



UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Escuela Politécnica Superior

Apuntes de 730211205-Mecánica Fundamental II

curso 2009/2010

Alberto Ramil Rego

Escuela Politécnica Superior

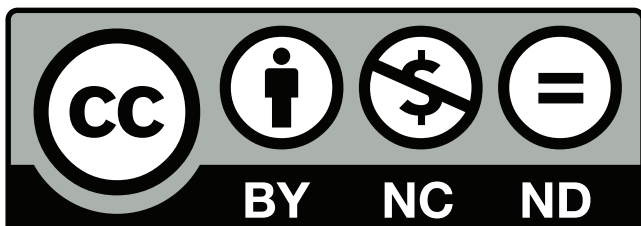
Título: Apuntes de 730211205-Mecánica Fundamental II

Autora: Ramil Rego, Alberto

Año: 2011

Centro: Escola Politécnica Superior, Universidade da Coruña (SPAIN)

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 España.





Índice

1. Dinámica del punto ligado a una curva. I	1
1.1. Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una curva.	1
1.2. Aplicación del teorema de la energía.	2
1.3. Fuerzas dependientes únicamente de la posición. Potencial de fuerzas.	2
1.4. Ecuaciones del movimiento en forma intrínseca.	2
2. Dinámica del punto ligado a una curva. II	5
2.1. Movimiento de un cuerpo pesado ligado a una curva fija.	5
2.2. Péndulo simple. Oscilaciones de gran amplitud. Movimiento continuo y caso crítico.	5
2.3. Reacción del vínculo. Discusión.	9
2.4. Movimiento del péndulo en un medio resistente. Amortiguación.	10
2.5. Péndulo cicloidal. Definición y Propiedades. Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una curva.	12
3. Dinámica del punto ligado a una superficie. I	15
3.1. Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una superficie.	15
3.2. Aplicación del teorema de la energía.	15
3.3. Fuerzas dependientes únicamente de la posición. Potencial de fuerzas.	16
3.4. Ecuaciones del movimiento en plano tangente.	16
4. Dinámica del punto ligado a una superficie. II	17
4.1. Movimiento de un punto pesado sobre una superficie de revolución de eje vertical. Problema unidimensional equivalente. Discusión del movimiento en términos de la energía. Condiciones para movimiento estacionario.	17
4.1.1. Condición de movimiento estacionario	19
4.2. Caso en que las fuerzas aplicadas son despreciables: Geodésicas. Fórmula de Clairaut.	19
4.3. Péndulo esférico. Definición y propiedades.	21
4.4. Ecuaciones del movimiento y acotación de zonas.	21
4.5. Discusión: Casos casi estacionario y estacionario.	22
4.6. Reacción del vínculo. Discusión.	23
4.7. Pequeñas oscilaciones elípticas del péndulo esférico.	23
5. Dinámica del punto en movimiento relativo	25
5.1. Dinámica del movimiento relativo del punto. Fuerzas de inercia.	25
5.2. Movimiento relativo en la superficie de la Tierra.	25
5.3. Caída de un punto pesado sobre la superficie de la Tierra. Efecto geostrofico.	27
5.4. Péndulo de Foucault. Giro aparente del plano de oscilación.	29
5.5. Caracterización del movimiento elíptico del péndulo de Foucault. Longitud de semiejes y periodo de giro del plano de oscilación.	30
6. Elementos básicos de Mecánica Analítica	31
6.1. Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.	31
6.2. Condiciones de equilibrio y ecuaciones del movimiento en coordenadas generalizadas.	32
6.3. Principio de D'Alembert.	33
6.4. Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.	33
6.5. Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas	35
7. Formulación de Lagrange	37
7.1. Ecuaciones de Lagrange.	37
7.2. Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.	39
7.3. Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.	40
7.4. Constantes del movimiento. Teoremas de conservación	40

7.5.	Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange. . .	42
7.6.	Función hamiltoniana.	43
7.7.	Ecuaciones de Hamilton.	43
7.8.	Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.	44
8.	Dinámica del sólido rígido con un eje fijo	47
8.1.	Ecuaciones del movimiento de un sólido con un eje fijo.	47
8.2.	Reacciones en el eje de giro. Equilibrado estático y dinámico.	48
8.3.	Particularización al movimiento de un sólido rígido en movimiento plano.	50
9.	Dinámica del sólido rígido con un punto fijo. I	51
9.1.	Ecuaciones del movimiento de un sólido indeformable con un punto fijo. Cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética.	51
9.2.	Aplicación del teorema del momento cinético. Ecuaciones de Euler.	52
9.3.	Reacción en el punto fijo.	52
9.4.	Integración de las ecuaciones de Euler en ausencia de pares. Casos de elipsoide de revolución y elipsoide asimétrico.	53
10.	Dinámica del sólido rígido con un punto fijo. II	57
10.1.	Movimiento del sólido indeformable según Poincaré. Polodias y herpolodias.	57
10.1.1.	Polodias y herpolodias.	58
10.2.	Estabilidad de la rotación alrededor de los ejes principales.	59
10.3.	Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange.	61
11.	Dinámica de Percusiones	67
11.1.	Percusiones. Definición y teoremas fundamentales.	67
11.2.	Teorema de Carnot.	70
11.3.	Percusiones aplicadas a un sólido con un eje fijo. Centro de percusión.	71
11.4.	Choque sin rozamiento entre dos sólidos libres.	72
12.	Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio	75
12.1.	Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.	75
12.1.1.	Oscilaciones libres en un sistema con N grado de libertad.	77
12.2.	Determinación de frecuencias naturales de oscilación.	78
12.3.	Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.	79
12.4.	Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.	81



1. Dinámica del punto ligado a una curva. I

- 1.1 Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una curva.
- 1.2 Aplicación del teorema de la energía.
- 1.3 Fuerzas dependientes únicamente de la posición. Potencial de fuerzas.
- 1.4 Ecuaciones del movimiento en forma intrínseca.

Introducción

Iniciamos el curso con el capítulo dedicado a la dinámica del punto sometido a enlaces; no se pretende un análisis exhaustivo de todos los casos posibles sino más bien presentar algunos de los conceptos que entrañan y sacar algunas consecuencias ilustrativas. Nos basaremos en los conceptos desarrollados en las asignaturas de física sobre la dinámica de la partícula libre y el principio de liberación desarrollado en la estática. Más adelante veremos cómo se puede abordar el problema mediante las ecuaciones de Lagrange.

El primer tema de este capítulo se dedica al estudio del movimiento de una partícula ligada a una curva. En el tema siguiente se aplicará para los casos particulares más importantes.

1.1. Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una curva.

En un sistema de referencia inercial la segunda ley de Newton unida a la aplicación del principio de liberación (sustituyendo los enlaces por las reacciones) la ecuación del movimiento de una partícula ligada quedaría:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}^{\text{ap}} + \vec{R} \quad (1.1)$$

siendo \vec{F}^{ap} la fuerza aplicada y \vec{R} la reacción entre la partícula y la curva. La reacción en principio es una incógnita y debe obtenerse de la ecuación anterior y de la ecuación de la curva $\vec{r} = \vec{r}(S)$ que supondremos que está fija. Si la curva estuviese en movimiento aplicaríamos las ecuaciones del movimiento relativo a un sistema de referencia que se moviese de forma solidaria con la curva (Tema 5).

Como vimos en Estática, si no hay rozamiento, la reacción será normal al desplazamiento de la partícula y entonces el trabajo realizado será nulo. Se dice que la reacción “no trabaja” y por lo tanto el trabajo se debe solamente a la fuerza aplicada

$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}^{\text{ap}} + \vec{R}) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ap}} \cdot d\vec{r}$$

A continuación se indican los enlaces más importantes no dependientes del tiempo:

Superficie sin rozamiento :

$$\vec{R} = R \hat{n}$$

siendo \hat{n} el vector unitario normal a la superficie.

Superficie con rozamiento :

$$\vec{R} = R \hat{n} + \vec{R}_T$$

$\vec{R}_T = -F_R \hat{T}$ es la fuerza de rozamiento, que se opone al movimiento y está contenida en el plano tangente a la superficie.

Curva sin rozamiento : La curva puede verse como la intersección de dos superficies S_1 y S_2

$$\vec{R} = \lambda_1 \hat{n}_1 + \lambda_2 \hat{n}_2$$

o mejor, con el triedro intrínseco de la curva

$$\vec{R} = R_N \hat{N} + R_B \hat{B}$$

Curva con rozamiento :

$$\vec{R} = -F_R \hat{T} + R_N \hat{N} + R_B \hat{B}$$

1.2. Aplicación del teorema de la energía.

En lugar de resolver la ecuación diferencial (eq. 1.1) para obtener $S = S(t)$, podría utilizarse el teorema de la energía,

$$dW = dT$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética. Como la reacción no trabaja, $dW = \vec{F}^{\text{ap}} \cdot d\vec{r}$, y por integración se obtiene

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F_T dS + C_1$$

La constante C_1 es la energía E que permite obtener la velocidad a partir de la integral del trabajo,

$$v = \frac{dS}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E + \int F_T dS \right]}$$

que integrada de nuevo nos proporciona la solución al movimiento,

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dS}{\sqrt{E + \int F_T dS}} + C_2$$

Vemos como la energía E juega el papel de integral primera y nos ha permitido reducir la solución de la ecuación diferencial de segundo orden a una integral. Este aspecto se verá más claramente y con mayor generalidad en la formulación lagrangiana.

1.3. Fuerzas dependientes únicamente de la posición. Potencial de fuerzas.

La integral del trabajo tiene una expresión especialmente sencilla para las fuerzas denominadas conservativas. Una fuerza \vec{F} es conservativa cuando su trabajo no depende del camino recorrido, solo depende de la posición inicial y final. Si la fuerza es conservativa se cumple $\vec{F} = -\nabla V$ con $V = V(\vec{r})$ la función potencial. En este caso, $dW = -dV$ y $W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$ lo que conduce al teorema de conservación de la energía,

$$E = T + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + V(\vec{r}) = cte$$

y despejando t , tenemos

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dS}{\sqrt{E - V(S)}} + C_2$$

y por tanto $S(t)$. La energía E que es una constante del movimiento nos ha permitido reducir el problema a una integral.

1.4. Ecuaciones del movimiento en forma intrínseca.

El caso del punto ligado a una curva sin rozamiento es un movimiento con un grado de libertad. Dado que no hay rozamiento, la reacción no tiene componente en la dirección tangente. Proyectando la ecuación de Newton en el triedro intrínseco tendremos tres componentes:

$$\begin{aligned} m a_T &= m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_T \\ m a_N &= m \frac{v^2}{\rho} = F_N + R_N \\ m a_B &= 0 = F_B + R_B \end{aligned}$$

la primera de ellas es la ecuación del movimiento propiamente dicha, su integración permite obtener la posición de la partícula a lo largo de la curva $S = S(t)$. Las otras dos permiten calcular el valor de la



reacción \vec{R} , conocida la fuerza aplicada \vec{F} , la ecuación de la curva $\vec{r}(S)$ y el movimiento de la partícula $S = S(t)$,

$$R_N = m \frac{v^2}{\rho} - F_N$$

$$R_B = 0 = -F_B + R_B$$

donde $v = dS/dt$ y $\kappa = 1/\rho = |d^2\vec{r}/dS^2|$.

Escuela Politécnica Superior



2. Dinámica del punto ligado a una curva. II

- 2.1 Movimiento de un cuerpo pesado ligado a una curva fija.
- 2.2 Péndulo simple. Oscilaciones de gran amplitud. Movimiento continuo y caso crítico.
- 2.3 Reacción del vínculo. Discusión.
- 2.4 Movimiento del péndulo en un medio resistente. Amortiguación.
- 2.5 Péndulo cicloidal. Definición y Propiedades.

2.1. Movimiento de un cuerpo pesado ligado a una curva fija.

Es un caso particular en el que la fuerza aplicada es el peso $\vec{F}^{\text{ap}} = -m\vec{g}$ y la curva es fija. La fuerza peso deriva del potencial $V = mgh$ donde h es la altura de la partícula. La altura de la partícula ha de tomarse positiva hacia arriba de manera que la energía potencial gravitatoria crezca cuando la altura de la partícula aumenta.

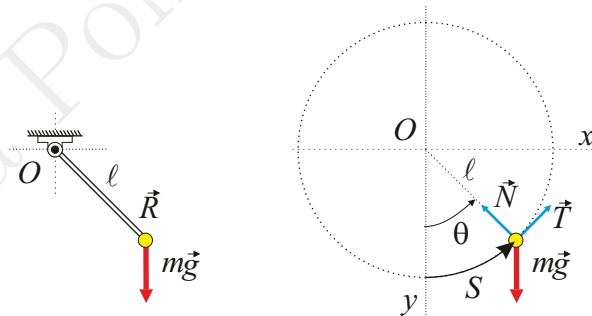
La conservación de la energía conduce a una relación entre la velocidad y la altura en la forma

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(h) = E \quad \Rightarrow \quad v = v(h) = \sqrt{\frac{2}{m}[E - mgh]}$$

de manera que la velocidad v disminuye cuando la altura h aumenta.

2.2. Péndulo simple. Oscilaciones de gran amplitud. Movimiento continuo y caso crítico.

El péndulo simple, masa puntual unida a un punto fijo por una varilla de longitud ℓ de peso despreciable, puede analizarse como un caso de un punto ligado a una curva siendo la curva una circunferencia de radio ℓ contenida en un plano vertical y con centro en el punto fijo. La reacción entre masa y curva es la misma que entre masa y varilla porque las dos conducen a la misma ligadura.



La ecuación del movimiento sería la proyección de la ecuación de Newton según la tangente a la curva. En el caso de la circunferencia elegimos un sistema cartesiano con origen en el punto fijo y siendo Oy vertical hacia abajo. Para definir la posición de la masa utilizamos el ángulo θ que forma la varilla con el eje Oy . De esta manera la posición de equilibrio (punto más bajo) corresponde al ángulo $\theta = 0$. La posición de la partícula vendría dada por:

$$\vec{r}(\theta) = \ell (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \ell \hat{u}_r$$

Los vectores unitarios tangente y normal resultan ser,

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j} = \hat{u}_\theta$$

$$\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{|d\hat{T}|} = -\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j} = -\hat{u}_r$$

La curvatura y la longitud de arco tienen expresiones sencillas ya que $\kappa = 1/\rho = 1/\ell$ y $S = \ell\theta$, estando esta última medida desde el punto de equilibrio.

La ecuación del movimiento expresada con la coordenada θ queda,

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_T \quad \Rightarrow \quad m\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen} \theta$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior puede utilizarse la energía que nos proporciona una primera integral. Para ello escribimos el potencial de la fuerza peso, $V = mgh = -mgy = -mg\ell \cos \theta$. Entonces,

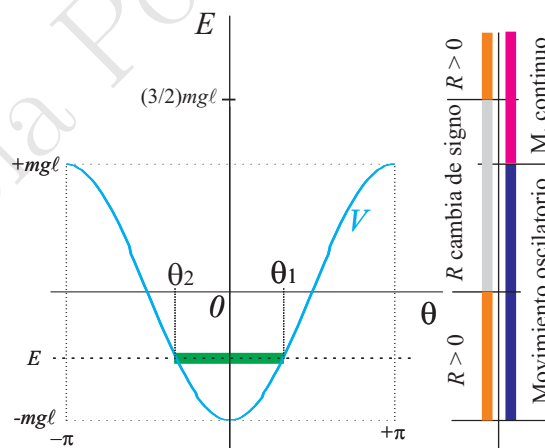
$$E = T + V(\theta) = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = cte$$

de donde

$$t + C = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} \left[\frac{E}{mg\ell} + \cos \theta \right]}} \quad (2.2)$$

La energía potencial proporciona mucha información sobre el movimiento de la partícula sin necesidad de llegar a integrar la ecuación del movimiento. En este caso podemos clasificar el movimiento de la partícula en oscilatorio y continuo atendiendo a la forma del potencial y al valor de la energía:

- Si $E = \min(V) = -mg\ell$, la energía cinética es cero $T = 0$ y la partícula se encuentra en reposo en la posición de equilibrio $\theta = 0$.
- Si $-mg\ell < E < +mg\ell = \max(V)$, existen dos puntos de retroceso situados simétricamente $\theta_2 = -\theta_1$ para los que la energía cinética se anula, $E = V(\theta_1)$. En esos puntos se invierte el movimiento y dan lugar a un movimiento oscilatorio y periódico.
- Si $E = +mg\ell$ es el caso crítico que al tener un período infinito puede considerarse tanto oscilatorio como continuo.
- Si $mg\ell < E$ la energía cinética no se anula nunca, $T > 0$, y por tanto el movimiento es monótono de manera que el ángulo crece o decrece de forma continua.



Aproximación de ángulos pequeños. La solución del movimiento también cambia dependiendo de si estamos en un caso oscilatorio o de movimiento monótono. Para el caso oscilatorio es posible integrar fácilmente la ecuación del movimiento en el caso de ángulos pequeños. Así, aproximando el seno por el ángulo tenemos una ecuación del tipo oscilador armónico,

$$m\ell \ddot{\theta} \approx -mg\theta$$

que conduce a una solución

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

siendo A la amplitud del movimiento ($A = \theta_1$) y $\omega = \sqrt{g/\ell}$ la frecuencia. En esta aproximación el periodo resulta ser $P = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.



Oscilaciones de gran amplitud. Utilizando la ecuación 2.2 puede obtenerse la solución exacta válida tanto para pequeñas como para grandes amplitudes expresada en función de una integral elíptica. Para ello se hace el cambio $\sin \theta = k \sin \psi$ con $k = \sin(\theta_1/2) = \sqrt{1 + E/(mg\ell)}$, quedando,

$$t + C = \sqrt{\frac{\ell}{g}} F(\varphi, k)$$

donde

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

es la *integral elíptica incompleta de primera especie* y

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{\sin(\theta(t)/2)}{k} \right)$$

Despejando el ángulo $\theta(t)$ se obtiene

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left[k \operatorname{sn} \left(\frac{t + C}{\sqrt{\ell/g}}, k \right) \right]$$

siendo $\operatorname{sn}(z, k)$ la *función elíptica de Jacobi seno*.

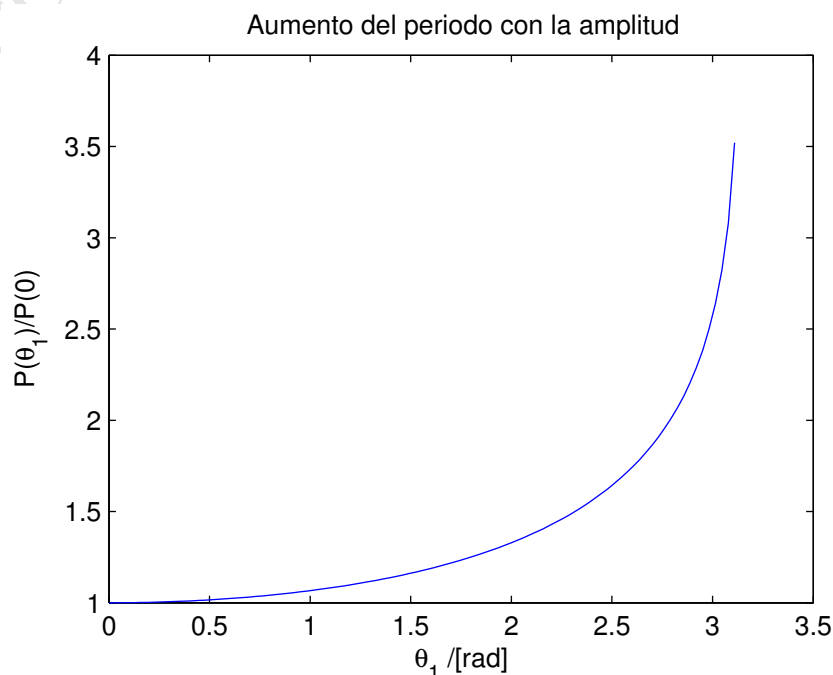
Nota. Los valores de las funciones e integrales elípticas están tabulados [AS72] y pueden obtenerse utilizando programas como Matlab©, Maple©, Mathematica©, Maxima, ...

El movimiento sigue siendo periódico pero ya no será armónico. Se puede determinar la dependencia del periodo con la amplitud integrando el movimiento en un cuarto de oscilación (desde $\theta = 0$ hasta el punto de retroceso $\theta = \theta_1$). Así,

$$P = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} K(k)$$

donde $K(k) = F(\pi/2, k)$ es la *integral elíptica completa de primera especie*. En el límite de pequeñas oscilaciones $k \rightarrow 0$, $K(0) = \pi/2$ y se vuelve a obtener el resultado $P(0) = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. La dependencia del periodo con la amplitud del movimiento vendría dada por,

$$\frac{P(\theta_1)}{P(0)} = \frac{2}{\pi} K(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$



La expresión anterior puede desarrollarse en serie de potencias de k ,

$$\frac{P(\theta_1)}{P(0)} = 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \dots$$

sustituyendo $k = \text{sen}(\theta_1/2)$ y desarrollando en serie de potencias de θ_1 se obtiene,

$$\frac{P(\theta_1)}{P(0)} = 1 + \frac{1}{16} \theta_1^2 + \frac{11}{3072} \theta_1^4 + \frac{173}{737280} \theta_1^6 + \dots$$

que demuestra que el periodo aumenta con la amplitud θ_1 de las oscilaciones. Además, en primera aproximación el crecimiento es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Caso crítico. El caso crítico es el que separa el movimiento oscilatorio del continuo. La energía coincide con el valor máximo del potencial $E = mgl$ de manera que la energía cinética se hace cero en el punto más alto del péndulo, $\theta = \pi$. Como a medida que se acerca a ese punto la velocidad disminuye el tiempo que tarda en alcanzarse ese punto es infinito. La solución del movimiento sería la integral elíptica con $k = 1$ que resulta ser una función hiperbólica,

$$F(\varphi, 1) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\cos \psi} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \text{sen } \varphi}{1 - \text{sen } \varphi} \right) = \text{arctanh}(\text{sen } \varphi)$$

y entonces

$$\text{sen } \varphi = \tanh F(\varphi, 1) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = 2 \text{ arc sen } \left[\tanh \left(\frac{t + C}{\sqrt{l/g}} \right) \right]$$

Como la función tangente hiperbólica tiene como asíntotas horizontales ± 1 , se requiere un tiempo infinito para alcanzar cualquiera de los puntos $\theta = \pm\pi$ que son la misma posición de equilibrio inestable.

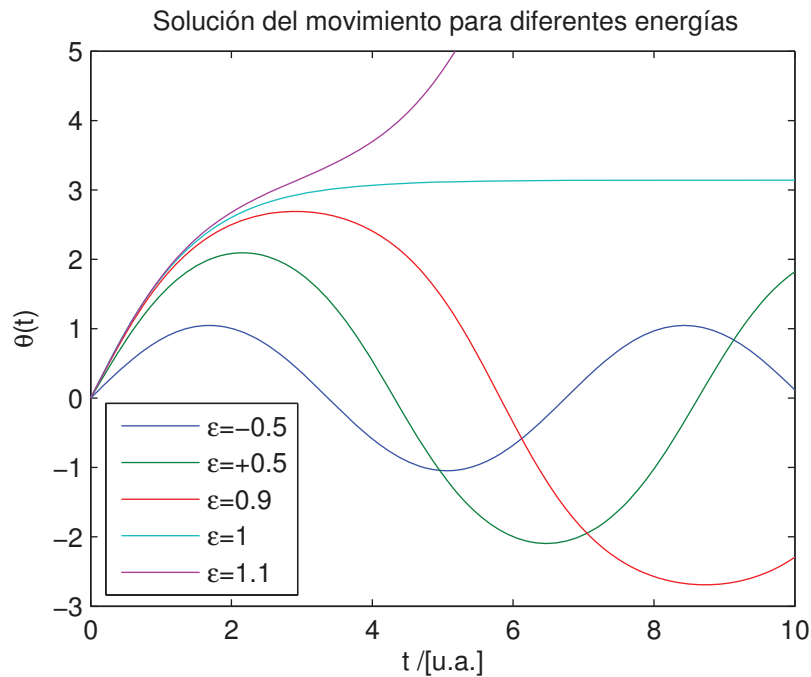
Movimiento monótono o continuo. Para el movimiento monótono o continuo la solución puede expresarse en función de una integral elíptica haciendo el cambio $\theta = 2\psi$, resultando,

$$t + C = k \sqrt{\frac{\ell}{g}} F(\theta/2, k)$$

por lo que la solución de θ se obtiene de la función elíptica amplitud, $\text{am}(z, k)$,

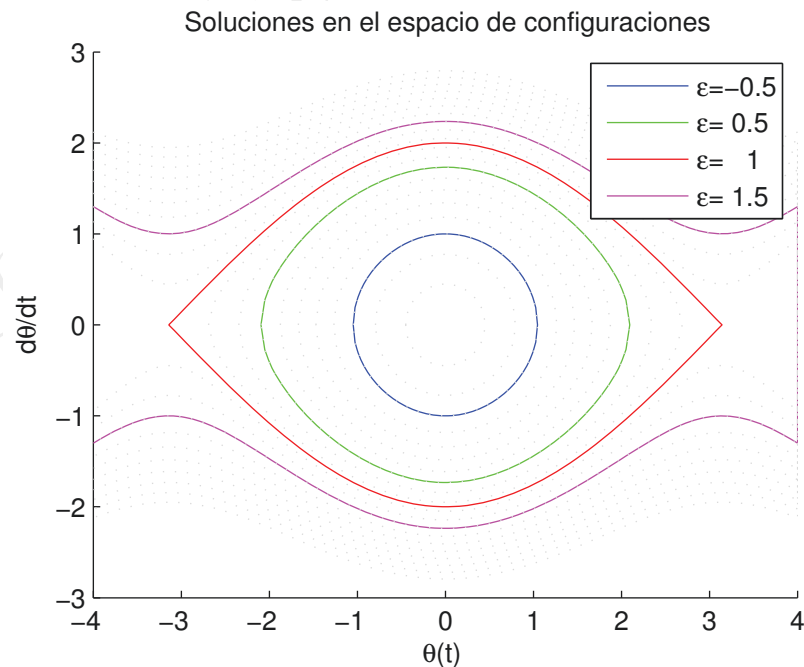
$$\theta(t) = 2 \text{ am} \left(\frac{t + C}{k \sqrt{\ell/g}}, k \right)$$

donde $k = \sqrt{2/(1 + E/(mgl))}$.



Espacio de configuraciones.

La conservación de la energía permite relacionar los valores de la coordenada y su derivada y representar gráficamente las diferentes soluciones del movimiento de la partícula en el llamado *espacio de configuraciones*. En la figura siguiente se representan diferentes soluciones en dicho espacio.



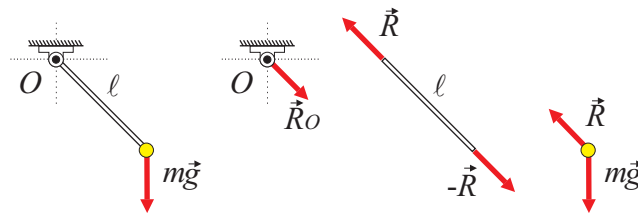
2.3. Reacción del vínculo. Discusión.

La componente normal de la ecuación de Newton permite determinar la reacción R en la partícula,

$$R = m a_N - F_N = m \frac{v^2}{\rho} - m \vec{g} \cdot \hat{N} = m \ell \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta$$

Esa fuerza es transmitida por la barra al punto fijo O de la articulación donde la reacción es de sentido opuesto $\vec{R}_O = -\vec{R} = -R\hat{N}$. La barra estará sometida en sus extremos a fuerzas opuestas a las reacciones

en la partícula y en el punto fijo de manera que si $R > 0$ la barra está sometida a tensión y si $R < 0$ está sometida a compresión.



Para determinar el signo de R nos fijamos en que el segundo término (que proviene de la aceleración centrípeta) es siempre positivo mientras que el primero (componente del peso a lo largo de la varilla) se hace negativo cuando la partícula se encuentra por encima del vínculo, $y < 0 \Rightarrow |\theta| > \pi/2$. Entonces si $y \geq 0$ la reacción es siempre positiva $R \geq 0$. Para saber que ocurre para $y < 0$ tenemos que relacionar el ángulo con la velocidad angular y lo haremos utilizando la energía, así,

$$\dot{\theta}^2 = 2 \left[\frac{E}{m\ell^2} + \frac{g}{\ell} \cos \theta \right]$$

y la expresión de la reacción en función del ángulo y la energía queda

$$R = 2mg \left[\frac{E}{mgl} + \frac{3}{2} \cos \theta \right]$$

Como el valor de la energía determina el tipo de movimiento (oscilatorio/continuo) los analizaremos por separado. Por comodidad utilizaremos un valor unidimensional de la energía $\varepsilon = \frac{E}{mgl}$ que es la que hemos visto que aparece en todas las expresiones anteriores.

En el caso en que $0 < \varepsilon < 1$ el movimiento es oscilatorio y el valor máximo del ángulo es $\theta_1 = \arccos(-\varepsilon)$ mientras que la reacción se anula y cambia de signo para $\theta' = \arccos(-\frac{2}{3}\varepsilon) = \arccos(\frac{2}{3} \cos \theta_1)$ que es menor que θ_1 . Entonces la reacción es positiva para $0 \leq \theta < \theta'$ y negativa para $\theta' < \theta \leq \theta_1$, anulándose en $\theta = \theta'$.

En el caso continuo $1 < \varepsilon$ se recorre toda la circunferencia y la reacción se anulará y cambiará de signo en el ángulo θ' cuya existencia viene condicionada porque $-1 \leq -\frac{2}{3}\varepsilon \leq 1$. Entonces si $1 < \varepsilon < \frac{3}{2}$ la reacción cambia de signo en θ' mientras que si $\frac{3}{2} < \varepsilon$ no se anula nunca.

En la tabla siguiente se resumen estos resultados clasificados en orden creciente de energía.

Cuadro 1: Signo de la reacción en función de la energía adimensional $\varepsilon = \frac{E}{mgl}$

Energía	tipo de movimiento	valores del ángulo	Reacción
$-1 = \varepsilon$	Equilibrio	$ \theta = 0$	$R = mg$
$-1 < \varepsilon \leq 0$	Oscilatorio	$ \theta \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$	$R \geq 0$
$0 < \varepsilon < 1$	Oscilatorio	$ \theta \leq \theta_1$ $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$	$R > 0$ para $ \theta < \theta'$ $R < 0$ para $\theta' < \theta \leq \theta_1$
$1 < \varepsilon < \frac{3}{2}$	Continuo	$[\theta]_0 \leq \pi$	$R > 0$ para $[\theta]_0 < \theta'$ $R < 0$ para $\theta' < [\theta]_0 \leq \pi$
$\frac{3}{2} \leq \varepsilon$	Continuo	$[\theta]_0 \leq \pi$	$R \geq 0$

2.4. Movimiento del péndulo en un medio resistente. Amortiguación.

Si se considera la resistencia que ejerce el aire al movimiento de péndulo debería incluirse una fuerza de rozamiento que se oponga al movimiento del péndulo. La forma más sencilla sería considerar una fuerza de



tipo viscoso y por tanto proporcional a la velocidad, $\vec{F}_R = -\alpha v \hat{T}$. La ecuación del movimiento quedará,

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \operatorname{sen} \theta - \alpha \ell \dot{\theta}$$

Para ángulos pequeños la aproximación del seno por el ángulo conduce a la ecuación del oscilador armónico amortiguado,

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

donde $\beta = \frac{\alpha}{2m}$ y $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$. Las soluciones de la ecuación diferencial son del tipo exponencial, $\theta = A e^{Dt}$ donde D debe cumplir $D^2 + 2\beta D + \omega^2 = 0$ y entonces $D = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$.

Si $\beta > \omega$ las dos soluciones son reales y tenemos dos exponenciales decrecientes,

$$\theta(t) = A_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t} + A_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}$$

es el caso **sobreamortiguado**.

Si $\beta < \omega$ las dos soluciones son complejas con parte real negativa que conducen a una oscilación armónica cuya amplitud decrece exponencialmente,

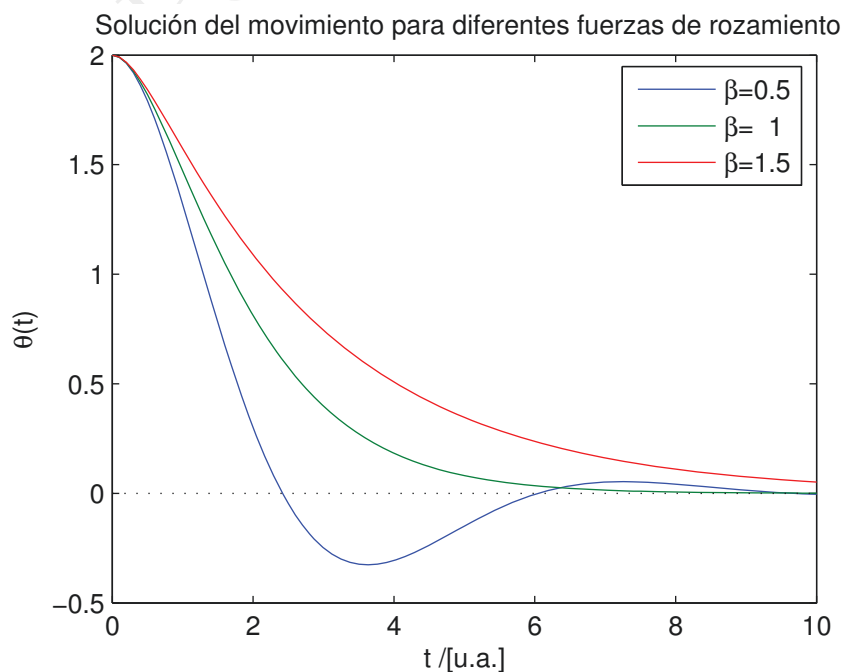
$$\theta(t) = A e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t)$$

es el caso **subamortiguado**.

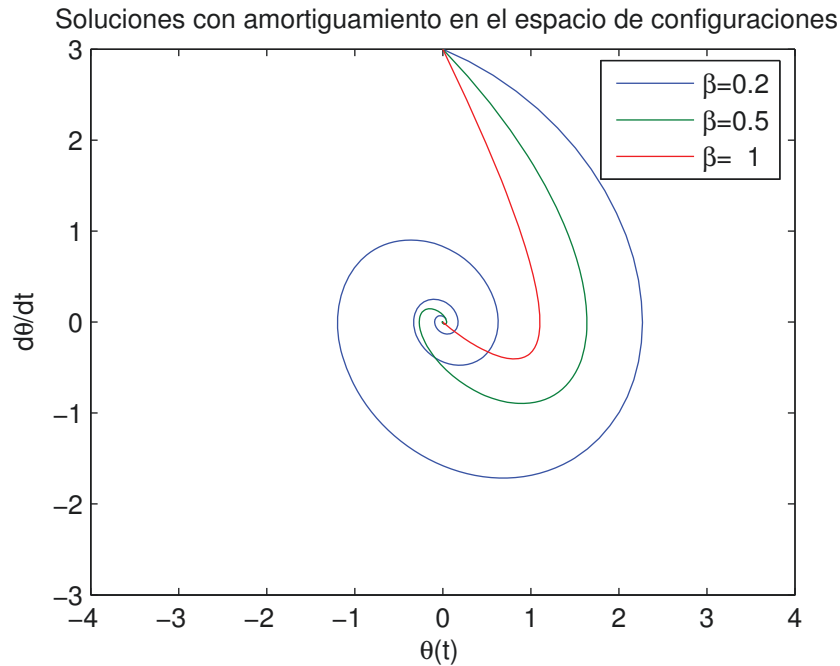
El caso **crítico** se tiene para $\beta = \omega$, ahora las dos raíces coinciden por lo que la segunda solución puede obtenerse haciendo $A = A(t)$ de manera que la solución general queda,

$$\theta(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\beta t}$$

que es el caso que tiende a cero de forma más rápida.



Si no se utiliza la aproximación de pequeños ángulos las soluciones no vienen descritas por funciones tan sencillas pero los resultados cualitativos se mantienen: si el rozamiento es pequeño se producen oscilaciones decrecientes; si el rozamiento es grande no hay oscilaciones; y para un valor intermedio se produce la amortiguación más eficiente.

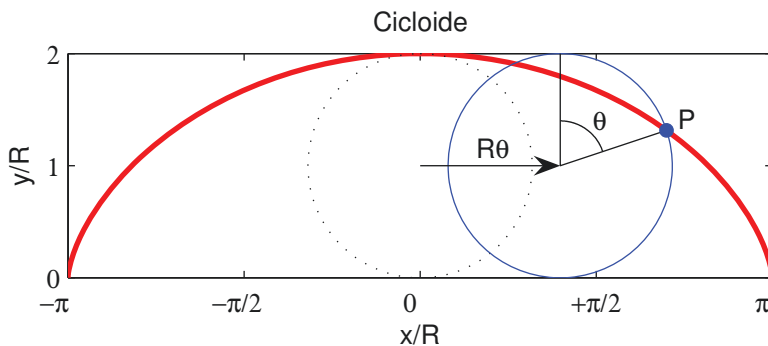


2.5. Péndulo cicloidal. Definición y Propiedades. Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una curva.

Si la partícula pesada está ligada a una curva con forma de cicloide el movimiento tiene ciertas propiedades muy importantes desde el punto de vista de la dinámica. Por una lado el periodo de las oscilaciones es independiente de la amplitud, *tautocrono* y por otro es la curva por la que la partícula une dos puntos en el menor tiempo, *braquistocrono*. Nos centraremos en la primera.

La cicloide es la curva que genera un punto P de la periferia de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre una línea recta. Suponiendo que en el instante inicial el punto P es diametralmente opuesto al punto de contacto con la recta que tomamos como origen O , utilizando el ángulo girado por la circunferencia ϕ , la ecuación de la cicloide es,

$$\vec{r}(\phi) = R(\phi + \text{sen } \phi)\hat{i} + R(1 + \cos \phi)\hat{j}$$



De la derivada obtenemos el vector unitario tangente y la longitud de arco,

$$\hat{T} = \cos \frac{\phi}{2} \hat{i} - \text{sen} \frac{\phi}{2} \hat{j}$$

y

$$S = \int \frac{dS}{d\phi} d\phi = \int_0^\phi 2R \cos \frac{\phi}{2} d\phi = 4R \text{sen} \frac{\phi}{2}$$



Al igual que en el péndulo circular tomamos el Oy vertical hacia abajo por lo que $\phi = 0$ sería la posición de equilibrio. La ecuación del movimiento es la componente tangencial de la ecuación de Newton,

$$ma_T = m\ddot{S} = F_T = -mg \sin \frac{\phi}{2} = -mg \frac{S}{4R}$$

por lo que se obtiene la ecuación del oscilador armónico de forma exacta,

$$\ddot{S} + \frac{g}{4R} S = 0$$

y el periodo es $2\pi\sqrt{4R/g}$ e independiente de la amplitud de las oscilaciones. La solución expresada con la longitud de arco sería,

$$S(t) = S_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{4R}} t + \delta \right)$$

y para el parámetro ϕ ,

$$\phi(t) = 2 \arcsin \left[\frac{S_0}{4R} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{4R}} t + \delta \right) \right]$$

Referencias

- [AS72] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, page 587. Dover, 9 edition, 1972.



3. Dinámica del punto ligado a una superficie. I

- 3.1 Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una superficie.
- 3.2 Aplicación del teorema de la energía.
- 3.3 Fuerzas dependientes únicamente de la posición. Potencial de fuerzas.
- 3.4 Ecuaciones del movimiento en plano tangente.

Estudiaremos ahora el caso de una partícula ligada a una superficie. Ahora la partícula tiene dos grados de libertad por lo que habrá que determinarse la ley horaria y la trayectoria que sigue dentro de la superficie. En general los dos problemas están entremezclados y no será posible separarlos. En el tema siguiente estudiaremos uno de los pocos casos para los que se puede obtener fácilmente la solución.

3.1. Ecuaciones del movimiento de un punto sobre una superficie.

En ausencia de rozamiento la reacción tiene la dirección de la normal a la superficie. Así, la componente de la ecuación de Newton en la dirección normal a la superficie solo permite obtener la reacción y las ecuaciones del movimiento son las componentes tomadas en direcciones ortogonales del plano tangente.

Si la ecuación de la superficie viene dada en forma implícita, $f(x, y, z) = 0$, el vector normal es paralelo al gradiente,

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

y la reacción

$$R = (m\vec{a} - \vec{F}^{\text{ap}}) \cdot \hat{n}$$

Si la superficie viene expresada en coordenadas paramétricas, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, las derivadas parciales nos proporcionan dos direcciones del plano tangente,

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \\ \vec{r}_v &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\end{aligned}$$

y el vector unitario normal,

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

La aceleración se obtiene suponiendo que las coordenadas u y v dependen del tiempo,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}_{uu} \dot{u}^2 + \vec{r}_{vv} \dot{v}^2 + 2\vec{r}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \vec{r}_u \ddot{u} + \vec{r}_v \ddot{v}\end{aligned}$$

y las ecuaciones del movimiento son las ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned}m\vec{a} \cdot \vec{r}_u &= \vec{F}^{\text{ap}} \cdot \vec{r}_u \\ m\vec{a} \cdot \vec{r}_v &= \vec{F}^{\text{ap}} \cdot \vec{r}_v\end{aligned}$$

cuya solución será $u(t)$ y $v(t)$.

3.2. Aplicación del teorema de la energía.

Como la superficie no tiene rozamiento la reacción no trabaja por lo que la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado por la fuerza aplicada,

$$T_2 - T_1 = W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ap}} \cdot d\vec{r}$$

El vector desplazamiento puede relacionarse con las derivadas respecto de los parámetros,

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

3.3. Fuerzas dependientes únicamente de la posición. Potencial de fuerzas.

Si las fuerzas aplicadas son conservativas, $\vec{F} = -\nabla V$, el trabajo puede obtener a partir del potencial,

$$T_2 - T_1 = W_{12} = \int_1^2 -dV(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

y puede relacionarse la posición y la velocidad de la partícula a través de la constante energía,

$$E = \frac{1}{2}m [\vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}]^2 + V(\vec{r}(u, v))$$

3.4. Ecuaciones del movimiento en plano tangente.

El plano tangente a la superficie contiene todas las direcciones tangente al plano, en particular la tangente a la trayectoria que sigue la partícula \hat{T} . Así, podemos elegir un triedro formado por los vectores $\{\hat{n}, \hat{T}, \hat{u}\}$ donde $\hat{u} = \hat{n} \times \hat{T}$. En general el vector unitario normal a la superficie \hat{n} y el vector unitario normal a la trayectoria \hat{N} no son paralelos y formarán un ángulo γ dado por, $\cos \gamma = \hat{n} \cdot \hat{N}$. Entonces, proyectando sobre el triedro anterior,

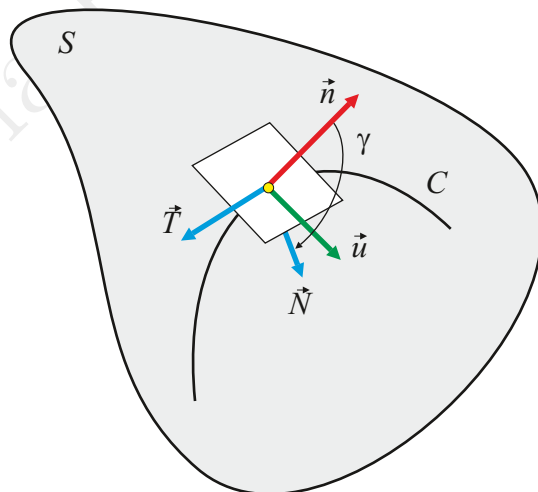
$$m \frac{v^2}{\rho} \cos \gamma = F_n + R$$

$$m \frac{dv}{dt} = F_T$$

$$m \frac{v^2}{\rho} \sin \gamma = F_u$$

la primera de las ecuaciones permite calcular la reacción R y las dos últimas son realmente las ecuaciones del movimiento. La segunda vuelve a ser el teorema de la energía (trabajo por unidad de arco). La tercera puede reescribirse como,

$$2(E - V(\vec{r})) \frac{\sin \gamma}{\rho} = F_u$$



Ausencia de fuerzas.

Esta última ecuación permite obtener una conclusión importante ya que en ausencia de fuerzas, $\vec{F} = 0$, aplicadas el movimiento de la partícula requiere, $\sin \gamma = 0$, por lo que la trayectoria es una *geodésica*¹. Además la fuerza tangencial también es cero y al no existir trabajo el módulo de la velocidad se mantiene constante, $\|\vec{v}\| = cte$.

¹Las geodésicas de una superficie son las curvas cuyo vector unitario normal es paralelo al vector normal a la superficie, $\hat{N} \parallel \hat{n}$. Tienen la propiedad de ser la curva de longitud mínima que une dos puntos sobre la superficie.



4. Dinámica del punto ligado a una superficie. II

- 4.1 Movimiento de un punto pesado sobre una superficie de revolución de eje vertical. Problema unidimensional equivalente. Discusión del movimiento en términos de la energía. Condiciones para movimiento estacionario.
- 4.2 Caso en que las fuerzas aplicadas son despreciables: Geodésicas. Fórmula de Clairaut.
- 4.3 Péndulo esférico. Definición y propiedades.
- 4.4 Ecuaciones del movimiento y acotación de zonas.
- 4.5 Discusión: Casos casi estacionario y estacionario.
- 4.6 Reacción del vínculo. Discusión.
- 4.7 Pequeñas oscilaciones elípticas del péndulo esférico.

Introducción

Nos centraremos en un caso sencillo para obtener la solución de una partícula ligada a una superficie. Para ello consideraremos la fuerza peso y una superficie de revolución con el eje vertical y veremos que puede reducirse a un problema de un grado de libertad que denominaremos problema unidimensional equivalente.

4.1. Movimiento de un punto pesado sobre una superficie de revolución de eje vertical. Problema unidimensional equivalente. Discusión del movimiento en términos de la energía. Condiciones para movimiento estacionario.

Utilizaremos un sistema de coordenadas cilíndricas con Oz vertical hacia arriba. Ese eje también será el eje de simetría de revolución de la superficie, por lo tanto, la superficie viene determinada por la relación entre la coordenada radial ρ y la coordenada z . Supongamos conocida la curva generatriz en la forma $\rho = \rho(z)$. La ecuación de la superficie puede parametrizarse como,

$$\vec{r}(z, \varphi) = \rho(z) \hat{e}_\rho + z \hat{k}$$

Manteniendo constante el ángulo, $\varphi = cte$, se obtiene una curva similar a la generatriz que llamaremos *meridiano*. Si $z = cte$ se obtiene una circunferencia horizontal llamada *paralelo*. Las tangentes a estas líneas coordenadas son ortogonales,

$$\begin{aligned} \vec{r}_z &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \rho' \hat{e}_\rho + \hat{k} \\ \vec{r}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \rho(z) \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

donde $\rho' = d\rho/dz$.

Con las tangentes a las líneas coordenadas se determina el vector unitario normal,

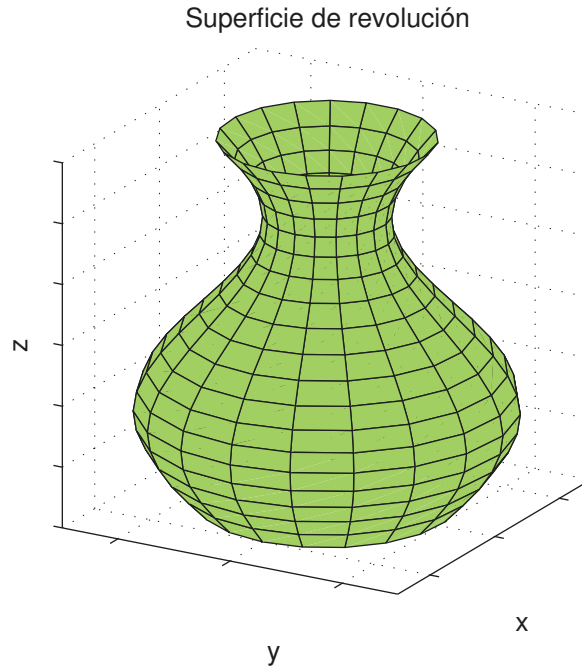
$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_z \times \vec{r}_\varphi}{\|\vec{r}_z \times \vec{r}_\varphi\|} = \frac{-\hat{e}_\rho + \rho' \hat{k}}{\sqrt{1 + \rho'^2}}$$

Proyectando la ecuación de Newton, $m \vec{a} = -mg \hat{k} + R \hat{n}$, en esas dos direcciones obtenemos,

$$\begin{aligned} m(\rho' a_\rho + a_z) &= -mg \\ m \rho a_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

proyectando en la dirección de la normal se obtiene la reacción

$$R = m \frac{-a_\rho + \rho' (a_z - g)}{\sqrt{1 + \rho'^2}}$$



Para obtener las componentes de la velocidad y de la aceleración del punto en la superficie derivamos el vector de posición recordando que $\partial \hat{e}_\rho / \partial \varphi = \hat{e}_\varphi$, $\partial \hat{e}_\varphi / \partial \varphi = -\hat{e}_\rho$ y teniendo en cuenta que $\rho = \rho(z)$. Así para la velocidad se tiene:

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{k} = \rho' \dot{z} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{k}$$

y para la aceleración,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi + \ddot{z} \hat{k} \\ &= (\rho'' \dot{z}^2 + \rho' \ddot{z} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\rho' \dot{z} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi + \ddot{z} \hat{k} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera ecuación del movimiento y dividiendo por la masa se tiene,

$$(1 + \rho'^2) \ddot{z} + \rho' \rho'' \dot{z}^2 - \rho \rho' \dot{\varphi}^2 + g = 0$$

Sustituyendo las componentes cilíndricas de la aceleración en la segunda ecuación del movimiento se tiene,

$$m \rho (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) = m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) = 0$$

de donde se obtiene una constante del movimiento²,

$$m \rho^2 \dot{\varphi} = cte = L \quad (4.3)$$

que permite obtener el ángulo si se conoce la solución del movimiento vertical $z = z(t)$. Además $\dot{\varphi}$ no cambia de signo por lo que el movimiento en esta coordenada es monótono (crece o decrece de forma continua).

Veremos que el movimiento vertical puede reducirse a un problema unidimensional utilizando la conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} m v^2 + V = E = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + m g z$$

y sustituyendo $\dot{\varphi} = L/(m\rho^2)$,

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 \dot{z}^2 + \frac{L^2}{m^2 \rho^2} + \dot{z}^2 \right) + m g z$$

y separando los términos cinéticos de los que solo dependen de la posición,

$$E = \frac{1}{2} m (1 + \rho'^2) \dot{z}^2 + V_{\text{ef}}(z) \quad (4.4)$$

²Más adelante veremos de forma general que esta constante del movimiento está asociada a la simetría de revolución y no es otra cosa que el momento cinético de la partícula respecto de dicho eje.



donde

$$V_{\text{ef}}(z) = m g z + \frac{L^2}{2 m \rho^2(z)}$$

es el *potencial efectivo*. La ecuación 4.4 se conoce por *problema unidimensional equivalente* puesto que representa una partícula de masa efectiva $m(1 + \rho'^2)$ que se mueve a lo largo del eje z sometida al potencial efectivo, $V_{\text{ef}}(z)$. En este potencial efectivo el primer sumando es el potencial de la fuerza peso pero el segundo es un término cinético que a través de la constante del movimiento L pasa a depender solamente de la posición. Más adelante veremos que ese término es el potencial generalizado de la fuerza centrífuga.

El movimiento para la coordenada z se resuelve integrado la velocidad a partir de la energía,

$$t + C = \int \sqrt{\frac{m(1 + \rho'^2)}{2[E - V_{\text{ef}}(z)]}} dz$$

Conocida $z(t)$ la ecuación del paralelo permite obtener $\varphi(t)$.

El análisis del potencial efectivo permite clasificar los movimientos en función de la energía:

- Si E coincide con un mínimo/máximo local de $V_{\text{ef}}(z)$ la partícula se encuentra en equilibrio estable/inestable para z . Como la coordenada z es constante la velocidad angular también lo es, $\dot{\varphi} = cte$.
- Si para el valor de E solo existe un punto de retroceso $E = V_{\text{ef}}(z_1)$, el movimiento en z se invierte para $z = z_1$ y luego continua alejándose hasta el infinito.
- Si existen dos puntos de retroceso $E = V_{\text{ef}}(z_1) = V_{\text{ef}}(z_2)$, el movimiento en z es una oscilación de periodo,

$$P = 2 \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\frac{m(1 + \rho'^2)}{2[E - V_{\text{ef}}(z)]}} dz$$

- Si E es mayor que el máximo del potencial efectivo el movimiento en z es monótono.

4.1.1. Condición de movimiento estacionario

Como hemos visto si E coincide con un mínimo/máximo local de $V_{\text{ef}}(z)$, $z = cte = z_0$ y $\dot{\varphi} = cte = \omega = L/(m\rho^2)$. La condición de extremo requiere que se anule la derivada del potencial efectivo,

$$0 = \frac{dV_{\text{ef}}}{dz} = m g - \frac{L^2}{m \rho^3} \rho' = m g - m \rho \omega^2 \rho'$$

y entonces

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{g}{\rho \frac{d\rho}{dz}}}$$

Nótese que para que la raíz tenga solución real la derivada debe ser positiva por lo que solo es posible conseguir movimiento estacionario en las regiones de la superficie en las que el radio ρ crece con la altura z .

4.2. Caso en que las fuerzas aplicadas son despreciables: Geodésicas. Fórmula de Clairaut.

Si la fuerza del peso es despreciable comparada con el producto de la masa por la aceleración, el movimiento de la partícula solo se debe a la inercia y a la reacción que no trabaja. La velocidad permanece constante y la aceleración solo tiene componente normal que ha de ser paralela a la normal a la superficie (geodésica).

Vamos a ver que los meridianos son siempre geodésicas y que algunos paralelos también. Para escribir la ecuación de un meridiano basta tomar constante el ángulo, $\varphi = \varphi_0$, por lo que su vector tangente es

$$\hat{T}_M = \frac{\vec{r}'_z}{\|\vec{r}'_z\|} = \frac{\rho' \hat{e}_\rho + \hat{k}}{\sqrt{1 + \rho'^2}}$$

y como se trata de una curva plana la normal se obtiene trivialmente

$$\hat{N}_M = \frac{\hat{e}_\rho - \rho' \hat{k}}{\sqrt{1 + \rho'^2}}$$

que es paralelo al vector normal a la superficie demostrando que es una geodésica.

Para los paralelos la situación es más sencilla ya que son circunferencias en planos $z = cte$. El vector unitario normal a los paralelos apunta al centro de la circunferencia que se encuentra en el eje Oz ,

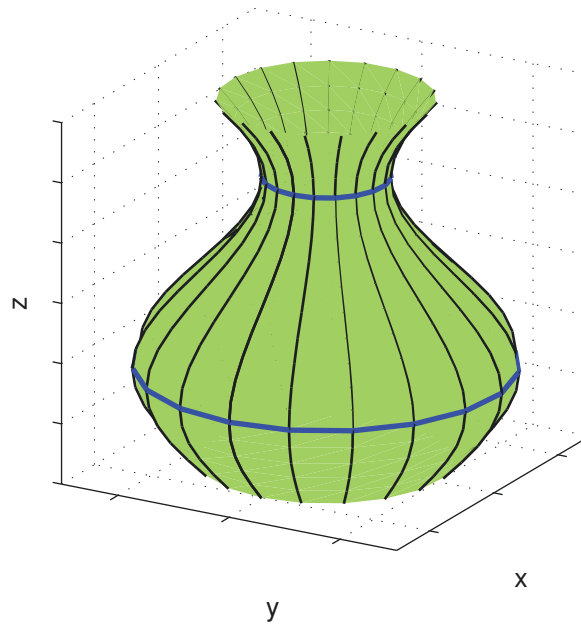
$$\hat{N}_P = -\hat{e}_\rho$$

y solamente es paralelo al vector normal a la superficie cuando este no tiene componente z ,

$$\hat{n} \parallel \hat{e}_\rho \Rightarrow \rho' = \frac{d\rho}{dz} = 0$$

es decir, para los paralelos que sean máximos o mínimos de la curva generatriz $\rho = \rho(z)$.

Superficie de revolución: geodésicas



Todas las geodésicas en una superficie de revolución cumplen una ecuación que permite conocer su forma cualitativamente. Para obtener esa ecuación utilizaremos las constantes $v = cte$ y $\rho \dot{\varphi}^2 = cte$. El vector tangente,

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\rho' \hat{z} \hat{u}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{u}_\varphi + \dot{z} \hat{k}}{v}$$

por lo que el ángulo α que forma la tangente con el paralelo cumple

$$\cos \alpha = \hat{T} \cdot \hat{u}_\varphi = \frac{\rho \dot{\varphi}}{v}$$

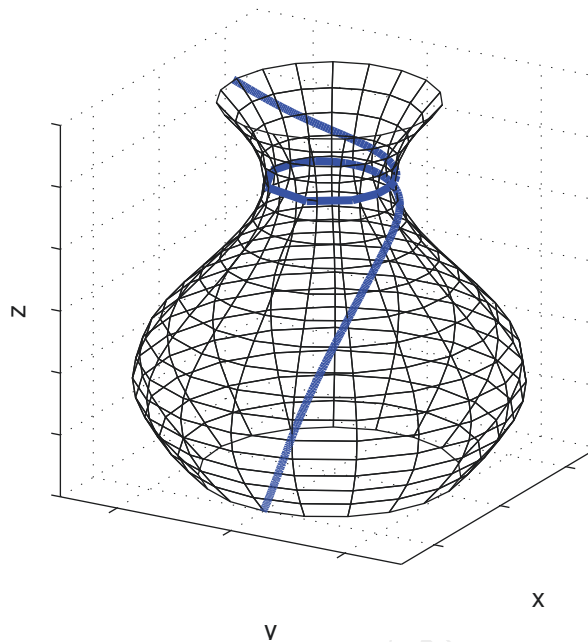
y multiplicando por ρ se obtiene una relación constante

$$\rho \cos \alpha = \frac{\rho^2 \dot{\varphi}}{v} = cte$$

que es la *Fórmula de Clairaut* y que implica que si ρ crece/decrece el ángulo que forma la tangente a la geodésica con los meridianos aumenta/disminuye.



Superficie de revolución: Fórmula de Clairaut

**4.3. Péndulo esférico. Definición y propiedades.**

El péndulo esférico es una masa puntual pesada unida a un punto fijo O por una varilla de peso despreciable de manera que la partícula puede moverse en todas las direcciones del espacio. Si la varilla tiene longitud ℓ , las posibles posiciones que puede ocupar la partícula se encuentran en una superficie esférica de radio ℓ . Para describir el movimiento del péndulo podría utilizarse las coordenadas esféricas pero en lugar de eso la trataremos como una superficie de revolución cuya curva generatriz en coordenadas cilíndricas sería,

$$\rho(z) = \sqrt{\ell^2 - z^2}$$

con $z \in [-\ell, +\ell]$.

Derivando respecto de z se obtiene $\rho' = -z/\sqrt{\ell^2 - z^2}$ y entonces las derivadas de las líneas coordenadas (meridianos y paralelos) quedan,

$$\vec{r}_z = -\frac{z}{\sqrt{\ell^2 - z^2}} \hat{e}_\rho + \hat{k}$$

$$\vec{r}_\varphi = \sqrt{\ell^2 - z^2} \hat{e}_\varphi$$

y el vector unitario normal a la superficie

$$\hat{n} = -\frac{\sqrt{\ell^2 - z^2} \hat{e}_\rho + z \hat{k}}{\ell}$$

4.4. Ecuaciones del movimiento y acotación de zonas.

$$\frac{\ell^2}{\ell^2 - z^2} \ddot{z} + \frac{z \ell^2}{(\ell^2 - z^2)^2} \dot{z}^2 + z \dot{\varphi}^2 + g = 0$$

$$(\ell^2 - z^2) \dot{\varphi} = L/m = C$$

la segunda puede sustituirse en la primera para obtener la ecuación diferencial del movimiento según el eje z ,

$$\frac{\ell^2}{\ell^2 - z^2} \ddot{z} + \frac{z \ell^2}{(\ell^2 - z^2)^2} \dot{z}^2 + \frac{z C^2}{(\ell^2 - z^2)^2} + g = 0$$

Para analizar el movimiento utilizaremos el problema unidimensional equivalente:

$$E = \frac{m}{2} \frac{\ell^2}{\ell^2 - z^2} \dot{z}^2 + V_{\text{ef}}(z)$$

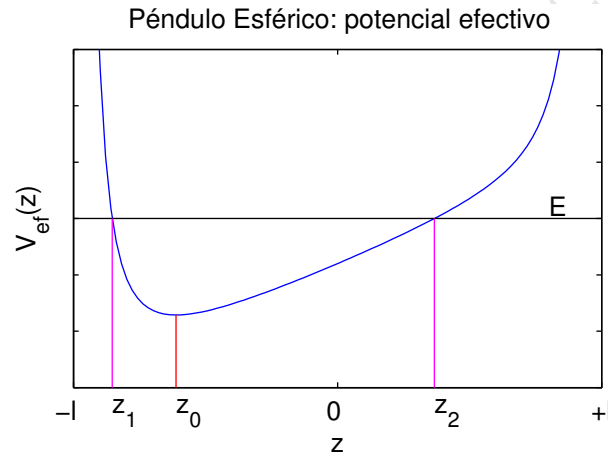
con

$$V_{\text{ef}}(z) = mgz + \frac{mC^2}{2(\ell^2 - z^2)}$$

Si $C \neq 0$ el potencial tiende a $+\infty$ cuando $z \rightarrow \pm\ell$ y tiene un mínimo en la posición z_0 . Solo se presentan dos situaciones, $E = \text{mín}(V_{\text{ef}}) = V_{\text{ef}}(z_0)$ que sería el movimiento estacionario, y $E > V_{\text{ef}}(z_0)$ que conduce a un movimiento oscilatorio de la coordenada z entre los dos puntos de retroceso $E = V_{\text{ef}}(z_1) = V_{\text{ef}}(z_2)$. En este caso el movimiento se integra despejando \dot{z} de la ecuación de la energía,

$$t + C_2 = \pm \int \frac{dz}{\sqrt{\frac{2(\ell^2 - z^2)}{m\ell^2} [E - V_{\text{ef}}]}} = \pm \int \frac{\ell dz}{\sqrt{\frac{2}{m} (\ell^2 - z^2) [E - mgz] - C^2}}$$

que puede escribirse como una integral elíptica. Debe notarse que aunque el movimiento en z sea periódico no lo será en general el movimiento total ya que durante el tiempo que z realiza una oscilación completa el ángulo φ avanzará un ángulo diferente de 2π alcanzándose una posición diferente de la de partida.



Si $C = 0$ el ángulo φ permanece constante y el movimiento se realiza en un plano vertical que fue el caso analizado en el Tema 2.

4.5. Discusión: Casos casi estacionario y estacionario.

El caso de movimiento estacionario corresponde con el mínimo del potencial efectivo y este se encuentra siempre por debajo del centro de la esfera (en la zona en que ρ crece con z). Para que la esfera realice un movimiento estacionario a una altura z_0 , $z_0 \in [-\ell, 0]$, el valor de la derivada del ángulo acimutal tiene que tomar el valor,

$$\dot{\varphi} = \omega = \sqrt{\frac{g}{-z_0}}$$

Las constantes del movimiento L y E para un movimiento estacionario con $z = z_0$ toman los valores,

$$L = m(\ell^2 - z_0^2) \sqrt{\frac{g}{-z_0}}$$

$$E = \frac{mg\ell}{2} \left(3\frac{z_0}{\ell} - \frac{\ell}{z_0} \right)$$

Si cuando el péndulo realiza el movimiento estacionario se le añade una pequeña cantidad de energía (un pequeño valor de \dot{z}), la coordenada z oscilará alrededor del valor z_0 . Si las oscilaciones son de pequeña amplitud puede describirse por un movimiento armónico,

$$z(t) \approx z_0 + A \cos(\Omega t + \delta)$$



cuya frecuencia puede Ω obtenerse del problema unidimensional equivalente,

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_{ef}}{m_{ef}}} = \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial z^2} \Big|_0}{\frac{\partial^2 T_{ef}}{\partial \dot{z}^2} \Big|_0}} = \sqrt{-\frac{g}{z_0} \frac{(\ell^2 + 3z_0^2)}{\ell^2}} = \omega \sqrt{1 + 3 \left(\frac{z_0}{\ell}\right)^2}$$

También es posible obtener la frecuencia de las oscilaciones de la ecuación del movimiento para la coordenada z .

4.6. Reacción del vínculo. Discusión.

La reacción se obtiene proyectando la ecuación de Newton sobre la dirección normal a la superficie,

$$R = (m \vec{a} - m \vec{g}) \cdot \hat{n} = m \vec{a} \cdot \hat{n} - m g \frac{z}{\ell}$$

donde la proyección de la aceleración sobre la normal se obtiene de las derivadas segundas

$$\vec{a} \cdot \hat{n} = (\vec{r}_{zz} \dot{z}^2 + 2\vec{r}_{z\varphi} \dot{z}\dot{\varphi} + \vec{r}_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2) \cdot \hat{n}$$

y entonces

$$R = m \left[\frac{\ell}{\ell^2 - z^2} \dot{z}^2 + \frac{\ell^2 - z^2}{\ell} \dot{\varphi}^2 \right] - m g \frac{z}{\ell}$$

Las velocidades \dot{z} y $\dot{\varphi}$ puede obtenerse a partir de las constantes E y L que al sustituir en la ecuación de la reacción conducen a

$$R = 2mg \left(\frac{E}{mg\ell} - \frac{3}{2} \frac{z}{\ell} \right)$$

que es la misma que la del péndulo plano ya que $z/\ell = -\cos\theta$.

4.7. Pequeñas oscilaciones elípticas del péndulo esférico.

Cuando el péndulo realiza pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio $z_0 = -\ell$ su proyección sobre el plano Oxy describe trayectorias elípticas. Este movimiento puede obtenerse fácilmente utilizando las ecuaciones del péndulo en coordenadas cartesianas,

$$m (\ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}) = \vec{R} - m g \hat{k}$$

y como la reacción tiene la dirección del vector que apunta al origen,

$$\vec{R} = -R (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) / \ell$$

y entonces

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -\frac{x}{\ell} R \\ m \ddot{y} &= -\frac{y}{\ell} R \\ m \ddot{z} &= -\frac{z}{\ell} R - m g \end{aligned}$$

Si $z \approx z_0 = -\ell$ el valor de la reacción puede obtenerse de la componente z , $R \approx mg$ de manera que al sustituir en las dos primeras se obtienen dos ecuaciones del tipo oscilador armónico:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -m \frac{g}{\ell} x \\ m \ddot{y} &= -m \frac{g}{\ell} y \end{aligned}$$

cuyas soluciones son dos movimiento armónicos con diferentes amplitudes pero la misma frecuencia,

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + B \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$
$$y(t) = C \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + D \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

que representan la ecuación de una elipse. Esa elipse puede degenerar en una recta (péndulo plano) o en una circunferencia (movimiento estacionario) dependiendo de los valores de A , B , C y D que vienen dados por las condiciones iniciales.

Escuela Politécnica Superior



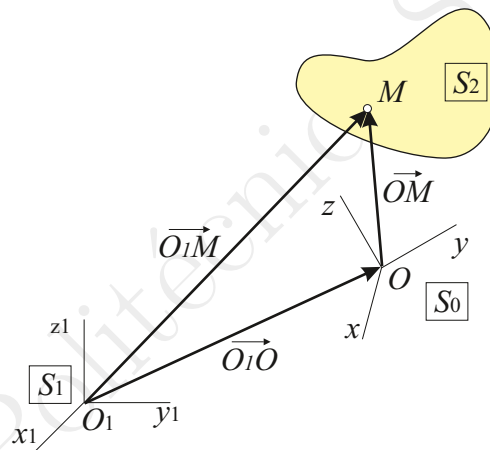
5. Dinámica del punto en movimiento relativo

- 5.1 Dinámica del movimiento relativo del punto. Fuerzas de inercia.
- 5.2 Movimiento relativo en la superficie de la Tierra.
- 5.3 Caída de un punto pesado sobre la superficie de la Tierra. Efecto geostrófico.
- 5.4 Péndulo de Foucault. Giro aparente del plano de oscilación.
- 5.5 Caracterización del movimiento elíptico del péndulo de Foucault. Longitud de semiejes y periodo de giro del plano de oscilación.

Introducción

En este tema estudiaremos la dinámica del punto en un sistema de referencia no inercial y lo aplicaremos al caso de una partícula moviéndose sobre la superficie de la Tierra, para analizar aspectos tales como la gravedad aparente o el efecto Coriolis. Nos basaremos en las expresiones de la composición de movimientos obtenidas en los temas de cinemática.

5.1. Dinámica del movimiento relativo del punto. Fuerzas de inercia.



Vimos en cinemática que si conocemos el movimiento de un cuerpo S_2 respecto de un sistema de referencia S_0 que a su vez se mueve respecto de otro sistema de referencia S_1 , la aceleración de un punto M cualquiera de S_2 será la suma de la aceleración relativa \vec{a}_{20}^M , el término de arrastre \vec{a}_{01}^M y el término de Coriolis:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$$

que para aligerar escribiremos

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{\text{arr}} + \vec{a}_{\text{Cor}}$$

ya que lo que nos interesa es escribir las ecuaciones en el sistema S_0 .

Si el sistema S_1 es inercial, se cumple la ecuación de Newton $\vec{F} = m \vec{a}'$ pero en la ecuación del movimiento en S_0 habrá dos términos extra:

$$m \vec{a} = \vec{F} - m \vec{a}_{\text{arr}} - m \vec{a}_{\text{Cor}}$$

estos términos extra los denominamos fuerzas de inercia, puesto que no se trata de verdaderas fuerzas. Así, $\vec{F}_{\text{arr}} = -m \vec{a}_{\text{arr}}$ es la fuerza de arrastre, y $\vec{F}_{\text{Cor}} = -m \vec{a}_{\text{Cor}}$ la fuerza de Coriolis.

5.2. Movimiento relativo en la superficie de la Tierra.

Estudiaremos el caso de una partícula moviéndose en la superficie de la Tierra. S_1 será un sistema inercial con origen en C , el centro de masas de la Tierra. S_0 ($Oxyz$) es un sistema de referencia fijo en la superficie de la Tierra y por tanto es arrastrado por el movimiento de rotación terrestre. El eje Oz está sobre la recta CO y dirigido hacia el exterior; Ox lo tomamos horizontal en dirección Este (tangente al paralelo) y Oy horizontal en dirección Norte (tangente al meridiano).

La velocidad de rotación terrestre $\vec{\Omega}$ puede considerarse constante con un valor $\Omega = \|\vec{\Omega}\| = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ y su dirección en el sistema de referencia S_0 es

$$\frac{\vec{\Omega}}{\Omega} = \cos \lambda \hat{j} + \sin \lambda \hat{k}$$

donde λ es la latitud, $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$.

Teniendo en cuenta que $\|\vec{R}\| \approx 6371 \text{ km} \gg \|\vec{r}\|$, en la aceleración de arrastre el único término importante es la aceleración del origen,

$$\vec{a}_{\text{arr}} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \approx \vec{a}_O$$

y dado que O es un punto del sólido S_1 ,

$$\vec{a}_O = \vec{a}_C + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

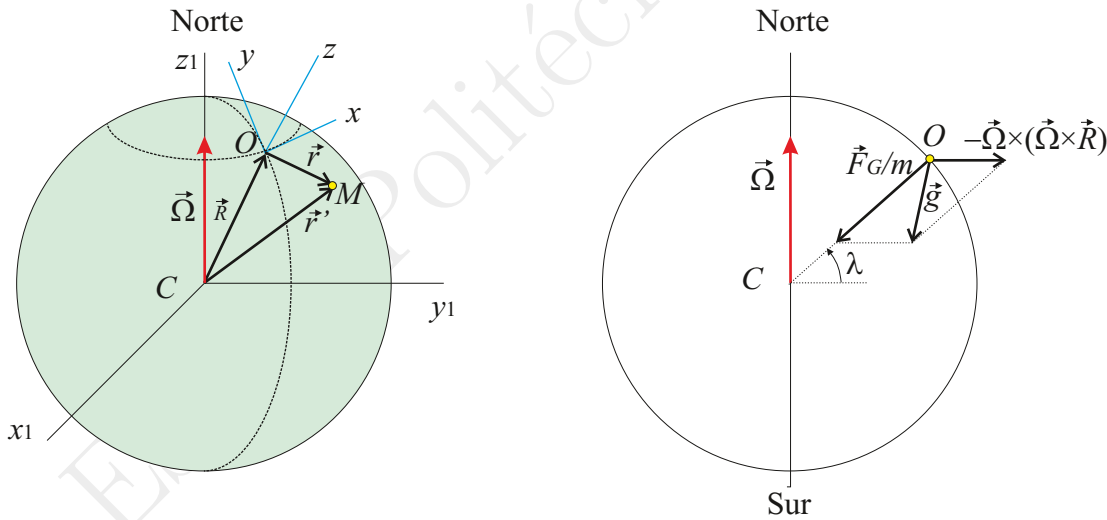
De manera que

$$\vec{a}_{\text{arr}} \approx \vec{a}_O = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

y la fuerza de arrastre será

$$F_{\text{arr}} = -m \vec{a}_{\text{arr}} = -m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

cuyo módulo es constante en cada latitud, $F_{\text{arr}} = m \Omega^2 R \cos \lambda$, y tiene la dirección perpendicular al eje de rotación alejándose de él: es la *fuerza centrífuga*.



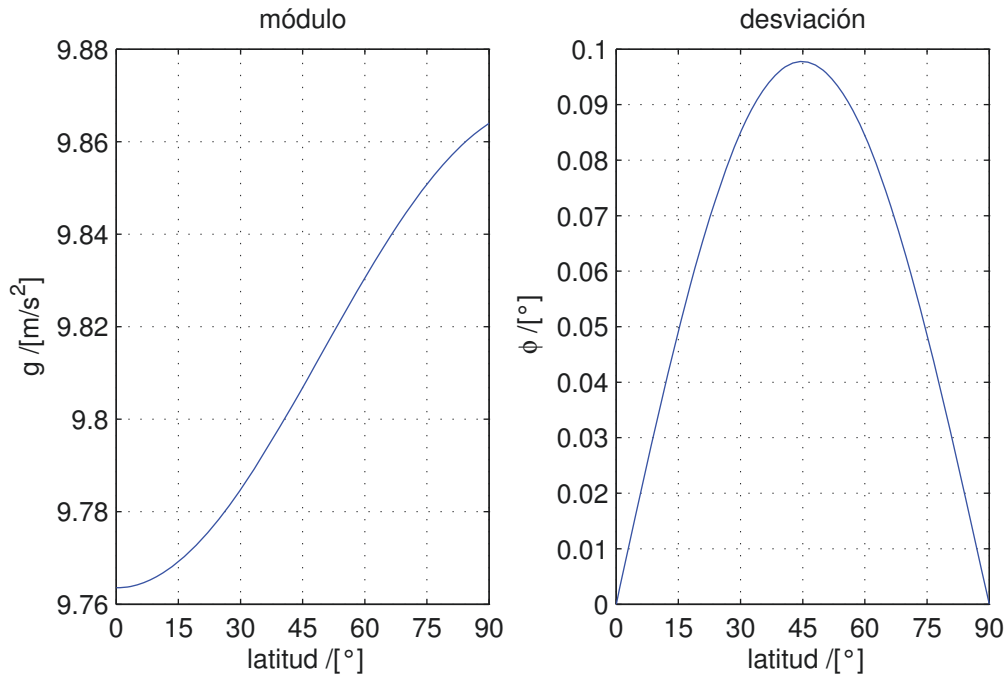
Una partícula en reposo sobre la superficie de la Tierra estaría sometida a la fuerza gravitacional, $m \vec{g}' = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{R}$, (dirigida hacia el centro de la Tierra) y la fuerza de arrastre (alejándose del eje de rotación). La combinación de esas dos fuerza sería lo que sentimos como fuerza peso y el peso por unidad de masa se denomina *gravedad aparente*,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G + \vec{F}_{\text{arr}}}{m} = \vec{g}' - \vec{a}_O = -G \frac{M}{R^2} \hat{R} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

El módulo de la gravedad aparente y su desviación ϕ respecto de la fuerza gravitacional varía con la latitud ya que la fuerza de arrastre es nula en los polos y máxima en el Ecuador. La diferencia entre la gravedad aparente y la puramente gravitacional es muy pequeña:

$$\|\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})\| = \Omega^2 R \cos \lambda < \Omega^2 R = 0,03388 \text{ m/s}^2$$

aproximadamente un 0,33 % del valor de $\|\vec{g}'\|$. La desviación máxima de la dirección se produce para $\lambda \approx 45^\circ$ y corresponde aproximadamente a una décima de grado de arco.



Ecuaciones del movimiento en la superficie terrestre, fuerza de Coriolis

La fuerza de Coriolis sólo aparece cuando la partícula tiene una la velocidad no nula en el sistema de referencia no inercial S_0 , es decir cuando la partícula está en movimiento sobre la superficie de la Tierra,

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -m \vec{a}_{\text{Cor}} = -2m \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

La fuerza de Coriolis no realiza trabajo ya que, $\vec{F}_{\text{Cor}} \perp \vec{v}$, y por tanto no cambia la energía cinética, sólo cambia la trayectoria de la partícula.

Teniendo en cuenta la fuerza de Coriolis y haciendo la aproximación de que la gravedad aparente tiene la dirección Oz , la ecuación del movimiento de un punto sometido únicamente a su peso sobre la superficie de la Tierra es:

$$m \vec{a} = -m g \hat{k} - 2m \Omega (\cos \lambda \hat{j} + \sin \lambda \hat{k}) \times (\dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k})$$

separando las componentes,

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega (\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega \dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega \dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

Nótese que como la fuerza de Coriolis no trabaja la energía permanece constante,

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g z = cte$$

5.3. Caída de un punto pesado sobre la superficie de la Tierra. Efecto geostrófico.

Las ecuaciones diferenciales anteriores pueden integrarse de forma exacta pero se obtienen expresiones con varios términos de las que no es fácil extraer conclusiones. Para extraer estas conclusiones deben desarrollarse las soluciones en series de potencias de Ωt . Alternativamente pueden obtenerse esas expresiones introduciendo correcciones en órdenes sucesivos de Ωt . Lo aplicaremos a los dos casos más sencillos.

Desviación en la caída libre. Primero resolvemos las ecuaciones a orden 0 en Ω ,

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = 0 \\ \ddot{y}_0 = 0 \\ \ddot{z}_0 = -g \end{cases}$$

que partiendo del reposo a una altura h nos proporciona la solución de orden cero,

$$\begin{cases} x_0(t) = 0 \\ y_0(t) = 0 \\ z_0(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Con esta solución calculamos las velocidades para determinar la solución de primer orden,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\Omega g t \cos \lambda \\ \ddot{y}_1 = 0 \\ \ddot{z}_1 = -g \end{cases}$$

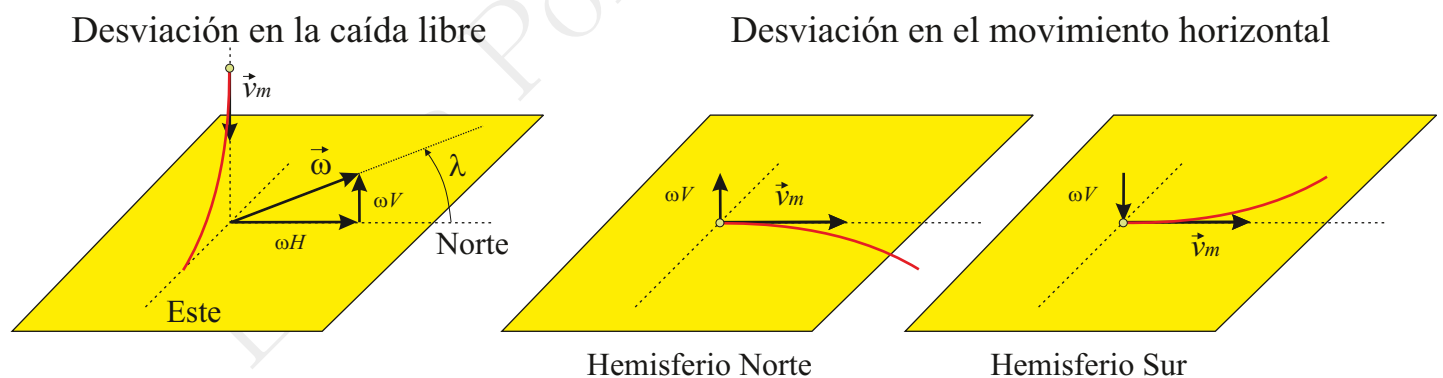
que conduce a la solución

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{3} \Omega g t^3 \cos \lambda \\ y_1(t) = 0 \\ z_1(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

que nos indica que el primer efecto de la rotación terrestre sobre la caída libre es en la dirección positiva del eje x , es decir, hacia el Este. Nótese que la dependencia con la latitud es un coseno por lo que la desviación es la misma en los dos hemisferios. Si se sustituye el tiempo en que tarda en llegar al suelo, $t = \sqrt{2h/g}$, la desviación en ese momento puede escribirse como

$$\Delta x = \frac{1}{3} \Omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8 h^3}{g}}$$

que para una altura de $h = 100$ m resulta $\Delta x = 1,5$ cm.



Desviación en el movimiento horizontal. Si la partícula se mueve en un plano horizontal sin rozamiento la velocidad permanece constante y la fuerza de *Coriolis* actúa en la dirección normal de la trayectoria dando lugar a una circunferencia de radio r ,

$$m \frac{v^2}{r} = \left\| \vec{F}_{\text{Cor}} \right\| = 2 m \Omega_V v = 2 m \Omega v \sin \lambda$$

de donde

$$r = \frac{v}{2 \Omega \sin \lambda}$$

Para determinar el sentido de la desviación consideramos que la partícula parte del origen en la dirección del meridiano hacia el Norte, $\vec{v}(0) = v \hat{j}$ por lo que las ecuaciones a primer orden serían,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\Omega v \sin \lambda \\ \ddot{y}_1 = 0 \end{cases}$$



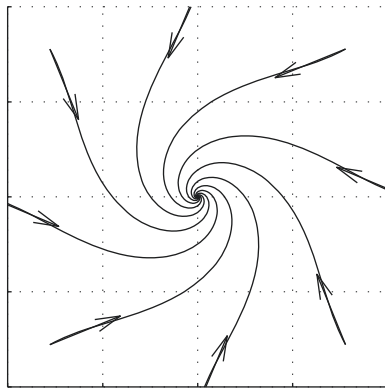
que conducen a la solución,

$$\begin{cases} x_1(t) = \Omega g t^2 \operatorname{sen} \lambda \\ y_1(t) = v t \end{cases}$$

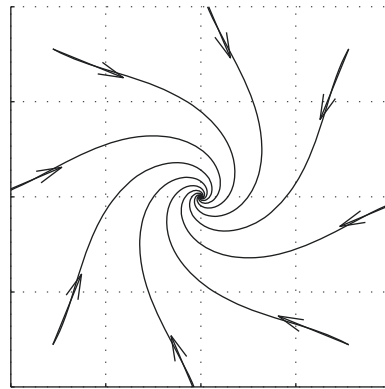
de manera que la desviación es positiva (hacia la derecha) en el hemisferio Norte y negativa (hacia la izquierda) en el hemisferio Sur. El valor de la desviación es pequeña, así, para el caso de un proyectil disparado horizontalmente con $v = 1000$ m/s al cabo de 1 s se desvía 5 cm.

Esa desviación puede hacerse grande si el tiempo transcurrido es de horas o días en lugar de segundo como, por ejemplo, en el caso de las masas de aire de la atmósfera, haciendo que el movimiento de aire hacia el interior de las borrascas se desvíe proporcionado un giro en sentido antihorario en el hemisferio Norte y horario en el hemisferio Sur, es el llamado *efecto geostrófico*.

Efecto Geostrófico: Hemisferio Norte



Efecto Geostrófico: Hemisferio Sur



5.4. Péndulo de Foucault. Giro aparente del plano de oscilación.

El *péndulo de Foucault* fue la primera demostración directa del movimiento de rotación de la Tierra. Fue ideado por el físico francés Léon Foucault en 1851 y originalmente estaba colgado de la cúpula del Panteón de París. Hoy en día existen muchos péndulos en universidades o edificios públicos como el de la Casa de las Ciencias en A Coruña (largo: 14 m, masa: 125 kg, latitud: $43^{\circ}21'44''$). Consiste en un péndulo formado por una bola pesada colgada de un cable muy largo para conseguir mantener el movimiento del péndulo durante largos periodos de tiempo y para que con un pequeño ángulo de oscilación se produzcan desplazamientos apreciables que permitan ver mejor el cambio en el plano de oscilación.

Las ecuaciones del movimiento son las del péndulo esférico (véase el apartado 4.7) al que se añade la fuerza de Coriolis (para incluir el movimiento de la Tierra),

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{Cor}}$$

Considerando pequeñas oscilaciones cerca de la posición de equilibrio $z \approx z_0 = -\ell$ de manera que $R \approx mg$ y despreciando el movimiento en z , las ecuaciones del movimiento quedan,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{\ell} x + 2\Omega \operatorname{sen} \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{\ell} y - 2\Omega \operatorname{sen} \lambda \dot{x} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales puede resolverse en el plano complejo haciendo el cambio $u = x + iy$

$$\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} = -\frac{g}{\ell} u - 2i\Omega \operatorname{sen} \lambda \dot{u}$$

que admite una solución de tipo exponencial imaginaria,

$$u = e^{-i\Omega \operatorname{sen} \lambda t} [C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]$$

donde $\omega = \sqrt{g/\ell + \Omega^2 \text{sen}^2 \lambda} \approx \sqrt{g/\ell}$ es la frecuencia de oscilación del péndulo que nos daría el movimiento de oscilación en el plano vertical (es la función entre corchetes). El otro término es el que nos da el giro de ese plano vertical alrededor del eje vertical, con rotación $\Omega \text{sen} \lambda$.

Así, si la partícula oscila inicialmente en el plano xz , $y = 0$ y se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cos(\Omega \text{sen}(\lambda) t) \\ y(t) &= u(t) \text{sen}(\Omega \text{sen}(\lambda) t) \end{aligned}$$

con

$$u(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + B \text{sen} \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

5.5. Caracterización del movimiento elíptico del péndulo de Foucault. Longitud de semiejes y periodo de giro del plano de oscilación.

La solución general de las ecuaciones anteriores queda,

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cos(\Omega \text{sen}(\lambda) t) - v(t) \text{sen}(\Omega \text{sen}(\lambda) t) \\ y(t) &= v(t) \cos(\Omega \text{sen}(\lambda) t) + u(t) \text{sen}(\Omega \text{sen}(\lambda) t) \end{aligned}$$

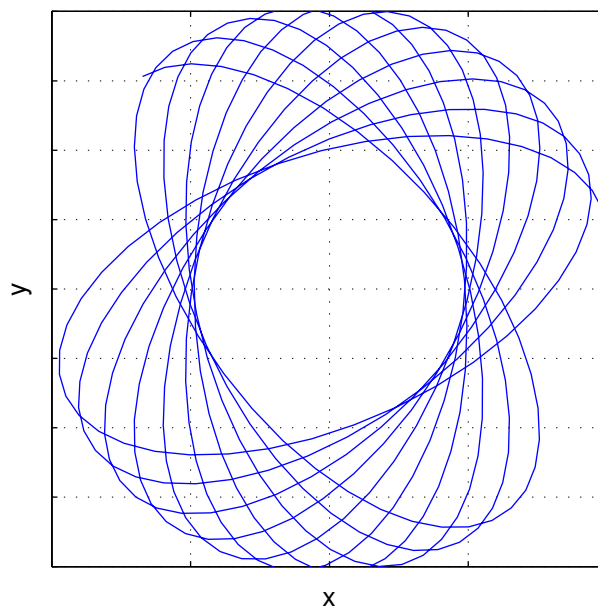
donde

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + B \text{sen} \sqrt{\frac{g}{\ell}} t \\ v(t) &= C \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + D \text{sen} \sqrt{\frac{g}{\ell}} t \end{aligned}$$

son las ecuaciones de la elipse en el plano xy . Esta trayectoria elíptica gira lentamente alrededor del eje Oz con la rotación $\Omega \text{sen} \lambda$ que solo depende de la latitud.

Para el péndulo de la de Casa de las Ciencias en A Coruña el periodo de las oscilaciones en el plano vertical es de 7,5 s mientras que el del giro del plano es de 34 h 51 min.

Movimiento elíptico del péndulo de Foucault





6. Elementos básicos de Mecánica Analítica

- 6.1 Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.
- 6.2 Condiciones de equilibrio y ecuaciones del movimiento en coordenadas generalizadas.
- 6.3 Principio de D'Alembert.
- 6.4 Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.
- 6.5 Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas.

Introducción

Hasta ahora hemos basado el estudio de la dinámica en magnitudes vectoriales, sin embargo es posible seguir un enfoque diferente en el cual las magnitudes fundamentales son escalares y las ecuaciones fundamentales se obtienen mediante un proceso sistemático de derivación de tales funciones; a este planteamiento se le conoce como *mecánica analítica*.

La mecánica vectorial y la mecánica analítica son métodos distintos de resolución de los problemas dinámicos, pero no teorías diferentes de la mecánica por lo que deben conducir a los mismos resultados. Por otra parte la mecánica analítica admite varias formulaciones, en este curso nos centraremos básicamente en la *formulación lagrangiana*.

Una cuestión que se suele plantear es la conveniencia de utilizar la formulación vectorial o la analítica para obtener las ecuaciones del movimiento. No existe una regla fija, con la posible excepción de los sistemas dinámicos con ligaduras, donde la formulación analítica muestra su potencia.

6.1. Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.

Ya hemos visto que las ligaduras restringen los movimientos de un sistema. Matemáticamente se expresan como una relación funcional entre las posiciones y velocidades de los puntos del sistema y el parámetro tiempo. Existen diversos criterios para clasificar las ligaduras, aquí consideraremos:

- Ligaduras holónomas y no holónomas: Son aquellas que conducen a problemas que pueden resolverse formalmente; existe solución general completa. En el caso de ligaduras no holónomas no existe un método general.

Son *holónomas* las ligaduras geométricas, es decir aquellas que pueden expresarse mediante una relación funcional de las posiciones de las partículas (y posiblemente el tiempo) de la forma $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$. Un ejemplo de ligadura geométrica es el sólido rígido, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$. El caso de una partícula que se mueve ligada a una curva o una superficie es otro ejemplo de ligadura geométrica, donde las ecuaciones de la curva o de la superficie actúan como ecuaciones de ligadura. Sin embargo el problema de una partícula que se mueve por el exterior de la superficie de una esfera de radio a , donde la ligadura se expresaría como una desigualdad, $\vec{r}^2 - a^2 \geq 0$, sería un caso de ligadura no holónoma.

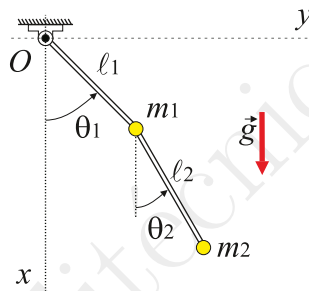
Las ligaduras cinemáticas, que se expresan como una relación funcional de las velocidades y del tiempo, $f(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0$, son en general no holónomas; sin embargo aquellas que por integración conducen a una ligadura geométrica (cinemáticas integrables) son también ligaduras holónomas. Un ejemplo de ligadura cinemática integrable sería el caso de un círculo que rueda sin deslizar sobre una recta, la ligadura sería que la velocidad del punto de contacto A es nula, $v_A = v_C - \omega r = 0$ que puede integrarse dando lugar a una relación entre la coordenada del centro del círculo C y el ángulo girado ϕ , $x_C = r\phi + cte$.

- Esclerónomas y reónomas: Se clasifican así atendiendo a su dependencia temporal. Si en la ecuación de ligadura aparece explícitamente el tiempo la denominaremos *reónoma* y en caso contrario *esclerónoma*.

6.2. Condiciones de equilibrio y ecuaciones del movimiento en coordenadas generalizadas.

Para un sistema con ligaduras los desplazamientos de sus partículas no son independientes y por tanto las coordenadas utilizadas para definir la posición del sistema tampoco lo son. Cuando todas las ligaduras son holónomas (sistemas holónomos) la dependencia que existe entre las posiciones de los diferentes puntos del sistema puede evitarse eligiendo unas nuevas coordenadas que sean independientes entre sí. Definimos entonces:

Coordenadas generalizadas: Conjunto de variables $\{q_1, \dots, q_s\}$ independientes entre sí, que definen unívocamente la posición del sistema, i. e., $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_s, t)$, siendo s el número de grados de libertad (movimientos independientes) del sistema y α un índice que recorre el número de partículas N . Para un sistema dado, la elección de las coordenadas generalizadas no es única. Así, por ejemplo, en el caso del péndulo doble existen dos ligaduras: $x_1^2 + y_1^2 = \ell_1^2$ y $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_2^2$, y cuatro coordenadas cartesianas por lo que podrían elegirse 2 coordenadas independientes de múltiples formas y en diversas combinaciones siendo todas ellas válidas. En este caso lo más cómodo es tomar los dos ángulos indicados en la figura.



Vamos a escribir el principio del trabajo virtual en términos de las coordenadas generalizadas. Los desplazamientos virtuales (instantáneos y compatibles con las ligaduras) se expresarán

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j$$

y por tanto el trabajo virtual será:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j$$

Denominamos fuerza generalizada Q_j , asociada a la coordenada generalizada q_j a:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

Nótese que, en general Q_j no tiene dimensiones de fuerza pero el producto $Q_j \delta q_j$ siempre tiene dimensiones de trabajo o energía ML^2T^{-2} .

En función de las coordenadas y fuerzas generalizadas, el trabajo virtual puede escribirse

$$\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j$$

y dado que los desplazamientos de las coordenadas generalizadas son independientes, el principio del trabajo virtual quedaría:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta q_j \Leftrightarrow Q_j = 0, \forall j$$



En sistemas conservativos, $\forall \alpha$, $\vec{F}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha V$, siendo $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha, \dots)$ la energía potencial del sistema, el trabajo es:

$$dW = \sum_{\alpha} -\vec{\nabla}_\alpha V \cdot d\vec{r}_\alpha = - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial V}{\partial y_\alpha} dy_\alpha + \frac{\partial V}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \right) = -dV$$

y dado que las fuerzas generalizadas se pueden escribir en función del potencial como:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

la condición necesaria y suficiente para que un sistema conservativo esté en equilibrio es:

$$EQUILIBRIO \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha \Leftrightarrow Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \forall j$$

6.3. Principio de D'Alembert.

El principio de D'Alembert es la extensión del principio del trabajo virtual a la dinámica. Para un sistema de N partículas, el trabajo necesario para llevar el sistema de 1 a 2 es

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{r}_\alpha$$

donde \vec{F}_α es la suma de las fuerzas aplicadas y las fuerzas de ligadura aplicadas a la partícula α , $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{apli}} + \vec{R}_\alpha$

Hemos visto que la condición necesaria y suficiente de equilibrio es

$$\delta W = \sum_{\alpha} \left(\vec{F}_\alpha^{\text{apli}} + \vec{R}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha$$

pero en gran número de casos, enlaces perfectos, el segundo sumando es nulo; las fuerzas de ligadura no contribuyen al trabajo virtual y por lo tanto, la ecuación de equilibrio queda

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha^{\text{apli}} \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha$$

Análogamente la segunda ley de Newton para un sistema de partículas $\vec{F}_\alpha = \dot{\vec{p}}_\alpha$ puede transformarse, tomando el trabajo, de manera que no intervengan las fuerzas de ligadura, en el Principio de D'Alembert:

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha \quad (6.5)$$

Según este principio, un sistema está en equilibrio dinámico bajo la acción de las fuerzas aplicadas más las fuerzas de inercia, $-\dot{\vec{p}}_\alpha$. Es un principio fundamental que proporciona una formulación completa para todos los problemas mecánicos. La ventaja de utilizar el principio de D'Alembert sobre la formulación de Newton es que tanto las fuerzas de ligadura como las fuerzas internas entre las partículas del sistema se eliminan lo cual supone una gran ventaja en sistemas con varios grados de libertad.

6.4. Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.

La ecuación 6.5 es difícil de resolver porque en general los desplazamientos virtuales no son independientes. Si el sistema es holónomo pueden elegirse un conjunto de coordenadas generalizadas y reescribir cada uno de los términos que aparecen en términos de las coordenadas y las fuerzas generalizadas:

Así, el primer término, ya hemos visto que quedaría

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j \quad (6.6)$$

Análogamente, el segundo término

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{p}}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha &= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (m_\alpha \vec{v}_\alpha) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (m_\alpha \vec{v}_\alpha) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) - m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (6.7)$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_\alpha(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}$$

por tanto,

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

y el primer término de la ecuación 6.7 queda

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

siendo

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2$$

la energía cinética del sistema.

Teniendo en cuenta que las derivadas parciales cruzadas son iguales, en el otro sumando de la expresión 6.7 puede hacerse el cambio,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_k \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_j}$$

Entonces, la ecuación 6.7 queda

$$\sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{p}}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{\alpha} m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

Finalmente la ecuación 6.5 puede escribirse

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j \quad (6.8)$$

y dado que los δq_j son independientes entre sí, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \forall q_j \quad (6.9)$$

que es la ecuación del movimiento para la coordenada q_j que recibe el nombre de *ecuación de Euler-Lagrange*.



6.5. Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas

La fuerza generalizada Q_j , asociada a la coordenada generalizada q_j se obtiene como:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

de manera que el trabajo en un desplazamiento infinitesimal es

$$dW = \sum_{j=1}^S Q_j dq_j$$

y la potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_{j=1}^S Q_j \dot{q}_j$$

El trabajo realizado sobre un sistema se emplea en cambiar su energía cinética, para un sistema holónomo se tiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_j \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_k A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_j B_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} C \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial q_k} \\ B_j &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial t} \\ C &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Si el sistema es además esclerónomo las funciones B_j y C son cero y la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades generalizadas.

Si las fuerzas aplicadas son conservativas, el trabajo es igual a menos la variación de la energía potencial, donde

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{\alpha}, \dots) = V(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, t)$$

y de nuevo la dependencia con el tiempo desaparece si el sistema es también esclerónomo.



7. Formulación de Lagrange

- 7.1 Ecuaciones de Lagrange.
- 7.2 Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.
- 7.3 Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.
- 7.4 Constantes del movimiento. Teoremas de conservación
- 7.5 Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.
- 7.6 Función hamiltoniana.
- 7.7 Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.

7.1. Ecuaciones de Lagrange.

En el tema anterior hemos obtenido las ecuaciones del movimiento, *ecuaciones de Euler-Lagrange*, para cada una de las coordenadas generalizadas, q_j .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \forall j \quad (7.10)$$

Sistemas conservativos

A continuación veremos qué forma tienen estas ecuaciones en sistemas conservativos, es decir sistemas en los cuales $\forall \alpha, \vec{F}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha V$, siendo $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha, \dots)$ la energía potencial del sistema, una función escalar que depende únicamente de las posiciones de las partículas del sistema.

En un sistema conservativo las fuerzas generalizadas pueden escribirse $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$. Si además el sistema es holónomo, las posiciones dependen de las coordenadas generalizadas y tal vez del tiempo, $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_s; t)$, pero no dependen de las velocidades \dot{q}_j ; por tanto $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ y podremos escribir

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Haciendo $\mathcal{L} = T - V$, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots s \quad (7.11)$$

Estas ecuaciones se denominan *Ecuaciones de Lagrange* y \mathcal{L} es la función *lagrangiana* del sistema.

Propiedades de la lagrangiana

- \mathcal{L} es una función escalar que contiene toda la información sobre la evolución temporal del sistema
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$
- Se denomina $p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, como momento conjugado de la coordenada q_j . En términos de los momentos conjugados las ecuaciones de Lagrange, $\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j$, guardan una gran similitud con la ecuación de Newton $\vec{p}_\alpha = \vec{F}_\alpha$.
- Lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento:
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + cte$, lagrangianas que se diferencian en una constante. (Es lo mismo que le ocurre al potencial)
 - $\mathcal{L}' = cte \mathcal{L}$, lagrangianas entre las que hay un factor constante.
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + f(t)$, lagrangianas que se diferencian en una función que solo depende del tiempo.
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} [f(q, t)]$, lagrangianas que se diferencian en la derivada temporal de una función que no depende de las velocidades. (Esta propiedad se conoce por invariancia Gauge).

Sistemas no conservativos

Si el sistema es holónimo pero no conservativo separaremos las fuerzas que actúan sobre cada partícula en la parte conservativa y la no conservativa, $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^C + \vec{F}_\alpha^{NC}$, lo que conduce a dos términos en la fuerza generalizada,

$$Q_j = Q_j^C + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

obteniéndose unas ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC} \quad j = 1 \dots s$$

donde las fuerzas conservativas se incluyen dentro de la lagrangiana y las no conservativas se introducen mediante las fuerzas generalizadas,

$$Q_j^{NC} = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

Sistemas no holónomos. Método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange

Si el sistema es no holónimo podemos elegir un conjunto de coordenadas $\{q_1, \dots, q_s\}$ que no serán todas independientes ya que existirán ligaduras no integrables entre ellas. En estos casos todavía puede aplicarse el principio de D'Alembert,

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j \quad (7.12)$$

pero los desplazamientos no serán independientes.

Existe un caso de ligaduras no holónomas para las que existe solución general, es el caso de las ligaduras lineales en las velocidades del tipo,

$$\sum_{j=1}^s a_{\ell j} \dot{q}_j + a_{\ell} = 0, \ell = 1, \dots, m \quad (7.13)$$

siendo $a_{ij} = a_{ij}(q_1, \dots, q_s, t)$ funciones de las coordenadas y del tiempo. En un desplazamiento virtual (instantáneo, $\delta t = 0$) estas ligaduras llevan a

$$\sum_{j=1}^s a_{\ell j} \delta q_j = 0, \ell = 1, \dots, m$$

de manera que multiplicando la ecuación anterior para cada ligadura por un coeficiente λ_ℓ y sumándolas todas en la ecuación 7.12 se tiene,

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j} \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j$$

donde por comodidad hemos supuesto que el sistema es conservativo. Como hay s coordenadas y m ligaduras podemos considerar que las coordenadas $j = 1, \dots, s - m$ son independientes y para las m restantes elegir los valores de los coeficientes λ_ℓ de manera que sean cero los términos que multiplican a los desplazamientos de esas coordenadas. Entonces tendríamos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}, \quad j = 1, \dots, s$$

que junto con las ecuaciones de las ligaduras (7.13) forma un sistema de $s + m$ cuyas incógnitas son las s soluciones de las coordenadas $q_j(t)$ y los m valores de los coeficientes λ_ℓ . Además, el término $\sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}$ puede interpretarse como la fuerza generalizada asociada con la ligadura,

$$Q_j^{\text{lig}} = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}$$

Este método puede emplearse para determinar las reacciones de las ligaduras hólomas introduciendo las que se deseen calcular como ligaduras.



7.2. Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.

Las ecuaciones de Lagrange son válidas para sistemas holónomos que no son conservativos pero donde existe un *potencial generalizado* $U = U(q, \dot{q}, t)$ tal que

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

de manera que haciendo $\mathcal{L} = T - U$ se cumplen las ecuaciones de Lagrange.

Este potencial generalizado permite tratar dentro del formalismo lagrangiano a sistemas que no son conservativos en la formulación de Newton. Ejemplos de fuerzas no conservativas que pueden obtenerse de un potencial generalizado son la fuerza electromagnética $\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c]$ o la fuerza de Coriolis $\vec{F} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Función de disipación. La *función de disipación* es una función escalar similar a un potencial generalizado que permite incluir en el formalismo lagrangiano cierto tipo de fuerzas de rozamiento. Las fuerzas de rozamiento que se pueden describir por la función de disipación son las de tipo viscoso a bajas velocidades que son proporcionales a la diferencia de las velocidades de las partículas

$$\vec{F}_\alpha^{\text{NC}} = \sum_\beta \vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}}$$

donde $\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ es la fuerza de rozamiento sobre la partícula α debida a la partícula β ,

$$\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}} = -cte (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta)$$

que puede expresarse como

$$\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} cte (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta)^2$$

y conduce a una forma cuadrática de las velocidades que se conoce por *función de disipación de Rayleigh*,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta} \vec{v}_\alpha \vec{v}_\beta$$

de la que se obtienen por derivación las fuerzas,

$$\vec{F}_\alpha^{\text{NC}} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{v}_\alpha}$$

Si las ligaduras no dependen del tiempo, las velocidades de las partículas se obtienen a partir de las velocidades generalizadas y puede escribirse,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j f_{ij}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

donde

$$f_{ij}(q_1, \dots, q_s) = \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\beta}{\partial q_j}$$

Las fuerzas generalizadas se obtienen como,

$$Q_j^{\text{NC}} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

y las ecuaciones del movimiento quedarían,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1 \dots s$$

7.3. Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.

Las aplicaciones y ejemplos se harán dentro de las clases de problemas. Aquí solo resumiremos los pasos a seguir para obtener las ecuaciones del movimiento que es válido para todos los sistemas holónomos:

- 1º) Elegir las coordenadas generalizadas $\{q_1, \dots, q_s\}$, tantas como grados de libertad tiene el sistema.
- 2º) Obtener la energía cinética y las fuerzas generalizadas (o el potencial) en función de las coordenadas y sus derivadas.
- 3º) Escribir para coordenada la ecuación de Lagrange.

7.4. Constantes del movimiento. Teoremas de conservación

Constantes del movimiento

Las ecuaciones de Lagrange se pueden desarrollar como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_k \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \right] + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1 \dots s$$

que son s ecuaciones diferenciales de 2º orden que tendrán $2s$ constantes de integración. Cada una de estas constantes de integración puede verse como una función de las coordenadas y de las velocidades cuyo valor permanece constante,

$$C_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t) = cte, \quad i = 1 \dots 2s$$

son las llamadas *integrales primeras*. El valor de estas constantes vendrá determinado por las condiciones iniciales. Algunas de estas constantes tienen un significado físico muy claro y pueden obtenerse sin necesidad del resolver el movimiento atendiendo a las simetrías del problema y permiten conocer las características principales del movimiento. Dentro de estas hay unas que tienen un significado más profundo por estar relacionadas con propiedades fundamentales del espacio-tiempo (homogeneidad e isotropía) dando lugar a los teoremas de conservación.

Teoremas de conservación. Coordenadas cíclicas

Veremos a continuación los teoremas de conservación asociados a las propiedades de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. Por comodidad consideraremos un sistema holónomo y en el que existe potencial.

Homogeneidad del tiempo, conservación de la energía. En un sistema aislado, el estado del sistema no puede depender de la elección del origen de tiempos, es decir, el tiempo es homogéneo. Por tanto, la función lagrangiana no dependerá explícitamente del tiempo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$, entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]$$

de manera que

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right] = 0$$

y se obtiene una magnitud constante

$$h = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}$$



llamada *función energía*. Entonces el teorema de conservación de la energía queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte$$

Más adelante veremos que esta magnitud da lugar a la función hamiltoniana. Además, en los sistemas llamados *naturales* (holónomos, esclerónomos y conservativos) la función energía coincide con la energía mecánica del sistema $h = T + V = E$. Otra forma de saber cuando h coincide con $T + V$ es comprobando que la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades y el potencial depende únicamente de las coordenadas generalizadas.

Coordenadas cíclicas: son las q_j para las que la lagrangiana depende de su velocidad pero no de la propia coordenada, de manera que la ecuación de Lagrange conduce a la conservación momento conjugado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = cte$$

La conservación del momento conjugado con una coordenada cíclica puede utilizarse para ilustrar los teoremas de conservación de la cantidad movimiento y del momento cinético.

Homogeneidad del espacio, conservación de la cantidad de movimiento. El teorema de conservación de la cantidad de movimiento en la formulación lagrangiana se expresa: Si el sistema no cambia (y por tanto \mathcal{L} no cambia) al trasladarlo como un todo a lo largo de una dirección \hat{u} , la componente de la cantidad de movimiento total sobre esa dirección se conserva. Para demostrarlo vamos a considerar que existe una coordenada generalizada q_j asociada con el desplazamiento del sistema en la dirección \hat{u} , entonces

$$\vec{r}_\alpha(q_j + dq_j) = \vec{r}_\alpha(q_j) + dq_j \hat{u}$$

de manera que

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \hat{u}$$

Si el sistema no cambia al hacer esa traslación, la coordenada q_j sería cíclica por lo que se conserva el momento conjugado

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = cte = \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_\alpha} \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \vec{P}_{\text{tot}} \cdot \hat{u}$$

Nótese que la fuerza generalizada asociada con una coordenada de este tipo es la componente de la fuerza en la dirección \hat{u} ,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_\alpha \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \hat{u}$$

Isotropía del espacio, conservación del momento cinético. El teorema de conservación del momento cinético en la formulación lagrangiana dice: si el sistema no cambia (y por tanto \mathcal{L} no cambia) al efectuar una rotación del sistema como un todo alrededor de un eje e , el momento cinético total respecto de ese eje se conserva. Ahora consideraremos que existe una coordenada generalizada q_j asociada con la rotación del sistema alrededor de un eje e , entonces tomando como origen un punto del eje,

$$\vec{r}_\alpha(q_j + dq_j) = \vec{r}_\alpha(q_j) + dq_j \hat{e} \times \vec{r}_\alpha$$

de manera que

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \hat{e} \times \vec{r}_\alpha$$

Procediendo de forma similar al caso anterior,

$$p_j = cte = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_{\alpha}) = \hat{e} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) = \hat{e} \cdot \vec{M}_{\text{tot}}$$

Análogamente la fuerza generalizada asociada con una coordenada de este tipo es el momento de la fuerza respecto del eje e ,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_{\alpha}) = \hat{e} \cdot \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} = \hat{e} \cdot \vec{N} = N_e$$

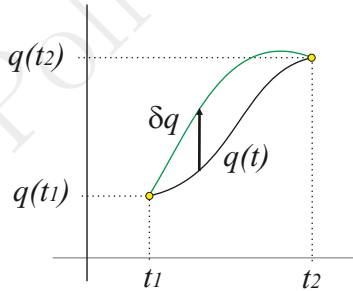
7.5. Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.

Como las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtuvieron a partir de las ecuaciones de Newton pueden parecer un caso particular de estas, todo lo contrario, en realidad la formulación lagrangiana permite una mayor generalidad y es posible deducir todas las leyes de la mecánica a partir de un único principio, que sustituiría a las leyes de Newton, y que hace posible su aplicación incluso a sistemas no mecánicos.

Principio de Hamilton: Todo sistema mecánico está caracterizado por una función lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. El movimiento del sistema es tal que entre dos instantes de tiempo $t = t_1$ y $t = t_2$ sigue la trayectoria que hace extremal (máxima o mínima) la integral,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (7.14)$$

Es decir, de todas las trayectorias posibles entre dos estados del sistema, $q(t_1)$ y $q(t_2)$, la que se sigue es la que hace extremo la integral de la magnitud S que recibe el nombre de *acción*³.



Las ecuaciones de Lagrange pueden obtenerse del principio de Hamilton utilizando el *cálculo variacional*. Se trata de elegir el camino que hace extremo la integral y para ello la variación de un camino a otro debe ser cero. Considerando por simplicidad que hay una única coordenada q , si cambiamos la función $q(t)$ por $q(t) + \delta q(t)$ el cambio en la acción será,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

si δq es infinitesimal en todo el intervalo $t \in [t_1, t_2]$,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt$$

como $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$, integrando por partes el segundo término,

$$\delta S = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt$$

³El extremo es realmente un mínimo ya que el máximo es infinito. Por ese motivo el principio de Hamilton también se conoce por principio de mínima acción



y como la posición inicial y final son fijas, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, el primer término es cero. El camino que hace extremal la acción cumple que $\delta S = 0$, $\forall \delta q$ por lo que el integrando debe ser cero,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

que es la ecuación de Lagrange. Este cálculo puede generalizarse al caso de que existan varias coordenadas.

La integral de la acción muestra claramente el origen de la invariancia Gauge que vimos al escribir las lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} [f(q, t)]$, conducen al mismo extremo de la integral de la acción.

Aunque hemos supuesto que se trata de un sistema holónomo y conservativo, es posible extender el principio de Hamilton a sistemas no conservativos (utilizando el trabajo no conservativo en lugar del potencial) y no holónomos (método de los multiplicadores u otros).

Este tipo de principios integrales (en lugar de las ecuaciones diferenciales de las leyes de Newton) se aplican en distintas partes de la física y junto con el cálculo de variaciones tienen interés para resolver distintos problemas dentro de la ingeniería ya que son una generalización del principio del trabajo virtual.

7.6. Función hamiltoniana.

En la mecánica analítica existe una formulación alternativa a la formulación lagrangiana en la que en lugar de utilizar las coordenadas generalizadas y sus velocidades se utilizan las coordenadas y los momentos conjugados. Esto permite expresar las ecuaciones del movimiento de forma más sencilla y utilizar cambios de variables mucho más generales en los que se mezclan coordenadas y momentos conjugados. Estos cambios se utilizan para obtener constantes de movimiento con las que facilitar la integración del movimiento. También facilitan el estudio de la estabilidad y permiten profundizar y extender la mecánica clásica a otros sistemas más complejos.

Para sustituir en \mathcal{L} las velocidades \dot{q}_j por los momentos conjugados $p_j = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_j$ de manera que no se pierda información debe aplicarse la *transformada de Legendre*⁴,

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad \rightarrow \quad \mathcal{H}(q_j, p_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{H}(q_j, p_j, t)$ se conoce por función *hamiltoniana* del sistema, y, al igual que la lagrangiana, contiene toda la información del sistema.

7.7. Ecuaciones de Hamilton.

Derivando $\mathcal{H}(q_j, p_j, t)$ se obtienen las ecuaciones del movimiento,

$$d\mathcal{H} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

por otro lado

$$d\mathcal{H} = d \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \right) = \sum_j (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - \left\{ \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\}$$

sustituyendo la definición de momento conjugados y las ecuaciones de Lagrange,

$$d\mathcal{H} = \sum_j [-\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

⁴Es la misma transformación que se utiliza en la termodinámica para cambiar de un potencial termodinámico a otro, por ejemplo, de la energía interna U a la entalpía, $H = U + pV$ donde $p = -\partial U / \partial V$.

y entonces,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases}, \quad j = 1 \dots s \quad (7.15)$$

las dos primeras son las ecuaciones del movimiento del momento conjugado p_j y de la coordenada q_j y se denominan *ecuaciones de Hamilton* o *ecuaciones canónicas*.

Propiedades del hamiltoniano

- La derivada total de \mathcal{H} respecto del tiempo coincide con la derivada parcial,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_j [-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

de modo que si \mathcal{H} no depende explícitamente del tiempo, entonces su derivada temporal es cero y se el teorema de conservación de la energía, $\mathcal{H} = cte$.

- La diferencia entre la función energía h y el hamiltoniano \mathcal{H} es que esta última tiene que expresarse en función de las coordenadas y de los momentos conjugados y no pueden aparecer las velocidades.
- Aplicando de nuevo la transformación de Legendre se recupera la función lagrangiana,

$$\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \longrightarrow \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j - \mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j \dot{p}_j - \mathcal{H} = \mathcal{L}$$

7.8. Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.

Como ya hemos visto, las coordenadas cíclicas conducen a una ecuación del movimiento que se expresa mediante la constancia de su momento conjugado. En la función lagrangiana no aparecen las coordenadas cíclicas pero sí sus derivadas, mientras que en la formulación hamiltoniana en lugar de las velocidades aparecerían los momentos conjugados siendo constantes los que corresponden a las coordenadas cíclicas. Así, en la formulación hamiltoniana las velocidades de las coordenadas cíclicas son sustituidas por constantes y es como si el problema tuviese menos grados de libertad. Existe también la posibilidad de aplicar la transformación solamente a las coordenadas cíclicas y dejan sin transformar las no cíclicas. La función que se obtiene de esa manera se denomina *función de Routh* y se comporta como una lagrangiana para las coordenadas no cíclicas y como una hamiltoniana para las cíclicas,

Si consideramos que las coordenadas cíclicas son q_1, \dots, q_n y las no cíclicas q_{n+1}, \dots, q_s , entonces,

$$\mathcal{R}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

y se cumple

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas Cíclicas } (j = 1, \dots, n) : & \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = 0 & \Rightarrow & p_j = cte \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \end{cases} \\ \text{Coordenadas No Cíclicas } (j = n + 1, \dots, s) : & \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \end{cases} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \end{aligned}$$



además de

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Como los momentos conjugados de las coordenadas cíclicas son constantes, un método para resolver el movimiento de un sistema consiste en combinar las coordenadas para generar coordenadas cíclicas.

Escuela Politécnica Superior



8. Dinámica del sólido rígido con un eje fijo

- 8.1 Ecuaciones del movimiento de un sólido con un eje fijo.
- 8.2 Reacciones en el eje de giro. Equilibrado estático y dinámico.
- 8.3 Particularización al movimiento de un sólido rígido en movimiento plano

Introducción

En este capítulo estudiaremos la dinámica de los sistemas prestando gran atención al sólido rígido y al movimiento de rotación. Estudiaremos el movimiento del sólido rígido libre y también con las ligaduras más importantes: eje fijo y punto fijo. En estos temas se utilizarán exhaustivamente las ecuaciones de la cinemática de sistemas indeformables por lo que es imprescindible su conocimiento y estudio previo.

Los últimos temas del capítulo se dedican a la dinámica de fuerzas impulsivas o percusiones y a presentar los elementos principales del estudio de las oscilaciones alrededor del equilibrio que son el fundamento del estudio de las vibraciones.

8.1. Ecuaciones del movimiento de un sólido con un eje fijo.

Un sólido rígido con un eje fijo solamente tiene un grado de libertad, el giro alrededor del eje. La coordenada generalizada será el ángulo tomado en el plano normal al eje de giro $q = \varphi$. Desde el punto de vista cinemático es un caso particular de movimiento plano en el que el E.I.R es fijo y coincide con el eje de rotación,

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}$$

Tomando como origen un punto O del eje de giro,

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

y la energía cinética sería

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} I_e \omega^2 = \frac{1}{2} I_e \dot{\varphi}^2$$

donde

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\hat{e} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

es el momento de inercia para el eje de rotación. La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada φ ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = I_e \ddot{\varphi} = Q_{\varphi}$$

y recordando que la fuerza generalizada asociada con el giro alrededor del eje es el par o momento de las fuerzas respecto del eje, $Q_{\varphi} = M_e$ y entonces,

$$I_e \frac{d\omega}{dt} = M_e$$

donde el par de las fuerzas aplicadas al eje es $M_e = \hat{e} \cdot \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}$ y en el caso de que las fuerzas sean conservativas $M_e = Q_{\varphi} = -\partial V / \partial \varphi$.

La ecuación del movimiento también puede obtenerse utilizando el principio de liberación (sustituyendo ligaduras por reacciones) y aplicando luego las ecuaciones del movimiento del sólido rígido libre (movimiento de traslación de centro de masas y rotación alrededor de un punto O del eje fijo),

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \end{aligned} \right\}$$

donde dentro de las fuerzas y momentos externos están incluidas las reacciones en el eje. Al igual que hicimos en el caso del movimiento del punto ligado la verdadera ecuación del movimiento es la “componente” según la dirección en la que se realiza el movimiento. En el caso del sólido rígido la ecuación de la cantidad de movimiento está asociada con la traslación del centro de masas y la del momento cinético con la rotación alrededor del centro de masas o de un punto fijo. En este caso el único grado de libertad esta asociado con la rotación según el eje fijo por lo que la ecuación que determina el movimiento es la componente según ese eje de la derivada del momento cinético

$$\hat{e} \cdot \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \hat{e} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}} = M_e^{\text{ext}}$$

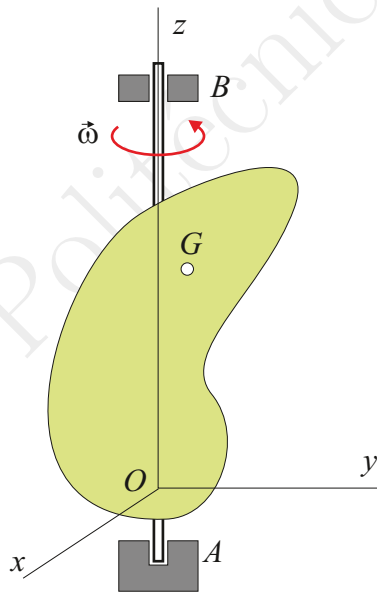
y como el vector unitario según el eje no cambia,

$$\hat{e} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{I}_O \vec{\omega} = \frac{d}{dt} \hat{e} \cdot \mathbf{I}_O \hat{e} \omega = \frac{d}{dt} I_e \omega = I_e \frac{d\omega}{dt}$$

obtenemos la misma ecuación del movimiento, $M_e^{\text{ext}} = I_e \dot{\omega}$.

8.2. Reacciones en el eje de giro. Equilibrado estático y dinámico.

Determinaremos las reacciones en los apoyos para el caso de un sólido rígido con un eje fijo alrededor del cual gira con rotación uniforme y en ausencia de fuerzas. Tomamos un sistema cartesiano $Oxyz$ solidario con el sólido y en el que Oz coincide con el eje de giro. En ese caso, $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ con $\omega = cte$.



Para el movimiento centro de masas, G , la velocidad $\vec{v}_G = \vec{\omega} \times \vec{r}_G$ y la aceleración se obtiene de la fórmula de Bourne

$$\vec{a}_G = \left(\frac{d\vec{v}_G}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{v}_G = 0 + \vec{\omega} \times \vec{v}_G = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)$$

y entonces

$$m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) = \vec{R}_A + \vec{R}_B$$

donde \vec{R}_A y \vec{R}_B son las reacciones en los apoyos.

Para el movimiento de rotación,

$$\vec{L}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{OA} \times \vec{R}_A + \vec{OB} \times \vec{R}_B$$

utilizando de nuevo la fórmula de Bourne

$$\vec{L}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \mathbf{I}_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = 0 + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$



En este caso

$$\vec{L}_O = \omega \hat{k} \times (I_{xz}^O \hat{i} + I_{yz}^O \hat{j} + I_{zz}^O \hat{k}) \quad \omega = -I_{yz}^O \omega^2 \hat{i} + I_{xz}^O \omega^2 \hat{j}$$

que no tiene componente según el eje de giro (ya que ω es constante). Por tanto se tiene un sistema con 5 ecuaciones y 6 incógnitas (las componentes de las reacciones),

$$-m\omega^2 x_G = A_x + B_x \quad (8.16)$$

$$-m\omega^2 y_G = A_y + B_y \quad (8.17)$$

$$0 = A_z + B_z \quad (8.18)$$

$$-I_{yz}^O \omega^2 = -\overline{OA} A_y + \overline{OB} B_y \quad (8.19)$$

$$-I_{xz}^O \omega^2 = +\overline{OA} A_x - \overline{OB} B_x \quad (8.20)$$

que permiten determinar las componentes de las reacciones perpendiculares al eje y solamente la suma de las reacciones a lo largo del eje.

Equilibrado Estático y Dinámico. Se dice que un sistema con eje fijo está equilibrado cuando no se producen reacciones en los apoyos (diferentes de las del peso). Las reacciones responden a dos efectos diferentes, por una lado a la aceleración del centro de masas y por otro a la derivada del momento cinético. Para conseguir anular el primer efecto es condición necesaria y suficiente que el centro de masas pertenezca al eje de rotación,

$$\text{Equilibrado Estático} \Leftrightarrow x_G = y_G = 0 \Leftrightarrow G \in \text{Eje de rotación}$$

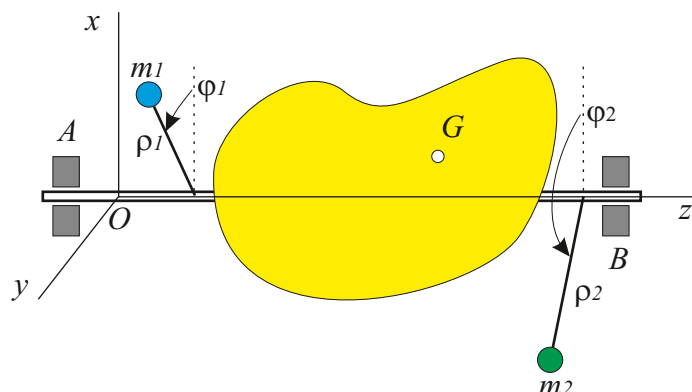
El segundo efecto se anula si el eje de giro es dirección principal de inercia de manera que $\vec{L}_0 \parallel \vec{\omega}$ y se anula la derivada,

$$\text{Equilibrado Dinámico} \Leftrightarrow I_{yz}^O = I_{xz}^O = 0 \Leftrightarrow \text{Eje de rotación es dirección principal}$$

Los nombres de estático y dinámico se deben a que en el primer caso se puede utilizar la fuerza peso para detectar si el sistema está equilibrado colocando el eje de giro horizontal y comprobando que el peso no provoca ningún movimiento con independencia de la postura en la que se encuentre el cuerpo. Para determinar si está equilibrado dinámicamente hay que recurrir a provocar el giro y detectar los esfuerzos sobre los apoyos.

El equilibrado de ejes es importante desde el punto de vista práctico porque permite minimizar el desgaste y la producción de ruido y vibraciones en estos sistemas. Como se trata de hacer cero 4 ecuaciones, añadiendo una única masa (3 grados de libertad) en general no podrá conseguirse. Con dos masas (6 grados de libertad) existen en principio infinitas posibilidades que se pueden reducir imponiendo ciertas condiciones a las posiciones en las que se colocan las masas.

Así, por ejemplo, se pueden fijar los valores de la coordenada z y la distancia al eje ρ de las masas, dejando libres los valores de las masas y los valores del ángulo acimutal φ .



Entonces,

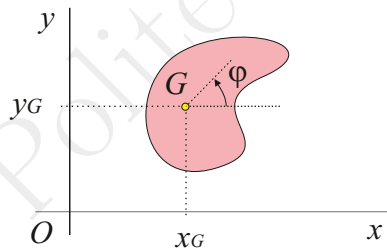
$$\left. \begin{aligned} m x_G + m_1 \rho_1 \cos \varphi_1 + m_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ m y_G + m_1 \rho_1 \sin \varphi_1 + m_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0 \\ I_{xz}^O - m_1 z_1 \rho_1 \cos \varphi_1 - m_2 z_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ I_{yz}^O - m_1 z_1 \rho_1 \sin \varphi_1 - m_2 z_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$\left\{ \begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \frac{z_2 m y_G + I_{yz}^O}{z_2 m x_G + I_{xz}^O} \\ \tan \varphi_2 &= \frac{z_1 m y_G + I_{yz}^O}{z_1 m x_G + I_{xz}^O} \\ m_1 &= \frac{z_2 m x_G + I_{xz}^O}{(z_1 - z_2) \rho_1 \cos \varphi_1} \\ m_2 &= \frac{z_1 m x_G + I_{xz}^O}{(z_2 - z_1) \rho_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \right.$$

8.3. Particularización al movimiento de un sólido rígido en movimiento plano.

Un sólido rígido en movimiento plano mantiene la dirección de $\vec{\omega}$ aunque el eje instantáneo de rotación puede cambiar de posición con el tiempo. Sabemos que un movimiento de este tipo puede reducirse a la proyección sobre un plano normal a la rotación y tendríamos por tanto 3 grados de libertad. Tomando z paralelo a $\vec{\omega}$, podemos tomar como coordenadas generalizadas la posición del centro de masas (x_G, y_G) y un ángulo que determine el giro en ese plano φ .



Las ecuaciones del movimiento de traslación serían,

$$\begin{cases} m \ddot{x}_G = F_x^{\text{ext}} \\ m \ddot{y}_G = F_y^{\text{ext}} \end{cases}$$

y la del movimiento de rotación alrededor del eje z ,

$$I_{zz}^G \dot{\omega} = M_G^{\text{ext}}$$

Como en cada instante existe un punto de velocidad nula, el CIR, respecto de este punto también se cumple $\vec{L}_O = \mathbf{I}_O \vec{\omega}$ por lo que podría utilizarse como ecuación del movimiento de rotación,

$$I_{zz}^{\text{CIR}} \dot{\omega} = M_{\text{CIR}}^{\text{ext}}$$

Estas mismas ecuaciones podrían obtenerse con las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_G \vec{\omega} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} I_{zz}^G \omega^2$$

o bien, considerando el movimiento alrededor del CIR,

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_{\text{CIR}} \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_{zz}^{\text{CIR}} \omega^2$$



9. Dinámica del sólido rígido con un punto fijo. I

- 9.1 Ecuaciones del movimiento de un sólido indeformable con un punto fijo. Cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética.
- 9.2 Aplicación del teorema del momento cinético. Ecuaciones de Euler.
- 9.3 Reacción en el punto fijo.
- 9.4 Integración de las ecuaciones de Euler en ausencia de pares. Casos de elipsoide de revolución y elipsoide asimétrico.

Introducción

El movimiento del sólido rígido con un punto fijo es un caso particular en el que existe un punto O cuya velocidad permanece nula. En este caso el sólido tiene todos los grados de libertad asociados con la rotación y ninguno asociado con la traslación por ello representa el movimiento general de rotación de un sistema indeformable. El movimiento general del sólido podría descomponerse en un movimiento de traslación del centro de masas y una rotación alrededor de ese punto G que sería formalmente idéntica al movimiento alrededor del punto fijo O (todas las ecuaciones siguen siendo válidas cambiando O por G).

El movimiento con un punto fijo también se conoce por *movimiento esférico* ya que al permanecer constante la distancia de cualquier punto P al punto fijo O hace que la trayectoria de este esta contenida en una esfera de radio \overline{OP} con centro en O . Al igual que en el movimiento plano, se puede reducir el movimiento del sólido al de los puntos de esa superficie esférica.

9.1. Ecuaciones del movimiento de un sólido indeformable con un punto fijo. Cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética.

Las ecuaciones del movimiento serían las asociadas a la rotación alrededor de O ,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \quad (9.21)$$

siendo el momento cinético

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O \vec{\omega}$$

un vector que en general no es paralelo a $\vec{\omega}$.

Si elegimos un sistema cartesiano inercial con origen en el punto fijo, $Oxyz$, el momento cinético sería

$$\vec{L}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

y al derivar esta expresión debe tenerse en cuenta que las componentes del tensor de inercia varían con el tiempo ya que la orientación del cuerpo respecto del sistema de ejes fijo en el espacio también cambia. Eso hace que la situación sea muy diferente al del caso del movimiento plano donde la ecuación de rotación era muy sencilla y tenía la misma forma que las movimiento de traslación del centro de masas.

La ecuación 9.21 permite determinar $\vec{\omega}(t)$. A partir de $\vec{\omega}$ es posible determinar por integración la posición del sólido utilizando, por ejemplo, los ángulos de Euler. Debe notarse sin embargo que, a diferencia con el caso del movimiento plano, el vector rotación $\vec{\omega}$ no es en general la derivada de ningún otro vector,

$$\vec{\omega} \neq \frac{d}{dt} \vec{\Lambda}$$

Para demostrarlo basta suponer que si existe el vector $\vec{\Lambda}$ debería poder expresarse en función de los ángulos de Euler ya que estos determinan la orientación del sólido, $\vec{\Lambda}(\psi, \theta, \varphi)$. Para demostrar que tal vector no existe basta con derivar cualquiera de sus componentes y comparar con las derivadas de $\vec{\omega}$,

$$\omega_x = \frac{d}{dt} \Lambda_x \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta = \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

que claramente no puede darse, basta comprobar que la derivada cruzada no coincide

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} &= \cos \psi \\ \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \varphi} &= \sin \psi \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Lambda_x}{\partial \varphi \partial \theta} \neq \frac{\partial^2 \Lambda_x}{\partial \theta \partial \varphi}$$

El hecho de que el vector $\vec{\omega}$ no sea un función integrable hace que le llame *vector rotación* para distinguirlo de la velocidad angular que es siempre la derivada de un ángulo respecto del tiempo.

En el movimiento esférico todas las magnitudes dinámicas del sólido se pueden expresar en función de $\vec{\omega}$, así, la cantidad de movimiento

$$\vec{p} = m \vec{v}_G = m \vec{\omega} \times \vec{r}_G$$

la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_G \vec{\omega}$$

o desde el punto fijo

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O$$

El desplazamiento infinitesimal sería, $d\vec{r}_\alpha = \vec{v}_\alpha dt = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha dt$, por lo que el trabajo quedaría,

$$dW = dT = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} dt$$

9.2. Aplicación del teorema del momento cinético. Ecuaciones de Euler.

Sea $Oxyz$ un sistema de referencia fijo (inercial) que llamaremos *espacio* y consideremos otro sistema de referencia $Ox_1x_2x_3$ que se mueva con el sólido y cuyos ejes coincidan con las direcciones principales, le llamaremos *cuerpo*. En este sistema de referencia el tensor de inercia es diagonal y sus componentes no cambian con el tiempo

$$[I_O] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

En este sistema de referencia el momento cinético se expresa como:

$$\vec{L}_O = I_1 \omega_1 \hat{u}_1 + I_2 \omega_2 \hat{u}_2 + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

y su derivada viene dada por

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{móvil}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

que igualada al momento de las fuerzas da lugar a un sistema de tres ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \right\}$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Euler* y permiten determinar la evolución temporal de $\vec{\omega}$ respecto de los ejes móviles conocidas las componentes M_1 , M_2 y M_3 de los momentos aplicados.

9.3. Reacción en el punto fijo.

La reacción en el vínculo se determina con la ecuación de la cantidad de movimiento,

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = m \vec{v}_G = m \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \times \vec{r}_G] = m [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_G + \vec{\omega} \times \vec{v}_G]$$

y entonces

$$\vec{R}_O = m [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_G + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)] - \vec{F}^{\text{ap}}$$

donde \vec{F}^{ap} es la resultante de las fuerzas aplicadas desde el exterior del sólido.



9.4. Integración de las ecuaciones de Euler en ausencia de pares. Casos de elipsoide de revolución y elipsoide asimétrico.

Comenzamos resolviendo el caso más sencillo, $\vec{M}_O = \vec{0}$, es decir, movimiento en ausencia de pares que también se conoce por movimiento por inercia, ya que sería el movimiento que haría el sólido aislado en ausencia de fuerzas aplicadas. Las ecuaciones de Euler quedan,

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y existen dos constantes del movimiento

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= c\vec{t}\vec{e} \\ T &= cte \end{aligned}$$

que nos van a permitir expresar dos de las componentes de $\vec{\omega}$ en función de la tercera, reduciendo de este modo la resolución de las ecuaciones de Euler a una integral.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que si $\vec{L}_O = c\vec{t}\vec{e}$, lo serán cada una de sus componentes en el sistema fijo L_x, L_y, L_z , no así sus componentes en el sistema móvil L_1, L_2, L_3 . Dado que $\vec{L}_O \cdot \vec{L}_O$ es un escalar y no depende de la orientación de la base, tomamos como constantes

$$\begin{aligned} L^2 &= I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 \\ 2T &= I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \end{aligned}$$

Caso con el elipsoide de inercia esférico.

El elipsoide de inercia es una esfera si los tres momentos principales son iguales, $I_1 = I_2 = I_3$. En este caso el momento cinético y la rotación son siempre paralelos y la conservación del momento cinético lleva a que la rotación también es constante. El movimiento será por tanto una rotación uniforme $\omega = cte$ alrededor de una dirección fija.

Caso con el elipsoide de inercia de revolución.

Suponiendo que el eje de simetría del elipsoide sea el eje 3, entonces, $I_1 = I_2 \neq I_3$ y las ecuaciones de Euler quedan

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La tercera ecuación nos dice que la componente 3 de la rotación permanece constante, $\omega_3 = cte$. Las otras dos forman un sistema que puede resolverse fácilmente si se escriben en la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $\Omega = \omega_3(I_3 - I_1)/I_1$ es una constante. Derivando la primera y sustituyendo en ella la segunda,

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

que es la ecuación de una oscilación armónica, $\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \delta)$. Despejando ω_2 de la primera ecuación del sistema se tiene $\omega_2(t) = -\omega_1/\Omega = A \sin(\Omega t + \delta)$. Finalmente,

$$\vec{\omega}(t) = A [\cos(\Omega t + \delta) \hat{u}_1 + \sin(\Omega t + \delta) \hat{u}_2] + \omega_3 \hat{u}_3$$

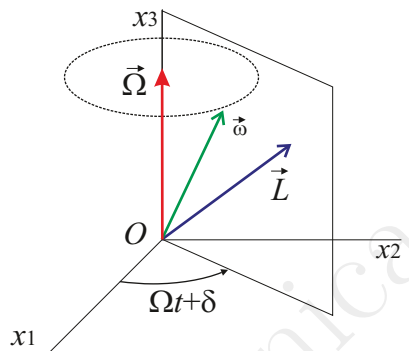
es un vector de módulo constante que gira alrededor del eje Ox_3 con velocidad angular constante Ω .

Para describir el movimiento del cuerpo nos fijamos en que el movimiento del sistema $Ox_1x_2x_3$ es el mismo que el del cuerpo; el EIR es la recta que pasa por el punto fijo O y tiene la dirección de $\vec{\omega}$; eligiendo el eje Oz del sistema fijo en el espacio según la dirección \vec{L}_O , que en ese sistema permanece constante, el movimiento del momento cinético en el sistema móvil nos permitirá obtener el del cuerpo en el sistema fijo en el espacio.

En el sistema cuerpo tenemos,

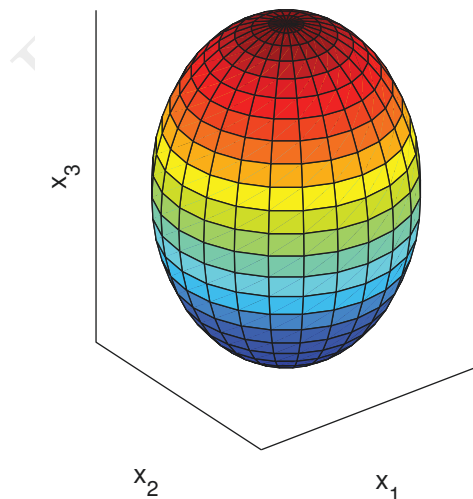
$$\vec{L}_O = I_1 A [\cos(\Omega t + \delta) \hat{u}_1 + \sin(\Omega t + \delta) \hat{u}_2] + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

que realiza el mismo movimiento que la rotación alrededor del eje Ox_3 , manteniéndose en un mismo plano $\hat{u}_3, \vec{\omega}$ y \vec{L}_O . Al mantenerse además constantes los ángulos que forma el EIR con el eje Ox_3 y con el eje Oz los axoides móvil y fijo son dos conos de revolución con vértice en O .

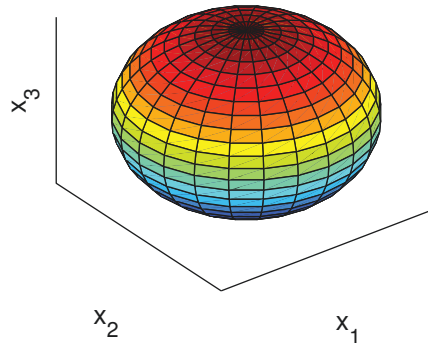


Se dan dos situaciones que están relacionadas con la forma del elipsoide de inercia: si $I_1 = I_2 > I_3$ el eje polar es mayor que el diámetro ecuatorial y se dice que el elipsoide es *prolato* (tiene forma de pepino o de balón de rugby) y si $I_1 = I_2 < I_3$ el eje polar es menor que el diámetro ecuatorial y el elipsoide es *oblato* (tiene forma de naranja). Debe notarse que los semiejes del elipsoide son inversamente proporcionales a los momentos principales por lo que en el caso de la Tierra la forma del planeta es oblatada pero el elipsoide de inercia es prolato.

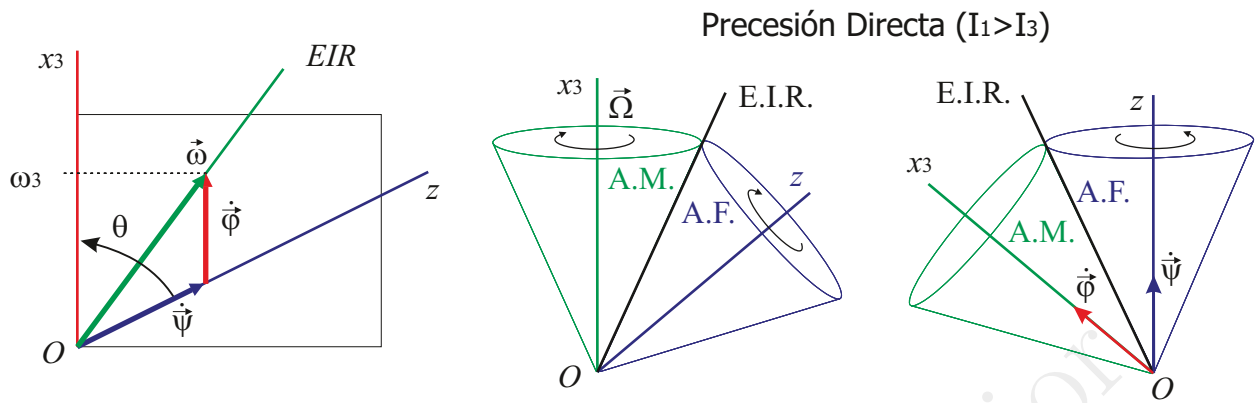
$$I_1 = I_2 > I_3$$



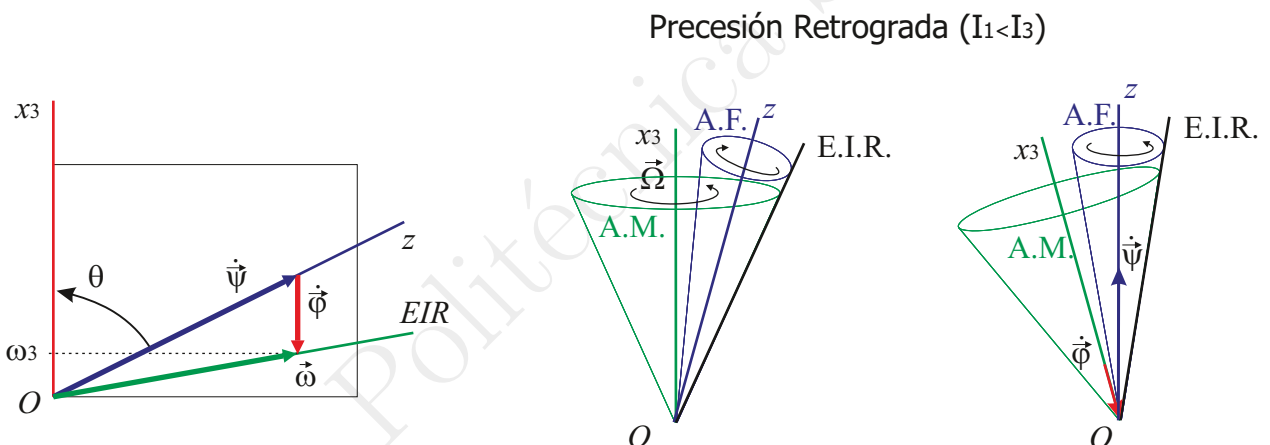
$$I_1 = I_2 < I_3$$



Si $I_1 > I_3$ la rotación está en medio de Ox_3 y Oz y los axoides ruedan sin deslizar uno por el exterior del otro. La velocidad angular Ω tiene el signo contrario de ω_3 y al pasar al sistema fijo el movimiento de $\vec{\omega}$ y de Ox_3 se invierte y acaba teniendo el mismo sentido que ω_3 , se denomina *precesión directa*.



Si por el contrario $I_1 < I_3$ es Oz el que está en medio de Ox_3 y $\vec{\omega}$, en el sistema del cuerpo el axoide fijo rueda por el interior del fijo. Cambiando al sistema espacio es el axoide móvil el que rueda por el exterior del fijo en sentido contrario a Ω y por tanto en sentido contrario a ω_3 , se denomina *precesión retrógrada*.



Ángulos de Euler. Para determinar el movimiento final del cuerpo obtendremos los ángulos de Euler. El ángulo de nutación es el que forman Ox_3 y Oz y puede determinarse fácilmente con la tercera componente del momento cinético,

$$L_3 = I_3 \omega_3 = L \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos \left(\frac{I_3 \omega_3}{L} \right) = cte$$

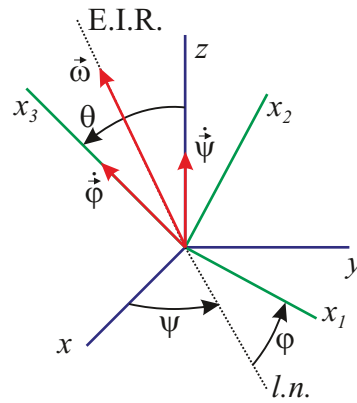
La componente 1 nos permite obtener la rotación de precesión ya que $\dot{\theta} = 0$,

$$L_1 = I_1 \omega_1 = I_1 \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi = L \sin \theta \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{L}{I_1} = cte \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi(0) + \frac{L}{I_1} t$$

La rotación propia también es constante y se obtiene de la componente 3,

$$L_3 = I_3 \omega_3 = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = L \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{L}{I_3} - \dot{\psi} \right) \cos \theta = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = cte$$

que es igual pero opuesta a la precesión del EIR vista en el sistema móvil, $\dot{\varphi} = -\Omega$.



Caso general: elipsoide de inercia asimétrico

Considerando el caso más general en que los tres momentos de inercia son distintos y redefiniendo los ejes principales de manera que $I_1 > I_2 > I_3$, se tienen dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2TI_1 - L^2 &= I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2 + I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2 \geq 0 \\ L^2 - 2TI_3 &= I_1(I_1 - I_3)\omega_1^2 + I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

que permiten expresar ω_1 y ω_3 en función de ω_2 :

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= \frac{2TI_1 - L^2 - I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2}{I_3(I_1 - I_3)} \\ \omega_1^2 &= \frac{L^2 - 2TI_3 - I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2}{I_1(I_1 - I_3)} \end{aligned}$$

Así, la segunda ecuación de Euler se reduce a:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \pm \frac{\sqrt{2TI_1 - L^2 - I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2} \sqrt{L^2 - 2TI_3 - I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2}}{I_2 \sqrt{I_1 I_3}}$$

que conduce a una integral elíptica y permite obtener $\omega_2 = \omega_2(t)$ y con ello $\omega_1 = \omega_1(t)$ y $\omega_3 = \omega_3(t)$.

Ángulos de Euler. Una vez conocida $\vec{\omega}(t)$ en los ejes principales pueden obtenerse los ángulos de Euler, para ello elegiremos la orientación del sistema fijo en el espacio de manera que el eje Oz coincida con la dirección del momento cinético \vec{L}_O que no varía con el tiempo. Así,

$$\vec{L}_O = L \hat{k} = I_1 \omega_1 \hat{u}_1 + I_2 \omega_2 \hat{u}_2 + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

y aplicando la matriz de transformación del sistema espacio al cuerpo,

$$\begin{aligned} L_1 &= I_1 \omega_1 = L \sin \theta \sin \varphi \\ L_2 &= I_2 \omega_2 = L \sin \theta \cos \varphi \\ L_3 &= I_3 \omega_3 = L \cos \theta \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \frac{L_3}{L} = \arccos \frac{I_3 \omega_3(t)}{L} \\ \varphi &= \arctan \frac{L_1}{L_2} = \arctan \frac{I_1 \omega_1(t)}{I_2 \omega_2(t)} \end{aligned}$$

Para determinar el ángulo de precesión utilizamos la expresión de la rotación de precesión en función de las componentes de la rotación en el sistema móvil,

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi}{\sin \theta} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2}$$

que una vez integrada nos proporciona $\psi(t)$.

**10. Dinámica del sólido rígido con un punto fijo. II**

- 10.1 Movimiento del sólido indeformable según Poincaré. Polodias y herpolodias.
10.2 Estabilidad de la rotación alrededor de los ejes principales.
10.3 Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange.

10.1. Movimiento del sólido indeformable según Poincaré. Polodias y herpolodias.

La construcción de Poincaré es un método geométrico alternativo que permite deducir las características más importantes del movimiento del sólido rígido en ausencia de pares sin necesidad de obtener una solución completa. En ella se sigue el movimiento del sólido a través de su elipsoide de inercia.

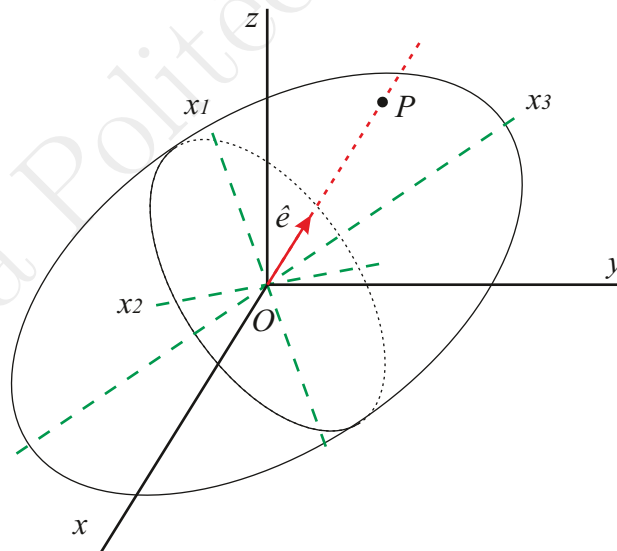
Recordamos la definición de tensor de inercia y tomamos como 1 la constante de proporcionalidad entre la distancia de un punto P del elipsoide al origen y la inversa de la raíz cuadrada del momento de inercia según la dirección \overrightarrow{OP}

$$\overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{I_{OP}}} \Rightarrow \overline{OP}^2 = r^2 = \frac{1}{I_{OP}} \Rightarrow \vec{r}_P \mathbf{I}^O \vec{r}_P = 1$$

El elipsoide de inercia referido al sistema principal $Ox_1x_2x_3$ se expresa en función de las coordenadas del vector de posición del punto P , $\vec{r}_P = (x_1, x_2, x_3)$, en la siguiente forma

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1 \quad (10.22)$$

que es un elipsoide de semiejes $(1/\sqrt{I_1}, 1/\sqrt{I_2}, 1/\sqrt{I_3})$.



Este elipsoide cumple dos propiedades:

P1. La normal al elipsoide en el punto en el que éste es atravesado por el eje instantáneo de rotación (*E.I.R.*) es paralela al momento cinético. El plano tangente al elipsoide en ese punto es, por lo tanto, perpendicular al momento cinético.

P2. La distancia del centro del elipsoide al plano tangente en ese mismo punto es $\sqrt{2T}/L$.

Para demostrar la primera de las propiedades tomamos el vector rotación $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ que es paralelo al *E.I.R.*. El punto P se obtendría aplicando la ecuación del elipsoide,

$$\vec{r}_P = \overline{OP} \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{I_\omega} \omega} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$$

El vector normal al elipsoide en ese punto se puede obtener utilizando que es paralelo al gradiente de la superficie de la ecuación 10.22,

$$\hat{n} \propto \vec{\nabla} S = 2(I_1 x_1, I_2 x_2, I_3 x_3) = \frac{2}{\sqrt{2T}} (I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3) = \frac{2}{\sqrt{2T}} \vec{L}$$

y resulta ser paralelo al momento cinético.

La segunda propiedad se demuestra proyectando el vector \vec{r}_P en la dirección de la normal,

$$\overline{OA} = \vec{r}_P \cdot \hat{n} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{\sqrt{2T} L} = \frac{2T}{\sqrt{2T} L} = \frac{\sqrt{2T}}{L}$$

Aplicando estas dos propiedades al movimiento por inercia el cual tanto el momento cinético como la energía son constantes y por tanto el plano tangente tiene una orientación fija y se mantiene a una distancia constante del punto fijo O . Se denomina por ello *plano invariable*.

Podemos representar el movimiento del sólido en ausencia de pares considerando que es el movimiento de su elipsoide de inercia que rueda y pivota sobre el plano invariable manteniendo su centro a una distancia constante del plano. Como el punto de contacto pertenece al *E.I.R.* la velocidad de deslizamiento será nula, con lo que la rodadura y el pivotamiento se realizan sin deslizamiento.

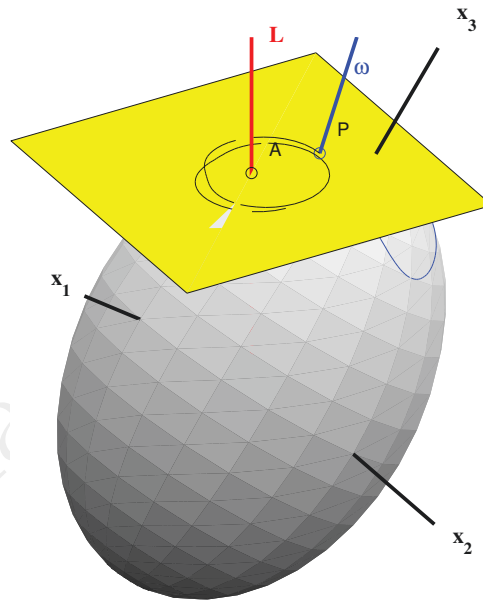


Figura 1: Elipsoide de inercia, plano invariable, polodia y herpolodia.

La curva que describe el punto de contacto sobre el elipsoide se denomina *polodia* y la curva descrita sobre el plano invariable se denomina *herpolodia*. La unión de los puntos de la herpolodia y la polodia con el centro del elipsoide da lugar a los axoides fijo y móvil, respectivamente.

10.1.1. Polodias y herpolodias.

Las ecuaciones de las polodias pueden expresarse en función de las coordenadas del punto P del elipsoide, para ello nos fijamos que deben cumplir la ecuación del elipsoide de inercia y por otro lado deben mantener constante la distancia del plano al origen, para ello deben cumplir,

$$\left. \begin{aligned} I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 &= 1 \\ I_1^2 x_1^2 + I_2^2 x_2^2 + I_3^2 x_3^2 &= \frac{L^2}{2T} \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

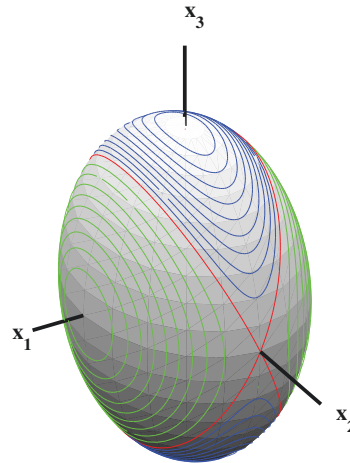


Figura 2: Polodias para un elipsoides asimétrico $I_1 > I_2 > I_3$

son por tanto la intersección de dos elipsoides, el de inercia y otro que depende del valor del parámetro $L^2/(2T)$. Este parámetro es la inversa del cuadrado de la distancia al origen y por ello toma valores entre el mínimo y el máximo de los momentos principales de inercia.

Analizando la forma de las polodias se puede extraer mas información acerca del movimiento:

- Las polodias son curvas cerradas lo cual indica que las componentes de $\vec{\omega}$ en el sistema móvil son periódicas.
- Los ejes principales son ejes permanentes de rotación puesto que el elipsoide puede pivotar sobre el plano según cualquiera de las direcciones principales.
- Si el elipsoide es de revolución los axoides son conos de revolución.
- La forma de las polodias en las inmediaciones de las direcciones principales permite establecer criterios de estabilidad en el movimiento.

La herpolodia es una curva plana en el plano invariable y su ecuación en coordenadas polares estaría definida por la distancia ρ al punto fijo A y un ángulo χ sobre el plano. La distancia sería

$$\rho = \overline{AP} = \sqrt{\overline{OP} - \overline{OA}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{2T} - \frac{2T}{L^2}}$$

y eligiendo Oz en la dirección de \vec{L} , el ángulo formado con el eje Ox sería

$$\chi = \arctan \frac{\omega_y}{\omega_x}$$

por lo que conocida $\vec{\omega}(t)$ se puede obtener la ecuación de la herpolodia.

10.2. Estabilidad de la rotación alrededor de los ejes principales.

Si la rotación coincide con una de las direcciones principales, el momento cinético y la rotación son paralelas y la conservación del momento cinético lleva a que la rotación se mantiene constante y por eso a los ejes principales se les llama también *ejes permanentes*. Si hacemos que $\vec{\omega}$ se separe ligeramente de una de las direcciones principales puede ocurrir que la rotación se mantenga próxima a la dirección principal o que inicie un movimiento en el que se aleja rápidamente de la dirección inicial, en el primer caso diremos que la rotación permanente es estable y en el segundo que es inestable. Esta estabilidad está relacionada con la forma de las polodias en las proximidades de los ejes principales, para un elipsoide asimétrico con $I_1 > I_2 > I_3$ las polodias se cierran alrededor de los ejes con momentos principales grande y pequeño

(estabilidad) y son dos elipses que se cruzan (inestabilidad) para el eje de momento de inercia mediano (véase figura 2).

Este resultado se puede obtener con las ecuaciones de Euler considerando que en las proximidades de un eje principal la componente de la rotación según ese eje va a ser mucho mayor que las otras dos. Así, para el eje 1, $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$ y entonces,

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 & \Rightarrow \omega_1 \approx \text{cte} \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 & \Rightarrow \dot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_3) \omega_1}{I_2} \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 & \Rightarrow \dot{\omega}_3 - \frac{(I_1 - I_2) \omega_1}{I_3} \omega_2 = 0 \end{cases}$$

las dos últimas pueden escribirse en la misma forma,

$$\ddot{\omega}_k + C \omega_k = 0 \quad k = 2, 3$$

donde la constante C

$$C = \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 > 0$$

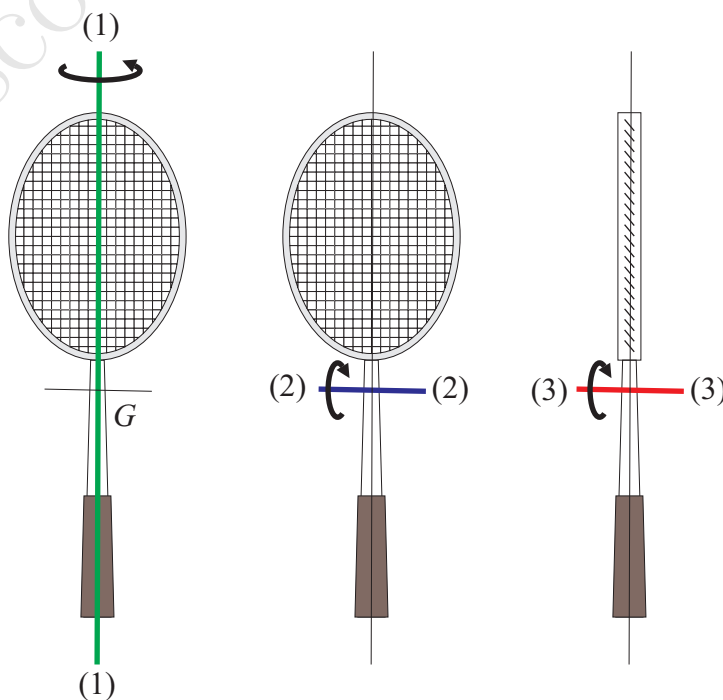
es en este caso positiva lo que nos indica que la solución de las componentes 2 y 3 son armónicas y se mantendrán siempre en valores pequeños.

En cambio, para el eje mediano, 2, el mismo procedimiento nos llevaría a una constante B negativa,

$$B = \frac{(I_2 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3} \omega_2^2 < 0$$

y la solución sería una combinación de exponenciales crecientes y decrecientes con lo que la rotación terminaría alejándose del eje 2, demostrando que la rotación alrededor del eje mediano es inestable.

Este resultado se conoce por el teorema de la raqueta de tenis (Antonio Rañada, Dinámica Clásica, p. 458) y demuestra el hecho de que una raqueta de ténis puede hacerse girar fácilmente a lo largo del eje del mango (1) o en el plano de la pala (3) pero muy difícilmente alrededor del eje (2) normal a los dos anteriores. Los valores aproximados de los momentos principales son $I_1 \approx 0,15 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$, $I_2 \approx 1,49 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $I_3 \approx I_1 + I_2$.



10.3. Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange.

El movimiento esférico de un cuerpo sometido al par de su peso no es en general un problema integrable. Existen solamente unos casos especiales en los que puede obtenerse la solución con ayuda de ciertas constantes del movimiento asociadas a sus simetrías.

El caso que estudiaremos se conoce por *trompo de Lagrange* y consiste en un sólido con simetría de revolución que se mueve bajo el par de su propio peso alrededor de un punto fijo O , de su eje de simetría, que no coincida con G . Si G coincide con O tendríamos el movimiento por inercia ya estudiado y que se conoce también por *trompo de Euler*.

El trompo de Lagrange es también un buen ejemplo de la aplicación de las ecuaciones de la mecánica analítica y por ello las aplicaremos al máximo de manera que podamos ver su potencialidad.

Las dos hipótesis que simplifican el problema son:

1. Sólido con simetría de revolución.

- a) El eje de simetría es principal y cualesquiera dos ejes perpendiculares también son principales y sus momentos de inercia iguales.
- b) El centro de masas G está sobre el eje de simetría.

2. El punto fijo pertenece al eje de simetría.

Estas simetrías hacen que el sistema no cambie si lo giramos alrededor del eje de simetría del cuerpo o alrededor de la vertical. Tomando un sistema de referencia fijo, $Oxyz$ con el eje Oz vertical y un sistema móvil $Ox_1x_2x_3$ tal que Ox_3 coincida con el eje de simetría del trompo, se tiene que $I_1 = I_2 \neq I_3$.

Expresando la orientación del sólido mediante los ángulos de Euler (ψ , θ , φ) la rotación $\vec{\omega}$ en función de las rotaciones de Euler queda

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{u}_n + \dot{\varphi} \hat{u}_3$$

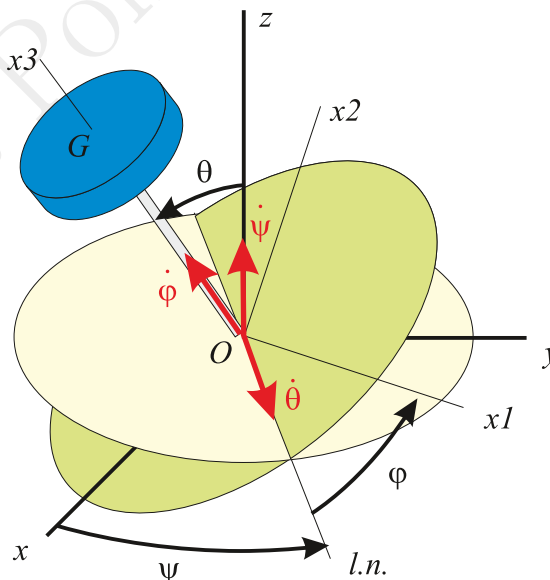


Figura 3: Trompo de Lagrange con los ángulos y las rotaciones de Euler.

Ecuaciones de Lagrange

Las simetría del problema para el eje Oz hace que la coordenada ψ (ángulo de precesión) sea cíclica, y lo mismo ocurre con el eje del trompo Ox_3 y la coordenada φ (ángulo de rotación propia). Para la última coordenada θ (ángulo de nutación) no hay ninguna simetría pero puede integrarse utilizando la

conservación de la energía que está asociada a que el problema no depende de la elección del origen de tiempos. Obtendremos el valor de las tres constantes a partir de la función lagrangiana.

Como es un sólido con un punto fijo y la única fuerza que trabaja es el peso,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}^O \vec{\omega} - m g z_G = \frac{1}{2} [I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2] - m g z_G$$

utilizando como coordenadas los ángulos de Euler, y llamado $\ell = \overline{OG}$ a la distancia entre el centro de masas y el punto fijo,

$$z_G = \ell \cos \theta$$

y las componentes del vector rotación en ejes principales

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})$$

de manera que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right] - m g \ell \cos \theta$$

Vemos pues que las coordenadas ψ y φ son cíclicas y las constantes del movimiento asociadas son las componentes del momento cinético según los ejes Oz y Ox_3 respectivamente,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow p_\psi = I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta = cte = L_z$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = cte = L_3$$

La tercera constante del movimiento es del tipo energía (el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo) que en este caso coincide con la suma de la energía cinética y el potencial porque es un sistema natural (holónomo y esclerónomo),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte = T + V = E$$

donde

$$E = \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right] + m g \ell \cos \theta$$

Problema unidimensional equivalente

Las constantes del movimiento asociadas a las coordenadas cíclicas nos permiten eliminarlas de la expresión de la energía y obtener una ecuación en la que solamente aparecen la coordenada no cíclica (ángulo de nutación) y constantes. Despejando la velocidad podremos reducir el problema a una integración, veámoslo.

Para despejar las velocidades de precesión y rotación propia de las constantes L_z y L_3 nos fijamos en que $(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = \omega_3 = L_3/I_3$, por tanto,

$$\dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} = \dot{\psi}(\theta)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta = \dot{\varphi}(\theta)$$

y sustituyendo en la expresión de la energía

$$E = T + V = cte = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + m g \ell \cos \theta + \frac{L_3^2}{2 I_3}$$

Así, definiendo el potencial efectivo:

$$V_{\text{ef}}(\theta) = m g \ell \cos \theta + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$



y eliminado el término constante de la energía mediante un cambio de origen,

$$E' = E - \frac{L_3^2}{2I_3} = cte = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta} + V_{ef}(\theta)$$

se tiene,

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_1}(E' - V_{ef})} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow t = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}[E' - V_{ef}(\theta)]}}$$

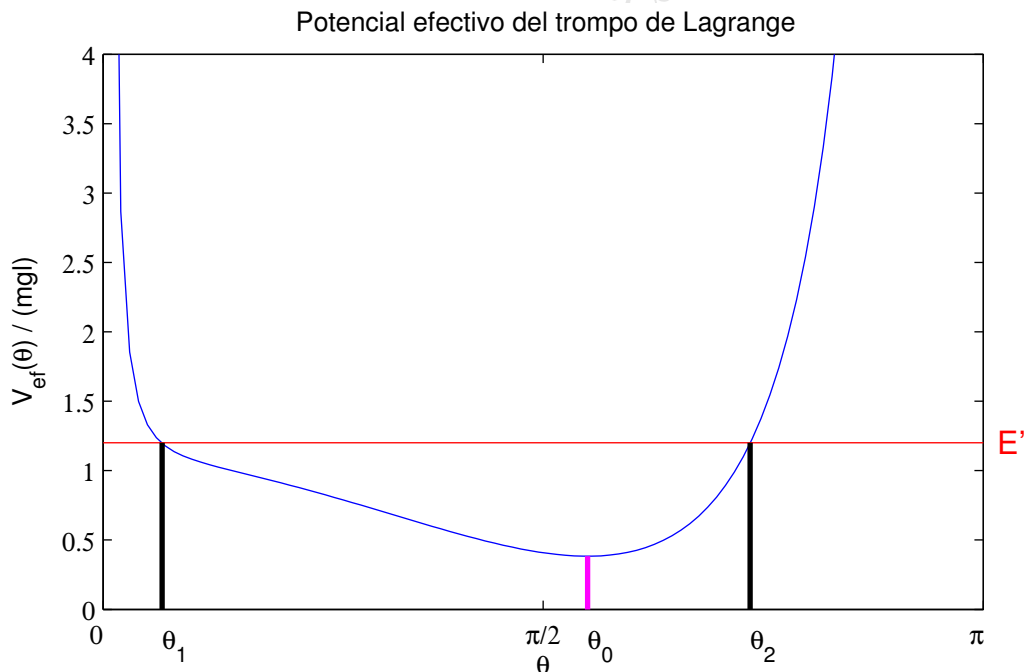
que conduce a una integral elíptica.

La solución para el movimiento de nutación $\theta = \theta(t)$ permite obtener las rotaciones de Euler $\dot{\psi}(t)$ y $\dot{\varphi}(t)$ que nuevamente integradas permiten obtener $\psi(t)$ y $\varphi(t)$ con lo que el problema dinámico estaría formalmente resuelto.

Clasificación de los movimientos

Se pueden obtener las características más relevantes del movimiento sin necesidad de realizar las integraciones, analizando el potencial efectivo.

Para $L_z \neq L_3$ el potencial efectivo tiene dos asíntotas verticales en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y un mínimo en $\theta = \theta_0$.



Si la energía coincide con el mínimo del potencial efectivo $E' = V_{ef}(\theta_0)$, se tiene que el ángulo de nutación es constante y con él la rotación propia y la rotación de precesión. El movimiento consiste en una precesión uniforme del eje del trompo que describe un cono circular. Este caso se conoce por *precesión estacionaria* y volveremos sobre él más adelante.

Para $E' > V_{ef}(\theta_0)$, la ecuación $E' = V_{ef}(\theta)$ tiene dos raíces θ_1 y θ_2 que limitan la inclinación del eje de simetría con la vertical,

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

estos puntos de retroceso se llaman *ángulos absidales*. Se tiene para la coordenada θ un movimiento unidimensional y acotado y por lo tanto periódico. Si el ángulo θ oscila, también lo hará la precesión que además puede cambiar de signo cuando

$$\theta = \theta_3 = \arccos \frac{L_z}{L_3} \quad \text{y} \quad \theta_1 \leq \theta_3 < \theta_2$$

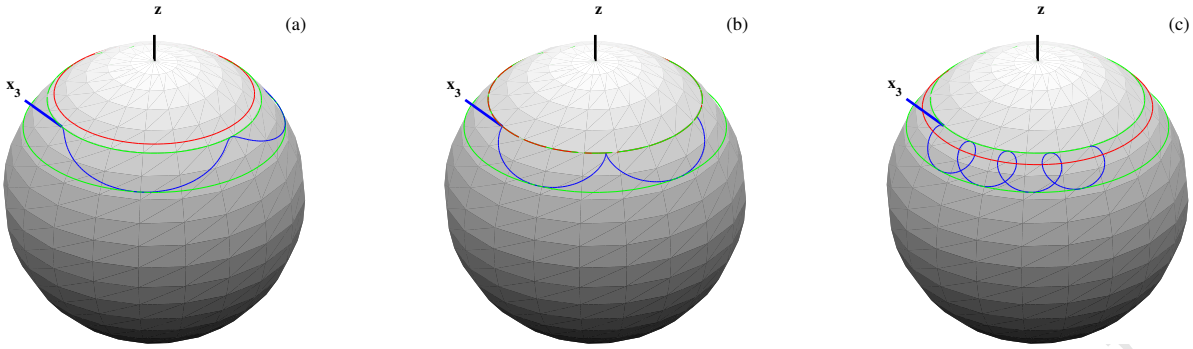


Figura 4: Representación de diferentes movimientos del trompo: (a) $\theta_3 < \theta_1$, (b) $\theta_3 = \theta_1$ y (c) $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$

Se suele representar el movimiento trazando la curva que describe la intersección del eje del trompo con una esfera de radio unidad centrada en el punto fijo O , como se muestra en la figura 4.

En el caso (a) el ángulo al que se anula la precesión (línea roja) está fuera de la región en la que se realiza el movimiento (entre las líneas verdes) y por tanto la precesión nunca cambia de signo, aumenta y disminuye pero sin llegar a anularse. En el caso (b) la precesión se anula en el valor absidal menor y aparecen las cúspides. En el caso (c) el valor al que se anula la precesión está dentro de la región en la que se realiza el movimiento dando lugar a dos zonas una con precesión negativa y otra con precesión positiva. La trayectoria sobre la esfera realiza unos rizos pero con un valor neto distinto de cero lo que hace que el eje del trompo termine girando alrededor de la vertical.

Función de Hamilton y función de Routh

Para eliminar las coordenadas cíclicas podríamos haber usado tanto la función de Hamilton como la función de Routh. Así para la primera tenemos que la coordenada no cíclica,

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

y entonces, para obtener la función de Hamilton tenemos que sustituir las velocidades por sus momentos conjugados en la función energía $h = T + V$,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\varphi} &= \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{I_1} \end{aligned}$$

de manera que se obtiene

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + m g \ell \cos \theta = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{L_3^2}{2I_3} + V_{\text{ef}}(\theta)$$

cuyo valor permanece constante, $\mathcal{H} = cte = E$, y permite integrar el movimiento.

De forma similar, la función de Routh sería,

$$\mathcal{R} = p_\psi \dot{\psi} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = I_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \right)^2 - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + V_{\text{ef}}(\theta)$$

Prescindiendo del término constante $L_3^2/(2I_3)$ que puede ser añadido al potencial efectivo, la diferencia entre la función de Hamilton y la de Routh es el signo de la energía cinética de la coordenada de nutación, positiva para la de Hamilton (como corresponde a $\mathcal{H} = T + V$) y negativa para la función de Routh (que es una lagrangiana para la coordenada no cíclica).

**Ecuación del movimiento de nutación**

Las ecuaciones canónicas para la coordenada no cíclica serían,

$$\begin{aligned}\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I_1}\end{aligned}$$

que conducirían a la ecuación del movimiento de nutación,

$$I_1 \ddot{\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \quad (10.24)$$

Esta misma ecuación se obtiene con la función de Routh,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt} (-I_1 \dot{\theta}) - \frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta}$$

de donde

$$I_1 \ddot{\theta} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta}$$

Para estudiar el movimiento de nutación se suele hacer el cambio de variable $u \equiv \cos \theta$ (como $\theta \in [0, \pi]$, $u \in [-1, +1]$) y se definen las constantes $a = L_z/I_1$, $b = L_3/I_1$, $\alpha = 2E'/I_1$ y $\beta = 2mg\ell/I_1$ de manera que la ecuación diferencial del movimiento de nutación queda,

$$\ddot{u} (1 - u^2) + u \dot{u}^2 + \frac{\beta}{2} (1 - u^2)^2 - (b - a u)(a - b u) = 0$$

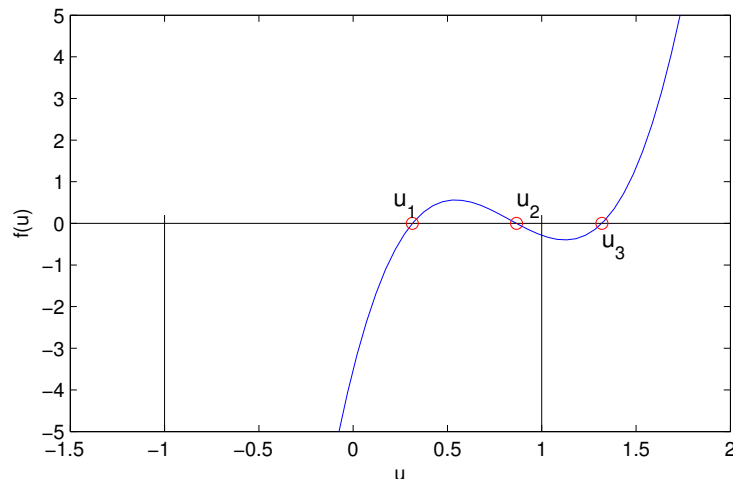
Podemos reducir un orden la ecuación diferencial si utilizamos el problema unidimensional equivalente sustituyendo el ángulo de nutación por la variable u ,

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + u + \frac{(a - b u)^2}{\beta (1 - u^2)}$$

que puede escribirse como $\dot{u}^2 = f(u)$ donde

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - b u)^2$$

que es un polinomio cúbico en el que una de las raíces, u_3 , es siempre mayor que +1. Las otras dos raíces son reales y definen los puntos de retroceso ($u_1 = \cos \theta_2$ y $u_2 = \cos \theta_1$).

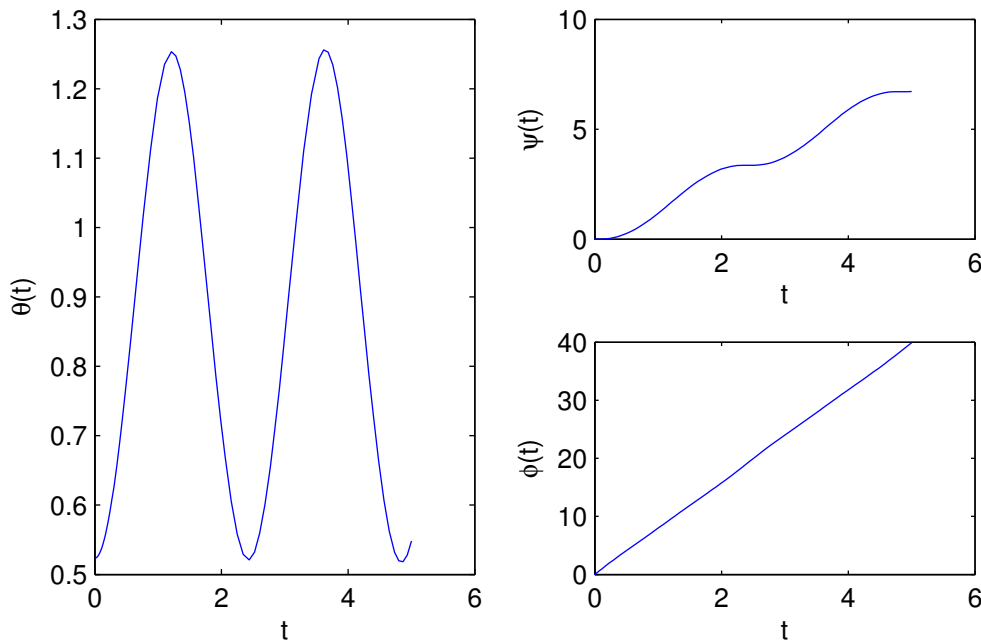


La solución del movimiento se obtendría de la integral

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

y conocida la solución $u(t) = \cos(\theta(t))$ se pueden integrar los otros dos ángulos,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{I_1}{I_3} a - \frac{a - bu}{1 - u^2} u$$



Condición de precesión estacionaria

Determinaremos ahora las condiciones en que se da el movimiento de precesión estacionaria. Se llama así al caso en el que el trompo se mueve manteniendo el ángulo de nutación constante de manera que las rotaciones de precesión y rotación propia son también uniformes. Para que esto ocurra la energía debe coincidir con el mínimo del potencial efectivo y por tanto, $\theta = \theta_0$, donde

$$\left. \frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad m g \ell \sin \theta_0 - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta_0)(L_3 - L_z \cos \theta_0)}{I_1 \sin^3 \theta_0} = 0$$

Sustituyendo las constantes del movimiento por su relación con los ángulos de Euler, se obtiene,

$$\left\{ (I_1 - I_3) \dot{\psi}^2 \cos \theta_0 - I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} + m g \ell \right\} \sin \theta_0 = 0$$

Olvidándonos del los casos en los que el trompo está en equilibrio vertical ($\theta = 0$ ó $\theta = \pi$), la condición de precesión estacionaria

$$(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} + m g \ell = 0$$

es una ecuación de segundo grado en la precesión y tendrá dos soluciones,

$$\dot{\psi} = \frac{I_3 \dot{\varphi} \pm \sqrt{(I_3 \dot{\varphi})^2 - 4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{2 (I_1 - I_3) \cos \theta_0}$$

siempre que se cumpla

$$\dot{\varphi}^2 \geq \frac{4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}{I_3^2}$$

11. Dinámica de Percusiones

- 11.1 Percusiones. Definición y teoremas fundamentales.
- 11.2 Teorema de Carnot.
- 11.3 Percusiones aplicadas a un sólido con un eje fijo. Centro de percusión.
- 11.4 Choque sin rozamiento entre dos sólidos libres.

11.1. Percusiones. Definición y teoremas fundamentales.

Hasta ahora hemos tratado la dinámica de cuerpos bajo la acción de fuerzas constantes o por lo menos que actúan de forma permanente. Existe un caso particular de fuerzas que actúan con gran intensidad pero durante un periodo de tiempo pequeño (es el caso de las colisiones o de la aparición repentina de ligaduras) que permite un tratamiento especialmente sencillo utilizando la forma integral de las ecuaciones de movimiento.

En estos fenómenos, el movimiento del cuerpo no viene caracterizado por la fuerza \vec{F} sino por su impulso,

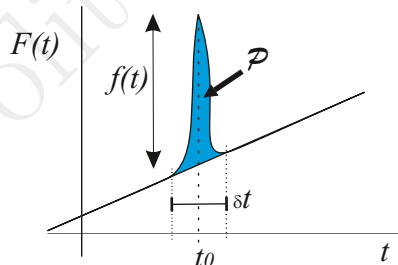
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

que con la segunda ley de Newton $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ conduce a que $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$.

Si consideramos que dentro de \vec{F} existe una fuerza \vec{f} muy grande que actúa durante un periodo muy pequeño δt en el caso en que $\vec{f} \rightarrow \infty$ y $\delta t \rightarrow 0$, se define *percusión*

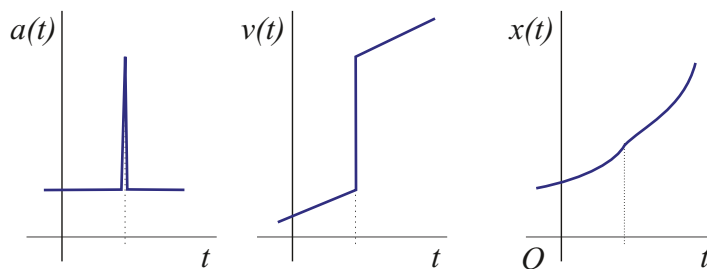
$$\vec{p} = \int_0^{\delta t} \vec{F} dt = \int_0^{\delta t} \vec{f} dt$$

donde \vec{f} se conoce por fuerza percusional. En la figura siguiente se representa la fuerza F con una fuerza repentina centrada en el instante t , la percusión sería el área del pico.



Las dimensiones de la percusión son las mismas que las del impulso y por tanto las mismas que las de la cantidad de movimiento MLT^{-1} y la unidad del SI es el $kg \cdot m/s$.

El efecto de la percusión se puede ver en las gráficas siguientes que corresponde a un movimiento unidimensional ($m\ddot{x} = F$), la aceleración sufre una gran variación pero termina con un valor similar al que había al inicio, la velocidad sufre un salto brusco cuyo tamaño viene dado por el área del pico, ese salto se produce durante un tiempo muy corto por lo que prácticamente no hay variación de la posición.



Las percusiones se clasifican atendiendo a las fuerzas que las producen como:

$$\text{Percusiones: } \begin{cases} \text{Interiores} \\ \text{Exteriores} \end{cases} \begin{cases} \text{Aplicadas} \\ \text{De enlace} \end{cases}$$

Teorema fundamentales

Escribiremos las ecuaciones del movimiento para el caso de las fuerza percusionales para un sistema de partículas de masas m_α y posiciones \vec{r}_α .

La variación de la cantidad de movimiento del sistema es,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha + \sum_{\alpha} \vec{f}_\alpha$$

donde hemos separado las fuerzas percusionales \vec{f}_α de las que no lo son \vec{F}_α . Integrando en el periodo δt se tiene,

$$\Delta\vec{p} = \int_0^{\delta t} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_0^{\delta t} \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha dt + \int_0^{\delta t} \sum_{\alpha} \vec{f}_\alpha dt = \sum_{\alpha} \int_0^{\delta t} \vec{f}_\alpha dt = \sum_{\alpha} \vec{p}_\alpha = \vec{p}$$

la variación de la cantidad de movimiento es igual a la resultante de las percusiones. Además si separamos las percusiones en internas y externas,

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_\alpha^{\text{ext}} + \vec{p}_\alpha^{\text{int}}$$

y consideramos las internas debidas al resto de las partículas,

$$\vec{p}_\alpha^{\text{int}} = \sum_{\beta} \vec{p}_{\alpha\beta}$$

que cumplen la tercera ley de Newton

$$\vec{p}_{\alpha\beta} = -\vec{p}_{\beta\alpha}$$

por lo que la resultante de las percusiones internas es nula (se anula cada pareja) y entonces,

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_\alpha^{\text{ext}}$$

Por otro lado, para un sistema de partículas la cantidad de movimiento viene determinada por la velocidad de su centro de masas G , por lo que $\Delta\vec{p} = \mu(\vec{v}'_G - \vec{v}_G)$ y entonces,

$$\mu(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = \sum_{\alpha} \vec{p}_\alpha^{\text{ext}}$$

donde \vec{v}'_G y \vec{v}_G son respectivamente las velocidades inmediatamente después y antes de la percusión, y μ la masa total del sistema.

El momento cinético del sistema con respecto al origen O es,

$$\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$$

si O no es un punto fijo, la derivada del momento cinético resulta

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{p}}_\alpha + \vec{p} \times \vec{v}_O$$

que al sustituir $\dot{\vec{p}}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{f}_\alpha$ e integrar en el periodo δt resulta

$$\Delta\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \int_0^{\delta t} \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{p}}_\alpha dt + \int_0^{\delta t} \vec{p} \times \vec{v}_O dt = \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \int_0^{\delta t} \vec{f}_\alpha dt = \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$$

Si las fuerzas internas que dan lugar a las percusiones actúan en la dirección de la línea que une las partículas, $\vec{p}_{\alpha\beta} \parallel \vec{r}_{\alpha\beta}$, el momento de cada pareja de partículas se anula y la resultante del momento de las percusiones internas se anula por lo que,

$$\Delta\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha^{\text{ext}}$$



En cuanto a la variación de la energía tenemos que antes de la percusión

$$T_a = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2$$

y después

$$T_d = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}'_{\alpha}^2$$

por lo que la variación debida a la percusión sería

$$\Delta T = T_d - T_a = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{v}'_{\alpha}^2 - \vec{v}_{\alpha}^2) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{v}'_{\alpha} + \vec{v}_{\alpha}) \cdot (\vec{v}'_{\alpha} - \vec{v}_{\alpha})$$

y como $m_{\alpha}(\vec{v}'_{\alpha} - \vec{v}_{\alpha}) = \Delta \vec{p}_{\alpha} = \vec{P}_{\alpha}$ por tanto

$$\Delta T = \sum_{\alpha} \left(\frac{\vec{v}'_{\alpha} + \vec{v}_{\alpha}}{2} \right) \cdot \vec{P}_{\alpha}$$

Nótese que en la expresión de la energía no pueden eliminarse las percusiones interiores ya que están multiplicadas por las velocidades. No hemos considerado la energía potencial ya que al no haber cambio de posición esta no sufrirá ninguna variación durante la percusión.

En ciertos casos que veremos más adelante puede relacionarse la variación de energía con la magnitud conocida como *energía cinética de las velocidades perdidas* que se obtiene de forma similar a la energía cinética pero utilizando la velocidad perdida por cada partícula $\vec{v}_{\alpha} - \vec{v}'_{\alpha}$, entonces,

$$T_w = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha} - \vec{v}'_{\alpha})^2$$

La energía cinética de las velocidades perdidas puede relacionarse con las percusiones procediendo análogamente que con la variación de energía,

$$T_w = \sum_{\alpha} \left(\frac{\vec{v}'_{\alpha} - \vec{v}_{\alpha}}{2} \right) \cdot \vec{P}_{\alpha}$$

El interés de esta magnitud es que en ciertos casos se cumple la ecuación $\Delta T + T_w = 0$ y puede emplearse esta ecuación para resolver algunos problemas sencillos.

Ecuaciones de Lagrange. Si utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para describir el movimiento de un sistema natural (holónomo y esclerónmo)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (11.25)$$

y realizamos la misma integración temporal

$$\Delta p_j = \int_0^{\delta t} \frac{dp_j}{dt} dt = \int_0^{\delta t} Q_j dt = \mathcal{P}_j$$

donde

$$\mathcal{P}_j = \int_0^{\delta t} Q_j dt = \int_0^{\delta t} \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \vec{f}_{\alpha} dt = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \vec{P}_{\alpha}$$

es la percusión generalizada asociada con la coordenada q_j . Entonces,

$$\Delta p_j = \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \mathcal{P}_j$$

Caso del sólido rígido. Para un sólido rígido las velocidades de todos los puntos puede obtener a partir del grupo cinemático y entonces las velocidades antes y después de la percusión pueden escribirse como,

$$\begin{cases} \vec{v}_\alpha = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \\ \vec{v}'_\alpha = \vec{v}'_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}_\alpha \end{cases}$$

En este caso la diferencia de las velocidades relativas de cada pareja de masas es perpendicular a la línea que las une, $\vec{v}_\beta - \vec{v}_\alpha \perp \vec{r}_{\alpha\beta}$ por lo que $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{P}_{\alpha\beta} + \vec{v}_\beta \cdot \vec{P}_{\beta\alpha} = 0$ y entonces

$$\sum_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \vec{P}_\alpha^{\text{int}} = \sum_\alpha \vec{v}'_\alpha \cdot \vec{P}_\alpha^{\text{int}} = 0$$

Entonces, la variación de la cantidad de movimiento,

$$\Delta \vec{p} = m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = \sum_\alpha \vec{P}_\alpha^{\text{ext}}$$

la variación del momento cinético,

$$\Delta \vec{L}_O = \mathbf{I}^O (\vec{\Omega} - \vec{\omega}) = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{P}_\alpha^{\text{ext}}$$

la variación de la energía cinética,

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(\vec{v}'_G{}^2 - \vec{v}_G{}^2) + \frac{1}{2}[(\vec{\Omega} \mathbf{I}^O \vec{\Omega}) - (\vec{\omega} \mathbf{I}^O \vec{\omega})] = \sum_\alpha \left(\frac{\vec{v}'_\alpha + \vec{v}_\alpha}{2} \right) \cdot \vec{P}_\alpha^{\text{ext}}$$

y la energía cinética de las velocidades perdidas,

$$T_W = \frac{1}{2}m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\Omega} - \vec{\omega}) \mathbf{I}^O (\vec{\Omega} - \vec{\omega}) = \sum_\alpha \left(\frac{\vec{v}'_\alpha - \vec{v}_\alpha}{2} \right) \cdot \vec{P}_\alpha^{\text{ext}}$$

11.2. Teorema de Carnot.

Veremos ahora en que situaciones de cumple que la energía cinética perdida en la percusión coincide con la energía cinética de las velocidades perdidas, $-\Delta T = T_w$.

Para un sistema de partículas

$$\Delta T + T_w = \sum_\alpha \left(\frac{\vec{v}'_\alpha + \vec{v}_\alpha}{2} \right) \cdot \vec{P}_\alpha + \sum_\alpha \left(\frac{\vec{v}'_\alpha - \vec{v}_\alpha}{2} \right) \cdot \vec{P}_\alpha = \sum_\alpha \vec{v}'_\alpha \cdot \vec{P}_\alpha$$

Para un sólido rígido, $\sum_\alpha \vec{P}_\alpha^{\text{int}} \cdot \vec{v}'_\alpha = 0$, en el que todos los enlaces son perfectos (sin rozamiento) y no desaparecen, $\sum_\alpha \vec{P}_\alpha^{\text{enl}} \cdot \vec{v}'_\alpha = 0$ y sin percusiones aplicadas $\vec{P}_\alpha^{\text{apl}} = 0$, se tiene

$$\Delta T + T_w = 0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta T = T_w \quad (11.26)$$

Es decir, en un sistema indeformable en movimiento, sujeto a enlaces perfectos (sin rozamiento), en el que se introducen bruscamente ligaduras que no desaparecen, sufre por parte de estas una disminución de su energía cinética cuyo valor coincide con la energía cinética de las velocidades perdidas. Este resultado se conoce por *teorema de Carnot*.

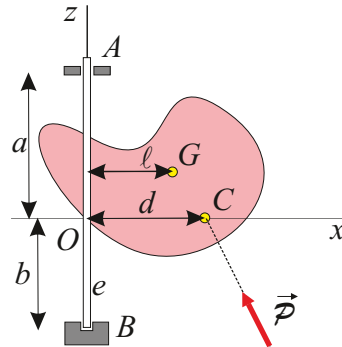
Las expresión anterior también se cumple cuando:

- El sistema no es rígido pero $\sum_\alpha \vec{P}_\alpha^{\text{int}} \cdot \vec{v}'_\alpha = 0$.
- Existan percusiones aplicadas tales que $\sum_\alpha \vec{P}_\alpha^{\text{apl}} \cdot \vec{v}'_\alpha = 0$.

Ejemplos de la primera situación son los problemas: del péndulo balístico (C3H6P1); del bloque y la barra unidos por un hilo (C2H7P1) y de los dos discos (C2H7P2).

11.3. Percusiones aplicadas a un sólido con un eje fijo. Centro de percusión.

Para un sólido rígido con eje fijo es posible cambiar su velocidad de rotación aplicando una percusión que no genere reacciones percusionales en los enlaces, esto hará que toda la energía se utilice para modificar el movimiento del sistema sin que sufran los apoyos.



Para estudiar este problema tomamos un sistema fijo $Oxyz$ con Oz coincidiendo con el eje de rotación y de manera que el plano xz contenga al centro de masas del cuerpo (que deberá estar fuera del eje de rotación). Llamaremos C al punto de intersección de la línea de acción de la percusión \vec{P} con dicho plano xz y d a su distancia al eje de rotación. Para simplificar las expresiones elegimos la posición del origen O de manera que Ox pase por el punto C . Si ℓ es la distancia del centro de masas al eje de rotación, entonces

$$\begin{cases} \vec{v}_G = \ell \omega \hat{j} \\ \vec{v}'_G = \ell \Omega \hat{j} \end{cases}$$

y entonces para la cantidad de movimiento

$$m \ell (\Omega - \omega) \hat{j} = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} 0 = P_x + A_x + B_x \\ m \ell (\Omega - \omega) = P_y + A_y + B_y \\ 0 = P_z + A_z + B_z \end{cases}$$

Para el momento cinético y utilizando las distancias de la figura,

$$I^O (\Omega - \omega) \hat{k} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{P}_{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} I_{xz} (\Omega - \omega) = b B_y - a A_y \\ I_{yz} (\Omega - \omega) = a A_x - b B_x - d P_z \\ I_{zz} (\Omega - \omega) = d P_y \end{cases}$$

La solución de el sistema formado por estas 6 ecuaciones permite determinar el cambio de la rotación $(\Omega - \omega)$ y las cinco percusiones A_x , B_x , A_y , B_y y $A_z + B_z$. Estas mismas ecuaciones sirven para determinar las condiciones para las que no hay percusiones en los enlaces sin más que hacer cero las reacciones,

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = m \ell (\Omega - \omega) \\ P_z = 0 \\ I_{xz} (\Omega - \omega) = 0 \\ I_{yz} (\Omega - \omega) = -d P_z \\ I_{zz} (\Omega - \omega) = d P_y \end{cases}$$

Las ecuaciones 1ª y 3ª nos indican que la percusión debe ser normal al plano que contiene al eje de rotación y al centro de masas. Las ecuaciones 4ª y 5ª (en la que $P_z = 0$) se cumplen cuando el eje de rotación, z , es eje principal. Finalmente para que se cumplan las ecuaciones 2ª y 6ª,

$$\Omega - \omega = \frac{P_y}{m \ell} = \frac{d P_y}{I_z}$$

por lo que

$$d = \frac{I_z}{m \ell}$$

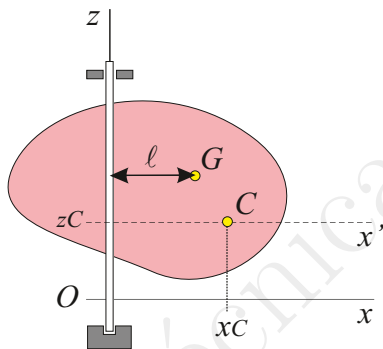
define la posición del punto C en el plano xz por el que debe pasar la recta soporte de la percusión para que no se produzcan reacciones en los apoyos. Ese punto se conoce por *centro de percusiones*.

Aplicando la percusión sobre ese punto el cambio en la velocidad de rotación es

$$\Omega - \omega = \frac{P}{m \ell}$$

Ejemplo: centro de percusiones de una plana con eje de rotación coplanario. Aplicando el resultado anterior al caso de la placa,

$$x_C = \frac{I_z}{m \ell}$$



Además debemos determinar la altura a la que el eje de rotación es principal. Como la placa es plana $P_{xy} = P_{yz} = 0$ y trasladando el eje x es posible hacer cero el producto de inercia xz . Supongamos que conocemos el producto de inercia xz para un origen O ,

$$0 \neq P_{xz}^O = \int dm xz$$

Si trasladamos el eje x hasta la altura z_C que hace cero el nuevo producto de inercia,

$$P_{xz}^{O'} = \int dm x(z - z_C) = P_{xz}^O - z_C \int dm x = P_{xz}^O - z_C m \ell = 0$$

por tanto,

$$z_C = \frac{P_{xz}^O}{m \ell}$$

Entonces, las coordenadas del centro de percusiones son

$$(x_C, z_C) = \left(\frac{I_z}{m \ell}, \frac{P_{xz}^O}{m \ell} \right) = \frac{(\int dm z^2, \int dm xz)}{\int dm x}$$

11.4. Choque sin rozamiento entre dos sólidos libres.

Cuando dos cuerpos entran en contacto se produce un intercambio entre sus cantidades de movimiento que da lugar a un cambio brusco en sus velocidades. Como el intervalo en el que se mantienen en contacto suele ser muy pequeño, podemos tratarlo como una percusión.

Consideraremos la colisión entre 2 sólidos rígidos y llamaremos A y B a los puntos de contacto de cada cuerpo. La velocidad con la que se acercan las superficies de los cuerpos es la componente normal a la diferencia de velocidades,

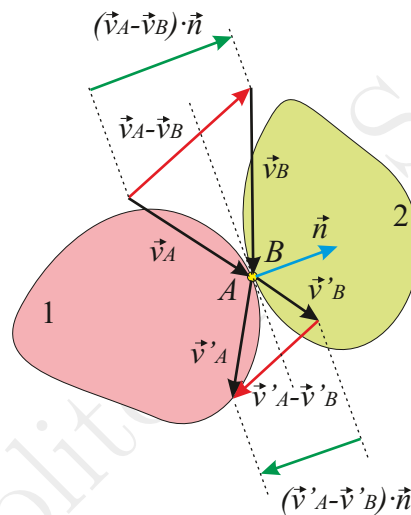
$$\hat{n} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

siendo \hat{n} la normal al plano tangente común en el punto de contacto. Oponiéndose a esta velocidad aparecen unas reacciones entre los cuerpos según la normal. Estas reacciones deformarán los cuerpos hasta llegar a anular dicha componente de la velocidad. Una vez anulada la velocidad comienza la recuperación de la forma original de los cuerpos, invirtiendo parte de la energía acumulada en la deformación en producir una velocidad normal pero de sentido opuesto, de manera que terminan alejándose con una velocidad

$$\hat{n} \cdot (\vec{v}'_A - \vec{v}'_B)$$

La relación que hay entre estas componentes de la velocidad depende del comportamiento mecánico de los cuerpos y se expresa por medio del llamado *coeficiente de restitución* (COR),

$$\varepsilon = -\frac{\hat{u} \cdot (\vec{v}'_A - \vec{v}'_B)}{\hat{u} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)}$$



Este coeficiente se mide experimentalmente y se encuentra tabulado para algunos de los materiales más comunes. Podemos clasificar las colisiones según su valor:

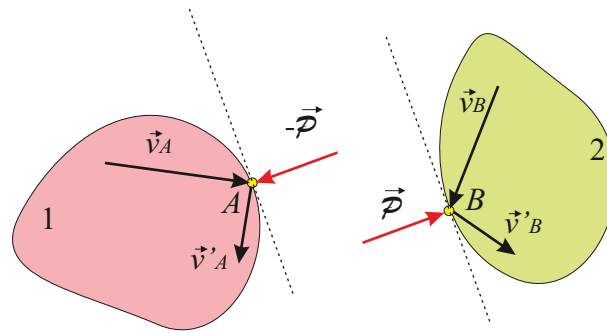
- $\varepsilon = 1$, choque *elástico*, se recupera totalmente la forma de los cuerpos, no hay pérdida de energía cinética.
- $\varepsilon = 0$, choque *plástico*, no se recupera en absoluto la deformación de los cuerpos, se pierde el máximo de energía cinética.
- $0 < \varepsilon < 1$, choque *inelástico*, son las situaciones intermedias entre los dos casos extremos.

En el caso de que no exista rozamiento entre las superficies de los sólidos, es posible relación la disminución de la energía cinética con el coeficiente de restitución. Para ellos consideramos que durante el choque se produce una percusión \vec{P} según la normal y de sentido opuesto en cada cuerpo. Si los sólidos están libres (sin ligaduras) esta sería la única percusión que actúa sobre cada cuerpo y tendríamos,

$$\begin{cases} \Delta T_1 = -\vec{P} \cdot \left(\frac{\vec{v}'_A + \vec{v}_A}{2} \right) \\ \Delta T_2 = \vec{P} \cdot \left(\frac{\vec{v}'_B + \vec{v}_B}{2} \right) \end{cases}$$

de manera que la disminución de la energía cinética del conjunto sería

$$-\Delta T = \vec{P} \cdot \left[\frac{\vec{v}'_A + \vec{v}_A}{2} - \frac{\vec{v}'_B + \vec{v}_B}{2} \right] = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot [(\vec{v}'_A - \vec{v}'_B) + (\vec{v}_A - \vec{v}_B)]$$



Para la energía cinética de las velocidades perdidas tendríamos

$$\begin{cases} T_{w1} = -\vec{P} \cdot \left(\frac{\vec{v}'_A - \vec{v}_A}{2} \right) \\ T_{w2} = \vec{P} \cdot \left(\frac{\vec{v}'_B - \vec{v}_B}{2} \right) \end{cases}$$

de manera que la suma sería

$$T_w = -\frac{1}{2} \vec{P} \cdot [(\vec{v}'_A - \vec{v}'_B) - (\vec{v}_A - \vec{v}_B)]$$

Si no hay rozamiento $\vec{P} \parallel \hat{n}$ de manera que $\vec{P} \cdot (\vec{v}'_A - \vec{v}'_B) = -\varepsilon \vec{P} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$ de manera que

$$\begin{cases} -\Delta T = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B) [-\varepsilon + 1] \\ T_w = -\frac{1}{2} \vec{P} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B) [-\varepsilon - 1] \end{cases}$$

y entonces

$$-\Delta T = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} T_w$$

Esta expresión nos proporciona el resultado cuantitativo de la clasificación de los choques:

- Caso elástico, $\varepsilon = 1$, $\Delta T = 0$ y la energía se conserva $T_a = T_d$.
- Caso plástico, $\varepsilon = 0$, $-\Delta T = T_w$ que es el teorema de Carnot ya que al ser cero la velocidad de alejamiento el resultado del choque es el mismo que la aparición repentina de una ligadura.
- Caso inelástico, $0 < \varepsilon < 1$, la disminución de energía toma un valor intermedio $0 < -\Delta T < T_w$.

Las expresión anterior también se cumple cuando:

- Los enlaces se encuentran aplicados en puntos sin velocidad: $\vec{v}'_\alpha = \vec{v}_\alpha = 0$ (articulación plana, rótula).
- Las percusiones de los enlaces son perpendiculares a la velocidad del punto antes y después: $\vec{P}_\alpha^{\text{enl}} \perp \vec{v}_\alpha, \vec{v}'_\alpha$ (deslizadera sin rozamiento, hilo unido a un punto).

Ejemplos de la primera situación son: el del disco y el bloque (C2H5P2) y el de los dos discos (C2H7P2) considerándolo como un choque con $\varepsilon = 0$. Ejemplo de la segunda situación es el del bloque y la barra (C2H7P1) considerándolo como una colisión con $\varepsilon = 0$.



12. Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio

- 12.1 Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.
- 12.2 Determinación de frecuencias naturales de oscilación.
- 12.3 Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.
- 12.4 Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.

Las pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio son uno de los ejemplos más bellos de la potencia de los métodos analíticos de la mecánica, a la vez que sirven de base para el estudio de otros problemas de gran importancia como la Física del Estado Sólido, Vibraciones Mecánicas, Estabilidad de Estructuras, Circuitos Eléctricos Acoplados, etc.

12.1. Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.

Las oscilaciones de cualquier sistema por complejo que sea pueden estudiarse siguiendo un procedimiento general que surge de la simplificación de que los movimientos sean pequeños. Para mayor claridad aplicaremos el método primero a un sistema con 1 grado de libertad y luego lo extenderemos a sistemas con N grados de libertad.

Oscilaciones libres en un sistema con 1 grado de libertad.

Consideremos un sistema conservativo, holónomo y esclerónomo cuya posición viene determinada por una única coordenada q . Si el potencial $V = V(q)$ tiene un mínimo en $q = q_0$ se cumple,

$$\left(\frac{dV}{dq}\right)_{q_0} = 0$$

$$\left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q_0} > 0$$

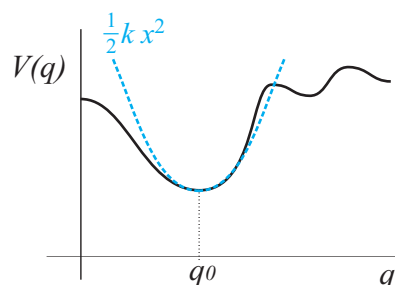
de manera que para posiciones próximas al equilibrio $q = q_0$ podemos desarrollar el potencial en serie de potencias,

$$V(q) = V(q_0) + \left(\frac{dV}{dq}\right)_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q_0} (q - q_0)^2 + \dots \approx Cte + \frac{1}{2}k (q - q_0)^2$$

siendo $k = (d^2V/dq^2)_{q_0}$ una constante positiva. Utilizando como coordenada el desplazamiento desde la posición de equilibrio, $x \equiv q - q_0$, el potencial quedaría

$$V(x) \approx \frac{1}{2}k x^2$$

que tiene la misma forma que el potencial elástico de un muelle de rigidez k siendo x el alargamiento. Desde el punto de vista del potencial lo que estamos haciendo es aproximarlos alrededor del mínimo por una parábola con la misma curvatura.



La energía cinética también se expresa en función de q y su derivada ya que para cualquier partícula del sistema $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q)$ y entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} f(q) \dot{q}^2$$

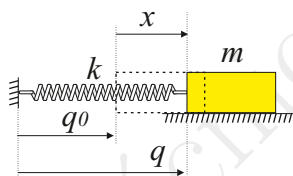
es una función cuadrática de la derivada de la coordenada. Para valores próximos a la posición de equilibrio podemos aproximar $f(q) \approx f(q_0)$ que es una constante positiva ya que $T > 0$ si $\dot{q} \neq 0$. Llamando $m \equiv f(q_0)$ y teniendo en cuenta que $\dot{x} = \dot{q}$,

$$T \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

El lagrangiano del sistema se aproximaría por

$$\mathcal{L} = T - V \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

que tiene la misma forma que el de una masa m moviéndose sobre una línea recta y unida a un muelle de rigidez k , siendo x la separación desde la posición de equilibrio, es decir, el lagrangiano de un oscilador armónico.



La ecuación del movimiento será,

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

y su solución

$$x(t) = q(t) - q_0 = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de las oscilaciones, A la amplitud y δ la fase inicial. Nótese que A y δ dependen de las condiciones iniciales ($x(0) = A \cos \delta$, $\dot{x}(0) = -A\omega \sin \delta$) mientras que ω no y su valor depende de las propiedades del sistema. Además como k y m son positivas ω es siempre un número real.

Si tomamos como ejemplo el péndulo formado por una masa puntual,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \ell \cos \theta$$

el potencial tiene un mínimo para $\theta_0 = 0$ y la segunda derivada en el equilibrio nos daría la constante

$$k_{\text{eq}} = \left(\frac{d^2 V}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} = m g \ell \cos \theta_0 = m g \ell$$

De forma similar para la energía cinética

$$m_{\text{eq}} = \left(\frac{d^2 T}{d\dot{\theta}^2} \right)_{\theta_0} = m \ell^2$$

de manera que la frecuencia propia resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}}} = \sqrt{\frac{m g \ell}{m \ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

que coincide con el valor que obtuvimos en la aproximación de ángulos pequeños.

**12.1.1. Oscilaciones libres en un sistema con N grado de libertad.**

Extenderemos el proceso anterior para un sistema conservativo, holónomo y esclerónomo con N grados de libertad, q_1, \dots, q_N . En la posición de equilibrio el potencial es estacionario:

$$V(q_1, \dots, q_N) \Rightarrow Q_i = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_0, i = 1, \dots, N$$

Desarrollando el potencial alrededor del equilibrio se tiene una constante, el término lineal sería nulo y el primer término significativo sería el cuadrático,

$$V(q_1, \dots, q_N) = V_0 + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N k_{ij} (q_i - q_i^0) (q_j - q_j^0) + \dots$$

siendo

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$$

Utilizando los desplazamientos desde el equilibrio $x_i = q_i - q_i^0$, entonces:

$$V(x_1, \dots, x_N) \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j$$

donde ya hemos prescindido de la constante V_0 que no tiene ningún efecto. El potencial se convierte en una forma cuadrática cuya matriz de coeficientes es simétrica. Si la posición de equilibrio es estable, el potencial debe tener un mínimo lo cual hace que la forma cuadrática sea definida positiva.

Nota. La condición que debe cumplir la matriz k_{ij} para que la forma cuadrática sea definida positiva es que todos los menores principales tienen determinante positivo,

$$|k_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & \dots & k_{NN} \end{vmatrix} > 0$$

Para determinar el movimiento será necesario conocer además la energía cinética. Considerando otra vez la situación más sencilla que es el sistema llamado “natural” (holónomo y esclerónomo):

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_N) \Rightarrow \vec{v}_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$$

La energía será en este caso una función cuadrática de las velocidades,

$$T \equiv \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

siendo las funciones

$$f_{ij}(q_1, \dots, q_N) = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} = f_{ji}$$

En la aproximación de pequeños movimientos puede considerarse que estas funciones no varían apreciablemente de su valor en el equilibrio y escribirse:

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

siendo $m_{ij} = m_{ji} = f_{ij}(q_1^0, \dots, q_N^0)$.

La energía cinética es también una función cuadrática dada por una matriz simétrica que además es definida positiva (la energía cinética siempre es positiva).

Podemos escribir la función lagrangiana como diferencia de dos formas cuadráticas:

$$\mathcal{L} = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j \quad (12.27)$$

o en forma matricial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{x}_1 \quad \cdots \quad \dot{x}_N] \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} - \frac{1}{2} [x_1 \quad \cdots \quad x_N] \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

La ecuación del movimiento de la coordenada genérica x_i será:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j = 0$$

donde ya hemos utilizado que las matrices son simétricas.

Se observa claramente que los elementos no diagonales hacen que en la ecuación de la coordenada x_i aparezcan los desplazamientos de todas las coordenadas x_j y sus aceleraciones \ddot{x}_j . El efecto de estos términos es que el movimiento de una coordenada influyen los de todas las demás, se dice que las oscilaciones están acopladas. Por ello ha de esperarse que el movimiento se realice también de forma colectiva.

Escribiendo de forma conjunta todas las ecuaciones del movimiento tenemos:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.28)$$

lo que constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogéneo.

12.2. Determinación de frecuencias naturales de oscilación.

Las soluciones de la ecuación 12.28 han de describir un movimiento del sistema de forma colectiva lo que puede obtenerse utilizando la misma dependencia temporal para todas las coordenadas pero con diferentes amplitudes y fases:

$$x_j = a_j e^{i\omega t} \quad (12.29)$$

con a_j constantes complejas. En forma matricial:

$$X = A e^{i\omega t}$$

Introduciendo esta función en la ecuación del movimiento del sistema se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} A = 0 \quad (12.30)$$

que constituye un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones (problema de valores propios). Se sabe de Álgebra Lineal que para que exista solución no trivial el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser nulo:

$$\det \{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} = \begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & \cdots & k_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (12.31)$$

es la llamada *ecuación característica o secular*. Esta última ecuación conduce a un polinomio de grado N en ω^2 que tendrá, en principio, N raíces diferentes

$$\{\omega_\lambda^2; \lambda = 1 \dots N\}$$



que se denominan *frecuencias naturales o propias* del sistema y que dependen únicamente de los coeficientes k_{ij} y m_{ij} . Estas frecuencias naturales son características del sistema y constituyen los únicos valores para los que existe una solución armónica del tipo (12.29) alrededor de la posición de equilibrio.

Se puede demostrar (véase Apéndice al final de este tema) que en el problema de valores propios (12.30) todos los autovalores son reales cuando las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} son hermíticas, es decir, coinciden con su transpuesta conjugada. También es fácil comprobar que si las dos formas cuadráticas son definidas positivas los autovalores serán además positivos.

En el caso que estamos considerando las matrices son reales y simétricas y por tanto hermíticas. La energía cinética es una magnitud siempre positiva y por ello la forma cuadrática correspondiente es definida positiva. Para que el potencial sea definido positivo lo que tiene que ocurrir es que debe aumentar para cualquier valor del desplazamiento alrededor del equilibrio y esto sucede cuando el potencial es un mínimo. Por tanto podemos establecer que:

$$\text{Holónomo y Esclerónomo} + \text{Posición de Equilibrio Estable} \Rightarrow \omega_\lambda^2 > 0 \quad \lambda = 1 \dots N$$

12.3. Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.

Para cada una de las frecuencias naturales ω_λ puede resolverse el sistema lineal de ecuaciones (12.30), que ya no serán todas independientes, para determinar, por ejemplo, las relaciones entre la primera y el resto de las amplitudes:

$$a_{i\lambda} = a_{i\lambda}(a_{1\lambda}) ; i = 2 \dots N$$

Esas relaciones serán reales ya que los coeficientes del sistema (12.30) son reales y por ello las amplitudes pueden tomarse todas reales (véase Apéndice). La indeterminación planteada permite exigir una condición adicional de normalización:

$$\mathbf{A}_\lambda^t \mathbf{M} \mathbf{A}_\lambda = \mathbf{1}$$

Se obtienen por tanto N soluciones independientes del sistema, correspondientes a los N valores de las frecuencias naturales ω_λ . La solución general será la combinación lineal de estas:

$$X = \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda A_\lambda e^{i\omega_\lambda t}$$

siendo C_λ constantes complejas. Tomando la parte real se obtiene:

$$X = \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda \zeta_\lambda(t) \tag{12.32}$$

donde

$$\zeta_\lambda(t) = \text{Re}(C_\lambda e^{i\omega t}) = b_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda)$$

La solución general (12.32) del sistema (12.28) consiste en la superposición de N movimientos armónicos independientes, ζ_λ , con amplitudes (b_λ) y fases (δ_λ) arbitrarias pero con frecuencias totalmente determinadas que son precisamente cada una de las frecuencias naturales del sistema, ω_λ . A estas oscilaciones que representan los N movimientos diferentes que realiza el sistema se les llama *modos normales*.

La relación (12.32) entre los modos normales y los desplazamientos puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_N \end{bmatrix}$$

que es formalmente idéntica a la de una transformación de coordenadas, donde los desplazamientos desde el equilibrio x_j vienen dados en función de N nuevas cantidades, ζ_λ , que reciben el nombre de *coordenadas*

normales. Estas coordenadas normales cumplen una importante propiedad, su ecuación del movimiento es la del oscilador armónico:

$$\ddot{\zeta}_\lambda + \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda = 0; \quad \lambda = 1 \dots N$$

y por tanto, utilizando estas nuevas coordenadas el sistema pasa de N osciladores acoplados a N osciladores independientes, cuyas frecuencias son precisamente las frecuencias naturales del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (\dot{\zeta}_\lambda^2 - \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda^2)$$

Relación entre la estabilidad y las frecuencias propias.

Los modos normales permiten establecer de forma sencilla como el signo de las raíces de la ecuación característica (12.31) es el que determina la estabilidad del movimiento alrededor de la posición de equilibrio:

$$\begin{aligned} \omega_\lambda^2 > 0, \forall \lambda &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda) && \text{movimiento acotado} &\Rightarrow & \text{ESTABILIDAD} \\ \exists \lambda, \omega_\lambda^2 < 0 &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda e^{p_\lambda t} + c_\lambda e^{-p_\lambda t} && \text{con } p_\lambda = \sqrt{-\omega_\lambda^2} &\Rightarrow & \text{INESTABILIDAD} \\ \exists \lambda, \omega_\lambda^2 = 0 &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda + c_\lambda t && \text{mov. uniforme} &\Rightarrow & \text{INESTABILIDAD} \end{aligned}$$

Oscilaciones libres en presencia de rozamiento.

Podemos ver el efecto de las fuerzas de rozamiento sobre las oscilaciones del sistema alrededor del equilibrio considerando por simplicidad que las fuerzas de rozamiento son del tipo viscoso y pueden caracterizarse por la función de disipación de Rayleigh,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

que cerca de la posición de equilibrio puede aproximarse por

$$\mathcal{F} \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

Las ecuaciones del movimiento son ahora:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j = 0$$

es decir

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ & & \vdots \\ & & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.33)$$

que de nuevo es un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales de segundo orden que admite una solución del tipo armónica (12.29) cuyas amplitudes son la solución del sistema lineal,

$$\{\mathbf{K} + i\omega\boldsymbol{\alpha} - \omega^2\mathbf{M}\} \mathbf{A} = 0 \quad (12.34)$$

y las frecuencias propias son las soluciones de una nueva ecuación secular,

$$\begin{vmatrix} k_{11} + i\omega\alpha_{11} - \omega^2 m_{11} & \cdots & k_{1N} + i\omega\alpha_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} + i\omega\alpha_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (12.35)$$

cuyas raíces serán en general complejas, $\omega_\lambda = a_\lambda + i b_\lambda$.



Como las fuerzas de rozamiento son disipativas, la energía disminuye con el tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T + V)}{dt} = -2\mathcal{F} < 0$$

y por ello la parte imaginaria de las frecuencias es negativa, $b_\lambda < 0$, por lo que los modos serían una oscilación armónica modulada por una exponencial decreciente,

$$\zeta_\lambda = B_\lambda e^{-b_\lambda t} \cos(a_\lambda t + \delta_\lambda)$$

Nótese que hemos tomado para los modos normales el caso subamortiguado porque es el que mantiene las oscilaciones. Si el rozamiento es grande desaparecen las oscilaciones (caso sobreamortiguado) y en medio se encuentra el caso crítico. Evidentemente, al haber varios grados de libertad, se pueden mezclar distintos casos de amortiguamiento en los diferentes modos.

12.4. Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.

Es de enorme importancia el estudio de las pequeñas oscilaciones en presencia de fuerzas externas variables con el tiempo. Se puede obtener una idea del comportamiento general de estos sistemas en la configuración más sencilla. Para ello añadiremos a las ecuaciones (12.33) del movimiento una fuerza variable en cada coordenada,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\alpha} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (12.36)$$

La solución de este sistema no homogéneo será la suma de la solución general de la parte homogénea y una solución particular de la completa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^h + \mathbf{X}^{nh}$$

siendo (12.32) la solución general de la homogénea pero con las frecuencias complejas.

Para encontrar la solución particular de la completa es conveniente “cambiar” a las coordenadas normales, así, la ecuación del movimiento será ahora:

$$\ddot{\zeta}_\lambda + \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda = Q_\lambda(t); \quad \lambda = 1 \dots N \quad (12.37)$$

siendo Q_λ la fuerza generalizada asociada con la coordenada normal y que se obtiene según la forma habitual:

$$Q_\lambda(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_\lambda} F_i(t) = \sum_{i=1}^N a_{i\lambda} F_i(t) = [F_1 \quad \dots \quad F_N] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ & \ddots & \\ & & a_{NN} \end{bmatrix}$$

La variación temporal de estas Q_λ dependerá de la forma de las fuerzas variables. El caso más sencillo corresponde a una dependencia armónica común para todas las fuerzas, $Q_\lambda(t) = Q_\lambda^0 \cos(\omega t + \phi)$, donde ω sería la frecuencia del agente excitador externo.

La solución será también armónica con la misma fase que la fuerza pero con una amplitud dada por la ecuación del movimiento (12.37),

$$\zeta_\lambda^{nh} = \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

pasando a los desplazamientos

$$x_i^{nh} = \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

y finalmente

$$x_i(t) = \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \zeta_\lambda + \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

En presencia de rozamiento la solución homogénea desaparece rápidamente (transitorio) por lo que a tiempos grandes sólo se advierte la particular de la no homogénea (permanente):

$$x_i^{\text{perm}}(t) = A_i \cos(\omega t + \phi)$$

donde

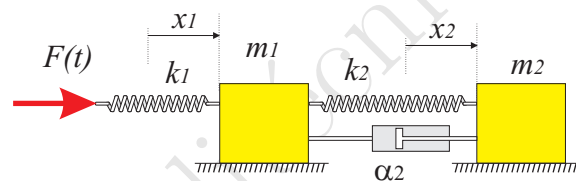
$$A_i(\omega) = \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_{i\lambda} Q_{\lambda}^0}{\omega_{\lambda}^2 - \omega^2} = \frac{\text{polinomio}(N-1; \omega^2)}{\text{polinomio}(N; \omega^2)}$$

La solución particular de la ecuación completa, obtenida en el caso más simple, muestra ya el fenómeno más característico de las oscilaciones forzadas: la *resonancia*. El acoplamiento entre las oscilaciones produce para un sistema de N grados de libertad:

- N picos de resonancia coincidiendo con las N frecuencias naturales del sistema.
- hasta $N - 1$ valores de la frecuencia para los que la amplitud se anula.

Ejemplo. Absorbedor dinámico de vibraciones.

Como acabamos de ver en un sistema con N grados de libertad hay N resonancias y $N - 1$ valores a los que se anula la amplitud. Este último resultado puede utilizarse para absorber las vibraciones que puede generar sobre un cuerpo la existencia en su interior de un motor oscilatorio, por ejemplo una máquina de afeitar, una sierra de vaivén, etc.



Para analizar el fenómeno utilizamos el modelo simplificado de la figura, una fuerza excitadora periódica $F(t)$, una masa m_1 y un muelle k_1 al que se añade otra masa m_2 con otro muelle k_2 con el objetivo que esta segunda masa absorba las vibraciones. En principio consideraremos nulo el rozamiento $\alpha_2 = 0$. La fuerza aplicada al extremo del muelle 1 se traduce realiza por medio de un desplazamiento $a(t)$ de manera que el potencial es,

$$V = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - a(t))^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

mientras que la energía cinética es simplemente

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 a(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si la fuerza es armónica $F(t) = k_1 a(t) = k_1 h e^{i\omega t}$ buscamos una solución del régimen permanente con la misma frecuencia,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\text{perm}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

se obtiene para las amplitudes a_i la siguiente solución

$$\frac{a_1}{h} = \frac{\omega_{01}^2 (\omega_{02}^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$\frac{a_2}{h} = \frac{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

donde por comodidad hemos definido

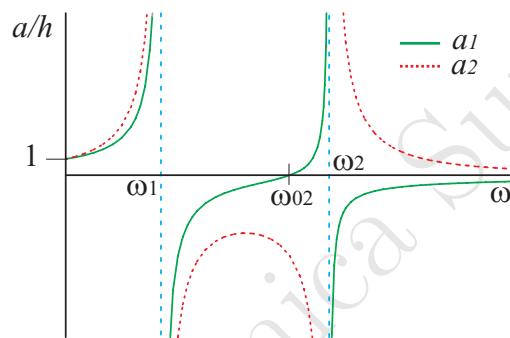
$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1}$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

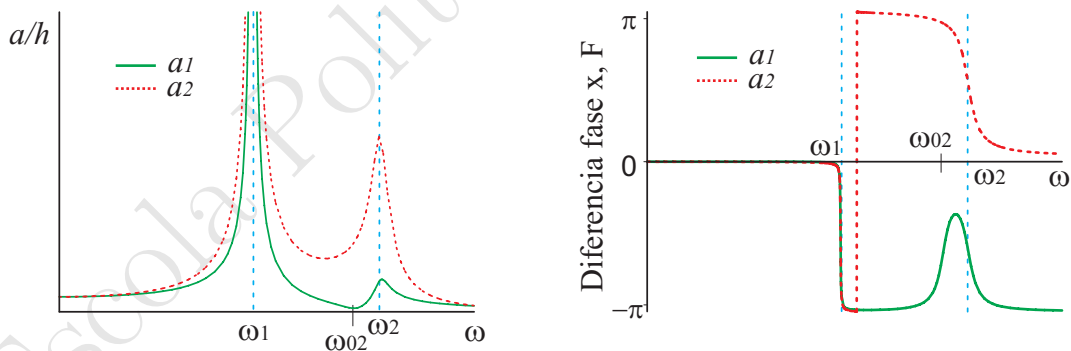
y siendo ω_1 y ω_2 las dos frecuencias propias

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_1} \mp \sqrt{\left(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_1} \right)^2 - 4\omega_{01}^2\omega_{02}^2} \right]$$

Puede demostrarse que $\omega_1 < \omega_{02} < \omega_2$ por lo que entre las dos resonancias se encuentra en valor de la frecuencia para el que anula la amplitud del movimiento de la masa 1, $\omega = \omega_{02}$.



Si se tiene en cuenta el rozamiento los valores de las frecuencias de resonancia y la que anula el movimiento de la masa 1 se ven afectadas por el valor del amortiguamiento pero la conclusión se mantiene.

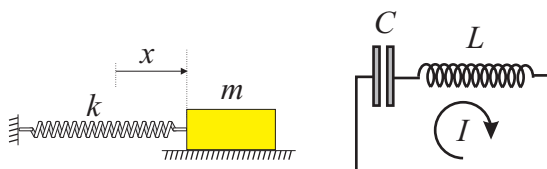


Analogías eléctricas

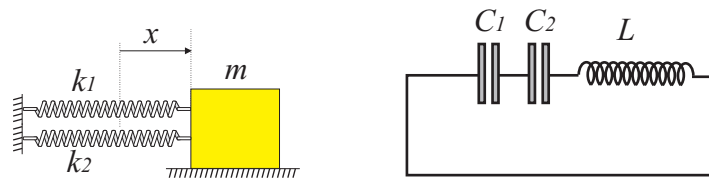
La ecuación del movimiento del oscilador armónico es formalmente idéntica a un resonador eléctrico formado por una bobina de inductancia L y un condensador de capacidad C , si tenemos en cuenta la relación entre la corriente eléctrica y la carga, $I = dQ/dt$,

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0 \quad \Rightarrow \quad L \ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0$$

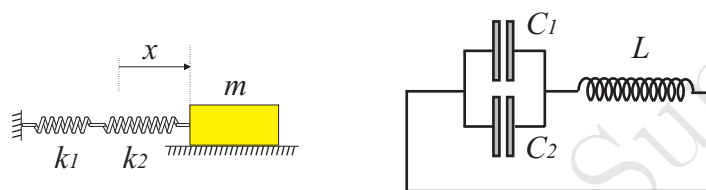
sin más que identificar el desplazamiento x con la carga Q , la masa m con la inductancia L y la rigidez k con la inversa de la capacidad $1/C$. La energía acumulada en la bobina $\frac{1}{2} L I^2$ es análoga a la energía cinética $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ y la acumulada en el condensador $\frac{1}{2} Q^2/C$ a la energía potencial $\frac{1}{2} k x^2$.



Para utilizar correctamente la analogía debe tenerse en cuenta que la capacidad de los condensadores se suman cuando están en paralelo lo mismo que ocurre con los muelles pero la analogía tiene lugar entre la inversa de la capacidad y la rigidez del muelle, véase la figura siguiente.



$$k = k_1 + k_2 \longleftrightarrow 1/C = 1/C_1 + 1/C_2$$



$$1/k = 1/k_1 + 1/k_2 \longleftrightarrow C = C_1 + C_2$$

El efecto del rozamiento viscoso (proporcional a la velocidad) es análogo al de la resistencia, así el oscilador armónico amortiguado equivale al circuito RLC en serie,

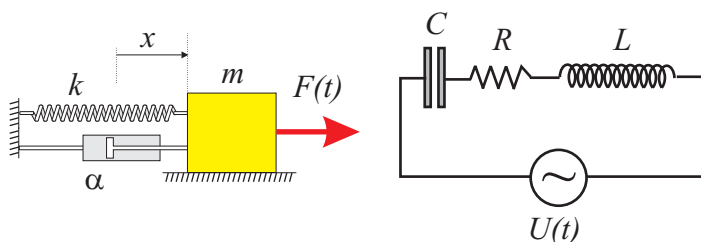
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

De la misma forma una fuerza externa (oscilador forzado) es equivalente a la presencia de una fuerza electromotriz $U(t)$

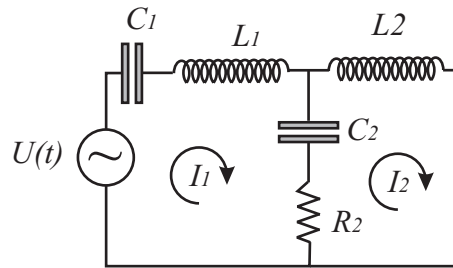
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t) \Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U(t)$$

Entonces,

desplazamiento,	$x \longleftrightarrow Q$,	carga
masa,	$m \longleftrightarrow L$,	inductancia
rigidez,	$k \longleftrightarrow \frac{1}{C}$,	inversa de la capacidad
amortiguamiento,	$\alpha \longleftrightarrow R$,	resistencia
fuerza,	$F(t) \longleftrightarrow U(t)$,	fuerza electromotriz



Estas analogías pueden extenderse al caso de oscilaciones acopladas dando lugar a una red circuitos eléctricos cuya solución es análoga a la del sistema mecánico. En la figura siguiente se muestra el circuito eléctrico análogo al absorbedor dinámico de vibraciones que hemos visto anteriormente.



Escuela Politécnica Superior

Apéndice: Problema de valores propios

Sea el problema de valores propios:

$$\mathbf{K} A_\lambda = \omega_\lambda^2 \mathbf{M} A_\lambda \quad (1)$$

Entonces:

$$A_\mu^\dagger \mathbf{K} A_\lambda = \omega_\lambda^2 A_\mu^\dagger \mathbf{M} A_\lambda \quad (2)$$

Tomando adjuntos (transpuesto + complejo conjugado):

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{K}^\dagger A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M}^\dagger A_\mu$$

Si las matrices son hermíticas (autoadjuntas) se tiene:

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{K} A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu$$

y utilizando (2) se obtiene:

$$\omega_\mu^2 A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu \Rightarrow (\omega_\mu^2 - \omega_\lambda^{2*}) A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = 0 \quad (3)$$

De esta ecuación se obtienen dos conclusiones importantes:

- i) Si $\mu = \lambda \Rightarrow \omega_\lambda^2 = \omega_\lambda^{2*}$, todas las raíces son reales.
- ii) Si $\omega_\mu^2 \neq \omega_\lambda^2 \Rightarrow A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = 0$, los autovectores procedentes de raíces distintas son ortogonales.

Además, los autovalores pueden elegirse reales. Suponiendo que son complejos se podrá escribir:

$$A_\lambda = \vec{\alpha}_\lambda + i\vec{\beta}_\lambda$$

por lo que:

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\lambda = \{ \vec{\alpha}_\lambda^t - i\vec{\beta}_\lambda^t \} \mathbf{M} \{ \vec{\alpha}_\lambda + i\vec{\beta}_\lambda \} = \vec{\alpha}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\alpha}_\lambda + \vec{\beta}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\beta}_\lambda + i \{ \vec{\alpha}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\beta}_\lambda - \vec{\beta}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\alpha}_\lambda \}$$

y si \mathbf{M} es hermítica,

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\lambda$$

es siempre real. Esto hace posible elegir los autovectores reales y ortonormales:

$$A_\mu^t \mathbf{M} A_\lambda = \delta_{\mu\lambda} \quad (4)$$

Reescribiendo la ecuación (2) se tiene:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{A_\lambda^t \mathbf{K} A_\lambda}{A_\lambda^t \mathbf{M} A_\lambda}$$

Si las dos matrices corresponden a formas cuadráticas definidas positivas los autovalores serán todos positivos y finitos:

$$\mathbf{M}, \mathbf{K} \text{ hermíticas y definidas positivas } \Rightarrow 0 < \omega_\lambda^2 < \infty, \forall \lambda$$