

# Diseño de sistemas de control en cascada clásico y borroso para el seguimiento de trayectorias

Javier G. González<sup>a,\*</sup>, Rodolfo E. Haber<sup>b</sup>, Fernando Matia<sup>b</sup>, Marcelino Novo<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Control Automático. Facultad de Ingeniería Eléctrica. Universidad de Oriente. Ave. Las Américas s/n. 90400. Cuba.

<sup>b</sup> Centro de Automática y Robótica (UPM-CSIC). Ctra. De Campo Real km. 0.200. La Poveda. 28500. Madrid. España.

<sup>c</sup> Fagor Automation S. Coop. San Andres Auzoa, 19, 20500 Arrasate-Mondragón, Guipúzcoa.

## Resumen

Los nuevos procesos de microfabricación imponen nuevos requisitos de precisión y robustez en los sistemas de control de posición y trayectoria, lo que abre nuevas líneas de investigación en el campo del modelado y el control, y la necesidad de evaluar técnicas de control inteligente tales como el control borroso. En este trabajo, se presenta por una parte el modelado clásico de partes eléctricas y mecánicas consideradas como un sistema de múltiples masas acopladas mediante una transmisión elástica y amortiguamiento, en presencia de la fricción y la holgura, dos no linealidades duras. Además, se muestra el diseño de un controlador a partir de un modelo paramétrico dependiente de la frecuencia de resonancia y del amortiguamiento. Como paso inicial del estudio, se diseña un sistema de control en cascada dotado de componentes anticipativas que es el esquema más utilizado en la industria. Con vistas a evaluar el alcance de las no linealidades en la ley de control, se sintetiza un control borroso en cascada equivalente a partir del método propuesto por Matia et al. 1992. Para evaluar el comportamiento del sistema de control, se consideraron incertidumbres en parámetros tales como la frecuencia de resonancia, el amortiguamiento y el ancho de la zona muerta de la holgura y se realizaron simulaciones considerando trayectorias circulares. Algunas cifras de mérito tales como la integral del valor absoluto del error en el tiempo (ITAE), el error máximo absoluto (MAE) y la integral del valor absoluto de la señal de control (IAU) se utilizaron en el estudio comparativo de ambos controladores en cascada. El estudio permitió comprobar que no hay diferencias significativas en el comportamiento de ambos sistemas de control (cascada clásico y cascada borroso). Copyright © CEA.

## Palabras Clave:

control en cascada, control borroso, cifras de mérito, optimización, Nelder-Mead, microfabricación, fricción, holgura.

## 1. Introducción

Las especificaciones y los requisitos de acabado superficial y dimensional en la microfabricación, han obligado no solo al rediseño de los sistemas electromecánicos, sino también a mejorar la precisión y a minimizar los errores máximos de seguimiento en los ejes de las máquinas. Por tanto, es muy importante diseñar sistemas de control de posición y trayectoria con transitorios rápidos y errores de seguimiento del orden de décimas de micra. El objetivo de la microfabricación es crear microsistemas o micro componentes (típicamente de tamaños inferiores a 1cm) con microcomponentes (1-100  $\mu\text{m}$ ) de modo que se cumplan las

especificaciones y los requisitos funcionales de dichos microsistemas (Haber et al., 2002).

Desde el punto de vista del modelado, algunos sistemas electromecánicos han sido analizados bajo la simplificación y suposición de considerarlos como sistemas de una masa, como en (Yeh et al., 2009), (Xi et al., 2009) y (Xi et al., 2010). Estos resultados han demostrado que aún en la actualidad las prestaciones de los sistemas de control son insuficientes en presencia de no linealidades tales como la fricción y la holgura. Los exigentes requisitos de precisión en el seguimiento de referencias y de comportamiento transitorio unido a la influencia de las dinámicas no modeladas ponen en evidencia las carencias de estos diseños. En el sistema de dos masas se tiene en consideración la torsión elástica de los ejes o barras de transmisión largos, lo que explica la tendencia a la oscilación de los sistemas mecánicos. En

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [javier@uo.edu.cu](mailto:javier@uo.edu.cu) (Primer Autor),  
[rodolfo.haber@car.upm-csic.es](mailto:rodolfo.haber@car.upm-csic.es) (Segundo Autor)

(Sabatier et al., 2003) se muestra con claridad el modelado y la propuesta del control de un sistema de cuatro masas. Por su parte, en (Szabat and Orłowska-Kowalska, 2009) se analiza el origen de las vibraciones torsionales tales como los cambios en la velocidad de la referencia, cambios en el par de la carga, fluctuaciones del par electromagnético, incorrecta alineación entre el motor eléctrico y la carga y el efecto de no linealidades del sistema.

Una de las principales restricciones para el diseño, radica en características inherentes a los sistemas mecánicos tales como la holgura y la fricción debido a la transmisión mediante ruedas dentadas o trenes de engranajes. En el caso de la holgura es una no linealidad capaz de producir ciclos límite tal y como se reporta en (Márton and Lantos, 2009). En la actualidad, la literatura recoge numerosos trabajos relacionados con el control de sistemas mecánicos en los que se considera la holgura en el diseño de una manera directa o indirecta como en (Márton and Lantos, 2009), (Peter et al., 2003), (Serkies and Szabat, 2013), (Scholing and Orlik, 2000) y (Thomsen and Fuchs, 2009).

Asimismo, es inevitable en todo mecanismo la existencia de la fricción entre sus partes. El fenómeno no lineal de la fricción es muy complejo ya que depende muchos factores y variables tales como: la temperatura, la lubricación en el eje del convertidor electromecánico, del mecanismo y de la transmisión, entre otros factores tal y como se analiza en (De Marchi, 1998), (Olsson et al., 1998) y (Li, 1999). En (Olsson et al., 1998) se puede encontrar un análisis detallado del fenómeno de la fricción y una descripción de los diferentes modelos que existen en la actualidad. En (Li, 1999) se emplea el modelo de dos masas con transmisión flexible y los autores realizan una revisión del fenómeno no lineal de la fricción, de sus modelos, del procedimiento de identificación y de las técnicas de compensación de la fricción. Entre las técnicas de control que se exponen de forma resumida en (Li, 1999) se encuentran: control robusto  $H_\infty$ , compensación adaptativa, control adaptativo por modelo de referencia, control por modo deslizante y control por aprendizaje.

Este trabajo explora uno de los diseños más clásicos, básicos y ampliamente utilizados por la industria para el control, en este caso el control en cascada. Además aprovechando el acervo en el campo del control inteligente y los métodos de transformación para obtener un sistema de control borroso equivalente se presenta un control en cascada borroso. El estudio presentado evalúa a partir de simulaciones el comportamiento del sistema de control en cascada lineal y borroso con resultados positivos en ambos casos.

## 2. Modelado del sistema electromecánico

En esta sección se presenta un modelo para el eje X de un sistema electromecánico multieje. Se asume que el modelo es válido para los tres ejes X-Y-Z, suponiendo accionamientos y partes mecánicas similares. El modelo consta de varias partes que serán descritas brevemente.

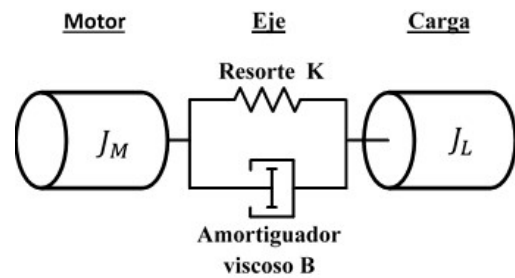


Figura 1. Esquema del modelo de dos masas con resorte y amortiguador viscoso.

El modelo mecánico consiste en un sistema de dos masas de tres elementos claramente diferenciados: el motor, el eje y la carga (ver figura 1). Los parámetros físicos de este modelo son: la rigidez del eje  $K$ , el amortiguamiento  $B$ , la inercia del motor  $J_M$ , la inercia de la carga  $J_L$ , el momento electromecánico aplicado por el motor  $M_M$ , el momento de la carga  $M_L$ , y el momento de torsión del eje  $M_S$ .

Se plantea el estudio del modelo mecánico mediante ecuaciones de estado. Se usarán como variables de estado las velocidades angulares de las masas del motor  $\omega_M$  y carga  $\omega_L$  y el momento de torsión del eje  $M_S$  (Del Toro et al., 2007).

Por una parte se tienen las ecuaciones de equilibrio, que si se combinan con las ecuaciones descriptivas de las mismas permiten obtener las ecuaciones (1-2)

$$J_M \frac{d}{dt} \omega_M = M_M - M_S \quad (1)$$

$$J_L \frac{d}{dt} \omega_L = M_S - M_L \quad (2)$$

La ecuación descriptiva para el eje teniendo en cuenta su rigidez y amortiguamiento se muestra en (3).

$$M_S = K(\theta_M - \theta_L) + B(\omega_M - \omega_L) \quad (3)$$

El modelo en variables de estado representado en forma matricial queda representado por (4)

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_M \\ \dot{\omega}_L \\ \dot{M}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{J_M} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_L} \\ K & -K & -B\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_M \\ \omega_L \\ M_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_L} \\ \frac{B}{J_M} & \frac{B}{J_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_M \\ M_L \end{bmatrix} \quad (4)$$

A partir de aquí se simplifica el sistema a una entrada haciendo nulo  $M_L$  ya que la carga es un elemento pasivo que solo se opone al par que le comunica el eje. Esto no es completamente cierto ya que la carga también se opone al

movimiento por medio de la fricción, pero esta fricción no es independiente como entrada sino que depende de la velocidad de la carga y se modelará a parte como un par perturbador que debilita la entrada  $M_M$ .

Partiendo de la ecuación (4) y aplicando (5, 6), se obtiene la ecuación (7), mediante la cual se podrán determinar las funciones de transferencia que permiten obtener las variables de estado  $\omega_M$ ,  $\omega_L$  y  $M_S$  a partir de la entrada  $M_M$ .

Para el sistema genérico

$$\frac{d}{dt}[\bar{z}(t)] = [A_1][\bar{z}(t)] + [A_2][\bar{w}] \quad (5)$$

Su solución, con estado inicial cero para las variables de estado, en el dominio de Laplace es:

$$[\bar{z}(s)] = (s[I] - [A_1])^{-1} \cdot ([A_2][\bar{w}]) \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_M(s) \\ \omega_L(s) \\ M_S(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & \frac{1}{J_M} \\ 0 & s & -\frac{1}{J_L} \\ -K & K & s + B\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{M_M}{J_M} \\ \frac{M_M}{J_M} \\ 0 \\ \frac{B M_M}{J_M} \\ \frac{M_M}{J_M} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Después de operar (7) queda:

$$\omega_M(s) = \frac{M_M}{J_M s} \cdot \frac{s^2 + \frac{B}{J_L} s + \frac{K}{J_L}}{s^2 + B\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right) s + K\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right)} \quad (8)$$

$$\omega_L(s) = \frac{M_M}{J_M J_L s} \cdot \frac{Bs + K}{s^2 + B\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right) s + K\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right)} \quad (9)$$

$$M_S(s) = \frac{M_M}{J_M} \cdot \frac{Bs + K}{s^2 + B\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right) s + K\left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_L}\right)} \quad (10)$$

En primer lugar la función de transferencia entre  $M_M$  y  $\omega_M$  queda:

$$H_{\omega_M/M_M}(s) = \frac{\omega_M(s)}{M_M(s)} = \frac{1}{J_M s} \cdot \frac{s^2 + \frac{B}{J_L} s + \frac{K}{J_L}}{s^2 + \frac{B}{J_L}\left(1 + \frac{J_L}{J_M}\right) s + \frac{K}{J_L}\left(1 + \frac{J_L}{J_M}\right)} \quad (11)$$

Si se define la frecuencia de resonancia  $\omega_{o1}$  y de antiresonancia  $\omega_{o2}$  como:

$$\omega_{o1} = \sqrt{\frac{K}{J_L}} \quad \omega_{o2} = \omega_{o1} \sqrt{1 + \frac{J_L}{J_M}} \quad (12)$$

Y el coeficiente de amortiguamiento  $D_2$  y  $D_1$  como:

$$D_2 = \frac{B \omega_{o2}}{2K} \quad D_1 = \frac{B}{2\omega_{o1} J_L} \quad (13)$$

Queda:

$$H_{\omega_M/M_M}(s) = \frac{1}{J_M s} \cdot \frac{s^2 + 2D_1\omega_{o1} s + \omega_{o1}^2}{s^2 + 2D_2\omega_{o2} s + \omega_{o2}^2} \quad (14)$$

Se puede también definir otra función de transferencia entre  $\omega_M$  y  $\omega_L$ .

$$H_{\omega_L/\omega_M}(s) = \frac{\omega_L(s)}{\omega_M(s)} = \frac{\frac{B}{J_L} s + \frac{K}{J_L}}{s^2 + \frac{B}{J_L} s + \frac{K}{J_L}} \quad (15)$$

Usando las mismas definiciones para  $\omega_{o2}$ ,  $\omega_{o1}$ ,  $D_2$  y  $D_1$  queda:

$$H_{\omega_L/\omega_M}(s) = \frac{2D_1\omega_{o1} s + \omega_{o1}^2}{s^2 + 2D_1\omega_{o1} s + \omega_{o1}^2} \quad (16)$$

Con estas expresiones se puede construir el modelo cuyas salidas sean las velocidades angulares del motor y de la planta.

Este es un modelo ampliamente conocido y que se usa por distintos autores como por ejemplo (De Marchi, 1998).

2.1. Modelo de fricción

Finalmente para obtener un modelo que sea lo más parecido a lo que se tiene en la realidad, se modelan la fricción, la holgura y el ruido. La fricción es un fenómeno inherente a todo sistema electromecánico y deteriora el desempeño de los mismos, esta ha sido estudiada ampliamente en la ingeniería mecánica clásica y últimamente ha tenido un fuerte resurgimiento; esto se debe entre otras cosas a grandes necesidades en la ingeniería en un amplio rango de aplicaciones que van desde los discos duros hasta los vehículos (Fontanet et al., 2016).

El modelo de fricción más básico es el modelo de Coulomb, donde la fuerza de fricción  $F$  es constante con un valor  $F_C$  y dependiente del sentido de la velocidad. Añadiendo una pequeña componente de fricción viscosa  $F_v$  que depende de la velocidad relativa entre las superficies  $v$ , el modelo clásico puede expresarse como se muestra en (17).

$$F = F_C \operatorname{sgn}(v) + F_v v \tag{17}$$

Para evitar la discontinuidad en el paso por  $v=0$  destaca el modelo de Karnoop que considera un umbral de velocidades entorno al cero, bajo el cual la fuerza de fricción se supone linealmente proporcional a la velocidad. Según (Deur and Peric, 2000) se ha demostrado experimentalmente que si el umbral de velocidad se encuentra en un intervalo entre  $10^{-4}$  y  $10^{-6}m/s$ , representa un buen compromiso entre la precisión, eficacia y solidez computacional del modelo.

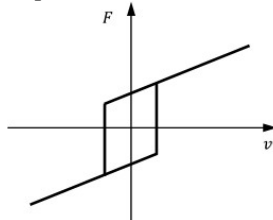


Figura 2. Representación del modelo de fricción usado en simulación.

2.2. Holguras

Como en el caso de la fricción, en esta investigación se utiliza un modelo que sea lo suficientemente realista a la par que eficiente. El conocimiento del comportamiento de las holguras es mucho importante que el de la fricción. Por un lado, se diferencia entre una parte de histéresis mecánica y, por otro lado, la parte asociada a la dinámica del impacto entre dos superficies duras que entran en contacto. El modelo clásico de holgura (figura 3) solo tiene en consideración la histéresis mecánica mediante una zona de banda muerta centrada en el punto de equilibrio desplazado.

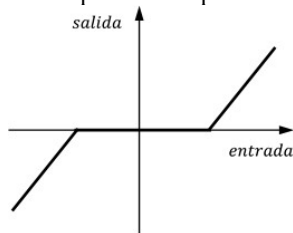


Figura 3. Representación del modelo clásico de holgura.

Este modelo ha sido usado ampliamente con resultados bastante buenos y realistas por lo que será el utilizado en el modelo en simulación.

2.3. Ruido

La influencia de las dinámicas no modeladas se representará mediante una perturbación en forma de ruido en la señal de la posición de la carga antes de ser utilizada en el sistema de control. En este trabajo se utiliza otro enfoque. Se hace un desarrollo en series Fourier de esta señal identificando los armónicos principales de las señales reales adquiridas en una máquina herramienta. Hay que tener en cuenta que este ruido se corresponde con una máquina herramienta con una frecuencia natural de 30 Hz.

Como resultado de este modelo del ruido, se disponen de 3 vectores que representan la amplitud, frecuencia y desfase de las componentes. Para equiparar la salida del modelo con los datos que se obtienen del sistema físico real, las variables de salida del modelo tienen que ser las posiciones del motor  $\theta_M$  y de la carga  $\theta_L$ . Estas se obtienen a partir de las velocidades ya calculadas, ver ecuaciones (18, 19):

$$\theta_M(t) = \theta_{M0} + \int_0^t \omega_M dt \tag{18}$$

$$\theta_L(t) = \theta_{L0} + \int_0^t \omega_L dt \tag{19}$$

Los parámetros del modelo aparecen resumidos en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros del modelo

Inercia del motor	$J_M = 11,0 e^{-4} kg m^2$
Inercia de la carga	$J_L = 9,8 e^{-4} kg m^2$
Frecuencia de resonancia	$f_1 = 30 Hz \rightarrow \omega_{o1} = 2 \pi f_1 rad / s$
Coefficiente de amortiguamiento	$D_f=0.1$
Constante par motor	$K_t = 1.3 Nm / A$
Histéresis	$fH = 4.5 rpm$
Fricción Coulomb	$0.625 Nm$
Fricción viscosa	$0.007 Nm s$
Constante de tiempo para el filtro	$25.0 ms$
Holgura	$5 \mu m$
Constante del husillo	$K_H = 0.010 / (2\pi) m / rad$

3. Trayectoria y análisis

Se pretende realizar el diseño de un sistema de control de posición/trayectoria de dos ejes utilizado en el seguimiento de trayectorias. Un aspecto importante que no será tratado en este trabajo es la generación de trayectorias. En este trabajo se evaluará el comportamiento del error de seguimiento considerando una trayectoria circular de 200 milímetros de radio.

Las señales más importantes a considerar son el error de posición, el error de velocidad y la señal de control. En la primera se ve claramente si se ha conseguido un buen resultado en el seguimiento de la señal; en la segunda, se puede analizar el comportamiento del lazo de velocidad; y la tercera, proporciona información acerca de la exigencia que se le pide al motor. Se utilizarán cifras de mérito ampliamente utilizadas tales como el ITAE, el ITSE, el MAE y el IAE. De estas cifras de mérito podemos obtener información relevante de cómo está comportándose el sistema de control. También se pueden analizar estas cifras de mérito sobre las otras señales, por ejemplo, es de gran utilidad obtener la integral absoluta de la señal de control (IAU) y su máximo absoluto (MAU). La primera de ellas nos proporciona información relacionada con el esfuerzo de control. La segunda nos permite identificar los máximos que, obviamente, no deberían de sobrepasar ciertos límites.

#### 4. Estrategias de control: control en cascada clásico y borroso.

En esta investigación se analiza una técnica de control muy conocida pero que tiene dos características importantes que hacen que siga siendo la más utilizada en la industria, tales como Siemens y Fagor Automation, a saber: permite desacoplar los lazos de control de posición y velocidad y tratar por separado la compensación de las no linealidades incorporando componentes anticipativas. Por otra parte, los procedimientos de ajuste son relativamente sencillos y de fácil aplicación por parte de la industria. La primera versión que se diseñará es un sistema de control en cascada P-PI clásico con ajuste óptimo basado en la técnica Nelder-Mead; y el segundo sistema es sistemas de control en cascada P-PI borroso en el que se utiliza también el método de Nelder-Mead de sintonía óptima.

##### 4.1. Control en cascada P-PI

El control en cascada es una estructura de control muy consolidada a nivel industrial por sus muy buenos resultados y sencillez en el ajuste (Ogata and Yang, 1970).

Esta estructura responde de forma mucho más completa que los tradicionales controladores PID. Los controladores PID clásicos con un solo lazo también están muy extendidos en sistemas de control a nivel industrial pero en el caso del sector metal-mecánico predomina el uso de la estructura de control en cascada.

Este enfoque permite que los lazos interiores corrijan las perturbaciones interiores antes de que lleguen a afectar al lazo principal. Además, permite utilizar componentes anticipativas. Estas componentes anticipativas son un elemento clave en este sistema de control.

##### 4.1.1. Ajuste óptimo

Para el ajuste del control propuesto se ha utilizado el método de Nelder-Mead, ya que, aunque las condiciones iniciales tienen una influencia, es bastante efectivo y rápido

para encontrar un óptimo local. Es un método libre de gradiente, lo cual resulta útil para optimizar funciones de coste que no están del todo definidas mediante una función explícita.

Para llevar a cabo la optimización se ha utilizado MatLab/Simulink. Los parámetros finales de los bloques de control P y PI son: ganancia proporcional para lazo externo  $k_p=13.9317\text{ s}^{-1}$ , ganancia proporcional para lazo interno  $k_p=6.4304\text{ A/(rad}\cdot\text{s}^{-1})$  y el tiempo de integración para el lazo interno  $T_i=0.001\text{ s}$ .

##### 4.1.2. Resultados obtenidos

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante simulación; en estas se pueden analizar los efectos de la fricción, la holgura y el ruido, dicho esto, para mostrar una mayor semejanza a la realidad, se ha decidido simular con todas las no linealidades activas.

Los estudios realizados han considerado una variación en la frecuencia de resonancia, manteniendo constante el coeficiente de amortiguamiento, luego se mantendrá la frecuencia y se procede a realizar simulaciones con distintos valores del coeficiente de amortiguamiento, finalmente se varían ambos parámetros.

La Tabla 2 muestra las cifras de mérito obtenidas en las condiciones descritas previamente. Como puede observarse, a medida que disminuye la frecuencia de resonancia el comportamiento del sistema empeora.

Tabla 2: Comportamiento del sistema de control en cascada P-PI.

	12 Hz	13 Hz	20 Hz	30 Hz	40 Hz
ITAEX	1,921E-02	1,645E-02	8,199E-03	3,620E-03	3,152E-03
ITSEX	3,543E-03	2,912E-03	1,102E-03	3,837E-04	2,135E-01
MAEX	5,423E+03	5,650E+00	5,462E+00	5,269E+00	5,468E+03
IAUX	4,860E+04	4,727E+01	4,044E+01	3,497E+01	3,173E+04
ITAEY	5,023E+02	3,541E-01	5,396E-02	1,942E-02	1,717E+01
ITSEY	2,654E+03	5,545E+00	2,212E-01	2,860E-02	2,997E+01
MAEY	2,928E+04	5,778E+00	5,632E+00	5,528E+00	5,673E+00
IAUY	1,143E+03	1,098E+03	8,681E+05	6,820E+02	5,729E+02

Lo mismo ocurre al analizar ante distintos valores en el amortiguamiento manteniendo  $f_i=30\text{ Hz}$ . Al hacerla más baja el sistema se comporta peor llegando a ser inestable. Para valores más altos de dicha relación se mejoran las cifras de mérito, como se observa en la Tabla 3.

Tabla 3: Cascada P-PI. Ajuste óptimo. Cifras de mérito ante distintos coeficientes de amortiguamiento

	D=0.04	D=0.05	D=0.1	D=0.2
ITAEX	5,040E-03	4,405E-03	3,620E-03	3,243E-03
ITSEX	1,156E-03	9,401E-04	3,837E-04	1,605E-04
MAEX	5,521E+00	5,374E+00	5,269E+00	5,208E+00
IAUX	5,475E+01	4,906E+01	3,497E+01	2,596E+01
ITAEY	7,270E-01	1,074E-01	1,942E-02	1,551E-02
ITSEY	1,793E+01	6,693E-02	2,860E-02	2,659E-02
MAEY	5,692E+01	5,508E+00	5,528E+00	5,506E+00
IAUY	1,351E+03	1,159E+03	6,820E+02	3,786E+02

A continuación se varía la frecuencia de resonancia  $f_i=21\text{ Hz}$ , y el coeficiente de amortiguamiento  $D=0.06$ , estas son condiciones más duras. La figura 4 muestra el error de posición para la planta con la variación de los parámetros antes mencionados, puede verse, que la misma continúa siendo estable, y el error de la posición se mantiene en rangos aceptables.

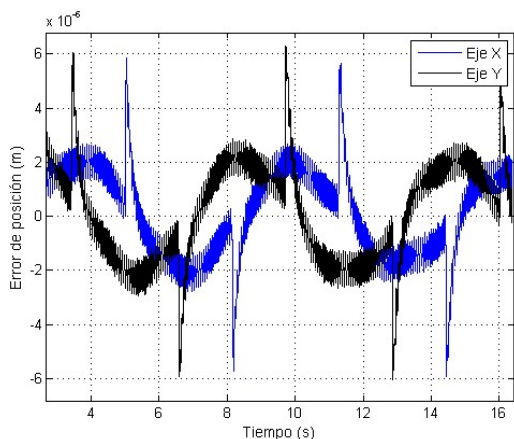


Figura 4. Cascada P-PI. Ajuste óptimo. Error de posición en los ejes X e Y, para  $f_i=21$  Hz y  $D=0.06$

4.2. Control en cascada borroso

El control borroso se ha convertido en una tecnología con un amplio impacto industrial que está presente en casi todas las facetas de la vida desde los electrodomésticos hasta los vehículos (Haber et al., 1996). Este trabajo pretende estudiar y analizar el alcance de los sistemas de control borroso en esquemas de control en cascada y en evaluar en qué medida la no linealidad en el control borroso mejora el comportamiento de sistema electromecánico en presencia de no linealidades duras como la holgura y la fricción.

Para realizar un control borroso equivalente de una acción P, I o D se toma como base el trabajo seminal (Matia et al., 1992). Uno de los enfoques a la hora de hacer un control borroso equivalente consiste en mantener la parte lineal conocida fuera del control borroso y utilizar el control borroso para introducir, posteriormente, no linealidades.

Controlador Borroso P a partir del control lineal P

El equivalente borroso P (FP) se obtiene escogiendo dos funciones de pertenencia en su forma más simple, en este trabajo se demuestra la forma de realizarlo escogiendo 3 funciones como las representadas por (20).

Se realizará la transformación de un bloque P con un rango con una  $K_p$  de 2.

$$\begin{aligned}
 N &\in [ -2|e_{max}| \quad -|e_{max}| \quad 0 ] \\
 Z &\in [ -|e_{max}| \quad 0 \quad |e_{max}| ] \\
 P &\in [ 0 \quad |e_{max}| \quad 2|e_{max}| ] \\
 N &\in [ -1000 \quad -500 \quad 0 ] \\
 \Rightarrow Z &\in [ -500 \quad 0 \quad 500 ] \\
 P &\in [ 0 \quad 500 \quad 1000 ]
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Definiendo las salidas  $u$  de tipo nítida por (21):

$$\begin{aligned}
 CN &= -|e_{max}| \cdot K_p & CN &= -1000 \\
 CZ &= 0 & CZ &= 0 \\
 CP &= |e_{max}| \cdot K_p & CP &= 1000
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Y las reglas (22):

$$\begin{aligned}
 IF \quad e = N \quad THEN \quad u = CN \\
 IF \quad e = Z \quad THEN \quad u = CZ \\
 IF \quad e = P \quad THEN \quad u = CP
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

De forma general se define el controlador borroso normalizado con una entrada y una salida de la siguiente manera:

- Las funciones de pertenencia deben ser triangulares solapadas en  $\mu=0.5$  y se construirán de acuerdo a la siguiente expresión (23) en función de la cantidad de funciones de pertenencias deseada.

$$\begin{aligned}
 e_1 &\in [ -1-k \quad -1 \quad -1+k ] \\
 e_2 &\in [ -1 \quad -1+k \quad -1+2k ] \\
 \vdots &\in [ -1+k \quad \dots \quad -1+3k ] \\
 &[ \dots \quad \dots \quad \vdots ] \\
 &[ \dots \quad \dots \quad 1-k ] \\
 &[ \dots \quad 1-k \quad 1 ] \\
 e_n &\in [ 1-k \quad 1 \quad 1+k ]
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

donde:

$e_i$  := la  $i$ ésima función de pertenencia de la entrada  
 $n$  := cantidad total de funciones de pertenencia (mínimo 2)

$$k := \frac{2}{(n-1)}$$

- Las salidas (24) serán conjuntos de tipo nítido (*singleton*) y se corresponderán con el valor donde se produce el pico en cada función de pertenencia triangular, esto es, de -1 a 1 divididas en intervalos de longitud “ $k$ ”:

$$Salidas = \{-1, -1+k, \dots, 1-k, 1\}
 \tag{24}$$

- Se usarán “ $n$ ” reglas (25); una para cada una de las funciones de pertenencia de la entrada.

$$\begin{aligned}
 IF \quad e = e_1 \quad THEN \quad salida = -1 \\
 IF \quad e = e_2 \quad THEN \quad salida = -1+k \\
 \vdots \\
 IF \quad e = e_{n-1} \quad THEN \quad salida = 1-k \\
 IF \quad e = e_n \quad THEN \quad salida = 1
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Controlador Fuzzy PI a partir del control PI

En este el equivalente al control PI consistirá en un control borroso con dos entradas y una sola salida. Se parte de la ecuación discretizada de la ley del regulador PI continuo.

En este caso las dos entradas del control borroso serán (26):

$$\begin{aligned}
 ep &= e \\
 ei &= T_s \frac{z}{z-1} e
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Funciones de pertenencia triangulares de la entrada (27):

$$\begin{aligned} N_p &\in [ -2|ep_{max}| \quad -|ep_{max}| \quad 0 ] \\ Z_p &\in [ -|ep_{max}| \quad 0 \quad |ep_{max}| ] \\ P_p &\in [ 0 \quad |ep_{max}| \quad 2|ep_{max}| ] \end{aligned} \quad (27)$$

Funciones de pertenencia triangulares de la entrada  $ei$  (28):

$$\begin{aligned} N_i &\in [ -2|ei_{max}| \quad -|ei_{max}| \quad 0 ] \\ Z_i &\in [ -|ei_{max}| \quad 0 \quad |ei_{max}| ] \\ P_i &\in [ 0 \quad |ei_{max}| \quad 2|ei_{max}| ] \end{aligned} \quad (28)$$

Salidas singleton (29):

$$\begin{aligned} CN_p &= -|ep_{max}| \cdot K_p & CN_i &= -|ei_{max}| \cdot K_p / T_i \\ CZ_p &= 0 & CZ_i &= 0 \\ CP_p &= |ep_{max}| \cdot K_p & CP_i &= |ei_{max}| \cdot K_p / T_i \end{aligned} \quad (29)$$

Donde es necesario definir no solo  $K_p$  y  $T_i$  sino también los rangos de cada entrada del bloque borroso, esto es,  $ep_{max}$  y  $ei_{max}$ .

Las reglas en este caso se representan en la Tabla 4 donde se recogen todas las combinaciones posibles entre las funciones de pertenencia de las dos entradas:

Tabla 4: Tabla de reglas para el F-PI con 3 funciones de pertenencia para cada entrada

	$N_i$	$Z_i$	$P_i$
$N_p$	$CN_p+CN_i$	$CN_p+CZ_i$	$CN_p+CP_i$
$Z_p$	$CZ_p+CN_i$	$CZ_p+CZ_i$	$CZ_p+CP_i$
$P_p$	$CP_p+CN_i$	$CP_p+CZ_i$	$CP_p+CP_i$

Generalizando lo antes expuesto, en este trabajo se presentan los resultados obtenidos escogiendo cinco reglas para el control borroso de posición, y  $5^2$  reglas para el de velocidad. Estas 25 últimas reglas se corresponden con todas las combinaciones posibles entre las distintas funciones de pertenencia de las dos entradas sin que haya solapamientos entre la parte proporcional y la parte integral.

#### 4.2.1. Ajuste óptimo

Para ajustar los parámetros del controlador se aplicará el mismo algoritmo de optimización que el usado en el control en cascada no borroso, esto es, el algoritmo de Nelder-Mead.

Las hipótesis iniciales serán las mismas: fricción y holguras activadas, compensación de fricción activada, ruido y compensación de holgura desactivados. De este modo, se pretende comprobar si mejora el pico de inversión del control en cascada borroso frente al no borroso con los parámetros a optimizar decididos y partiendo de las mismas condiciones iniciales, la misma función objetivo y usando el método de Nelder-Mead como algoritmo de optimización. Para realizar las pruebas de análisis dinámico, se aplican las mismas variaciones a la frecuencia de resonancia y el coeficiente de amortiguamiento descritos en (4.1.2).

Tabla 5: Cascada FP-FPI. Ajuste óptimo. Cifras de mérito ante distinta frecuencia de resonancia

	12 Hz	13 Hz	20 Hz	30 Hz	40 Hz
ITAEX	3,827E-02	3,197E-02	1,600E-02	6,644E-03	4,981E-03
ITSEX	1,005E-02	7,324E-03	3,113E-03	1,375E-03	8,109E-04
MAEX	6,466E+00	6,690E+00	5,925E+00	6,019E+00	6,297E+00
IAUX	1,531E+01	1,531E+01	1,531E+01	1,530E+01	1,530E+01
ITAEY	1,593E-01	1,518E-01	6,577E-02	3,336E-02	1,511E-02
ITSEY	2,058E+00	2,463E+00	5,433E-01	1,365E-01	1,913E-02
MAEY	6,875E+00	6,701E+00	6,290E+00	6,162E+00	6,244E+00
IAUY	1,742E+01	1,741E+01	1,758E+01	1,767E+01	1,773E+01

La Tabla 6 muestra las cifras de mérito ante las condiciones descritas previamente.

Tabla 6: Cascada FP-FPI. Ajuste óptimo. Cifras de mérito ante distintos coeficientes de amortiguamiento

	D=0.04	D=0.05	D=0.1	D=0.2
ITAEX	8,116E-03	7,714E-03	6,644E-03	5,903E-03
ITSEX	3,355E+00	2,781E-03	1,375E-03	5,867E-04
MAEX	6,109E+00	6,061E+00	6,019E+00	5,960E+00
IAUX	1,529E+01	1,530E+01	1,530E+01	1,532E+01
ITAEY	4,392E-02	2,929E-02	3,336E-02	2,173E-02
ITSEY	6,764E-02	3,702E-02	1,365E-01	4,852E-02
MAEY	6,246E+00	6,215E+00	6,162E+00	6,095E+00
IAUY	1,755E+01	1,772E+01	1,767E+01	1,755E+01

## 5. Análisis de los resultados

Como puede observarse, comparando las cifras de mérito mostrada de manera resumida en tabla 7, las mejoras introducidas al introducir el control en cascada equivalente FP-FPI no son significativas, lo mismo se observa al realizar una comparación gráfica (figura 5) entre las estrategias de control. Se consigue mejorar ligeramente el error de seguimiento a pesar de no ser ese el objetivo de la optimización.

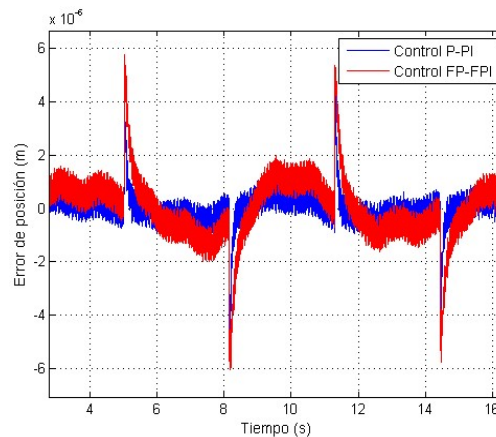


Figura 5. Cascada P-PI clásico frente a FP-FPI.

Tabla 7: Cascada P-PI Vs. FP-FPI. Ajuste óptimo. Cifras de mérito.

	P-PI	FP-FPI
ITAEX	3,620E-03	6,644E-03
ITSEX	3,837E-04	1,375E-03
MAEX	5,269E+00	6,019E+00
IAUX	3,497E+01	1,530E+01
ITAEY	1,942E-02	3,336E-02
ITSEY	2,860E-02	1,365E-01
MAEY	5,528E+00	6,162E+00
IAUY	6,820E+02	1,767E+01

## 6. Conclusiones

Tras realizar un modelado del sistema físico, se ha procedido a diseñar y evaluar el sistema de control en cascada P-PI y se ha diseñado a partir de éste un sistema de control en cascada borroso equivalente. Se ha aplicado un método de optimización (Nelder-Mead) para la sintonía óptima de los parámetros del controlador. El estudio comparativo de ambos controladores no muestra mejoras significativas en la aplicación del controlador borroso en cascada P'-PI. Estudios experimentales serán realizados en el futuro para evaluar el impacto real de ambas técnicas.

### English Summary

#### Design of a classic and fuzzy cascade control system for trajectory control and tracking.

#### Abstract

New microfabrication processes impose new requirements for accuracy and robustness in position and trajectory control systems, opening up new lines of research in the field of modeling and control, and the need to evaluate intelligent control techniques such as Fuzzy control. In this paper, is presented the classical modeling of electrical and mechanical parts considered as a system of multiple masses coupled by an elastic transmission and damping, in the presence of friction and slack, two hard nonlinearities. Furthermore, the design of a controller is shown from a parametric model dependent resonance frequency and damping ratio. As the initial step of the study, a cascade control system is designed with anticipatory components that is the most used scheme in the industry. In order to evaluate the scope of nonlinearities in the control law, a cascade equivalent control is synthesized using the method proposed by Matia et al. 1992. To evaluate the behavior of the control system, uncertainties are considered in parameters such as the resonance frequency, the damping ratio and the width of the dead zone of the slack, and simulations were performed considering circular trajectories. Some merit numbers such as the integral of the absolute value of error in time (ITAE), the absolute maximum error (MAE) and the integral of the absolute value of the control signal (IAU) were used in the comparative study of both cascade controllers. The study allowed to verify that there are no significant differences in the behavior of both control systems (classic cascade and fuzzy cascade).

#### Keywords:

Microfabrication, friction, slack, cascade control, fuzzy control, merit numbers, optimization, Nelder-Mead.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco de los proyectos "Advanced Manufacturing 4th Generation (AM.4G)" financiado en el Programa CIEN y PCIN-2015-123 IoSENSE:

Línea Piloto Flexible de Sensores para el Internet de las Cosas".

### Referencias

- De Marchi, J.A., 1998. Modeling of dynamic friction, impact backlash and elastic compliance nonlinearities in machine tools, with applications to asymmetric viscous and kinetic friction identification, Rensselaer Polytechnic Institute.
- Del Toro, R.M., Schmittiel, M., Haber, R., Haber-Haber, R., 2007. System identification of the high performance drilling process for network-based control. Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, DETC2007 1 PART B, 827-834.
- Deur, J., Peric, N., 2000. Pointing and tracking position control system of electrical drives with elastic transmission, 9th International Conference and Exhibition on Power Electronics and Motion Control-EPE PEMC, Kosice, Slovak Republic, Citeseer.
- Fontanet, J.G.G., Cervantes, A.L., Ortiz, I.B., 2016. Alternativas de control para un Péndulo de Furuta. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI 13, 410-420.
- Haber, R., Alique, J.R., Alique, A., Ros, S., C.R. P., 1996. Fuzzy Supervisory Control of End Milling Process. Information Sciences 89, 95-106.
- Haber, R.E., Haber, R., Alique, A., Ros, S., 2002. Application of knowledge-based systems for supervision and control of machining processes. Handbook of software engineering and knowledge engineering 2, 673-710.
- Li, Y.-F., 1999. Motion Control Subject to Nonlinearities and Flexibility:(an Overview Based on Friction and Flexibility Compensation). KTH.
- Márton, L., Lantos, B., 2009. Control of mechanical systems with Stribeck friction and backlash. Syst Control Lett 58, 141-147.
- Matia, F., Jimenez, A., Galan, R., Sanz, R., 1992. Fuzzy controllers: Lifting the linear-nonlinear frontier. Fuzzy Sets and Systems 52, 113-128.
- Ogata, K., Yang, Y., 1970. Modern control engineering.
- Olsson, H., Åström, K.J., Canudas De Wit, C., Gäfvert, M., Lischinsky, P., 1998. Friction Models and Friction Compensation. European Journal of Control 4, 176-195.
- Peter, K., Schöling, I., Orlik, B., 2003. Robust output-feedback  $H_\infty$  control with a nonlinear observer for a two-mass system. IEEE Trans Ind Appl 39, 637-644.
- Sabatier, J., Poullain, S., Latteux, P., Oustaloup, A., Thomas, J.L., 2003. Robust speed control of a low damped four mass system based on crone control, 2003 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Chicago, IL, pp. 625-631.
- Schöling, I., Orlik, B., 2000. Control of a nonlinear two-mass system with uncertain parameters and unknown states, Industry Applications Conference, 2000. Conference Record of the 2000 IEEE, IEEE, pp. 1096-1103.
- Serkies, P.J., Szabat, K., 2013. Application of the MPC to the position control of the two-mass drive system. IEEE Trans Ind Electron 60, 3679-3688.
- Szabat, K., Orłowska-Kowalska, T., 2009. Adaptive control of the electrical drives with the elastic coupling using Kalman filter. INTECH Open Access Publisher.
- Thomsen, S., Fuchs, F.W., 2009. Speed control of torsional drive systems with backlash, 2009 13th European Conference on Power Electronics and Applications, EPE '09, Barcelona.
- Xi, X.-C., Poo, A.-N., Hong, G.-S., 2009. Improving contouring accuracy by tuning gains for a bi-axial CNC machine. International Journal of Machine Tools and Manufacture 49, 395-406.
- Xi, X.C., Poo, A.N., Hong, G.S., 2010. Tracking error-based static friction compensation for a bi-axial CNC machine. Precis Eng 34, 480-488.
- Yeh, S.S., Tsai, Z.H., Hsu, P.L., 2009. Applications of integrated motion controllers for precise CNC machines. International Journal of Advanced Manufacturing Technology 44, 906-920.