

Formulación Topológica Adaptada para la Simulación y Control de Exoesqueletos Accionados con Transmisiones Harmonic Drive

Andrés F. Hidalgo Romero
Centro de Automática y Robótica (CAR)-CSIC-UPM, af.hidalgo@csic.es

Eduardo Rocón
Centro de Automática y Robótica (CAR)-CSIC-UPM, e.rocon@csic.es

Resumen

Los sistemas de transmisión Harmonic Drive son muy utilizados en sistemas robóticos donde se requieren altas precisiones de trabajo. Este es el caso de los exoesqueletos utilizados para la rehabilitación y asistencia de personas con problemas de movilidad. En la bibliografía existen diversos modelos de sistemas de transmisión Harmonic Drive, pero generalmente estos modelos son considerados de forma aislada, sin tener en cuenta su interacción con el entorno en el que son utilizados. Debido a la interacción que existe entre los exoesqueletos y las personas, es importante considerar los elementos de la transmisión de movimiento como una parte integral del sistema. Con este objetivo, en este artículo se presenta la inclusión de los sistemas Harmonic Drive dentro de una formulación topológica para la simulación de sistemas multicuerpo. El uso de coordenadas relativas hace que esta formulación sea especialmente idónea para el diseño de algoritmos de control para exoesqueletos donde los actuadores transmiten el movimiento a través de sistemas de transmisión Harmonic Drive. La formulación se ha implementado en Simulink y se ha presentado un ejemplo de control de posición en un modelo de exoesqueleto de una pierna con actuación en la cadera y la rodilla.

Palabras Clave: Sistemas Multicuerpo, Harmonic Drive, Exoesqueletos, Rehabilitación y asistencia, Simulación, Control.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha habido un desarrollo creciente en la utilización de sistemas robóticos para ayudar a personas con problemas de movilidad. Este es el caso de los exoesqueletos utilizados para la rehabilitación y asistencia de personas que no pueden mover sus extremidades con normalidad. Los exoesqueletos generalmente se clasifican en dos grupos según sus sistemas de actuación sean pasivos o activos. En el primer caso se trata de dispositivos mecánicos

diseñados para almacenar energía durante una fase del movimiento de la persona y liberarla luego en otra fase ayudando a efectuar el movimiento. En el caso de los exoesqueletos activos, los movimientos se efectúan mediante actuadores cuyo movimiento debe controlarse continuamente durante todas las fases del movimiento del individuo.

Aunque los exoesqueletos pasivos presentan muchas ventajas potenciales, tienen aún bajas eficiencias en comparación con los dispositivos activos, por lo que estos últimos siguen siendo los más utilizados.

Uno de los aspectos más importantes de los exoesqueletos activos está relacionado con el control de movimiento, en donde el tipo de actuadores a utilizar tienen una gran influencia en los algoritmos. En este sentido, los actuadores rotativos eléctricos suelen preferirse frente a los lineales neumáticos debido a que son más sencillos de controlar. Por otro lado, los actuadores rotativos requieren de reductores de velocidad, siendo los sistemas Harmonic Drive (HD) uno de los más utilizados.

Los sistemas HD son muy utilizados para la transmisión de movimiento en robots con pares de Revolución (R) y que deben seguir trayectorias específicas con una determinada precisión. Esto se explica en gran medida por las altas relaciones de transmisión que pueden conseguirse con estos dispositivos. Esta característica es de especial importancia en unidades robóticas cuyos pares R deben seguir trayectorias angulares altamente no lineales de un modo preciso y seguro, como es el caso de los exoesqueletos mencionados previamente. Estos sistemas deben interactuar físicamente con las personas ayudándoles a mover las extremidades involucradas según trayectorias que cambian con el tiempo, adaptándose así al patrón de marcha y a los requerimientos del usuario. Las características intrínsecas de la marcha bípeda de personas con y sin patologías y la flexibilidad de adaptación requerida en los exoesqueletos demandan el diseño de algoritmos de control complejos. Estos controles utilizan como señales de entradas datos que provienen de la segmentación y detección de eventos de la marcha, que describen la cinemática de distintos

patrones de movimiento y que miden la fuerza de interacción entre el exoesqueleto y el usuario, entre otras variables.

Los exoesqueletos utilizados para tareas de rehabilitación generalmente siguen trayectorias y requieren estrategias de control menos variables que las de los exoesqueletos que son utilizados para tareas más generales de asistencia de movimiento. En este último caso la amplitud, frecuencia y el patrón de los movimientos pueden cambiar continuamente en el tiempo, como así también el tipo de control entre las distintas fases de la marcha.

En este sentido, la complejidad y no linealidad de los procesos involucrados en el control de exoesqueletos de asistencia dificultan el diseño de estrategias de control mediante métodos puramente deterministas. Estos algoritmos a su vez requieren de parámetros relacionados con la planta y los procesos, muy difíciles de obtener con métodos iterativos experimentales. En este sentido, el uso de modelos virtuales de simulación puede ser gran utilidad para estimar parámetros incluidos en los controles, como así también realizar pruebas con distintos algoritmos y estrategias de control. Para que estos controles aporten datos que sean de utilidad a la hora de ser implementados en el sistema real, es fundamental contar con modelos de plantas que reproduzcan de un modo fiel la dinámica y cinemática del sistema, como así también utilizar coordenadas adecuadas que faciliten el diseño del control.

Por ejemplo, el modelado de una articulación robótica con un par tipo R en la rodilla debería contemplar dos barras rígidas unidas cada una al muslo y pantorrilla respectivamente, un motor de corriente continua DC y la transmisión HD. Adicionalmente, como estas estructuras interactúan con personas, las inercias de las extremidades sumadas al efecto de las fuerzas de interacción entre el usuario y el exoesqueleto deben ser tenidas en cuenta.

El modelo mencionado anteriormente forma un sistema electromecánico en donde el motor y las barras más la transmisión HD pueden considerarse por separado. Existe una amplia variedad de modelos de motores en la bibliografía, por lo que su modelado no se menciona en este artículo. Por el contrario, si bien existen modelos de transmisiones HD en la bibliografía ([8], [3] y [5]), estos modelos frecuentemente aparecen como unidades aisladas o soportando cargas fijas y no como parte integral de un sistema mecánico en donde su interacción con el entorno puede inducir fluctuaciones en las fuerzas y torques externos.

Con el objetivo de obtener un entorno de simulación de estrategias de control, y dadas las ventajas que desde un punto de vista de investigación puede aportar tener un software de simulación propio frente a aplicaciones comerciales, en este artículo se presenta una metodología para incluir modelos de

transmisión HD dentro de una formulación topológica para la simulación dinámica y el control de sistemas multicuerpo.

Para ello se presenta inicialmente una formulación topológica semirrecursiva para la simulación dinámica de sistemas multicuerpo. La transmisión HD se introduce como caso especial de restricción dentro de la formulación. Toda la formulación se ha incluido en Simulink®, lo cual permitirá ejecutar distintos algoritmos de control, permitiendo a vez introducir elementos adicionales como por ejemplo modelos de motores que no se incluyen en este artículo.

Este artículo está dividido en dos secciones. En la primera sección se presenta la formulación topológica original en la cual se ha basado el trabajo de este artículo y se incluye también la adaptación realizada para poder incluir de un modo general restricciones de transmisiones HD dentro de la formulación de base. En la segunda sección se introduce un ejemplo de control de posición implementando la formulación topológica con el sistema HD aquí presentado. La formulación se ha introducido en Simulink y el modelo de sistema es un exoesqueleto con articulaciones en la cadera y en la rodilla.

2 FORMULACIÓN TOPOLÓGICA ADAPTADA

Se ha mencionado anteriormente la conveniencia de utilizar coordenadas relativas para desde un punto de vista del control

Los métodos topológicos, que se basan en el uso de coordenadas relativas, suelen denominarse como métodos recursivos o semirrecursivos. Dependiendo para ello de si debe o no resolverse un sistema de ecuaciones lineales para calcular las aceleraciones del sistema.

La formulación semirrecursiva presentada en este artículo está basada en la formulación semirrecursiva de Rodríguez y otros [6]. En términos generales, esta formulación inicialmente define el sistema mediante coordenadas Cartesianas, obteniéndose finalmente mediante una doble transformación de velocidades, una expresión de las ecuaciones del movimiento en función de las aceleraciones relativas independientes del sistema multicuerpo.

Cuando los sistemas son de cadena abierta, las aceleraciones relativas pueden obtenerse de forma completamente recursiva y solo se realiza una transformación de velocidades. Cuando los sistemas son de cadena cerrada, las cadenas se abren por determinados pares obteniéndose así un sistema de múltiples cadenas abiertas que se calculan de forma recursiva. Finalmente, las cadenas se cierran introduciendo las restricciones correspondientes a los pares por donde fueron abiertas. Al contrario de los

sistemas de cadena abierta, cuando los sistemas multicuerpo son de cadena cinemática cerrada, y las restricciones se imponen mediante el uso de coordenadas naturales [1] como se realiza en esta formulación, se requiere la resolución de un sistema de ecuaciones lineales para la obtención de las aceleraciones relativas del sistema, correspondiente a la segunda transformación de velocidades.

La formulación original utilizada en este artículo utiliza dos tipos restricciones cinemáticas, las de los pares (tipo R) y prismáticos (tipo P), ya que todas las demás restricciones pueden definirse como combinaciones de éstas.

Con la adaptación introducida en este artículo se introduce un tipo de restricción adicional, la correspondiente a la transmisión HD. Como se verá más adelante, este tipo de transmisión impone una restricción constante en el tiempo, lo cual evita la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales para realizar la segunda transformación de velocidades cuando el sistema multicuerpo está cerrado únicamente por transmisiones tipo HD.

2.1 ECUACIONES DE CADENA ABIERTA

Las ecuaciones de la dinámica de un sistema multicuerpo de cadena abierta como el que se muestra en la Figura 1 se plantean fácilmente mediante las ecuaciones de Newton-Euler de cada uno de los sólidos que componen el sistema. De esta manera aparecen también en las ecuaciones las fuerzas internas de restricción que existen entre los pares cinemáticos que vinculan los elementos entre sí. Estos sistemas de cadena abierta tienen un sólido de entrada a la cadena, que suele ser un elemento fijo con respecto al sistema inercial. Cada elemento además posee puntos de entrada y salida que lo vinculan con sus elementos contiguos en la cadena cinemática.

La geometría de cada sólido se define mediante un sistema de coordenadas móvil y situado en el punto de entrada al mismo. Los pares cinemáticos de definen mediante coordenadas naturales [1], que consisten en puntos y vectores unitarios que definen la posición y orientación de los pares.

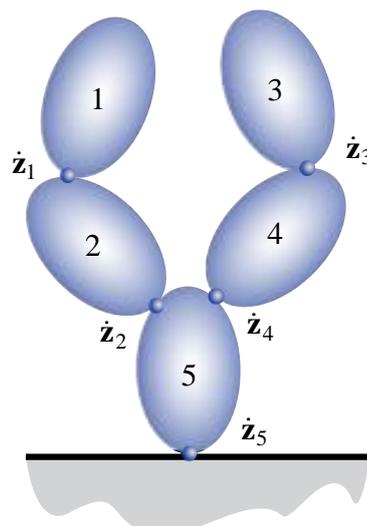


Figura 1. Sistema de cadena abierta

La posición y orientación de cada sólido se define inicialmente mediante las coordenadas Cartesianas del punto de entrada y su matriz de rotación. Aunque esta definición de la posición es redundante, luego se corrige mediante una transformación a coordenadas relativas.

Las velocidades y aceleraciones Cartesianas de un elemento se definen mediante los siguientes vectores

$$\mathbf{Z}_i \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Z}}_i \equiv \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{s}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

donde $\dot{\mathbf{s}}_i$ y $\ddot{\mathbf{s}}_i$ representan la velocidad y aceleración del punto del sólido i que instantáneamente coincide con el origen del sistema de referencia inercial.

De esta forma, las velocidades y aceleraciones Cartesianas de los n elementos del sistema quedan definidas por los vectores

$$\mathbf{Z}^T = \{ \mathbf{Z}_1^T \quad \mathbf{Z}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{Z}_n^T \}, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}^T = \{ \dot{\mathbf{Z}}_1^T \quad \dot{\mathbf{Z}}_2^T \quad \dots \quad \dot{\mathbf{Z}}_n^T \}$$

Utilizando puntos y vectores unitarios, el par de revolución (tipo R) entre los sólidos $i-1$ e i como se muestra en la Figura 2 se define mediante el compartimiento de un punto y un vector unitario a la salida del sólido $i-1$ y entrada del i .

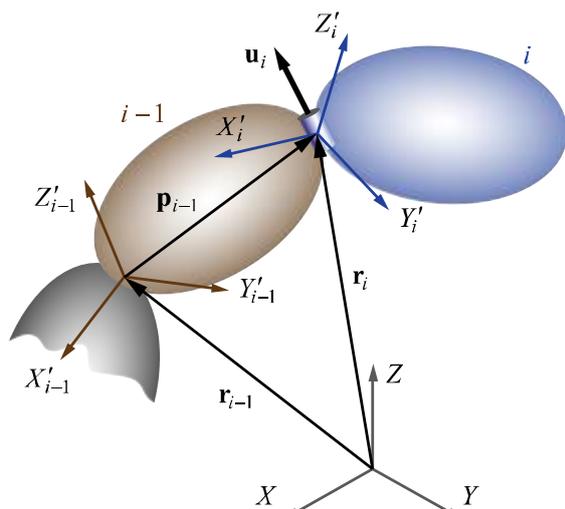


Figura 2. Par de revolución R

Como todos los elementos comparten el mismo punto de referencia (el origen de coordenadas), el cálculo de las velocidades y aceleraciones Cartesianas se hace en forma recursiva hacia adelante en función de las velocidades y aceleraciones relativas de una manera muy sencilla, ya que no se necesita ninguna matriz de transformación

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i &= \mathbf{Z}_{i-1} + \mathbf{b}_i \dot{z}_i \\ \dot{\mathbf{Z}}_i &= \dot{\mathbf{Z}}_{i-1} + \mathbf{b}_i \ddot{z}_i + \mathbf{d}_i \end{aligned} \quad (3)$$

donde \dot{z}_i y \ddot{z}_i son la velocidad y aceleración relativa del par i y las matrices \mathbf{b}_i y \mathbf{d}_i tienen expresiones que dependen del tipo de par (tipo R o tipo P) considerado. Por simplicidad, la expresión de estos vectores se omite en este artículo, pero pueden encontrarse en la referencia [2].

Las ecuaciones de movimiento se expresan más fácilmente en función de las velocidades \mathbf{Y}_i y aceleraciones Cartesianas $\dot{\mathbf{Y}}_i$ basadas en el centro de masa del elemento y que están relacionadas con las \mathbf{Z}_i y $\dot{\mathbf{Z}}_i$ mediante las siguientes expresiones

$$\mathbf{Y}_i = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{g}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\tilde{\mathbf{g}}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{D}_i \mathbf{Z}_i \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}_i &= \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\tilde{\mathbf{g}}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{s}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{g}_i \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{Z}}_i + \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\dot{\mathbf{g}}_i$ y $\ddot{\mathbf{g}}_i$ representan la velocidad y aceleración del centro de masas, $\boldsymbol{\omega}_i$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ la velocidad y aceleración angular del sólido i . Los vectores $\dot{\mathbf{s}}_i$ y $\ddot{\mathbf{s}}_i$ son la velocidad y aceleración del punto unido al sólido i que instantáneamente coincide con el origen del sistema inercial de coordenadas.

Considerando entonces las expresiones anteriores, el teorema de las potencias virtuales puede expresarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i^{*T} (\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{Y}}_i - \mathbf{Q}_i) &= \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i^{*T} \mathbf{D}_i^T (\mathbf{M}_i \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{Z}}_i + \mathbf{M}_i \mathbf{e}_i - \mathbf{Q}_i) &= \quad (6) \\ = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i^{*T} (\bar{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{Z}}_i - \bar{\mathbf{Q}}_i) &= 0 \end{aligned}$$

Donde el asterisco (*) representa las velocidades virtuales de cada elemento del sistema. Las matrices de la ecuación (7) tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_i \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{M}}_i = \mathbf{D}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{D}_i &= \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_3 & -m_i \tilde{\mathbf{g}}_i \\ m_i \tilde{\mathbf{g}}_i & \mathbf{J}_i - m_i \tilde{\mathbf{g}}_i \tilde{\mathbf{g}}_i \end{bmatrix} \quad (7) \\ \mathbf{J}_i &= \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{J}}_i \mathbf{A}_i^T \\ \bar{\mathbf{Q}}_i &= \mathbf{D}_i^T (\mathbf{M}_i \mathbf{e}_i - \mathbf{Q}_i) \end{aligned}$$

donde las matrices \mathbf{A}_i y $\bar{\mathbf{J}}_i$ son la matriz de rotación y el tensor de inercia del elemento i representados en su sistema de coordenadas locales.

Para obtener una expresión global del sistema completo, donde la matriz de inercia es $\bar{\mathbf{M}}$, el vector de fuerzas externas es $\bar{\mathbf{Q}}$, y el vector de aceleraciones es $\dot{\mathbf{Z}}$ con las siguientes expresiones

$$\bar{\mathbf{M}} \equiv \text{diag}(\bar{\mathbf{M}}_1, \bar{\mathbf{M}}_2, \dots, \bar{\mathbf{M}}_n) \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^T = [\bar{\mathbf{Q}}_1^T, \bar{\mathbf{Q}}_2^T, \dots, \bar{\mathbf{Q}}_n^T] \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}^T = [\dot{\mathbf{Z}}_1^T, \dot{\mathbf{Z}}_2^T, \dots, \dot{\mathbf{Z}}_n^T] \quad (10)$$

La ecuación de las potencias virtuales de todo el sistema queda definida por la expresión

$$\mathbf{Z}^{*T} (\bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{Z}} - \bar{\mathbf{Q}}) = 0 \quad (11)$$

Puede observarse que en la ecuación (11) no aparecen las fuerzas internas de los pares debido a que no producen potencias virtuales.

Para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema de cadena abierta en función de las coordenadas relativas del sistema, se introduce la primera transformación de velocidades de esta formulación. Para ello debe tenerse en cuenta que las velocidades virtuales \mathbf{Z}^* no son independientes, pero que pueden expresarse en función de las velocidades relativas del sistema mediante la matriz de transformación \mathbf{R} como indica la siguiente expresión

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}_1 \dot{z}_1 + \dots + \mathbf{R}_n \dot{z}_n = \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} \quad (12)$$

La columna j de la matriz \mathbf{R}_j , se calcula en forma directa de una manera muy sencilla porque sus elementos son las velocidades Cartesianas de los sólidos de la cadena que se encuentran por encima del par j , siendo estas velocidades originadas por una velocidad relativa unitaria en el par j y velocidades nulas en el resto de pares.

Siguiendo la sugerencia de Negrut y otros [4], donde los sólidos se han enumerado desde las hojas hasta la raíz, de tal forma que cada sólido tiene un número menor que su padre en la cadena cinemática, la matriz de transformación \mathbf{R} para un sistema como el de la Figura 3 tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & 0 & 0 & \mathbf{b}_5 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & 0 & 0 & \mathbf{b}_5 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_5 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\equiv \mathbf{TR}_d$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad 6x6, \mathbf{T} es la matriz de accesibilidad, definida por la conectividad del sistema, y \mathbf{R}_d es una matriz diagonal cuyos elementos son los vectores \mathbf{b}_i dependientes del tipo para en el punto de entrada.

Utilizando la expresión de la matriz \mathbf{R} de la ecuación (13), se definen las velocidades y aceleraciones Cartesianas en función de las relativas con las siguientes expresiones

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{TR}_d \dot{\mathbf{z}} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{TR}_d \ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{TR}}_d \dot{\mathbf{z}}$$

Reemplazando las expresiones de la ecuación (14) en la ecuación de las potencias virtuales (11), se obtiene el sistema de ecuaciones de movimiento en función de las coordenadas relativas del sistema

$$\mathbf{R}_d^T (\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T}) \mathbf{R}_d \ddot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{R}_d^T \mathbf{T}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{TR}}_d \dot{\mathbf{z}}) \quad (15)$$

donde el vector $\boldsymbol{\tau}$ representa las fuerzas exteriores generalizadas.

2.2 ECUACIONES DE CADENA CERRADA

Cuando los sistemas son de cadena cerrada, las aceleraciones relativas de la ecuación (15) ya no son independientes, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de sistemas de cadena cerrada se obtienen considerando las restricciones que relacionan estas coordenadas. Esto puede realizarse de una forma muy eficiente subdividiendo el conjunto de coordenadas relativas entre dependientes e independientes. De esta manera, las coordenadas relativas dependientes pueden expresarse en función de las independientes considerando el núcleo del espacio nulo de la matriz Jacobiana de las ecuaciones de restricción con respecto al vector de coordenadas relativas Φ_z .

Por ejemplo, las ecuaciones de restricción del cierre de cadena de un par tipo R como el de la Figura 3 se expresan muy fácilmente como sigue

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k = \mathbf{0} \quad (3 \text{ ec. independientes}) \quad (16)$$

$$\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (2 \text{ ec. independientes}) \quad (17)$$

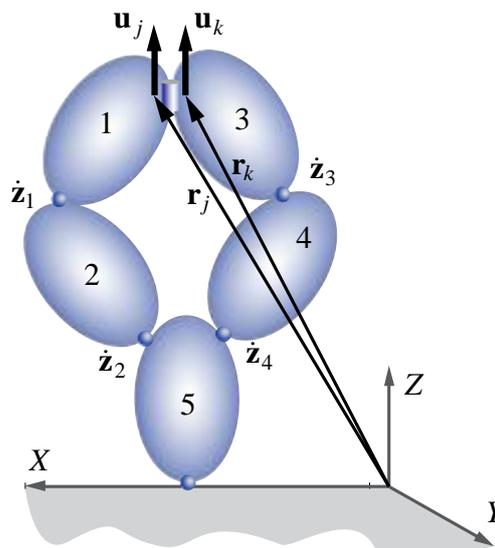


Figura 3. Cierre de cadena por un par R

Debido a que las ecuaciones de restricción están expresadas mediante coordenadas naturales, el cálculo de la matriz Jacobiana Φ_z requiere el uso de la regla de la cadena como indica la siguiente expresión

$$\Phi_z = \Phi_{r_j} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{z}} + \Phi_{u_j} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{z}} + \Phi_{r_k} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{z}} + \Phi_{u_k} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{z}} \quad (18)$$

Utilizando el método de partición de coordenadas de [9] y [7], se obtienen los conjuntos de velocidades relativas dependientes e independientes como sigue

$$\Phi_z \dot{z} = 0, \quad \begin{bmatrix} \Phi_z^d & \Phi_z^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}^d \\ \dot{z}^i \end{Bmatrix} = 0 \quad (19)$$

$$\dot{z}^d = -\Phi_z^d \setminus \Phi_z^i \dot{z}^i$$

Donde las coordenadas dependientes se eligen de tal forma que aseguren que Φ_z^d es invertible.

De esta forma se obtiene la matriz R_z correspondiente a la segunda transformación de velocidades relativas de dependientes a independientes

$$\dot{z} = R_z \dot{z}^i, \quad \begin{Bmatrix} \dot{z}^d \\ \dot{z}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\Phi_z^d)^{-1} \Phi_z^i \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \dot{z}^i \quad (20)$$

$$R_z \equiv \begin{bmatrix} -(\Phi_z^d)^{-1} \Phi_z^i \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Derivando las velocidades relativas de la ecuación (20) se obtienen las aceleraciones relativas

$$\ddot{z} = R_z \ddot{z}^i + \dot{R}_z \dot{z}^i \quad (21)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento de cadena cerrada se obtienen reemplazando la ecuación (21) en la ecuación (15), quedando expresadas de la siguiente manera

$$R_z^T R_d^T M^\Sigma R_d R_z \ddot{z}^i = R_z^T \tau + R_z^T R_d^T Q^\Sigma - R_z^T R_d^T T^T \bar{M} \bar{R}_d \dot{z} - R_z^T R_d^T T^T \bar{M} \bar{R}_d \dot{R}_d \dot{z}^i \quad (22)$$

2.3 RESTRICCIONES DEL SISTEMA HARMONIC DRIVE (HD)

Cuando se utilizan coordenadas globales (naturales en este caso) para definir las ecuaciones de restricción, la matriz R_z se obtiene numéricamente. Como se verá a continuación, cuando el sistema multicuerpo está cerrado por uniones o pares correspondientes a sistemas de transmisión tipo HD, la matriz R_z puede obtenerse de un modo más sencillo y eficiente, ya que permanece constante en el tiempo, evitando así la necesidad de resolver ningún sistema de ecuaciones.

Considerando un sistema multicuerpo como el exoesqueleto que se muestra en la Figura 5, la configuración del sistema HD consiste en el *circular spline* (CS), que se encuentra fijo a una de las extremidades de las barras. Por otro lado, el motor que transmite el movimiento al *wave generator* (WG) también está fijo al soporte del CS, con el WG

alojado dentro del elemento flexspline (FS), como se ve en la Figura 4

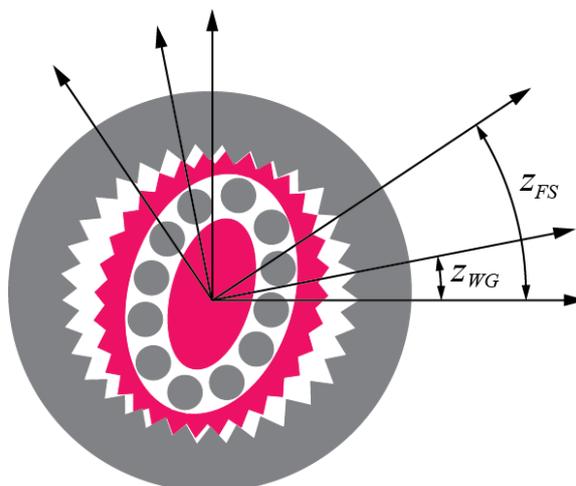


Figura 4. Detalle de transmisión HD

Las relaciones cinemáticas y dinámicas entre los desplazamientos angulares y torques de cada componente del sistema HD están definida por las siguientes expresiones

$$\theta_{WG} = (N + 1)\theta_{CS} - N\theta_{FS} \quad (23)$$

$$T_{WG} = 1/(N + 1)T_{CS} = -1/N T_{FS} \quad (24)$$

donde N es la relación de transmisión, θ es el ángulo de rotación del elemento correspondiente de la transmisión HD y T es el torque.

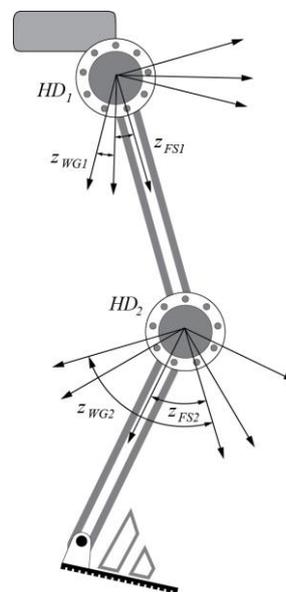


Figura 5. Esquema en 2D de exoesqueleto con transmisión HD en cadera y rodilla

El exoesqueleto de la Figura 5 con actuación en la cadera y rodilla representa un sistema de cadena cerrada debido a la interconexión entre los tres elementos que componen cada transmisión HD. Si

designamos al CS como el elemento padre del WG y del FS y consideramos el sistema local de coordenadas fijo al CS, la restricción cinemática de la ecuación (23) se puede expresar en coordenadas relativas z como sigue

$$\Phi(z) = z_{WG} + Nz_{FS} = 0 \quad (25)$$

Cuando las restricciones se expresan en función de coordenadas globales, como es el caso de las coordenadas naturales, la matriz R_z debe obtenerse generalmente en forma numérica en cada paso de integración. En el caso de la restricción del sistema HD como indica la ecuación (25), la relación entre las coordenadas relativas se mantiene constante, dependiendo solamente de la relación de transmisión N . De esta forma, el cierre de la cadena cinemática del sistema HD puede hacerse muy fácilmente y de una forma eficiente. Considerando entonces las coordenadas relativas del elemento WG z_{WG1} y z_{WG2} como independientes, las velocidades relativas del sistema de la Figura 5 pueden expresarse como una función de las independientes según la siguiente expresión

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_{FS1} \\ \dot{z}_{WG1} \\ \dot{z}_{FS2} \\ \dot{z}_{WG2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/N & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/N \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_{WG1} \\ \dot{z}_{WG2} \end{Bmatrix}; \quad (26)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} -1/N & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (26) se obtienen las aceleraciones relativas. Como puede observarse la matriz R_z es constante, por lo que \dot{R}_z es cero. De esta forma la ecuación (22), que representa la ecuación del movimiento del sistema de cadena cerrada pierde el último término del lado derecho, quedando expresada como

$$R_z^T R_d^T M^{\Sigma} R_d R_z \ddot{z}^i = R_z^T \tau + R_z^T R_d^T Q^{\Sigma} - R_z^T R_d^T T^T \bar{M} T R_d \dot{z} \quad (27)$$

donde los toques de la ecuación (24) pueden incluirse fácilmente dentro del término que representa los torques externos τ . Aunque se ha introducido un modelo ideal de transmisión HD, también pueden incluirse efectos adicionales como la rigidez, viscosidad torsional y la histéresis relacionada con estos sistemas.

3 IMPLEMENTACIÓN

Debido al incremento de par generado por la transmisión HD, el sistema no es backdriveable. Es importante remarcar que esta característica no podría simularse con un par R ordinario, y este efecto sería más difícil de incluir para describir más fielmente el funcionamiento del sistema. Esta característica además se hace especialmente importante para simular controles de impedancia y/o admitancia, con la finalidad de hacer más transparente el exoesqueleto para el usuario.

La formulación topológica con la inclusión de la transmisión HD descrita en el apartado anterior se ha implementado en Simulink®. Esto tiene la ventaja de que las simulaciones se realizan en un entorno preparado para sistemas multidominio y especialmente desarrollado para el diseño de algoritmos de control.

Con el objetivo de mostrar el funcionamiento de la formulación topológica adaptada con la inclusión de restricciones dinámicas y cinemáticas de los sistemas de transmisión HD, se ha implementado un ejemplo de control de posición a un modelo de exoesqueleto como el de la Figura 5. El diagrama de bloques de este sistema puede verse en la Figura 6

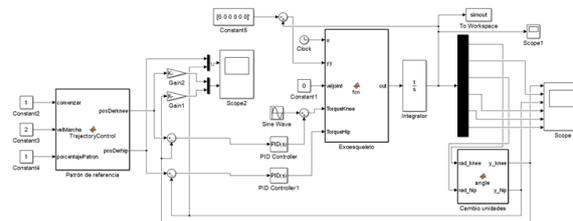


Figura 6. Diagrama de bloques del modelo de exoesqueleto.

El control de posición se aplica al movimiento de la cadera y de la rodilla, utilizando para ello trayectorias preestablecidas basadas en modelos de marcha normal. En la Figura 7 puede verse la trayectoria de referencia de cada una de las articulaciones del exoesqueleto y la trayectoria seguida al aplicar un control PID a cada articulación.

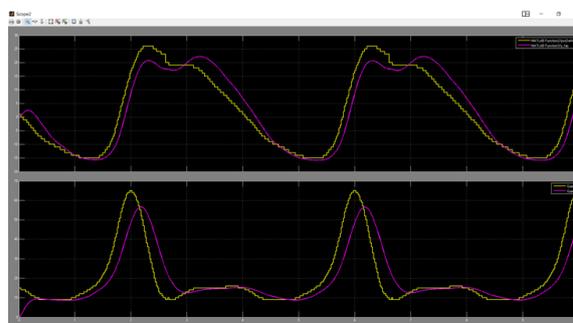


Figura 7. Trayectorias de la cadera y rodilla durante el control de posición.

Adicionalmente, en la Figura 8 puede verse una gráfica con los valores del vector de estado completo, formado por los cuatro desplazamientos angulares del sistema y sus dos velocidades angulares independientes.

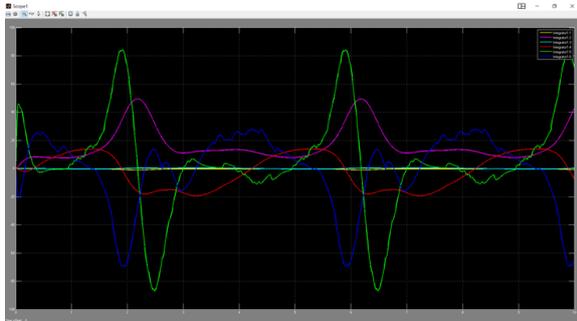


Figura 8. Valores del vector de estado del sistema.

Referencias

- [1] J. García de Jalón and E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge*. Springer-Verlag, 1994.
- [2] A. F. Hidalgo and J. García de Jalón, “Implementación eficiente de una formulación semirrecursiva para la dinámica de sistemas multicuerpo de gran tamaño,” *Rev. Int. Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ing.*, vol. 29, no. 4, pp. 225–233, Oct. 2013.
- [3] L. Lemmer and B. Kiss, “Modeling, Identification, and Control of Harmonic Drives for Mobile Vehicles,” in *2006 IEEE International Conference on Mechatronics*, 2006, pp. 369–374.
- [4] D. Negrut, R. Serban, and F. A. Potra, “A Topology-Based Approach to Exploiting Sparsity in Multibody Dynamics: Joint Formulation*,” *Mech. Struct. Mach.*, vol. 25, no. 2, pp. 221–241, Jan. 1997.
- [5] C. Preissner, “A high-fidelity harmonic drive model: Experiment, simulation, and application,” University of Illinois at Chicago, 2009.
- [6] J. I. Rodríguez, J. M. Jiménez, F. J. Funes, and J. García de Jalón, “Recursive and Residual Algorithms for the Efficient Numerical Integration of Multi-Body Systems,” *Multibody Syst. Dyn.*, vol. 11, no. 4, pp. 295–320, May 2004.
- [7] Serna, R. Avilés, and J. García de Jalón, “Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates.,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 17, 1982.
- [8] H. D. Taghirad and P. R. Bélanger, “Modeling and Parameter Identification of Harmonic Drive Systems,” *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 120, no. 4, p. 439, 1998.
- [9] R. A. Wehage and E. J. Haug, “Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems,” *J. Mech. Des.*, vol. 104, no. 1, p. 247, Jan. 1982.