

GRADO EN ARQUITECTURA TÉCNICA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**ESTUDIO DE LOS ESTADOS LÍMITES ÚLTIMOS EN
ZAPATAS DE HORMIGÓN ARMADO MEDIANTE
METODOLOGÍA PROBABILÍSTICA EXPLICITA**

Alumno: Luis Hidalgo Lomba

Profesor: Emilio Mosquera Rey

Convocatoria: Septiembre 2014

0. Resumen.

El objetivo de este trabajo es el análisis y exposición de los métodos probabilísticos de fiabilidad en la edificación, y su posterior uso para la verificación de elementos en estructuras de edificación. En general, este trabajo persigue 3 fines:

El primero es el de la exposición de la metodología probabilística explícita y los distintos métodos numéricos e informáticos desarrollados, exponiendo principios, razonamientos, dificultades... que cada método presenta en particular y también en general.

El segundo es la enumeración y el análisis de las normativas y documentos referenciales que incumben a esta metodología, tanto desde el nivel nacional como a internacional.

El tercer fin es la aplicación de tales métodos probabilísticos explícitos en la verificación de un elemento constructivo que puede servir de ejemplo para el resto de elementos: un zapata.

Aunque el título del proyecto pueda sugerir otra cosa, no es nuestro interés único el de dimensionar una zapata, pues el hecho de dimensionar una zapata es una excusa para demostrar la aplicación directa de la metodología probabilística en un elemento corriente de la edificación. Cualquier otro elemento puede ser valorado mediante estos métodos simplemente considerando las características propias de cada elemento-sistema y su forma de trabajo.

Por último, sacaremos conclusiones sobre la aplicación de estos métodos y las diferencias que encontramos respecto a los métodos semiprobabilistas.

Índice

1. Introducción	1
2. Conceptos básicos de fiabilidad	2
2.1. Que es la fiabilidad	2
2.2. La fiabilidad en la ingeniería	6
2.3. La probabilidad de fallo	7
2.3.1. Las funciones de probabilidad de fallo	9
2.3.2. El índice de fiabilidad	11
2.4. La fiabilidad en el cálculo estructural	14
2.4.1. Principios de los métodos semiprobabilísticos	14
2.4.2. Principios de los métodos probabilísticos	15
3. El análisis de fiabilidad estructural	16
3.1. Métodos semiprobabilísticos	17
3.2. Métodos probabilísticos	18
3.2.1. FOSM	24
3.2.2. FORM	26
3.2.3. SORM	28
3.3. Métodos de simulación numérica	29
3.3.1. Técnicas de simulación pura	30
3.3.2. Técnicas de reducción de varianza	31
4. Identificación y análisis de las variables	35
4.1. Las incertezas en el cálculo	36
4.2. Materiales	37
4.3. Geometría	45
4.4. Acciones	49
4.5. Modelos	58
5. Normativa	60
5.1. CTE, DB-SE	61
5.2. EHE-08	64
5.3. UNE-EN-1990	65
6. Aplicación práctica de la verificación probabilista en forma explícita	68
6.1. Dimensionado de la zapata mediante metodología semiprobabilista ...	70
6.2. Dimensionado de la zapata mediante el programa CYPE	79
6.3. Verificación de la zapata mediante los métodos probabilistas	81
7. Conclusiones	101
8. Bibliografía	103
ANEJO A. Informe del dimensionado de la zapata mediante CYPE	105

1. Introducción.

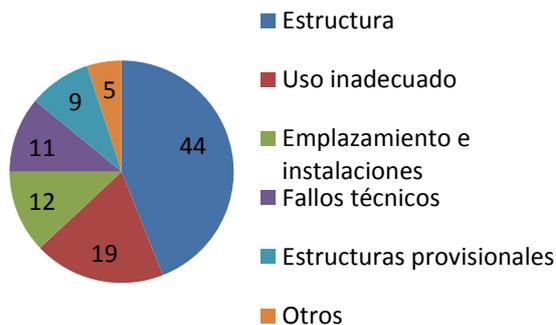
Desde el punto de vista de los técnicos de estructuras, existen 2 grandes preguntas que nos acompañan en la realización de una estructura. La primera se presenta durante toda la fase de diseño y cálculo, cuando nos preguntamos: “¿Es esto suficientemente seguro?”. La segunda nos acompaña el resto de nuestra vida, “¿Por qué no se ha caído?”.

La experiencia nos ha demostrado que, aun en las “peores condiciones”, los edificios parecen tener tendencia a no caer. No obstante, es una suerte de la cual no conviene abusar, y más nos vale estudiarla y comprenderla.

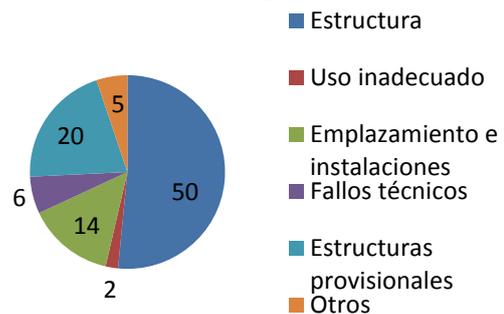
Nuestra naturaleza de humanos e ingenieros hace que busquemos comprender el “por qué” de las cosas, exigiéndonos a nosotros mismos abarcar más conocimientos, llegar más lejos y siempre en busca de la perfección. Es un hecho contrastado en nuestra sociedad que cada vez avanzamos más deprisa, incluso en la construcción, con la aparición de nuevos materiales, mejorando las características de los materiales existentes y mediante nuevas técnicas. Ejemplo de ello es la carrera entre países por tener el edificio más alto, por ejemplo.

Ahora bien, para saber por qué y cómo hacer que no se caiga un edificio, deberíamos preguntarnos primero por qué se cae. Existen numerosos estudios e informes que recogen datos de los fallos de los edificios para elaborar estadísticas. Por ejemplo, Matousek y Schneider elaboraron en 1976 un informe sobre las causas de fallo de los edificios. Los datos obtenidos son muy interesantes. Por ejemplo, los siguientes gráficos muestran un desglose de las causas que producen daños en la estructura y daños a las personas:

Daños a la estructura



Daños a personas



Las principales causas de daño a personas y a las estructuras son las propias estructuras. Tirando más del hilo de los errores en las estructuras, otra gráfica que resulta interesante ver es la distribución de causas de los errores en las estructuras según las fases del proyecto:

Origen de los errores en las estructuras



Como podemos apreciar, la fase de diseño y la de construcción son las principales causantes de los fallos en la edificación. Además de abarcar el mayor porcentaje, los fallos de diseño y planificación son los causados por los técnicos de nuestro sector.

Los fallos en la construcción son achacables a la falta de entendimiento entre las partes y a la negligencia de algunos operarios y constructores en general. Se pueden controlar estos errores mediante un mejor seguimiento de la obra y con un sentido de la ética laboral. Por otro lado, los fallos engendrados en la planificación y el diseño se deben a los errores de cálculo y a un mal entendimiento del funcionamiento de las estructuras. Los métodos de fiabilidad, o métodos probabilísticos, son métodos desarrollados en la segunda mitad del siglo XX, con el objetivo aproximarse más al conocimiento y funcionamiento de las estructuras.

2. Conceptos básicos de fiabilidad

2.1. ¿Qué es la fiabilidad?

Una definición genérica de lo que es la fiabilidad puede ser la que nos ofrece la RAG: *“probabilidad de que un material, mecanismo... funcione correctamente. Que merezca confianza”*. No obstante, esta definición se nos queda un poco incompleta, por lo que una definición más ajustada a nuestro campo sería la que ofrece el Instituto de Ciencias de la Construcción E. Torroja (CSIC): *“Habilidad de una estructura o de un elemento estructural para cumplir los requisitos especificados, incluyendo la vida útil de cálculo, para las que ha sido proyectado”*. Otra definición muy parecida es la de la norma ISO 2394, que dice: *La fiabilidad es la capacidad de la estructura para cumplir cierto requisito en el momento de su uso (vida útil) para el que se calculó, y bajo condiciones específicas*.

Podemos ahora sacar varios conceptos de estas definiciones:

- El sistema debe cumplir una finalidad (la cual nosotros escogemos)

- En unas condiciones determinadas y estipuladas
- Para un tiempo también determinado.

Antes de proseguir, es necesario aclarar que el concepto de fiabilidad está mal expresado como nosotros generalmente lo empleamos, diciendo que una estructura es fiable o no es fiable. La realidad es que la fiabilidad es la probabilidad de que un sistema funcione como se espera, pudiendo asociarse a este una alta o una baja probabilidad de fallo. De hecho, la fiabilidad se explica en términos probabilísticos o basados en ellos, por lo que se hace lógico el estudio de los métodos de cálculo basados en la probabilidad.

Volviendo a los conceptos extraídos de la definición de fiabilidad, las condiciones a las que se expone la estructura deben ser las mismas para las que fue diseñada. En el mundo de la construcción, cada estructura es un prototipo que debe ser proyectado individualmente. Pero tenemos otro factor importante que considerar, el tiempo. El tiempo y la probabilidad de fallo, en nuestro caso, van de la mano, pues a medida que el tiempo considerado aumenta, aparecen incertidumbres que no valoramos en la fase de proyecto o estas condiciones varían. Un ejemplo explicativo simple puede ser un coche, que con el paso de los años se degrada y está expuesto a más situaciones que cuando salió del taller, lo que hace suponer que su fiabilidad baja.

Las condiciones y las incertezas del sistema pueden ocasionar problemas y peligros, por lo que hace correcta e interesante la definición de que: “fiabilidad es la cualidad de ser fiable, segura y de confianza”. La necesidad de seguridad puede basarse en la existencia de algún riesgo, y se relacionan de tal forma que a mayor seguridad, menor riesgo entraña la estructura. La experiencia nos dice que si existe algún peligro en el sistema, la fiabilidad de este debe ser mayor que si no existe dicho peligro.

El riesgo depende de la gravedad de un incidente y la probabilidad de que este incidente ocurra. Simplificando, la relación que adoptan estos dos términos de forma matemática es:

$$\text{Riesgo} = \text{gravedad} \times \text{probabilidad}$$

El riesgo se refiere a distintos tipos de consecuencias, como son las ambientales, económicas o las consecuencias sociales, no solo a daño físico (como a veces puede parecer).

Hay que apuntar que el riesgo de que un sistema falle puede deberse a múltiples posibilidades. Son los llamados modos de fallo. Para calcular el riesgo total de un sistema, por lo tanto, hay que computar todos los posibles modos de fallo, multiplicando la gravedad por la probabilidad de cada modo por separado, lo que matemáticamente sería:

$$R = \sum_{i=1}^n C_i P_i$$

Por lo que podemos extraer que cuantas más formas de fallar tiene una estructura, más riesgo se asume en ella. No obstante, este pequeño cálculo no lo tendremos en consideración. Como veremos más adelante, las normativas abalan la fiabilidad estableciendo varias probabilidades que se aplicarán a cada modo de fallo de los elementos de la estructura.

Los riesgos presentes en la ingeniería son debidos a elementos como: La fuerza de la gravedad, las acciones del clima (las heladas, la nieve, el viento, etc.), la acción dinámica, la temperatura, el agua, el suelo, ciertos productos químicos, el hombre, etc.

Constantemente estamos expuestos a riesgos. Muchos de ellos los tomamos como despreciables, pues no creemos que nos pueda pasar o es un daño sin importancia y vivimos con ellos todos los días. No obstante, cada persona tiene una aceptabilidad del riesgo diferente, es decir, el riesgo que asume voluntariamente, pues este concepto depende de muchos factores. Hay gente que simplemente acepta el riesgo por diversión, como en muchos deportes de riesgo como el alpinismo o el paracaidismo. Otras personas aceptan riesgos a cambio de trabajos mejor remunerados. Lo cierto es que muchas personas tienen un conocimiento bastante incompleto sobre el riesgo que entrañan ciertos fenómenos o actividades, lo que les lleva a hacer una valoración subjetiva errónea sobre el riesgo que conllevan. Este fenómeno se llama probabilidad psicológica. Pero los mayores contrastes entre aceptabilidad del riesgo los encontramos entre las sociedades pobres y las sociedades ricas. Cuanto más pobre sea la sociedad, más riesgos están dispuestos a asumir por causa de la baja calidad de vida. El concepto "valor de una vida" se emplea en ocasiones para expresar cuánto dinero estaríamos dispuestos a pagar por salvar una vida. En países subdesarrollados, hay una relación dinero/habitante mucho más baja que la nuestra, lo que hace que el valor de vida disminuya significativamente y la gente tenga que vivir con una aceptabilidad del riesgo mayor.

Un dato curioso de mortalidad es la estadística llevada a cabo por Trevor Kletz (1982), en la que se indica que una persona corre el mismo riesgo de morir en las siguientes situaciones: recorriendo 6.500 Km en automóvil, fumando 100 cigarrillos diarios, haciendo alpinismo durante 2 horas, trabajando en la industria química durante 1 año o siendo simplemente una persona de 70 años durante 36 horas. Otro análisis realizado por este profesor decía que, si fuera posible eliminar todas las causas de muerte, la esperanza de vida media sería de 6.000 años para un trabajador de la siderurgia, 300 años para el conductor de una moto y 10.000 millones de años si se considera que la única causa posible de muerte sea la caída de un rayo.

Otro estudio, esta vez de Chauncey Starr (1969), dice que para las situaciones a las que una persona se somete conscientemente (como conducir o volar en avión) tiene un riesgo aceptado por la sociedad de 100 muertes por millón anualmente. En los países desarrollados, la comunidad desea que los riesgos involuntarios (los que no tienen control sobre ellos), tales como los desastres, sean alrededor de 100 a 10.000 veces menores que los voluntarios, lo que hace que para situaciones catastróficas se acepte un número de muertes de entre 1 y 0,01 por millón de personas expuestas anualmente.

Diversos investigadores han mejorado los métodos estadísticos con el fin de determinar el nivel de seguridad y confiabilidad en los códigos de la construcción, como son Cornell (1969), Hasofer y Lind (1974), Galambos (1992)... Estos autores han llegado a la definición de un margen de seguridad, " M ", como la diferencia entre la capacidad de carga de un elemento y la carga aplicada sobre él. A la relación del valor medio de " M " con su desviación típica le han denominado el índice de confiabilidad β . De esta forma, la probabilidad de que un elemento particular de una estructura sea sobreesforzado durante su vida útil es una función de β y del tipo de distribución de " M ".

Los niveles de fiabilidad exigidos para la sociedad están establecidos por normativa, y, en general, son comunes para todos los proyectos de ingeniería. Estos niveles son el fruto de estudios técnicos de análisis de riesgos basados en la teoría de la probabilidad, con el fin de establecer un nivel de seguridad razonable y aceptable, que sea acorde a la inversión realizada y al riesgo que entraña, pues el riesgo 0 nunca se puede conseguir. Se suele corresponder con el punto en el que el valor económico del riesgo se equipara con el gastado en seguridad a partir del cual un exceso de seguridad sería considerado una exageración. Generalmente, no trabajamos directamente con estos valores β , aunque estos se encuentran implícitos en decretos reglamentarios o en normativas técnicas derivadas de una ley marco.

Trabajar con un índice de fiabilidad y una probabilidad de fallo es algo que a mucha gente le puede chocar. Los usuarios de, por ejemplo, una casa, quieren que no tenga problemas, que su probabilidad de fallo sea exactamente 0, y el hecho de que tenga una pequeña probabilidad, aunque sea ínfima (un valor que no se puede apreciar con la vista en una edificación), puede dejar descontentos a muchos propietarios. Este y otros fenómenos engloban el concepto de la seguridad psicológica.

Otro ejemplo, esta vez relacionado con la vista, es la sensación de seguridad que se produce con las dimensiones o soluciones de algunos elementos. Muchas veces, un pilar puede no parecer suficientemente resistente, una viga puede parecer que tiene poco canto o un forjado puede aparentar que tiene poco canto, cuando unos cálculos (correctamente realizados) demuestran que son correctos.

Este fenómeno también se da en algunos profesionales de la edificación. Aunque todo método de cálculo se reduce a números, hasta el punto de parecer en ocasiones números sin sentido, la gente prefiere un método en el que la estructura es correcta o no correcta en vez de un índice de fiabilidad el cual siempre deja abierto una probabilidad de fallo. Desde el punto de vista del método de los coeficientes parciales, llegamos a la conclusión con la fórmula de los estados límites que o una estructura cumple o no cumple, sintiéndose uno aliviados, pues la norma lo ampara. Por otro lado, con las técnicas de fiabilidad, llegamos a la obtención de un índice que debe ser mayor a un número dado por una norma para cumplir. A simple vista no hay problemas, pero si el índice de fiabilidad supera por poco al necesario por norma, al calculista puede que le salten dudas que por el otro método no le surgirían. Preguntas como “¿Y si me equivoque con la caracterización de tal variable?” o “¿y si este valor constante debería tomarlo como aleatorio?”.

La respuesta a este dilema podría ser que no hay seguridad infalible (en el sentido más estricto). Los valores que se emplean para los métodos semiprobabilísticos son valores generalistas, por lo que en algunos casos estamos sobredimensionando y en otros (muy específicos) estamos jugando en el límite de la seguridad sin saberlo. Por lo que, aunque mejor es valorar bien las variables, muchos prefieren sobredimensionar para quedarse tranquilos. De todas formas, siempre es posible que se den circunstancias no previstas de gran carga o que algún elemento resistente presente una resistencia muy baja, o ambos, lo cual puede propiciar un fallo en la estructura.

2.2. La fiabilidad en la ingeniería

La seguridad estructural y el adecuado comportamiento en servicio son los dos aspectos básicos que hay que tener en cuenta a la hora de calcular las estructuras. Estos requisitos corresponden con la necesidad de minimizar el riesgo de colapso inherente a cualquier actividad humana corriente y a la necesidad de proporcionar a los usuarios un funcionamiento adecuado.

Se puede entender que el comportamiento de una estructura frente a acciones exteriores es satisfactorio si responde correctamente ante unas situaciones determinadas, definidas por unas hipótesis de cargas concretas, que responden a las más desfavorables. Son los llamados estados límite último y estado límite de servicio.

- En el estado límite último, el sistema debe ofrecer un margen de seguridad satisfactorio frente a situaciones en la que la estructura, o parte de ella, colapsa, poniendo en peligro la seguridad de personas o equipamiento. Se tienen en cuenta las siguientes situaciones: pérdida del equilibrio estático, rotura debida a tensiones elevadas en materiales, inestabilidad debida a efectos de segunda orden y fatiga provocada por acciones elevadas repetidas.
- Una estructura no responde correctamente al estado límite de servicio cuando la totalidad de la estructura o parte de ella, presenta daños que, aunque limitados, la dejan fuera de servicio por razones funcionales, de durabilidad o estéticas.

Cuando el comportamiento de la estructura ya no es satisfactorio, se dice que se encuentra en estado de ruina. Las comprobaciones de fiabilidad más exhaustivas se realizan en el estado límite último, pues el colapso de una estructura suele entrañar consecuencias peores e irreversibles mientras que traspasar el estado límite de servicio solo puede entrañar fallos de funcionalidad, y en ocasiones reversibles.

La condición fundamental para que no se produzca la ruina es que la capacidad resistente de la estructura (R) sea mayor a las solicitaciones que actúan en ella (S):

$$R > S$$

La diferencia entre estas dos magnitudes nos da un valor que es el margen de seguridad (M):

$$M = (R - S) > 0$$

La condición fundamental se puede expresar también en forma de fracción, tal que:

$$F = \left(\frac{R}{S}\right) > 1$$

Mientras que en la primera ecuación, la condición de seguridad era dar un valor positivo y el margen de seguridad daba un valor numérico (sin relación respecto a las acciones), en la segunda ecuación el valor de la división debe ser mayor que 1 y el número F es el factor de seguridad que, si prestamos atención, se puede entender como el número de solicitaciones como esta que acepta nuestra resistencia.

Estos métodos no son muy complejos, pero son en los que se siguen basando los métodos de cálculo de estructuras de casi todas las normas. Es nuestro caso, ya que la normativa española referida al cálculo y dimensionamiento de estructuras (CTE, EHE-08), y rehabilitación, se emplean estas ecuaciones en una forma más desarrollada.

En la verificación de los estados límite, el DB-SE emplea el método de los coeficientes parciales, donde a la resistencia del elemento y las acciones se multiplican por ciertos coeficientes de seguridad con el fin de crear un margen de seguridad, resultando:

$$E_d \leq R_d$$

Donde:

- E_d : Valor de cálculo del efecto las acciones (fruto del valor característico de las acciones multiplicado por un coeficiente de seguridad γ_s)
- R_d : Valor de cálculo de la resistencia correspondiente (fruto del valor característico de la resistencia dividido por un coeficiente de seguridad γ_m)

En el método de los coeficientes parciales, un método bastante empleado en la comprobación del margen de seguridad, ya sea en obra nueva o en la comprobación de resistencia de una estructura ya existente, es el coeficiente C_s o el margen adimensional:

$$C_s = \frac{E_R}{E_S}$$

Donde, si C_s es mayor a 1, existe "seguridad", y si C_s es menor que 1, no existe "seguridad". Y digo "seguridad" porque me refiero al criterio de seguridad exigido por el CTE y por tanto aceptable, pues $C_s = 1$ sería lo que piden.

2.3. La probabilidad de fallo

Toda estructura tiene un límite de carga. En el momento en el que las solicitaciones son mayores al límite, la estructura falla. Calcular el límite real exacto de una estructura es una labor imposible, pues en la construcción interfieren tantos factores que es imposible controlarlos todos y saber sus valores reales. Además de que este límite varía con el tiempo. Lo que si podemos determinar mediante análisis probabilísticos es la probabilidad de que una estructura reúna las condiciones para que falle, esto es a lo que se le llama la probabilidad de fallo.

La probabilidad de fallo, P_f , es la probabilidad de que la reacción de la estructura ("R") sea menor a las acciones solicitantes ("S"). Este es el problema básico de la fiabilidad, pues considera solamente la reacción y la solicitación en vez de la gran cantidad de variables que las componen. Matemáticamente se expresa así:

$$P_f = P(R < S)$$

Esta expresión, siguiendo las leyes de la aritmética, también se puede expresar como:

$$P_f = P(R - S < 0)$$

" $R - S$ " Es el margen de confianza aritmético, que se puede expresar, como hemos visto previamente, como " M ".

Los valores de la resistencia y las acciones solicitantes son valores estocásticos, fruto de diversos elementos, definidos por parámetros cuyos valores reales son generalmente variables. Estos valores se comportan como variables aleatorias, pues aunque son indeterminados, cada uno se presenta con una distribución de probabilidad ordenada asociada a un conjunto de valores posibles. El conjunto de estas variables se conoce como vector de variables aleatorias, y se designan tal que:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde " X " es el vector de las variables y " x_1, x_2, \dots, x_n " son las distintas variables aleatorias que intervienen en el cálculo de la fiabilidad. Como el vector " X " es el vector de variables que define el margen " M ":

$$g(X) = R - S$$

Los puntos donde la ecuación " $R - S$ " se iguala a " 0 " son el límite entre la seguridad y el fallo del sistema, por lo que la ecuación que reúne estos puntos se conoce como la ecuación de estado límite:

$$g(X) = R - S = 0$$

De la que se deduce que:

- Si $g(X) > 0$, el sistema es seguro.
- Si $g(X) < 0$, el sistema falla.

Ahora podemos definir la probabilidad de fallo como:

$$P_f = P(g(X) < 0)$$

La representación de la ecuación límite da como resultado una superficie límite que separa la región de seguridad de la región de fallo. La superficie límite está en un espacio de " n " dimensiones, tantas como variables aleatorias se tengan en cuenta, por lo que puede representarse con una curva, un plano o elementos más complejos dependiendo del número de dimensiones que tenga el espacio.

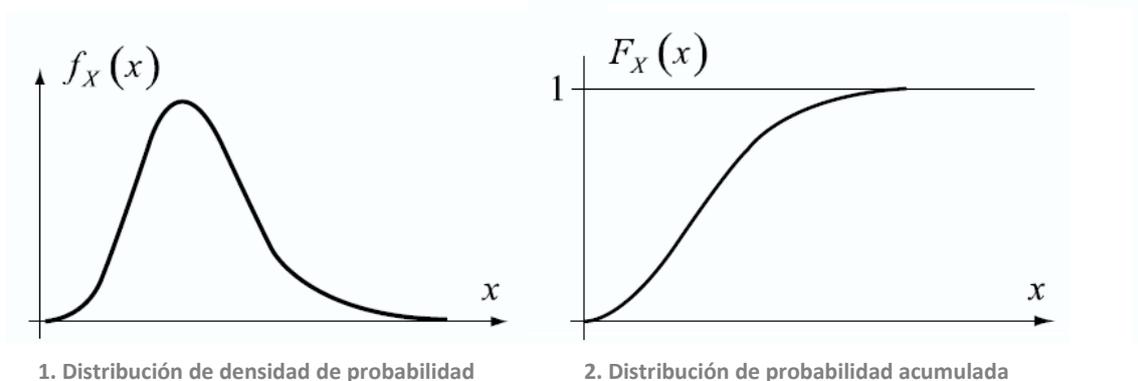
2.3.1. Las Funciones de probabilidad de fallo

Las funciones de probabilidad de las variables son básicas para el análisis de probabilidad de fallo de un sistema. Para conocer la fiabilidad de una variable es necesario conocer su función de densidad de probabilidad y su función de densidad acumulada. La función de densidad de probabilidad representa la frecuencia relativa de los valores de determinadas variables aleatorias. Los valores más altos indican los valores más probables y los más bajos son los menos probables. La función de probabilidad acumulada, es la suma de todas las probabilidades de fallo obtenidas hasta el punto x .

Es importante saber diferenciar la función de probabilidad acumulada $F_X(x)$ y la función de densidad de probabilidad $f_X(x)$, pues la segunda es la derivada de la primera.

$$f_X(x) = \frac{\delta F_X(x)}{\delta x}$$

La función de densidad de probabilidad puede representarse con varios tipos de curva dependiendo de la variable, normal, log-normal, weibull... Dependiendo de la complejidad de la función, se harán necesarios más datos para poder determinar su forma. La distribución Normal y la Log-Normal necesitan solo de una media y una desviación típica, la distribución weibull más simple (de 2 parámetros) necesita unos factores de forma y escala... La función de probabilidad acumulada muestra el porcentaje de fallo que se va acumulando a medida que la variable se vuelve más restrictiva, por eso la función está acotada por asíntotas horizontales en 0 y 1 (o 100%)



La resistencia y las sollicitaciones como, por extensión, son variables aleatorias uniformemente distribuidas, se pueden representar por funciones de probabilidad de fallo, con distribución que varían con las variables aleatorias propias.

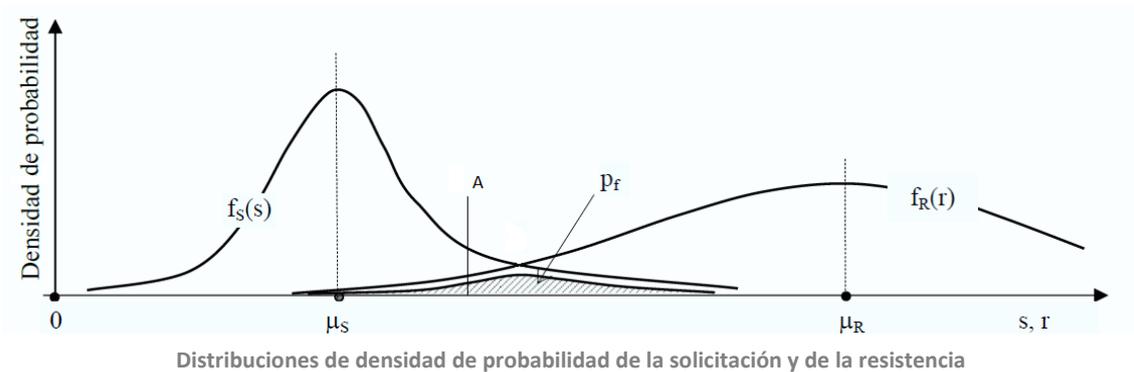
Si juntamos las funciones de densidad de probabilidad de la resistencia y de las acciones, apreciamos que μ_R y μ_S relativamente separadas, la resistencia a continuación de las sollicitaciones. Entre ellas, las gráficas tienen un área común, que es donde se produce el fallo, al igualarse acciones y resistencia. Es importante detenerse a estudiar las gráficas de las funciones para apreciar lo que significan. A primera vista, cabe la tentación de decir que el área de la intersección de las curvas es la probabilidad de fallo (recordemos que el área bajo

cada curva hace un total de 100%, por ser una distribución de un conjunto, y sí no, sabemos que la integral de esta función entre 0 e infinito da 1), pero se trataría de un error. Cojamos un punto aleatorio en la dirección “s, r”, por ejemplo “A” en el dibujo. La probabilidad de que se produzca un fallo con $S = A$ es la probabilidad de que $S = A$ y la probabilidad de que la resistencia “R” sea $R \leq A$ (no solo el punto A sino también los anteriores conducirían al fallo). Como hemos visto, la función de densidad de probabilidad nos da la probabilidad de un punto concreto, que es la función que necesitamos para saber el valor de $S = A$ ($f_S(A)$), mientras que la función de probabilidad acumulativa nos daba la probabilidad de un conjunto de valores de 0 a el punto de interés, es decir, la necesaria para saber que resistencias cumplen que $R \leq A$ ($F_R(A)$). Resultando por tanto que la probabilidad de fallo para el punto “A” será:

$$P_f(A) = f_S(A) \times F_R(A)$$

Como, obviamente, tenemos que tener en cuenta todos los puntos en los que puede haber fallo, el cálculo de la P_f se resolverá como una integral.

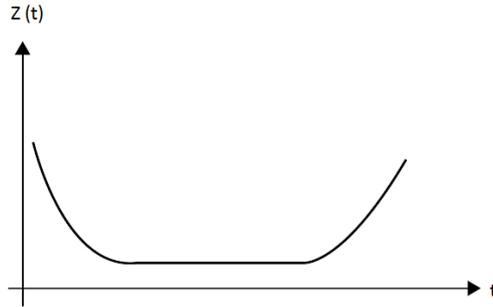
$$P_f(s) = \int_0^{\infty} f_S(s) \times F_R(s) ds$$



Otra forma de hallar la probabilidad de fallo mediante la integración es con la función límite. La función de densidad de probabilidad conjunta de la función límite $g(X)$ es $f(x)$, por lo que la probabilidad de fallo se puede expresar con una integral en el área en la que falla, es decir, de dominio $g(X) \leq 0$:

$$P_f = \int_{g(X) \leq 0} f(x) dx$$

La función de fiabilidad no es estática en el tiempo, por lo que la anterior integral está incompleta (a no ser que consideremos a nuestra estructura invariable en el tiempo). Las características de los materiales y las acciones que sufre la estructura varían en el tiempo, por lo que la función representativa también debe de hacerlo. La teoría de la fiabilidad clásica tenía como objetivo el cálculo de la esperanza de vida de los sistemas. La experiencia nos ha demostrado que los fallos suelen ocurrir en la fase de vida inicial (debido a los errores de ejecución) y en la final (debido al debilitamiento de los elementos resistentes). De esta forma, la gráfica de fallos de una estructura en función del tiempo se presenta en forma de bañera:



Forma aproximada de la distribución de probabilidad de fallo respecto al tiempo

Dada la función de probabilidad acumulada de un componente, $F_X(x)$, que se extiende en un periodo de tiempo de duración $(0, \infty)$, se define la función de fiabilidad dependiente del tiempo como la probabilidad de que el tiempo en el que el componente falle "t" ("t" es una variable comprendida entre 0 y ∞) sea mayor al tiempo teórico o necesario de fallo "T":

$$R_T(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

Donde $F(t)$ es la función acumulativa en el tiempo. La fiabilidad del componente en función del tiempo se puede expresar también:

$$R_T(t) = 1 - \int_0^t f_T(t) dt$$

A la hora de escoger una función tipo de distribución a la que aproximar nuestra función de fiabilidad, hay que estudiar el componente. Hay diferentes modelos de tiempo de supervivencia hasta el fallo, que depende del modo de deterioro. Pueden darse los casos de distribuciones exponenciales, Weibull y distribución Birnbaum y Sanders.

En el ámbito de la edificación no es tan representativo el paso del tiempo como lo es en otras industrias. El tiempo es una variable que hay que tener en cuenta más bien en las acciones. Por ejemplo, para calcular la fuerza ejercida por el viento, nos basamos en su fuerza media y sus rachas máximas, pues a medida que el tiempo aumenta, la probabilidad que venga una racha aún más fuerte aumenta.

2.3.2. El índice de fiabilidad

Hay muchas maneras de referirnos a la fiabilidad de una estructura. Una forma es con el índice de supervivencia P_s , que es la probabilidad que tiene una estructura de trabajar correctamente, y es la probabilidad complementaria de la probabilidad de fallo P_f :

$$P_s = 1 - P_f$$

El valor estándar empleado para definir la fiabilidad de una estructura es el índice de fiabilidad β (o índice de fiabilidad de Rjanitzyne-Cornell, desarrollado para tener una medida global de fiabilidad), el cual está relacionado con la probabilidad de fallo P_f , y se define como:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) = \Phi^{-1}(P_s) \quad \text{o bien} \quad P_f = \Phi(-\beta)$$

Donde Φ es la inversa de la distribución normal. En la siguiente tabla se hace una pequeña muestra de la relación entre P_f y β con los primeros 7 exponentes negativos de 10:

P_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
β	1,3	2,3	3,1	3,7	4,2	4,7	5,2

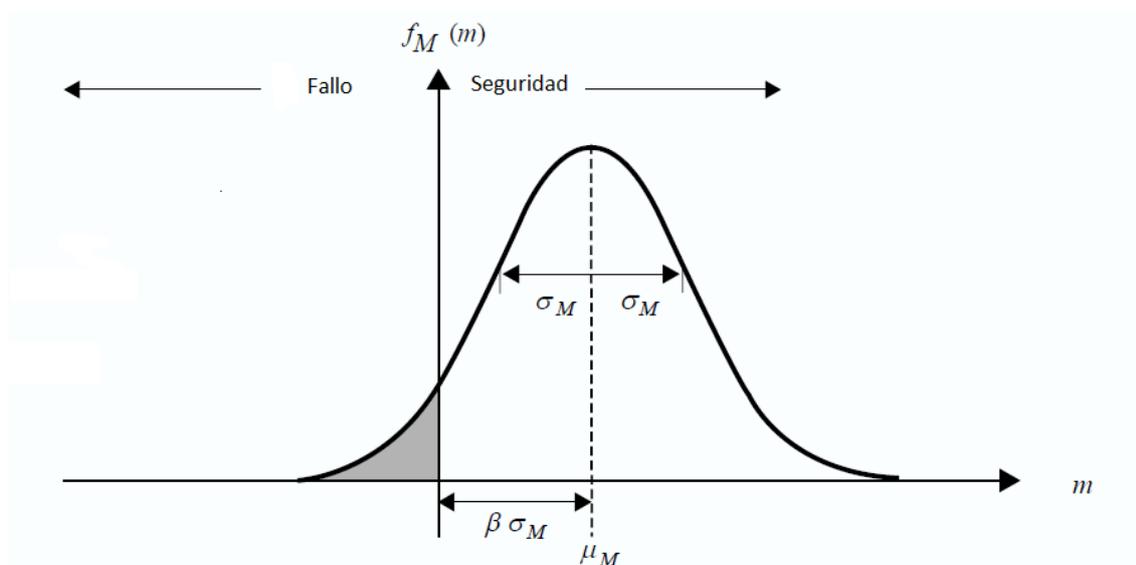
Si la probabilidad de fallo es un porcentaje que hace referencia a la media de fallos que se producen en un número de muestras, el índice de fallo β hace referencia entre la relación de la media de M y las desviaciones típicas, siendo β el “número” de desviaciones típicas de M a las que se encuentra el fallo. Matemáticamente, para distribuciones normales, β :

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{(\sigma_R^2 - \sigma_S^2)}}$$

Donde:

- μ_R : Valor medio de la respuesta estructural.
- μ_S : Valor medio de las solicitaciones.
- σ_R^2 : Varianza de la respuesta estructural.
- σ_S^2 : Varianza de las solicitaciones.

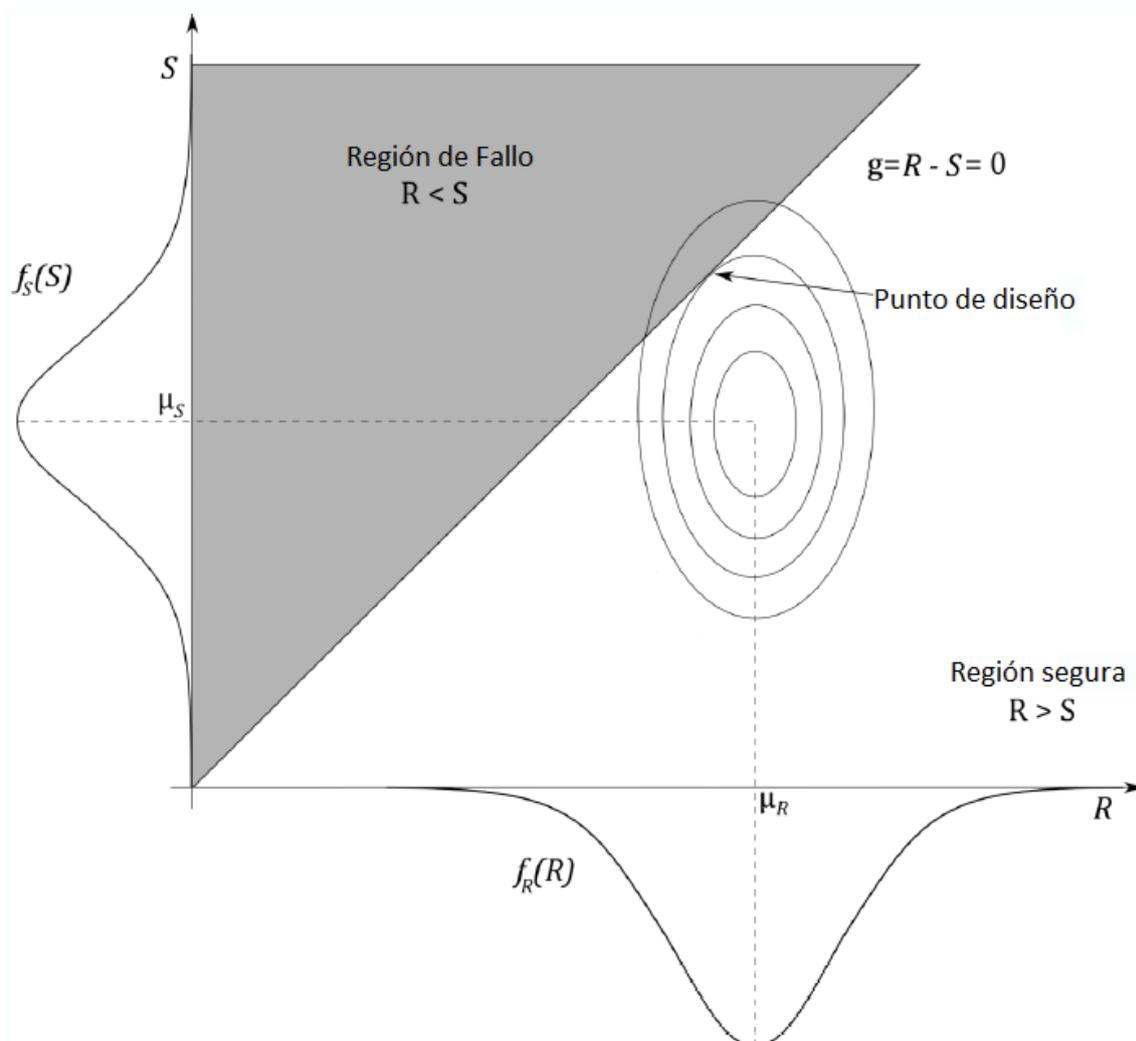
De forma gráfica en la función de distribución de la probabilidad de M , β sería:



Representación gráfica de del coeficiente de fiabilidad β en una distribución de probabilidad

El uso de estos cálculos directos para hallar el índice de fiabilidad β solo son posibles en escasas ocasiones: cuando las variables aleatorias sean no correlacionadas, tengan distribuciones normales o log-normales, y su ecuación de estado límite sea lineal. Para el resto de los casos, habrá que acudir a métodos más complejos de aproximación a otras funciones o de simulación, generalmente métodos matemáticos informáticos los cuales se expondrán más adelante.

En el siguiente dibujo se muestra una función límite lineal con sus funciones de densidad de probabilidad de sollicitación y resistencia. La intersección entre μ_R y μ_S determina μ_M , la media del margen de seguridad, y las elipses concéntricas son isolíneas que determinan el índice β del margen de seguridad, determinadas por la desviación típica de las variables. El punto donde la función límite pasa tangente a una isolínea de β es el punto más probable de fallo y determina el índice de fiabilidad del sistema, ya que es la probabilidad de fallo más próxima al margen de seguridad, y es conocido también como punto de diseño.



Representación de la función límite respecto a las distribuciones de probabilidad de la resistencia y la sollicitación

2.4. La fiabilidad en el cálculo estructural

En el ámbito de la edificación, el dimensionamiento de las estructuras está condicionado por la normativa del EHE 08 y el CTE en nuestro caso. Hoy en día estos documentos desarrollan el dimensionamiento estructural a partir del método de los coeficientes parciales. Es lícito emplear otro método (como veremos más adelante en el punto 5), pero ambos documentos encaminan el cálculo de la seguridad a través de los coeficientes parciales de los diferentes parámetros para llegar a la obtención de un margen considerado de seguridad en los estados límite último de los elementos.

Para el cálculo de una estructura, sea cual sea el método, partimos de un predimensionado donde definimos los elementos que componen la estructura. Estos elementos llevan asignados unas dimensiones y otros datos importantes, como la cantidad de acero en el hormigón armado o su recubrimiento, los cuales son hallados en su predimensionamiento con reglas simples o cálculos rápidos. El cálculo se puede realizar ahora mediante el método clásico de las tensiones admisibles o el método de los estados límites.

La necesidad de cumplir los estados límite, en nuestro caso, es invariante para los métodos probabilistas o para los métodos semiprobabilistas. El planteamiento que siguen ambas metodologías es el mismo, emplean las mismas ecuaciones y persigue un mismo fin, garantizar un margen de seguridad. Lo único que varía son los procedimientos, los cuales, ya sea de una forma o de otra, incorpora la probabilidad en sus cálculos. A continuación analizaremos en qué grado se incorpora la probabilidad en las principales ramas del cálculo analítico.

2.4.1. Principios de los métodos Semiprobabilísticos

Estos métodos son relativamente nuevos y su uso está muy extendido. Su funcionamiento se basa en el dimensionamiento de las estructuras empleando unos márgenes de seguridad para las resistencias y las sollicitaciones basados en un estudio. Estos métodos derivan del coeficiente de seguridad global, el cual aplica un único coeficiente de mayoración de acciones (igual a 2), que engloba todas las incertidumbres del sistema, estableciendo un margen de seguridad muy conservador y obteniendo resultados antieconómicos. Esta técnica fue depurada, considerando coeficientes diferentes para cada acción y reacción que actúan en nuestro problema. Estos métodos con coeficientes parciales son conocidos como métodos semiprobabilistas porque abordan la probabilidad de una forma implícita, encubierta en el valor de los coeficientes parciales.

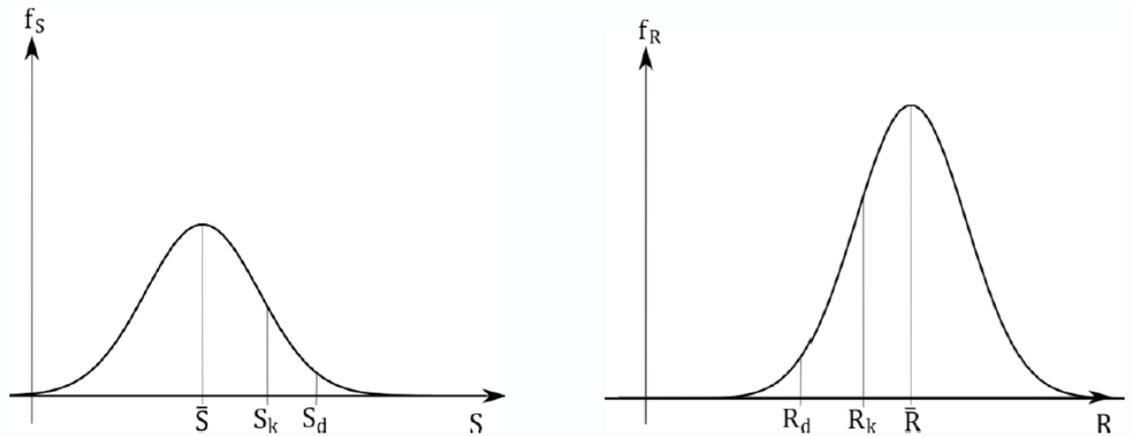
En el método de los coeficientes parciales, el método semiprobabilístico más extendido en la actualidad y que regula en mayor parte nuestro código técnico, partimos de la misma base en la que las fuerzas se dividen en sollicitaciones y resistencias. Tanto las acciones como las respuestas tienen asociados 3 valores importantes. El primero de ellos es la media, \bar{S} o \bar{R} dependiendo si es una sollicitación o una resistencia, la medida de la tendencia central. El segundo es el valor característico, S_k y R_k . Este valor es el que se asocia a las características de fuerza o resistencia del elemento. Generalmente, hace referencia al cuantil 95% (o probabilidad de superación) del valor medio de las sollicitaciones y al cuantil 5% de las

reacciones a lo largo de su vida útil. La elección de estos cuantiles atiende a la necesidad de tener una cifra más coherente con la que identificar al elemento, pues la media se hace menos interesante a medida que el coeficiente de variación aumenta.

Por último, tenemos los valores de diseño S_d y R_d , empleados para calcular los estados límite. Estos valores nos determinan definitivamente si el sistema supera las comprobaciones de estados límite, si la suma de las resistencias es mayor o igual al de las solicitaciones.

$$R_d \geq S_d$$

El valor de diseño de las solicitaciones se obtiene multiplicando el valor característico por un coeficiente, y dividiéndolo por otro en el caso de la resistencia, con el objetivo de mayorar las acciones y disminuir las reacciones. El objetivo de estos coeficiente es el de crear un margen de seguridad, lo que en el caso de los métodos probabilísticos nos aporta la β . Estos coeficientes son obtenidos a partir de cálculos probabilísticos mediante el procedimiento inverso al que realizamos a la hora de calcular la fiabilidad, variando en función de las características del material o las acciones, siendo significativa la varianza de los valores respecto a la media, la repetición de las acciones en el tiempo y otros datos.



Valores medios, característicos y valores de cálculo en distribuciones de probabilidad de solicitaciones y resistencias

Como podemos apreciar, estos métodos son muy generalistas, indagando poco en la caracterización particular de cada material o acción y dejando un margen de seguridad relativamente desconocido.

2.4.2. Principios de los métodos Probabilísticos

Como hemos visto ahora, en los métodos semiprobabilísticos tratan a las acciones y la resistencia de los elementos como deterministas, integrando las incertezas (o desviaciones típicas, ya introduciéndonos en la probabilidad) en el valor característico. No obstante, sabemos que estos valores son estocásticos, ya que, en realidad, sería más óptimo no generalizar. Los métodos probabilistas trabajan solo con datos obtenidos del estudio de los materiales y las acciones, y tratando a estas como variables aleatorias (en mayor o menor medida) con el objetivo de reducir la inexactitud.

Trabajar con un método probabilístico puede parecer un trabajo más engorroso que cualquier otro método, pero, hoy en día, con el cálculo numérico asistido por ordenador, este esfuerzo carece de importancia. La meta sigue siendo la misma, cumplir con las ecuaciones de los estados límite últimos y de servicio. La misma ecuación que para los métodos semiprobabilistas, solo que en este caso emplearemos valores medios en vez de valores característicos, y el resultado no es un valor mayor que otro, sino una diferencia. Las varianzas de las variables aleatorias que intervienen en la ecuación se combinan aparte para obtener una varianza del estado de equilibrio. La relación de estos valores, como hemos visto anteriormente en los principios de la fiabilidad, es el índice de fiabilidad β .

El hecho de trabajar con estos métodos nos aporta, además de una mayor precisión, la posibilidad de concentrar los recursos en los puntos importantes del problema, gracias a caracterizar a cada acción por separado.

3. El análisis de la fiabilidad estructural

La comprobación de si un sistema es fiable o no, como hemos visto hasta ahora, se puede fundamentar en diversos procedimientos de cálculo analítico. Dependiendo del tipo de procedimiento empleado, se puede establecer una clasificación por niveles de rigurosidad a la hora del cálculo:

- Nivel 0, métodos deterministas: Se emplean coeficientes globales basados en la experiencia y la intuición, no en datos objetivos. Los más conocidos son el método de las tensiones admisibles y el método del coeficiente global de seguridad, ambos en desuso.

- Nivel 1, métodos semiprobabilísticos: Son los que emplean coeficientes para reducir las características resistentes del sistema y aumentar las solicitaciones con el fin de crear un margen de seguridad. Podemos referirnos a estos métodos como probabilísticos implícitos, porque la probabilidad de fallo va implícita en los coeficientes.

- Nivel 2, métodos probabilísticos: Estos métodos son los que consideran las resistencias y las solicitaciones como variables aleatorias típicas, que obtienen los parámetros de las variables de estudios ajenos a nuestra obra, conformando un problema estocástico en el cual la fiabilidad viene dada por la probabilidad de fallo. A partir de este nivel ya hablamos de probabilismo explícito.

- Nivel 3, métodos probabilísticos refinados: Se trata de métodos en los que introducimos las funciones de distribución de las variables reales, es decir, con datos obtenidos de nuestra propia obra. Por este motivo, este nivel no nos permite hacer el cálculo de dimensionamiento de un sistema, solo nos permite hacer un cálculo de fiabilidad a posteriori.

- Nivel 4: Este nivel de análisis de fiabilidad introduce la valoración económica del fallo, la reposición... y demás conceptos valorables que son relevantes en la estructura que vamos a calcular. Es empleado en edificios que por su importancia o singularidad es necesario tener en cuenta las consecuencias de un hipotético fallo.

3.1. Métodos Semiprobabilísticos

Después de los métodos deterministas, demasiado simples e intuitivos para tenerlos en cuenta, aparecieron los métodos semiprobabilísticos, en los que ya se aprecia una fiabilidad fundamentada en el cálculo matemático adaptada al problema con el que nos encontramos. Surgen por la necesidad de definir normas para las estructuras de forma simplificada y realista, cuyos criterios se basen en la probabilidad de fallo.

Como ya hemos visto antes, las incertezas aportadas por las variables y otros aspectos (como los modelos de cálculo, fallos de ejecución...) son consideradas de forma simplificada a través de coeficientes de seguridad, que minoran las propiedades resistentes de los materiales y mayoran los efectos de las acciones.

Los métodos semiprobabilistas abordan implícitamente la metodología probabilista, pues los coeficientes empleados son obtenidos a través de cálculos basados en la probabilidad. El hecho de aplicar unos coeficientes de seguridad no variables sugiere una distribución normal. El objetivo es emplear reglas simplificadas pero con la misma eficacia. El método de los coeficientes parciales es el más avanzado de los métodos semiprobabilistas y más empleado en la mayoría de las normas.

Las acciones que interfieren con la estructura se pueden clasificar en los siguientes tipos:

- Acciones permanentes (G): Son las acciones continuas o prácticamente continuas, cuya intensidad es constante o su variación es despreciable.
- Acciones variables (Q): Las acciones cuya intensidad varía frecuentemente con el tiempo.
- Acciones accidentales (A): Acciones que resultan de fenómenos cuya frecuencia es rara, como choques o sismos.

En el dimensionamiento es necesario tener en cuenta las distintas acciones que intervienen, ya actúen durante la vida útil del edificio o durante periodos más cortos de tiempo, por lo que es preciso considerar la simultaneidad que hay entre ellas. Las combinaciones que se producen entre ellas son definidas por valores representativos y coeficientes reductores de las intensidades máximas de las distintas acciones que actúan. En el caso de las acciones permanentes, el valor de la variación a través del tiempo es muy pequeño, por lo que en la combinación de acciones emplearemos el valor característico sin modificar.

Para las acciones variables emplearemos, como valor de combinación, el valor característico multiplicado por un coeficiente Ψ dependiendo de la frecuencia de la acción, el cual atiende a Ψ_0 para valor de combinación estándar, Ψ_1 para el valor de cálculo frecuente y Ψ_2 para valor casi permanente.

- Ψ_0 es empleado para cargas que se repiten frecuentemente a lo largo de la vida útil, aunque tienen una presencia en el tiempo significativamente menor que las cargas permanentes.
- Ψ_1 es usado con cargas cuya acción actúa durante un tiempo menor al 5% de la vida útil del sistema.
- Ψ_2 es aplicado cuando la acción actúa durante periodos, cuya totalidad es del orden del 50% de la vida útil.

Por último, las acciones accidentales se representan con un único valor representativo del fenómeno que se combina con las otras acciones.

Las combinaciones de las acciones deben tener en cuenta la actuación simultánea con intensidades distintas, pues es bastante improbable que se produzcan las diferentes acciones con su valor máximo al mismo tiempo. De todas las combinaciones posibles esperadas en la vida útil, se tomará la más desfavorable.

Para verificar la seguridad de la estructura, la combinatoria de las cargas debe satisfacer las condiciones correspondientes a los estados límite. Esto es, debe satisfacer los estados límites últimos con la combinación de las cargas fundamental para situaciones duraderas y transitorias, y también la combinación de situación excepcional en el caso de que haya alguna acción accidental. Mientras que las comprobaciones de estados límites de servicios deben ser satisfactorias para las combinaciones de muy corta duración, frecuentes y casi permanentes.

3.2. Métodos Probabilísticos

Como hemos estado viendo hasta ahora, en los métodos probabilísticos de fiabilidad, entendemos las acciones que actúan sobre nuestro sistema y la resistencia de este como variables aleatorias. El concepto de variables aleatorias que se asigna a las variables puede parecer simple, pero no lo es. Una vez que nos metamos de lleno en el cálculo, comprenderemos que la caracterización de una variable puede llegar a ser una tarea casi imposible. Además, a mayor número de variables más se complicará el cálculo.

Una variable se puede definir con una curva de distribución de probabilidad, y una serie de parámetros, cuyo número dependerá de la complejidad de la curva, partiendo de la media y la desviación típica para las más simples, hasta el uso de constantes para definir la disposición de alguna curvas como la gamma o la beta. De estas variables se hablara más extendidamente en el punto 4.

El nivel de fiabilidad se puede calcular mediante técnicas analíticas, de integración numérica o de simulación a partir de los datos de las variables. En este nivel, es posible contemplar en los cálculos los errores derivados de la intervención humana y la variabilidad de las acciones en función del tiempo, si tenemos datos de ello.

La resolución analítica pasa por resolver la integral de la función de las variables para donde falla la función límite (de la cual ya hablamos y se muestra a continuación). La función conjunta de las variables X_i suele ser desconocida, por lo que la integral supone un problema muy difícil de resolver.

$$P_f = \int_{g(X_i) \leq 0} f_{X_i}(x_j) dx_j$$

Los métodos numéricos se pueden emplear cuando la función límite sea explícita. Estos procedimientos engloban los distintos métodos de integración. Por otro lado, M suele ser

desconocida, y su integral muy compleja numéricamente dado que es una función compuesta por muchas variables y muchas veces sin formulación explícita.

Este problema con la determinación de la función límite y la integral de la función de distribución conjunta hace que afrontar este problema directamente sea una tarea, generalmente, imposible. Solo en unas condiciones determinadas existe una relación directa entre el índice β y la probabilidad de fallo, lo que permite despejar el índice de fiabilidad. Para ello, las variables deben tener distribuciones normales o log-normales, pudiendo ser variables independientes o correlacionadas, y la función debe ser lineal.

Las posibles combinaciones en las que se puede despejar el índice β directamente, cuyos razonamientos matemáticos analizaremos a continuación, son:

- Variables normales e independientes.
- Variables normales correlacionadas.
- Variables log-normales independientes.

A continuación de estos métodos manuales, se explicará el método de aproximación FOSM, que como veremos es casi imprescindible aun con estos problemas tan simples. Luego se explican los métodos analíticos de cálculo de probabilidad más comunes, mucho más sofisticados que los que ahora siguen.

Variables aleatorias normalmente distribuidas e independientes.

Esta combinación es la más sencilla que se nos podría dar, donde la ecuación límite es lineal y las variables normales e independientes, la resolución es directa y solo necesita de los dos primeros momentos estadísticos, la media y la desviación.

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

Donde:

- μ_M : Valor medio del margen de seguridad z.
- σ_M : Varianza del margen de seguridad z.

Si las resistencias cuentan solo con una variable cada una, la solución es simple, la media de M es la diferencia entre resistencia y sollicitación, y la varianza de M es la raíz de la suma de las varianzas de la resistencia y la sollicitación, o lo que es lo mismo:

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

En el caso de que haya más de 2 variables en la ecuación límite, como estamos tratando en este caso con variables normales independientes, para el cálculo de los valores μ_M y σ_M se considera la propiedad aditiva de la ley normal.

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S$$

$$\sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Es frecuente que la función límite $g(X)$ no sea lineal. Esto hace que los valores μ_M y σ_M no puedan ser obtenidos a partir de la propiedad aditiva de la ley normal y que la función límite pueda no ser normal. Aunque hemos dicho que la función límite debe ser lineal, en este caso se produce una excepción (siempre y cuando las variables sean normales e independientes). Es posible calcular la probabilidad de rotura a través de la integración múltiple sobre todas las variables básicas:

$$p_f = P[G(R, S) \leq 0]$$

$$p_f = P[g(X) \leq 0] = \int_{g(X) \leq 0} f_X(x) dx$$

Donde $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta del vector X , de dimensiones n variables básicas. Como las variables básicas son independientes, la integral puede simplificarse con:

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) = f_{x_1}(x_1) \times f_{x_2}(x_2) \times \dots \times f_{x_n}(x_n)$$

Para las que $f_{x_i}(x_i)$ es la función de densidad de probabilidad para las variables básicas de X_i .

De todas formas, la integración solo es posible en casos muy raros y resulta muy complicada. Generalmente, se suele recurrir a simplificaciones, métodos numéricos o ambos. En el caso de una ecuación no lineal, se puede resolver mediante el método FOSM, que consiste en una aproximación lineal a la función $g(x)$ en su punto más crítico (explicado en el punto 3.2.1)

Variables aleatorias normalmente distribuidas y correlacionadas.

En este caso de variables correlacionadas, tanto la función límite $g(x)$ como el margen de seguridad M , se siguen expresando de la misma forma, pero como no son independientes, hay un coeficiente ρ_{ij} de correlación entre variables que afecta a la desviación típica, expresando la fórmula y los momentos de M como:

$$M = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

$$\mu_M = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}$$

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j$$

Esta situación de variables aleatorias correlacionadas es muy frecuente en problemas prácticos. En el caso de variables con distribuciones normales, la función de probabilidad conjunta puede ser expresada mediante los dos primeros momentos: el valor medio y la matriz de covarianza (Cov: valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias).

Las variables básicas aleatorias X están correlacionadas, y su matriz de covarianza será:

$$C_X = \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] & \cdots & \text{Cov}[X_1, X_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[X_n, X_1] & \cdots & \text{Var}[X_n] \end{bmatrix}$$

Con una matriz de correlación de coeficientes ρ_X :

$$\rho_X = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Si la matriz estuviera compuesta toda por ceros, menos la diagonal principal, entonces las variables aleatorias no estarían correlacionadas.

El primer paso es transformar el vector de n variables aleatorias básicas \mathbf{X} en un vector de variables aleatorias estandarizadas \mathbf{Y} con valores medios iguales a cero y las varianzas iguales a la unidad. La operación se realizará tal que:

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, i = 1, 2 \dots n$$

Manteniendo como matriz de covarianza del vector de variables aleatorias estandarizadas \mathbf{Y} , es decir, C_Y , la misma matriz que para el vector de variables \mathbf{X} , la matriz ρ_X .

El siguiente paso es transformar el vector de variables aleatorias estandarizadas \mathbf{Y} en un vector de variables aleatorias independientes \mathbf{U} . Esta transformación se puede realizar de varias formas. El siguiente procedimiento emplea la factorización matricial de Cholesky, el cual se puede emplear tanto para cálculos manuales como para programas de ordenador.

Esta transformación se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T} \times \mathbf{U}$$

Donde \mathbf{T} es la matriz triangular inferior ($T_{ij} = 0$ para $j < i$). La matriz de covarianza C_Y puede ser expresada tal que:

$$C_Y = E[\mathbf{Y} \times \mathbf{Y}^T] = E[\mathbf{T} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}^T \times \mathbf{T}^T] = \mathbf{T} \times E[\mathbf{U} \times \mathbf{U}^T] \times \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \times \mathbf{T}^T = \rho_X$$

Para la que T es la matriz traspuesta, y sus componentes se pueden calcular así:

- $T_{11} = 1$
- $T_{21} = \rho_{12}$

- $T_{31} = \rho_{13}$
- $T_{22} = \sqrt{1 - T_{21}^2}$
- $T_{32} = \frac{\sigma_{23} - T_{31} \times T_{21}}{T_{22}}$
- $T_{33} = \sqrt{1 - T_{31}^2 - T_{32}^2}$
- \vdots

Ahora que ya tenemos las variables independientes, la solución es la misma que en el apartado anterior, una aproximación lineal de $g(x)$ en el punto de mayor probabilidad de fallo mediante el método FOSM.

Variables aleatorias independientes con distribuciones no normales.

Si se diera el caso de ser variables con distribuciones logarítmicas, al ser $g(x)$ una función límite lineal y las variables aleatorias independientes, la resolución del factor de fiabilidad es directa mediante la ecuación:

$$\beta = \frac{\ln \left[\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{1 + V^2}} \right]}{\sqrt{\ln(1 + V^2)}}$$

Donde:

- μ_R : Valor medio de la respuesta estructural.
- μ_S : Valor medio de las solicitaciones.
- V : Coeficiente de variación del factor de seguridad = $\frac{\sqrt{(\sigma_R^2 - \sigma_S^2)}}{\mu_R - \mu_S}$

Los razonamientos del factor de fiabilidad en funciones de distribución log-normal son los mismos que para las normales, pudiendo la resistencia y la solicitación comprender más que dos valores. Cabe recordar que la función límite debe ser lineal, no cabe la posibilidad de que no lo sea.

También sería posible calcular la fiabilidad, en el caso de variables independientes ni normales ni log-normales, mediante una aproximación de las distribuciones de las variables no normales a variables normales en el punto de diseño. Esta aproximación es conocida como la aproximación normal de cruce (“normal tail approximation”).

Siendo x^* el punto de diseño, la aproximación es introducida por:

$$F_{X_{ii}}(x_i^*) = \Phi \left(\frac{x_i^* - \mu'_{X_i}}{\sigma'_{X_i}} \right)$$

$$f_{X_{ii}}(x_i^*) = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \varphi \left(\frac{x_i^* - \mu'_{X_i}}{\sigma'_{X_i}} \right)$$

Donde μ'_{X_i} y σ'_{X_i} son los valores medios y las desviaciones estándar desconocidas de la distribución normal aproximada. Despejando respecto a μ'_{X_i} y σ'_{X_i} , tenemos que:

$$\sigma'_{X_i} = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i^*)\right)\right)}{f_{X_i}(x_i^*)}$$

$$\mu'_{X_i} = x_i^* - \Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i^*)\right)\sigma'_{X_i}$$

Si la función de distribución de la probabilidad conjunta del vector X se puede expresar como una secuencia de distribuciones de probabilidad condicionadas como:

$$F_X(x) = F_{X_n}(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \times F_{X_{n-1}}(x_{n-1}|x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \times \dots \times F_{X_1}(x_1)$$

La transformación del espacio X al espacio U de variables estandarizadas se realizará usando la transformación de Rossenblatt:

$$\Phi(u_1) = F_{X_1}(x_1)$$

$$\Phi(u_2) = F_{X_2}(x_2|x_1)$$

⋮

$$\Phi(u_n) = F_{X_n}(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Donde n es el número de variables aleatorias, $F_{X_i}(x_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ es la función de probabilidad condicionada para la variable i -ésima y Φ es la función de distribución de probabilidad normal estándar. A partir de la transformación Rossenblatt, las variables aleatorias X pueden ser expresadas en términos de las variables aleatorias con distribuciones normales estandarizadas U :

$$x_1 = F_{x_1}^{-1}(\Phi(u_1))$$

$$x_2 = F_{x_2}^{-1}(\Phi(u_2|x_1))$$

⋮

$$x_n = F_{x_n}^{-1}(\Phi(u_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$$

En muchos casos, la transformación Roseblatt no puede ser aplicada por el requisito de las funciones de distribución de probabilidad condicionada. En esos casos, se puede emplear otras transformaciones como, por ejemplo, la transformación Nataf. Aunque cuando se trata de casos de tal complejidad, ya es más que recomendado el uso de un software informático como es el caso del FORM.

3.2.1. FOSM

El método FOSM (*"First Order Second Moment"* o método de aproximación de primer orden para los dos primeros momentos, Cornell 1969) consiste en una aproximación matemática de la función límite lineal a través de la función $g(X)$ desenvuelta en serie de Taylor:

$$M = g(X^*) + \nabla g|_{X^*}(X - X^*) + \frac{1}{2}(X - X^*)^T \nabla^2 g|_{X^*}(X - X^*) + \dots$$

Donde X^* es el punto donde se hace la aproximación y $\nabla^k g$ representan las derivadas parciales de orden k .

Los métodos de primer orden consideran los términos de primer orden del polinomio de Taylor desenvuelto de la función $g(X^*)$ en relación al punto arbitrario X^* :

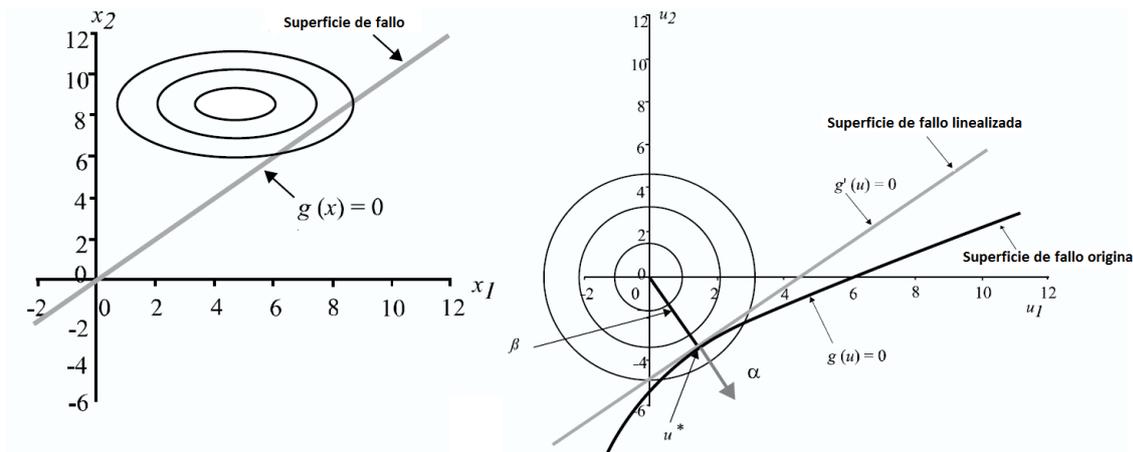
$$M \cong g(X^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{X^*} (X - X^*)$$

Como ya hemos dicho antes, esta aproximación substituye a la verdadera superficie límite por una recta tangente en el punto arbitrario X^* , correspondiente al punto de mayor probabilidad de fallo, para el cálculo de β mediante la función del índice de fiabilidad:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

Para poder emplear el método FOSM, las variables deben ser aleatorias de distribuciones normales e independientes. Si las variables son correlacionadas, habría que aplicarle antes una aproximación a variables aleatorias independientes. Es posible su utilización de forma manual o mediante un programa de ordenador.

El procedimiento del método FOSM es convertir las variables aleatorias en variables aleatorias estandarizadas (que tienen media cero y desviación típica 1). Como resultado, obtenemos una ecuación límite no lineal, a la cual le aplicaremos la linealización en su punto más probable de fallo, la cual nos dará el coeficiente de fiabilidad β . En la imagen de la izquierda tenemos el problema inicial, una función lineal con las variables aleatorias básicas. En la de la derecha, tenemos a las variables estandarizadas con la función no lineal, la cual se substituye por la función lineal en el punto más probable de fallo o más desfavorable, siendo tangente a los círculos concéntricos que designan el factor β .



Representación gráfica de la linealización por el método FOSM de una superficie límite

En el dibujo de la derecha se puede apreciar que el índice de fiabilidad está definido por un vector, cuyo módulo expresa el índice β y la dirección que toma, uniendo el punto cero con el más desfavorable, viene dado por un ángulo α , el cual es perpendicular a la superficie de fallo.

Partimos de una función límite (que debe ser lineal si las variables son log-normales) formada por variables aleatorias normalmente distribuidas:

- $g(X_i) = 0$
- $X_i = x_1, x_2, \dots, x_n$

El siguiente paso es la estandarización de las funciones de distribución, lo que le otorga media cero y desviación típica uno. La transformación de la función límite al nuevo espacio se hace substituyendo el vector de variables aleatorias X_i por un nuevo vector en el nuevo espacio U_i de la siguiente forma:

$$X_i = \frac{U_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}$$

De tal forma que, despejando U_i en $g(U_i)$, la ecuación límite se puede expresar de la siguiente forma:

$$g(\mu_{x_i} - \sigma_{x_i} \times X_i) = 0$$

Como hemos visto antes, el punto de mayor probabilidad de fallo, u^* , se puede expresar vectorialmente en el nuevo espacio estandarizado con la ecuación: $u^* = \beta \times \alpha$. Sustituyendo en la función límite, la función en el punto crítico se puede expresar como:

$$g(\beta \times \alpha_i) = X_i^* = 0$$

El ángulo α en el nuevo espacio respecto a las múltiples direcciones “i” se puede calcular de la siguiente forma:

$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \times \alpha)}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \times \alpha) \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Y, por otro lado, mediante trigonometría básica y sabiendo que el módulo β buscado será el valor más bajo posible, el problema de optimización se reduce a:

$$\beta = \min_{u \in \{g(u) = 0\}} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Con las ecuaciones de $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, el sistema se puede resolver mediante métodos iterativos. El primer punto de diseño se calcula a partir de la ecuación $u^* = \beta \times \alpha$, que nos aporta un nuevo vector α , que sustituyéndolo en la función límite $g(\beta \times \alpha_i) = 0$ nos da otro índice β . La iteración suele converger en 6-10 iteraciones, aportándonos el punto de diseño u^* así como el índice de fiabilidad β y el vector perpendicular a la superficie de fallo α_i . Los valores de α_i se deben interpretar como factores de sensibilidad, para darle importancias relativas a cada uno de los valores variables individualmente que conforman el índice de fiabilidad β .

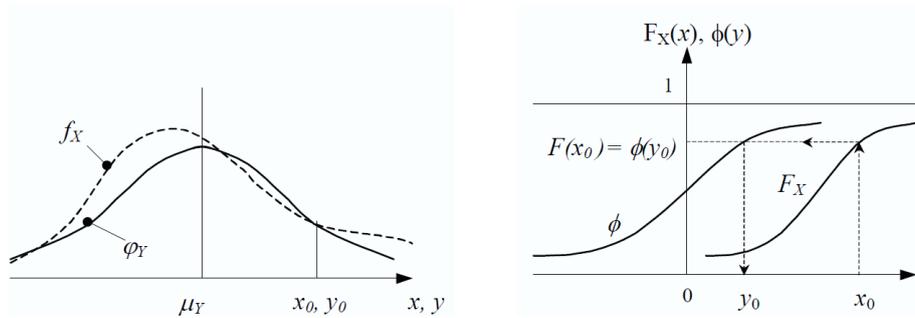
3.2.2. FORM

Cuando las variables con las que tratamos no son normalmente distribuidas, lo que hace que los dos primeros momentos sean insuficientes, la metodología expuesta por el método FOSM se vuelve inadecuada. La necesidad de trabajar con distribuciones no normales y dependientes entre ellas condujo a la formulación del método FORM.

El método FORM (*“First order reliability methods”* o métodos de fiabilidad de primer orden) es una evolución del método FOSM anteriormente expuesto, basado también en una aproximación lineal. Cuando las variables no son normalmente distribuidas, lo que busca este método es transformar cada una de las variables aleatorias no normales en variables aleatorias normales reducidas. Esta transformación se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Phi(y_i) = F_{X_i}(x_i) \quad \rightarrow \quad y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]$$

en la que F_{X_i} es la función de distribución de la variable x_i y Φ la función de distribución de la ley normal reducida. La aproximación se realiza en un punto escogido x_0 , como se representa en las funciones de densidad y distribución de probabilidad.



Distribuciones de densidad de probabilidad y probabilidad acumulada de una variable antes y despues de normalizar

Una forma de realizar la aproximación es hacer que la media de la distribución no normal y la distribución normal sean la misma, y que conduzcan a la misma probabilidad de rotura. Si X fuera la variable aleatoria no normal e Z la variable aleatoria normal, entonces:

$$\mu_Z = \mu_X$$

$$\sigma_Z = \sigma_X \cdot \frac{\Phi^{-1}(p_f) - \mu}{F^{-1}(p_f) - \mu}$$

Y siendo la variable normal reducida, Y , obtenida con la transformación:

$$Y = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}$$

Cuando las variables básicas estén correlacionadas entre sí, es necesario proceder con una transformación que convierta estas variables en independientes (como hemos visto anteriormente), a las cuales se les aplicarán las técnicas descritas anteriormente. Una forma posible de efectuar la transformación es de la siguiente forma:

Dado un conjunto de variables aleatorias correlacionadas X , caracterizado por la matriz de covarianza C_X :

$$C_X = \begin{bmatrix} Var[X_1] & \cdots & Cov[X_1, X_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X_n, X_1] & \cdots & Var[X_n] \end{bmatrix}$$

Es posible efectuar una diagonalización de la matriz C_X a través de la siguiente transformación:

$$Y = A^T X$$

Siendo A una matriz ortogonal con vectores columna iguales a los vectores propios de la matriz de covarianza C_X . Se obtiene así una matriz diagonal de covarianza, C_Y , del conjunto de variables independientes, Y :

$$C_Y = A^T C_X A = \begin{bmatrix} V_{Y_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V_{Y_n} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal de la matriz, C_Y , son iguales a los valores propios de la matriz de covarianza de las variables X , C_X .

Se pueden así obtener los valores medios de las variables independientes Y_i a través de:

$$\begin{Bmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{Bmatrix} = A^T \begin{Bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{Bmatrix}$$

3.2.3. SORM

Una aproximación lineal de una superficie límite en un punto con una curvatura significativa puede conducir a resultados insatisfactorios. También puede suceder que una superficie límite lineal con variables no normales se convierta en una superficie no lineal cuando se transforma a un espacio reducido. En estos casos, es más adecuado recurrir a aproximaciones no lineales que permiten, en general, reducir los errores obtenidos en las aproximaciones de 1º orden.

Los métodos SORM (*“second order reliability methods”* o métodos de fiabilidad de segundo orden) emplean paraboloides o superficies esféricas en la aproximación de la superficie límite, $g(x)$, en el punto de dimensionamiento X^* .

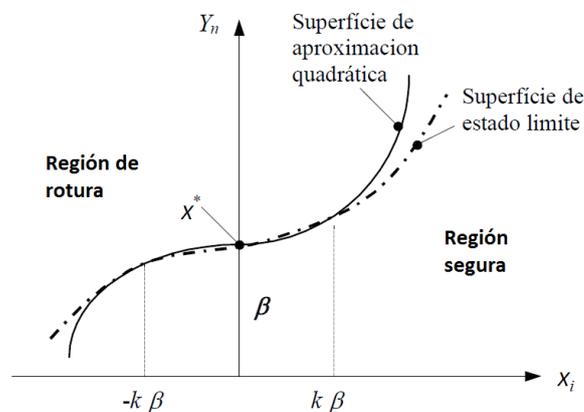
Una de las aproximaciones de segunda orden más simple es la propuesta por Breitung, basada en el ajuste a una parábola:

$$p_f \cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + \beta k_i)^{1/2}}$$

Donde:

$$k_i = - \left[\frac{\partial^2 X_n}{\partial X_i^2} \right]$$

Corresponde a la i -ésima curvatura principal de la superficie límite $g(x)$ en el punto de dimensionamiento X^* . Este procedimiento solo es posible si la función límite es continua y puede ser determinada por lo menos 2 veces en las cercanías del punto X^* .



Aproximación parabólica mediante el método SORM de una superficie

3.3. Métodos de simulación numérica

Los métodos de simulación numérica, como el método Monte Carlo, son programas que determinan una probabilidad aproximada de un evento específico que está sujeto a unos procesos estocásticos.

El método Monte Carlo está basado en la simulación de un sistema un gran número de veces para obtener así la probabilidad de fallo. Este, a partir de los parámetros estadísticos de las variables del sistema, realiza una serie de simulaciones con los valores de las variables generados aleatoriamente, obedeciendo a sus respectivas distribuciones, introduciéndolos en un modelo matemático del sistema. El resultado es un valor que nos dice si, en esta situación, el modelo está en la región de fallo o en la región segura. De esta forma, al cabo de un determinado número de ciclos, con los datos obtenidos, podemos obtener una probabilidad de fallo del sistema.

En el ámbito del cálculo de la fiabilidad de las estructuras, esta técnica es empleada mayoritariamente como forma de validación de los métodos analíticos FORM y SORM, y como solución (aproximada) de sistemas de gran complejidad y dimensión, en las cuales una aproximación analítica no se obtiene de forma sencilla.

Para la generación de valores aleatorios de las variables, se recurre a un algoritmo computacional de generación de números pseudo-aleatorios con distribución uniforme en el intervalo]0,1[, el cual es adaptado a las distribuciones de probabilidad de las distintas variable. El número de simulaciones N que es necesario realizar depende del orden de grandeza de la p_f y de la función límite. Cuanto más pequeño sea el valor de la p_f , y cuanto más irregular sea la función $g(x)$, mayor número de simulaciones que se tendrán que realizar.

Esta probabilidad se calcula sencillamente con la fórmula:

$$\bar{p}_f = \frac{n[g(x) \leq 0]}{N}$$

Donde:

- \bar{p}_f es la probabilidad de fallo
- $n[g(x) \leq 0]$ es el número de veces en en que la simulación dio fallo
- N es el número total de simulaciones

Como se presupone que el generador de números pseudo-aleatorios garante las propiedades de la independencia entre el resultado de las simulaciones, obtendremos un resultado más exacto a medida que el número de simulaciones N tienda a infinito.

$$p_f = P[g(x) \leq 0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n[g(x) \leq 0]}{N}$$

La aplicación directa de este método constituyen las denominadas “*Técnicas de simulación pura*” (“*crude*” Monte Carlo). El uso conjunto de otros métodos de fiabilidad con el objetivo de reducir el número de simulaciones N , se conoce como “*técnicas de reducción de varianza*”.

3.3.1. Técnicas de simulación pura

Esta técnica, como ya hemos dicho, se basa en la aplicación directa del método Monte Carlo. El principio matemático que persigue este método es:

$$p_f = \int_{g(X) \leq 0} I[g(X) \leq 0] \cdot f_x(X) dX$$

Donde $I[g(X) \leq 0]$ es una función definida por:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } g(X) \leq 0 \text{ (Región de fallo)} \\ 0 & \text{si } g(X) \geq 0 \text{ (Región de rotura)} \end{cases}$$

Como el método Monte Carlo emplea un método de simulación, con resultados discretos, esta integral se puede simplificar mediante el sumatorio de la siguiente forma:

$$p_f \cong \tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(X^{(i)}) \leq 0]$$

Donde $X^{(i)}$ es el vector de variables básicas que se toman en una simulación

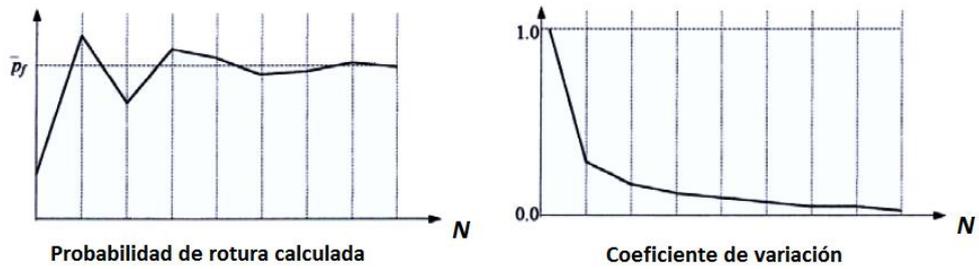
La probabilidad de fallo \tilde{p}_f aceptable es un número bajo, por lo que un número demasiado bajo de simulaciones conducirían a unos resultados erróneos. Esta probabilidad se ve afectada directamente por el número de simulaciones que se encuentran en la región de rotura. Por lo tanto, para tener una probabilidad de fallo veraz, es necesario tener un número de simulaciones, en los que se produzca el fallo, representativa de la muestra; y esto, en principio, solo se puede lograr aumentando el número de simulaciones. Probabilidades de fallo muy pequeñas necesitan un gran número de simulaciones.

Un aspecto fundamental del método Monte Carlo es el cálculo del grado de confianza que tenemos de la probabilidad de fallo calculada \tilde{p}_f . Normalmente, la varianza de \tilde{p}_f es el indicador de esta fiabilidad. Asumiendo que cada simulación constituye una prueba de Bernouilli, el número de veces que se sobrepasa el estado límite obedece a una distribución binomial, por lo que la varianza de \tilde{p}_f se puede calcular mediante:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 \cong \frac{(1 - \bar{p}_f) \cdot \bar{p}_f}{N}$$

Otro indicador de la fiabilidad es el que obtenemos del coeficiente de variación C_{P_f} . El C_{P_f} se calcula mediante:

$$C_{P_f} \cong \frac{\sqrt{\frac{(1 - \bar{p}_f) \cdot \bar{p}_f}{N}}}{\bar{p}_f}$$



Gráficas de la aproximación hacia la probabilidad de fallo y el coeficiente de variación de este respecto al número de simulaciones

Podemos apreciar en los gráficos que cuando N tiende a infinito, la varianza tiende a cero.

A menudo se sugiere un número de simulaciones comprendido entre $1/p_f$ y $10/p_f$. Otro método para calcular N , es el sugerido por Broding (1964), que lo calcula con:

$$N > \frac{-\ln(1 - c)}{p_f}$$

Para la cual “ c ” es el nivel de confianza en la estimación de p_f , y p_f es el valor aproximado a las cifras significativas que deseemos.

3.3.2. Técnicas de reducción de la varianza

Si aplicamos técnicas de simulación pura a problemas donde la probabilidad de fallo es muy pequeña, hemos visto que tendremos que recurrir a un gran número de simulaciones para obtener unos márgenes de fallo satisfactorios. Esto requiere un gran esfuerzo computacional. Sin embargo, existen algunas técnicas que posibilitan una reducción significativa del número de simulaciones para obtener un valor determinado de varianza. Este aumento de la eficiencia se obtiene a partir de información sobre el problema a analizar.

Algunas de estas técnicas son el muestreo por importancia y el muestreo estratificado.

Muestreo por importancia

La integral de probabilidad de fallo del método iterativo se puede reescribir como:

$$p_f = \int_{g(X) \leq 0} I[g(X) \leq 0] \cdot \frac{f_x(X)}{h(X)} \cdot h(X) dX$$

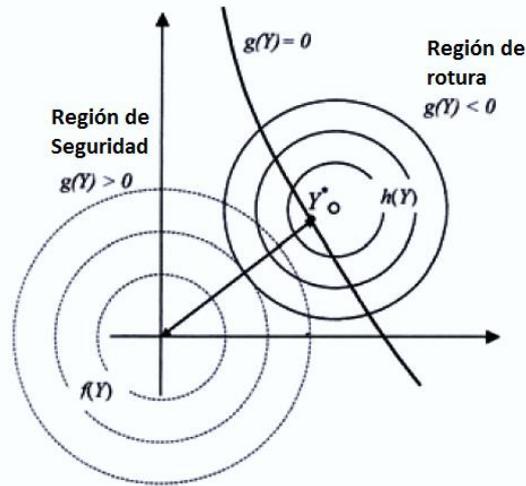
Donde $h(X)$ es la función de densidad de probabilidad de la subregión del espacio muestral donde se aplicaran las técnicas de simulación. Si expresamos p_f como un valor esperado, entonces:

$$p_f = E \left\{ I[g(X) \leq 0] \cdot \frac{f_x(X)}{h(X)} \right\} = E \left[I \frac{f}{h} \right]$$

Y, como hemos aplicado en los métodos de simulación pura, podemos aproximar la ecuación a:

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N I[g(X^{(i)}) \leq 0] \cdot \frac{f_X(X)}{h(X)} \right\}$$

En el esquema siguiente podemos ver como se concentran las iteraciones en la subregión $h(Y)$ del espacio de variables normales reducidas, que contiene el punto más probable de fallo, Y^* . Una selección adecuada de la subregión $h(Y)$ conduce a valores más próximos a la p_f , incluso con valores reducidos de N .



Muestreo por importancia en torno al punto más desfavorable

También podemos obtener la varianza asociada a esta \tilde{p}_f :

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \frac{\sigma_{I_h^f}^2}{N}$$

Donde:

$$\sigma_{I_h^f}^2 = \int_{g(X) \leq 0} \frac{f_X^2(X)}{h(X)} dX - \tilde{p}_f^2$$

Muestreo estratificado

Este método, en vez de escoger la región más probable de fallo y calcularle la probabilidad, divide todo el espacio muestral en un número "k" de regiones independientes (R_1, R_2, \dots, R_k), y le calcula la probabilidad de fallo de cada región:

$$p_{f_{R_i}} = \int_{R_i} f_X(X) \cdot h(X) dX$$

Calculamos también la probabilidad de que cada región:

$$P_i = \int_{R_i} h(X) dX$$

Como el conjunto de las k regiones determinan todo el espacio muestral, la sumatoria de todas las probabilidades de las regiones será la unidad:

$$\sum_{i=1}^k P_i = 1$$

Por lo tanto, la probabilidad de fallo definitiva del sistema será:

$$P_f = \int f_X(X) \cdot h(X) dX = \sum_{i=1}^k \int_{R_i} f_X(X) \cdot h(X) dX = \sum_{i=1}^k p_{f_{R_i}}$$

La integral de la probabilidad de fallo de cada región se puede expresar como:

$$p_{f_{R_i}} = \int_{R_i} P_i f_X(X) \frac{h(X)}{P_i} dX = P_i \int f_X^{(i)}(X) \frac{h(X)}{P_i} dX = P_i E [f_X^{(i)}(X)]$$

Donde:

$$\int_{R_i} \frac{h(X)}{P_i} dX = 1$$

Recurriendo a las técnicas discretas de Monte Carlo, finalmente obtenemos la probabilidad aproximada de fallo que:

$$\tilde{p}_f = \sum_{i=1}^k \frac{P_i}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} f_X^{(i)}(X_i^{(j)})$$

Para la cual, la varianza asociada es de:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{P_i^2}{N_i} \sigma^2 [f_X^{(i)}(x)] = \sum_{i=1}^k \frac{P_i^2 \sigma^2}{N_i}$$

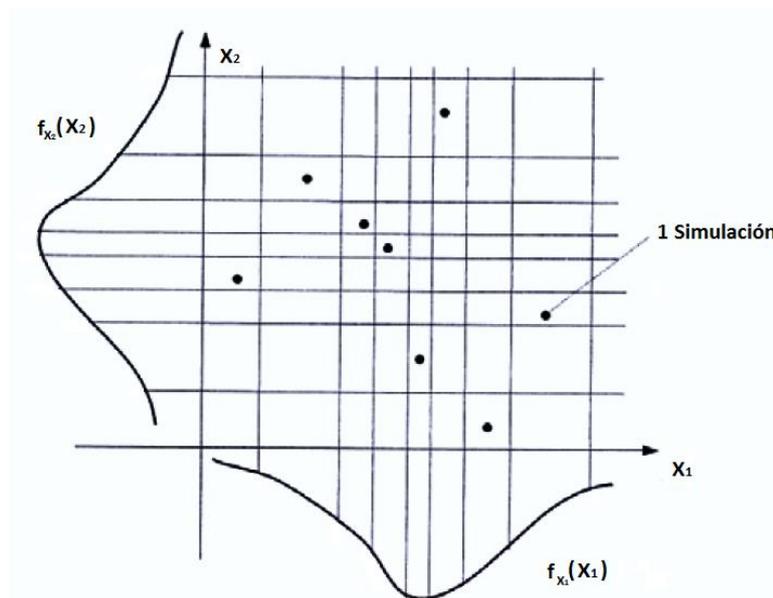
Donde:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 [f_X^{(i)}(X)] = \frac{1}{P_i} \int_{R_i} f_X^2(X) \cdot h(X) dX - \frac{p_{f_i}^2}{P_i^2}$$

Y N_i representa el número de simulaciones a efectuar en la región R_i .

Dentro de este tipo de técnicas está el *Método del hipercubo latino*, uno de los métodos más empleados en problemas de fiabilidad de estructuras. El método del hipercubo latino se basa en la división del dominio de cada variable aleatoria en k intervalos separados, con igual probabilidad de ocurrencia. Cada intervalo es representado por una muestra cuyo parámetro es representado por el valor correspondiente a su centro de gravedad, definido de acuerdo

con la función de densidad de probabilidad. Cada intervalo es considerado una sola vez, por lo que el número de simulaciones es igual al número de intervalos considerado ($N = k$). La selección de cada intervalo empleado en cada simulación es hecha aleatoriamente. El siguiente dibujo muestra un ejemplo de dos variables, con sus k divisiones de igual área, y las simulaciones escogidas aleatoriamente.



Representación gráfica de las simulaciones a realizar respecto a las variables de resistencia y solicitaciones

La aplicación del método del hipercubo latino se resume en 5 pasos:

1. División del dominio de cada variable básica X_i en k regiones (o intervalos) con igual probabilidad de ocurrencia.
2. Generación de las k muestras de cada región de cada variable.
3. Generación de las k combinaciones aleatorias de las diferentes variables, empleando cada muestra una única vez.
4. Evaluación de la función de estado límite $g(X)$ para cada combinación, y registro del número de veces en los que el estado límite es sobrepasado: $n[g(x) \leq 0]$.
5. Estimativa de la probabilidad de rotura con la expresión:

$$\bar{p}_f = \frac{n[g(x) \leq 0]}{N}$$

Los resultados obtenidos con este método son solo adecuados cuando las variables básicas que intervienen en la función del estado límite presentan una distribución aproximadamente normal.

4. Identificación y análisis de las variables

El mayor de los problemas que nos encontramos a la hora de realizar un cálculo de fiabilidad de un elemento, empleando el método que sea, es la obtención de los datos que identifican las variables. Es necesario tener unos datos realistas sobre las variables que actúan en nuestro sistema para que la comprobación de los estados límite sea acorde a la situación existente.

Volviendo al origen del problema; para cualquier método que desarrollemos, la ecuación de estabilidad fundamental sigue siendo la ecuación del estado límite último:

$$R_d > S_d$$

La resistencia y la sollicitación se pueden descomponen en diversas variables cada una. Cada material en obra y cada acción en la estructura son valores estocásticos, pues tienen unas características propias que son variables. Cada variable tiene una función de distribución de probabilidades propia, que se suele asemejar a un tipo de distribución estandarizada (normal, log-normal, gumbel, weibull...), con su valor medio, su varianza y demás datos que dependen del tipo de distribución. Dependiendo del grado de exactitud que queremos alcanzar, emplearemos las funciones de distribución reales de las variables aleatorias (si es que se puede en nuestro caso. Métodos de nivel 3), emplearemos aproximaciones de las funciones de las variables a funciones estandarizadas (Métodos de nivel 2) o recurriremos a métodos de probabilidad implícitos como el método de los coeficientes parciales, donde la caracterización de las variables se limita a un valor característico y a unos coeficientes de seguridad y combinación.

Analizando más detenidamente una estructura, nos damos cuenta de la cantidad de variables que actúan en ella. Algunas variables las llegamos a tomar como valores de cálculo por tener una variación típica muy pequeña, pero son variables estocásticas al fin y al cabo. Hasta qué punto necesitamos pormenorizar las variables es un tema importante a la hora de afrontar un problema real, y analizaremos esto en el punto 6 con un ejemplo real.

Un pequeño ejemplo ahora en un único modo de rotura podría ser el del cálculo de una viga a flexión. En este problema, las variables que actúan solo en la resistencia son la resistencia del hormigón, la resistencia del acero, la sección de la viga, el área de acero y el canto útil.

Dentro de la modelización probabilística del elemento, el mayor problema con el que nos encontramos será la representación de la variabilidad a través del tiempo.

Realmente, a la hora de la verificación de la seguridad estructural, la caracterización aleatoria de las variables básicas es lo realmente importante y puede ser determinante a la hora de que se produzca un fallo. Una vez identificadas las características de las variables que interfieren, el procedimiento para la modelización de la resistencia será el mismo que para las sollicitaciones:

- Definir las variables aleatorias que aportan incertezas a la resistencia o a la sollicitación.
- Seleccionar un tipo de distribución adecuado que represente esta variabilidad.
- Asignar los datos de nuestra variable aleatoria a los parámetros de la distribución.

El objetivo de este punto es el de analizar las variables más comunes que pueden intervenir en una estructura y que sea susceptible de modificar su seguridad.

4.1. Las incertezas en el cálculo

A la hora de realizar el análisis de fiabilidad, las incertezas que se presentan tienen las siguientes naturalezas:

- Incertidumbres físicas o mecánicas intrínsecas.
- Incertidumbres de medida.
- Incertidumbres estadísticas.
- Incertidumbres de modelo.

A la hora de analizar una variable, ya empleemos el estudio realizado por otra persona o realicemos nosotros el trabajo de investigación, debemos saber escoger bien. Existen un gran número de factores que varían las características de los materiales o las acciones, como su naturaleza, su origen, si depende del lugar o del tiempo... que debemos tener en cuenta con el objetivo de coger un informe o realizar un estudio que sea correcto.

A la hora de estudiar una variable, es conveniente subdividir las muestras en zonas lo más reducidos posible, con el fin de diferenciar la variable lo más posible en el espacio (microzonificación). Así, estos datos pueden ser empleados con el propósito de crear un código nacional para esa variable.

Abordando ahora por separado las incertidumbres que no son debidas a la mala interpretación por parte del observador, en edificación, podemos dividir las variables en los siguientes grupos:

1. Materiales	<ul style="list-style-type: none"> • Hormigón (resistencia, características, etc.) • Acero para armar (resistencia, geometría, características, etc.) • Acero estructural • Madera • Fábricas y mampostería • ...
2. Geometría	<ul style="list-style-type: none"> • Luces, Alturas (longitudes, superficies, etc.) • Dimensiones (ancho, canto, etc.) • Posición del elemento (recubrimientos, tendeles, etc.)
3. Acciones	<ul style="list-style-type: none"> • Peso propio (de la estructura) • Concargas (de elementos no estructurales) • Sobrecarga de uso (personas y cosas) • Viento, nieve (elementos climáticos) • Sismo • Impacto, explosión, fuego, etc. (accidentales)

4. Modelos	<ul style="list-style-type: none"> • Efectos de las acciones 	<ul style="list-style-type: none"> • Momentos • Cortantes • Torsores • Axiles • Etc.
	<ul style="list-style-type: none"> • Efectos de las resistencias 	<ul style="list-style-type: none"> • Momentos • Cortantes • Torsores • Axiles • Etc.

4.2. Materiales

Dentro de este punto, analizaremos las características de los materiales más empleados como elemento estructural de la edificación. Analizaremos el hormigón, el acero de armar, el acero estructural y la madera.

Hormigón

El hormigón armado revolucionó la construcción desde su aparición. La combinación de la resistencia a compresión del hormigón y la resistencia a tracción del acero crearon un elemento que aportó soluciones a un gran número de problemas. Es un producto muy heterogéneo, influye tanto el tipo y calidad del cemento como la calidad de la grava y la arena. Esto provoca que el hormigón, incluido el fabricado en planta, posea una variación típica respecto a la variación media relativamente elevada.

En general, para denominar un hormigón, nosotros nos basamos en la resistencia característica del mismo a los 28 días. En el caso del hormigón, la resistencia característica se refiere al cuantil 5% de la distribución de probabilidad de la resistencia. Actualmente, la EHE-08, en el anejo 19, exige a los suministradores de hormigón de central un coeficiente de variación (V) máximo que deben satisfacer:

$f_{ck} (N/mm^2)$	V
25	0,110
30	0,110
35	0,110
40	0,108

La EHE-08, en un comentario del artículo 31.3, propone, como forma de calcular la resistencia media a compresión f_{cm} la siguiente:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8$$

Este método aparenta ser bastante impreciso, por lo que es más aconsejable recurrir a cálculos matemáticos más exhaustivos para hallar la resistencia media real.

Basándonos en los estudios realizados por la JCSS, la distribución de probabilidad de la resistencia del hormigón adopta la forma de una distribución log-normal. Para definir la variable, solo necesitamos entonces la media y la desviación típica.

De una forma compleja, la resistencia del hormigón colocado en obra se puede calcular como:

$$f_c = \alpha(t, \tau) f_{co}^\lambda Y$$

- $\alpha(t, \tau)$: Es una variable determinista que tiene en cuenta la edad del hormigón en el momento de la carga t (en días) y la duración de la carga τ (en días). Se puede estimar como:

$$\alpha(t, \tau) = 0,8(0,6 + 0,1 \ln(t))$$

- λ : Es una variable log-normal (casi determinista) de media 0,96 y coeficiente de variación 0,005.
- f_{co} : Resistencia a compresión a los 28 días.
- Y : Variable log-normal que representa las posibles variaciones del curado, fraguado, puesta en obra... Se puede tomar como una distribución log-normal de media 1 y coeficiente de variación 0,06.

Considerando estas condiciones, se puede suponer para el hormigón que la resistencia a compresión es una variable aleatoria con distribución log-normal y coeficiente de variación 0,15, teniendo en cuenta las condiciones de puesta en obra y curado para un hormigón "in situ". Ahora, suponiendo que el coeficiente de variación es 0,15, la distribución es log-normal y que la resistencia característica es el cuantil 0,05, podemos despejar la resistencia media.

La JCSS es una norma a nivel europeo, por lo que, en este caso, como las características estándar del hormigón viene reguladas por ley en la EHE-08, y mantenemos sobre este un control muy exhaustivo, es más aconsejable seguir la normativa nacional.

Acero estructural

El proceso industrializado por el que se obtiene el acero, tanto el de armar como el estructural, permite que el producto resultante tenga unas características próximas a variables deterministas.

Los valores que aquí se exhiben son extraídos de un documento de las JCSS, los cuales se ofrecen como una propuesta para aceros que no presentan fenómenos característicos que disminuyan cualquiera característica significativamente. Estos valores son representativos para aceros con una resistencia superior a 380 MPa, pero no aptos para aceros de ultra?¿ alta resistencia (con resistencias superiores a 690 MPa) sin verificación. Los aceros ultra resistentes al carbón y los aceros inox., por tener una gráfica de tensión deformación no lineal, se modelizan con una expresión Ramberg-Osgood, para la cual no se dispone más que unos pocos datos.

Hay que tener en cuenta que los fabricantes, en algunos casos, con los aceros que no cumplen alguna propiedad, son degradados a una categoría inferior. Esto provoca que, si realizamos un

estudio estadístico, obtendremos una distribución bimodal, lo cual contribuye significativamente a aumentar la desviación típica de las características.

En la siguiente tabla se presentan unos valores de los coeficientes de variación de las características más importantes en el ámbito de cálculo: límite elástico (f_y), límite último (f_u), el módulo de elasticidad (E), el coeficiente de Poisson (ν) y deformación última (ε_u). Estos coeficientes son obtenidos a partir de las mediciones en diferentes fábricas de Europa y Estados Unidos, por lo que no son los más representativos a la hora de emplear estos valores en el cálculo.

Propiedad	V
f_y	0,07
f_u	0,04
E	0,03
ν	0,03
ε_u	0,06

El límite elástico y la resistencia última, los valores más importantes en el cálculo del estado límite último, son valores estocásticos con una distribución Normal, los cuales dependen de:

$$f = x_1 + x_2 + x_3$$

- x_1 : variable que representa la variación de los distintos fabricantes.
- x_2 : Variable que representa la variación entre los distintos lotes de fabricación.
- x_3 : Variable que representa la variación dentro de un mismo lote.

Si conocemos la desviación típica de cada una de estas variables, podremos tener la desviación típica de la resistencia del acero.

La resistencia nominal que le atribuyen los fabricantes es también la resistencia media, por su escasa desviación típica.

Acero laminado

Los perfiles de acero conformado gozan también de ser un material altamente controlado en su etapa de producción, lo que provoca unas características igualmente muy similares.

La variabilidad de los aceros conformados es producida por las mismas incertidumbres que en el caso de los aceros conformados. En este caso, el JCSS nos ofrece un cuadro muy aclarativo para estos aceros en lo que se resumen las características más importantes de estos aceros:

Característica	Valor medio (μ)	Desviación típica (σ)	COV
Área (mm^2)	Área nominal	-	0,02 %
Límite elástico (f_y , MPa)	$(f_{y_{nom}} + 2\sigma)$	30	-
Resistencia última (f_u , MPa)	-	40	-

Para estas características del acero laminado, es correcto adoptar una distribución de probabilidad normal.

Madera

La madera es un material bastante más complejo, puesto que sus propiedades son extremadamente variables, tanto en el espacio como en el tiempo. Estas propiedades varían según la especie, la densidad y el ambiente en el que se expone, por lo que la madera precisa de ser clasificada para. Todo esto hace que sea necesario tener en cuenta una gran cantidad de parámetros para obtener sus auténticas propiedades que nos permitan realizar una correcta modelización.

La JCSS desarrollo, a partir del estudio de la madera en países europeos y norteamericanos, una serie de relaciones entre unas propiedades de referencia del material y el resto de propiedades necesarias para realizar un modelo de comportamiento de la madera. Estas propiedades se supone que varían respecto a la clase de árbol al que pertenece la madera, la localización geográfica... Es preciso, por tanto, un estudio de la madera que vamos a emplear, el cual nos debe de dar información, por lo menos de la resistencia a flexión (R_m), módulo de elasticidad a flexión (E_m) y la densidad (ρ_{den}). Esta información la obtendremos a partir de:

$$R_m = \alpha(\exp(S, w, \tau, T)) R_{m,0}$$

$$E_m = E_{m,0} / (1 + \delta(\exp(S, w, \tau, T))) R_{m,0}$$

$$\rho_{den} = \rho_{den,0}$$

Donde:

$\exp(S, w, \tau, T)$: Es la expresión que tiene en cuenta la carga (S), humedad (w), temperatura (τ) y el intervalo de tiempo [0,T]

$\alpha(\cdot)$: Es la función de modificación de la resistencia, particular para cada caso.

$\delta(\cdot)$: Es la función de modificación de la rigidez, particular para cada caso.

Y donde $R_{m,0}$, $E_{m,0}$ y $\rho_{den,0}$ son los módulos y densidad obtenidos del material mediante las pruebas.

Las funciones de modificación de la rigidez y de la resistencia dependen de la clase de servicio de la madera y del tipo de carga que se le aplica. Estos valores se pueden obtener de las siguientes tablas:

Clase de servicio	Permanente (T > 10 años)	Larga duración (10 > T > 0,5 años)	Media duración (6 > T > 0,25 meses)	Corta duración (T < 1 semana)	Instantánea
1/2	$\alpha = 0,60$	$\alpha = 0,70$	$\alpha = 0,80$	$\alpha = 0,90$	$\alpha = 1,10$
3	$\alpha = 0,50$	$\alpha = 0,55$	$\alpha = 0,65$	$\alpha = 0,70$	$\alpha = 0,90$

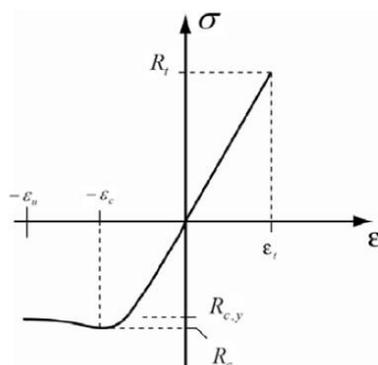
Clase de servicio	Permanente (T > 10 años)	Larga duración (10 > T > 0,5 años)	Media duración (6 > T > 0,25 meses)	Corta duración (T < 1 semana)	Instantánea
1	$\delta = 0,60$	$\delta = 0,50$	$\delta = 0,25$	$\delta = 0,00$	$\delta = 0,00$
2	$\delta = 0,80$	$\delta = 0,50$	$\delta = 0,25$	$\delta = 0,00$	$\delta = 0,00$
3	$\delta = 2,00$	$\delta = 1,50$	$\delta = 0,75$	$\delta = 0,30$	$\delta = 0,00$

En las maderas estudiadas por el JCSS, se llegó a la obtención de un coeficiente de variación para todas las maderas del estudio (que a falta de un estudio propio nos puede ser útil) y las distribuciones que presentan cada una de las propiedades:

Propiedad	Distribución	Coef. De variación
Resistencia a flexión (R_m)	Log-normal	0,25
Módulo de elasticidad a flexión (E_m)	Log-normal	0,13
Densidad (ρ_{den})	Normal	0,10

En el caso de madera laminada, la cual analizamos como un elemento estructural completo y no la madera por un lado y el pegamento por otro, estas propiedades tienen las mismas distribuciones y los mismos coeficientes de variación, salvo la resistencia a flexión, que en este caso será $R_m = 0,15$

El comportamiento de la madera ante las tensiones en el sentido de la fibra puede parecer similar al del acero. La gráfica de tensión-deformación, en mayor o menor medida dependiendo de la clasificación realizada previamente, es lineal en su mayor parte, salvo en el límite a compresión, donde el material se comporta de forma plástica en un pequeño espacio comprendido entre la resistencia a compresión elástica ($R_{c,y}$) y la resistencia a compresión máxima (R_c).



Gráfica tensión deformación de la madera

En la siguiente tabla se muestran las propiedades que se pueden obtener a partir de las propiedades principales de nuestra madera que anteriormente hemos citado: R_m , E_m y ρ_{den}

Propiedad	Valores medios	Coef. De variación
Resistencia a tracción en paralelo a la fibra $R_{t,0}$	$0,6 E[R_m]$	$1,2 COV[R_m]$
Resistencia a tracción perpendicular a la fibra $R_{t,90}$	$0,015 E[\rho_{adm}]$	$2,5 COV[\rho_{adm}]$
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra $E_{t,0}$	$E[E_m]$	$COV[E_m]$
Módulo de elasticidad perpendicular a la fibra $E_{t,90}$	$E[E_m]/30$	$COV[E_m]$
Resistencia a compresión en paralelo a la fibra $R_{t,0}$	$5 E[R_m]^{0,45}$	$0,8 COV[R_m]$
Resistencia a compresión	$0,008 E[\rho_{adm}]$	$COV[\rho_{adm}]$

perpendicular a la fibra $R_{t,90}$		
Módulo de corte G_v	$E[E_m]/16$	$COV[E_m]$
Resistencia al corte R_v	$0,2 E[R_m]^{0,8}$	$COV[R_m]$

La distribución que presentan estas propiedades es la siguiente:

Propiedad	Función de distribución
Resistencia a tracción en paralelo a la fibra $R_{t,0}$	Log-normal
Resistencia a tracción perpendicular a la fibra $R_{t,90}$	Weibull (2 parámetros)
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra $E_{t,0}$	Log-normal
Módulo de elasticidad perpendicular a la fibra $E_{t,90}$	Log-normal
Resistencia a compresión en paralelo a la fibra $R_{t,0}$	Log-normal
Resistencia a compresión perpendicular a la fibra $R_{t,90}$	Normal
Módulo de corte G_v	Log-normal
Resistencia al corte R_v	Log-normal

Por último, hay que tener en cuenta las incertidumbres del modelo. Esta incertidumbre se debe a las simplificaciones realizadas para la obtención de la ecuación de estado límite. Esta desviación de la realidad se presenta con la forma de una distribución de probabilidad de tipo log-normal y una desviación estándar que depende de los efectos de la carga. Suponiendo que la ecuación límite es la media, es decir, media 1 a falta de una ecuación específica, la desviación estándar será de 0,10 cuando hay que tener en cuenta los efectos de la carga a largo plazo, y entre 0,05 y 0,10 cuando no se tiene en cuenta el efecto a largo plazo.

Este apartado sobre cómo tratar la madera a la hora de calcular la fiabilidad de una estructura es una pequeña muestra de cómo sería posible el uso de este material. La madera, al ser un elemento extraído de la naturaleza, presenta un gran número de problemas (lo que suele estar ligado a incertidumbres) al intentar obtener unos datos que puedan ser utilizados de forma genérica, al contrario de lo que pasa, por ejemplo, con el acero. Los datos de coeficientes de varianza pueden ser valores bastante imprecisos si no se comprueba la madera que vamos a emplear. Un ejemplo de la dificultad que entraña calcular la resistencia de la madera se puede apreciar en nuestra normativa, el DB SE-M. En este, la resistencia de la madera se condiciona a partir de tablas que relacionan conceptos como el tipo de madera, la clase de resistencia, la clase de servicio, la duración de la carga... lo cual ya resulta lioso, y eso que se trata de un método semiprobabilista.

El terreno

Aunque el terreno no es un material de obra como lo son el hormigón o la madera, es un elemento de gran importancia para la estructura ya que es la encargada de soportar y disipar todas las cargas. Puesto que va a ser el elemento que soporte toda la estructura y el único que no podemos modificar, es necesario un estudio del suelo con el que trabajamos para conocer sus propiedades. Es importante tener información sobre la composición del suelo (capas que lo forman, sus profundidades, si hay agua...) y sus propiedades (parámetros físicos y mecánicos como la rigidez, la compresión, la resistencia al corte, la permeabilidad...) para poder modelizar el comportamiento del suelo.

Aunque todos los elementos estructurales están a merced de las incertidumbres de las cargas aplicadas y de las propiedades de los elementos, un rasgo característico de los suelos es la gran incertidumbre que rodea a cada propiedad de este. Varios tipos de incerteza del suelo son:

- Variaciones de las propiedades en el espacio, pudiendo ser variaciones continuas o discretas.
- Pruebas en laboratorio o test *in situ* insuficientes.
- Inexactitud de las pruebas o interpretación errónea de los resultados.

Variaciones continuas en el espacio.

Las variaciones de las propiedades del suelo se realizan de forma gradual entre cada punto del terreno. Es posible que la variación esté relacionada con otra característica del terreno, como la profundidad, fluctuando alrededor de un valor promedio en una superficie.

Variaciones discretas en el espacio.

Las variaciones continuas en el terreno pueden verse interrumpidas por fenómenos como falla o rellenos, dependiendo de la historia geológica y morfológica del terreno. Estas discontinuidades pueden tener una gran repercusión en el comportamiento del suelo. A veces, estos fenómenos son difíciles de situar en el terreno, pudiendo, incluso, ni siquiera llegar a ser localizarlos.

Pruebas de laboratorio o test in situ insuficientes.

La información acerca del subsuelo se de una pequeña parte representativa del espacio de suelo existente, lo que conlleva, como consecuencia, incertidumbre respecto a su naturaleza. Se pueden clasificar en dos tipos:

- Inexactitud estadística de la distribución de probabilidad de las propiedades del suelo.
- Posibles errores de la estratigrafía del suelo (ausencia de fenómenos geológicos relevantes).

Ambas incertezas se pueden reducir realizando estudios y tests adicionales. En el caso de las variaciones continuas, el error de los valores estadísticos es minimizado. Por otro lado, el aumento de estudios y test realizados implicaría una reducción de la probabilidad de pasarse por alto potenciales errores en la estratificación del terreno. Estos segundos fallos en los estudios de valores discretos son significativamente más importantes que en las variaciones continuas. Estos fallos son evitables gracias a la pericia del técnico encargado del estudio.

Inexactitud de las pruebas.

La inexactitud de los métodos empleados se debe, entre otras cosas, a una mala aplicación en práctica, desconocimiento de los equipos empleados, el factor humano... Aunque las incertidumbres asociadas a estos fallos no son los más importantes, no es posible tener en cuenta toda la inexactitud en un análisis de fiabilidad. Los errores importantes pueden ser solventados a través del control de un experto en la materia.

Modelos probabilísticos continuos en el espacio.

Trasladar la reacción de un terreno que es variable y continua a un análisis de fiabilidad se puede simplificar con un modelo de campo aleatorio. La representación directa que se hace en el espacio es:

$$p(x_i) = m_p(x_i) + f_p(x_i)$$

Donde x_i son las coordenadas espaciales (x,y,z) , $p(x_i)$ es el valor de la propiedad, $m_p(x_i)$ es el valor promedio en el terreno y $f_p(x_i)$ es la función de la variación en el espacio. En un modelo de campo aleatorio, las propiedades de cada punto dentro de un terreno son variables aleatorias. La media y la desviación típica de las propiedades es un proceso no estacionario, varía en el espacio, pero desde un punto de vista un poco más simplista, podemos tomar estas variables como aleatorias “un poco” estacionarias, con un valor medio y una desviación típica constante en todo el espacio.

La distribución de probabilidad de las propiedades de un campo aleatorio se puede representar con una distribución de probabilidades Normal o Log-normal.

Ahora bien, este análisis que hemos hecho de modelización de las variables del terreno sirve para terrenos relativamente homogéneos. Si por el contrario nos topamos con un terreno cuyas propiedades varían excesivamente entre varios puntos, lo que es una desviación típica desproporcionada con el valor medio, será necesario recurrir a procesos de refinamiento para obtener unos datos con los que poder trabajar. Al igual que la madera, el JCSS desarrolla una metodología que nos puede ayudar con el problema, pero de una complejidad tal que escapa a lo que se pretende abarcar con este estudio.

Modelos probabilistas basados en variables aleatorias.

Otros documentos y guías tratan al terreno de una forma más sencilla, suponiendo que el terreno es una simple variable aleatoria. Esta solución puede ser adecuada si tratamos con un terreno uniforme o estamos haciendo un predimensionamiento. De cualquier forma, en primer lugar deberemos diferenciar el tipo de terreno: si es granular o es cohesivo.

Si estamos tratando con un terreno cohesivo puro, el cálculo de la tensión de hundimiento puede resumirse en una simple ecuación:

$$q = 5,14 \cdot C$$

Donde q es la tensión de hundimiento y C la variable aleatoria que determina la cohesión del suelo. Esta forma, aunque útil a veces, es la fórmula simplificada en la que se han eliminado los factores de corrección de la forma, de la profundidad, de la inclinación de la carga, de inclinación del terreno. La desviación típica que se adoptará para el terreno dependerá de la desviación típica de la cohesión, la cual es de difícil cuantificación.

En el caso de terrenos granulares, es posible conocer la resistencia en base al estudio del suelo empleando un ensayo SPT:

$$q = 3,2 \cdot 10^{-5} \bar{N}_{corr} \cdot B$$

En este caso, \bar{N}_{corr} es el valor promedio del número de golpes corregido del SPT dentro del rango de profundidad comprendido entre la base de la zapata y $1,5 B$ debajo de la zapata (*Número de golpes/300*) y B es el ancho de la zapata (mm). De igual forma que hemos hecho con el cálculo de la tensión de hundimiento en los terrenos cohesivos, aquí también hemos eliminado los factores de corrección.

4.3. Geometría

La variabilidad de la geometría de los elementos estructurales afecta directamente a la respuesta como a la sollicitación. En la respuesta influye la sección transversal del elemento, las luces, la altura, la posición de los elementos, la disposición de las armaduras (esta última está asociada mayormente a la durabilidad)... Pero la geometría del elemento también provoca sollicitaciones.

Las incertezas relativas a la geometría de los elementos de hormigón depende esencialmente de la obra a realizar (definitiva o provisional, puentes o edificios...), del proceso constructivo, de la tecnología empleada y de la calidad de la ejecución. Los modelos probabilísticos empleados para tratar la variabilidad geométrica no deben ser generalizados, pues los datos o experiencias llevadas a cabo en otros países pueden caracterizar erróneamente el problema de estudio, sobre todo cuando la tecnología no es la misma.

Estas incertidumbres se refieren a las características geométricas de todos los elementos constructivos: El recubrimiento del hormigón armado, la rectitud de los perfiles laminados, la excentricidad de la carga en una pilar... A la hora del diseño de la geometría, las especificaciones de control de la ejecución y calidad son los únicos métodos para limitar estas incertezas. De esta forma podemos realizar modelos probabilísticos a priori. Las especificaciones de tolerancias admisibles permiten que las incertezas geométricas pierdan influencia a medida que las dimensiones de la estructura aumentan.

Sin tener en cuenta los materiales que se emplean, una estructura de por sí tiene un gran número de mediciones. La inexactitud al ejecutar un proyecto depende básicamente de el replanteo realizado en la obra. Sin embargo, la variación que se acaba realizando respecto al proyecto, en general, suele ser desproporcionada con la magnitud de la totalidad del elemento. Las mediciones que se hacen con elementos comunes, como pueden ser la altura de pilares o luces de viga, se valoran por metros, mientras que los errores de medición no deberían pasar de centímetros si se está realizando un trabajo decente. Esta incertidumbre, si se tiene en cuenta, se comprobará que no tiene relevancia. No ocurre lo mismo si existen excentricidades.

La excentricidad puede ser un gran problema para elementos esbeltos y no arriostrados. Podemos distinguir 3 formas de que este problema se manifieste: Siendo las cargas excéntricas al núcleo del soporte (e), existiendo una curvatura en el elemento (f) o mediante la falta de verticalidad (ϕ). Para todos los casos, se asume que son variables aleatorias independientes y

que la distribución es simétrica respecto a 0 (a no ser que el proceso de fabricación busque una pieza no recta). Las pequeñas excentricidades son más habituales que las grandes, a pesar de que estas son más perjudiciales. Los datos de los problemas se recogen en la siguiente tabla:

	Distribución	μ	σ
Excentricidad de la carga (e)	Normal	0 m	L/1000
Curvatura (f)	Normal	0 m	L/1000
Falta de verticalidad (ϕ)	Normal	0 rad	0,0015 rad

En general, las excentricidades son independientes en el tiempo, exceptuando la madera, que varía según la humedad existente. La excentricidad de la carga y la curvatura del elemento están también no correlacionadas en el espacio. No ocurre lo mismo con la verticalidad, pues se recomienda la siguiente correlación:

- $\rho(\phi_i, \phi_j) = 0,5$ para dos pilares en la misma planta
- $\rho(\phi_i, \phi_j) = 0$ para pilares en distintas plantas

Datos experimentales del Hormigón armado

Existe una gran gama de valores experimentales llevados a cabo por diversos autores sobre la variación de las dimensiones en obras de hormigón, cosa que no permitió generalizar un modelo probabilístico adecuado. El culpable es, como ya hemos citado antes, la gran variedad de tipos de obra y la diferencia entre las tecnologías.

Mirza y McGregor (Mirza, 1979) elaboraron un amplio estudio sobre la variación de las dimensiones en elementos hormigonados *in situ* y prefabricados en los Estados Unidos. En ambos casos, las imperfecciones geométricas son consideradas como distribuciones normales. De acuerdo con los estudios, la variación del canto útil de las losas hormigonadas *in situ* varía entre el 6% y el 12%, mientras que en losas prefabricadas, este valor varía entre el 1% y el 5%. Los valores obtenidos en los coeficientes de variación de vigas de hormigón fueron sensiblemente más bajos.

Melchers (1987) sugiere los siguientes coeficientes de variación para el espesor de las losas de hormigón:

- CV = 0,08 en edificios.
- CV = 0,02 en puentes con nivel intenso de control de construcción

Mientras que para el recubrimiento de las armaduras pasivas:

- CV = 0,08 en losas hormigonadas *in situ*
- CV prácticamente despreciable para losas prefabricadas

Tichy (1980) propone valores medios y desviaciones típicas para las dimensiones de los elementos de hormigón:

- Elementos hormigonados *in situ*: $\sigma_x = 0,7 + 0,007X_n$
- Elementos prefabricados: $\sigma_x = 0,5 + 0,005X_n$

Donde X_n es el valor nominal (al que se le da el valor del valor medio)

El JCSS ofrece una visión más amplia de las incertezas geométricas.

La incertidumbre en las dimensiones de los elementos de hormigón (Y) se presenta en forma de distribución normal. Se ha demostrado también que esta incertidumbre depende poco del proceso de producción (prefabricado o *in situ*). Así, la distribución de probabilidad de la incertidumbre de la dimensión Y (o diferencia entre el valor real X y el valor nominal X_{nom}) se pueden expresar con los siguientes valores:

$$0 \leq \mu_y = 0,003X_{nom} \leq 3 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = 4 \text{ mm} + 0,006X_{nom} \leq 10 \text{ mm}$$

A partir de una dimensión de 1000 mm, no existe dependencia entre la dimensión y el fallo.

La incertidumbre que rodea al recubrimiento de la armadura de vigas y losas depende de si se trata de recubrimiento superior o inferior. Para todas las incertidumbres, la distribución de probabilidad se puede representar con una función de distribución normal. Si se trata de recubrimiento superior, el valor real entra en el siguiente rango:

$$5 \text{ mm} \leq \mu_y \leq 15 \text{ mm}$$

$$5 \text{ mm} \leq \sigma_y \leq 15 \text{ mm}$$

Bastante alejado como se puede ver del valor nominal que le solemos dar de 10 mm. En lo que respecta al recubrimiento inferior, la desviación tiene los parámetros dentro de:

$$-20 \text{ mm} \leq \mu_y \leq 20 \text{ mm}$$

$$\sigma_y \cong 5 \text{ mm}$$

Estos valores son aproximaciones que dependen de muchos factores en el montaje. Aunque el recubrimiento y el canto útil suelen estar altamente correlacionados, a falta de información adicional podemos tomar como medidas de desviación frente al canto útil nominal los siguientes valores:

$$\mu_y \cong 10 \text{ mm}$$

$$\sigma_y \cong 10 \text{ mm}$$

En cuanto al recubrimiento de elementos verticales, la variación del recubrimiento de los pilares entre dentro de los siguientes parámetros:

$$1 \text{ mm} \leq \mu_y \leq 3 \text{ mm}$$

$$0,2 \text{ mm} \leq \sigma_y \leq 7 \text{ mm}$$

Mientras que para el recubrimiento de los muros, los datos que obtuvieron son más ajustados, pues para la media de la desviación la valoran en 1 mm y su desviación típica en 12 mm.

Las normativas existentes, basadas en métodos semiprobabilistas, tratan el problema de la durabilidad mediante el sobredimensionamiento de la capa de recubrimiento. Su objetivo es que el hormigón de recubrimiento no se reduzca más de lo deseable durante el proceso de ejecución. La norma EHE-08 estipula en el artículo 37.2.4 un aumento del recubrimiento calculado de:

- 0 mm en elementos prefabricados con control intenso de ejecución
- 5 mm en el caso de elementos ejecutados *in situ* con nivel intenso de control de ejecución
- 10 mm en el resto de los casos

Los valores que hemos dado aquí de recubrimientos y cantos útiles, podemos observar que son muy imprecisos y poco aclarativos, pues cada estudio daba un dato completamente diferente al anterior. Así como los datos incluidos en este punto de variaciones en las dimensiones de los elementos pueden ser empleados, es recomendable escoger unos valores estadísticos acordes con nuestras condiciones de producción.

Datos de los productos de acero laminados en caliente

Los aceros laminados en caliente, por ser productos con procesos de fabricación muy controlados, son elementos más homogéneos. En primer lugar, las dimensiones básicas (altura, anchura y espesor) de los perfiles laminados (perfiles comprobados L, T e IPE del 80 al 200) varían en menos de 1 mm, por lo que podemos acotar su variación Y en:

$$-1,0 \text{ mm} \leq \mu_y \leq +1,0 \text{ mm}$$

$$\sigma_y \leq 1,0 \text{ mm}$$

Por otro lado, se sabe que el valor medio del área de la sección transversal y el módulo de young del acero laminado no varían significativamente respecto a sus valores nominales (esto quiere decir que la media de la variación es prácticamente 0), y el coeficiente de variación del área ronda el 3,2% mientras que el del módulo de young ronda el 4,0%.

Por último, se puede considerar que los perfiles son completamente simétricos, pues los estudios demostraron que estas variaciones son despreciables.

La distribución normal parece el mejor modelo de distribución para las propiedades del acero laminado, tanto para los perfiles como para barras de hormigón armado.

4.4. Acciones

El entorno en el que trabaja un sistema estructural da origen a fuerzas internas, deformaciones, deterioro de materiales y otras clases de efecto a largo y corto plazo. Las causas de estos efectos son conocidos como acciones. Estas acciones pueden ser de origen natural, como el viento, la nieve y los terremotos, o causadas por el hombre, como habitar una casa o trabajar en una fábrica.

Las acciones pueden presentarse de muchas formas. Pueden presentarse como un conjunto de fuerzas concentradas o distribuidas en una estructura. De cualquier forma, los efectos que producen las acciones en la estructura es lo que se conoce como cargas. Una acción es también la causa de los desplazamientos impuestos o los efectos térmicos en una estructura (lo que se conoce como acción indirecta). También pueden causar cambios en las propiedades de los materiales o en las dimensiones a lo largo del tiempo.

La descripción de una acción se realiza a partir de modelos matemáticos sencillos que describen las propiedades de estas en el tiempo, el espacio y dirección. El nivel de detalles con el que contará nuestro modelo dependerá de la calidad de los datos obtenidos y la precisión que queremos de los efectos de la acción (el cual dependerá de la importancia de las decisiones).

Hay dos aspectos a tener en cuenta en el modelo, el primero es el carácter físico de la acción (por ejemplo, la dirección de una acción). El segundo es el carácter estadístico, que define la función de distribución de probabilidad.

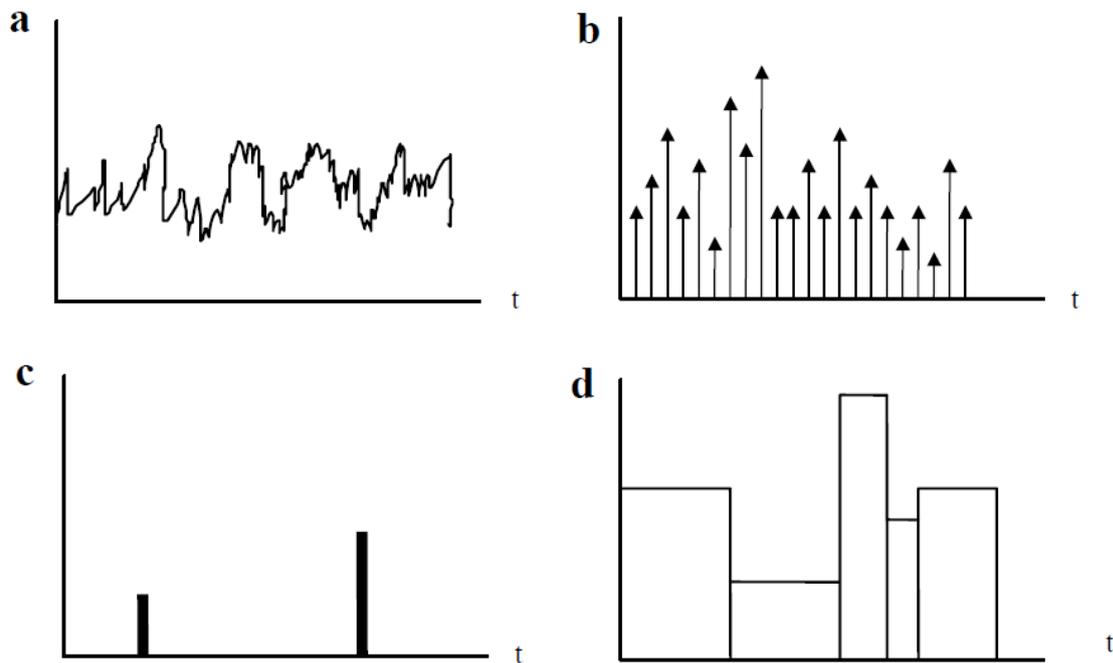
Podemos dividir las acciones en tres tipos:

- Acciones permanentes: Acciones cuya variación en el tiempo es escasa y de baja magnitud (como el peso propio de la estructura o la presión de la tierra) o su valor límite es predecible (como fuerzas impuestas por los procesos constructivos o las acciones térmicas).
- Acciones variables: Acciones cuya variación en el tiempo es frecuente y de gran magnitud (como las acciones del viento y la nieve).
- Acciones accidentales: Acciones de gran magnitud pero con probabilidad de ocurrencia durante la vida útil muy baja, y de corta duración (como una explosión o un terremoto).

Dependiendo del tipo de acción, las cargas pueden ser dependientes en el tiempo. En ese caso, se necesita una distribución de probabilidad muy determinada, que refleje la frecuencia de carga de las acciones. Muchas acciones no tienen una distribución de probabilidad claramente definida, y su ocurrencia se expresa con modelos más complejos como:

- a) Proceso continuo y diferenciable.
- b) Secuencia aleatoria.
- c) Proceso de eventos independientes con intervalos aleatorios.
- d) Proceso de ondas con intervalos aleatorios.

e) Proceso de ondas con intervalos equidistantes.



Gráficas de la acción de algunas acciones con procesos más complejos en función del tiempo

En estos casos, a la hora del diseño, puede ser interesante saber cuál es el valor máximo de la carga para un periodo de tiempo t_0 . Una forma de calcular la función de distribución de probabilidad del valor máximo $F_{\max F}(a)$ es:

$$F_{\max F}(a) \cong \exp[-t_0 v^+(a)]$$

Donde el valor de frecuencia de ocurrencia $v^+(a)$ es dado por:

$$v^+(a) = P\{F_t < a < F_{t+dt}\}/dt$$

Como hemos comentado anteriormente, el JCSS contiene también varios tipos de modelos de efectos de acciones que son variables en el tiempo (ya sea una o un conjunto de acciones) y en el espacio (veremos un ejemplo de este en el apartado de las sobrecargas de uso).

Es posible también que dos acciones estén correlacionadas. Dos acciones de distinta naturaleza que actúan a la vez, pueden interactuar para dar como resultado un esfuerzo mayor o menor dependiendo del tipo de correlación. Los ejemplos más representativos de estos casos son la nieve y el viento, un terremoto y el fuego y sobrecarga de tráfico en un puente y viento. En el caso de acciones de la misma naturaleza, lo más probable es que no exista correlación (como por ejemplo la fuerza del viento en dos caras del edificio).

El esfuerzo final (su función de distribución, $E(t)$) que producen las acciones en la edificación se calcula como una función conjunta donde las acciones son variables aleatorias en función del tiempo de referencia ($F_i(t)$), y c_i es la correlación del esfuerzo en el conjunto:

$$E(t) = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + \dots$$

Acciones permanentes

Las acciones permanentes están formadas por el peso propio de los elementos estructurales y por los elementos no estructurales que se colocan permanentemente sobre estos, conocidos como carga muerta. La variabilidad de las cargas ofrecidas por estas acciones es despreciable, y las incertezas de las magnitudes son generalmente pequeñas en comparación con otros tipos de cargas. Su variación es tan escasa que las normas actuales identifican muchas veces el valor característico con el valor medio.

La normativa establece un coeficiente de seguridad, destinada a los métodos semiprobabilistas, para las acciones permanentes de 1,35, que se le atribuye al proceso constructivo empleado y al tipo de control, pudiéndose rebajar el coeficiente si se garante un control más riguroso.

La variabilidad de las acciones permanentes respecto a las fuerzas de diseño de cálculo depende directamente de las imperfecciones geométricas y densidades (la que más) en el caso de elementos de hormigón. En la aleatoriedad de los elementos de madera tiene más importancia la densidad de esta, mientras que para elementos elaborados a partir de perfiles de acero, solo tendremos en cuenta las imperfecciones geométricas, pues las variaciones del peso específico en el acero son despreciables. La carga que produce el peso propio se determina con la siguiente relación:

$$G = \int_{Vol} \gamma dV$$

Donde "V" es el volumen descrito por el elemento y "γ" es la carga de la densidad. La JCSS nos ofrece una tabla con los valores medios de la densidad de algunos materiales y sus coeficientes de variación:

Material	Valor medio [KN/m ³]	Coficiente de variación
Acero	77	<0.01
Hormigón		
Hormigón ordinario	24	0.04
Hormigón de alta resistencia	24-26	0.03
Hormigón aligerado	-	0.04-0.08
Hormigón celular	-	0.05-0.10
Hormigón pesado especial	-	0.01-0.02
Albañilería	-	0.05
Madera		
Abeto	4.4	0.10
Pino	5.1	0.10
alerce	6.6	0.10
Haya	6.8	0.10
Roble	6.5	0.10

En lo que respecta a la geometría del elemento, el valor medio de las dimensiones de los elementos y su volumen es igual al valor nominal. El valor medio de la variación de algunos materiales y su desviación estándar se encuentra recogido en la siguiente tabla de la JCSS:

Elemento estructural	Valor medio	Desviación estándar
Acero laminado		
Perfiles de acero (área = A)	$0,01 A_{nom}$	$0,04 A_{nom}$
Placas de acero (espesor = e)	$0,01 e_{nom}$	$0,02 e_{nom}$
Elementos de hormigón		
$A_{nom} \leq 1000 \text{ mm}$	$0,003A_{nom}$	$4 + 0,006A_{nom}$
$A_{nom} \geq 1000 \text{ mm}$	3 mm	10 mm
Elementos de cerámica		
No enyesados	$0,02 A_{nom}$	$0,04 A_{nom}$
Enyesados	$0,02 A_{nom}$	$0,02 A_{nom}$
Madera estructural		
Vigas aserradas o puntales	$0,05 A_{nom}$	2 mm
Vigas lamiaadas	0 mm	1 mm

Tanto la densidad de los materiales como las dimensiones de los elementos se presentan con distribuciones de probabilidad normales, por lo tanto, el peso propio de los materiales también está distribuido de forma normal.

Acciones del pretensado

Tanto para armaduras pretesas como para armaduras postesas, las incertezas de carga debidas a las armaduras activas son debidas a fallos de la geometría del elemento estructural, a la colocación de la propia armadura, propiedades del material (como módulo de deformación, comportamiento diferido...), calidad de ejecución, control del proceso...

Según la EHE-08, la tensión que habrá que tener en cuenta para el cálculo será la que se le aplicó con el elemento de tensión menos las pérdidas instantáneas y las pérdidas diferidas (debidas al paso del tiempo) según el artículo 20.2.1. De acuerdo con la experiencia obtenida de varios autores, el coeficiente de variación oscila entre el 3% y el 8% para las armaduras recién colocadas y entre el 6% y el 12% para edades más avanzadas en las que todas las pérdidas de tensión ya se produjeron, respecto a la tención aplicada o tensión característica.

Sobrecarga de uso

Las cargas que están asociadas a la sobrecarga de uso son las cargas debidas a las personas, los muebles, el equipamiento y los objetos almacenados. No se incluyen en estas cargas las causadas por equipamiento permanente o por muros de particiones. El valor de la sobrecarga de uso que actúa en una estructura se debe a dos componentes, las cargas prolongadas y las cargas transitorias:

- Las cargas prolongadas son debidas a elementos que cargan la estructura de forma prolongada, como es el caso de los muebles, la maquinaria...

- Las cargas transitorias son producidas en pequeños espacios de tiempo, como la carga del tránsito de personas, vehículos (si fuera el caso), apilamiento de elementos durante unas reformas...

A la hora de realizar un modelo probabilístico de la sobrecarga se considerará aparte las sobrecargas debidas a los vehículos en zonas de aparcamiento, pues no son consideradas como cargas con carácter casi-permanente. Estas se consideran como cargas periódicas que se suelen asociar a espacios de horas de uso.

En el resto de las sobrecargas (las que no son debidas a los aparcamientos), las técnicas estadísticas empleadas las modelarán como variables aleatorias uniformemente distribuidas en el espacio, cuyo valor característico puede variar en el tiempo (con un valor casi-permanente y otro valor transitorio). Este valor característico contará, para un periodo de referencia de 50 años, con un índice de fiabilidad $\beta=3,80$. La normativa traduce este índice de fiabilidad en el coeficiente de mayoración $\gamma_Q = 1,50$.

El procedimiento llevado a cabo por la JCSS para su interpretación estadística estudia las cargas prolongadas por separado de las cargas transitorias. La carga que se aplicará para el dimensionado será combinación de ambas y será una carga uniformemente distribuida. Ambos valores de carga dependen del uso que se les asigne.

La forma matemática que se asocia a intensidad de la carga ($W(x, y)$) es:

$$W(x, y) = m + V + U(x, y)$$

Donde m es el valor medio de la carga en una categoría de uso, V es un variable normal de valor medio cero y $U(x, y)$ es una variable aleatoria de valor medio cero con mayor dispersión de la varianza positiva. V y U son estadísticamente independientes.

Las cargas casi permanentes (o cargas prolongadas) son representadas por un proceso estocástico formado por un valor medio asociado a la categoría de uso m , una variable aleatoria de media cero y otra variable aleatoria de media cero de 2 dimensiones. En sistemas lineares elásticos, la carga resultante se puede expresar a través de un valor medio y una Varianza:

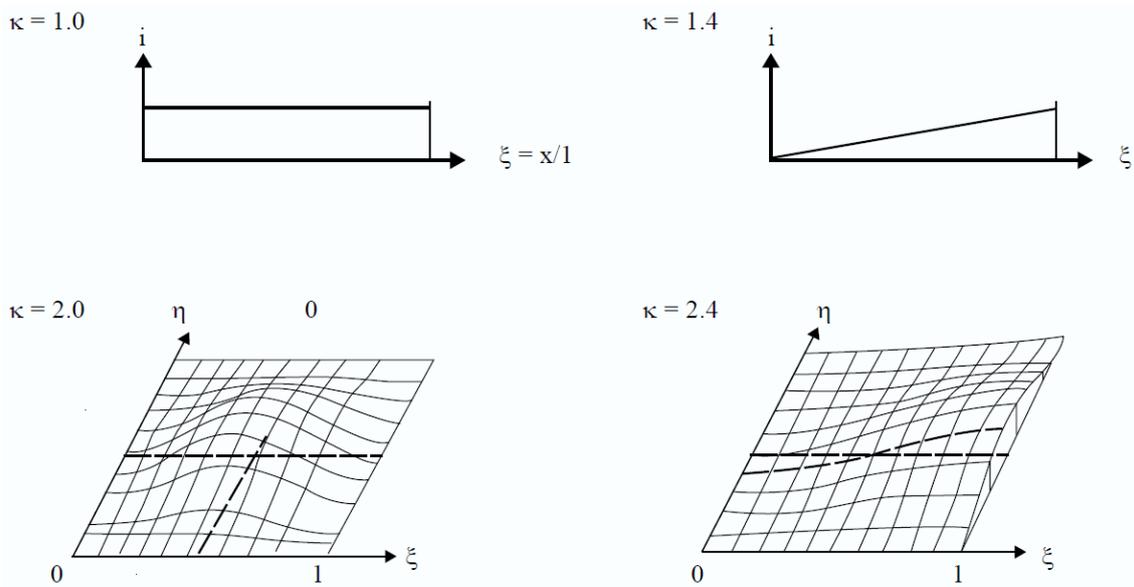
$$E[Q] = m$$

$$VAR[Q] = \sigma_V^2 + \sigma_U^2 k_{red}$$

Donde:

$$k_{red} = \frac{A_0}{A} k$$

Para la cual A es el área cargada directamente, A_0 es el área correlacionada con el área cargada y k una valor que depende de la correlación entre ambas superficies y que se puede obtener identificando la figura:



Formas en la que las sobrecargas de uso actúan y coeficiente k asociado a ellas

Si $A_0 > A$, entonces se tomará $\frac{A_0}{A} = 1$. El resto de valores los podemos obtener de la tabla confeccionada por el JCSS:

Categoría	A_0 [m ²]	Cargas prolongadas				Cargas transitorias			
		m_q [KN/m ²]	σ_v [KN/m ²]	σ_U [KN/m ²]	$1/\lambda$ [y]	m_p [KN/m ²]	σ_v [KN/m ²]	$1/v$ [y]	d_p [d]
Oficinas	20	0,5	0,3	0,6	5	0,2	0,4	0,3	1-3
Pasillos	20	0,2	0,15	0,3	10	0,4	0,6	1,0	1-3
Residencial	20	0,3	0,15	0,3	7	0,3	0,4	1,0	1-3
Residencial hotelero	20	0,3	0,05	0,1	10	0,2	0,4	0,1	1-3
Habitaciones de hospital	20	0,4	0,3	0,6	5-10	0,2	0,4	1,0	1-3
Laboratorios	20	0,7	0,4	0,8	5-10				
Bibliotecas	20	1,7	0,5	1,0	>10				
Escuelas	100	0,6	0,15	0,4	>10	0,5	1,4	0,3	1-5
Comercial									
Primera planta	100	0,9	0,6	1,6	1-5	0,4	1,1	1,0	1-14
Última planta	100	0,9	0,6	1,6	1-5	0,4	1,1	1,0	1-14
Almacenaje	100	3,5	2,5	6,9	0,1-1				
Industrial									
Ligero	100	1,0	1,0	2,8	5-10				
Pesado	100	3,0	1,5	4,1	5-10				
Pública concurencia	20					1,25	2,5	0,02	0,5

Mediante el estudio, se ha llegado a la conclusión de que la mejor forma de representar la distribución de la sobrecarga de uso prolongada es mediante una distribución Gamma, o si no, una distribución de valor máximo tipo 1.

Analizando ahora las cargas transitorias, a pesar de que estas cargas se producen normalmente de forma concentrada, en la modelización probabilística se suelen caracterizar como una carga distribuida aleatoria, cuya media y varianza son:

$$E[P] = m$$

$$VAR[P] = \sigma_v^2$$

Si el tiempo entre el cambio en las cargas se supone de forma exponencial, se puede expresar como un proceso Poisson con una ocurrencia media igual a $1/v$ y una duración de d_p días, y así la función de distribución de probabilidad para la carga máxima para un periodo T será descrita como:

$$F_{p,max} = \exp\left(-vT\left(1 - F_p(x)\right)\right)$$

La sobrecarga de uso es la suma de la sobrecarga de uso debido a cargas casi-permanentes y transitorias. La sobrecarga de uso para un periodo de referencia T se puede calcular como la máxima de las siguientes cargas:

- $L_1 = L_{Q,max} + L_p$
- $L_2 = L_Q + L_{p,max}$

Donde $L_{Q,max}$ es la carga máxima casi-permanente (para un periodo de 1 año), L_Q es un punto arbitrario de las cargas casi-permanentes, L_p es un punto arbitrario de las cargas transitorias y $L_{p,max}$ es la carga máxima transitoria (para un periodo de 1 año). La combinación de ambas sobrecargas tiene una distribución extrema de tipo 1.

Cargas de viento

La carga que ejerce el viento en una estructura depende de numerosos factores como el clima de la zona, la exposición, la forma, las dimensiones y las propiedades dinámicas de la estructura. El valor de la carga del viento es muy variable, tanto en el tiempo como en el espacio, por lo que es importante un estudio del efecto del viento, sobre todo cuando el edificio está muy expuesto. Fenómenos climáticos como tornados o tormentas tropicales necesitan un tratamiento especial por separado. El modelo probabilístico que elaboró la JCSS para las cargas de viento se define mediante las siguientes ecuaciones:

- $w = C_a C_g C_r Q_{ref} = C_a C_e Q_{ref}$ En estructuras rígidas
- $w = C_d C_a C_e Q_{ref}$ En estructuras flexibles y dinámicamente sensibles

Donde:

- Q_{ref} : Presión de la velocidad media de referencia.
- C_r : Aspereza del entorno.
- C_g : Factor de ráfagas.
- C_a : Factor de forma aerodinámica.
- C_d : Factor dinámico.
- $C_e = C_r C_g$: Factor de exposición.

La presión ejercida por el viento se calcula con la siguiente expresión:

$$Q_{ref} = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2$$

Donde:

- ρ : Densidad del aire ($\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ para un aire estándar)
- \bar{U} : Velocidad media del viento.

La presión de la velocidad media de referencia Q_{ref} se calcula con la velocidad del viento media es un promedio de 10 minutos de exposición medido a 10 metros de altura en un terreno llano sin obstáculos y su coeficiente de variación es aproximadamente el doble del coeficiente de variación de la velocidad media. La velocidad media del viento se representa con una distribución Weibull de la siguiente forma:

$$F_{\bar{U}}(x) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^k \right]$$

Con k próximo a 2.

El resto de los parámetros de la ecuación (respecto a los factores de entorno, ráfagas...) asumen una distribución Lognormal. El coeficiente de variación para la carga de viento oscila entre un mínimo de 0,26 y un máximo de 0,53. Como valor representativo se puede coger 0,37. En la tabla siguiente se muestran los márgenes en los que se mueven los coeficientes de variación de los distintos coeficientes y la carga del viento, a partir de los cuales se puede obtener un coeficiente de variación para la carga de viento más ajustado con las ecuaciones que siguen.

- $V_w^2 = V_{c_a}^2 + V_{c_r}^2 + V_{Q_{ref}}^2$ Para estructuras no flexibles.
- $V_w^2 = V_{c_d}^2 + V_{c_a}^2 + V_{c_r}^2 + V_{Q_{ref}}^2$ Para estructuras flexibles y dinámicamente sensibles.

Variable	Tipo	Varianza (V)
Q_{ref}	gumbel	0,20 - 0,30
C_r	Log-normal	0,10 - 0,20
C_a coeficiente de presión coeficiente de fuerza	Log-normal	0,10 - 0,30
	Log-normal	0,10 - 0,15
C_g	Log-normal	0,10 - 0,15
C_d	Log-normal	0,10 - 0,20

El informe que redacta la JCSS sobre la modelización del viento es mucho más extendido. En él se habla más detenidamente de los factores, sus características estadísticas, valores de interés de la carga de viento...

Carga de nieve

Según Rackwitz (2000), la carga de nieve S_r se puede definir como la carga de nieve “en el suelo” S_g (un terreno horizontal a cota 0) por unos coeficientes que dependen de la altura, emplazamiento y un factor de conversión. Esta expresión se escribe tal que:

$$S_r = S_g r k^{\frac{h}{h_r}}$$

Donde:

- S_g : Carga de nieve “en el suelo”.
- r : Factor de conversión de carga de nieve “en suelo” a carga en tejado.
- h : Altura del emplazamiento del edificio.
- h_r : Altura de referencia ($h_r = 300 \text{ m}$)
- k : Coeficiente que depende de la región ($k = 1,25$ para regiones costeras y $k = 1,5$ para regiones de montaña)

La carga de nieve en tierra S_g se define como el producto del espesor de la nieve caída, d , por la densidad $\gamma(d)$:

$$S_g = d \cdot \gamma(d)$$

Y la densidad se define como:

$$\gamma(d) = \frac{\lambda \gamma(\infty)}{d} \ln \left\{ 1 + \frac{\gamma(0)}{\gamma(\infty)} \left[\exp\left(\frac{d}{\lambda}\right) - 1 \right] \right\}$$

Y la expresión $\gamma(\infty) = 5,00 \text{ kN/m}^3$, $\gamma(0) = 1,70 \text{ kN/m}^3$ y $\lambda = 0,85 \text{ m}$.

La profundidad de la nieve d , se puede caracterizar con las siguientes ecuaciones:

$$m_d = A(c) k^{h/h_r}$$

$$\sigma_d = A(c) k^{h/(2h_r)}$$

$$CV_d = k^{-h/(2h_r)}$$

Donde:

- $A(c)$: es la densidad media de la nieve para la altura de referencia
- k : Valor entre 1 y 2
- h : Altura a la que el edificio está situado
- $h_r = 300 \text{ m}$: Altura de referencia

La JCSS recomienda el uso de una distribución Gamma para la modelación probabilística de la carga de nieve “en tierra”, aunque también acepta el uso de la distribución Gumble.

Por último, el factor de conversión de nieve en el suelo a tejado r , se define talque:

$$r = \eta_a C_e C_t + C_r$$

Donde:

- η_a : Es un coeficiente de forma.
- C_e : Es un coeficiente de exposición determinista.
- C_t : Es un coeficiente térmico determinista.
- C_r : Es un coeficiente de redistribución debido al viento, el cual es 0 si no existe.

De acuerdo con las JCSS, η_a puede ser modelado con una distribución Beta con un coeficiente de variación igual a 15%. Los efectos térmicos y de la redistribución los desprecia. Para evitar estos últimos coeficientes, los cuales están por definir sus valores, se puede tomar $r = 0,73$.

Acciones accidentales

Las acciones accidentales son todas aquellas que se producen de forma imprevisible en el tiempo y poco previsible en el espacio. Estas acciones representan una carga elevada que se produce en un corto periodo de tiempo (generalmente muy corto). Se consideran acciones accidentales los terremotos, los impactos (de diversa índole), los incendios y otras acciones de esta índole.

La modelización del efecto de estas acciones no es necesaria en todos los casos, pero si el riesgo que entraña para la estructura es elevado, es necesaria. Dependiendo de qué acción sea, puede resultar una tarea muy complicada, pues en el cálculo del efecto es necesario tener en cuenta muchos parámetros.

En el caso de los impactos, por ejemplo, hay que tener en cuenta las desviaciones de los objetos, la probabilidad de un fallo humano, fuerzas de impacto... en general variables compuestas de otras variables.

Debido a su complejidad, no hablaremos más de la modelización de estas acciones, pues requeriría un estudio en mayor profundidad y no es el objeto de este proyecto. Por último, comentar que el JCSS desarrollo también, para las acciones accidentales de fuego, impacto y terremoto, unas guías de como considerar el efecto de estas acciones.

4.5. Modelos

Los modelos de cálculo son las adaptaciones de las acciones y reacciones que intervienen en un edificio al lenguaje matemático para conocer el comportamiento de la estructura. Son simplificaciones de la realidad, pero, para que sean realistas, es necesario que tengan en cuenta los factores decisivos y rechacen los poco importantes. Los modelos, aunque muchas veces no sea adecuado hacer distinciones, pueden ser:

- Modelos de acciones.
- Modelos estructurales de los efectos (fuerzas internas).

- Modelos de la resistencia a las acciones.
- Modelos de los materiales y la geometría.

Un modelo que depende de variables se puede expresar así:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

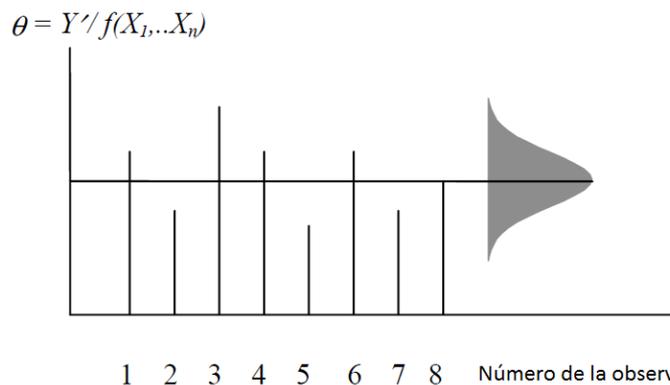
Donde:

- Y es la respuesta del modelo.
- $f()$ es la función del modelo.
- X_i son las variables básicas (acciones y reacciones).

Un modelo $f(\dots)$ es exacto si para unos valores de X_i en un caso práctico, el valor Y puede ser predicho sin error. Este error se produce efectos aleatorios que son olvidados en él modelo y por simplificaciones en las relaciones matemáticas. La diferencia de la realidad al modelo se puede expresar como:

$$Y = f'(X_1, \dots, X_n, \theta_1 \dots \theta_n)$$

Donde θ_i es una variable aleatoria que contiene las incertezas del modelo. Sus propiedades estadísticas pueden ser, en la mayoría de los casos, medidas a través de la experiencia y la observación. Si el número de observaciones son pocas, la inexactitud será mayor. Se debe hallar la media de este parámetro para que, en promedio, el cálculo del modelo prediga correctamente el resultado.



Distribución de probabilidad de las incertezas del modelo a partir de varias observaciones

La forma más común de introducir las incertidumbres de modelo es mediante la multiplicación:

$$Y' = \theta_1 f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Aunque también es posible mediante la suma:

$$Y' = \theta_1 + f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Cada forma de fallo de cada punto de la estructura genera sus propias incertidumbres de modelo. La siguiente tabla representa los valores recomendados por la JCSS del coeficiente de variación y la distribución de los siguientes modelos:

Modelo	Distribución	Valor medio	CoV
Efecto de las cargas			
Momentos en la estructura	Log-Normal	1.00	0.10
Axiles en la estructura	Log-Normal	1.00	0.05
Esfuerzo cortante en estructura	Log-Normal	1.00	0.10
Momentos en placas	Log-Normal	1.00	0.20
Fuerzas en placas	Log-Normal	1.00	0.10
Tensiones en sólidos en 2D	Normal	0.00	0.05
Tensiones en sólidos en 3D	Normal	0.00	0.05
Resistencia del acero (estático)			
Resistencia a flexión	Log-Normal	1.00	0.05
Resistencia a cortante	Log-Normal	1.00	0.05
Resistencia de las uniones soldadas	Log-Normal	1.15	0.15
Resistencia de las uniones atornilladas	Log-Normal	1.25	0.15
Resistencia del Hormigón (estático)			
Resistencia a flexión	Log-Normal	1.20	0.15
Resistencia a pandeo	Log-Normal	1.40	0.25
Resistencia a cortante	Log-Normal	1.00	0.10

5. Normativa

La normativa española que regula los métodos probabilísticos es toda bastante reciente y no es muy extensa. Primero habría que diferenciar entre leyes, de obligado cumplimiento, y normas, directrices para una correcta aplicación del método.

En lo que respecta a las leyes, el marco legal de los métodos probabilísticos está comprendido por el documento básico de seguridad estructural del Código técnico de la edificación (2006) y por la instrucción técnica del hormigón EHE-08 (2008). Obviamente, estas leyes no se centran en estos métodos, puesto que se basan en el método de los coeficientes parciales, sino que contienen algún apartado que deja abierto su posible uso y establece los mínimos de seguridad que se deben satisfacer y alguna especificación que se puede seguir para su uso.

Por otro lado, tampoco existen un gran número de normas elaboradas en España. Las más importantes son la UNE-EN-1990, bases para el cálculo de estructuras (2003) y la ISO 2394, principios generales para la fiabilidad de las estructuras (1998). Ambas normas hablan también de los métodos probabilistas pero, al igual que en las leyes, en algún apartado específico. No obstante, estas normas ofrecen una información más ordenada y aclaratoria que el DB-SE y el EHE-08.

5.1. CTE, DB-SE

En el Documento básico de Seguridad estructural del CTE se establecen las reglas y procedimientos (semiprobabilistas) que, mediante una correcta aplicación, satisfagan el requisito básico de seguridad estructural. Según la parte 1ª del CTE, artículo 10, Seguridad estructural es asegurar que el edificio tiene un comportamiento estructural adecuado frente a las acciones e influencias previsibles a las que pueda estar sometido. Además, en este artículo establece las 2 exigencias que hay que considerar para la seguridad estructural: tener una resistencia y una estabilidad adecuadas que no generen riesgos indebidos y que la estructura presente una actitud al servicio conforme con el uso previsto del edificio.

Centrándonos en el tema del trabajo, la única parte en la que se abordan los métodos probabilísticos en el DB-SE es en el anejo C: “Principios de los métodos probabilistas explícito e implícito”. Su finalidad es la de recopilar las bases en las que se fundamenta el DB-SE en general.

Generalmente, los métodos probabilísticos explícitos es posible emplearlos para la verificación de cualquier problema que se pueda describir a través de relaciones matemáticas, y siempre que dispongamos de los correspondientes eventos aleatorios, y así lo avala el CTE, ya que nos permite el uso de otras soluciones diferentes a las contenidas en el DB-SE, siempre que se siga el procedimiento establecido en el artículo 5 de la parte 1 del CTE, donde admite soluciones parcialmente o completamente diferentes a las del DB-SE, siempre que se justifique que cumple con las exigencias del CTE y el método empleado ofrece unas prestaciones similares o mejores al método del DB-SE, bajo responsabilidad del proyectista o el jefe de obra. No solo son empleados mediante uso directo para resolver problemas donde los métodos implícitos del DB-SE son insuficientes, o a la hora de comprobar edificios ya existentes, también se pueden emplear para calibrar modelos probabilísticos implícitos (por ejemplo, la calibración de los coeficientes parciales)

En este anejo, se hacen algunas recomendaciones-observaciones acerca de las fuentes de incertidumbre respecto a las variables básicas. Las incertidumbres asociadas a las variables básicas pueden dividirse en variabilidad aleatoria inherente al modelo, incertidumbres debidas a la falta de conocimiento e incertidumbres estadísticas. Las incertidumbres inherentes pueden dividirse en afectadas o no afectadas por actividades humanas, como la resistencia de algunos materiales a los que le afectan los métodos de fabricación, como el hormigón, en el primer tipo, y las repercusiones de las condiciones climatológicas, que claramente no tienen que ver con él hombre, en el segundo tipo. Las incertidumbres debidas a la falta de conocimiento, también 2 tipos, son las debidas al fallo de modelización (lo que se traduce en fallos de conocimiento del material) y las que dependen de la evolución futura de ciertos parámetros, como la sobrecarga. Por último, las incertidumbres estadísticas son las relacionadas con el procesamiento de los resultados obtenidos en los diferentes ensayos, mediciones u otras observaciones, que pueden ser debidas a falta de identificación y de distinción de diferentes poblaciones estadísticas, no consideración de posibles correlaciones, extrapolación excesiva de resultados... incertidumbres que generalmente de pueden reducir a través de un mayor número de ensayos u observaciones. Los valores numéricos de los parámetros que caractericen un modelo se pueden obtener por las siguientes vías: mediciones

u observaciones, análisis y adopción de decisiones. Es muy importante para reducir la incertidumbre el determinar una función de distribución estadística adecuada en relación a la variable básica considerada. Se recomienda adoptar una distribución normal para cargas permanentes, mientras que para variables resultará más adecuado adoptar una distribución logarítmica normal, Weibull, Gamma o de valores extremos y para propiedades de materiales y para dimensiones, suele ser más adecuada una distribución de tipo normal o logarítmica normal.

A continuación, nos introducen el concepto matemático principal de los métodos probabilísticos, la función de estado límite $g(X)$, de tal forma que:

- a) $g(X) > 0$ para el estado deseado
- b) $g(X) = 0$ para el estado límite
- c) $g(X) < 0$ para el estado no deseado

De manera que la probabilidad de fallo " P_f " pueda representarse a través de la relación:

$$P_f = [g(X) < 0]$$

Y la probabilidad de supervivencia (o de fiabilidad) " P_s ":

$$P_s = 1 - P_f$$

El objetivo final es que en el periodo de referencia t_0 , la probabilidad de fallo de la estructura, P_f , no supere la probabilidad de fallo admisible, $P_{f,0}$, asociado a las necesidades de nuestra estructura:

$$P_{f,0} < P_f$$

Ya solo necesitamos saber cuál es esa seguridad que necesitamos en nuestra estructura para poder compararla. La fiabilidad estructural dependerá de la posibilidad de que se produzcan daños personales (muertos o heridos) como consecuencia de un colapso y del coste de optimización del elemento (Intentar minimizar el coste total, que se obtiene con el coste del proyecto y ejecución, el coste de inspecciones, mantenimiento y demolición, y los costes derivados de la probabilidad de fallo computados con su probabilidad de que ocurra). Estos parámetros son los que tienen en cuenta, de una forma simplista, para la elaboración de la tabla C.2: "valores nominales, referidos a todo el periodo de servicio, para el índice de fiabilidad requerido"

Coste relativo para incrementar la fiabilidad	Consecuencias de un fallo estructural			
	Despreciables	Pequeñas	Moderadas	Grandes
Elevado	0	1,5	2,3	3,1
Moderado	1,3	2,3	3,1	3,8
Bajo	2,3	3,1	3,8	4,3

Los valores de esta tabla corresponden al índice de fiabilidad, β , el cual está relacionado con la probabilidad de fallo de tal forma que:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$$

En la tabla C.1. se dan valores numéricos para la relación entre el índice de fiabilidad, β , y la probabilidad de fallo, P_f :

P_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
β	1,3	2,3	3,1	3,7	4,2	4,7	5,2

Por último en relación al índice de fiabilidad, el documento recomienda un β dependiendo del periodo de servicio de la estructura:

- Para estados límite de servicio, $\beta = 0$ si es reversible y $\beta = 1,5$ si es irreversible.
- Para fatiga, $\beta = 2,3$ a $3,1$ (en función de las posibilidades de inspección).
- Para estados límites últimos, $\beta = 3,1 ; 3,8 ; 4,3$ (dependiendo de las consecuencias de fallo).

En términos generales, para los casos en los que las variables aleatorias X puedan considerarse invariables en el tiempo, la probabilidad de fallo se determina a partir de:

$$P_f = \int_{DF} f_x(x) dx$$

siendo:

$f_x(x)$: función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias básicas X

DF: Dominio de fallo (en general, definidos por $g_{ij}(X) \leq 0$)

Los valores numéricos de probabilidad de fallo se pueden determinar mediante:

- Métodos analíticos exactos.
- Métodos de integración numérica.
- Métodos analíticos aproximados (FORM, FOSM, SORM).
- Métodos de simulación.

También se puede emplear una combinación de los diferentes métodos.

Si las variables aleatorias son variables en el tiempo, primero aclarar que hay 2 tipos de fallos: los debidos a sobrecarga y los fallos por acumulación de daños (por ejemplo fatiga y corrosión). Estas acciones, que son variables en el tiempo, se deben representar a través de procesos estocásticos. En el caso de un fallo debido a sobrecarga, el proceso puede ser sustituido por una distribución probabilística, en la que para el valor medio se podrá adoptar el valor máximo para él periodo de tiempo que consideramos, y para la incertidumbre aleatoria, se podrá adoptar el valor máximo esperado (de incertidumbre). Por otro lado, la función empleada para describir un fallo por fatiga (como ejemplo de fallo por acumulación de daños) se pueden expresar en términos de las curvas SN y de la regla de Palmaren-Miner. De esta manera, para un determinado periodo de tiempo, la función es invariable en el tiempo.

Por último, tenemos un punto destinado a los coeficientes parciales, en el que se enseña los procedimientos de los métodos probabilistas implícitos y también como se consiguen coeficientes calibrados para que la fiabilidad estructural resultante se aproxime lo máximo posible a la fiabilidad que buscamos.

5.2. EHE-08

La ley EHE-08, Instrucción de hormigón estructural, es el marco reglamentario por el que se establecen las exigencias requeridas a las estructuras de hormigón para satisfacer los requisitos de seguridad estructural y seguridad en caso de incendio (además de la protección del medio ambiente), proporcionando procedimientos que permiten demostrar su cumplimiento con suficientes garantías técnicas. Esta norma, igual que el DB-SE, permite adoptar soluciones alternativas siempre y cuando se justifiquen documentalmente que cumplen las exigencias de esta prestación y que las prestaciones que ofrece la estructura son las mismas que se obtendrían aplicando los procedimientos de esta norma.

De acuerdo con el artículo 5, para cumplir con el requisito de seguridad estructural, la resistencia y la estabilidad de la estructura no debe generar riesgos admisibles como consecuencia de las acciones previsibles, ni cualquier evento extraordinario producirá consecuencias desproporcionadas respecto al origen. Por lo tanto, queda estipulado que para estructura de hormigón se asegurará con un nivel de fiabilidad cuyo índice β_{50} , índice de fiabilidad para un periodo de 50 años referido a edificios de viviendas, oficinas y estructuras de ingeniería civil, no será inferior a 3,8 en general. Para otros tipos de estructura, se requerirá un índice diferente dependiendo de la vida útil a la que se asocia, que podemos ver en la tabla 5 de la EHE-08:

Tipo de estructura	Vida útil nominal
Estructuras de carácter temporal	Entre 3 y 10 años
Elementos reemplazables que no forman parte de la estructura principal (por ejemplo, barandillas, apoyos de tuberías)	Entre 10 y 25 años
Edificios (o instalaciones) agrícolas o industriales y obras marítimas	Entre 15 y 50 años
Edificios de viviendas u oficinas y estructuras de ingeniería civil (excepto obras marítimas) de repercusión económica baja o media	50 años
Edificios de carácter monumental o de importancia especial	100 años
Puentes y otras estructuras de ingeniería civil de repercusión económica alta	100 años

Los procedimientos establecidos en esta instrucción permiten que, poniéndolos en práctica, se satisfagan estos requisitos de seguridad estructural mediante la comprobación de estados límite últimos junto con el resto de criterios relativos a la ejecución y control. También satisface los requisitos medioambientales, pero no lo hace con los requisitos de resistencia al fuego, para los cuales habrá que emplear el DB-SI del código técnico.

En el primer capítulo del EHE-08 es donde se exponen las finalidades de la norma y hace un poco de introducción, el resto de los capítulos y artículos son las bases de cálculo, criterios, normas, especificaciones... que comprenden en si la instrucción del hormigón. No obstante, el término "índice de fiabilidad β ", solo es nombrado en el artículo 5. Por lo tanto, usando el primer capítulo de la EHE 08, los 5 primeros artículos, ciñéndonos al coeficiente β asociado a cada estructura, a la hora de realizar los cálculos, podemos emplear cualquier método probabilístico que podamos demostrar que es eficaz.

Esta rápida alusión al índice de fiabilidad y al coeficiente β se debe a que nuestra normativa se encuentra en un periodo de cambio. El avance de estos métodos probabilistas empieza a ser palpable en otros países de la Unión Europea, y su aplicación está, poco a poco, desplazando a otros métodos. Es importante no perder esta evolución en el cálculo de estructuras, y, por lo menos, empezar a familiarizarse con estos conceptos que, en un futuro no muy lejano, podrían ser de uso común.

5.3. UNE-EN-1990

Esta norma española, incorporada a nuestro reglamento a partir de la norma europea EN-1990 con el objetivo de establecer unas directrices comunes para todos los miembros de la Unión Europea, establece los principios y requisitos de seguridad, aptitud de servicio y durabilidad de las estructuras; establece bases de cálculo y verificación y da consejos sobre aspectos relacionados con la fiabilidad estructural. En ella se incorporan referencias a otras normas con el objetivo de ampliar la información sobre las variables (Las normas EN 1991-EN 1999), como “acciones en estructuras” (EN 1991), “proyectos de estructuras de hormigón” (EN 1992), “proyectos de estructuras de acero” (EN 1993)...

A grandes rasgos, el esquema de esta norma está compuesto por una introducción, en la que habla del ámbito de aplicación, se establecen unas condiciones preliminares y se definen ciertos conceptos. Unos requisitos que se deben satisfacer frente a las diferentes sollicitaciones que se puedan dar y que conceptos tener en cuenta para hacer una buena gestión de la fiabilidad. Un capítulo donde se define los estados límite que hay que satisfacer. Otro capítulo donde se definen las variables a tener en cuenta y que valores hay que darles a la hora de los cálculos. Un capítulo en el que se introduce la modelización estructural y el cálculo asistido por ensayos. Y un último capítulo en el que se explica la verificación de los estados límite mediante el método de los coeficientes parciales. Además incorpora 4 anexos: Anexo A, aplicación a edificios, Anexo B, gestión de la fiabilidad estructural en las construcciones, Anexo C, bases para el cálculo con coeficientes parciales de seguridad y análisis de fiabilidad, y Anexo D, cálculo asistido por ensayos.

La norma establece el uso del método de los coeficientes parciales para satisfacer el cálculo de los estados límite. No obstante, en el punto 3.5 cálculo de estados límite, permite como alternativa procedimientos basados en métodos probabilísticos, de los cuales se habla el anexo C.

El Anexo C, bases para el cálculo con coeficientes parciales de seguridad y análisis de fiabilidad, contiene la información y la base teórica del método de los coeficientes parciales principalmente, y, además, contiene información sobre los métodos de fiabilidad estructural, su aplicación y procedimientos para la calibración de coeficientes parciales.

En la introducción de este anexo, se explica que el método de los coeficientes parciales obtiene valores de cálculo de las variables básicas mediante el uso de los coeficientes parciales (mayoración de acciones y minorización de resistencias) y los coeficientes Ψ de combinación de acciones, para efectuar las comprobaciones de los estados límite que sean pertinentes.

Estos coeficientes pueden obtenerse de dos maneras: extrayéndolos de las normas existentes, los cuales están abalados por una larga experiencia en la construcción, o bien sacándolos a partir de las bases de evaluación estadística de datos experimentales y observaciones de campo (empleando la teoría probabilística de la fiabilidad).

Los métodos de fiabilidad para la calibración de coeficientes descritos en esta norma se clasifican en métodos totalmente probabilísticos (Nivel III) y métodos de fiabilidad de primer orden (FORM) (Nivel II). La diferencia entre ellos radica en que los métodos de nivel II conducen a aproximaciones suficientemente precisas, mientras que los de nivel III ofrecen respuestas más correctas a los problemas planteados. El uso de los segundos a la hora de la calibración es menos frecuente por la frecuente escasez de datos. En cualquier caso, ambos métodos están ligados al índice de fiabilidad β . Si empleamos estos métodos para calibrar los coeficientes, estos deben ser calibrados de tal forma que aporten el índice de fiabilidad exigido por la norma.

Después de una breve introducción del índice de fiabilidad β , en el punto C.6 se exponen los valores objetivo de β , en las diferentes situaciones de proyecto y para distintos periodos de referencia. La frecuencia de fallo depende significativamente del error humano, por lo que el índice de fiabilidad no indica necesariamente la frecuencia real de fallos estructurales, por lo que estos valores deben ser tomados más bien como modo de orientación hacia el cálculo de la fiabilidad.

Estado límite	Índice objetivo de fiabilidad	
	1 año	50 años
Ultimo	4,7	3,8
De fatiga	-	De 1,5 a 3,8
De servicio (irreversible)	2,9	1,5

Teniendo en cuenta el índice de fiabilidad apropiado y cumpliendo con los estados límite, se considera que un diseño es suficientemente fiable. Expresado en notación simbólica:

$$E_d < R_d$$

Donde E_d y R_d son los valores de cálculo de la sollicitación y de la resistencia respectivamente, calculados empleando el índice β , de tal forma que el índice de fiabilidad general de la estructura sea β o mayor al objetivo. Si lo que deseamos ahora es ajustar unos coeficientes para tratar el problema de fiabilidad con el método de coeficientes parciales, la norma nos ofrece el siguiente razonamiento. Los valores característicos se pueden expresar de forma simbólica como:

$$E_d = E\{F_{d1}, F_{d2}, \dots, a_{d1}, a_{d2}, \dots, \theta_{d1}, \theta_{d2}, \dots\}$$

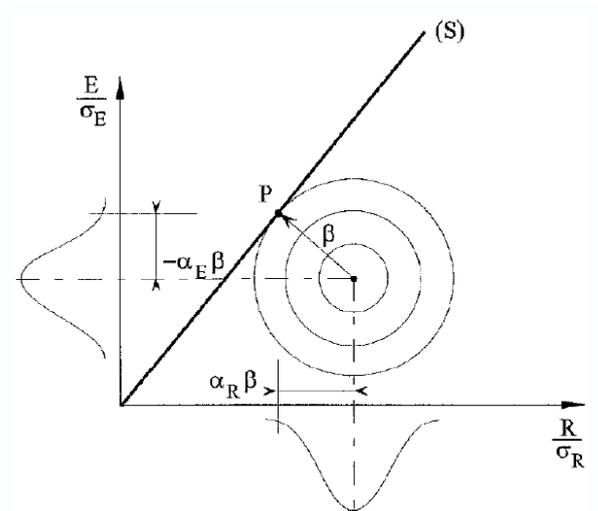
$$R_d = R\{X_{d1}, X_{d2}, \dots, a_{d1}, a_{d2}, \dots, \theta_{d1}, \theta_{d2}, \dots\}$$

Donde:

- E es el efecto de la acción.
- R es la resistencia.

- F es una acción.
- X es una propiedad del material.
- a es una propiedad geométrica.
- Θ es la incertidumbre del modelo.

Si estudiamos la frontera de fallo, $g(x) = R - E = 0$:



Superficie límite respecto a las distribuciones de probabilidad de resistencia y sollicitación

Vemos que la posición del punto de más probabilidad de fallo se puede expresar desde el punto medio en el espacio de variables normalizadas, como un vector a través del módulo β , de tal forma que, la probabilidad de que la resistencia o las acciones sobrepasen a su respectivo valor de cálculo se puede expresar como:

- $P(E > E_d) = \Phi(+\alpha_E \beta)$
- $P(R > R_d) = \Phi(-\alpha_R \beta)$

Para los que α_E y α_R son valores de los coeficientes de seguridad del método empleado, con $|\alpha| \leq 1$. El valor α es negativo para las acciones y efectos de las acciones desfavorables y positivo para las resistencias.

α_E y α_R pueden adoptar los valores de $-0,78$ y $0,8$, respectivamente, si se cumple que

$$0,16 < \sigma_E / \sigma_R < 7,6$$

Donde σ_E y σ_R son las desviaciones estándar del efecto de las acciones y de las resistencias, respectivamente, en las expresiones descritas anteriormente:

- $P(E > E_d) = \Phi(-0,7\beta)$
- $P(R > R_d) = \Phi(-0,8\beta)$

Si no cumple la anterior condición, se debe emplear $\alpha = \pm 1,0$ para la variable con la mayor desviación estándar y $\alpha = \pm 0,4$ para la variable con menor desviación estándar.

En el caso de las acciones, esta expresión debe emplearse con la variable predominante si contiene varias variables fundamentales. En el caso de las acciones de acompañamiento, los valores de cálculo se pueden definir como:

- $P(E > E_d) = \Phi(-0,4 \times 0,7 \times \beta) = \Phi(-0,28\beta)$

Ahora, podemos deducir los valores de cálculo de las variables con la distribución de probabilidad dada, con la ayuda de las expresiones dadas en la siguiente tabla:

Distribución	Valores de cálculo
Normal	$\mu - \alpha\beta\sigma$
Log-normal	$\mu \exp(-\alpha\beta V)$ para $V = \sigma/\mu < 0,2$
Gumbel	$u - \frac{1}{a} \ln\{-\ln \Phi(-\alpha\beta)\}$ <p>Donde $u = \mu - \frac{0,577}{a}$; $a = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{6}}$</p>

Si queremos saber ahora el coeficiente parcial de una variable, podemos dividir su valor de cálculo por el valor representativo o valor de cálculo.

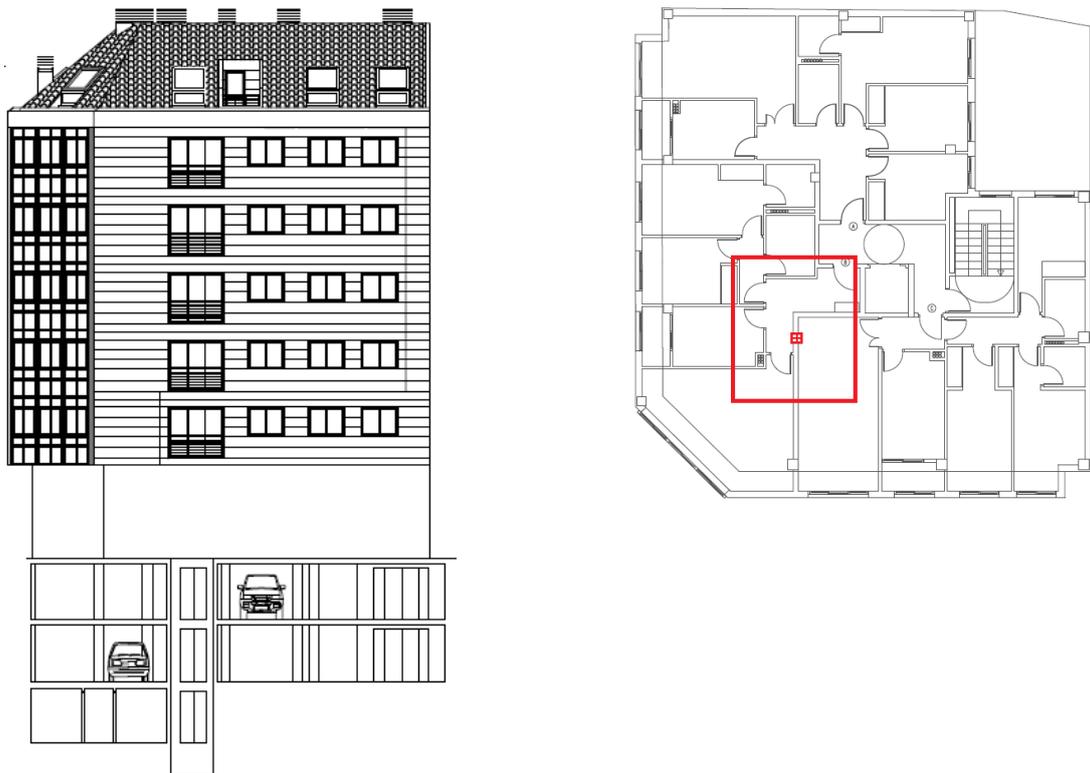
Por último, este anexo habla de la obtención de los valores representativos de las acciones y de las resistencias, necesarios para saber los valores de cálculo mediante la multiplicación o división por los coeficientes, a través de los eurocódigos. Y también vuelve a hablar de los coeficientes parciales de minorización-mayoración y de combinación. Los primeros incluyen las incertidumbres de los valores representativos de las acciones, de las propiedades de los materiales y de los modelos (tanto acciones como resistencias). Los coeficientes de combinación Ψ se emplean cuando disponemos de varias acciones variables. Estos últimos podemos obtenerlos de los eurocódigos o deducirlas a partir de una serie de datos y unas ecuaciones que se muestran al final de este anexo.

6. Aplicación práctica de la verificación probabilista en forma explícita.

En este punto emplearemos la metodología probabilística explícita para el dimensionamiento de un elemento estructural: una zapata. Primero, procederemos a dimensionar nuestra zapata mediante un método semiprobabilista, el método de los coeficientes parciales, de tal forma que cumpla con la normativa española en lo referente a los estados límite últimos. También realizaremos el dimensionado de la zapata con un software informático, CYPE, que emplea también el método de los coeficientes parciales, con el objetivo comparar ambos resultados y de ampliar nuestras conclusiones. Luego, realizaremos la verificación de la fiabilidad de nuestra zapata mediante el uso de los métodos probabilistas explícitos empleando las dimensiones obtenidas mediante el método de los coeficientes parciales.

En la resolución por el método probabilista, emplearemos también un software informático, el programa COMREL, el cual nos ofrecerá 3 índices de fiabilidad, obtenidos mediante aproximaciones lineares y parabólicas, los métodos FORM y SORM respectivamente, y mediante un método de basado en la simulación, el método del hipercubo latino (el método de Monte Carlo con un método de reducción de la varianza mediante el muestreo estratificado).

La zapata que vamos a dimensionar se trata de una zapata centrada en la zona central de un edificio de 7 plantas más 3 sótanos dedicado a vivienda, con comercio en la planta baja y 2 sótanos destinados a garaje y uno a trasteros. A continuación se muestra un alzado-sección y la planta representativa del edificio en cuestión que vamos a estudiar:



El forjado empleado será un forjado bidireccional con bovedillas de poliespan recuperables. Se empleará para tal forjado hormigón HA-25 y acero de la calidad B-400 S. Este forjado será también el empleado en el forjado de la cubierta.

La base del pilar es de 40x40 centímetros desde su nacimiento hasta el forjado superior de la planta baja (inclusive), y de 35x35 centímetros hasta su fin en la cubierta. Supondremos que la carga está centrada, aunque tiene un pequeño desfase con el centro de gravedad, y que no se le aplican momentos. El forjado correspondiente al suelo de la planta -3 es un forjado sanitario que carga directamente sobre el terreno.

La zapata será de base cuadrada, centrada y rígida. Dimensionaremos esta zapata con el fin de que presente una respuesta aceptable frente a los modos de rotura más comunes en las zapatas, por lo que se verificarán los estados límites últimos de equilibrio y de resistencia.

Lo primero que hay que especificar antes de dimensionar una estructura, es la vida útil que le espera. Nuestro edificio no tiene nada de singular y tampoco buscamos una seguridad extra,

por lo que adoptaremos como vida útil la recomendación del código técnico, 50 años. Además de otros datos a tener en cuenta, que los iremos enumerando a medida que avancemos, habrá que atenerse a un criterio para la idealización de la estructura. El cálculo de las cargas que aporta cada planta al pilar se realizará midiendo el área hasta la mitad de la luz entre pilares en todas las dimensiones.

6.1. Dimensionado mediante metodología semiprobabilista (Manualmente)

Manualmente, el procedimiento mas empleado para el dimensionado de las zapatas es el metodo de los coeficientes parciales con la ayuda del modelo de bielas y tirantes. Este procedimiento será el que emplearemos. En el, suponemos una estructura de barras que responde aproximadamente como lo haría una zapata. Las fuerzas de las barras que están comprimidas en el modelo serán hormigón comprimido en la realidad y las que están traccionadas serán el refuerzo de acero.

Estimación de las acciones acutantes: Realizando un análisis del área de contribución de cargas en cada una de las plantas, se extrajeron los siguientes datos atendiendo a la uso que se le da a la planta:

	A. Total	A. Viviendas	A. Común	A. Comercio	A. Aparcamiento
Cubierta (*)	28,14 m ²	-	-	-	-
Bajo Cub.	24,89 m ²	24,52 m ²	0,37 m ²	-	-
P. 5ª	24,89 m ²	24,52 m ²	0,37 m ²	-	-
P. 4ª	24,89 m ²	24,52 m ²	0,37 m ²	-	-
P. 3ª	24,89 m ²	24,52 m ²	0,37 m ²	-	-
P. 2ª	24,89 m ²	24,52 m ²	0,37 m ²	-	-
P. 1ª	24,89 m ²	24,52 m ²	0,37 m ²	-	-
P. Baja	24,89 m ²	-	10,94 m ²	13,95 m ²	-
P. -1	24,82 m ²	-	10,10 m ²	-	14,72 m ²
P. -2	24,82 m ²	-	10,93 m ²	-	13,89 m ²
TOTAL	252,01 m ²	147,12 m ²	34,19 m ²	13,95 m ²	28,16 m ²

* Área de la cubierta en verdadera magnitud.

A continuación, se enumeran las cargas de las acciones que tendremos en cuenta así como los valores característicos que les asociaremos, sacadas del documento básico para las acciones en la edificación (DB SE-AE).

G:	Carga del forjado (canto 30 cm)	4 KN/m ²	
	Cargas muertas (pavimento)	1KN/m ²	
	Tabiquería	1 KN/m ²	
	Cubierta (forjado y cubrición incluida)	4 KN/m ²	
Q:	Sobrecarga de Uso	Cubierta no transitable *	1 KN/m ²
		Viviendas	2 KN/m ²
		Zonas comunes	3 KN/m ²
		Comercios	5 KN/m ²
		Aparcamientos	4 KN/m ²
	Sobrecarga de nieve	1 KN/m ²	

*La sobrecarga de uso en la cubierta es no concomitante debido a que solo es accesible para reparaciones en condiciones optimas de tiempo. Esto quiere decir que la sobrecarga de uso y la carga de la nieve nunca se producen al mismo tiempo, y solo tomaremos la más desfavorable (ya que ambas cargas tienen el mismo valor, elegiremos la sobrecarga de uso).

Para la obtención de estos valores, se ha presupuesto un forjado bidireccional de canto igual a 30 cm (25+5), con pavimento de tarima de 20 mm sobre rasteles. La cubierta se realizara con este mismo forjado, con elemento de cobertura de teja curva corriente (2 kg/ud). Para la tabiquería interior se adopta la recomendación de una carga distribuida uniforme con el fin de prevenir futuras modificaciones. Los pilares, como nuestro objeto es el dimensionamiento de una zapata, tomaran los valores de las dimensiones que se adoptaron en el proyecto, ya que presumiblemente son correctos.

Respecto a las cargas variables, tenemos en cuenta las sobrecargas de uso, y la acción de la nieve. Hemos suprimido la acción del viento pues, mediante la metodología probabilista, su carga es difícil de cuantificar, y tenerlo en cuenta durante el cálculo podría inducir a fallos mayores. La carga producida por la acción de la nieve es una simplificación obtenida del DB SE-AE, que admite emplear el valor de carga de 1 KN/m^2 en zonas de altitud menor a 1.000 metros (un dato bastante por encima del real). Sin embargo, su valoración tiene poca importancia, pues esta carga variable no se puede dar al mismo tiempo que la carga de uso de 1 KN/m^2 , que es en realidad la más restrictiva y la que emplearemos en nuestros cálculos.

Para la verificación de la capacidad portante del edificio, como hemos dicho antes, se considera que hay suficiente resistencia del elemento estructural, si para todas las situaciones de dimensionado pertinentes, se cumple la condición de:

$$E_d \leq R_d$$

Donde:

- E_d es el valor de cálculo del efecto de las acciones o solicitaciones
- R_d es el valor de cálculo de la resistencia correspondiente

Y las situaciones de dimensionado a las que se enfrenta nuestra zapata es a equilibrio y a resistencia. En el caso del equilibrio, las solicitaciones o acciones desestabilizadoras son todas las cargas que son conducidas al terreno de forma axil y las estabilizadoras son solamente la resistencia del terreno frente al hundimiento. En el caso del estado límite de la resistencia, la acción desestabilizadora será el esfuerzo del vuelo de la zapata a flexión (fruto de las cargas en relación al terreno) y la acción estabilizadora es la capacidad de resistencia de la armadura de la zapata a tracción.

Nuestro primer paso será comprobar el estado último de la estabilidad. Para el cálculo de estabilidad, seguiremos el procedimiento que nos ofrece el documento básico de seguridad estructuras en cimentaciones (DB SE-C). Primeramente vamos a hallar el valor de cálculo del efecto de las acciones en la base del pilar. En el DB SE-C, para el cálculo de la estabilidad se utilizan coeficientes γ de mayoración diferentes a los que se emplearán posteriormente para el cálculo de la armadura, por lo que estas dos fuerzas mayoradas N_d tendrán un valor

diferente en los dos estados límite últimos. Para el cálculo de la estabilidad, el valor de N_d en cada zona lo obtendremos de la siguiente forma:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} + \gamma_P \cdot P + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \cdot Q_{k,i}$$

Siendo todos los coeficientes de mayoración $\gamma = 1$ (Extraídos de la tabla 2.1 del DB SE-C)

En el dimensionamiento del armado, será necesario que combinemos las acciones que contribuyen a la carga, en cada planta por separado, según el punto 4.2.2 del documento básico de seguridad estructural (DB SE), de tal forma que el valor de cálculo será:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} + \gamma_P \cdot P + \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \gamma_{Q,i} \cdot \Psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$$

Los coeficientes de seguridad (γ) y de simultaneidad (Ψ) son sacados del documento básico de seguridad estructural, de las tablas 4.1 y 4.2. En nuestro caso, los coeficientes de simultaneidad (Ψ) no son necesarios, puesto que solo existe una acción variable en cada situación. Los valores que nos interesan son los siguientes:

Coeficientes parciales de seguridad (γ) para las acciones			
Tipo de verificación	Tipo de acción	Desfavorable	Favorable
Resistencia	Peso propio	1,35	0,80
	Carga variable	1,50	0,00

Calcularemos primero la carga N_d para el cálculo de equilibrio. Antes, necesitamos la carga uniformemente distribuida que se aplica a cada planta:

Cubierta (en ella actúan: G, Q_{G_1})

- $q_{cub} = 4,00 + 1,00 = 5,00 \text{ KN/m}^2$

Viviendas (en ella actúan: G, Q_{A_1})

- $q_{viv} = 4,00 + 1,00 + 1,00 + 2,00 = 8,00 \text{ KN/m}^2$

Zonas comunes (en ella actúan: G, Q_{A_1})

$$q_{com} = 4,00 + 1,00 + 1,00 + 3,00 = 9,00 \text{ KN/m}^2$$

Locales comerciales (en ella actúan: G, Q_{A_1})

$$q_{loc} = 4,00 + 1,00 + 1,00 + 5,00 = 11,00 \text{ KN/m}^2$$

Garajes (en ella actúan: G, Q_{A_1})

$$q_{gar} = 4,00 + 1,00 + 1,00 + 4,00 = 10,00 \text{ KN/m}^2$$

La carga N_{1d} perteneciente a la carga que aportan las plantas de los edificios para el cálculo del estado límite último de equilibrio será:

$$N_{1d} = A. cub \cdot q_{cub} + A. viv \cdot q_{viv} + A. com \cdot q_{com} + A. loc \cdot q_{loc} + A. gar \cdot q_{gar}$$

$$N_{1d} = 28,14 \cdot 5,00 + 147,12 \cdot 8,00 + 34,19 \cdot 9,00 + 13,95 \cdot 11,00 + 28,16 \cdot 10,00$$

$$N_{1d} = 2.075,02 \text{ KN}$$

El peso propio del pilar también aporta carga, por lo que habrá que tenerlo en cuenta:

$$N_{2d} = Vol \cdot \rho = (0,35^2 \cdot 18,00 + 0,40^2 \cdot 12,80) \cdot 24,00 = 102,07 \text{ KN}$$

Esto nos dá que en la base del pilar, la fuerza N_d que debemos tener en cuenta para el cálculo del estado límite último de equilibrio es:

$$N_d = N_{1d} + N_{2d} = 2.075,02 + 102,07 = 2.177,09 \text{ KN}$$

Ahora, realicemos el cálculo de la carga con coeficientes de mayoración del DB SE para el cálculo del estado límite último de resistencia:

En este caso de estado límite, deberemos combinar las cargas con los coeficientes expuestos anteriormente hasta obtener la hipótesis más desfavorable. En nuestro caso, en todas las plantas solo podremos realizar una combinación, por lo que la hipótesis más desfavorable se obtiene más fácilmente:

Cubierta (en ella actúan: G, Q_{G_1})

- Hipótesis 1 (G + Q_{G_1}): $1,35 \cdot 4,00 + 1,50 \cdot 1,00 = 6,90 \text{ KN/m}^2$

En el resto de las plantas, las superficies de carga se diferencia en zonas de uso claramente delimitadas. Las cargas es la misma si el uso de la superficie es la misma, en todas las plantas, por ello calcularemos la carga de las acciones diferenciando el tipo de uso asociado. Además, como las cargas variables se presentan de una en una, solo hay una combinación existente en cada caso. Las cargas de cálculo que se emplearán en las diferentes zonas son las siguientes:

Viviendas (en ella actúan: G, Q_{A_1})

$$q_{viv} = 1,35 \cdot (4,00 + 1,00 + 1,00) + 1,50 \cdot 2,00 = 11,10 \text{ KN/m}^2$$

Zonas comunes (en ella actúan: G, Q_{A_1})

$$q_{com} = 1,35 \cdot (4,00 + 1,00 + 1,00) + 1,50 \cdot 3,00 = 12,60 \text{ KN/m}^2$$

Locales comerciales (en ella actúan: G, Q_{A_1})

$$q_{loc} = 1,35 \cdot (4,00 + 1,00 + 1,00) + 1,50 \cdot 5,00 = 15,60 \text{ KN/m}^2$$

Garajes (en ella actúan: G, Q_{A_1})

$$q_{gar} = 1,35 \cdot (4,00 + 1,00 + 1,00) + 1,50 \cdot 4,00 = 14,10 \text{ KN/m}^2$$

Calculamos ahora la carga N_{d1} que absorbe la zapata. Para ello, solo necesitamos multiplicar la carga que asociamos a cada zona con su área correspondiente.

$$N_{d1} = A_{cub} \cdot q_{cub} + A_{viv} \cdot q_{viv} + A_{com} \cdot q_{com} + A_{loc} \cdot q_{loc} + A_{gar} \cdot q_{gar}$$

$$N_{d1} = 28,14 \cdot 6,90 + 147,12 \cdot 11,10 + 34,19 \cdot 12,69 + 13,95 \cdot 15,60 + 28,16 \cdot 14,10$$

$$N_{d1} = 2.894,52 \text{ KN}$$

Además de los forjados, el pilar también aporta carga a la zapata. Su cálculo se reduce a volumen por densidad:

$$N_{d2} = Vol \cdot \rho \cdot \gamma = (0,35^2 \cdot 18,00 + 0,40^2 \cdot 12,80) \cdot 24,00 \cdot 1,35 = 137,80 \text{ KN}$$

Finalmente, a carga N_d que absorbe la zapata para el cálculo del estado límite último de resistencia es:

$$N_d = N_{d1} + N_{d2} = 2.894,52 + 137,80 = 3.032,32 \text{ KN}$$

La relación que existe entre la carga aportada en la base del pilar para el cálculo del estado límite último de resistencia (E.L.R) y el estado límite último de equilibrio (E.L.E) es:

$$\frac{N_{d(E.L.R)}}{N_{d(E.L.E)}} = \frac{3.032,32}{2.177,09} = 1,39 = \gamma_f$$

El valor de γ_f relaciona el valor de una carga o reacción calculada con los valores característicos con el valor mayorado de las mismas. De esta forma, después de que calculemos el valor de la reacción del terreno, necesario para el estado límite de equilibrio, podemos obtener el valor de la reacción del terreno aplicando este coeficiente (recordemos que en la comprobación del equilibrio, seguimos el DB-SE C, que solo minorra la reacción del terreno, mientras que en la comprobación de resistencia, empleamos la EHE 08, que mayorra las cargas y minorra la resistencia de los materiales).

A la zapata solo se le aplicará el axil N o N_d (dependiendo de la comprobación). Con el objetivo de simplificar el ejercicio, el momento se supone nulo. No obstante, en el caso de que las cargas se presentaran con una excentricidad, esto no supondría un gran problema. En el DB-C, se nos habla de una forma de simplificar los cálculos cuando nos topamos con una excentricidad. Según el artículo 4.3.1.3. de el citado documento, el área equivalente de una cimentación con momento es la máxima sección cobaricéntrica con la componente vertical de la resultante de la sollicitación en la base del cimiento. Por lo tanto:

El ancho equivalente, $B^* = B - 2e_B$

El largo equivalente, $L^* = L - 2e_L$

Siendo e_B y e_L la excentricidad en las dos direcciones de la zapata.

Ahora que hemos obtenido la carga N para el cálculo del estado límite último de equilibrio y la carga N_d para el cálculo del estado límite de resistencia, proseguimos con el dimensionamiento geométrico de la zapata y su cálculo de equilibrio.

1. Estado límite último de equilibrio

Por otro lado, del lado de las acciones estabilizadoras, tenemos la tensión admisible del terreno (σ_{adm}). Este dato, por tratarse de un dato de una relevancia significativa, debe ser un valor representativo de las tensiones que soporta un terreno real.

El estudio del terreno consto de extracción de 2 probetas para el estudio de la litología, y se realizaron 3 ensayos de penetración dinámica continua. Bajo el terreno superficial, correspondiente a terreno degradado por el hombre, encontramos un estrato caracterizado como rocas meteorizadas, blandas y fracturadas, con granulometrias de arena y limos de escasa fracción gruesa (a partir de los 1,5-2 metros). No se encontro agua y los datos de sismicidad nos dicen que no es necesario tenerla en cuenta. En los ensayos del penetrómetro, se alcanzo el rechazo a una profundidad de 10-11 metros. Para profundidades superiores a los 3,5 metros, nuestro edificio tiene la base de la cimentación a una profundidad de entre 8 y los 9 metros, el estudio recomienda adoptar una tensión admisible de $3,50 \text{ kg/cm}^2$ ($\sigma_{adm} \approx 0,35 \text{ N/mm}^2$).

Como nuestro caso es una zapata rígida que no tiene momento, la carga se reparte uniformemente por toda la superficie. Entonces:

$$\sigma_{adm} \geq N/A$$

En nuestro ejemplo, como nuestro objetivo es comparar ambos métodos (probabilistas y semiprobabilistas), no deseamos quedarnos del lado de la seguridad, sino que queremos obtener el valor mínimo que se considera seguro con el método de coeficientes parciales y ponerlo a prueba con los métodos probabilistas. Por lo tanto, el area minima que necesitamos para el equilibrio de la carga de la zapata, será el area de esta, ocasionando que la tensión transmitida al terreno sea la máxima admisible por este, por lo que la ecuación anterior se convierte en:

$$\sigma_{adm} = N/A$$

Por este motivo, a la hora de dimensionar la base de la zapata, deberemos tener en cuenta también la carga aportada por la zapata que se sumará a N . Para poder conocer el área de la zapata, deberemos conocer el canto de esta para conocer su volumen. Como sabemos que la zapata es rígida:

$$V_{max} \leq 2h$$

Realizaremos un cálculo previo con la carga que transmite el pilar y la tensión del terreno para poder conocer un valor aproximado de las dimensiones de la zapata y así poder saber el canto necesario de la zapata :

$$\sigma_{adm} = N/A$$

$$A = \frac{N}{\sigma_{adm}} = \frac{2.177.090}{0,35} = 6.220.257 \text{ mm}^2$$

Como el lado de la zapata es la raíz cuadrada del área, nuestro lado será de 2.494 mm , lo que hace que el canto de la zapata sea, como mínimo, de:

$$\frac{2,49}{2} - 0,20 \leq 2h$$

$$0,52 \text{ m} \leq h$$

Como el canto mínimo de la zapata es de $0,52 \text{ m}$, y cuando se le añade la carga de la zapata será necesario un canto algo mayor, estableceremos el canto de nuestra zapata en $0,60 \text{ m}$.

De esta forma, la carga total transmitida al terreno es:

$$N'_d = N_d + h \cdot L^2 \cdot \rho$$

Finalmente, el área de nuestra zapata será de:

$$A = \frac{N'_d}{\sigma_{adm}} = \frac{2.177.090 + 600 \cdot A \cdot 0,000024}{0,350}$$

$$0,350 \cdot A - 0,014 \cdot A = 2.177.090$$

$$A = 6.479.435 \text{ mm}^2$$

Si el área que necesita la zapata es $6.479.435 \text{ mm}^2$, nuestra zapata cuadrada será de $2.550 \times 2.550 \text{ mm}$ con un canto de 600 mm . La zapata aporta una carga al terreno de 93.636 N , por lo que la carga final transmitida al terreno es de $2.270.726 \text{ N}$.

Como última comprobación, para ver que la tensión transmitida al terreno por la zapata es la máxima admisible por el terreno, lo que demuestra nuestra proximidad a la seguridad mínima del estado límite último de equilibrio, realizaremos una ultima comprobación:

$$\sigma_{adm} \geq \frac{N}{A}$$

$$0,35 > \frac{2.270.726}{2.550^2} = 0,349$$

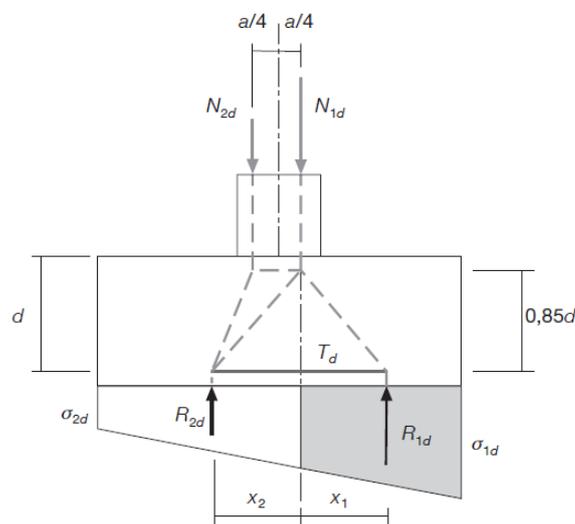
La cifra exacta de la tensión transmitida al terreno es menor que la admisible en $7,9 \cdot 10^{-4} \text{ N/mm}^2$, lo cual es despreciable. Esto significa que nuestro dimensionado de la zapata

cumple frente al estado límite último de equilibrio. Procederemos ahora a dimensionar el armado de nuestra zapata y a comprobar su estado límite último de resistencia.

2. Estado límite último de resistencia

Como se dijo anteriormente, para calcular el armado necesario de la zapata emplearemos el método de las bielas y tirantes, el cual contempla la EHE-08 en el artículo 48.4.1.1. Este modelo puede ser empleado en cualquier tipo de zapatas y otros elementos de grandes dimensiones, como son los muros. En el croquis siguiente, se muestra la simplificación de la zapata mediante bielas y tirantes, donde las líneas discontinuas son esfuerzos de compresión y las líneas continuas son esfuerzos de tracción (que representan a la armadura principal). Se supone que el axil llega a la zapata mediante 2 fuerzas verticales (que sirven para aplicar el momento), y crean dos áreas que absorben una fuerza distinta (que depende de la excentricidad). La reacción resultante del trapecio mayor (con mayores tensiones) y la distancia de su centro de gravedad al primer axil del pilar nos sirven para calcular el armado necesario. Nuestro caso es más simple, porque las cargas se distribuyen mediante tensiones uniformes por todo el terreno. La armadura se calcula fácilmente a partir del tirante de la biela mediante la siguiente fórmula:

$$t_d = \frac{R_{1d}}{0,85 d} \cdot x_1 = A_s \cdot f_{yd}$$



Croquis del modelo de bielas y tirantes para zapatas

Empezamos calculando las tensiones máximas y mínimas en la zapata. En nuestro caso, la tensión máxima es igual a la tensión mínima y es igual a la tensión media. Esto hace que en nuestro ejemplo, en este plano, en vez de tener un trapecio de tensión-longitud, tengamos un rectángulo, donde el centro de gravedad (la reacción R_{1d}) está centrado.

El trapecio, en nuestro caso rectángulo, de la reacción R_{1d} tiene un ancho que es la mitad del lado de la zapata menos $a/4$, por lo tanto:

$$\frac{L}{2} - \frac{a}{4} = \frac{2,55}{2} - \frac{0,400}{4} = 1,175 \text{ metros}$$

En el otro plano, el perpendicular al rectángulo de la tensión-longitud, las tensiones son constantes a lo largo de todo el lado de la zapata en el que se apoya. Por tanto, el area correspondiente a la reacción R_{1d} es:

$$1.175 \cdot 2.550 = 2.996.250 \text{ mm}^2$$

R_{1d} es la respuesta del terreno para calcular el esfuerzo de la armadura, por lo que emplearemos cargas mayoradas. Como mayoraremos todas las cargas, podemos emplear el coeficiente γ_f . Por lo tanto, la respuesta R_{1d} es igual a:

$$R_{1d} = \sigma_{med} \cdot \gamma_f \cdot A = 0,350 \cdot 1,39 \cdot 2.996.250 = 1.457.675 \text{ N}$$

Como la tensión en el terreno sigue siendo constante, la distancia del borde del area perteneciente a R_{1d} a su centro de gravedad es la mitad de la base, es decir la mitad de 1,12. Por lo tanto, x_1 es igual a 0,56 metros. Ahora ya podemos calcular la fuerza que debe resistir la armadura principal de la zapata:

$$t_d = \frac{R_{1d}}{0,85 d} \cdot x_1 = \frac{1.457.675}{0,85 \cdot 600} \cdot 588 = 1.679.185 \text{ N}$$

Para dimensionar la armadura de nuestra zapata emplearemos barras corrugadas de acero B 400-S, por lo que su límite elástico (f_y) será de 400 N/mm^2 . El coeficiente de seguridad para el material (γ_s) será de 1,15. Por lo tanto, el área de acero necesaria para la armadura longitudinal de la zapata es de:

$$t_d = A_s \cdot f_{yd}$$

$$A_s = \frac{t_d}{f_{yd}} = \frac{t_d}{f_y / \gamma_M} = \frac{1.679.185}{400 / 1,15} = 4.827,66 \text{ mm}^2$$

Este es el área de acero con la que debe contar nuestra zapata en la zona de la armadura longitudinal. Una aproximación al número de redondos que necesitamos, siendo realistas (siguiendo los criterios de diámetro mínimo, separación máxima...), es 16 redondos de $\emptyset 20$ mm:

$$16 \emptyset 20 \text{ mm} = 5.026,55 \text{ mm}^2 > 4.827,66 \text{ mm}^2$$

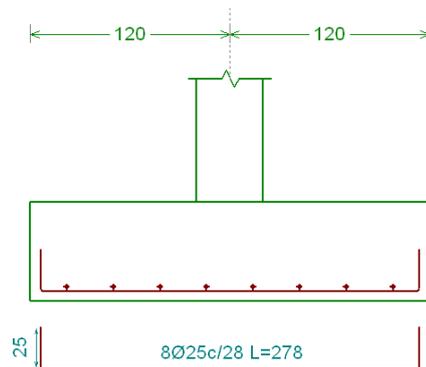
Pero nuestro objetivo es cumplir justo las exigencias del EHE 08, por lo que en nuestro cálculo emplearemos el área estrictamente necesaria para absorber el esfuerzo. Este ejercicio se trata de comprobar la eficacia de unos métodos contra otros, no de dimensionar una zapata para una obra, por lo que podemos tomarnos la libertad de suponer que esta área de acero puede ser lograda mediante el uso de armaduras convencionales.

Finalmente, hemos comprobado que, mediante los métodos semiprobabilistas, una zapata de 2,55 X 2,55 metros con 0,60 metros de canto y una armadura principal con una resistencia de

1.679.185 N es suficientemente segura como para cumplir con las exigencias de los estados límite últimos, y por tanto con las exigencias respecto a la seguridad del código técnico.

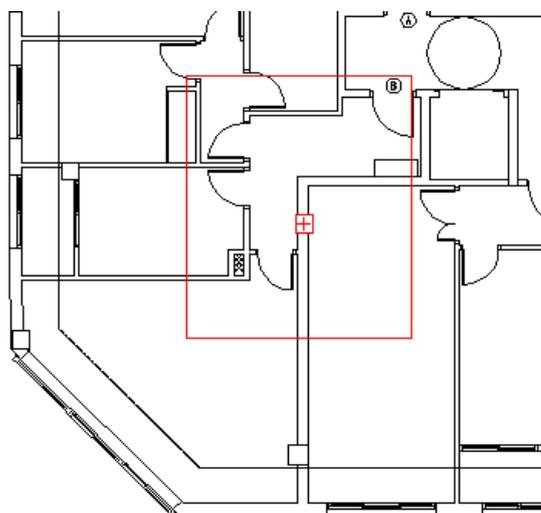
6.2. Dimensionamiento mediante el programa CYPE

Esta vez, a modo de comparación de datos, realizaremos el dimensionado de la zapata con un programa informático. El CYPE emplea, como método para el dimensionado, el método de los coeficientes parciales, por lo que el resultado debería ser similar al nuestro. Introduciendo los datos de la geometría y los datos de las cargas de las acciones obtenemos las siguientes dimensiones y los siguientes datos para los estados límite últimos que analizamos:



Dimensiones y armadura de nuestra zapata

En el caso de E.L.U. de equilibrio, CYPE dimensiono una zapata de dimensiones $2,40 \times 2,40$ metros, con un canto de 0,60 metros. Las dimensiones de la zapata varían significativamente a nuestro dimensionado, puesto que este resultado es menor al nuestro ($2,55 \times 2,55$ metros) que era el mínimo necesario. Esto se debe a la geometría de las plantas. Si apreciamos el área tributaria que computa en nuestro pilar, la esquina inferior izquierda del edificio está achaflanada, lo que provoca una menor carga y por consiguiente, una menor carga a computar en cada pilar. Por eso a CYPE, al dimensionar, le sale una carga menor y, por tanto, unas menores dimensiones.



Detalle de la esquina en chaflán del edificio y el área tributaria del pilar

Además, si prestamos atención a los datos, la tensión que soporta el terreno es $0,329 \text{ N/mm}^2$ (cuando la nuestra esta proxima al máximo de $0,350 \text{ N/mm}^2$). Por lo tanto, la carga que tiene en cuenta para dimensionar la zapata es:

$$0,329 \cdot 2.400 \cdot 2.400 = 1.895.040 \text{ N}$$

El resultado está algo por debajo de nuestra carga calculada $2.177.090 \text{ N}$. El valor de $0,329 \text{ N/mm}^2$ es un valor bastante conservador respecto a la tensión admisible del terreno. El único motivo por el que las dimensiones de la zapata de CYPE son menores es porque tiene en cuenta menor carga, pues si tomara en cuenta la carga que nosotros calculamos, dimensionaría una zapata de:

$$\sigma \geq \frac{N}{A}$$

$$0,329 > \frac{2.270.726}{A}$$

$$A = \frac{2.270.726}{0,329} = 6.901.902 \text{ mm}^2$$

$$\sqrt{6.901.902} \approx 2.650 \text{ mm}$$

Siguiendo el margen de seguridad que establece CYPE, la zapata tendría una base de $2,65 \times 2,65 \text{ metros}$, 10 centímetros más de lado que la nuestra.

En lo que respecta al E.L.U de resistencia, los cálculos de CYPE determinan que es necesaria una armadura de $8\emptyset 25 \text{ mm}$, lo que vienen siendo 3.900 mm^2 . Nuestro dimensionado determino que eran necesarios $4.827,66 \text{ mm}^2$ que convirtiendo esta área en acero, eran necesarios $16 \emptyset 20 \text{ mm}$ ($5.026,55 \text{ mm}^2$). Nuevamente, los resultados son distorsionados por haber tomado diferentes valores del axil.

Para poder comparar un poco los resultados, podemos calcular la cuantía de acero empleada en ambos dimensionamientos. En nuestro dimensionamiento (Lado $2,50 \text{ m}$ y área de acero $50,26 \text{ cm}^2$) obtenemos una cuantía de $20,10 \text{ cm}^2/\text{m}$. . En el caso del dimensionamiento de CYPE (Lado $2,40 \text{ m}$ y cuantía $39,00 \text{ cm}^2$) obtenemos una cuantía de $16,25 \text{ cm}^2/\text{m}$. Nuestra cuantía es superior a la calculada por CYPE. Esto puede deberse a la importancia del vuelo de la zapata para el cálculo de la armadura o a otro modelo de dimensionamiento de armado diferente al modelo de las bielas y los tirantes. No obstante, es difícil comparar ambos resultados en este caso.

En el anexo A se adjuntan las comprobaciones realizadas por CYPE para el dimensionamiento de nuestra zapata.

6.3. Verificación mediante los métodos probabilísticos en forma explícita

A partir del dimensionamiento realizado mediante el método de los coeficientes parciales, realizaremos la comprobación de la fiabilidad del elemento para los dos estados límite que calculamos previamente: el estado límite de equilibrio y el de resistencia. Para este cálculo, emplearemos el programa informático COMREL, que nos dará 3 índices de fiabilidad distintos (aunque muy similares): uno mediante una aproximación lineal, el método FORM; otro mediante una aproximación curva; el método SORM y otro mediante una simulación con el método Monte Carlo.

Al tratarse de un método que trabaja con las variables directamente, obtendremos unos resultados más realistas. Siempre y cuando los datos de las variables aleatorias que empleemos sean correctos. Aquí yace la mayor complicación de estos métodos.

Emplearemos los mismos materiales y los mismos criterios usados en el dimensionamiento por el método de los coeficientes parciales para que los resultados se correspondan.

Para hallar la fiabilidad de cada estado, emplearemos la misma inecuación que usamos en el método de los coeficientes parciales:

$$R \geq E$$

Solo que esta vez no sustituiremos los valores de las cargas por valores deterministas, sino que los sustituiremos por valores estocásticos (cada variable aleatoria de las cargas será sustituido en la ecuación por una variable con media, desviación típica y un tipo de distribución de probabilidad). El programa se encargará de transformar la inecuación:

$$R - E \geq 0$$

En el índice de fiabilidad β del sistema, a partir de su probabilidad de fallo, es decir, a partir de la probabilidad de que se incumpla la ecuación anterior:

$$P_f = P(R - E < 0)$$

1. Estado límite último de equilibrio.

Como en el método de los coeficientes parciales, comenzaremos analizando la capacidad de la zapata frente al hundimiento. Empezaremos enumerando, otra vez, las cargas solicitantes ($G + Q$) que actúan en este problema de fiabilidad y las fuerzas resistente; que son, en mayor o menor medida, variables aleatorias:

Cargas permanentes (G):

- Peso propio del forjado (G_F)
- Peso de las cargas muertas (G_M)
- Peso de la tabiquería (G_T)
- Peso de los pilares de la estructura (G_P)
- Peso de la zapata (G_Z)

Cargas variables (Q):

- Sobrecargas de uso: Zona de viviendas (Q_{viv}), zonas comunes ($Q_{z.com}$), zona de comercio (Q_{com}), zona de aparcamientos (Q_{par}), cubierta transitable solo para reparaciones (Q_{cub}).
- Sobrecarga de nieve (Q_N)

Acciones resistentes (R_d):

- Tensión de carga del terreno (σ)

Cada acción actúa en una superficie o volumen determinado. La carga que genera cada acción es, por tanto, el producto de la carga (por metro cuadrado o metro cúbico) por el área o volumen en el que actúa. En el caso de la sobrecarga de nieve y la sobrecarga de uso en el tejado tomaremos el mismo criterio que en la resolución mediante coeficientes parciales: por ser ambas cargas no coincidentes en el tiempo, adoptaremos la más desfavorable, que en este caso es la de uso. Sustituyendo estos datos en la inecuación anterior, tenemos:

$$[\sigma_{adm} \cdot A] - [G + Q] \geq 0$$

$$I_R \cdot [\sigma_{adm} \cdot A_{zap}] - I_E \cdot [G_F \cdot A_{tot} + G_M \cdot (A_{viv} + A_{z.com} + A_{com}) + G_T \cdot (A_{viv} + A_{z.com} + A_{com}) + G_P \cdot V_P + G_Z \cdot V_Z + Q_{viv} \cdot A_{viv} + Q_{z.com} \cdot A_{z.com} + Q_{com} \cdot A_{com} + Q_{par} \cdot A_{par} + Q_{cub} \cdot A_{cub}] \geq 0$$

De esta forma, la probabilidad de fallo que está asociada con el estado límite último de equilibrio se define tal que:

$$P_f = P\{I_R \cdot [\sigma_{adm} \cdot A_{zap}] - I_E \cdot [G_F \cdot A_{tot} + G_M \cdot (A_{viv} + A_{z.com} + A_{com}) + G_T \cdot (A_{viv} + A_{z.com} + A_{com}) + G_P \cdot V_P + G_Z \cdot V_Z + Q_{viv} \cdot A_{viv} + Q_{z.com} \cdot A_{z.com} + Q_{com} \cdot A_{com} + Q_{par} \cdot A_{par} + Q_{cub} \cdot A_{cub}] < 0\}$$

Donde I_E y I_R representan, respectivamente, las incertidumbres de los modelos de las cargas de las acciones y de las resistencias de los materiales (en este caso, el terreno).

En si, todas estas variables son aleatorias, aunque unas tienen una variabilidad mayor que otra, como ya hemos explicado. En nuestro caso, la mitad de los valores de nuestra inecuación de fiabilidad son áreas y volúmenes. La variabilidad de las áreas de uso y los volúmenes depende de los fallos cometidos en el replanteo, los cuales, en relación a las dimensiones totales a medir, son errores bastante pequeños. Es por esto que tomaremos estos valores (tanto los que determinan áreas como los que determinan volúmenes) como valores deterministas, de la misma forma que fueron tomados en el dimensionamiento.

Los valores de las áreas son los mismos que tomamos en el dimensionamiento de la zapata mediante el método de los coeficientes parciales. Resumiendo el cuadro del anterior punto, tenemos que:

- Área total (A_{tot}): 252,01 m²
- Área de viviendas (A_{viv}): 147,12 m²
- Área de zonas comunes ($A_{z.com}$): 34,19 m²
- Área de comercio (A_{com}): 13,95 m²
- Área de aparcamiento (A_{par}): 28,16 m²
- Área neta de carga de viento (A_V): 28,14 m²
- Área neta de carga de cubierta (A_{cub}): 28,14 m²
- Volumen de pilares (V_p): 4,253 m³
- Volumen de la zapata (V_z): 3,584 m³

Ahora, podremos reducir el número de variables aleatorias que intervienen en el cálculo de la fiabilidad:

$$I_R \cdot \left[\sigma_{adm} \cdot 5.974.911 \cdot \left(\frac{1}{1000} \right) \right] - I_E \cdot \left[G_F \cdot 252,01 + G_M \cdot (147,12 + 34,19 + 13,95) + G_T \cdot (147,12 + 34,19 + 13,95) + G_P \cdot 4,253 + G_Z \cdot 3,584 + Q_{viv} \cdot 147,12 + Q_{z.com} \cdot 34,19 + Q_{com} \cdot 13,95 + Q_{par} \cdot 28,16 + Q_{cub} \cdot 28,14 \right] \geq 0$$

Siendo el valor $\frac{1}{1000}$ el coeficiente para pasar de newtons a kilonewtons, puesto que las cargas y sus áreas vienen expresadas en KN/m^2 y m^2 y la resistencia en N/mm^2 y mm^2 .

El conjunto de variables aleatorias y valores deterministas igualadas a cero es la función límite del sistema ($g(X) = 0$). Nuestro objetivo es averiguar la seguridad que tiene esta función, por lo que nosotros calculamos donde la función es segura: $g(X) \geq 0$. La ecuación que introduciremos en el programa Comrel será la función límite del sistema. Está función se expresa tal que:

$$Flim(1) = I_R \cdot \left[\sigma_{adm} \cdot 5.974.911 \cdot \left(\frac{1}{1000} \right) \right] - I_E \cdot \left[G_F \cdot 252,01 + G_M \cdot (147,12 + 34,19 + 13,95) + G_T \cdot (147,12 + 34,19 + 13,95) + G_P \cdot 4,253 + G_Z \cdot 3,584 + Q_{viv} \cdot 147,12 + Q_{z.com} \cdot 34,19 + Q_{com} \cdot 13,95 + Q_{par} \cdot 28,16 + Q_{cub} \cdot 28,14 \right]$$

Las variables que nos quedan por determinar son las cargas asociadas a las acciones que existen en nuestro edificio y a las incertidumbres de nuestro modelo matemático de estado límite último de equilibrio.

Ahora, estudiaremos cada variable que actúa en la función límite. Esto implica que de cada variable deberemos conocer su valor medio, su desviación típica y el tipo de distribución que tienen. En el capítulo 4 (identificación y análisis de las variables) ya hemos hablado de las variables aleatorias más comunes de una forma general. Ahora vamos a ver la aplicación de estas directrices en un caso práctico. En el programa de ordenador COMREL, solo necesitaremos asociar estos parámetros a las variables de la ecuación para que nos calcule el índice de fiabilidad. Empezaremos por las cargas permanentes:

Peso propio del forjado (G_F):

El forjado que empleamos en el dimensionamiento mediante el método de los coeficientes parciales es un forjado de hormigón armado reticular. El valor de la carga característica que empleamos era de $4,00 \text{ KN/m}^2$. Este valor fue extraído del Documento Básico de Seguridad Estructural – Acciones en la Edificación (DB SE-AE), Anejo C, que está asociado a un forjado unidireccional o bidireccional con un grueso total menor a 0,30 m.

Se entiende que para la obtención de esta carga, se estudiaron varios forjados hasta la obtención de un dato representativo de todos ellos. Como nuestro ejercicio trata de comparar distintos métodos de dimensionar una zapata, podemos pasar un poco por alto el dimensionado del forjado y suponer un valor medio para este.

En el punto 2 del DB SE-AE, nos hablan de las acciones permanentes, en las que se incluyen las acciones de los forjados, la acción de los tabiques, los elementos estructurales y otras cargas muertas. Podemos leer en el que el valor característico del peso propio de los elementos constructivos se determina, en general, como su valor medio, obtenido a partir de las dimensiones nominales y de los pesos específicos medios. Lo que quiere decir, que el valor de $4,00 \text{ KN/m}^2$ obtenido del Anejo C de esta norma, es el valor medio de esta carga (μ_{G_F}), o también se puede expresar como el cuantil 50%.

La carga del peso propio tiene una distribución de probabilidad normal. Al ser el forjado de unas dimensiones muy específicas, es un elemento con poca variabilidad. A estos elementos se les atribuye un coeficiente de variabilidad del 0,05 %, por lo que la desviación típica de la carga del forjado será:

$$\sigma = 4,00 \cdot 0,05 = 0,20 \text{ KN/m}^2$$

Resumiendo, el peso propio del forjado tiene de media $4,00 \text{ KN/m}^2$, con una desviación $0,20 \text{ KN/m}^2$ y su distribución de probabilidad es normal.

Peso de las cargas muertas (G_M):

Las cargas muertas que computamos en nuestra estructura son las causadas por el pavimento de los pisos. Para simplificar, suponemos un pavimento hipotético para todos los solados. Esto nos permite simplificar la carga de esta variable. Este criterio es el mismo que seguimos en el cálculo con métodos semiprobabilistas. La carga característica causada por este material será de $1,00 \text{ KN/m}^2$, extraída del prontuario de cargas del DB SE-AE. Al tratarse de un material indeterminado, se le otorga más aleatoriedad que en el caso de otros elementos.

La norma UNE-EN-1990 en el punto 4 define como valor característico de las propiedades de los materiales el valor definido por el fractil 95 % en el caso de que el valor de dicha propiedad sea desfavorable y la variación de esta sea significativa respecto a la media.

Al tratarse de unas cargas que son debidas a la carga permanente de materiales de obra, supondremos para su distribución de probabilidad la misma que para la carga del forjado, una distribución normal. Basándonos en estudios y trabajos que caracterizan la variabilidad de las

cargas muertas, nosotros adoptaremos para nuestro problema el coeficiente de variación del 10 % respecto a la media.

Es posible determinar el valor medio de la carga (μ_{G_M}) a partir de un valor, su cuantil, el tipo de distribución y su coeficiente de variación. El valor al que nos referimos es el valor característico ($1,00 \text{ KN/m}^2$) que en este caso se corresponde con el cuantil 95 %. Empleando el software informático "Mathcad", podemos calcular sencillamente su media, y el resultado obtenido es $\mu_{G_M} = 0,86 \text{ KN/m}^2$. Como su coeficiente de variación es del 10 %, sabemos también que $\sigma_{G_M} = 0,09 \text{ KN/m}^2$.

Peso de la tabiquería (G_T):

La carga que aporta la acción de la tabiquería es otra carga muerta. El valor que le hemos dado, $1,00 \text{ KN/m}^2$, es una estimación que nos da el DB SE-AE, la cual tiene en cuenta posibles modificaciones en la distribución de las particiones. Es por eso que la carga que nos aconseja el documento es una carga superficial y no lineal.

Aunque la carga que hemos empleado en los métodos anteriores de $1,00 \text{ KN/m}^2$ este por encima de un valor común en una vivienda, sigue siendo un valor empleado como patrón en el anterior método. Estas cargas tienen la misma definición que las cargas muertas. El valor característico ($1,00 \text{ KN/m}^2$) se corresponde de la misma forma con el cuantil 95 %, y su valor medio tiene un coeficiente de variación del 10 %.

Como trabajamos con un dato y una distribución idéntica, la carga de la tabiquería tendrá un valor idéntico al peso de las cargas muertas: $\mu_{G_T} = 0,86 \text{ KN/m}^2$ y $\sigma_{G_T} = 0,09 \text{ KN/m}^2$ y una distribución normal.

Para simplificar la cantidad de datos con los que trabajamos, juntaremos las cargas de la tabiquería con las cargas muertas en una única variable aleatoria. La nueva variable aleatoria (que seguirá llamándose cargas muertas) tendrá de valor medio y desviación típica el doble que las dos variables por separado: $\mu_{G_M} = 1,72 \text{ KN/m}^2$ y $\sigma_{G_M} = 0,17 \text{ KN/m}^2$.

Esto es posible en este caso puesto que las dos variables tienen la misma distribución, mismos valores medios, misma desviación típica y ambos actúan en la misma superficie.

Peso de los pilares de la estructura (G_P):

Los pilares son unos elementos en el que la carga del hormigón es muy superior a la carga que aporta el acero, por lo que podemos considerarlo como un elemento de hormigón en masa (de la misma forma que lo tratamos en el dimensionamiento por el método de los coeficientes parciales y en la que despreciamos el peso del acero).

La carga que aporta un pilar, por tanto, depende de la densidad del hormigón y de la geometría del elemento. La geometría ya la hemos visto previamente y, por ser un elemento muy importante, está muy controlado durante su fase de ejecución, y el procedimiento que se emplea para su elaboración nos permite poder emplear el valor de las dimensiones como deterministas. Solo tenemos que determinar el valor de la densidad del hormigón para tener caracterizada la carga.

Sabemos que la distribución de probabilidad del hormigón es normal, con un valor medio igual al valor nominal de la densidad del hormigón, $\mu_{G_H} = 24,000 \text{ KN/m}^3$, y puesto que su coeficiente de variación es igual a 0,04, su desviación típica será de $\sigma_{G_H} = 0,96 \text{ KN/m}^3$

Peso de la zapata (G_Z):

La carga que aporta la zapata se caracteriza de la misma forma que el pilar. Aunque al estar en contacto con el terreno dificulta más la determinación de sus dimensiones reales, no tendremos en cuenta su variación y asumiremos los valores geométricos como deterministas. Tampoco tendremos en cuenta la variabilidad de la carga que aporta la armadura, como hicimos en el caso del pilar, y tomaremos la zapata como una pieza de hormigón en masa.

Por lo tanto, el valor medio de la densidad del hormigón de la zapata será $\mu_{G_H} = 24,000 \text{ KN/m}^3$ y su desviación típica será $\sigma_{G_H} = 0,96 \text{ KN/m}^3$, siendo la función de distribución de probabilidad una gráfica con distribución normal.

Ahora que hemos valorado las cargas de las acciones permanentes, pasaremos a valorar las características de las cargas de las acciones variables.

Sobrecargas de uso:

Nuestra zapata absorbe las cargas de varias zonas con diferentes usos. Dependiendo a qué uso se destine cada zona, la carga tendrá un valor u otro. Por el método de los coeficientes parciales, cada uso tiene asociada una carga uniformemente distribuida que simula el uso que se le dé a la zona, tanto el uso normal que le dan las personas, los muebles, maquinaria... como el uso poco usual de acumulación de personas, mobiliario en un traslado... Esta carga se mayorará con un coeficiente general para acciones variables, que es $\gamma = 1,5$.

En la comprobación mediante metodología probabilista, podríamos ser más minuciosos. Los datos estadísticos que nos ofrece el informe de la JCSS (la cual hemos visto previamente en el punto 4.4) nos permite analizar cada sobrecarga de uso de una forma más exhaustiva que la que hace el CTE, puesto que caracteriza cada sobrecarga de uso independientemente con una media y dos desviaciones típicas, correspondientes a cargas de uso transitorias o prolongadas. Nosotros, como hemos extraído nuestros datos del DB SE-AE para su dimensionamiento, emplearemos estos mismos datos en forma de variables aleatorias. Por esto, de cada sobrecarga de uso deberemos obtener su tipo de distribución, su media y su desviación típica. Para obtener una variable aleatoria a partir de un valor característico, seguiremos los criterios que tienen los "eurocódigos" para obtener un valor característico a partir de su distribución de probabilidad (es decir, el proceso inverso).

En primer lugar, comentaremos el tipo de distribución de probabilidad que adoptan las sobrecargas de uso. En la mayoría de documentos, se recomienda el uso de una distribución Gumbel. El JCSS, y otros documentos, recomiendan adoptar una distribución Gamma, aunque admite también el uso de una distribución de valor máximo tipo 1. La distribución más representativa de las sobrecargas de uso es una cuestión de discusión entre muchos

investigadores, pues la no coincidencia de resultados entre sus estudios causa que no exista un criterio común sobre que distribución adoptan las sobrecargas de uso.

En nuestro caso, emplearemos una distribución Gumbel, por ser la más común entre los documentos e informes consultados.

En el dimensionamiento mediante coeficientes parciales, empleamos los valores del DB SE-AE:

- Cubierta no transitable: $1,00 \text{ KN/m}^2$
- Viviendas: $2,00 \text{ KN/m}^2$
- Zonas comunes: $3,00 \text{ KN/m}^2$
- Comercios: $5,00 \text{ KN/m}^2$
- Aparcamientos: $4,00 \text{ KN/m}^2$

De la misma forma que procedimos para valorar las cargas aleatorias en el apartado de las cargas muertas, definiremos ahora estas variables.

Todas las sobrecargas de uso con las que trabajamos son consideradas por el CTE de la misma forma: Sus distribuciones de probabilidad las supone que tienen la misma forma (nosotros supondremos una distribución del tipo Gumbel), los valores característicos de cada uso corresponden con el cuantil superior del 98 %, y se les presupone un coeficiente de variación respecto al valor medio del 40 %.

Esto se traduce en que el valor medio de las sobrecargas y sus desviaciones son proporcionales a su valor característico. Ahora, valorando cada acción independientemente con el programa informático mathcad, tenemos que los valores de la media y la desviación típica de cada sobrecarga de uso son:

- Cubierta: $\mu_{Q_{cub}} = 0,49 \text{ KN/m}^2$
 $\sigma_{Q_{cub}} = 0,20 \text{ KN/m}^2$
- Viviendas: $\mu_{Q_{viv}} = 0,98 \text{ KN/m}^2$
 $\sigma_{Q_{viv}} = 0,39 \text{ KN/m}^2$
- Zonas comunes: $\mu_{Q_{Z.com}} = 1,47 \text{ KN/m}^2$
 $\sigma_{Q_{Z.com}} = 0,59 \text{ KN/m}^2$
- Comercios: $\mu_{Q_{com}} = 2,45 \text{ KN/m}^2$
 $\sigma_{Q_{com}} = 0,98 \text{ KN/m}^2$
- Aparcamientos: $\mu_{Q_{par}} = 1,96 \text{ KN/m}^2$
 $\sigma_{Q_{par}} = 0,79 \text{ KN/m}^2$

Capacidad portante del terreno (σ):

Por último, tenemos la única acción estabilizadora que debemos tener en cuenta en el cálculo del estado límite último de equilibrio, la tensión portante del terreno. Al ser la única variable aleatoria que aporta el equilibrio a la ecuación, es necesario que sea definida correctamente para poder obtener un resultado realista.

Ya hemos visto en el punto en el que definimos el terreno lo confuso que era llegar a unos valores que definan nuestro suelo. Nosotros, al igual que en los datos de las acciones, partiremos de los datos empleados en el método semiprobabilista para obtener la definición de esta variable de forma probabilista.

El valor que le dimos a la tensión admisible del terreno cuando dimensionamos nuestra zapata fue: $\sigma_{adm} = 0,35 \text{ N/mm}^2$. Este valor es obtenido a partir de la tensión de hundimiento (σ_H), que es calculada por el geotécnico, dividido por un coeficiente de seguridad igual a 3. El valor de σ_H equivale al valor característico de la carga de las acciones.

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_H}{3}$$

El coeficiente de reducción igual a 3 denota la gran variabilidad que tiene la tensión resistente del terreno y la falta de confianza que nos da la tensión de hundimiento si lo comparamos con el coeficiente 1,5 que se le aplica a las cargas variables (las cuales su coeficiente de variación ronda el 30 %).

El valor de la tensión de hundimiento de nuestro terreno es:

$$\sigma_H = 3 \cdot 0,35 = 1,05 \text{ N/mm}^2$$

No existen datos concretos de con que cuantil se asocia este valor característico, pero basándonos en los valores característicos de las acciones, hemos optado por asociar este valor característico con el cuantil 98 %, como con las sobrecargas de uso (un cuantil bastante conservador).

Para obtener el valor medio mediante la aplicación Mathcad, debemos definir también el coeficiente de variación de la variable y el tipo de distribución que sigue. En lo referente al coeficiente de variación (para terrenos cohesivos), existen un gran número de artículos, desde unos con coeficientes bastante optimistas que van desde el 12 % hasta un máximo del 34 % en los casos más desfavorables, a otros con muy poca definición como es el caso del JCSS, que valora el coeficiente de variación de los terrenos cohesivos entre el 20 % y el 100 %. Nosotros, después de haber hecho pequeñas pruebas con la influencia del coeficiente de variación en la distribución del terreno, hemos decidido adoptar un punto intermedio, exactamente un coeficiente del 30 %.

Por último, la distribución de probabilidad que adoptaremos en la variable del terreno, será una gumbel.

Realizado el cálculo, determinamos que la tensión de hundimiento del terreno es una variable aleatoria con una tensión media $\mu = 1,88 \text{ N/mm}^2$ $\sigma = 0,56 \text{ N/mm}^2$

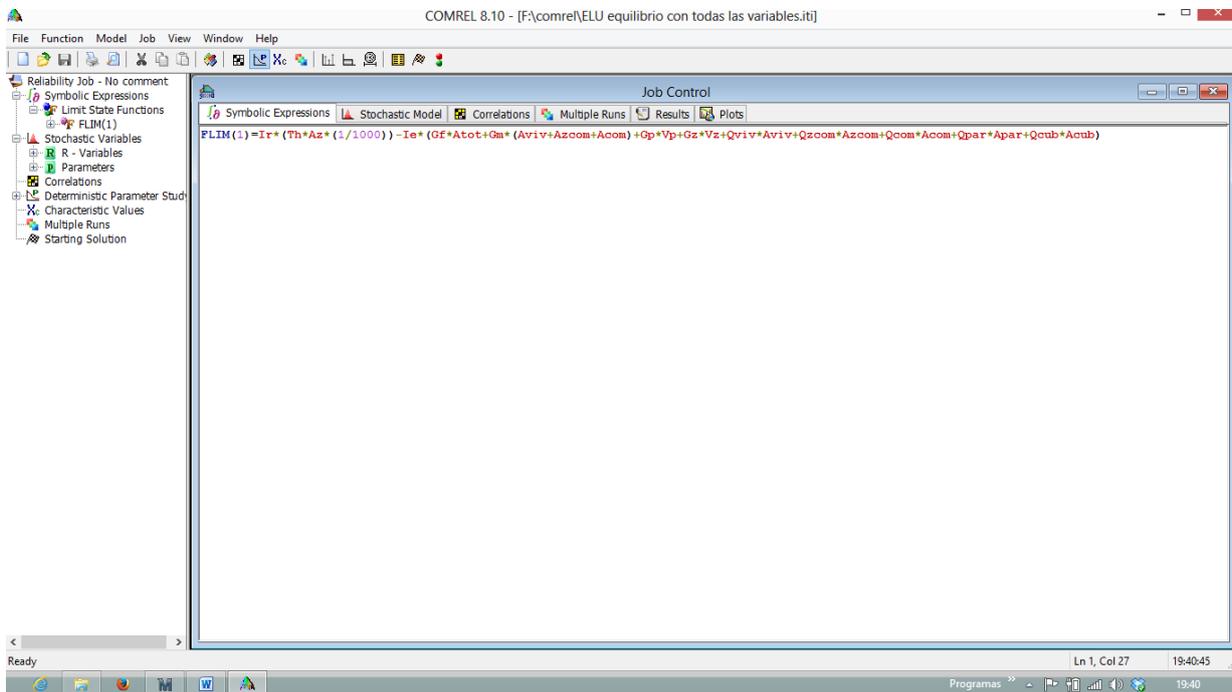
El modelo.

Por último, hay que tener en cuenta la variabilidad que supone el modelo matemático respecto a la respuesta real del sistema. Este dato, como pudimos comprobar, está medido y contrastado por varias normas, y no deja lugar a la discusión. Basándonos en el documento de las incertezas del modelo del JCSS, los efectos de las cargas que producen unos axiles en la estructura se pueden definir como una distribución log-normal, cuyo valor medio es 1 (significa que el valor que se calcula es el valor medio) y su desviación típica es 0,05 %.

En el caso del modelo del terreno, no tenemos datos (Este elemento no aparece entre los datos de ninguna norma). Seguiremos más o menos los datos que nos dan para otras resistencias. La distribución de la resistencia del terreno será log-normal, su media también será 1, como en el axil. Por último, como coeficiente de variación del modelo de resistencia, adoptaremos un valor intermedio, como por ejemplo 0,10 %. Teniendo en cuenta que la media de nuestro modelo de resistencia es 1, comparado con los otros modelos este valor del coeficiente de variación es relativamente conformista.

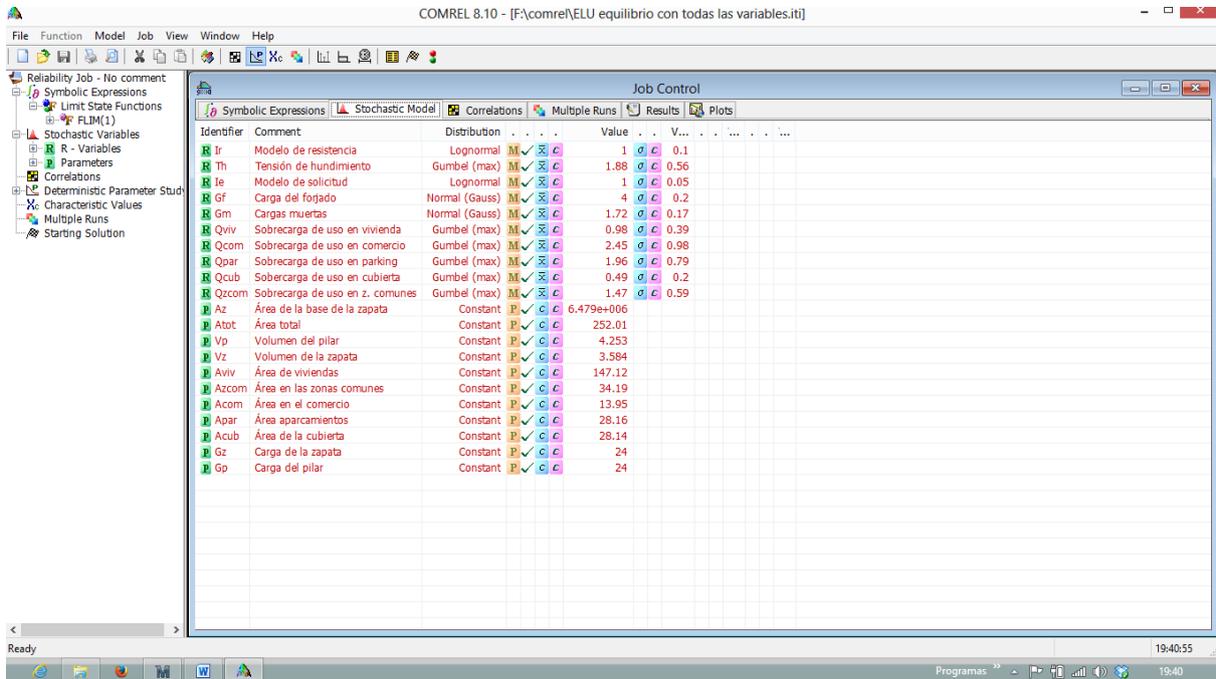
Comprobación con comrel

Ya hemos definido completamente nuestra función límite, solo nos queda introducirla en el programa computacional comrel para obtener los resultados. El primer paso es escribir la expresión matemática de la función límite en la ventana “*Symbolic expressions*” (expresión simbólica):



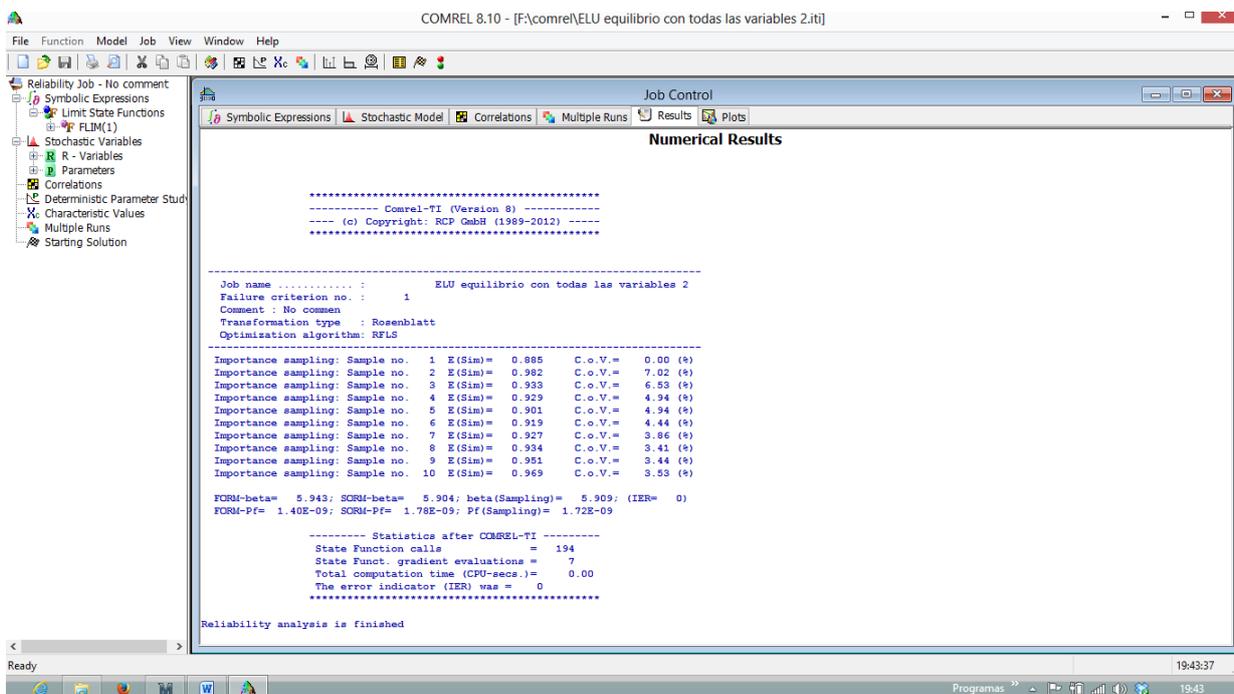
Ventana de “*symbolic expresión*” con la función límite introducida

A continuación, rellenamos en la ventana de “*stochastic model*” (modelo estocástico) con los valores y características de nuestras variables y constantes. Esto es, decir que valores son deterministas y cuales son variables. En el caso de que sean deterministas, solo habrá introducir el valor, si se trata de una variable, habrá que introducir su tipo de distribución, su valor medio y su desviación típica:



Ventana de “*stochastic model*” cubierta con nuestros valores

Por último, solo tenemos que darle a obtener los resultados. La ventana que nos ofrece la verificación de fiabilidad es la siguiente:



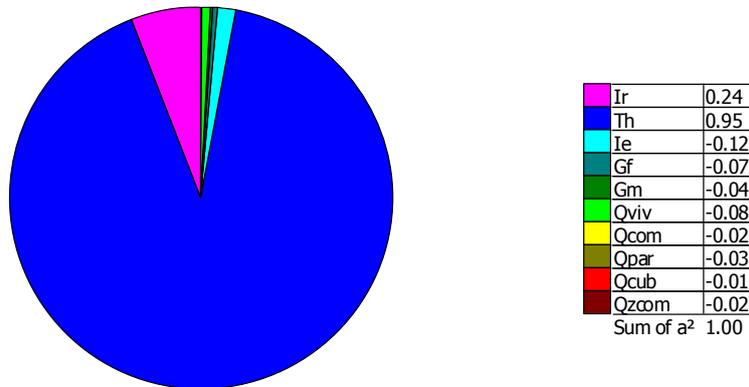
Ventana con los resultados numéricos

Como se comentó previamente, obtenemos 3 resultados: una verificación empleando el método FORM, otra empleando el método SORM y una tercera empleando el método de simulación Monte Carlo. El informe nos dice que obtenemos las siguientes fiabilidades:

- Empleando FORM, $\beta = 5,943$
- Empleando SORM, $\beta = 5,904$
- Empleando Monte Carlo, $\beta = 5,909$

Nuestra fiabilidad ronda el 5,9 ; ampliamente superior a la fiabilidad solicitada por la norma de $\beta = 3,8$. Si nos parece este 5,9 una fiabilidad excesiva, podemos reducirla con el fin de ajustarnos a la fiabilidad exigida por el código técnico. La siguiente gráfica muestra la importancia que supone cada variable aleatoria para la fiabilidad de la zapata:

Representative Alphas of Variables FLIM(1), ELU equilibrio con todas las variables.pti

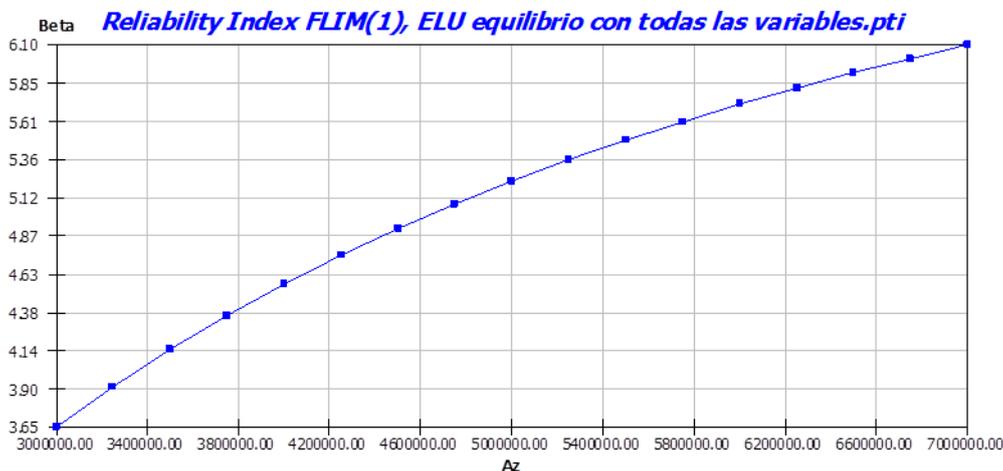


Podemos comprobar que la variable que influye en mayor medida en la fiabilidad de la zapata frente al E.L.U. de equilibrio es la resistencia del terreno. Esto significa que la mayor parte de las incertezas que implican que baje la fiabilidad vienen del terreno. Si el terreno no tuviera tanta aleatoriedad, es decir, si la desviación típica de la resistencia del terreno fuera menor, esto implicaría un gran aumento de la fiabilidad del terreno. Obviamente la resistencia del terreno es un variable que no podemos controlar puesto que nos viene impuesta en el área del edificio, pero si pudiéramos escoger un terreno con una resistencia menos aleatoria, el resultado de la fiabilidad aumentaría en gran medida. Por lo tanto, en este caso, la única salida que nos queda para intentar mejorar la fiabilidad sería realizar valoración más precisa del terreno.

Además, es posible realizar el estudio de un parámetro respecto al índice de fiabilidad. En este caso, por ser el parámetro que nosotros podemos controlar en nuestra obra, realizaremos el estudio de la fiabilidad en función del área de la zapata. Para ello, en la ventana del modelo estocástico, seleccionamos el parámetro del área de la zapata y seleccionamos que lo estudie para áreas entre $3.000.000 \text{ mm}^2$ y $7.000.000 \text{ mm}^2$ (recordemos que calculamos la fiabilidad de la zapata con un área de $6.479.000 \text{ mm}^2$) tomando valores cada 250.000 mm^2 . Calculamos de nuevo, y los datos a mayores que obtenemos son:

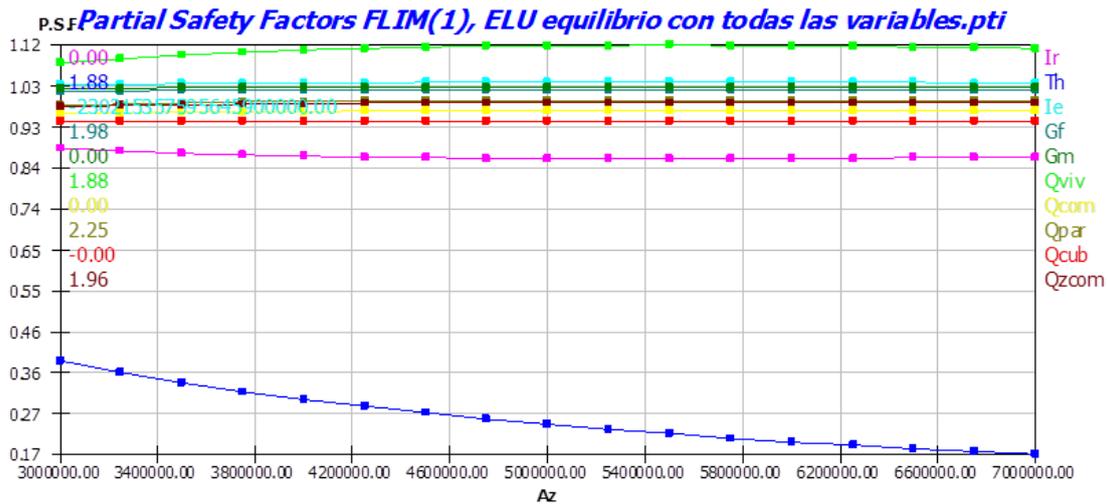
----- Estudio de parámetros para el parámetro: Az -----				
Valor param.;	índice β ;	Prob. De fallo ,	sens. Param ,	Elas. param.
0.3000E+07	3.651	1.31E-04	0.1103E-05	0.8970
0.3250E+07	3.913	4.56E-05	0.1000E-05	0.8229
0.3500E+07	4.152	1.65E-05	0.9115E-06	0.7615
0.3750E+07	4.370	6.23E-06	0.8339E-06	0.7096
0.4000E+07	4.569	2.45E-06	0.7658E-06	0.6649
0.4250E+07	4.753	1.00E-06	0.7055E-06	0.6259
0.4500E+07	4.923	4.27E-07	0.6519E-06	0.5915
0.4750E+07	5.080	1.89E-07	0.6040E-06	0.5607
0.5000E+07	5.226	8.69E-08	0.5610E-06	0.5331
0.5250E+07	5.361	4.14E-08	0.5223E-06	0.5081
0.5500E+07	5.488	2.04E-08	0.4873E-06	0.4853
0.5750E+07	5.606	1.04E-08	0.4556E-06	0.4644
0.6000E+07	5.716	5.46E-09	0.4267E-06	0.4452
0.6250E+07	5.820	2.95E-09	0.4003E-06	0.4274
0.6500E+07	5.917	1.64E-09	0.3762E-06	0.4109
0.6750E+07	6.009	9.38E-10	0.3541E-06	0.3956
0.7000E+07	6.095	5.49E-10	0.3338E-06	0.3814

Introduciendo estos datos en una gráfica en función del obtenemos:



El índice de fiabilidad es próximo a 3,8 cuando el área de la zapata es $3.250.000 \text{ mm}^2$. Esto significa que nuestra zapata podría tener una base de $1,80 \times 1,80 \text{ metros}$ en vez de una de $2,55 \times 2,55 \text{ metros}$ y seguiría cumpliendo las solicitaciones que indica el CTE frente al estado límite último de equilibrio. OJO! La zapata estaría capacitada para cumplir el E.L.U. de equilibrio, pero habría que realizarle otras comprobaciones frente a otros E.L.U, y si los cumpliera entonces si que podría tener una base de $1,80 \times 1,80 \text{ metros}$.

En algunos puntos de este trabajo, hemos hablado de la posibilidad que nos ofrece los métodos probabilistas de servir de calibración para los coeficientes parciales de los métodos semiprobabilistas. Este programa también nos ofrece una tabla que relaciona el coeficiente de fiabilidad con los coeficientes parciales de las variables que actúan. El método de los coeficientes parciales del documento básico de seguridad estructural emplea, en general, 3 coeficientes (uno para cargas permanentes, 1,35; otro para cargas variables, 1,50; y otro para la tensión admisible del terreno, 3) y, ahora, nosotros tenemos uno para cada variables. El resultado es el siguiente:



En esta tabla encontramos curvas para todas las variables, relacionándolas con el valor del área de la zapata (A_z) y con el coeficiente β . Por lo tanto, para otros sistemas con estas mismas variables, podríamos emplear estos coeficientes para obtener unos resultados de fiabilidad iguales. El funcionamiento es simple: deberemos escoger el valor de A_z conforme a la fiabilidad que queremos. Por ejemplo, si queremos una fiabilidad $\beta = 5,9$, deberemos escoger el área de la zapata que en los resultados marco una fiabilidad de 5,9, $6.479.000 \text{ mm}^2$. Tomando los valores de los coeficientes parciales de la vertical al área deseada, obtenemos los coeficientes que, multiplicándolos por los valores medios, nos dará el estado de equilibrio. En el caso de necesitar una $\beta = 5,9$, el coeficiente de T_h sería 0,18, el de I_r sería 0,86 (...) y como resultado, resistencia menos solicitaciones sería igual a cero.

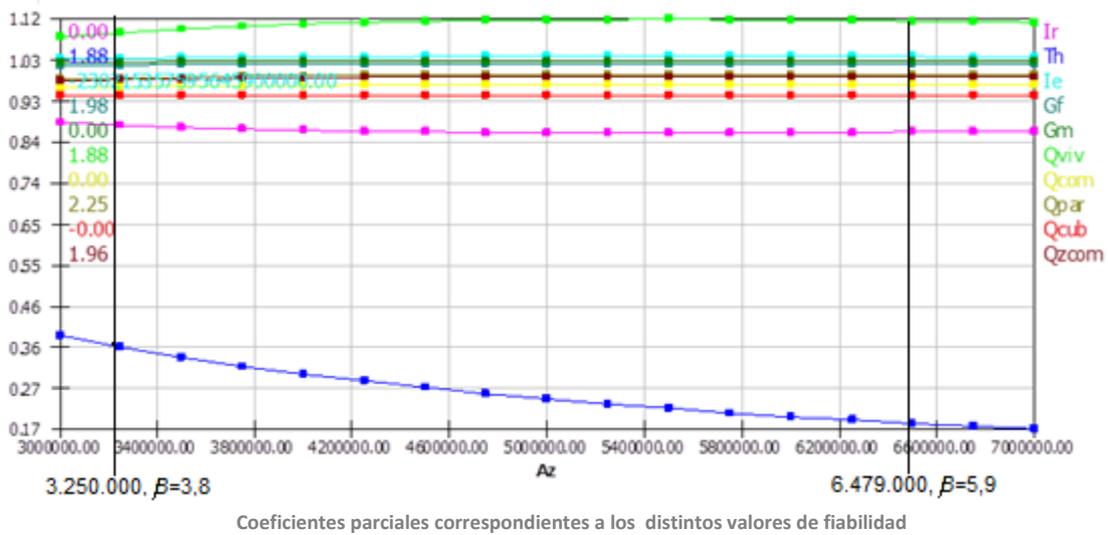
Podemos apreciar en este punto parte de los valores del método de los coeficientes parciales. Recordamos que, según el documento básico de cimientos, para el E.L.U. frente al hundimiento los coeficientes que se emplean son de 3 con la tensión de hundimiento y 1 con el resto de valores. Nuestros coeficientes calibrados dan un resultado muy aproximado, pues para los valores de las cargas nos salen unos coeficientes comprendidos entre 1,03 y 0,95 y para la tensión resistente del terreno nos sale un coeficiente aproximadamente igual a 0,18 y:

$$\mu_\sigma \cdot 0,17 = 1,88 \cdot 0,18 = 0,338 \text{ N/mm}^2$$

Mientras con los coeficientes de la norma:

$$\frac{\sigma_H}{3} = \frac{1,05}{3} = 0,35 \text{ N/mm}^2$$

Si quisiéramos una $\beta = 3,8$ como nos exige la norma, nos fijaríamos en el área de $A_z = 3.250.000 \text{ mm}^2$, y observaríamos que necesitaríamos un coeficiente parcial para el T_h de 0,36, para I_r sería 0,88 (...) y nuevamente, la resta entre resistencias y solicitaciones daría cero.



2. Estado límite último de resistencia

Una vez comprobado el estado límite último de equilibrio, comprobaremos el estado límite último de resistencia. El procedimiento que emplearemos será el mismo que en el anterior estado límite: Estableceremos la ecuación de la función límite (que debe ser la misma que la empleada en el método de los coeficientes parciales), estudio de las variables aleatorias y los valores deterministas, comprobación matemática y comparación.

Rememorando, para el cálculo con metodología semiprobabilista, empleamos el método de las bielas y de los tirantes. La ecuación que determina la conformidad de este modelo de bielas y tirantes respecto al armado es:

$$t_d = \frac{R_{1d}}{0,85 d} \cdot x_1 = A_s \cdot f_{yd}$$

Donde:

- t_d : Fuerza que debe soportar el armado.
- R_{1d} : Es la respuesta mayorada del terreno a la mitad de la zapata que más tensión aporta.
- x_1 : Es la distancia desde el centro de gravedad de la respuesta del terreno a la directriz del pilar.
- d : Es el canto de la zapata.
- A_s : Es el área de acero del armado.
- f_{yd} : Es la resistencia característica mayorada del acero.

Como nuestra metodología se basa en la probabilidad, no emplearemos valores característicos ni coeficientes de mayoración, sino que emplearemos valores medios y desviaciones típicas. Por lo tanto, la formulación correcta de esta ecuación para nuestro problema será:

$$\frac{R_1}{0,85 d} \cdot x_1 = A_s \cdot f_y$$

Ordenando la ecuación, la función límite ($g(x) = 0$) que nos aportará el índice de fiabilidad β es:

$$A_s \cdot f_y - \frac{R_1}{0,85 d} \cdot x_1 = 0$$

Analizamos ahora las variables de la ecuación y vemos de donde las obtenemos:

- A_s : El área de acero es una variable proxima a la determinista, de escaso coeficiente de variación. En nuestro caso, la tomaremos como un valor determinista.
- f_y : La resistencia del acero la tomaremos como una variable aleatoria puesto que, aunque tiene escasa variabilidad, es cobra gran importancia en la seguridad.
- R_1 : Es un valor estocástico compuesto por las cargas de las acciones que intervienen en la estructura y su acción se aplica en el lado mas cargado de la zapata. Este valor es la mitad de la carga total que se transmite al terreno.
- d : El valor del canto útil es una variable que depende de la geometría, pero lo tomaremos como una.
- x_1 : La distancia desde el eje del pilar al centro de gravedad de la resultante R_1 es también una variable geométrica. La tomaremos también como un valor determinista.

Teniendo en cuenta las incertezas que se producen en nuestro modelo, la ecuación de estado límite se expresa como:

$$I_R \cdot (A_s \cdot f_y) - I_E \cdot \left(\frac{R_1}{0,85 d} \right) \cdot x_1 = 0$$

Donde I_R y I_E son, como en la comprobación anterior, las incertezas derivadas del modelo de resistencia y el modelo de las solicitaciones.

Área de acero

Como hemos dicho antes, este valor será determinista. Emplearemos el valor exacto que hemos obtenido usando el método de los coeficientes parciales que nos asegura una fiabilidad aceptable de $\beta = 3,8$. De esta forma, podremos comparar la fiabilidad que obtenemos realmente con la metodología semiprobabilista y lo acertadas que son.

El área de acero que nos determina el método de los coeficientes parciales es:

$$A_s = 4.827,66 \text{ mm}^2$$

Puesto que consideramos la variabilidad de la sección del acero nula y esta variabilidad es un porcentaje en base al área total de acero, no es necesario dimensionar el diámetro de los redondos para calcular la fiabilidad.

Resistencia del acero

Ya hemos hablado de la fiabilidad que nos ofrece el acero como material de producción, por su alta resistencia y su baja variabilidad. El acero que empleamos en nuestra zapata se trata de barras corrugadas del tipo B 400-S.

Como todos los aceros, sus características mecánicas adoptan una distribución de probabilidad normal. En este caso, para comprobar el estado límite último de resistencia nos interesa el límite elástico (f_y). En este caso, el valor característico del límite elástico del acero con el que trabajamos es 400 N/mm^2 . Aunque previamente hablamos de que el acero estructural tenía un coeficiente de variación del 7 %, y su valor medio era el valor nominal más dos desviaciones típicas, nosotros emplearemos otros valores. Esta vez, el valor característico del acero se corresponde con el cuantil 5 % en una distribución con un coeficiente de variación del 5 %.

Mediante el uso del programa informático Mathcad, obtenemos que el valor medio del límite elástico del acero es $\mu_{f_y} = 435,7 \text{ N/mm}^2$ y, por tanto, su desviación típica es $\sigma_{f_y} = 21,78 \text{ N/mm}^2$

Variables geométricas

Dentro de este apartado, nos encontramos con los valores del canto útil, d , y la separación entre el eje del pilar y el centro de gravedad de la resultante del terreno R_1, x_1 . Estas variables aleatorias, como se trata de variables geométricas con escasa variación, podemos asumirlas como deterministas.

En el primer punto de este ejercicio práctico ya hemos visto como dimensionamos estas dimensiones, por lo que ahora, simplemente, introducimos esos valores para comprobar la fiabilidad de la zapata. Los valores de estas dimensiones son, para el canto útil de la zapata $d = 600 \text{ mm}$, y para la separación entre eje de zapata y centro de gravedad de la resultante $R_1, x_1 = 588 \text{ mm}$.

Respuesta del terreno

La respuesta del terreno debe ser igual al axil que transmite la zapata, por lo tanto, R_1 , que es la mitad de la respuesta del terreno, es igual a la mitad de las solicitaciones calculadas en el anterior ejercicio. Por tanto, el valor R_1 se define como:

$$R_1 = [G_F \cdot A_{tot} + G_M \cdot (A_{viv} + A_{z.com} + A_{com}) + G_H \cdot V_H + Q_{viv} \cdot A_{viv} + Q_{z.com} \cdot A_{z.com} + Q_{com} \cdot A_{com} + Q_{par} \cdot A_{par} + Q_{cub} \cdot A_{cub}]/2$$

Estas variables aleatorias ya fueron definidas en el cálculo de fiabilidad del estado límite último de resistencia, por lo que procederemos a substituir los valores deterministas de las áreas y los volúmenes y a enumerar las medias, las desviaciones típicas y las distribuciones de probabilidad de cada variable aleatoria:

Tipo de acción	Valor medio (μ)	Desviación típica (σ)	Tipo de distribución
Acciones permanentes			
Carga del forjado (G_f)	4,00 KN/m ²	0,20 KN/m ²	Normal
Cargas muertas (G_m)	1,72 KN/m ²	0,17 KN/m ²	Normal
Peso del Hormigón de la estructura (G_H)	24,000 KN/m ³	0,960 KN/m ³	Normal
Sobrecargas de uso			
Viviendas (Q_{viv})	0,98 KN/m ²	0,39 KN/m ²	Gummbel
Zonas comunes ($Q_{z.com}$)	1,47 KN/m ²	0,59 KN/m ²	Gummbel
Comercios (Q_{com})	2,45 KN/m ²	0,98 KN/m ²	Gummbel
Aparcamiento (Q_{par})	1,96 KN/m ²	0,79 KN/m ²	Gummbel
Cubierta (Q_{cub})	0,49 KN/m ²	0,20 KN/m ²	Gummbel

Y substituyendo las áreas y los volúmenes de la ecuación por la mitad de sus valores (ya que la respuesta del terreno R_1 , en nuestro caso, es la mitad del axil total) obtenemos:

$$R_1 = (G_F \cdot 126,01 + G_M \cdot (73,56 + 17,10 + 8,98) + G_H \cdot 3,919 + Q_{viv} \cdot 73,56 + Q_{z.com} \cdot 17,10 + Q_{com} \cdot 8,98 + Q_{par} \cdot 14,08 + Q_{cub} \cdot 14,07)$$

Por tanto, la función límite que introduciremos en el programa Comrel, substituyendo R_1 por todas sus variables aleatorias, queda expresada de la siguiente forma:

$$Flim(1) = I_R \cdot (A_s \cdot f_y) - I_E \cdot \left\{ [G_F \cdot 126,01 + G_M \cdot (73,56 + 17,10 + 8,98) + G_H \cdot 3,919 + Q_{viv} \cdot 73,56 + Q_{z.com} \cdot 17,10 + Q_{com} \cdot 8,98 + Q_{par} \cdot 14,08 + Q_{cub} \cdot 14,07] \cdot [x^1 / 0,85 \cdot d] \right\}$$

El modelo

Por último, debemos caracterizar la variabilidad que supone el modelo matemático que empleamos. De la misma forma que hicimos con el estado límite último de resistencia, obtendremos nuestros datos de variables aleatorias del documento del JCSS.

El objetivo de la zapata es el de transmitir las cargas de la estructura al terreno evitando, al mismo tiempo, que se produzcan asentamientos en el terreno que puedan resultar desfavorables para el edificio. Para desempeñar esta función, la zapata debe tener suficiente base para que el terreno pueda admitir la carga que le aporta. Este requisito es, claramente, el que buscamos satisfacer con el estado límite último de equilibrio.

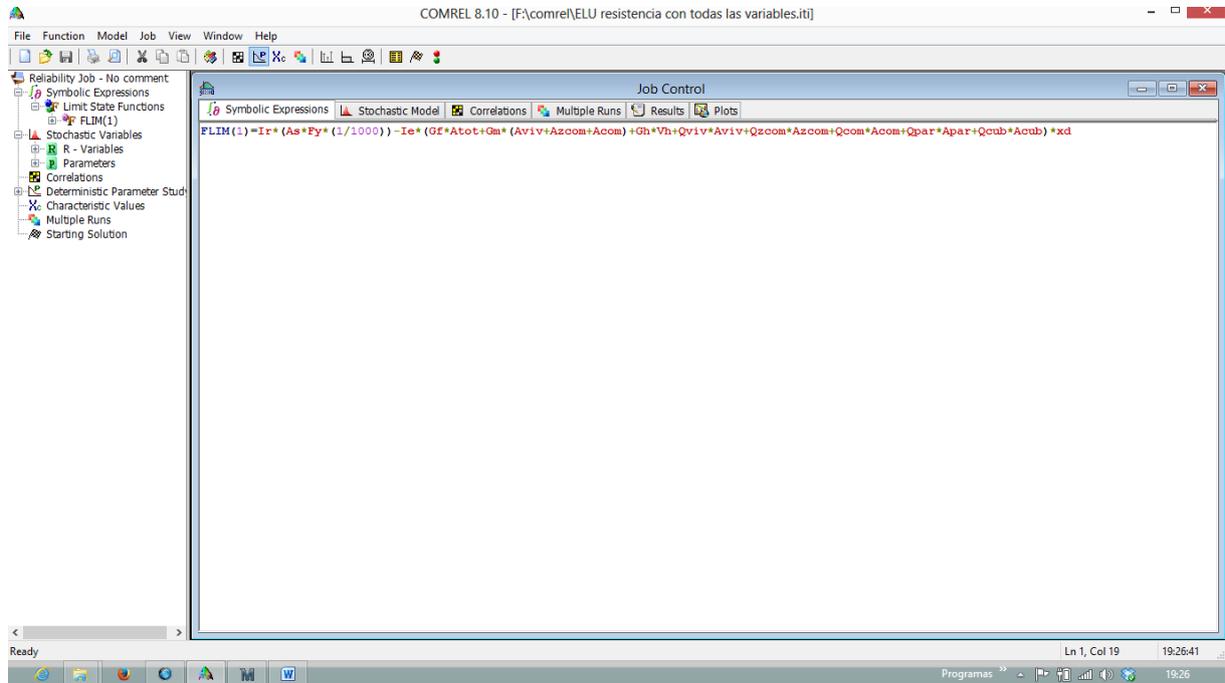
El axil resultante de las acciones se transmite a la zapata a través de la base del pilar. Si prestamos atención, la zapata actúa respecto al pilar como un voladizo invertido, por lo que los vuelos de la zapata deben resistir un momento flector. Por lo tanto, dentro del cuadro de la variabilidad de los modelos de las acciones, escogeremos el modelo de los momentos en la estructura. Esto supone que el modelo de solicitaciones tiene un valor medio $\mu_{I_E} = 1$ y un coeficiente de variación $\sigma_{I_E} = 0,10$ con una distribución de probabilidad log-normal.

Lo que tratamos de comprobar en el estado límite último de resistencia es la fiabilidad del armado de la zapata, por lo que para la caracterización de la variabilidad de la resistencia

tomaremos los valores de resistencia a flexión del acero, esto es, un valor medio $\mu_{I_S} = 1$ y un coeficiente de variación $\sigma_{I_S} = 0,05$ también con una distribución de probabilidad log-normal.

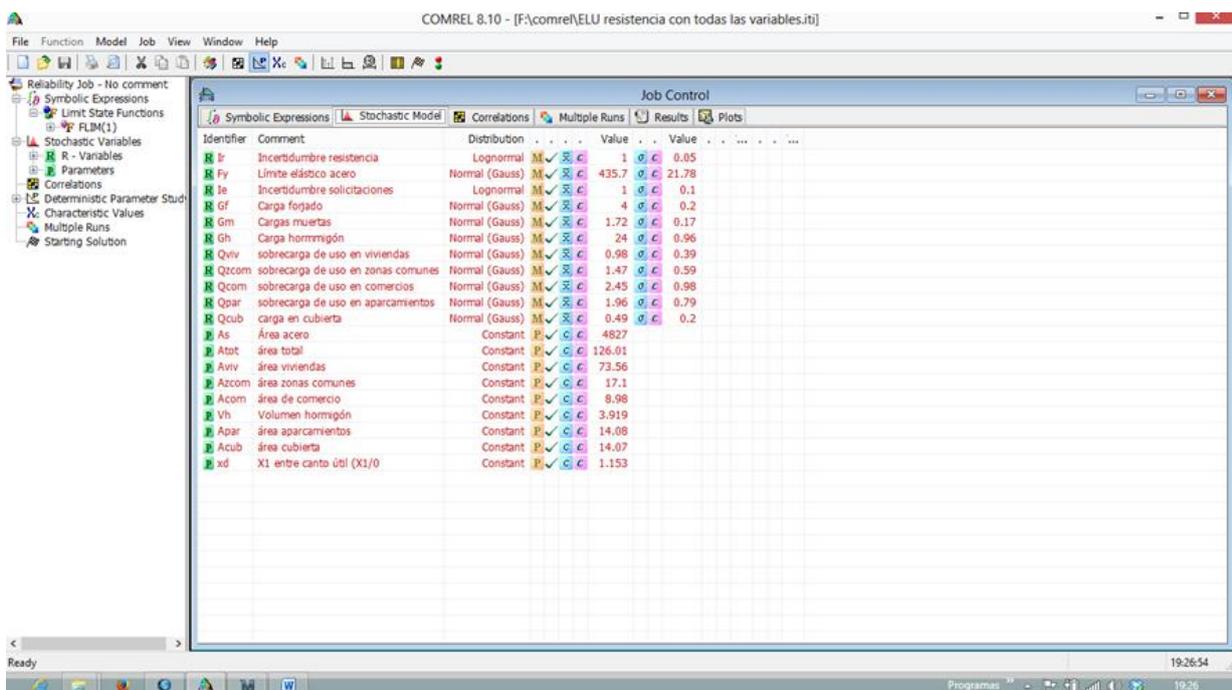
Comprobación con comrel

Seguimos los mismos pasos que en el E.L.U. de equilibrio. Introducimos la función límite.



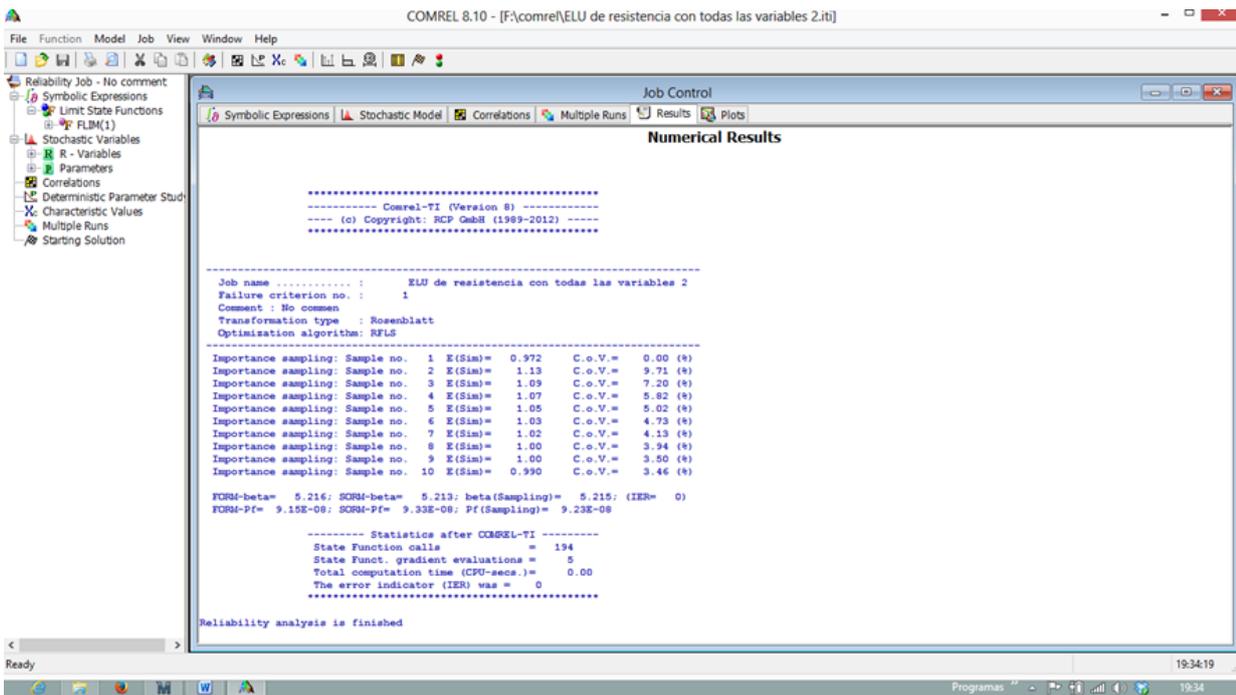
Ventana de “symbolic expresión” con la función límite del E.L.U. de resistencia

Describimos las variables aleatorias y los valores deterministas que interbienen en nuestra ecuación.



Ventana de “Stochastic model” con las variables aleatorias y constantes definidas

Por último calculamos la fiabilidad del modelo.



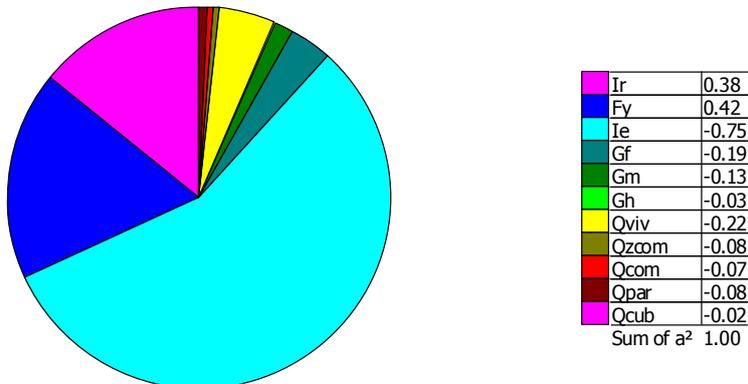
Resultados de la E.L.U. de resistencia

Volvemos a tener 3 valores de la fiabilidad. Esta vez son:

- Empleando el método FORM, $\beta = 5,545$
- Empleando el método SORM, $\beta = 5,542$
- Empleando el método Monte Carlo, $\beta = 5,544$

Esta vez, los resultados del índice de fiabilidad están más próximos. Aproximando, el resultado del índice de fiabilidad es $\beta = 5,5$. Vuelve a dar un índice por encima de lo necesario, puesto que el mínimo por el CTE vuelve a ser $\beta = 3,8$. Observemos ahora importancia relativa que tiene cada variable aleatoria en este E.L.U. de resistencia:

Representative Alphas of Variables FLIM(1), ELU de resistencia con todas las variables 2.pti



Esta vez, la influencia de las variables está más repartida. En este caso, la variable aleatoria más influyente es el modelo de las solicitudes, seguido de la resistencia del acero y del

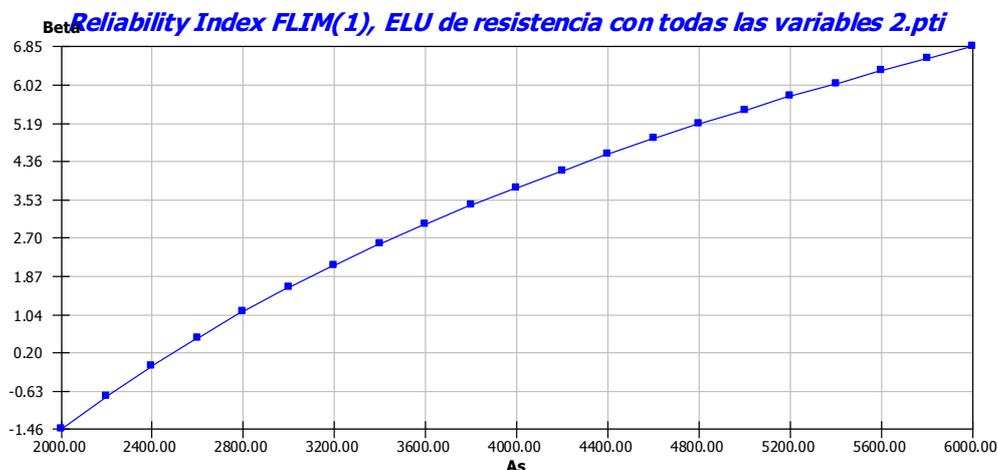
modelo de la resistencia. En este caso, lo más aconsejable sería tener un modelo de las fuerzas solicitantes más certero.

Como el resultado de la fiabilidad es muy elevado, vamos estudiar la variación del índice β en función del área de acero activa de la zapata. En principio, nosotros le introducimos un valor del área de acero de $48,27 \text{ cm}^2$, y puesto que la fiabilidad era de $\beta = 5,2$, comprobaremos la influencia del área de acero entre los $20,00 \text{ cm}^2$ y los $60,00 \text{ cm}^2$, a intervalos de 2 cm^2 . Los resultados de esta prueba son los siguientes:

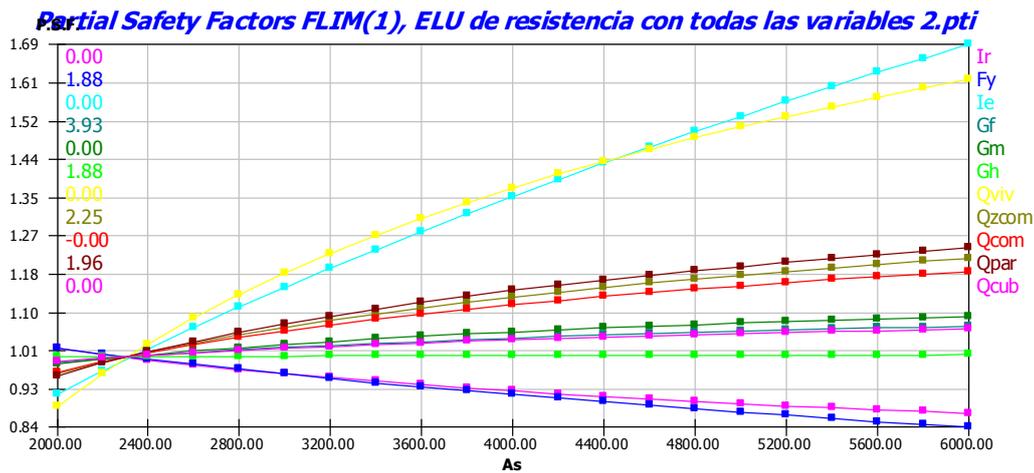
----- Parameter study for Parameter: As -----				
Valor del área,	índice β ,	Prob. fallo,	sens. Param.,	Elas. Param
2000.	-1.086	0.86	0.3768E-02	6.915
2200.	-0.3676	0.64	0.3427E-02	20.31
2400.	0.2867	0.39	0.3142E-02	26.48
2600.	0.8900	0.19	0.2901E-02	8.488
2800.	1.449	7.37E-02	0.2693E-02	5.210
3000.	1.968	2.45E-02	0.2513E-02	3.831
3200.	2.455	7.05E-03	0.2355E-02	3.071
3400.	2.911	1.80E-03	0.2215E-02	2.588
3600.	3.341	4.17E-04	0.2091E-02	2.253
3800.	3.748	8.92E-05	0.1980E-02	2.007
4000.	4.133	1.79E-05	0.1879E-02	1.819
4200.	4.500	3.41E-06	0.1789E-02	1.669
4400.	4.849	6.22E-07	0.1706E-02	1.548
4600.	5.182	1.10E-07	0.1630E-02	1.447
4800.	5.501	1.89E-08	0.1561E-02	1.362
5000.	5.806	3.20E-09	0.1497E-02	1.289
5200.	6.100	5.34E-10	0.1438E-02	1.226
5400.	6.381	8.81E-11	0.1383E-02	1.170
5600.	6.653	1.45E-11	0.1333E-02	1.121
5800.	6.914	2.36E-12	0.1285E-02	1.078
6000.	7.167	3.87E-13	0.1241E-02	1.039

Observamos que para un área de acero aproximada de $38,00 \text{ cm}^2$, el índice de fiabilidad β es igual al requerido por la norma, 3,8. Además, en este estudio del parámetro del área de acero, tenemos un abanico mayor de datos para observar. Por ejemplo, si el área de acero es menor a $23,00 \text{ cm}^2$, el coeficiente β es negativo. Esto significa que la probabilidad de fallo supero el umbral del 50 % y entonces es más probable que el sistema falle a que resista.

Veamos ahora la gráfica del índice de fiabilidad en función del área de acero:



Por último, es interesante echarle un ojo a la gráfica de los coeficientes parciales:



El funcionamiento de los coeficientes sigue el mismo patrón que en el caso anterior. En este caso, con objetivo de comparar los valores de los coeficientes parciales calibrados con los que nos ofrece el código técnico para el uso del método de los coeficientes parciales, observaremos el valor de los coeficientes de $\beta = 5,5$ puesto que son los obtenidos siguiendo las necesidades del E.L.U. de resistencia mediante el método de los coeficientes parciales. Observaremos que para el caso de la resistencia del acero, el coeficiente es aproximadamente 0,89 (el coeficiente de reducción del límite elástico del acero es 1,15; y $1/1,15 = 0,87 \approx 0,89$). En el caso de la sobrecarga de uso en vivienda es 1,47 (muy próximo a 1,5). Observamos que para el resto de las sobrecargas, el coeficiente es mucho menor al de la sobrecarga en viviendas. Eso se debe a que la sobrecarga en viviendas es la sobrecarga más relevante. En el caso de la carga del forjado encontramos una ligera diferencia con los coeficientes del DB-SE. Aquí, el coeficiente parcial es aproximadamente 1,08; mientras que la norma nos dice que tomemos un coeficiente de mayoración de 1,35.

Otro detalle que vemos es que hay un punto en el que las rectas de los diversos coeficientes se cruzan. Este punto es donde $\beta = 0$, por lo que la fiabilidad como medida de seguridad ya no existe, por lo tanto, los coeficientes de seguridad se igualan a cero. Si seguimos descendiendo en el índice de fiabilidad, llegamos a los valores negativos. En este punto se invierten los coeficientes de seguridad: los que minoran la resistencia pasan a mayorarla y los que mayoran las cargas pasan a minorarlas. Esto puede parecer una paradoja, pero lo que realmente pasa en este punto es que pasamos de buscar seguridad a buscar fallo. Obviamente, este espacio queda para nosotros en lo anecdótico, pues nunca vamos a buscar un índice de fiabilidad negativo en la construcción.

Conclusiones

Como hemos visto a lo largo de este trabajo, la conclusión más importante que podemos sacar es que los métodos probabilísticos son una alternativa real y un paso más en la fiabilidad que nos ofrecen los métodos de cálculo. Su aplicación es perfectamente plausible en elementos significativos de la edificación que requieran un cuidado especial o un estudio mayor.

Los resultados de nuestra comparación han aportado datos positivos en favor de la metodología probabilista explícita, pues hemos obtenido una fiabilidad de $\beta = 5,9$ en el caso

del E.L.U. de equilibrio, y una fiabilidad de $\beta = 5,5$ para el E.L.U. de resistencia de la zapata en favor de la necesaria por norma en ambos casos de $\beta = 3,8$. Esto apunta a una fiabilidad generalmente exagerada para la cimentación, pues aunque la diferencia en el valor β es de 2, esto implica una variación de la probabilidad de fallo de 10^{-4} a 10^{-8} . Estos resultados nos permiten realizar unas reducciones significativas en las dimensiones de nuestra zapata.

Desde un punto de vista más práctico, la decisión de realizar la zapata con menores dimensiones basándonos en el análisis de fiabilidad, supondría dejar de lado el método de los coeficientes parciales, un método que ha sido legitimado por los “buenos resultados”. Por ser los métodos probabilistas métodos poco empleados siempre nos surgirán grandes dudas acerca de cuan veraz es la fiabilidad. Durante su aplicación práctica, nos han surgido dudas como la determinación de parámetros de gran importancia como es el caso del terreno, que desde luego pueden aportar grandes fallos en los cálculos.

Este desconocimiento de las variables no es mucho peor que el desconocimiento y misticismo que existe en torno a los valores característicos y los coeficientes del método de los coeficientes parciales. Por tanto, la aplicación de uno u otro método se guía en gran parte por la seguridad que depositamos en nosotros mismos y en nuestro conocimiento de las estructuras.

Un problema importante de los métodos probabilistas que no vimos en profundidad radica en la correlación de los elementos de la estructura. Nuestro problema era sencillo, calcular la fiabilidad de un elemento aislado. Por el contrario, en una edificación encontramos elementos tanto aislados como vinculados, y el mal funcionamiento de uno de ellos puede (o no) ser contrarrestado por el buen funcionamiento de los otro elementos. Estos problemas son más complejos, pues precisaría un mayor estudio de la correlación de los sistemas estructurales, consecuencias para la totalidad de la estructura...

Esta metodología es, por tanto, una herramienta que todavía está en desarrollo pero que, con el avance de la velocidad computacional de los ordenadores y el estudio de las variables intervinientes en la edificación, puede llegar a convertirse fácilmente en el siguiente escalafón del cálculo estructural. Sería de gran interés el estudio pormenorizado de las variables que intervienen en el problema, como por ejemplo la resistencia del terreno y las sobrecargas por viento.

7. Bibliografía

Normativa

- [1] UNE-EN_1990 (2003) *Bases de cálculo de estructuras.*
- [2] ISO 2394 (1999) *Principios generales de la fiabilidad en estructuras.*
- [3] DB SE (2009) *Documento básico de seguridad estructural.*
- [4] DB SE-AE (2009) *Documento básico de seguridad estructural-Acciones en la edificación.*
- [5] DB SE-C (2007) *Documento básico de seguridad estructural en los cimientos.*
- [6] EHE-08 (2008) *Instrucción de hormigón estructural.*

Publicaciones

- [7] Dr. M.H. Faber (2009) *Risk and safety in engineering.*
- [8] Roberto Laranja, Jorge de Brito (2003) *Verificação probabilística da segurança das estruturas.*
- [9] B. K. Low, K. K. Phoon (2002) *Practical First-order reliability computations using spreadsheet.*
- [10] R. J. Yang, L. Gu, C. H. Tho (2004) *Reliability-Based Multidisciplinary design optimization of vehicle structures.*
- [11] Juan José Clemente Tirado (2003) *Introducción a la evaluación de estructuras existentes aplicando técnicas de fiabilidad.*
- [12] Nelson Aoki (2011) *Dogma do factor de segurança.*
- [13] Angel Arteaga (2007) *Tendencias en la fiabilidad estructural.*
- [14] Leila A. de castro Motta, Maximiliano Malite (2002) *Análise da segurança no projecto de estruturas: Método dos estados limites.*
- [15] Luis Celorrio Barragué (2009) *Metodología eficiente de optimización estructural basada en fiabilidad.*
- [16] António Abel Ribeiro Henriques (1998) *Aplicação de novos conceitos de segurança no dimensionamento do betao estructural.*
- [17] Davide Sirtoli (PFC, 2013) *Regolazione e affidabilità nella valutazione dei modelli nell'ingegneria strutturale- caso di studio di una trave metallica.*
- [18] F. Xavier Sánchez Pérez (PFC, 2010) *State of the art I anàlisi de la fiabilitat estructural a l'edificació.*
- [19] Joint committee on Structural Safety (2000) *Probabilistic Model Code.*
- [20] (1998) *Manual AASHTO sobre investigaciones subsuperficiales.*
- [21] Emilio Mosquera Rey, Juan B. Pérez Valcárcel (2014) *Análisis de las variables para el estudio probabilístico en estructuras de edificaciones construidas.*
- [22] Emilio R. Mosquera Rey (2014) *Métodos de cálculo estructural y metodología probabilista.*
- [23] Emilio R. Mosquera Rey (2013) *Verificación de la seguridad en las edificaciones con estructuras de hormigón armado mediante métodos probabilistas en forma explícita.*

Programas

COMREL, versión 8.10 RCP consulting software

CYPE 2013, Software para arquitectura, ingeniería y edificación.

Anejo A. Informe del dimensionado de la zapata mediante el programa CYPE.

Referencia: P16		
Dimensiones: 240 x 240 x 60		
Armados: Xi:Ø25c/28 Yi:Ø25c/28		
Comprobación	Valores	Estado
Tensiones sobre el terreno: <i>Criterio de CYPE Ingenieros</i>		
-Tensión media en situaciones persistentes:	Máximo: 0.35 MPa Calculado: 0.328537 MPa	Cumple
-Tensión máxima en situaciones persistentes:	Máximo: 0.437428 MPa Calculado: 0.33197 MPa	Cumple
Vuelco de la zapata: <i>Si el % de reserva de seguridad es mayor que cero, quiere decir que los coeficientes de seguridad al vuelco son mayores que los valores estrictos exigidos para todas las combinaciones de equilibrio.</i>		
-En dirección X:	Reserva seguridad: 45664.9 %	Cumple
-En dirección Y:	Reserva seguridad: 32976.1 %	Cumple
Flexión en la zapata:		
-En dirección X:	Momento: 663.28 kN·m	Cumple
-En dirección Y:	Momento: 663.39 kN·m	Cumple
Cortante en la zapata:		
-En dirección X:	Cortante: 561.13 kN	Cumple
-En dirección Y:	Cortante: 561.23 kN	Cumple
Compresión oblicua en la zapata:		
-Situaciones persistentes: <i>Criterio de CYPE Ingenieros</i>	Máximo: 5000 kN/m ² Calculado: 3866.5 kN/m ²	Cumple
Canto mínimo: <i>Artículo 58.8.1 de la norma EHE-08</i>		
	Mínimo: 25 cm Calculado: 60 cm	Cumple
Espacio para anclar arranques en cimentación:		
-P16:	Mínimo: 27 cm Calculado: 50 cm	Cumple
Cuantía geométrica mínima: <i>Artículo 42.3.5 de la norma EHE-08</i>		
-Armado inferior dirección X:	Mínimo: 0.001 Calculado: 0.003	Cumple
-Armado inferior dirección Y:	Calculado: 0.003	Cumple
Cuantía mínima necesaria por flexión: <i>Artículo 42.3.2 de la norma EHE-08</i>		
-Armado inferior dirección X:	Mínimo: 0.002 Calculado: 0.003	Cumple
-Armado inferior dirección Y:	Calculado: 0.003	Cumple
Diámetro mínimo de las barras:		
-Parrilla inferior: <i>Recomendación del Artículo 58.8.2 (norma EHE-08)</i>	Mínimo: 12 mm Calculado: 25 mm	Cumple
Separación máxima entre barras: <i>Artículo 58.8.2 de la norma EHE-08</i>		
-Armado inferior dirección X:	Máximo: 30 cm Calculado: 28 cm	Cumple
-Armado inferior dirección Y:	Calculado: 28 cm	Cumple

Separación mínima entre barras: <i>Recomendación del libro "Cálculo de estructuras de cimentación", J. Calavera INTEMAC, 1991</i>	Mínimo: 10 cm Calculado: 28 cm Calculado: 28 cm	Cumple Cumple
Longitud de anclaje: <i>Criterio del libro "Cálculo de estructuras de cimentación", J. Calavera. Ed. INTEMAC, 1991</i>	Mínimo: 77 cm Calculado: 77 cm Calculado: 77 cm Calculado: 77 cm Calculado: 77 cm	Cumple Cumple Cumple Cumple
Longitud mínima de las patillas: -Armado inf. dirección X hacia der: -Armado inf. dirección X hacia izq: -Armado inf. dirección Y hacia arriba: -Armado inf. dirección Y hacia abajo:	Mínimo: 25 cm Calculado: 25 cm Calculado: 25 cm Calculado: 25 cm Calculado: 25 cm	Cumple Cumple Cumple Cumple
Se cumplen todas las comprobaciones		