UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Facultade de Economía e Empresa

Trabajo de Fin de Grado

Programación lineal. Aplicaciones a la Economía y a la Empresa

Sara Nión Vázquez

Tutoras: Carmen Socorro Lema Fernández
Amalia Blanco Louro

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Año 2015

Trabajo de Fin de Grado presentado en la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de A Coruña para la obtención del Grado en Administración y Dirección de Empresas

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es la aplicación de una metodología científica, en concreto, la formulación y resolución de un problema mediante un modelo de programación lineal, planteado desde dos perspectivas: teórica y empírica.

En la parte teórica de este trabajo, además de hacer un resumen de los fundamentos de la programación lineal, se decide escoger entre las aplicaciones de la misma, la de selección de una cartera de inversión.

Este problema se aborda en la literatura de diferentes formas. Nosotros seleccionamos un modelo lineal en el que para diferentes valores de los parámetros λ_1, λ_2 se plantea y resuelve por un lado, el problema de maximización del rendimiento y por otro, el de minimización del riesgo, usando algunos supuestos de los modelos de Markowitz y del CAPM.

En el estudio empírico tomaremos siete valores que cotizan en el mercado continuo español en un período de diez años. Una vez que se han tratado los datos correspondientes a estos valores, se observa que el riesgo es mayor que el rendimiento, lo que implica que el mayor rendimiento con el menor riesgo se encontrará cuando la diferencia de ambos sea la menor. Se resuelven los problemas de maximización del rendimiento y minimización del riesgo con la macro “Solver” de Excel y se analizan los resultados a partir de los informes de sensibilidad.

Por último, intentaremos mejorar estos resultados añadiendo una restricción para obtener una cartera más diversificada y comparar ambas carteras de inversión.

Palabras clave: programación lineal, cartera de inversión, rendimiento, riesgo.

*Número de palabras:*13.892

Abstract

The main aim of this essay is the application of scientific methodology, focusing on the formulation and the solving of a problem by using a linear programming model, raised from two perspectives: theoretical and empirical.

In the theoretical part of this essay, apart from making a summary of the basics of linear programming, we decide to choose from the same applications, the selection of an investment portfolio.

Also in the theoretical part, this issue is dealt in different ways. We select a linear model in which for the different values of parameters λ_1, $\lambda_{2,}$ it poses and it resolves on the one hand, the problem of maximizing of performance and on the other hand, the minimization of the, by using some assumptions of Markowitz CAPM models.

In the empirical part, we will take seven portfolios which are quoted on the continued Spanish market in a ten-year period. Once we dealt with the data of these portfolios, we can appreciate that the risk is bigger than the performance, which means that the biggest performance with the smallest risk will be found when the difference between them will be the smallest. The problems of maximizing performance and minimizing the risk will be solved with the macro "Solver" Excel and the results will be analyzed from the reports of sensitivity.

Finally, we will try to improve these results by adding a restriction to obtain a more diversified portfolio and compare the two investment portfolios.

Keywords: linear programming, investment portfolio, performance, risk.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

Se conoce como programación lineal la técnica de la matemática que permite la optimización de una función objetivo a través de la aplicación de diversas restricciones a sus variables. Se trata de un modelo compuesto por una función objetivo y sus restricciones, constituyéndose todos estos componentes como funciones lineales en las variables en cuestión. Esto hace que, a través de su método, se puedan simplificar los cálculos y obtener un resultado próximo a la realidad.

La programación lineal se desarrolló conceptualmente antes de la Segunda Guerra Mundial, gracias al destacado matemático soviético Andréi Nikoláyevich Kolmogorov. Sin embargo, a partir de 1947 hubo importantes avances en el área, cuando George Bernard Dantzig desarrolló el procedimiento de solución conocido como “algoritmo simplex”. En ese momento, el matemático de la Fuerza Aérea, Dantzig, fue asignado a trabajar en problemas de logística y se dió cuenta de que, muchos problemas relacionados con los recursos limitados y más de una demanda, se podrían establecer en términos de una serie de ecuaciones y desigualdades.

Aunque la programación lineal comenzó utilizándose para problemas de carácter militar, en los últimos 60 años se ha aplicado ampliamente a problemas industriales, financieros, de comercialización, de contabilidad y de agricultura, gracias al evidente auge de los ordenadores en las empresas y en los negocios. Aún cuando sus aplicaciones son diversas, todos los problemas de programación lineal tienen varias propiedades y suposiciones comunes.

En cuanto a las propiedades comunes a todos los problemas, mencionaremos cuatro:

- Pretenden optimizar (maximizar o minimizar) alguna cantidad, o lo que es lo mismo, la función objetivo.
- Habrá que tener en cuenta las restricciones que limitan el grado en el cual es posible modificar las variables que afectan a nuestra función objetivo.
- El problema debe presentar distintas alternativas posibles.
- En programación lineal, la función objetivo debe ser una función lineal, y las restricciones deben ser expresadas como ecuaciones o inecuaciones lineales.

Otro aspecto fundamental a comentar serán los supuestos básicos de la programación lineal. Desde el punto de vista técnico, hay cinco supuestos que debe cumplir todo problema de programación lineal:

- Los coeficientes, tanto de la función objetivo como de las restricciones, son conocidos con exactitud y además no varían durante el período de tiempo en que se realiza el estudio. Éste sería el supuesto de certidumbre.
- Tanto en la función objetivo como en las restricciones hay proporcionalidad.
- Tanto en la función objetivo como en las restricciones, la contribución de cada variable es independiente de los valores del resto de las variables, siendo el total de todas las actividades igual a la suma de cada actividad individual.
- Las soluciones del problema serán, en general, números reales no necesariamente enteros (supuesto de divisibilidad).
- Las variables de nuestro modelo tomarán siempre valores positivos (supuesto de no negatividad), dado que no tiene sentido hablar de cantidades negativas de objetos físicos.

Este tipo de problemas podría resolverse de forma gráfica, aunque sólo es aplicable a aquellos problemas con dos variables. Para aquellos casos en que el número de variables del problema sea superior a dos, no será posible encontrar la solución a partir de un gráfico bidimensional y, por tanto, tendremos que usar métodos de resolución más complejos.

La teoría matemática establece que, dado un problema de programación lineal que tenga solución, ésta vendrá dada por uno de los vértices o puntos extremos del polígono que configura la región factible. Por tanto, será suficiente hallar las coordenadas de dichos vértices (intersecciones de rectas) y determinar sustituyendo en la función objetivo cuál de ellos es la solución óptima.

Aun así, a la hora de resolver este tipo de problemas, nos podríamos encontrar con cualquiera de estas cuatro situaciones:

- No factibilidad: podría ocurrir que el problema propuesto no tuviese solución. Éste sería el caso en que las restricciones fuesen incompatibles, es decir, que ningún punto del plano puede cumplir simultáneamente todas las limitaciones a las que estamos sometidos, o sea, la región factible es un conjunto vacío.

- No acotación: en ocasiones, podemos encontrarnos con problemas que no tengan una solución finita. Gráficamente, tendríamos una región factible no acotada.

- Redundancia: algunas restricciones pueden no aportar nada nuevo a la “forma” de la región factible, ya que hay otras que resultan ser más restrictivas.

- Soluciones múltiples: un problema de programación lineal puede tener más de una solución óptima e incluso infinitas. En el gráfico de dos variables, si dos vértices consecutivos de la región factible son solución óptima del problema, entonces todos los puntos del segmento comprendido entre ellos también serán óptimos.

La estructura del trabajo es la que a continuación se detalla. En el primer capítulo se exponen los fundamentos teóricos de la programación lineal, las aplicaciones de la misma, un breve resumen acerca de la teoría de carteras y se describe el modelo matemático de programación lineal para seleccionar la cartera de inversión.

En el segundo capítulo se presenta el estudio empírico realizado y se analizan sus resultados. Se finaliza con las conclusiones más importantes extraídas del trabajo.

1. Conceptos teóricos

1.1 Fundamentos teóricos de la programación lineal

Basándonos en el libro de Barbolla et al. (2000) y en los conocimientos adquiridos en la asignatura Matemáticas II de primer curso, exponemos los conceptos teóricos en los que se fundamenta la resolución del problema de programación lineal que desarrollaremos en este trabajo.

1.1.1 Introducción

Definición.- i) Se denomina **combinación lineal** de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k \in IR^n$ a todo vector $x \in IR^n$ que pueda expresarse como

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in IR, \; i=1,\ldots,k.$$

ii) Se denomina **combinación lineal no negativa** de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k \in IR^n$ a todo vector $x \in IR^n$ que pueda expresarse como

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \geq 0, \; i=1,\ldots,k.$$

iii) Se denomina **combinación lineal convexa** de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k \in IR^n$ a todo vector $x \in IR^n$ que pueda expresarse como

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \geq 0, \; i=1,\ldots,k, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Nota.- El segmento lineal que une dos puntos x e y, L[x,y], es la combinación lineal convexa de esos dos puntos.

Definición.- Sea $A \subseteq IR^n$ un conjunto convexo no vacío. Se dice que $x \in A$ es un **vértice** o **punto extremo** de A si no es posible expresarlo como combinación lineal convexa de puntos de A distintos de x.

1.1.2 Planteamiento de los programas lineales

Definición.- Un **programa lineal** es un programa matemático en el que la función objetivo es lineal y las restricciones son ecuaciones y/o inecuaciones lineales.

El conjunto de vectores de IR^n con coordenadas no negativas, que verifican todas las restricciones forman el **conjunto de soluciones factibles**.

Un **programa lineal** que tiene alguna solución factible se llama **factible**, y se dice no factible en otro caso. Un **programa lineal** factible que no tiene solución óptima se dice que es **no acotado**.

Definición.- Se dice que un **programa lineal** de minimización está formulado **en forma canónica** si todas las restricciones son del tipo "≥" y todas las variables son no negativas:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\ s.\,a: & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & c \cdot x \\ s.\,a: & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Definición.- Se dice que un **programa lineal** de maximización está formulado **en forma canónica** si todas las restricciones son del tipo "≤" y todas las variables son no negativas:

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\ s.\,a: & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \max & c \cdot x \\ s.\,a: & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Definición.- Se dice que un **programa lineal** está formulado **en forma estándar** si todas las restricciones son de igualdad y todas las variables son no negativas:

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\ \text{s. a}: & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \\ & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & c\cdot x \\ \text{s. a}: & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{array} \qquad \text{PLE}$$

donde supondremos que n>m, y rg(A)=m.

Nota.- En lo sucesivo consideraremos el problema lineal en forma estándar (PLE).

Nota.- Un problema de minimización puede escribirse como un problema de maximización equivalente utilizando que $\min(c\cdot x) = -\max(-c\cdot x)$.

Nota.- Para pasar un problema de la forma estándar a la forma canónica (o viceversa), tendremos en cuenta que:

i) Una restricción de desigualdad de la forma "≤" se convierte en una de igualdad sumándole una variable de holgura no negativa:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

ii) Una restricción de desigualdad de la forma "≥" se convierte en una de igualdad restándole una variable de exceso no negativa:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

iii) Una variable x_i libre; esto es, no restringida en su signo, puede descomponerse como la diferencia de dos variables no negativas:

$$x_i = u_i - v_i, \ \ u_i \geq 0, \quad v_i \geq 0.$$

iv) Una restricción de igualdad puede escribirse como dos restricciones de desigualdad:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \text{y} \quad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Proposición.- Propiedades de los programas lineales

Dado un programa lineal se verifica que:

i) Es convexo ya sea de minimización o de maximización.
ii) La solución óptima, si existe, es global.
iii) Nunca existen óptimos locales que no sean globales.
iv) Puede tener o no solución; caso de existir solución, ésta se encuentra en un único punto o bien en infinitos puntos.

1.1.3 Soluciones factibles básicas

Definición. Una **base** de PLE es una submatriz $B \in M_m(IR)$ de orden m de la matriz A, tal que rg(B)=m.

Nota.- Sea $N \in M_{m \times (n-m)}(IR)$ la submatriz de orden $m \times (n-m)$ de A que resulta de considerar las columnas de A que no son de B. Dado un $x \in IR^n$, podemos escribir $x=(x_B,x_N)$, donde $x_B \in IR^m$ está formado por las componentes de x correspondientes a las columnas de B, que se denominan variables básicas, y $x_N \in IR^{n-m}$ está formado por las componentes de x correspondientes a las columnas de N, que se denominan variables no básicas.

Definición.- Una **solución básica** de PLE es un vector $x \in IR^n$ tal que para alguna base B de PLE tenemos que $x=(x_B,x_N)$, donde $x_B = B^{-1}b$ y $x_N=0$.

Definición.- Se dice que una **solución básica** es **degenerada** si alguna de las variables básicas es nula.

Definición.- Una **solución factible básica** (SFB) de PLE es una solución básica de PLE no negativa.

Teorema.- Un vector $x \in IR^n$ es un punto extremo del conjunto de soluciones factibles de PLE si y solo si es una SFB de PLE.

1.1.4 Teoremas fundamentales

Teorema.- Si un programa lineal tiene solución óptima, el valor óptimo se alcanza en un punto extremo del conjunto de soluciones factibles.

Teorema.- i) Si PLE es factible, existe una SFB.

ii) Si PLE tiene solución óptima, existe una SFB óptima.

Teorema. Si x e y son dos soluciones óptimas de un programa lineal, también lo es cualquier combinación lineal convexa de x e y.

1.1.5 El método del SIMPLEX

Consideremos el PL en forma estándar,

$$
\begin{array}{ll}
\max & c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\
\text{s. a}: & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\
 & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\
 & \qquad\qquad\vdots \\
 & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \\
 & x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,\ \ \ldots,\ \ x_n\geq 0
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & c\cdot x \\
\text{s. a}: & Ax=b \\
 & x\geq 0
\end{array}
$$

Haciendo z=c·x; esto es, z–c·x=0, escribimos la tabla del simplex como:

z	X	
1	$-c^t$	0
0	A	b

$\Leftrightarrow$

z	x_1	x_2	…	x_n	
1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0
0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

En cada iteración tenemos una SFB del problema asociada a la base B, de modo que, suponiendo por simplicidad que la matriz B está formada por las primeras m columnas de la matriz A (lo que sería posible reordenando éstas) tendríamos la siguiente tabla:

z	X	
1	$-c^t$	0
0	A	B

$\Leftrightarrow$

z	x_B^t	x_N^t		
1	$-c_B^t$	$-c_N^t$	0	z
0	B	N	b	x_B

Mediante el método de reducción por filas de Gauss se habrá reducido la matriz B a la matriz identidad. Estas operaciones se habrán realizado sobre todas las filas de la tabla; esto es, incluyendo la primera fila, de modo que tendríamos la siguiente tabla:

z	x_B^t	x_N^t		
1	0	$c_B^t B^{-1} N - c_N^t$	$c_B^t B^{-1} b$	z
0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$	x_B

Sean $r = c_B^t B^{-1} N - c_N^t$ el vector de costes reducidos, $Y = B^{-1}N$, $z_B = c_B^t B^{-1} b$ y $w = B^{-1} b = x_B$, de modo que la tabla anterior quedaría, en detalle, como:

Z	$x_{B,1}$	$x_{B,2}$	…	$x_{B,m}$	$x_{N,1}$	$x_{N,2}$	…	$x_{N,n-m}$		
1	0	0	…	0	r_1	r_2	…	r_{n-m}	z_B	Z
0	1	0	…	0	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	…	$Y_{1,m-n}$	w_1	$x_{B,1}$
0	0	1	…	0	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$	…	$Y_{2,m-n}$	w_2	$x_{B,2}$
⋮	⋮	⋮	□	⋮	⋮	⋮	□	⋮	⋮	⋮
0	0	0	…	1	$Y_{m,1}$	$Y_{m,2}$	…	$Y_{m,m-n}$	w_m	$x_{B,m}$

1.1.5.1 Algoritmo del SIMPLEX

Inicialización: Determina una SFB. Si no es posible, el programa lineal es no factible, y se termina el algoritmo. En otro caso, ir al Paso 1.

Paso 1: Test de optimalidad. Si los costes reducidos (los elementos de la primera fila) asociados a todas las variables no básicas son no negativos, $r \geq 0$, la SFB actual es óptima. En otro caso, ir al paso 2.

Paso 2: Entrada en la base. Entra en la base la variable no básica k-ésima con menor coste reducido asociado; $r_k = \min \{ r_j \ / \ r_j < 0 \}$. En caso de empate, se toma la primera variable.

Paso 3: Salida de la base. i) Si la columna k-ésima (correspondiente a la variable no básica que entra en la base), no tiene ningún elemento positivo (son negativos o nulos), entonces el programa lineal es no acotado y se termina el algoritmo.

ii) En otro caso, sale de la base la variable básica q-ésima tal que $\frac{w_q}{Y_{qk}} = \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \frac{w_i}{Y_{ik}} / Y_{ik} > 0 \right\}$. Esto es, se consideran los elementos positivos de la columna k-ésima, y se escoge como pivote el elemento Y_{qk} tal que el cociente w_q/Y_{qk} sea mínimo. En caso de empate, se escoge el primero.

Paso 4: Actualización de la tabla. Una vez elegido un pivote se aplica el método de reducción por filas de Gauss para hacer ese pivote 1 y los demás términos de la columna 0 (incluyendo la fila de la función objetivo). A continuación se actualiza la nueva variable básica en el lado derecho de la fila del pivote, y se vuelve al Paso 1.

Nota.- Si el algoritmo del simplex termina con una solución óptima, la columna de la derecha nos da el valor máximo de la función objetivo y los valores óptimos de las variables básicas, mientras que las variables no básicas son nulas.

1.1.5.2 Determinación de una SFB inicial

Dado el PL en forma canónica,

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\ \text{s.a:} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq b_m \\ & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \max & c\cdot x \\ \text{s.a:} & Ax\leq b \\ & x\geq 0 \end{array}$$

si el vector b es no negativo, b≥0, se puede conseguir una SFB inicial introduciendo variables de holgura $s=(s_1,\ldots,s_m)$, de modo que obtenemos el problema en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \max & c\cdot x \\ \text{s.a:} & Ax+Is=b \\ & x,s\geq 0 \end{array}$$

Una SFB de este programa lineal asociada a la matriz identidad es el vector (x,s)=(0,b). Haciendo z=c·x; esto es, z–c·x=0, tendríamos la siguiente tabla inicial del simplex:

z	x_1	x_2	…	x_n	s_1	s_2	…	s_m		
1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_m$	0	0	…	0	0	Z
0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1	s_1
0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2	s_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m	s_m

A) El método de la "M" grande

Dado el PL en forma estándar,

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\ \text{s. a}: & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \\ & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & c\cdot x \\ \text{s. a}: & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{array}$$

con b≥0, se puede conseguir una SFB inicial introduciendo variables artificiales $y=(y_1,\ldots,y_m)$, de modo que obtenemos el problema:

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1+\ldots+c_nx_n-M_1y_1-\ldots-M_my_m \\ \text{s. a}: & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+y_1=b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+y_2=b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+y_m=b_m \\ & x_1\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\ y_1\geq 0,\ \ldots,\ y_m\geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & c\cdot x-M\cdot y \\ \text{s. a}: & Ax+Iy=b \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

Una SFB de este programa lineal asociada a la matriz identidad es el vector (x,y)=(0,b). Haciendo $z_M=c\cdot x-M\cdot y$; esto es, $z_M-c\cdot x+M\cdot y=0$, tendríamos la siguiente tabla inicial del simplex:

z_M	x_1	x_2	…	x_n	y_1	y_2	…	y_m		
1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_m$	M_1	M_2	…	M_m	0	z_M
0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1	y_1
0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m	y_m

Para comenzar el algoritmo del simplex, tendríamos que reducir a cero los términos de la primera fila correspondientes a las variables básicas (las variables artificiales). Los valores de M_1, …, M_m se escogen “lo bastante grandes” como para que las variables artificiales salgan de la SFB y no aparezcan en la solución final. Si no es posible eliminar a todas las variables artificiales de la solución final, el problema original es no factible.

B) El método de las dos fases

El método de las dos fases se basa en resolver en la primera fase un problema lineal auxiliar que nos permita encontrar una SFB, o determinar que el PL es no factible, y en la segunda fase resolver el problema original. Dado el PL en forma estándar,

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\ \text{s.a}: & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ & \qquad\vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \\ & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \max & c\cdot x \\ \text{s.a}: & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{array}$$

con $b\geq 0$, introducimos las variables artificiales $y=(y_1,\ldots,y_m)$ y resolvemos el PL auxiliar consistente en minimizar la suma de las variables artificiales,

$$\begin{array}{ll} \max & -y_1-y_2-\ldots-y_m \\ \text{s.a:} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+y_1=b_1 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+y_2=b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+y_m=b_m \\ & x_1\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\ y_1\geq 0,\ \ldots,\ y_m\geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \max & -1^t\cdot y \\ \text{s.a:} & Ax+Iy=b \\ & x,y\geq 0 \end{array}$$

Si el PL original es factible, el problema auxiliar anterior tiene solución óptima, y vale 0. En otro caso, el problema original es no factible. Una SFB de este programa lineal asociada a la matriz identidad es el vector (x,y)=(0,b). Haciendo $z_A=-1^t\cdot y$; esto es, $z_A+1^t\cdot y=0$, tendríamos la siguiente tabla inicial del simplex:

Z	x_1	x_2	…	x_n	y_1	y_2	…	y_m			
1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_m$	0	0	…	0	0	z	f. objetivo Fase II
1	0	0	…	0	1	1	…	1	0	z_A	f. objetivo Fase I
0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1	y_1	
0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2	y_2	
⋮	⋮	⋮	□	⋮	⋮	⋮	□	⋮	⋮	⋮	
0	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m	y_m	

donde en la primera fila figuran los coeficientes de la función objetivo del problema original, que necesitaremos en la fase II (de optimalidad) y en la segunda fila figuran los coeficientes de la función objetivo en el problema artificial de la fase I (de factibilidad). Para comenzar el algoritmo del simplex, tendríamos que reducir a cero los términos de la segunda fila correspondientes a las variables básicas (las variables artificiales), y las operaciones realizadas las haríamos también en la primera fila (función objetivo del problema original). Una vez terminada la fase I, tendríamos una SFB del problema original (o habríamos visto que el PL es no factible), de modo que podríamos eliminar la segunda fila de la tabla (función objetivo del problema auxiliar) y proceder normalmente.

1.1.6 Dualidad

Definición.- Consideremos el programa lineal en forma canónica P, denominado primal:

$$\begin{array}{lll} \min & c\cdot x & \\ s.a: & Ax\geq b & (P) \\ & x\geq 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} \max & c\cdot x & \\ s.a: & Ax\leq b & (P') \\ & x\geq 0 & \end{array}$$

con $x\in IR^n$, $A\in M_{mxn}$, rg(A)= m<n

El **problema dual** del problema primal P es:

$$\begin{array}{lll} \max & b\cdot y & \\ s.a: & A^t y\leq c & (D) \\ & y\geq 0 & \end{array}$$

El **problema dual** del problema primal P´ es:

$$\begin{array}{lll} \min & b\cdot y & \\ s.a: & A^t y\geq c & (D') \\ & y\geq 0 & \end{array}$$

Teorema.- El dual del problema dual es el primal.

Teorema (dualidad fuerte).- Consideremos los problemas primal P y dual D. Entonces, exactamente una de las siguientes alternativas es cierta:

i) Tanto el problema primal P como el dual D tienen soluciones óptimas, x* e y*, respectivamente. Además, c·x*=b·y*.

ii) El problema primal P es no acotado y el problema dual D es infactible.

iii) El problema primal P es infactible y el problema dual D es no acotado.

iv) Ambos problemas son infactibles.

Propiedad.- si x* e y* son respectivamente las soluciones óptimas de P y D y z* es el valor óptimo de la función objetivo de ambos problemas, entonces se verifica que:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_j} = y_j^* \quad \forall\ j=1,2\ldots m \qquad\qquad \frac{\partial z^*}{\partial c_i} = x_i^* \quad \forall\ i=1,2,\ldots n$$

es decir, Pérez-Grasa et al. (2001) las variables duales en el óptimo, representan las derivadas parciales del valor óptimo de la función objetivo del programa primal respecto de los segundos miembros de las restricciones, siendo así indicadores de la sensibilidad de la solución óptima frente a variaciones de dichos segundos miembros.

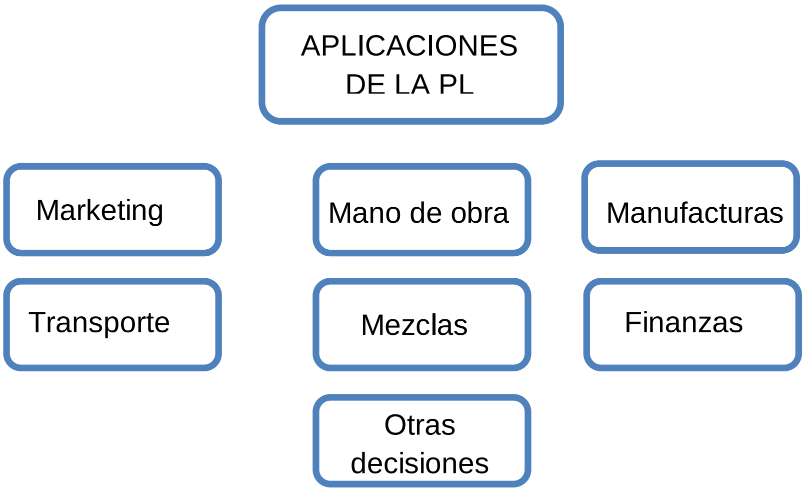
Estas variables duales se pueden interpretar como un sistema de precios de los recursos, llamados precios sombra, cuya disponibilidad está limitada por las restricciones. Naturalmente, estos precios no reflejan lo que cuestan tales recursos sino lo que valen; se trata, pues, de precios de oportunidad y no de precios de mercado. Recíprocamente las variables del problema primal en el óptimo tienen una interpretación respecto al problema dual similar a las variables duales en el óptimo respecto al problema primal.

1.2 Aplicaciones de la programación lineal

Una vez estudiados todos los conceptos básicos de la Programación Lineal, es preciso describir cómo es posible aplicar estos conceptos a diferentes situaciones prácticas.

Haciendo referencia a los libros de Render et al. (2012) y Eppen et al. (2000), y al artículo publicado por Faulin y Juan, destacamos la utilización de la programación lineal en áreas tan diversas como el marketing, manufacturas, mano de obra, mezclas, transporte, finanzas, etc.

Figura 1. *Aplicaciones de la programación lineal*



Fuente: Elaboración propia a partir de Render et al. (2012).

1.2.1 Aplicaciones al marketing

Los modelos de programación lineal se han utilizado en el campo de la publicidad como ayuda para la obtención de la combinación de medios de comunicación efectiva.

En algunas ocasiones partiremos de un presupuesto fijo o limitado donde el objetivo será distribuirlo entre las diversas opciones que se nos ofrecen, como pueden ser los comerciales de radio o televisión, anuncios en periódicos, correo directo, anuncios en revistas, etc., de modo que los productos tengan una gran difusión.

Puede ocurrir que las restricciones no sean solamente presupuestarias, sino que haya otras restricciones que vengan determinadas por los requerimientos de contratos, disponibilidad de medios o por las políticas de la propia empresa.

Otra de las aplicaciones de la programación lineal con respecto al marketing puede ser la de investigación de mercados y encuestas a consumidores.

1.2.2 Aplicaciones a las manufacturas

Aquí podemos destacar dos tipos de aplicaciones, la aplicación a la mezcla de productos y la programación de la producción.

En primer lugar, comenzamos comentando que la aplicación a la mezcla de productos se basa en la combinación óptima de productos a fabricar, donde las empresas deben cumplir una serie de restricciones.

Estas restricciones pueden ser financieras, de demanda de ventas, contratos de materiales o demandas laborales sindicales, donde el objetivo principal es generar la mayor utilidad posible.

En cuanto a la programación de la producción, destacar que establecer un plan de producción para un período de semanas o meses es una tarea complicada y a la vez cobra demasiada importancia en la mayoría de las plantas. En este caso, el encargado de dichas operaciones debe tener en cuenta diversos factores: capacidad de la mano de obra, costes de inventario y almacén, limitaciones de espacio, demanda del producto y relaciones laborales.

Esta tarea suele resultar complicada ya que la mayoría de las compañías producen más de un producto.

Básicamente, este problema tiene una gran semejanza al modelo de mezcla de productos, donde el objetivo puede ser el de maximizar los beneficios o minimizar el coste total de llevar a cabo dichas tareas.

La programación de la producción puede solucionarse fácilmente mediante la programación lineal, ya que es un problema que debe resolverse periódicamente. Cuando se establecen la función objetivo y las restricciones para una empresa, los datos pueden cambiarse cada mes para ofrecer una programación actualizada.

1.2.3 Aplicaciones a la programación de mano de obra

Los problemas de programación de mano de obra, o lo que es lo mismo, de planificación de horarios, intenta dar una respuesta efectiva a las necesidades de personal durante cierto período.

Esta aplicación de la programación lineal es útil cuando los gerentes disponen de cierta flexibilidad para asignar tareas a empleados polifuncionales.

El sector que más hace uso de la programación lineal a la hora de tomar este tipo de decisiones son las entidades bancarias.

1.2.4 Aplicaciones a la mezcla de ingredientes

En este modelo, cobran especial relevancia los problemas de la dieta y los problemas de mezclas.

El problema de la dieta fue una de las primeras aplicaciones de la programación lineal, la cual se desarrolló en los hospitales para determinar la dieta más económica para los pacientes a partir de unas especificaciones nutritivas mínimas.

En la actualidad, también se aplica en el ámbito agrícola para obtener la combinación de alimentos o ingredientes que satisfagan los requerimientos nutricionales establecidos a un coste mínimo.

En cuanto a los problemas de mezclas y proporciones de ingredientes, surgen cuando debe tomarse una decisión con respecto a la mezcla de dos o más recursos para producir uno o más productos. Los recursos contienen uno o más ingredientes que deben mezclarse, de manera que cada producto final contenga un porcentaje determindado de cada uno de los ingredientes.

1.2.5 Aplicaciones al transporte

El problema de transporte o de envíos pretende determinar la cantidad de bienes que se han de transportar desde varios orígenes o fuentes hacia varios destinos.

El objetivo en este tipo de problemas suele ser el de minimizar tanto los costes de transporte como las distancias de envío, donde las restricciones se refieren a la capacidad productiva de cada origen y los requerimientos de cada destino.

Este modelo es un caso específico de programación lineal, por lo que existen métodos y algoritmos que facilitan su resolución.

Dicho algoritmo es un procedimiento iterativo donde se encuentra y evalúa una solución a un problema de transporte, mediante un procedimiento especial para determinar si la solución es óptima. Si lo es, el proceso se detiene.

En el caso de que la solución no sea la óptima, se genera una nueva solución, donde esta nueva solución suele ser tan buena o mejor que la anterior. Ésta se evalúa y en caso de no ser óptima se vuelve a generar otra solución, y así continuamente hasta dar con la solución óptima.

1.2.6 Aplicaciones a las finanzas

Destacamos en este apartado el problema de selección de portafolios, es decir, la selección de una cartera de valores.

Este es uno de los problemas con los que se encuentran de forma habitual los directivos de bancos, fondos de inversiones y compañías de seguros a la hora de seleccionar una serie de inversiones concretas entre una amplia variedad de alternativas.

Por norma general, el objetivo suele ser el de maximizar el rendimiento esperado de estas inversiones dado un conjunto de restricciones, algunas legales y otras provenientes de la propia empresa.

Una vez que hemos mencionado algunas de las aplicaciones de la programación lineal y sus aspectos básicos, cabe destacar que nuestro trabajo consistirá en la aplicación a las finanzas.

Hemos escogido este tipo de problema ya que es uno de los que mejor se adapta a las competencias del Grado en Administración y Dirección de Empresas, así, aplicaremos los conocimientos adquiridos sobre la programación lineal en materias como Matemáticas II.

1.3 Teoría de carteras

Según Sogorb Mira, "La teoría de carteras es aquel conjunto de aportaciones teóricas que tratan de resolver el problema de elegir las mejores combinaciones de activos financieros dentro del universo inversor."

Esta teoría se basa principalmente en las aportaciones de Harry M. Markowitz, la cual nació en 1952 con la publicación en la revista Journal of Finance de un artículo basado en su tesis doctoral, el cual llevaba el título de "Portfolio Selection".

En este artículo planteaba la conducta racional que tiene el decisor a la hora de la selección de cartera de títulos financieros.

Esta teoría se completó en la década de los sesenta con las aportaciones de Willian F. Sharpe, el cual simplificaba el modelo de Markowitz basándose en una relación lineal entre la rentabilidad de los títulos y de la cartera de mercado.

Posteriormente, tomará gran relevancia la aparición de los modelos CAPM y APT, los cuales permiten profundizar en la valoración de los activos financieros.

En este trabajo nos centraremos en analizar los aspectos fundamentales del modelo de Markowitz y del CAPM, por ser estos modelos los que cobran una importancia relevante a la hora de plantear y definir el modelo de programación lineal que se propone para resolver el problema de selección de una cartera de inversión.

1.3.1 Modelo de Markowitz

Para sus investigaciones acerca de la selección de carteras óptimas, Markowitz se basaba en el comportamiento racional del inversor, donde éste sólo buscaba obtener la máxima rentabilidad sin tener en cuenta ningún otro factor. (Brun y Moreno, 2008; p.33).

A través de esto, llegó a la conclusión de que la variable rentabilidad no puede ser estudiada de forma independiente a la variable riesgo.

Por tanto, se establece que el rendimiento esperado de una cartera se mide a través de las esperanzas matemáticas de los valores que componen dicha cartera mientras que el riesgo se basa en tres componentes fundamentales: la proporción de cada valor en la cartera, la desviación típica de cada valor y el coeficiente de correlación entre cada par de valores.

Dada esta relación entre el rendimiento y el riesgo, un inversor preferirá aquella cartera que le reporte la máxima rentabilidad para un riesgo determinado o de forma equivalente, la que le proporcione el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad. A estas carteras se les llamará carteras eficientes.

Debido a que Markowitz utiliza este binomio de rentabilidad-riesgo, y el riesgo está medido por la varianza, se suele conocer a su modelo como el enfoque “media-varianza”.

El conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo el siguiente programa cuadrático paramétrico:

$$\min \quad \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, x_j\, \rho_{ij}$$

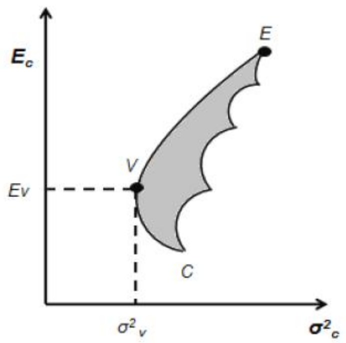
$$\text{s.a} \quad E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, E(R_i) = V^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

donde x_i es la incógnita del problema, esto es, la proporción del presupuesto destinado al activo financiero i, $\sigma^2(R_p)$ es la varianza de la cartera *p*, p_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j. $E(R_p)$ es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera *p*, de tal forma que al variar el parámetro V* obtendremos en cada caso el conjunto de proporciones x_i que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente. El conjunto de pares $[E(R_p), \sigma^2(R_p)]$ o combinación rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes es denominado "frontera eficiente". Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima.

Figura 2. *Frontera de carteras eficientes según el modelo de Markowitz*

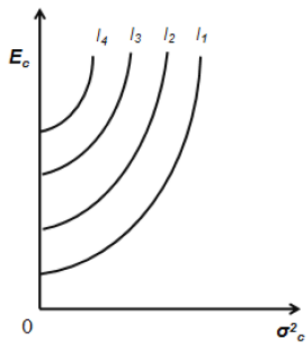


Una vez obtenido el conjunto de carteras eficientes, el inversor elegirá aquella que le reporte mayor satisfacción, la cual será su cartera óptima.

Para ello, tenemos las curvas de indiferencia entre rendimiento y riesgo, donde estas curvas serán distintas para cada inversor, ya que entra en juego el grado de aversión al riesgo.

Por tanto, habrá inversores que busquen una mayor rentabilidad soportando un nivel de riesgo más elevado, mientras que otros se conformarán con una rentabilidad menor a cambio de un menor nivel de riesgo

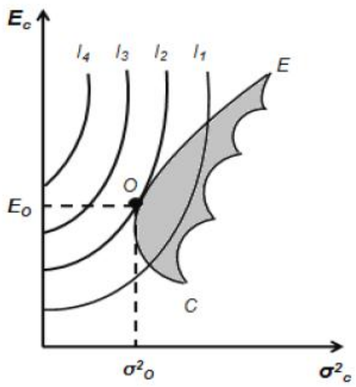
Figura 3. *Curvas de indiferencia rentabilidad-riesgo*



Todos los puntos que se representan en la misma curva de indiferencia le proporcionan al inversor el mismo nivel de satisfacción.

Integrando la frontera de cartera eficiente y las curvas de indiferencia dará como resultado la cartera óptima, la cual sería:

Figura 4: *Cartera óptima*



La cartera óptima se encontraría en el punto O, o lo que es lo mismo, el punto de tangencia de la curva de carteras eficientes con la curva de indiferencia I_2.

Dicha cartera se sitúa en este punto porque cualquier otro punto de la curva de carteras eficientes, correspondería con una curva de indiferencia de menor satisfacción.

1.3.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

El modelo CAPM fue desarrollado por William Sharpe, John Lintner y Jan Mosin en 1964 y parte del modelo de mercado de Sharpe y del modelo de Markowitz.

Este modelo constituye la base de la teoría de mercados de capitales, el cual, se considera una de las herramientas más utilizadas para la valoración de activos en el área financiera. De ahí que su nombre sea Modelo de Valoración de Activos de Capital.

"En este modelo se determina la relación existente entre el precio de un activo y el riesgo asumido por dicho activo. Gracias a este modelo se puede determinar qué rentabilidad se espera de un activo en función del riesgo al que se enfrentra su poseedor" (Brun y Moreno, 2008; p.81).

El objetivo del modelo de CAPM es, suponiendo condiciones de equilibrio, determinar la rentabilidad que debe ofrecer un activo o una cartera en función de su nivel de riesgo.

Por tanto, para este modelo el cálculo de la rentabilidad esperada vendrá determinado por la siguiente expresión:

$$E(R_i) = R_f + \left[E(R_M) - R_f\right]\beta_i$$

donde:

$E(R_i)$ es la rentabilidad esperada del activo i

R_f es la rentabilidad del activo libre de riesgo

β_i es el coficiente beta del activo i, que mide el riesgo sistémico

$E(R_M)$ es la rentabilidad esperada del índice de mercado

1.4 Modelo matemático para seleccionar la cartera de inversión por medio de la programación lineal

El problema que hemos elegido, problema de selección de cartera de inversión, se puede plantear como un programa lineal de maximización de la rentabilidad, o como un programa lineal de minimización del riesgo.

En este trabajo nos basamos en un modelo de un artículo publicado por Crispín, J. (2009), en el cual, para la construcción del mismo se tienen en cuenta aspectos fundamentales de los modelos de Markowitz y de CAPM.

Del modelo de Markowitz se considera el planteamiento del problema de optimización con un parámetro en una restricción. Este modelo lineal lo hace de forma similar, donde el parámetro modifica la magnitud de la restricción o las restricciones para determinar la solución.

Por otro lado, del modelo de CAPM se sigue el procedimiento para la selección de la cartera óptima, el cual consiste en la diferencia mínima entre el riesgo y el rendimiento, ya que el riesgo generalmente es mayor al rendimiento. Es decir, se buscará aquella cartera que proporcione la mayor rentabilidad al menor riesgo.

En el modelo de este trabajo, lo que se hace es eliminar la dependencia de la covarianza, la cual indica estadísticamente la relación en el tiempo entre el rendimiento de dos acciones. En los modelos de Markowitz y CAPM, si la covarianza entre el rendimiento de dos acciones es baja, entonces es posible que esas dos acciones formen parte de la solución, lo que indica que el comportamiento del rendimiento entre ambas acciones no están relacionadas.

Tanto en el modelo de Markowitz como en el CAPM, solo consideran dos variables a tener en cuenta, el rendimiento y el riesgo. Por el contrario, en el modelo que se va a plantear a continuación, según Crispín, J. (2009), es fundamental incluir otras variables o indicadores que tengan influencia en el pronóstico de la selección de una cartera de inversión.

En este modelo se ha decidido incluir solo una variable más a las consideradas por los modelos previos, esta variable será el precio de venta de la acción. La decisión es a causa de que a partir de éste se derivan las dos variables recomendadas por Markowtiz y por el método CAPM.

Una vez definidas las variables, otro problema a tener en cuenta es el de definir la magnitud del parámetro de las restricciones y sus cambios. Para esto, el autor del modelo a seguir se basa en las siguientes suposiciones:

Primera suposición: la cantidad de dinero requerida mínima es el costo de la acción más barata, a partir de esta cantidad, se llega a la cantidad de dinero de la acción más cara.

Segunda suposición: el riesgo mínimo de la cartera de inversión es el riesgo de la acción que tenga el menor de todas las acciones y éste variará hasta el riesgo más alto de la acción correspondiente.

Tercera suposición: de forma similar a la suposición del riesgo, el rendimiento mínimo de la cartera de inversión es el rendimiento de la acción que tenga el menor rendimiento de todas las acciones y éste variará hasta el rendimiento más alto de la acción correspondiente.

Por lo tanto, con las suposiciones anteriores se formulan los siguientes modelos:

A) Modelo de maximización del rendimiento

$$\max \quad z_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i (Pv_i - Pv_{min}) \leq \lambda_1 (Pv_{max} - Pv_{min})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (\sigma_i - \sigma_{min}) \leq \lambda_2 (\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

$$x_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

donde

x_i es la proporción de la acción i que debe comprarse y es una variable real ($0 \leq x_i \leq 1$), $x_i=0$ cuando la acción no forma parte de la cartera de inversión.

R_i es el rendimiento promedio de la acción i.

σ_i es el riesgo o desviación típica de la acción i.

λ_1 y λ_2, son parámetros que utilizamos para recorrer todo el espacio de soluciones y su valor es $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$.

Pv_i, es el precio de venta de la acción i.

B) Minimización del riesgo

$$\min \quad z_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i (Pv_i - Pv_{min}) \geq \lambda_1 (Pv_{max} - Pv_{min})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (R_i - R_{min}) \geq \lambda_2 (R_{max} - R_{min})$$

$$x_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

donde las variables son las mismas que en el problema de maximización de la rentabilidad.

2. Estudio empírico

2.1 Objetivos

En la parte empírica de este trabajo, nos basaremos en la resolución de un problema de programación lineal, más concretamente, daremos solución a un problema de selección de una cartera de inversión.

Para ello, seguiremos un esquema fundamental que nos plantea F. Hillier (2010), donde comenzaremos por definir el problema y recoger los datos correspondientes para poder dar solución al problema planteado.

A continuación, formularemos el modelo matemático a seguir, introduciendo los datos pertinentes en un programa informático para derivar las soluciones a dicho problema. Una vez hecho esto, haremos un análisis de sensibilidad, y de acuerdo con los resultados efectuaremos una mejora de ser necesario.

2.2 Obtención de la muestra

Para la realización de este trabajo, es necesario la obtención de datos acerca de los valores que pueden formar una cartera de inversión. Por tanto, para la recolección de los mismos, hemos obtenido la información de la Bolsa de Madrid, a través de los portales de Invertia y Expansión.

En la información extraída de dichas páginas obtenemos las cotizaciones diarias de las empresas seleccionadas que cotizan en el mercado continuo español y los dividendos repartidos por cada sociedad.

Cabe destacar que todos estos datos son referidos a un período de diez años, comenzando nuestro estudio el 1 de abril de 2005 hasta el 30 de abril de 2015. Aún así, estos datos han tenido que ser tratados para poder amoldarlos al modelo que hemos escogido.

En concreto, de las cotizaciones se ha extraído el precio inicial y el precio final, o lo que es lo mismo, la cotización de apertura el primer día de cada mes y la cotización de cierre del último día de cada mes.

En lo referente a los dividendos, también han sido tratados, ya que en algunas de las empresas se reparten de forma trimestral y en otras de forma anual. Por tanto, hemos pasado estos dividendos a mensuales, pues el modelo que hemos elegido trabaja en base mensual.

Otro aspecto a tratar, será la selección de los valores, los cuales son los de siete empresas que cotizan en el mercado continuo de la Bolsa española.

Las bolsas españolas se reparten en sectores, concretamente en bienes de consumo; tecnología y telecomunicaciones; materiales básicos, industria y construcción; petróleo y energía; servicios de consumo y por último, servicios financieros e inmobiliarios.

Como hemos querido generar un escenario lo más realista posible, hemos optado por escoger al menos una empresa de cada uno de los sectores mencionados anteriormente. Por ello, nuestra cartera de valores estará formada por las siguientes empresas:

- Sector de bienes de consumo: Inditex (téxtil, vestido y calzado), Viscofan (alimentación).

- Sector de tecnología y telecomunicaciones: Telefónica (telecomunicaciones y otros).

- Sector de materiales básicos, industria y construcción: Acciona (construcción).

- Sector de petróleo y energía: Iberdrola (electricidad y gas).
- Sector de servicios de consumo: Mediaset (medios de comunicación y publicidad).
- Sector de servicios financieros e inmobiliarios: Santander (bancos y cajas de ahorro).

2.3 Metodología

En este apartado se explica la metodología utilizada para el desarrollo del estudio empírico, donde se dará el procesamiento de los datos para la formulación del problema.

2.3.1 Procesamiento de los datos

Como hemos comentado, este apartado se basará en el tratamiento de los datos para poder resolver el problema a través del modelo adoptado de programación lineal, donde cobran especial relevancia los parámetros de la rentabilidad y el riesgo.

Por tanto, lo que nos interesa es calcular los valores de dichos parámetros, ya que para un inversor, a la hora de tomar la decisión de qué valores bursátiles elegir, le interesará aquel o aquellos que le reporten el mayor beneficio o rentabilidad a un menor riesgo.

Para hallar la rentabilidad de cada uno de los siete valores escogidos, hemos tenido en cuenta los dividendos y las cotizaciones de cada uno de ellos; ya que la rentabilidad de un valor durante un período determinado viene dada por los dividendos generados por ese valor más el incremento del precio de dicho valor, todo ello dividido entre el precio al inicio del período.

Por lo que la rentabilidad la calcularemos acorde a la siguiente fórmula:

$$r_{it} = \frac{D_{it} + (P_{it+1} - P_{it})}{P_{it}}$$

donde:

r_{it} expresa, en nuestro caso, la rentabilidad mensual de cada uno de los valores durante los diez años.

D_{it} es el dividendo generado por el valor i en el periodo t, que como ya hemos comentado anteriormente se tratará de un dividendo mensual.

P_{it+1} es la cotización de cierre del último día de cada mes, es decir, el precio de mercado del valor i al final del periodo t.

P_{it} es la cotización inicial del primer día de cada mes, o lo que es lo mismo, el precio de mercado del valor i al principio del periodo t.

A continuación, se considera la rentabilidad del valor i, R_i como el rendimiento medio del valor i, por lo que se calcula mediante la media aritmética de las rentabilidades de dicho valor en cada periodo.

$$R_i = \frac{\sum_{t=1}^{m} r_{it}}{m}$$

siendo m el número de periodos considerados (en nuestro caso el valor de m sería 121).

Por último, el riesgo del valor i, en nuestro problema viene definido por la desviación típica (σ_i), ya que ésta nos proporciona una medida de cómo los rendimientos (r_{it}) se dispersan respecto al rendimiento medio (R_i), es decir, nos proporciona una medida del riesgo de la inversión en cada valor.

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{m} (r_{it} - R_i)^2}{m}}$$

A partir de los datos de las matrices de rentabilidades que aparecen en el Anexo, obtenemos que los parámetros de rentabilidad y riesgo para nuestros siete valores serán los siguientes:

Tabla 1. *Rentabilidades y riesgos de cada valor de 2005 a 2015*

EMPRESA	RENTABILIDAD	RIESGO
IBERDROLA	0,01130	0,07752
INDITEX	0,02565	0,06172
MEDIASET	0,00440	0,10399
SANTANDER	0,00972	0,08940
VISCOFAN	0,01259	0,06157
ACCIONA	0,00652	0,09916
TELEFONICA	0,00681	0,06297

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la Bolsa de Madrid.

2.4 Implementación y resolución del modelo

Nuestros modelos de programación lineal de maximización del rendimiento y minimización del riesgo serán resueltos utilizando el método del SIMPLEX, explicado en el apartado de conceptos teóricos, debido a que al ser modelos con siete variables no se pueden resolver gráficamente. El algoritmo del SIMPLEX permite, mediante una serie de pasos reiterativos (tablas) abordar problemas de programación lineal por muy complicados que éstos sean. En la práctica, sin embargo, resulta necesario utilizar algún programa de ordenador (como el LINDO o la macro Solver de Excel) el cual, agilice los numerosos y repetitivos cálculos que exige dicho algoritmo.

Nosotros hemos decidido utilizar el macro Solver de Excel porque es un programa contenido en el paquete informático Microsoft Office 2010, de amplia utilización en universidades y empresas. Además es capaz de resolver en cuestión de segundos problemas de hasta 200 variables y 500 restricciones, ofreciendo las ventajas de una hoja de cálculo en cuanto a presentación.

Para empezar a implementar el modelo tenemos que introducir los datos de entrada que vienen recogidos en la siguiente tabla.

Tabla 2. *Datos de entrada del modelo de programación lineal*

VARIABLE	EMPRESA	RENTABILIDAD	RIESGO	PRECIO
X_1	IBERDROLA	0,01130	0,07752	5,89
X_2	INDITEX	0,02565	0,06172	28,03
X_3	MEDIASET	0,00440	0,10399	11,77
X_4	SANTANDER	0,00972	0,08940	6,6
X_5	VISCOFAN	0,01259	0,06157	56,05
X_6	ACCIONA	0,00652	0,09916	70,11
X_7	TELEFONICA	0,00681	0,06297	13,47

Fuente: Elaboración propia.

2.4.1 Modelo de maximización del rendimiento

Una vez que ya tenemos los datos necesarios para el modelo de maximización del rendimiento, tendremos que definir la función objetivo y las restricciones de dicho modelo. En este caso, la función objetivo será la función de rentabilidad que se pretende maximizar, dando lugar a la cartera óptima.

Esta función objetivo para nuestra hoja de cálculo se expresa mediante la fórmula (SUMAPRODUCTO) como se observa en la siguiente figura:

Figura 5. *Función objetivo en el modelo para Excel*

Fuente | Alineación | Número | Estilos

fx =SUMAPRODUCTO(D6:D12;F6:F12)

VARIABLE	COMPOSICIÓN DE LA CARTERA	EMPRESA	RENTABILIDAD	RIESGO	PRECIO
X1	0	IBERDROLA	0,011297	0,077518	5,89
X2	0,1	INDITEX	0,025648	0,061723	28,03
X3	0	MEDIASET	0,004398	0,103989	11,77
X4	0,1	SANTANDER	0,009719	0,089405	6,6
X5	0,6	VISCOFAN	0,012592	0,061575	56,05
X6	0	ACCIONA	0,006525	0,099159	70,11
X7	0,2	TELEFONICA	0,006806	0,062968	13,47

MAXIMIZACIÓN DEL RENDIMIENTO
0,01245318

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a las restricciones que se definen para este modelo serán las siguientes:

El sumatorio de la proporción de cada valor por la diferencia entre su precio de venta y el precio de venta mínimo tiene que ser menor o igual que λ_1 por la diferencia entre el precio máximo y el precio mínimo.

El sumatorio de la proporción de cada valor por la diferencia entre su riesgo y el riego mínimo tiene que ser menor o igual que λ_2 por la diferencia entre el riesgo máximo y el riesgo mínimo.

La proporción del presupuesto asignada a cada valor tiene que ser menor o igual que 1, ya que esta restricción está en tanto por uno.

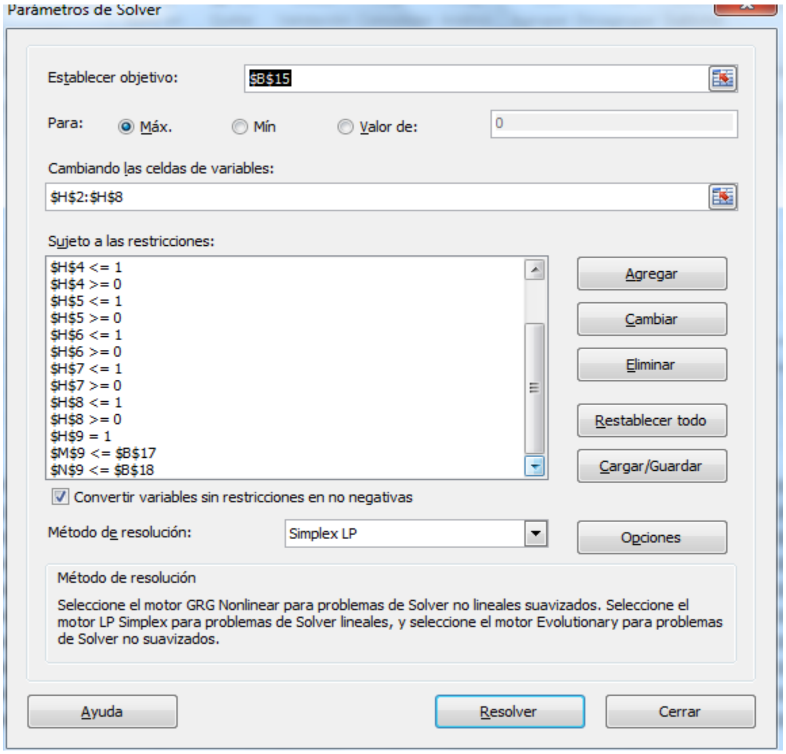
El presupuesto es igual a 1, de esta manera la cantidad asignada a cada valor en la resolución del modelo estará en tanto por uno, obteniendo la proporción exacta que se tiene que invertir en cada valor.

La proporción del presupuesto asignada a cada valor tiene que ser mayor o igual que cero, ya que no se puede incumplir el supuesto de no negatividad.

Como ya hemos mencionado, en este modelo como en el de minimización de riesgo se utiliza tanto λ_1 como λ_2 para recorrer todo el espacio de soluciones donde utilizaremos incrementos de 0,1 hasta llegar a la unidad.

Cabe destacar que al comienzo del planteamiento del problema partimos de unos datos iniciales que cumplen todas las restricciones y que Solver nos indicará si se trata de la solución óptima. En caso de no ser la solución óptima, esta herramienta nos asignará otra composición de cartera distinta a la inicial, usando el algoritmo del SIMPLEX, que nos reportará una mayor rentabilidad, que será la rentabilidad máxima.

Figura 6. *Modelo de maximización del rendimiento en "Solver"*



Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, los resultados obtenidos serán los siguientes:

Tabla 3. *Rendimiento máximo para diferentes λ_1 y λ_2*

λ_1	λ_2									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0,1	0,00814	0,01250	0,01546	0,01546	0,01546	0,01546	0,01546	0,01546	0,01546	0,01546
0,2	0,01701	0,01962	0,01962	0,01962	0,01962	0,01962	0,01962	0,01962	0,01962	0,01962
0,3	0,02379	0,02379	0,02379	0,02379	0,02379	0,02379	0,02379	0,02379	0,02379	0,02379
0,4	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565
0,5	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565
0,6	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565
0,7	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565
0,8	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565
0,9	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565
1	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565	0,02565

Fuente: Elaboración propia.

2.4.2 Modelo de minimización del riesgo

Al igual que en el modelo anterior, es necesario identificar cual será la función objetivo y cuales serán las restricciones.

En este caso, la función objetivo es la función de riesgo que se pretende minimizar, que al igual que la función objetivo de maximización del rendimiento, se calcula mediante la función (SUMAPRODUCTO), donde la proporción del presupuesto destinada a cada valor multiplica a su riesgo.

Por otro lado tenemos las restricciones, que serán las siguientes:

El sumatorio de las proporciones del presupuesto destinada a cada valor multiplicado por la diferencia entre su precio de venta y el precio de venta mínimo tiene que ser mayor o igual que λ_1 por la diferencia entre el precio de venta máximo y el precio de venta mínimo.

El sumatorio de las proporciones del presupuesto destinada a cada valor multiplicado por la diferencia entre su rendimiento y el rendimiento mínimo tiene que ser mayor o igual a λ_2 por la diferencia entre el rendimiento máximo y el rendimiento mínimo.

La proporción del presupuesto asignada a cada valor tiene que ser menor o igual que 1, ya que esta restricción está en tanto por uno.

El presupuesto es igual a 1, de esta manera la cantidad asignada a cada valor en la resolución del modelo estará en tanto por uno, obteniendo la proporción exacta que se tiene que invertir en cada valor.

La proporción del presupuesto asignada a cada valor tiene que ser mayor o igual que cero, ya que no se puede incumplir el supuesto de no negatividad.

Una vez más, introducimos la función objetivo y las restricciones en “Solver” y obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 4. *Riesgo mínimo para diferentes λ_1 y λ_2*

λ_1	λ_2									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0,1	0,06157	0,06157	0,06157	0,06158	0,06160	0,06163	0,06165	0,06167	0,06170	0,06172
0,2	0,06157	0,06157	0,06157	0,06158	0,06160	0,06163	0,06165	0,06167	0,06170	0,06172
0,3	0,06157	0,06157	0,06157	0,06158	0,06160	0,06163	0,06165	0,06167	0,06167	0,06172
0,4	0,06170	0,06170	0,06170	0,06170	0,06170	0,06170	0,06170	0,06170	0,06170	0,06494
0,5	0,06167	0,06167	0,06167	0,06167	0,06167	0,06167	0,06167	0,06244	0,06661	0,07077
0,6	0,06164	0,06164	0,06164	0,06164	0,06164	0,06164	0,06411	0,06827	0,07244	0,07660
0,7	0,06160	0,06160	0,06160	0,06160	0,06161	0,06577	0,06994	0,06994	0,07826	0,08243
0,8	0,06345	0,06345	0,06345	0,06381	0,06744	0,07160	0,07577	0,07993	0,08409	0,08826
0,9	0,07337	0,07337	0,07337	0,07344	0,07629	0,07914	0,08200	0,08576	0,08992	0,09408
1	0,08328	0,08328	0,08328	0,08328	0,08592	0,08877	0,09163	0,09448	0,09733	0,10018

Fuente: Elaboración propia.

2.4.3 Resolución del modelo

Una vez que hemos hallado el rendimiento máximo y el riesgo mínimo para los diferentes λ_1 y λ_2, de las tablas 3 y 4 obtenemos la menor diferencia entre el riesgo y el rendimiento, de forma similar a como se hace en la selección de la cartera de inversión con el modelo CAPM, ya que el riesgo es mayor que el rendimiento, lo que implica que el mayor rendimiento con el menor riesgo se encontrará cuando la diferencia entre ambos es la menor. Cabe destacar que en cada uno de los problemas, maximización del rendimiento y minimización del riesgo, se determinan los valores de λ_1 y λ_2, los cuales son diferentes para cada problema y corresponden a distintos porcentajes de cada uno de los valores.

Por tanto, los resultados de la diferencia entre riesgo y rendimiento serán los siguientes:

Tabla 5. *Diferencias entre el riesgo y el rendimiento*

λ_1	λ_2									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0,1	0,05344	0,04908	0,04612	0,04612	0,04614	0,04617	0,04619	0,04622	0,04624	0,04626
0,2	0,04456	0,04195	0,04195	0,04196	0,04198	0,04200	0,04203	0,04205	0,04208	0,04210
0,3	0,03779	0,03779	0,03779	0,03779	0,03782	0,03784	0,03787	0,03789	0,03789	0,03794
0,4	0,03606	0,03606	0,03606	0,03606	0,03606	0,03606	0,03606	0,03606	0,03606	0,03929
0,5	0,03602	0,03602	0,03602	0,03602	0,03602	0,03602	0,03602	0,03680	0,04096	0,04512
0,6	0,03599	0,03599	0,03599	0,03599	0,03599	0,03599	0,03846	0,04262	0,04679	0,05095
0,7	0,03595	0,03595	0,03595	0,03595	0,03596	0,04013	0,04429	0,04429	0,05262	0,05678
0,8	0,03780	0,03780	0,03780	0,03816	0,04179	0,04595	0,05012	0,05428	0,05844	0,06261
0,9	0,04772	0,04772	0,04772	0,04779	0,05064	0,05349	0,05635	0,06011	0,06427	0,06843
1	0,05764	0,05764	0,05764	0,05764	0,06027	0,06313	0,06598	0,06883	0,07168	0,07453

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos apreciar, la diferencia mínima entre riesgo y rendimiento sería para el valor de λ_1 igual a 0,7 y para los valores de λ_2 0,1; 0,2; 0,3 y 0,4, ya que proporcionan el mismo resultado.

Por tanto, para estos valores de λ_1 y λ_2, “Solver” nos da la siguiente solución óptima para los dos modelos (maximización del rendimiento y minimización del riesgo):

Tabla 6. *Comparación de los resultados de los modelos matemáticos*

MODELO		**INDITEX**	**VISCOFAN**	**SUMA**	**DIFERENCIA**
MAXIMIZACIÓN DEL RENDIMIENTO	Contribución	1		1	
	Rentabilidad	0,02565		0,02565	0,03607
	Riesgo	0,06172		0,06172	
MINIMIZACIÓN DEL RIESGO	Contribución	0,18580	0,81420	1	
	Rendimiento	0,00477	0,01025	0,01502	0,04658
	Riesgo	0,01147	0,05013	0,06160	

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la tabla anterior nos muestra que la mejor cartera de inversión viene dada por el modelo de maximización del rendimiento si nos basamos en la menor de las diferencias (0,03607), la cual es inferior a la diferencia dada por el modelo de minimización del riesgo (0,04658).

Como podemos apreciar, en el modelo de maximización de rentabilidad la solución óptima consiste en invertir todo a una misma empresa, en este caso a Inditex, obteniendo una rentabilidad del 2,56% (100% del presupuesto por su rentabilidad) frente a un riesgo del 6,17% (100% del presupuesto por su riesgo).

2.4.4 Cartera diversificada

Basándonos en un artículo de Hernández Jiménez (2012), “La diversificación está basada en la prudencia. Diversificar consiste en aceptar una rentabilidad más baja a cambio de tener un riesgo también más bajo”.

A la hora de diversificar, hay que tener en cuenta tres factores principales (el número, la ponderación y el tipo de valores que compondrán la cartera) y dos secundarios (subsectores de la empresa y zona geográfica).

En este trabajo se ha querido cambiar a los modelos anteriores de maximización del rendimiento y minimización del riesgo una restricción para obtener una cartera más diversificada.

Por tanto, la resolución de los modelos se hará de la misma manera pero usando la condición de que la proporción del presupuesto asignada a cada valor tiene que ser menor o igual al 45% del mismo.

Una vez hecho esto, para el modelo de maximización del rendimiento nos quedaría lo siguiente:

Tabla 7. *Rendimiento máximo para diferentes λ_1 y λ_2 en una cartera diversificada*

λ_1	λ_2									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0,1	0,00910	0,01208	0,01401	0,01491	0,01491	0,01491	0,01491	0,01491	0,01491	0,01491
0,2	0,01641	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776
0,3	0,01736	0,01800	0,01800	0,01800	0,01800	0,01800	0,01800	0,01800	0,01800	0,01800
0,4	0,01816	0,01816	0,01816	0,01816	0,01816	0,01816	0,01816	0,01816	0,01816	0,01816
0,5	0,01833	0,01833	0,01833	0,01833	0,01833	0,01833	0,01833	0,01833	0,01833	0,01833
0,6	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834
0,7	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834
0,8	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834
0,9	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834
1	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834	0,01834

Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, los resultados pertenecientes al modelo de minimización del riesgo serían:

Tabla 8. *Riesgo mínimo para diferentes* λ_1 *y* λ_2 *en una cartera diversificada*

λ_1	λ_2									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0,1	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06324	0,06324	0,06324	0,06324
0,2	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06324	0,06324	0,06324	0,06324
0,3	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06324	0,06324	0,06324	0,06324
0,4	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06324	0,06324	0,06324	0,06324
0,5	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06178	0,06324	0,06324	0,06324	0,06324
0,6	0,06513	0,06513	0,06513	0,06513	0,06513	0,06513	0,06526	0,06526	0,06526	0,06526
0,7	0,07074	0,07074	0,07074	0,07074	0,07074	0,07855	0,07855	0,07855	0,07855	0,07855
0,8	0,07645	0,07645	0,07645	0,07851	0,07851	0,07851	0,07851	0,07851	0,07851	0,07851
0,9	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850
1	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850	0,07850

Fuente: Elaboración propia

Siguiendo los pasos del modelo CAPM, procedemos a hacer la diferencia entre riesgo y rendimiento para obtener la solución que minimice dicha diferencia. Por lo que nos quedarían los siguientes resultados:

Tabla 9. *Diferencias entre el riesgo y el rendimiento en una cartera diversificada*

λ_1	λ_2									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0,1	0,05268	0,04970	0,04777	0,04687	0,04687	0,04687	0,04832	0,04832	0,04832	0,04832
0,2	0,04537	0,04402	0,04402	0,04402	0,04402	0,04402	0,04548	0,04548	0,04548	0,04548
0,3	0,04442	0,04379	0,04379	0,04379	0,04379	0,04379	0,04524	0,04524	0,04524	0,04524
0,4	0,04362	0,04362	0,04362	0,04362	0,04362	0,04362	0,04507	0,04507	0,04507	0,04507
0,5	0,04345	0,04345	0,04345	0,04345	0,04345	0,04345	0,04491	0,04491	0,04491	0,04491
0,6	0,04679	0,04679	0,04679	0,04679	0,04679	0,04679	0,04692	0,04692	0,04692	0,04692
0,7	0,05240	0,05240	0,05240	0,05240	0,05240	0,06021	0,06021	0,06021	0,06021	0,06021
0,8	0,05811	0,05811	0,05811	0,06018	0,06018	0,06018	0,06018	0,06018	0,06018	0,06018
0,9	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016
1	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016	0,06016

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos comprobar, la solución óptima sería para el valor de λ_1 igual a 0,5 y para los valores de λ_2 comprendidos entre 0,1 y 0,6; donde la solución será la misma.

Aplicando las proporciones que nos ofrece "Solver" para estos datos, nos quedarían los siguientes resultados tanto para el modelo de maximización del rendimiento como para el de minimización del riesgo:

Tabla 10. *Comparación de los resultados de los modelos matemáticos diversificados*

MODELO		INDITEX	VISCOFAN	IBERDROLA	TELEFONICA	SUMA	DIFERENCIAS
MAXIMIZACIÓN DEL RENDIMIENTO	Contribución	0,45	0,44153	0,10847		1	
	Rentabilidad	0,01154	0,00556	0,00123		0,01833	0,04505
	Riesgo	0,02778	0,02719	0,00841		0,06338	
MINIMIZACIÓN DEL RIESGO	Contribución	0,45	0,45		0,1	1	
	Rendimiento	0,01154	0,00567		0,00068	0,01789	0,04389
	Riesgo	0,02778	0,0277		0,0063	0,06178	

Fuente: Elaboración propia.

Como se aprecia en la tabla anterior, el método que nos proporciona el mejor resultado es el de minimización del riesgo, con una diferencia entre riesgo y rendimiento de 4,389% frente a 4,505% del método de maximización del rendimiento.

Este método nos indica que la mejor cartera de inversión estará formada por los valores de Inditex, con el 45% del presupuesto, Viscofan también con el 45% y Telefónica con solo el 10%, dándonos un rendimiento de 1,789% frente a un riesgo de 6,178%.

2.4.5 Informes de "Solver"

Basándonos en los libros de McFedries (2011) y el de Larrinaga Ojanguren (2007), interpretaremos los informes de respuestas, de confidencialidad y de límites que proporciona "Solver" una vez hallada la solución óptima.

2.4.5.1 Informes para el modelo de maximización del rendimiento

Al implementar los modelos teóricos de maximización del rendimiento y minimización del riesgo, obtuvimos que el mejor de ellos era el de maximización del rendimiento, ya que nos proporcionaba la menor de las diferencias entre riesgo y rendimiento, por lo que vamos a interpretar los informes de “Solver” para este modelo.

A) Informe de respuestas

Figura 7. *Informe de respuestas modelo de maximización del rendimiento*

Microsoft Excel 14.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [analisis sensibilidad sin diversificar.xls]RENTABILIDAD
Informe creado: 22/07/2015 20:18:17
Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.
Motor de Solver
Motor: Simplex LP
Tiempo de la solución: 0,015 segundos.
Iteraciones: 3 Subproblemas: 0
Opciones de Solver
Tiempo máximo Ilimitado, Iteraciones Ilimitado, Precision 0,000001, Usar escala automática
Máximo de subproblemas Ilimitado, Máximo de soluciones de enteros Ilimitado, Tolerancia de enteros 1%, Asumir no negativo

Celda objetivo (Máx.)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$15	MAXIMIZAR RENTABILIDAD	0,01245318	0,02564835

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	0	Continuar
$H$3	INDITEX PROPORCION	0,1	1	Continuar
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	0	Continuar
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0,1	0	Continuar
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0,6	0	Continuar
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	0	Continuar
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0,2	0	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$H$9	TOTAL PROPORCION	1	$H$9=1	Vinculante	0
$M$9	TOTAL PROPORCION(Pv-Pvmin)	22,14	$M$9<=$B$17	No vinculante	22,814
$N$9	TOTAL PROPORCION(r-rmin)	0,000148405	$N$9<=$B$18	No vinculante	0,004093028
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	$H$2<=1	No vinculante	1
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	$H$2>=0	Vinculante	0
$H$3	INDITEX PROPORCION	1	$H$3<=1	Vinculante	0
$H$3	INDITEX PROPORCION	1	$H$3>=0	No vinculante	1
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	$H$4<=1	No vinculante	1
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	$H$4>=0	Vinculante	0
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	$H$5<=1	No vinculante	1
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	$H$5>=0	Vinculante	0
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0	$H$6<=1	No vinculante	1
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0	$H$6>=0	Vinculante	0
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	$H$7<=1	No vinculante	1
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	$H$7>=0	Vinculante	0
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0	$H$8<=1	No vinculante	1
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0	$H$8>=0	Vinculante	0

Fuente: Elaboración propia.

El informe Responder nos muestra información sobre la celda objetivo del modelo, las celdas cambiantes (variables) y las restricciones. Por tanto, nos proporciona:

El valor de la función objetivo usando la solución inicial (valor original), donde las proporciones de los títulos las hemos introducido nosotros. Se trataría de una solución factible, ya que cumple todas las restricciones, por lo que, este valor sería de 0,01245318. Pero el valor original no es el óptimo, pues la solución óptima vendrá dada por el valor final, que en este caso es de 0,02564835 y una composición de cartera distinta a la inicial.

En cuanto a las celdas cambiantes, este informe nos muestra la proporción inicial, que como ya hemos dicho en el párrafo anterior, son valores que hemos introducido (valor original) y la proporción óptima (valor final), que se corresponderá con la composición de cartera que reporte la máxima rentabilidad, en este caso, invertir el 100% a Inditex.

Por último, tenemos las restricciones, las cuales analizaremos por separado:

- El total de las proporciones: donde la restricción es que el sumatorio de todas las proporciones tiene que ser igual a 1, como en este caso esta restricción se cumple, su estado será vinculante siendo la demora igual a 0, ya que la diferencia entre el valor que nos proporciona y el valor de la restricción es nula.

- El sumatorio de las proporciones por la diferencia entre el precio de cada título y el precio mínimo tiene que ser menor o igual que λ_1 por la diferencia entre el precio máximo y el precio mínimo. En este caso, la parte izquierda de la restricción toma un valor de 22,14 y la parte derecha 44,95, de ahí que su estado sea no vinculante (el resultado no es igual al valor de la parte derecha de la restricción, es decir, es una restricción no activa) y por tanto, su demora (es decir, el valor de la variable de holgura) es de 22,81 (44,95-22,14).

- El sumatorio de las proporciones por la diferencia entre el riesgo de cada título y el riesgo mínimo tiene que ser menor o igual que λ_2 por la diferencia entre el riesgo máximo y el riesgo mínimo. Aquí tenemos que la parte de la izquierda de la restricción toma un valor de 0,000148405, siendo el valor de la derecha de 0,004241433. Por tanto, su estado será no vinculante (restricción no activa), ya que ambos valores no son iguales, teniendo una demora de 0,004093028 (valor de la variable de holgura).

- La proporción de cada título tiene que ser mayor o igual que 0, esta restricción es vinculante para todos los títulos excepto para Inditex, ya que su valor es igual a 1. En los demás títulos, su estado es vinculante pues su proporción en la cartera de valores es nula, de ahí que su demora sea 0.

- La proporción de cada título tiene que ser menor o igual a 1. En este caso, solo tendrá el estado de vinculante Inditex, por estar la cartera compuesta el 100% por este título, teniendo una demora de 0. En el caso de los restantes títulos serán no vinculantes por no tener participación en dicha cartera, siendo su demora de 1.

B) Informe de confidencialidad

Figura 8. *Informe de confidencialidad modelo de maximización del rendimiento*

Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad
Hoja de cálculo: [analisis sensibilidad sin diversificar.xls]RENTABILIDAD
Informe creado: 22/07/2015 20:18:17

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	-0,001295789	0,01129653	0,001295789	1E+30
$H$3	INDITEX PROPORCION	1	0,013056032	0,02564835	1E+30	0,013056032
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	-0,00819454	0,004397779	0,00819454	1E+30
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	-0,002873806	0,009718512	0,002873806	1E+30
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0	0	0,012592319	0,013056032	0,001295789
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	-0,006067405	0,006524913	0,006067405	1E+30
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0	-0,005786804	0,006805515	0,005786804	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$H$9	TOTAL PROPORCION	1	0,012592319	1	0,454824561	0
$M$9	TOTAL PROPORCION(Pv-Pvr	22,14	0	44,954	1E+30	22,814
$N$9	TOTAL PROPORCION(r-rmin	0,000148405	0	0,004241433	1E+30	0,004093028

Fuente: Elaboración propia.

El informe de Confidencialidad trata de mostrar el grado de sensibilidad de una solución a los cambios que se producen en las fórmulas del modelo. Se divide en dos secciones. La sección superior, denominada Celdas de variables, que muestra la dirección y el nombre de cada celda, su valor final y las siguientes medidas:

- Reducido coste, el cual nos muestra el incremento correspondiente en la celda objetivo dado un incremento de una unidad en la celda de variable. En este caso, sólo se produciría un incremento en la rentabilidad para el título Inditex, donde si aumentamos en una unidad adicional, el incremento de la rentabilidad sería de 0,01305; mientras que en el resto de títulos un incremento en una unidad supondría un descenso de la rentabilidad, o en el caso de Viscofan, permanecería constante.

- Permisible aumentar y permisible reducir, donde dichas columnas recogen el aumento o descenso permisible del coeficiente en la función objetivo sin que se vea alterado el óptimo del problema, es decir, sin que cambien el valor óptimo de las variables. Así, a la izquierda de estas dos columnas aparece el valor original del coeficiente en la función objetivo de cada variable (se corresponde con la rentabilidad de cada título).

  Por tanto, analizaremos título a título donde para:

- Iberdrola: mientras la rentabilidad de este título no aumente en 0,001295, su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Inditex: mientras su rentabilidad no disminuya en 0,013056, su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 1.

- Mediaset: mientras su rentabilidad no aumente en 0,00819 su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Santander: mientras su rentabilidad no aumente en 0,002873806 su aportación a la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Viscofan: mientras su rentabilidad no aumente en 0,013056032 o disminuya en 0.001295789, su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Acciona: mientras su rentabilidad no aumente en 0,006067405 su aportación a la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Telefónica: mientras su rentabilidad no aumente en 0,005786804 su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0.

En cuanto al análisis de confidencialidad de las restricciones, nos basaremos en el libro de Martín Martín (2003).

Comenzaremos por analizar los precios sombra. “El precio sombra de una restricción de un problema de programación lineal es la cantidad en que mejoraría (aumentaría si la función objetivo es Maximización o disminuiría si la función objetivo es Minimización) el valor óptimo de la función objetivo, cuando el término libre de la restricción es aumentado en una unidad”.

Aquí, podemos hacer referencia a tres tipos de restricciones. El precio sombra de una restricción del tipo mayor o igual, será siempre negativo o cero; el de una restricción menor o igual, será positivo o cero; y el de una restricción de igualdad, podrá tener cualquier valor, negativo, positivo o cero.

También hay que tener en cuenta el rango de validez de los precios sombra. Este rango se puede calcular con los antecedentes que se entregan en el análisis de confidencialidad del resultado óptimo (Restricción lado derecho). Para cada término libre se indica su valor actual, la cantidad en que éste puede ser aumentado y la cantidad en que éste puede ser disminuido. El mejoramiento o empeoramiento del valor óptimo de la función objetivo será directamente proporcional a su precio sombra por la cantidad en que varíe el término libre de la restricción, siempre y cuando esta variación mantenga el valor de este último dentro del rango de validez antes calculado.

Para las restricciones no activas, es decir, para aquellas restricciones que tienen holgura y cuyo precio sombra, por tanto, es nulo, el rango de variación del término libre de la restricción calculado indica los valores que puede tomar este término libre sin que el valor óptimo de la función objetivo ni el valor óptimo de las variables cambie.

En nuestro informe podemos comprobar que el valor del precio sombra para la restricción $\sum_{i=1}^{n} x_i(Pv_i - Pv_{min}) \leq \lambda_1(Pv_{max} - Pv_{min})$, es cero ya que se trata de una restricción "≤".

Además, es una restricción no activa pues tiene una holgura de 22,814 y según el análisis de sensibilidad su término libre puede reducirse en esa cantidad sin que el valor óptimo de la función objetivo cambie, ni tampoco el valor óptimo de las variables de decisión.

Análogamente ocurre con la restricción $\sum_{i=1}^{n} x_i(\sigma_i - \sigma_{min}) \leq \lambda_2(\sigma_{max} - \sigma_{min})$, tiene precio sombra cero y su término libre puede reducirse en 0,004093028 sin que cambie el valor óptimo de la función objetivo ni tampoco el valor óptimo de las variables de decisión.

Sin embargo, en la primera restricción al ser de igualdad (total del presupuesto igual a 1), el precio sombra toma de 0,01259. Se permite aumentar 0,4548; lo que significa que si aumentamos el presupuesto hasta 1,4548, el valor óptimo de la función objetivo aumentará aproximadamente en el producto del precio sombra por la cantidad que se aumentó el presupuesto.

C) Informe de límites

Figura 9. *Informe de límites para el modelo de maximización del rendimiento*

Microsoft Excel 14.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [analisis sensibilidad sin diversificar.xls]RENTABILIDAD
Informe creado: 22/07/2015 20:18:17

	Objetivo	
Celda	Nombre	Valor
$B$15	MAXIMIZAR RENTABILIDAD	0,026

	Variable		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda	Nombre	Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	0	0,0256484	0	0,0256484
$H$3	INDITEX PROPORCION	1	1	0,0256484	1	0,0256484
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	0	0,0256484	0	0,0256484
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	0	0,0256484	0	0,0256484
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0	0	0,0256484	0	0,0256484
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	0	0,0256484	0	0,0256484
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0	0	0,0256484	0	0,0256484

Fuente: Elaboración propia.

El informe de Límites ofrece una especie de análisis de sensibilidad referida exclusivamente a las cotas superiores e inferiores de las variables.

Así, para cada variable indica entre que valores puede situarse su valor dentro de los cuales se cumplen las restricciones. Muestra, por tanto, una lista con la celda objetivo y las celdas cambiantes con sus valores correspondientes, así como los límites inferior y superior posibles para cada variable.

Por tanto, estos límites son muy estrictos, ya que una variación en cualquiera de ellos impide que se cumplan todas las restricciones, pues no se cumpliría que la suma de las proporciones sea igual a 1, de ahí que el límite inferior y superior coincida en todos los casos con el valor de la proporción de cada título.

2.4.5.2 Informes para el modelo de minimización del riesgo

Como hemos comprobado, a la hora de aplicar la restricción del 45%, en la resolución de los modelos, tanto de maximización del rendimiento como de minimización del riesgo, el que nos proporciona la menor de las diferencias entre rentabilidad y riesgo, en este caso es el modelo de minimización.

Por tanto, en este apartado nos basaremos en analizar los informes que nos proporciona “Solver” para este método.

A) Informe de Respuestas

Figura 10. *Informe de respuestas para una cartera diversificada*

Microsoft Excel 14.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [analisis sensibilidad cartera diversificada.xlsx]riesgo
Informe creado: 22/07/2015 20:39:54
Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.
Motor de Solver
Motor: Simplex LP
Tiempo de la solución: 0,016 segundos.
Iteraciones: 11 Subproblemas: 0
Opciones de Solver
Tiempo máximo Ilimitado, Iteraciones Ilimitado, Precision 0,000001
Máximo de subproblemas Ilimitado, Máximo de soluciones de enteros Ilimitado, Tolerancia de enteros 1%, Asumir no negativo

Celda objetivo (Mín)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$13	MINIMIZAR RIESGO	0,069158271	0,061780608

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	0	Continuar
$H$3	INDITEX PROPORCION	0,45	0,45	Continuar
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	0	Continuar
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	0	Continuar
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0,35	0,45	Continuar
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0,2	0	Continuar
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0	0,1	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$H$9	TOTAL PROPORCION	1	$H$9=1	Vinculante	0
$M$9	TOTAL PROPORCION(R-Rmi	0,013491074	$M$9>=$B$15	No vinculante	0,000740731
$N$9	TOTAL PROPORCION(Pv-Pvr	33,293	$N$9>=$B$14	No vinculante	1,183
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	$H$2<=0,45	No vinculante	0,45
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	$H$2>=0	Vinculante	0
$H$3	INDITEX PROPORCION	0,45	$H$3<=0,45	Vinculante	0
$H$3	INDITEX PROPORCION	0,45	$H$3>=0	No vinculante	0,45
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	$H$4<=0,45	No vinculante	0,45
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	$H$4>=0	Vinculante	0
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	$H$5<=0,45	No vinculante	0,45
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	$H$5>=0	Vinculante	0
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0,45	$H$6<=0,45	Vinculante	0
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0,45	$H$6>=0	No vinculante	0,45
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	$H$7<=0,45	No vinculante	0,45
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	$H$7>=0	Vinculante	0
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0,1	$H$8<=0,45	No vinculante	0,35
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0,1	$H$8>=0	No vinculante	0,1

Fuente: Elaboración propia.

En este caso, el informe de Respuestas nos proporciona que el valor original de la función objetivo es de 0,069158271 (resultado de destinar el 45% del presupuesto a Inditex, el 35% a Viscofan y el 20% a Acciona), y el valor final que será de 0,061780608.

De aquí podemos concluír que la función objetivo mejora, ya que al tratarse de un problema de minimización, lo que se pretende es que el valor de la función objetivo disminuya. Por tanto, partimos de una solución factible pero no de una solución óptima, la cual será resultado de repartir el presupuesto de forma distinta a la inicial.

En cuanto a las celdas cambiantes, este informe nos muestra la proporción inicial o valor original (valores que hemos introducido nosotros) y la proporción óptima o valor final, que se corresponderá con la composición de la cartera que proporcione el riesgo mínimo. Por tanto, pasamos de una cartera de inversión formada por Inditex (45%), Viscofan (35%) y Acciona (20%) a una cartera formada por 45% Inditex, 45% Viscofan y 10% Telefónica.

Por último, tenemos las restricciones, las cuales analizaremos por separado:

- El total de las proporciones, donde la restricción es que el sumatorio de todas las proporciones tiene que ser igual a 1, como en este caso esta restricción se cumple, su estado será vinculante siendo la demora igual a 0, ya que la diferencia entre el valor que nos proporciona y el valor de la restricción es nula.

- El sumatorio de las proporciones por la diferencia entre el precio de cada título y el precio mínimo tiene que ser mayor o igual que λ_1 por la diferencia entre el precio máximo y el precio mínimo. En este caso, la parte izquierda de la restricción toma un valor de 33,29 y la parte derecha 32,11; de ahí que su estado sea no vinculante (el resultado no es igual al valor de la parte derecha de la restricción) y por tanto, su demora sea de 1,183 (33,29-32,11).

- El sumatorio de las proporciones por la diferencia entre el rendimiento de cada título y el rendimiento mínimo tiene que ser mayor o igual que λ_2 por la diferencia entre el rendimiento máximo y el rendimiento mínimo. Aquí tenemos que la parte de la izquierda de la restricción toma un valor de 0,013491074, siendo el valor de la derecha 0,012750343. Por tanto, su estado será no vinculante, ya que ambos valores no son iguales, teniendo una demora de 0,000740731.

- La proporción de cada título tiene que ser mayor o igual que 0 y menor o igual que 0,45. En este caso tendrán un estado vinculante aquellos títulos en los que su valor sea igual a 0 (Iberdrola, Mediaset, Santander y Acciona) o igual a 0,45 (Inditex y Viscofan) siendo su demora así de 0. En el resto de los títulos, su estado será no vinculante siendo su demora de 0,45, excepto en el caso de Telefónica, ya que su aportación a la cartera de inversión es del 0,1 del presupuesto (con una demora de 0,35).

B) Informe de Confidencialidad

Figura 11. *Informe de confidencialidad para una cartera diversificada*

Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad
Hoja de cálculo: [analisis sensibilidad cartera diversificada.xlsx]riesgo
Informe creado: 22/07/2015 20:39:54

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$H$2	IBERDROLA PROPORCION	0	0,014550486	0,077518014	1E+30	0,014550486
$H$3	INDITEX PROPORCION	0,45	-0,001244597	0,061722931	0,001244597	1E+30
$H$4	MEDIASET PROPORCION	0	0,04102133	0,103988858	1E+30	0,04102133
$H$5	SANTANDER PROPORCION	0	0,026437333	0,089404861	1E+30	0,026437333
$H$6	VISCOFAN PROPORCION	0,45	-0,001393002	0,061574526	0,001393002	1E+30
$H$7	ACCIONA PROPORCION	0	0,03619181	0,099159338	1E+30	0,03619181
$H$8	TELEFONICA PROPORCION	0,1	0	0,062967528	0,014550486	0,001244597

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$H$9	TOTAL PROPORCION	1	0,062967528	1	0,35	0,1
$M$9	TOTAL PROPORCION(R-Rmi	0,013491074	0	0,012750343	0,000740731	1E+30
$N$9	TOTAL PROPORCION(Pv-Pvr	33,293	0	32,11	1,183	1E+30

Fuente: Elaboración propia.

En la sección de celdas variables tenemos los siguientes resultados:

- Reducido coste, el cual nos muestra el incremento correspondiente en la celda objetivo dado un incremento de una unidad en la celda de variable. En este caso, se produciría una mejora en la función objetivo si aumentamos en una unidad Inditex (el riesgo disminuiría en 0,001245) o si aumentamos Viscofan (el riesgo se reduce en 0,00139). Dicho incremento se aprecia si variamos una variable manteniendo constantes las demás. Aunque en el caso de Telefónica, un aumento de una unidad no produciría cambios en la función objetivo.

- Permisible aumentar y permisible reducir, donde dichas columnas recogen el aumento o descenso permisible del coeficiente en la función objetivo sin que se vea alterado el óptimo del problema, es decir, sin que cambien el valor óptimo de las variables. Así, a la izquierda de estas dos columnas aparece el valor original del coeficiente en la función objetivo de cada variable (se corresponde con el riesgo de cada título).

Por tanto, analizaremos título a título donde para:

- Iberdrola: mientras el riesgo de este título no disminuya en 0,01455, su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Inditex: mientras su riesgo no aumente en 0,001244, su valor en la cartera de inversión seguirá siendo de 0,45.

- Mediaset: mientras su riesgo no disminuya en 0,04102 su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Santander: mientras su riesgo no disminuya en 0,02643 su aportación a la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Viscofan: mientras su riesgo no aumente en 0,001393 su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0,45.

- Acciona: mientras su riesgo no disminuya en 0,03619 su aportación a la cartera de inversión seguirá siendo 0.

- Telefónica: mientras su riesgo no aumente en 0,01455 o disminuya en 0,00124 su valor en la cartera de inversión seguirá siendo 0,1.

Por último, nos basaremos en el análisis de confidencialidad de las restricciones:

Para las restricciones no activas, podemos comprobar que el valor del precio sombra para la restricción $\sum_{i=1}^{n} x_i(Pv_i - Pv_{min}) \geq \lambda_1(Pv_{max} - Pv_{min})$, es cero ya que se trata de una restricción "≥" y además tiene una holgura de 1,183; donde según el análisis de sensibilidad, su término libre puede aumentar en esa cantidad sin que el valor óptimo de la función objetivo cambie, ni tampoco el valor óptimo de las variables de decisión.

Análogamente ocurre con la restricción $\sum_{i=1}^{n} x_i(R_i - R_{min}) \geq \lambda_2(R_{max} - R_{min})$, la cual, tiene precio sombra cero y su término libre puede aumentar en 0,000740731 sin que cambie el valor óptimo de la función objetivo ni tampoco el valor óptimo de las variables de decisión.

Sin embargo, en la primera restricción, al ser de igualdad (total del presupuesto igual a 1), el precio sombra toma un valor de 0,062967528. Se permite aumentar 0,35 o disminuir 0,1; lo que significa que si aumentamos el presupuesto hasta 1,35; el valor óptimo de la función objetivo aumentará aproximadamente en el producto del precio sombra por la cantidad que se aumentó en el presupuesto. Por el contrario, si disminuímos el presupuesto hasta 0,9; el valor óptimo de la función objetivo disminuirá en el producto del precio sombra por la cantidad que se disminuyó en el presupuesto.

C) Informe de límites

Figura 12. *Informe de límites para una cartera diversificada*

Microsoft Excel 14.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [analisis sensibilidad cartera diversificada.xlsx]riesgo
Informe creado: 22/07/2015 20:39:54

	Objetivo	
Celda	Nombre	Valor
$B$13	MINIMIZAR R	0,062

	Variable		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda	Nombre	Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
$H$2	IBERDROLA P	0	0	0,0617806	0	0,0617806
$H$3	INDITEX PROI	0,45	0,45	0,0617806	0,45	0,0617806
$H$4	MEDIASET PR	0	0	0,0617806	0	0,0617806
$H$5	SANTANDER I	0	0	0,0617806	0	0,0617806
$H$6	VISCOFAN PR	0,45	0,45	0,0617806	0,45	0,0617806
$H$7	ACCIONA PR(	0	0	0,0617806	0	0,0617806
$H$8	TELEFONICA I	0,1	0,1	0,0617806	0,1	0,0617806

Fuente: Elaboración propia.

Al igual que en el modelo de maximización del rendimiento, estos límites son muy estrictos, ya que una variación en cualquiera de ellos impide que se cumplan todas las restricciones, pues no se cumpliría que la suma de las proporciones sea igual a 1, de ahí que el limite inferior y superior coincida en todos los casos con el valor de la proporción de cada título.

Conclusiones

A continuación se presentan las principales conclusiones que se derivan, a nuestro juicio, del trabajo realizado. En primer lugar, se exponen las de corte teórico:

- Las inversiones en una cartera de valores son inversiones financieras en las que se pretende obtener un alto rendimiento con un riesgo mínimo. Por tanto, la composición de una cartera de valores es la combinación de distintos valores en distintas proporciones.
- En el caso de un problema de maximización del rendimiento, la rentabilidad de una cartera de inversión será la suma de las rentabilidades de cada valor que compone dicha cartera, multiplicado por la proporción que cada uno de ellos aporta a la cartera. Por el contrario, en el problema de minimización del riesgo, el riesgo asignado a esta cartera será la suma de las proporciones de cada uno de los valores por su riesgo asignado.
- El modelo de Markowitz proporciona carteras eficientes con el mínimo riesgo para un nivel de rentabilidad deseada pero tiene el inconveniente de la gran cantidad de datos que hacen falta para su resolución. Por tanto, en este trabajo tomaremos aspectos fundamentales de este modelo y del modelo CAPM resolviéndose mediante un método compuesto por dichos aspectos.

En cuanto a las conclusiones que se pueden extraer del estudio empírico, destacan las siguientes:

- A partir de las series históricas de las cotizaciones y del reparto de dividendos de los valores obtenemos los parámetros necesarios para implementar el modelo de programación lineal escogido, calculando para cada valor sus rentabilidades en cada período, que mediante la media aritmética nos proporciona la rentabilidad para cada valor; y su desviación típica, la cual se corresponde con el parámetro del riesgo.
- Una vez obtenido todos estos datos (rentabilidad y riesgo), se implementa en el modelo, definiendo la función objetivo, en este caso, la de maximización del rendimiento por un lado y minimización del riesgo por otro, las cuales son funciones lineales, dando lugar a modelos de programación lineal.
- Por otro lado, toca definir las restricciones, las cuales son lineales y hacen referencia al presupuesto disponible mediante las proporciones que se le asigna a cada valor, tomando dichas proporciones valores comprendidos entre cero y uno. En cuanto a las restricciones del modelo de maximización de la rentabilidad, entra en juego los parámetros del precio de los valores y el riesgo asignado a cada uno de ellos, sin embargo, para el modelo de minimización del riesgo, los parámetros utilizados serán el precio y la rentabilidad.
- Hecho esto, utilizamos la hoja de cálculo Excel para plantear el problema, así, a través de la macro “Solver” nos determina la composición de cartera óptima, proporcionándonos la cantidad del presupuesto que debemos destinar a cada uno de los valores y cual sería la máxima rentabilidad (modelo de maximización del rendimiento) y el mínimo riesgo (modelo de minimización del riesgo).
- Haciendo un balance general de los datos obtenidos, tenemos que para el modelo de maximización del rendimiento, la solución óptima sería invertir el 100% del presupuesto a Inditex, con unos resultados de los rendimientos del 2,56% frente al inicial de 1,25%. Por otro lado, para el modelo de minimización del riesgo, nos proporciona una cartera un poco más diversificada, donde el presupuesto iría destinado Inditex (18,57%) y a Viscofan (81,43%) obteniendo el riesgo mínimo del 6.16% frente al inicial de 7,29%.
- Aún así, hemos querido probar que pasaría si aplicamos una restricción de que como máximo se pueda invertir el 45% del presupuesto a cada valor, con el propósito de obtener una cartera un poco más diversificada. Se introduce esta restricción para intentar reducir el riesgo de invertir todo a un solo valor.

Por tanto, con los resultados obtenidos en el modelo de maximización del rendimiento, nuestra cartera estaría formada por Iberdrola (10,85%), Inditex (45%) y Viscofan (44,15%), dando una rentabilidad del 1,83% frente al 1,29% de la solución inicial.

En cuanto al modelo de minimización del riesgo, la cartera de inversión estaría compuesta por Inditex (45%), Viscofan (45%) y Telefónica (10%), proporcionando un riesgo del 6,17% frente al 6,92% de la solución inicial.

- Como última conclusión, podríamos decir que aplicando una restricción del 45%, donde se pretende que el rendimiento aumente y el riesgo disminuya, en nuestro caso podemos comprobar que esto no sucede, sino que todo lo contrario, ambos modelos empeoran. Esto se debe a que hemos introducido el valor de Inditex, que es el que nos proporciona los mejores resultados, ya que la diferencia entre su riesgo y su rentabilidad es muy baja, por lo que siempre nos va a dar que la mejor solución va a ser invertir a este valor.

  Aún así, hemos comprobado que eliminando el valor de Inditex, los resultados mejorarían con diferencia en una cartera más diversificada, por lo que será preferible invertir en varios valores que en un único valor.

Bibliografía

Barbolla, R., Cerdá, E. y Sanz, P. (2000). *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. Madrid: Pearson Educación

Brun, X. y Moreno, M. (2008). *Análisis y selección de inversiones en mercados financieros. Eficiencia de los mercados, teoría de carteras, asignación de activos y definición de políticas de inversión.* Barcelona: Bresca Editorial.

Crispín, J. y Vianey, D. (2009). *Selección de una cartera de inversión en la Bolsa Mexicana de valores por medio de un método de programación lineal. Programación Matemática y Software, 1 (1), 130-151.*

Eppen, G., Gould, F., Schmidt, C., Moore, J., y Weatherford, L. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia adminstrativa.* México: Prentice-Hall.

Hillier, F.,y Lieberman G. (2010). *Fundamentos de investigación de Operaciones.* México: McGrawHill Interamericana.

Larrinaga, M. A. (2007). *La optimización lineal: Un instrumento de gestión.* Bilbao: Desclée de Brower.

Markowitz, H. (1952). *Porfolio Selection. Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.

Markowitz, H. (1959*). Portfolio selection: Efficient diversification of investments. Nueva York: Wiley.*

Martín, Q. (2003). *Investigación Operativa*. Madrid: Pearson Educación.

McFedries, P. (2011). *Excel 2010. Fórmulas y funciones*. Madrid: Grupo Anaya.

Pérez-Grasa, I. Minguillón, E., y Jarne, G. (2001). *Matemáticas para la economía: Programación matemática y sistemas dinámicos*. España: McGrawHill Interamericana.

Render, B., Stair, R., y Hanna, M. (2012). *Métodos cuantitativos para los negocios.* México: Pearson Educación.

- Textos electrónicos y bases de datos

*Cotizaciones y dividendos. (*2005-2015). Recuperado el 7 de mayo de 2015 en <http://www.invertia.com>

Cotizaciones y dividendos. (2005-2015). Recuperado el 7 de mayo de 2015 en <http://www.expansion.com>

Hernández, G. (2012). Cómo diversificar. Recuperado el 30 de mayo de 2015 en <http://www.invertirenbolsa.info/articulo_como_diversificar.htm>

Juan, A. y Faulín, J. (2003). Aplicaciones de la programación lineal. Recuperado el 28 de mayo de 2015 en <http://www.uoc.edu/portal/ca/index.html>

LINDO SYSTEMS. *(2006).* Recuperado el 7 de mayo de 2015 en <http://www.lindo.com>

Organización Bolsas de Valores. (2015). Recuperado el 7 de mayo de 2015 en <http://www.bolsamadrid.es>

Sogorb, F. (2013). *Teoría de carteras*. Recuperado el 30 de mayo de 2015 en <http://www.expansion.com/diccionario-economico/teoria-de-carteras.html>

Anexo

Rentabilidad mensual de los valores

Tabla 1. *Matriz de rentabilidades (1)*

AÑO	MES	INDITEX	VISCOFAN	TELEFONICA	ACCIONA
2015	Abril	-0,03984	-0,00053	0,02788	-0,05341
2015	Marzo	0,06676	0,03248	-0,04946	0,02178
2015	Febrero	0,07010	0,07616	0,05864	0,10216
2015	Enero	0,08917	0,16266	0,10917	0,11767
2014	Diciembre	0,02336	-0,03900	-0,06612	-0,04746
2014	Noviembre	0,05356	-0,01346	0,08208	0,07823
2014	Octubre	0,02849	0,08276	-0,01376	-0,05951
2014	Septiembre	-0,00718	0,02059	0,01832	-0,03091
2014	Agosto	0,00692	0,01862	-0,00804	-0,01008
2014	Julio	-0,01280	-0,04190	-0,02606	-0,04887
2014	Junio	0,05642	0,03505	0,02457	0,09597
2014	Mayo	-0,00829	0,12590	0,02245	0,01198
2014	Abril	-0,00908	-0,01291	0,05677	-0,07143
2014	Marzo	0,06610	0,03192	0,05111	0,11517
2014	Febrero	-0,05938	-0,05160	-0,02260	0,17235
2014	Enero	-0,07273	-0,05023	-0,02940	0,17823
2013	Diciembre	0,01997	0,03814	-0,01795	-0,06971

2013	Noviembre	-0,02851	0,02209	-0,05493	-0,03496
2013	Octubre	0,06503	-0,07149	0,13500	0,11182
2013	Septiembre	0,12914	0,06787	0,11488	0,07460
2013	Agosto	-0,00594	0,02097	-0,03791	0,10031
2013	Julio	0,04911	0,00603	0,08258	-0,10398
2013	Junio	-0,00575	0,01533	-0,05954	-0,15167
2013	Mayo	-0,04950	-0,03145	-0,04028	-0,03239
2013	Abril	-0,00487	-0,03462	0,06996	0,17335
2013	Marzo	0,00290	0,03125	0,04480	-0,10066
2013	Febrero	-0,00339	0,04229	-0,04621	-0,18191
2013	Enero	-0,05829	-0,10203	0,04296	-0,00471
2012	Diciembre	0,00808	0,14037	0,01175	0,12412
2012	Noviembre	0,07020	0,00778	0,00486	0,07310
2012	Octubre	0,02484	0,06610	-0,00203	0,05879
2012	Septiembre	0,07582	0,00821	0,04387	0,19492
2012	Agosto	0,04770	-0,03576	0,09763	0,06404
2012	Julio	0,03115	0,09109	-0,09804	-0,24977
2012	Junio	0,22812	0,04615	0,15991	0,12002
2012	Mayo	-0,02971	-0,04898	-0,18909	-0,09172
2012	Abril	-0,05387	0,01907	-0,09999	-0,11603
2012	Marzo	0,04176	0,07479	-0,03444	-0,10789
2012	Febrero	0,04098	0,06189	-0,03527	-0,03546
2012	Enero	0,06073	0,02287	0,00293	-0,07675
2011	Diciembre	0,01586	0,06061	-0,03037	-0,02801
2011	Noviembre	-0,01467	-0,03245	-0,07071	0,03660
2011	Octubre	0,05472	0,01312	0,09665	0,11079
2011	Septiembre	0,08772	0,01429	0,00184	-0,02294
2011	Agosto	-0,05359	-0,01983	-0,07304	-0,09940
2011	Julio	0,01671	-0,09737	-0,07019	-0,01814
2011	Junio	0,00631	-0,05317	0,00573	-0,03204
2011	Mayo	0,05533	-0,06970	-0,06813	-0,03939
2011	Abril	0,08113	0,05631	0,02678	0,01980
2011	Marzo	0,09656	0,07775	-0,03802	0,06198
2011	Febrero	-0,04488	-0,02670	0,00307	0,11877
2011	Enero	-0,00089	-0,08580	0,08559	0,18402
2010	Diciembre	-0,01697	0,06252	0,03820	0,06156
2010	Noviembre	-0,02534	0,04889	-0,15610	-0,20901
2010	Octubre	0,04938	-0,00075	0,07662	0,02352
2010	Septiembre	0,11741	0,02464	0,04269	-0,00291
2010	Agosto	0,05239	0,02968	0,00907	-0,08689
2010	Julio	0,12319	0,01901	0,16778	0,12788

2010	Junio	0,05997	0,03147	-0,00721	-0,02251
2010	Mayo	0,00470	0,03262	-0,08581	-0,12729
2010	Abril	-0,02925	0,07393	-0,02844	-0,09426
2010	Marzo	0,13898	0,05025	0,01602	-0,00160
2010	Febrero	-0,02499	-0,03703	0,00628	-0,06145
2010	Enero	0,07050	0,05317	-0,10916	-0,04441
2009	Diciembre	0,01748	0,01551	0,01778	0,05001
2009	Noviembre	0,09487	-0,00558	0,00957	0,02942
2009	Octubre	0,02679	0,08348	0,01716	-0,10855
2009	Septiembre	0,03003	0,04637	0,07031	0,01969
2009	Agosto	0,01326	0,01013	0,00752	0,06214
2009	Julio	0,11111	0,05901	0,08102	-0,01619
2009	Junio	0,07837	0,00143	0,05014	-0,06938
2009	Mayo	-0,03464	0,02859	0,05471	0,17153
2009	Abril	0,11054	-0,02352	-0,02420	0,00643
2009	Marzo	0,01197	-0,06207	0,05400	-0,02752
2009	Febrero	0,03248	-0,00188	0,07051	-0,09367
2009	Enero	-0,05781	0,05978	-0,14021	0,00170
2008	Diciembre	0,20865	-0,05824	-0,00031	0,24816
2008	Noviembre	-0,00788	0,05855	0,09883	-0,05328
2008	Octubre	-0,09958	0,16530	-0,13669	-0,30359
2008	Septiembre	-0,05228	-0,15420	0,00387	-0,20668
2008	Agosto	0,07625	0,02359	0,02753	0,01596
2008	Julio	0,07650	0,04047	-0,01147	-0,10004
2008	Junio	-0,03924	-0,13189	-0,06943	-0,15092
2008	Mayo	-0,09880	-0,03163	-0,01410	-0,02169
2008	Abril	0,02273	0,02920	0,04046	0,08551
2008	Marzo	0,05281	0,02563	-0,03816	0,02069
2008	Febrero	0,02316	-0,02037	-0,02499	-0,03455
2008	Enero	-0,19293	-0,04853	-0,11083	-0,21035
2007	Diciembre	-0,11126	-0,14881	-0,02373	-0,07199
2007	Noviembre	-0,06268	-0,10326	0,00215	0,09603
2007	Octubre	0,13073	0,09043	0,16722	0,11795
2007	Septiembre	0,10644	-0,05095	0,07781	0,03722
2007	Agosto	0,01251	-0,01152	0,07538	0,00274
2007	Julio	0,02842	0,01834	0,04965	-0,04568
2007	Junio	-0,05380	-0,02908	-0,01608	0,01378
2007	Mayo	0,03357	0,00612	0,01678	0,20790
2007	Abril	-0,01952	0,00333	0,00237	0,02678
2007	Marzo	0,07400	0,03973	0,02032	0,06179
2007	Febrero	0,01340	0,03381	-0,03321	-0,04746

2007	Enero	0,06652	0,01787	0,04089	0,11953
2006	Diciembre	0,06744	0,01673	0,05755	0,03168
2006	Noviembre	0,02660	0,02370	0,01121	-0,01115
2006	Octubre	0,02578	0,09768	0,10746	0,15780
2006	Septiembre	0,05099	0,04101	0,02388	0,00284
2006	Agosto	0,04405	-0,02105	0,01433	-0,00008
2006	Julio	0,03464	0,01059	0,02231	-0,02094
2006	Junio	0,07754	-0,00073	0,02590	-0,01862
2006	Mayo	-0,02492	-0,06204	0,00865	-0,06557
2006	Abril	0,01242	-0,00497	-0,02374	0,05884
2006	Marzo	0,06977	0,04743	-0,00077	0,09284
2006	Febrero	0,07965	0,16942	0,04589	0,14998
2006	Enero	0,03811	0,01867	-0,01098	0,08066
2005	Diciembre	0,11094	-0,05596	0,01199	0,00571
2005	Noviembre	0,01731	0,02719	-0,05336	0,02436
2005	Octubre	0,02374	-0,05141	-0,02051	-0,03194
2005	Septiembre	0,11167	0,23474	0,01570	0,04536
2005	Agosto	0,00807	-0,04569	-0,03591	0,06311
2005	Julio	0,05326	0,03489	0,03043	0,04094
2005	Junio	-0,06584	-0,01891	-0,00799	0,10928
2005	Mayo	0,01652	0,06568	0,03657	0,11323
2005	Abril	-0,02398	-0,03834	-0,01786	-0,03629
MEDIA		**0,02565**	**0,01259**	**0,00681**	**0,00652**
DESVIACIÓN TÍPICA		**0,06172**	**0,06157**	**0,06297**	**0,09916**

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2. *Matriz de rentabilidades (2)*

AÑO	MES	ACCIONA	IBERDROLA	MEDIASET	SANTANDER
2015	Abril	-0,05341	0,00000	0,04124	-0,03152
2015	Marzo	0,02178	-0,01478	0,05235	0,07176
2015	Febrero	0,10216	-0,00326	0,01939	0,09933
2015	Enero	0,11767	0,08496	0,02564	-0,15938
2014	Diciembre	-0,04746	-0,05382	0,08066	-0,01947
2014	Noviembre	0,07823	0,05876	-0,00794	0,04435
2014	Octubre	-0,05951	-0,00688	0,01841	-0,06596
2014	Septiembre	-0,03091	0,01807	0,12695	0,00789
2014	Agosto	-0,01008	0,00734	0,00819	0,01731

2014	Julio	-0,04887	-0,00164	0,01883	-0,00653
2014	Junio	0,09597	0,05487	0,00363	0,02128
2014	Mayo	0,01198	0,03946	0,06260	0,05579
2014	Abril	-0,07143	-0,00378	-0,05768	0,03736
2014	Marzo	0,11517	0,06950	-0,00694	0,08062
2014	Febrero	0,17235	0,05477	-0,04601	0,03925
2014	Enero	0,17823	-0,00846	0,09188	-0,00920
2013	Diciembre	-0,06971	0,00433	-0,02894	0,00000
2013	Noviembre	-0,03496	0,00860	-0,04000	0,00611
2013	Octubre	0,11182	0,07925	0,05882	0,09468
2013	Septiembre	0,07460	0,06700	0,15000	0,11971
2013	Agosto	0,10031	-0,03606	-0,05499	-0,02000
2013	Julio	-0,10398	0,01716	0,15362	0,11469
2013	Junio	-0,15167	-0,01932	0,13198	-0,10000
2013	Mayo	-0,03239	0,01956	0,00503	0,02381
2013	Abril	0,17335	0,12363	0,06050	0,05725
2013	Marzo	-0,10066	-0,03968	0,04673	-0,08160
2013	Febrero	-0,18191	-0,04051	-0,00185	-0,01843
2013	Enero	-0,00471	-0,07026	0,03731	0,00484
2012	Diciembre	0,12412	0,08808	0,11379	0,03710
2012	Noviembre	0,07310	-0,03046	0,09157	0,03652
2012	Octubre	0,05879	0,12712	-0,02817	0,00000
2012	Septiembre	0,19492	0,11356	-0,02989	0,05216
2012	Agosto	0,06404	0,07143	0,08437	0,16973
2012	Julio	-0,24977	-0,19837	0,06283	-0,03846
2012	Junio	0,12002	0,21173	0,12317	0,21991
2012	Mayo	-0,09172	-0,14286	-0,01156	-0,10395
2012	Abril	-0,11603	-0,17371	-0,20418	-0,17759
2012	Marzo	-0,10789	-0,03620	-0,04232	-0,06129
2012	Febrero	-0,03546	-0,01770	-0,00223	0,04319
2012	Enero	-0,07675	-0,07216	0,00903	0,02564
2011	Diciembre	-0,02801	-0,02577	0,00951	0,05541
2011	Noviembre	0,03660	-0,02516	-0,05960	-0,06443
2011	Octubre	0,11079	0,06070	0,15665	0,03331
2011	Septiembre	-0,02294	-0,01518	-0,14649	-0,02323
2011	Agosto	-0,09940	-0,09795	-0,22993	-0,11601
2011	Julio	-0,01814	-0,07615	0,08292	-0,07159
2011	Junio	-0,03204	-0,00298	-0,04259	-0,03368
2011	Mayo	-0,03939	-0,02040	-0,17346	-0,02225
2011	Abril	0,01980	0,01645	-0,06383	0,04342
2011	Marzo	0,06198	-0,02354	-0,12047	-0,08435

2011	Febrero	0,11877	0,00984	-0,01816	-0,00434
2011	Enero	0,18402	0,09837	0,11821	0,12510
2010	Diciembre	0,06156	0,09212	0,11610	0,06838
2010	Noviembre	-0,20901	-0,12922	-0,20851	-0,21128
2010	Octubre	0,02352	0,07964	0,13570	-0,00633
2010	Septiembre	-0,00291	0,01598	-0,00866	0,00979
2010	Agosto	-0,08689	0,02554	-0,09080	-0,06242
2010	Julio	0,12788	0,20026	0,22659	0,18730
2010	Junio	-0,02251	-0,13398	-0,09925	0,06944
2010	Mayo	-0,12729	-0,09530	-0,22969	-0,09102
2010	Abril	-0,09426	-0,04609	-0,08433	-0,03022
2010	Marzo	-0,00160	0,05859	0,18990	0,02178
2010	Febrero	-0,06145	-0,03428	-0,05811	-0,05317
2010	Enero	-0,04441	-0,07464	0,01658	-0,10537
2009	Diciembre	0,05001	0,05136	0,35641	0,00346
2009	Noviembre	0,02942	0,02868	0,02858	0,04849
2009	Octubre	-0,10855	-0,07512	-0,19422	0,00000
2009	Septiembre	0,01969	0,03647	0,09602	0,02031
2009	Agosto	0,06214	0,07944	-0,01549	0,08116
2009	Julio	-0,01619	0,06844	0,21098	0,18308
2009	Junio	-0,06938	-0,04503	-0,04762	0,12256
2009	Mayo	0,17153	-0,00712	-0,05251	0,07714
2009	Abril	0,00643	0,15041	0,36629	0,43529
2009	Marzo	-0,02752	0,04060	-0,05646	0,11017
2009	Febrero	-0,09367	-0,13344	-0,13969	-0,17910
2009	Enero	0,00170	-0,03381	-0,11446	-0,06186
2008	Diciembre	0,24816	0,13617	0,10953	0,05178
2008	Noviembre	-0,05328	0,05790	0,10641	-0,22428
2008	Octubre	-0,30359	-0,20021	-0,13253	-0,21846
2008	Septiembre	-0,20668	-0,11612	-0,16638	-0,08217
2008	Agosto	0,01596	-0,04782	0,03772	-0,03666
2008	Julio	-0,10004	0,04527	0,08581	0,07874
2008	Junio	-0,15092	-0,04745	-0,15367	-0,09946
2008	Mayo	-0,02169	-0,01345	-0,26692	-0,04645
2008	Abril	0,08551	-0,03829	0,05463	0,10357
2008	Marzo	0,02069	0,04351	-0,07543	0,07872
2008	Febrero	-0,03455	-0,09093	-0,02721	0,00714
2008	Enero	-0,21035	-0,00364	-0,16930	-0,18984
2007	Diciembre	-0,07199	-0,10509	-0,04508	0,01390
2007	Noviembre	0,09603	0,02415	-0,05932	-0,01122
2007	Octubre	0,11795	0,08916	0,08528	0,11350

2007	Septiembre	0,03722	0,01843	-0,05519	0,01660
2007	Agosto	0,00274	0,02067	-0,01118	-0,00420
2007	Julio	-0,04568	0,02040	-0,03537	0,02146
2007	Junio	0,01378	-0,02706	-0,03608	-0,03626
2007	Mayo	0,20790	0,18452	-0,02618	0,08923
2007	Abril	0,02678	0,04388	0,03465	-0,00874
2007	Marzo	0,06179	0,07157	0,04361	-0,03781
2007	Febrero	-0,04746	0,02045	0,01287	-0,03546
2007	Enero	0,11953	0,00707	-0,02845	0,02403
2006	Diciembre	0,03168	-0,01333	0,01863	0,02707
2006	Noviembre	-0,01115	-0,05494	0,03121	0,01957
2006	Octubre	0,15780	0,03137	0,03174	0,09088
2006	Septiembre	0,00284	0,22925	0,00431	0,03677
2006	Agosto	-0,00008	0,06310	0,05849	0,03525
2006	Julio	-0,02094	0,05797	0,01682	0,04419
2006	Junio	-0,01862	0,09562	-0,00124	0,02083
2006	Mayo	-0,06557	-0,01139	-0,06584	-0,06489
2006	Abril	0,05884	-0,02136	-0,02319	0,01682
2006	Marzo	0,09284	0,02061	0,01057	-0,01512
2006	Febrero	0,14998	0,15183	0,01561	0,05164
2006	Enero	0,08066	0,05418	-0,04731	0,06674
2005	Diciembre	0,00571	0,04979	0,04531	0,03175
2005	Noviembre	0,02436	0,01759	0,11187	0,02791
2005	Octubre	-0,03194	-0,02764	0,06822	-0,02608
2005	Septiembre	0,04536	0,13186	-0,06924	0,10193
2005	Agosto	0,06311	0,00726	-0,03333	-0,02415
2005	Julio	0,04094	-0,00031	0,02495	0,06814
2005	Junio	0,10928	0,06686	0,03612	0,03597
2005	Mayo	0,11323	0,03897	0,06097	0,03495
2005	Abril	-0,03629	0,01951	-0,01669	-0,03371
MEDIA		**0,00652**	**0,01130**	**0,00440**	**0,00972**
DESVIACIÓN TÍPICA		**0,09916**	**0,07752**	**0,10399**	**0,08940**

Fuente: Elaboración propia.