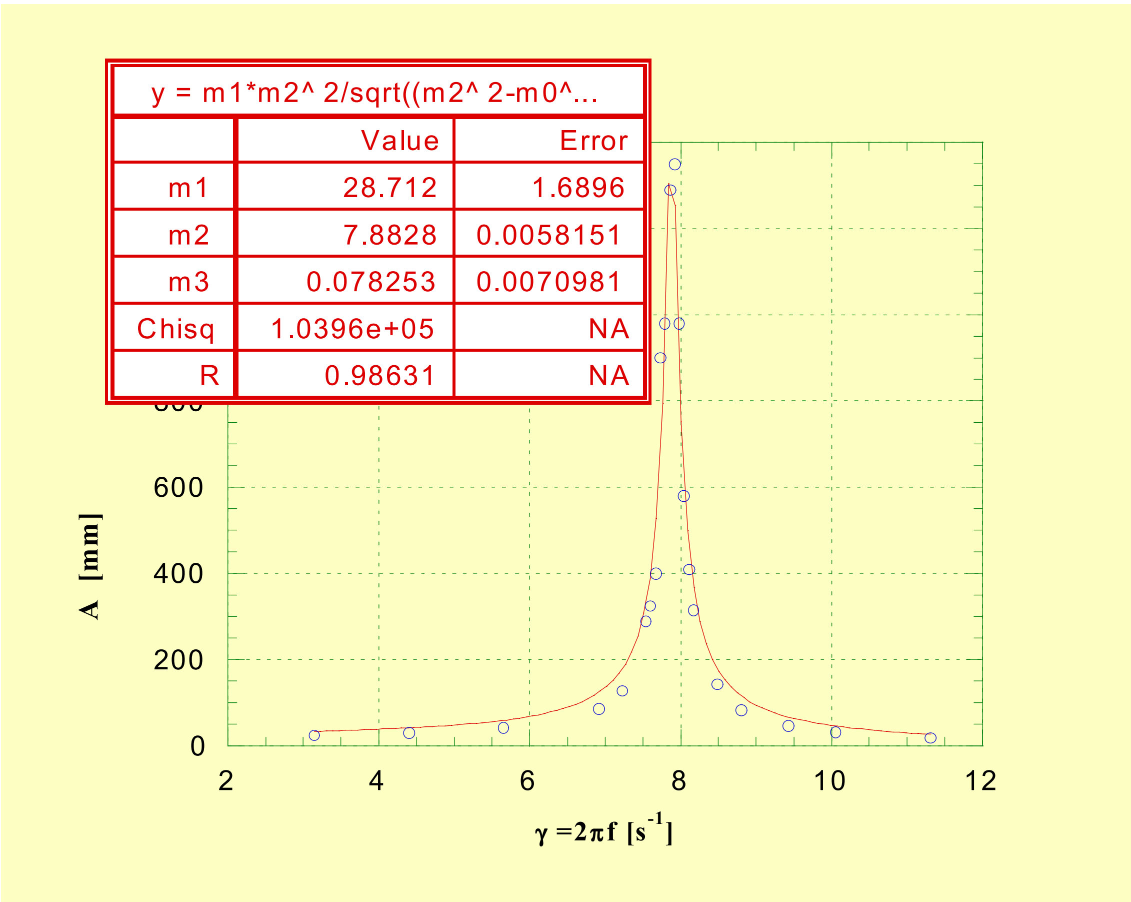
Métodos experimentales para el laboratorio de Física



Ana Jesús López Díaz

A Guillermo y Cecilia

TABLA DE CONTENIDOS

Prefacio

Este libro es fruto de mi experiencia como encargada del laboratorio de prácticas de Física, Mecánica y Electromagnetismo en la Escuela Politécnica Superior de Ferrol. Las dificultades con que tropiezan los estudiantes de cualquier carrera científico-tecnológica en sus primeros contactos con el laboratorio de física, agravadas por la práctica inexistencia de bibliografía escrita en castellano, me han impulsado a poner a su disposición un texto que les sirva de orientación en la realización de los trabajos experimentales. Aunque el título hace referencia únicamente al laboratorio de física con este texto se pretende introducir al alumno en las técnicas básicas de tratamiento de los datos experimentales utilizadas en cualquier laboratorio científico o tecnológico.

El texto está concebido con un carácter eminentemente práctico; por ello se ha tratado de ilustrar cada concepto con ejemplos sencillos pero reales, tomados de la práctica diaria de un laboratorio de estudiantes y se ha evitado, en lo posible, la inclusión de desarrollos matemáticos o disquisiciones teóricas, remitiendo al alumno interesado a los textos señalados en la bibliografía.. Se trata de un punto de vista muy utilitario con el cual se pretende mostrar, por medio de los ejemplos, las ventajas de actuar de una determinada manera y no de otra al enfrentarse a los resultados de un experimento. Siguiendo esta filosofía, se incluyen muchos "ejemplos hechos" que sirven al alumno de guía y se proponen, al final de cada tema, un buen numero de ejercicios para reforzar y en muchos casos completar los conceptos presentados.

El libro se divide en ocho capítulos. En el Capítulo I se discuten las características generales de las magnitudes físicas y su medida; lo cual conduce inmediatamente a la necesidad de contar con patrones o unidades bien definidas, llegando así, en el Capítulo II, al Sistema Internacional de Unidades (SI). Una vez realizada la medida de una cierta magnitud es necesario registrar adecuadamente los valores obtenidos para facilitar su análisis posterior, de lo cual trata el Capítulo III. La potencia de la representación gráfica como herramienta de análisis tanto cualitativo como cuantitativo es indudable en el ámbito científico. Para sacar partido de dicha herramienta es necesario conocer una serie de técnicas de “estilo”. De todo ello se ocupa el Capítulo IV. En los dos capítulos siguientes nos detenemos en el análisis de la incertidumbre en las medidas, Capítulo V, cuyo conocimiento es necesario para sacar conclusiones significativas de los resultados; centrándonos, en el Capítulo VI, en las incertidumbres de carácter aleatorio. En el Capítulo VII se introducen las técnicas de ajuste a funciones de los datos experimentales, que constituyen una herramienta fundamental de análisis cuantitativo. Hoy en día las calculadoras científicas y los ordenadores están a disposición de cualquier alumno y los laboratorios docentes disponen de ordenadores tanto para la adquisición de datos como para su análisis; es por ello que hemos incluido en este capítulo la manera de hacer los ajustes tanto con una calculadora como con una hoja de cálculo. Finalmente, en el Capítulo VIII, se comentan las etapas “comunes” en la realización de cualquier experimento, el tipo de información que debe registrarse y la manera de presentar los resultados en un informe incluyendo, una vez más, un ejemplo práctico.

Dada la gran variedad de temas que se tratan en el libro, se ha incluido al final una bibliografía actualizada y organizada por materias, que permite al alumno profundizar en aquellas cuestiones de su interés. Se incluyen también algunas revistas científicas para animarlo a manejar la vía de comunicación científica habitual, así como algunas direcciones de interés en Internet.

Finalmente quiero agradecer al Prof. Alberto Ramil Rego su ayuda y sus consejos en la realización de este trabajo.

Ana Jesús López Díaz

Ferrol, diciembre de 2001

I. Magnitudes físicas y su medida

I.1 *La física como ciencia basada en las medidas*

La física es una ciencia basada en la observación y la experimentación cuyo objeto de estudio es el universo "físico", lo cuál no implica que no pueda tener un cierto componente especulativo. No obstante cualquier componente especulativo ha de tener siempre conexión con la observación y la experimentación.

La observación y la experimentación son incompletas si no están asociadas con las mediciones. La física es una ciencia cuantitativa y la validez de muchas consideraciones que se hacen en física depende de la precisión en las medidas. Un ejemplo que muestra la importancia de la precisión en las medidas es la afirmación de que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores en movimiento relativo uniforme. Esta afirmación es fundamental para la teoría de la relatividad formulada por Einstein y la consideramos válida como resultado de los experimentos de Michelson y sus colaboradores, iniciados hace casi 100 años y repetidos posteriormente por muchos otros con mucha mayor precisión[1]. Otro ejemplo sería la verificación con una precisión del orden de $1/10^{21}$, de la igualdad de la carga negativa del electrón y positiva del protón y de la carga cero del neutrón.

Es importante tener en cuenta que muchas ideas que aceptamos en física dependen de la precisión de las medidas y que por ello una actividad relevante de los físicos es mejorar continuamente la precisión de las medidas.

I.2 *Magnitudes físicas*

Una magnitud física es una propiedad concreta y medible de las entidades, procesos y estados del mundo real; por ejemplo longitud, fuerza, velocidad...

Medir consiste en un conjunto de acciones experimentales (incluyendo cálculos) que permiten asignar un valor cuantitativo, un número, a esa magnitud física; para lo cual se compara con otras de la misma especie que se toman como patrón o unidad. El resultado de una medida puede expresarse diciendo que el valor de la magnitud es la combinación del número que resulta de la medida con la unidad:

$$\textit{Magnitud física} = \textit{valor numérico} \times \textit{unidad.}$$

La unidad es tan importante como el número puesto que sin ella este carece de significado. Supongamos que la distancia entre dos puntos es 8 m, evidentemente la misma distancia la podríamos dar como 800 cm, es decir, con un número 100 veces más grande si utilizamos una unidad 100 veces más pequeña

I.3 *Sistemas de unidades*

Resulta obvio que antes de realizar la medida se debe seleccionar una unidad para cada magnitud. Así para medir distancias podríamos elegir como unidad una longitud cualquiera. Podríamos, de igual manera, escoger otras dos unidades arbitrarias para medir superficies y volúmenes; de hecho así se hacía antiguamente, pero esto conduciría a una proliferación innecesaria de unidades que podrían no tener relación entre sí y que desde luego no serían prácticas.

[1] http://physics.nist.gov/cuu/Constants

De los infinitos grupos de unidades que, en principio, pueden adoptarse para medir una clase de fenómenos físicos (por ejemplo fenómenos mecánicos, o eléctricos...), interesan aquellos que para medir las diferentes magnitudes físicas utilicen el mínimo número de unidades arbitrarias independientes y que, a partir de ellas, puedan deducirse las unidades de todas las demás magnitudes. Las primeras reciben el nombre de *unidades básicas o fundamentales* y las segundas se llaman *unidades derivadas*. Un conjunto de unidades fundamentales que son suficientes para medir las propiedades de una clase de fenómenos físicos, constituye un *sistema de unidades*.

Una vez elegidas las unidades fundamentales, las unidades derivadas se obtienen a partir de ellas utilizando las definiciones de las correspondientes magnitudes físicas. Así por ejemplo, si se toman la longitud y el tiempo como magnitudes fundamentales, la velocidad será una magnitud derivada que puede definirse por la expresión $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ y si tomamos como unidad de longitud el metro y como unidad de tiempo el segundo, la unidad de velocidad se obtendrá a partir de la definición y será el metro por segundo (m/s).

I.4 *Dimensiones*

Cada magnitud física posee una cualidad propia que impide que pueda compararse con otra magnitud distinta. Por eso no puede decirse que una determinada velocidad sea menor igual o mayor que cierta temperatura, porque la velocidad y la temperatura de un cuerpo son cosas intrínsecamente diferentes.

Esta cualidad de una magnitud física queda especificada parcialmente por lo que se conoce como dimensiones de la magnitud. Las dimensiones presentan una descripción de esa magnitud que no tiene en cuenta las características vectoriales o tensoriales ni ninguna relación de ese tipo. Proporcionan una descripción cualitativa de las propiedades de las magnitudes físicas y son un concepto más abstracto que las unidades. Aunque una distancia se mida en pulgadas, en metros o en millas náuticas, sigue siendo una distancia y se dice que tiene dimensiones de longitud.

Entre las diferentes magnitudes físicas pueden establecerse relaciones que no dependen de las unidades utilizadas sino sólo de ciertas magnitudes que se han adoptado como fundamentales. Supongamos que escogemos como magnitudes fundamentales la longitud, la masa y el tiempo y las simbolizamos como L, M, T. El área de una superficie S, que se obtiene siempre multiplicando dos longitudes, decimos que tiene dimensión 2 en L y se simboliza como $[S]=L^2$, análogamente un volumen tendrá dimensión 3 en L y se expresará $[V]=L^3$.

La expresión simbólica que define una magnitud en función de las fundamentales recibe el nombre de *ecuación de dimensiones*. La ecuación de dimensiones de la velocidad será $[v]=L/T=LT^{-1}$ y dado que una aceleración es un cambio de velocidad dividido por el tiempo durante el cual se produce podemos escribir $[a]=LT^{-2}$ y una fuerza la podemos expresar como el producto de una masa por una aceleración y por tanto $[F]=MLT^{-2}$.

Existen magnitudes en física que son adimensionales, en ellas todos los exponentes de las dimensiones de las magnitudes fundamentales son cero. Un ejemplo es el ángulo cuyo valor en radianes se obtiene dividiendo la longitud del arco correspondiente por el radio. Su dimensión será $LL^{-1}=L^0$.

Dado que la elección de las magnitudes fundamentales es, en principio, arbitraria, la ecuación de dimensiones de una misma magnitud puede variar. Si en lugar de la longitud hubiéramos elegido el área (A) como magnitud fundamental, la longitud tendría como ecuación de dimensiones $[L]=A^{1/2}$ y las dimensiones de la velocidad serían $[v]= A^{1/2}T^{-1}$.

Además, como ya hemos señalado, la ecuación de dimensiones de una magnitud no la define completamente. Hemos visto que las dimensiones de una fuerza en un sistema LMT son $[F]=MLT^{-2}$; por tanto el trabajo W, que se puede expresar como una fuerza multiplicada por una distancia, tiene como ecuación de dimensiones $[W]=ML^2T^{-2}$, pero el momento de una fuerza también resulta de multiplicar (producto vectorial) una fuerza por una distancia, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, y por tanto tendrá la misma ecuación de dimensiones que el trabajo aunque se trata de magnitudes distintas.

A pesar de estas limitaciones, el concepto de dimensiones de una magnitud tiene diversas aplicaciones prácticas:

Es muy útil para comprobar si una ecuación física es incorrecta; si las dimensiones a ambos lados de la igualdad son distintas, puesto que no se pueden igualar magnitudes diferentes. Es el "principio de homogeneidad dimensional".

Permite desarrollar una técnica de gran utilidad en la resolución de problemas físicos para los que no existe un modelo teórico y que pueden depender de muchas variables. Esta técnica se denomina Análisis Dimensional y se basa en el principio de homogeneidad dimensional. Con ella se pueden reducir el número de variables que intervienen en un problema agrupando las variables de manera que den lugar a una nueva magnitud adimensional. Aunque de aplicación general, se utiliza sobre todo en experimentación en mecánica de fluidos[2].

I.5 *Órdenes de magnitud*

El rango de los sistemas que estudia la física van desde los supermacroscópicos, como son las galaxias o el mismo universo, hasta los más submicroscópicos como son las partículas fundamentales; por ello las magnitudes físicas pueden tomar valores muy grandes y muy pequeños, se dice entonces que pueden abarcar muchos órdenes de magnitud; entendiendo como orden de magnitud la potencia de diez más próxima al número. Así decimos que el orden de magnitud de 125 es 10^2; es decir 125 está más cerca de 100 que de 1000. Incrementar en un orden de magnitud significa incrementar en un factor 10 el valor de la magnitud.

En las siguientes tablas se presentan ejemplos de los rangos de las magnitudes masa, longitud y tiempo en el Universo.

Masa (kg)	**Ejemplos**
10^{-27}	Masa del protón
10^{-12}	Célula típica
10^{-5}	Pequeño insecto
10^{16}	Biomasa de la Tierra
5.98×10^{24}	Masa de la Tierra
10^{42}	Masa de la Vía Láctea

Tabla 1.1. Ejemplos de masas de distintos órdenes de magnitud.

[2] V.L.Streeter, E. B. Wylie. Mecánica de los Fluidos. McGraw-Hill 1988

Longitud (m)	Ejemplos
10^{-15}	Tamaño del protón
10^{-10}	Tamaño del átomo
10^{-7}	Longitud de onda de la luz visible
10^{7}	Radio de La Tierra
10^{11}	Distancia Sol-Tierra
10^{20}	Radio de la Vía Láctea
10^{26}	Tamaño del universo observable

Tabla 1.2. Ejemplos de longitudes de distintos órdenes de magnitud.

Tiempo (s)	Ejemplos
10^{-15}	Periodo de la luz visible. Escala de tiempo típica para las reacciones químicas
10^{-9}	Ciclo de reloj para los ordenadores más rápidos La luz viaja 30 cm
10^{-3}	Periodo de una onda sonora
10^{3}	Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra
10^{7}	Tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol (un año)
10^{13}	Tiempo transcurrido desde los primeros hombres
10^{17}	Edad de la Tierra
10^{18}	Edad del Universo

Tabla 1.3. Ejemplos de tiempos de distintos órdenes de magnitud.

Generalmente cuando se plantea algún problema físico, o antes de realizar una medida, es posible acotar el rango de valores en que ha de encontrarse el resultado mediante algunas hipótesis razonables encadenadas con cálculos muy sencillos. Determinar el orden de magnitud puede ser suficiente en muchos casos y si se necesita más precisión, un cálculo previo del orden de magnitud siempre es útil pues nos va a indicar si tiene sentido seguir con el problema o en algunos casos qué hipótesis modificar para obtener una mejor aproximación.

Ejemplo 1: *¿Cuál es la distancia promedio entre las moléculas de aire en una habitación?*

En condiciones estándar, un mol de cualquier gas ocupa $22.4\ \text{L} = 22.4\times10^{-3}\ \text{m}^3$ y un mol contiene un número de Avogadro de moléculas, $N_A = 6.023\times10^{23}$; por lo tanto, el volumen promedio "ocupado" por cada molécula es

$$V \approx \frac{22\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{6\times10^{23}} \approx 4\times10^{-26}\,\mathrm{m}^3$$

y la distancia r entre moléculas vendrá dada por la raíz cúbica de V

$$r \approx \left(10^{-26}\right)^{1/3}\mathrm{m} \approx 10^{-9}\,\mathrm{m}$$

¿Es razonable este resultado?.El radio atómico es típicamente del orden de 10^{-10} m y por lo tanto es razonable que la distancia entre las moléculas del gas sea un orden de magnitud mayor.

Ejemplo 2: *Comparación entre las interacciones gravitatoria y eléctrica en el caso de dos protones y para un protón y un electrón*

Para una misma distancia, la intensidad de la interacción eléctrica está determinada por el factor $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ y la gravitatoria por $G\cdot m_1m_2$. Siendo $G = 6.672\ 59 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-1}}$ y $\varepsilon_0 = 8.854\ 187\ 817\times 10^{-12}\ \mathrm{F\ m^{-1}}$. En el caso de dos protones , hacemos

$$q_1 = q_2 = e = 1.602\ 177\ 33 \times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

$$m_1 = m_2 = m_\mathrm{p} = 1.672\ 623\ 1 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

entonces:

$$\frac{\textit{Interacción eléctrica}}{\textit{Interacción gravitatoria}} = \frac{q_1\cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 G m_1 m_2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 G m_p^2} = 1.24\times10^{36}$$

La interacción eléctrica entre dos protones es 36 órdenes de magnitud superior a gravitatoria. Para el caso de un protón y un electrón, dado que la masa del electrón es aproximadamente unas 2000 veces más pequeña que la del protón, la relación anterior sería tres órdenes de magnitud mayor, es decir del orden de 10^{39}.

El orden de magnitud de la relación entre las interacciones eléctrica y gravitatoria nos permite concluir que la gravitación no interviene en la formación de la estructura de la materia a nivel atómico.

I.6 *Incertidumbre en las medidas*

Para conocer el valor de una magnitud debemos medirla y el proceso de medida requiere de instrumentos adecuados y técnicas de medida. Pero los instrumentos no son perfectos, tienen una resolución limitada, su funcionamiento puede depender de las condiciones ambientales o de la pericia del experimentador y las técnicas de medida pueden basarse en aproximaciones... Todo ello influye en el resultado de la medida de manera que nunca podremos saber el valor verdadero de una magnitud que medimos; el resultado de una medida nunca es un número que se conoce con precisión absoluta siempre conlleva un cierto grado de incertidumbre.

Vamos a considerar un experimento sencillo que consiste en medir la longitud de una mesa, para lo cual utilizaremos las dos reglas de la Figura 1.1. Suponiendo que el cero de la regla se ha situado cuidadosamente en el extremo izquierdo de la mesa, ¿qué longitud tiene esta?.

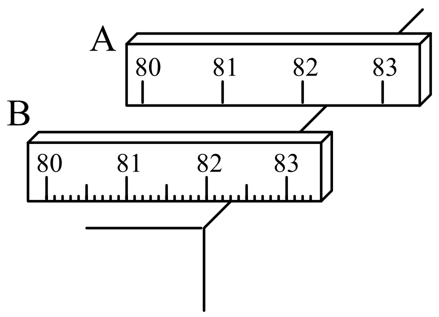


Figura 1.1 Reglas con distintas graduaciones para medir la longitud de una mesa.

La regla A está graduada en centímetros, utilizando esta regla se podrá asegurar con certeza que la longitud de la mesa está entre 82 cm y 83 cm. Se puede decir incluso que está más próxima a 82 cm que a 83 cm, pero realmente nada más. La regla B está graduada en milímetros; con ella se podrá, en principio, mejorar el resultado de la medida. Así, midiendo con la regla B podremos asegurar que la longitud está entre 82.2 cm y 82.3 cm. Para asignar un valor a la longitud, tendremos que estimarlo, y una estimación razonable puede ser tomar el valor central de ese intervalo. Entonces, el resultado de la medida lo resumimos así:

rango con total probabilidad = de 82.2 a 82.3 cm

estimación de la longitud = 82.25 cm

Como resultado de la medida no hemos dado un valor exacto sino un intervalo dentro del cual podemos asegurar que se encuentra el valor de la longitud. Hemos estimado la longitud como el valor central del intervalo. La forma habitual de expresar el resultado es

$$l = (82.25 \pm 0.05)\ \text{cm}$$

El valor central del intervalo, 82.25 podrá utilizarse en cálculos posteriores como valor de la longitud y el tamaño del intervalo, ± 0.05 cm, de ahora en adelante lo denominaremos *incertidumbre de la medida*.

Evidentemente el valor de la incertidumbre en la determinación de la longitud depende de las características de la regla utilizada, en este caso de su graduación, pero también de lo finas que fueran las marcas o de las condiciones ambientales ¿la iluminación era la adecuada para apreciar les divisiones? Y también de la rugosidad de los bordes de la mesa,...En general la incertidumbre en una medida depende de múltiples factores; de las características del instrumento de medida (precisión, calibración...), de la pericia de la persona que lo utiliza, de las condiciones ambientales, de la definición del objeto a medir, etc. Es habitual llamar "*errores*" a las incertidumbres pero ha de tenerse siempre presente que, en este contexto, la palabra error tiene un significado diferente de "error humano" o equivocación. Los errores o incertidumbres en las medidas no se eliminan totalmente actuando de manera más cuidadosa. Por ejemplo, las incertidumbres relacionadas con la precisión del instrumento de medida son inevitables.

Este ejemplo nos ha servido para introducir algunos conceptos importantes, pero en la mayoría de los experimentos las incertidumbres son mucho más difíciles de estimar que aquellas que vienen asociadas a la lectura de una escala graduada. Por ejemplo, cuando queremos medir un intervalo de tiempo con un cronómetro la principal fuente de incertidumbre no es la dificultad en la lectura del dial sino nuestro propio tiempo de reacción a la hora de accionar y detener el cronómetro que introduce en las medidas un factor incontrolable y que varía de forma aleatoria. Las incertidumbres de este tipo pueden estimarse, en muchos casos, repitiendo la medida varias veces y utilizando técnicas estadísticas.

Supongamos que medimos el periodo de un péndulo una vez y obtenemos un valor de 2.3 s. Realizando una única medida sólo podremos considerar la incertidumbre debida a las características de cronómetro, para ver el efecto del tiempo de reacción lo mejor es repetir varias veces la medida. Si obtenemos los siguientes resultados: 2.3 s, 2.4 s, 2.5 s, 2.4 s, ya podremos hacer estimaciones más realistas. En primer lugar, parece natural tomar como mejor estimación del periodo el valor medio de las cuatro medidas, es decir 2.4 s. También parece razonable suponer que el valor del periodo está entre 2.3 s y 2.5 s; es decir:

Rango probable: de 2.3 a 2.5 s

La mejor estimación del periodo = valor medio =2.4 s

Como se verá más adelante, siempre que existan factores incontrolables que afectan al proceso de medida, la dispersión de los resultados nos da información acerca de la incertidumbre en las medidas

Hay situaciones, sin embargo, en las cuales la mera repetición de las medidas no permite cuantificar la incertidumbre. Supongamos que el cronómetro utilizado en la determinación del periodo avanza un 5% más rápido que el segundo patrón. Todos los tiempos medidos serán un 5% mayores que el valor real y por mucho que repitamos las medidas con ese mismo cronómetro no vamos a poder detectar el error. Los errores de este tipo, que afectan a todas las medidas en el mismo sentido, se denominan sistemáticos y pueden llegar a ser muy difíciles de detectar. En este caso se necesitaría comparar el funcionamiento del cronómetro con otro más fiable.

Estos ejemplos ponen de manifiesto que algunas veces es fácil hacer una estimación de las incertidumbres. Otras veces, sin embargo, los resultados experimentales están afectados por incertidumbres que no son fáciles de evaluar. En capítulos posteriores profundizaremos en el análisis de las incertidumbres, cómo se clasifican, cómo se pueden estimar y cómo afectan a los resultados y conclusiones de un experimento. Por ahora nos bastará suponer que sabemos cómo estimar las incertidumbres en todas las magnitudes de interés para tratar la forma más conveniente de expresarlas y cómo han de utilizarse para obtener una conclusión del trabajo experimental.

Ejercicios

1. Escribe la ecuación de dimensiones de las siguientes magnitudes Físicas: fuerza, momento, energía, potencia, viscosidad, entalpía, entropía, campo eléctrico, potencial eléctrico, inducción magnética, campo magnético,

2. Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones es dimensionalmente homogénea
   i) Constante de tiempo = $R{\cdot}C$, donde R = resistencia, C = Capacidad

ii) Velocidad de la luz es $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y ε_0 la constante dieléctrica del vacío.

iii) La energía U almacenada en un condensador $U = \dfrac{1}{2} C V^2$ siendo C la capacidad y V la diferencia de potencial

iv) El periodo T de un péndulo simple es $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, siendo l la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad

v) La velocidad de propagación c de las ondas en una cuerda es $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ siendo T la tensión de la cuerda y μ su masa por unidad de longitud

3. Un hito importante en la evolución del universo, justo después del Big Bang es el tiempo Planck, t_p, cuyo valor depende de tres constantes fundamentales: la velocidad de la luz c = 299 792 456 m s^{-1}, la constante de gravitación universal G = 6.672 59 $\times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, y la constante de Planck h = 6.626 075 $\times$ 10^{-34} J s.
   i) Utilizando el análisis dimensional hallar el valor del tiempo Planck, suponiendo que la constante adimensional vale $(2\pi)^{-1/2}$.
   ii) De manera similar, determinar la longitud Planck y la masa Planck que corresponden al tamaño y masa observables en el tiempo Planck.

4. El ángulo $\Delta\phi$ girado por una varilla sometida a torsión está relacionado con el momento aplicado, M mediante la ecuación $M = C\left(\dfrac{\Delta\phi}{L}\right)$ siendo C una constante y L la longitud de la varilla, se pide:
   iii) Dimensiones y unidades de la constante C
   iv) Utilizar el análisis dimensional para obtener la relación funcional entre la velocidad de propagación de la ondas torsionales en la varilla, v, la constante C, la densidad ρ, y el momento de inercia geométrico, $I = \int r^2 dA$

5. Estimar el número de átomos en la Tierra suponiendo una masa atómica media de 14 g/mol.

6. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de veces que la Tierra ha girado sobre su eje desde que se formó el Sistema Solar?

7. El Sol está perdiendo masa (en forma de energía radiante) al ritmo de 4×10^9 kg/s ¿Qué fracción de su masa ha perdido en la vida del Sistema Solar?

II. El Sistema Internacional de Unidades (SI)

II.1 *Introducción*

Cualquier medida fiable requiere de unas unidades bien definidas. Las unidades de medida más antiguas estaban relacionadas con el cuerpo humano o con artefactos locales (el pie o el palmo egipcio, el pes o el digitus romano...). Cada civilización desarrolló una gran variedad de unidades porque no es práctico usar el mismo patrón para medir por ejemplo la superficie de una mesa que una finca. Para cada clase de magnitudes, las distintas unidades estaban relacionadas entre sí por números distintos, por lo que el conjunto de unidades era muy complicado. El sistema de unidades anglosajón es una reliquia de las unidades antiguas.

En el siglo XVIII los avances científico-tecnológicos y el desarrollo comercial hicieron patente la necesidad de un nuevo sistema práctico de unidades de carácter universal. Así nació, con la Revolución Francesa, el Sistema Métrico (basado en el metro) Decimal (las diversas unidades relacionadas por potencias de 10). Este sistema sirvió de base para el nacimiento de nuevas unidades que se desarrollaron y perfeccionaron a lo largo de los dos siglos posteriores dando lugar al Sistema Internacional de Unidades cuya abreviatura es SI en todos los idiomas.

El SI como forma moderna y ampliada del sistema métrico fue establecido por acuerdo internacional en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) de 1960. Su introducción supuso una reforma completa en el ámbito de la metrología y sustituyó a otros sistemas de unidades completos, a sistemas parciales y a unidades que no pertenecían a ningún sistema, todas ellas utilizadas en distintos campos de la ciencia y la tecnología. La transición a un único sistema práctico de unidades ha facilitado la comunicación internacional en el campo de la investigación, la enseñanza y la tecnología y ha favorecido las relaciones comerciales a nivel internacional.

El SI no es inmutable, desde su nacimiento se ha continuado el esfuerzo a nivel mundial para identificar las magnitudes físicas fundamentales de las cuales se puedan derivar todas las demás magnitudes y todos los demás patrones y también para definir los patrones sobre fenómenos universales naturales, respondiendo así a las necesidades científicas y tecnológicas del mundo de hoy. Un ejemplo han sido las sucesivas definiciones del metro y la incertidumbre de su realización :

Año	CGPM	Incertidumbre	Observaciones
1799	-	10 μm	Metro de los Archivos, de platino, prismático, con sección rectangular
1889	1ª	0.2 μm	Patrón único hasta 1960 de platino iridiado y sección en X asimétrica
1960	11ª	4 nm	Lámpara de kripton 86: 1 650 763.73 longitudes de onda, en el vacío, de la transición $2p_{10}$ a $5d_5$.
1983	17ª	1 nm 10^{-11} m	Definición actual. Según últimas recomendaciones de operación (CIPM, 1993)

Tabla 2.1. Sucesivas definiciones del metro y su incertidumbre.

A pesar de que el SI fue pensado inicialmente para su aplicación en el ámbito de la ciencia, la tecnología y la enseñanza, se ha convertido en la base para la regulación legal en materia de metrología a nivel mundial. En España se declaró de uso legal en 1967 pero fue la Ley 3/1985, de 18 de marzo, de Metrología la que determina como Unidades Legales de Medida las del Sistema Internacional de Unidades y declara la obligatoriedad de su uso en todo el territorio del Estado español.

II.2 *Características del SI*

Este sistema se basa en siete unidades fundamentales, el metro, el kilogramo el segundo, el amperio, el kelvin, el mol y la candela que corresponden a las siete magnitudes siguientes: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se trata de unidades bien definidas y que, por convenio, se consideran dimensionalmente independientes aunque, desde el punto de vista físico, existen algunas dependencias.

El SI es un sistema coherente de unidades queriendo decir con esto que las unidades derivadas se expresan como productos de potencias de las unidades básicas análogos a las correspondientes magnitudes omitiendo factores numéricos.

El SI es decimal en el sentido de que pueden formarse múltiplos o submúltiplos multiplicando o dividiendo las unidades SI por potencias de 10.

II.3 *Unidades básicas o fundamentales del SI*

Las unidades básicas del SI se muestran en la Tabla 2.2 junto con sus nombres y sus correspondientes símbolos. Ha de tenerse bien en cuenta que el símbolo de una unidad es un ente matemático universal, por tanto es el mismo en cualquier idioma, los nombres de las unidades, sin embargo, son específicos de cada idioma y no son parte del SI; así por ejemplo, en inglés la unidad de masa se escribe "kilogram", en francés "kilogramme", en español "kilogramo" y en gallego "quilogramo", pero su símbolo es kg en cualquiera de los idiomas.

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Tabla 2.2. Unidades básicas del S.I con sus nombres y símbolos.

A continuación se dan las definiciones de las unidades básicas incluyendo la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) en que fueron adoptadas.

►**Unidad de longitud: metro (m)**. El metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de un segundo (17ª CGPM, 1983).

►**Unidad de masa: kilogramo (kg)**. Masa del prototipo internacional de kilogramo (3ª CGPM, 1901).

►**Unidad de tiempo: segundo (s).** El segundo es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio133 (13ª CGPM, 1967)

►**Unidad de intensidad de corriente eléctrica: amperio (A).** El amperio es la intensidad de una corriente eléctrica constante que, mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados a la distancia de 1 metro uno del otro en el vacío, produce entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud (9ª CGPM, 1948).

►**Unidad de temperatura termodinámica: kelvin (K)**. Es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua (13ª CGPM 1967).

La 13ª CGPM, 1967 decidió también que la unidad kelvin se utilizara para expresar un intervalo o una diferencia de temperaturas.

<u>Observación</u>: Además de la temperatura termodinámica (símbolo T), expresada en kelvins, se utiliza también la temperatura Celsius (símbolo t) definida por la ecuación:

$$t = T - T_0$$

donde $T_0 = 273.15$ K por definición.

Para expresar la temperatura Celsius se utiliza la unidad "grado Celsius" que es igual a la unidad "kelvin"; "grado Celsius" es un nombre especial empleado en este caso en lugar de "kelvin".

►**Unidad de cantidad de sustancia: mol (mol).**

El mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0.012 kilogramos de carbono12.

Cuando se utiliza el mol, deben especificarse las entidades elementales y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones u otras partículas o grupos especificados de tales partículas (14ª CGPM, 1971).

<u>Observación</u>: En la definición de mol, se entiende que se refiere a átomos de carbono 12 no ligados, en reposo y en su estado fundamental.

►**Unidad de intensidad luminosa: candela (cd)**. La candela es la intensidad luminosa en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hercios y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1 / 683 vatios por estereorradián (16ª CGPM, 1979).

Si nos fijamos en las definiciones de la unidad de tiempo y la unidad de longitud, vemos que están relacionadas a través de c, la velocidad de la luz en el vacío que se ha tomado como exacta, c = 299 792 458 m/s exactamente, fijando de este modo el valor del metro en términos del segundo. Es evidente entonces que la elección del metro como unidad básica es arbitraria.

II.4 *Unidades derivadas*

Las unidades derivadas se definen a partir de las unidades básicas con un factor numérico igual a 1 utilizando las mismas expresiones algebraicas que se aplican a las correspondientes magnitudes físicas. Por ejemplo, la densidad es igual a la masa por unidad de volumen, entonces la unidad de densidad es igual al cociente entre la unidad SI de masa y la unidad SI de volumen (kg/m^3).

II.4.1 *Adimensionales*

Dentro de las unidades derivadas puede distinguirse un primer grupo constituido por las "unidades derivadas adimensionales" que hasta la 20ª CGPM (1995) se consideraban como una clase independiente dentro del Sistema Internacional denominada "unidades suplementarias". Este grupo lo forman la unidad de ángulo plano, radián, y la unidad de ángulo sólido, estereorradián.

►El **radián** es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que intercepta sobre la circunferencia un arco de longitud igual a la del radio.

►El **estereorradián** es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, delimita sobre la superficie esférica correspondiente un área igual a la de un cuadrado que tiene como lado el radio de la esfera.

Magnitud	**Nombre**	**Símbolo**	**Expresión en términos de las unidades fundamentales**
ángulo plano	radián	rad	$m \cdot m^{-1}$
ángulo sólido	estereorradián	sr	$m^2 \cdot m^{-2}$

Tabla 2.3. Unidades derivadas sin dimensión.

II.4.2 *Obtenidas directamente a partir de las básicas:*

En la Tabla 2.4 se dan algunos ejemplos de unidades derivadas obtenidas directamente a partir de las unidades básicas.

Magnitud	**Nombre de la unidad**	**Símbolo**
área	metro cuadrado	m^2
velocidad	metro por segundo	m/s ó m s^{-1}
densidad de masa	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
densidad de corriente	amperio por metro cuadrado	A/m^2
intensidad del campo magnético	amperio por metro	A/m
concentración	mol por metro cúbico	mol/m^3
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2
velocidad angular	radián por segundo	rad/s

Tabla 2.4. Unidades derivadas obtenidas directamente a partir de las unidades básicas.

II.4.3 *Con símbolos especiales*

Algunas unidades derivadas tienen nombres y símbolos especiales como las que se muestran en la Tabla 2.5.

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión en términos de otras unidades	Expresión en términos de las unidades básicas
frecuencia	herz o hercio	Hz		s^{-1}
fuerza	newton o neutonio	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
energía	joule o julio	J	N·m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
potencia	watt o vatio	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
carga eléctrica	coulomb o culombio	C		s · A
potencial eléctrico	volt o voltio	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$

Tabla 2.5. Unidades derivadas con nombres propios.

Estas unidades pueden utilizarse a su vez para expresar otras unidades SI derivadas de manera más simple que a partir de las unidades SI básicas. En la siguiente tabla se dan algunos ejemplos:

Magnitud	Nombre	Símbolo
viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa·s
entropía, capacidad térmica	julio por kelvin	J/K
capacidad térmica másica, entropía másica	julio por kilogramo kelvin	J/(kg·K)
conductividad térmica	vatio por metro kelvin	W/(m·K)
intensidad de campo eléctrico	voltio por metro	V/m

Tabla 2.6. Unidades derivadas obtenidas a partir de otras con nombres especiales.

II.5 *Múltiplos y submúltiplos de las unidades*

En muchas situaciones, las unidades (fundamentales o derivadas) no son adecuadas para expresar cantidades de magnitud muy grandes o muy pequeñas y es más conveniente utilizar múltiplos o submúltiplos de esas unidades.

Los múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades del SI se forman con prefijos que anteceden, sin espacio intermedio, al símbolo de la unidad. Hay prefijos para expresar los múltiplos y submúltiplos que se extienden desde 10^{-24} hasta 10^{24}. La Tabla 2.7 muestra los prefijos y algunos ejemplos correspondientes.

Potencia de 10	Prefijo	Símbolo	Ejemplo
10^{-24}	yocto	y	ymol (yoctomol) = 10^{-24} mol
10^{-21}	zepto	z	zg (zeptogramo) =10^{-21} g
10^{-18}	atto	a	aJ (attojulio) = 10^{-18} J
10^{-15}	femto	f	fs (femtosegundo = 10^{-15} s)
10^{-12}	pico	p	pF (picofaradio = 10^{-12} F)
10^{-9}	nano	n	nA (nanoamperio=10^{-9} A)
10^{-6}	micro	μ	μPa (micropascal = 10^{-6} Pa)
10^{-3}	mili	m	mJ (milijulios = 10^{-3} J)
10^{-2}	centi	c	cm (centímetro = 10^{-2} m)
10^{3}	kilo	k	kV (kilovoltio = 10^{3} V)
10^{6}	mega	M	MW (megavatio = 10^{6} W)
10^{9}	giga	G	GHz (gigahercio = 10^{9} Hz)
10^{12}	tera	T	TΩ (teraohmio = 10^{12} Ω)
10^{15}	peta	P	PW (petavatio) = 10^{15} W
10^{18}	exa	E	EJ (exajulio) = 10^{18} J
10^{21}	zetta	Z	Zm (zettametro) = 10^{21} m
10^{24}	yotta	Y	Ys (yottasegundo) = 10^{24} s

Tabla 2.7. Prefijos del SI, sus símbolos y ejemplos.

El kilogramo es la única unidad básica del SI cuyo nombre, por razones históricas, contiene un prefijo. Los nombres de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa se forman añadiendo los prefijos a la palabra "gramo", por ejemplo 10^{-6} kg = 1 miligramo (1 mg), pero no 1 microkilogramo.

Para facilitar la comprensión de los números, es conveniente elegir los símbolos de los prefijos de manera que los valores numéricos se encuentren entre 0.1 y 1000, y utilizar prefijos que correspondan a potencias de 10 que sean múltiplos de 3; excepto en aquellos casos en que la costumbre de usar otros esté muy arraigada. Así es perfectamente legítimo usar el centímetro (cm) pero sería una extravagancia emplear el hectovoltio (hV).

Ejemplos:

3.3×10^{7} Hz puede escribirse como 33×10^{6} Hz = 33 MHz

0.009 52 g puede escribirse como 9.52×10^{-3} g = 9.52 mg

5.7×10^{-8} m puede escribirse como 57×10^{-9} m = 57 nm

Sin embargo, cuando se está tratando con valores del mismo tipo de magnitud, es más recomendable utilizar el mismo prefijo para todos, aunque algunos valores numéricos no queden entre 0.1 y 1000. Así, es preferible decir "el tamaño de la muestra es 10 mm × 3mm × 0.02 mm" que "el tamaño de la muestra es 1 cm × 3mm × 20 μm".

II.6 *Otras unidades que no pertenecen al SI*

Una función importante del SI es desaconsejar la proliferación de unidades innecesarias. Hay unidades que no son coherentes con el SI pero cuyo uso está muy extendido; entre ellas, algunas son aceptadas para su uso con el SI y otras son absolutamente desaconsejadas.

II.6.1 Algunas unidades que son aceptadas para su uso con el SI

►Algunas son nombres y símbolos especiales de múltiplos y submúltiplos decimales de unidades SI; tal es el caso del litro como medida de capacidad la tonelada como unidad de masa o el bar como unidad de presión.

Nombre	Símbolo	Valor en unidades SI
litro	L	1 L =1 dm^3 = 10^{-3} m^3
tonelada	t	1 t = 10^3 kg
bar	bar	1 bar =10^5 Pa

Tabla 2.8. Unidades aceptadas para su uso con el SI que son múltiplos decimales de unidades SI.

►Otras son unidades definidas a partir de las unidades SI, pero que no son múltiplos o submúltiplos decimales de dichas unidades. Así, como unidades de tiempo se aceptan el minuto, la hora y el día[3]; como unidades del ángulo plano el grado, el minuto y el segundo.

Nombre	Símbolo	Valor en unidades SI
minuto	min	1 min = 60 s
hora	h	1 h =60 min =3600 s
día	d	1d = 24 h = 86 400 s
grado	º	1º= (π/180) rad
minuto	'	1' = (1/60)º = (π/10 800) rad
segundo	"	1” = (1/60) ' = (π/648 100) rad

Tabla 2.9. Unidades aceptadas para su uso con el SI que no son múltiplos decimales de unidades SI.

►Unidades cuyo valor en unidades SI se ha obtenido experimentalmente y no son por tanto exactos. Es el caso del electronvoltio como medida de energía y la unidad de masa atómica. Sus definiciones son las siguientes:

El **electronvoltio** es la energía cinética adquirida por un electrón al atravesar una diferencia de potencial de 1 voltio en el vacío.

La **unidad de masa atómica** (unificada) es igual a 1/12 de la masa de un átomo del nucleido ^{12}C.

Nombre	Símbolo	Valor en unidades SI
electronvoltio	eV	1 eV = 1,602 177 33 × 10^{-19} J
unidad de masa atómica	u	1 u = 1,6660 540 2 × 10^{-27} kg

Tabla 2.10. Unidades aceptadas para su uso con el SI que se han obtenido experimentalmente.

►Unidades que son muy especializadas y están recogidas por la Organización Internacional para la Estandarización (ISO) o la Comisión Internacional de

[3] En ciertos casos, por ejemplo para expresar la vida media de un isótopo, es útil contar el tiempo en años, y aunque no existe un símbolo universalmente aceptado para el año, se ha propuesto [6:ISO 31-1] la utilización del símbolo a; así 1 a = 365 d = 3.1536 × 10^7s

Electrotecnia (IEC) suelen aceptarse para su uso con el SI. Tal es el caso del bel (B) o algunas de las que se utilizan en la tecnología de la información como por ejemplo el baud (Bd) o el bit (bit).

►Unidades admitidas únicamente en sectores de aplicación especializada como la dioptría que mide la potencia de los sistemas ópticos, (1 dioptría =1 m^{-1}) el quilate métrico como unidad de masa de las piedras preciosas (1quilate métrico = 2×10^{-4} kg) el área como medida de las superficies agrarias y de las fincas (1 a =10^2 m^2) o el barn (1 b = 10^{-28} m^2) como unidad de la sección eficaz.

II.6.2 *Unidades naturales y unidades atómicas*

En algunos casos, sobre todo en ciencia básica, los valores de las magnitudes se suelen expresar en términos de constantes fundamentales de la naturaleza, son las llamadas unidades naturales. Estas unidades se aceptan para su uso con el SI cuando se trata de expresar resultados de carácter teórico que se comunican a otros físicos teóricos, pero cuando van a ser utilizados para comparar o expresar resultados experimentales, deben darse en unidades del SI.

Ejemplo 1: *Unidades atómicas de longitud y tiempo.*

Longitud $$\frac{\hbar^2}{me^2} = 5.292\times10^{-9} \text{ cm}$$

Tiempo $$\frac{\hbar^3}{me^4} = 2.419\times10^{-17} \text{ s}$$

Ejemplo 2: *Unidades naturales ($\hbar = c = m = 1$) de longitud y tiempo.*

Longitud $$\frac{\hbar}{mc} = 3.8616\times10^{-11} \text{ cm}$$

Tiempo $$\frac{\hbar}{mc^2} = 1.2881\times10^{-21} \text{ s}$$

II.6.3 *Unidades que deben evitarse*

►Las unidades anglosajonas: pulgadas, pies, libras, grados Fahrenheit, unidades térmicas británicas, etc. Actualmente las unidades británicas se definen en términos de las del SI, por ejemplo:

Longitud: 1pulgada = 2.54 cm (exactamente)
Fuerza: 1 libra = 4.448 221 615 260 N (exactamente)

►Las unidades del llamado Sistema Técnico. Este sistema toma como magnitudes fundamentales longitud, fuerza y tiempo y como unidades fundamentales el metro, el kilogramo fuerza (llamado a veces kilopondio) y el segundo. El kilogramo fuerza es el peso de un cuerpo cuya masa es de un kilogramo. Como el peso varía de un lugar a otro se asigna un valor determinado a g de manera que 1 kgf = 9.806 65 N. Se trata de un sistema muy desaconsejable pues induce a la confusión entre dos magnitudes diferentes como son masa y peso.

►Las unidades del sistema CGS incluidas las electrostáticas (uee) y las electromagnéticas (uem) que históricamente jugaron un papel muy importante en el desarrollo científico y fueron una de las bases del SI. También ha de evitarse el sistema gausiano; un sistema CGS no racionalizado y mixto en el sentido de que las magnitudes eléctricas se miden en unidades electrostáticas mientras que las magnitudes magnéticas en unidades electromagnéticas. No existe una regla única para transformar las ecuaciones válidas para el sistema gaussiano en las correspondientes ecuaciones para su uso en el SI.

►Otras unidades tales como el torr (Torr) que es el nombre que se da al milímetro de mercurio (mm·Hg) de la columna barométrica y que equivale a unos 133.3 Pa. La atmósfera estándar (atm) que equivale a 101 325 Pa y por lo tanto la atmósfera-litro como unidad de trabajo. El problema fundamental de estas unidades es que son muy poco reproducibles pues dependen, entre otras cosas, de las características del mercurio utilizado, ¿con qué precisión se conoce su densidad, por ejemplo?.

►Mención especial merece la caloría como unidad de energía que se definió en un principio como la energía calorífica necesaria para elevar un grado Celsius la temperatura de un gramo de agua. Pero hay tantas calorías como queramos definir porque esa energía depende de la temperatura y del estado del agua. Por eso sólo se utiliza la caloría de las tablas internacionales que equivale a 4.186 8 J y la llamada caloría termoquímica que vale 4.184 J. Estas ambigüedades hacen de la caloría una de las unidades de energía menos recomendables.

►Deben evitarse también aquellos nombres especiales para unidades, múltiplos o submúltiplos de unidades del SI como es el caso del fermi que se usa en física de partículas y es un nombre especial del femtometro o la micra que debe sustituirse por micrometro.

►También debe evitarse la combinación de letras "ppm", "ppb" ó "ppt" y los términos "partes por millón", "partes por billón" y "partes por trillón" ¿De qué billón estamos hablando, del billón americano (1 billion $=10^9$) o del español (1 billón $= 10^{12}$)?

II.7 *Recomendaciones para la escritura de los símbolos*

Ya hemos señalado que a diferencia de los nombres de las unidades, los símbolos son entes matemáticos universales y, como tales, se representan de una determinada forma, la misma en cualquier idioma.

Los símbolos de las unidades excepto el Ω, se escriben en caracteres ordinarios y no se pluralizan. Dado que no son abreviaturas no deben ir seguidos de un punto, a menos que se encuentren al final de una frase. La letra o la primera de las letras del símbolo de una unidad sólo se escribe con mayúsculas cuando el nombre de la unidad proviene de un nombre propio[4]. Por tanto deben evitarse abreviaturas tales como seg (para segundo), cc (para centímetro cúbico) o mps (para metros por segundo).

El producto de dos o más unidades se debe indicar preferentemente mediante un punto que puede suprimirse en caso de que no pueda haber confusión con otros símbolos. Por ejemplo, puede escribirse N·m ó Nm para el newton-metro, pero no mN que significa milinewton. (N·m se lee "newton metro" y no "newton por metro" porque esta expresión implica división).

Se puede utilizar la barra oblicua, la línea horizontal o exponentes negativos para expresar una unidad derivada que se obtiene a partir de otras por división. Así, podemos escribir, m/s, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ó $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Nunca se debe introducir en una misma línea más de un barra oblicua, a menos que se coloquen los paréntesis necesarios para evitar ambigüedades.

[4] Esto supone una verdadera lucha contra el corrector ortográfico de Microsoft.

Por ejemplo, puede escribirse m/s^2 ó bien $m \cdot s^{-2}$, $m \cdot kg/(s^3 \cdot A)$ ó bien $m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$, pero nunca m/s/s, ni $m \cdot kg/s^3/A$.

Los nombres de las unidades que proceden de nombres propios de científicos deben escribirse con idéntica ortografía que el nombre de éstos, pero con minúscula inicial; por ejemplo newton (N) o pascal (Pa). En algunas unidades la forma castellanizada está muy arraigada, tal es el caso del julio (joule), el vatio (watt) o el voltio (volta), por ello se consideran aceptables aquellas denominaciones de uso habitual siempre que estén recogidas por la Real Academia Española (amperio, culombio, faradio, hercio, julio, vatio, weberio...).

Los nombres de las unidades toman una s en el plural, salvo las que terminen en s, x o z. Así escribiremos 5 newtons, 2 siemens, 7 hertz y 30 lux.

II.8 *Recomendaciones para la escritura de los números*

A la hora de escribir los números conviene tener en cuenta algunas recomendaciones cuya finalidad es facilitar su comprensión.

Debe utilizarse un solo punto o coma para separar la parte entera de la decimal. En España se utiliza la coma pero en la mayoría de los países anglosajones se utiliza el punto; ello hace que tanto las calculadoras como muchos de los programas informáticos que se utilizan en ciencia y tecnología adopten este último. Para evitar confusiones, en este texto, mientras no se indique explícitamente lo contrario, utilizaremos el punto para señalar los decimales.

Para facilitar la lectura se recomienda dividir los números en grupos de tres cifras contando desde el punto decimal hacia la derecha y hacia la izquierda, separados por espacios pero sin ningún otro signo. Por ejemplo 15 739.012 53 es preferible a 15739.01253. La separación en grupos no se utiliza para los números de cuatro cifras.

Como ya hemos visto en la sección I.5. en el mundo de la ciencia y de la técnica debemos estar preparados para manejar números muy grandes y muy pequeños y por ello existe una forma fácil y compacta de escribirlos que se denomina *notación exponencial* o *notación científica*.

En notación exponencial todo número se puede escribir como producto de dos factores uno de los cuales es una potencia de diez. Por ejemplo, un voltaje de 1500 V puede expresarse como 1.5×10^3 V y una corriente de 0.0020 A como 2.0×10^{-3} A. Al escribir el número en notación exponencial, la primera cifra distinta de cero que aparece va seguida del punto decimal. En situaciones en las que un número está entre 1 y 10, por ejemplo 7.15, podríamos escribirlo como 7.15×10^0. A pesar de que esto es técnicamente correcto, es más usual expresarlo como 7.15.

Ejemplos:

Número	En notación exponencial
12.65	1.265×10^1
0.000 23	2.3×10^{-4}
342.5	3.425×10^2
34 001	3.4001×10^4

Muchas veces veremos un número seguido de la letra E que indica el exponente, un signo más (+) o un signo menos (-), y dos dígitos que indican la potencia de 10 por la cual ha de multiplicarse el número.

Ejemplos:

3.523 907 E–02 significa $3.523\ 907 \times 10^{-2} = 0.035\ 239\ 07$

3.386 389 E+02 significa $3.386\ 389 \times 10^{3} = 3\ 386.389$

Ejercicios

1. La rotación de la Tierra sobre su eje, que determina la longitud del día, fue usada durante siglos como un patrón de tiempo. Suponiendo que la longitud del día crece uniformemente 0.001 s en un siglo, calcula el efecto acumulativo sobre la medición del tiempo en 20 siglos. Esta disminución del periodo de rotación de la Tierra se conoce a partir de las observaciones de la frecuencia de los eclipses solares.

2. El kilogramo patrón tiene la forma de un cilindro con una altura igual a su diámetro. Demuestra que para un volumen fijo, esta geometría da el área superficial más pequeña, haciendo así mínimos los efectos de la contaminación y el desgaste de la superficie.

3. Al definir el metro en función de la velocidad de la luz, ¿por qué crees que los delegados de la CGPM de 1983 no simplificaron el asunto asignando a la velocidad de la luz el valor de 3×10^{-8} m/s exactamente? o mejor aún, ¿por qué no definieron $c = 1$ m/s exactamente?. ¿Estaban abiertas para ellos ambas posibilidades? de ser así, ¿por qué crees que las rechazaron?

4. ¿Cúales son las unidades de η en la expresión $\eta = \frac{\pi p r^4}{8LQ}$ si p está en Pa, r en m, Q en m^3/s y L en m?

5. ¿Cuál es la unidad de s en la expresión $s = \frac{VI}{m(\theta_1 - \theta_2)}$ si V está en voltios, I en amperios, m en kilogramos y θ_1 y θ_2 en kelvin?

6. La f.e.m E de un termopar está relacionada con la temperatura T por la siguiente ecuación: $E = aT + bT^2$. Si la f.e.m. se mide en voltios y T en grados centígrados, ¿cuáles son las unidades de las constantes a y b?

7. El Sistema Técnico es un sistema de unidades muy poco recomendable entre otras cosas porque tiende a confundir masa y peso. En este sentido es instructivo calcular el valor de la unidad de masa en este sistema. Hazlo y comprueba que su valor es 0.101 971 621 kgf $s^2 m^{-1}$.

8. Expresa:
   i) 2.2×10^{-6} V en µV
   ii) 6.2×10^{-2} m en mm
   iii) 6.52×10^{4} J en kJ
   iv) 1.8×10^{5} W en MW

v) 6.7×10^{-11} F en pF

1. Escribe en notación exponencial los siguientes números:
   i) 15
   ii) 5 380 000
   iii) 0.0032
   iv) 9
   v) 90.0

III. Expresando el resultado de una medida

III.1 *Cifras significativas*

Cuando se da el resultado de una medida mediante un número, sin ninguna indicación de su incertidumbre (lo cual es muy habitual en ciertos ámbitos), se entiende, por convenio, que todas sus cifras son *significativas* (todas tienen significado físico) y que la incertidumbre afecta a la última cifra expresada. Por ejemplo, si sólo disponemos de la información de que una longitud es $l = 25$ mm, con dos cifras significativas, podemos suponer que la incertidumbre es del orden de un milímetro.

$$l = 25 \text{ mm} \text{ es equivalente a } l = (25 \pm 1) \text{ mm}$$

Si damos la longitud como $l = 25.2$ mm, este resultado tiene tres cifras significativas y la incertidumbre será del orden de la décima de milímetro. Podríamos expresarlo

$$l = 25.2 \text{ mm} \text{ es equivalente a } l = (25.2 \pm 0.1) \text{ mm}$$

La incertidumbre en una medida determina el número de dígitos con que se debe expresar el resultado; cuanto mayor sea la incertidumbre de nuestras medidas, menor será el número de cifras significativas del resultado.

Una situación ambigua se presenta al hacer un cambio de unidades. Si en nuestro ejemplo tratamos de expresar la longitud en micrometros el resultado será $l = 25\ 000$ μm, ¿Quiere esto decir que ahora tenemos una precisión de 1μm en nuestra medida? No, el resultado correcto será $l = (25\ 000 \pm 1000)$ μm que tiene 2 cifras significativas, igual que antes. Un cambio de unidades no puede aumentar la precisión de nuestra medida que viene determinada entre otras cosas por las características de la regla que hemos utilizado. Para evitar ambigüedades, lo mejor es dar el resultado en notación exponencial, así, $l = 2.5 \times 10^1$ mm $= 2.5 \times 10^4$ μm y el número de cifras significativas es igual al número de cifras que aparecen a la izquierda del signo de multiplicación.

Existen unas reglas estándar para escribir y manejar las cifras significativas:

► En un número que no contiene ceros, todas las cifras son significativas.

Ejemplos:

3.142	cuatro cifras significativas
152	tres cifras significativas

► Todos los ceros entre cifras significativas son significativos.

Ejemplos:

7053	cuatro cifras significativas
1.02	tres cifras significativas

► Los ceros a la izquierda de la primera cifra distinta de cero, sirven sólo para fijar la posición del punto decimal y no se consideran significativos

Ejemplos:

0.0056	dos cifras significativas

0.00203 tres cifras significativas

- ► En un número con cifras a la derecha del punto decimal, los ceros situados a la derecha del último dígito son significativos

Ejemplos:

0.900	tres cifras significativas
0.90	dos cifras significativas

III.2 *Redondeo de números*

Cuando se realizan cálculos matemáticos con valores experimentales el resultado puede ser un número con muchas cifras (ocurre frecuentemente cuando se utiliza una calculadora) algunas de las cuales no son significativas y hay que eliminarlas para que no den pie a confusiones. Esto se conoce como redondeo y se realiza según las siguientes reglas:

- ► Si la primera de las cifras que se omiten es menor que 5, se procede a la eliminación sin más.

  Ejemplo:

  6.974 951 5 redondeado a tres cifras es 6.97

- ► Si la primera de las cifras eliminadas es mayor que 5 se aumenta en una unidad la última cifra retenida.

  Ejemplo:

  6.974 951 5 redondeado a dos cifras es 7.0

- ► Si la primera de las cifras eliminadas es igual a 5 pueden darse dos situaciones diferentes:

  ▪Al menos una de las cifras que siguen al 5 es mayor que cero, en ese caso se aumenta en una unidad la última cifra retenida.

  Ejemplo:

  6.974 951 5 redondeado a cinco cifras es 6.9750

  ▪Todas las cifras que siguen al 5 son cero, en ese caso, si la última cifra retenida es par, se deja y si es impar se aumenta en una unidad;

  Ejemplo:

  6.974 951 5 redondeado a siete cifras es 6.974 952

  6.974 950 5 redondeado a siete cifras es 6.974 950

Los tres primeros casos son de sentido común, el último es una forma de “echarlo a suertes”, de esta forma unas veces nos pasamos y otras nos quedamos cortos, que es mejor que pasarse siempre o quedarse siempre cortos.

En cualquier cálculo en el que se realicen varias operaciones aritméticas, es aconsejable mantener todas las cifras hasta que todas las operaciones se hayan completado para evitar que el proceso de redondeo afecte de manera importante al resultado final. Conviene tener en cuenta que la mayoría de las calculadoras de bolsillo permiten fijar (tecla FIX) el número de decimales que presentan en la pantalla, realizando el redondeo según estas reglas y operando sin embargo con toda la precisión posible.

III.3 *Cálculos y cifras significativas*

En un cierto experimento un estudiante quiere determinar el volumen de una bolita de acero para lo cual mide su diámetro con un calibre y obtiene el siguiente resultado, $d = 16.65$ mm. El volumen vendrá dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3$$

de manera que

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{16.65\ \mathrm{mm}}{2}\right)^3 = 2\ 416.803\ 47\ \mathrm{mm}^3$$

El cálculo lo realizó con una calculadora que puede presentar en pantalla hasta 10 dígitos pero el resultado no tiene sentido. El estudiante conoce el diámetro con cuatro cifras significativas y sin embargo da el volumen con nueve cifras. ¿Ha conseguido mejorar la precisión de la medida simplemente introduciendo los datos originales en una fórmula? No, el resultado de una operación matemática no puede mejorar la precisión de las medidas originales.

Cuando realizamos un cálculo en el cual la incertidumbre en las cantidades no se indica explícitamente son de utilidad las siguientes reglas.

► Al multiplicar o dividir números el resultado no puede tener más cifras significativas que las del dato original que se conoce con menor precisión.

Ejemplo:

El estudiante debería redondear el resultado a cuatro cifras significativas, es decir $V = 2\ 417\ \mathrm{mm}^3$.

► Al sumar o restar números el resultado del cálculo tiene cifras significativas sólo en aquellos lugares decimales en que los dos números originales tienen cifras significativas.

Ejemplo:

$11 + 3.17 = 14$

$11 - 3.17 = 8$

De forma rigurosa el número de cifras significativas con que se ha de expresar el resultado de una medida, debe obtenerse mediante el análisis de errores, que trataremos en los capítulos VI y VII. Sin embargo el análisis de errores lleva tiempo y en la práctica diaria de un laboratorio generalmente se pospone; Por ello lo más conveniente es retener en los cálculos el número suficiente de cifras significativas para no introducir errores de redondeo pero suprimiendo aquellas que no tienen sentido físico y pueden inducir a confusiones sobre la precisión de las medidas.

III.4 *Ordenando los datos en una tabla*

Las observaciones experimentales pueden tomar formas muy diversas dependiendo de las características del experimento, pero independientemente de la técnica utilizada, las medidas cuidadosas son la base de un buen trabajo experimental y por tanto deben registrarse de tal manera que faciliten su análisis posterior.

En general se pueden dar dos tipos de situaciones experimentales más comunes. En la primera, se realizan medidas repetidas de una misma magnitud física, un ejemplo sería el tiempo que tarda un objeto en recorrer una distancia conocida. En la otra situación se trata de establecer la relación existente entre dos magnitudes A y B. Esto se hace variando la magnitud A y observando el efecto que provoca en B. Un ejemplo sería medir el alargamiento de un muelle (magnitud B) a medida que vamos colgando distintas masas (magnitud A).

En ambas situaciones, la manera más adecuada de ordenar los datos obtenidos es mediante una tabla. Para que una tabla sea útil es necesario que incluya una cabecera en la que se indique qué es lo que se está tabulando y en qué unidades.

En la Tabla 3.1 se muestran los resultados de cinco medidas del tiempo que tardó un péndulo en realizar 20 oscilaciones. Las unidades se indican entre paréntesis después del nombre de la magnitud que se mide.

Tiempo (s)	35.55	33.99	35.20	34.30	35.10

Tabla 3.1. Medidas del tiempo que tardó el péndulo en realizar 20 oscilaciones.

Existe otra forma de indicar las unidades que consiste en escribir "**Tiempo/s**", y se basa en el argumento de que las tablas sólo contienen números y por lo tanto debemos cancelar las unidades de los valores medidos, dividiendo por la unidad. Por ejemplo, si hemos hecho una lectura de 35.20 s, podemos cancelar la unidad haciendo Tiempo/s = 35.20. Aunque muchos autores lo escriben de esta forma, a nuestro entender es confuso y por tanto lo desaconsejamos.

III.4.1 *Tabulando datos en notación científica*

Si tenemos datos expresados en notación científica y lo más correcto, para que la tabla se entienda, es indicar la potencia de diez en la cabecera de la fila o columna correspondiente; veamos un ejemplo: Un estudiante mide la carga específica del electrón y obtiene los siguientes datos: 2.1×10^{11} C kg^{-1}, 2.1×10^{11} C kg^{-1}, 1.9×10^{11} C kg^{-1}, 2.2×10^{11} C kg^{-1}, 2.0×10^{11} C kg^{-1}.

En la Tabla 3.2 se muestran los datos anteriores, con el factor multiplicativo expresado como potencia de diez en la cabecera de la tabla.

e/m (× 10^{-11} C kg^{-1})	2.1	2.1	1.9	2.2	2.0

Tabla 3.2. Valores de la carga específica del electrón.

III.4.2 *Incluyendo las incertidumbres en la tabla*

El resultado de cualquier medida ha de venir acompañado de una estimación de su incertidumbre. Generalmente el mejor lugar para indicar la incertidumbre, especialmente si es la misma para todas las medidas, es la cabecera de la columna que contiene las medidas. En caso de que sea distinta en cada medida, habrá que incluirla acompañando a cada valor de la tabla.

En la Tabla 3.3 se muestra un ejemplo extraído de un experimento en el cual se midió el alargamiento de un muelle al colgarle distintas masas en su extremo. La incertidumbre tanto en la masa como en la longitud es la misma en todas las medidas por lo cual se incluyó en las cabeceras.

Masa (g) ± 0.5	Longitud (cm) ± 0.001
10	2.896
20	5.194
30	8.844
40	11.740
50	14.521

Tabla 3.3. Alargamiento de un muelle para distintas masas.

Ejercicios

1. ¿Cuántas cifras significativas tienen los siguientes números?
   - i) 3.24
   - ii) 0.0023
   - iii) 83 400
   - iv) 1.010
   - v) 10.5

2. Redondea el número π = 3.141592654 a dos, tres, cuatro, cinco y seis decimales.

3. Redondea los siguientes números a tres cifras significativas:
   - i) 18.92
   - ii) 0.107 59
   - iii) 725.4
   - iv) 1.7602
   - v) 62 654

4. Escribe los siguientes números en notación científica con cuatro cifras significativas
   - i) 0.005 654 2
   - ii) 125.04
   - iii) 93 842 773
   - iv) 3 400 042
   - v) 0.000 000 100 092

5. Da los resultados de estos cálculos con el número apropiado de cifras significativas
   - i) 1.2 × 8
   - ii) 13.0 × 43.23
   - iii) 0.0104 × 0.023
   - iv) 33 + 435.5
   - v) 14.1 / 76.3
   - vi) 105.55 - 34.2

6. Como parte de un experimento un estudiante tiene que determinar la densidad ρ de una pequeña esfera metálica. La densidad viene dada por $\rho = \frac{m}{V}$, donde m es la masa de la esfera y V es su volumen ($V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, donde r es el radio de la esfera).

Las anotaciones que hizo el estudiante en su libreta referidas a esta parte del experimento fueron las siguientes:

Masa de la esfera = 0.44 g

Diámetro de la esfera = 4.76 mm

Usando la fórmula del volumen de la esfera

$$V = \frac{4\pi \cdot (4.76)^3}{3} = 451.761\ \ 761$$

entonces la densidad de la esfera:

$$\rho = \frac{0.44}{541.761\ \ 761} = 9.739\ \ 647\ \times 10^{-4}$$

Las anotaciones del estudiante contienen algunos errores y omisiones. ¿Podrías señalarlos y si es posible corregirlos?

IV. Representación gráfica

La presentación y el análisis de los resultados experimentales son parte integrante de un experimento. La forma más útil de presentar los resultados es mediante una gráfica en la cual queda concentrada la información obtenida del experimento. El dicho popular "una imagen vale más que mil palabras" es especialmente válido en el trabajo experimental. Una representación gráfica nos da mucha más información acerca de la tendencia o las relaciones entre los datos experimentales que la que podemos extraer simplemente leyendo los datos en una tabla; especialmente cuando esa tabla contiene cientos o miles de números como es habitual si la adquisición está controlada por ordenador. Las gráficas nos permiten establecer relaciones empíricas entre dos magnitudes, nos dan información acerca del rango en el que se han hecho las medidas, de su incertidumbre o de qué puntos no siguen la tendencia general.

En definitiva, las gráficas constituyen el principal elemento ordenador de la información obtenida en un experimento y como tal han de construirse sobre la base de una elección adecuada de las variables y de las escalas, teniendo además en cuenta algunas "técnicas de estilo" para que la información contenida adquiera la relevancia que le corresponde.

Existen diversos tipos de representaciones gráficas, pero nos centraremos en las gráficas *x-y* (gráficas en coordenadas cartesianas) que se utilizan extensivamente en ciencia e ingeniería para representar los datos experimentales.

IV.1 *Dibujando la gráfica*

El objetivo es que la información que se quiere presentar quede expuesta de una manera lo suficientemente clara y explícita como para que la gráfica "hable por sí misma". A la hora de elaborar una gráfica, esta podrá hacerse a mano o bien con ayuda de programas informáticos de representación gráfica pero, en cualquier caso, será el propio experimentador el que habrá que tomar ciertas decisiones (rango de los ejes, escalas, símbolos...) con el fin de aprovechar al máximo las posibilidades que ofrece la gráfica. Para facilitar esta labor, conviene tener presente algunas cosas:

En primer lugar deberán representarse en papel escalado (milimetrado o logarítmico). Se trazarán unos ejes cartesianos y a cada punto experimental le corresponderá un valor de la abscisa (coordenada x) y un valor de la ordenada (coordenada y).

IV.1.1 *Variable dependiente y variable independiente*

Muchas veces cuando estudiamos un sistema desde el punto de vista experimental queremos saber cómo responde ante ciertas perturbaciones que podemos aplicarle de manera controlada. Evidentemente lo más útil es centrarse en la respuesta de una de las variables de salida ante las variaciones de sólo una de las variables de entrada.

►La magnitud que se controla o que es variada deliberadamente durante el experimento se denomina *variable independiente* y se representa en el eje x.

►La magnitud que varía en respuesta a los cambios en la variable independiente, se denomina *variable dependiente* y se representa en el eje y.

Dicho de otro modo, *la causa* se representa a lo largo del eje horizontal y *el efecto* a lo largo del eje vertical y se dice que la magnitud representada en el eje *y es función* de la que se representa en el eje x.

A continuación se muestran como ejemplo en la Tabla 4.1 los valores obtenidos durante un experimento en el cual se midió la variación de longitud de una barra de latón al aumentar la temperatura unos 50 ˚C.

Temperatura (˚ C)	Longitud (mm)
16.5	612.32
23.0	612.38
30.0	612.44
38.5	612.56
48.5	612.67
59.5	612.78
69.5	612.88

Tabla 4.1. Medidas de la longitud de una barra de latón a distintas temperaturas.

En la Figura 4.1 se representan gráficamente los datos de la Tabla 4.1. A cada par de valores temperatura-longitud le corresponde un punto sobre la gráfica. Se ha identificado la temperatura como variable independiente (coordenada *x*) y la longitud como variable dependiente (coordenada *y*) puesto que el aumento en la longitud de la barra (efecto) es debido al aumento de la temperatura (causa).

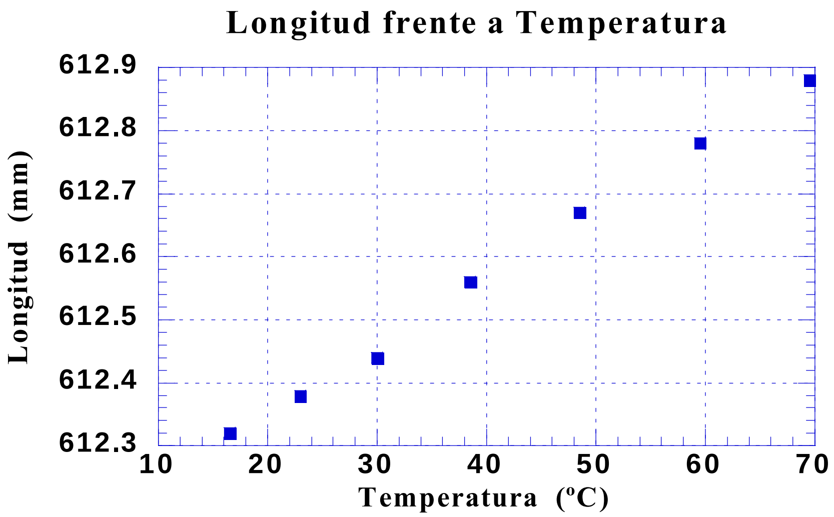


Figura 4.1. Gráfica de la variación de la longitud de una barra de latón con la temperatura.

IV.1.2 *Título, etiquetas y unidades*

La gráfica de la Figura 4.1 es una gráfica típica de las utilizadas en ciencias e ingeniería. Tiene:

►Un título breve pero suficientemente explícito que indica la relación que se está investigando. Cuando se dice que la magnitud *A* (en este caso la longitud) se representa frente o versus (abreviadamente, vs.) la magnitud *B* (en este caso la temperatura) quiere decir que la magnitud *A* se representa en el eje de ordenadas y la magnitud *B* en el eje de abscisas.

►Los ejes están claramente rotulados con los nombres de las magnitudes que se están estudiando y sus unidades de medida; estas se indican igual que en las tablas.

IV.1.3 *Escalas y símbolos*

►Las escalas de los ejes deberán elegirse de tal modo que los puntos experimentales queden suficientemente espaciados.

►Las escalas vertical y horizontal pueden ser diferentes.

►Deberá elegirse una escala simple, usando factores que faciliten el cálculo (1, 2, 5, 10, 100,...).

►La escala seleccionada puede ser lineal o logarítmica. En una escala lineal distancias iguales sobre el eje representan el mismo cambio en el valor de la magnitud. En una escala logarítmica, distancias iguales corresponden a un cambio en un mismo factor; por ejemplo en una escala de este tipo habría la misma distancia sobre el eje entre 1 y 10 que entre 10 y 100. Más adelante se hablará de las gráficas logarítmicas.

►Las divisiones de los ejes han de marcarse a intervalos regulares (y suficientemente espaciados), nunca se escriben los valores correspondientes a las medidas experimentales.

►Los puntos experimentales deben ser claramente visibles (es preferible que los puntos sean más bien grandes que muy pequeños).

►Cuando se representan en una misma gráfica varias magnitudes diferentes conviene distinguir los puntos asociados a cada una de ellas utilizando símbolos diferentes (cruces, triángulos, círculos, cuadrados,...).

IV.1.4 *El origen de la gráfica*

El origen de la gráfica no tiene porque ser el punto (0,0). En la gráfica de la Figura 4.2 se han representa los mismos valores que en la Figura 4.1 pero eligiendo la escala de manera que incluya al punto (0,0). Podemos observar que los puntos experimentales siguen prácticamente una línea horizontal lo cual podría inducirnos a pensar que la longitud de la barra de aluminio no cambia con la temperatura. Al incluir el punto (0,0) hemos forzado a la escala del eje *y* a ser demasiado grosera como para poder apreciar la variación de la longitud de la barra con la temperatura. La Figura 4.1 que muestra los mismos datos pero no incluye el origen, permite apreciar con claridad la influencia de la temperatura sobre la longitud de la barra.

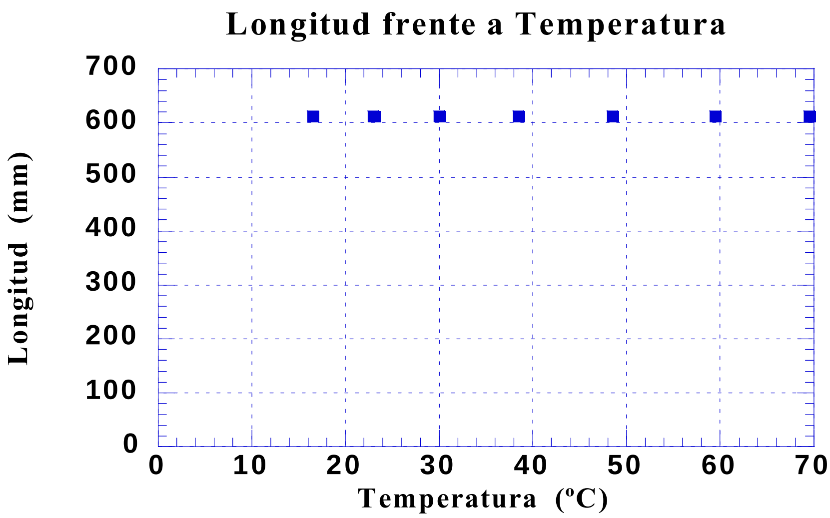


Figura 4.2. Representación gráfica de la variación de la longitud de la barra en función de la temperatura con una mala elección de la escala al incluir el origen de coordenadas.

IV.1.5 *Barras de error y trazado de líneas*

Es posible indicar sobre la gráfica el tamaño de la incertidumbre en las variables *x* e *y* incluyendo las barras de error en cada punto experimental. Las barras de error son líneas horizontales y/o verticales trazadas sobre cada punto. La longitud de cada barra es una medida del tamaño de la incertidumbre en ese valor.

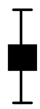
La Tabla 4.2 muestra un ejemplo de un experimento en el cual se midió la intensidad de corriente eléctrica durante el proceso de carga de un condensador. En la cabecera de cada columna hay una estimación de la incertidumbre en cada medida. En este ejemplo el tiempo se ha considerado como variable independiente y la intensidad como variable dependiente.

Tiempo (s) **±5 s**	**Intensidad (A)** **± 0.4 A**
15	4.1
30	2.8
45	1.8
60	1.2
75	0.8
90	0.5
105	0.3
120	0.2
135	0.1

Tabla 4.2. Variación de la intensidad de corriente durante el proceso de carga de un condensador.

Para indicar la incertidumbre en el tiempo, trazamos barras de error horizontales de la forma

Para indicar la incertidumbre en la temperatura, trazamos barras de error verticales como la siguiente



En la Figura 4.3 se muestra cada punto experimental con barras de error tanto verticales como horizontales para indicar las incertidumbres en la medida del tiempo y de la intensidad. En este ejemplo el tamaño de las incertidumbres no varía de un punto al siguiente, sin embargo en muchos experimentos las incertidumbres no permanecen constantes de una medida a la siguiente de manera que el tamaño de las barras de error varía de un punto a otro sobre la gráfica. Cuando las barras de error son demasiado pequeñas como para trazarlas claramente, es mejor omitirlas.

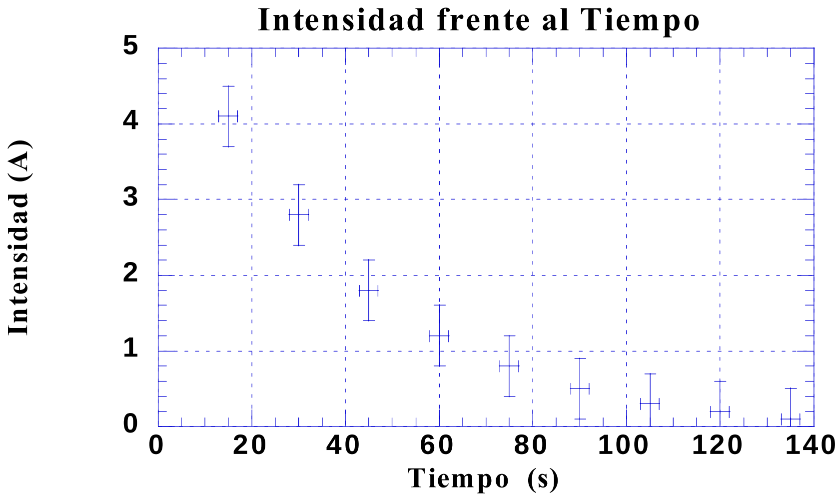


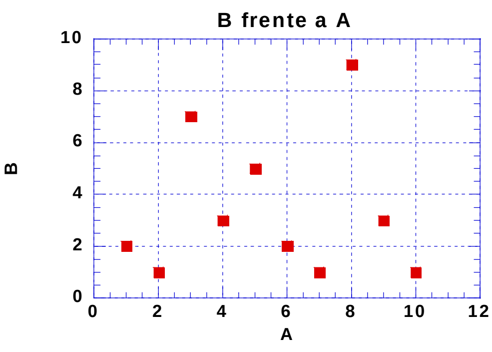
Figura 4.3. Variación de la intensidad en función del tiempo durante el proceso de carga de un condensador.

►Cuando la magnitud *Y* varía suavemente con los cambios en la magnitud *X*, se puede dibujar una línea a través de los puntos experimentales. Esa línea ha de trazarse de forma continua, no poligonal y de manera que no oculte los puntos experimentales.

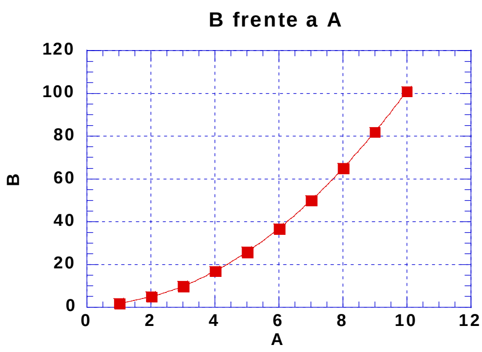
►En el caso de que los puntos experimentales hayan sido ajustados a una recta, ha de dibujarse dicha recta además de los puntos experimentales.

IV.2 *Análisis gráfico*

Ya hemos dicho que una representación gráfica revela mucho más acerca de la tendencia o las relaciones entre los datos experimentales que lo que puede obtenerse observando una lista de números en una tabla. El tipo de información puede ser tanto de carácter cualitativo como cuantitativo. En la Figura 4.4 se representan dos variables *A* y *B*.



(a)



(b)

Figura 4.4. En (a) las variables A y B no están correlacionadas; en (b) existe correlación entre las variables A y B.

En Figura 4.4 (a) los puntos parecen estar distribuidos al azar; la falta de una tendencia o un patrón, indica que *A* y *B no están correlacionadas*. El patrón ordenado de la Figura 4.4 (b) indica que hay una relación definida o *correlación entre A y B*.

Cuando dos variables están correlacionadas existe un cambio sistemático en el valor de una cuando la otra cambia, pero esto no quiere decir que el cambio en una cause el cambio en la otra, puede haber una tercera variable que determina el comportamiento de ambas. La curva suave que se ha trazado sobre los puntos experimentales representa la *tendencia* de los datos; y es una estimación de la curva verdadera que esos puntos "tratan" de seguir; no la siguen exactamente debido a las incertidumbres en las medidas.

En muchos casos nos interesa determinar la ecuación matemática para la línea de tendencia (curva verdadera). Esa relación matemática se llama *fórmula empírica*. Una técnica muy útil para obtener una fórmula empírica consiste en representar los datos experimentales de tal forma que pueda suponerse que los puntos intentan seguir una línea recta. De esta forma se puede trazar la recta que mejor se ajusta a esos puntos y que representa la tendencia de los datos. El interés de esto es que siempre es más fácil analizar una gráfica lineal que otras funciones más complicadas. Es evidente que no siempre los datos experimentales siguen una tendencia lineal, pero en ciertos casos, como veremos, es posible representar funciones de las variables que sí se ajustan a una recta.

IV.3 *Gráfica lineal. Recta de ajuste*

Vamos a ver con un ejemplo cómo se puede obtener información tanto cualitativa como cuantitativa a partir de una gráfica. El caso más fácil de analizar es la gráfica lineal. Consideremos un experimento en que se estudia la velocidad de un objeto (variable dependiente) como función del tiempo (variable independiente). Los datos obtenidos se muestran en la Tabla 4.3.

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
1	0.45
2	0.81
3	0.91
4	1.01
5	1.36
6	1.56
7	1.65
8	1.85
9	2.17

Tabla 4.3. Velocidad de un móvil en función del tiempo.

Siguiendo las pautas indicadas anteriormente, los datos de la Tabla 4.3 se han representado gráficamente en la Figura 4.5. En la gráfica se observa que la velocidad crece con el tiempo y que además sigue, prácticamente una línea recta. Un "truco"para decidir si un conjunto de puntos experimentales sigue una tendencia lineal consiste en llevar el papel hasta el nivel de nuestros ojos (podemos cerrar uno como cuando hacemos puntería)y observar si los puntos se ven alineados. En este caso es así, se observa una tendencia lineal, aunque los puntos no caen exactamente sobre una recta debido a las incertidumbres en las medidas.

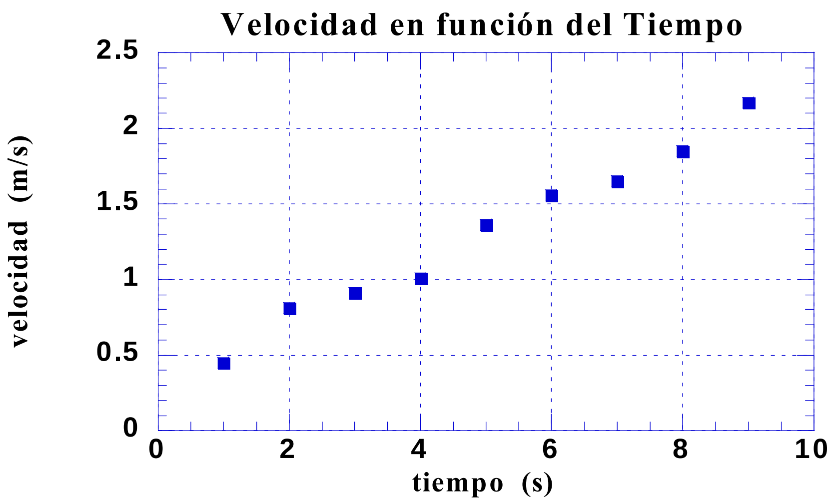


Figura 4.5. Gráfica de la velocidad de un objeto medida a distintos tiempos.

Para obtener conclusiones cuantitativas del experimento, tendremos que determinar cuál es la ecuación de la recta que representa la relación entre las dos variables, velocidad y tiempo.

La ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales, también llamada *recta de ajuste*, puede determinarse gráficamente o bien de forma más rigurosa mediante el método de los mínimos cuadrados que se explicará en capítulos posteriores.

Vamos a indicar aquí cómo obtener la recta de ajuste directamente sobre la gráfica, resumiendo los pasos más importantes a seguir:

1 Se coloca una regla de plástico transparente sobre los puntos experimentales.
2 Se mueve la regla hasta que los puntos queden distribuidos lo más uniformemente posible por encima y por debajo de la regla.
3 El origen no es un punto especial así que no hay que forzar a la recta a pasar por él.
4 Finalmente, utilizando la regla, se traza con un lápiz una fina línea a través de los puntos.

IV.3.1 *Pendiente e intercepto*

Una vez trazada la recta, esta tendrá una ecuación general de la forma

$$y = m \cdot x + n \qquad (4.1)$$

donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen, que de ahora en adelante llamaremos intercepto.

Para calcular el valor de la pendiente se toman dos puntos de la recta de ajuste (esto normalmente significa que los puntos experimentales no pueden utilizarse para calcular la pendiente), eligiéndolos de manera que estén bien separados.

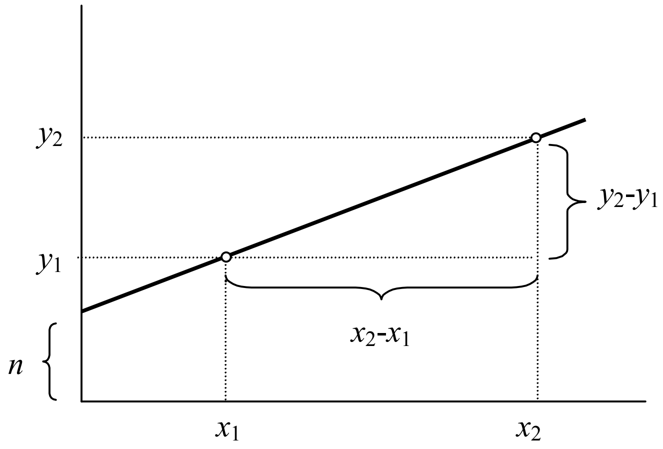


Figura 4.6. Cálculo de la pendiente y el intercepto de la recta de ajuste.

La pendiente vendrá dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{4.2}$$

Para determinar el valor del intercepto partimos de que cuando $x = 0$, $y = n$,. pero en muchos casos el origen de la gráfica no coincide con el punto (0,0), por lo tanto el valor de n no puede obtenerse directamente de la gráfica. En tales casos, una vez conocido el valor de m, se reordena la Ecuación 4.1 de manera que

$$n = y - m \cdot x \tag{4.3}$$

así, eligiendo un punto cualquiera de la recta y sustituyendo sus coordenadas en la Ecuación 4.3 podremos encontrar el valor de n.

Unidades

Hay situaciones, particularmente en matemáticas donde los puntos de una gráfica no representan datos experimentales y entonces los ejes no tienen unidades de medida. Sin embargo, las gráficas que estamos considerando muestran relaciones entre magnitudes físicas y por tanto tienen unidades. Así, cuando se calculan la pendiente y el intercepto deberán incluirse las unidades.

Incertidumbres en la pendiente y el intercepto

Dado que existe una incertidumbre en cada uno de los datos experimentales, esta incertidumbre también afectará a los valores de la pendiente y el intercepto. Si se han incluido las barras de error en cada punto, se podrán utilizar para hacer una estimación de las incertidumbre. El procedimiento es el siguiente:

Se trazan tres líneas a través de los datos: La primera es la recta de ajuste, y se determina su pendiente, m_0. Las otras dos rectas darán los valores máximo y mínimo de la pendiente compatibles con las barras de error. Les llamaremos m_+ y m_- y a partir de ellas estimaremos la incertidumbre. El valor de la pendiente será

$$m = (m_0 \pm \Delta m), \text{ con } \Delta m = \frac{m_+ - m_-}{2}$$

Para obtener la incertidumbre en el intercepto hay que localizar los puntos donde las tres rectas cortan al eje de ordenadas y se procederá como en el caso de la pendiente:

$$n = (n_0 \pm \Delta n) \text{ con } \Delta n = \frac{n_+ - n_-}{2}$$

Observando la gráfica de la Figura 4.5 podemos decir que la velocidad del objeto crece con el tiempo y este crecimiento es lineal (información cualitativa). El objeto describe por tanto un movimiento uniformemente acelerado y cuyas características (aceleración, velocidad inicial) podremos determinar (información cuantitativa).

Para ello, en primer lugar obtendremos la ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales siguiendo el procedimiento anteriormente descrito. Una vez trazada la recta, seleccionamos dos puntos sobre ella que se encuentren suficientemente espaciados, por ejemplo:

$$P_1 = (2, 0.7) \text{ y } P_2 = (8, 1.9)$$

La pendiente de la recta será

$$m = \frac{(1.9 - 0.7)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{(8-2)\ \mathrm{s}} = 0.2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

y el intercepto

$$n = \left(1.9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right) - \left(0.2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\right) \cdot (8\ \mathrm{s}) = 0.3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

con lo cual la ecuación de la recta de ajuste es:

$$y = 0.2 \cdot x + 0.3$$

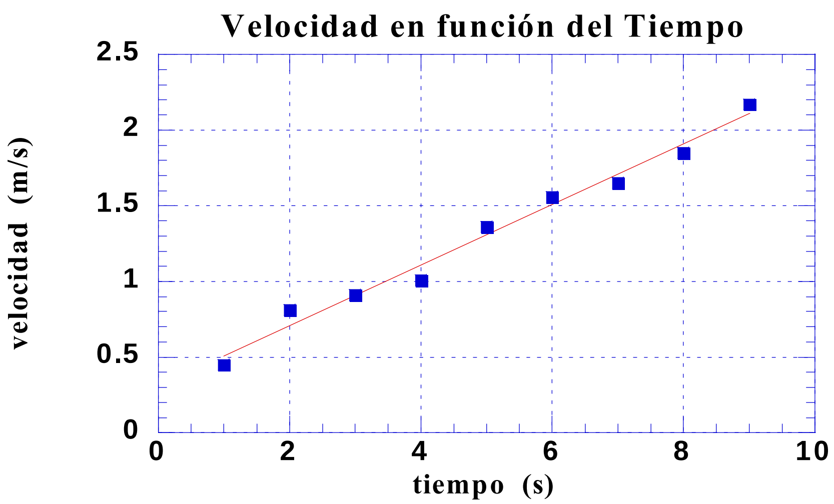


Figura 4.7. Representación gráfica de los datos de la Tabla 4.3 incluyendo la recta de ajuste.

Vamos a interpretar ahora su significado físico; para lo cual tenemos en cuenta que hemos identificado

$$v \to y$$
$$t \to x$$

por lo tanto

$$v = 0.2 \cdot t + 0.3$$

que comparamos con la expresión que da la velocidad como función del tiempo para un movimiento uniformemente acelerado:

$$v = a \cdot t + v_0$$

donde a es la aceleración y v_0 la velocidad inicial del móvil.

Identificando los términos de las dos expresiones anteriores, tenemos que la pendiente de la recta representa la aceleración del objeto y el intercepto nos da la velocidad inicial (véanse las unidades de m y n).

Así el valor de la aceleración y de la velocidad inicial del objeto son

$$a = 0.2 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$
$$v_0 = 0.3 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Conviene recordar que se trata de valores obtenidos a partir de datos experimentales y por tanto están afectados por una incertidumbre que habrá que determinar. Si llamamos Δa y Δv_0 a las incertidumbres en la aceleración y la velocidad inicial respectivamente, entonces la manera correcta de expresarlos será la siguiente.

$$a = (0.2 \pm \Delta a) \ \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$
$$v_0 = (0.3 \pm \Delta v_0) \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

IV.3.2 Interpolación y extrapolación

Una vez conocida la recta de ajuste se puede utilizar para determinar valores de la coordenada *y* correspondiente cualquier valor dado de *x* o viceversa.

Si los valores que buscamos se encuentran dentro del rango de los datos experimentales a este procedimiento se le llama *interpolación*. En el ejemplo anterior, podemos interpolar el valor de la velocidad al cabo de 4.5 obteniendo un valor de 1.2 m/s.

Si queremos obtener valores que están fuera del rango de los puntos experimentales, entonces haremos una *extrapolación*. Esto significa que prolongamos la recta en una región en la que no tenemos medidas. Con ello estamos suponiendo que en esa zona los puntos experimentales seguirán la misma tendencia indicada por la gráfica. Por ejemplo podemos hacer una extrapolación para obtener la velocidad que alcanzaría el móvil al cabo de un tiempo de 10 s, obteniendo un valor de 2.3 m/s.

Cuando extrapolamos debemos actuar con precaución; puede ocurrir que la relación que estamos suponiendo deje de ser cierta a partir de algún valor de *x* fuera del rango donde se ha hecho el ajuste. En general la interpolación es menos problemática, sin embargo puede haber cambios de tendencia sobre todo entre puntos que están muy separados.

IV.4 *Linealización de una ecuación*

En muchos casos tenemos un conocimiento previo de la relación existente entre las magnitudes que estamos estudiando. Si esto es así y esa relación puede expresarse mediante una ecuación, es posible que podamos elegir qué se representa en cada eje para obtener una gráfica lineal. Se habla entonces de *linealizar la ecuación*. El interés de esto es que siempre es más fácil analizar una recta que otras funciones más complicadas. Para ilustrarlo consideremos un experimento en el cual se midió la distancia recorrida por un objeto como función del tiempo. Los valores obtenidos experimentalmente se muestran en la Tabla 4.4

Tiempo (s)	Distancia (m)
1	0.20
2	0.43
3	0.81
4	1.57
5	2.43
6	3.81
7	4.80
8	6.39

Tabla 4.4. Distancia recorrida por un objeto en función del tiempo.

Representamos gráficamente en la Figura 4.8 los datos de la Tabla 4.4

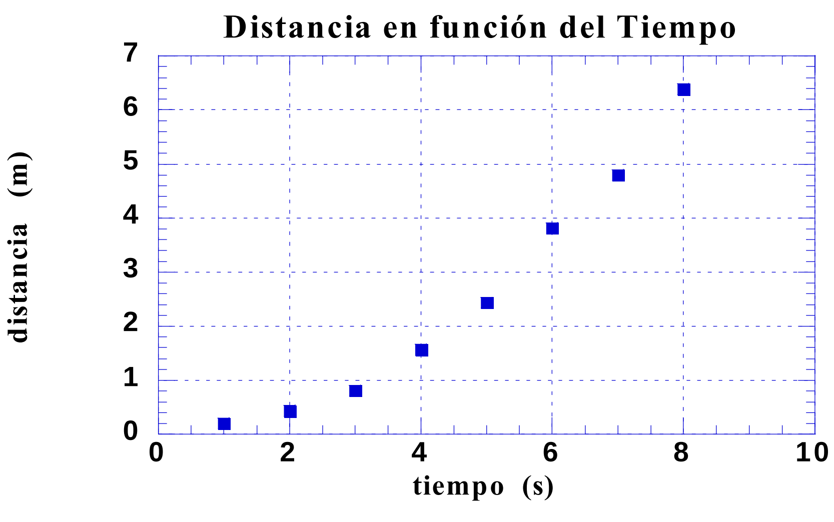


Figura 4.8. Representación gráfica de la distancia recorrida por un móvil en función del tiempo.

Resulta evidente que los puntos experimentales no siguen una línea recta, es decir, la distancia recorrida por el móvil no es proporcional al tiempo sino que crece de una forma más rápida. No se trata por tanto de un movimiento uniforme (velocidad constante).¿Podría tratarse de un movimiento uniformemente acelerado?¿cuál sería la aceleración?. Veamos:

Si representamos gráficamente la distancia recorrida frente al cuadrado del tiempo obtendremos la gráfica de la Figura 4.9 en la cual los puntos se ajustan bien a una recta. ¿Por qué al representar t^2 en el eje x se obtiene una línea recta?

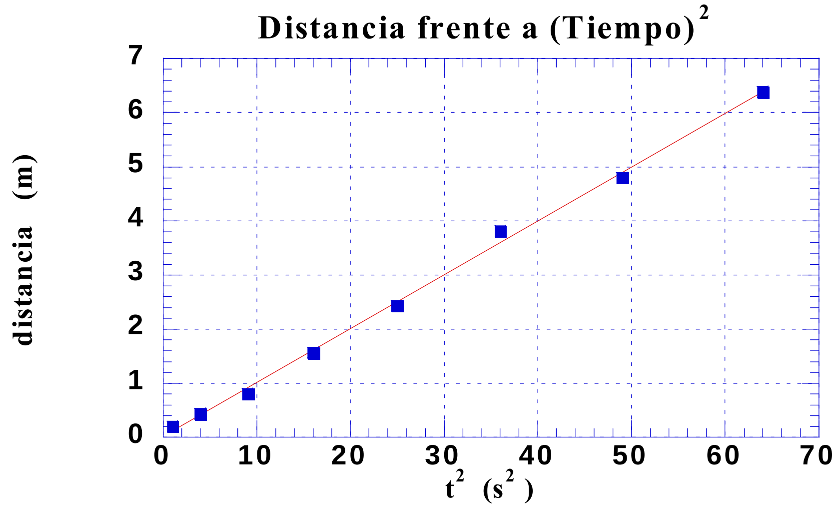


Figura 4.9. Representación gráfica de la distancia recorrida por el móvil en función del cuadrado del tiempo.

La ecuación que relaciona la distancia, d, recorrida por un móvil y el tiempo t en un movimiento uniformemente acelerado es

$$d = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + d_0$$

donde a es la aceleración del objeto y d_0 la distancia de la que parte en $t = 0$.

Podemos comparar los términos de la expresión anterior con la ecuación general de una recta como se indica a continuación

$$\left.\begin{array}{l} d = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + d_0 \\ y = m \cdot x + n \end{array}\right\}$$

e identificando

$$\left.\begin{array}{l} d \rightarrow y \\ t^2 \rightarrow x \end{array}\right\}$$

tendremos que si d se representa en el eje de ordenadas y t^2 en el eje de abscisas, tendremos una recta cuya pendiente es $\frac{1}{2} a$ y la ordenada en el origen es d_0.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de funciones que son fácilmente linealizables:

Ejemplo 1. *Ley de potencias*

Supongamos que dos magnitudes físicas están relacionadas de la forma

$$I = A \cdot d^p$$

donde d es la variable independiente, I la variable dependiente y A y p son constantes. Tomando logaritmos decimales a ambos lados de la ecuación, tenemos

$$\log I = \log A + p \log d$$

Podemos identificar

$$\log I \rightarrow y$$
$$\log d \rightarrow x$$

y comparar con la ecuación general de una recta,

$$y = m \cdot x + n$$

Representando, entonces, $\log I$ frente a $\log d$ obtendremos una recta de pendiente p y término independiente $\log A$

Ejemplo 2. *Relación exponencial*

La intensidad de corriente I en función del tiempo t durante el proceso de carga de un condensador con una batería y una resistencia en serie viene dada por la ley:

$$I = I_0 \cdot \exp[-t/\tau]$$

donde $I_0 = V/R$ es la intensidad máxima y $\tau = 1/RC$ es el tiempo característico que depende del valor de la resistencia R y de la capacidad C del condensador. Supongamos que I se mide en función de t y los datos obtenidos se representan gráficamente en la Figura 4.10.

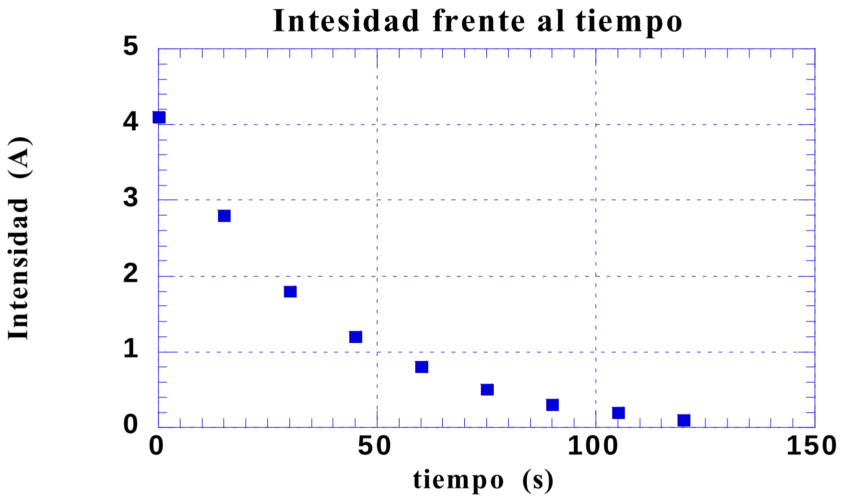


Figura 4.10. Intensidad de la corriente en función del tiempo, durante el proceso de carga del condensador.

Tomando logaritmos naturales en ambos lados de la ecuación anterior y reordenando, tenemos

$$\ln I = \ln I_0 - \frac{1}{\tau} \cdot x$$

Si $\ln I$ se representa frente a t, se obtendrá una línea recta de pendiente $-1/\tau$ que corta al eje vertical en $\ln I_0$ como puede apreciarse en la Figura 4.11.

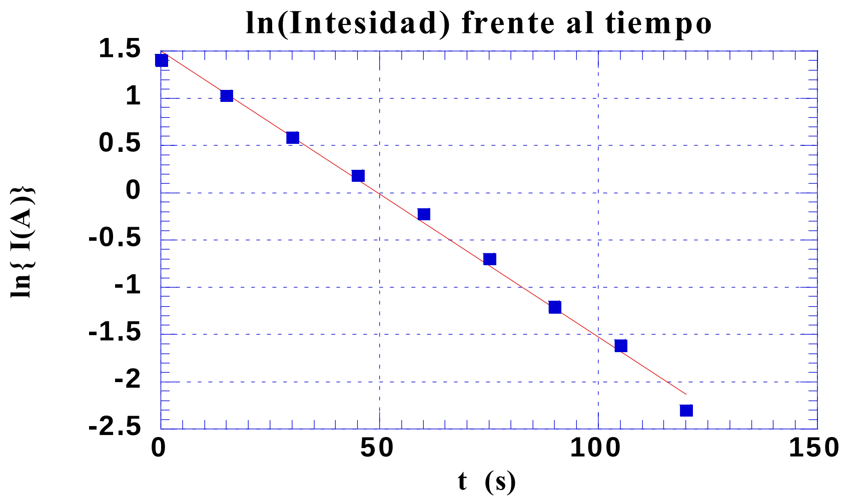


Figura 4.11. Gráfica en la que se representa el logaritmo natural de la intensidad de corriente en función del tiempo. Obsérvese que ahora los puntos están alineados y que se ha trazado la recta de ajuste.

Los ejemplos anteriores representan situaciones típicas en las que la linealización de una ecuación facilita la interpretación tanto cualitativa como cuantitativa de los datos experimentales.

IV.5 *Gráficas en escalas logarítmicas*

Hasta ahora hemos visto ejemplos en los cuales las escalas de los ejes son lineales, pero hay ciertos casos en los cuales son útiles las escalas logarítmicas. Esto ocurre cuando los datos experimentales se extienden a varios órdenes de magnitud. En la Figura 4.12 se puede apreciar la diferencia entre una escala logarítmica (en el eje *x*) y una escala lineal (en el eje *y*). En la escala logarítmica distancias iguales a lo largo del eje corresponden a diferencias en potencias de 10.

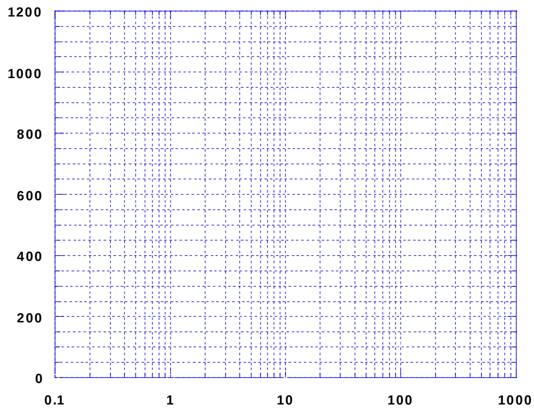


Figura 4.12. Ejemplo de escalas lineal (eje *y*) y logarítmica (eje *x*).

Se ha de tener en cuenta que ni el cero ni valores negativos pueden representarse en una escala logarítmica. Esto no suele representar una seria dificultad a la hora del análisis de datos puesto que los resultados de las medidas (longitudes, tiempos, masas, módulo de velocidades y aceleraciones, intensidades de corriente...) son todos números reales positivos. En caso de que la variable sea intrínsecamente negativa, siempre es posible definir otra nueva variable igual a la original pero cambiada de signo.

IV.5.1 *Gráficas semilogarítmicas*

En la Tabla 4.5 se muestran los datos obtenidos al estudiar las características de un diodo de silicio. Para pequeñas variaciones en el voltaje, los valores de la intensidad experimentan una gran variación (van siete órdenes de magnitud del primero al último de los valores de intensidad).Si los representamos en una escala lineal, tendremos la gráfica de la Figura 4.13 donde, para poder incluir los valores de corriente más altos, los valores correspondientes a voltajes menores que 0.6 V apenas se distinguen del cero.

Voltaje (V)	Intensidad (A)
0.35	9.0×10^{-7}
0.40	3.0×10^{-6}
0.45	5.0×10^{-5}
0.50	2.0×10^{-4}
0.55	1.7×10^{-3}
0.60	1.5×10^{-2}
0.65	7.5×10^{-2}
0.70	0.55
0.75	3.5

Tabla 4.5. Características de voltaje e intensidad en un diodo de silicio.

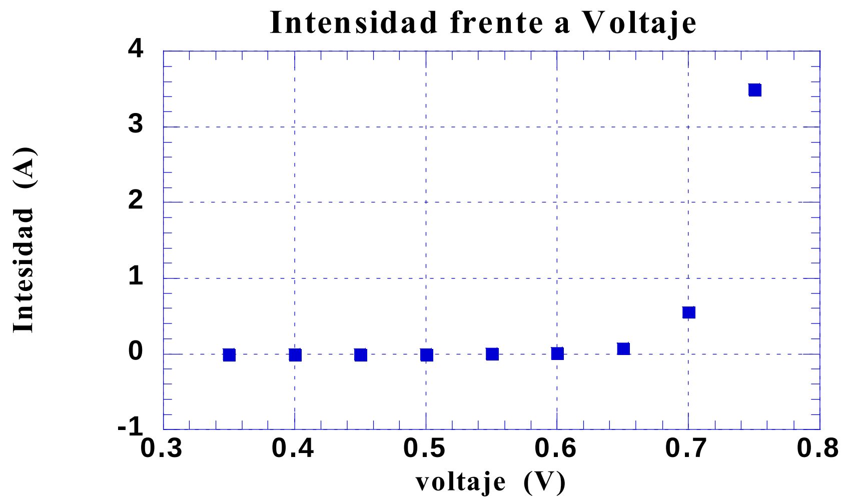


Figura 4.13. Representación de intensidad y voltaje de un diodo de silicio en una escala lineal.

Sin embargo, si en el eje de ordenadas utilizamos una escala logarítmica, el resultado es el de la Figura 4.14, donde distancias iguales en la escala vertical corresponden a cambios en potencias de 10. Este tipo de gráficas se denominan gráficas semilogarítmicas (semi-log) porque tienen en el eje *y* una escala logarítmica y el eje *x* una escala lineal

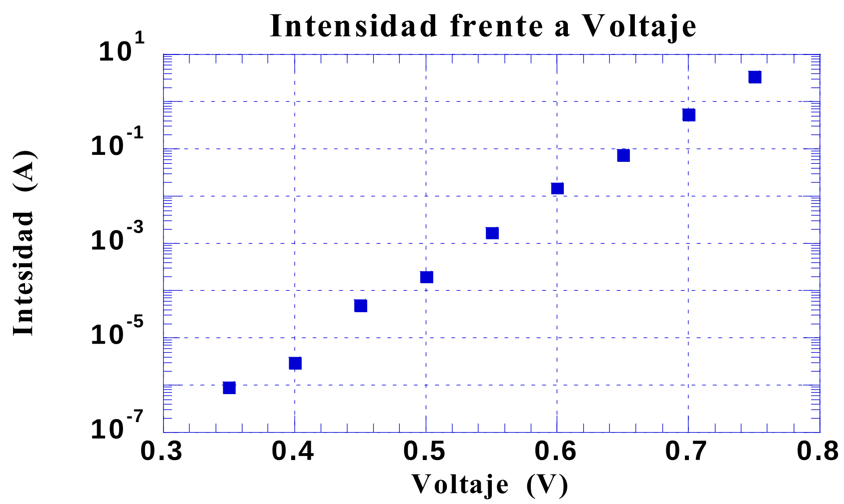


Figura 4.14. Representación semilogarítmica de los valores de intensidad y voltaje del diodo de silicio.

Otra forma de representar los datos de la Tabla 4.5 consiste en tomar los logaritmos de los valores de intensidad y representar los nuevos valores en una gráfica con escalas lineales en ambos ejes. Se obtiene la gráfica de la Figura 4.15. En ella, al igual que en la Figura 4.14 los puntos están alineados. Este hecho nos sugiere que la relación entre la intensidad y el voltaje en el diodo es de tipo exponencial.

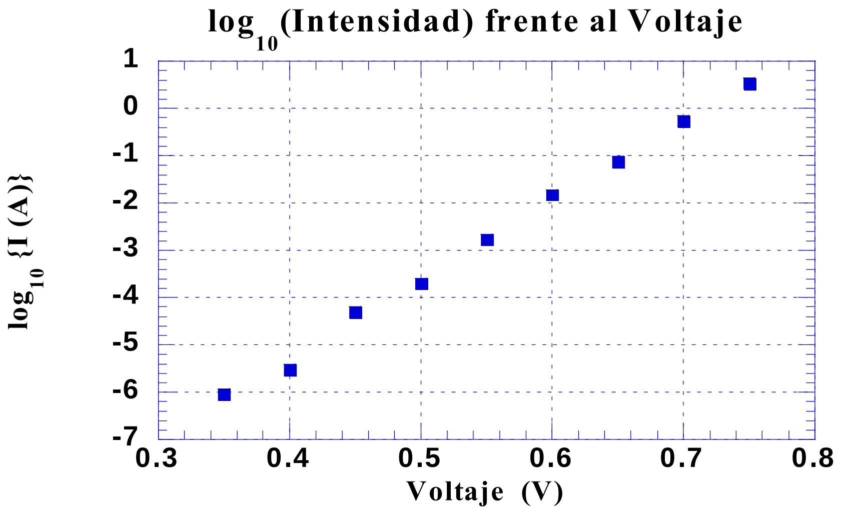


Figura 4.15. Se representa en una gráfica con escalas lineales en los dos ejes el logaritmo de la intensidad de corriente en el diodo en función del voltaje aplicado.

IV.5.2 *Gráficas log-log*

Cuando se utilizan escalas logarítmicas en los dos ejes se habla de gráficas log-log o gráficas logarítmicas. Son útiles cuando los valores de las magnitudes representadas en ambos ejes se extienden a varios órdenes de magnitud, pero también cuando las dos magnitudes están relacionados por una ley de potencias. Veamos un ejemplo en el cual se dan las dos situaciones: El semieje mayor de la órbita de un planeta, R, está relacionado con su periodo (tiempo que tarda en una revolución completa alrededor del Sol) T, por la expresión siguiente:

$$R^3 = K \cdot T^2 \quad \text{ó bien} \quad R = K^{1/3} \cdot T^{2/3}$$

donde K es una constante.

En la Tabla 4.6 se dan los datos de los planetas del sistema solar. Las unidades son años y unidades astronómicas (UA), donde 1 UA es el semieje mayor de la órbita terrestre.

Planeta	*T* (años)	*R* (U.A.)
Mercurio	0.240	0.38710
Venus	0.615	0.72333
La Tierra	1.000	1.00000
Marte	1.881	1.52369
Júpiter	11.862	5.20280
Saturno	29.456	9.55475
Urano	84.018	19.21814
Neptuno	164.762	30.10957
Plutón	247.974	39.53322

Tabla 4.6. Periodo de revolución y tamaño de las órbitas de los planetas del sistema solar.

En la Figura 4.16 se muestran los datos de la Tabla 4.6 representados en una gráfica con escalas lineales en los dos ejes. Puede apreciarse que los valores correspondientes a los cuatro primeros planetas aparecen superpuestos en la gráfica puesto que para incluir los valores de los planetas más alejados del Sol se han tenido que ampliar mucho los rangos de ambos ejes.

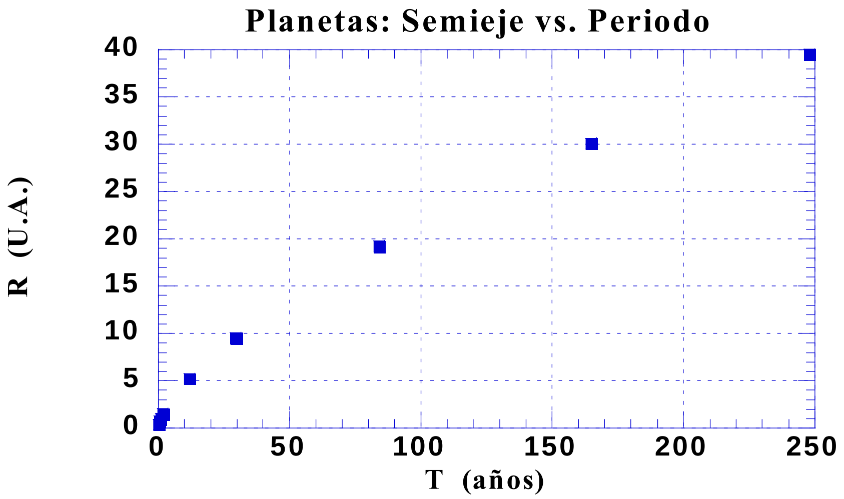


Figura 4.16. Representación en escala lineal de los valores del semieje de la órbita alrededor del sol en función del periodo de revolución de los planetas del sistema Solar.

Si hacemos la representación en una gráfica log-log (Figura 4.17) se obtiene más información que en la Figura 4.16 puesto que ahora los puntos aparecen claramente distanciados.

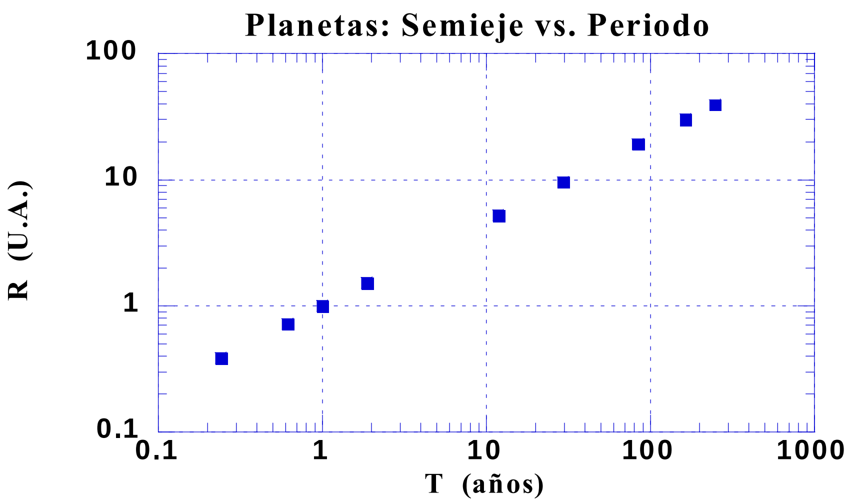


Figura 4.17. Gáfica log-log de los datos de la Tabla 4.6.

A veces es más sencillo tomar los logaritmos de los datos de la tabla y representarlos en escala lineal. En la Tabla 4.7 se dan los logaritmos de los valores de la Tabla 4.6.

Planeta	log *T*	log *R*
Mercurio	-0.620	-0.412
Venus	-0.211	-0.141
La Tierra	0.000	0.000
Marte	0.274	0.183
Júpiter	1.074	0.716
Saturno	1.469	0.980
Urano	1.924	1.284
Neptuno	2.217	1.479
Plutón	2.394	1.597

Tabla 4.7. Logaritmos de los valores del periodo de revolución y del semieje de las órbitas de los planetas del Sistema Solar.

La representación de $\log R$ frente a $\log T$ se hace en la Figura 4.18. La gráfica es equivalente a la de la Figura 4.17. Las escalas logarítmicas hacen directamente la operación de tomar logaritmos.

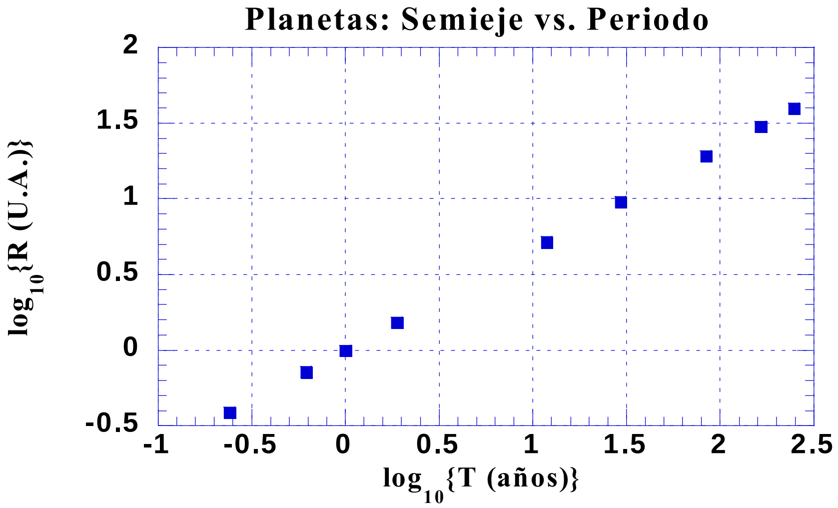


Figura 4.18. Representación gráfica de los datos de la Tabla 4.6.

Es importante hacer notar cómo se rotulan los ejes en la gráfica anterior; en este caso los números que se representan en las escalas no tienen unidades, son los logaritmos de un número, que puede ser el valor numérico de T expresado en años, o el valor de R expresado en unidades astronómicas.

En este ejemplo la relación entre el radio de la órbita y el periodo de revolución es una ley de potencias que se puede linealizar fácilmente tomando logaritmos

$$\log R = \log\left(K^{1/3} \cdot T^{2/3}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\log T + \frac{1}{3}\log K$$

identificando

$$y \rightarrow \log R$$
$$x \rightarrow \log T$$

y representando $\log R$ frente a $\log T$ obtendremos una línea recta de pendiente $m = \dfrac{3}{2}$ e intercepto $n = \dfrac{1}{3} \cdot \log K$.

Como hemos visto, esto es equivalente a representar R frente a T en una gráfica log-log.

Ejercicios

1. En un experimento se midió la caída de tensión a través de una resistencia para distintos valores de la intensidad. Los valores obtenidos, con su incertidumbre, se muestran en la siguiente tabla

Intensidad (A) (± 0.005 A)	**Tensión (V) (± 0.1 V)**
0.10	0.5
0.20	1.1
0.30	1.6
0.40	2.0
0.50	2.4

   i) Representa gráficamente la tensión frente a la intensidad. Añade las barras de error a cada punto.
   ii) Traza la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales y calcula la pendiente y el intercepto. Escribe la ecuación de la recta de la forma $y = m \cdot x + n$
   iii) Utilizando la ecuación de la recta de ajuste, determina cuál será caída de tensión cuando la intensidad sea de 0.35 A y de 0.80 A.
   iv) Con la ayuda de las barras de error, haz una estimación de la incertidumbre en la pendiente y el término independiente.

2. Para estudiar la flexión de una barra, un estudiante va colgando distintas masas y mide la flecha, *s*. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla

m (g) (± 1 g)	**s (mm) (± 0.1 mm)**
110	1.23
160	2.54
210	4.30
260	6.19

i) Dibuja la gráfica de s frente a m y traza la recta de ajuste.
ii) Calcula la pendiente y el intercepto
iii) Si la ley de Hook para la flexión es $F = \mathrm{k}s$, determina el valor de la constante k.

3. La siguiente tabla contiene ecuaciones tomadas de distintos campos de la ciencia y la ingeniería. Para cada ecuación se indican la variable independiente, la variable dependiente y las constantes.
   i) ¿Qué deberías representar en cada uno de los casos anteriores para obtener una línea recta?
   ii) ¿Cómo están relacionados la pendiente y el término independiente con las constantes de cada ecuación?

Ecuación	**Variable Dependiente**	**Variable Independiente**	**Constante(s)**
$F = kx$	F	x	k
$R = AT + BT^2$	R	T	A, B
$Q = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$	Q	t	τ
$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	T	l	$2\pi, g$
$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$	s	s'	f
$l = l_0(1+\alpha\Delta T)$	l	ΔT	l_0, α
$I = AV\exp(-BV^2)$	I	V	A, B

4. En experimento se estudia el proceso de carga de un condensador de capacidad C a través de una resistencia R; para lo cual se mide a intervalos regulares de tiempo la intensidad I que circula por el circuito. Los datos obtenidos se muestran en la tabla.

I (μA)	**t (s)**
4.1	0
1.8	10
0.7	15
0.2	20
0.1	25

Sabiendo que durante el proceso de carga la intensidad varía de la forma

$$I = I_0 \exp(-t/RC)$$

i) ¿Qué has de representar en cada eje para obtener una línea recta?
ii) Dibuja la gráfica convenientemente linealizada y traza la recta de ajuste.

iii) Determina la pendiente y el intercepto.¿Qué representan? ¿Qué unidades tiene la pendiente?

5. En la siguiente tabla se da la variación de la resistencia de un conductor cerámico a bajas temperaturas cuando aumenta la intensidad de corriente que lo atraviesa. Suponiendo que la relación entre R e I puede escribirse como

$$R = kI^n$$

donde k y n son constantes

i) Dibuja la gráfica adecuadamente linealizada de los datos de la tabla.
ii) Traza la recta de ajuste.
iii) Calcula la pendiente y el intercepto.
iv) Utiliza los resultados del apartado anterior para obtener los valores de k y n.

I (A)	R(Ω)
1.0×10^{-3}	6.0×10^{-4}
2.0×10^{-3}	2.2×10^{-3}
4.0×10^{-3}	6.3×10^{-3}
8.0×10^{-3}	2.0×10^{-2}
1.6×10^{-2}	4.2×10^{-2}
3.2×10^{-2}	1.2×10^{-1}
6.4×10^{-2}	3.4×10^{-1}
1.3×10^{-1}	1.1
2.6×10^{-1}	3.2
5.2×10^{-1}	9.5

6. La magnetización de un material varía con el tiempo t según la expresión $M(t) = M_0 \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$ donde t_0 es una constante

i) Propón un tipo de gráfica que linealice la relación $M(t)$.
ii) ¿Cómo se obtiene M_0?
iii) ¿Cuál es el significado físico de M_0?

7. En el proceso de carga de un condensador C a través de una resistencia R, la intensidad y el voltaje varían con el tiempo según:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$V = V_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

donde τ es el tiempo característico.

i) Comprueba que $I(t)$ se puede linealizar tomando logaritmos mientras que no es posible linealizar $V(t)$ de esta forma.

ii) Calcula sus derivadas respecto del tiempo y exprésalas en función de la variable dependiente (*I* ó *V* en cada caso) y comprueba que de esta forma se obtiene una recta.

8. En la siguiente tabla se dan los valores de *V* e *I* durante el proceso de carga de un condensador.
   i) Representa en una misma gráfica *V* e *I* en función de *t*.
   ii) Aplica el resultado obtenido en el ejercicio anterior para linealizar las ecuaciones y representa gráficamente $\frac{dI(t)}{dt}$ en función de $I(t)$ y $\frac{dV(t)}{dt}$ en función de $V(t)$. Ten en cuenta que se puede aproximar la derivada numérica calculando las diferencias finitas utilizando pares de datos consecutivos:

$$\frac{dY(t)}{dt} \approx \frac{Y_{i+1} - Y_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Nota: Como veremos más adelante, dado que los datos tienen errores, al calcular las diferencias obtendremos datos con incertidumbres que pueden ser incluso mayores que el propio valor medido.

   iii) Indica cómo se obtiene el tiempo característico y los valores de I_0 y V_0 a partir de las rectas de ajuste.

Tiempo (s)	**Voltaje (V)**	**Intensidad (µA)**
0	4.15	3.1
10	5.96	1.8
20	6.95	0.7
30	7.28	0.2
40	7.39	0.1
50	7.43	0.0

V. Incertidumbre en las medidas

V.1 *Mejor estimación y error*

Para conocer el valor de una magnitud física debemos medirla pero el resultado de una medida siempre está afectado por una incertidumbre y por tanto nunca podremos conocer el *valor verdadero* de esa magnitud. Teniendo esto en mente, y como ya hemos adelantado en el Capítulo I, la mejor forma de expresar el resultado de una medida es dando la *mejor estimación* de esa magnitud y el *rango* dentro del cual confiamos que se encuentra el valor verdadero de esa magnitud. En general la forma estándar de expresar el resultado de la medida de la magnitud x es:

$$(\text{valor medido de } x) = x_{\text{mejor}} \pm \Delta x \tag{5.1}$$

con lo cual damos a entender que la mejor estimación que puede hacer el experimentador del valor de la magnitud x es el número x_{mejor} y que hay una confianza razonable en que el valor verdadero de esa magnitud se encuentra entre $x_{mejor}-\Delta x$ y $x_{mejor}+\Delta x$. A este número Δx le llamamos *incertidumbre* o *error* en la medida de la magnitud x.

Muchas veces se utiliza el término "valor verdadero" para referirse a la mejor estimación del valor de una magnitud aunque esta denominación es un tanto inadecuada por las razones que ya se han apuntado. En ocasiones, especialmente en los laboratorios docentes, se comparan los resultados de la medida de una magnitud con el *valor aceptado* de esa magnitud, refiriéndonos así a un valor que ha sido medido muchas veces y que está publicado y aceptado internacionalmente por la comunidad científica. Por ejemplo, el valor aceptado de la carga específica del electrón es[5]

$$-\frac{e}{m} = (1.758\,819\,62 \pm 0.000\,000\,53\,) \times 10^{11}\ \text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

cuya incertidumbre es varios órdenes de magnitud más pequeña que la que se puede obtener en muchos laboratorios; por tanto cuando comparamos nuestras medidas con el valor aceptado podemos considerarlo como si este fuera exacto.

Dado que toda la estructura de la ciencia y sus aplicaciones se basa en medidas, la capacidad para evaluar y minimizar las incertidumbres es de crucial importancia. Si no se conoce la incertidumbre no se pueden sacar conclusiones significativas del resultado de una medida.

V.2 *Algunas fuentes de incertidumbre*

Dentro de las causas que introducen incertidumbres en las medidas podemos señalar las debidas a las características de los instrumentos de medida utilizados, a la forma de operar del propio experimentador, a las condiciones ambientales en que se realizan estas medidas o a la falta de definición de lo que se va a medir. Evidentemente existe una gran variedad de causas, más o menos difíciles de detectar; y por ello cada experimento o cada proceso de medida ha de ser analizado individualmente con el fin de identificar esas causas, en lo posible minimizarlas y cuantificar su influencia en los resultados de las medidas. A la hora de cuantificar la incertidumbre en una medida debemos tener en cuenta todas las distintas contribuciones de diferente origen y tipo.

[5] The Fundamental Physical Constants. E.R.Cohen, B.N.Taylor. Phys.Today, agosto 1997.

Vamos a considerar algunas fuentes de encertidumbre que podemos encontrarnos en un experimento:

►Características de fabricación del instrumento de medida.

Todos los instrumentos de medida se fabrican con unas ciertas tolerancias tanto en las dimensiones de sus componentes como en los valores de los componentes eléctricos (si te fijas en los códigos de colores de las resistencias una de las franjas indica la tolerancia). Estas tolerancias son inherentes a los procesos de fabricación. Además todos los instrumentos de medida han de ser calibrados y pueden por tanto introducir incertidumbres debidas a la propia calibración del instrumento.

►No linealidad.

En el diseño de muchos instrumentos o en el método de medida, se supone una relación lineal entre dos magnitudes; por ejemplo en un dinamómetro se supone una relación lineal entre la fuerza aplicada y el alargamiento del muelle. Esta linealidad puede ser sólo una aproximación o puede que sea válida únicamente en un rango restringido de valores. Asumiendo un comportamiento lineal podemos estar introduciendo errores en las medidas.

►Errores de operación.

Son debidos al componente humano. Dentro de ellos podemos señalar algunos muy comunes:

▪Errores de paralaje en la lectura de una escala o de la posición de la aguja sobre una escala. Si la aguja y la escala no están en el mismo plano, la lectura depende del ángulo de observación. Para reducir este tipo de errores algunos instrumentos de aguja incorporan un espejo todo a lo largo de la escala. La posición correcta de lectura se consigue situando el ojo de manera que la aguja y su imagen sobre el espejo se superpongan.

▪Errores de lectura. Se deben a que los instrumentos tienen una resolución limitada o a la habilidad de experimentador en la lectura de una escala. Es muy común la creencia de que al utilizar una escala graduada el error de lectura es media unidad de la división más pequeña. Sin embargo un instrumento con una escala muy fina, utilizado para medir algo con los bordes poco definidos puede introducir una incertidumbre de varias unidades de la división más pequeña. Cada situación requiere ser analizada por separado. En los instrumentos digitales no podemos saber en qué valor intermedio entre dos dígitos está el valor verdadero de la magnitud medida. A la hora de cuantificar el error de lectura en un instrumento digital se suele tomar una unidad en el último dígito pero esto, una vez más, no es de validez universal: Si consideramos un voltímetro digital construido de manera que da una lectura de 10.4 V porque el valor medido está más próximo a 10.4 V que a 10.3 V o a 10.5 V; entonces el significado de esta lectura es que el voltaje se encuentra entre 15.35 V y 15.45 V. Sin embargo en un reloj digital construido de manera que cambia su indicación de 09:00 a 09:01 justo cuando llega a 09:01 la interpretación es diferente a la que hemos hecho con el voltímetro.

▪Otros errores de operación se introducen en aquellos casos en que el instrumento ha de ponerse en contacto con el objeto que se mide, es el caso, por ejemplo, de un tornillo micrométrico donde las fuerzas de contacto pueden ser distintas en cada medida y por tanto las longitudes medidas serán distintas.

►Errores ambientales.

Los instrumentos están calibrados para unas ciertas condiciones ambientales (temperatura, humedad,...) al utilizarlos en otras condiciones diferentes se estarán introduciendo incertidumbres. Por ejemplo, cuando hacemos una medida con una regla puede ocurrir que la temperatura ambiental no sea la misma que la de calibración y su longitud habrá variado debido a los efectos de la dilatación térmica. Como consecuencia todas las medidas realizadas con esa regla se verán afectadas. La mayoría de los sólidos a temperatura ambiente tienen un coeficiente de dilatación lineal de, típicamente, 10^{-5} K^{-1}. Un cambio de temperatura de 10 K corresponde a un cambio en longitud de una parte en 10^4. Este efecto puede ser importante siempre que estemos midiendo longitudes con una precisión de ese orden de magnitud.

►Errores de inserción.

En algunas situaciones la inserción del instrumento de medida puede afectar al valor que se mide. En estos casos se utiliza el término *carga* para designar este tipo de errores. Por ejemplo cuando insertamos un voltímetro en un circuito, la propia resistencia interna del voltímetro, que no es infinita, modifica el voltaje medido. En la Figura 5.1. se ilustra este efecto; antes de conectar el voltímetro para medir la caída de tensión en la resistencia R_L, la corriente es I y por tanto la diferencia de potencial entre sus extremos es $V_L = I \cdot R_L$. Si R_m es la resistencia interna del voltímetro al insertarlo tendremos una resistencia R_m en paralelo con R_L cambiando de esta forma la resistencia equivalente del circuito y a consecuencia de ello la intensidad que circula por el mismo. El voltaje que indicará el voltímetro V_m será distinto de V_L.

►Muestras no representativas.

En muchas situaciones se toma una muestra de un cierto material y se realizan medidas sobre esa muestra suponiendo que representa las propiedades de todo el material. Las conclusiones obtenidas para la muestra se aplican a todo el material. Si la muestra no es representativa estaremos introduciendo errores en nuestras conclusiones.

V.3 *Error absoluto y error relativo*

En la sección V.1, hemos visto la forma estándar de indicar la incertidumbre en el resultado de una medida, pero al expresarla de esa forma no estamos dando toda la información acerca del resultado de la medida. No es lo mismo tener una incertidumbre de un centímetro al medir una distancia de 1 km, que al medir 5 cm. La calidad de la medida no viene dada por la cantidad Δx sino por el cociente $\Delta x / x_{mejor}$. Esta cantidad se denomina *incertidumbre relativa* o *error relativo, ε*.

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{mejor}} \tag{5.2}$$

y se suele expresar en tantos por ciento

$$\varepsilon(\%) = \frac{\Delta x}{x_{mejor}} \cdot 100 \tag{5.3}$$

así el resultado de la medida se puede dar como

$$x = x_{mejor} \pm \varepsilon(\%) \tag{5.4}$$

Para evitar confusiones con la incertidumbre relativa, la cantidad Δx se denomina *incertidumbre absoluta* o *error absoluto*.

Nótese que aunque la incertidumbre absoluta tiene las mismas unidades que la magnitud que se mide, la incertidumbre relativa es adimensional.

V.4 *Cifras significativas e incertidumbre relativa*

El concepto de incertidumbre relativa está muy relacionada con el de las cifras significativas. De hecho el número de cifras significativas de un resultado es un indicador aproximado de su incertidumbre relativa.

Consideremos los siguientes resultados: $l_1 = 21$ mm y $l_2 = 0.21$ mm, por convenio eso significa que $l_1 =(21 \pm 1)$ mm y $l_2 = (0.21 \pm 0.01)$ mm; los dos resultados tienen distintas incertidumbres absolutas. Sin embargo, tienen el mismo número de cifras significativas y su incertidumbre relativa es la misma, del 5%.

$$\frac{1}{21} = \frac{0.01}{0.21} = 0.05$$

De la misma forma, 21.0 mm, con tres cifras significativas tiene una incertidumbre del 0.5% y podríamos seguir así sucesivamente. Desafortunadamente esta conexión es sólo aproximada. Por ejemplo X = 10, con dos cifras significativas, supone una incertidumbre del 10% y en el otro extremo, Y = 99 (también con dos cifras significativas) tiene una incertidumbre del 1%:

$$X = 10 \pm 1 \quad \text{ó} \quad 10 \pm 10\%$$

$$Y = 99 \pm 1 \quad \text{ó} \quad 99 \pm 1\%$$

evidentemente la incertidumbre relativa asociada a dos cifras significativas va desde el 1% al 10% dependiendo del número que se considere.

En la Tabla 5.1 se muestra una correspondencia aproximada entre cifras significativas e incertidumbre relativa

Número de cifras significativas	**Incertidumbre relativa correspondiente**	
	entre	**aproximadamente**
1	10% y 100%	50%
2	1% y 10%	5%
3	0.1% y 1%	0.5%

Tabla 5.1. Conexión aproximada entre el número de cifras significativas de un número y su incertidumbre relativa.

V.5 *Acotando el resultado de una medida*

Dado que Δx y ε representan el rango más probable de encontrar el valor de la magnitud, no tiene sentido expresarlas con mucha precisión. Por ello se suelen redondear a una cifra significativa[6] salvo cuando esta sea un "1", que se expresa con dos cifras significativas. Una vez estimada la incertidumbre, hay que considerar el número de cifras significativas del resultado puesto que no tiene sentido conservar cifras de más precisión que las que muestra la incertidumbre. Podemos resumir en cinco pasos importantes la forma de acotar el resultado de una medida:

1 Determinar la mejor estimación del valor de la magnitud.

[6] En medidas de gran precisión a veces se utilizan dos cifras significativas.

2 Calcular la incertidumbre de esa magnitud.
3 Redondear la incertidumbre a una cifra significativa (o dos si la primera cifra es un "1").
4 Acotar el valor medido y la incertidumbre al número apropiado de cifras significativas.
5 Poner las unidades adecuadas a la magnitud y a su incertidumbre.

Ejemplo: *Cómo se acotan las incertidumbres.*

Consideremos un experimento en el cual se ha medido la velocidad del sonido en el aire (a 20 ˚C). El resultado obtenido es 341.775 $m{\cdot}s^{-1}$ con una incertidumbre de 2.0260 $m{\cdot}s^{-1}$.

Dado que la incertidumbre se expresa sólo con una cifra significativa redondeamos 2.0260 $m{\cdot}s^{-1}$ a 2 $m{\cdot}s^{-1}$. Con esta incertidumbre no tiene sentido que el resultado de la medida lo demos con 3 decimales; tendremos que redondearlo hasta el mismo número de puestos decimales que la incertidumbre. Así, redondeamos 341.775 $m{\cdot}s^{-1}$ a 342 $m{\cdot}s^{-1}$.

Finalmente, podemos decir que basándonos en los datos del experimento, la velocidad del sonido (símbolo *c*) en el aire es 342 $m{\cdot}s^{-1}$, con una incertidumbre de 2 $m{\cdot}s^{-1}$ y esto se expresa de la forma

$$c = (342 \pm 2)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Este método de acotar el valor es correcto. Sin embargo es muy frecuentemente expresar el resultado en notación científica; 342 pasa a ser 3.42×10^2 y 2 se transforma en 0.02×10^2. El resultado queda:

$$c = (3.42 \pm 0.02)\times 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

V.6 *Combinación de incertidumbres*

Un experimento puede requerir la determinación de varias magnitudes que después se insertarán en una ecuación. Por ejemplo para determinar la densidad e un cuerpo, medimos su masa, *m* y su volumen, *V*. La densidad, ρ vendrá dada por la relación $\rho = \dfrac{m}{V}$ ¿Cómo se combinan las incertidumbres en *m* y *V* para dar la incertidumbre en ρ ? La combinación de incertidumbres para dar la incertidumbre en un valor calculado, se llama *propagación de incertidumbres o propagación de errores*. A continuación veremos dos maneras de hacerlo y obtendremos unas reglas de propagación de errores que consideraremos “provisionales” puesto que en la Sección VI. 9 veremos un tercer método. A pesar de ello resultan suficientemente válidas en muchos casos.

V.6.1 *Combinación de incertidumbres: Método 1*

Este método es el más simple y requiere sólo de la aritmética. Consideremos por ejemplo que queremos calcular el área de un alambre de sección circular; el valor obtenido de la medida del diámetro es de (2.5 ± 0.1) mm. ¿Cuál es el área de la sección del alambre y cuál es su incertidumbre?.

El área, A, de un círculo en términos de su diámetro d es $A=\dfrac{\pi d^2}{4}$ que en nuestro caso conduce a:

$$A=\frac{\pi\left(2.5\times10^{-3}\,m\right)^2}{4}=4.91\times10^{-6}\,m^2$$

Los valores máximo y mínimo del área compatibles con la incertidumbre en el diámetro se obtienen sustituyendo d por su valor máximo, (2.5 + 0.1) mm, y su valor mínimo, (2.5 - 0.1) mm, respectivamente. Así

$$A_{\max}=\frac{\pi\left(2.6\times10^{-3}\,m\right)^2}{4}=5.31\times10^{-6}\,m^2 \text{ y } A_{\min}=\frac{\pi\left(2.4\times10^{-3}\,m\right)^2}{4}=4.52\times10^{-6}\,m^2$$

Tenemos entonces como mejor estimación del área $A = 4.91 \times 10^{-6}$ m^2 con una cota superior $A_{\max} = 5.31 \times 10^{-6}$ m^2 y una cota inferior $A_{\min} = 4.52 \times 10^{-6}$ m^2. La diferencia, $A_{\max}$-$A_{\min}$ nos dará el rango de A:

$$\textit{Rango de } A = A_{\max}-A_{\min} = 0.79 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Podemos estimar la incertidumbre en A como la mitad del rango; así, $\Delta A = 0.395 \times 10^{-6}$ m^2 que redondeamos a 0.4×10^{-6} m^2 y finalmente damos el área como

$$A = (4.9 \pm 0.4) \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

V.6.2 *Combinación de incertidumbres: Método 2*

Aunque el método anterior es razonable, si las fórmulas contienen más de una magnitud con incertidumbre deja de ser práctico. El método que vamos a introducir ahora representa una aplicación del cálculo diferencial.

Supongamos que una cierta magnitud V depende de dos variables, x, y, es decir

$$V = V(x, y)$$

Si x cambia en una cantidad δx, e y cambia en una cantidad δy, el cambio en V, δV, vendrá dado por

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y$$

donde $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, es la derivada parcial de V respecto de x.

Para utilizar la ecuación anterior en problemas de propagación de errores, sustituimos δx y δy por las incertidumbres Δx y Δy, de manera que la ecuación queda:

$$\Delta V=\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|\Delta y \tag{5.5}$$

donde hemos tomado los valores absolutos de las derivadas parciales para evitar los posibles valores negativos. Si no se hiciese así podría ocurrir que se cancelasen los términos de la expresión anterior.

Nótese que se deriva V respecto a cada magnitud con incertidumbre. Las magnitudes que no tienen incertidumbre se tratan como constantes.

Combinación de incertidumbres: sumas, restas, productos y cocientes

Vamos a aplicar el método anterior para ver cómo se combinan las incertidumbres en el caso de las operaciones aritméticas más sencillas:

►<u>Suma</u>: $V = x + y$

Aplicando la Ecuación 5.5 tenemos

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|\Delta y \qquad \text{con } \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| = 1 \text{ y } \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| = 1$$

de manera que la incertidumbre en la suma es

$$\Delta V = \Delta x + \Delta y \qquad (5.6).$$

►<u>Resta</u>: $V = x - y$

Al igual que en la suma, $\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| = 1$ y $\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| = 1$; por lo tanto

$$\Delta V = \Delta x + \Delta y \qquad (5.7)$$

Tanto al sumar como al restar valores medidos, el error absoluto es la suma de los errores absolutos, lo cual pone de manifiesto que restar valores medidos no es buen asunto, porque el resultado será un número más pequeño con una incertidumbre más grande; es decir, el resultado de una resta es un número con una incertidumbre relativa mayor que la de los datos originales.

►<u>Producto</u> $V = x \cdot y$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| = y \quad \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| = x \text{; y por tanto } \Delta V = y\Delta x + x\Delta y .$$

dividiendo los dos miembros de la expresión anterior por $x \cdot y$ queda

$$\frac{\Delta V}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

y entonces

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \qquad (5.8)$$

La incertidumbre relativa en un producto es la suma de las incertidumbres relativas de los factores.

►<u>Cociente</u>: $V = \frac{x}{y}$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| = \frac{1}{y} \text{ y } \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| = \frac{x}{y^2} \text{ y por tanto } \Delta V = \frac{\Delta x}{y} + \frac{x\Delta y}{y^2}$$

que dividiendo ambos miembros por $\frac{x}{y}$, llegamos a la misma expresión que en el caso del producto

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \tag{5.9}$$

►Potencia: $V = x^n$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| = n \cdot x^{n-1} \text{ y por tanto}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = n\frac{\Delta x}{x} \tag{5.10}$$

En la Tabla 5.2 resumimos las reglas “provisionales” de propagación de incertidumbres a las operaciones aritméticas.

Operación	Incertidumbre
$V = x \pm y$	$\Delta V = \Delta x + \Delta y$
$V = x \cdot y^{\pm 1}$	$\Delta V = \frac{\Delta x}{y} + \frac{x\Delta y}{y^2}$
$V = x^n$	$\frac{\Delta V}{V} = n\frac{\Delta x}{x}$

Tabla 5.2. Reglas “provisionales”de propagación de incertidumbres en las operaciones más sencillas.

Ejemplo 1. *Cálculo de la incertidumbre en la sección del hilo del ejemplo anterior.*

El área en función del diámetro es $A = \frac{\pi d^2}{4}$ y su incertidumbre

$$\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial d}\right|\Delta d = \frac{\pi d}{2}\Delta d = \frac{\pi \times 2.5\times 10^{-3}\, m \times 0.1\times 10^{-3}\, m}{2} = 3.9\times 10^{-7}\, m^2$$

Redondeando este resultado a una cifra significativa, tenemos 4×10^{-7} m^2, que es igual que el valor de la incertidumbre obtenido por el método 1.

Ejemplo 2. *Incertidumbre en la determinación de la densidad de una pieza cilíndrica.*

Se determina la densidad de una pieza cilíndrica midiendo su masa *m*, su longitud *l* y su diámetro *d* y los resultados obtenidos son:

m = 47.36±0.01 g, *l* = 15.28±0.05 mm, *d* = 21.37±0.04 mm.

El valor de la densidad en función de los valores medidos viene dado por

$$\rho = \frac{4m}{\pi l d^2}.$$

Sustituyendo directamente los valores en la expresión anterior tenemos

$$\rho = 8642 \text{ kg·m}^{-3}$$

La incertidumbre relativa en la densidad es:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} = 0.72\%$$

Finalmente daremos el valor de la densidad

$$\rho = (8.64 \pm 0.06) \text{ kg·m}^{-3}$$

donde ya hemos redondeado el resultado al número adecuado de cifras significativas de acuerdo con la incertidumbre absoluta.

V.7 *Incertidumbres aleatorias y sistemáticas*

Atendiendo a la causa que introduce la incertidumbre, podemos clasificar los errores en dos grandes grupos; aleatorios y sistemáticos. Según se trate de un tipo u otro su influencia sobre los resultados de una medida es diferente y es distinto el tratamiento.

►Incertidumbres aleatorias:

Son aquellas que varían de forma aleatoria cuando repetimos las medidas de una misma magnitud dando lugar a una dispersión en los resultados. Son debidas a la contribución de numerosas fuentes incontrolables: fluctuaciones personales (variaciones en el tiempo de reacción al accionar un cronómetro, aplicación de distintas presiones al medir con un micrómetro, errores de paralaje...), fluctuaciones electrónicas (ruido) en los instrumentos o circuitos utilizados...Dado su carácter fluctuante, se utilizan técnicas estadísticas para cuantificarla y conocer su influencia sobre la magnitud que se mide. Se denominan también por ello, errores estadísticos.

►Incertidumbres sistemáticas:

Son aquellas que no varían de forma aleatoria de una medida a la siguiente. Pueden ser debidas a algún defecto en el instrumento de medida (no se pone a cero correctamente) o a una calibración incorrecta, a que el funcionamiento depende de la temperatura y las condiciones de medida difieren de las de calibración, etc.... La única forma de detectar y corregir errores sistemáticos es comparando nuestras medidas con otros métodos alternativos y realizando un análisis crítico y cuidadoso de los instrumentos y procedimientos utilizados. Por eso es aconsejable intercalar en el proceso de medida patrones fiables que permitan calibrar el instrumento durante la medición.

La distinción entre incertidumbres aleatorias y sistemáticas puede ilustrarse con el siguiente ejemplo. Supongamos que la medida de una cierta magnitud física se repite cinco veces bajo las mismas condiciones. Si sólo hubiera errores aleatorios los resultados de las cinco medidas se dispersarían entorno al valor verdadero o valor aceptado, algunos serían más altos y otros serían más bajos, como se muestra en la Figura 5.1(a). Si además de los errores aleatorios hubiese errores sistemáticos, los cinco valores medidos se distribuirían entorno a algún valor desplazado como se muestra en la Figura 5.1(b).

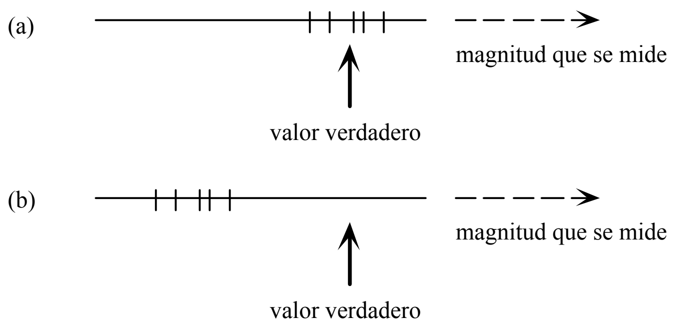


Figura 5.1. Diferencias entre errores aleatorios y errores sistemáticos.

En general todas las medidas están afectadas de incertidumbres tanto aleatorias como sistemáticas y la distinción entre unas y otras no siempre está muy clara. Algo que causa errores aleatorios en un experimento puede ser una fuente de errores sistemáticos en otro. La manera usual de dar la incertidumbre total de una medida es:

$$\Delta x_{tot} = \sqrt{(\Delta x_{aleat})^2 + (\Delta x_{sist})^2} \tag{5.11}$$

En el capítulo VI describiremos los métodos estadísticos que se utilizan para dar una estimación fiable de las incertidumbres de carácter aleatorio. El tratamiento de los errores sistemáticos es muy diferente y no hay un "método" general que valga para todos los casos.

V.8 *Incertidumbres sistemáticas*

Describiremos brevemente los dos tipos de errores sistemáticos que se pueden dar en un instrumento de medida; el pedestal y la ganancia.

V.8.1 *Pedestal*

Cuando se requiere medir pequeñas longitudes con precisiones de centésimas de milímetros se suele utilizar el tornillo micrométrico. Antes de realizar cualquier medida se ha de determinar el "error de cero" del instrumento, es decir la lectura del micrómetro cuando se mantienen sus mandíbulas en contacto. Una vez determinado el "error de cero", todas las medidas que se realicen con ese instrumento deberán corregirse por ese valor; si por ejemplo tiene un error de cero de 0.02 mm, a todos las medidas habrá que restarles 0.02 mm (o sumárselo si el error de cero fuera – 0.02 mm). Si no se tiene esto en cuenta, el micrómetro estará introduciendo una incertidumbre de tipo *pedesta*l. Afecta por igual a todas las medidas realizadas, pero el error relativo en los resultados será mayor cuanto más pequeña sea la longitud medida; así si medimos 8.00 mm el pedestal de 0.02 mm introducirá un error relativo de 0.25% , si la medida es de 1 mm el error relativo sube al 2% y si medimos 0.10 mm el error relativo que estamos introduciendo es de un 20%.

Todas las balanzas tienen un error sistemático de este tipo que se corrige cuando se taran.

En ciertas situaciones experimentales resulta útil mantener o incluso forzar la existencia de un pedestal, esto ocurre por ejemplo cuando utilizamos instrumentos electrónicos y la magnitud de las señales que queremos medir es comparable a la del "ruido"electrónico. Si introducimos un pedestal en el instrumento de medida, elevamos la señal un cierto valor por encima del nivel de "ruido" y podremos medirla sin dificultad.

V.8.2 *Ganancia*

En contraste con el pedestal que se mantiene fijo en todas las medidas, independientemente de la magnitud de estas, la ganancia sí depende de la magnitud.

Cuando utilizamos una regla (o un calibre) para medir una longitud debemos considerar los efectos de la expansión térmica sobre el material de que está construida. Consideremos una regla de longitud ℓ_c a la temperatura de calibración T_c. Cuando utilizamos esa regla a una temperatura T distinta de T_c, su longitud habrá variado, se habrá alargado o acortado en un cierta fracción f.

$$\frac{\ell}{\ell_c} = f$$

pero la separación entre dos divisiones de la regla también habrá variado en la misma proporción, es decir

$$\frac{div}{div_c} = f$$

por tanto a medida que crece la longitud medida, crecerá también la diferencia entre el valor que mide la regla a la temperatura T y lo que mediría si estuviese a la temperatura de calibración T_c.

En resumen; para detectar los errores sistemáticos hay que contrastar los valores que indica el instrumento con patrones conocidos en todo el rango en que vamos a realizar las medidas. Si todos los valores medidos difieren del patrón en la misma cantidad hemos identificado un pedestal. Si la diferencia varía con la magnitud de lo que se mide, tendremos un error tipo ganancia. Una vez cuantificados esos errores, todas las medidas han de corregirse como corresponda.

V.9 *Precisión, exactitud, resolución y sensibilidad*

Al hablar de las incertidumbres asociadas al proceso de medida, surgen una serie de términos que aunque en el lenguaje de la calle son sinónimos, en este ámbito tienen significados bien diferenciados:

►Precisión y exactitud.

La precisión se refiere al acuerdo entre los resultados obtenidos al repetir varias veces la medida de una misma magnitud. La exactitud de una medida (o del promedio de una serie de medidas) se refiere a su proximidad a un valor "aceptado", "verdadero", "nominal", etc.

La precisión está asociada a las incertidumbres aleatorias mientras que la exactitud se identifica con las de carácter sistemático. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración de nuestro instrumento respecto de patrones de medida aceptados internacionalmente.

►Resolución y sensibilidad.

La resolución de un instrumento de medida es, básicamente, el menor incremento que es capaz de medir. La resolución de un voltímetro digital con un display de tres dígitos se expresa normalmente como ± 1 en el último dígito.

La sensibilidad es una indicación de la cantidad más pequeña que puede medir un instrumento particular. ¿Podemos medir un nanometro con una regla? Por supuesto que no. En química analítica se suele denominar “límite de detección”.

Nótese que tanto resolución como sensibilidad son distintas de precisión o exactitud; sin embargo existen relaciones entre ellas. Consideremos por ejemplo las siguientes cinco medidas de la masa de un objeto realizadas con una balanza electrónica

Masa (g)	5.12	5.15	5.15	5.21	5.10	5.13

Tabla 5.3. Medidas de la masa de un objeto.

Supongamos ahora que repetimos las medidas con otra balanza que no tuviese suficiente resolución para poder dar dos decimales, nuestras seis medidas hubiesen sido siempre m = 5 g, indicando, incorrectamente, una precisión fenomenal.

Ejercicios

1. En un determinado experimento se utilizan un voltímetro y un amperímetro analógicos. Supón que en la lectura del amperímetro la aguja se encuentra entre las marcas de 1.24 A y 1.25 A y la lectura del voltímetro entre las correspondientes a 3.2 V y 3.4 V. Expresa cada lectura como *mejor valor* ± *incertidumbre* y evalúa la incertidumbre relativa de cada una de las medidas.

2. En el experimento del ejercicio anterior sustituimos el amperímetro de aguja por uno digital con una salida en pantalla de 3 dígitos y leemos 1.25 A. Cómo expresarías ahora el resultado de la medida.

3. Errores de inserción. Para medir la caída de tensión a través de una resistencia R_L en un circuito, conectamos un voltímetro en paralelo con R_L. La inserción del voltímetro introduce una incertidumbre en nuestra medida que debemos evaluar.
   i) Antes de conectar el voltímetro la corriente a través de la resistencia R_L es I y la diferencia de potencial $V_L = I{\cdot}R_L$. Si el resto del circuito tiene una resistencia R y la f.e.m de la fuente es E, obtén la expresión de V_L en función de E, R y R_L.
   ii) Una vez conectado el voltímetro, de resistencia interna R_m, la resistencia total del circuito cambia. Determina la resistencia equivalente R_e a esas R_m y R_L conectadas en paralelo y la resistencia total del circuito.
   iii) Al cambiar la resistencia total del circuito también cambia la intensidad y consecuentemente el valor que indica el voltímetro V_m. Calcula su valor.
   iv) El error relativo debido a la inserción del voltímetro es $(V_m-V_L)/V_L$. Exprésalo en términos de R, R_e y R_L.
   v) Aplícalo al caso en que un voltímetro con una resistencia interna de 10 kΩ se conecta en paralelo con una resistencia de carga de 1 kΩ conectada en un circuito de resistencia total 2 kΩ.

4. Los siguientes son ejemplos obtenidos de una gran variedad de experimentos realizados por estudiantes en los cuales se presentan los resultados de magnitudes medidas y las incertidumbres asociadas. En cada uno de ellos hay algo incorrecto. Indica qué es y si puedes corrígelo.
   i) La constante del muelle = (12.5731 ± 0.628 41) $N{\cdot}m^{-1}$
   ii) La carga medida = $-3.25\times 10^{-19} \pm 2.37\times 10^{-20}$ C
   iii) La densidad del cobre = (8825 ± 500) $kg{\cdot}m^{-3}$

iv) El tiempo medido = 1.5473 ± 1 s
v) La velocidad del sonido en el agua = $(1.48 \pm 0.05) \times 10^3$
vi) La capacidad desconocida = (1.1 ± 0.001) μF
vii) La longitud de onda de la luz es 6.0×10^{-7} m ± 1
viii) La longitud de onda medida = 0.000 000 563 ± 0.000 000 07 m

5. Determina las incertidumbres relativas como fracción inferior a la unidad y en tanto por ciento en los siguientes casos:
   i) $I = (2.0 \pm 0.2)$ A
   ii) $r = (1.56 \pm 0.07)$ m
   iii) $t = (1.2 \pm 0.3) \times 10^6$ s
   iv) $m = (5.6 \pm 0.6) \times 10^2$ kg

6. Convierte los errores relativos de las siguientes medidas en errores absolutos y escríbelos de la forma estándar.
   i) $x = 543.2$ m± 4%
   ii) m =47.36 g ± 0.02%
   iii) $V = 20$ V ± 5.0%
   iv) $\lambda = 670 \times 10^{-9}$ m ± 4%

7. Utilizando una regla podemos apreciar 1 mm y con un calibre hasta 0.05 mm. Supón que necesitas medir una longitud de 2 cm con una precisión del 1%. ¿Podrías hacerlo con la regla?¿Y con el calibre? Justifica la respuesta.

8. En un experimento un estudiante tiene que medir el espesor de una hoja de papel utilizando un calibre que aprecia hasta 0.05 mm. El estudiante decide coger un taco de 100 hojas y medir su espesor E; obteniendo E = 10.15mm.
   i) ¿Cuál es el espesor de una hoja e y su incertidumbre?
   ii) ¿Podría reducir la incertidumbre cogiendo varios tacos de 100 hojas y midiéndolos juntos?
   iii) Si quiere conocer el espesor de una hoja con una incertidumbre de 0.00005 mm ¿cuántos tacos de 100 hojas necesita?

   Este ejercicio sirve para ilustrar cómo simplemente midiendo el espesor de varias hojas idénticas se puede mejorar la precisión en la medida sin necesidad de recurrir a instrumentos o técnicas más sofisticadas.

9. Para determinar la aceleración de un móvil un estudiante mide sus velocidades inicial y final y calcula la diferencia. Repite las medidas dos veces y los datos obtenidos se muestran en la tabla

velocidad inicial (cm/s) ±1%	**velocidad final (cm/s) ±1%**
15.0	20.2
19.0	19.5

   i) Calcula la incertidumbre absoluta en cada una de las cuatro medidas.
   ii) Calcula la diferencia ($v_{\text{final}} - v_{\text{inicial}}$) en cada medida y su incertidumbre absoluta.

iii) Calcula la incertidumbre relativa en los dos valores de ($v_{fina} - v_{inicial}$)

Los resultados obtenidos, especialmente en la segunda medida ilustran lo desastroso que resulta obtener un número pequeño restando dos números grandes.

10. En un experimento para determinar la densidad de una bolita metálica utilizamos una balanza de triple brazo. Al intentar pesar la bolita, esta rueda sobre el plato de la balanza y se cae. Para solucionarlo utilizamos un vidrio de reloj en el cual situamos la bolita y realizamos dos pesadas; una primera de *vidrio+bolita* y una segunda en la que quitamos la bolita. Los resultados obtenidos son los siguientes:

    M_1(*vidrio +bolita*) = 65.7 g

    M_2(*vidrio*) = 46.9 g

    Calcular la masa de la bolita y su incertidumbre

11. Teniendo en cuenta cómo se propagan las incertidumbres en un producto (Método 2) y el hecho de que el número de cifras significativas de un número se corresponde aproximadamente con su incertidumbre relativa,
    i) Demuestra que la regla dada en la Sección III.3 para multiplicar números es aproximadamente válida. Para concretar considera el caso en que el número dado con menor precisión tiene dos cifras significativas.
    ii) Explica mediante un ejemplo que el resultado de multiplicar varios números puede ser mucho menos preciso de lo que esa regla indica (esto es especialmente cierto si se multiplican varios números).

12. El campo magnético B en el centro de un solenoide con n espiras por metro, a través del cual circula una corriente,I, viene dado por $B = \mu_0 n I$ donde μ_0 es la permitividad del espacio libre. Si n = (400 ± 5) m^{-1} y I = (3.2 ± 0.2) A, calcula B y su incertidumbre.

13. En la medida de una resistencia, la lectura del voltímetro fue de (15.2 ± 2) V y la lectura del amperímetro fue (2.6 ± 0.1) A. ¿Cuál es el error absoluto en el valor de la resistencia calculada según la expresión $R = \dfrac{V}{I}$?

14. En un experimento se utiliza un péndulo simple para medir la aceleración de la gravedad siendo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Si el valor del periodo es T = (1.24 ± 0.02) s y la longitud del péndulo es de l = (0.381 ± 0.002) m. ¿Cuál es el valor de g y sus incertidumbres absoluta y relativa?

15. Un experimento para medir la densidad d de un objeto cilíndrico se utiliza la ecuación $d = \dfrac{m}{\pi r^2 l}$. Determina la incertidumbre absoluta en la densidad si m = (0.029 ± 0.005) kg, r = (8.2 ± 0.1) mm y l = (15.4 ± 0.1) mm

16. La distancia focal de una lente, f , está relacionada con la distancia objeto, s , y la distancia imagen, s' por la ecuación $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{1}{f}$ Si s =(30.0±0.1) cm y s' =(20.0±0.5) cm, calcula f y su incertidumbre.

VI. Incertidumbres aleatorias

Hemos visto que los errores aleatorios son aquellos que responden a múltiples causas incontroladas que hacen que los valores obtenidos de medidas repetidas de una magnitud fluctúen de un forma aleatoria. La manera de estimar este tipo de errores es mediante técnicas estadísticas.

VI.1 *Valor medio y desviación típica*

Cuando medimos una magnitud una sola vez ($N = 1$), el mejor valor es simplemente el valor medido y su incertidumbre vendrá dada por los errores que introduce el instrumento, el método de medida la manera de operar, etc.

Supongamos que en la medida de alguna magnitud x hemos identificado todas las fuentes de errores sistemáticos y las hemos reducido a un nivel despreciable. Dado que todas las fuentes de incertidumbre que quedan tienen carácter aleatorio, la mejor manera de actuar será repitiendo varias veces la medida de esa magnitud y analizando los valores obtenidos.

Consideremos un experimento en el cuál hemos utilizado un cronómetro para medir el tiempo que tarda un péndulo en realizar 10 oscilaciones. Como resultado de las variaciones en nuestro propio tiempo de reacción y en la percepción del instante en que el péndulo ha alcanzado un punto determinado de su trayectoria, se han obtenido unos resultados que presentan variaciones de carácter aleatorio. Estos resultados se muestran en la Tabla 6.1.

Tiempo (s)	20.1	20.0	20.2	20.1	20.1

Tabla 6.1. Tiempo que tardó el péndulo en realizar 10 oscilaciones.

Parece razonable suponer que la mejor estimación del tiempo que tardó el péndulo en realizar 10 oscilaciones será la media de los cinco valores obtenidos; puesto que si las variaciones son aleatorias, y ocurren por muchas causas independientes, tan probable es que ocurran por exceso como por defecto y al hacer la media se compensarán. Más adelante en este capítulo veremos que esta elección es la más acertada.

Para un número N de medidas de una cierta magnitud x, se define el valor medio de dichas medidas como

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \tag{6.1}$$

donde x_i es el valor de la magnitud obtenido en la medida i-ésima.

Puede ocurrir que se obtenga el mismo resultado varias veces, llamando x_k ($k = 1, 2, ...$) a los valores diferentes de la magnitud x que hemos encontrado y n_k al número de veces que aparece el valor x_k, la Ec. 6.1 se puede escribir como

$$\overline{x} = \sum_{k} \frac{x_k n_k}{N} \tag{6.2}$$

y se denomina *promedio pesado*; cada valor x_k está pesado (multiplicado) por el numero de veces n_k que ocurre. Evidentemente, si sumamos todos los n_k, obtenemos el número total de medidas, $\sum_k n_k = N$. Llamando F_k a la fracción de las N medidas que dan el resultado x_k; $F_k = \frac{n_k}{N}$ podemos rescribir la expresión del valor medio de una forma más compacta

$$\bar{x} = \sum_k x_k F_k \tag{6.3}$$

En el ejemplo de la Tabla 6.1, tenemos cinco medidas, por tanto $N = 5$ y llamando t_m al promedio tenemos

$$t_m = \frac{(20.0 + 3\times 20.1 + 20.2)\,s}{5} = 20.1\ s$$

que tomaremos como mejor estimación del tiempo que tardó el péndulo en realizar las 10 oscilaciones

mejor estimación de $t = t_m = 20.1$ s

La siguiente cuestión que nos planteamos es qué valor, obtenido a partir de los datos experimentales, debemos asignar a la incertidumbre.

Una forma de estimar la dispersión o variabilidad de los datos es calculando la diferencia d_i entre cada uno de ellos y la media, $d_i = x_i - \bar{x}$; a este valor le llamamos *desviación*. En la Tabla 6.2 se muestra la desviación y el cuadrado de la desviación al valor medio de los datos de la Tabla 6.1.

x_i (s)	$d_i = x_i - \bar{x}$ (s)	$d_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$ (s2)
20.1	0.0	0.00
20.0	-0.1	0.01
20.2	+0.1	0.01
20.1	0.0	0.00
20.1	0.0	0.00
	$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0.02$ s2

Tabla 6.2. Desviaciones y sus cuadrados de los datos de la Tabla 6.1.

En principio parecería razonable tomar el promedio de las desviaciones como medida de la variabilidad de los datos, pero la suma de las desviaciones al valor medio siempre es cero debido a la propia definición de valor medio que nos asegura que las d_i son unas veces positivas y otras negativas de manera que en promedio se cancelan. La forma de evitar este problema es tomando el cuadrado de las desviaciones que, como se observa en la Tabla 6.2, nos da un conjunto de números positivos cuya suma se suele denominar *varianza* o *desviación cuadrática media* s^2de los datos y que se define:

$$s^2(x) = \sum \frac{d_i^2}{N}$$

de manera que

$$s^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N} \qquad (6.4)$$

Aunque la varianza es una medida fundamental de la dispersión de los datos, se suele utilizar más frecuentemente la *desviación típica* o *desviación estándar, s,* que se obtiene tomando la raíz cuadrada de la varianza:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N}} \qquad (6.5)$$

La desviación típica es una medida de la dispersión de los datos obtenidos al repetir la medida varias veces en las mismas condiciones y <u>se utiliza por ello como estimación de la incertidumbre en la medida</u>, entonces, podemos asignar a la incertidumbre en la medida de la magnitud x el valor de $s(x)$.

En el ejemplo anterior la varianza es

$$s^2 = \frac{0.02\ s^2}{5} = 0.004\ \mathrm{s}^2$$

y la desviación típica

$$s = 0.632\ 455\ \mathrm{s}$$

(nótese que la desviación típica tiene las mismas unidades la magnitud que se mide).

Por tanto la incertidumbre en la medida del tiempo es $\Delta t = s = 0.632455$ s que redondeado a una cifra significativa queda $\Delta \mathrm{t} = 0.6$ s. Así el resultado de la medida queda

$$t = (20.1 \pm 0.6)\ \mathrm{s}$$

Conviene señalar, sin embargo, que cuando el número N de datos es pequeño, suele utilizarse una nueva definición de la desviación típica dada por

$$s_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \qquad (6.6)$$

La utilización del factor N-1 en el denominador se debe a que en el sumatorio el número de desviaciones independientes es N-1 y no N ya que existe una ecuación que liga los valores x_i que es la que nos da el valor medio. Por ello se divide por N-1 que es el número de grados de libertad.

Evidentemente la nueva definición dada por Ec. 6.6 da un valor ligeramente más alto que el dado por la Ec. 6.5, y corrige la tendencia a subestimar la incertidumbre cuando el número de datos es pequeño. Podemos apreciar esta tendencia si consideramos el caso extremo (y absurdo) de que $N = 1$ (es decir, hacer una única medida). En ese caso el valor medio será igual a la única medida y la única desviación es automáticamente cero; así la Ec. 6.5 nos da el resultado absurdo $s(x) = 0$ (no hay incertidumbre) mientras que la Ec. 6.6 da 0/0, es decir $s_{N\text{-}1}$ está indeterminado; lo cuál refleja mejor nuestro total desconocimiento de la incertidumbre después de realizar una única medida.

En la práctica las dos definiciones difieren poco debido a la operación de extracción de raíz cuadrada. En el ejemplo anterior, s(x)= 0.63 y $s_{N-1}(x) = 0.7$, que no supone una diferencia muy importante.

En resumen, *cuando realizamos varias medidas repetidas de una misma magnitud física tomamos como mejor estimación de su valor la media de los valores obtenidos y como incertidumbre la desviación típica*

VI.3 *Distribuciones e histogramas*

Una forma de representar los resultados de muchas medidas repetidas es mediante un diagrama de barras o *histograma*. Para ello el *rango* de los datos (valor máximo-valor mínimo) se divide en una serie de intervalos iguales y el número de datos que entra dentro de cada intervalo (*frecuencia*) se representa en el eje vertical frente a los intervalos que se representan en el horizontal. El histograma así obtenido representa la *distribución de frecuencias*.

Aunque la mayoría de las hojas de cálculo de programas comerciales (Excel, Kaleidagrph, etc.) tienen herramientas para realizar este tipo de gráficos vamos a ver con el siguiente ejemplo cómo se construye "a mano" un histograma; ello nos permitirá comprender mejor una serie de conceptos que son importantes en el análisis de errores:

En un cierto experimento se necesita determinar el periodo de oscilación de un péndulo. Utilizando un cronómetro un estudiante mide el tiempo que tarda el péndulo en realizar 10 oscilaciones. Repite las medidas 20 veces y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 6.3.

20.13	20.31	20.73	20.45	20.91
20.78	20.23	20.46	20.70	20.56
20.42	20.67	20.51	20.56	20.34
20.53	20.71	20.45	20.12	20.56

Tabla 6.3. Veinte medidas repetidas del tiempo, [t(s)], que tarda el péndulo en realizar 10 oscilaciones.

Como ya se indicó anteriormente, el ser humano posee una gran capacidad para detectar visualmente patrones o tendencias y no conviene desaprovecharla a la hora de analizar los resultados de un experimento. En este caso, con 20 medidas repetidas de una misma magnitud, se puede puede sacar más información sobre sus características (dispersión, cómo se distribuyen...) si las representamos en un histograma que simplemente observando los datos de la tabla.

En principio no hay unas reglas fijas para decidir cuantos intervalos deben aparecer en un histograma. Un método sencillo es hacer que el número de intervalos sea aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de datos. A continuación, en la Tabla 6.4 se indican los pasos a seguir.

Pasos a seguir para construir el histograma	**Ejemplo basado en los datos de la Tabla 6.3**	
1. Encontrar el rango, R, de los datos (valor máximo –valor mínimo)	R = 21.01 s - 20.12 s = 0.89 s	
2. Contar el número total de datos, N	N=20	
3. Calcular $\sqrt{N}$ y redondear al entero más próximo. Este valor se toma como el número de intervalos.	$\sqrt{N}$ = 4.47, redondeado a 4	
4. Dividir R por el número obtenido en 3 para obtener la anchura de cada intervalo.	Anchura del intervalo = 0.2225, redondeado a 0.2	
5.Construir una tabla con todos los intervalos y el número de datos (i.e. la frecuencia) en cada intervalo. Nótese que el efecto de redondear la anchura del intervalo a 0.2 es incrementar el número total de intervalos de 4 a 6.	Intervalo (s)	frecuencia
	$20 \leq x < 20.2$	2
	$20.2 \leq x < 20.4$	5
	$20.4 \leq x < 20.6$	6
	$20.6 \leq x < 20.8$	4
	$20.8 \leq x < 21.0$	2
	$21.0 \leq x < 21.2$	1

Tabla 6.4. Pasos a seguir para construir un histograma con los datos de la Tabla 6.3.

En la Figura 6.1 se muestra el histograma así construido:

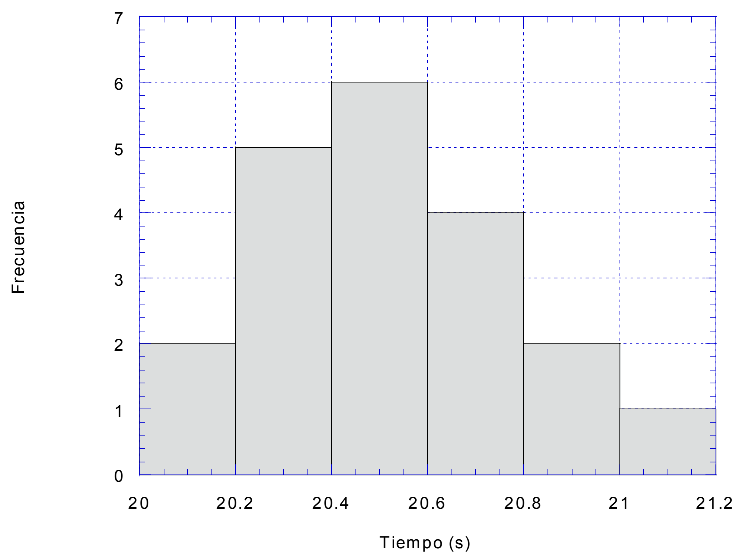


Figura 6.1. Histograma de frecuencias de los datos de la Tabla 6.3.

Utilizando la frecuencia, es difícil comparar el histograma obtenido con los 20 valores del obtenido a partir de, por ejemplo, 100 valores. Por esta razón se suele utilizar la *frecuencia relativa* que da la fracción del total de datos que se encuentra en cada intervalo. La frecuencia relativa siempre toma un valor menor que 1 y la suma de las frecuencias relativas es 1.

Entonces para los datos de la Tabla 6.3, tenemos

Intervalo	**frecuencia**	**Frecuencia relativa**
$20 \leq x < 20.2$	2	2/20 = 0.1
$20.2 \leq x < 20.4$	5	5/20 = 0.25
$20.4 \leq x < 20.6$	6	6/20 = 0.3
$20.6 \leq x < 20.8$	4	4/20 = 0.2
$20.8 \leq x < 21.0$	2	2/20 = 0.1
$21.0 \leq x < 21.2$	1	1/20 = 0.05

Tabla 6.5. Frecuencias relativas en cada intervalo para los datos de la Tabla 6.3.

El área de cada barra del histograma se puede hacer igual a la frecuencia relativa de ese intervalo y por tanto el área de todas las barras vale 1. La frecuencia relativa de un intervalo de anchura Δx y ordenada y es:

$$\textit{Frecuencia relativa} = y \cdot \Delta x$$

En la Figura 6.2 se muestra el histograma con las frecuencias relativas en el eje vertical. Una distribución representada utilizando las frecuencias relativas por cada intervalo se dice que está *normalizada*.

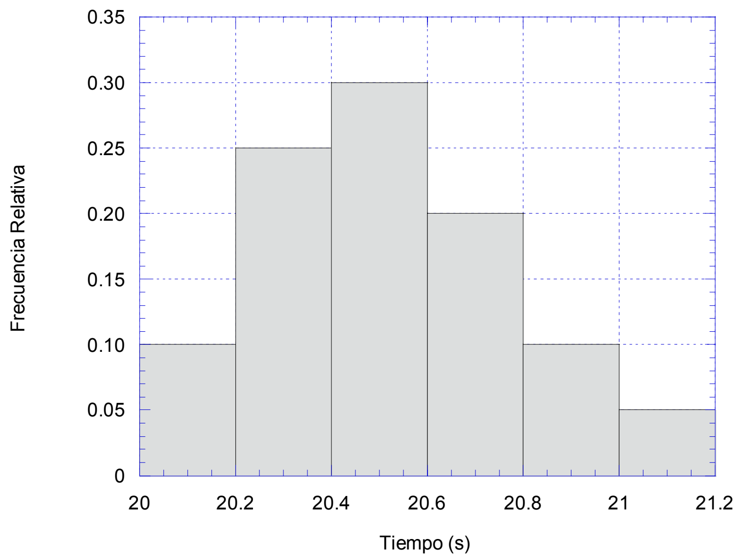


Figura 6.2. Histograma con las frecuencias relativas.

Dado que la probabilidad de un suceso viene dada por el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles, la frecuencia relativa puede considerarse como una probabilidad. Cuanto mayor es la frecuencia relativa de un intervalo, mayor es la probabilidad de que tomando al azar una medida del conjunto, esta se encuentre en dicho intervalo, así, para el intervalo $20.6 \le x \le 20.8$, la frecuencia relativa es de 0.2; esto significa que la probabilidad de que el resultado de una medida tenga un valor entre 20.6 y 20.8 es del 20%.

Los dos histogramas que hemos dibujado tienen un aspecto escalonado debido a que representan sólo unos pocos valores. Si hubiéramos tomado un número muy grande de medidas podríamos haber dividido el rango en intervalos mucho más pequeños que aún contendrían un número apreciable de valores. El resultado sería un histograma con unas esquinas menos pronunciadas. A medida que aumenta el número de medidas, no sólo adquiere un aspecto más suave, sino que tiende a una forma constante que se denomina *distribución límite*.

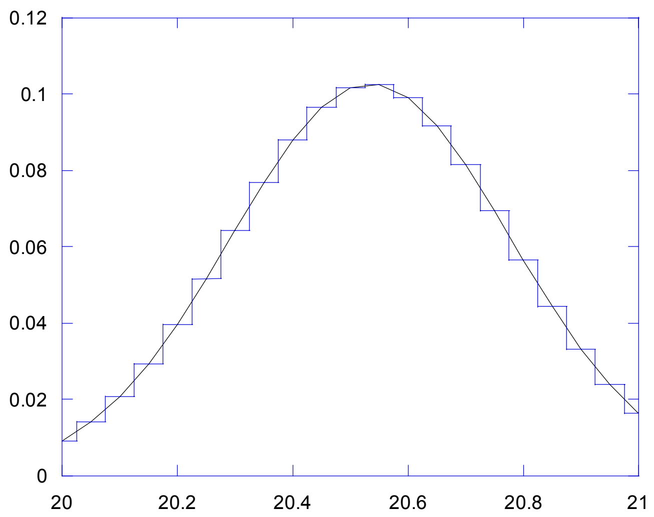


Figura 6.3. Histograma y distribución límite.

Evidentemente la distribución límite es una construcción teórica. Cuantas más medidas más próximo estará el histograma a la distribución límite. Pero sólo haciendo un número infinito de medidas y utilizando barras de anchura infinitesimal obtendríamos realmente la distribución límite.

Sea $f(x)$ la función que describe la distribución límite, la fracción de medidas en el intervalo de extremos x, $x+dx$, será igual al área $f(x)\cdot dx$ de la banda sombreada de la Figura 6.4. Para un número muy grande de medidas, $f(x)\cdot dx$ da la probabilidad de que el resultado de una medida de la magnitud x se encuentre en el intervalo de extremos x , $x+dx$.

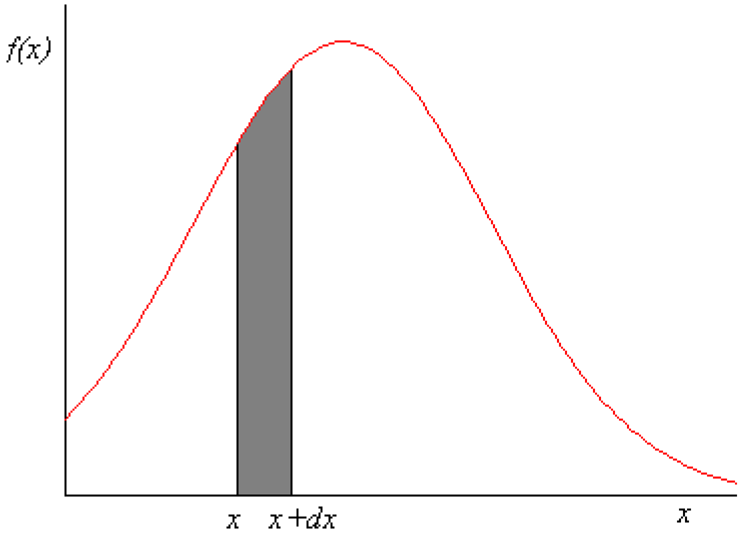


Figura 6.4. Distribución límite y probabilidad de un intervalo.

La fracción de medidas que caen entre dos valores cualesquiera *a* y *b*, viene dada por el área bajo la curva entre $x = a$ y $x = b$, es decir, la integral $\int_a^b f(x)dx$. Por tanto, esta integral nos da la probabilidad de que al realizar una medida el resultado se encuentre entre $x = a$ y $x = b$.

En resumen, si conocemos la distribución límite $f(x)$ para las medidas de una magnitud dada *x*, realizadas en las mismas condiciones; podemos conocer la probabilidad de obtener un resultado en cualquier intervalo $a \leq x \leq b$. Dado que la probabilidad total de obtener un resultado entre $-\infty$ y $+\infty$ debe ser 1, la distribución límite debe satisfacer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ y se dice que está *normalizada*.

A partir de $f(x)$ podemos calcular el valor medio $\bar{x}$ de muchas medidas. Vimos en Ec. 6.3 que $\bar{x} = \sum_k x_k F_k$; la fracción de valores en cada intervalo de anchura *dx* es $F_k = f(x_k)dx_k$ y en el límite en que la anchura de los intervalos tienda a cero, tenemos

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \tag{6.7}$$

de forma similar, la desviación cuadrática media, en el límite cuando $N \to \infty$ será

$$s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx \tag{6.8}$$

VI.4 *Distribución normal*

Si suponemos que en los valores obtenidos de una cierta magnitud, las desviaciones en torno al valor medio son puramente aleatorias; para un número muy grande de medidas de la misma magnitud se obtendrá una distribución denominada *distribución gaussiana* o *distribución normal*. El histograma de frecuencias tiene la forma característica que se muestra en la Figura 6.5; una distribución simétrica en torno a un valor central, que decae exponencialmente al alejarnos de este y que se suele denominar “campana de Gauss”.

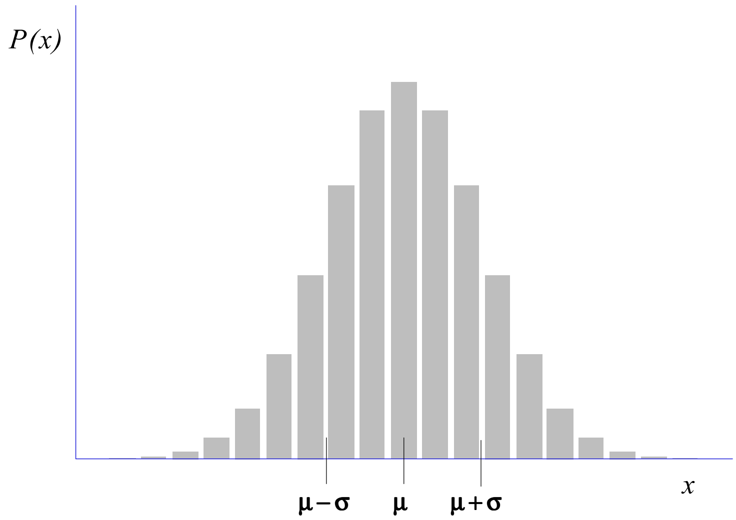


Figura 6.5. Forma típica del Histograma de frecuencias en una distribución gaussiana.

La probabilidad de que la variable medida tome el valor x viene dada por:

$$P(x) = A \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \tag{6.9}$$

donde μ es el valor central, σ es un parámetro relacionado con la anchura de la distribución y A es una constante que viene determinada por la condición de normalización: $\int_{-\infty}^{\infty} P(x) \cdot dx = 1$, con lo cual podemos escribir que la función de distribución de Gauss o distribución normal viene dada por

$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \tag{6.10}$$

Si calculamos el valor medio y la varianza para esta distribución tendremos que

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, G_{\mu,\sigma}(x) \, dx = \mu \tag{6.11}$$

$$s^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 \; G_{\mu,\sigma}(x) \, dx = \sigma^2 \tag{6.12}$$

es decir, la distribución de Gauss está centrada entorno al valor medio y su anchura σ coincide con la desviación típica que obtendríamos después de realizar muchas medidas. Estrictamente hablando, σ, coincide con la desviación típica sólo para un número infinito de medidas. Para un número finito, la desviación típica observada será sólo una aproximación a σ, pero no tiene porque ser exactamente igual.

Una característica importante de la distribución normal es que la probabilidad de que el resultado de una medida tome valores comprendidos entre μ-σ y μ+σ es del 68.3%, mientras que en el intervalo μ-2σ y μ+2σ entrarían el 99.7% de las medidas.

Estos resultados nos indican el verdadero significado de la desviación típica como índice de la dispersión de los resultados de la medida de una magnitud física cuando sólo hay incertidumbre de carácter aleatorio.

VI.5 *Desviación típica de la media*

Consideremos el caso en que se realizan varias series de mediciones de la misma magnitud x y para cada una de estas series se calcula el valor medio $\bar{x}$. Es de esperar que estos valores medios también se presenten distribuidas (puesto que varían entre sí) pero con una menor dispersión que las mediciones individuales. Esta dispersión la caracterizamos por su desviación típica, $\sigma(\bar{x})$. Se puede demostrar[7] que la desviación típica de la media viene dada por

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \tag{6.13}$$

La desviación típica de la media representa la incertidumbre que se introduce al tomar la media como mejor estimación del valor de una magnitud que varía aleatoriamente.

Un aspecto importante en la Ec.6.13 es el factor $\sqrt{N}$ que aparece en el denominador. Vimos que la desviación típica *s(x)* representa la dispersión media en los datos individuales y por tanto aunque hagamos más y más medidas utilizando la misma técnica, la desviación típica no cambiará apreciablemente. Sin embargo la desviación típica de la media disminuye al aumentar el número de medidas debido a ese factor $\sqrt{N}$ en el denominador. Esto nos da una indicación de cómo mejorar la precisión de las medidas. Desafortunadamente, $\sqrt{N}$ crece más lentamente que *N*, y si por ejemplo queremos mejorar la precisión en un factor 10 simplemente aumentando el número de medidas, tendremos que incrementar *N* en un factor 100 lo cuál no suele ser muy rentable. Además no estamos considerando aquí los errores sistemáticos que no se reducen repitiendo las medidas ni tampoco la precisión limitada que tiene cualquier instrumento de medida. En la práctica si se quiere aumentar la precisión de manera apreciable, probablemente lo más acertado sea mejorar la técnica de medida y no simplemente repetir las medidas muchas veces.

VI.6 *Distribución de Poisson*

Las magnitudes que hemos considerado hasta ahora (tiempo, velocidad, longitud, presión, temperatura, voltaje, fuerza....) varían de forma continua. Cuando estas magnitudes se determinan experimentalmente su variación puede ser descrita por una distribución continua, de entre las cuales, la distribución normal es la más utilizada. Sin embargo las observaciones científicas no se reducen exclusivamente a medir magnitudes continuamente variables; a veces consisten en contar objetos o sucesos. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando se cuentan los núcleos atómicos que se desintegran en un cierto tiempo, o los impactos de un proyectil sobre una superficie. En estas observaciones el número de cuentas es una *variable aleatoria discreta* cuya probabilidad no tiene por que ajustarse a una distribución normal.

Si la probabilidad de que ocurra un suceso en un intervalo de tiempo es pequeña, y la ocurrencia de un suceso no influye sobre sucesos posteriores, entonces la dispersión

---

[7] Taylor, J.R. An Introduction to Error Análisis. 2ª Ed. University Science Books (1997).

del número de sucesos que se producen en un periodo de tiempo *t* determinado puede ser descrita por una distribución discreta llamada *distribución de Poisson* o de los sucesos raros. La probabilidad de que se produzcan *x* sucesos viene dada por

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \quad (x = 0,1,2,3,...) \tag{6.14}$$

esta distribución sólo depende del parámetro μ que puede demostrarse[8] que coincide con el valor medio de sucesos en el intervalo de tiempo *t*

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\infty} xP(x) = \mu \tag{6.15}$$

es decir, el parámetro μ que caracteriza la distribución de Poisson es precisamente el valor medio de cuentas que se esperan si se repite el experimento de contaje muchas veces.

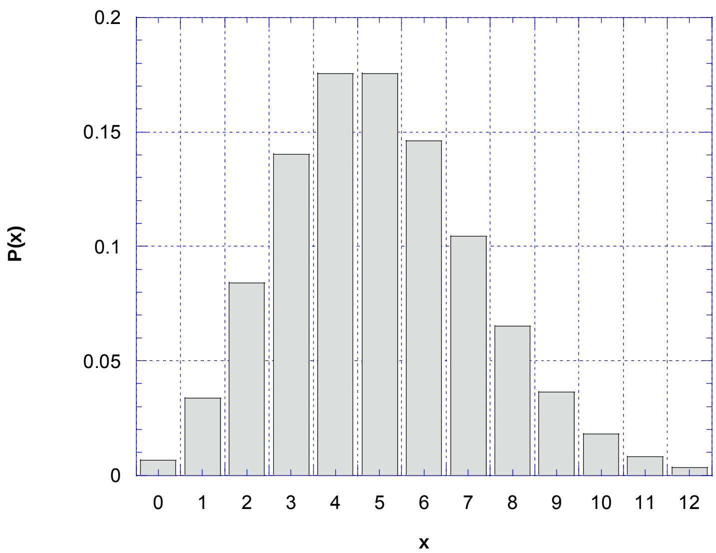


Figura 6.6. Distribución de Poisson con μ=5.

La desviación típica de la distribución viene dada por

$$\sigma = \sqrt{\mu} \tag{6.16}$$

Si realizamos una única medida y contamos *x* sucesos, entonces este valor debe ser tratado como la mejor estimación para el valor verdadero del número de cuentas y debemos expresar el resultado como

$$x \pm \sqrt{x} \tag{6.17}$$

[8] Taylor J.R. An Introduction to Error Analysis.

así, contando 100 sucesos, el error aleatorio medido por la desviación típica es 10, es decir el 10%. Si contamos 1000 sucesos, el error es aproximadamente del 3%. Para llegar al 1% es necesario contar 10.000 sucesos, lo que prueba que si se cuentan acontecimientos aleatorios es muy difícil conseguir gran precisión.

La desviación típica de la media es

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} \qquad (6.18)$$

Cuando μ es grande, la distribución de Poisson se aproxima a la distribución de Gauss con la misma media y desviación típica.

VI.7 *Acotando incertidumbres aleatorias*

Después de hacer repetidas medidas de una magnitud, se deben seguir los pasos indicados en la Sección V.5 para expresar el resultado de la medida pero teniendo en cuenta que ahora tomaremos como mejor estimación de la magnitud la media de los valores medidos y al calcular la incertidumbre debemos dejar claro el método utilizado (indicando si se ha tomado la desviación típica o la desviación típica de la media).

Ejemplo: *Cómo acotar incertidumbres aleatorias*

Consideremos que la determinación de la velocidad del sonido en el aire, que sirvió como ejemplo en la Sección V.5 se llevó a cabo repitiendo la medida ocho veces con los resultados que se muestran en la Tabla 6.5

Velocidad del sonido (m/s)	341.5	342.4	345.5	341.1	338.5	340.3	342.7

Tabla 6.5. Valores medidos de la velocidad del sonido en el aire.

La media de estos valores es 341.775 $m \cdot s^{-1}$ y la incertidumbre, tomada como la desviación típica, es 2.0260 $m \cdot s^{-1}$, lo cual nos lleva al resultado:

$$c = (3.42 \pm 0.02) \text{ x } 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La incertidumbre de 2 $m \cdot s^{-1}$ podría hacernos pensar que todas nuestras medidas deberían encontrarse en el intervalo de extremos 340 $m \cdot s^{-1}$ y 344 $m \cdot s^{-1}$. Si observamos los datos originales vemos que esto no es así. De las ocho medidas realizadas, una de ellas está fuera de este intervalo. Llegamos a un punto importante; cuando se acota una incertidumbre en un resultado experimental, no se está diciendo que el valor real o verdadero de esa magnitud ha de estar entre los límites dados por (media + incertidumbre) y (media - incertidumbre) sino que la probabilidad de que se encuentre entre estos límites es muy alta, en este caso, como ya hemos visto, del 68%.

VI.8 *Combinación de incertidumbres aleatorias: Método 3*

Los dos métodos que hemos dado en la Sección V.6 para combinar incertidumbres resultan satisfactorios en ciertos casos, pero se basan en una aproximación muy pesimista; es decir, tienden a sobreestimar los errores puesto que las incertidumbres siempre se suman. Sin embargo, cuando son puramente aleatorias, es posible que las incertidumbres se compensen parcialmente; es decir, es posible que Δx sea positiva cuando Δy sea negativa y viceversa pero sin haber dependencia entre el signo y la cuantía de Δx y el signo y la cuantía de Δy.

Si las incertidumbres son puramente aleatorias y se especifican por las desviaciones típicas, la propagación de errores consiste en determinar cuál es la desviación típica de una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cuando se conocen las desviaciones típicas de las variables de las que depende. Se puede demostrar[9] que la fórmula de propagación es:

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}_i}^2 \cdot s_{x_i}^2} \tag{6.19}$$

Vamos a aplicar la Ec. 6.19 a las operaciones más sencillas tal como hicimos en V.6. Supongamos una función de dos variables $q(x,y)$, entonces

$$s_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \cdot s_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 \cdot s_y^2 \tag{6.20}$$

de donde se deducen inmediatamente las fórmulas de propagación de desviaciones típicas para las situaciones que interesan más a menudo:

Operación	**Propagación de desviaciones típicas**
$z = x \pm y$	$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2$
$z = x \cdot y^{\pm 1}$	$\frac{s_z^2}{z^2} = \frac{s_x^2}{x^2} + \frac{s_y^2}{y^2}$
$z = x^n$	$\frac{s_z^2}{z^2} = n^2 \frac{s_x^2}{x^2}$

Tabla 6.6. Propagación de desviaciones típicas en las operaciones más sencillas.

Ejemplo 1.

Si calculamos la incertidumbre en la densidad de una pieza cilíndrica del Ejemplo 2 de V.6, suponiendo que todas las incertidumbres son aleatorias tendremos

$$\frac{s_\rho^2}{\rho^2} = \frac{s_m^2}{m^2} + \frac{s_l^2}{l^2} + 2^2 \frac{s_d^2}{d^2} = 0.66\%$$

y el resultado de la medida, redondeado al número adecuado de cifras significativas, será

$$\rho = (8.64 \pm 0.06)\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$$

[9] Kirkup L. Experimental Methods. John Wiley & Sons (1994)

que coincide con el resultado obtenido al aplicar el Método 2 de propagación de errores.

Como hemos visto en el ejemplo anterior muchas veces no hay apenas diferencia entre las incertidumbres calculadas por el Método 2 y el Método 3 es decir, entre la suma directa de las incertidumbres y la suma de sus cuadrados. Sin embargo en algunos casos sí existe una diferencia importante y además la aplicación del Método 3 suele simplificar los cálculos, como veremos en el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.

En un experimento sobre la conservación del momento cinético, un estudiante necesita conocer el momento cinético de un disco de masa *M* y radio *R* que gira con velocidad angular ω para lo cual utiliza la expresión $L = \frac{1}{2} MR^2\omega$. Conoce *M* con una incertidumbre del 1%, *R* con una incertidumbre del 2% y ω también con una incertidumbre del 2%.

Aplicando el Método 2 (suma directa de las incertidumbres relativas), tendrá:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta M}{M} + 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \omega}{\omega} = 1\% + 2\times 2\% + 1\% = 6\%$$

sin embargo con el Método 3 (suma de los cuadrados)se obtiene:

$$\frac{\Delta L}{L} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \omega}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(1\%)^2 + 4(2\%)^2 + (1\%)^2} \approx 4\%$$

El Método 3 conduce a un valor más pequeño de la incertidumbre que el Método 2. Además se puede ver que las incertidumbres en *M* y en ω no contribuyen a la incertidumbre total. Al elevar las incertidumbres al cuadrado estamos exagerando la importancia de los números más grandes y podremos despreciar las incertidumbres de los otros en el cómputo de la incertidumbre total; es decir:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta R^2}{R^2} = 2\frac{\Delta R}{R}$$

Ejercicios

1. Un estudiante determina el valor de g midiendo el tiempo que tarda en caer una bola desde una cierta altura y obtiene los resultados de la tabla. Calcula la media y la desviación típica. Utiliza para esta última las dos definiciones y compara los resultados obtenidos; verás que aunque se trata de pocos datos la diferencia no es muy grande:

g(m/s²)	9.82	9.87	9.65

2. Con los resultados del ejercicio 1, y suponiendo que sólo hay incertidumbres aleatorias, escribe el valor obtenido de g con su incertidumbre en la forma estándar.

3. Demuestra que

$$\sum\left[(x_i - \bar{x})^2\right] = \sum (x_i)^2 - \frac{1}{N}\left[\sum x_i\right]^2$$

Las calculadoras utilizan este resultado para calcular la desviación típica por la razón siguiente: para utilizar la expresión de la izquierda la calculadora debe mantener en memoria todos los datos x_i puesto que el valor medio $\bar{x}$ de la muestra no se conocerá hasta haber introducido el último dato. Con la expresión de la derecha la calculadora sólo necesita mantener en memoria tres cantidades: el número de datos introducidos y los valores parciales de las sumas $\sum\left(x_i^2\right)$ y $\sum x_i$.

4. En un experimento de óptica se realizaron 60 medidas repetidas de la distancia entre un espejo y una imagen. Los valores medidos se muestran en la Tabla 1:

146	174	170	165	175	167
163	171	161	166	157	173
162	148	180	165	175	176
158	174	161	176	166	158
164	169	157	153	175	159
159	160	174	156	166	166
173	158	168	166	173	159
151	160	155	168	166	165
164	175	161	171	167	166
164	163	156	162	167	164

Tabla 1

La Tabla 2, incompleta, da el número de puntos que se encuentran en determinados intervalos:

Intervalo, x (mm)	**Frecuencia**
$145 \leq x < 150$	2
$150 \leq x < 155$	2
$155 \leq x < 160$	11
$160 \leq x < 165$	
$165 \leq x < 170$	
$170 \leq x < 175$	
$175 \leq x < 180$	
$180 \leq x < 185$	

Tabla 2

i) Completa la Tabla 2 utilizando los datos de la Tabla 1.
ii) Dibuja el histograma de frecuencias utilizando para ello la Tabla 2. ¿Se parece a una distribución normal?
iii) Calcula la media y la desviación típica de los valores de la Tabla 1. ¿Cuántos valores se encuentran en un intervalo $\pm\sigma$ entorno a la media y cuantos en un intervalo $\pm 2\sigma$?. ¿Es esto consistente con la distribución normal?

5. En un experimento un estudiante utiliza un contador geiger para medir la radiación de fondo. Realiza 40 medidas de 10 segundos de duración y obtiene los siguientes valores:

9	8	3	7	2
6	9	6	9	9
9	3	4	5	7
5	4	9	4	4
5	11	6	5	4
4	6	4	2	5
8	3	6	6	3
5	6	2	8	10

i) Representa en un histograma de frecuencias los datos anteriores. ¿Se aprecia alguna diferencia con la distribución normal?
ii) Calcula la media y la desviación típica y comprueba que esta última coincide "aproximadamente" con la raíz cuadrada del valor medio, lo cuál es una característica de la distribución de Poisson

6. *Incertidumbres sistemáticas.* En laboratorio de mecánica se estudia el comportamiento de un péndulo físico. Este péndulo consiste en una barra metálica de sección uniforme con agujeros igualmente espaciados a lo largo de su longitud, y numerados del 1 al 12. La barra se cuelga de una cuchilla (para reducir la fricción) y se mide el periodo de oscilación con una fotopuerta. Los resultados obtenidos por cinco grupos de estudiantes para el agujero nº 1 se muestran en la tabla:

i) Calcula el valor medio y la desviación típica de los datos obtenidos por cada grupo. ¿Son compatibles los resultados?

Para detectar las posibles causas de estas discrepancias, se realiza un análisis más detallado del procedimiento experimental:

ii) Considera los datos de uno de los grupos y representa gráficamente el periodo en función del tiempo transcurrido desde que se inició la adquisición de datos. ¿Se observa alguna tendencia en la gráfica? ¿A qué crees que es debida?¿Qué tipo de incertidumbre está introduciendo en la medida del periodo?
iii) Si en lugar de considerar las 20 medidas para calcular el periodo, tomamos sólo las 10 primeras, ¿Cuál será ahora el valor medio y su desviación típica?
iv) ¿Mejora el resultado repitiendo muchas veces la medida? ¿Por qué? Justifica la respuesta

iv) Al analizar con detalle el procedimiento seguido por el grupo 2, se dan cuenta de que en lugar de colgar la barra del agujero nº 1 la han colgado del nº 12. Las distancias de cada uno al centro de masas de la barra son 59.5 cm y 59.4 cm respectivamente. ¿Cómo afecta este error al valor calculado del periodo?

medida	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
1	1.8508	1.8496	1.8431	1.8404	1.8448
2	1.8496	1.8494	1.8432	1.8405	1.8447
3	1.8491	1.85	1.8434	1.8411	1.8439
4	1.849	1.8494	1.8432	1.8411	1.8435
5	1.8485	1.8495	1.8435	1.8408	1.8438
6	1.848	1.8494	1.844	1.8408	1.8434
7	1.8486	1.8494	1.8429	1.8409	1.8436
8	1.848	1.8497	1.8433	1.8409	1.8432
9	1.8478	1.8497	1.8438	1.8409	1.8435
10	1.8474	1.8497	1.8438	1.8409	1.8432
11	1.8472	1.8493	1.8435	1.8409	1.8453
12	1.8477	1.8492	1.8439	1.8409	1.8454
13	1.8466	1.8496	1.8431	1.8409	1.8454
14	1.8472	1.8493	1.8435	1.8409	1.8454
15	1.845	1.8492	1.8432	1.8407	1.8454
16	1.8465	1.8491	1.8431	1.8409	1.8484
17	1.846	1.8493	1.8436	1.8407	1.8452
18	1.8464	1.8492	1.8432	1.8409	1.8453
19	1.8461	1.8491	1.8437	1.8409	1.8454
20	1.8458	1.8498	1.8436	1.8405	1.8453

NOTA: Construyendo el histograma con Excel

Es posible aligerar el trabajo de construir el histograma utilizando una de las aplicaciones más populares: Microsoft Excel del paquete Microsoft Office® 2000. Excel contiene un paquete de análisis de datos con una herramienta llamada Histograma.

Antes de utilizar esta herramienta, conviene tener claro qué número de intervalos o clases queremos que aparezcan en el histograma. Si no lo especificamos, Excel lo hará por nosotros y puede que su elección no sea la más acertada. Una vez elegidos los límites de cada clase se introducirán en la hoja de cálculo en columnas aparte de los datos.

A continuación en la barra de menú habrá que eligir:

Herramientas►Análisis de Datos►Histograma

En el cuadro de diálogo que aparece se marcan las celdas con los datos (Rango de entrada) y las correspondientes a los límites de los intervalos (Rango de clases).
Para obtener la gráfica del histograma se elige en Opciones de salida Crear gráfico
Hay que tener en cuenta que el histograma que aparece no es tan fácil de interpretar como el que hemos construido "a mano". Dará la impresión de que el eje *x* no está correctamente etiquetado. Rotando -45º el texto verás que la gráfica es consistente con la salida resultados.

VII. Ajuste a funciones

En el capítulo anterior hemos introducido brevemente algunos conceptos referidos al análisis estadístico de los datos, y lo hemos enfocado exclusivamente sobre las medidas repetidas de una cierta magnitud. Sin embargo un tipo de experimento muy común y de gran interés se basa en la medida de distintos valores de dos variables físicas diferentes para investigar la relación matemática existente entre ellas. Como hemos visto en el Capítulo IV, probablemente los experimentos más importantes de este tipo son aquellos para los cuales la relación esperada es lineal y por ello vamos a dar un procedimiento matemático sencillo para determinar la ecuación de la recta que define tal relación y se denomina *ajuste por mínimos cuadrados*. Veremos después que el método puede extenderse a otras funciones más complejas.

VII.1 *Parámetros del ajuste*

Supongamos que por razones teóricas bien fundadas sabemos que entre dos magnitudes x e y existe la relación lineal

$$y = m \cdot x + n$$

y queremos determinar los parámetros m y n a partir de N medidas de y_i correspondientes a los N valores fijos x_i.

Para aplicar el método hay que suponer en primer lugar que los valores x_i de la variable independiente se conocen con error despreciable. Esta suposición es generalmente válida puesto que hemos quedado en que los valores que se representan en el eje x son controlados o ajustados de forma escalonada por el experimentador, mientras que los valores y_i vienen acompañados de errores aleatorios. En segundo lugar suponemos que la incertidumbre es la misma en cada medida de la magnitud y_i y viene determinada por una distribución normal de anchura σ_y.

Para un cierto valor de los parámetros m y n, y considerando despreciable la incertidumbre de la variable independiente x_i, el valor esperado de la variable dependiente sería

$$y_i(\text{esperado}) = mx_i + n$$

y, de acuerdo con la distribución normal, la probabilidad de que al efectuar la medida se obtuviera el valor y_i sería

$$P_{mn}(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(mx_i + n - y_i)^2}{2\sigma_y{}^2}\right]$$

Si se efectúa una serie de N medidas, la probabilidad de obtener los valores $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ sería el producto de las probabilidades de obtener cada uno de ellos de forma independiente, es decir,

$$\begin{aligned} P_{mn}(y_1, y_2, \ldots, y_N) &= P_{mn}(y_1)P_{mn}(y_2)\cdots P_{mn}(y_N) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma_y{}^N} \exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] \end{aligned}$$

donde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(m\,x_i + n - y_i)^2}{\sigma_y^{\;2}}$$

La elección de los parámetros m y n que hacen máxima dicha probabilidad (principio de máxima verosimilitud) es la que hace mínima "chi cuadrado"

Probabilidad máxima => χ^2 mínima

por tanto, se tomará como mejor elección de los parámetros m y n aquella que hace mínima χ^2.

En el caso de las incertidumbres de todos los valores de y sean iguales, la anchura σ_y puede salir fuera de la suma y entonces

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_y^{\;2}} \sum_{i=1}^{N} (m\,x_i + n - y_i)^2 = \frac{1}{\sigma_y^{\;2}} \sum_{i=1}^{N} (d_i)^2$$

siendo $d_i = (mx_i + n) - y_i$ las diferencias entre valores de $y = mx_i + n$ esperados y valores y_i encontrados. La máxima probabilidad se obtiene haciendo máxima la suma de los cuadrados de las diferencias d_i, de ahí el nombre de método de mínimos cuadrados.

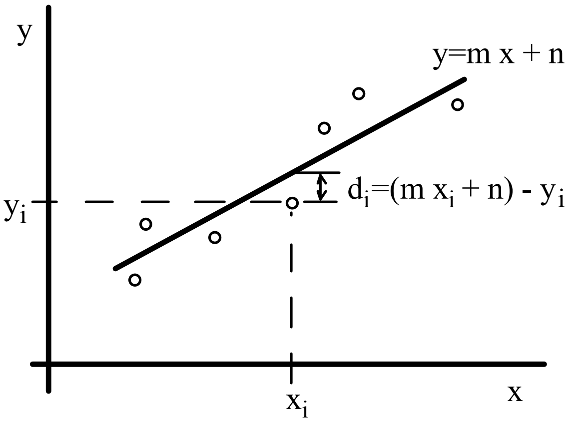


Figura 7.1. Diferencia entre el valor esperado y el valor encontrado para una medida.

La condición de que χ^2 _sea mínima se obtiene igualando a cero las derivadas respecto de cada uno de los parámetros:

$$\frac{\partial \sum \chi^2}{\partial m} = \frac{2}{\sigma_y^{\;2}} \sum (m\,x_i + n - y_i)\,x_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum \chi^2}{\partial n} = \frac{2}{\sigma_y^{\;2}} \sum (m\,x_i + n - y_i) = 0$$

que conduce a un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} m\sum x_i^2 + n\sum x_i = \sum x_i y_i \\ m\sum x_i + n\,N = \sum y_i \end{cases}$$

cuya solución es

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$
$$n = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta} \tag{7.2}$$

donde

$$\Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = N\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

VII.2 *Errores en los parámetros*

Los parámetros así obtenidos son, evidentemente, inexactos porque se han determinado a partir de un número finito de medidas con una cierta incertidumbre. Como hemos supuesto que los valores x_i son exactos y el error o desviación típica σ_y es la misma para todo y_i, basta conocer ésta para calcular las desviaciones típicas de los parámetros.

Aplicando la ley de propagación de errores se obtiene:

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial m}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^{\ 2} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{Nx_i - \left(\sum x\right)}{\Delta}\right)^2 \sigma_y^{\ 2} = \frac{\sigma_y^{\ 2}}{\Delta^2}\sum_{i=1}^{N}\left(N^2 x_i^2 + \left(\sum x\right)^2 - 2N\left(\sum x\right)x_i\right) =$$
$$= \frac{\sigma_y^{\ 2}}{\Delta^2}\left[N^2\sum x^2 + N\left(\sum x\right)^2 - 2N\left(\sum x\right)^2\right] = \frac{\sigma_y^{\ 2}}{\Delta^2}N\left[N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right] = \frac{N}{\Delta}\sigma_y^{\ 2}$$

y de forma similar

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial n}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^{\ 2} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)x_i}{\Delta}\right)^2 \sigma_y^{\ 2} =$$
$$= \frac{\sigma_y^{\ 2}}{\Delta^2}\left[N\left(\sum x^2\right)^2 + \left(\sum x\right)^2\left(\sum x^2\right) - 2\left(\sum x^2\right)\left(\sum x\right)^2\right] = \frac{\left(\sum x^2\right)}{\Delta}\sigma_y^{\ 2}$$

Como σ_y suele ser desconocida puede estimarse a partir de los datos de y_i y de los resultados del ajuste. La estimación se realiza con la *varianza muestral*:

$$\sigma_y^{\ 2} \approx s_y^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(m\,x_i + n - y_i\right)^2 \tag{7.3}$$

El hecho de que se divida por *N-2* y no por *N* es debido a que los parámetros *m* y *n* se obtienen a partir de los datos experimentales y por ello sólo hay *N-2* desviaciones cuadráticas independientes.

Las incertidumbres en los parámetros quedan

$$s_m^2 = \frac{N\, s_y^2}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{s_y^2}{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$
$$s_n^2 = \frac{\left(\sum x^2\right) s_y^2}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{s_y^2}{N - \left(\sum x\right)^2 / \left(\sum x^2\right)} \qquad (7.4)$$

VII.3 *Correlación lineal*

En el apartado anterior supusimos la existencia de razones teóricas para la existencia de la relación lineal entre x e y . Una forma de medir si los datos experimentales se distribuyen de acuerdo con esa función es el coeficiente correlación.

El coeficiente de correlación r es un índice adimensional que mide la bondad del ajuste y se define[10] como

$$r = \frac{s(x,y)}{s(x)s(y)} \qquad (7.5)$$

siendo $s(x)$, $s(y)$ las desviaciones típicas y $s(x,y)$ la *covarianza* dada por

$$s(x,y) = \frac{1}{N}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) \qquad (7.6)$$

El valor de r varía entre -1 y +1.Si $r>0$, y crece con x, y la correlación se llama positiva. Si $r<0$, y disminuye cuando x aumenta, y la correlación es negativa. Si $r = 0$, no hay correlación, lo que indica que las variables x e y son independientes. Si $r = \pm 1$, el ajuste es perfecto y la correlación es máxima.

VII.4 *Método simplificado*

Para simplificar el método y reducir el número de sumas a realizar se pueden seguir los pasos siguientes:

1. Construir una tabla con los valores *(x,y)* a ajustar
2. Calcular las sumas siguientes:

$$\sum x,\ \sum x^2,\ \sum y,\ \sum y^2,\ \sum xy$$

3. Calcular las siguientes magnitudes

[10] C. Sánchez del Río. Análisis de Errores. EUDEMA (1989).

$$\sigma_x = \sum x^2 - \frac{1}{N}\left(\sum x\right)^2$$
$$\sigma_y = \sum y^2 - \frac{1}{N}\left(\sum y\right)^2$$
$$\sigma_{xy} = \sum xy - \frac{1}{N}\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)$$

4 Los parámetros del ajuste serán

$$m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x}$$
$$n = \frac{\sum y - m\sum x}{N}$$

5 y sus varianzas

$$s_m^2 = \frac{s_y^2}{\sigma_x}$$
$$s_n^2 = \frac{s_y^2 \sum x^2}{N\sigma_x}$$

donde

$$s_y^2 = \frac{1}{N-2}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x}\right)$$

6 El coeficiente de correlación lineal será

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}}$$

Vamos a aplicar el método al siguiente caso: En un experimento para estudiar el coeficiente de absorción μ del aluminio para los fotones de una fuente radiactiva de ^{137}Cs, se midió la actividad (número de desintegraciones por segundo) de la muestra intercalando filtros (placas de aluminio) de diferente espesor entre ella y el detector. Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 7.1.

x (mm)	A (Bq)
0.49	196.8
0.60	188.7
0.80	183.6
0.95	177.0
1.19	169.7
1.53	164.2
1.95	157.6
2.43	143.5
3.13	135.7

Tabla 7.1. Actividad de la fuente radiactiva en función del espesor del filtro.

Sabiendo que la intensidad I de un haz de fotones que atraviesa un espesor x de un material de coeficiente de absorción μ viene dado por la ley exponencial

$$I = I_0 \exp(-\mu\, x)$$

donde I_0 es la intensidad incidente. Tomando logaritmos en la ecuación anterior

$$\ln I = \ln I_0 - \mu\, x$$

la transformamos en una recta cuya pendiente es $-\mu$. En nuestro caso, la intensidad viene representada por la actividad y será su logaritmo el que dependerá linealmente con el espesor. Estos valores se muestran en la Tabla 7.2 y se representan gráficamente en la Figura 7.2.

x (mm)	Ln{ A (Bq)}
0.49	5.282
0.60	5.240
0.80	5.213
0.95	5.176
1.19	5.134
1.53	5.101
1.95	5.060
2.43	4.967
3.13	4.911

Tabla 7.2. Logaritmo de la actividad de la fuente radiactiva en bequerelios en función del espesor del filtro.

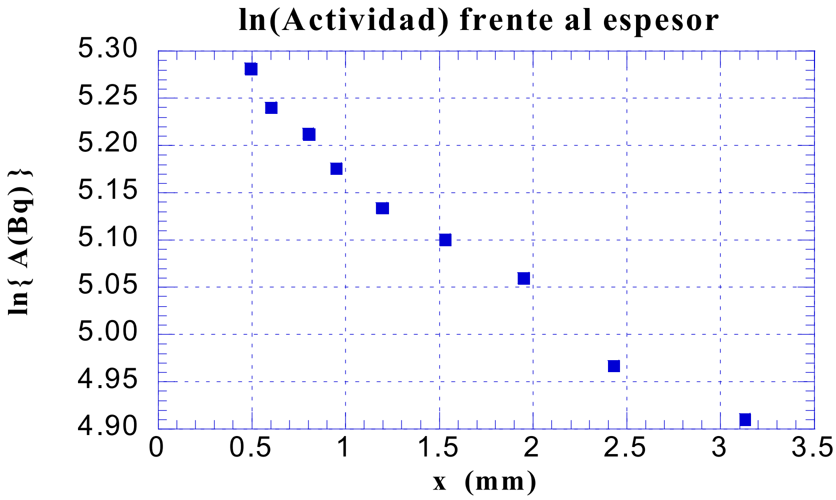


Figura 7.2. Ejemplo.

Empezaremos identificando el espesor como la variable x y el logaritmo de la actividad como variable y. El siguiente paso es calcular las sumas

$$N = 9$$
$$\sum x = 13.07$$
$$\sum y = 46.084$$
$$\sum x^2 = 25.4039$$
$$\sum y^2 = 236.094236$$
$$\sum \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 66.04201$$

y las siguientes magnitudes:

$$\sigma_x = 6.423355556$$
$$\sigma_y = 0.123674222$$
$$\sigma_{xy} = -0.882198889$$

Finalmente, los parámetros del ajuste serán:

$$m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x} = -0.137342372 \text{ mm}^{-1}$$

$$n = \frac{\sum y - m \sum x}{N} = 5.319896089 \ln\{\mathrm{A(Bq)}\}$$

Para determinar ahora la incertidumbre en los parámetros calculamos en primer lugar s_y^2 que es la incertidumbre en cada uno de los valores de y; es decir es la desviación típica de la distribución de valores y entorno a la línea ajustada

$$s_y^2 = \frac{1}{N-2}\left[\sigma_y - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x}\right] = 3.587\ 048\ 788 \times 10^{-4}\ [\ln\{\mathrm{A(Bq)}\}]^2$$

y a partir de este valor calculamos las incertidumbres en m y en n como:

$$s_m = 7.472874 \times 10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-1} \rightarrow \Delta m \approx 0.007\ \mathrm{mm}^{-1}$$
$$s_n = 1.255500 \times 10^{-2}\ \ln\{\mathrm{A(Bq)}\} \rightarrow \Delta n \approx 0.013 \ln\{\mathrm{A(Bq)}\}$$

Una vez conocida la incertidumbre en los parámetros, acotaremos m y n al número de cifras que sea consistente con esos valores:

$$m = (-0.137 \pm 0.007)\ \mathrm{mm}^{-1}$$
$$n = (5.320 \pm 0.013) \ln\{\mathrm{A(Bq)}\}$$

donde, como es usual, las incertidumbres se han redondeado a una cifra significativa.

Finalmente calcularemos el coeficiente de correlación

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}} = -0.9898$$

que es negativo dado que la pendiente de la recta es negativa.

Para trazar la recta de ajuste procederemos del modo siguiente:

1 Tomamos las coordenadas x de dos puntos P_1 y P_2 suficientemente espaciados.

2 Sustituimos el valor de x_1 y x_2 en la ecuación de la recta para determinar así la coordenada y de cada uno de los puntos P_1 y P_2.

3 Marcamos levemente y de manera diferente a los puntos experimentales, los dos puntos P_1 y P_2.

4 Finalmente trazamos con ayuda de una regla la recta que pasa por esos dos puntos.

En la Figura 7.3 se ha trazado la recta de ajuste siguiendo los pasos indicados.

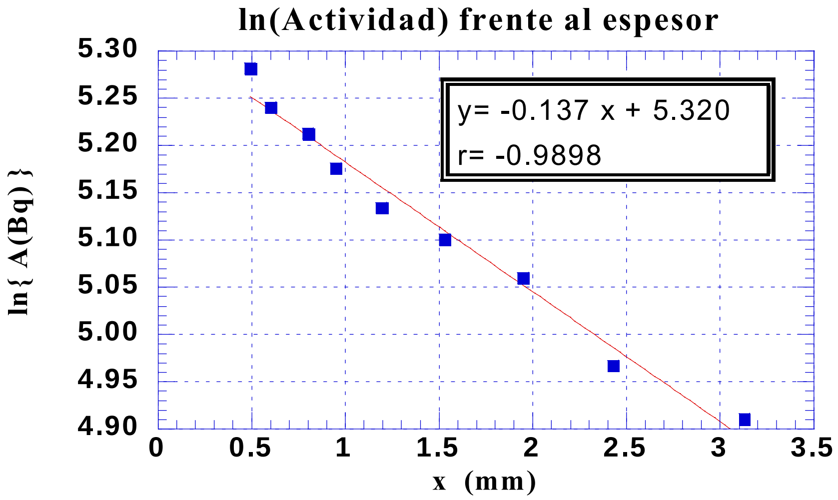


Figura 7.3. Representación gráfica del logaritmo de la actividad en bequerelios frente al espesor en mm. Los puntos experimentales se han ajustado a una recta cuya ecuación se incluye, así como el coeficiente de correlación.

La conclusión del experimento sería una valor del coeficiente de absorción de:

$$\mu = (0.137 \pm 0.007)\ \text{mm}^{-1} = (1.37 \pm 0.07)\ \text{cm}^{-1}$$

y una longitud de atenuación:

$$\lambda = \frac{1}{(\mu/\rho)} = \frac{\rho}{\mu} = \frac{2.70\ \text{g/cm}^3}{(1.37 \pm 0.07)\ \text{cm}^{-1}} = (1.97 \pm 0.10)\ \text{g cm}^{-2}$$

donde ρ es la densidad del aluminio.

VII.4.1 *Utilizando una calculadora*

Hoy en día, la gran mayoría de calculadoras científicas traen incorporada la posibilidad de efectuar la regresión lineal. El procedimiento general consiste en que el usuario introduce las parejas de datos (x_i, y_i) y la calculadora lleva cuenta del número de parejas N y de las sumas $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum y$, $\sum y^2$, $\sum xy$. Combinando estos valores la calculadora nos proporciona los resultados del ajuste.

Evidentemente, aunque el procedimiento general es común, el detalle de cómo ha de operarse en cada calculadora particular varía según los modelos y marcas y vendrá especificado en su manual.

A modo de ejemplo consideremos una calculador sencilla (y barata) de una de las marcas más populares, la CASIO *fx*-115D. Los pasos a seguir son los siguientes:

1 Seleccionar el modo de regresión lineal “LR” presionando MODE y luego 2.

2 Borrar los posibles valores acumulados en la memoria: SHIFT KAC

3 Introducir la parejas de datos de la tabla 5.2:

 0.49 x_D,y_D 5.282 DATA

 0.60 x_D,y_D 5.240 DATA

 . . . . .

4 Obtener los resultados del ajuste $y = A + Bx$:

SHIFT 7 A=5.319 896 089 = intercepto (n)
SHIFT 8 B=-0.137 342 372 = pendiente (m)
SHIFT 9 r=-0.989 796 536 (coef. de correl.)

Esta calculadora no proporciona directamente los errores en los parámetros del ajuste. Para obtenerlos se pueden utilizar los valores de las sumas o los de las desviaciones típicas. En la Tabla 7.3 se detalla cómo se obtienen estos valores.

KOUT 1	$\sum x^2$	SHIFT 1	$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x$
KOUT 2	$\sum x$	SHIFT 2	$x\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sigma_x}{N}}$
KOUT 3	N	SHIFT 3	$x\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sigma_x}{N-1}}$
KOUT 4	$\sum y^2$	SHIFT 4	$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum y$
KOUT 5	$\sum y$	SHIFT 5	$y\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sigma_y}{N}}$
KOUT 6	$\sum xy$	SHIFT 6	$y\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sigma_y}{N-1}}$
		SHIFT 7	$A = n$ intercepto
		SHIFT 8	$B = m$ pendiente
		SHIFT 9	r coeficiente de correlación

Tabla 7.3. Forma de obtener los resultados de la regresión lineal con la calculadora CASIO *fx*-115D.

Con estos valores, la manera más sencilla de determinar los errores en los parámetros es hacer lo siguiente:

$$s_y^2 = \frac{1}{N-2}\left[\sigma_y - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x}\right] = \frac{\sigma_y}{N-2}\left[1-r^2\right] = \frac{N(y\sigma_n)^2}{N-2}\left[1-r^2\right]$$

$$= 3{,}587049 \text{ x } 10^{-4}$$

$$s_m^2 = \frac{s_y{}^2}{\sigma_x} = \frac{s_y{}^2}{N(x\sigma_n)^2} \longrightarrow s_m = 7.47 \text{ x } 10^{-3}$$

$$s_n^2 = s_y{}^2\frac{\sum x^2}{N\sigma_x} = s_y{}^2\frac{\sum x^2}{N^2(x\sigma_n)^2} = s_m{}^2\frac{\sum x^2}{N} \longrightarrow s_n = 0.01255$$

VII.4.2 *Utilizando una hoja de cálculo*

La utilización de una simple calculadora científica facilita enormemente la determinación de los parámetros y sus incertidumbres al calcular simultáneamente todas las sumas necesarias. Sin embargo, cuando el número de puntos crece, se hace cada vez más probable equivocarse al teclear alguno de los valores y obtener por tanto un valor incorrecto. En la mayoría de los casos, las calculadoras no permiten revisar los datos introducidos ni utilizar la poderosa herramienta de la representación gráfica para detectar y corregir dichas equivocaciones. Por ello, para un número elevado de puntos (digamos 20) se hace cada vez más útil la utilización de un ordenador y una hoja de cálculo.

El método general será introducir en la hoja de cálculo las parejas de datos de forma ordenada (en filas o columnas) y escribir las fórmulas que permiten obtener los resultados del ajuste. Para simplificar los cálculos pueden utilizarse las funciones definidas en la hoja de cálculo para efectuar sumas y sumas+producto de los valores de filas y columnas. La mayoría de las hojas de cálculo también permiten representar gráficamente los puntos y la función ajustada. Igual que en el caso de la calculadora, los detalles específicos varían de una aplicación a otra e incluso dentro de la misma aplicación de una versión a otra.

A modo de ejemplo consideremos la aplicación Excel® del paquete Microsoft Office® 2000. Dentro Excel® existe una función llamada "ESTIMACION.LINEAL" que realiza por mínimos cuadrados la regresión lineal múltiple. El caso que nos ocupa es el ajuste por mínimos cuadrados a una recta: $y = m\,x + b$ (siguiendo la notación de Excel®).

El procedimiento sería algo así:

1. Abrir la aplicación y dentro de ella una hoja en blanco.
2. Introducir los valores[11] de la Tabla 7.2 en las columnas A y B, utilizando la primera fila para la etiqueta de las variables. Los datos de x ocupan las celdas desde A2 hasta A10. Los datos de y se encuentran en las celdas B2 hasta B10.
3. Seleccionar para la salida del ajuste un espacio de 3 filas y 2 columnas, por ejemplo las primeras tres filas de las columnas C y D.
4. Escribir en la barra de fórmulas: ESTIMACIÓN.LINEAL(A2:A10; B2:B10; 1; 1)
5. Entrar la fórmula matricial presionando las teclas: CTRL+MAYÚS+ENTRAR.

El resultado obtenido se muestra en la Tabla 7.4. En la Tabla 7.5 se explica el significado de cada elemento de la matriz de salida.

	A	B	C	D
1	espesor (mm)	ln(A) ln[A(Bq)]	-0,137342372	5,319896089
2	0,49	5,282	0,007472874	0,012554997
3	0,60	5,240	0,979697191	0,018939506
4	0,80	5,213		
5	0,95	5,176		
6	1,19	5,134		
7	1,53	5,101		
8	1,95	5,060		
9	2,43	4,967		
10	3,13	4,911		

Tabla 7.4. Regresión lineal realizada con Excel®.

[11] La versión española de Excel® utiliza la coma para separar la parte entera de la decimal y (opcionalmente) el punto como separador de millares.

Celda	Contenido	Valor
C1	m pendiente	-0,137342372
D1	b (n, intercepto)	5,319896089
C2	s_m incertidumbre en la pendiente	0,007472874
D2	s_b (s_n) incertidumbre en el intercepto	0,012554997
C3	r^2 cuadrado del coeficiente de correlación	0,979697191
D3	s_y estimación de la incertidumbre en y	0,018939506

Tabla 7.5. Resultados de la regresión lineal realizada con Excel®.

VII.5 *Regresión lineal múltiple*

El método de mínimos cuadrados puede aplicarse en principio a cualquier tipo de función $y = f(x)$ con cualquier número de parámetros. También es aplicable a problemas en los que intervienen más de dos variables. Consideremos por ejemplo un experimento en el que se mide la presión *P* de una gas para diferentes valores del volumen *V* y la temperatura *T*. Supongamos que se busca una dependencia lineal entre la variable dependiente (*P*) y las variables independientes (*V* y *T*), es decir,

$$y = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + n \tag{7.7}$$

Suponiendo que las variables independientes x_1, x_2 se determinan con error despreciable y que la incertidumbre (determinada por una distribución normal de anchura σ_y) es la misma en cada medida de la variable dependiente y, siguiendo un razonamiento idéntico que en el caso de la recta, la mejor elección de los parámetros es la que hace mínima "chi cuadrado"

$$\chi^2 = \frac{1}{{\sigma_y}^2} \sum \left(m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + n - y_i\right)^2$$

Igualando a cero las derivadas respecto de cada uno de los parámetros se obtiene un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} m_1 \sum {x_1}^2 + m_2 \sum x_1 x_2 + n \sum x_1 = \sum x_1 y \\ m_1 \sum x_1 x_2 + m_2 \sum {x_2}^2 + n \sum x_2 = \sum x_2 y \\ m_1 \sum x_1 + m_2 \sum x_1 + n\, N = \sum y \end{cases}$$

cuya solución es

$$m_1 = \frac{\sigma_{x_2x_2}\ \sigma_{x_1y} - \sigma_{x_1x_2}\ \sigma_{x_2y}}{\sigma_{x_1x_1}\ \sigma_{x_2x_2} - \left(\sigma_{x_1x_2}\right)^2}$$

$$m_2 = \frac{\sigma_{x_1x_1}\ \sigma_{x_2y} - \sigma_{x_1x_2}\ \sigma_{x_1y}}{\sigma_{x_1x_1}\ \sigma_{x_2x_2} - \left(\sigma_{x_1x_2}\right)^2}$$

$$n = \frac{\sum y - m_1 \sum x_1 - m_2 \sum x_2}{N}$$

donde

$$\sigma_{x_1x_1} = \sum {x_1}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum x_1\right)^2$$

$$\sigma_{x_2x_2} = \sum {x_2}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum x_2\right)^2$$

$$\sigma_{x_1x_2} = \sum x_1 x_2 - \frac{1}{N}\left(\sum x_1\right)\left(\sum x_2\right)$$

$$\sigma_{x_1y} = \sum x_1 y - \frac{1}{N}\left(\sum x_1\right)\left(\sum y\right)$$

$$\sigma_{x_2y} = \sum x_2 y - \frac{1}{N}\left(\sum x_2\right)\left(\sum y\right)$$

Las incertidumbres en los parámetros se obtienen, aplicando la ley de propagación de errores, en función de las incertidumbres en la variable dependiente que se estima como la varianza divida por la diferencia entre el número de puntos y el de parámetros a ajustar (3 en este caso):

$$s_y^2 = \frac{1}{N-3}\sum \left(m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + n - y\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N-3}\left(\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{x_2x_2}\ {\sigma_{x_1y}}^2 + \sigma_{x_1x_1}\ {\sigma_{x_2y}}^2 - 2\sigma_{x_1x_2}\ \sigma_{x_1y}\ \sigma_{x_2y}}{\sigma_{x_1x_1}\ \sigma_{x_2x_2} - \left(\sigma_{x_1x_2}\right)^2}\right)$$

donde

$$\sigma_{yy} = \sum y^2 - \frac{1}{N}\left(\sum y\right)^2$$

El método de regresión lineal con más de una variable independiente se conoce por *regresión lineal múltiple* y vemos que su solución parece fácilmente generalizable a partir de la solución para una variable independiente.

Una aplicación importante de este método es que nos permite realizar ajuste a funciones distintas a la recta. Consideremos por ejemplo el caso de una parábola:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

Se ve claramente que se corresponde con una regresión lineal[12] múltiple

$$y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + n$$

identificando

$$\begin{array}{ll} y \leftrightarrow y & m_1 \leftrightarrow a \\ x_1 \leftrightarrow x^2 & m_2 \leftrightarrow b \\ x_2 \leftrightarrow x & n \leftrightarrow c \end{array}$$

Nota. Como ya se ha mencionado la función "ESTIMACION.LINEAL" de Microsoft Excel® realiza por mínimos cuadrados la regresión lineal múltiple.

Para ver una a plicación del método, consideramos un experimento en el cual se investiga la dependencia del periodo de un péndulo con la amplitud de las oscilaciones. El periodo se mide (con una fotopuerta) para distintos ángulos (entre 20 y 50º). Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 7.6:

Amplitud, θ_0 (grados)	**Periodo, T (s)**
20	1.862
25	1.869
30	1.874
35	1.886
40	1.898
45	1.910
50	1.925

Tabla 7.6. Periodo de las oscilaciones en función de la amplitud.

La solución exacta del periodo en función de la amplitud viene dada por una integral elíptica de primera clase $K(m) = \int_0^{\pi/2} \left(1 - m\sin^2\theta\right)^{1/2} d\theta$ que puede desarrollarse en serie de potencias de la forma[13]:

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} K(m) = T_0 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 m^3 + \cdots \right\}$$

donde T es el periodo, $T_0 = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{l_{eq}}{g}}$ el periodo de las pequeñas oscilaciones (que se obtiene aproximando $\sin\theta \approx \theta$ en la ecuación diferencial del movimiento), $m = \sin^2(\theta_0 / 2)$ y θ_0 es la amplitud angular de las oscilaciones medidas desde la

[12] El término regresión lineal no se refiere a la relación entre la variable dependiente y la independiente sino a la dependencia funcional con los parámetros. Si la función a ajustar es lineal en los parámetros, la solución se obtiene con un sistema lineal de ecuaciones.

[13] G. B. Arfken, A. J. Weber, "Mathematical methods for physicists", Academis Press 1995, p 331-333.

vertical. Si se retienen hasta el término cuadrático, para ángulos de hasta 50º el error cometido en la aproximación es del 0.6%,

$$T \approx T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} m + \frac{9}{64} m^2 \right\}$$

que tiene la misma forma que la regresión múltiple $y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + n$ sin más que identificar:

$$\begin{array}{ll} y \leftrightarrow T & n \leftrightarrow T_0 \\ x_1 \leftrightarrow m = \sin^2 \dfrac{\theta_0}{2} & m_1 \leftrightarrow \dfrac{T_0}{4} \\ x_2 \leftrightarrow m^2 = \sin^4 \dfrac{\theta_0}{2} & m_2 \leftrightarrow \dfrac{9T_0}{64} \end{array}$$

Para efectuar los cálculo podemos utilizar la función "ESTIMACION.LINEAL" de la hoja de cálculo Excel® de Microsoft Office® 2000. La única diferencia con el caso anterior es que debemos marcar para la salida 3 filas y 3 columnas y que el segundo argumento de la función debe contener las columnas con los datos de las dos variables dependientes.

Así por ejemplo, si tal como se muestra en la Tabla 7.7, la columna A contiene los valores del ángulo en grados, la B los valores del ángulo en radianes, la C la primera variable independiente $x_1 = m = \sin^2(\theta_0/2)$, la D la segunda variable independiente $x_2 = m^2$ y la E la variable dependiente $y = T$; el resultado de la regresión ocuparía las celdas F1:H3 y la fórmula a escribir sería: ESTIMACION.LINEAL(E2:E8; C2:D8; 1; 1)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	θ (º)	θ(rad)	x1=m	x2=m^2	y=T(s)	0,351405	0,353765	1,8508
2	20	0,349066	0,030154	0,000909	1,862	0,224049	0,047337	0,002102
3	25	0,436332	0,046846	0,002195	1,869	0,998028	0,001252	#N/A
4	30	0,523599	0,066987	0,004487	1,874			
5	35	0,610865	0,090424	0,008176	1,886			
6	40	0,698132	0,116978	0,013684	1,898			
7	45	0,785398	0,146447	0,021447	1,910			
8	50	0,872665	0,178606	0,0319	1,925			

Tabla 7.7. Regresión lineal múltiple realizada con Excel®.

En la primera fila (F1:H1) se encuentran los valores de los coeficientes m_2, m_1 y n; en la segunda fila (F2:H2) los valores de sus incertidumbres s_{m_2}, s_{m_1} y s_n; la celda F3 contiene el valor de r^2 y la G3 el de s_y. Los resultados del ajuste serían

$$T_0 = n = (1.851 \pm 0.002)\,\mathrm{s}$$
$$m_1 = (0.35 \pm 0.05)\,\mathrm{s}, \quad \text{a comparar con } \mathrm{T}_0/4 = (0.4627 \pm 0.0005)\,\mathrm{s}$$
$$m_2 = (0.4 \pm 0.2)\,\mathrm{s}, \quad \text{a comparar con } 9\mathrm{T}_0/64 = (0.2603 \pm 0.0003)\,\mathrm{s}$$
$$\mathrm{r}^2 = 0.998028 \Rightarrow \mathrm{r} = 0.9990$$

y la representación gráfica

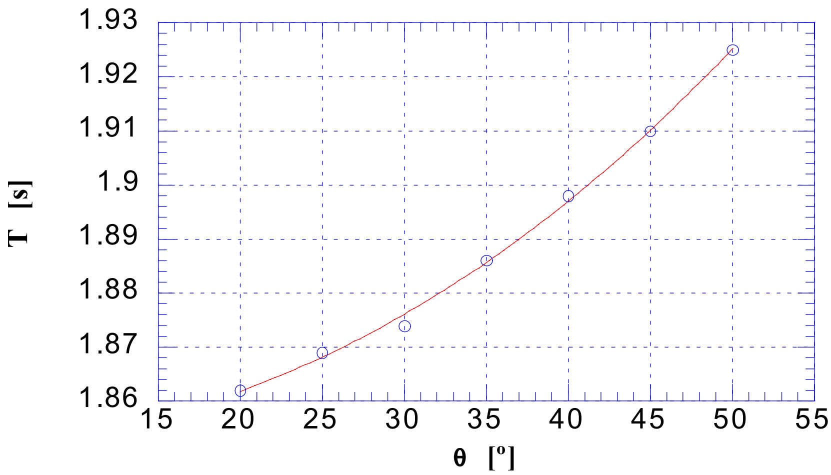


Figura 7.4. Periodo de un péndulo en función de la amplitud y la curva de regresión obtenida con Excel®.

VII.6 *Regresión lineal con pesos*

Hasta ahora hemos considerado que las incertidumbres de todas las medidas de la variable dependiente y_i eran iguales. Sin embargo, existen casos en los que esta hipótesis está lejos de cumplirse. Por un lado están las situaciones en las que se linealiza una dependencia exponencial, en este caso, aunque inicialmente todas las medidas tuviesen la misma incertidumbre, la incertidumbre en sus logaritmos no sería la misma puesto que $s[\ln(x)] = s(x)/|x|$. Por otro lado están las situaciones en las que a diferentes valores de la medida le corresponden claramente incertidumbres diferentes, bien por un cambio en la escala del aparato, bien por que se trata de medidas repetitivas con su propia desviación típica o por las medidas en sí.

Un ejemplo de estas dos situaciones es el caso de las medidas realizadas con una muestra radiactiva en función de la distancia al detector. Para ello se cuentan las desintegraciones registradas en un contador Geiger en intervalos iguales de dos minutos. Estos recuentos siguen una distribución de Poisson y por tanto su incertidumbre sería la raíz cuadrada del número de desintegraciones, $s(N) = \sqrt{N}$, tal como se muestra en la Tabla 7.8. La actividad (desintegraciones por unidad de tiempo) se obtiene dividiendo las cuentas por 120 segundos, $A = N/120$, por lo que su error relativo sería el mismo que el de los recuentos $s(A)/A = s(N)/N$. Como lo que se pretende es determinar el exponente p con el que disminuye la actividad A en función de la distancia d, $A = cte/d^p$, se toman logaritmos:

$$\ln A = \ln cte - p \ln d$$

y se realiza un ajuste lineal donde $y \equiv \ln A$, $x \equiv \ln d$, $n \equiv \ln cte$ y la pendiente $m \equiv -p$.

Las incertidumbres de la variable dependiente serían $s(y_i) = s(A_i)/|A_i|$ diferentes en cada una de las medidas. Además, tal como se muestra en la Tabla 7.8, en este ejemplo la incertidumbre de la actividad disminuye con la distancia mientras que la de su logaritmo aumenta.

d **(cm)**	***N***	***A*** **(Bq)**	**Ln[*A* (Bq)]**
1.5	3370 ± 60	28.1 ± 0.5	3.334 ± 0.017
2	1950 ± 40	16.3 ± 0.4	2.79 ± 0.02
2.5	1240 ± 40	10.3 ± 0.3	2.34 ± 0.03
3	910 ± 30	7.5 ± 0.3	2.02 ± 0.03
3.5	660 ± 30	5.5 ± 0.2	1.70 ± 0.04
4	500 ± 20	4.2 ± 0.2	1.44 ± 0.04
4.5	390 ± 20	3.2 ± 0.2	1.17 ± 0.05

Tabla 7.8. Incertidumbres en las cuentas, la actividad y en su logaritmo para diferentes distancias.

A nivel práctico, la única diferencia con el caso ya estudiado es que en la expresión de chi-cuadrado no se puede sacar factor común la incertidumbre en σ_{y_i}:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(m x_i + n - y_i)^2}{\sigma_{y_i}^{\ 2}} = \sum_{i=1}^{N} w_i \,(m x_i + n - y_i)^2$$

donde las cantidades $w_i = 1/\sigma_{y_i}^{\ 2}$ son los llamados pesos y son una medida de la importancia relativa de cada una de los términos $(m x_i + n - y_i)^2$ en el valor total de χ^2. El resultado es evidente: a menor incertidumbre más peso y viceversa.

Igualando a cero las derivadas respecto de cada uno de los parámetros obtenemos un sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} m\sum w_i x_i^{\ 2} + n\sum w_i x_i = \sum w_i x_i y_i \\ m\sum w_i x_i + n \sum w_i = \sum w_i y_i \end{cases}$$

cuya solución es

$$m = \frac{\sum w_i \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\Delta}$$

$$n = \frac{\sum w_i x_i^{\ 2} \sum w_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\Delta}$$

donde

$$\Delta = \sum w_i \sum w_i x_i^{\ 2} - \left(\sum w_i x_i\right)^2$$

Propagando las incertidumbres $\sigma_{y_i} = 1/\sqrt{w_i}$ a los coeficientes del ajuste se obtiene:

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum w_i}{\Delta}}$$
$$s_n = \sqrt{\frac{\sum w_i x_i^2}{\Delta}}$$

La mayoría de las calculadoras no poseen la opción de ajustes por mínimos cuadrados con pesos. Tampoco está implementado en la versión Microsoft Office® 2000, sin embargo, sí es muy sencillo realizar las diferentes sumas con esta hoja de cálculo. Tomemos por ejemplo los datos de la Tabla 7.8, en particular los espesores y los logaritmos de las actividades y sus incertidumbres. El procedimiento sería algo así:

1 Introducir los valores de la Tabla 7.8 en las columnas A, B y C.
2 Rellenar las tres columnas siguientes son la variable independiente $x \equiv \ln d$, la variable independiente $y \equiv \ln A$ y el peso $w_i = 1/\sigma_{y_i}{}^2$ que es la inversa del cuadrado de la incertidumbre de $\ln A$.
3 La columna H tiene las etiquetas y la columna I los resultados de las diferentes sumas. Así, por ejemplo, para efectuar $\sum w$ se selecciona la celda I1 y se escribe en la barra de fórmulas: SUMA(G2:G8). Para realizar $\sum wxy$ se selecciona la celda I2 y se escribe en la barra de fórmulas: SUMA(G2:G8*E2:E8*F2:F8) y, puesto que es una fórmula matricial, se entra pulsando: CTRL+MAYUS+ENTRAR.
4 Escribir en la otras casillas de la columna I las fórmulas correspondientes, por ejemplo, para calcular Δ ha de escribirse en I4 la siguiente fórmula: I1*I3-I2^2.

	A	B	C	E	F	G	H	I
1	d (cm)	ln[A(Bq)]	S(ln(A))	xi	yi	wi	Suma_w	9832,430
2	1,5	3,334	0,017	0,405465108	3,334	3460	Suma_wx	7625,684
3	2	2,79	0,02	0,693147181	2,790	2500	Suma_wx2	7130,845
4	2,5	2,34	0,03	0,916290732	2,340	1111	Suma_wy	25786,28
5	3	2,02	0,03	1,098612289	2,020	1111	Suma_wxy	17643,05
6	3,5	1,70	0,04	1,252762968	1,700	625		
7	4	1,44	0,04	1,386294361	1,440	625	delta	11962468
8	4,5	1,17	0,05	1,504077397	1,170	400	m	-1,936389
9							n	4,124369
10							s(m)	0,028669
11							s(n)	0,024415

Tabla 7.9. Regresión lineal con pesos realizada con Excel®.

El resultado obtenido para el exponente es $p = -m = 1.94 \pm 0.03$ en buen acuerdo con la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. En la Figura 7.5 se muestran los puntos experimentales (con sus barras de error) y la recta de regresión.

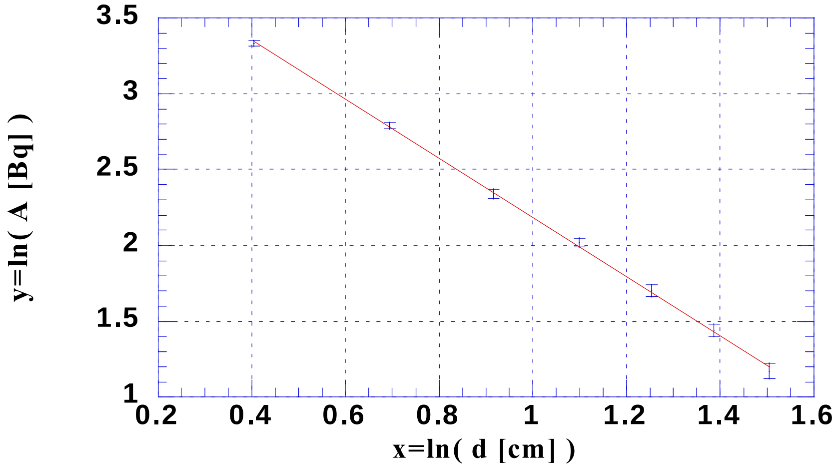


Figura 7.5. Representación gráfica de la regresión lineal con pesos realizada con Excel®.

VII.7 *Ajuste a cualquier función*

El método de regresión lineal múltiple permite realizar ajustes a una gran variedad de funciones, la condición que han de cumplir es ser lineales en los parámetros, es decir, $y(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(x)$ siendo $\{a_1, \ldots, a_m\}$ los parámetros y $f_j(x)$ funciones arbitrarias. Sin embargo, existen muchos otros casos en que la función a ajustar no es lineal ni puede transformarse en una función lineal de los parámetros. A continuación se muestran unos ejemplos de las tres situaciones:

Lineal	Linealizable	No lineal
$y(x_1, x_2) = a\,x_1 + b\,x_2 + c$	$y(x) = a\,x^b$	$y(x) = a\,x^b + c$
$y(x) = a\,x^2 + b\,x + c + \frac{d}{x}$	$y(x) = a\exp(b\,x)$	$y(x) = a\exp\left[b\,(x-c)^2\right]$
$y(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$	$y(x) = \frac{a\,x}{b\,x + c}$	$y(x) = a\sin(b\,x + c)$

Tabla 7.10. Ejemplos de funciones lineales y no lineales en los parámetros.

Si la función a ajustar $y(x) = f(x, a_1, \ldots, a_m)$ depende de m parámetros y tenemos N parejas de datos (x_i, y_i), la función de probabilidad sería

$$P(a_1,\ldots,a_m)=\prod_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{\sigma_{y_i}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y_i-y(x_i))^2}{2\sigma_{y_i}^{\;2}}\right]\right\}\propto\exp\left[-\frac{1}{2}\chi^2\right]$$

que se haría máxima cuando chi-cuadrado fuese mínima

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i-y(x_i))^2}{\sigma_{y_i}^{\;2}}$$

Derivando respecto de cada uno de los parámetros obtenemos m ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a_j}=-2\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{\sigma_{y_i}^{\;2}}(y_i-y(x_i))\frac{\partial y(x_i)}{\partial a_j}\right\}=0$$

Si la función a ajustar $y(x)$ es lineal con los parámetros, el sistema de ecuaciones es lineal y los parámetros se calculan fácilmente. Si la función no es lineal, las ecuaciones obtenidas no son lineales en los parámetros y no ningún método general de resolverlas. En este caso se recurre a métodos numéricos[14] que nos permitan encontrar el mínimo de chi-cuadrado que la consideraremos una función de los parámetros $\chi^2=\chi^2(a_1,\ldots,a_m)$.

Los errores en los parámetros se pueden estimar a partir de la forma que adopta χ^2 alrededor del mínimo. Si el mínimo es estrecho (derivada segunda grande) la incertidumbre de los parámetros será pequeña, si por el contrario el mínimo es ancho (derivada segunda pequeña) la incertidumbre será grande.

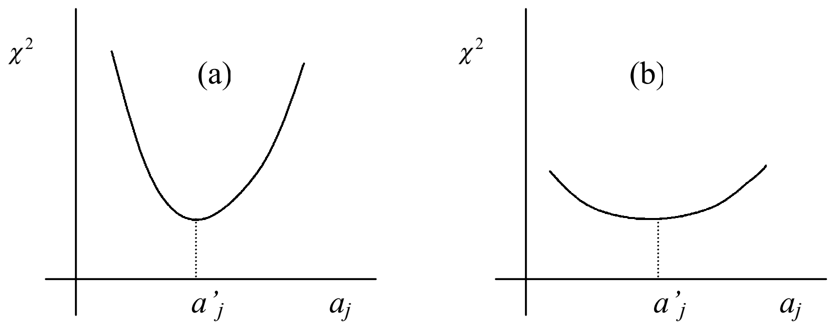


Figura 7.6. Variación de χ^2 cerca del mínimo correspondientes para: (a) baja incertidumbre y (b) alta incertidumbre en el parámetro.

Además, suponiendo que disponemos de un número de puntos grande de manera que la distribución de probabilidad de los valores de los parámetros pueda considerarse gaussiana (con centro en a'_j y de anchura σ_j para el parámetro j),

[14] Bevington, P.R., Robinson D.K. Data reduction and error analysis for the physical sciences. 2ª ed. McGraw-Hill (1992).

$$P(a_j) \propto \exp\left[-\frac{(a_j - a'_j)^2}{2\sigma_j^{\,2}}\right]$$

y

$$P(a_1,\ldots,a_m) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{(a_j - a'_j)^2}{\sigma_j^{\,2}}\right]$$

con lo cual se tiene que

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m}\frac{(a_j - a'_j)^2}{\sigma_j^{\,2}} + cte$$

que nos da la variación de χ^2 en las inmediaciones del mínimo. Si se compara esta expresión con el desarrollo en serie de potencias alrededor del mínimo

$$\chi^2 \cong \chi^2\Big|_0 + \sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\partial \chi^2}{\partial a_j}\bigg|_0 (a_j - a'_j)\right\} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_j \partial a_k}\bigg|_0 (a_j - a'_j)(a_k - a'_k)\right\} + \cdots$$

se concluye que

$$\frac{1}{\sigma_j^{\,2}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_j^{\,2}}\bigg|_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_j^{\,2} = 2\left(\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_j^{\,2}}\bigg|_0\right)^{-1}$$

la incertidumbre del parámetro j es proporcional a la inversa de la curvatura de χ^2 en las inmediaciones del mínimo.

Afortunadamente existen programas de análisis de datos que calculan numéricamente los valores de los parámetros y sus incertidumbres a la función definida por el usuario. Hay que decir que ciertas funciones son fáciles de ajustar porque el mínimo de χ^2 es muy claro mientras que otras conducen a situaciones mucho más difíciles en las que incluso pueden existir mínimos locales. En estos casos, la pericia del usuario es definitiva para obtener un resultado apropiado.

Una aplicación comercial que tiene una potente herramienta de ajuste de funciones además de un tratamiento estadístico de los datos y unos gráficos de buena calidad es “Kaleidagraph®” de “Synergy Software”. Sin entrar en los detalles diremos que existe una función de ajuste general en la que el usuario escribe la función a ajustar $y(x) = f(x, a_1, \ldots, a_m)$ (con $m \leq 9$) y suministra los valores iniciales de los parámetros. También se elige entre ajuste con pesos o sin ellos y el criterio de convergencia (que marca el fin de las iteraciones en la búsqueda del mínimo). Opcionalmente se pueden especificar las derivadas parciales $\partial f / \partial a_j$ lo que mejora la calidad y rapidez del ajuste. Con esta información el programa se pone a calcular y, si la elección de los valores iniciales de los parámetros es suficientemente buena, convergerá al resultado del problema.

Como en las secciones anteriores, ilustraremos con un ejemplo los que acabamos de explicar: Consideremos un experimento en el que se mide la amplitud A del movimiento estacionario de un oscilador armónico de forzado y amortiguado en función de la frecuencia de la fuerza γ. La expresión que se obtiene resolviendo la ecuación diferencial del movimiento es

$$A(\gamma)=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\gamma^2\right)^2+(2\beta\gamma)^2}}$$

donde F_0 es el valor máximo de la fuerza, m la masa del oscilador, k la rigidez del resorte, $\omega_0=\sqrt{k/m}$ la frecuencia natural de las oscilaciones sin amortiguamiento y β el coeficiente de amortiguamiento. Identificando tendríamos

$$\begin{array}{ll} y \longleftrightarrow A & a_1 \longleftrightarrow F_0/m \\ x \longleftrightarrow \gamma & a_2 \longleftrightarrow \omega_0 \\ & a_3 \longleftrightarrow \beta \end{array}$$

Los valores experimentales de la frecuencia $\mathrm{f}=\gamma/2\pi$ y la amplitud se presentan en la Tabla 7.11

$\mathrm{f}=\frac{\gamma}{2\pi}$ (Hz)	A (mm)	$\mathrm{f}=\frac{\gamma}{2\pi}$ (Hz)	A (mm)	$\mathrm{f}=\frac{\gamma}{2\pi}$ (Hz)	A (mm)
0.50	25	1.22	400	1.29	410
0.70	30	1.23	900	1.30	315
0.90	43	1.24	980	1.35	142
1.10	86	1.25	1290	1.40	84
1.15	128	1.26	1350	1.50	48
1.20	290	1.27	980	1.60	32
1.21	325	1.28	580	1.80	19

Tabla 7.11. Amplitud del oscilador en función de la frecuencia de la fuerza excitadora.

Los datos de la amplitud del oscilador en función de la frecuencia de la fuerza excitadora se representan gráficamente (utilizando Kaleidagraph®) en la Figura 7.7., donde se puede apreciar claramente el pico de resonancia.

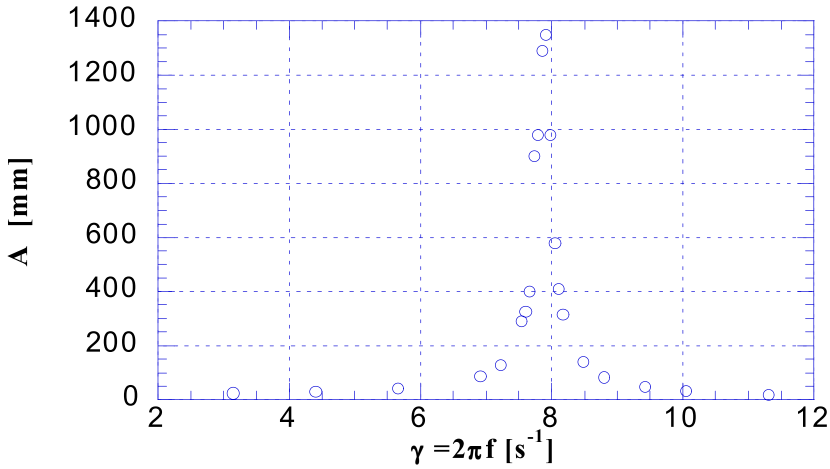
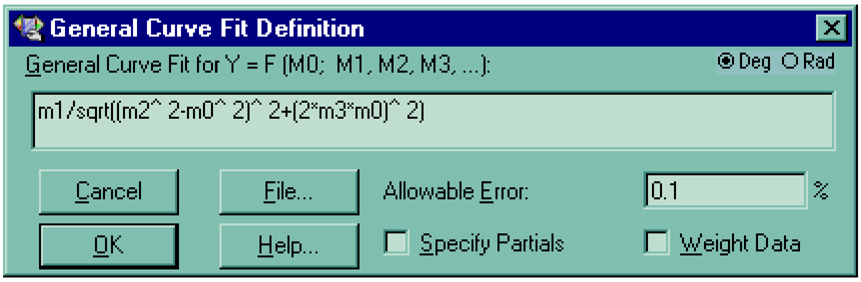
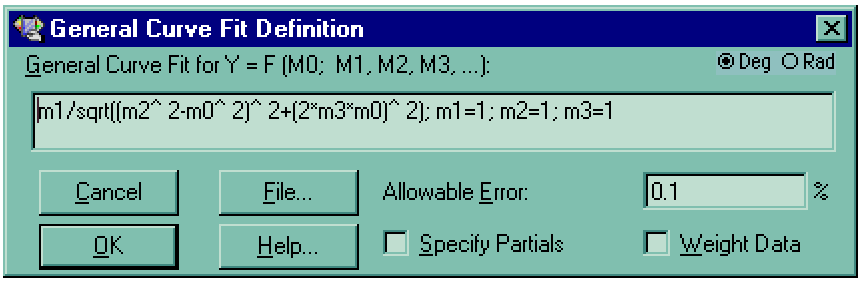


Figura 7.7. Amplitud del oscilador en función de la frecuencia de la fuerza excitadora.

Una vez introducidos los datos en una hoja similar a la de Excel® y realizado el plot, escribimos la función a ajustar dentro de la ventana de ajuste a una curva arbitraria:



en la sintaxis de Kaleidagraph®, m_0 es la variable independiente, $\{m_1, m_2, m_3\}$ son los parámetros. Si no se especifican unos valores iniciales se considerarán nulos y al ejecutar el ajuste nos encontraremos con un mensaje de error "Singular coefficient matrix!" en el primer paso puesto que al calcular χ^2 obtiene una indeterminación 0/0. Si ponemos por ejemplo todos los parámetros igual a uno (lo que funcionaria para muchas funciones sencillas):



en este caso nos encontraríamos el mismo mensaje de error pero en la iteración número 7 con unos valores de los parámetros que no se corresponden en nada con los puntos experimentales y con un valor de chi-cuadrado χ^2 =7.2E+06.

Si queremos obtener un resultado adecuado debemos mejorar nuestra estimación de los parámetros de manera que el valor inicial de la función a ajustar se aproxime a los datos experimentales. Empezamos por colocar el centro del pico cerca del máximo observado, $\omega_0 \approx m_2 = 8$. Si dejamos $m_1 = m_3 = 1$ obtendremos el mismo error que antes debido a que la altura del primer valor de la función se aleja mucho (en más de cuatro órdenes de magnitud) de los datos experimentales como se observa en la Figura 7.8.

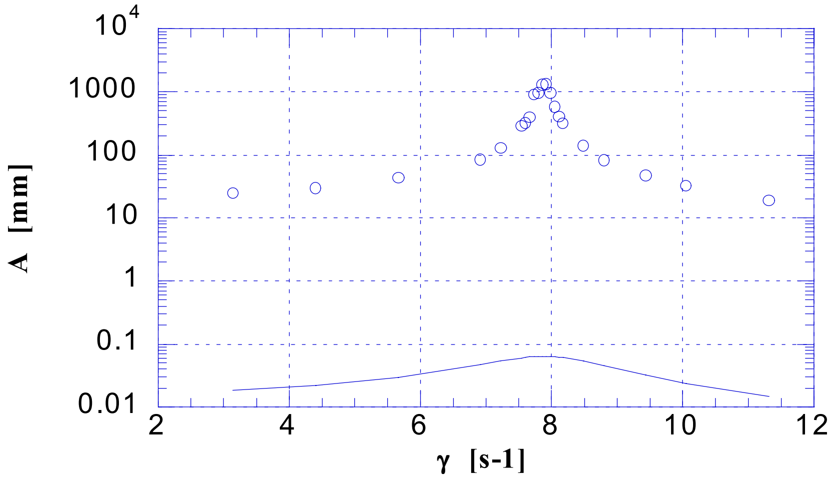


Figura 7.8. Amplitud del oscilador en función de la frecuencia y la función prueba con $m_2 = 8$ y $m_1 = m_3 = 1$.

Si se prueba con $m_2 = 8$, $m_1 = 10000$ y $m_3 = 1$ se obtiene una rápida convergencia entre las función y los datos tal como se muestra en la Figura 7.9. En la gráfica se incluye el resultado del ajuste, tal como lo muestra Kaleidagraph®, que contiene los valores de los parámetros, sus incertidumbres, el valor de χ^2 y el coeficiente de regresión r. El signo menos del coeficiente m_3 no tiene ningún significado y se debe a que está dentro de un cuadrado.

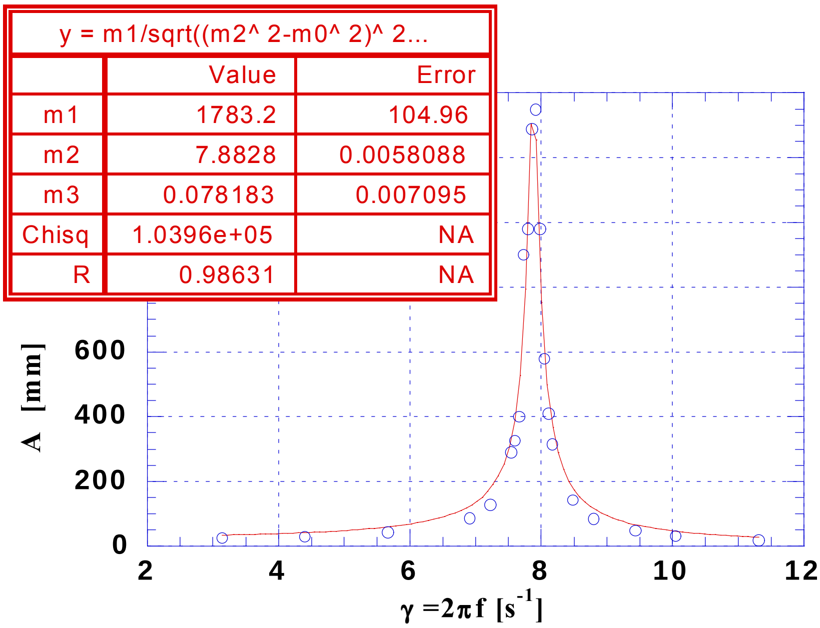
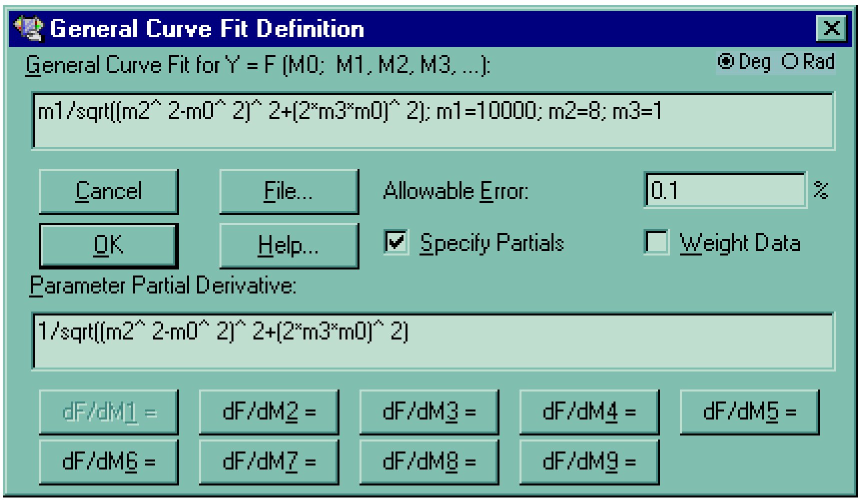


Figura 7.9. Amplitud del oscilador en función de la frecuencia y la función prueba con $m_2 = 8$ y $m_1 = m_3 = 1$.

Como ya se indicó antes, la convergencia se mejora mucho si se especifican algunas o todas las derivadas parciales. Al señalar esta opción en la ventana del ajuste general se despliega un nuevo cuadro donde se escriben las derivadas parciales con la misma sintaxis, por ejemplo para el primer parámetro:



Cuando la función a ajustar contiene los parámetros en forma complicada y los datos presentan una gran dispersión, obtener un buen ajuste puede convertirse en algo muy laborioso.

Nota:

Para distribuciones de puntos que no sigan la distribución normal no puede emplearse el método de mínimos cuadrados y habrá que utilizar el principio de máxima verosimilitud con otras distribuciones, por ejemplo la de Poisson. Este hecho suele complicar enormemente el proceso y trasciende los objetivos de esta obra. Los lectores interesados pueden saciar su curiosidad en, por ejemplo, “Data reduction and error analysis for the physical sciences”. Bevington P.R. , Robinson D. K. McGraw-Hill (1992).

Ejercicios

1. Calcula la pendiente y el término independiente de los datos de la tabla utilizando el método de los mínimos cuadrados. Calcula también la incertidumbre en la pendiente y en el término independiente. Calcula el coeficiente de correlación.

x	***y***
45	23
39	35
31	39
24	47
18	56
11	63
4	75

2. Utilizando el método de los mínimos cuadrados calcula la ecuación de la recta de ajuste de los ejercicios 5, 6 y 7 del Capítulo IV. Compara los resultados obtenidos por los dos métodos.

3. En un experimento para estudiar la dilatación térmica de una barra de latón se obtuvieron los siguientes datos del incremento de longitud, Δl en función de la temperatura T.

T **(°C)**	**Δ*l*** **(mm)**
16.5	0.02
23	0.08
30	0.14
38.5	0.26
48.5	0.37
59.5	0.48
69.5	0.58
79.5	0.69

Tomando la temperatura como variable x y la variación de longitud como variable y, utiliza tu calculadora para determinar las siguientes magnitudes (conserva todos los dígitos que te permite tu calculadora y no olvides incluir las unidades de medida)

i) La pendiente (B en una calculadora CASIO).
ii) El término independiente (A en un calculadora CASIO).
iii) Las incertidumbres en A y B.

iv) Acota B, A y sus incertidumbres al número apropiado de cifras significativas.

4. Se ha llevado a cabo un experimento para investigar la dependencia con la temperatura de la resistencia de un hilo de cobre. Se considera que la relación entre estas dos variables viene dada por

$$R = R_0(1 + \alpha T)$$

donde R es la resistencia, T es la temperatura, R_0 la resistencia a la temperatura de 0 ˚C, y α es un coeficiente que depende del material. Las observaciones de R y T se muestran en la tabla

T **(˚C)**	***R*** **(Ω)**
10	12.3
20	12.9
30	13.6
40	13.8
50	14.5
60	15.1
70	15.2
80	15.9

i) ¿Qué tendrías que representar para obtener una línea recta con los datos de la tabla?
ii) Utilizando el método de los mínimos cuadrados calcula el valor de la pendiente y el término independiente de la recta de ajuste.
iii) Calcula la incertidumbre en los parámetros de la recta. Da el valor de dichos parámetros y sus incertidumbres con el número adecuado de cifras significativas.
iv) Utilizando los valores obtenidos en el apartado anterior, calcula R_0 y α.

5. La relación entre la corriente, I, y el voltaje, V, de un determinado dispositivo semiconductor puede escribirse $I = I_0 \exp\left(\frac{eV}{nkT}\right)$ donde e es la carga del electrón (e = 1.6 × 10^{-19} C), k es la constante de Boltzman (k = 1.38 × 10^{-23} J K^{-1}), T es la temperatura en kelvin, I_0 es la corriente de saturación (que es constante) y n es una constante. La tabla siguiente muestra un conjunto de datos de corriente en función del voltaje cuando el dispositivo se mantiene a la temperatura de 300 K. Se pide:
i) Linealizar la ecuación anterior.
ii) Realizar el ajuste por mínimos cuadrados para determinar I_0 y n.
iii) Calcular sus incertidumbres.
iv) Calcular el coeficiente de correlación.

I **(A)**	***V*** **(V)**
7.53×10^{-5}	0.50
3.17×10^{-4}	0.55
1.07×10^{-3}	0.60
3.75×10^{-3}	0.65
1.35×10^{-2}	0.70
4.45×10^{-2}	0.75
1.75×10^{-1}	0.80
5.86×10^{-1}	0.85

6. *Recta que pasa por el origen.* Supongamos que dos variables cumplen la relación $y = mx$ es decir, si representamos y en función de x tendremos una recta que pasa por el origen. Utilizando argumentos similares a los presentados en las secciones VII.1 y VII.2, demuestra que el valor de la pendiente m es

$$m = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

la incertidumbre en la y es

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (mx - y)^2}$$

y la incertidumbre en la pendiente

$$s_m = \frac{s_y}{\sqrt{\sum x^2}}$$

La Ley de Ohm $V=RI$ es un ejemplo de relación de este tipo. Aplica el resultado anterior para obtener el valor de la resistencia R a partir de los datos de la tabla

Voltaje (V)	**Intensidad (A)**
1.0	0.19
1.5	0.30
2.0	0.40
2.5	0.48

7. *Regresión lineal múltiple.* En un experimento para estudiar el tiro parabólico un estudiante lanza un proyectil mientras otro estudiante registra la trayectoria seguida con una cámara de vídeo. El análisis de las imágenes digitalizadas proporciona los resultados que se muestran en la tabla. Utilizando el método de regresión lineal múltiple, ajusta y en función de x para obtener la ecuación de la trayectoria: $y = a + bx + cx^2$

tiempo(s)	***x* (m)**	**y (m)**
0.0000	0.38920	0.37340
0.033330	0.50000	0.46840
0.066670	0.61080	0.55060
0.10000	0.71840	0.62340
0.13330	0.82590	0.68350
0.16670	0.93350	0.73730
0.20000	1.0380	0.77220
0.23330	1.1460	0.79750
0.26670	1.2470	0.81650
0.30000	1.3540	0.82280
0.33330	1.4560	0.81650
0.36670	1.5660	0.80380

8. *Ajuste a cualquier función*. En el ejercicio VI.6 se describe un experimento en el cual se mide el periodo T de un péndulo físico en función de la posición del punto de suspensión. Los valores obtenidos por un grupo de estudiantes se muestran en la tabla. En la tercera columna se incluye la desviación típica del periodo. Teniendo en cuenta que la relación entre el periodo y la posición vienen dada por

$$T(x) = 2\pi\sqrt{\frac{r_G^2 + (x_G - x)^2}{g|x - x_G|}}$$

Ajusta por el método de los mínimos cuadrados los datos de la tabla y determina el valor de los parámetros g, x_G y r_G

***x* (m)**	***T* (s)**	**s_T (s)**
-0.60	1.8437	0.0005
-0.50	1.7879	0.0004
-0.40	1.7484	0.00009
-0.30	1.7810	0.0003
-0.20	1.9227	0.0010
-0.10	2.4670	0.009
0.10	2.4750	0.006
0.20	1.9160	0.002
0.30	1.7859	0.0002
0.40	1.7415	0.0007
0.50	1.7879	0.0002
0.60	1.8404	0.00006

VIII. Desarrollo de un proyecto experimental

Los científicos e ingenieros dedican gran parte de su tiempo al "trabajo experimental". La razón de ello es que todos los avance científicos y técnicos se fundamentan en la información a portada por un experimento o una serie de experimentos. Los experimentos permiten poner a prueba las teorías, lo cual puede no ser fácil, pero hasta que se haya realizado y los resultados confirmados independientemente por otros investigadores, la teoría no será completamente aceptada. Los experimentos permiten determinar relaciones, medir magnitudes, obtener respuestas a cuestiones del tipo ¿Qué ocurre si...?

En el ámbito de los laboratorios docentes es evidente que no va a descubrirse nada nuevo, sin embargo ofrecen al estudiante la oportunidad de familiarizarse con los instrumentos y técnicas experimentales, adquirir conocimientos y habilidades en contacto con el "mundo real" lo cual presenta grandes ventajas sobre las descripciones y explicaciones idealizadas de los libros de texto.

VIII.1 *Etapas en la realización de un experimento*

Durante la realización de un experimento se pueden considerar varias etapas:

►Planteamiento de los objetivos.

El objetivo de un experimento ha de estar definido y perfectamente claro antes de empezar a hacer nada. ¿Cuál es el propósito del experimento? ¿Qué queremos medir? ¿Por qué?

►Elaboración del plan de trabajo.

Una vez que el objetivo esté claro, debemos planear el experimento. Es decir tomar decisiones acerca de qué debemos medir, cómo hemos de realizar las medidas, con qué precisión y qué instrumentos serán necesarios.

►Preparación del experimento.

Una vez que el experimento está planeado, debemos preparar todo lo necesario; es decir, recolectar los materiales y aparatos necesarios y montar toda la instrumentación necesaria para llevar a cabo las medidas, asegurándonos de que sabemos cómo operar con ello.

►Experimento preliminar

En muchos casos es necesario realizar unos experimentos o medidas preliminares para asegurarnos de que el método de trabajo propuesto o la instrumentación seleccionada es la adecuada.

►Realizar el experimento y tomar medidas

Una vez superados los pasos anteriores, podremos llevar a cabo el experimento, con la consiguiente adquisición de datos. En esta etapa debemos ser muy cuidados para que los datos obtenidos sean útiles. Intentaremos minimizar en lo posible las incertidumbres sistemáticas y utilizaremos ciertas técnicas para reducir el impacto de los errores aleatorios (Ver Cap. VI).

►Repetición del experimento.

Con frecuencia es necesario repetir algunas medidas para verificar que el primer conjunto de resultados es reproducible. Se suele hacer un análisis preliminar de los datos antes de desmantelar todo el montaje experimental para chequear si hay algún error de bulto o algún comportamiento anómalo en un dato o conjunto de datos que requiera su repetición.

►Análisis de los datos.

Una vez completada la adquisición de datos, hay que analizarlos para ver qué es lo que nos dicen esos datos. Dependiendo de las hipótesis de partida al plantear el experimento, el método de análisis será diferente pero una vez analizados los datos deberemos concluir si los resultados son consistentes con las hipótesis iniciales, si no son concluyentes en incluso si son contradictorios.

►Informe

Una vez finalizado el trabajo de laboratorio los resultados han de ser comunicados a otros (profesor, otros estudiantes...) de una forma clara y concisa mediante la elaboración de un informe. Fuera del ámbito docente, esta fase suele cristalizar en la presentación de los resultados en alguna reunión científica o la elaboración de un artículo para su publicación en un revista científica. Más adelante veremos cómo se debe elaborar el informe.

VIII.2 *Tomando nota: El cuaderno de laboratorio*

Un experimento puede durar unas horas o puede durar días. Durante este tiempo se habrán de realizar comprobaciones, modificaciones en los montajes, cambios en el instrumental, calibraciones; se tomarán datos y también es posible que cambien las condiciones en que se toman los datos...es decir, hay una serie de pasos unos más largos, otros más cortos que han de llevarse a cabo para completar el experimento y muchos detalles que han de ser recordados. Independientemente de la duración o complejidad del experimento una cosa es cierta, cuanto mejor se haya registrado todo lo que se ha hecho durante el experimento, más fácil será el análisis de los datos y la tarea de presentar los resultados.

La mejor manera de registrar toda la información sobre el desarrollo de un experimento es utilizar un “cuaderno de laboratorio” o “cuaderno de bitácora” Las hojas sueltas aunque permiten una mayor flexibilidad se pueden perder fácilmente[15]. Siempre es útil numerar las páginas del cuaderno, de esta forma se organiza mejor la información. Es una costumbre muy arraigada entre los estudiantes tomar los datos “en sucio” y después “pasarlos a limpio”, deshaciéndose casi siempre de los originales. Esta forma de proceder, aparte de ser una pérdida de tiempo, puede dar lugar a equivocaciones y además, es casi imposible evitar ser selectivo lo cual es más grave.

El cuaderno de laboratorio es una especie de diario donde se registra directamente durante el desarrollo del experimento cada detalle del desarrollo del mismo, incluso aquellos que en ese momento puedan parecer irrelevantes; muchas veces en el análisis posterior de los resultados o en la elaboración del informa es cuando se pone de manifiesto su importancia.

Dado que la información registrada en el cuaderno es la base sobre la cual se analizan los resultados del experimento y se elaboran los informes, conviene señalar el tipo de información que debería incluir:

►La fecha en la cual se llevó a cabo el trabajo

Cuando un experimento dura varios días o semanas, o pasa por varias fases, es muy útil conocer el orden cronológico en que se fueron realizando las distintas fases, operaciones, medidas, calibraciones...Cada día al abrir el cuaderno, esa debería ser la primera anotación.

►El título del experimento

El cuaderno ha de servir para distintos experimentos, por lo tanto se hace necesario incluir un título al iniciar cada nuevo experimento de otro modo al cabo de unos días la información allí contenida (listas de números, cálculos, anotaciones

---

[15]Para evitar la tentación de arrancar hojas, suele dar buen resultado utilizar libretas de tapas duras con las hojas cosidas.

gráficos...) se volvería incomprensible y por lo tanto inútil. La idea es que si uno coge el cuaderno al cabo de un tiempo razonablemente largo (un par de semanas, un par de meses...) sea capaz de encontrar lo que busca.

►Los objetivos del experimento

Conviene tenerlos por escrito en el cuaderno, de esta forma será más fácil comprender la información allí contenida.

►Detalles de los instrumentos

Se debería incluir los rangos de los instrumentos, los datos más importantes de sus especificaciones... Es una buena práctica incluir los números de serie de los instrumentos utilizados. Así si el análisis revela irregularidades que se sospecha puedan ser debidas a algún instrumento, será posible volver a chequearlo.

►Esquemas de circuitos y aparatos

Un esquema de líneas sencillo construido a mano alzada pero con cada elemento etiquetado, junto con una breve explicación es la forma más efectiva de describir los aparatos o los principios de un experimento.

►Método experimental

Anotar detalles del método experimental seguido. Si el método viene dado como un conjunto de instrucciones, entonces puedes “cortar y pegar”la información en el cuaderno añadiendo cualquier detalle extra que pueda ocurrir durante el desarrollo del experimento. Deberías incluir anotaciones sobre todo lo que haces, sobre las dificultades experimentadas o las observaciones o efectos inusuales que hayas apreciado. Plantéatelo de la siguiente forma; incluye la información suficiente como para que si lo lees después de pasado un tiempo puedas repetir el experimento.

►Medidas.

Anota *todos* los resultados de las medidas *directamente según se van obteniendo*. No realices ningún cálculo mental (ni el más sencillo) sobre una medida antes de anotarla. Construye tablas para poder ir anotando directamente en ellas los datos. Indica en cada columna de la tabla qué magnitud se mide y en qué unidades. Se debería incluir también una estimación de la incertidumbre en cada medida. Insistimos en que copiar los datos “a limpio” es una pérdida de tiempo y una fuente de equivocaciones.

►Gráficas

Son el mejor método para dar la imagen general de los resultados, mejor que una lista de números en una tabla. Generalmente es lo primero que mirará quién vaya a calificar tu trabajo. La gráfica debe presentarse adecuadamente con título, etiquetas...

►Cálculos

Si necesitas hacer cálculos basados en los datos, establece claramente qué ecuaciones vas a utilizar de esta forma si cometes algún error en tus cálculos, cuanto más detalle hayas apuntado, más fácil será la comprobación. Si utilizas una hoja de cálculo para hacer las cuentas, puedes imprimirla y pegarla en el cuaderno.

►Conclusión

Aunque el cuaderno de laboratorio no es el lugar más adecuado para incluir las conclusiones detalladas de un experimento sí se debería incluir una breve conclusión.

VIII.3 *El Informe de un experimento*

Una vez finalizado un experimento, los resultados han de comunicarse a otros bien sea al profesor, otros estudiantes, etc., para ello lo habitual es elaborar un informe en el cual se explique de qué trataba el experimento, cómo se llevó a cabo y qué resultados se obtuvieron. Pero el informe no es sólo la prueba de haber realizado el experimento, es una parte más del experimento, pues al redactarlo es cuando acabamos de ordenar los datos, gráficas, anotaciones y sobre todo nuestras ideas. Un informe debe reunir las siguientes condiciones:

- Ser completo y en lo posible breve.
- Tener una estructura lógica
- Ser fácil de leer.

La primera condición implica que ha de incluir toda la información relevante pero evitando detalles carentes de interés que dificulten su comprensión. El informe debe contar con secciones bien diferenciadas que garanticen orden y cohesión. A continuación se sugiere el siguiente esquema para el texto del informe, que viene siendo el que siguen en las publicaciones científicas y técnicas:

Encabezamiento del informe.

Título.

Debe ser breve e informativo. Con él debemos dar una idea clara del tema estudiado.

Autores.

Nombre de los autores, incluyendo alguna vía de comunicación con los mismos, por ejemplo e-mail, dirección postal, teléfono, etc.

Resumen.

Se da un adelanto de lo que se leerá en el cuerpo del informe indicando de forma concisa el tema de trabajo, la metodología seguida y destacando los resultados más importantes que se han obtenido. Tendrá una extensión típica de entre 50 y 150 palabras.

Cuerpo del informe.

Introducción.

Se suele incluir el marco teórico-experimental en que se encuadra el tema de estudio, incluyendo las referencias adecuadas que lleven al lector rápidamente a los antecedentes del problema y que destaquen la conexión de esas ideas con el trabajo realizado. Además se deberá enunciar claramente el objetivo del experimento.

Método experimental.

En esta sección describimos los materiales, el instrumental utilizado los procedimientos seguidos. Es útil incluir esquemas del diseño experimental, indicando sus ventajas y limitaciones y un análisis de las fuentes de incertidumbre.

Resultados.

No es necesario incluir todos los datos obtenidos en el experimento, sólo aquellos que sean suficientemente representativos de manera que cualquier conclusión que obtengamos se apoye en ellos. Las gráficas son preferibles a las tablas para presentar los resultados. Si se incluyen cálculos, debe prestarse especial atención al impacto que las incertidumbres en los datos originales producen en los resultados de los cálculos.

Discusión.

En esta parte debemos hacer un análisis de los resultados. Se analizan por ejemplo las dependencias observadas entre las variables, la comparación de los datos con algún modelo propuesto, las similitudes o discrepancias con otros resultados.

Conclusiones.

Aquí debemos sintetizar las consecuencias e implicaciones asociadas a nuestros resultados.

Referencias.

Las referencias bibliográficas se ordenan al final del informe. Deben contener el nombre del los autores de las publicaciones (artículos en revistas o libros) citados en el texto, el título de los trabajos, el nombre de la revista o editorial que los publicó, además se deben incluir los datos que ayuden a la identificación de los mismos: volumen, capítulo, página, fecha de publicación, etc.

Apéndices.

Por lo general no es conveniente distraer al lector con muchos cálculos o propagación de errores en la mitad del texto así que si son necesarios para una mejor comprensión de alguna parte del informe, se pueden incluir en un apéndice.

VIII.4 *Ejemplo de informe*

Determinación del coeficiente de dilatación lineal del latón

Ana J. López
Escuela Politécnica superior. Universidad de A Coruña.
e-mail:ajlopez@cdf.udc.es

Resumen
Se ha determinado el coeficiente de dilatación térmica del latón midiendo con un reloj comparador el aumento de longitud que experimenta un tubo en función de la temperatura del agua que circula por su interior.

Introducción

Casi todos los materiales se expenden al aumentar su temperatura. El cambio en cualquier dimensión lineal del sólido se denomina dilatación lineal. Una barra de longitud inicial L_0 a la temperatura T_0, experimenta un cambio de longitud δL cuando la temperatura cambia en δT. Para pequeños incrementos de temperatura se cumple

$$\frac{\delta L}{L_0} = \alpha\ \delta T \tag{1}$$

donde α es el coeficiente de dilatación lineal y es característico de cada material[1]. El objetivo de este experimento es determinar el valor del coeficiente de dilatación lineal del latón a partir de la variación de longitud δL que experimenta un tubo de dicho material cuando su temperatura varía una cantidad δT.

Procedimiento experimental

El dispositivo experimental consta básicamente de un tubo de latón por cuyo interior circula un flujo de agua procedente de un baño termostático. La temperatura T del baño se puede variar y se mide con un termómetro de mercurio. Uno de los extremos del tubo se mantiene fijo a un soporte mientras que en el otro extremo libre se sitúa un reloj comparador. El alargamiento del tubo δL se obtiene restando las lecturas del reloj, ℓ, comparador a la temperatura T y a la temperatura inicial del baño T_0. El correspondiente incremento de temperatura será $\delta T = T - T_0$. Un esquema del dispositivo experimental se muestra en la Figura 1.

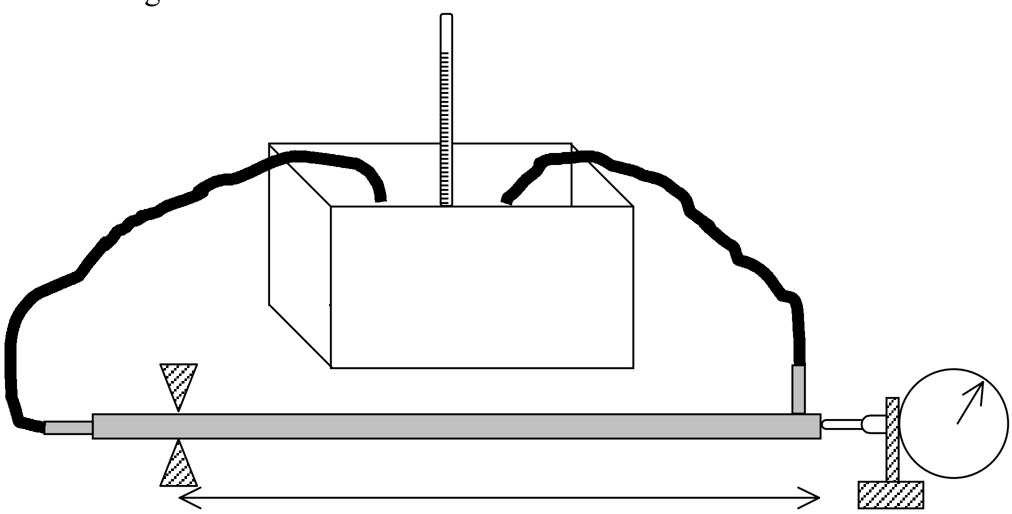


Figura 1. Esquema del dispositivo experimental.

Resultados y discusión

Se tomaron medidas de temperatura T y desplazamiento registrado por el reloj comparador a intervalos regulares de tiempo y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 1. Restando los valores iniciales de la temperatura y desplazamiento se obtienen los valores de la Tabla 2 en la cual también se han incluido los valores de la variación relativa de longitud $\delta L/L_0$, donde $L_0 = 600 \pm 1$ mm.

Temperatura (ºC)	**Desplazamiento (mm) (±0.01 mm)**
16.5	0.02
23.0	0.08
30.0	0.14
38.5	0.26
48.5	0.37
59.5	0.48
69.5	0.58

Tabla 1

δT(ºC)	**δL(mm) (±0.02 mm)**	**$\delta L/L_0$ ($\times 10^{-3}$) (±0.03 $\times 10^{-3}$)**
6.5	0.06	0.10
13.5	0.12	0.20
22.0	0.24	0.40
32.0	0.35	0.58
43.0	0.46	0.77
53.0	0.56	0.93

Tabla 2

De acuerdo con la Ecuación 1 e identificando

$$\frac{\delta L}{L_0} \leftrightarrow y$$

$$\delta T \leftrightarrow x$$

si se representa gráficamente $\frac{\delta L}{L_0}$ frente a δT se obtiene una recta de ecuación $y = mx + n$ cuya pendiente m es el coeficiente de dilatación lineal α y cuyo intercepto n ha de ser cero.

En la gráfica de la Figura 1 se muestran los valores de la Tabla 2 así como la recta de ajuste obtenida por el método de los mínimos cuadrados. Los valores de la pendiente y el intercepto y sus incertidumbres se dan en la Tabla 3, junto con el coeficiente de correlación r.

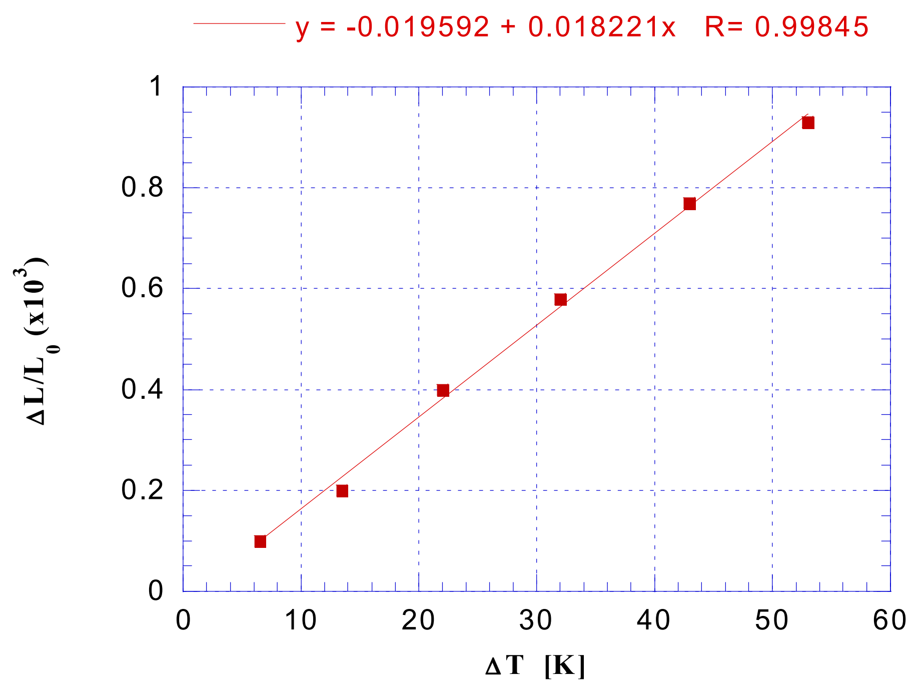


Figura 1. Variación relativa de longitud del tubo en función de la variación de temperatura.

m = 0.018 221 K^{-1}	s_m =0.000507 K^{-1}
n = -0.019 592	s_n = 0.016 548
	r =0.998 455

Tabla 3. Parámetros del ajuste.

Teniendo en cuenta sus incertidumbres los parámetros del ajuste quedan

$$m = (18.2 \pm 0.5) \times 10^{-6}\ K^{-1}$$

$$n = (-0.020 \pm 0.017) \times 10^{-3}$$

donde m corresponde al valor del coeficiente de dilatación lineal para este material.
A la vista de la Ecuación 1 cabe esperar que la recta de ajuste pase por el origen sin embargo se obtiene un valor del intercepto n que, en principio, no es compatible con cero, sin embargo el valor de n es menor que la incertidumbre de las medidas del alargamiento relativo $\Delta(\delta L/L_0)$=0.03×10^{-3}. Esto queda patente al incluir en el ajuste la incertidumbre en las ordenadas, como se muestra en la figura 2.

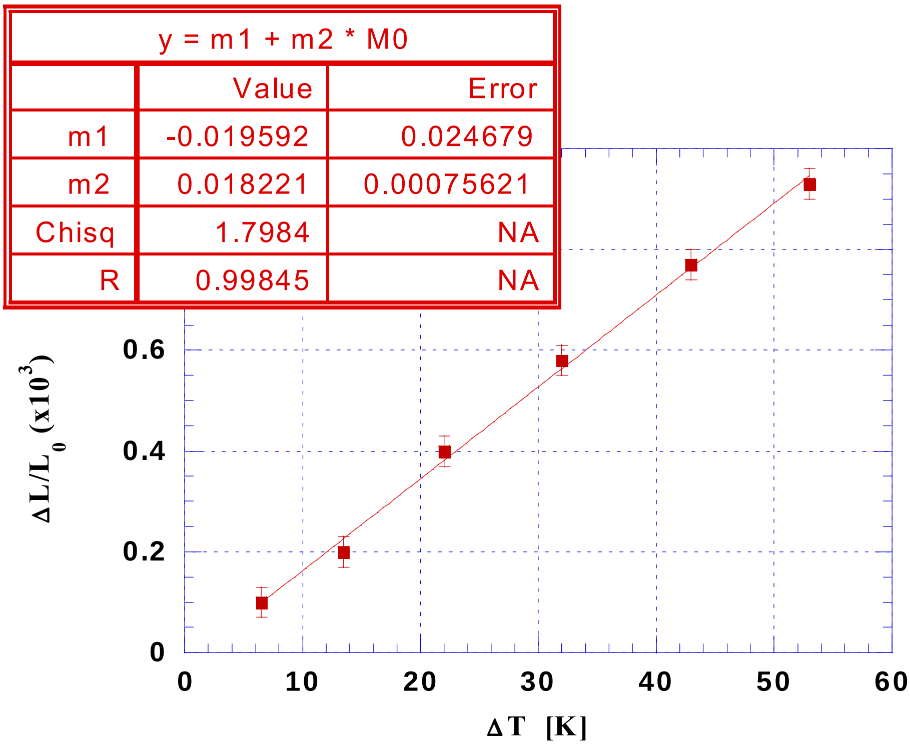


Figura 3

Incluyendo las incertidumbres en el ajuste, los parámetros del ajuste quedan

$$m = (18.2 \pm 0.8) \times 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$$

$$n = (-0.020 \pm 0.025) \times 10^{-3}$$

Se observa que al incluir las incertidumbres los valores de la pendiente y el intercepto no cambian (porque todos los pesos son iguales) pero sí lo hacen sus errores, que ahora hacen que n sea compatible con cero a la vez que s_n se aproxima más a $\Delta(\delta L/L_0)=0.03\times 10^{-3}$.

Conclusiones.

De acuerdo con los resultados anteriores hemos comprobado que $\dfrac{\delta L}{L_0}$ es proporcional a δT como predice la Ecuación 1, siendo la constante de proporcionalidad el coeficiente de dilatación lineal α para este material. El valor obtenido por nosotros es $\alpha = (18.2 \pm 0.8) \times 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ que está en buen acuerdo con el valor que se encuentra en la literatura [2] para el latón rojo UNS C23000 (85%Cu, 15%Zn) $\alpha = 18.7\times 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ para temperaturas entre 20 y 300ºC.

Referencias.

[1] Resnick R., Halliday D.,and Krane K.S. Física 4ª ed. CECSA, México (1993) Vol I p.556

[2] CRC handbook of chemistry and physics: a ready-reference book of chemical and physical data. Editor in-chief David R. Lide, 80th ed., Florida CRC Press 1999.

Apéndice. Propagación de incertidumbres.

$\Delta(\ell) = 0.01$ mm, es la incertidumbre estimada del reloj comparador.
$\delta L = \ell(T) - \ell(T_0)$, es el alargamiento.
$\Delta(\delta L) = 2\,\Delta(\ell) = 0.02$ mm es la incertidumbre en el alargamiento.
$\Delta(L_0) = 1$ mm, es la incertidumbre en la longitud del tubo.
$\varepsilon(\delta L/L_0) = \varepsilon(\delta L) + \varepsilon(L_0) \approx \varepsilon(\delta L)$, es la incertidumbre relativa del alargamiento unitario.
$\Delta(\delta L/L_0) = \varepsilon(\delta L)\ (\delta L/L_0) = \Delta(\delta L)/L_0 = 0.03\times10^{-3}$, es la incertidumbre del alargamiento unitario.

Bibliografía

El tema de las técnicas experimentales es muy amplio y la literatura existente es extensiva y de naturaleza muy variada. La siguiente lista contiene algunos libros relativamente recientes que se han utilizado en la elaboración de este texto. La lista se ha organizado en varios bloques temáticos.

Magnitudes físicas, mediciones, unidades...

AUDOIN C y GUINOT B; *The Measurement Of Time: Time, Frequency And The Atomic Clock* (2001) Cambridge University Press
BARENBLATT G I; *Dimensional Análisis* (1987) Gordon and Breach
CATALÁN CHILLERÓN J; *Teoría de las Magnitudes Físicas* (1983) Instituto Geográfico Nacional
FERNÁNDEZ JUSTO M I; *La Metrología Tradicional Gallega* (1986) Instituto Geográfico Nacional
GONZÁLEZ RAPOSO M; *Introducción a la Metrología Histórica* (1998) Servicio de publicaciones de la Universidad de A Coruña
GRANADOS C E y LÓPEZ RODRÍGUEZ M; *La Metrología en el Diccionario de la Real Academia Española* (1998) Centro Español de Metrología
HACKMAN C y SULLIVAN D B (Ed.); *Time And Frequency Measurement* (1996) American Association of Physics Teacher
JONES T; *Splitting The Second: The Story Of Atomic Time* (2000) Institute of Physics
KOCHSIEK M y GLÄSER M (Ed.); *Comprehensive Mass Metrology* (2000) Wiley-VCH
LORENZO PARDO J A; *La Revolución del Metro* (1998) Celeste Ediciones
McMAHON T A y BONNER J T; *Tamaño y Vida* (1986) Editorial Labor
MORRISON P y MORRISON P; *Potencias de Diez* (1984) Editorial Labor
SÁNCHEZ DEL RIO C; *Unidades Físicas* (1987) EUDEMA
SÁNCHEZ PÉREZ A M; *Fundamentos de Metrología* (1999) Publicaciones de la ETS de Ingenieros Industriales de la UPM
SÁNCHEZ PÉREZ A M y CARRO DE VICENTE PORTELA J; *Elementos de Metrología* (1996) Publicaciones de la ETS de Ingenieros Industriales de la UPM
STREETER V L, WYLIE B; *Mecánica de los Fluidos* (1988) McGraw_Hill

El Sistema Internacional de Unidades.

Metrología: Disposiciones Legales (1998) Centro Español de Metrología
RAZNJEVIC K; *Physical Quantities and the Units of the International System* (1995) Begell House Inc.
SÁNCHEZ DEL RIO C; *Unidades Físicas* (1987) EUDEMA
TAYLOR B N (Ed.); *Guide for the Use of the International System of Units (SI)* (1995) NIST Special Publication 811
TAYLOR B N (Ed.); *The International System of Units (SI)* (1991) NIST Special Publication 330
Vocabulario Internacional de Metrología (2000) Centro Español de Metrología

Técnicas experimentales.

BAIRD D C; *Experimentation: An Introduction to Measurement Theory and Experiment Design* 3ª ed. (1995) Prentice-Hall
BOLTON W; *Experimental methods* (1996) Butterworth-Heinemann
COOKE C; *An Introduction to Experimental Physics* (1996) ULC Press

DUNLAP R A; *Experimental Physics: Modern Methods* (1988) Oxford University Press
GIBBINGS J G (Ed.); *The Systematic Experiment: A Guide for Engineers and Industrial Scientsts* (1986) Cambridge University Press
HOLMAN J P; *Experimental Methods for Engineers* (1994) McGraw-Hill
KIRKUP L; *Experimental Methods: An Introduction to the Analysis and Presentation of Data* (1994) John Wiley & Sons
SQUIRES G L; *Practical Physics* 4ª ed. (2001) Cambridge University Press
VERMILLION R E; *Projects and Investigations: The Practice of Physics* (1991) Macmillan

Análisis de errores.

BOLTON W; *Experimental Methods* (1996) Butterworth-Heinemann
Guía para la expresión de la Incertidumbre en la Medida (2000) Centro Español de Metrología
KIRKUP L; *Experimental Methods: An Introduction to the Analysis and Presentation of Data* (1994) John Wiley & Sons
LYONS L; *A Practical Guide to Data Analysis for Physical Science Students* (1991) Cambridge University Press
MANDEL J; *The Statistical Analysis of Experimental Data* (1984) Dover
ROE B P; *Probability and Statistics in Experimental Physics* (1996) Springer-Verlag
SÁNCHEZ DEL RÍO C; *Análisis de Errores* (1989) EUDEMA
TAYLOR J R; *Error Análisis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* 2ª ed. (1997) University Science Books

Ajuste a funciones.

BEVINGTON P R y ROBINSON D K; *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* 2ª ed. (1992) McGraw-Hill
KIRKUP L; *Data Analysis with Excel®: An Introduction for Physical Scientists* (2002) Cambridge University Press
KIRKUP L; *Experimental Methods: An Introduction to the Analysis and Presentation of Data* (1994) John Wiley & Sons
MANDEL J; *The Statistical Analysis of Experimental Data* (1984) Dover
MIDDLETON M R; *Data analysis Using Microsoft Excel* (1997) Duxbury Press
SÁNCHEZ DEL RÍO C; *Análisis de Errores* (1989) EUDEMA
TAYLOR J R; *Error Análisis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* 2ª ed. (1997) University Science Books

Elaboración de un informe.

GOULD J R (Ed.); *Directions in Technical Writing and Communication* (1978) Baywood Cop.
HUCKIN M; *Technical Writing and Professional Communication for Nonnative Speakers of English* 2ª ed. (1991) McGraw-Hill
MARKEL M H; *Writing in the Technical Fields: A Step-by-Step Guide for Engineers, Scientists, and Technicians* (1994) NJ IEEE Press
SCHMELKES C; *Manual para la Presentación de Anteproyectos e Informes de Investigación: Tesis* 2ª ed. (1998) Oxford University Press

Matemáticas.
ARFKEN G B y WEBER H J; *Mathematical Methods for Physicists* 4ª ed. (1995) Academic Press
GONIK L y SMITH W; *A Estatística en Caricaturas* (2001) SGAPEIO
MENDENHALL W; *Statistics for Engineering and the Sciences* 4ª ed. (1995) Prentice-Hall
PRESS W H, FLANNERY B P, TEUKOLSKY S A y VETTERLING W T; *Numerical Recipes in C* (1992) Cambridge University Press.
SWARTZ C E; *Used Math: for the First Two Years in College Science* (1993) AAPT

Otros libros de interés.
BREZINSKI C; *El Oficio de Investigador* (1993) Siglo XXI
HARRÉ R; *Grandes Experimentos Científicos* (1986) Editorial Labor.
LATOUR B y WOOLGAR S; *La Vida en el Laboratorio: La Construcción de los Hechos Científicos* (1987) Alianza
SHAMOS M H; *Great Experiments in Physics: Firsthand Accounts from Galileo to Einstein* (1987) Dover

Revistas.
Las revistas que se citan a continuación contienen artículos relacionados con los temas de este texto así como un gran número de proyectos experimentales.
American Journal of Physics
The Physiscs Teacher
European Journal of Physics
Revista española de Física

Internet.
http://physics.nist.gov/cuu
Sitio del National Institute of Standards (NIST) de EEUU. Contiene información sobre el SI (introducción, definiciones, unidades, prefijos y reglas de uso) así como de los valores de las constantes físicas fundamentales con susu incertidumbres y también recomendaciones para la expresión de la incertidumbre en las medidas. Datos actualizados. En inglés.
http://www.cem.es/esp/unidades.htm
Sitio del Centro Español de Metrología. Contiene información sobre el SI y unidades relacionadas. Contiene también las disposiciones legales en materia de metrología en el Estado Español así como enlaces con información sobre husos horarios y servidores de ajuste de hora.
http://www.iop.org/
Página del Institute of Physics que edita entre otras las revistas European Journal of Physiscs y Physiscs Education. Tiene enlaces con otros sitios relacionados con la enseñanza de la física. En inglés.
http://www.aapt.org/
Página de la AmericanAssociation of Physics Teachers. Esta asociación publica las revistas American Journal of Physiscs, The Physiscs Teaches y Physics Today. El sitio contiene un buscador de artículos publicados en estas revistas desde el año 1972. Tiene enlaces relacionados con la enseñanza de la física. En inglés.
http://physiscsweb.org/resources
Contiene gran variedad de recursos de física (apuntes, experimentos, simulaciones...)