

Investigaciones sobre el cálculo de capacidades en tres dimensiones

Autor: Emilio Santomé Couto

Tesis doctoral UDC / Septiembre 2015

Director y tutor: Jesús Ángel Gomollón García

Departamento de Ingeniería Industrial



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Informe de valoración

Jesús Ángel Gomollón García, Doctor Ingeniero por la Universidad Técnica de Hamburgo-Harburgo, y Profesor Titular de Universidad del Área de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de A Coruña, director de esta tesis doctoral y tutor del doctorando, Emilio Santomé Couto, informa de que el presente trabajo cumple con los requisitos exigidos por la normativa vigente para optar al título de doctor.

Agradecimientos

Mi primer y más profundo agradecimiento quiero dedicarlo a todo el entorno humano que llena mi vida de afecto, con mi esposa Ade y mi familia en su centro, y al hablar de familia, incluyo en ella a esas grandes amistades que anidan en lo más profundo de mi corazón.

En el ámbito académico quiero dar las gracias a mis compañeros, Miguel, Santi y Gerardo, que contribuyen a hacer de mi día a día en la Universidad algo grato y enriquecedor.

Gracias también a Patricia por su ayuda en el tramo final de los trámites de presentación de este trabajo.

Gracias a Roberto, por su trabajo en el programa informático y su apoyo constante.

Y gracias especialmente a Jesús, que ha asumido con paciencia la labor de dirigir este trabajo y me ha ayudado en todo lo posible para que éste vea finalmente la luz.

Resumen

El presente trabajo muestra cómo la solución de problemas de campo electrostático por medio de las soluciones elementales puede usarse para la determinación de las capacidades parciales para una configuración de electrodos dada en tres dimensiones. Para calcular las distribuciones de carga en la superficie de los electrodos se utilizan el método de las cargas superficiales y el método de los elementos de contorno. La integración de las densidades de carga para cada uno de los vectores de potencial de cada solución elemental permite la determinación directa de la matriz de capacidades del sistema. Se muestra también la diferencia entre la integración de densidades de carga superficiales y la suma de cargas discretas. Se ha hecho especial hincapié en el cálculo en presencia de electrodos a potencial flotante.

Resumo

O presente traballo amosa como a solución de problemas de eido electrostático por medio das solucións elementais pode usarse para a determinación das capacidades parciais para unha configuración de electrodos dada en tres dimensións. Para calcular as distribucións de carga na superficie dos electrodos emprégase o método das cargas superficiais e o método dos elementos de contorno. A integración das densidades de carga para cada un dos vectores de potencial de cada solución elemental permite a determinación directa da matriz de capacidades do sistema. Amósase tamén a diferenza entre a integración de densidades de carga superficial e a suma de cargas discretas. Tense feito especial fincapé no cálculo en presenza de electrodos a potencial flotante.

Abstract

This work shows how to use the solution of electrostatic field problems by means of the basis set of solutions for the determination of the three dimensional partial capacitances between the electrodes of a given configuration. The Surface Charge Method and the Boundary Element Method are used to carry out the field calculation and determine the charge distributions on the electrode surfaces. The integration of the charge densities for the basis vectors of potentials allows the direct determination of the capacitance matrix of the problem. The difference between integrating surface charge densities and adding up fictitious charges for the determination of capacitances is also shown. Special attention is given to the computation in the presence of electrodes at floating potential.

Prólogo

Algunos usuarios del programa de cálculo de campos electrostáticos desarrollado a lo largo de los últimos años en el grupo de investigación del director de esta tesis doctoral, habían sugerido la posibilidad de incluir el cálculo de capacidades como una de las aplicaciones del programa. Tras desarrollar el método de las soluciones elementales para el cálculo de campos electrostáticos en el régimen del tiempo para variaciones lentas del potencial en los electrodos, parecía factible incorporar esta posibilidad de cálculo en el programa.

Con este objetivo se abordó el estudio de los métodos necesarios para que pudiesen realizarse cálculos de capacidades en cualquier tipo de configuraciones que pudiese abordar el programa, tanto en presencia de distintos medios dieléctricos como de electrodos a potencial flotante. De esta forma se podrían llevar a cabo cálculos de capacidades en tres dimensiones en configuraciones de electrodos complicadas, como las que aparecen en la técnica de alta tensión.

ÍNDICE

Informe de valoración.....	II
Agradecimientos.....	III
Resumen.....	IV
Resumo.....	V
Abstract.....	VI
Prólogo.....	VII
Capítulo 1 Introducción.....	1
Capítulo 2 Cálculo numérico de campos electrostáticos.....	5
2.1 Introducción.....	5
2.2 El método de las cargas discretas.....	7
2.2.1 Consideración de simetrías respecto al plano horizontal de coordenadas.....	9
2.2.2 Cálculo de configuraciones sin simetría de revolución.....	10
2.3 El método de las cargas superficiales.....	12
2.3.1 Condición de contorno para electrodos.....	14
2.3.2 Condición de contorno para superficies de separación de medios dieléctricos.....	15
2.3.3 Cálculo de configuraciones sin simetría de revolución.....	19
2.4 El método de los elementos de contorno.....	20
2.4.1 Condición de contorno para electrodos.....	23
2.4.2 Condición de contorno para fronteras de separación de medios dieléctricos.....	24
2.5 Cálculo de electrodos a potencial flotante.....	25
2.6 Cálculo combinado y selección de los métodos de cálculo.....	29
2.7 El método de las soluciones elementales.....	30
Capítulo 3 Capacidades en sistemas de conductores.....	35

3.1	Introducción.....	35
3.2	La matriz de capacidades.....	37
3.3	Sistemas con electrodos a potencial flotante.....	39
3.4	Medida de capacidades.....	41
3.5	Energía en función de capacidades y coeficientes de carga.....	44
3.6	Capacidades entre dos electrodos.....	45
3.7	Cambio de referencias de potencial.....	47
Capítulo 4	Cálculo de capacidades.....	53
4.1	Introducción.....	53
4.2	Cálculo de capacidades mediante aproximaciones analíticas.....	54
4.2.1	Cálculo con cargas imágenes.....	54
4.2.2	Cálculo mediante transformación conforme.....	57
4.3	Cálculo de capacidades a partir de diagramas de campo.....	63
4.3.1	Cálculo gráfico de capacidades en dos dimensiones.....	63
4.3.2	Cálculo gráfico de capacidades en sistemas con simetría rotacional.....	66
4.4	Cálculo numérico de capacidades.....	68
Capítulo 5	Aplicación de las soluciones elementales al cálculo de capacidades.....	73
5.1	Introducción.....	73
5.2	Cálculo de la matriz de capacidades con el método de las soluciones elementales.....	74
5.3	Comparación con otros métodos.....	76
5.4	Cálculos con cargas discretas.....	79
5.5	Cálculos con electrodos a potencial flotante.....	80
5.6	Ejemplo de un cálculo técnico complejo.....	83
Capítulo 6	Conclusiones.....	87
6.1	Resumen.....	87
6.2	Aportaciones originales del presente trabajo.....	88
6.3	Indicios de calidad.....	88

6.4 Posibilidades de trabajos futuros.....	89
Apéndice A Cálculos relativos a la transformación conforme.....	91
A.1 Relaciones entre du , dv , dx y dy	91
A.2 Invarianza de la carga en un electrodo entre dos coordenadas dadas en la transformación conforme.....	92
A.3 Cálculos para la transformación conforme $z=c \cot w$	95
Bibliografía.....	99

Capítulo 1 Introducción

Con el progreso del conocimiento y el avance de la ciencia, no sin frecuencia sucede, que el dominio de ciertos temas, que podrían considerarse como básicos, suele darse por supuesto, pasando a ser su estudio en muchas ocasiones, más superficial de lo que debería. Esto da lugar a que después se manejen en numerosos campos y aplicaciones conceptos erróneos o incompletos, que pueden dar lugar en algunas ocasiones a resultados paradójicos, y muchas veces a una interpretación incorrecta de los fenómenos físicos.

En las últimas décadas el cálculo de campos electrostáticos ha experimentado sin duda un gran avance, potenciado por el desarrollo de nuevos procedimientos numéricos de cálculo acompañado de una evolución extraordinaria de las posibilidades de cómputo debida a la evolución de la electrónica y la informática.

En la base del trabajo que aquí se presenta se encuentra el programa de cálculo de campos electrostáticos elaborado en la Universidad Técnica de Hamburgo-Harburgo por el profesor Singer en los años ochenta y que ha continuado siendo desarrollado en los últimos años por el grupo de investigación del profesor Gomollón en la Universidad de A Coruña.

Una de las demandas que planteaban con cierta frecuencia los usuarios del programa es el dibujo de diagramas de líneas de campo y equipotenciales, no sólo para tener un medio de visualizar la distribución de campo, sino con la intención de poder utilizar el dibujo para un cálculo gráfico de las capacidades entre los distintos electrodos de la configuración.

Ante esta necesidad se planteó la posibilidad de completar el programa con un procedimiento que permitiese obtener directamente y de modo numérico el valor de las capacidades parciales entre los distintos electrodos.

La teoría del cálculo de capacidades está formulada claramente desde los trabajos de Maxwell [27][Maxwell-1], sin embargo, hasta la fecha, no se encuentran muchas publicaciones relacionadas con el cálculo de capacidades, especialmente cuando se habla de capacidades entre electrodos de configuraciones de campo tridimensionales.

Con el desarrollo del método de las soluciones elementales para la resolución de problemas de cálculo de campos electrostáticos [33][Palau-1], se disponía de una herramienta que podía facilitar la implementación de un método numérico para el cálculo de capacidades, y este es el objetivo que se planteó al abordar este trabajo.

Ahora bien, se trataba de desarrollar un método de cálculo de capacidades con el que pudiese tenerse en cuenta de modo automático la presencia de distintas fronteras dieléctricas y también, y especialmente, la presencia de electrodos a potencial flotante.

El método que aquí se presenta cumple con las anteriores condiciones y su fiabilidad se ha comprobado mediante el cálculo de configuraciones analíticas así como comparando los resultados con los publicados en la bibliografía. Además se ha llevado a cabo el cálculo de configuraciones técnicas complicadas y comparado los resultados con medidas de laboratorio, obteniendo resultados aceptables.

Para presentar el trabajo realizado se ofrece en el capítulo 2 un resumen sobre los métodos numéricos de cálculo de campo electrostático utilizados. La exposición se limita a describir los métodos incorporados en el programa de cálculo utilizado, para una exposición más amplia sobre métodos de cálculo de campos electrostáticos se remite al lector a la bibliografía. Al final de este capítulo se presenta el método de las soluciones elementales [33][Palau-1] para la solución de problemas de campo, aunque con un planteamiento teórico más generalizado que el que se encuentra en las referencias bibliográficas.

En el tercer capítulo se presenta un estudio teórico sobre el concepto de capacidad en la teoría del campo electrostático.

En el cuarto capítulo se presentan los distintos métodos de cálculo de capacidades,

tanto analíticos como gráficos o numéricos referidos hasta la fecha en distintas fuentes bibliográficas.

En el capítulo quinto se presenta el método de cálculo de capacidades desarrollado, así como las soluciones adoptadas para su funcionamiento general en la presencia de distintas fronteras dieléctricas y con la presencia de electrodos a potencial indeterminado. Se presentan además distintos ejemplos de cálculo para probar la fiabilidad y efectividad del método desarrollado.

El trabajo termina en el capítulo seis, con un resumen y las conclusiones correspondientes.

En la redacción de este documento se ha preferido restringir las explicaciones de los distintos apartados, para los que había una fuente bibliográfica de referencia, al mínimo necesario para asegurar una comprensión adecuada. Para facilitar el trabajo con estas fuentes bibliográficas de referencia, la notación de estos apartados se ha adaptado a la notación de la fuente correspondiente. Esto puede dar lugar a que la notación de algunas magnitudes o coordenadas no sea unívoca a lo largo del texto, pero se ha tratado de poner especial cuidado en que este hecho no afecte a la comprensión, mediante la utilización de figuras explicativas cuando se ha considerado necesario. La idea de esta forma de proceder, es conseguir una menor extensión del volumen de texto, y, centrando la exposición en los aspectos fundamentales, facilitar la lectura y comprensión del documento.

Capítulo 2 Cálculo numérico de campos electrostáticos

2.1 Introducción

El programa de cálculo de campos utilizado para desarrollar el cálculo de capacidades que se muestra en este trabajo utiliza como métodos de cálculo el método de las cargas discretas [44][Singer-5], [26][Malik-1], el método de las cargas superficiales [43][Singer-4], [42][Singer-3] y el método de los elementos de contorno [16][Gutfleisch-1], [1][Andjelic-1].

Con el método de las cargas discretas y el método de las cargas superficiales, el programa permite utilizar, como elementos de la configuración a calcular, superficies con simetría de revolución orientadas en cualquier dirección y situadas en cualquier punto del espacio.

Cuando se utiliza el método de los elementos de contorno las superficies que pueden utilizarse para formar parte de la configuración no necesitan presentar simetría de revolución, pero tienen que poder construirse a partir de elementos de superficie de un conjunto determinado de superficies predefinidas, como puedan ser esferas, cilindros, conos, planos acotados o superficies curvas construidas a partir de triángulos curvilíneos.

En los apartados que siguen se van a describir los fundamentos de cálculo de cada uno de los métodos utilizados. Se parte de la base de que el problema de cálculo de

campos electrostáticos por resolver puede plantearse a partir de un conjunto de superficies cada una de las cuales puede considerarse bien como un electrodo o bien como una frontera de separación entre dos medios dieléctricos. Los electrodos pueden presentar un potencial fijo predeterminado y conocido o pueden tratarse como superficies equipotenciales con carga neta constante y nula (electrodos a potencial flotante).

En los tres métodos comentados el procedimiento de resolución del problema de valores de contorno asociado a la tarea de cálculo de campos propuesta es muy similar. Cada una de las superficies utilizadas en la descripción del problema tiene asociada una condición de contorno determinada.

En los métodos de cargas superficiales y elementos de contorno, la solución del problema consiste en determinar la densidad de carga eléctrica presente en cada una de las superficies que hace que se cumplan las condiciones de contorno. Para ello se discretizan las superficies mediante un número determinado de puntos sobre cada una de ellas, para referirse a estos puntos se utilizará el término de *puntos de contorno*. Las densidades de carga asociadas a cada uno de los puntos de contorno forman el conjunto de incógnitas del problema. La densidad de carga en cualquier otro punto de la superficie se obtiene a partir de estas incógnitas por interpolación. Para determinar el valor de las incógnitas se plantea en cada uno de los puntos de contorno una ecuación en la que, mediante una combinación lineal de las incógnitas, se fuerza el cumplimiento de la condición de contorno asociada al punto de contorno en cuestión.

En el caso del método de las cargas discretas las densidades de carga incógnitas asociadas a los puntos de contorno se sustituyen por densidades lineales o puntuales de carga, correspondientes a unas cargas ficticias que se sitúan en el interior de los electrodos, asociando a cada punto de contorno una de estas cargas ficticias.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones que se obtiene al forzar el cumplimiento de las condiciones de contorno en todos los puntos de contorno, se dispone de la distribución de carga sobre las superficies que definen el problema, electrodos y fronteras dieléctricas. A partir de ella, mediante integración es posible calcular potencial e intensidad de campo en cualquier punto del espacio.

2.2 El método de las cargas discretas

Como se ha comentado en el apartado anterior, para describir los distintos métodos de cálculo de campos, se va a tomar como referencia el modelo utilizado en el programa de cálculo que se ha utilizado para la realización de esta tesis doctoral, y que fue realizado por J. Gomollón [12][Gomollon-1] a partir del programa desarrollado en su día por H. Singer [41][Singer-2]. En este programa el método de las cargas discretas se utiliza únicamente para modelizar electrodos, no fronteras dieléctricas, por lo que la descripción que sigue se ceñirá únicamente al cálculo de configuraciones con electrodos.

En primer lugar se va a tratar la resolución de un problema con una distribución de campo con simetría rotacional, lo que implica que todos los electrodos presentes son superficies con simetría rotacional y comparten el mismo eje de rotación. Se toma el eje de rotación como eje Z del sistema cartesiano global de coordenadas de la configuración.

Considérese un electrodo formado por una superficie con simetría rotacional como la de la figura 2.1. Se selecciona un conjunto de puntos sobre la curva generatriz del plano XZ (plano $\varphi=0$ en coordenadas cilíndricas) que se van a usar como puntos de contorno. El número de puntos de contorno se selecciona en función de la exactitud con la que se desee realizar el cálculo. La distribución real de carga sobre la superficie del electrodo se sustituye por un conjunto de cargas discretas que se sitúan en el interior del mismo. Para ello se asigna a cada punto de contorno una carga discreta de un tipo y posición determinados. En el programa se utilizan cargas puntuales, cargas anulares y segmentos rectilíneos de carga. En la figura 2.1 se ha asignado una carga puntual al punto P_1 , cargas anulares a los puntos desde el P_2 al P_8 y segmentos rectilíneos de carga a los puntos P_9 al P_{11} . Se denotará como q_i al valor de carga asociado a cada punto de contorno P_i (este valor puede representar físicamente una carga, en el caso de las cargas puntuales, o una densidad lineal de carga, en el caso de las cargas anulares o los segmentos rectilíneos de carga).

La ecuación del potencial en el punto P_i debido al conjunto de cargas q_i se puede formular aplicando el principio de superposición como

$$\Phi_i = p_{i1} q_1 + p_{i2} q_2 + \dots + p_{in} q_n \quad (2.1)$$

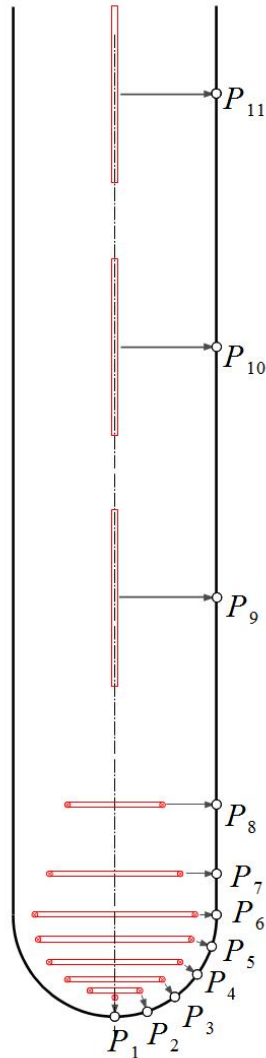


Figura 2.1: Simulación de un electrodo mediante distintos tipos de cargas discretas

en donde n representa el número total de puntos de contorno, o cargas discretas asociadas, presentes en el electrodo y p_{ij} representa lo que se conoce como *coeficiente de potencial* y que no es sino el potencial creado en el punto de contorno i por una carga de valor unidad y el tipo correspondiente situada en la posición de la carga j .

Si se plantea esta ecuación para los n puntos de contorno se obtiene un sistema lineal de ecuaciones, cuya resolución permite conocer el valor de las cargas q_i . A

partir de estos valores resulta posible, mediante integración, calcular el potencial y la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto del espacio. Sin embargo, es de rigor hacer notar, que los valores de potencial y campo que se obtendrían en el interior del electrodo no se corresponden con los que físicamente estarían presentes en la configuración real, es decir, potencial en todos los puntos del interior igual al potencial en la superficie del electrodo y campo eléctrico nulo. Esto es debido a que se ha sustituido la densidad superficial de carga del electrodo por un conjunto determinado de cargas discretas situadas en su interior.

Los valores de los distintos coeficientes de potencial para los diferentes tipos de carga, así como las integrales de cálculo de potencial y campo pueden consultarse en la bibliografía. Una descripción detallada de los mismos se encuentra en [14] [Gonzalez-1].

2.2.1 Consideración de simetrías respecto al plano horizontal de coordenadas

En el método de las cargas discretas la presencia de una configuración simétrica, ya sea la simetría positiva o negativa, respecto al plano horizontal de coordenadas (plano XY) permite simplificar el cálculo reduciendo el número de puntos de contorno necesarios para obtener una determinada precisión.

Para ello se utiliza la técnica de cargas imágenes. Los puntos de contorno se sitúan únicamente en el semiespacio superior del sistema de coordenadas ($z > 0$). A cada punto de contorno se le asocian dos cargas discretas del mismo tipo y situadas en posición simétrica respecto al plano de simetría. Cuando la simetría es positiva el valor de la carga imagen (situada por debajo del plano de simetría), es el mismo que el de la carga original. Cuando la simetría es negativa (es la forma de simular la presencia de un plano de tierra, es decir, un plano a potencial cero que coincide con el plano horizontal de coordenadas), el valor de la carga imagen es el mismo que el de la carga original pero cambiado de signo. Si se denota por j' la carga imagen de la carga j , la ecuación de potencial correspondiente al punto de contorno i se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\Phi_i &= p_{i1}q_1 + p_{i2}q_2 + \dots + p_{in}q_n + p_{i1'}s q_1 + p_{i2'}s q_2 + \dots + p_{in'}s q_n \\ &= (p_{i1} + s \cdot p_{i1'})q_1 + (p_{i2} + s \cdot p_{i2'})q_2 + \dots + (p_{in} + s \cdot p_{in'})q_n\end{aligned}\quad (2.2)$$

En donde s vale 1 si la simetría es positiva o -1 si la simetría es negativa.

2.2.2 Cálculo de configuraciones sin simetría de revolución

El programa utilizado para desarrollar este trabajo permite utilizar el método de las cargas discretas cuando, aun siendo todos los electrodos superficies con simetría de revolución, no tengan todos ellos sus ejes situados sobre el eje Z del sistema global de coordenadas, sino que puedan encontrarse desplazados a cualquier punto del espacio y con sus ejes situados en una orientación espacial arbitraria.

En este caso, al no tener la distribución de campo eléctrico simetría rotacional, el forzar en cada electrodo la condición de contorno, para cada plano perpendicular al eje de rotación, sobre un único punto de la curva generatriz, no garantiza que la condición de contorno se cumpla en el resto de puntos situados sobre la superficie del electrodo en el mismo plano perpendicular al eje del electrodo. Por esta razón se hace necesario situar en cada plano perpendicular al eje del electrodo varios puntos de contorno.

El sistema de asignación de las cargas discretas a los puntos de contorno explicado anteriormente asignaría a todos los puntos de contorno situados sobre el mismo plano perpendicular al eje del electrodo la misma carga discreta en el interior del electrodo. De nada serviría tener varios valores de carga distintos asociados a la misma carga situada en la misma posición, pues esto equivaldría a tener una única carga con un valor igual a la suma de cada una de las cargas individuales. La densidad lineal de las cargas anulares y de los segmentos rectilíneos de carga continuaría siendo constante, y las distribuciones de potencial a las que darían lugar estas cargas corresponderían a campos con simetría rotacional alrededor del eje del electrodo, lo que ya no se correspondería con la distribución de campo presente, cuando el electrodo se encuentra con orientación y posición arbitrarias en el espacio.

Para soslayar esta dificultad se utiliza la técnica que se explica a continuación.

Las cargas puntuales se asocian únicamente a puntos de contorno situados sobre el eje de simetría del electrodo, por lo que, habiendo un único punto sobre la

generatriz en el plano perpendicular al eje en ese punto, no es necesario utilizar más que una carga puntual con su valor correspondiente.

Las cargas anulares se dotan de una distribución de densidad lineal de carga que es función del ángulo acimutal sobre el plano en que está situada la carga. Esta distribución tiene tantos valores indeterminados como puntos de contorno están asociados a la carga y tiene la forma indicada en la fórmula siguiente:

$$\lambda(\varphi_L) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(\varphi_L) + \lambda_2 \sin(\varphi_L) + \lambda_3 \cos(2\varphi_L) + \lambda_4 \sin(2\varphi_L) + \dots + \lambda_m \cos\left(\frac{m+1}{2}\varphi_L\right) + \lambda_{m+1} \sin\left(\frac{m+1}{2}\varphi_L\right) \quad (2.3)$$

Cada valor de carga λ_i se asocia a uno de los puntos de contorno, situados en el mismo plano perpendicular al eje del electrodo, a los que está asociada la carga anular (figura 2.2).

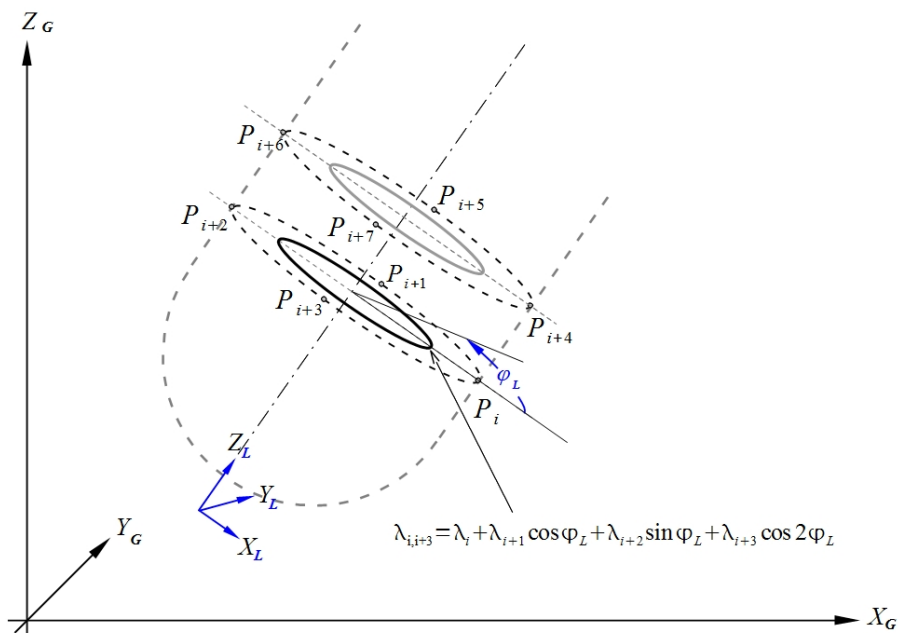


Figura 2.2: Puntos de contorno asociados a cargas discretas cuando la configuración de campo no presenta simetría axial. El mismo anillo de carga, con cuatro valores de carga asociados, corresponde a los cuatro puntos de contorno situados sobre el mismo plano perpendicular al eje de la superficie.

En el caso de que la configuración presente simetría respecto al plano de

coordenadas XZ , se utilizan únicamente funciones coseno para la distribución lineal de carga de las cargas anulares:

$$\lambda(\varphi_L) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(\varphi_L) + \lambda_2 \cos(2\varphi_L) + \dots + \lambda_m \cos(m\varphi_L) \quad (2.4)$$

Además, en este caso, los puntos de contorno se sitúan únicamente sobre el semiespacio $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, donde φ representa la coordenada acimutal de un sistema global de coordenadas cilíndricas.

Cada segmento rectilíneo de carga se trata como un multipolo con una densidad lineal de carga con tantos valores indeterminados como puntos de contorno están asociados al segmento. Las funciones de carga de estos multipolos y sus coeficientes de potencial y campo pueden encontrarse en [40][Singer-1].

2.3 El método de las cargas superficiales

En el programa utilizado las cargas superficiales pueden utilizarse para calcular tanto electrodos como fronteras de separación de medios dieléctricos cuando las superficies consideradas presentan simetría de rotación, aunque pueden estar situadas en cualquier posición del espacio con su eje orientado en una dirección arbitraria.

Cada superficie que se pretende calcular con este método se discretiza tomando un conjunto de puntos de contorno de la misma forma en que se ha descrito en el método de cargas discretas. Cuando la configuración tiene simetría rotacional se distribuyen puntos de contorno únicamente sobre la curva generatriz de la superficie en el plano XZ del sistema local de coordenadas. Si la configuración no presenta simetría rotacional, en cada plano perpendicular al eje de rotación que pasa por cada uno de los puntos de contorno situados sobre la curva generatriz del plano XZ local, se sitúa un número adicional de puntos (el número de puntos distribuidos en dirección acimutal local sobre cada uno de estos planos depende igualmente de la exactitud pretendida para el cálculo).

Considérese en primer lugar una distribución de campo con simetría rotacional. El conjunto de puntos de contorno seleccionado permite dividir la superficie considerada en un conjunto de rodajas como la que se muestra en la figura 2.3,

situada entre los puntos de contorno P_i y P_{i+1} .

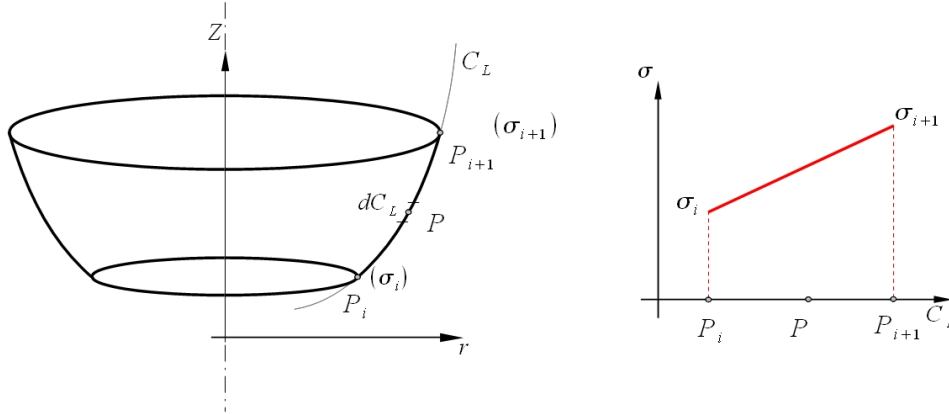


Figura 2.3: Rodaja de una superficie con simetría rotacional y su distribución de densidad de carga.

En lugar de asignar a cada punto una carga discreta, en el método de las cargas superficiales cada rodaja de superficie se supone cubierta con una densidad superficial de carga eléctrica sin variación en dirección acimutal, y con una variación sobre la curva generatriz de forma lineal con la longitud de arco entre dos valores de densidad de carga, asociados a cada uno de los puntos de contorno que limitan la rodaja considerada. Así, en la figura 2.3 al punto de contorno P_i le corresponde una densidad de superficial de carga σ_i y al punto de contorno P_{i+1} le corresponde una densidad superficial de carga σ_{i+1} . En un punto intermedio de la superficie situado entre los puntos P_i y P_{i+1} , la densidad superficial de carga puede expresarse mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \sigma(P) &= \sigma(P_i) \cdot G_1(P_i, P_{i+1}, P) + \sigma(P_{i+1}) \cdot G_2(P_i, P_{i+1}, P) \\ G_1(P_i, P_{i+1}, P) &= 1 - \frac{L(P_i, P)}{L(P_i, P_{i+1})} \\ G_2(P_i, P_{i+1}, P) &= \frac{L(P_i, P)}{L(P_i, P_{i+1})} \end{aligned} \tag{2.5}$$

en donde $L(P_i, P_{i+1})$ representa la longitud de arco del punto P_i al punto P_{i+1} .

2.3.1 Condición de contorno para electrodos

El potencial creado en un punto P_i con coordenadas $(r_i, z_i, 0)$, en un sistema de coordenadas cilíndricas, por un anillo de carga representado por las coordenadas $(r_j, z_j, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ y con una densidad lineal de carga de valor λ_j que viene dado por la expresión [43][Singer-4]

$$\Phi(P_i) = \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon} \sqrt{\frac{r_j}{r_i}} Q_{n-\frac{1}{2}}(\xi) \quad (2.6)$$

En donde

$$\begin{aligned} d^2 &= (z_i - z_j)^2 + r_i^2 + r_j^2 \\ \xi &= \frac{d^2}{2r_i r_j} = 1 + \frac{(z_i - z_j)^2 + (r_i - r_j)^2}{2r_i r_j} \end{aligned} \quad (2.7)$$

El potencial creado por la rodaja de carga de la figura 2.3, con una distribución de carga dada por (2.5), en un punto $P(r, z, \varphi)$ se obtiene integrando la expresión (2.6), resultando

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{C_L} \sigma(C_L) Y_1(P_L, P) dC_L \\ Y_1(P_L, P) &= \sqrt{\frac{r_L}{r}} Q_{n-\frac{1}{2}}(\xi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} b^2 &= (r - r_L)^2 + (z - z_L)^2 \\ d^2 &= (z - z_L)^2 + r^2 + r_L^2 = b^2 + 2r r_L \\ \xi &= \frac{d^2}{2r r_L} = 1 + \frac{b^2}{2r r_L} \end{aligned} \quad (2.9)$$

En las fórmulas anteriores $Q_{n-1/2}$ es una función asociada de Legendre de segunda especie, r_L y z_L representan la coordenadas r y z respectivamente de cualquier punto de la superficie de integración y dC_L representa el diferencial de longitud de arco sobre la curva generatriz de la superficie de integración.

La ecuación correspondiente al potencial creado en un punto de contorno P_i por la distribución de carga de la rodaja de carga (σ_i, σ_{i+1}) de la figura 2.3 se obtiene sustituyendo la expresión (2.5) en la fórmula (2.8):

$$\begin{aligned} \phi(P_i) = & \sigma_i \cdot \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{C_L} Y_1(P_L, P_i) G_1(P_i, P_{i+1}, P_L) dC_L \right) \\ & + \sigma_{i+1} \cdot \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{C_L} Y_1(P_L, P_i) G_2(P_i, P_{i+1}, P_L) dC_L \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3.2 Condición de contorno para superficies de separación de medios dieléctricos

La condición de contorno que se aplica en electrostática a una superficie de separación de dos medios dieléctricos como la mostrada en la figura 2.4 con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 es [21][Johnk-1]:

$$\epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1} = 0 \quad (2.11)$$

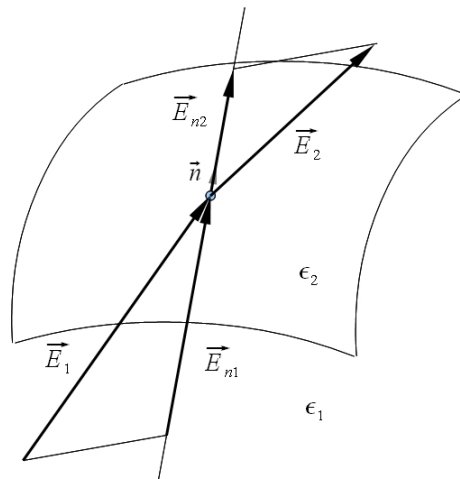


Figura 2.4: Condición de contorno en una superficie de separación de dos medios dieléctricos

La intensidad de campo en coordenadas cilíndricas que genera una rodaja con una

densidad superficial de carga σ como la de la figura 2.3 viene dada por las fórmulas [42][Singer-3]:

$$E_r(P) = \frac{1}{\pi \epsilon} \int_{C_L} \sigma(C_L) Y_2(P_L, P) dC_L$$

$$E_\phi(P) = 0 \tag{2.12}$$

$$E_z(P) = \frac{1}{\pi \epsilon} \int_{C_L} \sigma(C_L) Y_3(P_L, P) dC_L$$

con

$$Y_2(P_L, P) = Y_1(P_L, P) \cdot \left(\frac{1}{4r} + \frac{1/2}{a^2 \cdot b^2} \cdot r_L \cdot (d^2 - 2r^2) \cdot (1 - \xi) \right)$$

$$Y_3(P_L, P) = Y_1(P_L, P) \cdot \frac{4r r_L \cdot (z_L - z)}{a^2 \cdot b^2} \cdot (1 - \xi) \tag{2.13}$$

en donde, además de los parámetros definidos en (2.9) se ha usado:

$$a^2 = (r + r_L)^2 + (z - z_L)^2 \tag{2.14}$$

Si se sustituye (2.5) en (2.12) se obtiene

$$E_r(P) = \sigma(P_i) \left(\frac{1}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_1(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_2(P_L, P) dC_L \right) +$$

$$\sigma(P_{i+1}) \left(\frac{1}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_2(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_2(P_L, P) dC_L \right)$$

$$E_\phi(P) = 0 \tag{2.15}$$

$$E_z(P) = \sigma(P_i) \left(\frac{1}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_1(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_3(P_L, P) dC_L \right) +$$

$$\sigma(P_{i+1}) \left(\frac{1}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_2(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_3(P_L, P) dC_L \right)$$

En el programa de cálculo de campos empleado las integrales de las fórmulas

(2.10) y (2.15) se resuelven numéricamente. Las integrales (2.12), cuando se calculan para un punto situado sobre una superficie de separación de dos medios dieléctricos, proporcionan dos valores distintos según a qué lado de la superficie se evalúe la integral. Cuando se resuelven numéricamente, el valor que se obtiene como resultado de la integral es el valor medio de los dos valores de campo que se obtendrían a cada lado de la superficie. Mediante la transformación de coordenadas siguiente

$$\begin{bmatrix} \overline{E}_n \\ \overline{E}_t \\ \overline{E}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{E}_r \\ \overline{E}_z \\ \overline{E}_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

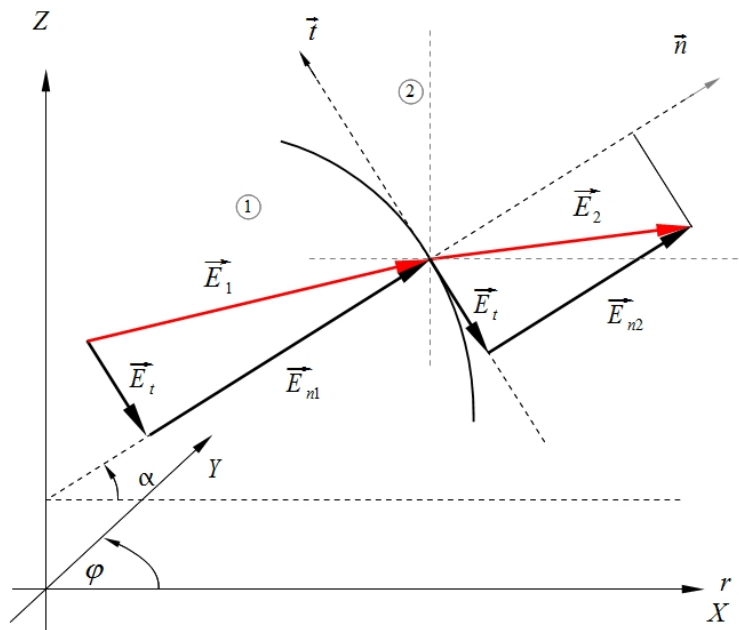


Figura 2.5: Transformación de coordenadas para el cálculo de componentes de campo

Se obtienen los valores medios del campo en un sistema local de coordenadas sobre un punto de la superficie (figura 2.5), y los valores reales del campo sobre el

punto se calculan mediante las expresiones:

$$\begin{aligned}
 E_{n2} &= \overline{E}_n + \frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \\
 E_{n1} &= \overline{E}_n - \frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \\
 E_t &= \overline{E}_t \\
 E_\varphi &= \overline{E}_\varphi = 0
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para formular la ecuación de contorno correspondiente a un punto P de una superficie de separación de dos medios dieléctricos se sustituye (2.15) en (2.16) para realizar las transformaciones de coordenadas, aplicándose después (2.17), con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E_{n2} &= \sigma(P_i) \left(\frac{\cos \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_1(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_2(P_L, P) dC_L + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sin \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_1(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_3(P_L, P) dC_L \right) + \\
 &\quad \sigma(P_{i+1}) \left(\frac{\cos \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_2(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_2(P_L, P) dC_L + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sin \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_2(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_3(P_L, P) dC_L \right) + \frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \\
 E_{n1} &= \sigma(P_i) \left(\frac{\cos \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_1(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_2(P_L, P) dC_L + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sin \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_1(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_3(P_L, P) dC_L \right) + \\
 &\quad \sigma(P_{i+1}) \left(\frac{\cos \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_2(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_2(P_L, P) dC_L + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sin \alpha}{\pi \epsilon} \int_{C_L} G_2(P_i, P_{i+1}, P_L) Y_3(P_L, P) dC_L \right) - \frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

y por último se sustituye (2.18) en (2.11). En la fórmula anterior, P estará situado entre dos puntos de contorno k y $k+1$ pudiendo sustituirse $\sigma(P)$ por

$$\sigma(P) = \sigma(P_k) \cdot G_1(P_k, P_{k+1}, P) + \sigma(P_{k+1}) \cdot G_2(P_k, P_{k+1}, P) \tag{2.19}$$

2.3.3 Cálculo de configuraciones sin simetría de revolución

Al igual que ocurría en el método de las cargas discretas, cuando una superficie, sea electrodo o zona de separación entre dos medios dieléctricos, tiene simetría axial pero se encuentra en un campo que no presenta esa simetría, para resolver el problema se fuerza el cumplimiento de la condición de contorno no sólo en los puntos de contorno situados sobre la generatriz principal de la superficie, sino que para cada punto sobre la generatriz principal, y situados en el mismo plano perpendicular al eje, se sitúan un numero determinado de puntos de contorno adicionales tal y como se muestra en la figura 2.6.

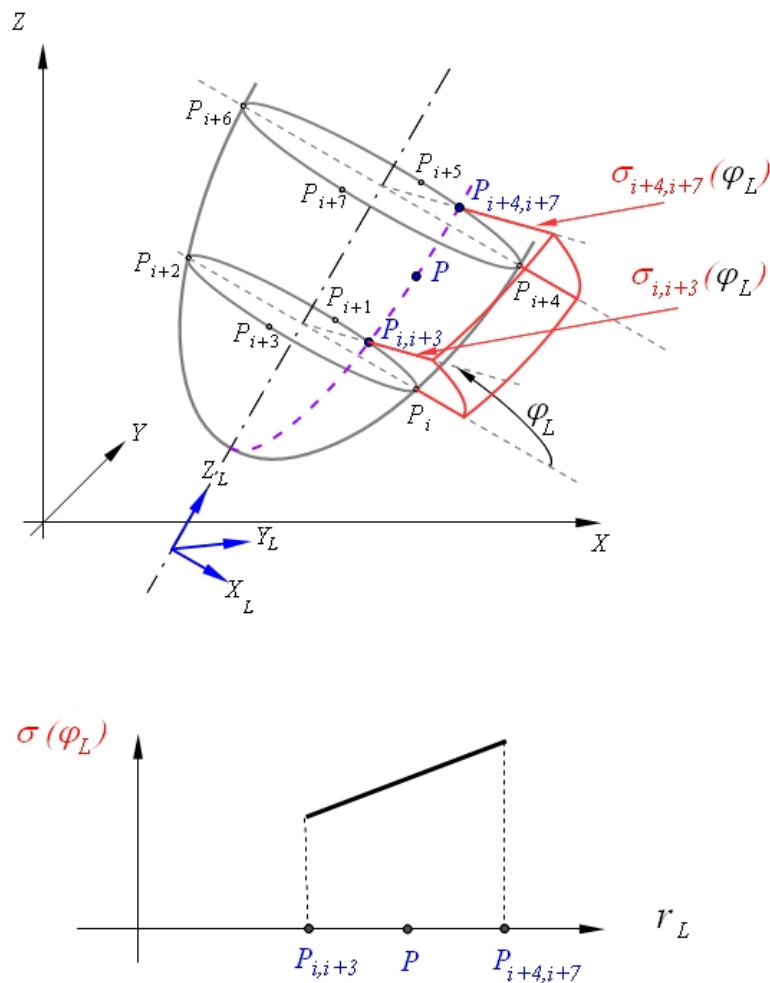


Figura 2.6: Puntos de contorno asociados a cargas superficiales cuando la configuración de campo no presenta simetría axial.

Las condiciones de contorno para electrodos y superficies de separación de medios dieléctricos son las mismas que en el caso de campo con simetría axial. Únicamente cambian las funciones de distribución de carga superficial, pues ahora deben incluir la dependencia del ángulo acimutal, así como los coeficientes de campo y potencial que de ellas dependen.

Así, para la rodaja de carga de la figura 2.6 se tiene la misma expresión para la densidad de carga del punto P , añadiendo únicamente la dependencia funcional de φ_L :

$$\sigma(P) = \sigma_{i,i+3}(\varphi_L) \cdot G_1(P_{i,i+3}, P_{i+4,i+7}, P) + \sigma_{i+4,i+7}(\varphi_L) \cdot G_2(P_{i,i+3}, P_{i+4,i+7}, P) \quad (2.20)$$

en donde

$$\sigma_{i,i+3}(\varphi_L) = \sigma_{i,i+3}^0 + \sigma_{i,i+3}^1 \cos(\varphi_L) + \sigma_{i,i+3}^2 \sin(\varphi_L) + \sigma_{i,i+3}^3 \cos(2\varphi_L) \quad (2.21)$$

Las fórmulas de potencial e intensidad de campo para el primer término de la densidad de carga de la fórmula (2.21), $\sigma_{i,i+3}^0$, son las mismas que se expusieron en el apartado anterior. Para los otros términos que componen la densidad de carga, con dependencia de funciones trigonométricas, las fórmulas de potencial e intensidad de campo pueden encontrarse en [41][Singer-2], [42][Singer-3].

2.4 El método de los elementos de contorno

El método de los elementos de contorno utiliza el mismo principio de cálculo que el método de las cargas superficiales, si bien, debido a razones históricas recibe un nombre distinto. La superficie del electrodo o frontera de separación de medios dieléctricos se divide en un conjunto de superficies más pequeñas o *superficies elementales*, cada una de las cuales está limitada por un conjunto de puntos que se toman como puntos de contorno para forzar el cumplimiento de las condiciones de contorno del problema. En el programa de cálculo utilizado en la presente tesis las superficies elementales están limitadas bien por tres, bien por cuatro puntos de contorno dando lugar a triángulos o rectángulos curvilíneos como superficies elementales.

Cuando estos triángulos o rectángulos curvilíneos son parte de una superficie plana, cónica, cilíndrica circular, esférica o toroidal, el programa cuenta con métodos de integración más rápidos para el cálculo del potencial e intensidad de campo, combinando una integración analítica con integración numérica, y por ello deben usarse con preferencia. Aunque también es posible utilizar triángulos curvilíneos generalizados cuyos lados están formados por curvas de segundo orden. Además, la generación de la malla de superficies para discretizar la superficie se puede realizar de manera automática para el caso de las superficies comentadas anteriormente, mientras que para el caso de los triángulos curvilíneos generalizados, es preciso utilizar un programa adicional o realizar la discretización a mano.

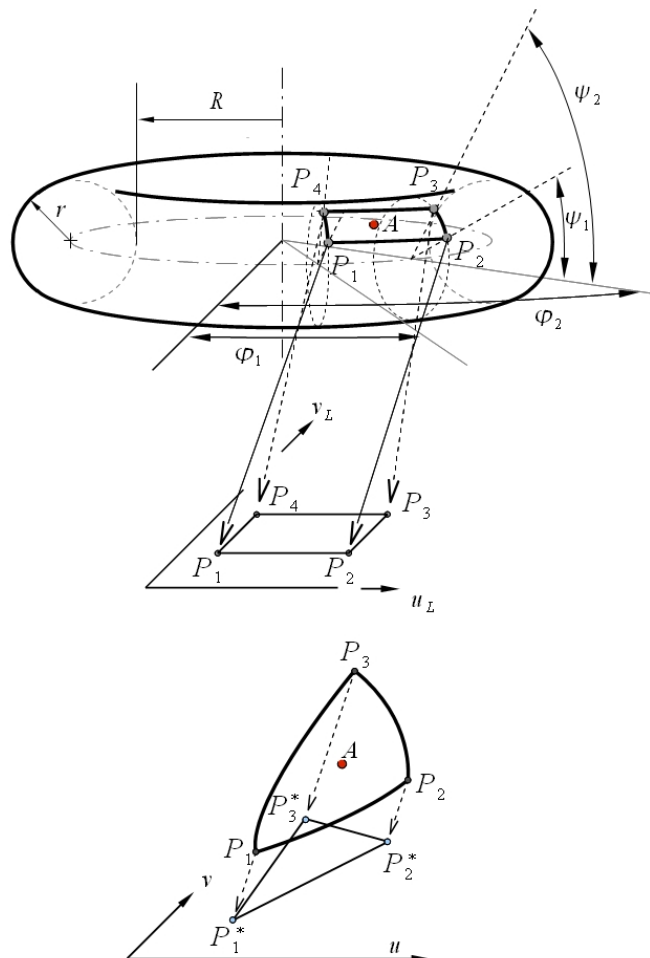


Figura 2.7: Elemento triangular curvilíneo y elemento rectangular en sistema toroidal según se usan en el método de los elementos de contorno.

Como ejemplo en la figura 2.7 se muestran un triángulo curvilíneo y un elemento rectangular de una superficie toroidal. Las coordenadas de los puntos sobre la superficie considerada pueden obtenerse mediante una transformación de coordenadas, a partir de un elemento triangular o rectangular de referencia situado sobre un plano de coordenadas (u,v) , tal y como se muestra en la figura.

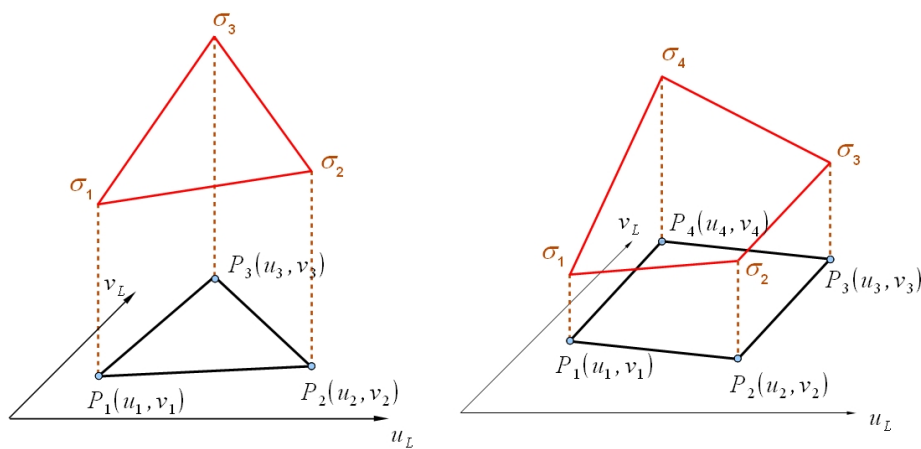


Figura 2.8: Densidades de carga en elementos de referencia triangulares y rectangulares.

La densidad superficial de carga se aproxima en cada elemento por una función de los valores de densidad de carga en los vértices del elemento triangular o rectangular de referencia, tal que la variación de densidad de carga sobre los lados del elemento triangular o rectangular de referencia sea lineal. De esta manera se obtienen las siguientes funciones de densidad de carga sobre los elementos de referencia de la figura 2.8, que pueden corresponder a elementos de superficie de cualesquiera de los sistemas coordenados comentados con anterioridad [16] [Gutfleisch-1]. Para un elemento de referencia triangular:

$$\begin{aligned}
\sigma(A) = \sigma(u_L, v_L) = & \left\{ \sigma_1 \cdot [u_3 v_2 - u_2 v_3 + (v_3 - v_2) \cdot u_L + (u_2 - u_3) \cdot v_L] \right. \\
& + \sigma_2 \cdot [u_1 v_3 - u_3 v_1 + (v_1 - v_3) \cdot u_L + (u_3 - u_1) \cdot v_L] \\
& \left. + \sigma_3 \cdot [u_2 v_1 - u_1 v_2 + (v_2 - v_1) \cdot u_L + (u_1 - u_2) \cdot v_L] \right\} \\
& \cdot \frac{1}{(u_3 - u_2) \cdot (v_3 - v_1) - (u_3 - u_1) \cdot (v_3 - v_2)} = \\
& = k_0 + k_1 \cdot u_L + k_1 \cdot v_L
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Y para un elemento de referencia rectangular:

$$\begin{aligned}
\sigma(A) = \sigma(u_L, v_L) = & \left\{ \sigma_1 \cdot (u_2 v_2 - v_2 \cdot u_L - u_2 \cdot v_L + u_L v_L) \right. \\
& - \sigma_2 \cdot (u_1 v_2 - v_2 u_L - u_1 v_L + u_L v_L) \\
& + \sigma_3 \cdot (u_1 v_1 - v_1 \cdot u_L - u_1 \cdot v_L + u_L v_L) \\
& \left. - \sigma_4 \cdot (u_2 v_1 - v_1 u_L - u_2 v_L + u_L v_L) \right\} \\
& \cdot \frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)} = \\
& = k_0 + k_1 \cdot u_L + k_2 \cdot v_L + k_3 u_L v_L
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.4.1 Condición de contorno para electrodos

El potencial creado en cualquier punto de contorno por un elemento superficial de carga, S_k , como los de la figura 2.7 por ejemplo, viene dado por la expresión

$$\begin{aligned}
\phi(P_i) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_k} \frac{\sigma(A)}{r} dA \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_k} \frac{\sigma(u_L, v_L)}{r(P_i, u_L, v_L)} \cdot dA(u_L, v_L)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Donde $dA(u_L, v_L)$ depende del sistema de coordenadas utilizado para la descripción del elemento de superficie en cuestión. La sustitución de (2.22) o (2.23), según el tipo de elemento, en la expresión anterior, proporciona una ecuación con coeficientes de potencial integrales respecto de los valores de densidad de carga en los vértices del elemento de superficie considerado.

2.4.2 Condición de contorno para fronteras de separación de medios dieléctricos

El tratamiento es análogo al explicado para las cargas superficiales. Se utiliza la condición de contorno (2.11). La intensidad de campo en un punto de contorno P_i creada por un elemento de superficie S_k se calcula en un sistema cartesiano de coordenadas global. Así, la componente η (x, y o z) se obtiene derivando parcialmente la expresión (2.24) respecto a η resultando:

$$\begin{aligned}
 E_\eta(P_i) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_{S_k}} \int \frac{\sigma(A)r_\eta}{r^3} dA \\
 &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_{S_k}} \int \frac{\sigma(u_L, v_L)r_\eta(P_i, u_L, v_L)}{r^3(P_i, u_L, v_L)} dA(u_L, v_L)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

En donde $r_\eta = \eta - \eta_L$.

Las integrales (2.25) se evalúan por un procedimiento mixto, llevando a cabo en primer lugar una integración analítica hasta donde se puede, y realizando los últimos pasos de integración por métodos numéricos.

Como ocurría en el caso de las cargas superficiales, cuando los puntos de contorno están situados sobre una frontera de separación de medios dieléctricos los valores finales obtenidos como resultado representan el valor medio de los dos valores de la intensidad de campo a ambos lados de la frontera.

Mediante una transformación de coordenadas adecuada se obtienen los valores de intensidad de campo en cada punto de contorno en un sistema de coordenadas local, adaptado al tipo de superficie, donde las componentes de la intensidad de campo tienen direcciones normal, tangencial y acimutal a la superficie (2.26).

$$\begin{bmatrix} \overline{E}_n \\ \overline{E}_t \\ \overline{E}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{E}_x \\ \overline{E}_y \\ \overline{E}_z \end{bmatrix}
 \tag{2.26}$$

Después se calculan los valores reales de la intensidad de campo a cada lado mediante las expresiones (2.17) y se formula, con estos valores, la ecuación de contorno (2.11).

2.5 Cálculo de electrodos a potencial flotante

Como se ha visto hasta ahora tanto en el caso de los electrodos a potencial fijo, como en el caso de las fronteras de separación de medios dieléctricos, el número de incógnitas (valores de cargas puntuales, o densidades lineales o superficiales de carga) es igual al número de puntos de contorno, ya que se formula una ecuación por cada punto de contorno.

En el caso de los electrodos a potencial flotante o indeterminado aparece una incógnita adicional, que es el mismo potencial del electrodo. Para poder calcularla se supone conocida la carga del electrodo, por lo general nula, y se escribe como ecuación adicional la correspondiente al cálculo de la carga libre total presente en la superficie de electrodo:

$$Q_e = \int_{S_e} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \int_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.27)$$

en donde Q_e es la carga total del electrodo e , que se considera dividido en n partes, estando rodeada cada una de las partes i por un medio dieléctrico de permitividad ϵ_i .

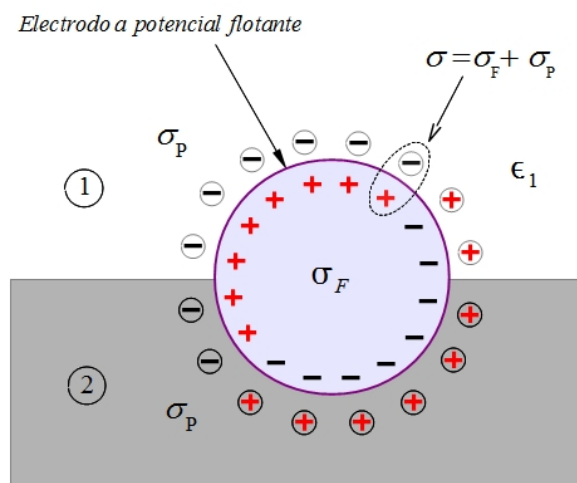


Figura 2.9: Electrodo cerrado a potencial flotante rodeado de dos medios dieléctricos diferentes

La ecuación (2.27) es válida para electrodos cerrados rodeados de uno o varios medios dieléctricos con diferentes permitividades, pero no resulta adecuada en el caso de electrodos planos o abiertos en los que pueden aparecer cargas de polarización a ambos lados de la superficie del electrodo. Para que el programa de cálculo pueda separar la carga libre del electrodo y las cargas de polarización a ambos lados de la frontera se utiliza la siguiente técnica.

La figura 2.9 muestra un electrodo a potencial flotante rodeado por dos medios dieléctricos diferentes. La ecuación (2.27) para fijar la carga libre total del electrodo a un valor dado Q_0 (normalmente nulo) puede escribirse como:

$$\int_S \sigma_F dS = Q_0 = 0 \quad (2.28)$$

La integral de la ecuación (2.28) puede dividirse en dos partes correspondientes a las dos medios diferentes que rodean el electrodo, resultando:

$$\int_{S_1} \sigma_F dS + \int_{S_2} \sigma_F dS = 0 \quad (2.29)$$

Si se utiliza la técnica original para el tratamiento de superficies dieléctricas adyacentes a los electrodos y se usa como incógnita únicamente densidad de carga total, la carga libre de la ecuación (2.28) debe ponerse en función de la carga total mediante las relaciones

$$\begin{cases} \sigma_F = \epsilon_{r1} \sigma & \text{en la región (1)} \\ \sigma_F = \epsilon_{r2} \sigma & \text{en la región (2)} \end{cases} \quad (2.30)$$

para poder formular una ecuación que pueda insertarse en el sistema de ecuaciones, obteniéndose en este caso una ecuación similar a la (2.27)

$$\epsilon_{r1} \int_{S_1} \sigma dS + \epsilon_{r2} \int_{S_2} \sigma dS = 0 \quad (2.31)$$

En el caso de electrodos aplanados no es posible trabajar únicamente con la densidad de carga total para obtener una condición que ayude a resolver el problema. Pero si se diferencia entre cargas libres y cargas de polarización sí que es posible obtener la ecuación buscada. Para ver cómo se puede hacer esto, considérese la figura 2.10 en la que un electrodo plano se encuentra situado entre

dos medios dieléctricos diferentes.

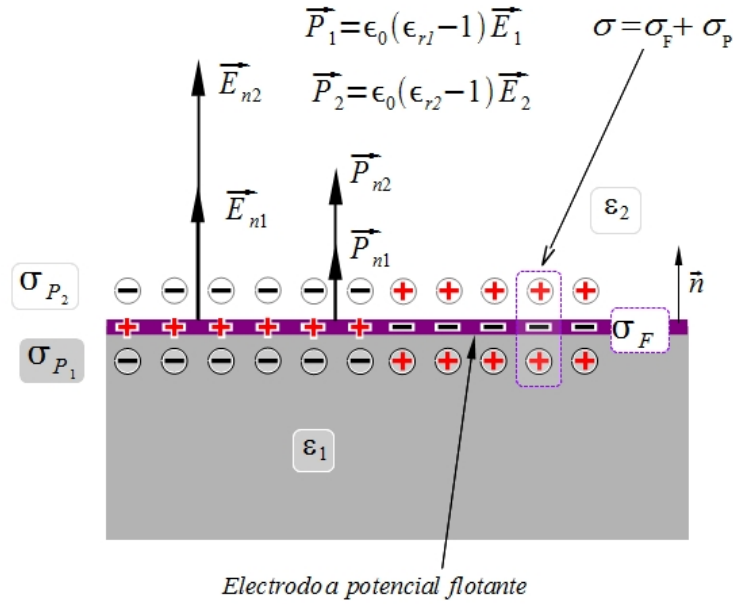


Figura 2.10: Electrodo plano a potencial flotante rodeado por dos medios dieléctricos diferentes

Las condiciones de contorno sobre la frontera pueden formularse separadamente para los vectores campo eléctrico y polarización eléctrica [21][Johnk-1]:

$$\begin{cases} E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ P_{n2} - P_{n1} = -\sigma_P \end{cases} \quad (2.32)$$

Por otro lado la componente normal del vector intensidad de campo a ambos lados de la frontera puede escribirse como suma de un valor medio más o menos la contribución de la densidad de carga total, de manera que se obtenga el salto adecuado entre ambas componentes normales a ambos lados de la frontera:

$$\begin{cases} E_{n2} = E_n + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ E_{n1} = E_n - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{cases} \quad (2.33)$$

Y los vectores de polarización se pueden escribir como:

$$\begin{cases} \vec{P}_2 = \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)\vec{E}_2 \\ \vec{P}_1 = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)\vec{E}_1 \end{cases} \quad (2.34)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.33) y (2.34) en (2.32) se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{n2} - P_{n1} &= \epsilon_0 \{ (\epsilon_{r2} - 1)E_{n2} - (\epsilon_{r1} - 1)E_{n1} \} \\ &= \epsilon_0 \{ E_n(\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\epsilon_{r2} + \epsilon_{r1} - 2) \} = -\sigma_p \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si se sustituye σ por la suma de $\sigma_f + \sigma_p$, donde $\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2}$, entonces resulta finalmente:

$$E_n(\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) + \frac{\sigma_f}{2\epsilon_0}(\epsilon_{r2} + \epsilon_{r1} - 2) + \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}(\epsilon_{r2} + \epsilon_{r1}) = 0 \quad (2.36)$$

En cada punto de contorno de la frontera se consideran ahora 2 incógnitas, la densidad superficial de carga libre, σ_f , y la densidad superficial de carga de polarización, $\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2}$. Se formulan igualmente dos ecuaciones, una la correspondiente al potencial del electrodo y otra la ecuación (2.36). Para la incógnita restante, el potencial del electrodo, resulta ahora posible formular la ecuación (2.29), pues la carga libre es ahora una de las incógnitas del sistema de ecuaciones.

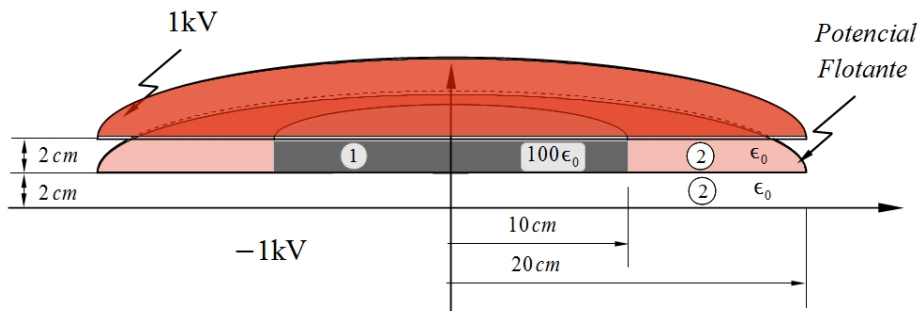


Figura 2.11: Electrodo plano a potencial flotante rodeado por dos medios dieléctricos diferentes

Para comprobar el funcionamiento de esta técnica se puede usar la configuración

de la figura 2.11. Si la configuración se calcula sin diferenciar la carga libre y la carga de polarización, se obtiene un potencial de 0 kV para la placa central. Si se utiliza, por contra, el método recién descrito, se obtiene un valor del potencial de 0,91108 kV, que corresponde mucho mejor al valor que cabría esperar de acuerdo con las constantes dieléctricas escogidas.

Para comprobar el resultado obtenido se calculó la configuración de la figura 2.12, para la que es posible escribir la condición de contorno tradicional (2.31), pues el electrodo central es un electrodo cerrado. Se obtuvo un valor de potencial para el electrodo central de 0,9016 kV, que muestra una buena correspondencia con el valor de potencial obtenido para la configuración original por la técnica descrita.

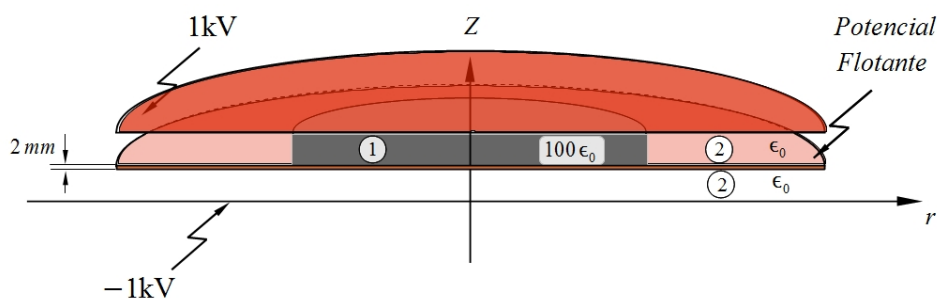


Figura 2.12: Modificación de la configuración de la figura *h11 para calcular el potencial por medio de la ecuación (2.31)

Por lo que respecta a la estabilidad numérica de la condición (2.36), se han obtenido resultados similares para la configuración de la figura 2.11 hasta valores de $\epsilon_r=200.000$.

2.6 Cálculo combinado y selección de los métodos de cálculo

En el programa utilizado para el desarrollo de este trabajo resulta posible combinar los tres métodos descritos en los apartados anteriores, para ello el usuario debe

indicar para cada superficie cuál es el método que quiere que se aplique para el cálculo de esa superficie. Esto es posible dado que todas las ecuaciones provenientes de la formulación de las condiciones de contorno son similares, sea cual sea el método de cálculo escogido. A la hora de seleccionar el método de cálculo para las distintas partes de una configuración conviene tener en cuenta las consideraciones siguientes.

El método de las cargas discretas es el más rápido a la hora de realizar los cálculos, pero en el programa utilizado sólo puede usarse para electrodos. Además es recomendable no usarlo para electrodos aplanados, por la dificultad de una correcta asignación entre cargas y puntos de contorno asociados.

El método de las cargas superficiales es, por su parte, más rápido que el método de los elementos de contorno (conlleva menor trabajo de integración) y es preferible usarlo siempre que la geometría de las partes y de la configuración lo permitan. Sin embargo en configuraciones muy asimétricas el cálculo de la distribución de carga mediante las fórmulas como la (2.21) resulta más impreciso que la utilización de elementos de contorno.

El método de los elementos de contorno es el más versátil de los tres, pero requiere mayor cantidad de almacenamiento en memoria y conlleva tiempos más largos de integración. Por otra parte el tiempo de preparación de los datos, necesario para construir el modelo geométrico, es también mayor que en los otros dos. Por ello se aconseja su utilización sólo si la complicación de la geometría lo requiere.

2.7 El método de las soluciones elementales

Cuando se utilizan métodos numéricos de cálculo de campos como los comentados en los apartados anteriores para la determinación del campo eléctrico en configuraciones de alta tensión para corriente alterna, el valor de campo que se obtiene como resultado se produce en el instante de tiempo correspondiente al conjunto de potenciales considerados. Lo más frecuente es seleccionar el conjunto de potenciales para el que se esperan los máximos valores de intensidad de campo eléctrico.

En el caso de un sistema monofásico, para que se cumpla esta condición, es suficiente con asignar a los electrodos el potencial correspondiente a la amplitud de la tensión monofásica presente en el sistema.

En el caso de sistemas trifásicos equilibrados suele hacerse una suposición de instante más desfavorable considerando el instante en que una de las fases presenta su máximo positivo de potencial, mientras que las otras dos se encuentran con la mitad del valor mínimo de potencial negativo. Pero esta suposición de instante más desfavorable sólo es correcta para configuraciones simétricas si los conductores de fase no están excesivamente próximos [13][Gomollon-2]. En casos más complicados sería necesario llevar a cabo una serie de cálculos para distintos estados de fase, de modo que pudiese determinarse la intensidad máxima de campo eléctrico real.

Este cálculo conllevaría la solución de un gran número de problemas de campo con un tiempo de computación correspondientemente elevado. En vez de ello es posible construir un conjunto de soluciones base, por medio de las cuales puede calcularse la distribución de campo para un estado de fase cualquiera sin resolver el problema de cálculo de campos asociado.

El método de las soluciones elementales se basa en una aplicación sistemática del principio de superposición que permite construir un conjunto muy reducido de soluciones base del problema de contorno asociado a la ecuación de Laplace, a partir del cual puede construirse, por combinación lineal, la solución del mismo problema cuando las únicas condiciones de contorno que cambian son los potenciales de los electrodos.

Considérese una configuración formada por un sistema de n superficies conductoras, cada una con un potencial determinado V_1, V_2, \dots, V_n . Entre ellos puede haber distintos medios dieléctricos con permitividades $\epsilon_l, l=1, 2, \dots, m$ (figura 2.13), en este sistema no se considera la posibilidad de presencia de cargas espaciales. Sea ϕ_l la función de potencial solución del problema de contorno definido por el sistema de la figura y con las condiciones de contorno siguientes:

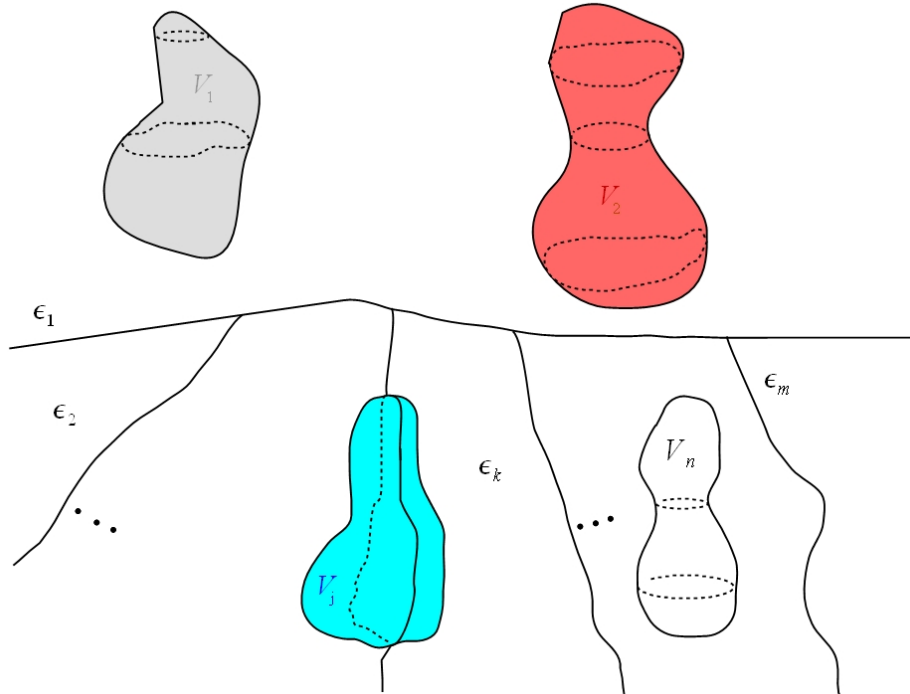


Figura 2.13: Configuración general para la aplicación del método de las soluciones elementales

Para las superficies conductoras:

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 = \dots = V_j = \dots = V_n = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \\ V_i = 1 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Para las superficies de separación entre dos medios dieléctricos r y s :

$$\epsilon_r \frac{\partial \phi_i}{\partial n_{rs}} + \epsilon_s \frac{\partial \phi_i}{\partial n_{sr}} = 0$$

Sea k un índice sobre el conjunto de superficies que incluye los electrodos y las superficies de separación de medios dieléctricos $k=1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+m$, y sea σ_{ki} la distribución de carga superficial sobre la superficie k en el problema de campo i , definido por las condiciones de contorno (2.37), y cuya solución, como ya se ha dicho, es la función de potencial ϕ_i , se puede escribir entonces:

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{n+m} \int_{S_k} \frac{\sigma_{ki}}{r} dS_k \quad (2.38)$$

Entonces para cualquier problema de campo definido por la misma geometría de electrodos y aisladores, y sujeto a las condiciones de contorno:

Para las superficies conductoras:

$$\begin{cases} V_1 = U_1 \\ V_2 = U_2 \\ \dots \\ V_n = U_n \end{cases} \quad (2.39)$$

Para las superficies de separación entre dos medios dieléctricos r y s :

$$\epsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial n_{rs}} + \epsilon_s \frac{\partial \phi}{\partial n_{sr}} = 0$$

La función de densidad de carga sobre la superficie k , σ_k , definida por

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^n U_i \sigma_{ki} \quad (2.40)$$

tiene como función de potencial asociada:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{n+m} \int_{S_k} \frac{\sigma_k}{r} dS_k = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{n+m} \int_{S_k} \frac{\sum_{i=1}^n U_i \sigma_{ki}}{r} dS_k = \\ &= \sum_{i=1}^n U_i \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{n+m} \int_{S_k} \frac{\sigma_{ki}}{r} dS_k = \sum_{i=1}^n U_i \phi_i \end{aligned} \quad (2.41)$$

Y dada la linealidad de las ecuaciones de potencial y de las condiciones de contorno sobre las superficies de separación de medios dieléctricos, esta función es la solución del problema de contorno (2.39).

Aplicando esta propiedad, para una configuración de electrodos y superficies de separación de medios dieléctricos dada, basta resolver un problema de campos por

cada conjunto de electrodos a potenciales diferentes (tres problemas en el caso de configuraciones trifásicas por ejemplo). Una vez obtenidas las funciones de densidad de carga sobre las distintas superficies para estos problemas base (*soluciones elementales*), la función densidad de carga (solución del problema de campo) para cualquier distribución de potenciales de los electrodos puede obtenerse por combinación lineal de estas soluciones elementales mediante la fórmula (2.40), lo que permite calcular igualmente potenciales e intensidades de campo aplicando simplemente el principio de superposición, tal y como muestra la ecuación (2.41).

Capítulo 3 Capacidades en sistemas de conductores

3.1 Introducción

En un primer término, para abordar el tema del cálculo de capacidades se va a tomar como referencia el trabajo de Maxwell, en el capítulo III de su “Tratado sobre electricidad y magnetismo” [27][Maxwell-1]. Allí se define la capacidad de un conductor, dentro de un sistema de conductores, como su carga eléctrica cuando su propio potencial es la unidad y el potencial del resto de los conductores es nulo.

Según el mismo Maxwell esta es la definición propia de capacidad de un conductor cuando no se indican más especificaciones, aunque en determinadas ocasiones puede resultar conveniente especificar la condición que deben cumplir algunos, o todo el resto de los conductores, de una forma diferente, como por ejemplo suponer que la carga de alguno de ellos es cero, y en este caso se puede hablar de la capacidad de un conductor bajo las condiciones especificadas.

Para presentar formalmente la teoría de las capacidades en un sistema de conductores, considérese un conjunto de n conductores A_1, A_2, \dots, A_n , con cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_n , y potenciales V_1, V_2, \dots, V_n , respectivamente. Se puede escribir la siguiente relación entre los potenciales y las cargas:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

en donde cada elemento p_{ij} recibe el nombre de coeficiente de potencial y representa el potencial del electrodo A_i cuando el electrodo A_j presenta carga unidad y el resto carga nula. Si se considera la ecuación (3.1) como un sistema de ecuaciones, es posible resolver las cargas de los electrodos en función de los potenciales y escribir:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Según la definición de capacidad, el coeficiente q_{ii} de la matriz representa la capacidad del electrodo A_i . En cuanto al resto de coeficientes q_{ij} ($i \neq j$), Maxwell los denomina coeficientes de inducción eléctrica, o simplemente coeficientes de inducción. En este trabajo se denominarán ambos coeficientes como coeficientes de carga de manera genérica.

Los términos de la matriz de coeficientes de potencial y los de la matriz de coeficientes de carga presentan las siguientes propiedades [27][Maxwell-1].

- Tanto los coeficientes de potencial como los coeficientes de carga son simétricos $p_{ij}=p_{ji}$, $q_{ij}=q_{ji}$.
- Los coeficientes de potencial p_{ij} son todos positivos, pero ninguno de los coeficientes p_{ij} es mayor que p_{ii} o p_{jj} .
- Ninguno de los coeficientes de inducción q_{ij} ($i \neq j$) es positivo, y la suma de todos los que corresponden a un conductor dado no es mayor en valor absoluto que el coeficiente de capacidad (q_{ii}) de ese conductor, que es siempre positivo.

3.2 La matriz de capacidades

La fila i de la ecuación (3.2) puede escribirse de una forma alternativa útil como sigue:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} V_j = \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} \right) V_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n q_{ij} (V_i - V_j) \quad (3.3)$$

Llamando

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \sum_{j=1}^n q_{ij} \\ c_{ij} &= -q_{ij} \end{aligned} \quad (3.4)$$

la ecuación (3.3) se puede escribir como

$$Q_i = c_{ii} V_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij} (V_i - V_j) \quad (3.5)$$

La matriz c_{ij} se denominará matriz de capacidades. El término c_{ii} se denominará autocapacidad del electrodo A_i y los términos c_{ij} ($i \neq j$), capacidad mutua entre los electrodos A_i y A_j . De las propiedades de los coeficientes de carga comentadas en el apartado anterior se deduce que tanto los c_{ii} como los c_{ij} ($i \neq j$), son no negativos.

Los elementos de la matriz de coeficientes de carga y de la matriz de capacidades pueden interpretarse en términos de flujo eléctrico de la manera siguiente, considerando para ello el flujo eléctrico saliente de un electrodo como positivo, y el entrante como negativo:

- q_{ii} es la carga total del electrodo A_i cuando el electrodo A_i se encuentra a potencial unidad y el resto están conectados a tierra.
- $q_{ji} = q_{ij}$ ($i \neq j$) es la carga total del electrodo A_j cuando el electrodo A_i se encuentra a potencial unidad y el resto están conectados a tierra.

- c_{ii} es la suma de las cargas de todos los electrodos cuando el electrodo A_i se encuentra a potencial unidad y el resto a potencial cero. También puede interpretarse como la carga correspondiente al flujo eléctrico entre el electrodo A_i y el infinito (o un posible plano de tierra) cuando el electrodo A_i y todos los demás se encuentran a potencial unidad.
- c_{ij} ($i \neq j$) es, cambiada de signo, la carga del electrodo A_j cuando el electrodo A_i se encuentra a potencial unidad, y el resto a potencial cero.

Estas relaciones se ilustran en las figuras 3.1 y 3.2. En ellas se aprecia también cómo

$$q_{ii} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \tag{3.6}$$

ecuación que se deduce fácilmente de las relaciones (3.4).

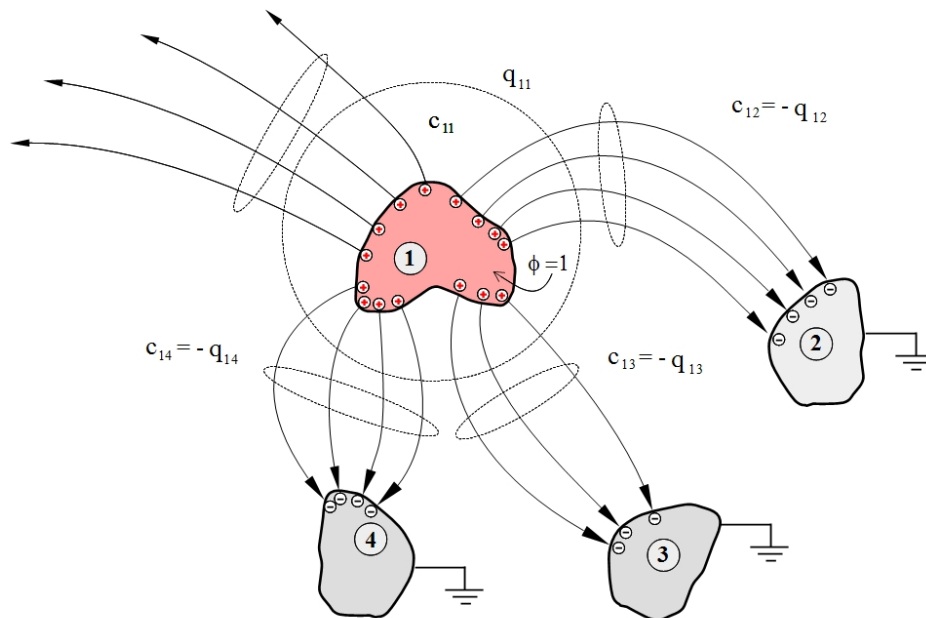


Figura 3.1: Representación gráfica de los coeficientes de capacidad con un electrodo a potencial unidad y el resto a potencial cero.

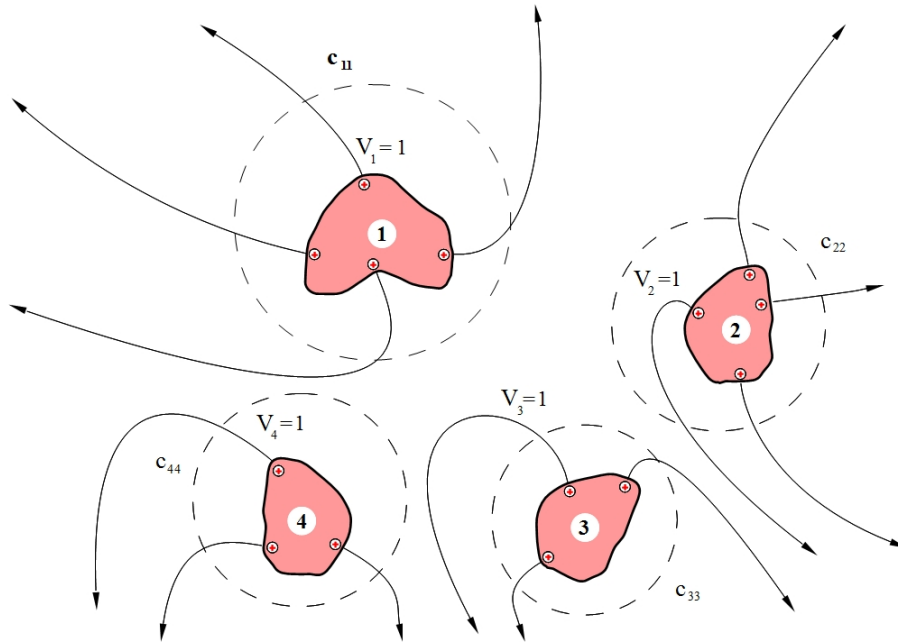


Figura 3.2: Representación gráfica de los coeficientes de autocapacidad con todos los electrodos a potencial unidad

3.3 Sistemas con electrodos a potencial flotante

Los electrodos a potencial flotante tienen sus propias autocapacidades así como capacidades mutuas con el resto de los electrodos presentes en una configuración determinada. Pero estas capacidades no presentan directamente relevancia técnica, pues no están conectadas galvánicamente con la red de trabajo considerada. Cuando se utilizan electrodos a potencial flotante, el aspecto que resulta de interés es cómo afecta su presencia a las capacidades entre el resto de los electrodos conectados a la red de trabajo.

Para calcular esta influencia considérese una configuración con n_c electrodos a potencial fijo y n_f electrodos a potencial flotante, cada uno con una carga inicial que permanece posteriormente invariable para todos los procesos considerados. La ecuación (3.2) se puede escribir con bloques matriciales:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{ne} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Q_{ne+1} \\ Q_{ne+2} \\ \vdots \\ Q_{ne+nf} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [q_{ee}] & [q_{ef}] \\ [q_{fe}] & [q_{ff}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{ne} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{ne+1} \\ V_{ne+2} \\ \vdots \\ V_{ne+nf} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

O de forma más sucinta:

$$\begin{bmatrix} [Q_e] \\ [Q_f] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [q_{ee}] & [q_{ef}] \\ [q_{fe}] & [q_{ff}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_e] \\ [V_f] \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

De esta ecuación se puede resolver:

$$[Q_e] = ([q_{ee}] - [q_{ef}][q_{ff}]^{-1}[q_{fe}])[V_e] + [q_{ef}][q_{ff}]^{-1}[Q_f] \quad (3.9)$$

Generalmente los electrodos a potencial flotante se encuentran inicialmente descargados, por lo que $[Q_f] = [0]$ y se obtiene una relación matricial entre cargas y potenciales similar a la (3.2) que se escribirá:

$$[Q_e] = [q_e'] [V_e] \quad (3.10)$$

En donde se utiliza una matriz modificada de coeficientes de carga dada por:

$$[q_e'] = [q_{ee}] - [q_{ef}][q_{ff}]^{-1}[q_{fe}] \quad (3.11)$$

En el caso de que los electrodos a potencial flotante no se encuentren descargados inicialmente, no se puede escribir una ecuación como la (3.10), pero al ser las cargas de los electrodos a potencial flotante constantes, se cumple la siguiente relación:

$$\left[\frac{dQ_e}{dt} \right] = [q_e'] \left[\frac{dV_e}{dt} \right] \quad (3.12)$$

A partir de la ecuación (3.11) se puede definir una matriz de capacidades únicamente entre los electrodos a potencial fijo de la misma forma que en la ecuación (3.4)

$$\begin{aligned} c_{ii}' &= \sum_{j=1}^n q_{ij}' \\ c_{ij}' &= -q_{ij}' \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4 Medida de capacidades

Considérese un conjunto de n electrodos como los de la figura 3.3. Se desea medir la capacidad entre los electrodos 1 y 2 , conectando a los terminales A y B un circuito de medida calibrado en función de la corriente y la diferencia de potencial entre los terminales A y B . El dispositivo de medida parte de que toda la corriente circula entre los terminales 1 y 2 , y no sabe de la presencia de otros electrodos o posibles corrientes. En la figura se han dibujado únicamente los electrodos accesibles que pueden ser conectados a tierra para la realización de la medida. En el sistema puede haber electrodos a potencial flotante no accesibles, o que no interese que se conecten a tierra para la realización de la medida, por funcionar como tales electrodos a potencial flotante cuando se está operando el sistema, e interese incluir su influencia en la capacidad que se quiere determinar. En el tratamiento que sigue, no se hace referencia a estos electrodos, para considerarlos bastaría con sustituir en las expresiones siguientes los coeficientes de capacidad por los que se calculan a partir de las fórmulas (3.10)-(3.13).

Para el electrodo 1 se tiene:

$$Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) + c_{13}(V_1 - V_3) + \dots + c_{1n}(V_1 - V_n) \quad (3.14)$$

y para el electrodo 2 :

$$Q_2 = c_{22}V_2 + c_{12}(V_2 - V_1) + c_{23}(V_2 - V_3) + \dots + c_{2n}(V_2 - V_n) \quad (3.15)$$

Si para realizar la medida se consideran puestos a tierra, además del electrodo 2 , todos los demás electrodos, menos el electrodo 1 , estas ecuaciones resultan en

$$\begin{aligned} Q_1 &= (c_{11} + c_{13} + \dots + c_{1n})V_1 + c_{12}(V_1 - V_2) \\ Q_2 &= c_{22}V_2 + c_{12}(V_2 - V_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde se ha obviado la condición $V_2=0$, en los términos donde aparece con el coeficiente de capacidad mutua c_{12} , para que la capacidad objeto de la medida, c_{12} , aparezca explícitamente en las dos ecuaciones.

Derivando respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt} &= (c_{11} + c_{13} + \dots + c_{1n})\frac{dV_1}{dt} + c_{12}\frac{dV_1}{dt} \\ \frac{dQ_2}{dt} &= -c_{12}\frac{dV_1}{dt} \end{aligned} \quad (3.17)$$

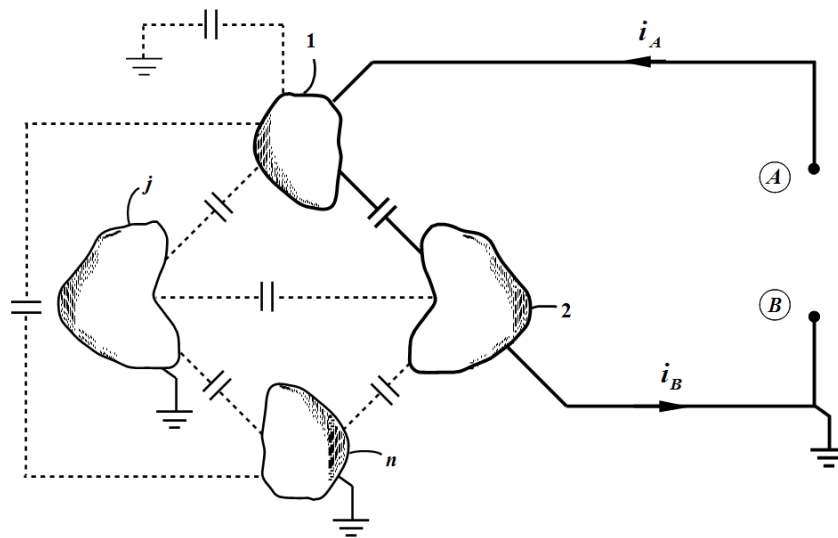


Figura 3.3: Configuración de electrodos para la medida de capacidades

La medida se realiza partiendo del supuesto de que

$$i_A = i_B = +\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt} = c_{12}\frac{dV_1}{dt} \quad (3.18)$$

Mientras que en realidad se tiene

$$i_A = (c_{11} + c_{13} + \dots + c_{1n}) \frac{dV_1}{dt} + c_{12} \frac{dV_1}{dt} \quad (3.19)$$

$$i_B = c_{12} \frac{dV_1}{dt}$$

O escrito en régimen permanente sinusoidal

$$i_A = j\omega(c_{11} + c_{13} + \dots + c_{1n})V_1 + j\omega c_{12}V_1 \quad (3.20)$$

$$i_B = j\omega c_{12}V_1$$

Llamando

$$i_L = j\omega(c_{11} + c_{13} + \dots + c_{1n})V_1 \quad (3.21)$$

$$c_L = c_{11} + c_{13} + \dots + c_{1n}$$

la ecuación (3.20) se puede escribir

$$i_A = j\omega c_L V_1 + j\omega c_{12} V_1 \quad (3.22)$$

$$i_B = j\omega c_{12} V_1 = i_A - i_L$$

Que se puede representar mediante los circuitos equivalentes de la figura 3.4

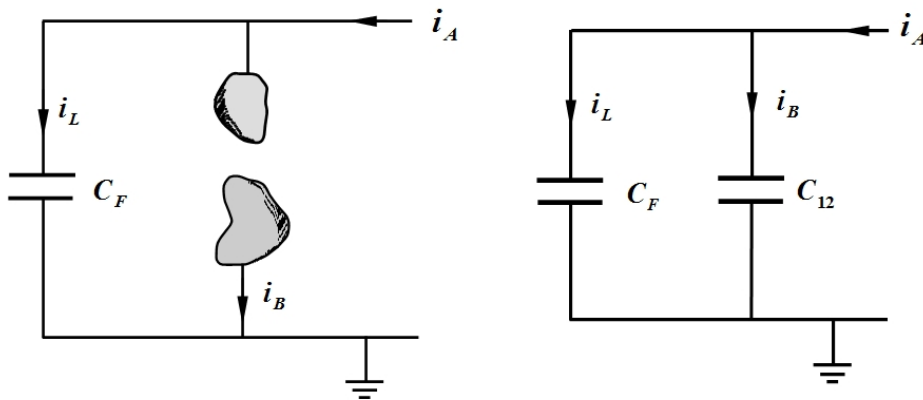


Figura 3.4: Esquema de circuito para medida de capacidades

En este circuito i_L representa un error de medida que corresponde al conjunto de capacidades parásitas del electrodo I , incluyendo su autocapacidad. En el caso, frecuente en la técnica, de que sólo se consideren dos electrodos se tiene

$$i_L = j\omega c_{11} V_1 \quad (3.23)$$

En el caso de haber electrodos que no sean accesibles para su puesta a tierra y queden a potencial flotante durante la medida, el resultado aplicable sería el mismo, pero trabajando con la matriz de capacidades modificada definida por las ecuaciones (3.11) y (3.13).

3.5 Energía en función de capacidades y coeficientes de carga

La expresión matricial para la energía potencial de un sistema de n conductores con cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_n , y potenciales V_1, V_2, \dots, V_n viene dada por [27] [Maxwell-1]

$$U = \frac{1}{2} [Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [Q]^T [V] \quad (3.24)$$

Si se tiene en cuenta que $[V] = [p][Q]$, donde $[p]$ es la matriz de coeficientes de potencial, resulta

$$U = \frac{1}{2} [Q]^T [p][Q] \quad (3.25)$$

Alternativamente se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} [V]^T [Q] = \frac{1}{2} [V]^T [q][V] = \frac{1}{2} \{q_{11} V_1^2 + q_{22} V_2^2 + \dots + q_{nn} V_n^2 + 2q_{12} V_1 V_2 + 2q_{13} V_1 V_3 + \dots\} \quad (3.26)$$

en donde $[q]$ es la matriz de coeficientes de carga. Teniendo en cuenta que

$$2 V_i V_j = -(V_i - V_j)^2 + V_i^2 + V_j^2 \quad (3.27)$$

se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} \left\{ (q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1n}) V_1^2 + (q_{21} + q_{22} + \dots + q_{2n}) V_2^2 + \dots + (q_{n1} + q_{n2} + \dots + q_{nn}) V_n^2 - q_{12} (V_1 - V_2)^2 - q_{13} (V_1 - V_3)^2 - \dots - q_{1n} (V_1 - V_n)^2 - q_{23} (V_2 - V_3)^2 - \dots - q_{n-1,n} (V_{n-1} - V_n)^2 \right\} \quad (3.28)$$

o en términos de la matriz de capacidades

$$U = \frac{1}{2} \left\{ c_{11} V_1^2 + c_{22} V_2^2 + \dots + c_{nn} V_n^2 + c_{12} (V_1 - V_2)^2 + c_{13} (V_1 - V_3)^2 + \dots + c_{1n} (V_1 - V_n)^2 + c_{23} (V_2 - V_3)^2 + \dots + c_{n-1,n} (V_{n-1} - V_n)^2 \right\} \quad (3.29)$$

La expresión que se usa frecuentemente para el cálculo de la energía de un condensador con dos placas

$$U = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 \quad (3.30)$$

No es sino una simplificación de la expresión general

$$U = \frac{1}{2} \left\{ c_{11} V_1^2 + c_{22} V_2^2 + c_{12} (V_1 - V_2)^2 \right\} \quad (3.31)$$

En donde se hace $c_{11} \approx c_{22} \approx 0$, es decir, $q_{11} = q_{22} = -q_{12}$.

3.6 Capacidades entre dos electrodos

Cuando en teoría de circuitos se escribe como ecuación de un condensador con dos electrodos

$$Q = C \cdot V \quad (3.32)$$

Se está haciendo en realidad una simplificación de la ecuación

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} V_1 + c_{12} (V_1 - V_2) \\ c_{12} (V_2 - V_1) + c_{22} V_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Considérese el caso de una configuración en que la simetría espacial de los electrodos permite escribir $q_{11} = q_{22} = a$, y llámese $q_{12} = q_{21} = -b$. Es decir, $c_{11} = c_{22} = a - b$, y $c_{12} = c_{21} = b$. La ecuación del sistema puede escribirse entonces

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

La afirmación, que suele realizarse con frecuencia de que $Q_1 = -Q_2 = Q$ resulta válida únicamente en el caso de que $V_1 = -V_2$ (ecuación válida cuando la referencia de potencial cero se encuentra en el infinito). Llamando, en este caso, $V = V_1 - V_2 = 2V_1$, se puede escribir entonces

$$Q = (a + b)V_1 = \left(\frac{a - b}{2} + b\right) 2V_1 = \left(\frac{c_{11}}{2} + c_{12}\right) V \quad (3.35)$$

que es la ecuación (3.32) en la que la capacidad toma el valor

$$C = \frac{c_{11}}{2} + c_{12} \quad (3.36)$$

Este hecho suele ignorarse a menudo cuando se miden o calculan capacidades.

Si se cumplen estas aproximaciones y se evalúa la expresión de la energía (3.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \{ c_{11} V_1^2 + c_{22} V_2^2 + c_{12} (V_1 - V_2)^2 \} = \frac{1}{2} \{ 2c_{11} V_1^2 + c_{12} (2V_1)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{c_{11}}{2} (2V_1)^2 + c_{12} (2V_1)^2 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c_{11}}{2} + c_{12} \right\} (2V_1)^2 = \frac{1}{2} C V^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

que coincide con la expresión que se usa tradicionalmente (3.30), pero teniendo en cuenta el valor de la capacidad dado por la ecuación (3.36).

Si en vez de considerar dos electrodos con posición simétrica en el espacio, se considera que el electrodo 1 está encerrado completamente en el electrodo 2, de

modo que no salen líneas de campo del electrodo 1 hacia el infinito y por lo tanto $c_{11} = 0$, es decir, $q_{11} = -q_{12} = a$, y llamando $q_{22} = b$, entonces se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

O similarmente

$$\begin{aligned} Q_1 &= a(V_1 - V_2) \\ Q_2 &= -a(V_1 - V_2) + (b - a)V_2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Si se asume, como en el caso anterior que $Q_1 = -Q_2 = Q$, esto solamente es posible, como se deduce de las ecuaciones anteriores, en el caso de que $V_2 = 0$. En general, no se puede considerar $Q_1 = -Q_2$ para valores cualesquiera de los potenciales, y no se puede decir que carga y diferencia de potencial sean proporcionales, para este tipo de configuración.

3.7 Cambio de referencias de potencial

Partiendo de nuevo un sistema de n electrodos con potenciales V_1, V_2, \dots, V_n , supóngase ahora que se cambian los potenciales de los electrodos de la siguiente manera

$$V_i' = V_i + V_0 \quad (3.40)$$

Sea ϕ_i la solución del problema de cálculo de campos (2.37), como se comentó al explicar el método de las soluciones elementales, correspondiente al caso de que el electrodo i se encuentre a potencial unidad y el resto conectados a tierra. Hay dos funciones de potencial que se pueden obtener a partir de las soluciones elementales y que cumplen las condiciones de contorno (3.40):

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \sum_{i=1}^n V_i \phi_i + V_0 \\ \Phi_B &= \sum_{i=1}^n V_i \phi_i + \sum_{i=1}^n V_0 \phi_i = \sum_{i=1}^n (V_i + V_0) \phi_i \end{aligned} \quad (3.41)$$

La diferencia entre ambas funciones, si se tiene en cuenta que para las soluciones elementales $\phi_i(\infty)=0$, viene dada por

$$\begin{aligned}\phi_A(\infty) &= V_0 \\ \phi_B(\infty) &= 0\end{aligned}\quad (3.42)$$

En lo que sigue se llamará problema *A* al problema de campo cuya solución es ϕ_A y problema *B* al problema de campo cuya solución es ϕ_B . El problema *A* corresponde a un cambio de referencias de potencial.

A continuación se va a analizar en qué modo afecta este cambio de referencia de potencial a los cálculos con las matrices de coeficientes de potencial, de coeficientes de carga y de capacidades.

Sea σ_j la función densidad de carga sobre la superficie del electrodo *j* en el problema original y σ_{ji} la función densidad de carga en el electrodo *j* correspondiente a la función de potencial ϕ_i correspondiente al problema (2.37). En el problema original se tiene:

$$\sigma_j = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi}{\partial n_j} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial n_j} \sum_{i=1}^n V_i \phi_i = \sum_{i=1}^n V_i \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial n_j} \right) = \sum_{i=1}^n V_i \sigma_{ji} \quad (3.43)$$

Para los problemas *A* y *B* se obtienen las siguientes funciones de densidad de carga

$$\sigma_{jA} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi_A}{\partial n_j} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\sum_{i=1}^n V_i \phi_i + V_0 \right) = \sum_{i=1}^n V_i \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial n_j} \right) = \sum_{i=1}^n V_i \sigma_{ji} = \sigma_j \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{jB} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi_B}{\partial n_j} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\sum_{i=1}^n V_i \phi_i + \sum_{i=1}^n V_0 \phi_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n V_i \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial n_j} \right) + \sum_{i=1}^n V_0 \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi_i}{\partial n_j} \right) = \sum_{i=1}^n V_i \sigma_{ji} + \sum_{i=1}^n V_0 \sigma_{ji} = \sigma_j + V_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{ji}\end{aligned}\quad (3.45)$$

De donde se deduce que la carga del electrodo *j* para el problema *A* coincide con su carga en el problema original, $Q_{jA}=Q_j$, mientras que para el problema *B* la carga del electrodo *j* no coincide con la carga del problema original.

A continuación se va a analizar cómo cambian respecto del problema original las matrices de coeficientes de carga.

Para el problema A se tiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Q_{1A} \\ Q_{2A} \\ \vdots \\ Q_{nA} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} + V_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - V_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\
 & \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1A} \\ V_{2A} \\ \vdots \\ V_{nA} \end{bmatrix} - V_0 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n q_{1i} \\ \sum_{i=1}^n q_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n q_{ni} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1A} \\ V_{2A} \\ \vdots \\ V_{nA} \end{bmatrix} - V_0 \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Como se ve en las fórmulas anteriores en el problema ϕ_A no se tiene una relación lineal entre cargas y potenciales.

Para el problema B se tiene:

$$\sigma_{jB} = \sum_{i=1}^n V_i \sigma_{ji} + V_0 \sum_{i=1}^n \sigma_{ji} = \sum_{i=1}^n (V_i + V_0) \sigma_{ji} = \sum_{i=1}^n V_{iB} \sigma_{ji} \tag{3.47}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} Q_{1B} \\ Q_{2B} \\ \vdots \\ Q_{nB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1B} \\ V_{2B} \\ \vdots \\ V_{nB} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Y se tiene la misma relación entre cargas y potenciales que en el problema original. En el problema *A* las densidades de carga en los conductores, y por lo tanto las intensidades de campo, se mantienen respecto del problema original, mientras que en el problema *B*, cambian las densidades de carga e intensidades de campo en los conductores respecto del problema original.

En cuanto a las matrices de capacidades se obtienen los siguientes resultados.

Para el problema *A*

$$\begin{aligned} Q_{jA} = Q_j &= \sum_{i=1}^n q_{ji} V_i = \left(\sum_{i=1}^n q_{ji} \right) V_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n q_{ji} (V_j - V_i) = \\ & \left(\sum_{i=1}^n q_{ji} \right) (V_j + V_0 - V_0) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n q_{ji} (V_j + V_0 - (V_i + V_0)) = \\ & \left(\sum_{i=1}^n q_{ji} \right) (V_{jA} - V_0) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n q_{ji} (V_{jA} - V_{iA}) = \\ & c_{jj} (V_{jA} - V_0) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n q_{ji} (V_{jA} - V_{iA}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Que difiere de la expresión para el problema original únicamente en el término constante $c_{jj}V_0$, por lo que no afectaría al cálculo de corrientes, por ser un término constante.

Para el problema *B* se obtiene directamente, al igual que para el problema original

$$Q_{jB} = c_{jj} V_{jB} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n q_{ji} (V_{jB} - V_{iB}) \quad (3.50)$$

Y el cálculo de corrientes tampoco se ve afectado.

Por lo que al cálculo de las energías se refiere (y en su caso el cálculo de fuerzas que de éste derivase), se tiene, tanto para el problema A como para el problema B

$$\begin{aligned} V_{iA}^2 &= (V_i + V_0)^2 ; (V_{iA} - V_{jA}) = (V_i - V_j)^2 \\ V_{iB}^2 &= (V_i + V_0)^2 ; (V_{iB} - V_{jB}) = (V_i - V_j)^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Por lo que varían todos los términos afectados por las autocapacidades en la expresión (3.29), y por lo tanto no se pueden realizar cambios de referencias de potencial para el cálculo de energías o fuerzas a menos que se puedan despreciar las autocapacidades de los electrodos.

Capítulo 4 Cálculo de capacidades

4.1 Introducción

El cálculo de las capacidades en una configuración de electrodos y aisladores es un problema íntimamente relacionado con el problema del cálculo de campos y potenciales electrostáticos, y resulta ciertamente complejo, incluso para las configuraciones relativamente sencillas.

Son muy pocas las configuraciones realizables físicamente en las que es posible obtener una expresión analítica simple de la capacidad. Entre ellos se encuentran la capacidad de un condensador esférico y la de un disco circular o elíptico a un potencial constante [9][Durand-1]. Incluso en el caso en el que los electrodos coinciden con superficies equipotenciales de sistemas coordenados las expresiones que se obtienen para las capacidades son complicados desarrollos en serie.

Muchas de las fórmulas que aparecen en las referencias provienen de cálculos en dos dimensiones, lo que resulta de por sí ya una aproximación, al considerar una extensión infinita de los electrodos en una de las direcciones del espacio. Aquí se incluyen las fórmulas de capacidad para un condensador de placas planas o de electrodos cilíndricos concéntricos .

Todos los métodos de cálculos de capacidades se reducen en esencia al mismo principio: determinar la distribución de carga en los electrodos, para la distribución de potenciales deseada, y calcular a partir de ella la carga total de los electrodos para obtener así la matriz de coeficientes de carga y de ella la matriz de

capacidades. Las diferencias entre los métodos estriban en la forma de determinar o aproximar la distribución de carga sobre los electrodos. Cuando se utilizan métodos numéricos integrales para la determinación del campo eléctrico, las cargas representan las incógnitas del problema, y una vez resuelto el problema de cálculo de campos, la suma o integración de las cargas permite realizar el cálculo de las capacidades. Cuando la resolución del problema de campo proporciona únicamente la distribución de potencial electrostático, como sería el caso del método de los elementos finitos, la carga sobre la superficie de los electrodos puede determinarse a partir de la intensidad de campo superficial que se obtiene derivando la función de potencial.

Cuando se utiliza la aproximación de dos dimensiones es posible encontrar fórmulas de aproximación analítica por medio de métodos especiales, como puede ser la transformación conforme. También es posible un cálculo aproximado de capacidades a partir de diagramas de líneas de campo y equipotenciales.

Una excelente tabla de fórmulas de capacidades, incluyendo para cada fórmula la referencia bibliográfica correspondiente, se puede encontrar en el libro de Kaiser [22][Kaiser-1]. En este capítulo se va a presentar una visión general de los distintos procedimientos usados por los diferentes autores en la bibliografía para el cálculo de capacidades. En algunos casos se compararán los resultados obtenidos por esos autores con los que proporcionan el método y el programa desarrollados para este trabajo, cuya descripción detallada empero se deja para el capítulo siguiente.

4.2 Cálculo de capacidades mediante aproximaciones analíticas

4.2.1 Cálculo con cargas imágenes

Existen configuraciones de electrodos para las que resulta posible aproximar la carga de los electrodos mediante desarrollos en serie. En los cálculos prácticos se toman sólo los primeros términos de estos desarrollos en serie para determinar los valores de la capacidad.

Una configuración de cierta importancia técnica es la capacidad entre dos electrodos esféricos separados por una cierta distancia (corresponde a la geometría de un explosor de esferas usado en la técnica de alta tensión). El cálculo de esta capacidad se puede realizar mediante la técnica de cargas imágenes [27][Maxwell-1].

En la figura 4.1 se representa una configuración formada por dos cargas puntuales de distinto signo, e_1 y e_2 , ($|e_2| < |e_1|$), separadas por una cierta distancia d , situadas sobre dos puntos A y B en el espacio libre. La superficie esférica de radio

$$\alpha = d \cdot \frac{e_1 e_2}{e_2^2 - e_1^2} \quad \text{con centro en } C, \text{ punto situado a una distancia } f = -\frac{e_1}{e_2} \alpha \text{ de } e_1,$$

resulta ser una superficie equipotencial con potencial cero. Las cargas e_1 y e_2 sobre A y B se llaman entonces cargas imágenes respecto a la superficie de la esfera de radio α con centro en C .

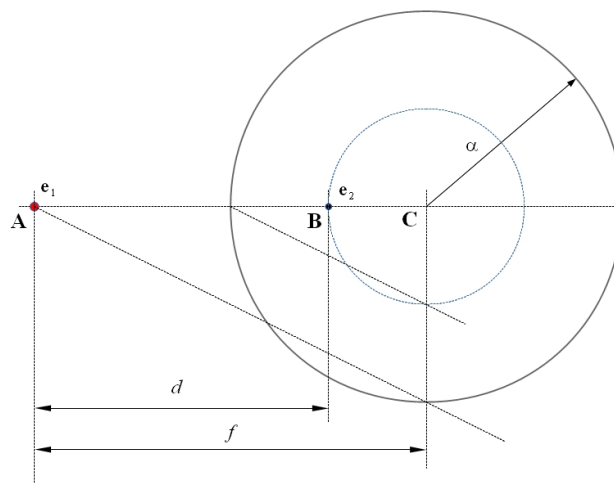


Figura 4.1: Cargas imágenes

Considérese ahora la configuración de la figura 4.2, formada por dos esferas A y B , de radios a y b respectivamente, separadas por una distancia c . Si se considera la esfera A a potencial unidad y la esfera B a potencial cero, y se calcula la carga total de ambas esferas en estas condiciones se obtienen los coeficientes q_{AA} y $q_{BA}=q_{AB}$ de la matriz de cargas. Resolviendo después el problema inverso (la esfera

B a potencial unidad y la esfera A a potencial cero) , se obtiene el coeficiente restante q_{BB} de la matriz de cargas. A partir de estos coeficientes pueden calcularse las capacidades de la configuración.

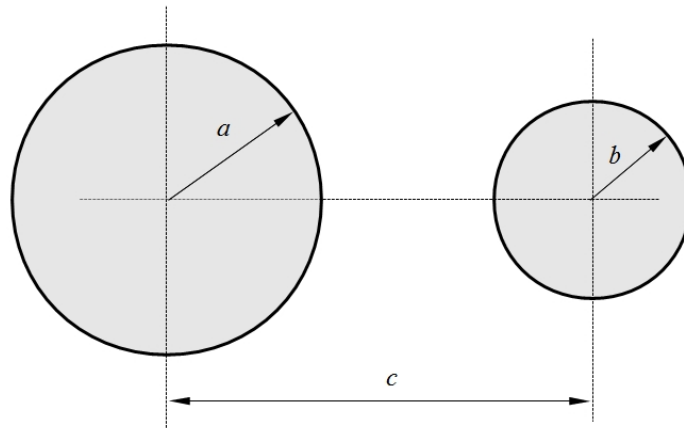


Figura 4.2: Datos geométricos de la configuración de dos esferas para el cálculo de capacidades

La resolución del problema de campo cuando una esfera, por ejemplo la esfera A , se encuentra a potencial unidad y la otra a potencial cero, puede realizarse situando una carga unidad en el centro de la esfera A , obteniendo su imagen respecto de la esfera B , (esta carga estará situada en el interior de la esfera B) posteriormente la imagen de esta carga respecto de la esfera A (situada ahora en el interior de la esfera A), y así sucesivamente formando dos series infinitas de cargas que resultan situadas en el interior de ambas esferas. La suma de estas series infinitas de cargas representan los coeficientes q_{AA} y q_{AB} . Utilizando los primeros términos de estos desarrollos en serie se obtienen las siguientes fórmulas para los coeficientes de carga [27][Maxwell-1], a partir de los cuales, mediante las fórmulas (3.4) , se pueden calcular las capacidades de la configuración.

$$\begin{aligned}
 q_{AA} &= a + \frac{a^2 b}{c^2 - b^2} + \frac{a^3 b^2}{(c^2 - b^2 + ac)(c^2 - b^2 - ac)} + \dots \\
 q_{AB} &= -\frac{ab}{c} - \frac{a^2 b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \frac{a^3 b^3}{c(c^2 - a^2 - b^2 + ab)(c^2 - b^2 - a^2 - ab)} + \dots \\
 q_{BB} &= b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 b^3}{(c^2 - a^2 + bc)(c^2 - a^2 - bc)} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si se calcula mediante estas fórmulas la matriz de capacidades para una configuración en la que las dos esferas presentan el mismo diámetro con una longitud de 40 cm y sus centros están separados una distancia de 70 cm se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}c_{11} &= c_{22} = 17,386323 \text{ pF} \\c_{12} &= c_{21} = 7,03939 \text{ pF}\end{aligned}\tag{4.2}$$

Como comparación, el cálculo realizado con el programa desarrollado en este trabajo utilizando cargas superficiales y 40 puntos de contorno para cada una de las esferas proporciona el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}c_{11} &= c_{22} = 17,3768 \text{ pF} \\c_{12} &= c_{21} = 7,0368 \text{ pF}\end{aligned}\tag{4.3}$$

4.2.2 Cálculo mediante transformación conforme

Cuando en una configuración tridimensional existe una dirección del espacio tal que las secciones perpendiculares a esa dirección no presentan variación a lo largo de una distancia suficientemente grande, en relación con el tamaño de la sección, el problema puede aproximarse mediante un cálculo bidimensional sobre cualquiera de las secciones iguales referidas.

Existe una serie de problemas bidimensionales para los que resulta posible encontrar una solución analítica al problema de cálculo de campos mediante el método de la llamada transformación conforme [37][Prinz-1]. En lo que sigue se va a explicar el fundamento de esta técnica y su aplicación al cálculo de capacidades.

Considérense dos planos complejos denominados mediante las variables

$$\begin{aligned}z &= x + j y \\w &= u + j v\end{aligned}\tag{4.4}$$

Sea una función compleja $z=f(w)$. Una función f se dice conforme en un cierto dominio abierto U si es holomorfa (tiene derivada compleja en todo punto del dominio) y su derivada es distinta de cero en todo el dominio.

Una transformación o función conforme tiene la propiedad de que los ángulos entre dos curvas son invariantes con la transformación. El hecho de que las funciones conformes sean derivables en el plano complejo implica que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$\text{además } \frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial(jy)} = -j \frac{\partial w}{\partial y}$$

De las anteriores condiciones se deducen las siguientes propiedades:

- Si $\phi(x,y)$ es una función que cumple la ecuación de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \right) \quad \text{en el plano } (x,y), \text{ entonces la función } \phi(u,v) \text{ cumple la}$$

$$\text{ecuación de Laplace en el plano } (u,v) \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0 \right) .$$

- Las familias de curvas $u(x,y)=cte$, $v(x,y)=cte$, son ortogonales.

Para ver la aplicación de la transformación conforme en cálculos electrostáticos, considérese una función compleja conforme $z=f(w)$ y que en el plano (u,v) las líneas $v=cte$ son líneas equipotenciales, correspondientes a una cierta función

$$\phi = k \cdot v + \phi_0 \quad (4.6)$$

por lo que las líneas $u=cte$ representarán líneas de campo (figura 4.3). El campo eléctrico en el plano (x,y) , será

$$\begin{aligned} \vec{E}_z^0 &= \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ & \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \left(-\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial y} \right) = k \cdot \vec{E}_z \end{aligned} \quad (4.7)$$

En donde

$$\vec{E}_z = \left(-\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(-\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.8)$$

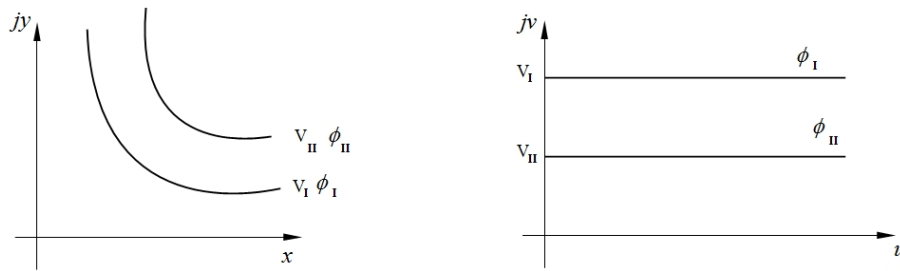


Figura 4.3: Sistemas de coordenadas en una transformación conforme

Dadas dos líneas equipotenciales ϕ_I y ϕ_{II} correspondientes a los valores v_I y v_{II} la constante k puede determinarse a partir de (4.6) como (figura 4.3):

$$k = \frac{\phi_I - \phi_{II}}{v_I - v_{II}} \quad (4.9)$$

Además, con las ecuaciones de Cauchy-Riemann se puede escribir en el plano complejo:

$$\begin{aligned} \vec{E}_z^* &= -\frac{\partial v}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial y} = j \left(\frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right) = j \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ j \frac{dw}{dz} &= j \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = j \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial v} + j \frac{\partial y}{\partial v}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por lo general las superficies de la configuración real se modelan en el plano (x,y) y las variables x , e y tienen dimensiones de longitud, mientras que las variables u y v , como argumentos de funciones matemáticas utilizadas en la composición de la función f , son magnitudes adimensionales. De aquí que el vector \vec{E}_z , de acuerdo con la fórmula (4.10), tiene dimensiones de $[L]^{-1}$. Para obtener valores de campo con dimensiones de campo eléctrico, p. ej. kV/cm, se precisa una constante dimensional con dimensiones de potencial, como la constante k . La constante k

puede calcularse en el plano (u, v) como

$$k = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad (4.11)$$

De donde, en este plano se obtendría para el campo eléctrico la expresión

$$\vec{E}_w = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial u}, -\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = (0, -k) \quad (4.12)$$

Por lo que se puede escribir:

$$\begin{aligned} |k| &= |\vec{E}_w| \\ |\vec{E}_z^0| &= |\vec{E}_w| \cdot |\vec{E}_z| \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cálculos análogos a estos se pueden realizar utilizando las líneas $u = \text{cte}$ como líneas equipotenciales.

Para el cálculo de capacidades es importante considerar una propiedad de la transformación conforme que se puede formular como la invarianza de la carga sobre la superficie de un electrodo ($v = \text{cte}$) entre dos coordenadas dadas de campo (u_1 y u_2), lo que implica la invarianza de las capacidades parciales. Como este enunciado no se ha encontrado en la bibliografía, se presenta una demostración del mismo en el apéndice A.

Para explicar la aplicación y limitaciones de la transformación conforme se va a usar el ejemplo de la figura 4.4, donde se representa la transformación conforme

$$z = c \cdot \cot w \quad (4.14)$$

En donde c es una constante con dimensiones de longitud. Para las curvas representadas en la figura se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot c \cdot \coth(2v_0) \\ R &= \frac{c}{\sinh(2v_0)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

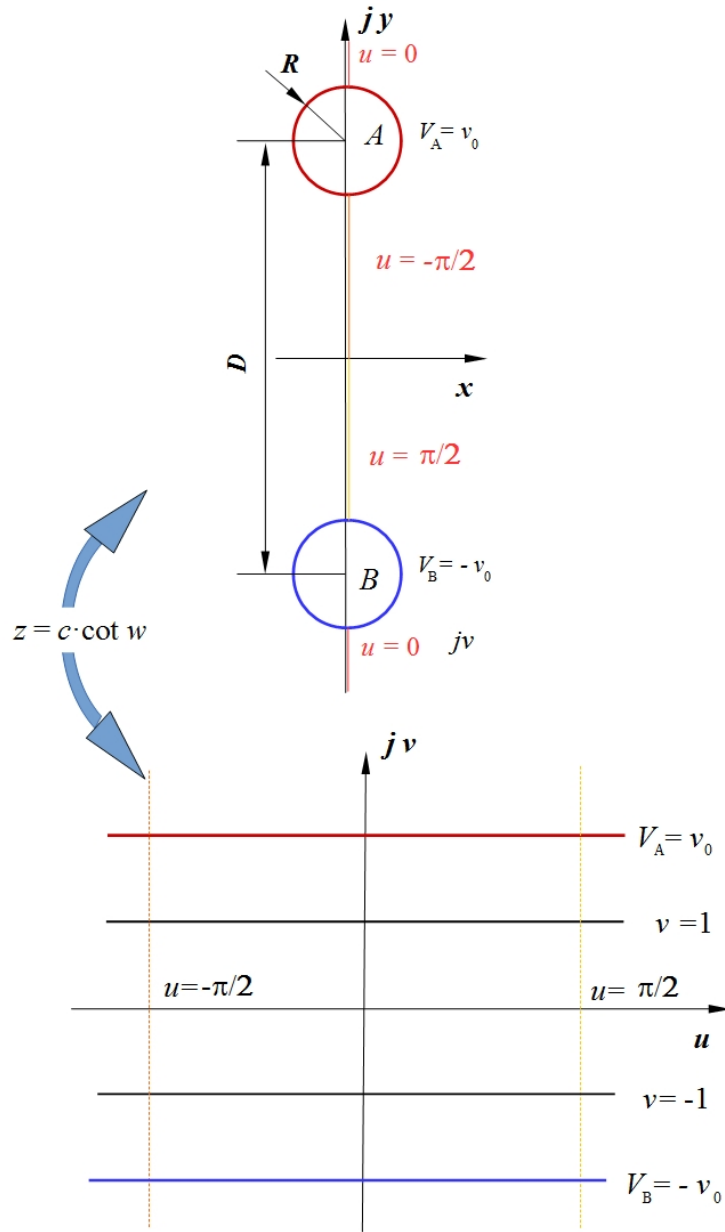


Figura 4.4: Transformación conforme $z=c \cot w$

Los cálculos de las variables del plano (x,y) en función de las del plano (u,v) , así como las fórmulas de las líneas equipotenciales y líneas de campo en el plano (x,y) se muestran en el Apéndice A .

Supongamos que se desean conocer las capacidades entre dos cables de longitud infinita, de radio R , con una distancia D de separación entre sus centros. A partir de las relaciones (4.15) se puede despejar:

$$\frac{R}{D} = \frac{1}{2 \cdot \cosh(2v_0)} \quad (4.16)$$

$$v_0 = \frac{1}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{D}{2R}\right) \quad (4.17)$$

Considérese el caso en que el electrodo v_0 está a potencial 1 y el electrodo $-v_0$ a potencial -1, lo que corresponde a la función potencial en el plano (u,v) dada por

$$\phi = \frac{v}{v_0} \quad (4.18)$$

Que es la solución en el plano (u,v) de la ecuación de Laplace y, según se ha dicho, también representa la solución de la ecuación de Laplace en el espacio (x,y) , dadas las propiedades de la transformación conforme.

La carga sobre el electrodo A ($v=v_0$) en el plano (u,v) se puede calcular por la fórmula:

$$q_{l,u_1,u_2} = \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| (u_2 - u_1) = \epsilon_0 \cdot \frac{1}{v_0} \cdot \pi \quad (4.19)$$

La misma carga, pero con signo negativo, se encuentra sobre el electrodo B ($v=-v_0$).

De acuerdo con la fórmula (3.35) se obtiene

$$Q = \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{1}{v_0} = \left(\frac{c_{11}}{2} + c_{12} \right) \cdot 2 \quad (4.20)$$

de donde

$$C = \left(\frac{c_{11}}{2} + c_{12} \right) = \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{2v_0} = \frac{\pi \epsilon_0}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2R}\right)} \quad (4.21)$$

La transformación conforme no puede usarse en este caso para calcular las capacidades parciales, pues sólo resuelve el problema cuando la distribución de potenciales es simétrica respecto al plano de tierra.

Puede observarse que la fórmula (4.21) se corresponde con la fórmula de la capacidad por unidad de longitud de un condensador plano idealizado donde

$\pi = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = u_2 - u_1$ representa la longitud de las placas y $2v_0 = v_0 - (-v_0)$ representa la separación entre las placas. Esta fórmula de capacidad se puede encontrar en los libros [48][Weber-1], [52][Zahn-1].

Ejemplos de utilización de la transformación conforme al cálculo de capacidades pueden encontrarse en [34][Palmer-1](1937), [11][Frankel-1](1942).

4.3 Cálculo de capacidades a partir de diagramas de campo

Antes de desarrollarse los métodos numéricos de cálculo de campo, era habitual para el cálculo de capacidades de configuraciones bidimensionales, o configuraciones tridimensionales con simetría de rotación, realizar cálculos aproximados de capacidades a partir de diagramas de líneas equipotenciales y líneas de campo. Obviamente, para ello es preciso haber trazado previamente el gráfico de líneas equipotenciales y líneas de campo, para lo que se utilizaban técnicas gráficas aproximadas. Una descripción de estas técnicas y algunos ejemplos pueden encontrarse en [2][Attwood-1], [48][Weber-1]. Una vez obtenido el diagrama de líneas equipotenciales y líneas de campo, el cálculo aproximado de las capacidades se realiza con los métodos que se describen en los apartados siguientes.

4.3.1 Cálculo gráfico de capacidades en dos dimensiones

Considérese un diagrama de líneas equipotenciales y líneas de campo para una

configuración de electrodos bidimensional, que ha sido trazado de forma que se cumplen las siguientes condiciones.

1. El flujo eléctrico entre cada dos líneas de campo es constante.
2. La malla de líneas equipotenciales y líneas de campo forma una red de lo que se denomina “cuadrados curvilíneos”, lo que equivale a decir que en una celda delimitada por dos líneas de campo y dos líneas equipotenciales donde δs es la distancia media entre las dos líneas de campo y δl la distancia entre media entre las dos líneas equipotenciales se cumple que $\delta s = \delta l$ (figura 4.5).

Para el cálculo aproximado de la capacidad parcial c_{12} entre dos electrodos por unidad de longitud perpendicular a la sección del dibujo, puede procederse como sigue. Supóngase que el diagrama se ha trazado partiendo de una distribución de potenciales dada para los electrodos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$, etc. Entonces el flujo eléctrico entre dos electrodos, p. ej. el 1 y el 2 viene dado por

$$\psi_{12} = c_{12}(\phi_1 - \phi_2) \quad (4.22)$$

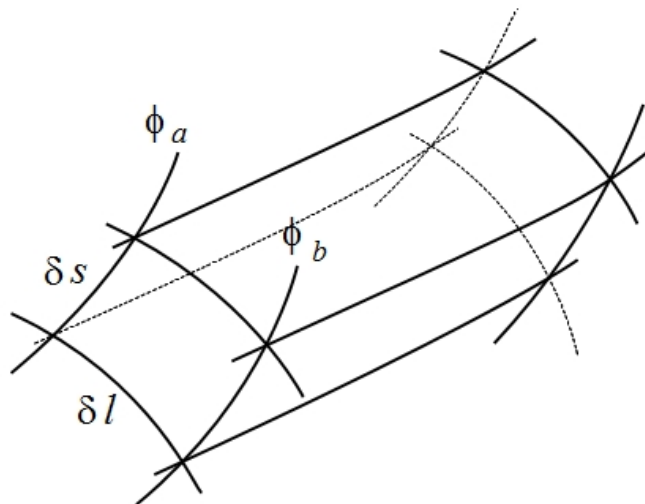


Figura 4.5: Paralelepípedo curvilíneo delimitado por líneas de campo y líneas equipotenciales.

Supóngase además que entre los electrodos 1 y 2 hay n_{12} tubos de flujo, entonces, a

cada uno de los tubos de flujo le corresponde un flujo eléctrico

$$\psi_{12u} = \frac{c_{12}(\phi_1 - \phi_2)}{n_{12}} = D \delta s = \epsilon_0 E \delta l \quad (4.23)$$

En donde se ha aplicado la condición $\delta s = \delta l$.

Si entre los electrodos 1 y 2 hay $m_{12}-1$ líneas equipotenciales, en cada celda del diagrama se tendrá una diferencia de potencial dada por

$$\delta \phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{m_{12}} = E \delta l \quad (4.24)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.23) se obtiene

$$\frac{c_{12}(\phi_1 - \phi_2)}{n_{12}} = \epsilon_0 \frac{\phi_1 - \phi_2}{m_{12}} \quad (4.25)$$

De donde se puede despejar

$$c_{12} = \epsilon_0 \frac{n_{12}}{m_{12}} \quad (4.26)$$

Por lo que para obtener una expresión aproximada de c_{12} bastaría con contar el número de celdas que separa ambos electrodos, así como el número de tubos de flujo que van de un electrodo al otro. Esta expresión, como puede observarse, es equivalente a considerar una conexión de m_{12} condensadores planos elementales en serie y n_{12} en paralelo entre ambos electrodos (figura 4.6).

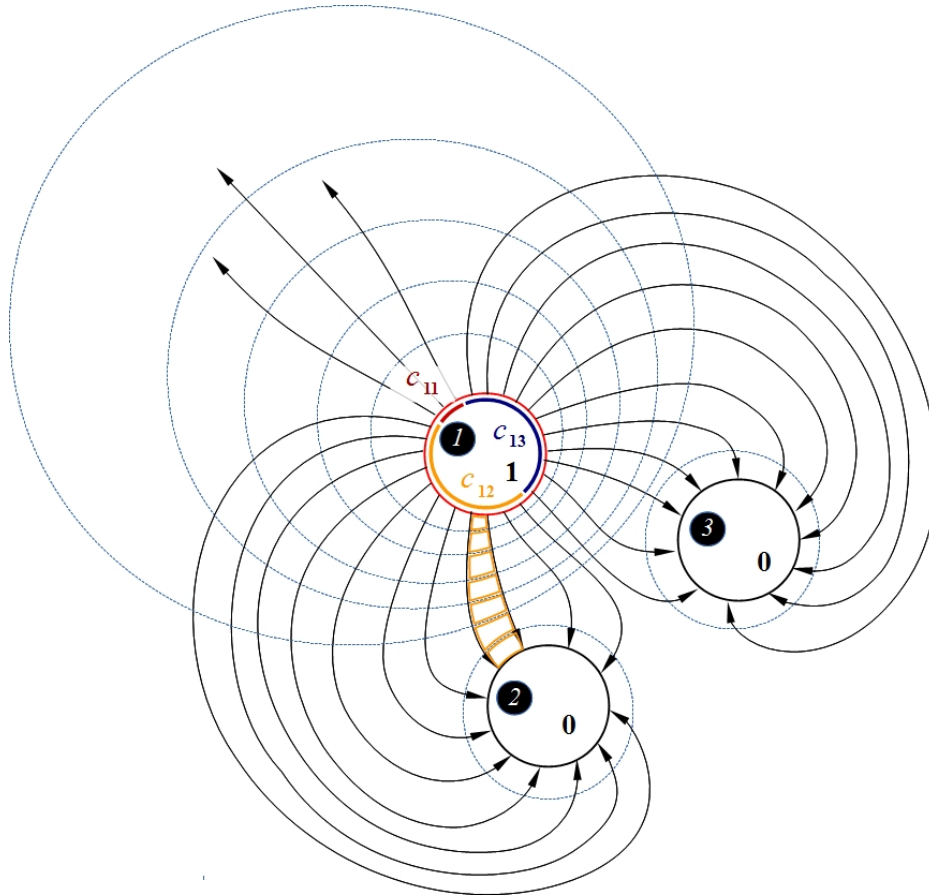


Figura 4.6: Determinación de la capacidad por unidad de longitud a partir de un diagrama de líneas de campo y líneas equipotenciales

4.3.2 Cálculo gráfico de capacidades en sistemas con simetría rotacional

Los tubos de flujo entre dos electrodos son en este caso cilíndricos. El flujo total entre dos electrodos 1 y 2 viene dado por

$$\psi_{12} = c_{12}(\phi_1 - \phi_2) \quad (4.27)$$

Si entre estos electrodos hay un total de n_{12} cilindros de flujo, llevando cada uno el mismo flujo, a cada cilindro le corresponde entonces un flujo eléctrico (figura 4.7)

$$\psi_{12u} = \frac{c_{12}(\phi_1 - \phi_2)}{n_{12}} = D \, 2 \, \pi \, r \, \delta s = \epsilon_0 \, E \, 2 \, \pi \, r \, \delta s \quad (4.28)$$

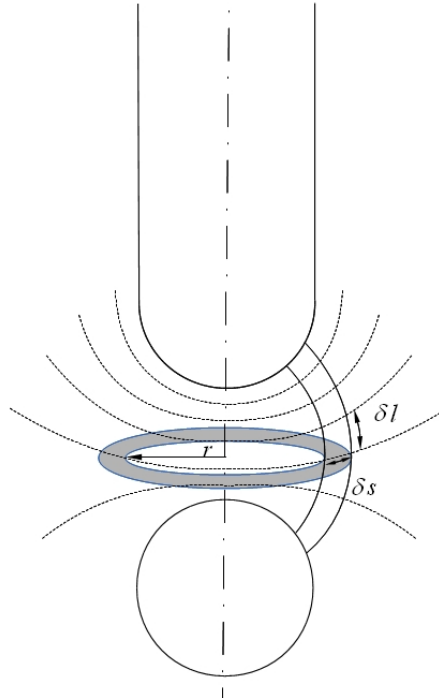


Figura 4.7: Determinación de la capacidad a partir de un diagrama líneas de campo y líneas equipotenciales en un sistema con simetría rotacional

Si entre los electrodos 1 y 2 hay $m_{12}-1$ líneas equipotenciales, en cada celda del diagrama se tendrá una diferencia de potencial dada por

$$\delta \phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{m_{12}} = E \, \delta l \quad (4.29)$$

Sustituyendo el valor de E en la expresión (4.28) se obtiene

$$c_{12} = \epsilon_0 \frac{n_{12}}{m_{12}} \frac{2 \, \pi \, r \, \delta s}{\delta l} \quad (4.30)$$

En este caso el diagrama de líneas equipotenciales y líneas de campo debe trazarse de modo que en cada celda se tenga en cuenta la distancia r al eje de simetría, y

que se cumpla la relación siguiente entre la distancia δs entre las líneas de campo y la distancia δl entre las líneas equipotenciales

$$2 \pi r \delta s = \delta l \quad (4.31)$$

De este modo la capacidad parcial aproximada entre dos electrodos puede calcularse igual que en el caso bidimensional contando el número de celdas que separa los dos electrodos y el número de tubos de flujo entre ambos mediante la expresión

$$C_{12} = \epsilon_0 \frac{n_{12}}{m_{12}} \quad (4.32)$$

4.4 Cálculo numérico de capacidades

En este apartado se va a hacer una revisión de los distintos métodos de cálculo numérico de capacidades que se pueden encontrar en la bibliografía.

El primer uso de un método numérico para el cálculo de capacidades se debe a J. C. Maxwell, [28][Maxwell-2](1879) quien para calcular la capacidad de una placa plana metálica cuadrada divide la placa en una red de 6x6 cuadrados, para cada uno de estos cuadrados supone una densidad de carga constante, para determinar la densidad de carga de cada cuadrado impone la condición de que el potencial en el centro de cada cuadrado asuma un valor unidad. Una vez determinada la carga de cada cuadrado, la suma de las cargas de los cuadrados proporciona la capacidad de la placa (teniendo en cuenta que está a potencial unidad). Esta puede entenderse como la primera vez que se utiliza el método de los elementos de contorno, o de las cargas superficiales, si bien Maxwell no deja claro cómo se calculan los coeficientes de potencial, y parece haber cometido algún error en los cálculos [50][Wintel-1].

Un método sin justificación teórica aparente, pero que parece proporcionar unos resultados aceptables fue presentado por G. W. O. Howe [19][Howe-1](1914). Howe realiza el cálculo de la capacidad de un conductor cilíndrico de radio pequeño en comparación con su distancia a un plano de tierra. Su esquema de cálculo es el siguiente. En la situación real el potencial del conductor sería

constante y la distribución de carga sobre el conductor presentaría una densidad creciente hacia los extremos del conductor. En el modelo se divide mentalmente el conductor en un conjunto de segmentos supuestos aislados unos de otros y con densidad de carga constante e igual para cada segmento. En esta situación cada segmento adquiriría un potencial distinto. Si ahora se interconectasen los segmentos, la carga fluiría de los de mayor a los de menor potencial (la carga total permanecería constante) y el potencial tomaría el valor medio de la distribución de potenciales anteriores (esta es la hipótesis de trabajo que carece de justificación teórica). El cociente entre este valor medio y el valor total de la carga es lo que se tomaría como capacidad del conductor. El procedimiento lo aplica Howe también para calcular la capacidad de un conjunto de cables paralelos, con la carga total distribuida de manera uniforme entre los diferentes alambres. El mismo método de Howe es empleado por Dwight [10][Dwight-1] (1936).

En los años 1950 el método de las subáreas de Maxwell es retomado por Higgins y Reitan y usado para calcular la capacidad de un cubo, la de un disco circular hueco y la de un condensador de placas planas [38][Reitan-1], [18][Higgins-1], [39][Reitan-2]. En estos artículos la superficie en cuestión se divide en una cantidad determinada de subáreas para cada una de las cuales se supone una carga constante desconocida. Se fija el potencial en cada subárea igual al potencial del electrodo y se construye un sistema de ecuaciones similar al del método de las cargas discretas para el cálculo de campos. Resolviendo el sistema de ecuaciones se determina la cantidad de cada una de las cargas, se suman todas ellas, y se calcula la capacidad como cociente entre el potencial del electrodo y la carga total del mismo. Se utiliza la misma aproximación de Maxwell para considerar la influencia de la carga de una subárea en otra que no sea adyacente a ella, considerando la carga de la subárea como si fuese una carga puntual situada en su centro.

Este método de las subáreas es desarrollado por varios autores entre las décadas de 1960 y 1970. Sean citados por ejemplo [23][Kessler-1](1962), [4][Berle-1](1967), [36][Pflügel-1](1967), [35][Patel-1](1971), [5][Birtles-1](1973). Aunque el método de cálculo de las capacidades es en esencia el mismo, cada autor incorpora nuevas fórmulas para la determinación de los coeficientes de potencial para distintas geometrías.

El en su día llamado método de las subáreas, coincide en su planteamiento teórico con lo que hoy en día se conoce como elementos de contorno (BEM) que se

explicó en el capítulo segundo de este trabajo.

Más modernamente [29][Nishiyama-1], [30][Nishiyama-2], [31][Nishiyama-3], utiliza el método de las subáreas para obtener fórmulas aproximadas para configuraciones usuales como el condensador plano o el condensador cilíndrico. Si bien la definición de capacidad que usa, no se corresponde con la proveniente del uso de las matrices de capacidades sino con la comentada en la fórmula (3.36).

Cuando se utilizan en cada elemento de contorno densidades de carga constantes, el método de los elementos de contorno, se denomina a veces como método de los momentos. Un ejemplo del uso de este método para el cálculo de capacidades sin la consideración de fronteras dieléctricas puede encontrarse en [32][Okon-1] (en dos dimensiones), [47][Wang-1] (en tres dimensiones, sin uso de matrices de capacidades) y en [17][Helmsen-1] (en tres dimensiones, con matrices de capacidades).

Davies [6][Davies-1] lo llama ya método de los elementos de contorno y lo utiliza para el cálculo de capacidades en tres dimensiones, usando el planteamiento de las matrices de capacidades. Sin embargo su planteamiento continúa usando elementos con densidad superficial de carga constante, lo que simplifica grandemente la resolución de las ecuaciones, y aunque incluye la posibilidad de calcular en la presencia de dieléctricos, éstos no pueden estar pegados a la superficie de los electrodos. Tröscher [46][Tröscher-1] calcula capacidades en tres dimensiones con elementos de contorno utilizando densidades de carga con distribución lineal sobre cada elemento de contorno (utiliza elementos triangulares o rectangulares) pero no contempla la presencia de fronteras dieléctricas.

Tausch [45][Tausch-1] calcula capacidades en tres dimensiones por el método de los elementos de contorno y con la presencia de fronteras dieléctricas, formulando una condición de contorno especial para el caso de fronteras dieléctricas con grandes diferencias de permitividad relativa, descomponiendo la función de potencial en dos componentes asociadas a dos problemas de campo distintos cuya superposición permite el cálculo de las densidades de carga del problema real. Diferencia también entre cargas libres y cargas de polarización en los dieléctricos, pero utiliza densidades de carga constantes sobre cada uno de los elementos de contorno y no considera el caso de electrodos a potencial indeterminado ni de electrodos abiertos de espesor reducido.

Algunos autores [3][Bai-1], [20][Hwang-1], [51][Wintel-2] han puesto a prueba el método de montecarlo para el cálculo de campos electrostáticos en el cálculo de capacidades, centrándose en la solución del cálculo de la capacidad de un cubo unitario ya abordado por Reitan [38][Reitan-1].

Finalmente algunos autores ([15][Gyimesi-1], [8][Dias-1]) que utilizan el método de los elementos finitos para el cálculo de campos, (lo que resulta más apropiado para la solución de problemas cerrados), han llevado a cabo el cálculo de capacidades a partir del cálculo de la función de energía (3.25), ya que esta aproximación resulta especialmente adecuada para el cálculo con elementos finitos.

Capítulo 5 Aplicación de las soluciones elementales al cálculo de capacidades

5.1 Introducción

En el apartado 2.7 se ha descrito el fundamento teórico del método de las soluciones elementales para el cálculo de campos electrostáticos. Este método permite realizar de forma más rápida cálculos de campos para una misma configuración cuando se cambian únicamente los potenciales de los electrodos.

En el planteamiento concreto de este método cuando se utilizan métodos de cálculo de campos en los que la solución del problema pasa por el planteamiento de un sistema de ecuaciones de la forma

$$[A] \cdot [\sigma] = [V] \quad (5.1)$$

en donde $[A]$ es una matriz de coeficientes de potencial o de campo, $[\sigma]$ es un vector incógnita de cargas o densidades de carga y $[V]$ es un vector de potenciales (o ceros cuando la condición de contorno representada por una fila de la matriz corresponde a una frontera dieléctrica), es posible agrupar los electrodos de la configuración en grupos de N elementos. Dentro de cada grupo todos los electrodos tienen los mismos potenciales y fases en el caso de cálculos correspondientes a corriente alterna.

El sistema de ecuaciones (5.1) puede reescribirse de la forma:

$$[A][\sigma] = V_1 \cdot [1]_1 + V_2 \cdot [1]_2 + \dots + V_N \cdot [1]_N \quad (5.2)$$

en donde V_i representa el potencial del grupo de electrodos i , y $[1]_i$ representa un vector que contiene unos en las filas del sistema de ecuaciones correspondientes a la formulación de las condiciones de contorno para puntos situados sobre los electrodos a potencial V_i y ceros en el resto de las filas.

El principio de superposición permite escribir la solución del sistema para un conjunto dado de potenciales como:

$$[\sigma] = V_1 \cdot [\sigma]_1 + V_2 \cdot [\sigma]_2 + \dots + V_N \cdot [\sigma]_N \quad (5.3)$$

Donde $[\sigma]_i$ es la solución del problema

$$[A][\sigma]_i = [1]_i \quad (5.4)$$

Y el conjunto $\{[\sigma]_1, [\sigma]_2, \dots, [\sigma]_N\}$ representa el conjunto de soluciones elementales del problema de campo considerado.

5.2 Cálculo de la matriz de capacidades con el método de las soluciones elementales

Para el cálculo de la matriz de capacidades mediante las fórmulas (3.4) es preciso determinar previamente la matriz de cargas o matriz de coeficientes de inducción del problema considerado, dada por la ecuación (3.2), que se reescribe aquí para los grupos de electrodos seleccionados para el cálculo de capacidades.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \dots & q_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

La cantidad total de carga en cada uno de los N electrodos agrupados puede calcularse por integración. Las subrutinas de integración de cargas están presentes

en la mayoría de los programas de cálculo de campos electrostáticos. Se utilizan para calcular la carga de los electrodos a potencial flotante, que suele fijarse como nula. Esta condición es necesaria para resolver problemas con electrodos a potencial flotante (véase el apartado 2.5).

La relación entre la carga total de los electrodos y sus potenciales viene dada por la ecuación (5.5). La columna j de la matriz de cargas en esta ecuación puede determinarse directamente calculando la cantidad de carga total en el electrodo j cuando se realiza el cálculo de la solución elemental correspondiente a V_j :

$$\begin{bmatrix} q_{j1} \\ q_{j2} \\ \vdots \\ q_{jN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_{j-1} \\ 1_j \\ 0_{j+1} \\ \vdots \\ 0_N \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Una vez que la matriz de cargas ha sido completamente determinada, es decir, cuando todos los problemas elementales han sido resueltos, la matriz de capacidades parciales puede calcularse usando las fórmulas (3.4), que se reproducen aquí para mejor legibilidad.

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \sum_{j=1}^n q_{ij} \\ c_{ij} &= -q_{ij} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Usando estos coeficientes de capacidad, la ecuación (5.5) puede reescribirse en función de los coeficientes de capacidad como:

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} (V_1 - V_2) + \cdots + c_{1N} (V_1 - V_N) \\ Q_2 &= c_{21} (V_2 - V_1) + c_{22} V_2 + \cdots + c_{2N} (V_2 - V_N) \\ &\vdots \\ Q_N &= c_{N1} (V_N - V_1) + c_{N2} (V_N - V_2) + \cdots + c_{NN} V_N \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.3 Comparación con otros métodos

Nishiyama [29][Nishiyama-1], [30][Nishiyama-2], [31][Nishiyama-3], usando una técnica de elementos de contorno adaptados ha determinado expresiones “empíricas” para las capacidades de condensadores de placas paralelas planas de diferentes formas.

Utilizando el método descrito en esta tesis con el programa de cálculo WEFCUB, se han obtenido resultados completamente concordantes con los presentados por Nishiyama. Pero para realizar la comparación entre ambos resultados se hace necesario revisar la definición de capacidad usada en los cálculos.

Aquí van a mostrarse las diferencias en el caso de un condensador de placas circulares planas paralelas, como el que se muestra en la figura 5.1.

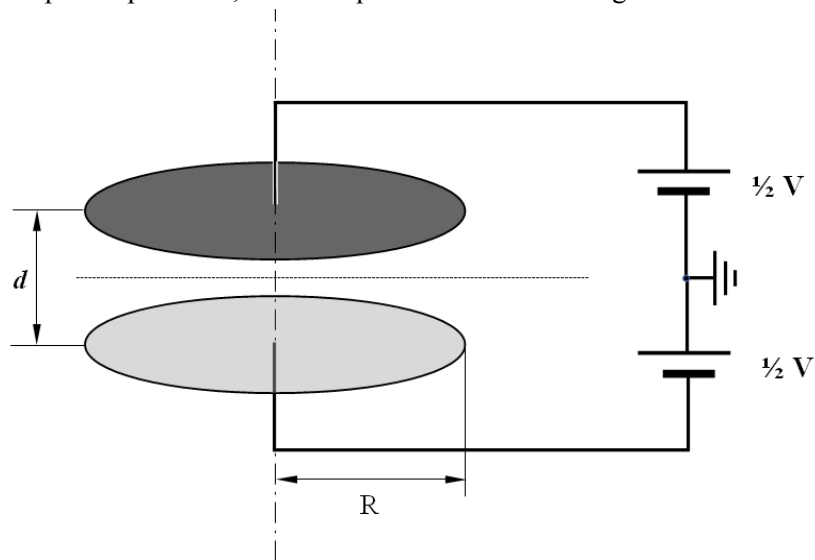


Figura 5.1: Condensador de placas circulares planas paralelas

Las capacidades calculadas para el condensador de placas circulares planas paralelas se dan como función de la relación entre el diámetro de las placas y la distancia entre ellas:

$$b = \frac{d}{R} \quad (5.9)$$

y se normalizan después refiriendo sus valores a la capacidad de un condensador

con con la misma geometría y densidad de carga constante sobre sus placas:

$$C_0 = \frac{\epsilon \pi R^2}{d} = \frac{\epsilon \pi R}{b} \tag{5.10}$$

en donde ϵ [F/m] es la constante dieléctrica. Si se denota por C_D la capacidad calculada para una disposición dada de las placas, la capacidad normalizada C_N se define como

$$C_N = \frac{C_D}{C_0} \tag{5.11}$$

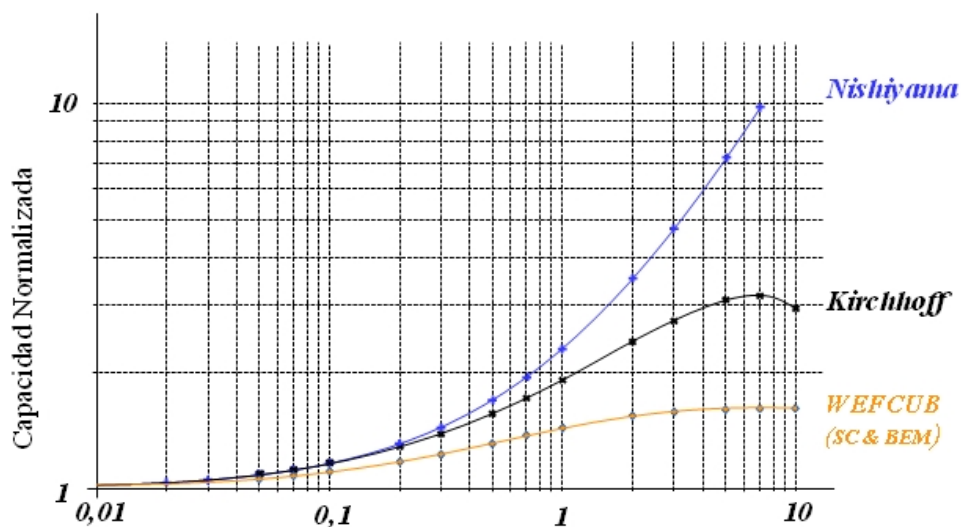


Figura 5.2: Comparación de distintos métodos de cálculo de la capacidad normalizada de un condensador de placas circulares planas paralelas

En la figura 5.2 se muestran los valores del coeficiente de capacidad c_{12} entre los dos electrodos calculado con el programa WEFCUB usando el método desarrollado en esta tesis junto con los valores obtenidos por Nishiyama [30] [Nishiyama-2] y los obtenidos por Kirchoff [24][Kirchoff-1]. Con el programa WEFCUB se obtuvieron resultados prácticamente indistinguibles usando tanto elementos de contorno como cargas superficiales.

Las aparentes diferencias de entre los resultados de Nishiyama y los nuestros que

son evidentes en la figura 5.2 se deben a que tanto Nishiyama como Kirchoff calculan la capacidad entre los electrodos como cociente entre la carga total de la placa superior y la diferencia de potencial entre las placas cuando $V_2 = -V_1$. Según se ha explicado en el apartado 3.6 esto equivale a calcular como capacidad la siguiente función de los coeficientes de capacidad:

$$C = \frac{c_{11}}{2} + c_{12} \quad (5.12)$$

Si se calcula esta función a partir de los cálculos de capacidades parciales realizados con nuestro programa, los resultados que se obtienen se superponen perfectamente con los obtenidos por Nishiyama y mostrados en la figura 5.2.

Se han realizado también cálculos comparativos con las configuraciones calculadas por Davies et al. [6][Davies-1] y obtenido resultados perfectamente concordantes en todas las configuraciones. Pero el método utilizado por Davies no resulta apropiado cuando el medio dieléctrico que rodea los electrodos tiene una permitividad distinta de ϵ_0 . La causa de esto radica en que las densidades de carga calculadas a partir de la ecuación (5.1), con el planteamiento usual de las condiciones de contorno en los programas de cálculo de campos formulados a partir de métodos basados en ecuaciones integrales, como las cargas superficiales o los elementos de contorno, son densidades de carga total, es decir, la suma de densidades de carga libre en los electrodos y densidades de carga de polarización en las superficies dieléctricas. Pero para el cálculo de las capacidades es preciso tomar en consideración únicamente las densidades de carga libre de los electrodos.

En nuestro programa los electrodos deben dividirse en tantas partes como medios dieléctricos distintos los rodean. Para cada parte del electrodo es preciso introducir la constante dieléctrica del medio adyacente, como dato adicional para el cálculo, de forma que cuando se calcula la carga total en la superficie de un electrodo puede obtenerse la integral del flujo eléctrico dada por:

$$Q_e = \int_{S_e} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \int_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (5.13)$$

donde Q_e es la cantidad total de carga del electrodo e que está dividido en n partes, estando cada parte rodeada por un dieléctrico de permitividad ϵ_i

Como ejemplo de esto se muestra en la figura 5.3 un condensador esférico con dos medios dieléctricos diferentes.

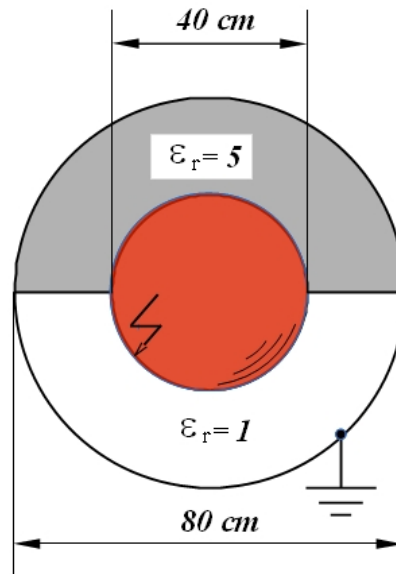


Figura 5.3: Condensador esférico con dos medios dieléctricos distintos

Nuestro programa calculó como valor de la capacidad 133,3311 pF, frente a un valor teórico de 132,915 pF, empleándose para el cálculo únicamente 10 cargas superficiales para cada semiesfera y 10 cargas superficiales para la frontera dieléctrica entre ambas semiesferas.

5.4 Cálculos con cargas discretas

Algunos autores [17][Helmsen-1] utilizan el método de simulación de cargas o cargas discretas (véase el apartado 2.2) para el cálculo de capacidades. Utilizando nuestro programa de cálculo, que incorpora también la posibilidad de utilizar cargas discretas para el cálculo de campos, se ha llevado a cabo una comparación del funcionamiento de este método en comparación con el método de las cargas superficiales.

Para este propósito se escogió la configuración simple de un condensador esférico. La geometría es la misma que la dibujada en la figura 5.3 pero sin la presencia del

dieléctrico de la semiesfera superior. El valor teórico del coeficiente de capacidad c_{12} para esta configuración es 44,5060 pF.

En la tabla siguiente se resumen los resultados obtenidos con diferentes números de cargas o densidades de carga utilizados en el cálculo numérico para ambos métodos.

Tabla 5.1: Comparación entre valores de capacidad calculados por los métodos de cargas discretas y cargas superficiales

Valor teórico $C_{12}=44,506$ pF	Valores calculados para la capacidad en pF			
Número de cargas	Cargas Discretas		Cargas Superficiales	
	C_{12}	C_{21}	C_{12}	C_{21}
20	47,9218	61,3010	44,4438	44,4437
100	44,4161	46,5549	44,4443	44,4443
200	44,4340	45,4907	44,4444	44,4444
500	44,4430	44,8627	44,4444	44,4444

Las diferencias entre los dos valores de capacidad, teóricamente simétricos, y los valores calculados muestran que 20 cargas superficiales permiten un cálculo más preciso que incluso 500 cargas discretas.

Para estos cálculos las coordenadas de las cargas discretas se calcularon utilizando un factor de asignación de 1,5 según se describe en [44][Singer-5].

5.5 Cálculos con electrodos a potencial flotante

En el apartado 3.3 se trató el tema de la consideración de los electrodos a potencial flotante en el cálculo de capacidades, estableciéndose una matriz de cargas o coeficientes de inducción modificada, fórmula (3.11), para tener en cuenta la presencia de electrodos a potencial flotante a la hora de calcular las capacidades

mutuas entre los electrodos de la configuración conectados al circuito de trabajo.

Se va a presentar aquí un ejemplo para ilustrar este procedimiento de cálculo. La figura 5.4 muestra una configuración simple construida a partir de un condensador de placas circulares planas paralelas en cuyo interior se han introducido dos esferas a potencial flotante. La red de capacidades junto con la numeración de los electrodos para el cálculo de la matriz de capacidades se muestra en la misma figura.

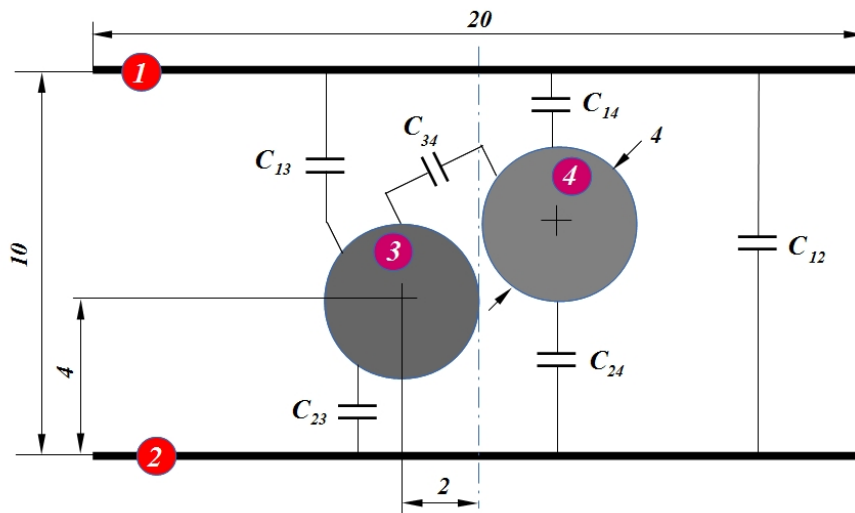


Figura 5.4: Condensador de placas circulares paralelas planas con dos electrodos esféricos a potencial flotante en el interior

Fijando el potencial de las esferas, así como el de las placas del condensador, es decir considerando cuatro electrodos independientes se obtiene la matriz de capacidades mutuas dada por la ecuación (5.14):

$$\begin{bmatrix} 4,79539 & 3,110115 & 0,82362 & 1,62953 \\ 3,11015 & 4,79539 & 1,62953 & 0,82362 \\ 0,82373 & 1,62965 & 0,11672 & 1,17120 \\ 1,62966 & 0,82374 & 1,17120 & 0,11672 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Utilizando las capacidades mutuas y resolviendo la capacidad equivalente entre los electrodos 1 y 2 (las placas del condensador) mediante teoría de circuitos se

calcula como capacidad equivalente entre las placas del condensador $C_{eq12}=4,26906$ pF.

Usando la ecuación (3.11) para calcular la matriz de capacidades entre las placas del condensador, teniendo en cuenta la influencia de las esferas a potencial indeterminado, se obtiene la matriz de capacidades siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4,90679 & 4,21491 \\ 4,21491 & 4,90679 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Observando la ecuación (5.14) se puede apreciar que la precisión mínima del cálculo de los coeficientes de capacidad (que deberían dar una matriz simétrica) es la tercera cifra decimal, mientras que la capacidad mutua entre las placas del condensador que se obtiene en la matriz de la ecuación (5.15), $C_{12}=4,21491$ pF, difiere de la calculada mediante teoría de circuitos en la segunda cifra decimal.

Esta diferencia se debe a la autocapacidad de los electrodos, que no puede ser tenida en cuenta cuando se realiza el cálculo mediante teoría de circuitos. En la matriz de la ecuación (5.14), pueden eliminarse de forma artificial las autocapacidades de los electrodos fijando los coeficientes de la diagonal de la matriz de cargas correspondiente como la suma de los coeficientes no diagonales cambiada de signo. Si se utiliza ahora la ecuación (3.11) para el cálculo de la matriz de capacidades, se obtiene la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0,00000 & 4,26900 \\ 4,26900 & 0,00000 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Que se corresponde de forma muy precisa con la capacidad equivalente calculada mediante teoría de circuitos.

Cuando se usa el método de las soluciones elementales para el cálculo de la matriz de capacidades, sólo se calculan las soluciones elementales correspondientes a los electrodos a potencial fijo, dejando el resto de electrodos a potencial flotante y sin carga. Con este modo de proceder se obtiene directamente la matriz de capacidades dada por la ecuación (5.15), sin necesidad de calcular previamente la matriz global de coeficientes de inducción dada por la fórmula (3.11). Si se desea obtener esta matriz y la correspondiente matriz global de capacidades entre todos los electrodos de la configuración, es preciso fijar algún potencial para los

electrodos a potencial flotante, para que el programa los considere como electrodos normales.

5.6 Ejemplo de un cálculo técnico complejo

Para poner a prueba las posibilidades del método de cálculo de capacidades desarrollado se escogió una configuración técnica con bastante complejidad como es un pasatapas de transformador. Se ha escogido el pasatapas TRENCH-COTA-150-F027, por contar datos sobre ensayos del fabricante que pudieran compararse con los resultados de los cálculos. Se trata de un pasatapas de transformador de alta tensión con control capacitivo del potencial mediante láminas metálicas delgadas a potencial flotante.

Mediante el método desarrollado en esta tesis se calculó la capacidad entre el terminal de alta tensión y el terminal de medida, denominada C_1 . Se construyó un modelo del pasatapas con simetría rotacional, considerando el terminal de medida y la lámina metálica exterior de control de potencial como un único electrodo (a potencial de tierra).

El fabricante ([7][DeYong-1]), proporcionó un valor medio de capacidad de tres unidades sometidas a ensayo de 1146 pF, obtenido mediante medidas en laboratorio de alta tensión utilizando el procedimiento de test UST-Doble con un puente de medida con brazo de relación de transformación [25][Kusters-1].

El pasatapas se modeló con 2213 cargas superficiales. El programa calculó un valor de 1086 pF para la capacidad C_1 . Para comparar con los resultados de la medida hay que añadir a este valor una capacidad de fugas de 17 pF, tal y como se explicó en el apartado 3.4, ya que se mide conjuntamente con C_1 , dando un valor final de 1103 pF.

El modelo del pasatapas usado por el programa para el cálculo se muestra en la figura 5.5

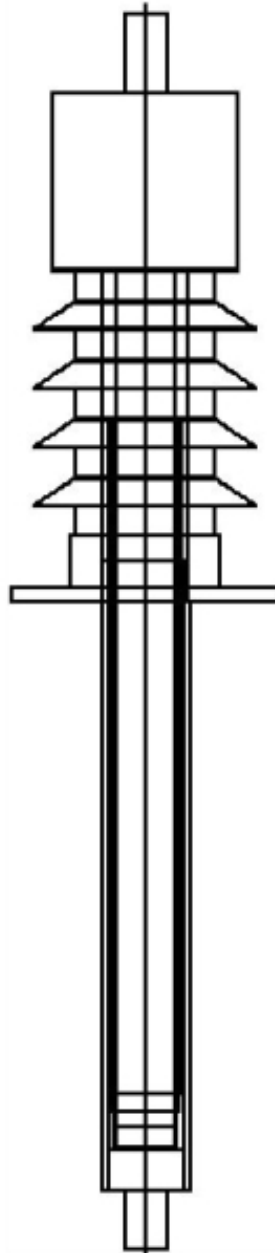


Figura 5.5: Modelo con simetría rotacional del pasatapap TRENCH-COTA-150-F027 con control de potencial capacitivo para el cálculo de la capacidad C_1 .

Puede realizarse una estimación de la precisión numérica de los cálculos comparando los valores de la matriz de capacidades, que teóricamente deberían ser simétricos, obteniéndose un error estimado del 2%.

Estos valores se obtuvieron utilizando en el modelo la posición de la lámina metálica exterior obtenida por lectura de los planos disponibles. Dado que esta lectura no representa un valor demasiado fiable, se realizaron cálculos desplazando esta lámina en un rango de $\pm 0,5$ mm desde su posición inicial. Los valores de la capacidad C_1 más la capacidad de fugas que se obtuvieron se mueven entre 1013 pF y 1215 pF.

Hay que tener en cuenta adicionalmente, que el terminal de medida del pasatapas no se incluyó en el modelo para preservar la simetría rotacional del mismo.

Capítulo 6 Conclusiones

6.1 Resumen

A lo largo de este trabajo se ha estudiado el problema del cálculo de capacidades en configuraciones tridimensionales mediante la utilización de métodos numéricos y programas informáticos.

Como punto de partida se disponía de un programa de cálculo de campos electrostáticos en tres dimensiones, realizado en el Departamento de Electrotecnia Teórica de la Universidad de Hamburgo-Harburgo. Y se trataba de incorporar al programa la posibilidad de realizar cálculos de capacidades para configuraciones tridimensionales. En el capítulo 2 de esta tesis, se presentó un resumen de los métodos de cálculo de campos utilizados en este programa, que incluye la posibilidad de realización de cálculos para distintas distribuciones de potencial de una misma configuración mediante el método de las soluciones elementales.

Se ha realizado un estudio teórico exhaustivo del problema del cálculo de capacidades (capítulo 3), tratando de hacer especial hincapié en la clarificación y precisión de conceptos usados a menudo de forma no rigurosa en el ámbito técnico, presentando los presentando los métodos utilizados hasta la fecha para el cálculo de capacidades en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se presenta el método desarrollado en el marco de este trabajo para el cálculo de capacidades en tres dimensiones ilustrándolo mediante cálculos comparativos con resultados obtenidos por otros autores, así como resultados

teóricos, y mediante la realización de un cálculo técnico complejo de una configuración típica real de la técnica de alta tensión.

6.2 Aportaciones originales del presente trabajo

Se ha desarrollado un método de cálculo de capacidades en tres dimensiones utilizando el método de las soluciones elementales para la realización de los cálculos de campos electrostáticos.

Este método se ha implementado en un programa informático de cálculo de campos electrostáticos.

Se han definido los coeficientes de capacidad efectivos en las configuraciones que presentan electrodos a potencial indeterminado, y se han incorporado en el programa de cálculo desarrollado para el cálculo de capacidades.

Se ha incluido una condición de contorno especial para el cálculo de electrodos de poco espesor rodeados por diferentes medios dieléctricos, y se ha incluido la posibilidad de utilizar estos electrodos en el cálculo de capacidades.

Se ha realizado una demostración original de un teorema de conservación de la carga entre dos líneas de campo determinadas en la transformación conforme.

6.3 Indicios de calidad

Los resultados de esta tesis se han publicado en la revista IEEE Transactions On Electrical Insulation:

Calculation of 3D-capacitances with surface charge method by means of the basis set of solutions

Gomollón, J.A.; Santomé, E.; Palau, R.

IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, Vol 17, No. 1, 2010

Pages: 240 - 246, DOI: 10.1109/TDEI.2010.5412023

6.4 Posibilidades de trabajos futuros

Entre las posibles líneas de trabajo que pueden desarrollarse a partir de los desarrollos realizados en esta tesis se encuentran las siguientes.

Estudio del flujo de corrientes capacitivas a través de personas en las proximidades de instalaciones de alta tensión.

Incorporación al programa de la posibilidad de realizar cálculos de campos que tengan en cuenta las conductividades superficiales y de volumen de los aisladores, y desarrollo de modelos de circuito equivalente resistivo-capacitivo para el estudio simplificado de configuraciones.

Dentro del plano teórico, se ha encontrado en los cálculos que la aproximación lineal de la distribución de carga presenta una estabilidad numérica en las proximidades de los bordes, que hace que el penúltimo valor de densidad de carga presente un signo opuesto al resto de las cargas del entorno. El análisis de este fenómeno, su significado teórico y cómo evitarlo parece un estudio interesante.

Apéndice A Cálculos relativos a la transformación conforme

A.1 Relaciones entre du , dv , dx y dy

A.1.1 Ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} ; \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v} \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Relaciones diferenciales

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.1.3 Relaciones diferenciales inversas

Invirtiendo (A.4)

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}}{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \quad (\text{A.5})$$

Invirtiendo (A.3)

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Invarianza de la carga en un electrodo entre dos coordenadas dadas en la transformación conforme

Considérese una transformación conforme $w=f(z)$ como la que se representa en la figura A.1, y considérese que la solución de la ecuación de Laplace en el plano (u,v) viene dada por la función (4.6).

La densidad de carga (por unidad de longitud perpendicular al plano del dibujo) en el plano (u,v) , sobre una línea equipotencial (v_1 o v_2), entre dos líneas de campo, correspondientes a las coordenadas adimensionales u_1 y u_2 viene dada por la expresión:

$$\sigma_l = \epsilon_0 \cdot |E_w| = \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| \quad (\text{A.7})$$

Mientras que en el plano (x,y) entre los puntos correspondientes, sobre la misma

línea equipotencial, la expresión de la densidad de carga por unidad de longitud es

$$\sigma_l = \epsilon_0 E_z^0 = \epsilon_0 \cdot |E_w| \cdot |E_z| = \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (\text{A.8})$$

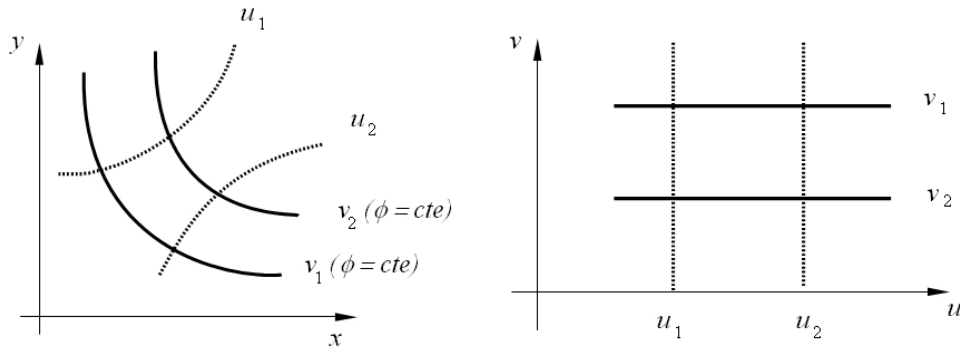


Figura A.1: Invarianza de la carga en una transformación conforme

Con lo cual la carga por unidad de longitud entre esas dos líneas de campo es:

$$q_{l, u_1, u_2} = \int_1^2 \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right| \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} dl \quad (\text{A.9})$$

con

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (\text{A.10})$$

sobre una curva \$v=cte\$ se cumple además

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du \quad (\text{A.11})$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} dx \quad (\text{A.12})$$

de donde

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}\right)^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot dx \quad (\text{A.13})$$

En donde se han aplicado las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además, igualando (A.3) y (A.5) se obtiene la relación

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \frac{\partial x}{\partial u} \quad (\text{A.14})$$

de donde

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}} \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo (A.11) y (A.15) en (A.13) se puede escribir

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \quad (\text{A.16})$$

Y sustituyendo finalmente en (A.9) resulta

$$q_{l, u_1, u_2} = \int_1^2 \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du = \int_{u_1}^{u_2} \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du = \epsilon_0 \cdot \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| (u_2 - u_1) \quad (\text{A.17})$$

Que es la misma carga que se tiene en el plano (u, v) entre u_1 y u_2 .

A.3 Cálculos para la transformación conforme $z=c \cot w$

A.3.1 Cálculo de x e y en función de u y v

$$\begin{aligned} \cot w &= \frac{\cos(u+iv)}{\sin(u+iv)} = \frac{\cos u \cosh v - i \sin u \sinh v}{\sin u \cosh v + i \cos u \sinh v} = \\ &= \frac{(\cos u \cosh v - i \sin u \sinh v)(\sin u \cosh v - i \cos u \sinh v)}{\sin^2 u \cosh^2 v + \cos^2 u \sinh^2 v} = \\ &= \frac{\sin u \cos u \cosh^2 v - \sin u \cos u \sinh^2 v - i(\cos^2 u \sinh v \cosh v + \sin^2 u \sinh v \cosh v)}{\sin^2 v(1 + \sinh^2 v) + \cos^2 u \sinh^2 v} \\ &= \frac{\sin u \cos u - i \sinh v \cosh v}{\sinh^2 v + \sin^2 u} = \frac{\frac{\sin(2u)}{2} - i \frac{\sinh(2v)}{2}}{\frac{\cosh(2v)}{2} - 1 + 1 - \frac{\cos(2u)}{2}} = \frac{\sin(2u) - i \sinh(2v)}{\cosh(2v) - \cos(2u)} \end{aligned}$$

(A.18)

siendo $z=x+iy=c \cot w$ se obtiene para x e y

$$\begin{aligned} x &= \frac{c \sin(2u)}{\cosh(2v) - \cos(2u)} \\ y &= \frac{-c \sinh(2v)}{\cosh(2v) - \cos(2u)} \end{aligned}$$

(A.19)

A.3.2 Cálculo de las superficies $v=cte$ en el plano (x,y)

Las ecuaciones (A.19) se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{c \sin u \cos u}{\sinh^2 v + \sin^2 u} \\ y &= \frac{-c \sinh v \cosh v}{\sinh^2 v + \sin^2 u} \end{aligned}$$

(A.20)

De donde se puede despejar

$$x \cdot (\sinh^2 v + \sin^2 u) = c \sin u \cos u \quad (\text{A.21})$$

$$y \cdot (\sinh^2 v + \sin^2 u) = -c \sinh v \cosh v$$

despejando en la segunda de las ecuaciones anteriores

$$\sin^2 u = -\frac{c}{y} \sinh v \cosh v - \sinh^2 v \quad (\text{A.22})$$

y sustituyendo en la primera de las ecuaciones (A.21)

$$-x \frac{c}{y} \sinh v \cosh v = c \sin u \cos u \quad (\text{A.23})$$

Elevando al cuadrado y operando, usando (A.22) para eliminar las funciones trigonométricas, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{c^2}{y^2}\right) \sinh^2 v \cosh^2 v &= c^2 \sin^2 u \cos^2 u = c^2 \sin^2 u (1 - \sin^2 u) \Rightarrow \\ x^2 \sinh^2 v \cosh^2 v &= y^2 \left(\frac{-c}{y} \sinh v \cosh v - \sinh^2 v\right) \left(1 + \frac{c}{y} \sinh v \cosh v + \sinh^2 v\right) = \\ y^2 \left[\frac{-c}{y} \sinh v \cosh v - \frac{c^2}{y^2} \sinh^2 v \cosh^2 v - \frac{c}{y} \sinh^3 v \cosh v - \sinh^2 v - \frac{c}{y} \sinh^3 v \cosh v - \sinh^4 v\right] &= \\ -[y^2(\sinh^2 v + \sinh^4 v) + c y(\sinh v \cosh v + 2 \sinh^3 v \cosh v) + c^2 \sinh^2 v \cosh^2 v] &= \\ -[y^2 \sinh^2 v (1 + \sinh^2 v) + c^2 \sinh^2 v \cosh^2 v + c y \sinh v \cosh v (1 + 2 \sinh^2 v)] &= \\ -[y^2 \sinh^2 v \cosh^2 v + c^2 \sinh^2 v \cosh^2 v + c y \sinh^2 v \cosh^2 v \left(\frac{1 + 2 \sinh^2 v}{\sinh v \cosh v}\right)] &= \\ -\sinh^2 v \cosh^2 v [y^2 + c^2 + c y \left(\frac{1 + 2 \sinh^2 v}{\sinh v \cosh v}\right)] &\Rightarrow \\ x^2 &= -[y^2 + c^2 + c y \left(\frac{1 + 2 \sinh^2 v}{\sinh v \cosh v}\right)] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

La función hiperbólica del segundo miembro puede desarrollarse como

$$\frac{1 + 2 \sinh^2 v}{\sinh v \cosh v} = \frac{1 + \sinh^2 v + \sinh^2 v}{\sinh v \cosh v} = \frac{\cosh^2 v + \sinh^2 v}{\sinh v \cosh v} = \frac{\cosh(2v)}{\sinh(2v)/2} = 2 \coth v \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo esta expresión en (A.24) y operando se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
 x^2 &= -c^2 - y^2 - 2c y \coth(2v) = \\
 &= -c^2 - y^2 - 2c y \coth(2v) + c^2 \coth^2(2v) - c^2 \coth^2(2v) = \\
 &= c^2(\coth^2(2v) - 1) - (y + c \coth(2v))^2 \Rightarrow \\
 x^2 + (y + c \coth(2v))^2 &= c^2(\coth^2(2v) - 1) = c^2 \frac{\cosh^2(2v) - \sinh^2(2v)}{\sinh^2(2v)} \Rightarrow \\
 x^2 + (y + c \coth(2v))^2 &= \frac{c^2}{\sinh^2(2v)}
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Que es la ecuación de una familia de circunferencias con el centro desplazado sobre el eje y una cantidad $c \cdot \coth(2v)$ y de radio igual a $\frac{c}{\sinh(2v)}$.

A.3.3 Cálculo de las superficies $u = \text{cte}$ en el plano (x, y)

Si en lugar de despejar en (A.21) la función trigonométrica se despeja la función hiperbólica

$$\sinh^2 v = \frac{c}{x} \sin u \cos u - \sin^2 u \tag{A.27}$$

y se sustituye en (A.21) se obtiene

$$-y \frac{c}{x} \sin u \cos u = c \sinh v \cosh v \tag{A.28}$$

Elevando al cuadrado y operando, usando (A.27) para eliminar las funciones hiperbólicas, se obtiene

$$\begin{aligned}
 y^2 \left(\frac{c^2}{x^2}\right) \sin^2 u \cos^2 u &= c^2 \sinh^2 v \cosh^2 v = c^2 \sinh^2 v (1 + \sinh^2 v) \Rightarrow \\
 y^2 \sin^2 u \cos^2 u &= x^2 \left(\frac{c}{x} \sin u \cos u - \sin^2 u\right) \left(1 + \frac{c}{x} \sin u \cos u - \sin^2 u\right) = \\
 x^2 \left[\frac{c}{x} \sin u \cos u + \frac{c^2}{x^2} \sin^2 u \cos^2 u - \frac{c}{x} \sin^3 u \cos u - \sin^2 u - \frac{c}{x} \sin^3 u \cos u + \sin^4 u\right] &= \\
 [x^2 (\sin^4 u - \sin^2 u) + c x (\sin u \cos u - 2 \sin^3 u \cos u) + c^2 \sin^2 u \cos^2 u] &= \\
 [x^2 \sin^2 u (\sin^2 u - 1) + c^2 \sin^2 u \cos^2 u + c x \sin u \cos u (1 - 2 \sin^2 u)] &= \tag{A.29} \\
 [x^2 \sin^2 u \cos^2 u + c^2 \sin^2 u \cos^2 u + c x \sin^2 u \cos^2 u \left(\frac{1 - 2 \sin^2 u}{\sin u \cos u}\right)] &= \\
 -\sin^2 u \cos^2 u [c^2 - x^2 + c x \left(\frac{1 - 2 \sin^2 u}{\sin u \cos u}\right)] \Rightarrow \\
 y^2 = c^2 - x^2 + c x \left(\frac{1 + 2 \sin^2 u}{\sin u \cos u}\right)
 \end{aligned}$$

La función trigonométrica del segundo miembro puede desarrollarse como

$$\frac{1 - 2 \sin^2 u}{\sin u \cos u} = \frac{\cos^2 u + \sin^2 u - 2 \sin^2 u}{\sin u \cos u} = \frac{\cos^2 u - \sin^2 u}{\sin u \cos u} = \frac{\cos(2u)}{\sin(2u)/2} = 2 \cot(2u) \tag{A.30}$$

Sustituyendo esta expresión en (A.29) y operando se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
 y^2 &= c^2 - x^2 + 2 c x \cot(2u) = \\
 c^2 - x^2 - 2 c x \cot(2u) + c^2 \cot^2(2u) - c^2 \cot^2(2u) &= \\
 c^2 (1 + \cot^2(2u)) - (x - c \cot(2u))^2 &\Rightarrow \\
 (x - c \cot(2u))^2 + y^2 &= c^2 (1 + \cot^2(2u)) = c^2 \frac{\cos^2(2u) + \sin^2(2u)}{\sin^2(2u)} \Rightarrow \\
 (x - c \cot(2u))^2 + y^2 &= \frac{c^2}{\sin^2(2u)}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Que es la ecuación de una familia de circunferencias con el centro desplazado sobre el eje x una cantidad $c \cdot \cot(2u)$ y de radio igual a $\frac{c}{\sin(2u)}$.

Bibliografía

[1][Andjelic-1]

Andjelic Z.; Krsrtajic B.; Milojkovic S.; Blaszczyck A.; Steinbigler H.; Wohlmuth M., *Integral Methods for the Calculation of Electric Fields for Application in High Voltage Engineering*, 1992

[2][Attwood-1]

Attwood S., *Electric and Magnetic Fields*, Dover Public. Inc., New York, 1967

[3][Bai-1]

Bai E-W., Lonngren K. E., *On the Capacitance of a Cube (Technical Communication)*, *Computer and Electrical Engineering* 28 (2002), pp. 317-321

[4][Berle-1]

Berle F.J., *Untersuchung der Teilflächenmethode bei der Kapazitätsberechnung von geschlizten koaxialen Leitungen*, *Zeitschrift für Schwingung und Schwachstromtechnik*, Band 21, Nr. 11, November 1967, pp. 333-343

[5][Birtles-1]

Birtles A. B., Mayo B. J., Bennett A. N., *Computer Technique for Solving 3 Dimensional Electrostatics and Capacitance Problems*, Proc. IEE, Vol. 120, No.2, Feb. 1973, pp. 213-220

[6][Davies-1]

Davies A. J., Jones S. P., Turri R., *Application of the Boundary Element Method to the Calculation of Capacitance in High Voltage Systems*, Proceedings of the Tenth Int. Conf. on Gas Discharges and their Applications, 1992, Swansea, UK, Vol. 2, pp. 928-931, Editor William Terry

[7][DeYong-1]

DeYong Zhao P., *Bushing Capacitance And Dissipation Factor Measured in High Voltage Laboratory Environment*, Technical Report from Trench Limited, Toronto, Canada, 2002

[8][Dias-1]

Dias Pinto J. A., Paulo Coimbra A., Pereirinha P. G., Lemos Antunes C. F., *Evaluation of the High Voltage Transmission Line Inductance and Capacitance using the Finite Element Approach*, COMPEL The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronical Engineering, Vol. 17, No. 1/2/3, 1998, pp. 313-317

[9][Durand-1]

Durand E., *Electrostatique*, Masson et Cie. Éditeurs 1964

[10][Dwight-1]

Dwight H. B., *Calculation of Resistances to Ground*, Transactions of the AIEE, Vol 24, Iss. 1, 1936, pp. 1319-1328

[11][Frankel-1]

Frankel S., *Characteristic Impedance of Parallel Wires in Rectangular Troughs*, Proceedings of the I.R.E., April, 1942, pp. 182-190

[12][Gomollon-1]

Gomollón J. Á., *Formgebung von Isolatoren zur Steuerung der Oberflächenfeldstärke*, VDI-Verlag, Düsseldorf, Germany, 1994

[13][Gomollon-2]

Gomollón J. Á.; Palau R., *Steady State 3-D-Field Calculations in Three-Phase Systems with Surface Charge Method*, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 20, No. 2, April 2005

[14][Gonzalez-1]

González Filgueira G., *Optimización de Aisladores de Alta Tensión en el Seno de Distribuciones Tridimensionales de Campo Eléctrico*, PhD Thesis, Universidad de A Coruña, 2003

[15][Gyimesi-1]

Gyimesi M., Wang J-S., *Hybrid P-Element and Trefftz Method for Capacitance Computation*, IEEE Trans. On Magnetics, Vol 37, No. 5, September 2001, pp. 3680-3683

[16][Gutfleisch-1]

Gutfleisch F., *Berechnung Elektrischer Felder durch Nachbildung der Grenzschichten mit ausgewählten Flächenelementen*, PhD Thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1989

[17][Helmsen-1]

Helmsen J. J., Hoburg J. F., *Computation of Capacitance Matrices for E.S.D. Between 3-Dimensional Bodies*, Industry Applications Society Annual Meeting 1990, Conference Records of the 1990 IEEE, Vol. 1, pp. 826-831

[18][Higgins-1]

Higgins T.J., Reitan D.K. *Calculation of the Capacitance of a Circular Annulus by the Method of Subareas*, AIEE Transactions Vol. 79, Iss. 1, 1951, pp. 926-933

[19][Howe-1]

Howe G. W. O., *On the Capacity of Radio-Telegraphic Antennae*, The Electrician, Vol. 73, 1914, August, pp. 829-832

[20][Hwang-1]

Hwang C., Mascagni M., *Capacitance of the Unit Cube*, Journal of the Korean Physical Society, Vol. 42, No.1, Jan. 2003, pp. L1-L4

[21][Johnk-1]

Johnk C. T. A., *Teoría Electromagnética: campos y ondas*, Limusa, 2004

[22][Kaiser-1]

Kaiser K. L., *Electrostatic Discharge*, CRC Taylor and Francis, 2006

[23][Kessler-1]

Kessler A., Vlcek A., Zinke O., *Methoden zur Bestimmung von Kapazitäten unter Berücksichtigung der Teilflächen Methode*, Archiv der Elektrischen Übertragung (AEÜ) 16 (1962) 8, pp. 365-380

[24][Kirchhoff-1]

Kirchhoff G., *Zur Theorie des Kondensators*, Monatsbericht der Akad. Wis., Berlin, Germany, 1877, pp. 144-162

[25][Kusters-1]

Kusters N.L., Petersons O., *A Transformer-Ratio-Arm Bridge for High Voltage Capacitance Measurements*, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers Part I Communication and Electronics, Vol 82, No. 5, 1963, pp. 606-611

[26][Malik-1]

Malik N. H., *A Review of the Charge Simulation Method and its Applications*, 24 , 1, 1989, pp. 3-20

[27][Maxwell-1]

Maxwell J. C., *A Treatise on electricity & Magnetism*, Dover Publications Inc. New York, 1954 (*republicación íntegra de la tercera edición de Clarendon Press de 1891*)

[28][Maxwell-2]

Maxwell J. C., *Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish*, University Press, Cambridge, 1879, pp. 426-427, Note 22, Art. 283

[29][Nishiyama-1]

Nishiyama H., Nakamura M., *Capacitance of a Strip Capacitor*, IEEE Transactions on Components, Hybrids and Manufacturing Technology, Vol. 13, No. 2, June 1990, pp. 417-423

[30][Nishiyama-2]

Nishiyama H., Nakamura M., *Capacitance of Disk Capacitors*, IEEE Transactions on Components, Hybrids and Manufacturing Technology, Vol. 16, No. 3, May 1993, pp. 360-366

[31][Nishiyama-3]

Nishiyama H., Nakamura M., *Capacitance of Parallel-Plate Capacitors*, IEEE Transactions on Components, Hybrids and Manufacturing Technology, Part A, Vol. 17, No. 3, Sep 1994, pp. 477-484

[32][Okon-1]

Okon E. E., Harrington R. F., *A Method of Computing the Capacitance of Disks of Arbitrary Shape*, Electromagnetics 1, 1981, pp. 229-241

[33][Palau-1]

Palau García R., *Estudio de Solicitaciones de Campo Eléctrico para Configuraciones Electrónicas Trifásicas en el Dominio del Tiempo en Régimen Permanente*, PhD Thesis, Universidad de A Coruña, 2006

[34][Palmer-1]

Palmer H. B., *The Capacitance of a Parallel Plate Capacitor by the Schwartz-Christoffel Transformation*, Transactions of the AIEE, Vol. 56, Iss. 3, 1937, pp. 63-66

[35][Patel-1]

Patel P. D., *Calculation of Capacitance Coefficients for a System of Irregular Finite Conductors on a Dielectric Sheet*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-19, No. 11, Nov. 1971, pp. 862-869

[36][Pflügel-1]

Pflügel D., *Über die Teilflächenmethode zur Bestimmung der Kapazität beliebiger Leiter*. Zeitschrift für Angewandte Physik 23 (1967) pp. 89-94

[37][Prinz-1]

Prinz, H., *Hochspannungsfelder*. Oldenbourg Verlag, München, 1969

[38][Reitan-1]

Reitan D.K., Higgins T.J., *Calculation of the Capacitance of a Cube*, Journal of Applied Physics (New York N.Y.) February 1951, Vol. 22, No. 2, pp. 223-226

[39][Reitan-2]

Reitan, D. K., *Accurate Determination of the Capacitance of Rectangular Parallel-Plate Capacitors*, Journal of Applied Physics, Vol. 30, No.2, February 1959, pp. 172-176

[40][Singer-1]

Singer H., *Numerische Feldberechnung mit Hilfe von Multipolen*, Vol. 59 , 4, 1977, pp. 191-195

[41][Singer-2]

Singer H., *Berechnung von Hochspannungsfeldern mit Hilfe von Flächenladungen*, Habilitationsschrift, Technische Universität München, 1973

[42][Singer-3]

Singer H., *Feldstärke Berechnung mit Hilfe von Flächenladungen und Flächenströmen*, 67 , 5, 1984, pp. 309-316

[43][Singer-4]

Singer H., *Flächenladungen zur Feldberechnung von Hochspannungssystemen*, 65 , 10, 1974, pp. 739-746

[44][Singer-5]

Singer H.; Steinbigler H; Weiss P., *A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields*, 93 , 5, 1974, pp. 1660-1668

[45][Tausch-1]

Tausch J., White J., *Capacitance Extraction of 3-D Conductor Systems in Dielectric Media with High-Permittivity Ratios*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 47, No. 1, Jan. 1999

[46][Tröscher-1]

Tröscher M., Hartmann H., Klein G., Plettner A., *TRICAP: A three-Dimensional Capacitance Solver for Arbitrarily Shaped Conductors on Printed Circuit Boards and VLSI Interconnections*, EURO-DAC '94 Proceedings of the conference on European design automation, pp. 116-121

[47][Wang-1]

Wang C. F., Li L-W., Kooi P-S., Leong M-S., *Efficient Capacitance Computation for three Dimensional Structures Based on Adaptive Integral Method*, Progress in Electromagnetic Research, PIER 30, 2001, pp. 33-46

[48][Weber-1]

Weber E., *Electromagnetic Theory, Static Fields and Their Mappings*, Dover, 1965

[49][Weeks-1]

Weeks W. T., *Calculation of Coefficients of Capacitance of Multiconductor Transmission Lines in the Presence of a Dielectric Interface*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques Vol. MTT-18, No. 1, Jan 1970, pp. 35-43

[50][Wintel-1]

Wintle H. J., *Maxwell and the Boundary Element Method: A historical Puzzle*, IEEE Electrical Insulation Magazine, Vol. 14, No. 6, 1998, pp. 23-25

[51][Wintel-2]

Wintle H. J., *The Capacitance of the Cube and Square Plate by the Random Walk Methods*, Journal of Electrostatics 62 (2004), pp. 51-62

[52][Zahn-1]

Zahn M. *Electromagnetic Field Theory, a problem solving approach*, Robert E. Krieger, 1979