



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Escola Politécnica Superior. Ferrol

TRABAJO FIN DE GRADO



GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

Título:
**INTEGRACIÓN MEDIANTE FILTRO DE KALMAN DE
SENSORES INERCIALES Y GPS PARA LA ESTIMACIÓN DE
LA POSICIÓN DE UN VEHÍCULO**

Autor:
ALEJANDRO VÁZQUEZ FRAGA

Fecha:
SEPTIEMBRE 2014

AGRADECIMIENTOS:

A **Emilio Sanjurjo Maroño** y a **Miguel Ángel Naya Villaverde**, por la labor personal de dirección de este proyecto y su implicación, ayudando con su experiencia en la elaboración y desarrollo del mismo.

Al **Laboratorio de Ingeniería Mecánica** de la Universidade da Coruña, por haberme permitido realizar el proyecto en sus instalaciones, y brindarme la oportunidad de trabajar con un grupo de profesionales.

A todos los **componentes del Laboratorio de Ingeniería Mecánica**, por el apoyo brindado.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos y motivación	2
2. Estado del arte	5
2.1. Navegación: Sistemas de coordenadas, cinemática y la Tierra	11
2.1.1. Sistemas de Coordenadas	11
2.1.2. Cinemática	17
2.1.3. Modelo gravimétrico y de la superficie terrestre	25
2.1.4. Transformaciones de coordenadas	38
2.2. Navegación inercial	39
2.2.1. Ecuaciones de navegación	40
2.2.2. Precisión de las ecuaciones	43
2.2.3. Inicialización y alineamiento	46
2.2.4. Errores del INS	47
2.3. Sistemas de navegación por satélite	48
2.3.1. Fundamentos de la navegación por satélite	49
2.3.2. GPS (Global Positioning System)	52
2.4. El filtro de Kalman	56
2.4.1. Introducción	56
2.4.2. Algoritmos y modelos	59
2.4.3. Implementación práctica	67
3. Integración INS/GNSS	70
3.1. Arquitecturas de integración	71
3.1.1. Corrección de la solución de navegación inercial	71
3.1.2. Integración Loosely Coupled	73
3.2. Selección de los estados y del modelo de sistema	75
3.2.1. Selección de los estados	75
3.2.2. Modelo del sistema	77
3.3. Modelo de mediciones	82

4. Implementación experimental y resultados	84
4.1. Hardware	84
4.1.1. Sensores inerciales	85
4.1.2. GPS	87
4.1.3. Arduino Leonardo	90
4.1.4. Integración de los dispositivos	93
4.2. Software	96
4.2.1. Protocolo I ² c	96
4.2.2. Arduino	98
4.2.3. Matlab	99
4.3. Pruebas y resultados	100
5. Conclusiones	110
6. Bibliografía	113

Índice de figuras.

Figura 1. Sistema de coordenadas ortogonal.	13
Figura 2. Ejes del sistema ECI.....	14
Figura 3. Ejes del sistema ECEF.....	15
Figura 4. Ejes del sistema ENU.....	16
Figura 5. Sistema de coordenadas del cuerpo.	17
Figura 6. Rotaciones de los ángulos de Euler.....	19
Figura 7. Rotación correspondiente al vector velocidad angular.	22
Figura 8. Posición del origen de un sistema α con respecto a un sistema β , expresado en el sistema γ	23
Figura 9. Sección del elipsoide que representa la superficie terrestre.	27
Figura 10. Representación de la Latitud geodésica.	29
Figura 11. Representación de la longitud.	29
Figura 12. Altitud y Latitud de un cuerpo b	31
Figura 13. Rotación terrestre en los sistemas ECI y ECEF.	33
Figura 14. Fuerzas en un sistema masa-muelle.....	35
Figura 15. Elipsoide, Geoide y Terreno.	37
Figura 16. Esquema de un procesador de navegación inercial.....	40
Figura 17. Paso de integración realizado por un procesador de navegación inercial.	43
Figura 18. Movimiento de conicidad.	45
Figura 19. Movimiento de remo.	46
Figura 20. Arquitectura de un GNSS.	50
Figura 21. Solución de posicionamiento dependiendo del número de señales.....	51
Figura 22. Órbitas de los satélites GPS.	54
Figura 23. Algoritmo y fases del filtro de Kalman.....	63
Figura 24. Corrección en lazo abierto.	72
Figura 25. Corrección en lazo cerrado.	73
Figura 26. Integración Loosely Coupled.....	75
Figura 27. Invensense MPU-9150.	86
Figura 28. Adafruit Ultimate GPS Breakout v3.	88
Figura 29. Representación de la SoG y el CoG en el plano xy del ENU local.	90
Figura 30. Arduino Leonardo rev3.	93
Figura 31. Cableado del conjunto de sensores y el controlador.	93
Figura 32. Vista general del conjunto de hardware.....	94
Figura 33. Vista frontal del conjunto de hardware.	95

<i>Figura 34. Vista superior del conjunto de hardware sin carcasa.</i>	<i>95</i>
<i>Figura 35. Comparación de la orientación y el CoG.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 36. Solución de posición de los tres sistemas de navegación.</i>	<i>103</i>
<i>Figura 37. Solución de velocidad del sistema integrado y el GPS.</i>	<i>104</i>
<i>Figura 38. Bias estimado en los giróscopos.</i>	<i>105</i>
<i>Figura 39. Bias estimado en los acelerómetros.</i>	<i>106</i>
<i>Figura 40. Términos de la matriz P correspondientes a la orientación.....</i>	<i>107</i>
<i>Figura 41. Términos de la matriz P correspondientes a la velocidad.....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 42. Términos de la matriz P correspondientes a la posición.....</i>	<i>109</i>



Índice de tablas.

<i>Tabla 1. Generaciones de satélites GPS.</i>	<i>53</i>
<i>Tabla 2. Propiedades de las señales de GPS.</i>	<i>55</i>
<i>Tabla 3. Sentencia GPRMC.</i>	<i>89</i>
<i>Tabla 4. Incertidumbre sobre las mediciones del sistema integrado GPS/INS.....</i>	<i>109</i>

1. Introducción

En los últimos años, dentro del campo de la automoción se han introducido numerosos sistemas electrónicos y de control, como son el Sistema Electrónico de Estabilidad (ESP) o el Sistema de Frenado Antibloqueo (ABS). Con estos sistemas, los vehículos han ido aumentando su nivel de seguridad. En el desarrollo de estos sistemas, el correcto conocimiento de la dinámica del vehículo es de gran importancia. Uno de los parámetros de importancia en este desarrollo es el posicionamiento, que puede tener un gran número de aplicaciones. Los sistemas de navegación, de seguridad, o los simuladores utilizados para evaluar de forma computacional el comportamiento de un vehículo son ejemplos de posibles aplicaciones del posicionamiento de vehículos.

La localización de un sistema (en este proyecto, un vehículo) en el espacio no es una tarea simple, ya que se desconoce cómo es el espacio en el que se mueve y la interacción que pueda tener el sistema con el mismo. Así, se pueden emplear distintos sensores con el fin de averiguar la localización del sistema, entre los que se encuentran los sensores inerciales o los sistemas de navegación por satélite.

1.1. Antecedentes

Con el fin de caracterizar de la forma más precisa posible el comportamiento de un vehículo, se puede dotar al mismo de diversos sensores. Uno de ellos es un receptor GPS situado en la zona central del vehículo, que calcula a partir de las señales recibidas de distintos satélites la posición del vehículo. Un receptor de GPS (*Global Positioning System*) de alta precisión es un sensor con un coste elevado, debido a que este se incrementa con el aumento de la precisión del sensor. Esta precisión se ve deteriorada cuando se utiliza el sensor en zonas que no estén completamente abiertas al cielo, como zonas urbanas o forestales, donde la recepción de las señales de los distintos satélites es más complicada debido al entorno. Además de esto, con este sistema de posicionamiento, en ningún momento se conoce la orientación del

sistema, dado que no es posible el cálculo de la misma a partir de un único receptor GPS. Existen sistemas multiantena, con hasta 3 antenas, que sí pueden calcular la orientación del sistema, pero su coste se eleva aún más.

Actualmente, en vehículos comunes se utilizan receptores GPS de baja precisión, fácilmente integrables en un vehículo, pero que muestran notables deficiencias. Estos se ayudan con mapas de carreteras para así poder situarse aproximadamente. El posicionamiento obtenido con estos dista de ser el óptimo, lo que hace imposible su utilización para aplicaciones que requieran una precisión elevada.

Otros sensores que son susceptibles de ser implementados en un vehículo son los sensores inerciales. Mediante la integración de sus mediciones, puede obtenerse la posición y orientación del vehículo. Estos sensores se emplean actualmente en campos como la aviación o la navegación marítima. Un grupo de sensores inerciales con alta precisión tiene un coste muy elevado, y un tamaño que lo hace difícilmente integrable en un vehículo de pequeño tamaño, por lo que no suelen ser utilizados en automoción. En cambio, existen sensores inerciales de pequeño tamaño como los integrados en dispositivos móviles, como teléfonos o tablets, que no son capaces de proporcionar un posicionamiento adecuado.

La complementación de las ventajas de los sistemas GPS con los sensores inerciales, ambos de baja precisión, y por lo tanto bajo coste, es un campo que se encuentra actualmente en desarrollo, debido al gran número de posibilidades que este ofrece.

1.2. Objetivos y motivación

El objetivo de este proyecto es el desarrollo y posterior caracterización de un sistema de posicionamiento para un vehículo a partir de un sensor GPS y unos sensores inerciales de bajo coste, que alcance la precisión de un sistema de posicionamiento GPS de un coste muy superior, solventar los problemas de este a la hora de posicionarse en entornos no favorables, y que además de esto pueda calcular la orientación del sistema, aportando así un mayor número de datos que puedan ser utilizados por otros sistemas como son los de ayuda a la conducción, que aumentan

la seguridad del vehículo y de sus ocupantes. Este sistema ha de ser evaluable en tiempo real, y susceptible de ser implementado en cualquier plataforma a bordo.

Para realizar la integración de estos sensores, que proporcionan medidas de distintas magnitudes y con distintas frecuencias, es necesaria la utilización de alguna herramienta. El filtro de Kalman es una de las herramientas más utilizadas para ello, y aunque se le llame “filtro”, se trata realmente de un algoritmo de estimación que utiliza el conocimiento de distintas propiedades del sistema, tanto determinísticas como estadísticas, y de las mediciones de distintos sensores para obtener estimaciones óptimas a partir de la información disponible. Aun siendo un estimador óptimo, el filtro de Kalman mantiene unas incertidumbres en sus estimaciones y tiene en cuenta la correlación entre los errores en las estimaciones de los distintos parámetros. En este trabajo se empleará el filtro de Kalman para estimar distintos estados de nuestro sistema, que combina información de un modelo matemático con la proporcionada por los sensores.

El proyecto está estructurado de manera que los dos primeros capítulos a partir de esta introducción son explicaciones teóricas sobre los distintos elementos necesarios para realizar el trabajo.

En el segundo capítulo de este documento se hablará del estado del arte, explicando los fundamentos teóricos en los que se basa el desarrollo del proyecto. Aquí se explica todo lo referente a la navegación, partiendo de los sistemas de coordenadas en los cuales se realiza, pasando por la cinemática, mostrando el modelo gravimétrico empleado y también el modelo de la superficie terrestre. Además de esto se hablará de los dos tipos de navegación que deberemos utilizar a lo largo del proyecto, siendo estos la navegación inercial, y la navegación GPS. En lo referente a la primera de estas, se realizará un desarrollo de las ecuaciones utilizadas para la navegación inercial, realizando una breve explicación de la precisión alcanzada por las mismas, y realizando una introducción a la inicialización y alineamiento del sistema al comienzo de la simulación. En lo referente a la navegación GPS, se lleva a cabo una explicación de los fundamentos de la misma, que sirve para conocer el funcionamiento de este sistema. Tras tratar los sistemas de navegación se explica lo

que es el filtro de Kalman, los distintos algoritmos y modelos de implementación existentes, y se detallan los problemas que surgen a la hora de su implementación en este caso concreto.

En el tercer capítulo se hablará de las distintas arquitecturas existentes para la integración de la información de los sensores GPS e inerciales. Tras esto se comentará la selección del modelo del sistema, de los estados del filtro de Kalman, y del modelo de mediciones, que a posteriori serán implementados experimentalmente.

En el cuarto capítulo se encuentra la parte experimental del proyecto, incluyendo en esta la creación de una base donde incluir los sensores y el microprocesador que extrae los datos de los mismos utilizando el protocolo I²c, para posteriormente ser enviados vía serial hasta un ordenador, donde se realizará la programación tanto del microprocesador como del filtro de Kalman. Además de esto, en este capítulo se mostrarán las distintas pruebas realizadas para la evaluación tanto del algoritmo empleado como de los sensores, mostrando los resultados de las mismas.

Por último, el capítulo quinto se dedica a las conclusiones alcanzadas tras la realización del proyecto y a las futuras líneas de trabajo que se pueden emprender a partir de la elaboración de este proyecto.

2. Estado del arte

Se define técnica de navegación como un método para determinar la posición y la velocidad, bien sea manual o automáticamente. Un sistema de navegación, conocido en ocasiones como ayuda a la navegación, es un dispositivo que determina la posición y la velocidad de forma automática. Algunos sistemas de navegación proporcionan también algunas o todas las orientaciones, la aceleración y la velocidad de rotación. Un sistema de navegación puede ser autónomo, conteniendo todo lo necesario en la plataforma del vehículo en el que se implemente, o puede requerir una infraestructura externa como los sistemas de navegación por señal de radio. La salida de un sistema o técnica de navegación es la solución de navegación. Un sensor de navegación es un dispositivo que se utiliza para medir una magnitud a partir de la cual el sistema de navegación calcula su solución de navegación. Ejemplo de estos sensores de navegación son acelerómetros, giróscopos y receptores de radio.

La solución de navegación representa el sistema de coordenadas del cuerpo sobre el cual se realiza la navegación (ej. avión, barco, coche, o persona) respecto a un sistema de coordenadas de referencia, siendo el más utilizado como referencia la Tierra. Las componentes de los vectores que componen la solución de navegación pueden ser calculadas en un tercer sistema de referencia (ej. East North Up). Esto requiere una definición detallada de la aceleración y la velocidad, ya que la utilización de distintos sistemas puede introducir errores a la hora de interpretar las magnitudes utilizadas.

Los sistemas de navegación inercial (INS) están compuestos por un grupo de sensores inerciales, conocido como IMU (Inertial Measurement Unit) y un procesador de navegación. Los sensores habituales que encontramos en las IMU son tres acelerómetros situados en ejes ortogonales y tres giróscopos alineados con los ejes de los acelerómetros. El procesador de navegación integra los valores entregados por la IMU para obtener así la posición, velocidad y orientación. Estos sistemas fueron desarrollados inicialmente para los misiles de la U.S. Army por

Robert H. Goddard, que comenzó los test de esta técnica de navegación en 1915, utilizando para ello solamente giróscopos rudimentarios.

Sus experimentos fueron de tal interés que el ingeniero alemán Wernher von Braun decidió proseguir con ellos en 1930 para la elaboración de un sistema más complejo. A finales de 1942 se concluye la investigación, dando lugar a la fabricación del misil V-2, el primer misil balístico de largo alcance de la historia. Este utilizaba en su sistema de navegación dos giróscopos combinados con un acelerómetro de un solo eje, que eran utilizados por una computadora analógica para ajustar el azimut del misil durante el vuelo. Las señales de esta computadora eran utilizadas para manejar 4 timones de grafito situados en la parte posterior del misil. Este fue utilizado por primera vez en la Segunda Guerra Mundial con éxito.

Tras la Segunda Guerra Mundial, en 1945 Wernher von Braun y 500 de los científicos que habían desarrollado el V-2 y sobrevivido a la guerra, se trasladan a Estados Unidos, donde trabajan en los programas de desarrollo de misiles de la U.S. Army.

En 1950, el gobierno americano, con la intención de independizarse de los alemanes en el desarrollo de este tipo de sistemas, elige al M.I.T. Instrumentation Laboratory para desarrollar su propia tecnología. Este laboratorio desarrolló sin duda los avances más importantes en la navegación inercial, que los llevaron a crear sistemas de guiado de misiles lanzados tanto desde tierra como desde el mar. En el programa de desarrollo de estos tomó parte el ingeniero Jim Fletcher, que junto a otros desarrolló el misil Atlas, un misil balístico de largo alcance que comenzó a ser fabricado en 1954. El sistema de guiado del Atlas era una combinación de un sistema a bordo que iba montado en el misil, y un sistema de referenciación terrestre que servía para determinar la posición del mismo.

Los años 1960 trajeron consigo la Era Espacial, que acarreó importantes avances en lo que a la navegación inercial se refiere. Estos avances alcanzados en la navegación inercial se emplearon por primera vez en este campo en el programa Apollo, iniciado por los Estados Unidos con el objetivo de enviar a un hombre a la Luna, y volver

sano y salvo a la Tierra. Durante estos años los sistemas de navegación inercial comenzaron a implementarse también en aviación, tanto militar como comercial. El avance más importante de esta época fue el desarrollo de los sistemas de navegación autónomos, que a diferencia de los implementados anteriormente por el M.I.T. Instrumentation Laboratory, integraban en un solo dispositivo todos los sistemas necesarios para el funcionamiento del sistema de navegación. Esta innovación se implementó rápidamente en el campo militar, donde todavía prevalece a día de hoy. Mientras tanto, en el campo espacial, se utiliza una combinación de distintos sistemas de navegación.

Tras esto, en el ámbito militar, los miembros del M.I.T. Instrumentation Laboratory Richard Battin y J. Halcombe “Hal” Laning, Jr. sacan a la luz su desarrollo de un nuevo sistema de navegación inercial, el DIGS (Delta Inertial Guidance System), basado en la diferencia de posición del misil con respecto a una trayectoria preestablecida. Este había sido desarrollado bajo secreto desde 1952. Este sistema calculaba la velocidad ganada por el misil con respecto a la necesaria para mantener la trayectoria dada, corrigiendo la velocidad del mismo para adaptarse así a la trayectoria. El problema principal de este sistema era la baja capacidad computacional de las computadoras de la época, que hacía muy difícil su implementación. Estos problemas fueron solucionados con el desarrollo por parte de estos mismos del Q-System, que utilizaba la derivada parcial de la velocidad con respecto al vector posición con el mismo fin que el DIGS. Derivaciones de este último sistema son las utilizadas por los misiles guiados en la actualidad ([1], [2]).

A día de hoy los giróscopos y los acelerómetros están disponibles en un amplio rango de diseños con variaciones significativas en cuanto a coste, tamaño y precisión. Los de mayor precisión son utilizados en barcos, submarinos y transbordadores espaciales. Tras ellos se encuentran los INS utilizados en aplicaciones militares, que tienen una deriva en la posición de 1500m en la primera hora de navegación, y tienen un coste de alrededor de 100.000 €. Los sistemas utilizados en aeronaves ligeras, helicópteros y armamento guiado tienen una precisión dos órdenes de magnitud inferior a la de los anteriores, y suelen estar

integrados con otros sistemas de navegación, usualmente el GNSS (Global Navigation Satellite System). Los más baratos y menos precisos son los MEMS (Microelectromechanical Systems, de los cuales se hablará en el apartado de Hardware), que no son adecuados para la navegación inercial, pero suelen utilizarse para PDR (Pedestrian Dead Reckoning), consistente en la utilización de estos sensores para contar el número de pasos dados por un peatón, para así obtener la distancia recorrida por el mismo.

Paralelamente al desarrollo de la navegación inercial, en 1956 el físico Germano-Americano Friedwardt Winterberg propuso una teoría sobre la relatividad general, utilizando para ello relojes atómicos precisos situados en órbita en el interior de satélites artificiales. Posteriormente se utilizó esta teoría para determinar que los relojes situados en estos satélites artificiales serían vistos por los observadores en la Tierra con un adelanto de 38 microsegundos por día.

En 1957, la Unión Soviética lanzó al espacio el primer satélite creado por el hombre, el Sputnik I. Durante el lanzamiento de este, dos científicos americanos, William Guier y George Weiffenbach desde el Johns Hopkins's Applied Physics Laboratory (APL) decidieron monitorizar las transmisiones de radio del Sputnik I. Con esto descubrieron que podían monitorizar su posición mediante la observación del efecto Doppler de la señal que transmitía. Esto les llevó a pensar que, de igual modo, la posición de un observador podría establecerse mediante el estudio del efecto Doppler de una señal transmitida por un satélite cuya órbita estuviera determinada con precisión. Así, al año siguiente estos dos científicos junto a Frank McClure, subdirector del APL, comenzaron a investigar el problema inverso bajo la propuesta presentada por Roger L. Easton, considerado a día de hoy el inventor del GPS. De este estudio en 1964 el sistema TRANSIT, que estuvo operativo a partir de este mismo año, y disponible a partir de 1967 para su uso civil. Este sistema estaba compuesto de 4 a 7 satélites de baja altitud (1.100 km), cada uno de ellos emitiendo una señal con una frecuencia entre 150 y 400 MHz. No existía visibilidad de más de un satélite al mismo tiempo, y el tiempo medio entre actualizaciones de posición por los satélites era de 100 minutos. Este sistema, mediante la utilización del efecto

Doppler antes mencionado, conseguía solamente una señal de posicionamiento bidimensional por cada pasada de un satélite. La precisión del sistema en el posicionamiento de objetos estacionarios era de unos 25m, mientras que para objetos en movimiento esta precisión sufría una degradación importante. Al mismo tiempo que los Estados Unidos desarrollaban este sistema, Rusia desarrolló e hizo operativo un sistema muy similar conocido como Tsikada.

En esta misma década, y gracias al desarrollo de los relojes atómicos por parte del físico inglés Louis Essen en la década anterior, se diseñó una constelación de satélites, portando cada uno de ellos uno de estos relojes y estando todos ellos sincronizados con base a una referencia de tiempo.

El desarrollo de lo que hoy se conoce como GPS (Global Positioning System) comienza en 1973, cuando se fusionaron los programas llevados a cabo por la U.S. Army y la U.S. Airforce para el desarrollo de sistemas de geolocalización. Este programa fue llamado NAVSTAR, y realizó el primer lanzamiento de un satélite prototipo en 1978, alcanzando la capacidad operacional inicial (IOC) en 1993. En este punto, el coste del programa sin contar los equipamientos personales había sido de unos 5.000 millones de dólares americanos. Con la declaración en 1995 de que el sistema había alcanzado la capacidad operacional total (FOC), en 1996 se da de baja el sistema TRANSIT. Paralelamente al desarrollo del GPS por los Estados Unidos, Rusia lleva a cabo el desarrollo de GLONASS (Global Navigation Satellite System) con fines militares.

Actualmente la Unión Europea se encuentra desarrollando un tercer sistema de navegación por satélite llamado Galileo. Este es un sistema civil bajo control civil, a diferencia del GPS y el GLONASS, ya que en el caso del primero es gobernado por la U.S. Army que lo hace disponible para su uso civil, y en el caso del segundo es meramente para fines militares. Galileo tiene el fin de proporcionar mediciones de posición con una precisión de 1 metro, superior a la del sistema GPS que es de unos 20 metros actualmente. La frecuencia del sistema Galileo es de entre 1.145 MHz y 1.614 MHz. Además de esto la intención es que este sistema sirva también como sistema de rescate, proporcionando una comunicación con los centros de rescate, y

devolviendo una señal al usuario que comunique que la ayuda está en camino. Esta posibilidad de interactuar con el usuario que esté localizado por el sistema Galileo es una de las características principales que lo diferencian de otros sistemas como GPS o GLONASS. Las expectativas son que el sistema alcance la IOC (Initial Operating Capability) alrededor de 2015-2016, y la FOC (Full Operating Capability) en 2019.

En los últimos años, tanto el sistema GPS como el GLONASS están siguiendo un proceso de modernización, incluyendo nuevas señales para uso civil y una mejora de la precisión para todos los usuarios.

Con el desarrollo en paralelo tanto del INS como del GPS, surge la idea de integrar ambos con el fin de aunar las ventajas de ambos sistemas. Esta integración de los sensores se puede realizar mediante distintas herramientas como son las redes neuronales o el filtro de Kalman.

En 1960 Rudolf E. Kalman publica un artículo en el que se describía una solución recursiva para el problema de filtrado de datos discretos ([3]). Desde ese momento, debido en gran parte a los avances en las técnicas computacionales, el filtro de Kalman ha sido sujeto de investigaciones y aplicaciones extensivas, particularmente en el campo de la navegación autónoma o asistida.

El filtro de Kalman es un grupo de ecuaciones matemáticas que proporciona una forma computacionalmente eficiente de estimar el estado de un proceso, de una forma que minimiza la media de los errores al cuadrado. Este es una herramienta muy potente en muchos aspectos, ya que nos proporciona estimaciones de estados pasados, presentes e incluso estados futuros, aunque la naturaleza del sistema modelado sea desconocida.

Se atribuye a Stanley F. Schmidt el desarrollo de la primera implementación del filtro de Kalman ([4]). Esta se dio durante el desarrollo del programa Apolo de la NASA, ya mencionado anteriormente, en el cual se implementaba el filtro en el ordenador de navegación de la nave.

En la actualidad se utiliza la integración de sistemas GPS/INS mediante filtro de Kalman en numerosas aplicaciones como son: guiado de misiles, guiado y navegación de los transbordadores espaciales de la NASA o el control de la orientación y navegación de la Estación Espacial Internacional.

Tras el desarrollo de las herramientas mencionadas anteriormente, se produce un desarrollo simultáneo de la teoría, el análisis, los componentes y los subsistemas que componen los distintos dispositivos que forman parte de todas ellas. Este desarrollo hace que en la actualidad estos sistemas tengan una gran capacidad de operación.

2.1. Navegación: Sistemas de coordenadas, cinemática y la Tierra

En este apartado se proporcionan los fundamentos matemáticos para la explicación de los principios de los sistemas de navegación y de su integración. Se realiza una introducción al concepto de sistema de coordenadas y como pueden ser utilizados para representar un objeto, una referencia o unos ejes para resolver un problema. Se describen los sistemas principales utilizados en la navegación y se explican los métodos para representar la orientación de un sistema y como pasar de uno a otro. Además de esto se realizará la definición de posición, velocidad, aceleración y velocidad angular en un sistema de múltiples coordenadas en el cual el sistema de referencia o los ejes en los que se resuelve el problema pueden estar rotando. Tras esto se define el modelo de la superficie terrestre, la latitud, longitud y altitud. Posteriormente se realiza una explicación sobre la fuerza específica y se explica la diferencia entre gravedad y gravitación. Finalmente se muestran las ecuaciones utilizadas para pasar entre distintos sistemas de coordenadas.

2.1.1. Sistemas de Coordenadas

En la mayoría de problemas de mecánica, independientemente de su complejidad, el movimiento se modela con respecto a la Tierra, suponiendo que ésta es un sistema inercial, ignorando su rotación. En navegación esto no funciona debido a que la rotación de la tierra tiene una gran importancia a la hora de computar la solución de navegación como se mostrará más adelante. El problema de navegación utiliza

múltiples sistemas de coordenadas, y es por esto que establecer una correcta relación entre los mismos es básico para obtener unos correctos resultados. Como ejemplo, se puede introducir que el GPS mide la posición y la velocidad del usuario con respecto a una constelación de satélites, mientras que los sensores iniciales miden su movimiento con respecto a un sistema inercial. Sin embargo, aunque cada uno de estos sistemas realiza sus mediciones en un sistema de coordenadas distinto, el usuario quiere saber su posición con respecto a la Tierra, con lo que entra en acción un tercer sistema de coordenadas.

En cuanto a la notación, se utilizarán letras griegas para describir sistemas de coordenadas genéricos, y letras romanas para los sistemas específicos. Se utilizarán superíndices para indicar el sistema de referencia en el cual se expresan las magnitudes.

Un sistema de coordenadas puede tener dos funciones distintas. Este nos proporciona un origen y unos ejes en función de los cuales podemos describir el movimiento de uno o varios objetos. Además, este también define la posición y orientación de un objeto. Un sistema de coordenadas puede realizar ambas funciones al mismo tiempo. En un problema en el que dispongamos de dos sistemas de coordenadas, definir cuál es el de referencia y cual es del objeto es arbitrario, dado que es igualmente válido definir el movimiento de un sistema α con respecto a un sistema β que hacer lo inverso. Esto es un principio de relatividad: las leyes de la física son iguales para todos los observadores. En otras palabras, describir la posición de un objeto con respecto a la Tierra, contiene la misma información que describir la posición de la Tierra con respecto al objeto.

Un sistema de coordenadas ortogonal tiene seis grados de libertad, la posición del origen, \mathbf{o} , y la orientación de los ejes x , y y z . Estas deben ser expresadas con respecto a otro sistema de referencia para estar definidas. Todos los sistemas de coordenadas utilizados en el desarrollo de este proyecto son ortogonales y orientados a derechas. En la Figura 1 se muestra un sistema de coordenadas ortogonal como los utilizados en todo el desarrollo.

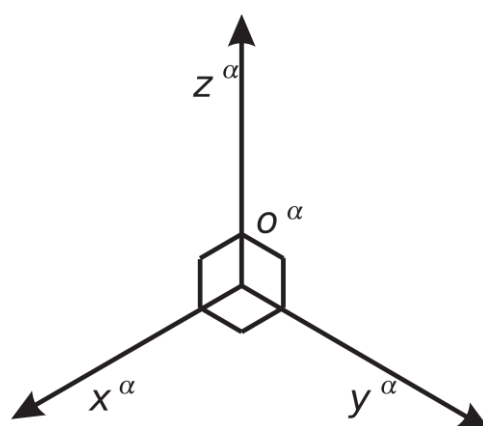


Figura 1. Sistema de coordenadas ortogonal.

En cualquier problema de navegación hay como mínimo dos sistemas de coordenadas: un sistema objeto y un sistema de referencia. El sistema objeto describe el cuerpo cuya posición y orientación que desea conocer, mientras que el sistema de referencia describe un cuerpo conocido, como por ejemplo la Tierra, relativo al cual se obtiene la posición y orientación del objeto ([5]).

Los sistemas de referencia principales utilizados en navegación son: ECI (Earth-Centered Inertial), ECEF (Earth-Centered Earth-fixed), sistema local de navegación y sistema del cuerpo (body).

Earth-Centered Inertial Frame (ECI)

En física se define un sistema de coordenadas inercial como aquel que no tiene aceleración ni rotación con respecto al resto del Universo. Esto no define un único sistema de coordenadas, sino que existen diversos sistemas que cumplen esta característica. En navegación, el sistema inercial que más comúnmente se utiliza es el ECI, que se designará por la letra i . Este está centrado nominalmente en el centro de masas de la Tierra, y orientado con respecto al eje de rotación de la Tierra y las estrellas. Este no es estrictamente un sistema inercial, ya que la Tierra experimenta una aceleración en su movimiento entorno al Sol, su eje de rotación se mueve lentamente, y la Galaxia rota. De todos modos, es una aproximación lo suficientemente precisa para poder utilizarla para navegación.

El eje z tiene la dirección del eje de rotación del planeta, discurriendo desde el centro de masas de la misma hacia el Polo Norte (real, no magnético). Los ejes x e y están dispuestos según el plano ecuatorial. Estos ejes no giran con la Tierra, pero el eje y se encuentra girado 90 grados con respecto al eje x en el sentido de la rotación terrestre. Aun sabiendo esto, el sistema está sin definir por completo. Para terminar de definir perfectamente su orientación, se determina que el eje x apunte en la dirección que tendría un vector que discurriese desde el centro de la Tierra hasta el Sol en el equinoccio de primavera. Esta es la misma dirección que la que va desde el centro de la Tierra hasta la intersección del plano ecuatorial de la Tierra con el plano medio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol (Plano de la eclíptica). En la Figura 2 se muestra una representación del sistema ECI, donde la rotación de la Tierra está representada con respecto al espacio.

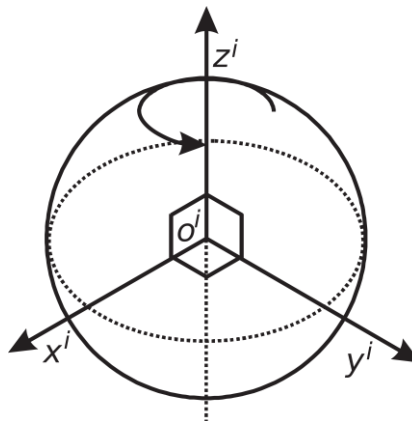


Figura 2. Ejes del sistema ECI.

Este sistema de coordenadas es de gran importancia en navegación debido a que los sensores inerciales realizan mediciones del movimiento con respecto a un sistema inercial genérico.

Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF)

El sistema ECEF es similar al ECI, excepto por el hecho de que todos los ejes se mantienen fijos con respecto a la Tierra. El sistema ECEF se designa mediante la letra e y tiene su origen en el centro del elipsoide que se utiliza como modelo para la superficie terrestre, que es aproximadamente el centro de masas.

En este sistema el eje z tiene la misma dirección y sentido que en el ECI. El eje x va desde el centro de masas hasta la intersección del ecuador con el CZM (Conventional Zero Meridian) también conocido como meridiano de Greenwich, que define la longitud 0 grados. El eje y , completando el sistema de ejes ortogonales, apunta a la intersección del ecuador con el meridiano 90° Este. En la Figura 3 se muestra una representación gráfica de este sistema.

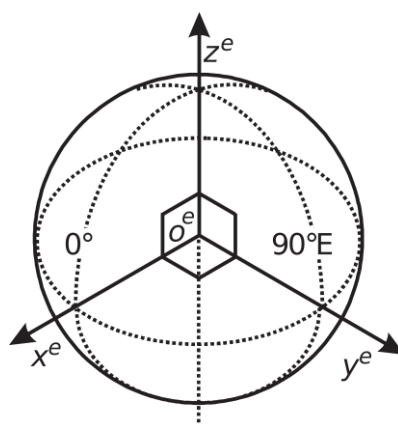


Figura 3. Ejes del sistema ECEF.

Este sistema de coordenadas tiene amplia importancia en navegación por dos causas principales. La primera de ellas es que el usuario pretende conocer su posición con respecto a la Tierra, por lo que se suele utilizar como sistema de referencia y como sistema de resolución. Además de esto, junto al ECI este permite utilizar la forma más simple de las ecuaciones de navegación.

Sistema de navegación Local

El sistema de navegación Local se designa por la letra n , y su origen está situado en el punto en el cual se solicita la solución de navegación (ej. sistema de navegación, usuario, centro de masas del vehículo que transporte el sistema de navegación).

En este caso realizaremos una implementación de este sistema de coordenadas un poco peculiar. En nuestro caso, el sistema de coordenadas de navegación Local se fijará al inicio de la simulación, lo que hace más sencillo el algoritmo de navegación inercial que se mostrará en capítulos posteriores.

Existen distintos sistemas de navegación local, dependiendo de la dirección en que tomemos los ejes, pero todos tendrán la misma función. En nuestro caso nos decantamos por la utilización de un sistema de navegación Local conocido como ENU (East North Up). En este sistema, el eje x apunta siempre en la dirección Este, mientras que el eje y apunta en todo momento en dirección norte. El plano formado por los ejes x e y es tangente en todo momento al elipsoide que define la superficie terrestre. El eje z de este sistema apunta en la dirección normal al elipsoide, hacia fuera de él. En la Figura 4 se muestra una representación de este sistema de coordenadas.

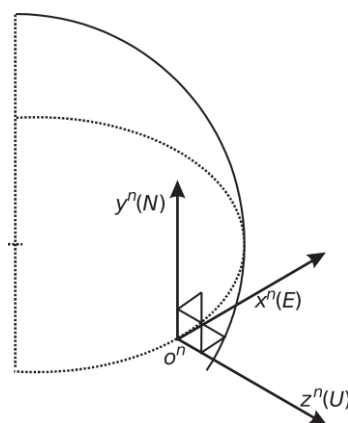


Figura 4. Ejes del sistema ENU.

Este sistema de coordenadas es de gran importancia debido a que el usuario quiere conocer su orientación con respecto a estas direcciones. Además supone un buen marco para la integración de la posición y de la velocidad, pero no es utilizado como sistema de referencia.

El mayor problema que acarrea la utilización de este sistema de coordenadas es que en cada polo existe una singularidad, ya que aquí los ejes Norte y Este están sin definir. Por ello las ecuaciones de navegación implementadas en estos ejes no son adecuadas para su utilización en zonas cercanas a los polos.

Sistema de coordenadas del cuerpo (Body)

El sistema de coordenadas del cuerpo nos proporciona la posición y orientación del objeto para el cual se realiza la navegación. Su origen coincide con el centro de

masas del vehículo, y los ejes están fijados a este. El eje x de este sistema apunta en la dirección usual del avance del vehículo, mientras que el eje y apunta hacia la izquierda, formando 90 grados con el anterior. El eje z de este sistema apunta hacia arriba, en la dirección contraria a la usual de la gravedad. Con esto, se definen las rotaciones alrededor de estos ejes como roll, pitch y yaw, correspondiendo cada uno de estos al eje x , y y z .

Este sistema de coordenadas es designado con la letra b , y es esencial en navegación ya que es el que describe el objeto que está navegando. Además de esto, todos los sensores inerciales miden el movimiento del sistema de coordenadas del cuerpo con respecto a un sistema inercial genérico, como ya se comentó con antelación. En caso de que en el vehículo viajase un GPS, se asigna la letra a a la antena del GPS. En la Figura 5 se muestra una representación del sistema de coordenadas del cuerpo.

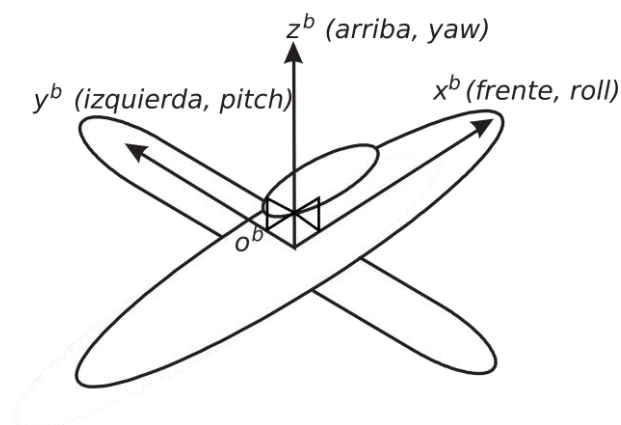


Figura 5. Sistema de coordenadas del cuerpo.

2.1.2. Cinemática

En navegación, el movimiento lineal y angular de un sistema de coordenadas ha de ser descrito con respecto a otro. En la representación de la mayoría de magnitudes cinemáticas, como posición, velocidad, aceleración y velocidad angular, se ven implicados tres sistemas de coordenadas:

- El sistema cuyo movimiento es descrito, o sistema de coordenadas objeto, α .
- El sistema con respecto al cual se calcula el movimiento, o sistema de referencia, β .

- El sistema en el cual se representa el movimiento, o sistema de resolución, γ . Los sistemas α y β han de ser distintos para que exista movimiento. El sistema γ , respecto al cual se representa el movimiento, puede ser uno de los dos anteriores, o un tercer sistema. La notación de las magnitudes en coordenadas cartesianas que se utilizará en adelante es la siguiente:

$$\mathbf{x}_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (2.1)$$

Donde el vector \mathbf{x} describe una propiedad cinemática del sistema α con respecto al sistema β , expresado en el sistema γ . Para expresar la orientación, no es necesario un sistema de resolución γ , sino que únicamente se ven involucrados los sistemas α y β .

En adelante, se describen las dos formas principales de representar la orientación: los ángulos de Euler y las matrices de rotación. Tras esto se describe la velocidad angular, posición, velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas.

Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler son la forma más intuitiva de representar la orientación. Se divide la orientación en tres rotaciones sucesivas: yaw (guiñada), pitch (cabeceo) y roll (alabeo). Estas rotaciones se realizan para transformar cualquier vector expresado en un sistema de coordenadas β , a otro sistema de coordenadas α .

La primera rotación, ψ , es el yaw. Esta rotación se realiza alrededor del eje z del sistema de coordenadas inicial que queremos rotar, β . Tras esta rotación obtenemos un sistema de coordenadas girado cuyos ejes designaremos con el superíndice ψ .

La segunda rotación, θ , es el pitch. Esta rotación se realiza alrededor del eje y^{ψ} obtenido tras la anterior rotación. Tras esto, obtendremos un segundo sistema de coordenadas girado, cuyos ejes son designados con el superíndice θ .

La última rotación, ϕ , es el roll, que se realiza alrededor del eje x^{θ} . Con esto, obtendremos la rotación total existente entre los sistemas β y α . En la Figura 6 se muestran las tres rotaciones consecutivas para pasar de un sistema a otro.

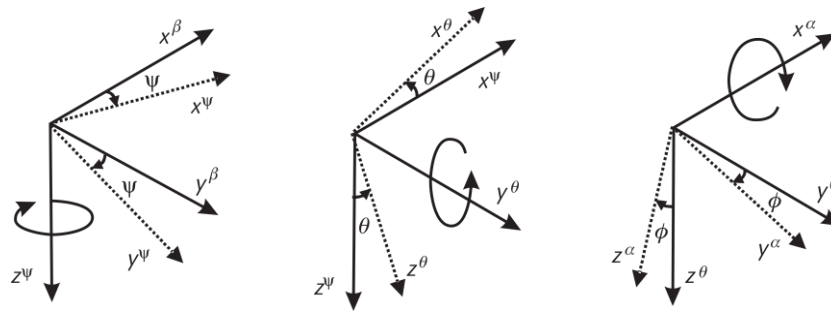


Figura 6. Rotaciones de los ángulos de Euler.

La rotación de Euler de un sistema β a un sistema α puede expresarse como el vector

$$\boldsymbol{\psi}_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \phi_{\beta\alpha} \\ \theta_{\beta\alpha} \\ \psi_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

El principal problema de la utilización de los ángulos de Euler para determinar la orientación de un objeto es que existe una singularidad cuando el pitch tiene un valor de ± 90 grados. En esta posición, el roll y el yaw no son distinguibles. En nuestra aplicación, debido a que en automóviles no se alcanzan estos valores de pitch, se puede utilizar este sistema para representar la orientación.

Matrices de rotación

Una matriz de rotación es una matriz 3x3, designada como $\mathbf{C}_{\alpha}^{\beta}$, que se utiliza para transformar un vector expresado en el sistema α al sistema β . Así, el producto de esta matriz por un vector \mathbf{x} cualquiera tendría el resultado siguiente:

$$\mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\beta} = \mathbf{C}_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\alpha} \quad (2.3)$$

Cuando estas matrices se utilizan para representar la orientación, lo más común es utilizar el superíndice para el sistema de referencia, β , y el subíndice para el sistema objeto, α .

Una matriz de rotación puede obtenerse a partir de un vector cualquiera expresado en los dos sistemas de referencia entre los cuales queremos representar la orientación. De este modo:

$$\mathbf{C}_{\alpha}^{\beta} = \frac{\mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\beta} \mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\alpha T}}{|\mathbf{x}_{\delta\gamma}|^2} \quad (2.4)$$

Las matrices de rotación son fácilmente manipulables. Así, podemos deshacer una rotación empleando la matriz traspuesta de la utilizada para realizarla, siendo esto:

$$\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} = \left(\mathbf{C}_{\alpha}^{\beta}\right)^T \quad (2.5)$$

Para realizar sucesivas rotaciones entre sistemas de coordenadas, simplemente se multiplicarán las matrices en el orden correcto. El orden en el que se realice la multiplicación es crítico, por lo que habrá que tenerlo en cuenta.

$$\mathbf{C}_{\alpha}^{\gamma} = \mathbf{C}_{\beta}^{\gamma} \mathbf{C}_{\alpha}^{\beta} \quad (2.6)$$

Una matriz de rotación tiene nueve componentes, de las cuales solo tres son independientes. Estas tres componentes independientes son iguales al número de componentes de los ángulos de Euler. Así, se pueden representar los ángulos de Euler como una matriz de rotación, representando por separado cada una de las rotaciones realizadas como una matriz, y multiplicándolas posteriormente para realizar la rotación completa. Para esto, hay que tener en cuenta que cuando tratamos con matrices, la primera operación se sitúa en la derecha. Aquí s es el seno y c el coseno.

$$\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi_{\beta\alpha} & s\phi_{\beta\alpha} \\ 0 & -s\phi_{\beta\alpha} & c\phi_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta_{\beta\alpha} & 0 & -s\theta_{\beta\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta_{\beta\alpha} & 0 & c\theta_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\psi_{\beta\alpha} & s\psi_{\beta\alpha} & 0 \\ -s\psi_{\beta\alpha} & c\psi_{\beta\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Resultando esto:

$$\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} c\theta_{\beta\alpha}c\psi_{\beta\alpha} & c\theta_{\beta\alpha}s\psi_{\beta\alpha} & -s\theta_{\beta\alpha} \\ \begin{pmatrix} -c\phi_{\beta\alpha}s\psi_{\beta\alpha} \\ +s\phi_{\beta\alpha}s\theta_{\beta\alpha}c\psi_{\beta\alpha} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c\phi_{\beta\alpha}c\psi_{\beta\alpha} \\ +s\phi_{\beta\alpha}s\theta_{\beta\alpha}s\psi_{\beta\alpha} \end{pmatrix} & s\phi_{\beta\alpha}c\theta_{\beta\alpha} \\ \begin{pmatrix} s\phi_{\beta\alpha}s\psi_{\beta\alpha} \\ +c\phi_{\beta\alpha}s\theta_{\beta\alpha}c\psi_{\beta\alpha} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -s\phi_{\beta\alpha}c\psi_{\beta\alpha} \\ +c\phi_{\beta\alpha}s\theta_{\beta\alpha}s\psi_{\beta\alpha} \end{pmatrix} & c\phi_{\beta\alpha}c\theta_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Con esto, podemos definir el operador $\mathbf{C}(\cdot)$ como:

$$\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\psi}_{\beta\alpha}) \quad (2.9)$$

Cuando tratamos con ángulos pequeños, podemos aproximar la matriz de rotación obtenida anteriormente como:

$$\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \psi_{\beta\alpha} & -\theta_{\beta\alpha} \\ -\psi_{\beta\alpha} & 1 & \phi_{\beta\alpha} \\ \theta_{\beta\alpha} & -\phi_{\beta\alpha} & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3 - [\boldsymbol{\psi}_{\beta\alpha} \wedge] \quad (2.10)$$

Donde \mathbf{I}_n es una matriz identidad de dimensiones $n \times n$, y $[\mathbf{x} \wedge]$ es la matriz antisimétrica de \mathbf{x} .

Velocidad angular

El vector velocidad angular, $\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^{\gamma}$, representa la rotación del sistema α con respecto al sistema β , expresado en el sistema γ . En la Figura 7 se puede ver como sería el vector velocidad angular y su correspondiente rotación, que se da en el plano perpendicular al vector.

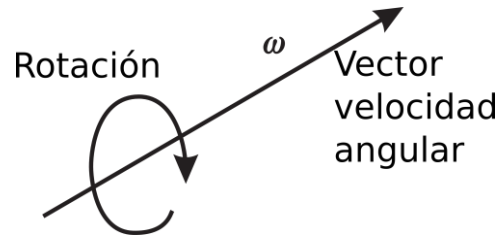


Figura 7. Rotación correspondiente al vector velocidad angular.

Las rotaciones que estén expresadas en el mismo sistema de referencia pueden sumarse directamente si conocemos que el sistema objeto de una de estas rotaciones es el sistema de referencia de la otra.

$$\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^{\gamma} = \boldsymbol{\omega}_{\beta\delta}^{\gamma} + \boldsymbol{\omega}_{\delta\alpha}^{\gamma} \quad (2.11)$$

En muchos casos, se utiliza la matriz antisimétrica del vector velocidad angular, por lo que se define $\boldsymbol{\Omega}_{\beta\alpha}^{\gamma}$ como la antisimétrica de $\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^{\gamma}$.

$$\boldsymbol{\Omega}_{\beta\alpha}^{\gamma} = [\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^{\gamma} \wedge] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{\beta\alpha 3}^{\gamma} & \omega_{\beta\alpha 2}^{\gamma} \\ \omega_{\beta\alpha 3}^{\gamma} & 0 & -\omega_{\beta\alpha 1}^{\gamma} \\ -\omega_{\beta\alpha 2}^{\gamma} & \omega_{\beta\alpha 1}^{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Posición Cartesiana

La posición Cartesiana del origen del sistema α con respecto al origen del sistema β , expresado en el sistema γ , es $\mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\gamma} = (x_{\beta\alpha}^{\gamma}, y_{\beta\alpha}^{\gamma}, z_{\beta\alpha}^{\gamma})^T$. La posición cartesiana se caracteriza porque los ejes en los que se resuelve el problema son independientes del vector posición.

El sistema objeto y el de referencia pueden ser intercambiados simplemente cambiando el vector de signo:

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\gamma} = -\mathbf{r}_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (2.13)$$

De forma similar, dos posiciones con el mismo sistema de resolución pueden sumarse si se sabe que el sistema objeto de una de ellas coincide con el sistema de referencia de la otra.

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\gamma} = \mathbf{r}_{\beta\delta}^{\gamma} + \mathbf{r}_{\delta\alpha}^{\gamma} \quad (2.14)$$

De forma similar a la expresada en (2.3) podemos rotar un vector posición de un sistema de resolución a otro diferente utilizando la matriz de rotación adecuada.

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\delta} = \mathbf{C}_{\gamma}^{\delta} \mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (2.15)$$

En la figura 8 se muestra una representación gráfica de la posición cartesiana entre dos sistemas de referencia.

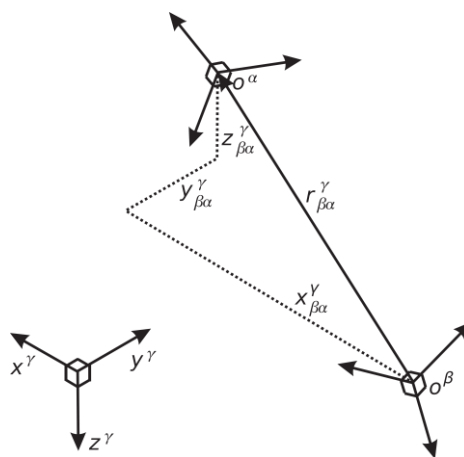


Figura 8. Posición del origen de un sistema α con respecto a un sistema β , expresado en el sistema γ .

Velocidad

La velocidad se define como el cambio por unidad de tiempo en la posición del origen de un sistema de referencia objeto con respecto al origen y los ejes de un sistema de referencia. Esta puede expresarse en un tercer sistema de coordenadas. Se define la velocidad del sistema α con respecto al sistema β , expresada en los ejes del sistema γ como:

$$\mathbf{v}_{\beta\alpha}^{\gamma} = \mathbf{C}_{\beta}^{\gamma} \dot{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^{\beta} \quad (2.16)$$

Se contabiliza una velocidad cuando el sistema α se mueve con respecto al sistema β , y viceversa. Además de esto, existe una velocidad cuando el sistema β rota con respecto al origen del sistema α . Esto es importante en navegación, dado que los sistemas de referencia utilizados en ella rotan unos respecto de los otros.

Hay que tener en cuenta que $\mathbf{v}_{\beta\alpha}^{\gamma}$ no es igual a la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\gamma}$ a no ser que no exista ningún tipo de rotación del sistema de resolución γ con respecto al sistema de referencia β . De (2.15) y (2.16):

$$\dot{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^{\beta} = \dot{\mathbf{C}}_{\beta}^{\gamma} \mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\beta} + \mathbf{C}_{\beta}^{\gamma} \dot{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^{\beta} = \dot{\mathbf{C}}_{\beta}^{\gamma} \mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\beta} + \mathbf{v}_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (2.17)$$

A diferencia de la posición, no se pueden intercambiar los sistemas a no ser que no exista rotación entre ellos. La relación correcta es:

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta}^{\gamma} = -\mathbf{v}_{\beta\alpha}^{\gamma} - \mathbf{C}_{\alpha}^{\gamma} \dot{\mathbf{C}}_{\beta}^{\gamma} \mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\beta} \quad (2.18)$$

De forma similar, las velocidades no se suman si existe rotación entre los sistemas.

Aceleración

Se define la aceleración como la segunda derivada con respecto al tiempo de la posición del origen de un sistema con respecto al origen y ejes de otro sistema. La aceleración del sistema α con respecto al sistema β , expresada en los ejes del sistema γ es:

$$\mathbf{a}_{\beta\alpha}^{\gamma} = \mathbf{C}_{\beta}^{\gamma} \ddot{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^{\beta} \quad (2.19)$$

La aceleración es la fuerza por unidad de masa en el sistema objeto aplicada desde el sistema de referencia. Su magnitud es independiente del sistema en el que se resuelva, por lo que no es igual a la derivada de $\mathbf{v}_{\beta\alpha}^Y$ ni a la segunda derivada de $\mathbf{r}_{\beta\alpha}^Y$.

La segunda derivada de $\mathbf{r}_{\beta\alpha}^Y$ resulta:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^Y = -\left(\boldsymbol{\Omega}_{\beta\gamma}^Y \boldsymbol{\Omega}_{\beta\gamma}^Y + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\beta\gamma}^Y\right) \mathbf{r}_{\beta\alpha}^Y - 2\boldsymbol{\Omega}_{\beta\gamma}^Y \dot{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^Y + \mathbf{a}_{\beta\alpha}^Y \quad (2.20)$$

En esta ecuación, el primer término es la aceleración centrífuga, mientras que el segundo término es la aceleración de Coriolis.

Al igual que en el caso de las velocidades, las aceleraciones no se suman si existe rotación entre los sistemas de referencia, pero una aceleración puede expresarse en distintos sistemas de resolución si utilizamos una matriz de rotación para cambiar entre ellos.

$$\mathbf{a}_{\beta\alpha}^\delta = \mathbf{C}_\gamma^\delta \mathbf{a}_{\beta\alpha}^Y \quad (2.21)$$

2.1.3. Modelo gravimétrico y de la superficie terrestre

En la mayoría de las aplicaciones, se requiere tener una solución de posición con respecto a la superficie de la Tierra. Para la obtención de esto, es necesario definir una superficie de referencia con respecto al centro de la Tierra y a los ejes del sistema de coordenadas establecido en su centro. Además de esto, es necesaria la definición de un grupo de coordenadas que determine la posición con respecto a esta superficie de referencia. Finalmente, para transformar las mediciones realizadas con respecto a un sistema inercial a otro sistema no inercial, se debe definir la rotación de la Tierra. En este apartado se resuelven estas cuestiones, y se realizan distinciones entre los conceptos de aceleración y fuerza específica, y también entre los de gravedad y gravitación, que son clave en la navegación inercial.

Modelo de Elipsoide de la superficie de la Tierra

El sistema de coordenadas ECEF nos permite la navegación con respecto al centro de la Tierra, pero para muchas de las aplicaciones prácticas, se requiere el conocimiento de la posición con respecto a la superficie terrestre. El primer paso para obtenerla es definir la superficie de la Tierra en este mismo sistema. Debido a la irregularidad de la superficie terrestre, esta no es posible de modelar de forma precisa, por lo que se aproxima como un elipsoide que se ajusta a la superficie de la Tierra al nivel del mar.

El tipo de elipsoide utilizado es un esferoide achatado con simetría de rotación alrededor del eje norte-sur (z^e). Este elipsoide se define por dos radios. El radio ecuatorial R_0 , longitud del semieje mayor, es la distancia desde el centro de la Tierra hasta cualquier punto del Ecuador. El radio polar R_p , longitud del semieje menor, es la distancia desde cualquier punto del centro hasta cualquiera de los polos.

El elipsoide suele definirse en función del radio ecuatorial y de la primera excentricidad del elipsoide, e . Esta excentricidad se define como:

$$e = \sqrt{1 - \frac{R_p^2}{R_0^2}} \quad (2.22)$$

La posición cartesiana de un punto, S, en la superficie del elipsoide, conocida como radio geocéntrico es:

$$r_{eS}^e = |r_{eS}^e| \quad (2.23)$$

Para definir la superficie del elipsoide, es útil definir la proyección de r_{eS}^e sobre el plano ecuatorial, siendo esta:

$$\beta_{eS}^e = \sqrt{(x_{eS}^e)^2 + (y_{eS}^e)^2} \quad (2.24)$$

Así, podemos definir la superficie del elipsoide de la figura 9 como:

$$\left(\frac{\beta_{eS}^e}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{z_{eS}^e}{R_p}\right)^2 = \left(\frac{x_{eS}^e}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{y_{eS}^e}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{z_{eS}^e}{R_p}\right)^2 = 1 \quad (2.25)$$

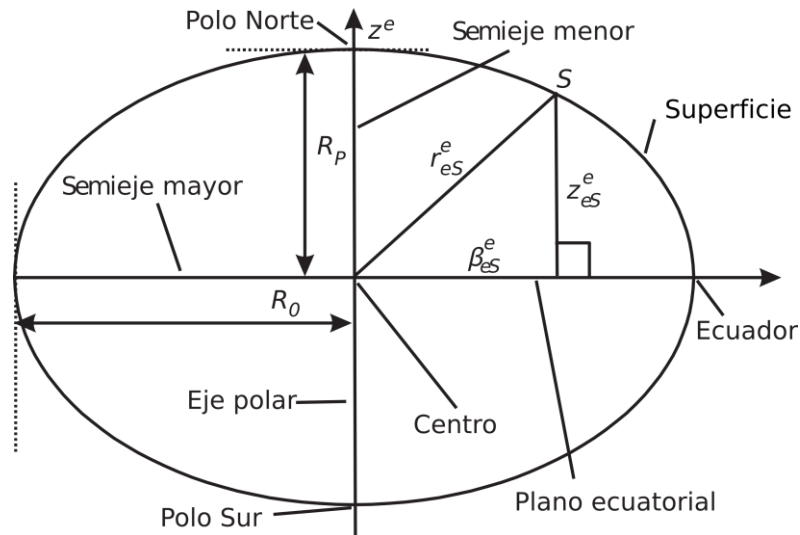


Figura 9. Sección del elipsoide que representa la superficie terrestre.

La correcta definición de este elipsoide es determinante a la hora de situar posteriormente nuestro sistema de navegación Local, dado que la dirección z de este se define como normal a la superficie del elipsoide.

El elipsoide más utilizado actualmente como modelo es desarrollado por la DMA (Defense Mapping Agency) de los Estados Unidos, ahora llamada NGA (National Geospatial-Intelligence Agency), incluido en el modelo geodésico WGS 84 (World Geodetic System 1984) llamado GRS80. Este tiene los siguientes valores de radios ecuatorial y polar.

- $R_0 = 6,378,137.0$ m.
- $R_p = 6,356,752.3142$ m.

Coordenadas geodésicas

Para definir la posición con respecto a la superficie de la Tierra, se establecen unas coordenadas ortogonales entre ellas, y alineadas con los ejes del sistema de navegación Local. Estas son: latitud, longitud y altitud.

Se define la Latitud, L , como el ángulo que forma la intersección del plano normal al elipsoide con el plano ecuatorial. Como está definida por la normal a la superficie, podemos obtenerla por el gradiente de la superficie. Así, para un punto S en la superficie del elipsoide:

$$\tan L_S = - \frac{\partial \beta_{eS}^e}{\partial z_{eS}^e} \quad (2.26)$$

Derivando (2.25) y sustituyendo (2.22) y (2.24):

$$\frac{\partial \beta_{eS}^e}{\partial z_{eS}^e} = - \frac{z_{eS}^e}{(1 - e^2)\beta_{eS}^e} \quad (2.27)$$

Sustituyendo esto en (2.26) obtenemos que:

$$\tan L_S = \frac{z_{eS}^e}{(1 - e^2)\beta_{eS}^e} \quad (2.28)$$

En la figura 10 se muestra una representación de lo anteriormente citado.

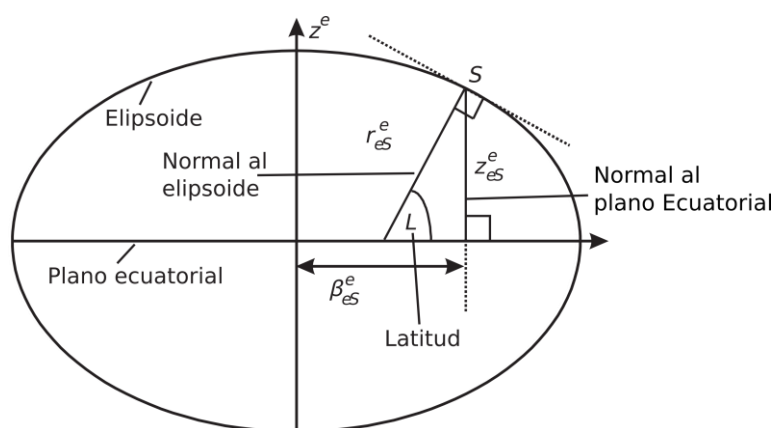


Figura 10. Representación de la Latitud geodésica.

La longitud, λ , es el ángulo formado en el plano ecuatorial entre el plano meridiano que coincide con el punto S (meridiano Local), y el primer meridiano o meridiano Base. Se toma como positiva la longitud medida desde el meridiano base hacia los meridianos al Este de este. Por trigonometría, definimos la longitud de un punto S como:

$$\tan \lambda_S = \frac{y_{eS}^e}{x_{eS}^e} \quad (2.29)$$

En la figura 11 se muestra una representación gráfica de la longitud.

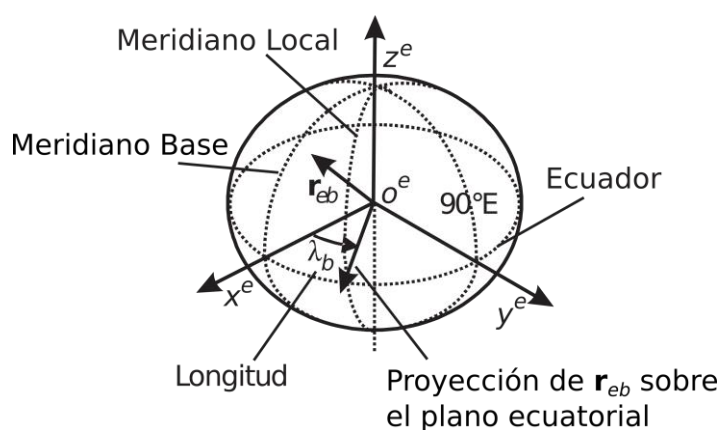


Figura 11. Representación de la longitud.

Conviene definir el radio de curvatura del elipsoide para facilitar los cambios de coordenadas entre geodésicas y cartesianas. De este modo se define el radio de

curvatura en el sentido Norte-Sur, o radio de curvatura meridiano R_N , como el determinado por el cambio de la latitud cuando se está situado en un meridiano cualquiera. Este radio varía con la latitud y su valor más pequeño se encuentra en el Ecuador, donde el radio geocéntrico es mayor, y el valor mayor de éste se da en los polos. Viene dado por la siguiente expresión:

$$R_N(L) = \frac{R_0(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{3/2}} \quad (2.30)$$

Además de este radio, se debe definir también el radio de curvatura en sentido Este-Oeste, conocido también como radio de curvatura transversal R_E , que es el que determina el cambio de la longitud a lo largo de la superficie normal a un meridiano (que no es lo mismo que un paralelo). Este se expresa como:

$$R_E(L) = \frac{R_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 L}} \quad (2.31)$$

La definición de este radio también es útil para definir la superficie del elipsoide, de forma que podemos expresar (2.24) y z_{eS}^e en función de este.

$$\beta_{eS}^e = R_E(L_S) \cos L_S \quad (2.32)$$

$$z_{eS}^e = (1 - e^2)R_E(L_S) \sin L_S \quad (2.33)$$

La altitud, h , es la distancia desde un cuerpo a la superficie del elipsoide medida sobre la normal al elipsoide, siendo esta positiva si el cuerpo se encuentra fuera del mismo.

$$h_b = \frac{z_{eS}^e - z_{eS(b)}^e}{\sin L_b} \quad (2.34)$$

Sustituyendo en esto en (2.33) se obtiene que:

$$h_b = \frac{z_{eb}^e}{\sin L_b} - (1 - e^2)R_E(L_b) \quad (2.35)$$

En la figura 12 se muestra una representación gráfica de la altitud sobre el elipsoide.

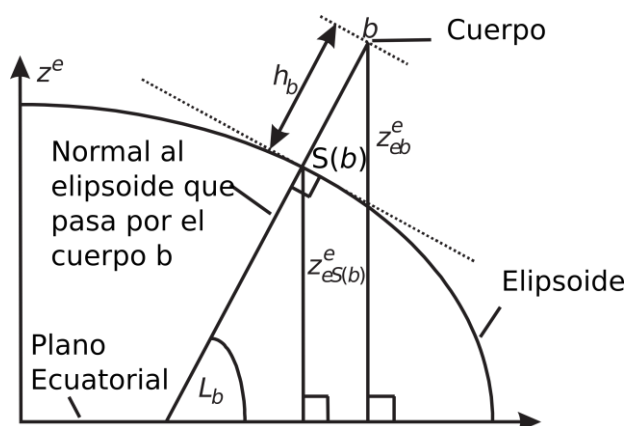


Figura 12. Altitud y Latitud de un cuerpo b .

Para obtener la posición cartesiana a partir de la expresada en coordenadas geodésicas, se deben utilizar las expresiones siguientes:

$$x_{eb}^e = (R_E(L_b) + h_b) \cos L_b \cos \lambda_b \quad (2.36)$$

$$y_{eb}^e = (R_E(L_b) + h_b) \cos L_b \sin \lambda_b \quad (2.37)$$

$$z_{eb}^e = [(1 - e^2)R_E(L_b) + h_b] \sin L_b \quad (2.38)$$

En cambio, pese a que el cambio anterior es una relación simple, para obtener la posición expresada en coordenadas geodésicas a partir de la cartesiana, es necesario llevar a cabo un procedimiento iterativo. La única coordenada que se puede obtener previamente sin pasar por este proceso es la longitud, que se obtiene de la siguiente forma:

$$\lambda = \begin{cases} \arctan \frac{y_{eb}^e}{x_{eb}^e} & x_{eb}^e \geq 0 \\ 180^\circ + \arctan \frac{y_{eb}^e}{x_{eb}^e} & x_{eb}^e < 0 \text{ e } y_{eb}^e \geq 0 \\ \arctan \frac{y_{eb}^e}{x_{eb}^e} - 180^\circ & x_{eb}^e < 0 \text{ e } y_{eb}^e < 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Antes de comenzar la explicación del proceso, conviene definir:

$$\tan u = \frac{z_{eb}^e a}{\beta_{eS}^e b} \quad (2.40)$$

Una vez definido esto, se comienza el procedimiento iterativo:

$$\cos^2 u = \frac{1}{1 + \tan^2 u} \quad (2.41)$$

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u \quad (2.42)$$

$$\tan L = \frac{z_{eb}^e b + a^2 e^2 \sin^3 u}{\beta_{eS}^e b - e^2 ab \cos^3 u} \quad (2.43)$$

$$\tan u = \frac{b}{a} \tan L \quad (2.44)$$

Este se realiza hasta que el valor de $\tan u$ converge. Una vez converge, los valores de latitud y altitud son:

$$L = \tan^{-1} \left(\frac{z_{eb}^e b + a^2 e^2 \sin^3 u}{\beta_{eS}^e b - e^2 ab \cos^3 u} \right) \quad (2.45)$$

$$h_b = \begin{cases} \frac{\beta_{es}^e}{\cos \lambda} - \frac{a}{R_0} R_E(L) & L \neq \pm 90^\circ \\ \frac{z_{eb}^e}{\sin \lambda} - \frac{a}{R_0} (1 - e^2) R_E(L) & L \neq 0^\circ \end{cases} \quad (2.46)$$

A la hora de integrar la posición en coordenadas geodésicas, no es necesario utilizar la posición cartesiana como intermediaria, dado que si se descomponen los términos de la velocidad en las direcciones del ENU, podemos obtener la derivada de latitud, longitud y altitud en función de esta.

$$\dot{L}_b = \frac{v_{eb,N}^n}{R_N(L_b) + h_b} \quad (2.47)$$

$$\dot{\lambda}_b = \frac{v_{eb,E}^n}{(R_E(L_b) + h_b) \cos L_b} \quad (2.48)$$

$$\dot{h}_b = v_{eb,U}^n \quad (2.49)$$

Rotación Terrestre

La Tierra rota con respecto al espacio, en sentido positivo alrededor del eje z compartido por los sistemas ECI y ECEF, como se muestra en la figura 13.

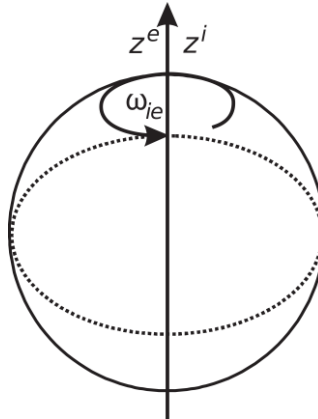


Figura 13. Rotación terrestre en los sistemas ECI y ECEF.

Así, esta rotación expresada tanto en ECEF como en ECI tendría la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^i = \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ie} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

El periodo de rotación de la Tierra con respecto al espacio es conocido como día sidéreo, y consta de 23 horas, 56 minutos, 4 segundos. Esto difiere del llamado día Solar, que consta de 24 horas. Esta diferencia se debe a la rotación de la Tierra con respecto al Sol, que hace que se produzca una rotación más que días solares al año. La velocidad de rotación de la Tierra no es constante debido a distintos factores como son el viento, cambios de estación que causan formaciones de hielo o la fundición del mismo, o también la fricción causada por las mareas. Estos fenómenos causan una variación en el momento de inercia de la Tierra, lo que causa el cambio en esta velocidad de rotación.

Cuando se utiliza para propósitos de navegación, se supone una velocidad de rotación constante, basado en el día sidéreo medio. El valor proporcionado por el sistema WGS 84 para esta rotación es $\omega_{ie} = 7.292115 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Fuerza específica, Gravitación y Gravedad

La fuerza específica se define como la fuerza no gravitacional por unidad de masa en un cuerpo, medida con respecto a un sistema inercial. Con respecto a un sistema de referencia no inercial, esto no tiene ningún sentido físico.

La fuerza específica es lo que miden los acelerómetros, o lo que sienten las personas. La sensación de peso es causada por las fuerzas que se oponen a la gravedad. Como ejemplo, podemos ver que no existe sensación de peso durante una caída libre, debido a que no existen fuerzas que se opongan a la gravedad. Sin embargo, cuando la aceleración es nula, podemos sentir la reacción a la gravedad, y la fuerza específica es igual pero de sentido opuesto a la aceleración debida a la gravitación.

En la figura 14 se representa un ejemplo de esto aplicado a una masa colgada de un muelle, donde f es la fuerza específica, y γ la aceleración debida a la fuerza gravitacional.

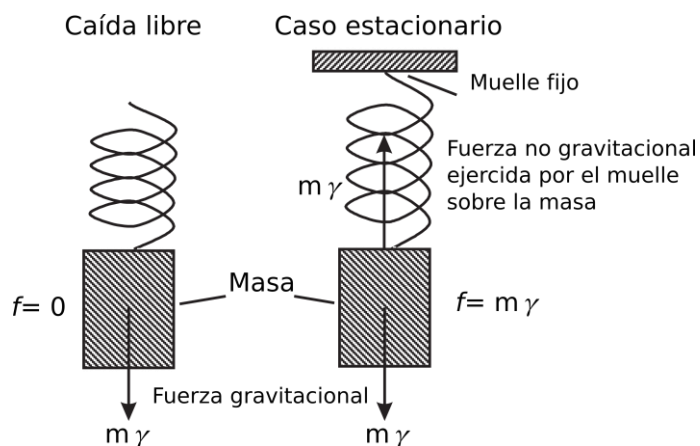


Figura 14. Fuerzas en un sistema masa-muelle.

Con esto comprobamos que la fuerza específica \mathbf{f} , varía con la aceleración \mathbf{a} , y debido a la aceleración debida a la fuerza gravitacional γ según la siguiente expresión.

$$\mathbf{f}_{ib}^{\gamma} = \mathbf{a}_{ib}^{\gamma} - \gamma_{ib}^{\gamma} \quad (2.51)$$

En el caso de los acelerómetros, la fuerza específica medida por estos estaría expresada en el sistema del cuerpo, siendo esta \mathbf{f}_{ib}^b .

Para definir la gravedad, conviene considerar un objeto estacionario con respecto a un sistema que rote, como por ejemplo el ECEF, que tenga las siguientes propiedades.

$$\mathbf{v}_{eb}^e = 0, \mathbf{a}_{eb}^e = 0 \quad (2.52)$$

De las ecuaciones (2.16) y (2.19), conociendo que ECI y ECEF comparten origen, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \dot{\mathbf{r}}_{ib}^e = 0, \ddot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \ddot{\mathbf{r}}_{ib}^e = 0 \quad (2.53)$$

La aceleración con respecto a un sistema inercial, expresada en ECEF viene dada por la expresión (2.20), siendo $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e = 0$ ya que se toma la rotación de la Tierra como constante.

$$\mathbf{a}_{ib}^e = \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{ib}^e + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}_{ib}^e + \ddot{\mathbf{r}}_{ib}^e \quad (2.54)$$

Sustituyendo (2.53) en (2.54) se llega a:

$$\mathbf{a}_{ib}^e = \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e \quad (2.55)$$

Sustituyendo esto en la definición de fuerza específica, (2.51), se obtiene:

$$\mathbf{f}_{ib}^e = \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e - \boldsymbol{\gamma}_{ib}^e \quad (2.56)$$

La fuerza específica medida en el caso estacionario con respecto al ECI es la reacción a lo conocido como aceleración de la gravedad, que se define como:

$$\mathbf{g}_b^\gamma = -\mathbf{f}_{ib}^\gamma \Big|_{\mathbf{a}_{eb}^\gamma=0, \mathbf{v}_{eb}^\gamma=0} \quad (2.57)$$

Así, de (2.56) se extrae que la aceleración de la gravedad es:

$$\mathbf{g}_b^\gamma = \boldsymbol{\gamma}_{ib}^\gamma - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^\gamma \boldsymbol{\Omega}_{ie}^\gamma \mathbf{r}_{eb}^\gamma \quad (2.58)$$

De aquí, a partir de (2.50) se puede obtener una expresión de la gravedad en función de la posición cartesiana y de la rotación de la Tierra.

$$\mathbf{g}_b^e = \boldsymbol{\gamma}_{ib}^e + \omega_{ie}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{eb}^e \quad (2.59)$$

El primer término de (2.59) es la aceleración gravitacional, mientras que el segundo es la aceleración centrífuga debida a la rotación de la Tierra. Es importante no confundir la gravedad, \mathbf{g} , con la gravitación, $\boldsymbol{\gamma}$, en la que no se considera ninguna componente centrífuga debida a la rotación de la Tierra. La componente centrífuga de la gravedad puede calcularse de forma exacta en cualquier posición, pero obtener el término gravitacional es complejo, por lo que el WGS 84 emplea el modelo de Somigliana para obtener el valor de g_0 en función de la latitud que se considere. Este modelo sigue la siguiente expresión:

$$g_0(L) = 9.7803253359 \frac{(1 + 0.001931853 \sin^2 L)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 L}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (2.60)$$

Para simplificar los cálculos, se toma el vector gravedad perpendicular al elipsoide de la superficie terrestre, si bien esto no es del todo cierto, ya que este sería perpendicular al geoide, un modelo de la superficie terrestre que está definido por el potencial gravitatorio. En la figura 15 se puede ver una representación del geoide, el elipsoide y el terreno, donde se pueden ver las diferencias entre ellos.

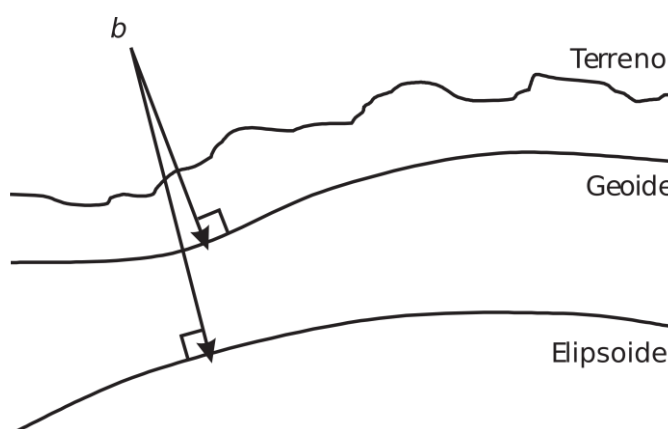


Figura 15. Elipsoide, Geoide y Terreno.

En esta figura se observa que puede existir una variación en la dirección de la gravedad según el modelo tomado. Debido a la gran simplificación que supone en los cálculos y al pequeño error que esto supone, se toma la gravedad como perpendicular al elipsoide. Con esto, se llega a que:

$$\mathbf{g}_0^y = -g_0(L)\mathbf{u}_{nU}^y \quad (2.61)$$

Donde \mathbf{u}_{nU}^y es el vector unitario en la dirección hacia arriba del ENU que se encuentra en la superficie del elipsoide.

2.1.4. Transformaciones de coordenadas

En la navegación es esencial ser capaz de transformar las soluciones entre los distintos sistemas de coordenadas en los que se trabaja. Esto se realiza empleando las matrices de rotación explicadas en el apartado 2.1.2. En este apartado se muestran las distintas matrices necesarias para poder utilizar nuestras soluciones en los cuatro sistemas de coordenadas empleados durante el proceso de navegación.

ECI y ECEF

En estos dos sistemas, tanto el origen como el eje z coinciden. El ECEF gira con respecto al ECI con una velocidad de rotación ω_{ie} alrededor del eje z . Si se conoce que en un instante t_0 los ejes x e y de ambos sistemas coinciden, en un instante posterior t , la matriz de rotación para pasar del sistema ECI al ECEF es:

$$\mathbf{C}_i^e = \begin{pmatrix} \cos \omega_{ie}(t - t_0) & \sin \omega_{ie}(t - t_0) & 0 \\ -\sin \omega_{ie}(t - t_0) & \cos \omega_{ie}(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

ECEF y Local (ENU)

La orientación relativa entre el ECEF y el sistema Local viene determinada por la latitud y la longitud en la que este se encuentre. De este modo, la matriz de rotación para transformar nuestras soluciones entre ENU y ECEF es:

$$\mathbf{C}_n^e = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin L & \cos \lambda \cos L \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin L & \sin \lambda \cos L \\ 0 & \cos L & \sin L \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Local y Body

Para realizar la transformación entre el sistema de coordenadas el cuerpo y el sistema Local, se realiza una rotación similar a la aplicada en (2.8) de modo que:

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} c \theta_{bn} c \psi_{bn} & c \theta_{bn} s \psi_{bn} & -s \theta_{bn} \\ \begin{pmatrix} -c \phi_{bn} s \psi_{bn} \\ + s \phi_{bn} s \theta_{bn} c \psi_{bn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \phi_{bn} c \psi_{bn} \\ + s \phi_{bn} s \theta_{bn} s \psi_{bn} \end{pmatrix} & s \phi_{bn} c \theta_{bn} \\ \begin{pmatrix} s \phi_{bn} s \psi_{bn} \\ + c \phi_{bn} s \theta_{bn} c \psi_{bn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -s \phi_{bn} c \psi_{bn} \\ + c \phi_{bn} s \theta_{bn} s \psi_{bn} \end{pmatrix} & c \phi_{bn} c \theta_{bn} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

2.2. Navegación inercial

Un sistema de navegación inercial (INS) está compuesto por una unidad de medición inercial (IMU) y un procesador de navegación. La IMU está compuesta por acelerómetros y giróscopos, y va montada directamente en el móvil sobre el que se quiere realizar la navegación. Los acelerómetros miden la fuerza específica \mathbf{f}_{ib}^b , mientras que los giróscopos miden la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$, todo ello del sistema del cuerpo con respecto al ECI.

Las principales ventajas de la navegación inercial son su gran frecuencia, su precisión en un corto plazo de tiempo y su independencia de referencias externas. Además de esto, a diferencia de otros sistemas de navegación, puede determinar la velocidad angular, la orientación, la aceleración y la velocidad de la plataforma móvil en la que se implemente el sistema. Sin embargo, su principal inconveniente es la degradación de la precisión en la navegación con el tiempo, y el alto coste que suponen si se requiere una precisión mayor.

En este apartado se trata en profundidad el proceso llevado a cabo por el procesador de navegación para obtener una solución. Este procesador integra las salidas de la

IMU para obtener la posición, velocidad y orientación del móvil. El proceso seguido por el mismo se muestra en la figura 16.

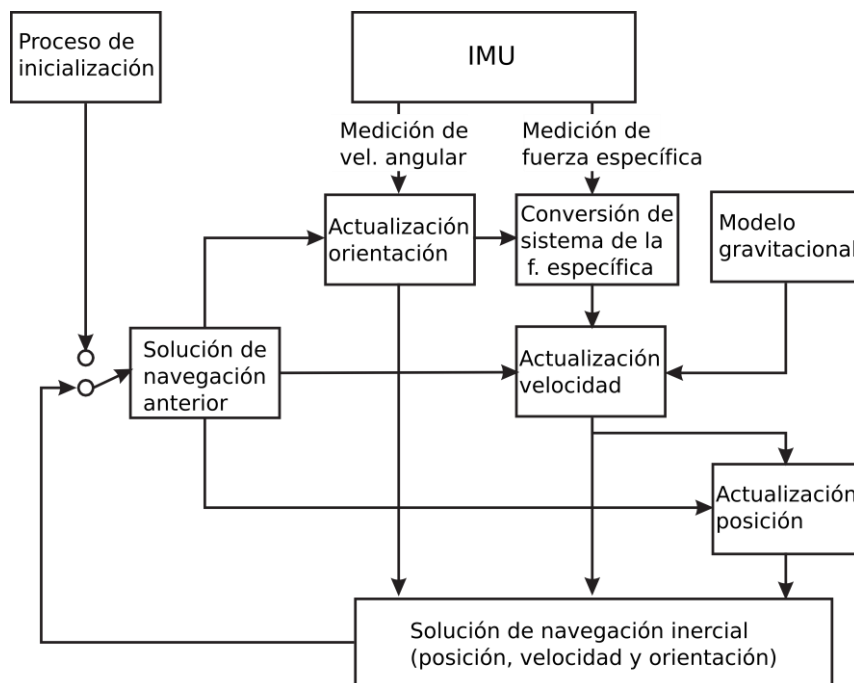


Figura 16. Esquema de un procesador de navegación inercial.

El procedimiento llevado a cabo por este procesador se explica en este apartado, describiendo los pasos llevados a cabo por el mismo para la obtención de una solución de navegación.

2.2.1. Ecuaciones de navegación

La forma de las ecuaciones de navegación depende de cual sea el sistema de coordenadas en el que las implementemos. En este caso, se realizará la implementación en el ENU, dado que es el que nos permite un procedimiento más simple en la integración. En cualquier caso, podría ser implementado tanto en el ECI como en el ECEF, pero con una mayor complejidad que no acarrearía ningún beneficio, por lo que se prescinde de estas dos implementaciones ([6]).

Actualización de la orientación

La orientación de la IMU (sistema del cuerpo) con respecto al ENU es calculada integrando las mediciones de la velocidad angular proporcionadas por los giróscopos, ω_{ib}^b . Empleando las ecuaciones (2.6) y (2.12) y derivando, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \quad (2.65)$$

Utilizando (2.11) y (2.12), la división expresión anterior se divide en tres términos.

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \mathbf{C}_b^n - \boldsymbol{\Omega}_{en}^n \mathbf{C}_b^n \quad (2.66)$$

El primer término es debido a la rotación medida por los giróscopos, el segundo se debe a la rotación de la Tierra con respecto a un sistema de referencia inercial, y el tercero procede de la rotación del sistema de referencia Local (ENU) debida al movimiento de su origen con respecto a la Tierra. En este caso, los términos debidos a la rotación de la Tierra se desprecian debido a la baja precisión de los sensores MEMS, que no tienen capacidad suficiente para medir correctamente valores de ese orden de magnitud.

Así, si se eliminan los términos que implican la rotación terrestre, y se integra (2.66) entre dos instantes t y $t + \tau_i$, donde τ_i es el tiempo entre mediciones, se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{C}_b^n(t + \tau_i) = \mathbf{C}_b^n(t) \exp\left(\int_t^{t+\tau_i} \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b dt\right) \quad (2.67)$$

Conversión de sistema de la fuerza específica

La fuerza específica medida por los sensores inerciales, está expresada en el sistema de coordenadas del cuerpo, por lo que es necesario rotarla al ENU para realizar la

integración con respecto a este sistema. Empleando (2.3) con este propósito, se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{f}_{ib}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{ib}^b \quad (2.68)$$

Actualización de la velocidad

Teniendo en cuenta que ya se ha prescindido de la rotación terrestre para la actualización de la orientación, se hace lo mismo en este caso, lo que simplifica los cálculos. Con esto, para obtener una actualización de la velocidad, se utiliza como punto de partida la velocidad en el instante anterior, implementando la siguiente expresión:

$$\mathbf{v}_{nb}^n(t + \tau_i) = \mathbf{v}_{nb}^n(t) + (\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{ib}^b + \boldsymbol{\gamma}_{ib}^n) \tau_i \quad (2.69)$$

Donde el segundo término se corresponde con la aceleración \mathbf{a}_{nb}^n . Esta aceleración depende de la fuerza específica y de la aceleración debida a la fuerza gravitacional. El modelo gravitacional empleado es el modelo de Somigliana proporcionado por el modelo geodésico WGS 84, que se expone en la ecuación (2.60).

Actualización de la posición

De forma similar a los casos anteriores, se desprecian los términos que provienen de la rotación terrestre, quedando la expresión para la actualización de la posición de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_{nb}^n(t + \tau_i) = \mathbf{r}_{nb}^n(t) + \mathbf{v}_{nb}^n(t + \tau_i) \tau_i \quad (2.70)$$

Con esto se finaliza el trabajo realizado por el procesador en un paso de tiempo. En la figura 17 se representa el diagrama de bloques de uno de estos pasos de integración.

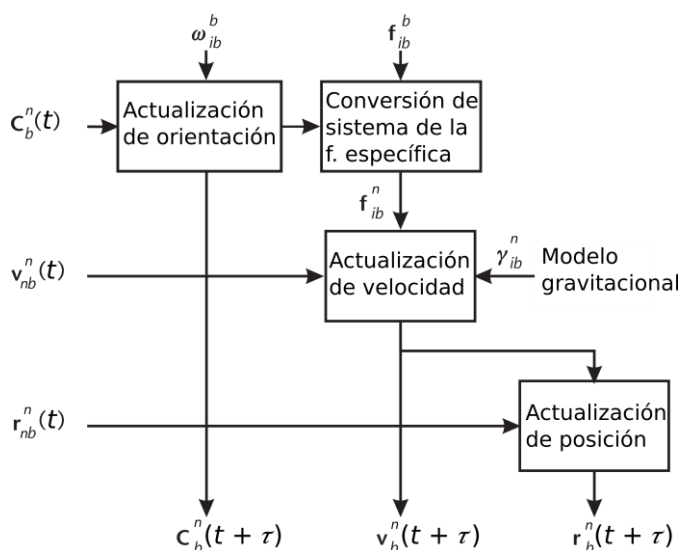


Figura 17. Paso de integración realizado por un procesador de navegación inercial.

Con todo lo descrito hasta ahora, se puede llevar a cabo el proceso de integración de la posición a partir de sensores inerciales.

2.2.2. Precisión de las ecuaciones

Cuando se lleva a cabo la implementación de un grupo de ecuaciones de navegación, debemos tener en cuenta tres factores principales: precisión, complejidad y eficiencia. Optimizar estos tres factores es una tarea compleja, y se deben priorizar unos u otros en función de los medios disponibles y del objetivo de estas ecuaciones.

La precisión de las ecuaciones de navegación es función de tres factores: el tiempo entre iteraciones, las aproximaciones realizadas, y la dinámica de las maniobras realizadas ([7]). Como ejemplo se puede tomar el caso que trata este proyecto, en el cual, debido a la baja calidad de los sensores inerciales, una mejora en la precisión de las ecuaciones no supondría ninguna mejora en los resultados generales de la integración.

Tiempo entre iteraciones y relación con las aproximaciones

Cuando se resuelven las ecuaciones de navegación anteriores, se realizan varias aproximaciones que llevan a que los errores en los resultados de la integración aumenten con el tiempo. En una misma maniobra, cuanto mayor sea el tiempo entre

iteraciones, mayor será el error procedente de las aproximaciones realizadas. De este modo, disminuyendo el tiempo entre iteraciones se puede mejorar la precisión de las ecuaciones de navegación.

Las diferentes aproximaciones realizadas en los distintos pasos de la integración inercial, tienen distinto impacto en el resultado final. El impacto relativo de estas aproximaciones depende entre otras cosas de la dinámica de las maniobras realizadas y de la magnitud de las aproximaciones.

En este caso, se realiza la aproximación de despreciar los términos derivados de la rotación terrestre. Estos términos tienen una magnitud mucho inferior a los procedentes de los sensores inerciales, dado que la velocidad de rotación de la Tierra es muy inferior a los términos medidos por los sensores. De este modo, el despreciar estos términos no influye en los resultados, dado que la precisión de los sensores no es suficiente para calcularlos de forma correcta.

Dinámica de las maniobras

Cuando se dispone de un bajo nivel de precisión en los sensores, como es el caso que se trata en este proyecto, unas maniobras altamente dinámicas mejoran los resultados de la integración, dado que el error relativo en la medición de los valores de los acelerómetros y giróscopos será menor. Por otra parte, este tipo de maniobras suelen favorecer la aparición de vibraciones, que pueden causar efectos no deseados.

Los efectos de la vibración sobre la navegación inercial pueden resumirse en dos casos, el movimiento de conicidad (coning) y el movimiento de remo (sculling) ([5]).

El movimiento de conicidad es una oscilación angular sincronizada alrededor de dos ejes ortogonales. Si las mediciones de un set de 3 giróscopos ortogonalmente situados, se integran en un intervalo de tiempo τ , en presencia de un movimiento de conicidad con frecuencia angular ω_c , amplitudes angulares θ_i y θ_j , y una diferencia de fase ϕ entre los dos ejes, se puede demostrar que una falsa rotación $\delta\omega_c$ es medida alrededor del eje ortogonal a θ_i y θ_j . En la figura 18 se muestra una representación gráfica del movimiento de conicidad.

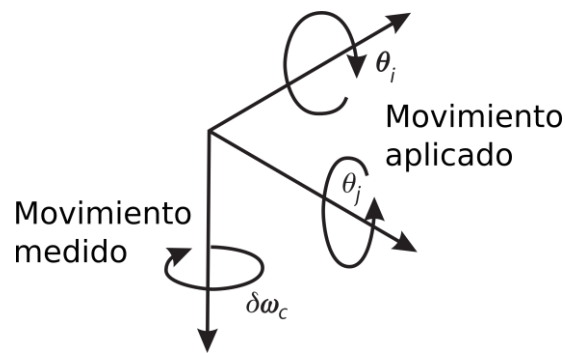


Figura 18. Movimiento de conicidad.

La expresión para calcular la falsa rotación medida, es la siguiente:

$$\delta\omega_c = \omega_c \theta_i \wedge \theta_j \sin \phi \left(1 - \frac{\sin \omega_c \tau}{\omega_c \tau} \right) \quad (2.71)$$

Esto ocurre debido a que la integración de las mediciones de los giróscopos no tiene en cuenta la variación de la orientación del sistema del cuerpo con respecto al espacio inercial en el periodo de integración. El error de conicidad $\delta\omega_c$ no oscila, por lo que la solución de orientación se desvía con un error de conicidad constante. Cuanto mayor sea la frecuencia de este movimiento de conicidad y mayor sea el intervalo de tiempo en el que se integren las mediciones, mayor será la desviación en la solución de orientación.

El movimiento de remo es una oscilación angular alrededor un eje sincronizada con una oscilación lineal a lo largo de un eje ortogonal. Como resultado de esto, aparece un error en la medición de uno de los ejes del acelerómetro. Si la frecuencia angular de este movimiento es ω_s y la amplitud de la aceleración es a_j , una aceleración falsa δa_s es medida en el eje ortogonal a θ_i y a_j . En la figura 19 se muestra una representación de este movimiento.

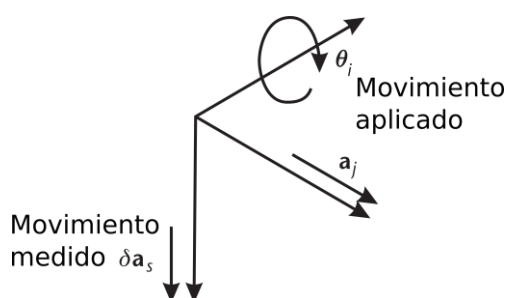


Figura 19. Movimiento de remo.

La expresión para el cálculo de la falsa aceleración medida es la siguiente:

$$\delta a_s = \frac{1}{2} \theta_i \wedge a_j \cos \phi \left(1 - \frac{\sin \omega_s \tau}{\omega_s \tau} \right) \quad (2.72)$$

De forma similar al movimiento de conicidad, el movimiento de remo no oscila, por lo que produce una desviación constante en la solución de navegación.

Los errores producidos por los movimientos de remo y conicidad pueden verse disminuidos si se aumenta la frecuencia de muestreo de los sensores, dado que la disminución del tiempo entre iteraciones supone una disminución considerable de estos. Además de aumentar esta frecuencia de muestreo, se deben muestrear acelerómetros y giróscopos al mismo tiempo y con la misma frecuencia, dado que una diferencia en los tiempos entre iteraciones hace que sea necesario implementar en nuestro algoritmo las ecuaciones de corrección de estos dos errores.

Aunque teóricamente estos errores son constantes, en sistemas reales no suele ocurrir esto, por lo que la solución de navegación puede verse empeorada debido a sus efectos. En estos casos es muy difícil calcular cual es la magnitud de estos errores, especialmente cuando se trata con unos sensores de baja calidad o nos encontramos en un entorno altamente dinámico.

2.2.3. Inicialización y alineamiento

Como se muestra en la figura 16, para la integración en un paso de tiempo de las mediciones de los sensores, se toma como punto inicial la solución del paso de

tiempo anterior. Dado que en el instante inicial no se conoce la solución anterior, se debe realizar un proceso de inicialización. Para ello, la posición y velocidad inicial ha de ser proporcionada al sistema por una fuente externa. Mientras tanto, la inicialización de la orientación puede ser obtenida de dos formas distintas, bien proporcionándosela al sistema de por una fuente externa, al igual que posición y velocidad, o bien calculándola a partir de la medición de la aceleración de la gravedad a partir de los sensores, con lo que se puede obtener de forma más o menos precisa la orientación. Para realizar este proceso existen varios métodos que son aplicables únicamente a sensores con una precisión alta. Debido a que en este proyecto se utilizan sensores MEMS, que carecen de la precisión necesaria para llevar a cabo estos métodos de inicialización, se lleva a cabo un proceso de inicialización simple, en el cual se supone que el sistema del cuerpo y el sistema Local (ENU) se encuentran alineados en el instante inicial. Con esta suposición, tenemos que:

$$\mathbf{C}_{b_0}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

2.2.4. Errores del INS

Los errores en la solución de navegación inercial proceden de tres fuentes. La principal fuente de error son los errores en las mediciones de acelerómetros y giróscopos, seguidos de las limitaciones en el tiempo entre iteraciones, y de los errores de inicialización. Las ecuaciones de navegación integran los bias en acelerómetros y giróscopos, produciendo errores en velocidad, posición y orientación que crecen en el tiempo. De forma similar, el error en la inicialización de la velocidad es integrado produciendo un error en posición creciente. Con todo esto, la solución de navegación inercial se puede ver claramente empeorada.

El error en la solución del INS es simplemente la diferencia entre la cantidad indicada por el INS, que se marcará con un “~”, y la cantidad real. Así, los errores en posición y velocidad cartesiana son los siguientes:

$$\delta \mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\gamma} = \tilde{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^{\gamma} - \mathbf{r}_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (2.74)$$

$$\delta \mathbf{v}_{\beta\alpha}^{\gamma} = \tilde{\mathbf{v}}_{\beta\alpha}^{\gamma} - \mathbf{v}_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (2.75)$$

Para el cálculo del error en orientación se emplean matrices de rotación, siendo su expresión la siguiente:

$$\delta \mathbf{C}_{\alpha}^{\beta} = \tilde{\mathbf{C}}_{\alpha}^{\beta} \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} \quad (2.76)$$

En caso de aplicar la aproximación para ángulos pequeños, podemos expresar el error en orientación como el vector $\delta \boldsymbol{\psi}_{\beta\alpha}^{\gamma}$. Así, puede calcularse como:

$$[\delta \boldsymbol{\psi}_{\beta\alpha}^{\alpha} \wedge] \approx \mathbf{I}_3 - \delta \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} \quad (2.77)$$

Los errores en acelerómetros y giróscopos son:

$$\delta \mathbf{f}_{ib}^b = \tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b - \mathbf{f}_{ib}^b \quad (2.78)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (2.79)$$

2.3. Sistemas de navegación por satélite

Los sistemas de navegación por satélite son conocidos por proporcionar al usuario un posicionamiento tridimensional utilizando señales de radio transmitidas por satélites en órbita. Los más conocidos a día de hoy son GPS (Global Positioning System), GLONASS (Global Navigation Satellite System) o Galileo (Todavía en desarrollo). En general, se conocen como GNSS (Global Navigation Satellite System) todos estos sistemas que utilizan satélites en órbita para obtener la posición de un objeto.

En este apartado se tratará el funcionamiento general de los GNSS, centrándose especialmente en el GPS, que es el utilizado posteriormente en este proyecto.

2.3.1. Fundamentos de la navegación por satélite

Antes de centrarse en el sistema GPS, se deben introducir tres conceptos principales. El primero es la arquitectura de un sistema GNSS, incluyendo los segmentos: espacial, de control y de usuario y sus funciones. Tras esto cabe describir la determinación de la posición y velocidad del usuario a partir de la medición de la distancia transcurrida entre el satélite y el receptor (Ranging Measurement) y las fuentes de error que actúan sobre estas. Finalmente se comenta la estructura de las señales de GNSS y como se utilizan estas.

Arquitectura de un GNSS

Un GNSS está formado principalmente por tres componentes: el segmento espacial, el segmento de control o segmento terrestre, y el segmento de usuario, que comprende distintos elementos de equipamiento del usuario.

El segmento espacial está formado por los satélites, que en conjunto forman lo conocido como constelación, y que envían señales a los segmentos de control y de usuario. Los satélites que utilizan los principales GNSS están distribuidos alrededor de Órbitas Terrestres Medias (MEO) inclinadas alrededor de 60° con respecto al ecuador. Estas órbitas, comparadas con las geostacionarias, nos proporcionan una mejor geometría de la señal y una mayor cobertura en las regiones polares.

El segmento de control está constituido por una red estaciones de monitorización, una o más estaciones de control y varias estaciones de enlace. Las estaciones de monitorización se encuentran en lugares cuyas ubicaciones están establecidas de forma precisa, y dentro de las mismas se sitúan relojes sincronizados, que permiten conocer la relación de tiempo entre la recepción de la señal del satélite y el momento de su utilización, para no incurrir en errores. Estos relojes también son utilizados para calibrar los relojes que van a bordo de cada uno de los satélites en órbita. Estas estaciones de monitorización reciben señales de los satélites y las envían a las

estaciones de control. Las estaciones de control realizan cálculos a partir de los datos disponibles de cada satélite para determinar que maniobras deberá realizar cada uno de ellos, y envían esta información a las estaciones de enlace, que transmiten esta información a los satélites ([8]).

El equipamiento de usuario de un GNSS está constituido por una antena, un receptor, un procesador de distancias y un procesador de navegación. La antena convierte las señales de radio de entrada en señales eléctricas. Estas señales son entrada para el receptor, que desmodula las señales utilizando un reloj que proporciona una referencia de tiempo. El procesador de distancias utiliza algoritmos de adquisición y seguimiento para determinar la distancia recorrida por las señales desde cada uno de los satélites hasta la antena. Finalmente, el procesador de navegación utiliza las mediciones del procesador de distancias para determinar una solución de posición, velocidad y tiempo (PVT). En la figura 20 se muestra un diagrama de bloques de la arquitectura de un GNSS.

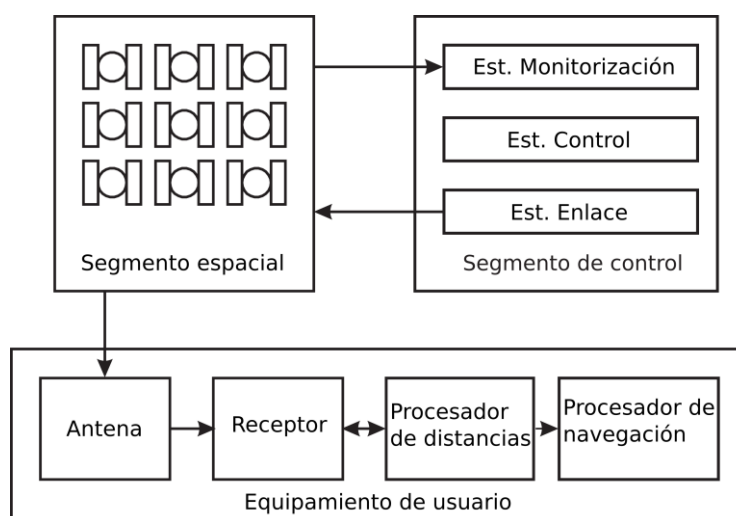


Figura 20. Arquitectura de un GNSS.

Posicionamiento

La solución de posición de un GNSS es obtenida a partir de la determinación pasiva de las distancias recorridas por las señales que envían los satélites. Así, el tiempo de recepción de una señal t_{sa} , es determinado por el reloj del receptor, mientras que el tiempo de transmisión de la señal t_{st} es determinado a partir de la señal enviada por

el satélite. Cuando los relojes del receptor y el satélite están sincronizados, la distancia ρ entre el satélite y el usuario, conocida como rango, es medida por el equipamiento de usuario, y obtenida por diferenciación de los tiempos de transmisión y recepción, y multiplicando posteriormente por la velocidad de la luz c .

$$\rho_j = (t_{sa,j} - t_{st,j})c \quad (2.80)$$

En esta expresión, el índice j se utiliza para contabilizar el número de satélites. Cuando se utiliza la señal de un único satélite ($j = 1$), la posición del usuario puede estar en cualquier lugar de una esfera de radio ρ con centro en el satélite en cuestión. En el caso de utilizar dos señales de dos satélites distintos, ρ_1 y ρ_2 , la posición del usuario estará situada en cualquier parte del círculo de intersección entre dos esferas de radio ρ_1 y ρ_2 . Si se añade una tercera señal, limitamos la posición a únicamente dos puntos en el círculo comentado anteriormente. En la mayoría de las aplicaciones, uno de estos puntos no tendrá sentido como solución en la práctica, ya que se encontrará en el interior de la Tierra, en el espacio, o simplemente fuera del rango de operación del usuario. Cuando ambas soluciones son viables, ha de introducirse una cuarta señal para resolver la ambigüedad en la determinación de la posición. Los resultados obtenidos según el número de señales disponibles se representan gráficamente en la figura 21.

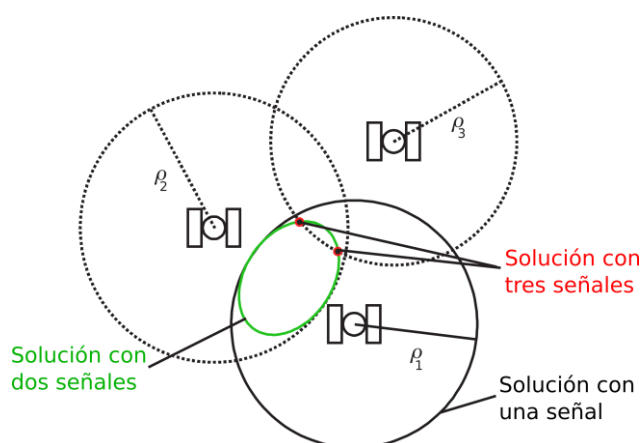


Figura 21. Solución de posicionamiento dependiendo del número de señales.

En la práctica, los relojes situados en el receptor y en el satélite no están completamente sincronizados. Si el reloj del receptor va por delante del situado en el satélite, el tiempo de recepción medido $\tilde{t}_{sa,j}$ será superior al tiempo real de recepción $t_{sa,j}$, lo que tiene como resultado una sobreestimación de la distancia recorrida por la señal. En caso contrario, si el reloj del satélite va adelantado con respecto al del receptor, el tiempo real de transmisión $t_{st,j}$ será inferior al tiempo de transmisión medido $\tilde{t}_{st,j}$, lo que tiene como resultado una infraestimación de la distancia recorrida por la señal. Si el reloj del receptor va adelantado un δt_{rc} y el reloj de un satélite j va adelantado un δt_{sj} , el error en la medición de la distancia $\delta \rho_j$, sin tener en cuenta otras fuentes de error es:

$$\delta \rho_j = (\delta t_{rc} - \delta t_{sj})c = \tilde{\rho}_{Rj} - \rho_j \quad (2.81)$$

Donde $\tilde{\rho}_{Rj}$ es el valor de la distancia medida o pseudo-rango.

Las solución de navegación de un GNSS, además de verse afectada por la falta de sincronía entre los distintos relojes, puede verse afectada por otros factores. Entre ellos está la propagación de la señal a través de ionosfera y troposfera, los errores en la recepción de la señal por causa de la dinámica de las maniobras, los ruidos en el receptor o las interferencias con otras ondas como las de radio. Además de esto las señales de GNSS pueden ser bloqueadas por edificios, terreno montañoso o partes del vehículo que transporta el sistema. Debido a todas las fuentes de error que pueden influir en la solución de navegación, esta suele tener una precisión de unos pocos metros.

2.3.2. GPS (Global Positioning System)

Como ya se comentó al inicio del proyecto, el GPS fue desarrollado por los Estados Unidos con fines militares, y a día de hoy se ha liberalizado su uso con fines civiles, siendo este uno de los sistemas de posicionamiento global más utilizados. En este apartado se describen los segmentos espacial y de control de este sistema, y tras esto se describen las señales empleadas por el mismo.

Segmento Espacial y Segmento de Control

El GPS opera con una constelación nominal de 24 satélites, que puede llegar a estar formada por un máximo de 36. Todos los satélites operacionales proporcionan la totalidad de los servicios del sistema, en lugar de mantener alguno en reposo para cubrir algún error en los funcionales. Han existido numerosas generaciones de satélites, y se planea poner en órbita nuevas generaciones. Una lista de estos satélites es la mostrada en la tabla 1.

Satélites	Fecha de lanzamiento	Número de satélites
Block I	1978-1985	10
Block II	1989-1990	9
Block IIA	1990-1997	19
Block IIR	1997-2004	12
Block IIR-M	2005-2008	8
Block IIF	A partir de 2010	12 (7 lanzados, 6 operativos)
Block III	Previsto finales 2015	Previsto 32

Tabla 1. Generaciones de satélites GPS.

Los satélites Block I fueron los primeros prototipos lanzados al espacio, mientras que las siguientes generaciones fueron las que dieron capacidad operacional al sistema. Los satélites Block IIA y siguientes utilizan un sistema de control de la orientación para mantener sus órbitas con una menor intervención del segmento de control. Los Block IIR incorporan el sistema de navegación automática Autonav, que les permite actualizar los datos de navegación mediante posicionamiento entre satélites, y sin intervención alguna del segmento de control. En los satélites posteriores a estos se ha incluido la emisión de nuevas señales adicionales. En los Block III se introduce una emisión de mayor potencia.

Los satélites GPS orbitan en un radio de 26,600 km (20,100 km sobre la superficie de la Tierra) con un periodo de aproximadamente medio día sideral (11 horas y 58 minutos) con respecto al espacio inercial. La constelación tiene un movimiento de precesión con respecto a la superficie terrestre de aproximadamente 4 minutos por día solar. Los satélites se encuentran en seis planos orbitales, cada uno de ellos inclinado 55° con respecto al anterior comenzando por el plano ecuatorial, y separados entre ellos por 60° de longitud. Cada plano contiene al menos 4 satélites,

que no están igualmente espaciados. Entre el primero y el segundo existe un ángulo de 30° , mientras que los siguientes se encuentran a 92° y 137° , si el plano contiene el número mínimo de satélites. Esto está diseñado para minimizar el efecto de la pérdida de la señal de uno de los satélites. En la figura 22 se muestra una representación gráfica de estas órbitas.

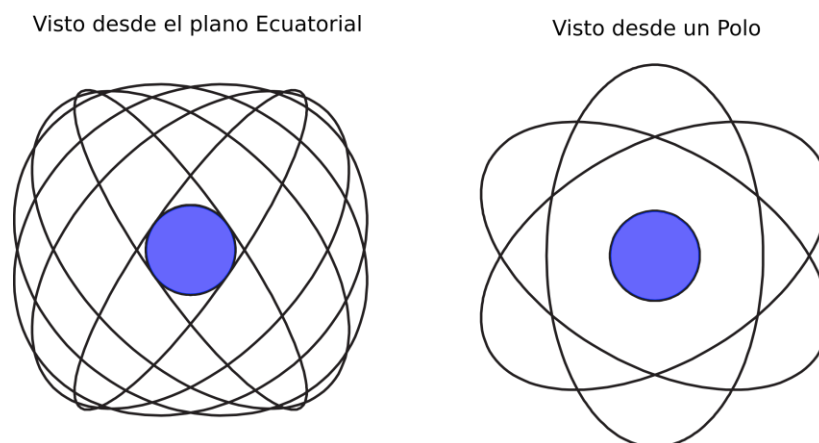


Figura 22. Órbitas de los satélites GPS.

Con una constelación de satélites típica, entre 5 y 14 satélites son visibles en cualquier instante, suponiendo que tengamos una línea de visión despejada. La visibilidad de los satélites es superior en las regiones polares y ecuatoriales, e inferior en latitudes medias.

Señales

Existen 10 tipos distintos de señales GPS, transmitidas a través de 3 bandas distintas, conocidas como link 1, link 2 y link 5 (L1, L2, L5). Las frecuencias de transmisión son 1575.42 MHz para L1, 1227.60 MHz para L2 y 1176.45 MHz para L5, mientras que el ancho de banda es de 30.69 MHz. Los satélites también pueden emitir una señal de 1381.05 MHz (L3), pero no se utiliza para navegación, sino que su fin es la detección de detonaciones nucleares.

Según la señal que se utilice, podremos tener una precisión distinta y una mayor o menor facilidad para adquirirla. Normalmente, cuanto mayor es la precisión de la señal, más difícil es su adquisición por parte del equipamiento de usuario.

Dependiendo de las señales utilizadas, se puede distinguir entre dos servicios, el PPS y el SPS.

- El PPS o Servicio de Posicionamiento Preciso está disponible únicamente para algunos usuarios autorizados y equipados con dispositivos criptográficos, claves y receptores especiales. Este sistema está reservado al ejército de los Estados Unidos y sus aliados, ciertas agencias estatales del gobierno y algunos civiles a los cuales el gobierno les ha facilitado el acceso. La precisión de este sistema es de 1.2 metros en sentido horizontal y 1.9 metros en sentido vertical. Su precisión temporal es de 10 nanosegundos.
- El SPS o Servicio de Posicionamiento Estándar está disponible en todo el mundo para los usuarios civiles sin cargo ni restricciones. La precisión del SPS actualmente es de 3.8 metros en sentido horizontal y 6.2 metros en sentido vertical. Su precisión temporal es de 340 nanosegundos. En la actualidad está sufriendo un proceso de modernización con el que se espera que alcance la precisión del PPS.

En la tabla 2 se muestra una lista de las señales disponibles actualmente para ambos servicios.

Señal	Banda	Servicio	Generación de Satélites
C/A	L1	SPS/PPS	Todas
P(Y)	L1	PPS	Todas
M code	L1	PPS	A partir de IIR-M
L1C-d	L1	PPS	A partir de III
L1C-p	L1	PPS	A partir de III
L2C	L2	SPS	A partir de IIR-M
P(Y)	L2	PPS	Todas
M code	L2	PPS	A partir de IIR-M
L5I	L5	SPS	A partir de IIF
L5Q	L5	SPS	A partir de IIF

Tabla 2. Propiedades de las señales de GPS.

La señal C/A (coarse/adquisition) es la más simple de obtener por un usuario civil, aunque su precisión es de las menores. La señal P(Y) (encrypted precise) y la M code (Military code) se transmiten por dos bandas distintas, siendo ambas de utilización restringida, la primera para usuarios civiles autorizados por el gobierno y la segunda

únicamente para fines militares. Las señales de uso restringido que se están implementando para un uso tanto civil como militar son las L1C-d y L1C-p, que estarán disponibles para su uso civil en unos años. Las señales para uso civil transmitidas por la banda L5 son más complejas de adquirir que las transmitidas por banda L1, y no representan una mejora de la precisión, por lo que son menos utilizadas.

2.4. El filtro de Kalman

El filtro de Kalman (KF a partir de aquí) sirve como base para un gran número de algoritmos de estimación utilizados en navegación. Sus funciones incluyen la de mantener una solución de navegación por satélite suavizada, el alineamiento y calibración de INS, y la integración de INS con equipamiento de usuario de GNSS. Esta integración es clave en la obtención de una solución de navegación óptima a partir de las mediciones disponibles en el sistema de navegación.

En este apartado se realiza una introducción al KF y se explican las distintas implementaciones posibles del mismo. Además de esto se explican los distintos modelos matemáticos utilizados.

2.4.1. Introducción

El filtro de Kalman, pese a ser llamado filtro, es un algoritmo de estimación. La técnica inicial fue inventada por Rudolf E. Kalman en 1960 y desarrollada por numerosos autores posteriormente. Este algoritmo realiza estimaciones en tiempo real de distintos parámetros de un sistema, como por ejemplo posición y velocidad, que pueden cambiar continuamente. Las estimaciones son actualizadas a partir de distintas mediciones realizadas sobre el sistema, que pueden contener ruidos. Estas mediciones son realizadas por sensores, y han de ser función de los parámetros estimados. No es necesario que las mediciones contengan en todos los pasos de tiempo suficiente información para determinar los valores de los parámetros.

El KF utiliza el conocimiento de las propiedades determinísticas y estadísticas de los parámetros del sistema y de las mediciones para obtener estimaciones óptimas de sus estados a partir de la información disponible. El KF incluye una incertidumbre sobre las estimaciones realizadas y una medida de las correlaciones entre los errores en las estimaciones de los distintos parámetros.

El KF es una técnica de estimación Bayesiana. Se le proporciona un grupo de estimaciones iniciales y este opera de forma recursiva, actualizando las estimaciones en función de los valores previos y de los nuevos obtenidos de las últimas mediciones. Este asume que el sistema en estudio es lineal, lo que lleva a realizar ciertas asunciones descritas posteriormente. Para aplicaciones en tiempo real, como es el caso de la navegación, el enfoque recursivo de este algoritmo es más eficiente, dado que solo se deben procesar los datos de las nuevas mediciones en cada iteración.

Elementos y fases del filtro de Kalman

El KF está compuesto por 5 elementos principales: el vector de estados y su covarianza, el modelo del sistema, el vector de mediciones y su covarianza, el modelo de mediciones y el algoritmo.

El vector de estados es un grupo de parámetros que describen el sistema, conocidos como estados, que son estimados por el KF. Un estado puede ser constante o variable en el tiempo. Asociada a este vector de estados va la matriz de covarianza del error, que representa la incertidumbre sobre las estimaciones de los estados del KF, y el grado de correlación entre los errores en esas estimaciones. Conocer estas correlaciones es de vital importancia en algunos casos, dado que en ocasiones no existe suficiente información para estimar cada uno de los estados de forma independiente. Dado que el KF es un procedimiento iterativo, los valores iniciales del vector estados y de la matriz de covarianza del error han de ser proporcionados por el usuario o determinados por un proceso externo al KF.

El modelo del sistema, también conocido como modelo de propagación en el tiempo, describe la variación en el tiempo del vector de estados y de la matriz de covarianza

del error. Como ejemplo, un estado de posición varía con el tiempo como la integral del estado de velocidad, la incertidumbre de la posición aumenta con el tiempo como la integral de la incertidumbre de la velocidad. Con esto, se puede ver que los errores en la estimación de la velocidad y la posición están correlacionados. El modelo del sistema es determinista para los estados, dado que está basado en propiedades conocidas del sistema. Asociado a este modelo está el ruido del sistema, que hace que la incertidumbre de los estados pueda aumentar con el tiempo debido a cambios desconocidos en el sistema, que hacen que la estimación de los estados sea errónea. Este ruido suele venir de los sensores o de parámetros dinámicos de los cuales no tenemos información. Este ruido y sus propiedades estadísticas han de ser previamente estimados por el diseñador del filtro de Kalman.

El vector de mediciones está formado por un grupo de mediciones de las propiedades del sistema realizadas en el mismo paso de tiempo, que son función del vector de estados. A partir de la información de este vector se calculan las estimaciones de los estados después de la inicialización. Asociada a este vector de mediciones está la matriz de covarianza del ruido en las mediciones, que define las propiedades estadísticas del ruido en las mediciones realizadas.

El modelo de mediciones describe la variación del vector de mediciones como función del vector de estados real (no el estimado) en ausencia de ruido en las mediciones. Al igual que el modelo del sistema, este es determinístico, dado que se basa en propiedades conocidas del sistema.

El algoritmo del KF emplea el vector de mediciones, el modelo de mediciones, y el modelo del sistema para calcular las estimaciones óptimas del vector de estados. En cada iteración, el algoritmo realiza 10 pasos, donde los 4 primeros forman la fase de propagación, y los 6 siguientes la fase de actualización. Los parámetros que hayan pasado la fase de propagación, se indican con un superíndice $-$, como \mathbf{x}^- , mientras que los que provienen de la fase de actualización se indican con un superíndice $+$, como \mathbf{x}^+ . Los pasos que forman estas fases se explican posteriormente en el apartado que trata el algoritmo de Kalman.

2.4.2. Algoritmos y modelos

Antes de comenzar a describir el algoritmo del KF, cabe realizar una serie de definiciones previas. Se asume que la variación con respecto al tiempo de los errores modelados con un KF se encuentra dentro de estas tres categorías: errores sistemáticos, ruido blanco Gaussiano o procesos de Markov.

Los errores sistemáticos se suponen constantes, lo que quiere decir que tienen una correlación del 100% en el tiempo.

Mientras tanto, las muestras de ruido blanco Gaussiano tomadas en distintos instantes de tiempo no tienen correlación alguna. Así, en el caso del ruido blanco Gaussiano se cumple que:

$$E(w_i(t_1)w_i(t_2)) = 0 \quad t_1 \neq t_2 \quad (2.82)$$

Donde E es el operador valor esperado. La varianza de un ruido blanco Gaussiano continuo, integrado en un intervalo de tiempo τ es:

$$\begin{aligned} \sigma_{wr}^2 &= E\left(\iint_{t-\tau}^t w_i(t')w_i(t'')dt'dt''\right) = E\left(\iint_{t-\tau}^t w_i^2(t')\delta_{t't''}dt'dt''\right) \\ &= \int_{t-\tau}^t n_i^2 dt' = n_i^2 \tau \end{aligned} \quad (2.83)$$

Donde δ es la función delta de Kronecker y n_i^2 es la densidad espectral de potencia (PSD) de w_i , que es la varianza por unidad de amplitud. En general, la PSD es función de la frecuencia. El ruido en el filtro de Kalman se supone Gaussiano, lo que quiere decir que tiene una distribución Gaussiana de media cero.

Los procesos de Markov son procesos que varían lentamente con el tiempo. Un proceso de Markov de primer orden puede representarse como función de su valor

previo y de su ruido. Cuando se conocen las propiedades de un proceso de Markov, se puede modelar en un KF ([9]).

Todas las fuentes de ruido en un filtro de Kalman se suponen ruidos blancos, teniendo en cuenta que los procesos de Markov tienen una componente de ruido blanco. En la realidad, los ruidos presentes en un KF no encajan de forma exacta en ninguna de estas categorías, pero podemos aproximarlos como tales, siendo siempre lo más adecuado sobreestimarlos.

El grupo de parámetros estimados por el KF es conocido como vector de estados, y se representa por \mathbf{x} . Así, la estimación del vector de estados realizada por el KF se representa por $\hat{\mathbf{x}}$, donde el símbolo $\hat{}$ representa una estimación, y es utilizado para indicar todas las magnitudes estimadas o calculadas a partir de las mismas.

En el momento de aplicar el KF, existen dos formas de hacerlo, la directa y la indirecta, también conocidas como total-state y error-state ([10]). En la formulación directa se utilizan propiedades absolutas como posición u orientación y las mediciones de los sensores. Mientras tanto en la formulación indirecta del KF se estiman los errores en estas magnitudes.

La utilización de la formulación directa en este proyecto tiene varias desventajas debido a que se deben conocer en todo momento las propiedades del vehículo en el cual se implemente en el sistema para que sea posible su utilización. Esto lleva a que sea muy difícil modelar el sistema, lo que dificulta en gran medida su aplicación, dado que no se puede realizar un modelo lineal del sistema.

Debido a las ventajas existentes en la aplicación de la formulación indirecta, esta es la utilizada en este proyecto, y se describe a continuación.

En la formulación indirecta se utilizan como estados los errores, por lo que el vector de estados es $\delta\mathbf{x}$, también conocido como vector de estados residual, que es calculado como:

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (2.84)$$

Este vector de estados residual representa los errores que existen en el sistema después de haber utilizado de utilizar las estimaciones del KF hayan sido utilizados para corregirlos. Para obtener los errores en las estimaciones, simplemente tenemos que cambiar el signo al vector de estados residual.

La matriz de covarianza del error, \mathbf{P} , ya descrita anteriormente, viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{P} = E(\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}^T) \quad (2.85)$$

Los elementos de la diagonal de \mathbf{P} son las varianzas de cada estado estimado, siendo sus raíces cuadradas las incertidumbres. Los elementos fuera de la diagonal son las covarianzas, que expresan la correlación entre los errores en los distintos elementos del vector de estados. Cuando no existe suficiente información de las mediciones para estimar los estados de forma independiente, la correlación entre los mismos suele ser significativa debido a que se establecen relaciones lineales entre los mismos.

El vector de mediciones, \mathbf{z} , es un grupo de mediciones de propiedades del sistema descritas por el vector de estados. Este está compuesto por una función determinística $h(\mathbf{x})$ y un ruido w_m . Así, podemos expresarlo como:

$$\mathbf{z} = h(\mathbf{x}) + w_m \quad (2.86)$$

En la implementación indirecta del KF, no se utiliza el vector de mediciones dentro del filtro en sí, sino que se utiliza para calcular la innovación, $\delta\mathbf{z}^-$, que viene dada por la siguiente expresión:

$$\delta\mathbf{z}^- = \mathbf{z} - h(\hat{\mathbf{x}}^-) \quad (2.87)$$

La innovación es la diferencia entre los sensores reales y las estimaciones realizadas de los parámetros medidos por los sensores. Esta diferencia es una mezcla entre los errores en la estimación de los estados y los errores en las mediciones, y no tiene correlación con las estimaciones.

La matriz de mediciones \mathbf{H} , define el cambio del vector de mediciones en función del vector de estados. En un KF estándar se asume que la relación entre ambos es lineal.

El KF asume que estos errores en las mediciones forman una distribución Gaussiana de media cero y no correlacionados, modelando sus desviaciones estándar con la matriz de covarianza del ruido en las mediciones, \mathbf{R} . Esta viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{R} = E(w_m w_m^T) \quad (2.88)$$

Los términos de la diagonal de \mathbf{R} son las varianzas de cada medición, y los elementos de fuera de la diagonal representan la correlación entre los distintas componentes del ruido en las mediciones. Normalmente no existe correlación entre los ruidos en las mediciones, por lo que la matriz \mathbf{R} suele ser diagonal.

La matriz de transición Φ , define el cambio del vector de estados con el tiempo en función de los parámetros dinámicos del sistema modelados por el KF. Esta es función del modelo del sistema, representado por la matriz del sistema \mathbf{F} , y del intervalo de tiempo entre iteraciones τ_s .

La matriz de covarianza del ruido del sistema, \mathbf{Q} , define el crecimiento en el tiempo de las incertidumbres de las estimaciones de los estados debido a las fuentes de ruido en el sistema modelado por el KF. Esta matriz es siempre función de τ_s . Es común que esta matriz sea diagonal y constante, por lo que en muchas ocasiones se calcula una vez y se utiliza como una constante a partir de ese momento.

La matriz de ganancia de Kalman \mathbf{K} , se utiliza para determinar el peso de las mediciones a la hora de actualizar las estimaciones de los estados. Esta es función de

la matriz de covarianza del error \mathbf{P} , la matriz de mediciones \mathbf{H} , y la matriz de covarianza del ruido en las mediciones \mathbf{R} .

Algoritmo

Como ya se ha comentado anteriormente, el algoritmo del KF se divide en dos fases, la de propagación y la de actualización, estando formado por un total de 10 pasos. En la figura 23 se muestra un diagrama de bloques con todos los pasos que componen el algoritmo del filtro de Kalman.

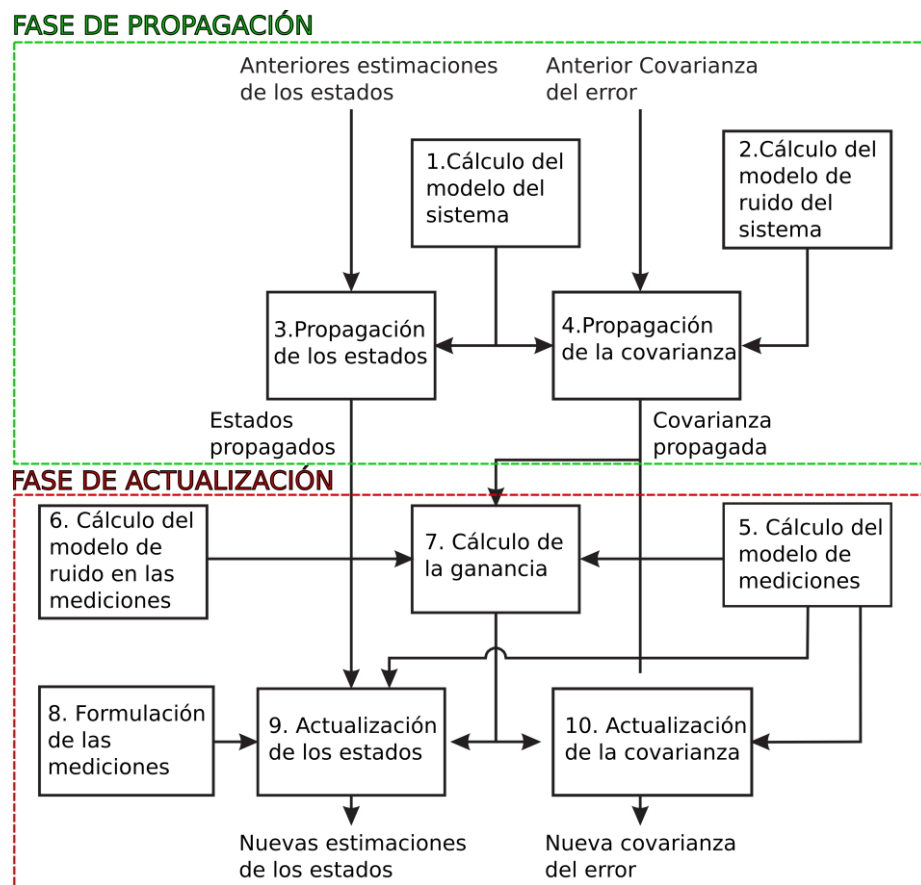


Figura 23. Algoritmo y fases del filtro de Kalman.

En la fase de propagación se realiza una predicción de la estimación del vector de estados y de la matriz de covarianza del error utilizando los últimos estados estimados y las propiedades conocidas del sistema. En ausencia de nuevas mediciones, solamente se lleva a cabo esta fase, y no se realiza la actualización, lo

que proporciona al KF la mejor estimación posible del vector de estados en ese instante. Esta fase de propagación está compuesta por los siguientes pasos:

- Cálculo del modelo del sistema: En este paso se lleva a cabo el cálculo de la matriz de transición Φ_{k-1} en función de la matriz del sistema F_{k-1} , que depende del sistema que estemos tratando. La matriz de transición se calcula de la siguiente forma:

$$\Phi_{k-1} = \exp(F_{k-1}\tau_s) \quad (2.89)$$

- Cálculo del modelo de ruido del sistema: En este paso se calcula la matriz de covarianza del ruido del sistema Q_{k-1} . En muchos casos este paso no se realiza, dado que se precalcula esta matriz debido a que tiende a ser constante. En caso de calcularla, se haría según la siguiente expresión:

$$Q_{k-1} = \text{diag}(n_i^2\tau_s) \quad (2.90)$$

Donde n_i^2 son las PSD de cada una de las variables que forman el vector de estados.

- Propagación de los estados: esta se realiza en el tiempo en función de la matriz de transición Φ_{k-1} , quedando la siguiente expresión.

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (2.91)$$

En el caso de trabajar con la formulación indirecta, en lugar del vector de estados estimados, iría el vector de estados estimados residual, con lo que la expresión quedaría:

$$\delta\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_{k-1}\delta\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (2.92)$$

- Propagación de la covarianza: En este paso se realiza la propagación de la matriz de covarianza \mathbf{P}_{k-1}^+ . La forma más simple de realizar la propagación de la misma es la siguiente:

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{\Phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{\Phi}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.93)$$

En esta expresión, la primera $\mathbf{\Phi}$ propaga las filas de la matriz de covarianza del error, mientras que la segunda $\mathbf{\Phi}^T$ propaga las columnas.

Tras la fase de propagación, si en el instante de tiempo en el que nos encontramos existe una nueva medición, se lleva a cabo la fase de actualización. En esta fase se actualiza la estimación del vector de estados y la matriz de covarianza del error para incluir las nuevas mediciones realizadas. Esta fase está formada por los siguientes pasos:

- Cálculo del modelo de mediciones: En este paso se calcula la matriz de mediciones \mathbf{H}_k . En un filtro de Kalman se supone que cada medición es función lineal del vector de estados. Por esto, la matriz de mediciones \mathbf{H}_k suele depender de las propiedades dinámicas del sistema en estudio, y suele ser constante. Por esto, esta matriz no tiene una expresión para calcularla, sino que depende de las mediciones realizadas y de los parámetros existentes en el vector de estados.
- Cálculo del modelo de ruido en las mediciones: En este paso se realiza el cálculo de la matriz de covarianza del ruido en las mediciones \mathbf{R}_k . Esta normalmente se asume constante en lugar de modelarla como función de los ruidos de las mediciones. Esto se debe en gran medida a la dificultad de modelar estos ruidos.
- Cálculo de la ganancia: El cálculo de la matriz de ganancia de Kalman \mathbf{K}_k se realiza para determinar el peso con el que se ponderan las nuevas mediciones realizadas en la actualización de los estados. La expresión por la cual se calcula la misma es la siguiente:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.94)$$

- Formulación de las mediciones: En este paso se forma el vector de mediciones \mathbf{z}_k en función de las mediciones tomadas en la última iteración. En el caso de la formulación indirecta del KF, se realiza el cálculo de la innovación $\delta \mathbf{z}_k^-$ de la forma expresada en (2.81).
- Actualización de los estados: Esta se realiza corrigiendo los estados estimados a partir de la matriz de ganancia de Kalman \mathbf{K}_k que realiza la ponderación de la innovación calculada en el paso anterior. La estimación de los estados se actualiza de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.95)$$

Para el caso de la formulación indirecta, la expresión sería la siguiente:

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \delta \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \delta \mathbf{z}_k^- \quad (2.96)$$

- Actualización de la covarianza: En este paso se realiza la actualización de la matriz \mathbf{P}_k^- siguiendo la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.97)$$

Tras la actualización, como ya se ha actualizado también el vector de estados, la incertidumbre sobre los estados actualizados es menor. En el caso de que el método utilizado para el cálculo de las matrices de las que depende la actualización no sea lo suficientemente preciso, se utiliza la versión estabilizada de Joseph, que sigue la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (2.98)$$

La versión estabilizada de Joseph nos garantiza que la matriz que resulta de la actualización sea simétrica, condición indispensable para el correcto funcionamiento del KF.

2.4.3. Implementación práctica

A la hora de llevar a cabo la implementación práctica de un KF hay que tener en cuenta gran número de factores que afectan al funcionamiento del mismo. Entre ellos se encuentran los ruidos, factor decisivo para el funcionamiento estable del filtro. Además de esto también se debe tratar de realizar un algoritmo lo más eficiente posible para así poder ejecutarlo en tiempo real. Otro de los problemas existentes en la implementación de un KF es la correcta sincronización de los datos recibidos tanto de las salidas del filtro como de los sensores utilizados. En este apartado se realiza una explicación de los problemas principales encontrados durante la implementación práctica de un KF.

Ajuste y estabilidad

Ajustar los parámetros influyentes en un KF es tarea del diseñador del mismo, y consiste básicamente en la selección correcta de los valores dados por el usuario de tres matrices ([5], [11]). Estas tres matrices son: la matriz de covarianza del ruido del sistema \mathbf{Q}_k , la matriz de covarianza del ruido en las mediciones \mathbf{R}_k , y el valor inicial de la matriz de covarianza del error \mathbf{P}_0^+ . La selección incorrecta de los valores de estas tres matrices puede hacer que el funcionamiento sea inestable, realizando de esta forma un cálculo erróneo de la matriz de ganancia de Kalman \mathbf{K}_k .

Entre estas tres matrices, lo más importante es la relación mantenida entre \mathbf{P}_k y \mathbf{R}_k , ya que es la que determina la ganancia de Kalman \mathbf{K}_k . Si se subestima la relación $\mathbf{P}_k/\mathbf{R}_k$, la ganancia de Kalman será muy pequeña y los estados estimados convergerán hacia sus valores reales de forma lenta. Además de esto, el sistema será lento a la hora de responder ante los cambios.

En el caso de sobreestimar la relación $\mathbf{P}_k/\mathbf{R}_k$, la ganancia de Kalman será demasiado grande. Esto hará que el filtro sea inestable, ya que responderá de forma precipitada

ante los cambios introducidos por las nuevas mediciones. En algunos casos esta inestabilidad puede llevar a que los valores de las estimaciones se estabilicen en unos que no son los reales, debido a la influencia del ruido en las mediciones sobre los mismos.

En un KF ideal, ajustar los ruidos sería tan sencillo como establecer los valores de los mismos como la desviación típica tanto de las mediciones como de los valores calculados por el sistema. En el caso real esto no es así, debido a que suele ser necesario dar un valor tres o cuatro veces superior al teórico para mantener la estabilidad. Esto es debido a que el modelo del sistema del KF es solo una aproximación del sistema real.

En la mayoría de aplicaciones se puede realizar un test de laboratorio para determinar los valores iniciales de la matriz de covarianza del error \mathbf{P}_0^+ y de la matriz de covarianza del ruido del sistema \mathbf{Q}_k . Sin embargo, establecer un valor correcto de los valores de la matriz de covarianza del ruido en las mediciones \mathbf{R}_k no es posible de esta forma. Por esto se suelen establecer unos valores de \mathbf{P}_0^+ y \mathbf{Q}_k , y tras esto se realizan pruebas variando los valores de \mathbf{R}_k hasta conseguir que el sistema sea lo suficientemente estable y que responda de forma adecuada ante los cambios.

Sincronización

Los distintos sensores que puedan ser empleados para implementar un KF pueden tener distintas frecuencias de muestreo. Estas distintas frecuencias hacen que a la hora de comunicar con ambos sensores desde un ordenador o procesador, existan problemas para realizar su lectura. Esto se debe principalmente a que si ambos sensores no comparten un reloj común, puede ser que se tomen mediciones que no sean leídas posteriormente. Para evitar esto lo más común es realizar la lectura de ambos sensores con un mismo procesador para así no tener problemas en cuanto a los tiempos de salida de los datos.

Cuando se emplean sensores que miden a distintas frecuencias, pero que siguen un mismo tiempo de reloj, se debe realizar un algoritmo de Kalman adecuado para trabajar con estos datos. Así, si existe un sensor que proporcione las nuevas



mediciones para corregir los estados, y este mide a una frecuencia menor que el sensor que determina los estados, se debe realizar la fase de actualización en el KF únicamente en los pasos de tiempo en los cuales se disponga de unas nuevas mediciones del sensor con una frecuencia menor.

El no tener en cuenta las distintas frecuencias de los distintos sensores lleva a un fallo en la estimación de los estados, que deriva en una inestabilidad en el KF. Por esto es necesario comprobar el correcto tratamiento de los datos medidos por cada sensor.

3. Integración INS/GNSS

Para comprender el porqué de la integración de los sistemas INS y GNSS, es necesario conocer las principales ventajas de cada uno de los sistemas.

Los INS tienen un gran número de ventajas. Estos operan de forma continua, proporcionan salidas con un amplio rango de medidas a una frecuencia que como mínimo es de 50 Hz, y tienen un ruido a corto plazo muy bajo. Además de esto, los INS proporcionan mediciones efectivas de la orientación, velocidad angular y aceleración. Aún con estas ventajas, la solución de navegación de un INS se degrada en el tiempo según los errores en los sensores se integran en las ecuaciones de navegación. El problema principal en la búsqueda de precisión en los INS es el coste, estando el de un sistema que mantenga una solución de navegación efectiva durante un par de minutos alrededor de 100,000€.

Los GNSS proporcionan una solución fiable a largo plazo, pero con una precisión de varios metros por un precio inferior a 100€. Sin embargo, la frecuencia a la cual se reciben los datos es baja, siendo esta de 5 Hz o 10 Hz en la mayoría de los casos. Además de esto, los sistemas GNSS no proporcionan mediciones de la orientación. Otra de las desventajas de estos sistemas es que sus señales son susceptibles a interferencias, por lo que su solución de navegación no es válida si se necesita una solución de navegación continua.

Una vez enumerados, se puede ver que los beneficios de INS y GNSS son complementarios, por lo que integrándolos, las ventajas de ambos sistemas se verán combinadas para obtener una solución de navegación continua, en la que se conozca la orientación, velocidad angular y aceleración, y con una precisión elevada tanto a corto como a largo plazo. En un sistema que integre a estos dos, el GNSS evita que la solución inercial derive, mientras que esta suaviza la solución del GNSS y cubre los momentos en los cuales se pierda la señal de este.

3.1. Arquitecturas de integración

La arquitectura de un sistema de navegación integrado INS/GNSS puede variar de tres formas: cómo se aplican las correcciones a la solución inercial, qué tipos de mediciones del sistema GNSS son utilizadas, y como el INS ayuda al GNSS en el algoritmo de integración. Generalmente, dependiendo de esto se distinguen tres tipos distintos de integración.

El primer tipo es el *Loosely Coupled* (débilmente acoplado), donde se utiliza la solución de posición y velocidad del GNSS como las mediciones que sirven de entrada al algoritmo de integración.

El segundo tipo de integración es el *Tightly Coupled* (rígidamente acoplado), donde se utilizan las características de los errores de las señales del sistema GNSS como entradas al algoritmo de integración, que incluye un algoritmo propio que estima los errores en las señales del GNSS. Estos errores en las señales son las diferencias entre el pseudo-rango medido, y los resultados obtenidos a partir del análisis del efecto Doppler (se obtiene el rango a partir de las distintas posiciones de los satélites calculadas por el receptor del GNSS).

El tercer tipo es el *Deep integration* (integración profunda), donde las correlaciones entre los errores característicos de las señales del sistema GNSS son determinadas mediante funciones de discriminación, y utilizadas como entrada a un algoritmo de integración que combina ambos sistemas.

3.1.1. Corrección de la solución de navegación inercial

La solución de navegación integrada de un sistema INS/GNSS es la solución de navegación inercial corregida. En una arquitectura de integración convencional, utilizando una implementación indirecta del KF con una integración de la información de los inerciales realizada por separado, la corrección puede ser en lazo abierto (*open-loop*) o en lazo cerrado (*closed-loop*). El tipo de corrección aplicado es independiente del tipo de integración realizado.

En la corrección en lazo abierto, los errores estimados por el KF son utilizados para corregir la solución de navegación inercial en todas las iteraciones, pero no son realimentados al INS. De este modo, solo la solución de navegación integrada contiene las estimaciones del KF, y está disponible una solución de navegación del INS en crudo (*raw*). En la figura 24 se muestra un ejemplo gráfico de cómo sería la corrección en lazo abierto.

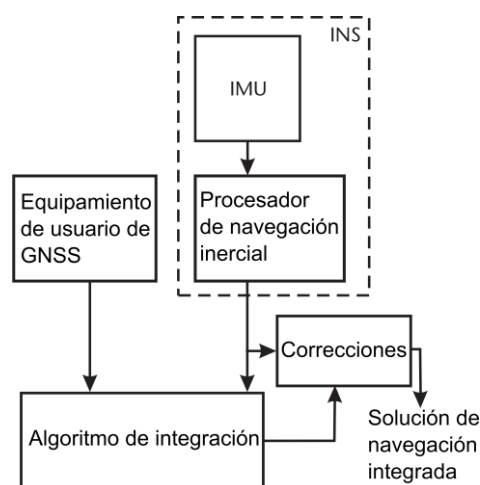


Figura 24. Corrección en lazo abierto.

En la corrección en lazo cerrado, los errores estimados por el KF son realimentados al INS de forma periódica, de modo que son utilizados para corregir la solución de navegación inercial en sí misma. Así, cada vez que los errores en orientación, velocidad y posición se realimentan al INS, estos se hacen cero. Esto conlleva que no exista una solución de navegación del puramente inercial. En la figura 25 se muestra un ejemplo de la corrección en lazo cerrado.

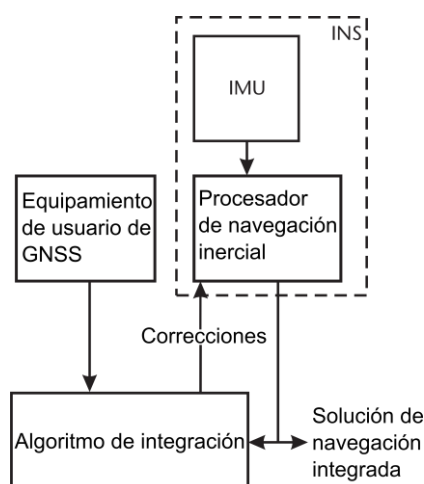


Figura 25. Corrección en lazo cerrado.

Teóricamente no existe ninguna diferencia en la aplicación de un tipo u otro de corrección, pero si se tienen en cuenta las características del sistema estudiado esto cambia. En este proyecto, se estudia un sistema no lineal, del cual se realiza una linealización (es necesario que el modelo sea lineal para implementar el KF), lo que conlleva ciertos errores de aproximación entre el sistema real y el linealizado. Con el fin de minimizar estos errores, se debe tratar de que los estados sean lo más pequeños posible. Esto se consigue con una implementación indirecta del KF y una corrección en lazo cerrado, dado que al ser los estados estimados solamente los errores, y hacerse estos cero tras cada iteración, su tamaño es mucho menor en todas las iteraciones.

3.1.2. Integración Loosely Coupled

Como ya se comentó anteriormente, en la integración *Loosely Coupled* las mediciones de posición y velocidad del GNSS se introducen como mediciones al KF de integración, que los utiliza para estimar los errores en la solución del INS. La solución de navegación integrada es la solución de navegación del INS, corregida con las estimaciones de los errores calculados por el KF.

Generalmente, la utilización de las mediciones de velocidad mejora la observabilidad de la orientación calculada por el INS y de los errores. Esto se debe a que el cálculo de estos errores requiere un menor número de pasos de integración si se realiza a partir de la velocidad, que si se realiza desde la posición. Además de esto, el requerir

un menor de pasos de integración hace que el tiempo requerido sea también menor, lo que aumenta la rapidez del algoritmo. Sin embargo, el utilizar únicamente estas mediciones de velocidad hacen que la observabilidad del error en posición disminuya, dado que el ruido en las mediciones de velocidad se integra en el tiempo. Por esto, se suelen utilizar las mediciones tanto de velocidad como de posición para realizar la integración de INS/GNSS.

Las principales ventajas de la integración *Loosely Coupled* son la simplicidad y la redundancia. La arquitectura es de tal simplicidad que puede ser utilizada con cualquier equipamiento de GNSS e INS a nivel usuario. Usualmente, en una integración de este tipo se dispone de una solución de navegación proporcionada por el GNSS independiente de la solución integrada.

El principal problema de esta integración deriva de las suposiciones tomadas al implementar un KF. Cuando se utiliza un KF, se asume que los errores no están correlacionados en el tiempo, pero al utilizar estos para realimentar las entradas del INS, sí que existe una correlación temporal. Esto puede causar inestabilidad dependiendo del tiempo transcurrido entre actualizaciones. Lo común es que con un tiempo entre actualizaciones que sea cinco veces el tiempo entre iteraciones (paso de tiempo entre integraciones de los sensores inerciales) sea suficiente para evitar inestabilidades, pero para un mismo tiempo entre actualizaciones, cuanto menor sea el tiempo entre iteraciones con respecto al tiempo entre actualizaciones, menor será la posibilidad de que el sistema sea inestable.

En la figura 26 se muestra un diagrama de bloques de cómo sería la integración *Loosely Coupled*, mostrando en color rojo la implementación en lazo abierto, y en color verde la implementación en lazo cerrado, que es la utilizada debido a las ventajas destacadas anteriormente.

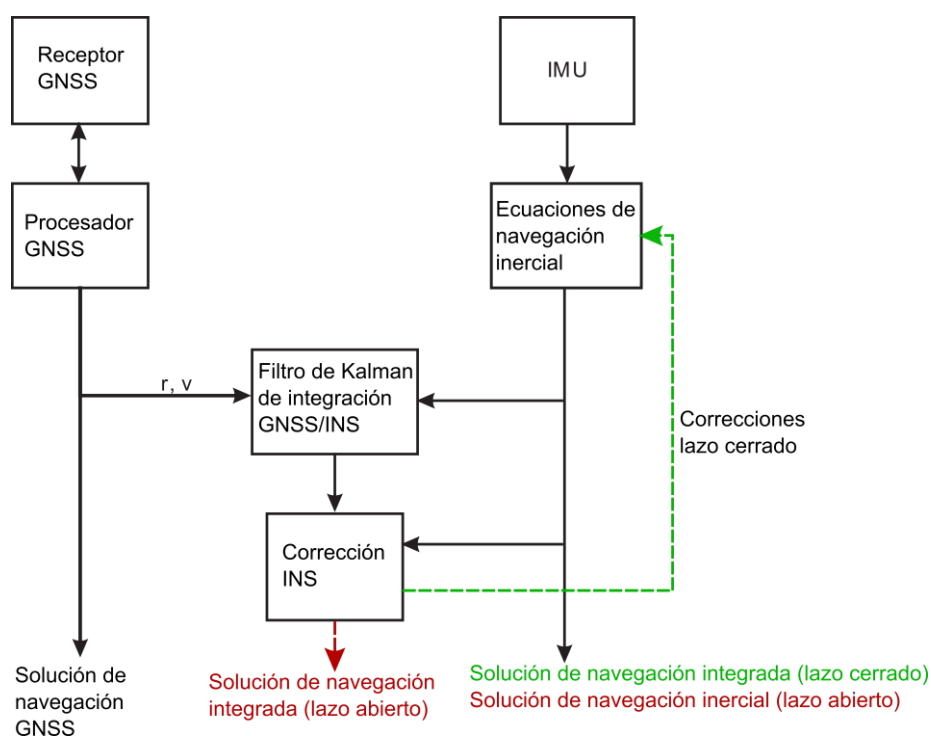


Figura 26. Integración *Loosely Coupled*.

3.2. Selección de los estados y del modelo de sistema

El modelo del sistema empleado en el filtro de Kalman depende de cuales sean los estados estimados por el mismo, lo que a su vez depende de la aplicación, los sensores inerciales, la arquitectura de integración, y la selección del sistema de coordenadas en el cual trabajará el KF. Por esto se realizará primero la selección de los estados y del sistema de coordenadas, y tras esto, se seleccionará el modelo del sistema.

3.2.1. Selección de los estados

En todas las implementaciones indirectas del KF para la integración INS/GNSS, el algoritmo estima como mínimo los errores en posición y velocidad. Dependiendo de cuál sea el sistema de coordenadas en el que se expresen, su nomenclatura será diferente, siendo por ejemplo para el ECEF, $\delta \mathbf{r}_{eb}^e$ el error en posición, y $\delta \mathbf{v}_{eb}^e$ el error en velocidad.

En la mayoría de los casos, a no ser que se empleen unos sensores inerciales de una precisión muy elevada, el cálculo de los errores en orientación es de gran ayuda a la hora de mejorar la solución de navegación. Expresados en el ECEF serían $\delta\psi_{eb}^e$. Para el cálculo de estos errores, sólo es posible utilizar la aproximación para ángulos pequeños en el caso de implementar una corrección en lazo cerrado, y además es necesario disponer de sensores de elevada precisión.

Excepto en el caso de ser muy pequeños, los bias (errores sistemáticos) en los acelerómetros \mathbf{b}_a deben ser estimados si se estiman los errores en orientación. En caso contrario, los errores en orientación se verían influenciados por los efectos de los bias en la aceleración y viceversa. Esto se debe a que en la integración INS/GNSS, los errores en aceleración y orientación son obtenidos a partir de los cambios en velocidad y posición que producen.

Los siguientes errores que podemos estimar con el KF son los bias en los giróscopos \mathbf{b}_g , que producen un crecimiento cuadrático con el tiempo en el error en velocidad. Estos son estimados en la gran mayoría de los algoritmos de integración de INS/GNSS.

En casos en los que se alcancen aceleraciones muy altas y con movimientos altamente dinámicos, como puede ser el caso de la aviación militar o los deportes de motor, puede ser de ayuda estimar por separado los bias en los giróscopos dependientes de las aceleraciones. Sin embargo, para la mayoría de aplicaciones aéreas, marítimas y terrestres, no es necesario estimarlos, dado que no son observables.

Con lo mencionado hasta ahora, para el caso tratado en este proyecto, el vector de estados, expresado en ECEF quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{INS}^e = \begin{pmatrix} \delta\psi_{eb}^e \\ \delta\mathbf{v}_{eb}^e \\ \delta\mathbf{r}_{eb}^e \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Así, se tiene un total de 15 estados.

3.2.2. Modelo del sistema

Como ya se ha comentado anteriormente, el desarrollo del modelo del sistema depende del sistema de referencia en el cual se realice el mismo. Por ello se debe seleccionar el sistema de referencia antes de comenzar el desarrollo. Se utilizará el ECEF como sistema de referencia para elaborar el modelo del sistema, debido a que puede ser utilizado como sistema de referencia y sistema de resolución, dado que se pretende conocer la posición con respecto a la Tierra. Además de esto permite implementar de forma sencilla las ecuaciones de navegación. Una vez escogido el ECEF como sistema de referencia, se desarrolla un modelo de propagación de estados para un filtro de Kalman con los estados mostrados en (3.1).

Para obtener el modelo del sistema para el INS, ha de calcularse la derivada con respecto al tiempo de cada uno de los estados del Kalman. Primero se deriva la propagación del error en orientación, seguido de la de los errores en velocidad y posición. Finalmente se muestra el modelo del sistema completo y la matriz de transición.

Propagación del error en orientación

De la expresión (2.77), la derivada con respecto al tiempo del error en orientación resulta:

$$[\delta\dot{\psi}_{eb}^e \wedge] \approx \delta\dot{\mathbf{c}}_b^e \quad (3.2)$$

Y de la expresión (2.76) se obtiene:

$$\delta\dot{\mathbf{c}}_b^e = \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_b^e \mathbf{c}_e^b + \tilde{\mathbf{c}}_b^e \dot{\mathbf{c}}_e^b \quad (3.3)$$

Derivando la expresión (2.12), resulta:

$$\dot{\mathbf{c}}_b^e = \mathbf{c}_e^b \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.4) y (3.3) en la expresión (3.2):

$$[\delta\boldsymbol{\psi}_{eb}^e \wedge] \approx \tilde{\mathbf{c}}_b^e \boldsymbol{\Omega}_{eb}^b \mathbf{c}_e^b + \tilde{\mathbf{c}}_b^e \mathbf{c}_e^b \boldsymbol{\Omega}_{be}^e \quad (3.5)$$

Sabiendo que el KF asume que el modelo del sistema es función lineal de las estimaciones de los estados, el producto de dos estados en la derivación del modelo del sistema es despreciable. Por esto se aproxima $\delta\boldsymbol{\psi}_{eb}^e \delta\dot{\boldsymbol{\psi}}_{eb}^e \approx 0$. Así, conociendo esto y sustituyéndolo en (3.5) y realizando los productos de las matrices antisimétricas, se obtiene:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\psi}}_{eb}^e \approx \hat{\mathbf{C}}_e^b (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{eb}^b - \boldsymbol{\omega}_{eb}^b) \quad (3.6)$$

Aplicando (2.76) y (2.77), y teniendo en cuenta la rotación entre el ECEF y el ECI:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\psi}}_{eb}^e \approx \hat{\mathbf{C}}_e^b \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \hat{\mathbf{C}}_e^b (\tilde{\mathbf{C}}_e^b - \mathbf{C}_e^b) \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \hat{\mathbf{C}}_e^b \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta\boldsymbol{\psi}_{eb}^e \quad (3.7)$$

Expresado en términos de estados del KF, la derivada con respecto al tiempo del error en orientación es:

$$\delta\dot{\boldsymbol{\psi}}_{eb}^e \approx -\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta\boldsymbol{\psi}_{eb}^e + \hat{\mathbf{C}}_e^b \mathbf{b}_g \quad (3.8)$$

Propagación del error en velocidad

Si se tiene en cuenta la rotación terrestre, la derivada con respecto al tiempo de la velocidad en el ECEF es:

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \mathbf{f}_{ib}^e + \boldsymbol{\gamma}_{ib}^e - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{v}_{eb}^e \quad (3.9)$$

Por lo que la derivada del error en velocidad es:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = \tilde{\mathbf{f}}_{ib}^e - \mathbf{f}_{ib}^e + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ib}^e - \boldsymbol{\gamma}_{ib}^e - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta \mathbf{v}_{eb}^e \quad (3.10)$$

Los acelerómetros miden la fuerza específica en el sistema del cuerpo, por lo que el error en $\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^e$ es una mezcla de errores de los acelerómetros y errores de orientación.

$$\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^e - \mathbf{f}_{ib}^e = \tilde{\mathbf{C}}_b^e \tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^e \mathbf{f}_{ib}^b \quad (3.11)$$

Sabiendo que los productos entre estados del KF son nulos:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^e - \mathbf{f}_{ib}^e = \hat{\mathbf{C}}_b^e (\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^e - \mathbf{f}_{ib}^e) + (\tilde{\mathbf{C}}_b^e - \mathbf{C}_b^e) \mathbf{f}_{ib}^e \quad (3.12)$$

De la expresión (2.78), si los bias son los únicos errores en los acelerómetros modelados como estados del KF:

$$\delta \mathbf{f}_{ib}^b = \tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b - \mathbf{f}_{ib}^b \approx \mathbf{b}_a \quad (3.13)$$

Aplicando la aproximación para ángulos pequeños a (2.76) y (2.77) obtenemos que:

$$\tilde{\mathbf{C}}_b^e - \mathbf{C}_b^e = (\delta \mathbf{C}_b^e - \mathbf{I}_3) \mathbf{C}_b^e \approx [\delta \boldsymbol{\psi}_{eb}^b \wedge] \mathbf{C}_b^e \quad (3.14)$$

Volviendo a la expresión (3.10), el término gravitacional puede escalarse con la altitud aproximadamente de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\gamma}_{ib}^e = \frac{(r_{eS}^e(L_b))^2}{(r_{eS}^e(L_b) + h_b)^2} \boldsymbol{\gamma}_0^e(L_b) \quad (3.15)$$

La variación de la gravitación con la latitud es muy pequeña, por lo que el efecto del error la latitud en el modelo gravitacional puede ser desestimado. Además de esto, el efecto de los errores en el término centrípeto de la gravitación no es observable hasta diferencias de altitud de varios kilómetros, por lo que el modelo gravitacional puede ser aproximado por un modelo de gravedad en la mayoría de los casos. Haciendo la suposición de que $h_b \ll r_{eS}^e$, resulta:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ib}^e - \mathbf{r}_{ib}^e = -2 \frac{(\tilde{h}_b - h_b)}{r_{eS}^e(\hat{L}_b)} g_0(\hat{L}_b) \hat{\mathbf{u}}_D^e \quad (3.16)$$

Donde $g_0(\hat{L}_b)$ la gravedad calculada según el modelo de Somigliana enunciado en la expresión (2.60), y $\hat{\mathbf{u}}_D^e$ es el vector unitario hacia abajo del sistema de coordenadas Local expresado en el ECEF. Transformando de coordenadas geodésicas a cartesianas empleando las expresiones (2.36), (2.37) y (2.38) se llega a la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ib}^e - \mathbf{r}_{ib}^e = \frac{2g_0(\hat{L}_b)}{r_{eS}^e(\hat{L}_b)} \frac{\hat{\mathbf{r}}_{eb}^e}{|\hat{\mathbf{r}}_{eb}^e|^2} \hat{\mathbf{r}}_{eb}^{eT} \delta \mathbf{r}_{eb}^e \quad (3.17)$$

Sustituyendo las expresiones (3.13) y (3.14) en la (3.12), y las expresiones (3.12) y (3.17) en la (3.10), se llega a que la derivada con respecto al tiempo del error en velocidad en términos de los estados estimados por el KF es:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_{eb}^e = -(\hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{f}_{ib}^b) \wedge \delta \boldsymbol{\psi}_{eb}^e - 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \delta \mathbf{v}_{eb}^e + \frac{2g_0(\hat{L}_b)}{r_{eS}^e(\hat{L}_b)} \frac{\hat{\mathbf{r}}_{eb}^e}{|\hat{\mathbf{r}}_{eb}^e|^2} \hat{\mathbf{r}}_{eb}^{eT} \delta \mathbf{r}_{eb}^e + \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{b}_a \quad (3.18)$$

Propagación del error en posición

La derivada de la posición con respecto al tiempo expresada en el ECEF es simplemente la velocidad, pudiendo obtener esto mediante la derivación de la

expresión (2.70). Por tanto, la derivada con respecto al tiempo del error en posición es:

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e = \delta \mathbf{v}_{eb}^e \quad (3.19)$$

Matriz del sistema y matriz de transición

Antes de introducir todas las ecuaciones anteriores en la matriz del sistema, se debe tener en cuenta que faltan dos estados cuya derivada con respecto al tiempo no ha sido realizada. Estos estados son los bias, cuya variación con el tiempo no es conocida, y por lo tanto se asume que:

$$\dot{\mathbf{b}}_a = 0, \dot{\mathbf{b}}_g = 0 \quad (3.20)$$

Una vez determinado esto, se pueden expresar las ecuaciones anteriores en forma de matriz, que al ser multiplicada por el vector de estados debería resultar igual a realizar la propagación por separado. De este modo, formulada en términos de submatrices de dimensiones 3 x 3, la matriz del sistema en ECEF es:

$$\mathbf{F}_{INS}^e = \begin{pmatrix} -\mathbf{\Omega}_{ie}^e & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \hat{\mathbf{C}}_b^e \\ \mathbf{F}_{21}^e & -2\mathbf{\Omega}_{ie}^e & \mathbf{F}_{23}^e & \hat{\mathbf{C}}_b^e & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{21}^e = [-(\hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{f}_{ib}^b) \wedge], \quad \mathbf{F}_{23}^e = \frac{2g_0(\hat{L}_b)}{r_{es}^e(\hat{L}_b)} \frac{\hat{\mathbf{r}}_{eb}^e}{|\hat{\mathbf{r}}_{eb}^e|^2} \hat{\mathbf{r}}_{eb}^{eT} \quad (3.22)$$

Para obtener la matriz de transición a partir de la matriz del sistema, se tiene que seguir la expresión (2.89). Esta expresión realiza una serie de Taylor que se debe

saber en qué punto truncar, y dependiendo de esto la expresión será distinta. En la práctica suele bastar con truncar la serie de Taylor para términos de tercer orden, siempre y cuando el intervalo de tiempo entre iteraciones sea inferior a 1 segundo. Una vez truncada, la expresión (2.89) para el cálculo de la matriz de transición queda:

$$\Phi_{INS}^e = \mathbf{I}_{15} + \mathbf{F}_{INS}^e \tau_s + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{INS}^e{}^2 \tau_s^2 + \frac{1}{6} \mathbf{F}_{INS}^e{}^3 \tau_s^3 \quad (3.23)$$

3.3. Modelo de mediciones

En la integración de INS/GNSS, las diferencias entre las mediciones del equipamiento de usuario del GNSS y las predicciones de esas mediciones realizadas mediante la navegación inercial, son las utilizadas para actualizar el vector de estados. El modelo de mediciones depende del tipo de integración realizada, por lo que se explica el modelo de mediciones para la integración *Loosely Coupled*, que es la utilizada.

En la integración *Loosely Coupled*, se utilizan las soluciones de posición y velocidad del GNSS para el cálculo de la innovación. El vector de innovación, como se expresa en (2.87), viene dado por la diferencia entre las mediciones del GNSS y las soluciones de navegación inercial corregidas. Para el cálculo de la diferencia entre ambas soluciones, habrá que tener en cuenta la distancia desde el INS hasta la antena del GNSS, conocida como *lever arm*, \mathbf{l}_{ba}^b . El sistema de coordenadas en el que se exprese el vector de innovación ha de ser coherente con el utilizado en el vector de estados. De este modo, en ECEF:

$$\delta \mathbf{z}_{G,k}^{e-} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{eaG}^e - \hat{\mathbf{r}}_{eb}^e - \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{l}_{ba}^b \\ \hat{\mathbf{v}}_{eaG}^e - \hat{\mathbf{v}}_{eb}^e - \hat{\mathbf{C}}_b^e (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \wedge \mathbf{l}_{ba}^b) + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{l}_{ba}^b \end{pmatrix}_k \quad (3.24)$$

Donde el subíndice k , indica la iteración. El subíndice G indica que la magnitud es indicada por el GNSS.

A partir de esto, se calcula la matriz de mediciones como:

$$\mathbf{H}_{G,k} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_G(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} = \left. \frac{\partial \mathbf{z}_G(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (3.25)$$

Aplicando esto, y utilizando (3.24) y (3.1) se obtiene que la matriz de mediciones para este caso es:

$$\mathbf{H}_{G,k}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{r1}^e & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{H}_{v1}^e & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_{v5}^e \end{pmatrix}_k \quad (3.26)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{r1}^e &= [(\hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{I}_{ba}^b) \wedge] \\ \mathbf{H}_{v1}^e &= [\{\hat{\mathbf{C}}_b^e (\hat{\boldsymbol{\omega}}_b^b \wedge \mathbf{I}_{ba}^b) - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \hat{\mathbf{C}}_b^e \mathbf{I}_{ba}^b\} \wedge] \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{H}_{v5}^e = \hat{\mathbf{C}}_b^e [\mathbf{I}_{ba}^b \wedge]$$

De cara a la posterior implementación práctica, cabe destacar que el acoplamiento de los errores en orientación y los bias de los giróscopos en los términos relacionados con el *lever arm* es débil, por lo que se puede aproximar la matriz de mediciones por:

$$\mathbf{H}_{G,k}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}_k \quad (3.28)$$

4. Implementación experimental y resultados

El objetivo final de todo el desarrollo explicado en las fases previas de este proyecto es la implementación experimental de un sistema de posicionamiento que combine las ventajas de un GPS con las de la navegación inercial. Para ello ha sido necesario aprender a manejar tanto los sensores como el microcontrolador utilizado para leer los datos de estos y enviarlos al ordenador. Además de esto se han empleado distintos lenguajes de programación debido a la cantidad de dispositivos manejados durante la implementación práctica de la integración INS/GNSS.

En este apartado se comenta el hardware utilizado y sus funciones, y posteriormente el software utilizado para el manejo del mismo. Finalmente se exponen las pruebas realizadas y los resultados obtenidos en las mismas.

4.1. Hardware

El conjunto del hardware utilizado en este proyecto está formado por un IMU, un receptor GPS, y un microcontrolador. Estos se utilizan para obtener las mediciones necesarias para la implementación del KF de integración descrito en el capítulo anterior. Así, el IMU se utiliza para la obtención de datos de aceleración y velocidad angular. El GPS se utiliza para obtener mediciones absolutas de posición y velocidad. El microcontrolador es el encargado de realizar la lectura de ambos sensores, y transmitir de forma correcta los datos de ambos al ordenador que se encarga de la integración. Además de esto, el tiempo de reloj en el que se basa el algoritmo es tomado también del microcontrolador para evitar errores de sincronización.

En ese apartado se describe el hardware utilizado, y la forma de entregar los datos del mismo.

4.1.1. Sensores inerciales

Los sensores inerciales están compuestos de acelerómetros y giróscopos, que miden la fuerza específica y la velocidad angular respectivamente. Un IMU está compuesto por 3 acelerómetros y 3 giróscopos situados en un sistema de ejes ortogonales, y que miden las aceleraciones en la dirección de estos ejes y las velocidades angulares alrededor de los mismos.

En este proyecto se utilizan sensores MEMS ya que son de tamaño reducido y de bajo coste al poder ser producidos en masa. Además de esto, este tipo de sensores tienen una mayor resistencia a los golpes, lo que facilita el trabajo con ellos. El problema principal de este tipo de sensores es su bajo rendimiento, por lo que no pueden ser empleados por separado para generar una solución de navegación útil.

En este caso, se utiliza un dispositivo MPU-9150 del fabricante Invensense. Este es un sistema en paquete (SiP) que combina dos chips: el MPU-6050, que contiene un acelerómetro de 3 ejes, un giróscopo de 3 ejes, así como un procesador de navegación (DMP) integrado capaz de procesar pequeños algoritmos; y el AK8975, un magnetómetro digital de 3 ejes. Este último no es utilizado en este proyecto. El precio del MPU-9150 es de alrededor de 30€, por lo que su integración junto al GPS supone un ahorro de costes con respecto a un GPS de alta precisión como el disponible actualmente en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica.

Las características principales de este son:

- Giróscopo de tres ejes con una sensibilidad máxima de 0.0076 °/s, pudiendo medir entre ± 250 , ± 500 , ± 1000 , y ± 2000 °/s, mostrando la máxima sensibilidad al medir entre ± 250 °/s.
- Acelerómetro de tres ejes con escalas de medición programables entre ± 2 , ± 4 , ± 6 , y ± 8 g.
- Frecuencia de muestreo programable hasta 200 Hz.
- Voltajes de entrada V_{DD} entre 2.4V-3.46V.

- Corriente de funcionamiento a plena potencia de giróscopo + acelerómetro de 3.8 mA.
- Tensión de entrada de 3.3V.

En la figura 27 se muestra una imagen del chip en cuestión.

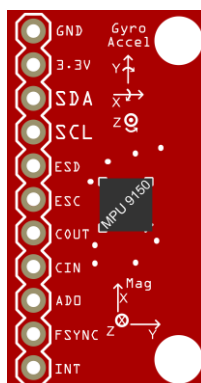


Figura 27. Invensense MPU-9150.

Para la utilización de este chip se utilizan como base la librería desarrollada por Jeff Rowberg ([18]) para la utilización del MPU-6050 mediante el protocolo de comunicación I²c. Esta librería forma parte de la “I2c device library” del mismo autor, programada en lenguaje C++. Esta ofrece una forma de obtener algunos de los datos que es necesario utilizar del sensor, pero no están completas para la utilización que se le quiere dar al sensor en este proyecto. Por ello se desarrolla una nueva librería a partir de esta, en la cual se elimina gran parte del código existente por ser innecesario, y se añaden nuevas partes para obtener los datos necesarios.

Para el desarrollo de estas nuevas librerías se utiliza como guía la documentación existente sobre el dispositivo, que si bien es extensa, es pobre en cuanto a contenidos, y no sirve de ayuda a la hora de realizar una configuración correcta del sensor, ni de llevar a cabo una modificación útil en las librerías. Debido a esto se tiene que realizar un estudio en profundidad de los registros del sensor, para encontrar la forma correcta de extraer de este los datos necesarios (aceleraciones y velocidades angulares en los 3 ejes). De este desarrollo resulta la librería “MPU9150”.

Para la configuración del dispositivo, se ajusta la librería de modo que se utilicen los rangos de medida que nos interesan. Así, se configura el acelerómetro para realizar

mediciones entre $\pm 4g$, debido a que es el rango que más se adecúa a su utilización en automóviles. En un caso ideal, con un rango de $\pm 2g$ debería ser suficiente, pero en la realidad se superan en casos puntuales, como baches fuertes o badenes las aceleraciones verticales de $\pm 2g$.

El giróscopo se configura en el rango de medición de $\pm 250^\circ/s$, que es el que proporciona mayor sensibilidad, y que tiene margen suficiente para los giros realizados en un automóvil.

Tras realizar la configuración de los rangos de medida, se configura la frecuencia de muestreo del MPU. Lo ideal sería que esta fuera lo mayor posible, pero el fabricante indica que las mediciones solo son fiables hasta los 100 Hz, ya que a partir de los mismos las mediciones son demasiado ruidosas. Por ello se configura el MPU para realizar mediciones con una frecuencia de 100 Hz.

4.1.2. GPS

En este proyecto, el GNSS utilizado es el GPS. Para ello se emplea un receptor GPS del fabricante Adafruit, el Ultimate GPS Breakout v3. Este receptor está basado en el chip MTK3339, un módulo GPS que puede rastrear hasta 22 satélites en 66 canales de transmisión distintos. Este chip tiene una antena integrada, pero dispone de conectividad para una antena externa en caso de que esto no fuese suficiente, o de buscar una mayor precisión a cambio de un mayor coste. El coste del receptor GPS es de 40€, lo que supone un gran ahorro con respecto a un receptor de mayor precisión como el utilizado en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica, si bien este no tiene la precisión del mismo, y su frecuencia de muestreo es inferior.

Este dispositivo incluye una pequeña memoria flash en su interior, que le permite guardar las últimas 16 horas de mediciones realizadas, que podrían servir en caso de querer inicializar el proceso de navegación sin señal de GPS, utilizando únicamente la solución de navegación inercial sin corregir (en este caso no es posible debido a la baja precisión de la solución del INS por separado).

Las características principales del módulo son:

- Frecuencia de actualización programable de 1, 5 y 10 Hz.
- Precisión de posicionamiento de ≈ 4 m.
- Precisión en la medición de la velocidad de 0.3 m/s.
- Tiempo de arranque medio: 34 segundos
- Altitud máxima de funcionamiento de 40 km.
- Tensión de entrada configurable de 3.3 o 5.5 V.
- Proporciona las mediciones en una sentencia NMEA configurable entre GPGGA y GPRMC.
- LED integrado que indica cuando el dispositivo se encuentra buscando señal.

En la figura 28 se muestra una imagen del dispositivo.

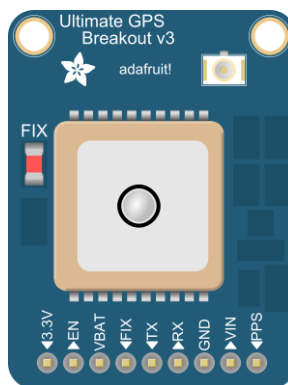


Figura 28. Adafruit Ultimate GPS Breakout v3.

Para la configuración de este dispositivo se emplea la “Adafruit-GPS-library” proporcionada por el fabricante, que permite extraer los datos del mismo y configurarlo de forma correcta sin apenas modificaciones. El GPS se configura para realizar actualizaciones con una frecuencia de 5 Hz, que si bien no es la máxima posible, ha sido la más alta con la que se ha conseguido obtener señal sin problemas.

Como se comenta en las características del dispositivo, este entrega los datos en forma de sentencias NMEA (National Marine Electronics Association). Estas sentencias tienen una forma definida según de cual se trate, siendo la sentencia GPRMC la utilizada en nuestro caso por contener los datos mínimos necesarios para la navegación. Cuando el GPS recibe una señal, transmite una sentencia NMEA con una forma similar a la siguiente ([17]):



\$GPRMC,220516,A,5133.82,N,00042.24,W,173.8,231.8,130694,004.2,W*70

Donde se encuentra toda la información dispuesta como:

Orden	Lectura	Significado
1	220516.000	Tiempo de emisión de la señal(h:min:s). 22:05:16.0
2	A	Indicador de calidad de la señal (A=Válida, V=Inválida)
2	5133.82	Latitud: 51° 33.82'
3	N	N o S (Norte o Sur)
4	13542.24	Longitud: 135° 42.24'
5	W	E o W (Este u Oeste)
6	173.8	Velocidad en nudos
8	231.8	Curso expresado en grados
9	130614	Fecha de emisión de la señal. 16/06/2014
10	004.2	Variación del campo magnético debido a la posición
11	W	E o W (Este u Oeste)
12	*70	Suma de verificación

Tabla 3. Sentencia GPRMC.

Para extraer los datos correctamente de esta sentencia se ha programado un código que realiza la lectura de la misma y la transforma directamente a datos disponibles por separado para ser enviados al ordenador. Finalmente, de este dispositivo se extraen los siguientes datos:

- Latitud, expresada en grados y decimales de grado, y con el correspondiente signo dependiendo de si se trata de Norte o Sur.
- Longitud, expresada en grados y decimales de grado, y con el correspondiente signo dependiendo de si se trata de Este u Oeste.
- SoG (Speed over Ground): Velocidad del dispositivo en el plano xy del sistema de coordenadas local.
- CoG (Course over Ground) o Curso: Ángulo formado entre la trayectoria realizada por el móvil y el eje y del sistema de coordenadas local, que apunta hacia el norte. Este se mide en sentido horario comenzando por el eje y del sistema global. En la figura 29 se muestra una representación del curso medido por el GPS.
- Altitud expresada en metros.

Como se comentaba en el apartado 3.3., en el modelo de mediciones se utiliza el vector velocidad, por lo que hay que obtener el mismo a partir de los datos proporcionados por el receptor. Para ello se utiliza la SoG y el CoG, descomponiendo así la velocidad en dos componentes en el plano xy del sistema de coordenadas local. La componente z de la velocidad se supone nula, dado que la precisión del receptor a la hora de medir las altitudes podría causar problemas, y a corto plazo no sería un error significativo suponerla nula cuando se trata con automóviles. En la figura 29 se puede ver la representación de la SoG en el plano xy del sistema local.

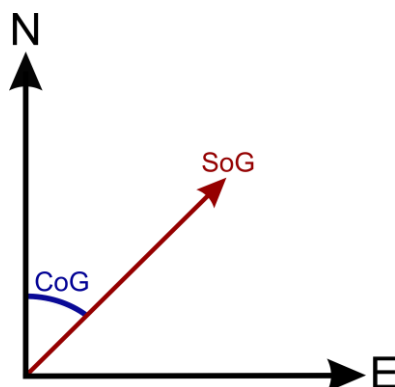


Figura 29. Representación de la SoG y el CoG en el plano xy del ENU local.

Así, el vector velocidad obtenido a partir de los datos del GPS queda de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{v}}_{ebG}^n = \begin{pmatrix} \text{SoG} \cos(\text{CoG}) \\ \text{SoG} \sin(\text{CoG}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Con esto ya se dispone de todos los datos necesarios para la implementación del KF.

4.1.3. Arduino Leonardo

En este proyecto, el microcontrolador seleccionado para el manejo y lectura de los sensores es un Arduino Leonardo rev3. Este es el elegido debido a su bajo coste, y la gran cantidad de información disponible sobre el mismo, procedente tanto del fabricante como de fuentes externas, lo que ayuda enormemente en el desarrollo del

código necesario para la correcta configuración de los sensores, su lectura, y el posterior envío de la información al ordenador. El precio del Arduino Leonardo rev3 es de unos 20 €, lo que lo hace una buena opción buscando un bajo coste.

El Arduino Leonardo es una placa basada en el microcontrolador ATmega32u4, con una memoria de 32 KB. Esta placa tiene 20 pines digitales de entrada/salida. De estos, 7 pueden ser utilizados como salidas PWM (Pulse-Width Modulation), y 12 como entradas analógicas. Además de esto, incluye un oscilador de cristal piezoeléctrico que trabaja a 16 MHz, una conexión micro USB, un conector de alimentación, un conector ICSP (In-Circuit Serial Programming), y un botón para resetear. Con esto y un cable USB, ya se dispone de todo lo necesario para conectarlo a un ordenador y trabajar con él.

El Arduino Leonardo se diferencia de la mayoría de placas de este tipo en que este tiene comunicación USB integrada, eliminando la necesidad de un procesador secundario. Esto le permite conectarse al ordenador como un teclado o un ratón, además de a través un puerto COM (Communication Port) como lo hacen la mayoría de placas.

Las características principales del Arduino Leonardo son las siguientes:

- Microcontrolador ATmega32u4.
- Voltaje de operación de 5V.
- Voltaje de alimentación entre 7-12 V, y limitado entre 6-20V.
- 20 pines digitales de entrada/salida.
- 7 canales PWM.
- Memoria flash de 32 KB, de los cuales 4 KB son utilizados por el gestor de arranque (bootloader).
- Frecuencia de reloj de 16 MHz.

Los pines del Arduino Leonardo son los siguientes:

- VIN: Es el pin de entrada utilizado para alimentar el Arduino con una fuente externa. En caso de alimentarlo mediante USB o mediante el conector de alimentación, se puede acceder al voltaje disponible a través de este pin.
- 5V: De este pin podemos obtener un voltaje regulado de 5 V para alimentar cualquier componente.
- 3.3V: Tiene la misma función que el pin de 5V, pero entrega un voltaje regulado de 3.3V.
- GND: Pines de tierra.
- IOREF: En este podemos medir u obtener el voltaje al cual están operando los pines de entrada/salida. En el Leonardo serán 5 V.
- Serial: Los pines 0 (RX) y 1(TX). Se utilizan para recibir (RX) y transmitir (TX) datos vía serial.
- TWI o I²C: Los pines SDA (Serial Data line) y SCL (Serial Clock line) pueden utilizar el protocolo de comunicación I²C (descrito posteriormente).
- Interrupciones externas: Los pines 1, 2, 3 y 7 pueden ser configurados para funcionar como interrupciones.
- PWM: Los pines 3, 5, 6, 9, 10 y 13, proporcionan una salida PWM de 8 bits. Estos se identifican con el símbolo ~ dibujado en la placa.
- LED: El Arduino Leonardo tiene un LED integrado que puede ser configurado a través del pin 13.
- Entradas analógicas: Los pines que van del A0 al A5, y los del A6 al A11 (en los pines digitales 4, 6, 8, 9, 10 y 12). Cada uno de estos tiene una resolución de 10 bits. Por defecto, la escala de medida de estos es de 0 a 5 V, pero puede configurarse el mayor de estos valores utilizando el pin AREF.
- AREF: Voltaje de referencia para los pines analógicos.
- RESET: Este se puede emplear para detener o resetear el microcontrolador.

En la figura 30 se muestra el Arduino Leonardo.

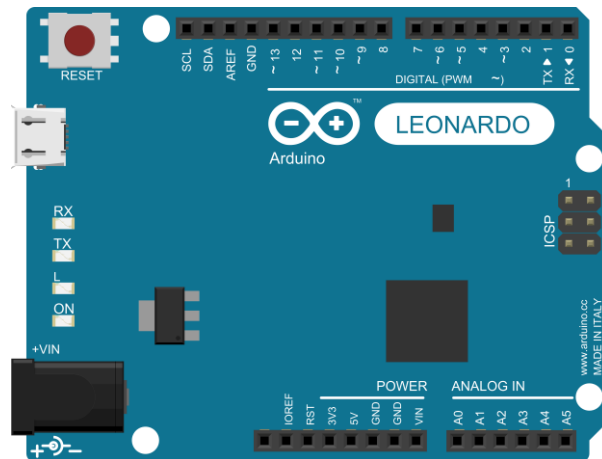


Figura 30. Arduino Leonardo rev3.

Este dispositivo se programa mediante el software específico Arduino, del cual se habla más adelante. El ATmega32u4 del Arduino Leonardo incluye un bootloader que permite introducir nuevo código en el mismo sin la necesidad de utilizar ningún dispositivo externo.

4.1.4. Integración de los dispositivos

Para la utilización del hardware antes descrito, es necesario integrar todo este en un mismo elemento. El cableado entre los dispositivos es el mostrado en la figura 31.

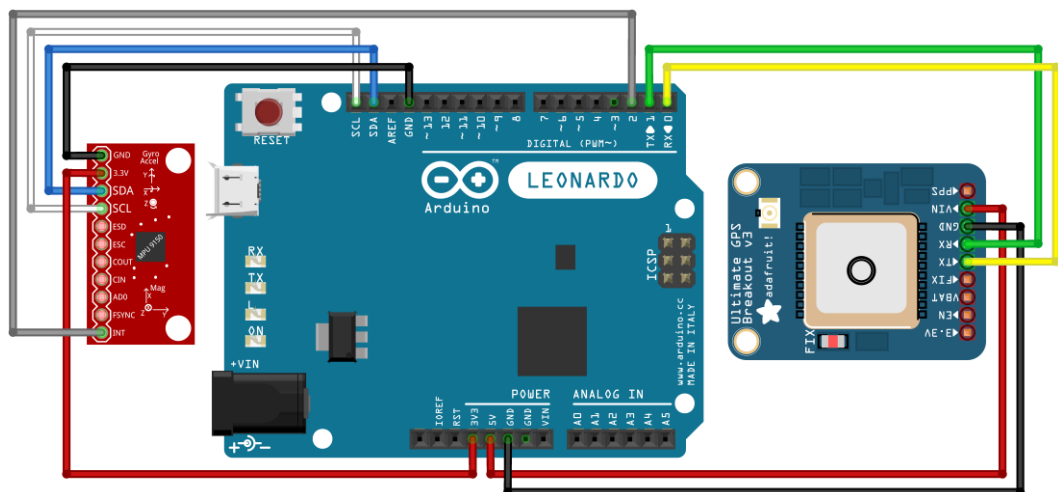


Figura 31. Cableado del conjunto de sensores y el controlador.

Con este montaje, además de cumplir con la necesidad de que el sistema se mueva como un conjunto, se busca que el tamaño del mismo sea el menor posible, para

facilitar su transporte e implementación, y también para poder desprejar el *lever arm*, I_{ba}^b en las ecuaciones del modelo de mediciones. Para ello, lo primero es fabricar una placa en la cual podamos realizar las conexiones y anclar todo el hardware.

Una placa de prototipado perforada sirve como unión de los 3 dispositivos. Sobre esta se realiza la soldadura de unos machos PCB que permiten acceder a los pines del Arduino y del cableado correspondiente. Además de esto se realizan perforaciones para poder anclar los sensores a la misma. Para facilitar la sustitución de los sensores en caso de que alguno falle, se utilizan unos machos PCB para la conexión de los sensores. Tras esto se cubren las conexiones con una silicona protectora, utilizada comúnmente para aplicaciones extensiométricas. Por último, se introduce el conjunto en una carcasa de metacrilato, que protege todo el sistema y permite la recepción de señales por parte del GPS. El resultado final es el mostrado en las siguientes figuras.

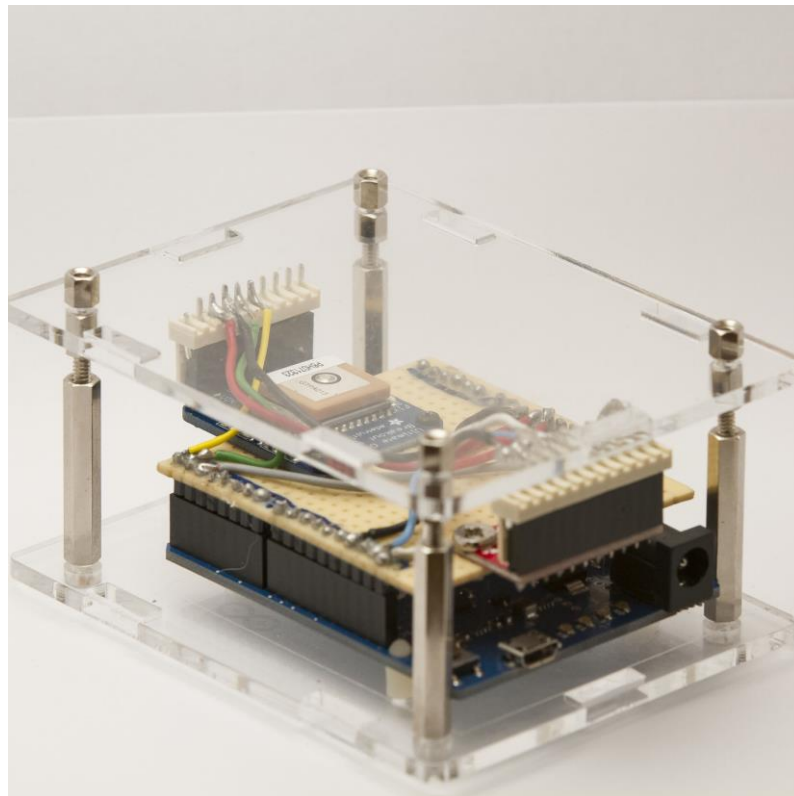


Figura 32. Vista general del conjunto de hardware.

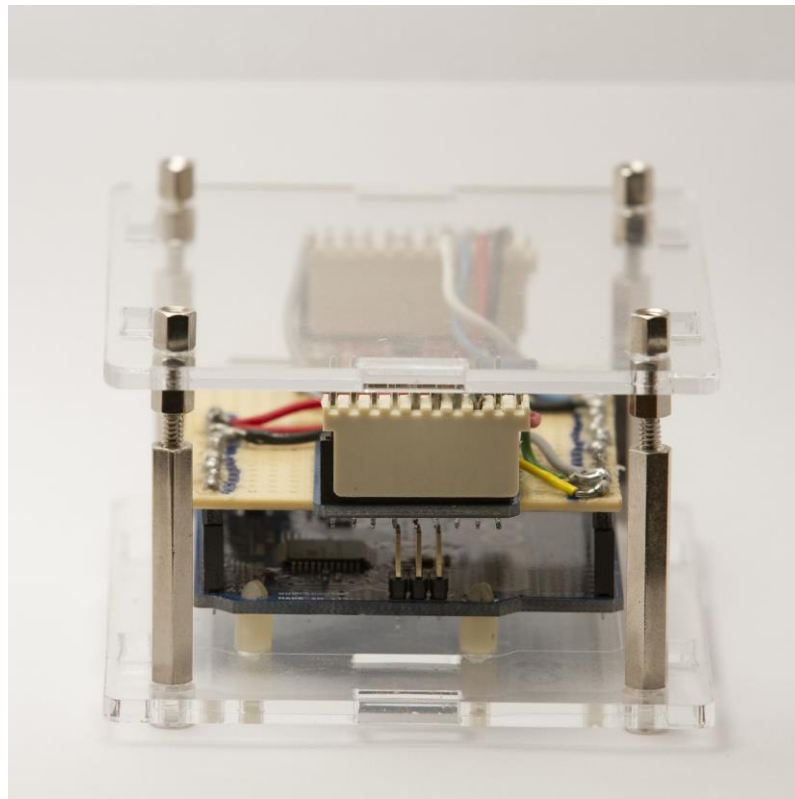


Figura 33. Vista frontal del conjunto de hardware.

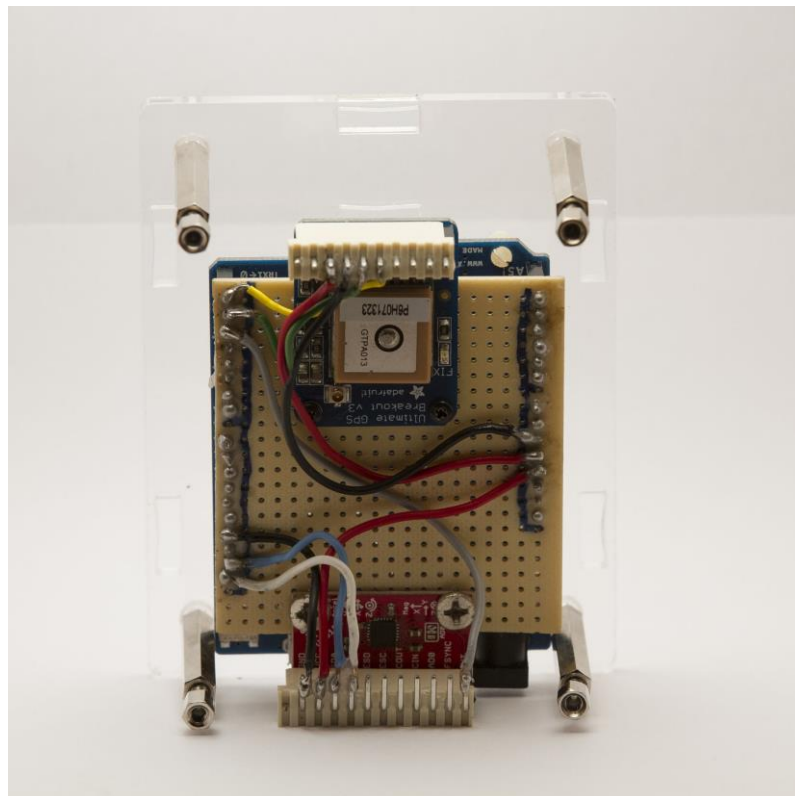


Figura 34. Vista superior del conjunto de hardware sin carcasa.

Así, las dimensiones totales del conjunto con la carcasa son de 9.5 x 7.5 x 4.5 cm, lo que hace que sea muy compacto, fácil de manejar, transportar, e instalar en cualquier vehículo.

4.2. Software

Cuando se da comienzo a este proyecto, surge la cuestión de cuál será el software utilizado para su realización. Lo primero que se tiene en cuenta a la hora de seleccionar el software, es que sea compatible con el hardware utilizado. Además de esto habrá que tener en cuenta los lenguajes de programación ya conocidos, o en su defecto los lenguajes más extendidos, de los cuales exista mayor documentación.

Teniendo en cuenta todo esto, se ha elegido Arduino y Matlab como software en este proyecto, por las razones que se enuncian posteriormente. Además de esto, se realiza una breve introducción al protocolo I²c, que ha sido necesario aprender a utilizar en el transcurso de este proyecto.

4.2.1. Protocolo I²c

El I²c (Inter-Integrated Circuit) es un bus de comunicaciones en serie diseñado por Philips, cuya primera versión data del año 1992. En modo estándar, su velocidad de transmisión son 100 kbit/s, pero permite velocidades de hasta 3.4 Mbits/s. Este bus es muy utilizado en la industria, principalmente para comunicar microcontroladores y sus periféricos en sistemas empotrados (Embedded Systems).

La principal característica del I²c es la utilización de dos líneas para transmitir la información, una para los datos (SDA) y otra para la señal de reloj (SCL). Además de estas dos líneas, es necesaria una tercera línea de referencia o tierra (GND).

Los dispositivos conectados al bus I²c tienen una dirección única para cada uno de ellos, pudiendo ser configurados como “maestros” o “esclavos”. El dispositivo “maestro” es el encargado de inicializar la transferencia de datos, y además es el que genera la señal de reloj. La característica de ser “maestro” no tiene que ser proporcionada al mismo dispositivo siempre, sino que puede intercambiarse entre los

distintos dispositivos a los que se dé la capacidad para ser “maestros”. Por esto el bus I²c es conocido como bus “multimaestro”.

Una comunicación en el bus I²c tiene la siguiente forma:

```
|start|A7 A6 A5 A4 A3 A2 A1 R/W|ACK|... DATA ...|ACK|stop|idle|
```

Los patrones característicos de la comunicación mediante este bus son:

- El bus está libre cuando SDA y SCL están en estado lógico alto.
- En estado bus libre, cualquier dispositivo puede ocupar el bus I²C como maestro.
- El maestro comienza la comunicación enviando un patrón llamado "start condition". Esto alerta a los dispositivos esclavos, poniéndolos a la espera de una transacción.
- El maestro se dirige al dispositivo con el que se va a comunicar, enviando un byte que contiene los siete bits (A7-A1) que componen la dirección del dispositivo esclavo con el que se quiere comunicar, y el octavo bit (A0) de menor peso se corresponde con la operación deseada (R/W), lectura (R)=1 (recibir del esclavo) y escritura (W)=0 (enviar al esclavo).
- La dirección enviada es comparada por cada esclavo del bus con su propia dirección, si ambas coinciden, el esclavo se considera direccionado como esclavo-transmisor o esclavo-receptor dependiendo del bit R/W.
- El esclavo responde enviando un bit de ACK que le indica al dispositivo maestro que el esclavo reconoce la solicitud y está en condiciones de comunicarse.
- Seguidamente comienza el intercambio de información entre los dispositivos.
- El maestro envía la dirección del registro interno del dispositivo que se desea leer o escribir.
- El esclavo responde con otro bit de ACK
- Ahora el maestro puede empezar a leer o escribir bytes de datos. Todos los bytes de datos deben constar de 8 bits, el número máximo de bytes que

pueden ser enviados en una transmisión no está restringido, siendo el esclavo quien fija esta cantidad de acuerdo a sus características.

- Cada byte leído/escrito por el maestro debe ser obligatoriamente reconocido por un bit de ACK por el dispositivo maestro/esclavo.
- Se repiten los 2 pasos anteriores hasta finalizar la comunicación entre maestro y esclavo.
- Aun cuando el maestro siempre controla el estado de la línea del reloj, un esclavo de baja velocidad o que deba detener la transferencia de datos mientras efectúa otra función, puede forzar la línea SCL a nivel bajo. Esto hace que el maestro entre en un estado de espera, durante el cual, no transmite información esperando a que el esclavo esté listo para continuar la transferencia en el punto donde había sido detenida.
- Cuando la comunicación finaliza, el maestro transmite una "stop condition" para dejar libre el bus.
- Después de la "stop condition", es obligatorio para el bus estar idle durante unos microsegundos.

Siguiendo estas instrucciones, y con la ayuda de las librerías de Jeff Rowberg citadas anteriormente, se consigue establecer una comunicación constante y ordenada entre el MPU-9150 y el Arduino Leonardo.

4.2.2. Arduino

Como se ha explicado con anterioridad, el microcontrolador utilizado es un Arduino Leonardo, por lo que lo más fácil que se puede utilizar es el software específico que el fabricante proporciona para el mismo, que es completamente gratuito y de código abierto.

El lenguaje de programación de Arduino se basa en el lenguaje Processing, basado a su vez en el lenguaje C. Por esto, el conocimiento del lenguaje C permite la programación en Arduino con facilidad, teniendo solamente que aprender a manejar algunas funciones específicas. La facilidad, versatilidad, y rapidez de programación

que permite este software es de gran ayuda a la hora de realizar modificaciones en el código de cara a construir aplicaciones de cierta complejidad.

Otra de las características interesantes de este software es que dispone de un monitor serial, en el cual podemos ver en cada momento qué es lo que se está transmitiendo, y cómo se está haciendo. Esto facilita el control de los datos enviados el ordenador.

Finalmente, el software Arduino dispone de una amplia documentación, junto a gran número de librerías para el manejo de múltiples dispositivos, lo que sirve como base a la hora de elaborar las nuevas librerías utilizadas en el control de los sensores en este proyecto.

4.2.3. Matlab

MATLAB® es una herramienta de software matemático, que emplea un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación. Mediante MATLAB, es posible analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos o aplicaciones. El lenguaje, las herramientas y las funciones matemáticas incorporadas permiten explorar diversos enfoques y llegar a una solución antes que con hojas de cálculo o lenguajes de programación tradicionales, como pueden ser C/C++ o Java™. La disponibilidad de este en las plataformas Windows, Mac OS X, GNU/Linux y Unix, permite que pueda ser ejecutado en las plataformas más comunes.

MATLAB se puede utilizar en una gran variedad de aplicaciones, tales como procesamiento de señales y comunicaciones, sistemas de control, pruebas y medidas. Este software está muy extendido, lo que permite encontrar mucha información sobre el mismo, lo que facilita el aprendizaje.

Las principales características de este software son:

- Lenguaje de alto nivel para el cálculo numérico, la visualización y el desarrollo de aplicaciones.
- Entorno interactivo para el estudio, el diseño y la solución de problemas.

- Funciones matemáticas para álgebra lineal, estadística, análisis de Fourier, filtrado, optimización, integración numérica y resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Gráficos integrados para visualizar datos y herramientas para crear gráficos personalizados.
- Herramientas de desarrollo para mejorar la calidad y el mantenimiento del código, así como para maximizar el rendimiento.
- Herramientas para crear aplicaciones con interfaces gráficas personalizadas.
- Funciones para integrar algoritmos basados en MATLAB con aplicaciones y lenguajes externos tales como C, Java, .NET y Microsoft® Excel®.

Por la gran disponibilidad de información ([19]), y el conocimiento previo de este lenguaje, se elige MATLAB como software a utilizar frente a otros como Python que se descartan por la menor información disponible a la hora de realizar este proyecto.

4.3. Pruebas y resultados

Para verificar el correcto funcionamiento del dispositivo integrado, se han realizado distintas pruebas, con el dispositivo embarcado en un automóvil. La baja calidad del GPS ha hecho que el proceso de medición sea lento, dado que al comienzo de cada jornada de pruebas, hay que esperar una media de 20 minutos para conseguir que este reciba la señal de suficientes satélites para poder proporcionar un posicionamiento adecuado.

En las pruebas se ha utilizado inicialmente un código que únicamente guarda las mediciones de los sensores y el tiempo en el que se realizan. Esto se hace para que en caso de que exista cualquier error en el algoritmo de integración INS/GPS, los datos guardados de las pruebas puedan servir para corregirlo y ajustar los parámetros del filtro de Kalman. Así, se guardan datos de distintas maniobras con distintas características. Se realiza varias veces la misma maniobra, y tras esto se pasa a otra distinta, variando entre las mismas la componente dinámica y la longitud. Esto hace

posible configurar los parámetros del KF de forma que éste funcione correctamente en cualquier ocasión.

Tras verificar que el algoritmo funciona correctamente, se ha pasado a las pruebas del algoritmo en tiempo real. En estas pruebas se han realizado diversas maniobras, al igual que anteriormente.

Como ejemplo del correcto funcionamiento del dispositivo, se realiza un análisis completo de una maniobra realizada en el aparcamiento de La Malata (Ferrol – A Coruña), en la cual se realizan varios giros con variaciones de velocidad.

El primer punto que se debe analizar es el correcto cálculo de la orientación. Este cálculo se puede evaluar a través de la comparación del ángulo de *yaw* obtenido mediante el algoritmo de integración, y el CoG proporcionado por el GPS (esta comparación es correcta únicamente en el caso de que las ruedas no deslicen). En la figura 35 se realiza esta comparación, mostrando además los ángulos de *pitch* y *roll*.

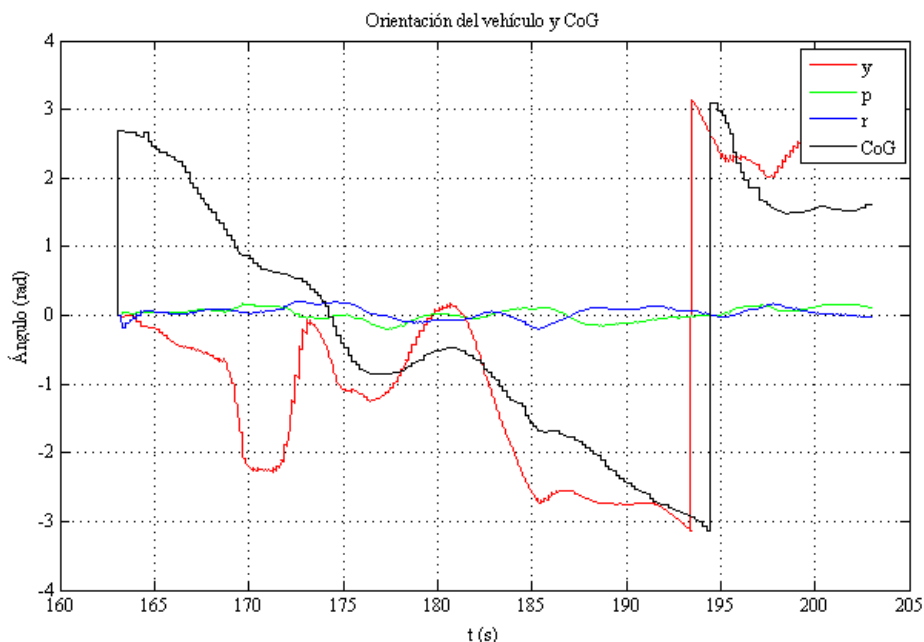


Figura 35. Comparación de la orientación y el CoG.

Se puede ver que inicialmente la orientación proporcionada por el sistema, y la proporcionada por el GPS difieren, debido principalmente al proceso de

inicialización que se realiza en la integración de los sensores, en el cual se asume que los ejes del sistema del cuerpo están alineados con los del sistema local. Esta inicialización se realiza debido a que no existe información de la orientación inicial del vehículo, y el algoritmo la corrige posteriormente utilizando la información proporcionada por el GPS. Así, con el paso del tiempo, y con el movimiento del vehículo, esta orientación se acerca más a la proporcionada por el GPS, mostrando variaciones y un cierto adelanto con respecto a esta. Estas variaciones en los resultados pueden deberse a la corrección en velocidad realizada, y a la mayor capacidad para el cálculo de la orientación que presentan los sensores inerciales con respecto al GPS. La solución de orientación proporcionada por el sistema integrado es estable, y tiene una mayor frecuencia que la proporcionada por el GPS, lo que tiene grandes beneficios sobre el correcto funcionamiento del sistema, ya que esta influencia a todo el algoritmo de integración, incluyendo la solución de posición.

Como siguiente punto, se analiza la solución de posición proporcionada por cada uno de los sistemas. Así, se realiza primero la integración de los sensores inerciales por separado, para poder ver cuál sería la solución proporcionada por estos en caso de trabajar por separado. Tras esto, se grafica tanto la solución del GPS por separado como la proporcionada por el dispositivo que integra ambos sensores. Los resultados de los 3 sistemas son los mostrados en la figura 36.

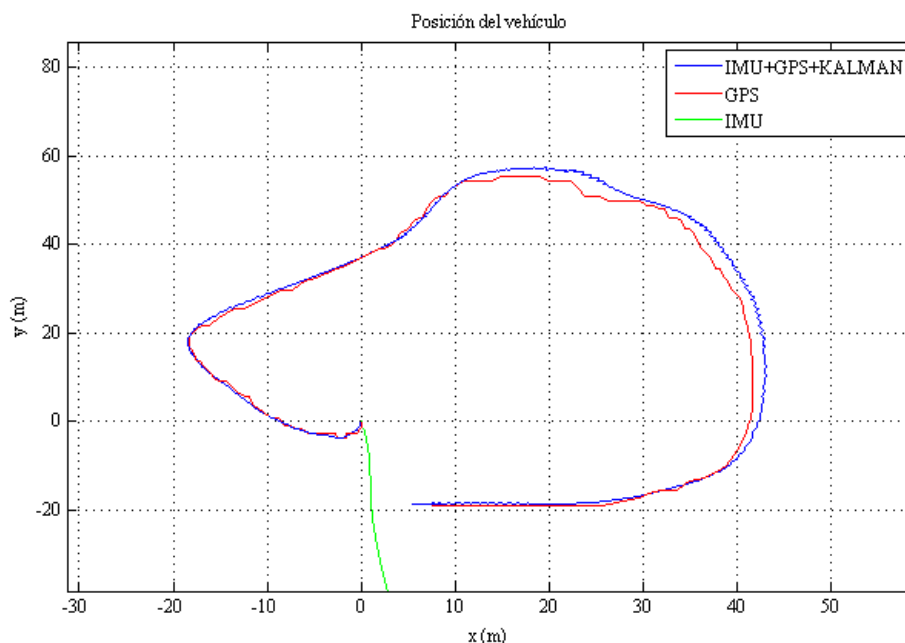


Figura 36. Solución de posición de los tres sistemas de navegación.

En esta figura se puede ver que la solución proporcionada por el algoritmo de integración de ambos sensores muestra una forma más suave que la del GPS, debido a la mayor frecuencia de muestreo obtenida mediante el proceso de integración y a la mayor información dinámica disponible gracias a los sensores inerciales. Además de esto, se puede comprobar que la corrección en los sensores inerciales es de vital importancia, dado que si no se hiciera esto, la solución proporcionada por el IMU no tendría ningún sentido debido a la desviación de los mismos (no se representa completamente en la figura 36 debido a que carece de interés por su inexactitud). Los pequeños picos que aparecen en las curvas no serían así en caso de que los sensores inerciales tuviesen unos errores estables, pero debido a sus características de baja precisión, muestran tendencia a desviarse.

El siguiente punto que se puede comprobar es la solución de velocidad proporcionada tanto por el GPS como por el sistema integrado. En la figura 37 se representan ambas soluciones.

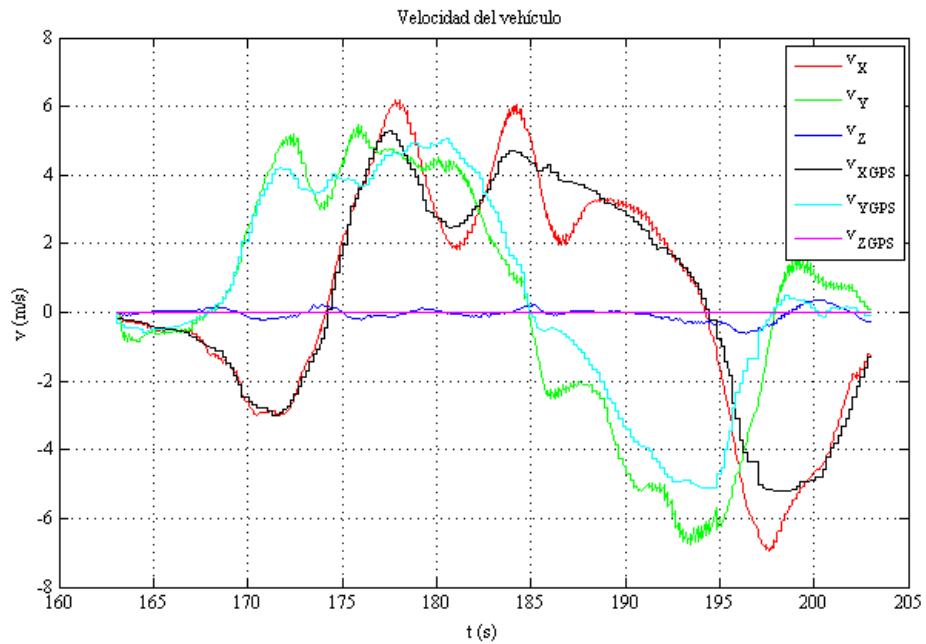


Figura 37. Solución de velocidad del sistema integrado y el GPS.

En esta figura se puede ver que las soluciones de velocidad del sistema integrado y el GPS son bastante similares, mostrando la solución integrada una mayor resolución. Es importante que estas soluciones sean semejantes, dado que una diferencia en estas puede suponer errores en el cálculo de la solución de posición.

Tras el análisis de los componentes de la solución de navegación, cabe estudiar los bias estimados tanto de acelerómetros como de giróscopos. Inicialmente, realizaremos el análisis del bias en los giróscopos, representado en la figura 38.

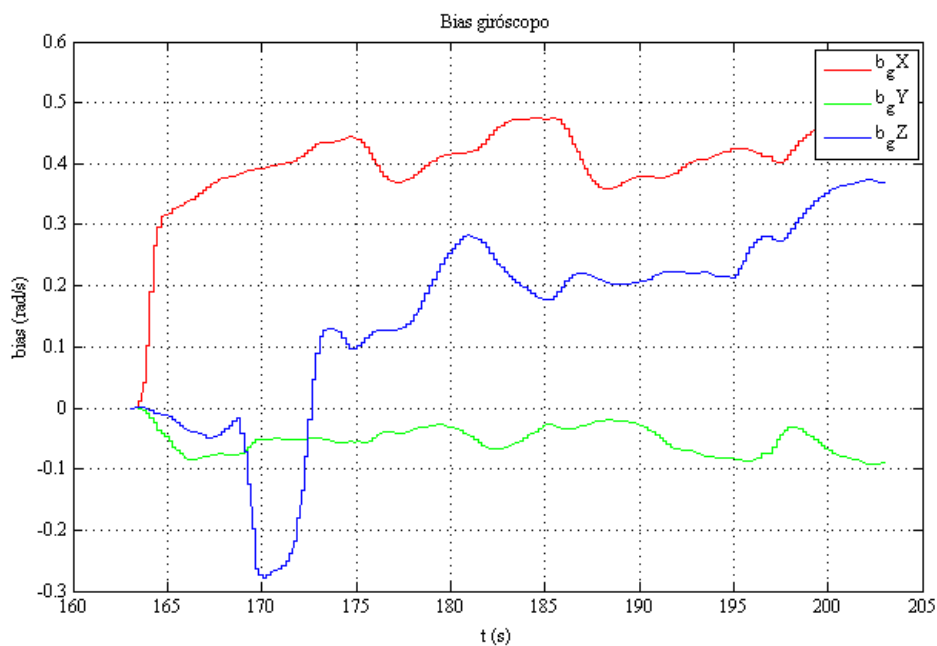


Figura 38. Bias estimado en los giróscopos.

En la figura 38 se puede ver que los bias en los giróscopos tienden a alcanzar unos valores estables, si bien estos varían debido a la baja calidad de los sensores empleados. El mayor bias estimado es el del giróscopo en el eje x, que alcanza valores de 0.48 rad/s, los cuales supondrían errores importantes en el cálculo de la orientación en caso de no ser corregidos.

Tras el estudio de los bias estimados en los giróscopos, se realiza el mismo estudio sobre los bias estimados en los acelerómetros, representados en la figura 39.

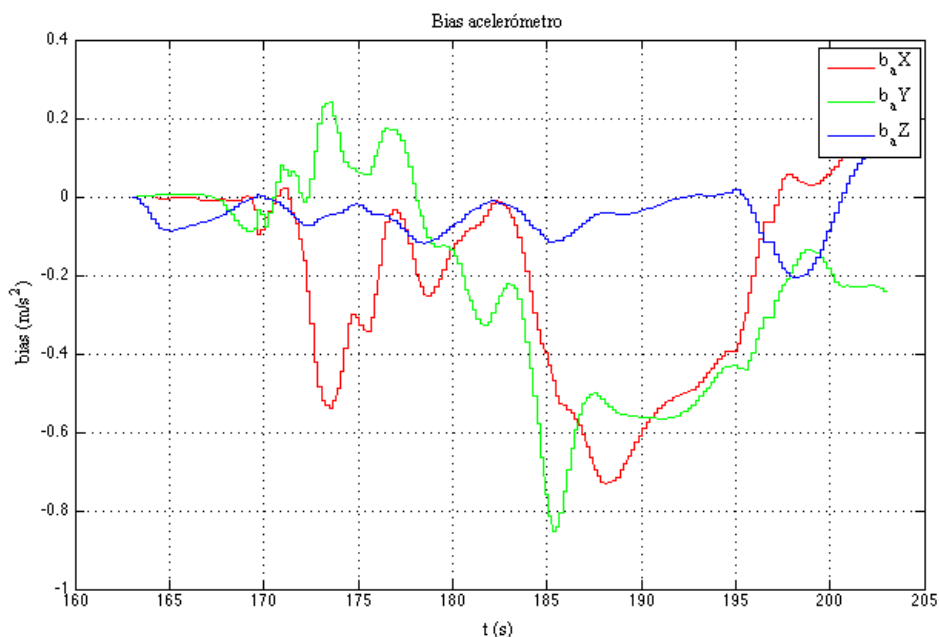


Figura 39. Bias estimado en los acelerómetros.

En la figura 39 se puede ver que los bias estimados en los acelerómetros no tienen una tendencia a estabilizarse, siendo el único estable el del eje z. Esto puede deberse a que en el eje z existe una corrección mediante la introducción de la gravedad en el algoritmo de Kalman, y en los otros dos ejes no existe esta corrección. Si los sensores utilizados tuvieran una mayor calidad, estos bias deberían mostrar una forma similar a la de los bias estimados en los giróscopos, que tienden a valores estables. Las características de los sensores utilizados hacen que sus bias muestren esta forma.

Como última parte del análisis realizado, se estudia la estabilidad de los términos de la diagonal de la matriz \mathbf{P} del KF. El obtener una correcta y rápida estabilización de estos términos es muy importante en el funcionamiento del KF, ya que como se comenta en el apartado 2.4, los términos de la diagonal de esta matriz son las varianzas de los estados estimados. En la figura 40 se muestran los términos de diagonal de la matriz \mathbf{P} correspondientes a la orientación.

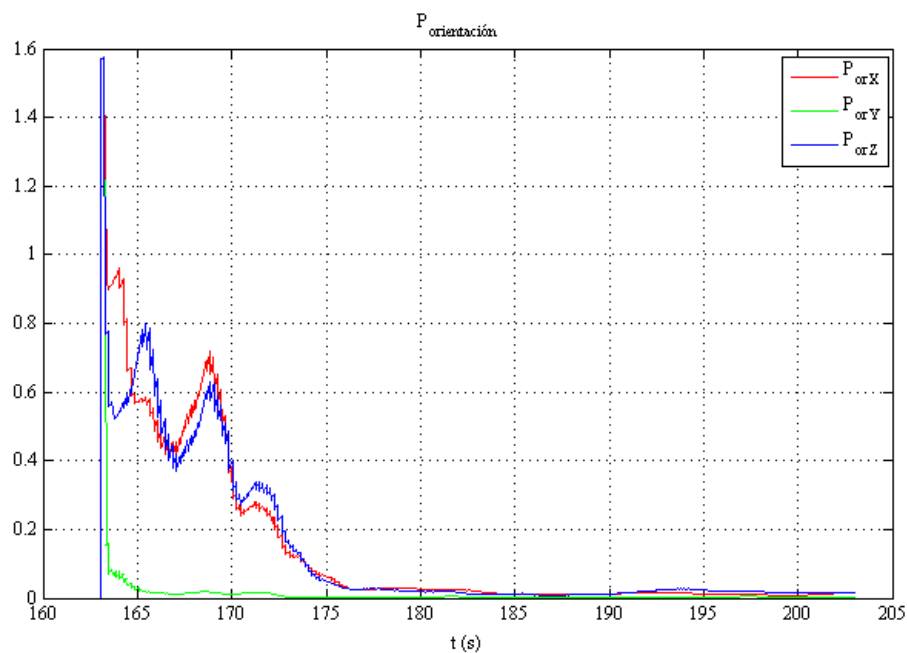


Figura 40. Términos de la matriz P correspondientes a la orientación.

En la figura 40 puede verse como los términos correspondientes a la orientación se estabilizan en un periodo de tiempo no demasiado elevado. El que este periodo de tiempo no sea inferior se debe en gran parte al proceso de inicialización realizado, en el cual se supone una orientación que no es correcta, por lo que el sistema se ve obligado a corregirla. Estos términos alcanzan tras su estabilización valores de alrededor de 0.01 rad^2 .

Tras el análisis de los términos correspondientes a la orientación, se analizan los términos correspondientes a la velocidad, representados en la figura 41.

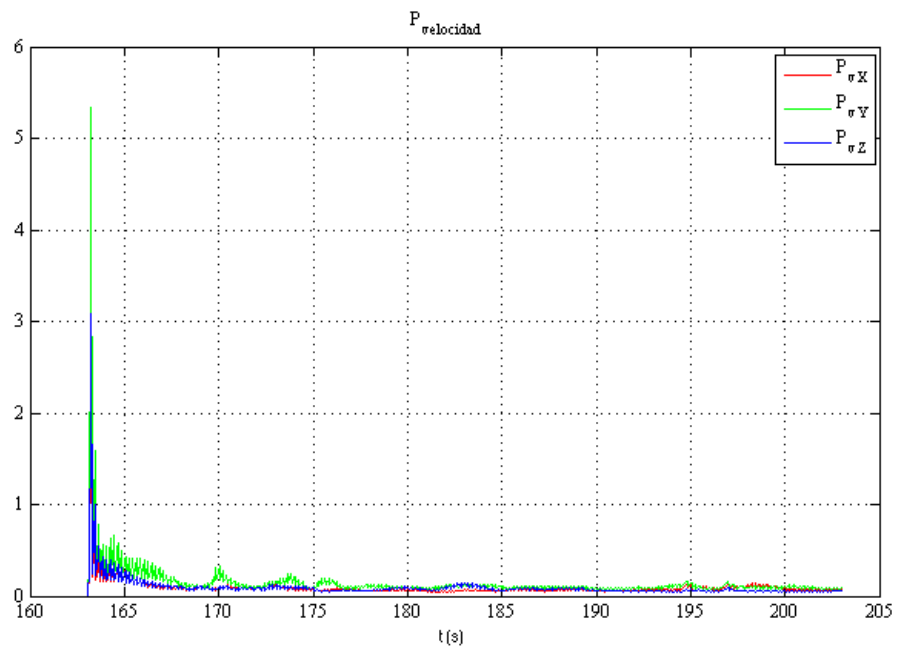


Figura 41. Términos de la matriz \mathbf{P} correspondientes a la velocidad.

En la figura 41 se puede ver como los términos de la diagonal de la matriz \mathbf{P} correspondientes a la velocidad se estabilizan rápidamente, tomando valores de alrededor de 0.05 (m/s)^2 .

Finalmente, los últimos valores de la diagonal de la matriz \mathbf{P} que se analizan, son los correspondientes a la posición, representados en la figura 42.

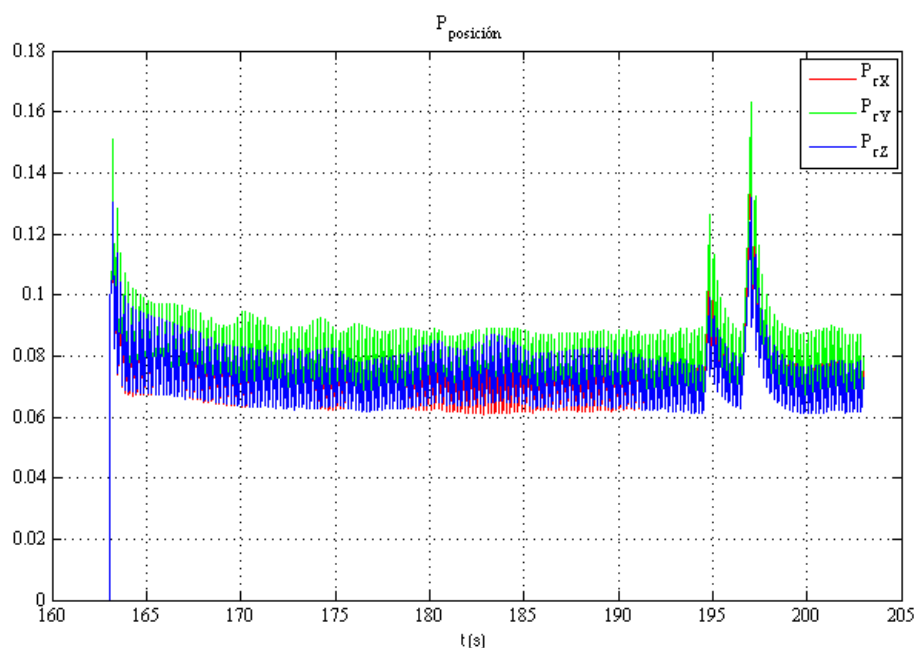


Figura 42. Términos de la matriz P correspondientes a la posición.

La estabilización de estos términos es también muy rápida, mostrando cierto ruido. Los valores de la varianza de la posición se establecen alrededor de 0.08 m^2 .

La desviación típica (raíz cuadrada de la varianza) puede ser interpretada como una medida de incertidumbre. Así, se puede establecer que la incertidumbre sobre las mediciones del sistema integrado toma los siguientes valores.

Medición	Incertidumbre
Orientación	0.10 rad
Velocidad	0.22 m/s
Posición	0.28 m

Tabla 4. Incertidumbre sobre las mediciones del sistema integrado GPS/INS.

5. Conclusiones

El objetivo de este proyecto era el desarrollo y caracterización de un sistema de posicionamiento para un vehículo a partir de un receptor GPS y unos sensores inerciales de bajo coste, buscando solventar los problemas de ambos sistemas combinando las ventajas de cada uno de ellos, y haciendo que el sistema sea evaluable en tiempo real, y susceptible de ser implementado en cualquier plataforma.

Para cumplir con los objetivos marcados inicialmente, se han realizado las siguientes tareas en el transcurso del proyecto:

1. Se seleccionaron los sensores de bajo coste a utilizar, decidiendo utilizar un MPU-9150, un receptor de GPS del fabricante Adafruit, y un microcontrolador Arduino Leonardo para su lectura.
2. Se desarrollaron librerías para el correcto funcionamiento de los sensores.
3. Se creó un código de Arduino para la correcta lectura de los sensores, eliminando problemas de sincronización entre los mismos.
4. Se configuraron los sensores en función de las necesidades, realizando para ello una modificación en las librerías.
5. Se integraron los sensores y el microcontrolador en una misma plataforma, realizando el cableado de los mismos, para así poder contar con un único dispositivo protegido de agentes externos, y que se mueva como una plataforma única.
6. Se decidió utilizar Matlab para la implementación del filtro de Kalman.
7. Se tomó la decisión de utilizar un filtro de Kalman indirecto por sus ventajas a la hora de utilizarlo con sensores de baja precisión.
8. Se realizó la programación del algoritmo del filtro de Kalman, y se verificó posteriormente su funcionamiento realizando pruebas en movimiento en las cuales se guardaban los datos de los sensores.
9. Se ajustaron los distintos parámetros del filtro de Kalman para que el dispositivo funcionase de la manera más precisa posible.

10. Se realizaron pruebas ejecutando el algoritmo en tiempo real para comprobar su correcto funcionamiento en estas condiciones.

Los resultados obtenidos tras el proceso de desarrollo son los siguientes:

1. El dispositivo integrado proporciona unos resultados más precisos y completos que los proporcionados por los sensores que lo integran por separado.
2. Se ha conseguido que este sea ejecutable en tiempo real sin ningún problema sea cual sea la dinámica de la maniobra.
3. El tamaño final del dispositivo, incluyendo la carcasa es de 9.5 x 7.5 x 4.5 cm, lo que hace que sea muy compacto, fácil de manejar, transportar, e instalar en cualquier vehículo.
4. El coste total del dispositivo son unos 90€, lo que supone un claro ahorro con respecto a un GPS de una precisión similar a la alcanzada por el mismo, y que además no proporcionaría la orientación.
5. Se han obtenido unas incertidumbres en las estimaciones del dispositivo integrado de 0.10 radianes para la orientación, 0.22 m/s para la velocidad, y 0.18 m para la posición.
6. Las trayectorias estimadas por el dispositivo son más realistas que las obtenidas a partir de la información del receptor GPS, ya que estas últimas presentan saltos laterales durante las maniobras. Además de esto, con el dispositivo integrado se obtiene una solución de navegación con una mayor cantidad de información disponible, y una frecuencia mucho mayor.

Los resultados obtenidos son susceptibles de ser mejorados en futuros trabajos. Para la mejora del sistema, existen diversas líneas. Por un lado, en este proyecto se han utilizado unos sensores inerciales de muy baja precisión, lo que ha ocasionado muchos problemas a la hora de configurarlos y obtener mediciones adecuadas. El incluir unos sensores de una calidad levemente superior, sin disparar los costes, sería altamente aconsejable, ya que podría mejorar en gran medida el funcionamiento del sistema.

Otra mejora que se puede incluir en este es la amortiguación de las vibraciones, evitando de esta forma errores de coning y sculling que afectan a la solución de navegación inercial. Para ello podrían filtrarse las mismas de forma mecánica mediante un mecanismo simple de amortiguación que absorba las pequeñas irregularidades.

Finalmente, como mejora de mayor complejidad, podrían aumentarse el número de componentes del vector de mediciones, incluyendo otras mediciones de sensores incorporados en los automóviles, como son el de giro del volante, o el de giro de las ruedas, que proporcionarían un mayor número de datos a la hora de corregir las estimaciones del filtro de Kalman. Esto supondría un cambio en todo el sistema, ya que no sería transportable sino que debería ir incorporado en el vehículo, ya que necesitaría sensores integrados en el propio vehículo.

6. Bibliografía

- [1] W. Wrigley, “History of Inertial Navigation,” *Navig. J. Inst. Navig.*, vol. 24, pp. 1–6, 1977.
- [2] C. Jekeli, *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. DeGruyter, 2000.
- [3] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *J. Basic Eng.*, vol. 82, pp. 35–45, 1960.
- [4] S. F. Schmidt, “The Kalman Filter: Recognition and Development for Aerospace Applications,” *J. Guid. Control*, vol. 4, no. 1, p. 4, 1981.
- [5] P. D. Groves, *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Artech House, 2008.
- [6] O. J. Woodman, “An introduction to inertial navigation,” 2007.
- [7] D. H. Titterton and J. L. Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology - 2nd Edition*. The Institution of Electrical Engineers & The American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004.
- [8] E. D. Kaplan and C. J. Hegarty, *Understanding GPS: Principles and Applications*. Artech House, 2006.
- [9] D. Simon, *Optimal State Estimation*. Wiley-Interscience, 2006.
- [10] S. I. Roumeliotis, G. S. Sukhatme, and G. A. Bekey, “Circumventing Dynamic Modeling: Evaluation of the Error-State Kalman Filter applied to Mobile Robot Localizacion,” 1999.
- [11] K. T. Leung, J. F. Whidborne, D. Purdy, and P. Barber, “Road vehicle state estimation using low-cost GPS/INS,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 25, no. 6, pp. 1988–2004, Aug. 2011.
- [12] InvenSense Inc., “MPU-9150 Product Specification.”
- [13] InvenSense Inc., “MPU-9150 Register Map and Descriptions.”
- [14] InvenSense Inc., “MPU-9150 9-Axis Evaluation Board User Guide.”
- [15] GlobalTop Technology Inc., “GlobalTop PMTK command packet.”



- [16] GlobalTop Technology Inc., “FGPMMOPA6H GPS Standalone Module Data Sheet.”
- [17] J. Rowberg, “i2cdevlib.” [Online]. Available:
<http://www.i2cdevlib.com/devices/mpu6050#source>.
- [18] S. T. Inc., *NMEA Reference Manual*, vol. 1, no. November. SiRF Technology, Inc., 2008.
- [19] J. Raol, *Multi-Sensor Data Fusion with MATLAB®*. CRC Press, 2009.