

ESTUDIO DEL MODELO DE COMBATE DE LANCHESTER COMO SOPORTE PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN DECISOR ESTRATÉGICO OPERACIONAL MILITAR MEDIANTE BLOQUES RETROALIMENTADOS

G. Minguela Castro, gminguela@isdefe.es

Carlos Cerrada, ccerrada@issi.uned.es

J.A. Cerrada, jcerrada@issi.uned.es

UNED, ETSI Informática,

Departamento de Ingeniería de Software y Sistemas Informáticos,

C/Juan del Rosal, 16. 28040 Madrid, Spain

Resumen

Mediante modelado y simulación es posible construir importantes herramientas de apoyo a la toma de decisiones de especial interés en el ámbito militar. Estas herramientas proporcionan una interpretación del entorno complejo y una evaluación de los escenarios probables. La simulación puede ser complementada con técnicas de Inteligencia Artificial (IA), lo que permitirá en su conjunto una mejora en la definición de los comportamientos de los adversarios. Este artículo muestra un estudio sobre el modelo de combate de Lanchester, ideado inicialmente para modelar el número de bajas producidos en una batalla en base a las concentraciones de fuerzas y coeficientes de efectividad, con la finalidad de extenderlo de cara a construcción de un sistema Decisor Estratégico Operacional Militar mediante bloques retroalimentados. Este sistema más completo utilizará técnicas de modelización de la incertidumbre y permitirá integrar y aplicar técnicas de IA en la toma de decisiones militares.

Palabras clave: Modelos de Combate, Dinámica de Sistemas, Ecuaciones de Lanchester, Juegos de Guerra

1 MOTIVACIÓN

Los modelos son abstracciones de la realidad, abstracciones que permiten reconstruir fenómenos, virtualizarlos, experimentar con ellos y tomar decisiones. En el ámbito militar, el combate real difiere del modelo por su complejidad y su incertidumbre asociada, pero la abstracción permite tener aproximaciones de la realidad, suficientes, para el entrenamiento de destrezas asociadas a la toma de decisiones críticas. Este enfoque sienta las bases de lo que se conoce como *Juegos de Guerra* (*War Games* en terminología anglosajona), y cuyos principios básicos se exponen con más detalle en [14].

La aplicación de métodos analíticos avanzados con el propósito de apoyar el proceso de toma de decisiones estratégica y operacional, así como a la utilización de nuevas técnicas de gestión de la incertidumbre, mediante controles adaptativos, predictivos y expertos, permitirá identificar las mejores líneas de acción posibles y los efectos que producen en el adversario.

Los precedentes actuales de automatización de las decisiones militares están orientados fundamentalmente a la conducción en la batalla, dejando a un lado las decisiones de mayor nivel de abstracción y calado, las denominadas decisiones estratégicas y operacional.

En [14] los autores presentan el esquema básico de una aproximación a la automatización de las decisiones estratégicas operacionales basada en los efectos producidos por la decisión. En este esquema se revela clave el disponer de un sistema de ecuaciones diferenciales que definan el comportamiento del sistema a modelar, y que estas ecuaciones se puedan ampliar para permitir el modelado y análisis de consecuencias de las nuevas estrategias que se quieran ensayar. Unas ecuaciones que contemplan estas expectativas son las establecidas por Lanchester [10], Deitchman [4] y Bracken [2] cuyo estudio en profundidad es objeto del presente trabajo. Otros enfoques complementarios como la programación estocástica con escenarios probables, serán tenidos en cuenta en las bases de la investigación planteada como futura Tesis Doctoral, del primer autor.

2 PRINCIPIOS DEL MODELO DE DESGASTE DE LANCHESTER

Las ecuaciones de Lanchester simplifican los modelos de desgaste de batallas, enfatizando la importancia de las concentraciones de tropas en el desenlace final. Estos modelos fueron desarrollados durante la gran

guerra por F.W. Lanchester (1916) [10], ha habido desarrollo posteriores de estas leyes como los Deitchman (1962) [4], para la ley mixta o Peterson (1967) [16] para la ley logarítmica o Bracken (1995) [2] en su ley general, usando los datos de la batalla de las Ardenas (1944).

Hartley and Helmbold (1995) [8] analizaron la ley cuadrática utilizando los datos de la batalla de Inchon-Seoul (1950), concluyendo que el mejor encaje ocurría dividiendo la batalla en entre sub batallas. Wiper, Petri and Young (2000) [24] estudiaron la forma estocástica de Lanchester, concluyendo que hay otros factores que juegan un papel importante en combates reales (estrategia, entorno, etc.) y que las ecuaciones Lanchester no tienen en cuenta. Lucas T.W y Dinges J.A (2004) [11] contrastaron las bajas diarias a través de los datos de la batalla de Kursk (1943) mediante la Ley general de Bracken, concluyendo la necesidad de dividir las batallas en fases secuenciales diferenciadas por cambios importantes en las concentraciones o la estrategia de la batalla.

Se debe entender estas ecuaciones como un recurso a la toma de decisiones de la dinámica de la batalla a una escala local (operacional), una aproximación explícita que busca entender, trazar y anticipar los efectos directos e indirectos de las decisiones operacionales.

2.1 MODELOS DE DESGASTE

Se supone que existe una *fuerza-x* y una *fuerza-y* que se enfrentan de forma competitiva. Esta fuerza, por simplicidad, se modelizará como el número de combatientes. Así $x(t)$ e $y(t)$ definen el número de combatientes de la *fuerza-x* y la *fuerza-y* en un instante determinado (las bases de datos disponibles, con información de contiendas, suele estar representado por evoluciones temporales en días, en el mejor de los casos).

La evolución de $x(t)$ y $y(t)$ vendrá determinada por las ecuaciones de Lanchester, caracterizadas para la tipología de combate que se considere por las ecuaciones que se indican a continuación:

- 1.) Caso de fuerzas convencionales, en combate de Fuego directo “Cada miembro de la *fuerza-x* está dentro del alcance del enemigo *y*, cuando la *fuerza-x* recibe pérdidas, el fuego y es concentrado en las restantes”. Las pérdidas serán proporcionales $ay(t)$ siendo *a* el coeficiente de efectividad de la fuerza enemiga, y de forma equivalente *b*. Las ecuaciones son:

$$\frac{dx}{dt} = -ay(t) \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -bx(t)$$

Se pueden, durante la batalla, introducir refuerzos o sacar tropas, siendo $f(t)$ y $g(t)$ las funciones que definen la entrada o salida de tropas durante la batalla, quedando:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay(t) + f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -bx(t) + g(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Considerando el caso de combates aislados sin refuerzos, y resolviendo el sistema de ecuaciones (ley cuadrática) resulta:

$$-b(x(t)^2 - x(0)^2) = -a(y(t)^2 - y(0)^2) = K \tag{3}$$

Esta ecuación describe una familia de hipérbolas en el plano *x-y* como las representadas en la Figura 1.

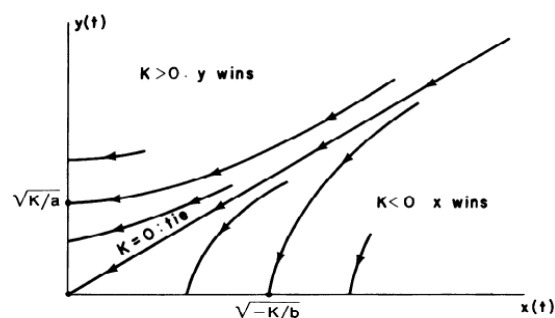


Figura 1: Familia de hipérbolas definidas por la ley cuadrática.

- 2.) Caso de las fuerzas distribuidas en áreas, invisibles al enemigo o utilizando fuegos concentrados en áreas como los de artillería, el modelo de pérdidas de la *fuerza-x* debe ser proporcional al tamaño de la *fuerza-x*, cuanto mayor el tamaño de la *fuerza-x* mayor probabilidad de acierto del oponente. Además, será proporcionalmente al tamaño de la fuerza enemiga multiplicado por su coeficiente de efectividad. Los coeficientes *a* y *b* no tiene el mismo sentido, atendiendo a las tipologías de fuegos utilizados. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -bx(t)y(t) \end{aligned} \tag{4}$$

Se pueden, durante la batalla, introducir refuerzos o sacar tropas, siendo $f(t)$ y $g(t)$ las funciones que definen la entrada o salida de tropas durante la batalla, quedando:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay(t)x(t) + f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -bx(t)y(t) + g(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Considerando el caso de combates aislados sin refuerzos, y resolviendo el sistema de ecuaciones (ley lineal) resulta:

$$-b(x(t)-x(0)) = -a(y(t) - y(0)) = M \tag{6}$$

Esta ecuación describe una familia de rectas en el plano x - y .

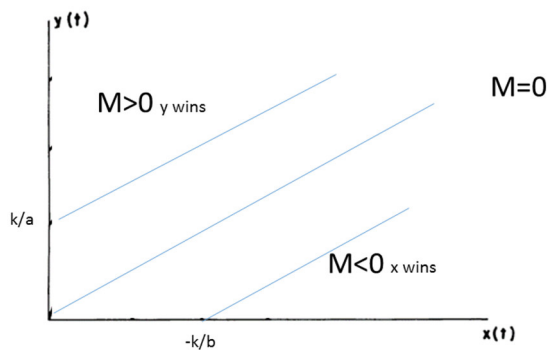


Figura 2: Familia de rectas definidas por la ley lineal

- 3.) En el caso de batallas entre fuerzas convencionales *fuerza-x* contra fuerzas tipo guerrilla *fuerza-y* (invisibles al enemigo), se puede desarrollar un modelo mixto, Deitchman [4], caracterizado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay(t) + f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -bx(t)y(t) + g(t) \end{aligned} \tag{7}$$

Considerando el caso de combates aislados sin refuerzos, y resolviendo el sistema de ecuaciones (Mixto) resulta:

$$-\frac{1}{2}bx(t)^2 + ay(t) = -\frac{1}{2}bx(0)^2 + ay(0) = M \tag{8}$$

Esta ecuación describe una familia de parábolas en el plano x - y .

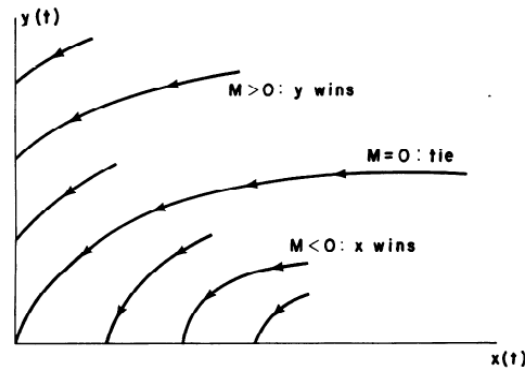


Figura 3: Familia de parábolas definidas por la ley mixta

- 4.) No hay razón para que en una batalla todo tipo de fuegos no deban usarse conjuntamente. Utilizando un modelo generalizado, como el que Bracken [2] propuso, permite establecer empíricamente los valores que determina la naturaleza de la batalla (p y q). Se definen p como factor exponencial de la fuerza de ataque y q como factor exponencial de la fuerza de defensa, según:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay(t)^p x(t)^q + f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -bx(t)^p y(t)^q + g(t) \end{aligned} \tag{9}$$

definiendo p y q en el intervalo $[0,1]$.

Operando el sistema de ecuaciones, podemos ver la relación de pérdidas;

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b} y(t)^{p-q} x(t)^{q-p} \tag{10}$$

3 CÁLCULO DE VALORES DEL MODELO DE PREDICCIÓN

La regresión intenta explicar la causalidad de los efectos. Se puede utilizar el modelo de regresión para predicción si la variable independiente explica suficientemente la variabilidad de la variable dependiente. La medida de la calidad del modelo regresivo vendrá dada a partir del análisis de regresión.

El modelo generalizado que propuso Bracken [2] genera 4 incógnitas a resolver (a, b, p y q). Utilizando de forma regresiva los datos obtenidos en el transcurso de la batalla y los parámetros que definen la calidad de la regresión SSR, SST y R^2 , se obtiene un número de ecuaciones e incógnitas adecuado.

- a) Siendo SSR la medida de la variación explicada $\sum(\hat{y} - \bar{y})^2$

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{a}y_i^p x_i^q - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{b}x_i^p y_i^q - \bar{y})^2 \quad (11)$$

- b) Siendo SSE la medida no explicada de la variación $\sum(y - \hat{y})^2$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \hat{a}y_i^p x_i^q)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{b}x_i^p y_i^q)^2 \quad (12)$$

- c) Siendo SST=SSR+SSE especifica la variación total $\sum(y - \bar{y})^2$

$$SST = \sum(\hat{x}_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2 \quad (13)$$

- d) Siendo R^2 el coeficiente de determinación de calidad del ajuste, cuanto más próximo a uno mejor calidad estimativa.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SSR}{SSR+SSE} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (14)$$

- e) Restricciones.
 $R^2 \approx 1$ (solamente indica calidad de ajuste de la regresión en el alcance observado y no en predicciones fuera de rango)

$$\begin{aligned} SSE &\approx 0 \\ SST &\approx SSR \\ y_{n+1} - y_n &= h\dot{y} \end{aligned}$$

3.1 ADAPTACIÓN DEL MODELO DE PREDICCIÓN

Los valores a, b, p y q no son constantes durante la batalla y varían con el progreso de la misma día a día. Lucas T.W y Dinges J.A [11] proponen dividir las batallas en fases secuenciales para el mejor encaje del modelo.

- Los coeficientes a y b varían atendiendo a la efectividad que es lastrada por el devenir de la batalla (Motivación, terreno, actitud ofensiva o defensiva, etc.).
- Los coeficientes p y q varían por las tipologías de armas y combates. Se pueden añadir otros coeficientes, multiplicador o divisor d , en base la estrategia (ofensiva o defensiva).

4 MODELO DISGREGADO

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de los Modelos de Lanchester definen las dinámicas de combate de batalla (Alto nivel de agregación), ver figura 4. Se puede generar una equivalencia a modelos desgregados para conocer el devenir en las tipologías de combate específicas y poder tomar decisiones tácticas. Esta desgregación aportará evaluación del

resultado de la toma de decisiones, de forma pormenorizada, evitando tomar acciones pocos útiles. Es necesario tener en cuenta que las simplificaciones del modelo agregado generarán desviaciones a medida que se aumenta la resolución.

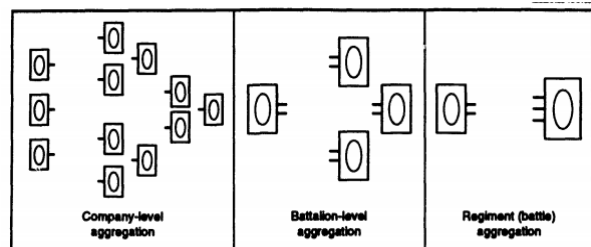


Figura 4: Ilustración de diversos niveles de agregación

En primer lugar, se modeliza el daño infringido probable por cada unidad Y_j sobre la unidad X_i , utilizando la Ley cuadrática, siendo estos daños acumulativos y en base a la concentración de fuerzas Y_j . El factor de efectividad a_{ij} estará condicionado por las unidades intervinientes en el área de aplicación (n elementos) y la efectividad de generar desgaste de una sobre la otra.

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j \quad (15)$$

Para crear la equivalencia del modelo desgregado, se puede optar por conocer las tipologías de unidades y asignarles un peso específico atendiendo a sus capacidades reales de fuerza de combate.

$$Y = \sum_{j=0}^n w_j Y_j \quad (16)$$

Siendo w_j el peso del tipo j que condiciona su fuerza de batalla. Y es la medida de concentración de conjunto.

Finalmente se obtiene la equivalencia de los modelos, pudiendo pasar de un grado de decisión Estratégica Operacional a uno más Táctico, que se utilizará en el contraste de las hipótesis operacionales. Es fundamental usar los modelos desgregados para entendimiento del proceso de batalla y calibrar los modelos agregados.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j = aY = a(\sum_{j=1}^n w_j Y_j)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j = a \sum_{j=1}^n w_j Y_j \quad (17)$$

Siendo a el coeficiente de efectividad para la fuerza- y de la batalla.

5 MODELO SECCIONADO EN ÁREAS DE BATALLA

Las batallas se caracterizan por ser divididas en sectores; en cada sector se pueden encontrar unos coeficientes de efectividad diferenciados por las tipologías de armas involucradas (ver Figura 5).

Se puede establecer en cada sector *i* de la batalla el modelo de combate de Lanchester que mejor permita realizar la predicción del estado futuro.

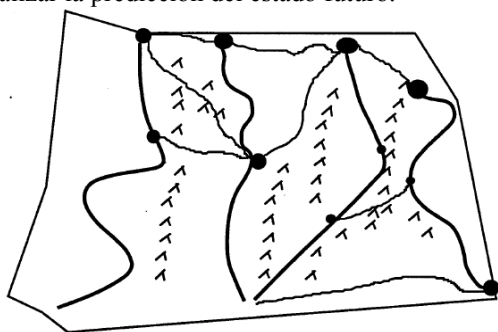


Figura 5: Ilustración de un campo de batalla seccionado en diversas áreas

Así, en el caso de la ley cuadrática, con concentraciones por sectores definidas por x_i e y_i y coeficientes de efectividad a_i y b_i , las ecuaciones quedarían:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -a_i y_i(t) \\ \frac{dy_i}{dt} &= -b_i x_i(t) \end{aligned} \tag{18}$$

Para otras leyes, el desarrollo es similar.

6 APLICACIÓN AL CASO DE LA BATALLA DE IWOJIMA

Las ecuaciones descritas pueden aplicarse a casos documentados de guerras sobre las que se dispone de información para poder evaluar los modelos. Ese es el caso de la batalla de IWOJIMA en la segunda guerra mundial, mantenida en el frente del pacífico entre Estados Unidos y Japón.

Para la simulación y obtención de resultados contrastables se parte de la suposición que rige la Ley cuadrática, y discretizando mediante método Euler, por intervalos de 1/2 día ($h=0,5$), a partir de las referencias de bajas publicados en "A Verification of Lanchester's Law", by Joe Engel, Operations Research volume 2, pp 163-171", se evalúan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= -b x_n h \\ x_{n+1} - x_n &= -a y_n h \end{aligned} \tag{19}$$

Tabla 1 Bajas reales batalla IWOJIMA

Total United States casualties at Iwo Jima				
	Killed, missing or died of wounds	Wounded	Combat Fatigue	Total
Marines	5,931	17,272	2,648	25,851
Navy units:				
Ships and air units	633	1,158		1,791
Medical corpsmen	195	529		724
Seabees	51	218		269
Doctors and dentists	2	12		14
Army units in battle	9	28		37
Grand totals	6,821	19,217	2,648	28,686
Japanese casualties at Iwo Jima				
Defense forces (Estimated)		Prisoners		Killed
21,000		Marine 216		20,000
		Army 867		
		Total 1,083		

En la Figura 6 se representan de forma gráfica los resultados de simulación obtenidos para la evolución de las tropas de ambos contendientes, así como la hipérbola definidas por la ley cuadrática aplicada, concluyendo en un número de bajas japonesas aproximadas de 20.000 hombres al finalizar la toma de la isla en 36 días de operación y un número similar de estadounidenses. Aproximándose a los valores reales de la contienda para combates terrestres.

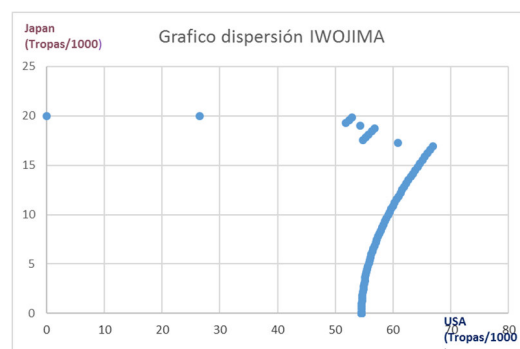
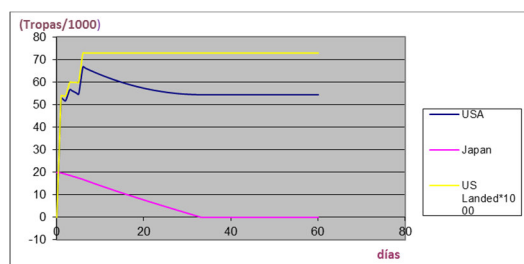


Figura 6: Representación de los resultados obtenidos en la simulación de la batalla de IWOJIMA

7 CONCLUSIONES

La simulación es una de las herramientas más potentes que tiene la investigación operativa y posiblemente sea la técnica más utilizada en la representación virtual de las decisiones militares.

La toma de decisiones a la que se deben enfrentar los puestos de mando operativo es extremadamente

compleja. La utilización de sistemas automáticos de decisión operacional, junto a los sistemas de simulación y mando y control, permite recrear el teatro de operaciones con un oponente virtual adaptado al cambio inherente de la naturaleza del combate. La utilización de técnicas de control automático y el aprendizaje regresivo de los modelos permitirán un alto grado de realidad en la toma de decisiones estratégico-operacionales.

Para la elaboración de un sistema de simulación eficaz en este campo hay que partir de un conjunto de ecuaciones que representen lo más fidedignamente posible el modelo real, en este caso el campo de batalla en un entorno de guerra convencional.

En este artículo se ha presentado un estudio detallado del modelo de combate de Lanchester, estudio realizado con la finalidad de usar dicho modelo en la construcción de un sistema Decisor Estratégico Operacional Militar mediante bloques retroalimentados.

Los futuros trabajos se centrarán en el desarrollo del Sistema Decisor mencionado y en la profundización en cuanto a los modelos de enfrentamiento necesarios. El planeamiento general será el de analizar y contrastar los efectos del sistema de ayuda a la decisión creado, a través de la utilización de datos reales y públicos existentes sobre diferentes tipologías de batalla.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en parte gracias a la financiación recibida del Ministerio de Economía y Competitividad español a través del proyecto DPI2016-77677-P, y también gracias a la ayuda recibida de la red RoboCity2030-DIH-CM Madrid Robotics Digital Innovation Hub ("Robótica aplicada a la mejora de la calidad de vida de los ciudadanos. Fase IV"; ref. S2018/NMT-4331), concedida dentro de los Programas de Actividades I+D de la Comunidad de Madrid, parcialmente financiada con Fondos Estructurales de la UE.

English summary

STUDY OF THE COMBAT MODEL OF LANCHESTER AS SUPPORT FOR THE CONSTRUCTION OF A MILITARY OPERATIONAL STRATEGIC DECISOR THROUGH FEEDBACK BLOCKS

Abstract

Modeling and simulation are excellent techniques usable jointly for building important decision support tools of special interest in the military field. These tools provide an interpretation of the complex environment and an evaluation of the probable scenarios. The simulation can be complemented with Artificial Intelligence (AI) techniques, which will allow an overall improvement in the definition of the adversaries' behavior. This article shows a study about the Lanchester combat model, initially designed to model the number of casualties produced in a battle, based on the concentrations of forces and coefficients of effectiveness. The purpose is to extend it for the construction of a Strategic Military Operational Decisor system through feedback blocks. This more complete system will use uncertainty modeling techniques and will allow the integration and application of AI techniques in military decision making.

Keywords: Combat Models, System Dynamics, Lanchester Equations, War Games.

Referencias

- [1] Artelli, Michael J. and Richard F. Deckro, (2008) Modeling the Lanchester Laws with System Dynamics. The Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, and Technology 5, no. 1
- [2] Bracken, J., (1995) Lanchester Models of the Ardennes Campaign, Naval Research Logistics, vol. 42, 559-577
- [3] Christensen, T., (1995) Technical Report on Stable Defence, Defence Research Section NATO.
- [4] Deitchman, S.J. 1962. A Lanchester Model of Guerrilla Warfare, operation research, 10 pp 818-827.
- [5] Diez, F.J., (2000) Probabilidad y teoría de la decisión de medicina, UNED, Madrid.
- [6] Engel, J., (1954) A Verification of Lanchester's Law", Operations Research volume 2, pp 163-171
- [7] Green, J.R., (1991) Comparing Combat Models Using Analytical Surrogates, Naval Postgraduate School Thesis.
- [8] Harley, D. and Helmbold, R., (1995) Validating Lanchester's square law and other attrition models, Naval Res Logist 42, pp 609-633.

- [9] Jaiswal, N. K., (1997) *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
- [10] Lanchester, F.W., (1916) *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*, Constable
- [11] Lucas T.W y Dinges J.A (2004), *The Effect of Battle Circumstances on Fitting Lanchester Equations to the Battle of Kursk*
- [12] MacKay, N. J., (2006) *Lanchester combat models*. (arXiv, math)
- [13] McCrabb, M., (2002) *Effects-based Coalition Operations: Belief, Framing and Mechanism*, KSCO 2002: Second International Conference on Knowledge Systems for Coalition Operations
- [14] Minguela, G., Cerrada, C., Cerrada, J.A., (2019) *Decisor Estratégico Operacional Militar mediante bloques retroalimentados, utilizando técnicas de modelización de la incertidumbre*; aceptado en el 'XV Simposio CEA Control Inteligente y V Simposio CEA Modelado Simulación y Optimización' (Simposio CEA CI & MS 2019), Logroño, 1-3 julio 2019.
- [15] Pajares Martin Sanz, G., de la Cruz García, J. Manuel, (2010) *Aprendizaje Automático Un enfoque Práctico*. Ra-Ma.
- [16] Peterson, R.H., *On the 'Logarithmic Law' of Attrition and Its Application to Tank Combat* Author(s): Source: *Operations Research*, Vol. 15, No. 3 (May - Jun., 1967), pp. 557-55
- [17] Rios Insua, S., Bielza Lozoya, C., Mateos Caballero, A., (2002) *Fundamento de los Sistemas de Ayuda a la decisión*. Ra-Ma.
- [18] Staker, R.J., (1999) *Military Information Operations Analysis Using Influence Diagrams and Coloured Petri Nets*. (DSTO Electronics and Surveillance Research Laboratory, Department of Defense, Salisbury, Australia.
- [19] Stanescu, M., Barriga, N. A., and Buro, M., (2015) *Using Lanchester attrition laws for combat prediction in StarCraft*, in Eleventh Annual AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment (AIIDE).
- [20] Russell, S.J., and Norvig, P., (2016) *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall.
- [21] Vitoriano, B. (2007) "Teoría de la Decisión: Decisión con incertidumbre, Decisión multicriterio y Teoría de juegos". Universidad Complutense de Madrid. Madrid.
- [22] Washburn, A., Kress, M., (2009) *Combat Modeling*. International Series in Operations Research and Management Science 134, Springer Science + Business Media.
- [23] Washbrun, A. R., (1986) *Lanchester systems*. Naval Postgraduate School, Monterey, USA.
- [24] Wiper, Michael Peter, Pettit, L. I., Young, K. D. S., (2000) *Inferencia bayesiana para algunas leyes de Lanchester*. Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Estadística.



© 2019 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution CC BY-NC-SA 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>).