curva con cúspides, éstas permitirán al robot realizar transiciones no-singulares. Por el contrario, la perturbación podría destruir la singularidad aislada, perdiendo el robot la habilidad mencionada. Por consiguiente, es importante poder predecir cómo se transformarán las singularidades aisladas cuando la geometría de un robot no-genérico es perturbada.

Este artículo presenta un método para determinar cómo se transforman las singularidades aisladas de robots paralelos cuando su geometría no-genérica es ligeramente perturbada. Para tal fin, el lugar de las singularidades del robot se aproxima por su desarrollo de Taylor de segundo orden en el entorno de la singularidad aislada, lo que equivale a aproximar el lugar de las singularidades por una cónica (véase la Sección 2). Seguidamente, el análisis de estabilidad de la singularidad aislada se reduce a clasificar dicha cónica en función de las perturbaciones de los diferentes parámetros geométricos del robot. Este método se ilustra en las Secciones 3 y 4 mediante dos robots paralelos de ejemplo. Finalmente, la Sección 5 presenta las conclusiones y trabajos futuros.

2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD MEDIANTE DESARROLLOS CUADRÁTICOS DE TAYLOR

Esta sección presenta un método basado en desarrollos en series de Taylor de segundo orden para estudiar la estabilidad de singularidades aisladas. Asíumase que la siguiente ecuación define el lugar de las singularidades en el plano (y_1, y_2) :

$$S(\mathbf{y}, \mathbf{g}) = 0 \quad (2)$$

donde $S(\mathbf{y}, \mathbf{g}) = \det(\mathbf{J})$. Dado un robot paralelo con una geometría $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_d]^T$, la ecuación (2) define un conjunto de curvas singulares en el plano (y_1, y_2) . La forma concreta de dichas curvas dependerá de la geometría \mathbf{g} . Asíumase que para cierta geometría no-genérica \mathbf{g}_0 , las curvas singulares exhiben un punto aislado \mathbf{y}_0 . A continuación, se aproximará S por su desarrollo en serie de Taylor de segundo orden centrado en $(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0)$:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}, \mathbf{g}) &\approx S(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0) \\ &+ \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0) \right] \Delta \mathbf{y} + \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0) \right] \Delta \mathbf{g} \\ &+ [\Delta \mathbf{y}^T, \Delta \mathbf{g}^T] \frac{\mathbf{H}(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0)}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

donde \mathbf{H} es la Hessiana de S con respecto a \mathbf{y} y \mathbf{g} , $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, y $\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g} - \mathbf{g}_0$. Nótese que $S(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0) = 0$ debido a que el punto aislado \mathbf{y}_0 pertenece a las curvas singulares correspondientes a la geometría \mathbf{g}_0 . Además, dado que \mathbf{y}_0 es un punto aislado (por tanto, un punto crítico o especial) de dichas curvas, entonces:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0) = [0, 0] \quad (4)$$

lo cual justifica la necesidad de realizar un desarrollo en serie de Taylor hasta el término cuadrático [de otro modo, la ecuación (5) siguiente no definiría una curva en el plano (y_1, y_2)]. La sustitución de (3) en la ecuación (2) proporciona la ecuación que define el lugar de las singularidades en el entorno de la singularidad aislada \mathbf{y}_0 y de la geometría no-genérica \mathbf{g}_0 :

$$\mathbf{S}_g \Delta \mathbf{g} + [\Delta \mathbf{y}^T, \Delta \mathbf{g}^T] \frac{\mathbf{H}(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0)}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

donde $\mathbf{S}_g = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{g}_0)$. A continuación, fragmentamos la Hessiana \mathbf{H} en cuatro bloques:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{12}^T & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde los tamaños de las matrices \mathbf{H}_{11} , \mathbf{H}_{12} , y \mathbf{H}_{22} son 2×2 , $2 \times d$, y $d \times d$, respectivamente. Mediante esta partición de la matriz \mathbf{H} , podemos reescribir la ecuación (5) como sigue:

$$[\Delta \mathbf{y}^T, 1] \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}/2 & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T & u \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

donde:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{H}_{12} \Delta \mathbf{g}}{2} \quad y \quad u = \left(\Delta \mathbf{g}^T \frac{\mathbf{H}_{22}}{2} + \mathbf{S}_g \right) \Delta \mathbf{g} \quad (8)$$

La ecuación (7) define una cónica en el plano (y_1, y_2) . El tipo de cónica definida por dicha ecuación depende de la matriz de coeficientes \mathbf{C} [12]. Nótese que \mathbf{C} depende de la perturbación $\Delta \mathbf{g}$ de los parámetros geométricos del robot con respecto a la geometría no-genérica \mathbf{g}_0 . Por tanto, para estudiar cómo afectan dichas perturbaciones geométricas a la estabilidad de la singularidad aislada \mathbf{y}_0 , es suficiente con analizar y clasificar el tipo de cónica definida por \mathbf{C} en función de $\Delta \mathbf{g}$.

En las siguientes secciones, se aplicará este método para estudiar la estabilidad de singularidades aisladas en dos robots paralelos de ejemplo.

3. EJEMPLO 1: ROBOT 3RPR

En esta sección se aplicará el método propuesto para analizar la estabilidad de las singularidades aisladas del robot paralelo plano 3RPR. Este robot, mostrado en la Figura 1, está formado

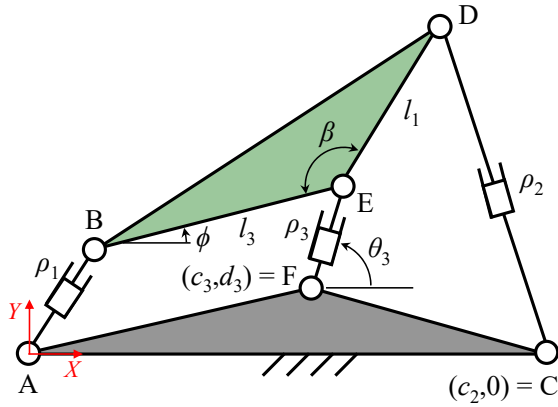


Figura 1: Robot paralelo plano 3RPR general.

por una plataforma fija AFC y una plataforma móvil BDE, estando ambas plataformas conectadas mediante tres cadenas de tipo RPR en paralelo. En este robot se emplean tres actuadores lineales $\{AB, CD, EF\}$, cuyas longitudes respectivas son $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, para controlar la posición y la orientación de la plataforma móvil BDE. La posición de la plataforma móvil puede parametrizarse mediante las coordenadas polares (ρ_3, θ_3) de la articulación E, mientras que su orientación puede parametrizarse mediante el ángulo ϕ .

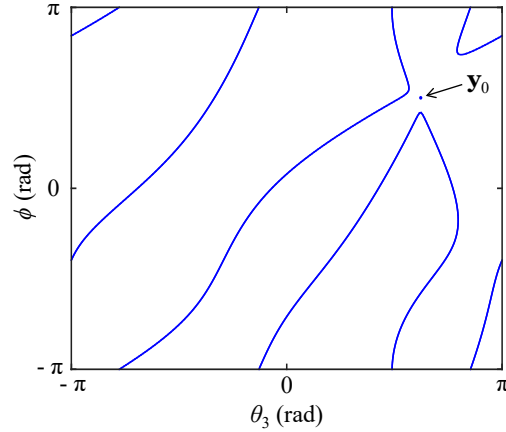
Para poder aplicar el método propuesto en la sección anterior, necesitamos trabajar con un robot de 2 GDL. Por tanto, en adelante consideraremos que bloqueamos la articulación prismática de la pata EF, de manera que su longitud ρ_3 se asumirá constante. De este modo, podremos analizar un robot de 2 GDL con variables de entrada $\mathbf{x} = [\rho_1, \rho_2]^T$ y variables de salida $\mathbf{y} = [\theta_3, \phi]^T$. El resto de parámetros indicados en la Figura 1 se considerarán como parámetros geométricos de diseño del robot, es decir: $\mathbf{g} = [c_2, c_3, d_3, l_1, l_3, \beta, \rho_3]^T$.

Para este robot, las ecuaciones que relacionan las variables de entrada y salida [ecuaciones (1)] se obtienen imponiendo las condiciones de que las longitudes de las patas AB y CD deben ser igual a ρ_1 y ρ_2 , respectivamente. Estas condiciones proporcionan las siguientes funciones de restricción:

$$f_1 = \left\| \begin{bmatrix} c_3 + \rho_3 \cos \theta_3 - l_3 \cos \phi \\ d_3 + \rho_3 \sin \theta_3 - l_3 \sin \phi \end{bmatrix} \right\|^2 - \rho_1^2 \quad (9)$$

$$f_2 = \left\| \begin{bmatrix} c_3 - c_2 + \rho_3 c_{\theta_3} + l_1 \cos(\phi + \pi - \beta) \\ d_3 + \rho_3 s_{\theta_3} + l_1 \sin(\phi + \pi - \beta) \end{bmatrix} \right\|^2 - \rho_2^2 \quad (10)$$

donde $s_{\theta_3} = \sin \theta_3$ y $c_{\theta_3} = \cos \theta_3$. El lugar de las singularidades en el plano de salida de este robot

Figura 2: Representación del lugar de las singularidades en el plano (θ_3, ϕ) , para un robot 3RPR con geometría no-genérica.

viene definido por la siguiente ecuación:

$$S(\mathbf{y}, \mathbf{g}) = \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \frac{\partial f_2}{\partial \phi} - \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} = 0 \quad (11)$$

La forma concreta del lugar de las singularidades definido por la ecuación (11) depende del valor de los parámetros geométricos \mathbf{g} . A continuación, analizaremos el lugar de las singularidades para la siguiente geometría no-genérica: $\mathbf{g}_0 = [1.4, 2, -1.5, 1.06, 1.1, 5.65 \text{ rad}, 2.800304375]^T$. Esta geometría es no-genérica porque se corresponde con un lugar de las singularidades que exhibe el siguiente punto aislado: $\mathbf{y}_0 = [1.953791747, 1.571336043]^T$ rad (véase la Figura 2). Esta singularidad aislada es una singularidad de orden superior conocida como *lips* [13], debido a la silueta que adquiere ésta en el plano de entrada (ρ_1, ρ_2) cuando se perturba ligeramente la geometría del robot. Esta singularidad aislada es inestable ya que, al desviar ligeramente de \mathbf{g}_0 la geometría del robot, el punto aislado \mathbf{y}_0 se transforma en una curva cerrada o se destruye, pudiéndose alterar la habilidad del robot para realizar transiciones no-singulares. Seguidamente, la aplicación del análisis de la Sección 2 nos permitirá conocer cómo se transforma \mathbf{y}_0 en función de cómo se desvíe de \mathbf{g}_0 la geometría del robot.

A continuación, considérese que todos los parámetros geométricos sufren una pequeña perturbación $\Delta \mathbf{g} = [\Delta c_2, \Delta c_3, \Delta d_3, \Delta l_1, \Delta l_3, \Delta \beta, \Delta \rho_3]^T$ que los aleja de la geometría no-genérica \mathbf{g}_0 indicada en el párrafo anterior. Sustituyendo \mathbf{y}_0 y \mathbf{g}_0 en la ecuación (7), se obtiene la ecuación de una curva cónica que es una aproximación del lugar de las singularidades perturbado en el plano (θ_3, ϕ) , donde:

$$\frac{\mathbf{H}_{11}}{2} = \begin{bmatrix} -11.8582 & 0.6271 \\ 0.6271 & -2.2934 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.9288 & -4.4937 \\ -2.6264 & 4.4935 \\ 14.9892 & -6.2409 \\ 8.8979 & 0.0256 \\ -22.3009 & 8.0256 \\ -3.0089 & 0.0440 \\ 14.3325 & -7.4679 \end{bmatrix}^T \Delta \mathbf{g} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u = & -2.5537\Delta c_2\Delta c_3 + 3.5688\Delta c_2\Delta d_3 \\ & + 7.9784\Delta c_2\Delta l_1 - 13.481\Delta c_2\Delta l_3 + 6.2140\Delta c_2\Delta \beta \\ & + 3.3911\Delta c_2\Delta \rho_3 - 2.4456\Delta c_2 + 2.5536\Delta c_3^2 \\ & - 5.4854\Delta c_3\Delta d_3 - 7.9347\Delta c_3\Delta l_1 + 16.382\Delta c_3\Delta l_3 \\ & - 6.2154\Delta c_3\Delta \beta - 6.1244\Delta c_3\Delta \rho_3 + 2.4422\Delta c_3 \\ & - 2.6245\Delta d_3^2 - 7.0749\Delta d_3\Delta l_1 + 6.6182\Delta d_3\Delta l_3 \\ & + 13.546\Delta d_3\Delta \beta - 3.9281\Delta d_3\Delta \rho_3 - 3.1068\Delta d_3 \\ & + 3.8633\Delta l_1\Delta l_3 - 0.013636\Delta l_1\Delta \beta - 3.5808\Delta l_1\Delta \rho_3 \\ & + 0.044585\Delta l_1 - 16.061\Delta l_3\Delta \beta + 1.4638\Delta l_3\Delta \rho_3 \\ & + 4.0521\Delta l_3 - 0.023632\Delta \beta^2 + 14.882\Delta \beta\Delta \rho_3 \\ & - 0.014455\Delta \beta - 1.3549\Delta \rho_3^2 - 3.7941\Delta \rho_3 \quad (14) \end{aligned}$$

El tipo de cónica definida por la ecuación (7) depende de \mathbf{H}_{11} , \mathbf{K} , y u [12]. En primer lugar, dado que $\det(\mathbf{H}_{11}) > 0$, entonces el lugar de las singularidades perturbado es una elipse (real o imaginaria). El tipo de elipse definida por la ecuación (7) dependerá del signo de $\omega = c_{11}\det(\mathbf{C})$, donde c_{11} es el primer elemento de la primera fila de \mathbf{C} : si $\omega > 0$, entonces la ecuación (7) define una elipse imaginaria, mientras que si $\omega < 0$, dicha elipse es real. Si $\omega = 0$, la elipse degenera en un único punto aislado. La perturbación $\Delta \mathbf{g}$ de los parámetros geométricos determinará el signo de ω y, por tanto, determinará el tipo de elipse en la que el punto aislado \mathbf{y}_0 se transforma cuando la geometría del robot se desvía ligeramente de \mathbf{g}_0 .

3.1. PERTURBACIÓN DE UN PARÁMETRO GEOMÉTRICO

Por simplicidad, considérese primero que únicamente se perturba el parámetro ρ_3 , es decir, $\Delta \mathbf{g} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, \Delta \rho_3]^T$. En tal caso:

$$\omega = (1206.22 - 11406.38\Delta \rho_3)\Delta \rho_3 \quad (15)$$

Representando gráficamente la ecuación (15) en la Figura 3, podemos identificar tres casos para perturbaciones $\Delta \rho_3$ suficientemente pequeñas:

- Si $\Delta \rho_3 < 0$, entonces $\omega < 0 \rightarrow$ el lugar de las singularidades es una elipse real.
- Si $\Delta \rho_3 > 0$, entonces $\omega > 0 \rightarrow$ el lugar de las singularidades es una elipse imaginaria.
- Si $\Delta \rho_3 = 0$, entonces $\omega = 0 \rightarrow$ el lugar de las singularidades es una elipse real que ha degenerado en el punto \mathbf{y}_0 .

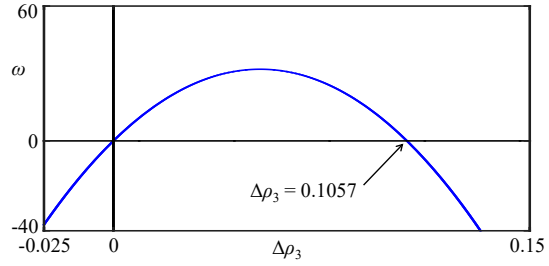


Figura 3: Variación de ω en función de $\Delta \rho_3$.

Por tanto, si partimos del valor no-genérico de ρ_3 y decrementamos ligeramente este parámetro geométrico, la singularidad aislada \mathbf{y}_0 se transforma en una pequeña elipse E_r en el plano (θ_3, ϕ) . Si, partiendo de $\Delta \rho_3 < 0$, incrementamos de forma continua ρ_3 haciendo tender $\Delta \rho_3$ a cero por la izquierda, el tamaño de E_r disminuye continuamente, hasta que esta pequeña elipse real degenera de nuevo en el punto \mathbf{y}_0 . Si la perturbación $\Delta \rho_3$ sigue incrementándose y se torna positiva, entonces el punto \mathbf{y}_0 se transforma en una elipse imaginaria, es decir, \mathbf{y}_0 desaparece del plano (θ_3, ϕ) .

La Figura 4a ilustra la transformación de \mathbf{y}_0 en una curva cerrada E_r aproximadamente elíptica, para la perturbación $\Delta \rho_3 = -0.00001$: la elipse definida por la ecuación (7) se representa mediante trazo punteado de color rojo, mientras que el lugar de las singularidades exacto [es decir, la curva definida por la ecuación (11)] se representa mediante trazo continuo de color azul. Nótese que la ecuación (7) es una precisa aproximación del lugar de las singularidades exacto para perturbaciones suficientemente pequeñas, mientras que para perturbaciones mayores dicha aproximación no es buena (por ejemplo, véase la Figura 4b, en la que $\Delta \rho_3 = -0.005$).

Resolviendo la cinemática inversa de este robot [es decir, resolviendo ρ_1 y ρ_2 de las ecuaciones (9) y (10) a partir de θ_3 y ϕ], es posible transformar la elipse real E_r al plano de entrada. La imagen de la elipse E_r en el plano de entrada es una pequeña curva cerrada con dos cúspides (véase la Figura 5). Es bien sabido que dichas cúspides permiten al robot reconfigurarse entre distintos modos de ensamblado sin cruzar singularidades. Por tanto, la destrucción de la elipse real E_r (cuando $\omega > 0$) provoca la destrucción de dichas cúspides, de manera que el robot pierde la anterior habilidad (reconfigurarse sin cruzar singularidades) en la región del plano (ρ_1, ρ_2) cercana a la curva cerrada bicúspide de la Figura 5 (aunque, como se observa en dicha figura, el lugar de las singularidades de este robot exhibe otras cúspides que no son destruidas junto con E_r y que siguen posibilitando reconfiguraciones no-singulares).

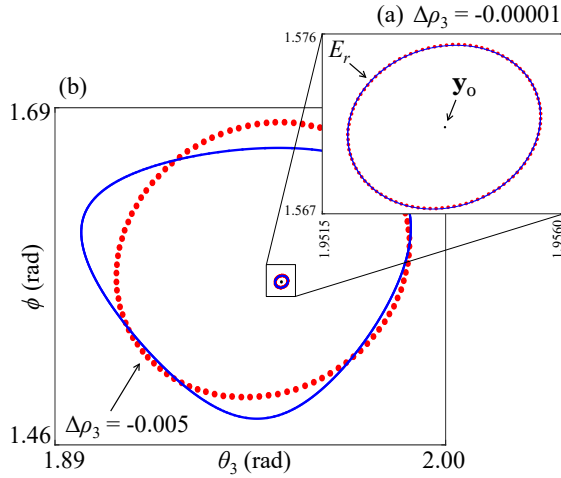


Figura 4: Cuando ρ_3 disminuye ligeramente, el punto aislado y_0 se transforma en una curva cerrada que puede aproximarse por una elipse.

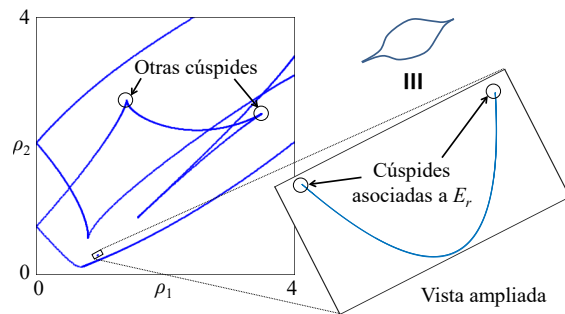


Figura 5: Lugar de las singularidades del robot 3RPR con $\Delta\rho_3 = -0.00001$. Se muestra una vista ampliada de la curva cerrada bicúspide que es la imagen de la elipse real E_r de la Figura 4a en el plano (ρ_1, ρ_2) .

Nótese que, según la Figura 3, ω se vuelve de nuevo negativa para $\Delta\rho_3 > 0.1057$, lo que implica que la elipse real E_r definida por la ecuación (7) reaparece de nuevo para $\Delta\rho_3 > 0.1057$. Esto podría llevar a pensar, erróneamente, que el lugar de las singularidades exacto [definido por la ecuación (11)] también debería exhibir una pequeña curva cerrada (de forma aproximadamente elíptica) en el plano (θ_3, ϕ) para $\Delta\rho_3 > 0.1057$, a causa de la reaparición de la elipse real E_r . Sin embargo, esto no es cierto ya que la perturbación $\Delta\rho_3 = 0.1057$ es demasiado grande para que la ecuación (7) siga siendo una aproximación válida del lugar de las singularidades exacto. Por tanto, el análisis del signo de ω en la ecuación (15) únicamente es válido para valores suficientemente pequeños de $|\Delta\rho_3|$.

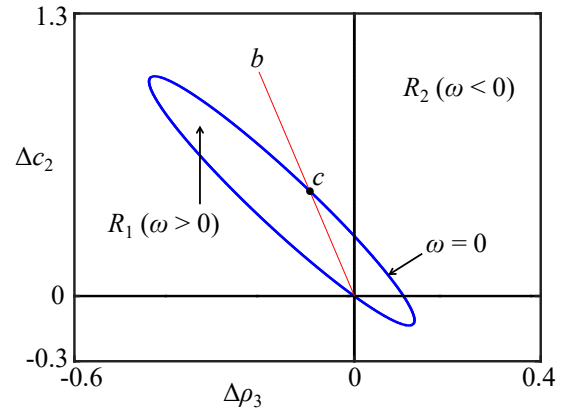


Figura 6: Variación del signo de ω en función de las perturbaciones $\Delta\rho_3$ y Δc_2 .

3.2. PERTURBACIÓN DE DOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS

A continuación, considérese que ρ_3 y c_2 son perturbados, es decir: $\Delta\mathbf{g} = [\Delta c_2, 0, 0, 0, 0, 0, \Delta\rho_3]^T$. En tal caso, la expresión de ω es:

$$\begin{aligned} \omega = & -2811.780\Delta c_2^2 - 10847.38\Delta c_2\Delta\rho_3 \\ & + 777.4378\Delta c_2 - 11406.38\Delta\rho_3^2 + 1206.22\Delta\rho_3 \end{aligned} \quad (16)$$

La Figura 6 muestra cómo varía el signo de ω en función de las perturbaciones $\Delta\rho_3$ y Δc_2 . El plano $(\Delta\rho_3, \Delta c_2)$ queda dividido en dos regiones por la elipse definida por $\omega = 0$: una región R_1 interior a esta elipse, y otra región R_2 exterior a ella. Dado que $\omega < 0$ en la región R_2 , para perturbaciones pertenecientes a la región exterior la ecuación (7) define una elipse real. Es decir, para $(\Delta\rho_3, \Delta c_2) \in R_2$, el punto aislado y_0 se deforma en una curva cerrada con forma aproximadamente elíptica, y ésta se transforma en una curva bicúspide cuando se transforma al plano (ρ_1, ρ_2) .

Para perturbaciones pertenecientes a la región R_1 se tiene que $\omega > 0$, luego la ecuación (7) define una elipse imaginaria. Esto significa que el punto y_0 desaparece, y el robot pierde la habilidad de reconfigurarse entre distintas soluciones del problema cinemático directo sin cruzar singularidades. La pérdida de esta habilidad es únicamente local, ya que, como muestra la Figura 5, el lugar de las singularidades de este robot exhibe otras cúspides que no se destruyen junto con y_0 .

Finalmente, es importante recalcar de nuevo que el comportamiento del lugar de las singularidades exacto [definido por la ecuación (11)] ante perturbaciones grandes no puede predecirse analizando las transformaciones sufridas por la elipse definida por la ecuación (7). Por ejemplo, si partimos

de la geometría no-genérica \mathbf{g}_0 (es decir, del origen $\Delta\rho_3 = \Delta c_2 = 0$) y perturbamos estos dos parámetros geométricos a lo largo del segmento b (véase la Figura 6), al atravesar el punto c (al pasar de la región R_1 a la región R_2) no observaremos la aparición de ninguna curva cerrada (con forma aproximadamente elíptica) en el lugar de las singularidades exacto, a pesar de que la elipse definida por la ecuación (7) pasa de imaginaria a real. Esto se debe a que cruzar el punto c requiere perturbaciones tan grandes que invalidan la aproximación cuadrática de la ecuación (7).

4. EJEMPLO 2: ROBOT 2RPR-PR

En esta sección se aplicará el método propuesto para analizar la estabilidad de las singularidades aisladas del robot 2RPR-PR, mostrado en la Figura 7. Este robot puede obtenerse bloqueando la orientación de la pata central del robot 3RPR mostrado en la Figura 1, de manera que la longitud de dicha pata central deja de ser una variable articular controlada y pasa a ser una variable pasiva. Aunque el robot de la Figura 7 puede obtenerse como caso particular del robot de la Figura 1, en este artículo no se ha empleado la misma notación para denotar las variables cinemáticas comunes a ambos robots, ya que se ha preferido respetar la notación empleada en [6] para el robot 2RPR-PR.

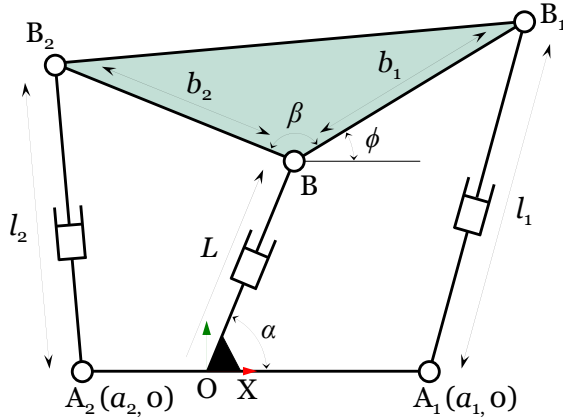


Figura 7: Robot paralelo 2RPR-PR.

El robot 2RPR-PR es un robot de 2 GDL en el que se emplean dos actuadores lineales A_1B_1 y A_2B_2 (con longitudes l_1 y l_2 , respectivamente) para controlar la posición y orientación de la plataforma móvil triangular BB_1B_2 . La articulación B está conectada a una guía o pata pasiva OB que forma un ángulo fijo α con el segmento A_2A_1 , de manera que la posición de la plataforma móvil queda totalmente definida por la posición L de la articulación B a lo largo de dicha guía. La orientación de la plataforma móvil está definida por ϕ .

La cinemática de este mecanismo paralelo de 2 GDL fue estudiada en [11], donde se proponía un robot articulado de tipo serpiente formado por varios mecanismos 2RPR-PR conectados en serie. En [10] se presentó un robot trepador para inspeccionar estructuras verticales; dicho robot estaba formado también por la combinación serie de 4 mecanismos paralelos de tipo 2RPR-PR. En [8] se presentó una herramienta gráfica para simular la cinemática y el control dinámico de este mecanismo paralelo. En [6] se analizó en detalle el problema cinemático directo de este mecanismo paralelo, poniendo especial énfasis en diseños geométricos no-genéricos para los que dicho problema se simplifica y admite solución analítica.

En [7] se estudiaron en detalle las singularidades y la multiplicidad de las soluciones del problema cinemático directo de uno de los diseños no-genéricos analizados en [6], caracterizado por $\alpha = \pi/2$ rad y $\beta = \pi$ rad. Tal diseño no-genérico implica que la guía pasiva OB es perpendicular al segmento A_2A_1 , y que las tres articulaciones BB_1B_2 están alineadas. En [7] se demostró que el lugar de las singularidades de dicho diseño no-genérico exhibe un punto aislado λ_π que, al rodearlo en el plano (l_1, l_2) , permite al robot reconfigurarse entre distintos modos de ensamblado sin cruzar singularidades. Aunque este fenómeno parecía ocurrir en ausencia de cúspides, en [3] se perturbó ligeramente este diseño no-genérico para demostrar que el punto aislado λ_π es en realidad una deltoide (curva cerrada con tres cúspides) degenerada en un punto, de manera que rodear el punto λ_π equivale a rodear tres cúspides "ocultas".

A continuación, se aplicará el método propuesto en el presente artículo para analizar la estabilidad de la singularidad aislada mencionada en el párrafo anterior. Para el robot de la Figura 7, las variables de entrada son las longitudes articulares: $\mathbf{x} = [l_1, l_2]^T$, mientras que las variables de salida son la posición y orientación de la plataforma móvil: $\mathbf{y} = [L, \phi]^T$. Los parámetros geométricos son: $\mathbf{g} = [a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta]^T$. Las funciones de restricción se obtienen de nuevo imponiendo la condición de que los actuadores lineales A_1B_1 y A_2B_2 tengan longitudes l_1 y l_2 , respectivamente:

$$f_1 = \left\| \begin{bmatrix} L \cos \alpha + b_1 \cos \phi - a_1 \\ L \sin \alpha + b_1 \sin \phi \end{bmatrix} \right\|^2 - l_1^2 \quad (17)$$

$$f_2 = \left\| \begin{bmatrix} L \cos \alpha + b_2 \cos(\phi + \beta) - a_2 \\ L \sin \alpha + b_2 \sin(\phi + \beta) \end{bmatrix} \right\|^2 - l_2^2 \quad (18)$$

El lugar de las singularidades de este robot está definido en el plano (L, ϕ) por la ecuación:

$$S(\mathbf{y}, \mathbf{g}) = \frac{\partial f_1}{\partial L} \frac{\partial f_2}{\partial \phi} - \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \frac{\partial f_2}{\partial L} = 0 \quad (19)$$

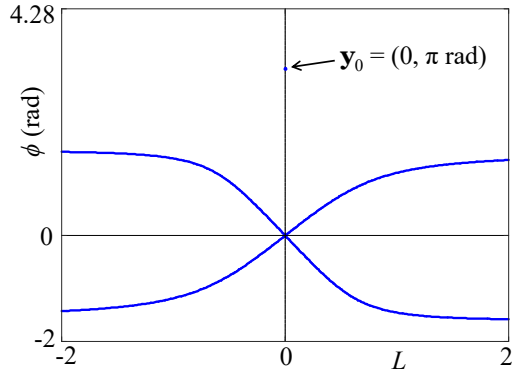


Figura 8: Lugar de las singularidades de un robot 2RPR-PR no-genérico.

A continuación se analizará el lugar de las singularidades de la geometría no-genérica estudiada en [7, 3], que está definida por: $\mathbf{g}_0 = [0.3, -0.7, 0.6, 0.5, \pi/2 \text{ rad}, \pi \text{ rad}]^T$. Como se ha indicado anteriormente, esta geometría implica que la guía pasiva OB es perpendicular a A_2A_1 , y que las tres articulaciones BB_1B_2 están alineadas.

La Figura 8 representa el lugar de las singularidades en el plano (L, ϕ) para la geometría no-genérica \mathbf{g}_0 indicada en el párrafo previo. Dicho lugar de las singularidades exhibe un punto aislado $\mathbf{y}_0 = [0, \pi \text{ rad}]^T$. Seguidamente, se aplicará el análisis presentado en la Sección 2 para estudiar la estabilidad de esta singularidad aislada. Asíumase que todos los parámetros geométricos se desvían ligeramente de \mathbf{g}_0 , es decir: $\Delta \mathbf{g} = [\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta b_1, \Delta b_2, \Delta \alpha, \Delta \beta]^T$. Sustituyendo \mathbf{y}_0 y \mathbf{g}_0 en la ecuación (7), la cual es una aproximación del lugar de las singularidades en el plano (L, ϕ) en la vecindad de \mathbf{y}_0 , resulta en:

$$\frac{\mathbf{H}_{11}}{2} = \begin{bmatrix} 4.4 & -0.34 \\ -0.34 & 1.2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{K} = [-0.54\Delta\alpha - 0.1\Delta\beta, 0.6\Delta\beta - 1.062\Delta\alpha]^T \quad (21)$$

$$u = -1.26\Delta\alpha\Delta\beta \quad (22)$$

Nótese que, a pesar de que se han perturbado todos los parámetros geométricos, según las ecuaciones (21) y (22), la transformación de la singularidad aislada \mathbf{y}_0 únicamente depende de las perturbaciones en α y β . Éstos son, precisamente, los únicos dos parámetros geométricos que determinan si \mathbf{g}_0 es una geometría genérica o no, como ya se ha explicado anteriormente. Esto contrasta con el ejemplo de la Sección 3, donde la transformación sufrida por la singularidad aislada dependía de las perturbaciones en todos los parámetros geométricos del robot [véanse las ecuaciones (13) y (14)].

Dado que $\det(\mathbf{H}_{11}) > 0$, la ecuación (7) define una elipse real o imaginaria, en función del signo

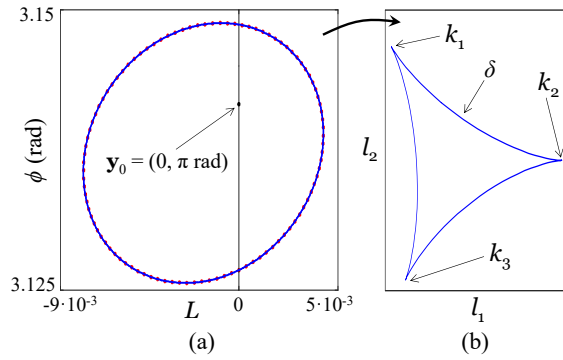


Figura 9: (a) Lugar de las singularidades aproximadamente elíptico cerca de \mathbf{y}_0 , para $\Delta\alpha = \Delta\beta = -0.01 \text{ rad}$. (b) La imagen de esta elipse en el plano (l_1, l_2) es una deltoide con cúspides $k_1 \approx (0.89996, 1.20002)$, $k_2 \approx (0.90009, 1.19996)$, y $k_3 \approx (0.89997, 1.19990)$.

de $\omega = c_{11}\det(\mathbf{C})$:

$$\omega = -0.228096(110\Delta\alpha^2 + 17\Delta\alpha\Delta\beta + 30\Delta\beta^2) \quad (23)$$

ω en la ecuación (23) es una forma cuadrática definida negativa, es decir, $\omega < 0 \forall (\Delta\alpha, \Delta\beta) \neq (0, 0)$. Por tanto, si cualquiera de los dos parámetros geométricos $\{\alpha, \beta\}$ se desvía de su valor no-genérico, entonces la ecuación (7) define una elipse real en el plano (L, ϕ) , independientemente de la dirección de dichas perturbaciones. Esto significa que el punto aislado \mathbf{y}_0 del lugar de las singularidades exacto *siempre* se deforma en una pequeña curva cerrada que puede aproximarse por una elipse si las perturbaciones son suficientemente pequeñas.

Si dicha elipse se transforma al plano (l_1, l_2) , ésta se convierte en una deltoide δ , que es una curva cerrada que exhibe tres cúspides (véase el ejemplo de la Figura 9). Como ya se ha comentado con anterioridad, esta deltoide permite a este robot modificar su modo de ensamblado sin atravesar singularidades si se rodea cualquiera de sus cúspides en el plano (l_1, l_2) . Si se rodea la deltoide entera (es decir, sus tres cúspides simultáneamente), se produce un efecto similar [3].

Comparando el análisis presentado en esta sección con el de la Sección 3, se observa claramente la diferencia de estabilidad entre las singularidades aisladas estudiadas en ambas secciones. Mientras que la singularidad aislada analizada en la Sección 3 (singularidad tipo *lips*) puede destruirse aplicando las perturbaciones apropiadas (es decir, aquellas perturbaciones que hacen $\omega > 0$), provocando la destrucción de dos cúspides, la singularidad aislada estudiada en la presente sección no puede destruirse, ya que cualquier perturbación *siempre* la transforma en una pequeña elipse cuya imagen en

el plano de entrada es una deltoide. Esto ilustra el hecho de que la deltoide es una singularidad estable obtenida al perturbar una singularidad aislada de multiplicidad 4 [3], que es el caso de la singularidad aislada analizada en la presente sección.

5. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado un método para determinar cómo se transforman las singularidades aisladas de robots paralelos cuando los parámetros geométricos del robot se desvían ligeramente de diseños no-genéricos. El método propuesto consiste en aproximar el lugar de las singularidades por una curva cónica, para clasificar dicha cónica en función de las perturbaciones de los diferentes parámetros geométricos del robot. Este método ha sido ilustrado mediante dos robots paralelos que poseen singularidades aisladas.

En el futuro, extenderemos este análisis a otras singularidades de orden superior distintas a las singularidades aisladas [13], así como a robots con más de 2 GDL. Además, también exploraremos la aplicación práctica del método propuesto en el diseño robusto de robots paralelos cuspidales.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los Ministerios de Educación (ayuda FPU13/00413) y Economía (proyecto DPI 2016-78361-R).

Referencias

- [1] Caro S., Wenger P., and Chablat D. Non-singular assembly mode changing trajectories of a 6-DOF parallel robot. In *ASME 2012 IDETC/CIE Conference*, pp. 1245–1254, 2012.
- [2] Coste M., Chablat D., and Wenger P. *New Trends in Mechanism and Machine Science*, chapter Perturbation of Symmetric 3-RPR Manipulators and Asymptotic Singularities, pp. 23–31. Springer Netherlands, 2013.
- [3] Coste M., Wenger P., and Chablat D. Hidden cusps. In *15th International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, 2016.
- [4] DallaLibera F. and Ishiguro H. Non-singular transitions between assembly modes of 2-DOF planar parallel manipulators with a passive leg. *Mech. Mach. Theory*, 77:182–197, 2014.
- [5] Husty M., Schadlbauer J., Caro S., and Wenger P. The 3-RPS manipulator can have non-singular assembly-mode changes. In Thomas F. and Pérez Gracia A., editors, *Computational Kinematics: Proceedings of the 6th International Workshop on Computational Kinematics (CK2013)*, pp. 339–348. Springer Netherlands, 2014.
- [6] Kong X. and Gosselin C. M. Generation and forward displacement analysis of RPR-PR-RPR analytic planar parallel manipulators. *J. Mech. Design*, 124(2):294–300, 2002.
- [7] Peidró A., Marín J.M., Gil A., and Reinoso O. Performing nonsingular transitions between assembly modes in analytic parallel manipulators by enclosing quadruple solutions. *J. Mech. Design*, 137(12):122302, 2015.
- [8] Peidró A., Reinoso Ó., Gil A., Marín J. M., and Payá L. A simulation tool to study the kinematics and control of 2RPR-PR parallel robots. *IFAC-PapersOnLine*, 49(6):268 – 273, 2016.
- [9] Peidró A., Reinoso O., Gil A., Marín J.M., and Payá L. A virtual laboratory to simulate the control of parallel robots. *IFAC-PapersOnLine*, 48(29):19–24, 2015.
- [10] Peidró A., Reinoso Ó., Payá L., Berenguer Y., Gil A., and Marín J.M. Análisis cinemático y simulación de un robot trepador con arquitectura serie-paralela. In *Actas de las XXXVI Jornadas de Automática*, pp. 400–407, 2015.
- [11] Ridgeway S.C., Crane C.D., and Duffy J. A forward analysis of a two degree of freedom parallel manipulator. In Lenarčič J. and Parenti-Castelli V., editors, *Recent Advances in Robot Kinematics*, pp. 431–440. Springer Netherlands, 1996.
- [12] Srinivasan Vijay. *Theory of Dimensioning: An Introduction to Parameterizing Geometric Models*. CRC Press, 2003.
- [13] Thomas F. and Wenger P. On the topological characterization of robot singularity loci. a catastrophe-theoretic approach. In *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3940–3945, May 2011.
- [14] Urizar M., Petuya V., Altuzarra O., and Hernández A. Assembly mode changing in the cuspidal analytic 3-RPR. *IEEE Trans. Robot.*, 28(2):506–513, 2012.
- [15] Zein M., Wenger P., and Chablat D. Non-singular assembly-mode changing motions for 3-RPR parallel manipulators. *Mech. Mach. Theory*, 43(4):480–490, 2008.