

CONTROL DE FORMACIONES SOBRE REGIONES OBJETIVO DE SISTEMAS MULTI-AGENTE LAGRANGIANOS CON RETARDO

Ernesto Aranda-Escolástico

Universidad de Almería, Ctra. Sacramento s/n 04120, Almería (eaescolastico@gmail.com)

María Guinaldo, Sebastián Dormido

UNED, c/ Juan del Rosal 16 28040, Madrid (mguinaldo, sdormido@dia.uned.es)

Leonardo J. Colombo

Instituto de Ciencias Matemáticas, c/ Nicolás Cabrera 13-15, Madrid (leo.colombo@icmat.es)

Resumen

En este artículo se estudia el problema del control de formaciones para sistemas multi-agente gobernados por una dinámica lagrangiana. Cada agente observa un conjunto convexo, el cual debe alcanzar, siendo el objetivo del grupo alcanzar la formación deseada en estos conjuntos cuando la comunicación entre los agentes está sujeta a retardos. Se propone una nueva ley de control para alcanzar la formación en los conjuntos objetivo, mientras que la velocidad de los agentes converge a cero. Finalmente, se han validado los resultados teóricos mediante un ejemplo de simulación.

Palabras clave: Sistemas multi-agente, sistemas lagrangianos, control cooperativo, retardo.

1. Introducción

El interés por el control distribuido para múltiples vehículos y dispositivos robóticos ha ido creciendo en las últimas décadas en las comunidades de control y robótica [4, 12, 16, 17]. En concreto, cuando la dinámica de los agentes se determina mediante la función lagrangiana, el control de sistemas multi-agente resulta especialmente interesante en aplicaciones como la coordinación y sincronización de satélites modelados por sistemas lagrangianos [5, 8, 20]. La principal motivación para utilizar modelos dinámicos en los algoritmos distribuidos de planificación de la trayectorias en sistemas multi-agente proviene de que el control de la aceleración en vehículos resulta más fácilmente implementable que el control de la velocidad [7, 8, 9, 19]. De esta manera, se obtienen soluciones más precisas para el problema de los sistemas multi-agente de gran escala, tanto en términos de complejidad en la formulación del problema como en cuanto a carga computacional de la solución.

El retardo en las medidas, por ejemplo de distancia, es muy común en escenarios multi-agente, especialmente en entornos subacuáticos [18, 21].

Así pues, consideramos que cada agente evoluciona bajo la dinámica derivada de la función lagrangiana, pero que las medidas relativas a los otros se obtienen con un cierto retardo. Los efectos de retardos de comunicación en sistemas de Euler-Lagrange se han estudiado en varios trabajos recientes [1, 4, 14, 15], principalmente en lo que al problema del consenso se refiere.

En este trabajo, se determina si existen trayectorias no triviales para el control de formaciones sobre conjuntos convexos objetivo, que se alcanza con velocidad cero de manera asintótica. El marco que se propone está basado en considerar el control de formaciones de sistemas multi-agente como un sistema Lagrangiano sujeto a fuerzas externas, tal y como se introdujo recientemente en [6]. Extendemos dicha estrategia para el estudio de la convergencia a la forma deseada cuando los agentes adquieren información del resto de manera intrínsecamente retardada.

La principal contribución de este trabajo consiste en proporcionar un conjunto de condiciones suficientes para alcanzar la formación de sistemas multi-agente cuando estos agentes evolucionan bajo dinámicas derivadas del lagrangiano, y cuando la comunicación entre aquéllos presenta retardo. El principal resultado del artículo se resume en el Teorema 2, que describe la condición necesaria sobre las ganancias del controlador para la convergencia asintótica a la formación deseada con velocidad nula, mientras que cada agente alcanza su región objetivo. El resultado se obtiene derivando las condiciones adecuadas que permiten la aplicación del Lema de Barbalat. Extendemos, por tanto, el problema del consenso [15] a control de formaciones sobre una región objetivo. También se extienden los resultados de [11] (sobre *targeted agreement*) al caso de formaciones en las que la información se obtiene de manera retardada, además de considerar sistemas lagrangianos más generales que incluyen la existencia de un potencial.

El resto del artículo está estructurado como sigue.

La sección 2 presenta distintas herramientas que serán utilizadas a lo largo del artículo. La sección 3 describe el problema de control de formaciones para sistemas lagrangianos conectados mediante grafos indirectos. En la sección 4 se estudia el control de formaciones en una región objetivo de sistemas lagrangianos con retardo y se derivan las condiciones suficientes para la existencia de una ley de control que asegure la convergencia asintótica a una formación deseada para los agentes. En la sección 5 se aplican los resultados a un ejemplo con manipuladores robóticos. Las principales conclusiones del trabajo y las posibles líneas de investigación futuras se detallan en la sección 6.

2. Preliminares

En esta sección presentamos algunas herramientas que se usarán a lo largo del artículo. En particular, de análisis convexo, de sistemas dinámicos, de teoría de grafos y de mecánica lagrangiana.

2.1. Análisis convexo

El espacio real de n dimensiones se denota por \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}_{>0}$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, y $\mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$. Denotamos por $(\mathbb{R})^*$ el espacio dual de \mathbb{R}^n . La norma euclídea sobre \mathbb{R}^n se denota por $\|\cdot\|$. Para cualquier conjunto no vacío $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, $d(x, \mathcal{C}) = \inf_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\|$ representa la distancia entre $x \in \mathbb{R}^n$ y \mathcal{C} , donde $d(x, \mathcal{C}) = 0$, para $x \in \mathcal{C}$.

Un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *convexo* si $(1 - a)x + ay \in \mathcal{C}$ donde $x, y \in \mathcal{C}$ y $0 \leq a \leq 1$.

Sea \mathcal{C} un conjunto convexo. La *proyección convexa* de cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ sobre \mathcal{C} se denota por $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}$, que satisface $\|x - \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x)\| = d(x, \mathcal{C})$. La función $d(x, \mathcal{C})$ es continuamente diferenciable sobre $x \in \mathbb{R}^n$, y su gradiente viene dado por (véase [3]) $\nabla d^2(x, \mathcal{C}) = 2(x - \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x))$.

La proyección convexa satisface (véase [3]):

- (i) $(\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x) - x)^T(\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x) - y) \leq 0, \forall y \in \mathcal{C}$, y
- (ii) $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ es lipschitziana, $\|\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(x) - \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(y)\| \leq \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.2. Sistemas dinámicos: Lema de Barbalat

Definición 1. Para una función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, la norma \mathcal{L}_{∞} es $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$ y el cuadrado de la norma \mathcal{L}_2 es $\|f\|_2^2 = \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt$. Los espacios \mathcal{L}_{∞} y \mathcal{L}_2 son los conjuntos $\{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\infty} < \infty\}$ y $\{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_2 < \infty\}$, respectivamente.

Teorema 1. (Lema de Barbalat [10]) Supóngase que $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemen-

te continua $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \right)$ existe. Entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

El próximo corolario se deriva del Lema de Barbalat tomando $f(t) = \|g(t)\|^2$.

Corolario 1. Si $g \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_{\infty}$ y $\dot{g}(t)$ está acotada, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$.

2.3. Teoría de grafos

Considérese un *grafo indirecto* \mathcal{G} , esto es, un par $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, s\}$ es un conjunto finito no vacío de nodos y $\mathcal{E} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es un conjunto de pares de nodos no ordenados. El conjunto de vecinos de un nodo i se denota por $\mathcal{N}_i := \{j : \{j, i\} \in \mathcal{E}\}$. El arco *arc* $\{j, i\} \in \mathcal{E}$ denota que los nodos $\{i, j\}$ pueden obtener información del otro y viceversa. Un *camino* entre i_1 y i_k es una secuencia de arcos de forma $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}$. Un grafo indirecto \mathcal{G} es *conexo* si para cada par de nodos existe un camino que los une. Para el grafo \mathcal{G} , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la *matriz de adyacencia*, que se define como $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que $a_{ij} > 0$ si $\{j, i\} \in \mathcal{E}$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso. Se asume que A es simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \mathcal{N}$.

La matriz laplaciana de \mathcal{G} se denota por $\bar{L} := [\ell_{ij}] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, cuyos elementos se definen como $\ell_{ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \omega_{ij}$, $\ell_{ij} = -\omega_{ij}$, donde $\omega_{ij} > 0$ si $j \in \mathcal{N}_i$ y $\omega_{ij} = 0$, en otro caso. Por construcción, la suma de los elementos de una fila de \bar{L} es cero, es decir, $\bar{L}1_n = 0$ donde 1_n es un vector columna de s filas cuyos elementos son 1. Además, como el grafo es conexo, $\text{rank}(\bar{L}) = N - 1$, \bar{L} tiene un único autovalor 0 y el resto del espectro son números reales positivos [14], y como el grafo es indirecto, entonces \bar{L} es simétrica, es decir, $\bar{L} = \bar{L}^T$, y también se satisface que $1_n^T \bar{L} = 0$.

2.4. Sistemas mecánicos lagrangianos

Sea \mathbb{R}^n el espacio de configuración de un sistema mecánico con coordenadas locales (q^A) , $1 \leq A \leq n$. Considérese la función lagrangiana o el Lagrangiano $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. El Lagrangiano normalmente toma la forma de energía cinética menos energía potencial, es decir, $L(q^A, \dot{q}^A) = K(q^A, \dot{q}^A) - U(q^A)$ donde $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son la energía cinética y potencial, respectivamente. La dinámica descrita por L se expresa en términos de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \quad 1 \leq A \leq n. \quad (1)$$

Estas ecuaciones determinan un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden implícito.

Si asumimos que el Lagrangiano es *hiper-regular*, es decir, que la matriz $(n \times n)$ $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}\right)$, con $A, B = 1, \dots, n$, es invertible, se garantiza la existencia y unicidad de soluciones locales para cualquier condición inicial dada.

3. Control de formaciones de sistemas mecánicos y formulación del problema

3.1. Control de formaciones de sistemas lagrangianos

Considérese un conjunto \mathcal{N} de s agentes que cada uno de ellos evoluciona en \mathbb{R}^n . Denotamos por $q_i \in \mathbb{R}^n$ la posición del agente $i \in \mathcal{N}$ con coordenadas locales $q_i^A = (q_i^1, \dots, q_i^n)$, y por $q = (q_1, \dots, q_s) \in \mathbb{R}^{ns}$ el vector concatenado de las posiciones.

La relación entre vecinos viene descrita por un grafo indirecto $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$. Para el control de formaciones basado en distancia, se definen los elementos de la matriz de incidencia $B \in (\mathbb{R}^n)^{s \times |\mathcal{E}|}$ para \mathcal{G} como $b_{ik} = +1$ si $i = \mathcal{E}_k^{cola}$, $b_{ik} = -1$ si $i = \mathcal{E}_k^{cabeza}$, y 0 en otro caso, donde \mathcal{E}_k^{cola} y \mathcal{E}_k^{cabeza} denotan si un nodo es cola o cabeza, respectivamente, de un arco \mathcal{E}_k . Es decir, $\mathcal{E}_k = (\mathcal{E}_k^{cola}, \mathcal{E}_k^{cabeza})$.

La dinámica de cada agente se determina por el Lagrangiano del sistema sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, es decir, el movimiento de cada agente $i \in \mathcal{N}$ viene dado por la función lagrangiana $L_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y el sistema dinámico asociado a L_i viene dado por las ecuaciones de Euler-Lagrange (para L_i), es decir, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i^A}\right) - \frac{\partial L_i}{\partial q_i^A} = 0$, con $i \in \mathcal{N}$ y $A = 1, \dots, n$.

Además, el agente $i \in \mathcal{N}$ puede verse afectado por fuerzas no conservativas (las fuerzas conservativas pueden incluirse dentro de la energía potencial U_i), que pueden describirse mediante una función diferenciable $F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^*$. Por ejemplo, F_i puede describir una fuerza de amortiguamiento entre dos agentes. Para una posición y velocidad dadas, la fuerza actuará en contra de cualquier variación de la posición (desplazamientos virtuales). Como consecuencia del principio de Lagrange-d'Alembert [2] (o el principio de trabajo virtual), una extensión a fuerzas externas no conservativas del principio de Hamilton se establece que el movimiento natural del sistema son aquellas trayectorias $q : [0, T] \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que satisfacen

$$\delta \int_0^T L_i(q_i, \dot{q}_i) dt + \int_0^T F_i(q_i, \dot{q}_i) \delta q_i dt = 0$$

para todas las variaciones tales que $\delta q_i(0) = \delta q_i(T) = 0$. El primer término del integrando anterior corresponde a la acción que da lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales, mientras

que el segundo término es conocido como principio de trabajo virtual ya que $F_i(q_i, \dot{q}_i) \delta q_i$ es el trabajo virtual realizado por la fuerza externa F_i con un desplazamiento virtual δq_i . El principio de Lagrange-d'Alembert conduce a las *ecuaciones de Euler-Lagrange sujetas a fuerzas externas*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i^A}\right) - \frac{\partial L_i}{\partial q_i^A} = F_i(q_i^A, \dot{q}_i^A), \tag{2}$$

para $A = 1, \dots, n$ y $i \in \mathcal{N}$. Nótese que podemos reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange con fuerzas externas al calcular la derivada con respecto al tiempo de (2). Por lo tanto, las ecuaciones pueden expresarse como $\frac{\partial^2 L_i}{\partial \dot{q}_i^A \partial \dot{q}_i^B} \dot{q}_i^B + \frac{\partial^2 L_i}{\partial \dot{q}_i^A \partial \dot{q}_i^B} \ddot{q}_i^B - \frac{\partial L_i}{\partial q_i^A} = F_i(q_i^A, \dot{q}_i^A)$. Si el Lagrangiano es hiper-regular, podemos garantizar la existencia de un flujo bien definido para las ecuaciones de movimiento denominado *flujo Lagrangiano*, $F_t : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ dado por $F_t(q_{0i}, \dot{q}_{0i}) := (q_i(t), \dot{q}_i(t))$ donde $q_i \in C^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ es la única solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange sujetas a fuerzas externas, con condiciones iniciales $(q_{0i}, \dot{q}_{0i}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Consideremos la función Lagrangiana $\mathbf{L} : \mathbb{R}^{ns} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{L}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^s L_i(\pi_i(q), \tau_i(\dot{q})) \tag{3}$$

donde $\pi_i : \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección de \mathbb{R}^{ns} en su i -ésimo factor en posiciones y $\tau_i : \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección de \mathbb{R}^{ns} sobre su i -ésimo factor con respecto a las velocidades, es decir, $\pi_i(q) = q_i \in \mathbb{R}^n$ y $\tau_i(\dot{q}) = \dot{q}_i \in \mathbb{R}^n$ con $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^{ns}$.

Uno de los objetivos de este trabajo consiste en que los agentes converjan a la formación deseada. Si cada agente esta sujeto a fuerzas externas no conservativas, las ecuaciones de movimiento para el problema de formaciones están determinadas por una extensión del principio de Lagrange d-Alembert para múltiples agentes, al considerar la función Lagrangiana \mathbf{L} . Es decir, si $\mathbf{L} : \mathbb{R}^{ns} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función Lagrangiana definida por (3) y $F : \mathbb{R}^{ns} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow (\mathbb{R}^{ns})^* \times (\mathbb{R}^{ns})^*$ es una fuerza externa actuando en los agentes, la curva $q \in C^\infty(\mathbb{R}^{ns})$ satisface $\delta \mathcal{A}(q) = 0$ para la acción integral definida por

$$\mathcal{A}(q) = \sum_{i=1}^s \left(\int_0^T L_i(\pi_i(q), \tau_i(\dot{q})) + F_i(\pi_i(q), \tau_i(\dot{q})) dt \right)$$

si y solo si, para variaciones de $q \in \mathbb{R}^{ns}$ sujetas a extremos fijos y donde el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas admite solamente variaciones en las posiciones, q es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange sujetas a fuerzas externas dadas por (2).

3.2. Formulación del problema

Considérese una red con s agentes donde la dinámica de cada agente $i \in \mathcal{N}$ viene dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano $L_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ asociado con cada agente $i \in \mathcal{N}$. La red se modela por un grafo indirecto $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ que es *estático*, *invariante con el tiempo* y *conexo*. Las ecuaciones de movimiento asociadas al problema de formaciones vienen dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange sujetas a fuerzas externas (2).

Asumimos que la energía cinética de cada sistema Lagrangiano es de la forma $K_i(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \dot{q}_i^A M(q_i) \dot{q}_i^A$, donde $M(q_i)$ es la matriz de masa para el sistema mecánico. Asimismo, denotamos

$$\mathcal{M}_i^{AB}(q_i, \dot{q}_i) = \left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \dot{q}_i^A \partial \dot{q}_i^B} \right) \quad (4)$$

$$C_i^{AB}(q_i, \dot{q}_i) = \left(\frac{\partial^2 L_i}{\partial \dot{q}_i^A \partial q_i^B} \right) \quad (5)$$

$$\nabla U_i^A(q_i) = \frac{\partial L}{\partial q_i^A}. \quad (6)$$

Estas matrices satisfacen (véase por ejemplo [13]):

- (P1) \mathcal{M}_i^{AB} es simétrica definida positiva y acotada para cualquier $q_i \in \mathbb{R}^n$ y $i \in \mathcal{N}$. Es decir, existe $\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\underline{\alpha}_i I_{n \times n} \leq \mathcal{M}_i^{AB}(q_i, \dot{q}_i) \leq \bar{\alpha}_i I_{n \times n}$.
- (P2) $\frac{d}{dt}(\mathcal{M}_i^{AB}(q_i, \dot{q}_i) - 2C_i^{AB}(q_i, \dot{q}_i))$ es antisimétrica.
- (P3) $C_i^{AB}(q_i, \dot{q}_i)$ está acotada con respecto a q_i para cualquier $i \in \mathcal{N}$ y acotada linealmente con respecto a \dot{q}_i . Es decir, existe $\kappa_i \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que para todo $i \in \mathcal{N}$ se cumple que $\|C_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq \kappa_i \|\dot{q}_i\|$.
- (P4) Si $\dot{q}_i, \ddot{q}_i \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $\frac{d}{dt}C_i(q_i, \dot{q}_i)$ es un operador acotado.

El agente i puede medir la posición $q_j \in \mathbb{R}^n$ de sus vecinos, $j \in \mathcal{N}_i$, medida que obtiene con un retardo variable $T_{ij}(t)$ que está acotado superiormente por \bar{T}_{ij} , es decir, $0 \leq T_{ij}(t) \leq \bar{T}_{ij} < \infty$. La existencia de retardos en la medida de distancias es muy común en escenarios subacuáticos, por ejemplo [21]. Sin embargo, no se consideran otras restricciones como el ancho de banda limitado o errores en la obtención de las medidas. Estos son aspectos resultan muy interesantes y serán tenidos en cuenta en el futuro.

Además, consideramos que cada agente $i \in \mathcal{N}$ observa su región objetivo $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}^n$, donde \mathcal{C}_i es compacto y convexo para todo $i \in \mathcal{N}$. El objetivo es que todos los agentes alcancen de manera asintótica, con velocidad cero, su región objetivo \mathcal{C}_i , y de

manera simultánea se alcance también la formación deseada, es decir, $q_i - q_j = d_{ij}$, para ciertos $d_{ij} \in \mathbb{R}^n$ dados (nótese que $d_{ij} = -d_{ji}$), mientras que observan la frontera de \mathcal{C}_i y conocen la posición relativa de sus vecinos con un retardo máximo de T_{ij} .

Nótese que las ecuaciones de Euler-Lagrange sujetas a fuerzas externas pueden ser vistas como ecuaciones de Euler-Lagrange controladas, ya que la fuerza de control F puede ser escrita como $F = B(q)u$ donde u representa el torque aplicado al sistema. Sin pérdida de generalidad, usaremos la notación F_i para denotar la ley de control (o fuerza externa) actuando en el agente i , aunque esta pueda también depender del agente j como en nuestro caso. Dado que en el principio variacional de Lagrange d-Alembert, las variaciones están dadas con respecto a las posiciones q_i , el uso de la notación F_i resulta apropiada.

Definición 2. El sistema Lagrangiano (2) con una ley de control F_i para cada agente $i \in \mathcal{N}$ alcanza la formación objetivo deseada si para todas las condiciones iniciales $(q_i(t_0), \dot{q}_i(t_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $i \in \mathcal{N}$ se cumple que

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} d(q_i(t), \mathcal{C}_i) = 0, \quad i \in \mathcal{N}$.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} (q_i(t) - q_j(t)) = d_{ij}$ para todo $(i, j) \in \mathcal{E}$.
- (iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0$, para todo $i \in \mathcal{N}$,

y donde las medidas tomadas desde el agente i con respecto al agente j están sujetas a un retardo variable en el tiempo $T_{ij}(t)$.

4. Control de formaciones para sistemas lagrangianos con retardo

Considérese que la información del estado que cada agente obtiene de otros agentes se define a través de un grafo indirecto $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$. Estas medidas se obtienen con un retardo variable T_{ij} , como se definió arriba. Así pues, se propone la siguiente ley de control para todos los agentes $i \in \mathcal{N}$:

$$F_i(q_i, \dot{q}_i) = -\kappa_i \dot{q}_i(t) - \gamma_i (q_i(t) - \mathcal{P}_{\mathcal{C}_i}(q_i)) - \beta_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (q_i(t) - q_j(t - T_{ij}) - d_{ij}) - \nabla U_i(q_i), \quad (7)$$

donde $\kappa_i > 0$ es el amortiguamiento lineal, $\gamma_i > 0$ es la ganancia para alcanzar el conjunto \mathcal{C}_i a través de la proyección $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_i}$, y $\beta_i > 0$ es la ganancia para el control cooperativo (formación basada en distancia).

Teorema 2. *Supóngase que el grafo \mathcal{G} es conexo. Entonces, el controlador (7) para el sistema multi-agente resuelve el problema del control de formaciones descrito en Definición 2 para el sistema lagrangiano (2) si las siguientes restricciones se satisfacen:*

$$2\kappa_i > \beta_i l_{ii} \alpha_i + \beta_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\bar{T}_{ij}^2 a_{ji}}{\alpha_j}, \quad (8)$$

para cualquier $\alpha_i, \alpha_j > 0$.

Demostración. La derivada de la función de la energía cinética $K_i = \frac{1}{2} \dot{q}_i^T M_i \dot{q}_i$, usando la propiedad (P2), sobre el sistema en lazo cerrado (2)-(7) es

$$\begin{aligned} \dot{K}_i = & -\kappa_i \|\dot{q}_i\|^2 - \beta_i \dot{q}_i^T \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (q_i(t) - q_j(t - T_{ij}) - d_{ij}) \\ & - \gamma_i \dot{q}_i^T (q_i(t) - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)). \end{aligned}$$

Considérese la siguiente función de energía total escalada

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|q_i - q_j - d_{ij}\|^2 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \|q_i(t) - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)\|^2 + \sum_{i=1}^s \frac{1}{\beta_i} K_i(q_i, \dot{q}_i). \end{aligned}$$

Nótese que V es definida positiva y radialmente no acotada con respecto a $\|q_i - q_j\|$, $\|q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)\|$ y $\|\dot{q}_i\|$ para todo $i \in \mathcal{N}$ y $j \in \mathcal{N}_i$.

Teniendo en cuenta que

$$\int_{t-T_{ij}(t)}^t \dot{q}_j(\tau) d\tau = q_j(t) - q_j(t - T_{ij}(t)),$$

se garantiza que \dot{V} satisface

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^s \left(\frac{\kappa_i}{\beta_i} \|\dot{q}_i\|^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \dot{q}_i^T \int_{t-T_{ij}(t)}^t \dot{q}_j(\tau) d\tau \right).$$

Nótese que V no cumple los requisitos de una función de Lyapunov, ya que \dot{V} no es estrictamente negativa y, por consiguiente, el principio de invarianza de Lasalle no puede aplicarse.

Dividiremos, por tanto, la demostración en dos partes. Un primer paso, para el cual nos hemos inspirado en [15], se derivan las condiciones bajo las cuales el Lema de Barbalat puede garantizar la estabilidad asintótica. En un segundo paso, se muestra que los puntos de equilibrio de (2)-(7) coinciden con aquellos que garantizan que el objetivo de control se alcanza.

Paso 1 Integrando \dot{V} desde 0 a t se obtiene $V(t) - V(0) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\kappa_i}{\beta_i} \int_0^t \|\dot{q}_i(\sigma)\|^2 d\sigma + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \int_0^t \dot{q}_i^T(\sigma) \int_{\sigma-T_{ij}(t)}^\sigma \dot{q}_j(\tau) d\tau d\sigma \right)$.

Podemos hacer uso del Lema 1 en [14] con $\alpha_i > 0$, ya que V es definida positiva y dada la definición de la matriz laplaciana $\bar{L} := [\ell_{ij}]$. Se obtiene entonces que $V(0) \geq \sum_{i=1}^s \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(\left(\frac{\kappa_i}{\beta_i \ell_{ii}} - \frac{\alpha_i}{2} \right) \|\dot{q}_i\|_2^2 - \frac{\bar{T}_{ji}^2}{2\alpha_i} \|\dot{q}_i\|_2^2 \right)$. Definimos el vector aumentado $Q \in \mathbb{R}^s$ como $Q^T := (\|\dot{q}_1\|_2^2 \dots \|\dot{q}_s\|_2^2)$ y la $(s \times s)$ -matriz $\Xi := [\xi_{ij}]$ tal que

$$\xi_{ij} = \begin{cases} \frac{\kappa_i}{\beta_i \ell_{ii}} - \frac{\alpha_i}{2} & \text{si } i = j \\ -\frac{\bar{T}_{ji}^2}{2\alpha_i} & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Se cumple que $V(0) \geq 1_s^T \Xi Q$, donde 1_s simboliza un vector columna con s filas de unos. Esto implica que si la suma de elementos de cada columna de Ξ es estrictamente positiva, entonces existe $\lambda_i > 0$

tal que $V(0) \geq \sum_{i=1}^s \lambda_i \|\dot{q}_i\|_2^2$ y $\dot{q}_i \in \mathcal{L}_2$ para todo

$i \in \mathcal{N}$. Esta condición se garantiza si el conjunto de ganancias κ_i satisface la condición (8). Por tanto, también se verifica que la función de energía escalada V cumple que $V \in \mathcal{L}_\infty$, que implica que \dot{q}_i , $(q_i - q_j - d_{ij})$ y $(q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i))$ pertenecen a \mathcal{L}_∞ para todo $i \in \mathcal{N}$ y $j \in \mathcal{N}_i$.

El sistema en lazo cerrado (2)-(7) y las condiciones (P1)-(P3) implican que $\ddot{q}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Por tanto, se cumplen las condiciones para aplicar el Corolario 1, y se puede concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0$. Todas estas propiedades junto con (P4) conllevan que \ddot{q}_i es uniformemente continua ya que $\frac{d}{dt} \dot{q}_i(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Finalmente, aplicando el Lema de Barbalat $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0$.

Paso 2 Denotamos

$$\begin{aligned} \Omega = & \{q_i \in \mathbb{R}^n, \dot{q}_i \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathcal{N} \mid \dot{q} = 0, \\ & \text{y } q, \dot{q} \text{ satisfacen (2) - (7)}\}, \end{aligned}$$

es decir, el conjunto de convergencia para (2)-(7) de acuerdo con el Paso 1. Sea $x(t)$ la solución que pertenece a Ω . Dado que podemos expresar $q_i(t) - q_j(t - T_{ij}(t)) = q_i(t) - q_j(t) + \int_{t-T_{ij}(t)}^t \dot{q}_j(\tau) d\tau$, entonces si $\dot{q} = 0$ implica que en Ω

$$\gamma_i (q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)) + \beta_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (q_i - q_j - d_{ij}) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

A continuación demostramos que lo anterior implica que cada uno de los dos términos es idénticamente cero. Si escogemos un $q_0 \in \mathcal{C}_0$, entonces se verifica que $0 = \gamma_i (q_i - q_0)^T (q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)) +$

$\beta_i(q_i - q_0)^T \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(q_i - q_j - d_{ij})$, que implica que $0 = \sum_{i=1}^s (\gamma_i(q_i - q_0)^T (q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)) + \beta_i(q_i - q_0)^T \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(q_i - q_j - d_{ij}))$.

Utilizando las propiedades de simetría/antisimetría $a_{ij} = a_{ji}$ y $d_{ij} = -d_{ji}$, podemos escribir $\sum_{i=1}^s (q_i - q_0)^T \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(q_i - q_j - d_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \|q_i - q_j - d_{ij}\|^2 \geq 0$.

Por la propiedad (i) definida en la Sección 2.1, se sabe que $(\mathcal{P}_{C_i}(q_i) - q_0)^T (q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)) \geq 0$, ya que $q_0 \in C_i, \forall i \in \mathcal{N}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (q_i - q_0)^T (q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)) &= \|q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)\|^2 \\ &+ (\mathcal{P}_{C_i}(q_i) - q_0)^T (q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)) \\ &\geq \|q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)\|^2, \end{aligned}$$

y esto necesariamente implica que $\|q_i - \mathcal{P}_{C_i}(q_i)\| = 0$, para todo $i \in \mathcal{N}$, y, en consecuencia, también

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(q_i - q_j - d_{ij}) = 0.$$

Dado que esto se cumple independientemente de las condiciones iniciales, y dado que \mathcal{G} es conexo, se sigue que $i \in \mathcal{N}, q_i(t_0) \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{q}_i(t_0) \in \mathbb{R}^n$,

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} d(q_i(t), C_i) = 0, \quad i \in \mathcal{N}$.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} (q_i(t) - q_j(t)) = d_{ij}$ para todo $(i, j) \in \mathcal{E}$.
- (iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0$, para todo $i \in \mathcal{N}$,

lo que finaliza la prueba. □

5. Ejemplo de simulación

Considérese el problema de control de un equipo de cuatro manipuladores robóticos que es un ejemplo clásico estudiado en robótica (véase por ejemplo [13]). Cada uno de los manipuladores consiste en dos sólidos rígidos acoplados con masa $m_{i,r}$, longitud $l_{i,r}$ y momentos de inercia con respecto a las uniones $J_{i,r}$, con $r = 1, 2$, respectivamente, donde el índice i hace referencia al número del agente y el índice r a la articulación del manipulador para el agente $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

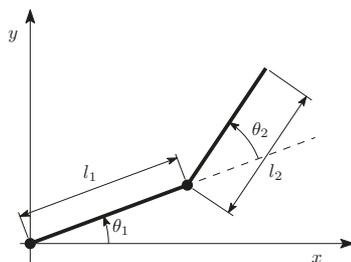


Figura 1: Esquema de manipulador

Sean $\theta_{i,1}$ y $\theta_{i,2}$ los ángulos de configuración del agente i medidos tal y como se muestra en la Figura 1. Si asumimos que el final de la primera articulación de cada agente se encuentra fijo en un sistema de referencia inercial, la configuración de cada agente se especifica localmente por las coordenadas $(\theta_{i,1}, \theta_{i,2}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. El Lagrangiano para cada agente viene dado por la energía cinética del sistema menos la energía potencial, es decir,

$$\begin{aligned} L_i(q_i, \dot{q}_i) &= \frac{1}{8}(m_{i,1} + 4m_{i,2})l_{i,1}^2 \dot{\theta}_{i,1}^2 + \frac{1}{8}m_{i,2}l_{i,2}^2 (\dot{\theta}_{i,1} + \dot{\theta}_{i,2})^2 \\ &+ \frac{1}{2}m_{i,2}l_{i,1}l_{i,2} \cos(\theta_{i,2}) \dot{\theta}_{i,1} (\dot{\theta}_{i,1} + \dot{\theta}_{i,2}) \\ &+ \frac{1}{2}J_{i,1} \dot{\theta}_{i,1}^2 + \frac{1}{2}J_{i,2} (\dot{\theta}_{i,1} + \dot{\theta}_{i,2})^2 \\ &+ g \left(\frac{1}{2}m_{i,1}l_{i,1} \sin \theta_{i,1} + m_{i,2}l_{i,1} \sin \theta_{i,1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}m_{i,2}l_{i,2} (\theta_{i,1} + \theta_{i,2}) \right), \end{aligned}$$

donde g es la constante de la gravedad.

Los torques que representan las acciones de control $u_{i,1}$ y $u_{i,2}$ para cada agente se aplican a la base de la primera articulación y a la unión entre las dos articulaciones. Las ecuaciones del movimiento del sistema controlado son

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= -\sin \theta_{i,2} l_{i,1} l_{i,2} m_{i,2} \dot{\theta}_{i,1} \ddot{\theta}_{i,1} - \frac{1}{2} \sin \theta_{i,2} \dot{\theta}_{i,2}^2 l_{i,1} l_{i,2} m_{i,2} \\ &+ \frac{1}{2} m_{i,2} l_{i,2} \cos(\theta_{i,1} + \theta_{i,2}) g \\ &+ (m_{i,2} g \cos \theta_{i,1} + \frac{1}{2} g \cos \theta_{i,1} m_{i,1}) l_{i,1} \\ &+ (\frac{1}{4} m_{i,2} l_{i,2}^2 + J_{i,2} + \frac{1}{2} \cos \theta_{i,2} l_{i,1} l_{i,2} m_{i,2}) \ddot{\theta}_{i,2} \\ &+ \left(\cos \theta_{i,2} l_{i,1} l_{i,2} m_{i,2} + (\frac{m_{i,1}}{4} + m_{i,2}) l_{i,1}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_{i,2} l_{i,2}^2}{4} + J_{i,1} + J_{i,2} \right) \ddot{\theta}_{i,1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i,2} &= \frac{1}{2} \sin \theta_{i,2} l_{i,1} l_{i,2} m_{i,2} \dot{\theta}_{i,1}^2 \\ &+ (\frac{1}{4} m_{i,2} l_{i,2}^2 + J_{i,2} + \frac{1}{2} \cos \theta_{i,2} l_{i,1} l_{i,2} m_{i,2}) \ddot{\theta}_{i,1} \\ &+ \frac{1}{2} m_{i,2} l_{i,2} \cos(\theta_{i,1} + \theta_{i,2}) g + (\frac{1}{4} m_{i,2} l_{i,2}^2 + J_{i,2}) \ddot{\theta}_{i,2}. \end{aligned}$$

Se consideran los siguientes valores para las constantes: $m_{1,1} = 2, m_{12} = 1, m_{21} = 3, m_{22} = 1, m_{31} = m_{32} = 2, m_{41} = 1, m_{42} = 2, l_{11} = l_{12} = 1, l_{21} = 0,1, l_{22} = 0,2, l_{31} = 0,5, l_{32} = 0,2$ y $l_{41} = l_{42} = 0,2$, con inercia $ml^2/3$ para cada articulación. La siguiente matriz laplaciana define las interconexiones entre los manipuladores y la topología del sistema:

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los conjuntos convexos se definen (en radianes) como $C_1 = \{(\theta_{1,1}, \theta_{1,2}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : (\theta_{1,1} - 0,5)^2 + \theta_{1,2}^2 \leq 4\}$, $C_2 = \{(\theta_{2,1}, \theta_{2,2}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : \theta_{2,1}^2 + (\theta_{2,2} + 0,75)^2 \leq 4\}$, $C_3 = \{(\theta_{3,1}, \theta_{3,2}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : (\theta_{3,1} - 0,5)^2 + \theta_{3,2}^2 \leq 4\}$, y $C_4 = \{(\theta_{4,1}, \theta_{4,2}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 :$

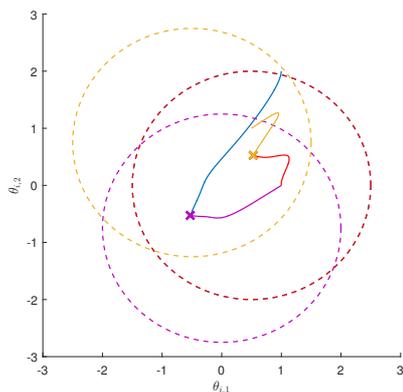


Figura 2: Trayectoria en el espacio de estados. Las regiones objetivo se representan con línea discontinua y los estados finales por una cruz “x”. Agentes: 1 (azul), 2 (violeta), 3 (rojo), 4 (amarillo).

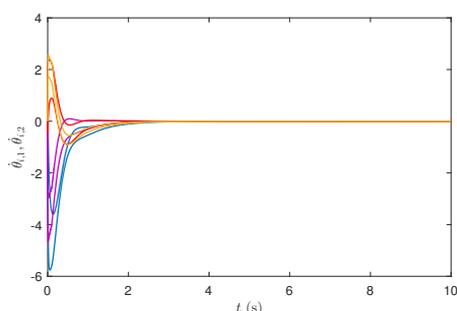


Figura 3: Evolución temporal de las velocidades angulares. Agentes: 1 (azul), 2 (violeta), 3 (rojo), 4 (amarillo).

$(\theta_{4,1} + 0,5)^2 + (\theta_{4,2} - 0,75)^2 \leq 4\}$. La formación deseada viene dada por $d_{31} = d_{41} = d_{32} = d_{42} = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Nótese que en el ejemplo considerado estas cantidades representan diferencias entre los ángulos de los enlaces y no distancia entre ellos.

Se fija el máximo retardo a 0,1 seg. para todas las interconexiones dadas por \bar{L} , es decir, $\bar{T}_{ij} = 0,1$ seg. para todo $(i, j) \in \mathcal{E}$, de tal manera que las ganancias de la ley de control (7) se eligen tal que $\kappa_i = 60$, $\beta_i = 50$, y $\gamma_i = 10$ para satisfacer (8).

La Figura 2 representa la trayectoria del sistema en el espacio de estados. En la figura también se dibujan los conjuntos convexos mediante una línea discontinua y los estados finales con una cruz “x”. Nótese que de acuerdo con la formación definida, éstos son los mismos para los agentes 1 y 2, y para los agentes 3 y 4, respectivamente. Las velocidades angulares se representan en la Figura 3, y se puede apreciar como éstas convergen a cero.

6. Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se ha estudiado el control de formaciones para sistemas lagrangianos multi-agente donde cada agente es capaz de obtener medidas relativos a otros agentes pero con un retardo variable. El objetivo de encontrar aquellas trayectorias no triviales hacia el conjunto de regiones objetivo convexas a la vez que se alcanza la formación deseada de manera asintótica, con velocidad cero. Se han aplicado los resultados para construir una ley de movimiento para el ejemplo de un conjunto de manipuladores robóticos.

Los trabajos futuros incluyen la extensión de los resultados a sistemas subactuados, topologías variables y estrategias basadas en eventos.

Agradecimientos

El trabajo de E. Aranda-Escolástico and M. Guinaldo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades y los fondos FEDER a través de los proyectos DPI2017-84259-C2-1-R y DPI2017-84259-C2-2-R. El trabajo de L. Colombo recibió el apoyo de una ayuda de la Fundación “La Caixa” (ID 1000104344), LCF/BQ/PI19/11690016, Ministerio de Ciencia, Innovación e Universidades MTM2016-76072-P, I-Link Proyecto LINKA20079, y “Programa para Centros de Excelencia Severo Ochoa” R&D (SEV-2015-0554).

English summary

TARGETED FORMATION CONTROL OF MULTI-AGENT LAGRANGIAN SYSTEMS WITH TIME DELAY

Abstract

We study the problem of targeted formation control for multi-agent systems which evolves under the dynamics provided by a Lagrangian function. Each agent observes a convex set as a target and the goal of the swarm is to achieve the desired formation within these sets while the measurements from other agents are received with delay. A novel control law is proposed to achieve the formation in all targeted sets while the velocities of the agents are driven to zero. Applications and simulation results are given to validate the theoretical results.

Keywords: multi-agent systems, lagrangian systems, cooperative control, time-delay.

Referencias

[1] A. Abdessameud, I. Polushin and A. Tayebi. Synchronization of Lagrangian systems with

- irregular communication delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(1), 187–193, 2014.
- [2] A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control. Series IAM*. New York: Springer-Verlag, vol. 24. 2nd Edition 2015.
- [3] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [4] F. Bullo and J. Cortés and S. Martínez. *Distributed Control of Robotic Networks*. Princeton University Press, *Appl. Mathem. Series*, 2009.
- [5] L. Colombo, D. Dimarogonas. *Motion Feasibility Conditions for Multi-Agent Control Systems on Lie Groups*. arXiv preprint arXiv:1808.04612
- [6] L. Colombo, H. García de Marina. *A variational integrator for the formation control of multi-agent systems*. *IFAC-PapersOnLine* 51 (23), 76-81, 2018.
- [7] S. Chung, J. Slotine. *Cooperative robot control and concurrent synchronization of Lagrangian systems*. *IEEE Trans. on Robot.*, 25(3), 686-700, 2009.
- [8] D. V. Dimarogonas, P. Tsiotras and K. J. Kyriakopoulos. *Leader-Follower Cooperative Attitude Control of Multiple Rigid Bodies*, *Sys. and Control Lett.*, 58(6), 429-435, 2009.
- [9] M. Egerstedt and X. Hu. *Formation constrained multi-agent control*. *IEEE Trans. on Robot. and Autom.* 17(6) (2001) 947-951.
- [10] H. Khalil. *Nonlinear systems*. (3rd ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [11] Z. Meng, T. Yang, G. Shi, D.V. Dimarogonas. Y. Hong, K.H. Johansson. *Targeted agreement of multiple Lagrangian systems*. *Automatica*, 84: 109-116, 2017.
- [12] M. Mesbahi and M. Egerstedt. *Graph theoretic methods in multiagent networks*. Princeton University Press, 2010.
- [13] R. Murray, Z. Li and S. Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press, 1994.
- [14] E. Nuño, L. Basañez, R. Ortega, and M.W. Spong. *Position tracking for nonlinear teleoperators with variable time-delay*. *Int. J. Robot. Res.*, 28(7), 895-910, 2009.
- [15] E. Nuño, I. Sarras and L. Basañez. *Consensus in Networks of Nonidentical Euler-Lagrange Systems Using P+d Controllers*. *IEEE Trans. on Robot.*, 29 (6), 1503-1508, 2013.
- [16] K. Oh, M. Park, and H. Ahn. *A survey of multi-agent formation control*. *Automatica*, 53, 424-440, 2015.
- [17] R. Olfati-Saber, J. Fax and R. Murray. *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems*. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 215-233, 2007.
- [18] R. Olfati-Saber and R. M. Murray. *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays*. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 49 (9), 1520-1533, 2004.
- [19] W. Ren. *Distributed leaderless consensus algorithms for networked EulerLagrange systems*. *Int. J. Control*, 82(11), 2137–2149, 2009.
- [20] A. Sarlette, S. Bonnabel, R. Sepulchre. *Coordinated motion design on Lie groups*. *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol. 55(5), 1047-1058, 2010.
- [21] H. Tan, R. Diamant, W. Seah and M. Waldmeyer. *A survey of techniques and challenges in underwater localization*. *Ocean Engin.* 38 (14),1663-1676, 2011.



© 2019 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution CC BY-NC-SA 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>).