



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Facultad de Economía y Empresa

Trabajo de
fin de grado

MODELOS DE
VALORACIÓN DE
ACTIVOS DE
CAPITAL

Laura Marín Alvarellos

Tutor: Pablo de Llano Monelos

Grado en Ciencias Empresariales

Año 2014

Resumen

En el presente documento se explicarán detalladamente los modelos de valoración de activos de capital, o activos financieros, más relevantes. Estos son: el modelo de Markowitz, el modelo diagonal de Sharpe, el Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM) y el Modelo de Valoración por arbitraje (APT). Se incluirá en el análisis: el nacimiento de las teorías, las hipótesis, el planteamiento y desarrollo y las críticas a cada uno de los modelos expuestos.

Tras esta primera exposición teórica, se llevará a la práctica cada uno de los modelos basándose en dos carteras creadas al azar y compuestas por tres valores cada una. Dichos valores serán acciones de diversas empresas cotizadas en el IBEX-35.

Una vez establecidos los datos a emplear en el análisis, se realizarán los cálculos estadísticos necesarios para poder plantear y resolver los modelos.

Tras esto se compararán y se comentarán las similitudes y diferencias encontradas entre los resultados de cada modelo de valoración en lo que respecta a las variables fundamentales de análisis: riesgo y rendimiento.

Palabras clave: Finanzas, Activo de capital, Selección de cartera, Teoría de cartera, Modelos de valoración, Optimización.

Número de palabras: 13.482

Abstract

In this paper shall be explained pricing models of capital assets, financial assets, more relevant. These are: Markowitz model, Sharpe diagonal model, Capital Asset Pricing Model (CAPM) and Arbitrage Valuation Model (APT). In the analysis will be included: birth of theories, hypothesis, planning and development and reviews of each of the models exposed.

After this first theoretical exposition, will be implemented each of the models basing in two portfolios created randomly and consisting of three values each. These values are actions of various companies quoted in IBEX-35.

Once the data set used in the analysis, will be made statistical calculations necessary to formulate and solve the models.

After that, the similarities and differences found between the results of each valuation model with respect to fundamentals of analysis, risk and return, are compared.

Keywords: Finance, Capital assets, Portfolio selection, Portfolio theory, Valuation models, Optimization.

Number of words: 13.482

Índice

Introducción	9
1. Concretando el marco de la inversión.	11
1.1. Valoración de activos financieros.	13
1.2. Comenzando a medir rendimiento y riesgo: la tasa interna de rendimiento y el valor en riesgo.	14
1.3. Creando carteras de inversión.	16
1.4. Desarrollando los modelos.	17
2. Modelos de valoración	19
2.1. Teoría de cartera.	19
2.1.1. Modelo de Markowitz.	20
2.1.1.1. Hipótesis básicas del modelo de Markowitz.	20
2.1.1.2. Fases de desarrollo de la teoría.	21
2.1.1.2.1. 1ª etapa: análisis de los títulos o valores mobiliarios o determinación del conjunto de cartera eficiente.	21
2.1.1.2.2. 2ª etapa: actitud del inveror frente al riesgo.	22
2.1.1.2.3. 3ª etapa: selección o determinación de la cartera óptima.	24
2.1.1.3. Planteamiento del modelo de Markowitz.	24
2.1.1.4. Críticas al modelo de Markowitz.	25
2.1.2. Simplificando el cálculo: el modelo diagonal de Sharpe.	25
2.1.2.1. Planteamiento del modelo de Sharpe.	27
2.2. Capital Assests Pricing Model: CAPM.	28
2.2.1. Hipótesis de CAPM.	29
2.2.2. Formando una nueva cartera de inversión: C.	30
2.2.3. Índice de deseabilidad de Sharpe.	33
2.2.4. Línea de mercado de capitales: CML (Capital Market Line).	34
2.2.5. La línea del mercado de títulos: SML (Security Market Line)	35
2.2.6. Valoración de activos financieros.	35

2.2.7. Críticas a CAPM.....	36
2.3. El modelo de valoración por arbitraje: APT.....	38
2.3.1. Hipótesis del modelo APT.	38
2.3.2. Planteamiento del modelo APT.....	39
2.3.3. Los factores de influencia.	40
2.3.4. Operaciones de arbitraje.	41
2.3.5. Críticas a APT.	43
3. Aplicando la teoría: creando carteras en el IBEX-35.	44
3.1. Recopilando datos.	44
3.1.1. Valores seleccionados.....	44
3.1.2. Tamaño muestral.....	45
3.1.3. Cálculos iniciales.	46
3.2. Aplicando la Teoría de cartera.	48
3.2.1. Aplicación del modelo de Markowitz.....	48
3.2.1.1. Cartera A.	48
3.2.1.2. Cartera B.	50
3.2.2. Aplicación del modelo de Sharpe.	52
3.2.2.1. Cartera A.	52
3.2.2.2. Cartera B.	54
3.3. Aplicando CAPM.....	57
3.3. Aplicando APT.....	61
3.3.1. Cartera A.	62
3.3.2. Cartera B.	63
3.4. Comparativa de resultados.	64
Conclusiones	66
Bibliografía.....	68
ANEXO I. Modelo de Markowitz.....	72
ANEXO II. Modelo diagonal de Sharpe.	73
ANEXO III. Modelo de valoración de activos de capital, CAPM.	75
ANEXO IV. Modelo de valoración por arbitraje, APT.....	77
ANEXO V. Cotizaciones de las acciones que conforman las carteras.....	78
ANEXO VI. Soluciones extraídas de Solver.	93
ANEXO VII. Cotizaciones del Bono Alemán a 10 años.....	100

Índice de gráficos

Gráfico 1. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera A según Markowitz.	49
Gráfico 2. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera B según Markowitz.	51
Gráfico 3. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera A según Sharpe.	54
Gráfico 4. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera B según Sharpe.	56

Índice de ilustraciones

Ilustración 1. Frontera de carteras eficientes y conjunto de carteras factibles.....	22
Ilustración 2. Curvas de indiferencia y frontera de carteras eficientes.....	23
Ilustración 3. Características del activo sin riesgo.	31
Ilustración 4. Cartera de CAPM.....	32
Ilustración 5. Características de la cartera de arbitraje.....	42
Ilustración 6. Logotipos de las empresas seleccionadas para la cartera A.....	45
Ilustración 7. Logotipos de las empresas seleccionadas para la cartera B.....	45

Índice de tablas

Tabla 1. Comparativa entre inversión productiva y financiera.	12
Tabla 2. Rendimiento de los títulos en función de la volatilidad.....	27
Tabla 3. Factores de influencia.	41
Tabla 4. Resumen de medidas de estadística descriptiva de la Cartera A.....	46
Tabla 5. Resumen de medidas de estadística descriptiva de la Cartera B.....	46
Tabla 6. Matriz de varianzas-covarianzas de los activos de la Cartera A.....	47
Tabla 7. Matriz de varianzas-covarianzas de los activos de la Cartera B.....	47
Tabla 8. Regresiones de los activos de la Cartera A sobre el IBEX-35.	47
Tabla 9. Regresiones de los activos de la Cartera B sobre el IBEX-35.	47
Tabla 10. Variación de los parámetros de cartera según cambios en $x_{IBEX - 35}$ y x_{B10}	58
Tabla 11. Variación de los parámetros de cartera según cambios en x_A y x_{B10}	59
Tabla 12. Variación de los parámetros de cartera según cambios en x_B y x_{B10}	60
Tabla 13. Comparativa de ISH de carteras.	60
Tabla 14. Comparativa de resultados Markowitz-Sharpe	64

Introducción

¿Qué es una inversión financiera?, ¿qué particularidades tiene? ¿Cómo debemos formar carteras de inversión? Y una vez creadas, ¿cómo podemos valorarlas? ¿Se asemejan los resultados con la realidad?

La labor del presente documento es dar respuesta a estas y otras muchas preguntas que pueden surgir a la hora de adentrarse en el mundo de la valoración financiera. El tema en cuestión, los métodos de valoración de activos de capital, es muy extenso y sobre él, numerosos autores han expuesto sus teorías y modelos, de los cuales, se tratarán de explicar los más relevantes.

El papel de la valoración en el mundo de las finanzas es sumamente importante, ya que, ayuda a estimar la ganancia o pérdida que se puede obtener si se decide realizar una inversión o un conjunto de ellas. Este análisis es determinante a la hora

de que el inversor se decante por un activo u otro, en función de sus condicionantes y expectativas.

En el presente trabajo se tratará de valorar una selección de activos de capital, empleando aquellos métodos de valoración de activos financieros que se consideran más relevantes: la teoría de cartera, representada por Markowitz y Sharpe; el modelo de valoración de activos de capital, CAPM; y, por último, el modelo de valoración por arbitraje, APT. Se analizarán las inversiones realizadas aplicando estos métodos y se comprobará si los resultados se asemejan o difieren mucho entre ellos.

Como objetivos principales del análisis podemos destacar:

- Adquirir un conocimiento de la fundamentación teórica de los métodos de evaluación de los activos de renta variable.
- Aprender a analizar la economicidad de los títulos individuales, conjugando riesgo y rendimiento.
- Evaluar y optimizar carteras de inversión mediante los modelos planteados.

Una vez expuestas metas y objetivos, se está en disposición de comenzar a profundizar en el tema en cuestión.

1. Concretando el marco de la inversión.

Cuando se dispone de ahorros, o se tiene capacidad para solicitar dinero a préstamo, se puede decidir invertir, es decir, comprometer el capital para conseguir un objetivo. Pero, ¿cómo decidir en qué invertir? Las inversiones pueden realizarse en activos reales o en activos financieros. En el primer caso se habla de inversión productiva, mientras que en segundo se trata de una inversión financiera. Ambas se diferencian en una serie de factores como son:

- La fraccionabilidad o capacidad para dividir la inversión.
- La liquidabilidad o capacidad para hacerse efectiva la inversión, que depende de la situación del mercado.
- La diversificabilidad o capacidad de invertir en diferentes activos para repartir el riesgo.
- La flexibilidad temporal o facilidad para invertir y desinvertir a lo largo del horizonte temporal.

Tabla 1. Comparativa entre inversión productiva y financiera.

CARACTERÍSTICAS	INVERSIÓN PRODUCTIVA	INVERSIÓN FINANCIERA
Fraccionabilidad	Generalmente no fraccionable	Perfectamente fraccionable
Liquidabilidad	Difícil de liquidar	Relativamente fácil de liquidar
Diversificabilidad	Bajo grado	Alto grado
Flexibilidad temporal	Poco flexible	Mucho más flexible que la inversión productiva

Fuente: Elaboración propia.

Las inversiones financieras, aquellas que son objeto de estudio en este documento, se caracterizan básicamente por tres variables: el rendimiento que le genera al inversor, el riesgo soportado y la liquidez, que, como ya se ha mencionado, depende del funcionamiento de los mercados financieros.

El inversor se halla, en efecto, presionado por dos fuerzas de sentido opuesto: la deseabilidad de las ganancias y la insatisfacción que le produce el riesgo. Referente a este último, el inversor puede adoptar diversas posturas de actuación:

- **Conservador:** valora en mayor medida la seguridad de la inversión frente a su rentabilidad. Busca maximizar el rendimiento pero sin asumir demasiado riesgo. El inversor es averso al riesgo.
- **Moderado:** se valora la rentabilidad pero sin dejar de tener presente el riesgo.
- **Tolerante:** valora ante todo la rentabilidad y entiende que, para conseguir maximizarla, debe soportar riesgos que, en ocasiones pueden ser elevados.

Como se verá más adelante, en los modelos predomina la postura aversa al riesgo del inversor, el cual quiere obtener una rentabilidad de su inversión soportando el mínimo riesgo posible.

Atendiendo de nuevo al riesgo, se puede, dentro del conjunto de inversiones financieras, realizar una clasificación, distinguiendo entre: títulos de renta fija y títulos de renta variable. Los primeros son aquellos de los cuales se conoce de antemano cual será la corriente de flujos de caja que va a generar. Es el caso de los bonos u obligaciones.

Sin embargo, los activos de renta variable están sujetos a un mayor riesgo que los anteriores y los flujos de caja que se obtengan no serán ciertos ni conocidos, si no que dependerán de factores como el comportamiento del mercado, las fluctuaciones de la economía o los desempeños de las empresas; y es que, este tipo de activos se negocian en mercados de capitales. *Llamamos mercado de capitales, al ámbito de contacto entre ahorro e inversión. Los ahorradores, poseedores de capital, oferentes, por tanto, del mismo, realizan transacciones con los demandantes de capital, generalmente empresas, que lo precisan para afrontar su inversiones (...)*(Doldán, 2003, p.143) o también, *Un mercado financiero es el lugar o mecanismo de realización del encuentro entre la oferta y la demanda de una determinada mercancía. Se trata de un mercado en el que la mercancía intercambiada es un instrumento financiero* (Martínez, 1997, p.46). Un ejemplo de estos activos son las acciones.

1.1. Valoración de activos financieros.

Así pues, para medir el riesgo que se soportará y el rendimiento que reportará un activo, se debe conocer previamente su valor. *El valor de un activo financiero es, ciertamente, el precio al que se cotiza en el mercado de valores o, en defecto de este, el precio que estaría dispuesto a pagar un eventual comprador. (...) el precio de un activo financiero es, teóricamente, el valor financiero actual de sus flujos de caja* (Piñeiro et al., 2007, p.111). De esto se puede deducir, que, al depender de un

mercado, los precios varían cuando lo hacen las relaciones entre oferta y demanda, por lo que podemos afirmar que los cambios en los precios son aleatorios.

Gordon (1962) refina el planteamiento matemático de su predecesor, Williams, proponiendo la siguiente fórmula para poder calcular el precio del activo:

$$P_0 = D_0 \cdot \frac{(1+g)}{(k-g)} ; P_0 = \sum CF_t \cdot (1+r)^{-t}$$

$$k = D_0 \cdot \frac{(1+g)}{P_0 + g}$$

De este modo, se observa que el precio del activo depende de los dividendos, los cuales forman una progresión geométrica en función de g ; y del coste de la financiación, k , también llamada “rentabilidad mínima exigida por los accionistas”. Por tanto, como el cambio en los precios se realiza de forma aleatoria, los cambios en sus rendimientos tendrán la misma naturaleza de cambio.

1.2. Comenzando a medir rendimiento y riesgo: la tasa interna de rendimiento y el valor en riesgo.

Una vez valorado el activo, se pasa a analizar su rentabilidad y su riesgo. Los activos, negociados en mercados secundarios, generan para el inversor dos tipos de ganancias:

- Las derivadas del reparto de dividendos de la empresa en la que se ha invertido.
- Las derivadas de los cambios en las cotizaciones del activo. Como es lógico, la cotización puede incrementarse respecto al precio al que se compra la acción, pero también puede decrecer, es decir, puede ocasionar una pérdida.

De esas fluctuaciones en la cotización se deriva un riesgo, el riesgo de los cambios en los precios, que se producen millones de veces a lo largo de cada sesión diaria de negociación en el mercado. La teoría de la eficiencia¹ argumenta que estas series se forman de manera aleatoria por lo que, puede realizarse a través de la estadística la evaluación del rendimiento y el riesgo. De este modo, la rentabilidad podría formularse como el cociente entre la diferencia de precios más los dividendos (d_{tj}) y el precio al inicio de la sesión (s_{tj}); dividido entre el precio en el periodo anterior:

$$r_{tj} = \frac{P_{tj} - P_{t-1j} + d_{tj} + s_{tj}}{P_{t-1j}}$$

Una opción para medir el rendimiento sería mediante la “*tasa interna de rendimiento de la inversión*”, de ahora en adelante TIR. Esta es, *el tipo de interés, según el cual, el valor financiero actual de todos los pagos y cobros relativo a cualquier momento, es igual a cero, o lo que significa lo mismo: según el cuál las dos series de pagos y cobros son financieramente equivalentes* (Doldán, 2000, p.28)².

$$TIR = r \quad P_0 - \sum \frac{CF_t}{(1+r)^{-t}} = 0$$

Sin embargo, esta medida de rendimiento tiene una serie de limitaciones que hacen descartar su uso. Entre estos inconvenientes se puede destacar que la TIR es una medida agregada de rendimiento medio durante el horizonte de inversión, por lo que, no expresa de forma adecuada las oscilaciones que puede experimentar el rendimiento e impide valorar el riesgo.

Solo como observación, a la hora de evaluar el riesgo, una nueva tendencia es emplear el “*valor en riesgo*”, de ahora en adelante, VaR el cuál se define como *la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo determinado y con un nivel de confianza dado* (Doldán, 2001, p.19). El VaR ofrece

¹ Desarrollada en el apartado 3. *Capital Assessts Pricing Model: CAPM* del presente documento.

² Cita de Schneider recogida por Doldán.

una visión diferente para poder estimar o evaluar el riesgo del mercado en sesiones venideras siempre que el mercado se encuentre en condiciones normales y suponiendo un escenario de actuación con un nivel de confianza estadística del 99%. Además, este método permite recrear escenarios que no hayan ocurrido todavía, evitándonos una estimación del riesgo de base histórica.

Cuando se emplea el VaR para medir el riesgo de un conjunto de activos se da un fenómeno curioso: el VaR del conjunto es inferior al VaR de cada activo considerado individualmente. Del mismo modo sucede con el comportamiento de las varianzas. Esto se debe, a *su capacidad para sintetizar los efectos de múltiples activos, incluso de carteras heterogéneas constituidas por combinaciones variables de activos* (Piñeiro et al. 2009b, p.196).

El concepto de VaR, empleado por la banca para la gestión del riesgo, se regula en los acuerdos de Basilea³, lo que le otorga una calificación de práctica fiable.

1.3. Creando carteras de inversión.

Cuando se invierte, lo más habitual es no hacerlo solo en un valor si no en varios simultáneamente, es decir, se crea una cartera de inversión o de valores. *Por cartera de valores se entiende una determinada combinación de valores mobiliarios adquiridos por una persona física o jurídica, y que pasan, por tanto, a formar parte de su patrimonio. (...) En general, el inversor a la hora de formar una cartera de valores trata de combinar los diferentes activos individuales de tal modo que el activo mixto o cartera le garantice una "rentabilidad", "seguridad" y "liquidez" aceptables* (Suárez, 2005, p.463).

Este conjunto de inversiones tendrá, por tanto, una expresión para rendimiento y riesgo. Suponiendo que formamos nuestra cartera con los activos h y k tendremos que:

³ Los acuerdos de Basilea son aquellos de supervisión bancaria o recomendaciones sobre la regulación bancaria que emite el Comité de Basilea en Supervisión Bancaria.

- Rendimiento esperado:

$$E(r_{ct}) = \mu_c = \mu_h \cdot x_h + \mu_k \cdot x_k = \sum \mu_j \cdot x_j$$

- Riesgo:

$$\sigma_c^2 = \sigma_h^2 \cdot x_h^2 + \sigma_k^2 \cdot x_k^2 + 2 \cdot \sigma_{hk} \cdot x_h \cdot x_k = \sum \sum \sigma_{hk} \cdot x_h \cdot x_k$$

Al crear una cartera de inversión, se está repartiendo el riesgo: se está diversificando; esto es, neutralizando el riesgo de los diferentes títulos, ya que, los cambios en los rendimientos de cada acción, considerada individualmente, no son paralelos.

No todos los inversores tienen las mismas preferencias por lo que, no todos elegirán la misma composición para sus carteras. El factor que determinará sus posturas será el grado de aversión que estos presenten ante el riesgo.

1.4. Desarrollando los modelos.

Una vez desarrollado, a grandes rasgos, el entorno general de inversión, se está en disposición de plantear los modelos que se emplearán para valorar las carteras de inversión. *Un modelo es una representación simplificada de la realidad; se construye a partir de un sistema hipotético que simplifica el número de variables y relaciones y permite que el esfuerzo analítico se concentre en las cuestiones consideradas más significativas* (Piñeiro et al. 2009a, p.226).

Para poder plantear los modelos en cuestión es necesario encontrar un método para estimar las variables: rendimiento y riesgo. Para ello se encontrarán diversas opciones pero, por el escenario de trabajo de permanencia estructural y por que se dispone de una serie histórica de datos de las acciones en las que se invertirá, se

empleará el método de “*extrapolación histórica*”. Este método consiste en asignarle al rendimiento esperado y al riesgo, un valor relacionado con una muestra de datos históricos, mediante modelos econométricos.

Ahora sí, se puede comenzar a explicar con detenimiento cada uno de los modelos de valoración seleccionados.

2. Modelos de valoración

2.1. Teoría de cartera.

La teoría de cartera se ocupa de la optimización de la relación entre rentabilidad esperada y el riesgo; en definitiva del problema de la diversificación de inversiones en renta variable (Piñeiro et al., 2007, p.113).

Como es lógico, lo ideal para el inversor sería poder optimizar simultáneamente el riesgo y el rendimiento de una cartera de activos, pero, debido a que estas variables son antitéticas, solo es posible buscar el óptimo para una de ellas entendiendo que, para la otra variable, tenemos una expectativa concreta.

Es decir, se crea un modelo de “*optimización restringida*”. Esta clase de modelos estadísticos se caracteriza por tener:

- Una función objetivo que pretende optimizar la magnitud elegida, definida en término de dos o más variables. En caso de que se trate de la rentabilidad, la función objetivo trataría de maximizarla. En caso contrario, de tratarse del riesgo, este se minimizaría mediante la función.
- Una serie de restricciones que delimitan los valores que pueden tomar las variables.

2.1.1. Modelo de Markowitz.

El economista Harry Max Markowitz (1952), plantea el modelo más sencillo para optimizar el binomio rendimiento-riesgo, pretendiendo dar solución al problema de selección de una cartera de valores. Para ello, plantea un escenario en el cual, el inversor, totalmente averso al riesgo, pretende conseguir una tasa de rentabilidad lo más elevada posible para su inversión.

La teoría del mercado de capitales nace en 1952, teniendo muy poca aceptación en el mundo financiero. Unos años después, en 1959, Markowitz vuelve a publicar su modelo consiguiendo, esta vez, una mayor repercusión.

La principal aportación de Markowitz se halla, sin restar méritos a su tratamiento analítico que sin duda los tiene, en haber recogido de forma explícita en su modelo rasgos fundamentales de lo que en un principio podemos calificar de conducta racional del inversor, consistente en buscar aquella composición de cartera que haga máximo su rendimiento para un determinado nivel de riesgo, o que minimice el riesgo de aquella para un rendimiento dado (Suárez, 2005, p.464).

2.1.1.1. Hipótesis básicas del modelo de Markowitz.

Para poder plantear el modelo de Markowitz es necesario, previamente, asentar las bases sobre las que se va a desarrollar el mismo, sus hipótesis fundamentales:

- El rendimiento de cada título por separado, o bien, del conjunto de la cartera, es una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida. La media o esperanza matemática de dicha variable aleatoria, de ahora en adelante, μ_c^* , será la medida del rendimiento.
- El riesgo se entiende como la dispersión respecto de la media del rendimiento y, por tanto, se calcula como varianza del mismo. De ahora en adelante, σ_c^2 . El riesgo también podría entenderse como la desviación típica, es decir, como la raíz de la varianza, para eliminar la negatividad de los resultados.
- El inversor es averso al riesgo y, por tanto, seleccionará aquellas carteras que más rentabilidad le reporten dado un nivel de riesgo, o viceversa, aquel conjunto de inversiones que le ofrezcan un bajo nivel de riesgo dada una rentabilidad concreta. Esto se debe a que su función de utilidad (U) cumple que:

$$U = F(\mu_c^*, \sigma_c^2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mu_c^*} > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma_c^2} < 0$$

- Los activos financieros son perfectamente divisibles.
- El mercado en el que trabaja tienen un comportamiento eficiente y una composición estable, es decir, carece de impuestos o costes de transacción⁴ y su negociación es continua.

2.1.1.2. Fases de desarrollo de la teoría.

Markowitz plantea un modelo que se desarrollará en tres fases o etapas.

2.1.1.2.1. 1ª etapa: análisis de los títulos o valores mobiliarios o determinación del conjunto de cartera eficiente.

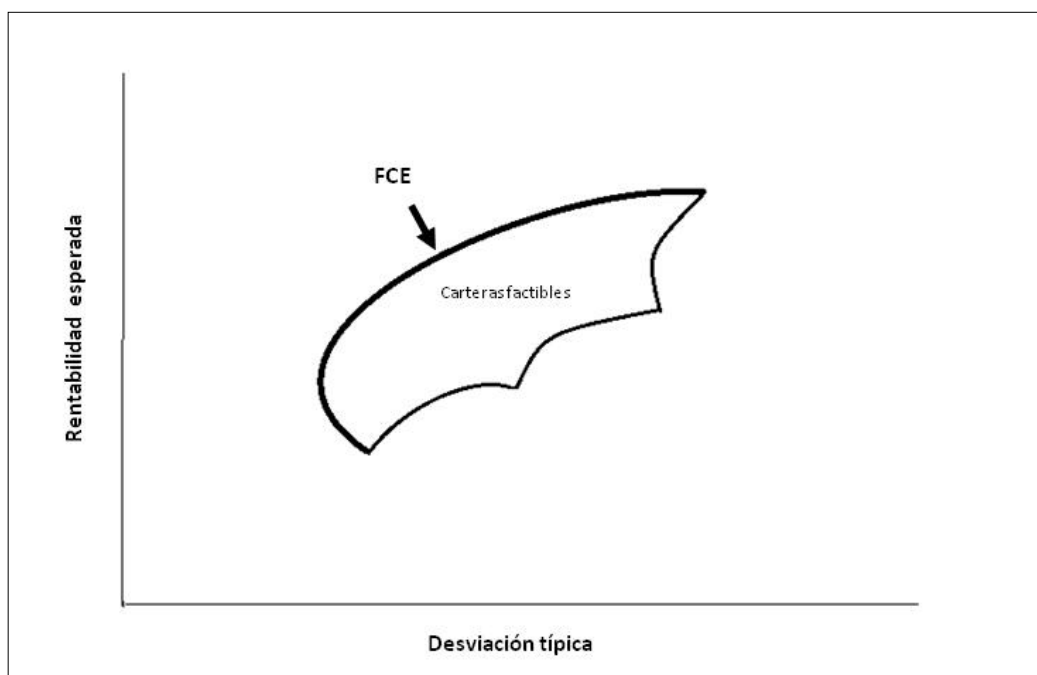
Se determinan los parámetros estadísticos de la cartera y se analizan individualmente los activos para obtener sus estimadores de riesgo y rendimiento. Una vez calculados, se resuelve el modelo para diferentes niveles de rendimiento identificando así el conjunto de inversiones eficientes, es decir, para poder determinar el conjunto de carteras que cumplen la definición de eficientes.

⁴ Entendemos por coste de transacción, en un entorno puramente económico, aquel en el que se incurre al realizar un intercambio económico en el mercado.

Una cartera es eficiente si supone la mínima exposición al riesgo, de entre todas las carteras que ofrecen la misma expectativa de rendimiento, o si posee el mayor rendimiento esperado de entre todas las inversiones con idéntica varianza (Piñeiro et al. 2009a, p.202).

Por tanto, habrá una cartera que cumpla con la definición para cada nivel de rentabilidad esperada. Aquellas carteras cuyo riesgo sea mínimo para cada nivel de rentabilidad esperada se colocan sobre una línea horizontal, la “*frontera de carteras eficientes*” (FCE). Esta frontera delimita el conjunto factible, es decir, el grupo de carteras que verifica las restricciones que plantea el modelo.

Ilustración 1. Frontera de carteras eficientes y conjunto de carteras factibles.



Fuente: Elaboración propia.

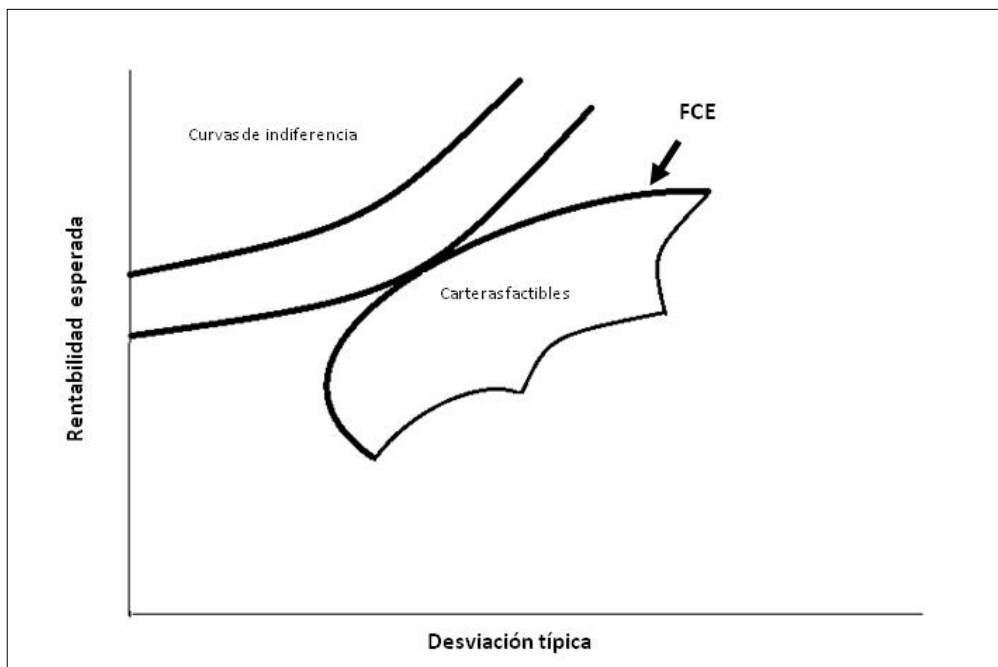
2.1.1.2.2. 2ª etapa: actitud del inversor frente al riesgo.

Como ya se ha comentado, el inversor decide el nivel de riesgo que desea asumir según su función de utilidad por lo que, dentro del conjunto de carteras eficientes, este elegirá aquella que más se adapte a sus preferencias. En el caso de Markowitz, la función de utilidad es cuadrática ya que depende de dos parámetros relevantes: rendimiento y riesgo.

Para ello debemos especificar las curvas de indiferencia entre el binomio rendimiento-riesgo, las cuales dependen de la función de utilidad⁵. Una curva de indiferencia es aquella que muestra el conjunto de carteras entre las que es indiferente el inversor, por tanto, las carteras que se encuentran en una misma curva de indiferencia reportarán la misma utilidad al individuo. Es decir, cualquier punto de una curva supone para el inversor un mismo nivel de satisfacción.

Del mismo modo, *las curvas de indiferencia más bajas, es decir, las que parten con una ordenada en el origen menor, tienen un índice de satisfacción o utilidad menor, ya que para una misma ganancia la varianza es mayor* (Suárez, 2005, pp.472-473).

Ilustración 2. Curvas de indiferencia y frontera de carteras eficientes.



Fuente: Elaboración propia.

⁵ Entendemos por función de utilidad aquella que mide la satisfacción obtenida por un consumidor al disfrutar de algún tipo de activo. En caso de inversores racionales, la función de utilidad tiene forma convexa.

2.1.1.2.3. 3ª etapa: selección o determinación de la cartera óptima.

La cartera óptima de cada inversor será aquella que considere simultáneamente las curvas de indiferencia de más alto nivel y la FCE. Es decir, la cartera que ofrece un mayor grado de utilidad al inversor será la cartera situada en el punto de tangencia de ambas.

2.1.1.3. Planteamiento del modelo de Markowitz.

El modelo de Markowitz se formula optimizando el riesgo de cartera, es decir, minimizándolo sujeto al rendimiento esperado de la inversión y teniendo en cuenta las participaciones relativas a los n títulos (x_i, x_j) ⁶:

$$\min \sigma_c^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij}$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{j=1}^n x_j \cdot \mu_j = \mu_c^*$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$\forall x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Minimizando la función objetivo seleccionamos aquella cartera con rendimiento μ_c^* cuyo riesgo sea mínimo, sujeta a las restricciones de rendimiento esperado y rango de valores factibles para los títulos. El riesgo de la cartera se calculará como la suma de las varianzas y covarianzas de los activos.

⁶ Para detalle del modelo ver Anexo I.

2.1.1.4. Críticas al modelo de Markowitz.

El modelo de Markowitz, precisa una gran cantidad de cálculos a medida que aumenta el número de títulos analizados ya que es necesario calcular la matriz de varianzas y covarianzas entre las rentabilidades de dichos títulos.

A día de hoy, esa carga de cálculo no supondría un problema demasiado relevante, ya que en la actualidad disponemos de programas informáticos que facilitan esa labor, pero, por aquel entonces, si se trataba de un inconveniente a la hora de aplicar el modelo.

2.1.2. Simplificando el cálculo: el modelo diagonal de Sharpe.

Después de ver que el principal problema del modelo de Markowitz es su excesiva necesidad de cálculo, lo cual complica su aplicación práctica, Sharpe (1963) intenta simplificarlo realizando algunos cambios sustanciales.

Los trabajos de William f. Sharpe revisten posiblemente la máxima importancia en el área de las inversiones financieras, tras los iniciales de Harry M. Markowitz. Y específicamente en dos sentidos. El primero de índole eminentemente práctica, consiste en el desarrollo o puesta en marcha de los planteamientos de Markowitz. A Sharpe se le deben las primeras aportaciones experimentales mediante el uso de ordenadores. El segundo, de naturaleza teórica, (...) se centra en la reformulación del modelo de Markowitz, utilizando la razonable presunción de que las rentabilidades r_{jt} son función, o dependen, de algún índice común (Doldán, 2003, p.134).

Como observaremos, el modelo diagonal sustituye al cálculo de la matriz de varianzas covarianzas entre las rentabilidades de los títulos. *Se considera que la dependencia estadística entre los rendimientos de los diferentes títulos no es una dependencia directa, sino derivada de la relación existente entre esos rendimientos y un grupo fundamental de índices (...) representativos de la evolución de la actividad económica (Suárez, 2005, p.485).*

En este caso, se relacionará con un único indicador externo de mercado, un índice de naturaleza bursátil, ya que este es más interesante desde un punto de vista eminentemente práctico. Para ello se establecen una serie de ecuaciones características, las cuales representan la relación econométrica, lineal simple, entre cada título individual y la cartera de mercado:

$$r_{jt} = \alpha_j + \beta_j \cdot r_{Mt} + \varepsilon_{jt}$$

Como vemos, la fórmula consta de dos parámetros, α_j y β_j ; y de la perturbación aleatoria, ε_{jt} . Esta última cumple una serie de hipótesis, como expone SUÁREZ (2005):

- **Esperanza matemática nula**, ya que en ε_{jt} se incluyen numerosos factores que, considerados individualmente, son irrelevantes.
- **Homocedasticidad**. La perturbación sigue una distribución independiente del activo y del periodo temporal, por tanto, su varianza, $\sigma_{\varepsilon_j}^2$ se mantiene constante a lo largo del tiempo que dure la inversión.
- **No autocorrelación**, ya que las perturbaciones son independientes entre sí y no existe correlación entre ellas.
- **Normalidad**, ya que sigue una distribución de probabilidad normal.

Así mismo, una de las aportaciones más relevantes a este modelo es la nueva concepción del riesgo, relacionado también con la cartera de mercado. De este modo, la varianza de cada activo financiero pasa a expresarse como:

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_j}^2 = RS + RE$$

Como se observa, la ecuación del riesgo se divide en dos sumandos conocidos, respectivamente, como riesgo sistemático y riesgo específico:

- **Riesgo sistemático** ($\beta_j^2 \cdot \sigma_M^2$): este riesgo se relaciona con la pendiente de la ecuación característica de cada activo (β) y es función directa de la varianza del mercado (σ_M^2). El coeficiente β , juega un papel fundamental en este modelo ya que representa la volatilidad del título, la cual determina realmente el riesgo sistemático ya que, σ_M^2 es igual para todas las acciones negociadas en un mismo mercado. Cabe destacar que, sea cual sea el nivel de este riesgo, la inversión puede ser eficiente siempre y cuando el riesgo específico sea nulo.
- **Riesgo específico** ($\sigma_{\varepsilon_j}^2$): expresa la variabilidad a causa de las características individuales de cada activo. Como es lógico, al diversificar la cartera, es decir, al repartir nuestra inversión en diferentes títulos, este riesgo tiende a neutralizarse y compensarse y, por tanto, desaparece. Podemos afirmar entonces que una característica principal de las inversiones eficientes será que $\sigma_{\varepsilon_j}^2 = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, está claro que un inversor racional optará por aquella inversión que esté diversificada, asegurándose así prescindir del riesgo específico de cada título. Es ahora cuando se distingue, aún suponiendo sujetos aversos al riesgo, al inversor precavido y a aquel que no lo es tanto, ya que este deberá determinar que nivel de riesgo sistemático desea asumir. Es decir, cual es la β de la cartera.

El comportamiento de la volatilidad, se convierte por tanto en un factor clave a la hora de tomar decisiones de inversión ya que nos guía claramente sobre las fluctuaciones de la rentabilidad del título. *El coeficiente beta, β , nos indica la respuesta del rendimiento de una acción al riesgo sistemático.* (Ross et al.,2012; p.372)

Tabla 2. Rendimiento de los títulos en función de la volatilidad.

VALOR DE β	RENDIMIENTO DEL TÍTULO
$\beta = 0$	Fijo e independiente de las condiciones del mercado
$\beta = 1$	Cambios iguales a los del mercado (en cuantía y dirección)
$0 < \beta < 1$	Rentabilidad mas estable que el mercado
$ \beta > 1$	Más volátil que el mercado

Fuente: Elaboración propia.

2.1.2.1. Planteamiento del modelo de Sharpe.

El modelo de Sharpe se formula optimizando el riesgo de cartera, al igual que en el caso de Markowitz, es decir, minimizándolo sujeto a las restricciones planteadas sobre los coeficientes del modelo (α_j, β_j) ⁷:

⁷ Para detalle del modelo ver Anexo II.

$$\min \sigma_c^2 = \sum \sigma_{\varepsilon_j}^2 \cdot x_j^2 + \sigma_M^2 \cdot x_{n+1}^2$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot x_j + \mu_M \cdot x_{n+1} = \mu_c^*$$

$$\sum \beta_j \cdot x_j - x_{n+1} = 0$$

$$\sum x_j = 1$$

$$\forall x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Al igual que en Markowitz, minimizando la función objetivo seleccionamos aquella cartera con rendimiento μ_c^* cuyo riesgo sea mínimo, sujeta a las restricciones de rendimiento esperado y rango de valores factibles para los títulos. El riesgo de la cartera se calculará como la suma de las varianzas de los activos sumándole el resultado de multiplicar la varianza del mercado por x_{n+1}^2 , variable hipotética equivalente a la suma del producto de las volatilidades por los títulos.

2.2. Capital Assets Pricing Model: CAPM.

Hasta ahora, se ha relacionado riesgo y rendimiento desde una perspectiva cualitativa, pero el modelo de valoración de activos de capital, CAPM, estudia más en profundidad esta relación y concluye definitivamente su expresión analítica, es decir, especifica el precio del riesgo.

CAPM, propuesto por Sharpe (1961, 1964) y Treynor (1961) y ampliada, posteriormente por Lintner (1965, 1969), Fama (1968, 2004), Mossin (1966) y Black, Jensen, y Scholes (1972), toma su base teórica en la teoría de cartera, la cual se asienta sobre la teoría de eficiencia del mercado de capitales, EMH, desarrollada por Eugene Fama (1970, 1991).

La teoría de eficiencia asume que los mercados muestran toda la información disponible sobre los activos de modo que el precio de cada producto financiero representa su valor razonable. Fama (1970) dice que *un mercado es eficiente siempre que los precios de los valores reflejen toda la información y estén valorados correctamente*. Esto es consecuencia del ajuste inmediato que provoca el

comportamiento de los inversores en situación de competencia, los cuales pretenden maximizar su beneficio.

La eficiencia de un mercado, ya sea en competencia perfecta, monopolio, oligopolio o competencia monopolística, se puede medir a través del rendimiento del título de ese mercado. La eficiencia es un concepto relativo. El mercado es más o menos eficiente, dependiendo del volumen de información descontada en los precios, y del grado de formación de los precios (Piñeiro et al., 2011, p.198). Así, se distinguen tres grados de eficiencia de los mercados:

- **Fuerte:** es el caso en el que se dispone de una mayor información sobre el mercado. Toda aquello relevante para estimar el valor ya se encuentra descontada en los precios.
- **Semifuerte:** en este caso, hay información desconocida y que, por tanto, no se encuentra descontada de los precios. Se trata de la información privada.
- **Débil:** el inversor desconoce gran parte de la información. Sólo dispone de aquella que le proporciona series históricas de rendimientos y precios.

Este modelo resultó ser muy utilizado por su sencillez, ya que establece una relación lineal siempre entre las variables rentabilidad esperada y riesgo soportado por el inversor para conseguir dicha rentabilidad. Aunque aparentemente sencillo, CAPM requiere el cumplimiento de una serie de hipótesis que pueden considerarse restrictivas.

2.2.1. Hipótesis de CAPM.

En principio, las hipótesis en las que se apoya la teoría del mercado de capitales, y por tanto el modelo CAPM, como explica Doldán (2003), serían:

- **Libre concurrencia:** muchos oferentes y demandantes, incapaces individualmente para influir en las condiciones de equilibrio.
- **Perfección del mercado:** principio de unidad, tanto del precio como de la mercancía.
- **Transparencia:** información completa, disponible para todos y cada uno de los concurrentes.
- **No intervención:** carencia de regulación o intervención estatal.

Piñeiro y de Llano (2009a, 2007), concretan un poco más estas hipótesis, lo que implica:

- Un proceso transparente de formación de precios.
- Ausencia de información privada.
- Costes de transacción irrelevantes.
- Distribución normal de rendimientos.
- Aversión al riesgo por parte del inversor.
- Número y variedad suficientemente grande de activos.
- Divisibilidad de los títulos.
- Y ausencia de limitaciones relevantes a la negociación.

Estas hipótesis son la base para la construcción de un modelo “ideal” por lo que, se puede emplear para comparar sus resultados con los reales: cuanto más se aproximen los resultados obtenidos con la realidad en mayor grado podremos aplicar las conclusiones obtenidas del modelo.

Aún así, se pueden relajar estas hipótesis centrándonos en la búsqueda del mercado eficiente. *Un mercado es eficiente, cuando los precios son determinados de tal modo que reflejan los rendimientos marginales tanto de inversores como de ahorradores. Esto significa que los precios reflejan toda la información disponible y relevante* (Doldán, 2003, p.143).

A mayores, respecto a la figura del inversor, se pueden añadir:

- La aversión de los inversores al riesgo, tónica general de todos los modelos expuestos hasta ahora.
- Las expectativas de los inversores sobre a los rendimientos que esperan obtener de sus activos en cartera son homogéneas.
- El horizonte temporal con el que cuentan los inversores es idéntico y su duración es, únicamente de un periodo.

2.2.2. Formando una nueva cartera de inversión: C.

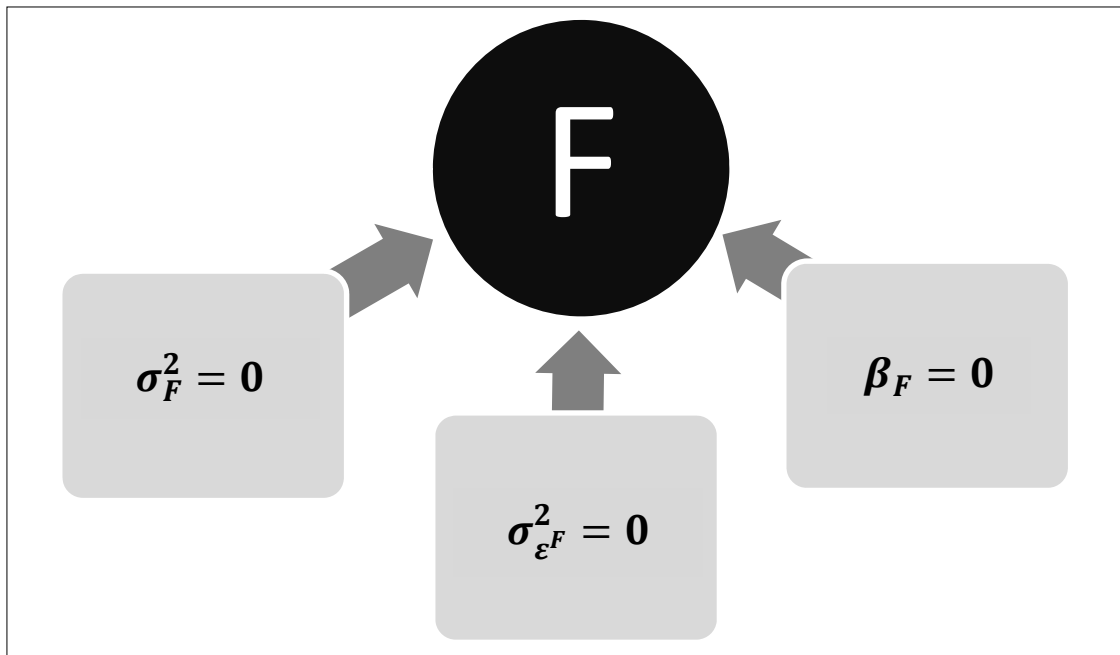
CAPM realiza dos presunciones básicas adicionales:

- La cartera de mercado, de ahora en adelante M, no experimenta cambios cualitativos relevantes y es observable. Pero, ¿Qué se entiende como cartera de mercado? La cartera de mercado es *la combinación de todos los activos financieros en las proporciones que realmente se dan en el*

mercado. Por supuesto, esta cartera es eficiente porque está diversificada y, aunque objetivamente es indiferente a cualquier otra cartera de la frontera eficiente, en cierto sentido las supera porque posee el grado máximo de diversificación. Esto explica que posea el mayor Índice de Sharpe, en definitiva que sea la combinación de riesgo óptima en el contexto de CAPM (Piñeiro et.al, 2009a, p.215).

- Existe un activo sin riesgo, más bien una tasa de interés sin riesgo a la que es posible prestar y tomar en préstamo montantes sin limitaciones. De ahora en adelante se conocerá a este activo como F. El activo puro sin riesgo se caracteriza por tener un rendimiento fijo que es independiente de cualquier factor externo así como por carecer de riesgo específico. Es decir, F tendrá:

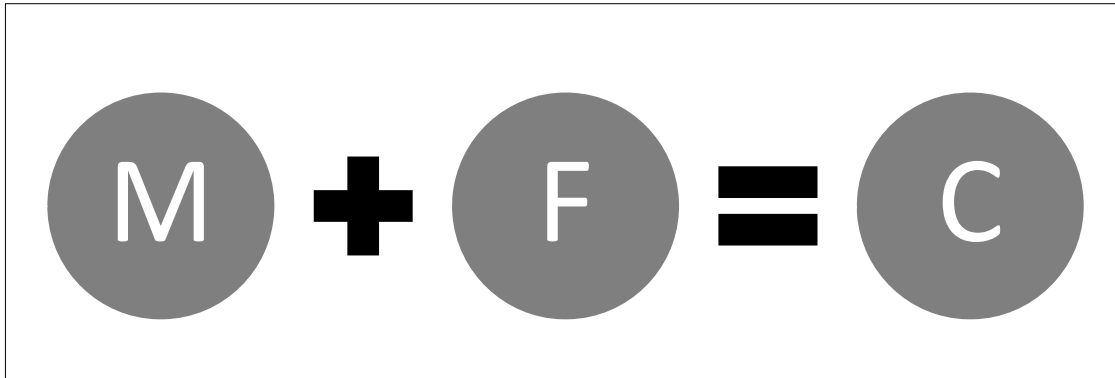
Ilustración 3. Características del activo sin riesgo.



Fuente: Elaboración propia.

La función de F será mejorar la relación rendimiento-riesgo de la cartera, bien reduciendo el riesgo o bien incrementando su rendimiento. Así pues, las opciones de las que se dispone a la hora de tomar decisiones sobre la inversión, se reducen a las distintas combinaciones posibles de M y F, que darán lugar a una nueva cartera, C.

Ilustración 4. Cartera de CAPM.



Fuente: Elaboración propia.

De tal forma, la cartera resultante tendrá un rendimiento y riesgo tal que⁸:

$$\mu_C = x_M \cdot \mu_M + x_F \cdot \mu_F = x_M \cdot \mu_M + (1 - x_M) \cdot \mu_F$$

$$\sigma_C^2 = x_M^2 \cdot \sigma_M^2 + x_F^2 \cdot \sigma_F^2 + 2 \cdot \sigma_{FM}^2 \cdot x_M \cdot x_F = x_M^2 \cdot \sigma_M^2 = \beta_j^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_C}^2$$

Como se observa, tanto rendimiento como riesgo se pueden expresar como funciones lineales de x_M . Además, en la fórmula del riesgo, el segundo y tercer sumando se anulan debido a que $\sigma_F^2 = 0$, por lo que, el riesgo de la nueva cartera dependerá exclusivamente de la varianza de la cartera de acciones elegidas, σ_M^2 .

Por eso, siguiendo la tónica habitual de que el inversor pretende minimizar su riesgo, elegirá una cartera situada en la FCE de Markowitz. ¿Pero cuál? El rendimiento y riesgo de la cartera resultante, C, dependen del porcentaje de participación de la cartera de mercado y el activo sin riesgo en la misma. *La cartera preferida por el inversor, será aquella, de entre las que componen la frontera eficiente, que es tangente a la curva índice de utilidad de mayor nivel y la cartera de riesgo elegida, ha de ser el punto de tangencia de la recta cuya ordenada en el origen es la tasa libre de riesgo, con la frontera de carteras eficientes* (Doldán, 2003, pp.146-148).

⁸ Ver detalle del modelo en Anexo III.

2.2.3. Índice de deseabilidad de Sharpe.

Las posibles combinaciones de F y M que conforman nuevas carteras forman una línea que pasa por las coordenadas:

$$F = (0, \mu_F) \quad M = (\sigma_M, \mu_M)$$

Esta línea imaginaria atraviesa la frontera de carteras eficientes lo que hace que, aunque en general la inversión en F mejora el resultado obtenido por el inversor, es posible que lo empeore en algún caso.

Para evitar esto, se debe tratar de encontrar una recta que sea tangente a la FCE y, por tanto, que tenga una mayor pendiente: cuanto mayor sea la pendiente de la recta mayor será el nivel de rendimiento que reporte para cada nivel de riesgo. Partiendo de esto, podemos afirmar entonces, que la pendiente de la recta es un buen criterio para evaluar el grado de eficiencia de la inversión:

$$ISH = \frac{\Delta\mu}{\Delta\sigma} = \frac{\mu_M - \mu_F}{\sigma_M - 0} = \frac{\mu_M - \mu_F}{\sigma_M}$$

Este cociente recibe el nombre de “Índice de Sharpe”, de ahora en adelante ISH, y expresa la relación entre rendimiento y riesgo de una inversión financiera. De este modo, a la hora de decidir que combinación de inversión es más adecuada, se elegirá aquella que, situándose en la FCE, tenga un mayor ISH.

Se puede considerar entonces este índice como indicador de *performance* de la inversión. *Cuando se habla del análisis de performance de los activos financieros (cartera o títulos) se hace referencia al análisis de sus resultados, y en una primera aproximación se podría identificar, por tanto, el concepto de performance con el de resultado. Sin embargo, con el término performance más que el resultado” se quiere expresar la estructura o composición del mismo* (Suárez, 2005, p. 531).

Es importante comentar, la posibilidad de una participación negativa de F, ya que, al ser una tasa de interés, el signo negativo haría referencia a un préstamo adquirido por el inversor. Esto representa una diferencia respecto a la teoría de cartera, en la cual no es factible la participación negativa de los activos que conforman la cartera.

2.2.4. Línea de mercado de capitales: CML (Capital Market Line).

CAPM establece un marco hipotético en el que la cartera M, la cual combinaremos con F, debe ser la cartera de mercado.

Así pues, el inversor, que actúa racionalmente, decidirá crear una cartera eficiente. *Que una inversión sea eficiente significa que combina adecuadamente rendimiento y riesgo, dentro de las suposiciones teóricas que definen las características del mercado y los activos disponibles* (Piñeiro et al., 2009a, p.217).

En este caso, una cartera eficiente es sinónimo de una cartera diversificada y, por tanto, con riesgo nulo. Por ello, el sujeto decidirá invertir exclusivamente en los títulos F y M que cumplen con la definición de eficiencia y que, como ya se ha visto, se sitúan en una recta que pasa por las coordenadas:

$$F = (0, \mu_F) \quad M = (\sigma_M, \mu_M)$$

Esta recta que, es *lugar geométrico de los posibles puntos de equilibrio o de las combinaciones de la cartera de mercado o cartera óptima con un activo sin riesgo* (Doldán, 2003, p.149), y que permite relacionar la rentabilidad esperada con el riesgo de la inversión, recibe el nombre de Línea del mercado de capitales (CML), tangente a FCE, cuya expresión analítica, en equilibrio, es la siguiente:

$$\mu_C = \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \cdot \sigma_C$$

Como se observa, la pendiente de la recta CML, $\frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M}$, coincide con el Índice de Sharpe, por tanto, cada una de las carteras eficientes situadas sobre la CML tendrán el mismo cociente ω , es decir, la misma pendiente. De este modo, se puede emplear el índice para evaluar la eficiencia de las carteras en comparación con la cartera de mercado. Así pues, por ejemplo, una cartera cuyo ISH sea menor que el ISH de la CML será ineficiente por definición.

Dependiendo del riesgo que el inversor decida asumir, optará por una postura diferente de M. Los inversores arriesgados tendrán interés en los títulos con valores de riesgo sistemático superior a uno. Los inversores menos arriesgados, invertirán en títulos más defensivos, cuyo valor de β será inferior a uno.

2.2.5. La línea del mercado de títulos: SML (Security Market Line)

Dado que generalmente se invierte en un número limitado de títulos y no en el conjunto de la cartera de mercado, es necesario modificar la expresión CML para adaptar la relación entre rendimiento y riesgo a las carteras y activos en general, aquellos que no son eficientes al no replicar el comportamiento de la cartera de mercado. Es decir, aquellas cuyo ISH es menor que el de la cartera de mercado. La adaptación de la CML recibe el nombre de “*Línea del mercado de títulos*”, SML; y su relación analítica es la siguiente tanto para títulos individuales como para la cartera:

$$\mu_j = \mu_f + (\mu_M - \mu_f) \cdot \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2} = \mu_f + (\mu_M - \mu_f) \cdot \beta_j$$

$$\mu_C = \mu_f + (\mu_M - \mu_f) \cdot \beta_C$$

2.2.6. Valoración de activos financieros.

Hasta ahora se ha explicado la relación del binomio rentabilidad-riesgo bajo los supuestos que plantea CAPM, pero no se puede olvidar que, al fin y al cabo este es un modelo que valora los activos financieros individualmente, no solo comprendidos en conjunto como una cartera de inversión.

Para realizar la valoración CAPM otorga, a cada activo, un valor de mercado, entendido como una esperanza matemática, a partir del precio actual del mismo. ¿Y porqué entendido como una esperanza matemática? Pues porque los precios varían de forma aleatoria en los mercados, según los cambios en el entorno y la información que se tiene sobre los mismos. *El valor de mercado está sometido a un riesgo: CAPM le proporciona un fundamento teórico para la previsión, pero esto no cambia el hecho de que los cambios en los precios son aleatorios, por tanto no pueden anticiparse con certeza* (Piñeiro et al., 2009a, p.222). Este valor se obtendrá a partir de la siguiente función:

$$E(P_{j1}) = P_{j0} \cdot (1 + \mu_j) = P_{j0} \cdot (1 + [\mu_f + (\mu_M - \mu_f) \cdot \beta_j])$$

Despejando la ecuación anterior se obtiene también el precio actual del título:

$$P_{j0} = \frac{E(P_{j1})}{1 + [\mu_f + (\mu_M - \mu_F) \cdot \beta_j]}$$

Como conclusión, *el modelo implica una relación directa entre la volatilidad y el precio, porque de CAPM se deriva que los títulos con más riesgo deben ofrecer también mejores expectativas de rentabilidad; y la única forma de que esto sea así es que se esperen precios más altos en el periodo siguiente* (Piñero et al., 2007, p.120).

2.2.7. Críticas a CAPM.

Aunque este modelo supone un avance respecto a los anteriores, siempre surgen críticas al respecto de cualquier planteamiento. En el caso de CAPM las hipótesis en las que se basa pueden considerarse demasiado restrictivas, lo que aleja al modelo de la realidad. Por este motivo, el modelo es fuertemente criticado en algunos aspectos como son:

- La escasa capacidad explicativa del coeficiente β , al incorporar a este, otras variables explicativas que parecen dar mejor respuesta a los interrogantes sobre el comportamiento de los títulos. β se considera inestable ya que el modelo no trabaja con los verdaderos valores del coeficiente, si no con una estimación del mismo, dando cabida a los errores de estimación.
- La existencia de un activo puro sin riesgo es cuestionable ya que los tipos de interés del mercado, con los que equiparamos F , son variables, por lo que sí existe un riesgo de interés y se desmonta la convicción de que el riesgo total del activo sin riesgo sea nulo.
- Los inversores no tienen, realmente, expectativas homogéneas ya que el nivel de información del que disponen no es igual para todos los inversores, lo que condiciona la elección de los activos a la hora de crear la cartera.
- La tasa μ_F indica la posibilidad del inversor de realizar compras apalancadas de acciones. Esto puede llevarse a la realidad en caso de negociar contratos a plazo o futuros.

- La utilización de rentabilidades pasadas como variable esperada también es un aspecto criticable, ya que, en el mercado, se dan fluctuaciones inesperadas, y el valor de un título hoy puede no semejarse en absoluto a su valor en el futuro por lo que su rentabilidad puede variar. *La distribución ex post de la que los rendimientos son extraídos es al mismo tiempo la distribución ex ante sobre la que los inversores basan sus “acciones”. En otras palabras, la SML utiliza valores a priori (...) y, sin embargo, su contrastación empírica tiene que hacerse en base a valores históricos* (Suárez, 2005, p.524). Así pues, si los inversores no aciertan en sus predicciones sobre el comportamiento de los rendimientos futuros de sus inversiones el modelo puede explicar muy poco sobre el comportamiento del conjunto de activos.
- Además, CAPM se basa en la existencia de una cartera de mercado la cual es muy difícil de conocer, ya que supone conocer e invertir en todos los valores posibles, lo cual no sucede. El inversor selecciona aquellos valores que cree más convenientes para su inversión y forma su cartera particular, que seguramente, no se asemeje a la cartera hipotética de mercado que plantea CAPM. Aún así, de forma restringida, podemos equiparar la cartera hipotética de mercado aun índice bursátil.

Algunos de los autores más críticos con el modelo son, entre otros, Fama y French (1992, 2004), los cuales centran sus críticas en las estimaciones de las β por naturaleza imprecisa.

En conclusión, el modelo puede mejorarse tiene muchos aspectos positivos. Y es gracias a CAPM y a su controvertida validez por lo que hemos podido obtener extraordinarias revelaciones sobre el comportamiento de los precios, los rendimientos y las volatilidades. Incluso aunque no sea cierto en todos sus extremos, CAPM ha facilitado la comprensión dinámica interna de las carteras, lo que significa la diversificación, y la naturaleza del riesgo financiero (Piñeiro et al., 2009a, p.216).

A estos problemas planteados se les intentará dar solución con el modelo de valoración por arbitraje, APT.

2.3. El modelo de valoración por arbitraje: APT.

Como alternativa a CAPM, el modelo APT permite soslayar algunos de los inconvenientes que este plantea ya que realiza ciertas modificaciones sobre el planteamiento inicial del modelo de valoración de activos:

- No requiere de la cartera de mercado, lo que resuelve el problema planteado en CAPM por el dudoso carácter observable de la misma.
- No precisa saber en que grado es averso al riesgo el inversor.
- Permite incluir un mayor número de factores de influencia sobre la rentabilidad de los activos. Esto conlleva una gran flexibilidad práctica pero puede plantear interrogantes teóricos: ¿cómo puede la rentabilidad de los activos explicarse mediante diferentes variables en un mismo mercado?, ¿cómo podemos agrupar esos factores para poder formular el modelo?
- Su método de estimación difiere del empleado en CAPM.
- No establece hipótesis sobre la distribución de probabilidad seguida por los rendimientos.

Formulado por Ross (1976), APT también formula una relación de tipo lineal entre el riesgo y el rendimiento esperado pero lo hace desde una perspectiva multidimensional que abarca cualquier variable que incida en el rendimiento o el precio, siempre que esa influencia sea demostrable. *Según este método, el riesgo sistemático es el factor explicativo fundamental del comportamiento de la rentabilidad de los activos financieros, si bien aquél no se mide únicamente por el coeficiente "beta" de la rentabilidad de un activo individual con respecto a la rentabilidad de la cartera de mercado, si no por una serie de coeficientes "beta" asociados a otros tantos factores explicativos no especificados "a priori" que operan de forma aditiva (Suárez, 2005, p.527).*

2.3.1. Hipótesis del modelo APT.

El modelo APT tiene una base hipotética completamente diferente a CAPM, ya que no se basa en la hipótesis de eficiencia del mercado. Este requiere, como explican PIÑEIRO Y DE LLANO (2009a):

- Un mercado competitivo, en el cual existe información homogénea para todos los inversores. Así mismo consta con un número suficientemente grande de alternativas de inversión. El mercado se supone en equilibrio.
- Los costes de transacción son nulos, o al menos, suficientemente pequeños como para no modificar las decisiones de inversión y financiación.
- La cuantía y estructura de los impuestos debe ser neutral en términos de asignación de recursos.
- Los inversores se presumen aversos al riesgo y adoptan decisiones con base exclusivamente en dos parámetros: el rendimiento esperado y el riesgo.
- Existe una tasa sin riesgo a la que es posible prestar y pedir prestado sin ningún tipo de limitación.
- El rendimiento de los valores está determinado por varios factores que guardan entre sí, y con el propio rendimiento, una relación lineal.

2.3.2. Planteamiento del modelo APT.

El modelo es la expresión geométrica de un plano en el cual encontramos todas las carteras de inversión y los títulos individuales del mercado. En APT el rendimiento de los diferentes activos será formulado como función de diferentes factores de influencia⁹:

$$r_{jt} = \mu_j + b_{j1} \cdot F_{1t} + b_{j2} \cdot F_{2t} + \dots + b_{jk} \cdot F_{kt} + \varepsilon_{jt}$$

Estos factores, en ocasiones, sesgan la evaluación de la relación estadística y la determinación de los estimadores ya que, con frecuencia, están correlacionados, su regresión no es perfecta:

$$f_{ht} = \alpha_0 + b_{h1} \cdot f_{1t} + \dots + b_{hk} \cdot f_{kt} + \varepsilon_h$$

⁹ Ver detalle del modelo en el Anexo IV.

Esto quiere decir, que algunos de los cambios de los factores se explican por otros factores del modelo, aunque no todos. Por tanto, los cambios que se deben conservar serán aquellos específicos del factor, es decir, aquellos no explicados en la regresión: los errores de estimación, ε_h . De este modo, se sustituirán los factores por sus errores correspondientes.

A la hora de estimar el modelo, se puede considerar análogo a la SML de CAPM pero con la salvedad de que dependerá de más de una volatilidad, tantas como factores de influencia diferentes haya:

$$\mu_j = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{j1} + \lambda_2 \cdot b_{j2} + \dots + \lambda_k \cdot b_{jk}$$

En esta expresión, b_{jk} expresa la sensibilidad unitaria que experimenta el título j a los cambios sufridos en el factor de influencia h . Cada λ_k puede igualarse a:

$$\lambda_k = \mu_k - \mu_f$$

En APT es posible que no se encuentre ninguna solución factible al modelo ya que es probable que algún activo de la ecuación no esté adecuadamente valorado, o bien que no sea posible determinar su ecuación por encontrarse por encima o por debajo del plano teórico que estamos planteando. Aún así, el único método viable de trabajo es la regresión:

$$r_{jt} = a + b_{j1} \cdot I_{1t} + \dots + b_{jk} \cdot I_{kt} + \varepsilon_{jt}$$

Esta ecuación, el "*modelo de mercado*" relaciona el rendimiento por periodo de un título o cartera con los valores que adoptan los factores de influencia en ese mismo periodo.

2.3.3. Los factores de influencia.

En APT se relaciona la rentabilidad esperada con una serie de factores de influencia pero no se especifica cuales son estos. Es tarea de cada investigador estipular los factores adecuándose al mercado concreto en el que se trabaje.

Aún así, Burmeister, Roll y Ross (1994) han sugerido un modelo formado por cinco factores de influencia, los cuales relacionan el rendimiento esperado de los diferentes activos con los cambios no esperados en estos factores:

Tabla 3. Factores de influencia.

FACTOR	TIPO DE RIESGO	DESCRIPCIÓN
F1	Riesgo del horizonte temporal	Diferencia entre el rendimiento a corto y largo plazo de la deuda pública.
F2	Riesgo de confianza	Diferencial entre el rendimiento de la deuda privada calificada como BB y el rendimiento de la deuda pública a largo plazo.
F3	Riesgo de inflación	Diferencia entre la inflación mensual prevista y tasa real
F4	Riesgo del ciclo de negocios	Tasa mensual de variación del IPI (Índice de Producción Industrial)
F5	Influencia del mercado	Ortogonal, obtenido como residuo

Fuente: Elaboración propia.

De esta forma se podría expresar el rendimiento del mercado como combinación lineal de los factores, tal que:

$$r_{Mt} = \alpha_0 + b_{M1} \cdot F_{1t} + b_{M2} \cdot F_{2t} + b_{M3} \cdot F_{3t} + b_{M4} \cdot F_{4t} + F_{5t}$$

Los cuatro primeros factores, afectarían por igual a cualquier activo y su influencia no se considera diversificable. Sin embargo, el quinto factor, F_{5t} , que se obtiene como el efecto residual de los cuatro anteriores, agregando los cambios ajenos a dichos factores. Es decir, funciona como la perturbación aleatoria y por tanto se define como el error de estimación. Por ello, se renombrará este factor, pasando a denominarlo "market timing", sentimiento o psicología de mercado, función del resto de los factores de influencia, tal que:

$$F_{5t} = r_{Mt} - (\alpha_0 + b_{M1} \cdot F_{1t} + b_{M2} \cdot F_{2t} + b_{M3} \cdot F_{3t} + b_{M4} \cdot F_{4t})$$

2.3.4. Operaciones de arbitraje.

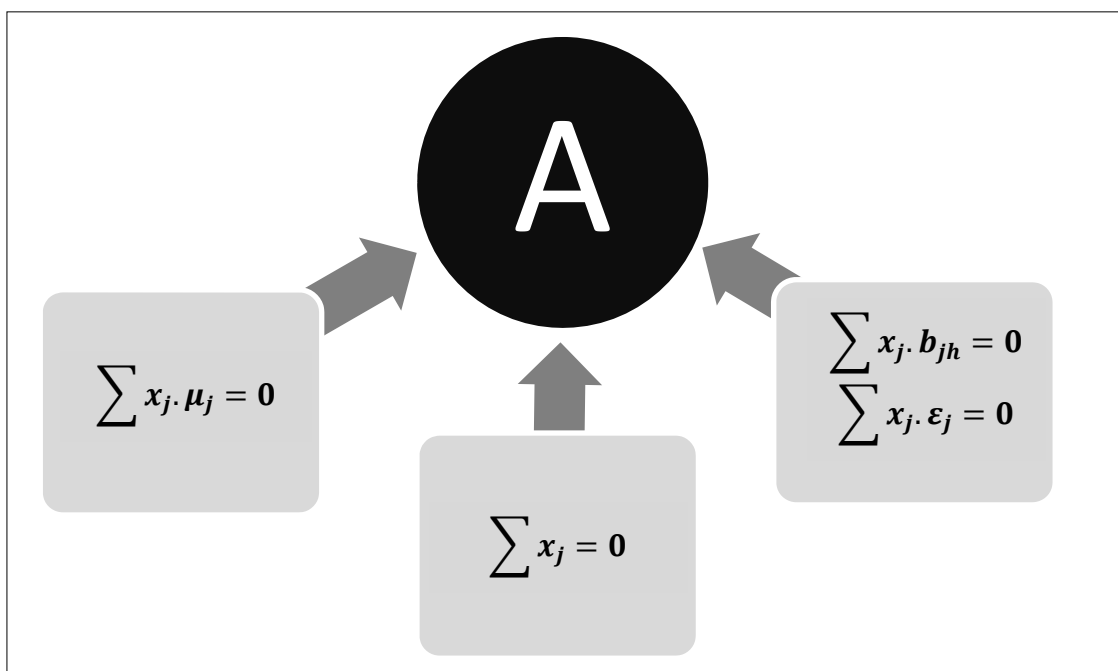
Cuando el mercado está en equilibrio, principio básico de APT, no es posible que los activos estén valorados incorrectamente. Cuando una cartera está infravalorada, es decir, que su rendimiento esperado según el riesgo es menor estimándolo mediante APT que en la realidad del mercado. En este caso, el inversor puede aprovechar esa

situación para realizar una operación de arbitraje. Pero, ¿qué es el arbitraje? *Arbitrar significa obtener ventaja de una situación de desequilibrio, bien entre dos o más mercados, o bien entre dos o más activos financieros de un mismo mercado, cumpliendo dos condiciones: no modificar la riqueza ni alterar el grado de exposición al riesgo* (Piñeiro et al., 2007, p. 122). Otra percepción válida sería la de definir el concepto de arbitraje como *cálculo del mejor modo por el cual puede adquirirse ventaja de las diferencias en el valor del dinero, acciones, etc., en diferentes lugares al mismo tiempo* (Doldán, 2009, p.179). De este modo, el inversor adquiere la cartera infravalorada y vende “en corto” una cartera que tenga exactamente el mismo nivel de riesgo.

La principal característica diferencial del arbitraje es la ausencia de riesgo en sus operaciones, ya que, el inversor toma posiciones que neutralizan el riesgo y a la vez le ofrecen un pequeño margen de beneficio asegurado. Pero, esta situación se da solo cuando el mercado no se encuentra en equilibrio.

En caso de que el mercado sí estuviera en equilibrio, esta operación le reportaría al inversor: un riesgo nulo, un rendimiento nulo y una variación neta de riqueza igual a cero. Y precisamente estas son las características de la cartera de arbitraje, la cual *no es una cartera de inversión propiamente dicha, sino una cartera de transición, una forma de expresar los cambios que se producen en la situación inicial* (Piñeiro et al., 2009a, p. 235) del inversor. La cartera de arbitraje, de ahora en adelante A, se caracteriza por tener un rendimiento esperado nulo, una inversión neta igual a cero y un riesgo nulo.

Ilustración 5. Características de la cartera de arbitraje.



Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, se puede afirmar que, el modelo APT y su predecesor CAPM son completamente opuestos cuando se habla de hipótesis y desarrollo teórico pero, al mismo tiempo, ambos tienen paralelismos en cuanto a su aspecto interno.

2.3.5. Críticas a APT.

El punto más crítico a la hora de aplicar el modelo es identificar correctamente los regresores de la ecuación, cuya labor es explicar correctamente el riesgo esperado. Para que esto ocurriera, sería necesario que estos factores estuvieran completamente identificados y que fueran uniformes en cualquier mercado, cosa que no ocurre.

Para resolver el problema se opta por agrupar varios factores en uno, que sea más significativo y ortogonal, es decir, incorrelado.

A pesar de las críticas, la tónica general es considerar APT como un modelo mucho más robusto y eficaz que CAPM ya que se puede extender fácilmente su horizonte temporal, no depende de la cartera de mercado y le basta con el supuesto de “inversores aversos al riesgo”.

Esta mayor eficacia será real siempre y cuando, como explica DOLDÁN¹⁰, el modelo:

- Identifique claramente los factores de influencia.
- La medida de rentabilidad esperada de cada factor y de la sensibilidad de los activos respecto a dichas rentabilidades.

¹⁰ Doldán (2003): página 183

3. Aplicando la teoría: creando carteras en el IBEX-35.

3.1. Recopilando datos.

3.1.1. Valores seleccionados.

Ahora que se tiene un conocimiento teórico fundamental de los diferentes modelos de valoración de carteras se llevarán a la práctica. Para ello se seleccionará una serie diversificada de valores del IBEX-35¹¹, que se consideran representativos del mismo. Con estos se formarán dos carteras de valores, compuestas por títulos de naturaleza similar, y se analizará su valor en función de los resultados obtenidos.

La primera cartera, de ahora en adelante *Cartera A*¹², estará compuesta por los siguientes títulos:

- ***Banco Sabadell***
- ***Repsol***
- ***Jazztel***

¹¹ Índice bursátil principal y de referencia de la bolsa española formado por las 35 empresas con más peso.

¹² Para precios de cierre de la Cartera A, ver Anexo V.

Ilustración 6. Logotipos de las empresas seleccionadas para la cartera A.



Fuente: Elaboración propia.

La segunda cartera, de ahora en adelante *Cartera B*¹³, estará compuesta por los siguientes títulos:

- *Banco Popular*
- *Gas Natural Fenosa*
- *Telefónica*

Ilustración 7. Logotipos de las empresas seleccionadas para la cartera B.



Fuente: Elaboración propia.

3.1.2. Tamaño muestral.

Una vez seleccionados los valores, se debe determinar la muestra de datos que se va a tomar para elaborar el análisis. En este caso, serán precios de cierre del primer cuatrimestre del presente año 2014¹⁴.

¹³ Para precios de cierre de la Cartera B ver Anexo V.

¹⁴ Los precios de cierre de las acciones y del índice se encuentran en el ANEXO VI. de este mismo documento.

Se ha decidido no ampliar el intervalo temporal abarcando fechas anteriores debido a la situación económica, ya que los datos pueden no ser representativos del comportamiento de las acciones, al estar influenciadas por las fluctuaciones en el mercado provocadas por el contexto económico. Aún así, cabe advertir de que es posible, debido a la corta serie de precios de mercado seleccionada, que se den sesgos de valoración.

3.1.3. Cálculos iniciales.

Disponiendo ya de la muestra de datos, es necesario realizar algunos cálculos para la formulación de los modelos, entre ellos, medidas de estadística descriptiva, la matriz de varianzas-covarianzas y las curvas de regresión de los activos respecto al IBEX-35:

Tabla 4. Resumen de medidas de estadística descriptiva de la Cartera A.

CARTERA A	SABADELL	REPSOL	JAZZTEL	IBEX-35
Media	0,0037198	0,0009239	0,0043068	0,0009011
Error típico	0,002203	0,0011179	0,0018892	0,001191
Mediana	0,0004436	0,0017583	0,0037983	0,0011142
Moda	#N/A	0	#N/A	#N/A
Desviación estándar	0,019949	0,0101233	0,0171074	0,0107849
Varianza de la muestra	0,000398	0,0001025	0,0002927	0,0001163

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Resumen de medidas de estadística descriptiva de la Cartera B.

CARTERA B	POPULAR	GAS NATURAL	TELEFÓNICA	IBEX-35
Media	0,002668824	0,001385102	0,000547607	0,000901062
Error típico	0,003110186	0,001350344	0,001244666	0,001190988
Mediana	0,001213689	0,002802897	0,001535714	0,001114171
Moda	#N/A	#N/A	0	#N/A
Desviación estándar	0,028163933	0,012227887	0,011270926	0,010784855
Varianza de la muestra	0,000793207	0,000149521	0,000127034	0,000116313

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6. Matriz de varianzas-covarianzas de los activos de la Cartera A.

CARTERA A	SABADELL	REPSOL	JAZZTEL	IBEX-35
SABADELL	0,000393109			
REPSOL	9,57831E-05	0,0001012		
JAZZTEL	0,000133918	6,876E-05	0,0002891	
IBEX-35	0,000145386	9,219E-05	9,873E-05	0,0001149

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. Matriz de varianzas-covarianzas de los activos de la Cartera B.

CARTERA B	POPULAR	GAS NATURAL	TELEFÓNICA	IBEX-35
POPULAR	0,000783534			
GAS NATURAL	0,000106328	0,000147698		
TELEFÓNICA	0,000152827	7,9039E-05	0,000125485	
IBEX-35	0,00021028	7,86743E-05	0,000101675	0,000114895

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. Regresiones de los activos de la Cartera A sobre el IBEX-35.

CARTERA A	β	α
SABADELL	1,265381764	0,0025796
REPSOL	0,802397354	0,0002009
JAZZTEL	0,859293383	0,0035325
IBEX-35	1	3,253E-19

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 9. Regresiones de los activos de la Cartera B sobre el IBEX-35.

CARTERA B	β	α
POPULAR	1,830200028	0,001019701
GAS NATURAL	0,684752033	0,000768098
TELEFÓNICA	0,884937701	-0,000249776
IBEX-35	1	3,25261E-19

Fuente: Elaboración propia.

Una vez conocidos los valores que formarán las carteras, el periodo muestral a emplear y las medidas estadísticas, se puede comenzar con el planteamiento de los modelos.

3.2. Aplicando la Teoría de cartera.

3.2.1. Aplicación del modelo de Markowitz.

Para poder resolver este primer modelo se debe establecer un nivel de rendimiento esperado para el cual minimizar la varianza de la cartera. Este rendimiento, μ_c^* , se desea, por lo menos, el rendimiento medio del mercado, es decir, la media de rendimiento del IBEX-35:

$$\mu_c^* = \mu_{IBEX-35} = 0,000992331$$

3.2.1.1. Cartera A.

Una vez establecido este valor, empleando la herramienta informática SOLVER¹⁵, se puede calcular el porcentaje de inversión que se debe realizar en cada uno de nuestros tres activos: *Sabadell* (x_S), *Repsol* (x_R) y *Jazztel* (x_J); que haga mínima la varianza de la cartera:

$$\min \sigma_c^2 = \sigma_S^2 \cdot x_S^2 + \sigma_R^2 \cdot x_R^2 + \sigma_J^2 \cdot x_J^2 + x_S \cdot x_R \cdot \sigma_{SR} + x_S \cdot x_J \cdot \sigma_{SJ} + x_R \cdot x_J \cdot \sigma_{RJ}$$

$$\text{sujeto a: } x_S \cdot \mu_S + x_R \cdot \mu_R + x_J \cdot \mu_J = \mu_{IBEX-35}$$

$$x_S + x_R + x_J = 1$$

$$x_S \geq 0 \quad x_R \geq 0 \quad x_J \geq 0$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned} \min \sigma_c^2 = & 0,00039 \cdot x_S^2 + 0,00010 \cdot x_R^2 + 0,00029 \cdot x_J^2 + 9,57831E - 05 \cdot x_S \cdot x_R \\ & + 0,00013 \cdot x_S \cdot x_J + 6,876E - 05 \cdot x_R \cdot x_J \end{aligned}$$

¹⁵ Solver es una herramienta de análisis perteneciente al programa Excel, que nos permite calcular el valor de una celda dependiente de diversos factores y sujeta a una serie de restricciones.

$$\text{sujeto a: } 0,00372 x_S + 0,00092 x_R + 0,00431 x_J = 0,00090$$

$$x_S + x_R + x_J = 1$$

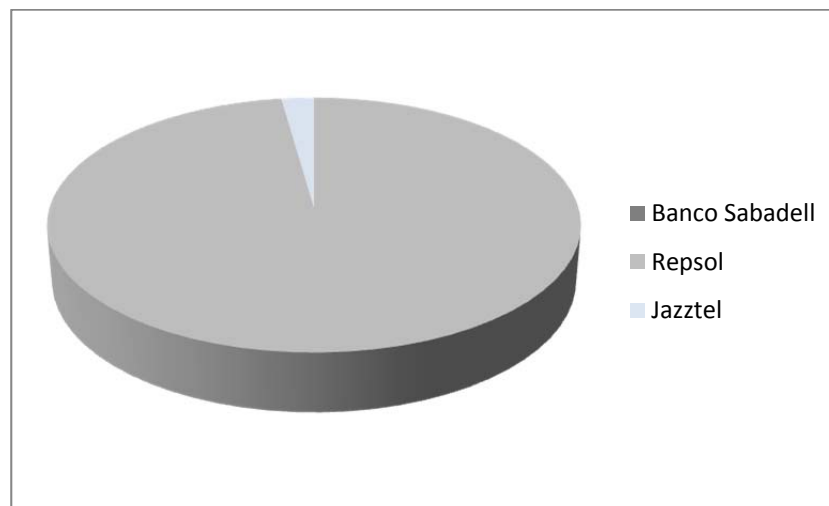
$$x_S \geq 0 \quad x_R \geq 0 \quad x_J \geq 0$$

A continuación, introduciéndolos en la aplicación¹⁶, se obtienen los siguientes resultados:

$$\sigma_c^2 = 0,00010848$$

$$x_S = 0\% \quad x_R = 97,75\% \quad x_J = 2,25\%$$

Gráfico 1. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera A según Markowitz.



Fuente: Elaboración propia.

Interpretando los resultados, la cartera cuyo riesgo es mínimo e igual a 0,00011, de todas aquellas que proporcionan un rendimiento esperado igual a μ_c^* , estará compuesta únicamente por los valores *Repsol* y *Jazztel*, en los porcentajes que arriba se indican. Supuesto que se ha decidido que la inversión se realice únicamente en los títulos seleccionados, no es posible formar una cartera con un riesgo menor sin variar la expectativa de rentabilidad. Por tanto, esta cartera está situada en el borde izquierdo del conjunto factible, es decir, en la frontera eficiente.

¹⁶ Para soluciones de Solver ver Anexo VI.

3.2.1.2. Cartera B.

De nuevo, empleando la herramienta informática SOLVER, se calcula el porcentaje de inversión que se debe realizar en cada uno de estos tres activos que conforman la cartera: *Banco Popular* (x_P), *Gas Natural* (x_G) y *Telefónica* (x_T); que haga mínima la varianza de la cartera:

$$\min \sigma_c^2 = \sigma_P^2 \cdot x_P^2 + \sigma_G^2 \cdot x_G^2 + \sigma_T^2 \cdot x_T^2 + x_P \cdot x_G \cdot \sigma_{PG} + x_P \cdot x_T \cdot \sigma_{PT} + x_G \cdot x_T \cdot \sigma_{GT}$$

$$\text{sujeto a: } x_P \cdot \mu_P + x_G \cdot \mu_G + x_T \cdot \mu_T = \mu_{IBEX-35}$$

$$x_P + x_G + x_T = 1$$

$$x_P \geq 0 \quad x_G \geq 0 \quad x_T \geq 0$$

Sustituyendo los valores:

$$\min \sigma_c^2 = 0,00078 \cdot x_P^2 + 0,00015 \cdot x_G^2 + 0,00013 \cdot x_T^2 + 0,00011 \cdot x_P \cdot x_G + 0,00015 \cdot x_P \cdot x_T + 7,9039E - 05 \cdot x_G \cdot x_T$$

$$\text{sujeto a: } 0,00267 \cdot x_P + 0,001385 \cdot x_G + 0,00055 \cdot x_T = 0,00090$$

$$x_P + x_G + x_T = 1$$

$$x_P \geq 0 \quad x_G \geq 0 \quad x_T \geq 0$$

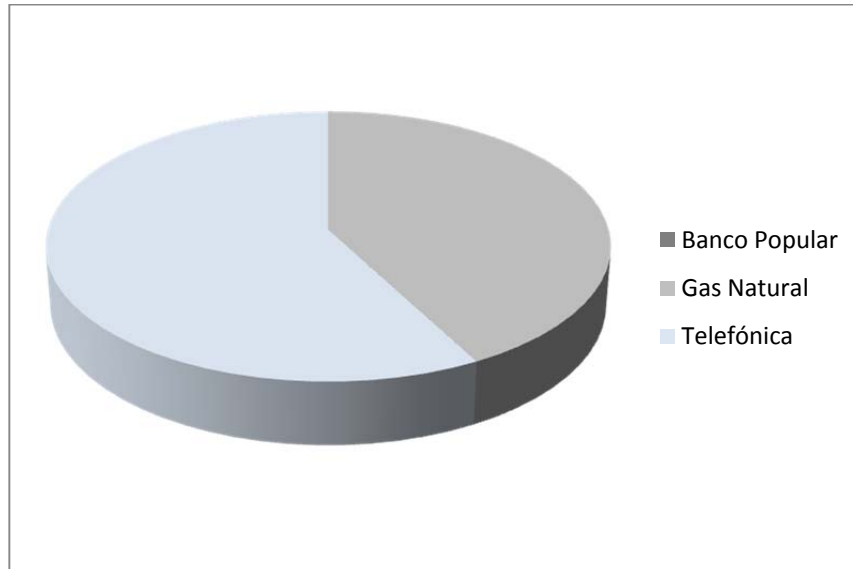
A Continuación, introduciéndolos en la aplicación¹⁷, se obtienen los siguientes resultados:

$$\sigma_c^2 = 0,00017342$$

$$x_P = 0\% \quad x_G = 42,2\% \quad x_T = 57,8\%$$

¹⁷ Para soluciones de Solver ver Anexo VI.

Gráfico 2. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera B según Markowitz.



Fuente: Elaboración propia.

De nuevo, interpretando los resultados, la cartera cuyo riesgo es mínimo e igual a 0,00017, de todas aquellas que proporcionan un rendimiento esperado igual a μ_c^* , estará compuesta únicamente por los valores *Gas Natural* y *Telefónica*, en los porcentajes que arriba se indican. Como se ha decidido que la inversión se realice únicamente en los títulos seleccionados, no es posible formar una cartera con un riesgo menor sin variar la expectativa de rentabilidad. Por tanto, esta cartera está situada en el borde izquierdo del conjunto factible, al igual que la Cartera A.

Como se observa, en ambos casos, el modelo excluye los activos bancarios de las carteras. Esto puede deberse a la inestabilidad que ha caracterizado a estos valores en los últimos tiempos ya que, el sector bancario, las Cajas de Ahorros en particular, ha sido uno de los más afectados por la crisis financiera que estamos atravesando.

Al intentar representar gráficamente la FCE se ha detectado que esta es inestable, es decir, hay punto para los que el sistema no tiene solución y por tanto no hay continuidad a lo largo de la frontera.

3.2.2. Aplicación del modelo de Sharpe.

Para resolver el modelo de Sharpe, al igual que en Markowitz, se recurre al valor establecido para el rendimiento esperado de la cartera μ_c^* :

$$\mu_c^* = \mu_{IBEX-35} = 0,000992331$$

Además, es necesario determinar cuál será el mercado, M , y cuales serán sus parámetros. A efectos prácticos, se trabajará bajo la presunción de que se puede equiparar el mercado en cuestión con el índice IBEX-35. Aunque hay que tener en cuenta que *si calculamos el modelo a partir del índice de mercado, en lugar de la cartera de mercado propiamente dicha, estimaremos una prima de riesgo inferior* (Piñeiro et al. 2011, p.252). Así pues:

$$\sigma_M^2 = \sigma_{IBEX-35}^2 \quad \mu_M = \mu_{IBEX-35}$$

3.2.2.1. Cartera A.

A continuación formularemos las ecuaciones de riesgo para cada valor individual de la cartera: y, se despejará de ella el valor de la varianza de los errores, $\sigma_{\varepsilon_j}^2$:

$$\sigma_S^2 = \beta_S^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_S}^2 = RS_S + RE_S$$

$$\sigma_R^2 = \beta_R^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_R}^2 = RS_R + RE_R$$

$$\sigma_J^2 = \beta_J^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_J}^2 = RS_J + RE_J$$

$$RS_S = 0,000183968$$

$$RS_R = 7,39739E - 05$$

$$RS_J = 8,48365E - 05$$

$$RE_S = \sigma_{\varepsilon_S}^2 = 2,1368$$

$$RE_R = \sigma_{\varepsilon_R}^2 = 1,3685$$

$$RE_J = \sigma_{\varepsilon_J}^2 = 3,4077$$

Una vez calculadas las varianzas de los errores, empleando de nuevo la herramienta informática SOLVER, se calcula el porcentaje de inversión que se debe

realizar en cada uno de los tres activos: *Sabadell* (x_S), *Repsol* (x_R) y *Jazztel* (x_J); que haga mínima la varianza de la cartera:

$$\min \sigma_c^2 = \sigma_{\varepsilon_S}^2 \cdot x_S^2 + \sigma_{\varepsilon_R}^2 \cdot x_R^2 + \sigma_J^2 \cdot x_J^2 + \sigma_{IBEX-35}^2 \cdot x_{n+1}^2$$

$$\text{sujeto a: } \alpha_S \cdot x_S + \alpha_R \cdot x_R + \alpha_J \cdot x_J + \mu_{IBEX-35} \cdot x_{n+1} = \mu_{IBEX-35}$$

$$\beta_S \cdot x_S + \beta_R \cdot x_R + \beta_J \cdot x_J - x_{n+1} = 0$$

$$x_S + x_R + x_J = 1$$

$$x_S \geq 0 \quad x_R \geq 0 \quad x_J \geq 0$$

Sustituyendo los valores:

$$\min \sigma_c^2 = \sigma_{\varepsilon_S}^2 \cdot x_S^2 + \sigma_{\varepsilon_R}^2 \cdot x_R^2 + \sigma_J^2 \cdot x_J^2 + 0,00011 \cdot x_{n+1}^2$$

$$\text{sujeto a: } 0,00258 \cdot x_S + 0,00020 \cdot x_R + 0,00353 \cdot x_J + 0,00090 \cdot x_{n+1} = 0,00090$$

$$1,26538 \cdot x_S + 0,80240 \cdot x_R + 0,85929 \cdot x_J - x_{n+1} = 0$$

$$x_S + x_R + x_J = 1$$

$$x_S \geq 0 \quad x_R \geq 0 \quad x_J \geq 0$$

Introduciéndolos en la aplicación¹⁸, se obtienen los siguientes resultados:

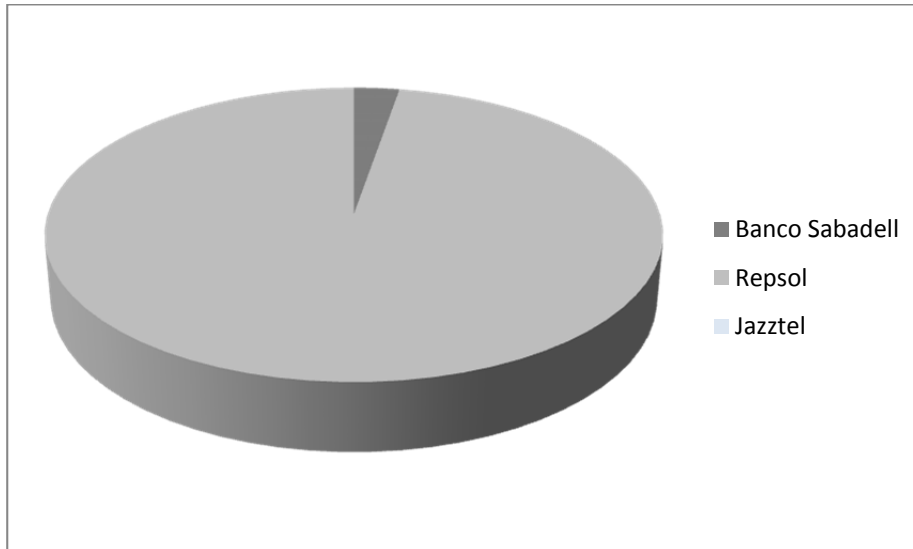
$$\sigma_c^2 = 1,296705176$$

$$x_S = 2,72\% \quad x_R = 97,28\% \quad x_J = 0\%$$

$$x_{n+1} = 0,814991132$$

¹⁸ Para soluciones de Solver ver Anexo VI.

Gráfico 3. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera A según Sharpe.



Fuente: Elaboración propia.

Interpretando los resultados, la cartera cuyo riesgo es mínimo e igual a 1,297, de todas aquellas que verifican que x_{n+1} es media ponderada de las volatilidades de los títulos, es decir, que verifican la igualdad: $x_{n+1} = \beta_C = 0,815$; estará compuesta únicamente por los valores *Banco Sabadell* y *Repsol*, en los porcentajes que arriba se indican. Al igual que en Markowitz, no es posible formar una cartera con un riesgo menor sin variar la expectativa de rentabilidad, por tanto, esta cartera está situada en la frontera eficiente.

3.2.2.2. Cartera B.

De nuevo, para la Cartera B se formulan las ecuaciones de riesgo para cada valor individual y, se despejan de ella el valor de la varianza de los errores, $\sigma_{\varepsilon_j}^2$:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_P}^2$$

$$\sigma_G^2 = \beta_G^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_G}^2$$

$$\sigma_T^2 = \beta_T^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_T}^2$$

$$RS_P = 0,000384855 \quad RS_G = 5,38724E - 05 \quad RS_T = 8,99757E - 05$$

$$RE_P = \sigma_{\varepsilon_P}^2 = 2,0359 \quad RE_G = \sigma_{\varepsilon_G}^2 = 2,7416 \quad RE_T = \sigma_{\varepsilon_T}^2 = 1,3946$$

Una vez calculadas las varianzas de los errores, empleando de nuevo la herramienta informática SOLVER, se calcula el porcentaje de inversión que debemos realizar en cada uno de nuestros tres activos: *Banco Popular* (x_P), *Gas Natural* (x_G) y *Telefónica* (x_T); que haga mínima la varianza de la cartera:

$$\min \sigma_c^2 = \sigma_{\varepsilon_P}^2 \cdot x_P^2 + \sigma_{\varepsilon_G}^2 \cdot x_G^2 + \sigma_{\varepsilon_T}^2 \cdot x_T^2 + \sigma_{IBEX-35}^2 \cdot x_{n+1}^2$$

$$\text{sujeto a: } \alpha_P \cdot x_P + \alpha_G \cdot x_G + \alpha_T \cdot x_T + \mu_M \cdot x_{n+1} = \mu_{IBEX-35}$$

$$\beta_P \cdot x_P + \beta_G \cdot x_G + \beta_T \cdot x_T - x_{n+1} = 0$$

$$x_P + x_G + x_T = 1$$

$$x_P \geq 0 \quad x_G \geq 0 \quad x_T \geq 0$$

Sustituyendo los valores:

$$\min \sigma_c^2 = \sigma_{\varepsilon_P}^2 \cdot x_P^2 + \sigma_{\varepsilon_G}^2 \cdot x_G^2 + \sigma_{\varepsilon_T}^2 \cdot x_T^2 + 0,00011 \cdot x_{n+1}^2$$

$$\text{sujeto a: } 0,00102 \cdot x_P + 0,00077 \cdot x_G + 3,25261E - 05 \cdot x_T + 0,00090 \cdot x_{n+1} = 0,00090$$

$$1,83020 \cdot x_P + 0,68475 \cdot x_G + 0,88494 \cdot x_T - x_{n+1} = 0$$

$$x_P + x_G + x_T = 1$$

$$x_P \geq 0 \quad x_G \geq 0 \quad x_T \geq 0$$

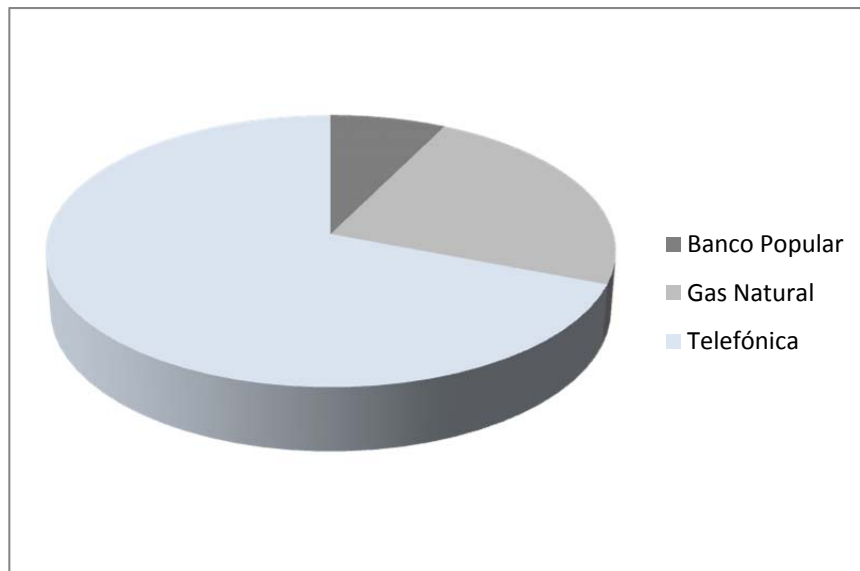
Introduciéndolos en la aplicación¹⁹, obtenemos los siguientes resultados:

$$\sigma_c^2 = 0,82882$$

$$x_p = 7,4\% \quad x_G = 23,46\% \quad x_T = 69,14\%$$

$$x_{n+1} = 0,90794$$

Gráfico 4. Porcentaje de participación de los activos en la Cartera B según Sharpe.



Fuente: Elaboración propia.

La cartera cuyo riesgo es mínimo e igual a 0,82882, de todas aquellas que verifican que x_{n+1} es media ponderada de las volatilidades de los títulos, es decir, que verifican la igualdad: $x_{n+1} = \beta_C = 0,908$; estará compuesta por los tres valores: *Banco Popular*, *Gas Natural* y *Telefónica*; en los porcentajes que arriba se indican. De nuevo, al igual que en Markowitz, no es posible formar una cartera con un riesgo menor sin variar la expectativa de rentabilidad, por tanto, esta cartera está situada en la frontera eficiente.

¹⁹ Para soluciones de Solver ver Anexo VI.

Como se puede observar, en ambas carteras se observan diferencias con respecto a la combinación eficiente de activos obtenida empleando el modelo de Markowitz. Esto es consecuencia directa de la dudosa significatividad de los modelos de mercado que se han planteado.

3.3. Aplicando CAPM.

En el caso de CAPM, como novedad, aparece el activo sin riesgo, por lo que es necesario determinarlo y calcular su media para poder plantear el modelo.

Como se definió en la parte teórica, el activo sin riesgo es aquella tasa de interés sin riesgo a la que es posible prestar y tomar en préstamo montantes sin limitaciones. Desde el punto de vista académico, se puede equiparar este activo con el Bono alemán a 10 años (x_{B10}), ya que este es base de cálculo de la “prima de riesgo”²⁰, y tiene garantía de cobro. A fecha de realización del trabajo, la rentabilidad media anual del Bono alemán²¹ era de 1,31%, por tanto, la rentabilidad media diraria sería la siguiente:

$$\mu_{B10} = 3,58904E - 05$$

El rendimiento y riesgo de la cartera formada se calculará de la siguiente forma:

$$\mu_C = x_{IBEX-35} \cdot \mu_{IBEX-35} + x_{B10} \cdot \mu_{B10}$$

$$\sigma_C^2 = x_{IBEX-35}^2 \cdot \sigma_{IBEX-35}^2 + x_{B10}^2 \cdot \sigma_{B10}^2 + 2 \cdot \sigma_{B10} \cdot x_{IBEX-35} \cdot x_{B10}$$

A continuación, se hallarán los parámetros de la cartera, exclusivamente en inversiones eficientes, es decir, la CML. Para ello, es necesario dar valores a $x_{IBEX-35}$ y x_{B10} para comprobar el comportamiento de la cartera.

$$\mu_C = \mu_{B10} + \frac{(\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10})}{\sigma_{IBEX-35}} \cdot \sigma_C$$

²⁰ La prima de riesgo es el sobreprecio que paga un país para financiarse en los mercados comparándolo con otros países.

²¹ Ver Anexo VII.

Así, todas las carteras resultante se colocarán sobre esta línea de tal forma que, el rendimiento esperado, μ_C , será equivalente a la tasa sin riesgo más una prima por riesgo que será proporcional a la variabilidad asumida: $\frac{(\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10})}{\sigma_{IBEX-35}} \cdot \sigma_C$. Sustituyendo los valores reales, la expresión queda:

$$\mu_C = 3,58904E - 05 + \frac{(0,000901062 - 3,58904E - 05)}{0,000114895} \cdot \sigma_C$$

$$\mu_C = 3,58904E - 05 + 7,530124899 \cdot \sigma_C$$

Otro cálculo interesante sería el ISH, la pendiente de la recta formada por la combinación del activo sin riesgo y la cartera de mercado, que es el mejor indicador del grado de eficiencia de la inversión:

$$ISH_M = \frac{\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}}{\sigma_{IBEX-35}} = 0,80715$$

Todas aquellas carteras cuyo ISH sea inferior al de la cartera de mercado se considerarán peores, ya que pagan una prima de riesgo menor. Por tanto, por definición, las carteras, tanto A como B, tendrán una menor eficiencia que la cartera de mercado.

En este caso, se ha decidido recrear cinco escenarios diversos²², combinando la participación en la cartera del mercado y del activo sin riesgo para ver el comportamiento de los parámetros rendimiento y riesgo de la cartera:

Tabla 10. Variación de los parámetros de cartera según cambios en $x_{IBEX-35}$ y x_{B10} .

ESCENARIOS	COMBINACIONES		CARTERA	
	x (IBEX-35)	x (B-10)	Riesgo	Rendimiento
A	0	1	0	3,58904E-05
B	0,25	0,75	7,181E-06	0,000252183
C	0,5	0,5	2,872E-05	0,000468476
D	0,75	0,25	6,463E-05	0,000684769
E	1	0	0,0001149	0,000901062
F	1,5	-0,5	0,0002585	0,001333647

Fuente: Elaboración propia.

²² Para soluciones de Solver ver Anexo VI.

Dependiendo del nivel de riesgo que se este dispuesto a asumir o el nivel de rendimiento que se desee, se elegirá uno u otro escenario, teniendo la seguridad de que la inversión será siempre eficiente al estar colocada sobre la CML. Por tanto, el escenario óptimo será aquel que se adecue en mayor medida a las expectativas de riesgo y rendimiento.

Como alternativa, también se podría hallar la combinación óptima a través de la fórmula del rendimiento esperado, especificando un porcentaje para μ_C y despejando la proporción de la participación de la cartera de mercado, en este caso el IBEX-35:

$$\mu_C = x_{IBEX-35} \cdot \mu_{IBEX-35} + x_{B10} \cdot \mu_{B10} = x_{IBEX-35} \cdot \mu_{IBEX-35} + (1 - x_{IBEX-35}) \cdot \mu_{B10}$$

$$\mu_C = 0,000901062 \cdot x_{IBEX-35} + 3,58904E - 05 \cdot (1 - x_{IBEX-35})$$

Otro aspecto interesante sería comparar las combinaciones del activo sin riesgo con la cartera de mercado con las combinaciones de este mismo activo F con las carteras creadas: las carteras A y B.

Tomando los datos del modelo de Sharpe, la cartera A, tendrá un riesgo y un rendimiento tal que:

$$\mu_A = 0,00090 \quad \sigma_A^2 = 0,00011$$

De modo, que recreando los mismos escenarios que en el caso de la cartera de mercado, se obtendría que:

Tabla 11. Variación de los parámetros de cartera según cambios en x_A y x_{B10} .

	COMBINACIONES		CARTERA	
	x (A)	x (B-10)	Riesgo	Rendimiento
A	0	1	0	3,58904E-05
B	0,25	0,75	6,823E-06	0,000252183
C	0,5	0,5	2,729E-05	0,000468476
D	0,75	0,25	6,141E-05	0,000684769
E	1	0	0,0001092	0,000901062
F	1,5	-0,5	0,0002456	0,001333648

Fuente: Elaboración propia.

El indicador de eficiencia ISH para A sería:

$$ISH_A = \frac{\mu_A - \mu_{B10}}{\sigma_A} = 0,07901$$

Así mismo, tomando de nuevo los datos del modelo de Sharpe, al igual que para la cartera A, la cartera B, tendrá un riesgo y un rendimiento tal que:

$$\mu_B = 0,00090 \quad \sigma_B^2 = 0,00018$$

De modo que, recreando los mismos escenarios que en el caso de la cartera de mercado, se obtiene:

Tabla 12. Variación de los parámetros de cartera según cambios en x_B y x_{B10} .

	COMBINACIONES		CARTERA	
	x (B)	x (B-10)	Riesgo	Rendimiento
A	0	1	0	3,58904E-05
B	0,25	0,75	1,121E-05	0,000252183
C	0,5	0,5	4,485E-05	0,000468476
D	0,75	0,25	0,0001009	0,000684769
E	1	0	0,0001794	0,000901062
F	1,5	-0,5	0,0004036	0,001333647

Fuente: Elaboración propia.

El indicador de eficiencia ISH para B sería:

$$ISH_B = \frac{\mu_B - \mu_{B10}}{\sigma_B} = 0,06459$$

Si comparamos los ISH de ambas carteras con el de la cartera de mercado, M, podemos comprobar que ambos son inferiores:

Tabla 13. Comparativa de ISH de carteras.

CARTERAS	ISH
M + F	0,080714599
A + F	0,079012156
B + F	0,064593807

Fuente: Elaboración propia.

De este modo, todas las carteras formadas por la combinación con B serán peores que aquellas formadas con A ya que, la prima de riesgo pagada es inferior: $ISH_B < ISH_A$.

Por último, de forma más general, se formulará la SML, para conocer la relación entre la rentabilidad y el riesgo de cualquier inversión, sin que se requiera la eficiencia. Se presume que el único riesgo relevante es el riesgo sistemático, ya que, el inversor habrá diversificado su cartera para suprimir el riesgo específico:

$$\text{Cartera: } \mu_C = \mu_{B10} + (\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}) \cdot \beta_C$$

$$\text{Sabadell: } \mu_S = \mu_{B10} + (\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}) \cdot \beta_S$$

$$\text{Repsol: } \mu_R = \mu_{B10} + (\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}) \cdot \beta_R$$

$$\text{Jazztel: } \mu_J = \mu_{B10} + (\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}) \cdot \beta_J$$

$$\text{Banco Popular: } \mu_P = \mu_{B10} + (\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}) \cdot \beta_P$$

$$\text{Gas Natural: } \mu_G = \mu_{B10} + (\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}) \cdot \beta_G$$

$$\text{Telefónica: } \mu_T = \mu_{B10} + (\mu_{IBEX-35} - \mu_{B10}) \cdot \beta_T$$

3.3. Aplicando APT.

Para realizar este último modelo se necesitan algunos datos a mayores: los factores de influencia, que serán los mismos para ambas carteras.

Se ha decidido incluir dos factores de influencia²³ para ejemplificar este modelo, a fin de simplificar el cálculo de la regresión. Además la información de la que se dispone no es suficiente como para concretar alguno de los cinco factores expuestos en la parte teórica del presente documento por lo que se procederá a hallar los factores

²³ Ver anexo VII.

como series aleatorias. Aún así, se puede afirmar que ambos factores son indicadores de riesgo ligados al mercado. Antes de comenzar con el modelo es necesario calcular el coeficiente de correlación entre ambos factores para hallar la dependencia estadística y eliminar las redundancias si este fuera muy elevado:

$$\text{Coeficiente de Correlación} = 67,06\%$$

El coeficiente calculado puede considerarse suficientemente elevado como para que sea necesario eliminar las redundancias existentes. Para ello se estimará la regresión del segundo factor, F_2 , sobre el primero, F_1 :

$$F_{2t} = a + bF_{1t} + \varepsilon_{2t}$$

Entonces, a efectos de formular el modelo, el primer factor de influencia será $I_{1t} = F_{1t}$; mientras que el segundo será $I_{2t} = \varepsilon_{2t}$.

3.3.1. Cartera A.

Ahora ya es posible formular las ecuaciones características de cada título individualmente, estimando las siguientes ecuaciones²⁴:

$$r_{St} = a + b_{S1} \cdot I_{1t} + b_{S2} \cdot I_{2t} + \varepsilon_{St} = 0,00397 - 0,00054 \cdot I_{1t} - 0,01360 \cdot I_{2t} + \varepsilon_{St}$$

$$r_{Rt} = a + b_{R1} \cdot I_{1t} + b_{R2} \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Rt} = 0,00151 - 0,00125 \cdot I_{1t} + 0,00192 \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Rt}$$

$$r_{Jt} = a + b_{J1} \cdot I_{1t} + b_{J2} \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Jt} = 0,00392 + 0,00082 \cdot I_{1t} - 0,00216 \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Jt}$$

Una vez obtenidas estas, la realización de APT es inmediata, estimando la siguiente expresión:

$$\mu_j = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{j1} + \lambda_2 \cdot b_{j2}$$

²⁴ Ver el resultado de la estimación en el Anexo VIII.

Se obtienen los siguientes valores²⁵:

$$\lambda_0 = 0,00289 \quad \lambda_1 = 1,40477 \quad \lambda_2 = -0,11619$$

Por tanto, el modelo resultante será:

$$\mu_A = 0,00289 + 1,40477 \cdot b_{j1} - 0,11619 \cdot b_{j2}$$

Dado que λ_0 expresa el rendimiento básico, el mínimo rendimiento propio del título, se puede afirmar que parte de un rendimiento bajo. A este se le suma la influencia de ambos factores. Por un lado, se observa que es altamente sensible al factor 1: sus cambios afectan en igual sentido al título y lo hacen más que proporcionalmente. Respecto al segundo factor, se puede decir que el título no es extremadamente sensible al mismo y que, además, los cambios producen cambios en sentido contrario.

3.3.2. Cartera B.

Realizando el mismo procedimiento con la cartera B, se formulan las ecuaciones características de cada título individualmente, estimando las siguientes ecuaciones:

$$r_{Pt} = a + b_{P1} \cdot I_{1t} + b_{P2} \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Pt} = 0,0004 + 0,00478 \cdot I_{1t} - 0,05082 \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Pt}$$

$$r_{Gt} = a + b_{G1} \cdot I_{1t} + b_{G2} \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Gt} = 0,00247 - 0,00231 \cdot I_{1t} - 0,00917 \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Gt}$$

$$r_{Tt} = a + b_{T1} \cdot I_{1t} + b_{T2} \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Tt} = 0,00055 - 1,2147E - 05 \cdot I_{1t} - 0,00233 \cdot I_{2t} + \varepsilon_{Tt}$$

Una vez obtenidas estas, la realización de APT es inmediata, estimando la siguiente expresión:

$$\mu_j = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{j1} + \lambda_2 \cdot b_{j2}$$

²⁵ Para soluciones de Solver ver Anexo VI.

Se obtienen los siguientes valores²⁶:

$$\lambda_0 = 0,00040 \quad \lambda_1 = -0,18089 \quad \lambda_2 = -0,06164$$

Por tanto, el modelo resultante será:

$$\mu_B = 0,00040 - 0,18089 \cdot b_{j1} - 0,06164 \cdot b_{j2}$$

En este caso λ_0 no es elevado, por tanto se parte de un rendimiento de partida bajo. A este se le suma la influencia de ambos factores. El título es altamente sensible al primer factor, y algo menos al segundo de ellos, pero, en ambos casos los cambios son de sentido contrario al comportamiento del factor.

3.4. Comparativa de resultados.

Resulta muy complejo comparar entre sí los modelos analizados debido a su disparidad de hipótesis y planteamiento.

Tanto Markowitz como Sharpe optimizan el riesgo de las carteras para un rendimiento conocido del IBEX-35. Ambos obtienen una combinación de los activos óptima para cada cartera, la cual difiere un poco de un modelo a otro

Tabla 14. Comparativa de resultados Markowitz-Sharpe

		MARKOWITZ	SHARPE
CARTERA A	Banco Sabadell	0%	2,72%
	Repsol	97,75%	97,28%
	Jazztel	2,25%	0%
CARTERA B	Banco Popular	0%	7,4%
	Gas Natural	42,2%	23,46%
	Telefónica	57,8%	69,14%

Fuente: Elaboración propia.

²⁶ Para soluciones de Solver ver Anexo VI.

Como se observa en la Cartera A, Markowitz descarta la inversión en *Banco Sabadell* y Sharpe hace lo mismo pero con la inversión en *Jazztell*.

En el caso de la cartera B, Markowitz descarta la inversión en el banco. En cambio, Sharpe opta por los tres activos, reservándole a *Banco Popular* el menor porcentaje de inversión.

Las diferencias entre ambos modelos se deben a que, Markowitz analiza detalladamente todas las relaciones de las carteras mediante las covarianzas, mientras que Sharpe obtiene los mismos rendimientos con menor carga de cálculo y quizás por ello, con menor precisión.

Respecto a CAPM, este expresa que la combinación óptima será la de la cartera de mercado y el activo sin riesgo. Cualquier escenario que se recree combinando ambos nos reportará un mismo ISH. Como se ha visto, cualquier combinación del activo sin riesgo con otras carteras que no replican el mercado, como es el caso de las carteras A y B, conlleva una peor inversión ya que su prima de riesgo será inferior.

Aún así, ya que en la realidad es demasiado complejo realizar una inversión que replique el mercado, de tener que decantarse por una u otra cartera se haría por la Cartera A ya que su ISH es mayor.

Por último, APT ofrece el modelo para estimar el rendimiento de cada cartera en función del comportamiento de los factores de influencia planteados. Este se basa en información histórica para entregarlos un método de cálculo para las rentabilidades futuras.

Conclusiones

Tras haber expuesto la teoría más relevante sobre valoración de cartera y haber llevado a la práctica los modelos planteados se ha adquirido un gran conocimiento en lo referente a la valoración financiera. Es, de hecho, este conocimiento el que permite evaluar los pros y contras de estos métodos de valoración desde un punto de vista crítico.

A la hora de recabar información para la realización del documento, se han encontrado diversos frenos. Entre ellos la escasez de textos disponibles para el alumno y la falta de traducción de los recursos bibliográficos.

A la hora de la práctica, también se ha observado que para obtener datos históricos de los valores empleados con un horizonte temporal muy alejado es necesario realizar un desembolso no posible para todos los bolsillos. En este caso, este no ha sido un inconveniente en sí mismo ya que, como bien se ha explicado, la serie empleada no tiene una extensión mayor por las características actuales del mercado, las cuales distorsionarían los resultados de valoración.

En lo que a los modelos se refiere, bajo nuestra opinión, se alejan de la realidad del mercado al emplear en sus cálculos las varianzas históricas y no las implícitas, es decir, aquellas que el mercado le asigna a los títulos teniendo en cuenta los factores cualitativos. Y es que, cuando un inversor decide comprometer su dinero en un valor no es del todo cierto que únicamente influyan en su decisión las variables riesgo y rendimiento esperado. Esto se debe a que la empresa no está aislada del entorno y, por tanto, aquellos hechos relevantes que influyan en los activos son muy importantes a la hora de tomar la decisión de invertir en uno u otro valor. Cuando hablamos de

estos factores cualitativos nos estamos refiriendo, por ejemplo, a guerras, crisis o ciclos económicos, mala gestión de la empresa, mala imagen, etc.

En la realidad, si se quisiera conocer la varianza implícita se deberían realizar los cálculos al revés: conociendo el valor del título en el mercado aplicaríamos los modelos y deduciríamos la varianza que correcta o incorrectamente le aplica el mercado al título que se está evaluando.

También cabe destacar que, a la hora de aplicar la teoría, se han encontrado inconvenientes debido a la carga estadística y las hipótesis de los modelos.

En cuanto a lo que a la estadística se refiere, la aplicación práctica de los modelos requiere un gran conocimiento estadístico y econométrico sobre distribuciones, medidas y otros conceptos relacionados. Es preciso reconocer las limitaciones en este campo ya que, los conocimientos adquiridos son los indispensables para el entendimiento específico de la valoración financiera tratada en este documento.

Respecto a las hipótesis, en ocasiones, los datos no cumplían alguna de ellas y, por tanto, el modelo tenía solución factible alguna. Por esto, se considera que algunas de las hipótesis planteadas tienen un carácter demasiado restrictivo. Esto puede ser un gran inconveniente a la hora de evaluar acciones con unos rendimientos que no se adecuen a las limitaciones impuestas por los modelos, lo cual no tiene porqué implicar que el valor analizado sea una mala opción de inversión.

Aún así, se cree que los modelos pueden dar una dirección de inversión fiable para orientarse a la hora de seleccionar una cartera rentable para el inversor ya que recogen gran cantidad de información sobre los títulos y la analizan de forma detallada y minuciosa para poder servir de referencia en lo que al análisis de cartera se refiere.

Además, se consideran alcanzados y superados los objetivos marcados al comienzo, pudiendo afirmar que se ha comprendido ampliamente el mundo de la valoración financiera en general y de la valoración de cartera en particular.

Bibliografía

- Black, F., Jensen, M., Scholes, M. (1972). *The Capital Asset Pricing Model: some Empirical Tests*. Studies in the Theory of Capital Markets. Nueva York: Praeger.
- Bolsa de Madrid. <www.bolsamadrid.es> Consultada el 10.04.14.
- Burmeister, E., Roll, R., Ross, S. (1994). A practitioner's guide to arbitrage pricing theory. *Finanzmarkt und Portfolio-Management*, 8 (3), 312-331. Recuperado de < <http://www.econbiz.de/Record/a-practitioner-s-guide-to-arbitrage-pricing-theory-burmeister-edwin/10006105057>> a 20.03.14.
- Doldán Tié, F. (2000). *Métodos cuantitativos de selección de inversiones*. Santiago: Tórculo.
- Doldán Tié, F. (2001). *Riesgos financieros*. A Coruña: Gesbiblo.
- Doldán Tié, F. (2003). *Dirección financiera de la empresa*. Santiago: Tórculo.
- El Economista. <<http://www.economista.es/bono/bono-aleman-10-years>> Consultado el 29.05.14.

- Fama, Eugene F. (1968). Risk, Return, and Equilibrium: Some Clarifying Comments. *Journal of Finance*, 23, 29-40. Recuperado el 20 de marzo de 2014 de <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6261.1968.tb02996.x/abstract>.
- Fama, Eugene F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25 (2), 383-417. Recuperado el 20 de marzo de 2014 de <http://efinance.org.cn/cn/fm/Efficient%20Capital%20Markets%20A%20Review%20of%20Theory%20and%20Empirical%20Work.pdf> .
- Fama, Eugene F. (1991). Efficient Capital Markets: II. *Journal of Finance*, 46 (5), 1575-1617. Recuperado el 20 de marzo de 2014 de http://thefinanceworks.net/Workshop/1002/private/2_Market%20efficiency/Articles/Fama%20on%20efficient%20capital%20markets%20II%20JF%201991.pdf >.
- Fama, Eugene F., French Kenneth R. (2004) The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18 (3), 25-46. Recuperado el 20 de marzo de 2014 en <http://www-personal.umich.edu/~kathrynd/JEP.FamaandFrench.pdf>.
- Gordon, M. J. (1962) *The investment, financing and valuation of the corporation*. Illinois. Irwin.
- Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37. Recuperado el 20 de marzo de 2014 en <http://www.grbestpractices.org/sites/grbestpractices.org/files/The%20valuation%20of%20risk%20assets%20and%20the%20selection%20of%20risky%20investments%20in%20stock%20portfolios%20and%20capital%20budgets.pdf>.
- Lintner, J. (1969). The Aggregation of Investors' Diverse Judgements and Preferences in Purely Competitive Markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4, 346-382. Recuperado el 20 de marzo de 2014 en <http://pages.stern.nyu.edu/~lpederse/courses/LAP/papers/ShortSales/Lintner69.pdf>.

- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91. Recuperado el 20 de marzo de 2014 en < https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf >.
- Martínez Barbeito, J. (1997). La valoración de los activos financieros: procesos estocásticos de martingalas. A Coruña: Universidad, servicio de publicaciones.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 35, 768-783. Recuperado el 15 de abril de 2014 en < <http://efinance.org.cn/cn/fm/Equilibrium%20in%20a%20Capital%20Asset%20Market.pdf> >.
- Piñeiro Sánchez, C., de Llano Monelos, P. (2007). *Modelos de gestión Financiera*. Madrid: Mac Graw-Hill.
- Piñeiro Sánchez, C., de Llano Monelos, P. (2009a). *Dirección financiera: un enfoque centrado en valor y riesgo*. Madrid: Delta.
- Piñeiro Sánchez, C., de Llano Monelos, P. (2009b). *Principios y modelos de dirección financiera*. Santiago de Compostela: Andavira.
- Piñeiro Sánchez, C., de Llano Monelos, P. (2011). *Finanzas empresariales: teoría y modelos con hoja de cálculo*. Santiago de Compostela: Andavira.
- Ross, S. (1976) The Arbitrage of Theory of Capital Assets Pricing. *Journal of Economic Theory*, 13, 341-360. Recuperado el 20 de marzo de 2014 en < <http://www.share-pdf.com/c3c0b4dfa6d546c9811be5d2b398673c/pd.pdf> >.
- Ross, S., Westerfield, Randolph W., Jaffe, Jeffrey F. (2012) *Finanzas corporativas*. México: Mc Graw Hill.
- Sharpe, W. (1961), *Portfolio Analysis Based on a Simplified Model of the Relationships Among Securities*. PhD Dissertation, University of California at Los Angeles.

- Sharpe, W.F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9 (2), 277-293. Recuperado el 15 de abril de 2014 en < <http://analiseeffiecs.files.wordpress.com/2013/07/teoria-de-portafolio-sharpe-1.pdf> >.
- Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 19, 425-442. Recuperado a 15 de abril de 2014 en < <http://web.cenet.org.cn/upfile/17485.pdf> >.
- Suárez Suárez, A. (2005). *Decisiones óptimas de inversión y financiación de la empresa*. Madrid: Pirámide.
- Treynor, Jack L. (1961). *Toward a Theory of Market Value of Risky Assets*. Manuscrito inédito.

ANEXO I. Modelo de Markowitz.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sigma_c^2 = \sum \sum x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \\ \text{sujeto a: } \sum x_j \cdot \mu_j = \mu_c^* \\ \sum x_j = 1 \\ \forall x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

x_i, x_j	: participaciones relativas de los n títulos
σ_{ij}	: covarianza de los títulos
μ_j	: rentabilidad media de los títulos
μ_c^*	: rendimiento esperado de la cartera

ANEXO II. Modelo diagonal de Sharpe.

$$r_{jt} = \alpha_j + \beta_j \cdot r_{Mt} + \varepsilon_{jt}$$

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_j}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sigma_c^2 = \sum \sigma_{\varepsilon_j}^2 \cdot x_j^2 + \sigma_M^2 \cdot x_{n+1}^2 \\ \text{sujeto a: } \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot x_j + \mu_M \cdot x_{n+1} = \mu_c^* \\ \sum \beta_j \cdot x_j - x_{n+1} = 0 \\ \sum x_j = 1 \\ \forall x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right.$$

r_{jt} :	rendimiento del título j en el periodo t
α_j :	coeficiente de la rentabilidad del título j
β_j :	coeficiente de volatilidad del título j
r_{Mt} :	rendimiento del mercado en el periodo t
ε_{jt} :	error del título j en el periodo t (perturbación aleatoria), variable residual.
σ_j^2 :	varianza del título j
σ_M^2 :	varianza del mercado
$\sigma_{\varepsilon_j}^2$:	varianza del error del título j
σ_c^2 :	varianza de la cartera
x_j :	participación relativa de los títulos
σ_{ij} :	covarianza de los títulos i y j
μ_j :	media de los rendimientos del título j
μ_c^* :	rendimiento esperado de la cartera
x_{n+1} :	variable artificial

ANEXO III. Modelo de valoración de activos de capital, CAPM.

$$\mu_C = x_M \cdot \mu_M + x_F \cdot \mu_F = x_M \cdot \mu_M + (1 - x_M) \cdot \mu_F$$

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_j}^2$$

$$\sigma_C^2 = x_M^2 \cdot \sigma_M^2 + x_F^2 \cdot \sigma_F^2 + 2 \cdot \sigma_{FM}^2 \cdot x_M \cdot x_F = x_M^2 \cdot \sigma_M^2 = \beta_j^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_C}^2$$

ISH

$$\omega = \frac{\Delta\mu}{\Delta\sigma} = \frac{\mu_M - \mu_F}{\sigma_M - 0} = \frac{\mu_M - \mu_F}{\sigma_M}$$

CML

$$\mu_C = \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \cdot \sigma_C$$

SML

$$\mu_j = \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \cdot \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2} = \mu_F + (\mu_M - \mu_F) \cdot \beta_j$$

VALORACIÓN DE ACTIVOS

$$E(P_{j1}) = P_{j0} \cdot (1 + \mu_j) = P_{j0} \cdot (1 + [\mu_f + (\mu_M - \mu_F) \cdot \beta_j])$$

$$P_{j0} = \frac{E(P_{j1})}{1 + [\mu_f + (\mu_M - \mu_F) \cdot \beta_j]}$$

μ_C :	rentabilidad media de la cartera
x_M :	participación relativa de la cartera de mercado
μ_M :	rentabilidad media del mercado
x_F :	participación relativa del activo sin riesgo
μ_F :	rendimiento medio del activo sin riesgo
σ_j^2 :	varianza del título j
β_j^2 :	coeficiente de variabilidad de j
σ_M^2 :	varianza de la cartera de mercado
$\sigma_{\varepsilon_j}^2$:	varianza del error del título j
σ_C^2 :	varianza de la cartera
σ_F^2 :	varianza del activo sin riesgo
σ_{FM}^2 :	cuadrado de la covarianza de la cartera de mercado y el activo sin riesgo
$\sigma_{\varepsilon_C}^2$:	cuadrado de la varianza del error y la cartera
σ_M :	desviación típica de la cartera de mercado
σ_{jM} :	covarianza del título j y la cartera de mercado
μ_j :	rendimiento medio del título j
P_{j0} :	precio del activo j en 0
P_{j1} :	precio del activo j en 1

ANEXO IV. Modelo de valoración por arbitraje, APT.

$$r_{jt} = \mu_j + b_{j1} \cdot F_{1t} + b_{j2} \cdot F_{2t} + \dots + b_{jk} \cdot F_{kt} + \varepsilon_{jt}$$

$$\mu_j = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{j1} + \lambda_2 \cdot b_{j2} + \dots + \lambda_k \cdot b_{jk}$$

r_{jt} :	rendimiento del título j en t
μ_j :	rendimiento medio del título j
b_{jk} :	coeficiente de volatilidad del título j
F_{kt} :	factor de influencia
ε_{jt} :	error del título j en t
λ_k :	parámetros a estimar

ANEXO V. Cotizaciones de las acciones que conforman las carteras.

A) CARTERA A

BANCO SABADELL

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
02/01/2014	1,836	1,836	1,9	1,822	1,8532
03/01/2014	1,845	1,845	1,863	1,82	1,8468
06/01/2014	1,918	1,918	1,921	1,836	1,8991
07/01/2014	2	2	2	1,909	1,9758
08/01/2014	2,05	2,05	2,05	1,953	2,0118
09/01/2014	2	2	2,077	1,979	2,0385
10/01/2014	2,03	2,03	2,04	1,991	2,0225
13/01/2014	2,132	2,132	2,137	2,036	2,1027
14/01/2014	2,133	2,133	2,133	2,07	2,1162
15/01/2014	2,149	2,149	2,15	2,085	2,1258
16/01/2014	2,13	2,13	2,149	2,123	2,139
17/01/2014	2,107	2,107	2,144	2,091	2,1153

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
20/01/2014	2,085	2,085	2,11	2,081	2,0938
21/01/2014	2,047	2,047	2,117	2,046	2,0707
22/01/2014	2,028	2,028	2,071	1,982	2,0183
23/01/2014	2,152	2,152	2,159	2,075	2,1401
24/01/2014	2,122	2,122	2,17	2,075	2,1325
27/01/2014	2,145	2,145	2,157	2,086	2,1251
28/01/2014	2,163	2,163	2,195	2,145	2,1729
29/01/2014	2,157	2,157	2,198	2,082	2,1455
30/01/2014	2,161	2,161	2,17	2,08	2,1427
31/01/2014	2,193	2,193	2,193	2,126	2,1672
03/02/2014	2,149	2,149	2,197	2,143	2,1679
04/02/2014	2,15	2,15	2,183	2,139	2,1577
05/02/2014	2,18	2,18	2,194	2,145	2,1788
06/02/2014	2,242	2,242	2,245	2,175	2,207
07/02/2014	2,271	2,271	2,274	2,224	2,2525
10/02/2014	2,263	2,263	2,271	2,235	2,2564
11/02/2014	2,312	2,312	2,32	2,254	2,2965
12/02/2014	2,391	2,391	2,437	2,313	2,3874
13/02/2014	2,392	2,392	2,4	2,341	2,367
14/02/2014	2,388	2,388	2,4	2,364	2,3824
17/02/2014	2,382	2,382	2,4	2,375	2,3852
18/02/2014	2,379	2,379	2,389	2,344	2,3715
19/02/2014	2,344	2,344	2,377	2,321	2,3411
20/02/2014	2,307	2,307	2,33	2,267	2,2958
21/02/2014	2,314	2,314	2,321	2,283	2,3061
24/02/2014	2,383	2,383	2,383	2,298	2,3511
25/02/2014	2,4	2,4	2,4	2,358	2,3873
26/02/2014	2,401	2,401	2,416	2,391	2,4011
27/02/2014	2,399	2,399	2,406	2,355	2,3842
28/02/2014	2,394	2,394	2,409	2,342	2,381
03/03/2014	2,323	2,323	2,355	2,31	2,3286
04/03/2014	2,385	2,385	2,394	2,334	2,3695
05/03/2014	2,401	2,401	2,418	2,366	2,3962
06/03/2014	2,42	2,42	2,425	2,397	2,416
07/03/2014	2,37	2,37	2,429	2,362	2,3972
10/03/2014	2,371	2,371	2,405	2,34	2,372
11/03/2014	2,365	2,365	2,387	2,353	2,3691
12/03/2014	2,339	2,339	2,37	2,306	2,3323
13/03/2014	2,327	2,327	2,365	2,327	2,3429
14/03/2014	2,226	2,226	2,33	2,196	2,2408

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
17/03/2014	2,263	2,263	2,274	2,223	2,2554
18/03/2014	2,297	2,297	2,305	2,242	2,2872
19/03/2014	2,293	2,293	2,316	2,275	2,2936
20/03/2014	2,308	2,308	2,315	2,275	2,3026
21/03/2014	2,282	2,282	2,323	2,274	2,2913
24/03/2014	2,163	2,163	2,294	2,153	2,1927
25/03/2014	2,158	2,158	2,192	2,126	2,1615
26/03/2014	2,186	2,186	2,203	2,15	2,182
27/03/2014	2,191	2,191	2,199	2,164	2,1843
28/03/2014	2,245	2,245	2,266	2,184	2,2399
31/03/2014	2,242	2,242	2,263	2,24	2,2508
01/04/2014	2,324	2,324	2,344	2,248	2,3126
02/04/2014	2,303	2,303	2,349	2,274	2,3041
03/04/2014	2,333	2,333	2,378	2,294	2,331
04/04/2014	2,371	2,371	2,379	2,327	2,3567
07/04/2014	2,364	2,364	2,374	2,32	2,3519
08/04/2014	2,314	2,314	2,375	2,295	2,3165
09/04/2014	2,334	2,334	2,358	2,308	2,3342
10/04/2014	2,316	2,316	2,359	2,315	2,3307
11/04/2014	2,261	2,261	2,326	2,206	2,2592
14/04/2014	2,254	2,254	2,259	2,181	2,2332
15/04/2014	2,209	2,209	2,265	2,196	2,2224
16/04/2014	2,257	2,257	2,259	2,22	2,247
17/04/2014	2,267	2,267	2,28	2,245	2,2647
22/04/2014	2,364	2,364	2,364	2,257	2,3433
23/04/2014	2,374	2,374	2,38	2,348	2,3703
24/04/2014	2,44	2,44	2,474	2,379	2,4349
25/04/2014	2,401	2,401	2,446	2,383	2,414
28/04/2014	2,381	2,381	2,437	2,362	2,3915
29/04/2014	2,456	2,456	2,467	2,383	2,4421
30/04/2014	2,45	2,45	2,469	2,418	2,4455

REPSOL

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
02/01/2014	18,06	18,06	18,42	18,04	18,1336
03/01/2014	18,095	18,095	18,185	17,955	18,0923
06/01/2014	18,115	18,115	18,36	18,1	18,1574

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
07/01/2014	18,61	18,61	18,645	18,135	18,5675
08/01/2014	18,67	18,67	18,7	18,485	18,6506
09/01/2014	18,735	18,735	18,94	18,625	18,7709
10/01/2014	18,93	18,93	19,05	18,795	18,949
13/01/2014	18,91	18,91	19,045	18,855	18,9281
14/01/2014	18,9	18,9	18,905	18,715	18,8572
15/01/2014	19,005	19,005	19,08	18,755	18,9368
16/01/2014	19,035	19,035	19,065	18,92	19,0064
17/01/2014	19,005	19,005	19,1	18,87	19,0121
20/01/2014	19	19	19,05	18,935	18,992
21/01/2014	18,71	18,71	19,1	18,675	18,8219
22/01/2014	18,56	18,56	18,785	18,5	18,5967
23/01/2014	18,35	18,35	18,66	18,265	18,4053
24/01/2014	17,68	17,68	18,35	17,6	17,8523
27/01/2014	17,525	17,525	17,81	17,46	17,567
28/01/2014	17,65	17,65	17,78	17,56	17,6752
29/01/2014	17,625	17,625	17,8	17,255	17,6082
30/01/2014	17,615	17,615	17,85	17,54	17,6617
31/01/2014	17,38	17,38	17,625	17,25	17,3939
03/02/2014	17,13	17,13	17,5	17,1	17,2368
06/02/2014	17,425	17,425	17,5	17,13	17,3568
07/02/2014	17,665	17,665	17,755	17,31	17,5966
10/02/2014	17,57	17,57	17,79	17,48	17,5832
11/02/2014	17,615	17,615	17,75	17,42	17,6034
12/02/2014	17,53	17,53	17,765	17,53	17,6071
13/02/2014	17,57	17,57	17,59	17,33	17,539
14/02/2014	17,61	17,61	17,75	17,5	17,6263
17/02/2014	17,625	17,625	17,77	17,59	17,6707
18/02/2014	17,575	17,575	17,68	17,36	17,4942
19/02/2014	17,625	17,625	17,71	17,4	17,5862
20/02/2014	17,985	17,985	18,07	17,465	17,9206
21/02/2014	18,075	18,075	18,115	17,95	18,0544
24/02/2014	18,21	18,21	18,28	18,06	18,1791
25/02/2014	18,37	18,37	18,37	18,17	18,2991
26/02/2014	18,555	18,555	18,67	18,1	18,5123
27/02/2014	18,39	18,39	18,59	18,24	18,3925
28/02/2014	18,205	18,205	18,45	18,075	18,2038
03/03/2014	17,925	17,925	18,185	17,86	17,9698
04/03/2014	18,26	18,26	18,29	18,05	18,2067
05/03/2014	18,34	18,34	18,44	18,165	18,3294
06/03/2014	18,395	18,395	18,595	18,36	18,4485
07/03/2014	18,125	18,125	18,455	18,12	18,2443
10/03/2014	18,1	18,1	18,285	17,97	18,0943
11/03/2014	17,925	17,925	18,195	17,88	17,9758
12/03/2014	17,81	17,81	17,945	17,625	17,7811
13/03/2014	17,6	17,6	17,965	17,6	17,7214
14/03/2014	17,385	17,385	17,53	17,185	17,3799
17/03/2014	17,615	17,615	17,695	17,315	17,5798
18/03/2014	17,79	17,79	17,94	17,485	17,7716
19/03/2014	17,86	17,86	17,96	17,66	17,8453
20/03/2014	17,88	17,88	17,92	17,605	17,8235

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
21/03/2014	18,005	18,005	18,08	17,835	17,9878
24/03/2014	17,715	17,715	18,095	17,655	17,7777
25/03/2014	17,87	17,87	17,97	17,585	17,8384
26/03/2014	18,175	18,175	18,29	17,94	18,1669
27/03/2014	18,405	18,405	18,405	18,15	18,3361
28/03/2014	18,605	18,605	18,605	18,435	18,5617
31/03/2014	18,525	18,525	18,75	18,48	18,5899
01/04/2014	18,73	18,73	18,765	18,565	18,7156
02/04/2014	18,7	18,7	18,8	18,62	18,7005
03/04/2014	18,795	18,795	18,9	18,6	18,7821
04/04/2014	18,925	18,925	19	18,755	18,9032
07/04/2014	18,84	18,84	18,98	18,765	18,857
08/04/2014	18,695	18,695	18,89	18,575	18,6955
09/04/2014	18,895	18,895	18,965	18,68	18,7906
10/04/2014	18,69	18,69	18,95	18,65	18,7415
11/04/2014	18,53	18,53	18,74	18,41	18,541
14/04/2014	18,76	18,76	18,8	18,305	18,6021
15/04/2014	18,63	18,63	18,84	18,565	18,6687
16/04/2014	18,79	18,79	18,885	18,665	18,7801
23/04/2014	18,96	18,96	19,115	18,935	18,9912
24/04/2014	19	19	19,14	18,755	18,9815
25/04/2014	18,91	18,91	19	18,77	18,9003
28/04/2014	18,96	18,96	19,095	18,755	18,9387
29/04/2014	19,225	19,225	19,29	18,915	19,1975
30/04/2014	19,4	19,4	19,555	19,245	19,4113

JAZZTEL

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
02/01/2014	7,867	7,867	7,89	7,773	7,861
03/01/2014	7,915	7,915	7,97	7,806	7,9154
06/01/2014	7,964	7,964	7,983	7,857	7,9486
07/01/2014	8,218	8,218	8,226	7,916	8,1351
08/01/2014	8,385	8,385	8,42	8,221	8,343
09/01/2014	8,31	8,31	8,42	8,113	8,3386
10/01/2014	8,359	8,359	8,395	8,267	8,33
13/01/2014	8,405	8,405	8,44	8,323	8,3981
14/01/2014	8,44	8,44	8,44	8,21	8,3643
15/01/2014	8,624	8,624	8,624	8,435	8,5471
16/01/2014	8,592	8,592	8,628	8,511	8,5813
17/01/2014	8,67	8,67	8,72	8,591	8,67
20/01/2014	8,586	8,586	8,684	8,502	8,5993
21/01/2014	8,55	8,55	8,66	8,511	8,5682
22/01/2014	8,863	8,863	8,887	8,585	8,7822
23/01/2014	9,033	9,033	9,07	8,876	9,0067

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
24/01/2014	8,83	8,83	9,032	8,71	8,8373
27/01/2014	8,603	8,603	8,65	8,339	8,5239
28/01/2014	9,039	9,039	9,189	8,616	8,9544
29/01/2014	9,196	9,196	9,25	8,801	9,0516
30/01/2014	9,144	9,144	9,238	8,962	9,0952
31/01/2014	9,121	9,121	9,245	9,018	9,1259
03/02/2014	9,037	9,037	9,18	9	9,0562
04/02/2014	9	9	9,065	8,78	8,9773
05/02/2014	8,967	8,967	9,096	8,902	8,9932
06/02/2014	9,151	9,151	9,17	8,977	9,1067
07/02/2014	9,269	9,269	9,298	9,102	9,215
10/02/2014	9,384	9,384	9,44	9,281	9,3754
11/02/2014	9,35	9,35	9,45	9,23	9,3659
12/02/2014	9,48	9,48	9,484	9,362	9,4331
13/02/2014	9,4	9,4	9,5	9,166	9,3132
14/02/2014	9,503	9,503	9,539	9,324	9,4851
17/02/2014	9,501	9,501	9,55	9,435	9,4935
19/02/2014	9,883	9,883	10,1	9,833	9,9491
20/02/2014	9,851	9,851	9,891	9,682	9,7945
21/02/2014	9,799	9,799	9,95	9,766	9,8387
24/02/2014	9,92	9,92	9,95	9,751	9,8743
25/02/2014	9,939	9,939	9,96	9,792	9,9101
26/02/2014	9,809	9,809	9,945	9,801	9,842
27/02/2014	9,81	9,81	10,09	9,75	9,8865
28/02/2014	9,82	9,82	9,869	9,762	9,809
03/03/2014	9,6	9,6	9,7	9,05	9,5736
04/03/2014	9,78	9,78	9,825	9,601	9,7392
05/03/2014	9,7	9,7	9,81	9,665	9,7192
06/03/2014	9,852	9,852	9,886	9,687	9,8197
07/03/2014	9,95	9,95	10	9,851	9,9356
10/03/2014	10,235	10,235	10,25	9,99	10,1564
11/03/2014	10,24	10,24	10,39	10,22	10,2887
12/03/2014	10,015	10,015	10,235	9,99	10,0609
13/03/2014	9,966	9,966	10,145	9,916	10,0085
14/03/2014	10,005	10,005	10,04	9,74	9,9175
17/03/2014	10,32	10,32	10,325	10	10,2105
18/03/2014	10,49	10,49	10,51	10,35	10,4439
19/03/2014	10,86	10,86	10,97	10,43	10,7702
20/03/2014	10,9	10,9	10,935	10,705	10,8533
21/03/2014	10,94	10,94	11,14	10,89	10,9881
24/03/2014	10,62	10,62	10,975	10,59	10,709
25/03/2014	10,58	10,58	11,1	10,525	10,752
26/03/2014	10,8	10,8	10,835	10,52	10,7641
27/03/2014	10,93	10,93	11	10,68	10,9027
28/03/2014	10,9	10,9	10,975	10,84	10,9072
31/03/2014	11,04	11,04	11,11	10,92	11,0166
01/04/2014	11,035	11,035	11,135	11	11,0642
02/04/2014	10,825	10,825	11,03	10,775	10,8681
03/04/2014	10,91	10,91	11,14	10,835	10,9744
04/04/2014	11,085	11,085	11,1	10,88	11,0282
07/04/2014	10,865	10,865	11,015	10,84	10,9031

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
08/04/2014	10,6	10,6	10,925	10,45	10,601
09/04/2014	10,7	10,7	10,835	10,63	10,7041
10/04/2014	10,81	10,81	10,85	10,735	10,7992
11/04/2014	10,64	10,64	10,775	10,555	10,6426
14/04/2014	10,205	10,205	10,685	9,98	10,2723
15/04/2014	10,25	10,25	10,335	10,07	10,2393
16/04/2014	10,55	10,55	10,56	10,285	10,4733
17/04/2014	10,53	10,53	10,64	10,47	10,5438
22/04/2014	10,615	10,615	10,645	10,55	10,6078
23/04/2014	10,585	10,585	10,625	10,51	10,5679
24/04/2014	10,47	10,47	10,7	10,4	10,5034
25/04/2014	10,285	10,285	10,495	10,26	10,3181
28/04/2014	10,3	10,3	10,375	10,185	10,2893
29/04/2014	10,605	10,605	10,68	10,31	10,5492
30/04/2014	11,06	11,06	11,07	10,51	10,9561

B) CARTERA B

BANCO POPULAR

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
02/01/2014	4,396	4,396	4,445	4,31	4,4008
03/01/2014	4,345	4,345	4,415	4,338	4,3659
06/01/2014	4,65	4,65	4,674	4,32	4,5512
07/01/2014	4,957	4,957	4,965	4,623	4,8616
08/01/2014	5,4	5,4	5,4	4,95	5,2292
09/01/2014	5,229	5,229	5,497	5,2	5,3181
10/01/2014	5,226	5,226	5,35	5,135	5,2267
13/01/2014	5,559	5,559	5,675	5,279	5,5304
14/01/2014	5,317	5,317	5,491	5,234	5,3435
15/01/2014	5,493	5,493	5,493	5,357	5,4524
16/01/2014	5,388	5,388	5,55	5,388	5,4381
17/01/2014	5,226	5,226	5,447	5,164	5,2845
20/01/2014	5,24	5,24	5,28	5,182	5,235
21/01/2014	5,091	5,091	5,326	5,09	5,1793
22/01/2014	5,077	5,077	5,216	4,983	5,0777
23/01/2014	5,17	5,17	5,185	5,067	5,1435

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
24/01/2014	4,969	4,969	5,23	4,952	5,0289
27/01/2014	4,868	4,868	5,039	4,8	4,8965
28/01/2014	4,986	4,986	5,095	4,911	5,0039
29/01/2014	4,999	4,999	5,094	4,811	4,9665
30/01/2014	5,214	5,214	5,237	4,81	4,9845
31/01/2014	5,106	5,106	5,17	4,92	5,0326
03/02/2014	4,956	4,956	5,143	4,94	5,0298
04/02/2014	4,973	4,973	5,018	4,831	4,9261
05/02/2014	5,008	5,008	5,049	4,928	4,9939
06/02/2014	5,307	5,307	5,31	5,014	5,2005
07/02/2014	5,271	5,271	5,349	5,185	5,264
10/02/2014	5,376	5,376	5,394	5,213	5,325
11/02/2014	5,445	5,445	5,47	5,362	5,4185
12/02/2014	5,47	5,47	5,551	5,411	5,4858
13/02/2014	5,289	5,289	5,396	5,25	5,3031
14/02/2014	5,325	5,325	5,343	5,235	5,3049
17/02/2014	5,303	5,303	5,34	5,27	5,3018
18/02/2014	5,304	5,304	5,324	5,23	5,2795
19/02/2014	5,226	5,226	5,315	5,176	5,2171
20/02/2014	5,073	5,073	5,176	4,973	5,0487
24/02/2014	5,296	5,296	5,296	5,046	5,2391
25/02/2014	5,25	5,25	5,29	5,22	5,252
26/02/2014	5,182	5,182	5,28	5,171	5,2139
27/02/2014	5,268	5,268	5,28	5,05	5,1749
28/02/2014	5,224	5,224	5,268	5,11	5,2104
03/03/2014	5,059	5,059	5,119	5,02	5,0677
04/03/2014	5,348	5,348	5,369	5,13	5,2693
05/03/2014	5,416	5,416	5,444	5,32	5,392
06/03/2014	5,459	5,459	5,5	5,417	5,4621
07/03/2014	5,264	5,264	5,485	5,21	5,3365
10/03/2014	5,415	5,415	5,497	5,326	5,4291
11/03/2014	5,492	5,492	5,548	5,415	5,4873
12/03/2014	5,399	5,399	5,476	5,35	5,3935
13/03/2014	5,46	5,46	5,518	5,379	5,4699
14/03/2014	5,265	5,265	5,439	5,17	5,2626
17/03/2014	5,384	5,384	5,423	5,25	5,3441
18/03/2014	5,447	5,447	5,499	5,323	5,4421
19/03/2014	5,48	5,48	5,5	5,441	5,4795
20/03/2014	5,475	5,475	5,48	5,36	5,438
21/03/2014	5,379	5,379	5,505	5,352	5,3984
24/03/2014	5,23	5,23	5,421	5,19	5,277
25/03/2014	5,257	5,257	5,324	5,202	5,2624

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
26/03/2014	5,38	5,38	5,389	5,243	5,3384
27/03/2014	5,36	5,36	5,37	5,275	5,3253
28/03/2014	5,372	5,372	5,425	5,33	5,3924
31/03/2014	5,48	5,48	5,54	5,39	5,4926
01/04/2014	5,685	5,685	5,705	5,472	5,6029
02/04/2014	5,63	5,63	5,785	5,57	5,6632
03/04/2014	5,852	5,852	5,86	5,64	5,7746
04/04/2014	5,918	5,918	5,948	5,846	5,8938
07/04/2014	5,785	5,785	5,89	5,71	5,8107
08/04/2014	5,679	5,679	5,788	5,56	5,6565
09/04/2014	5,692	5,692	5,815	5,652	5,7334
10/04/2014	5,603	5,603	5,769	5,583	5,6362
11/04/2014	5,488	5,488	5,611	5,363	5,4704
14/04/2014	5,406	5,406	5,488	5,262	5,3618
15/04/2014	5,251	5,251	5,426	5,235	5,2932
16/04/2014	5,463	5,463	5,463	5,307	5,4321
17/04/2014	5,434	5,434	5,498	5,384	5,44
22/04/2014	5,55	5,55	5,56	5,411	5,508
23/04/2014	5,583	5,583	5,637	5,499	5,5811
24/04/2014	5,529	5,529	5,695	5,475	5,5791
28/04/2014	5,326	5,326	5,438	5,287	5,3548
29/04/2014	5,51	5,51	5,53	5,33	5,4728
30/04/2014	5,3	5,3	5,483	5,268	5,3216

GAS NATURAL

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
02/01/2014	18,56	18,56	18,82	18,56	18,6313
03/01/2014	18,71	18,71	18,81	18,6	18,7229
06/01/2014	18,93	18,93	18,995	18,65	18,9108
07/01/2014	18,97	18,97	19,09	18,85	18,9437
08/01/2014	18,39	18,39	18,7	18,16	18,3825
09/01/2014	18,33	18,33	18,52	18,24	18,3807
10/01/2014	18,175	18,175	18,49	18,1	18,2268
13/01/2014	18,24	18,24	18,285	18,045	18,2046
14/01/2014	18,375	18,375	18,395	18,075	18,3197
15/01/2014	18,74	18,74	18,825	18,4	18,65
16/01/2014	18,69	18,69	18,82	18,63	18,7089
17/01/2014	19,225	19,225	19,225	18,76	19,0919

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
20/01/2014	19,055	19,055	19,2	19,02	19,0959
21/01/2014	19,06	19,06	19,285	19,04	19,1162
22/01/2014	18,885	18,885	19,185	18,795	18,9202
23/01/2014	18,87	18,87	19,11	18,785	18,9252
24/01/2014	18,175	18,175	18,995	18,12	18,3626
27/01/2014	18,04	18,04	18,45	17,935	18,0904
28/01/2014	18,21	18,21	18,31	18	18,1711
29/01/2014	18,305	18,305	18,57	18,125	18,3179
30/01/2014	18,67	18,67	18,695	18,26	18,5747
31/01/2014	18,355	18,355	18,73	18,25	18,3745
03/02/2014	18,23	18,23	18,67	18,165	18,3246
04/02/2014	18,23	18,23	18,4	18,11	18,2561
05/02/2014	17,875	17,875	18,305	17,83	17,9519
06/02/2014	18,1	18,1	18,15	17,88	18,0616
07/02/2014	18,43	18,43	18,43	18,11	18,3173
10/02/2014	18,445	18,445	18,455	18,07	18,3376
11/02/2014	18,59	18,59	18,625	18,385	18,54
12/02/2014	18,76	18,76	18,76	18,475	18,6817
13/02/2014	18,36	18,36	18,6	18,19	18,3373
14/02/2014	18,61	18,61	18,755	18,37	18,6149
18/02/2014	18,365	18,365	18,88	18,165	18,3894
19/02/2014	18,49	18,49	18,49	18,3	18,4601
20/02/2014	18,57	18,57	18,645	18,325	18,54
21/02/2014	18,745	18,745	18,8	18,555	18,707
24/02/2014	18,835	18,835	18,955	18,685	18,8127
25/02/2014	18,86	18,86	19,08	18,775	18,9167
26/02/2014	18,74	18,74	18,925	18,6	18,7284
27/02/2014	18,735	18,735	18,845	18,48	18,6713
28/02/2014	18,595	18,595	18,805	18,455	18,5805
03/03/2014	18,465	18,465	18,53	18,225	18,4229
04/03/2014	18,7	18,7	18,745	18,42	18,6363
05/03/2014	18,92	18,92	18,99	18,56	18,903
06/03/2014	19,4	19,4	19,57	18,93	19,3166
07/03/2014	19,275	19,275	19,55	19,2	19,3639
10/03/2014	19,285	19,285	19,495	19,165	19,288
11/03/2014	19,495	19,495	19,74	19,345	19,5202
12/03/2014	19,43	19,43	19,605	19,06	19,3998
13/03/2014	19,33	19,33	19,585	19,31	19,4133
14/03/2014	18,975	18,975	19,31	18,585	18,9421
17/03/2014	19,22	19,22	19,26	18,9	19,1483
18/03/2014	19,505	19,505	19,58	19,05	19,451
19/03/2014	19,47	19,47	19,7	19,4	19,5205
20/03/2014	19,585	19,585	19,715	19,355	19,5765

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
21/03/2014	19,685	19,685	19,87	19,45	19,6834
24/03/2014	19,455	19,455	19,79	19,365	19,4993
25/03/2014	19,885	19,885	19,975	19,45	19,8451
26/03/2014	20,12	20,12	20,13	19,855	20,0382
27/03/2014	20,34	20,34	20,39	19,925	20,268
28/03/2014	20,445	20,445	20,6	20,35	20,4807
31/03/2014	20,41	20,41	20,54	20,36	20,4275
01/04/2014	20,54	20,54	20,595	20,265	20,5103
02/04/2014	20,095	20,095	20,495	19,95	20,0882
03/04/2014	20,27	20,27	20,36	20,025	20,218
04/04/2014	20,31	20,31	20,36	20,135	20,2716
07/04/2014	20,61	20,61	20,675	20,225	20,534
08/04/2014	20,395	20,395	20,65	20,27	20,4238
09/04/2014	20,365	20,365	20,61	20,3	20,402
10/04/2014	19,975	19,975	20,3	19,755	19,9628
11/04/2014	19,85	19,85	20,29	19,65	19,9035
14/04/2014	20	20	20,035	19,715	19,9446
15/04/2014	19,935	19,935	20,22	19,8	19,9865
16/04/2014	20,225	20,225	20,25	19,95	20,174
17/04/2014	20,315	20,315	20,345	20,055	20,2643
23/04/2014	20,67	20,67	20,695	20,445	20,6307
24/04/2014	20,71	20,71	20,765	20,395	20,6298
25/04/2014	20,485	20,485	20,685	20,415	20,5201
28/04/2014	20,645	20,645	20,745	20,5	20,6287
29/04/2014	20,885	20,885	20,96	20,665	20,8286
30/04/2014	20,665	20,665	20,935	20,605	20,6834

TELEFÓNICA

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
02/01/2014	11,6	11,6	11,89	11,59	11,6777
03/01/2014	11,68	11,68	11,735	11,585	11,6738
06/01/2014	11,67	11,67	11,775	11,63	11,6906
07/01/2014	11,9	11,9	11,935	11,62	11,8438
08/01/2014	11,965	11,965	12	11,82	11,9476
09/01/2014	12,01	12,01	12,17	11,925	12,0582
10/01/2014	12,14	12,14	12,195	12,07	12,1482
13/01/2014	12,26	12,26	12,295	12,115	12,2307
14/01/2014	12,31	12,31	12,31	12,105	12,2604
15/01/2014	12,44	12,44	12,5	12,28	12,4019

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
16/01/2014	12,415	12,415	12,475	12,335	12,3999
17/01/2014	12,485	12,485	12,54	12,38	12,4859
20/01/2014	12,515	12,515	12,54	12,39	12,4915
21/01/2014	12,37	12,37	12,6	12,355	12,4434
22/01/2014	12,22	12,22	12,435	12,215	12,2583
23/01/2014	12,1	12,1	12,275	12,07	12,1426
24/01/2014	11,55	11,55	12,03	11,465	11,6696
27/01/2014	11,395	11,395	11,58	11,305	11,4146
28/01/2014	11,39	11,39	11,48	11,315	11,3952
29/01/2014	11,39	11,39	11,565	11,235	11,4046
30/01/2014	11,52	11,52	11,56	11,33	11,4824
31/01/2014	11,44	11,44	11,545	11,27	11,4036
03/02/2014	11,225	11,225	11,51	11,2	11,2966
04/02/2014	11,17	11,17	11,28	11,12	11,1775
05/02/2014	11,105	11,105	11,21	11	11,1028
06/02/2014	11,29	11,29	11,32	11,105	11,2606
07/02/2014	11,415	11,415	11,47	11,235	11,3876
10/02/2014	11,28	11,28	11,48	11,225	11,2946
11/02/2014	11,345	11,345	11,39	11,23	11,3189
12/02/2014	11,315	11,315	11,36	11,23	11,2997
14/02/2014	11,345	11,345	11,395	11,23	11,3318
17/02/2014	11,29	11,29	11,39	11,28	11,3131
18/02/2014	11,29	11,29	11,33	11,185	11,2598
19/02/2014	11,36	11,36	11,415	11,205	11,3313
20/02/2014	11,34	11,34	11,355	11,22	11,3048
21/02/2014	11,36	11,36	11,39	11,24	11,3265
24/02/2014	11,45	11,45	11,46	11,32	11,4316
25/02/2014	11,41	11,41	11,455	11,265	11,387
26/02/2014	11,48	11,48	11,52	11,365	11,4582
27/02/2014	11,245	11,245	11,545	11,11	11,2493
28/02/2014	11,11	11,11	11,21	11,01	11,0932
03/03/2014	10,865	10,865	11	10,855	10,901
04/03/2014	11,105	11,105	11,125	10,92	11,062
05/03/2014	11,21	11,21	11,285	11,115	11,2103
06/03/2014	11,39	11,39	11,42	11,245	11,3656
07/03/2014	11,3	11,3	11,46	11,25	11,3398
10/03/2014	11,415	11,415	11,435	11,25	11,3952
11/03/2014	11,36	11,36	11,455	11,325	11,3746
12/03/2014	11,275	11,275	11,335	11,2	11,2637
13/03/2014	11,08	11,08	11,31	11,08	11,1458
14/03/2014	10,945	10,945	11,075	10,835	10,9403
17/03/2014	11,09	11,09	11,1	10,905	11,0606
18/03/2014	11,195	11,195	11,27	11,035	11,1778

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
19/03/2014	11,17	11,17	11,22	11,1	11,1634
20/03/2014	11,2	11,2	11,2	11,04	11,1553
21/03/2014	11,16	11,16	11,3	11,145	11,1951
24/03/2014	11,145	11,145	11,2	11,045	11,1317
25/03/2014	11,105	11,105	11,165	11,025	11,1025
26/03/2014	11,105	11,105	11,165	10,94	11,0781
27/03/2014	11,205	11,205	11,245	11,045	11,1838
28/03/2014	11,47	11,47	11,48	11,23	11,4208
31/03/2014	11,485	11,485	11,595	11,465	11,508
01/04/2014	11,515	11,515	11,545	11,465	11,5111
02/04/2014	11,5	11,5	11,565	11,44	11,5077
03/04/2014	11,61	11,61	11,69	11,485	11,5924
04/04/2014	11,67	11,67	11,715	11,585	11,6556
07/04/2014	11,72	11,72	11,755	11,57	11,701
08/04/2014	11,66	11,66	11,785	11,565	11,6724
09/04/2014	11,77	11,77	11,89	11,61	11,7726
10/04/2014	11,65	11,65	11,84	11,605	11,6833
11/04/2014	11,48	11,48	11,635	11,385	11,4824
14/04/2014	11,64	11,64	11,66	11,35	11,5702
15/04/2014	11,58	11,58	11,77	11,51	11,605
17/04/2014	11,8	11,8	11,81	11,63	11,7893
22/04/2014	11,965	11,965	11,98	11,785	11,9287
23/04/2014	12	12	12,055	11,88	12,001
24/04/2014	12,075	12,075	12,095	11,955	12,0451
25/04/2014	11,845	11,845	12,03	11,845	11,8883
28/04/2014	11,95	11,95	11,96	11,82	11,9325
29/04/2014	12,12	12,12	12,12	11,965	12,1047
30/04/2014	12,07	12,07	12,19	12,055	12,0989

C) IBEX-35

Fecha	Último	Anterior	Máximo	Mínimo	Medio
02/01/2014	9.760,30	9.916,70	9.952,00	9.758,40	9.825,10
03/01/2014	9.798,00	9.760,30	9.830,10	9.722,50	9.795,20
06/01/2014	9.888,50	9.798,00	9.928,70	9.766,40	9.879,20
07/01/2014	10.178,70	9.888,50	10.188,50	9.881,90	10.054,30
08/01/2014	10.253,60	10.178,70	10.282,00	10.117,20	10.210,50
09/01/2014	10.234,20	10.253,60	10.383,00	10.186,30	10.310,10
10/01/2014	10.290,60	10.234,20	10.361,80	10.248,80	10.300,70
13/01/2014	10.365,50	10.290,60	10.396,00	10.298,30	10.355,00

Fecha	Último	Anterior	Máximo	Mínimo	Medio
14/01/2014	10.382,00	10.365,50	10.382,00	10.223,10	10.321,50
15/01/2014	10.525,00	10.382,00	10.529,80	10.368,40	10.438,50
16/01/2014	10.455,50	10.525,00	10.552,70	10.441,40	10.492,10
17/01/2014	10.465,70	10.455,50	10.501,80	10.393,50	10.463,20
20/01/2014	10.454,10	10.465,70	10.485,90	10.403,50	10.451,20
21/01/2014	10.357,40	10.454,10	10.510,50	10.344,20	10.439,90
22/01/2014	10.279,70	10.357,40	10.440,50	10.241,50	10.312,60
23/01/2014	10.241,20	10.279,70	10.350,90	10.215,80	10.291,10
24/01/2014	9.868,90	10.241,20	10.240,80	9.835,50	9.990,80
27/01/2014	9.758,40	9.868,90	9.915,90	9.725,70	9.812,30
28/01/2014	9.879,10	9.758,40	9.922,80	9.802,50	9.880,50
29/01/2014	9.896,20	9.879,10	10.054,10	9.716,50	9.902,60
30/01/2014	9.964,50	9.896,20	9.995,50	9.775,70	9.901,30
31/01/2014	9.920,20	9.964,50	9.993,20	9.761,80	9.872,50
03/02/2014	9.725,40	9.920,20	9.980,10	9.712,50	9.838,30
04/02/2014	9.754,30	9.725,40	9.814,20	9.654,80	9.733,90
05/02/2014	9.775,00	9.754,30	9.837,50	9.700,40	9.772,80
06/02/2014	9.964,60	9.775,00	9.983,70	9.807,20	9.890,00
07/02/2014	10.072,40	9.964,60	10.086,70	9.910,70	10.013,50
10/02/2014	9.982,70	10.072,40	10.117,80	9.943,80	9.997,90
11/02/2014	10.091,20	9.982,70	10.091,20	9.985,00	10.050,10
13/02/2014	10.098,90	10.080,80	10.098,90	9.950,00	10.004,40
14/02/2014	10.132,80	10.098,90	10.184,70	10.057,80	10.137,20
17/02/2014	10.118,60	10.132,80	10.181,90	10.084,60	10.128,90
19/02/2014	10.053,80	10.042,70	10.102,70	9.945,90	10.012,10
20/02/2014	10.062,20	10.053,80	10.062,20	9.918,50	9.988,60
21/02/2014	10.071,00	10.062,20	10.108,80	10.009,20	10.046,00
24/02/2014	10.193,10	10.071,00	10.193,10	10.035,30	10.128,20
25/02/2014	10.242,50	10.193,10	10.242,70	10.150,90	10.199,80
26/02/2014	10.224,30	10.242,50	10.269,00	10.191,70	10.236,60
27/02/2014	10.164,10	10.224,30	10.228,10	10.063,90	10.131,10
28/02/2014	10.114,20	10.164,10	10.174,20	9.996,10	10.072,60
03/03/2014	9.878,70	10.114,20	9.991,60	9.855,10	9.915,00
04/03/2014	10.126,70	9.878,70	10.126,70	9.955,20	10.032,90
05/03/2014	10.215,20	10.126,70	10.249,60	10.089,10	10.181,90
06/03/2014	10.304,00	10.215,20	10.358,90	10.247,50	10.311,40
07/03/2014	10.164,20	10.304,00	10.345,30	10.147,60	10.259,90
10/03/2014	10.194,60	10.164,20	10.292,00	10.119,10	10.198,30
12/03/2014	10.070,40	10.163,30	10.169,00	9.984,20	10.063,40
13/03/2014	9.950,30	10.070,40	10.117,80	9.950,30	10.045,40
14/03/2014	9.812,00	9.950,30	9.944,30	9.703,10	9.811,20
17/03/2014	9.975,00	9.812,00	9.992,50	9.811,20	9.921,80
18/03/2014	10.051,40	9.975,00	10.109,30	9.902,80	10.015,40
19/03/2014	10.093,30	10.051,40	10.135,50	10.022,80	10.081,50
20/03/2014	10.079,90	10.093,30	10.085,50	9.970,90	10.033,70
21/03/2014	10.053,10	10.079,90	10.157,50	10.042,40	10.094,70
24/03/2014	9.913,10	10.053,10	10.090,00	9.868,70	9.949,30
25/03/2014	9.990,50	9.913,10	10.035,20	9.885,60	9.971,60
26/03/2014	10.140,80	9.990,50	10.180,40	9.994,10	10.117,10
27/03/2014	10.199,00	10.140,80	10.204,40	10.087,10	10.159,50
28/03/2014	10.328,90	10.199,00	10.341,90	10.208,80	10.293,70

Fecha	Cierre	Último	Máximo	Mínimo	Medio
31/03/2014	10.340,50	10.328,90	10.420,60	10.325,90	10.373,40
01/04/2014	10.463,10	10.340,50	10.487,60	10.359,50	10.431,00
02/04/2014	10.435,80	10.463,10	10.503,70	10.391,30	10.444,50
03/04/2014	10.584,10	10.435,80	10.644,40	10.451,50	10.542,10
04/04/2014	10.677,20	10.584,10	10.705,10	10.572,30	10.622,70
07/04/2014	10.606,20	10.677,20	10.678,20	10.561,30	10.618,40
08/04/2014	10.480,50	10.606,20	10.626,60	10.384,10	10.477,90
09/04/2014	10.485,20	10.480,50	10.571,50	10.477,20	10.525,40
10/04/2014	10.336,10	10.485,20	10.536,60	10.326,40	10.399,00
11/04/2014	10.205,40	10.336,10	10.332,10	10.091,10	10.187,80
14/04/2014	10.188,20	10.205,40	10.191,30	9.984,30	10.096,50
15/04/2014	10.103,50	10.188,20	10.247,80	10.071,60	10.159,00
16/04/2014	10.267,90	10.103,50	10.267,90	10.179,40	10.223,40
17/04/2014	10.292,40	10.267,90	10.316,20	10.184,90	10.255,10
22/04/2014	10.437,80	10.292,40	10.449,00	10.279,70	10.381,80
23/04/2014	10.424,40	10.437,80	10.482,50	10.394,90	10.441,20
24/04/2014	10.462,00	10.424,40	10.531,10	10.338,70	10.455,30
25/04/2014	10.306,20	10.462,00	10.442,90	10.281,00	10.358,70
28/04/2014	10.320,90	10.306,20	10.391,30	10.247,90	10.329,10
29/04/2014	10.461,00	10.320,90	10.488,50	10.342,60	10.416,80
30/04/2014	10.459,00	10.461,00	10.500,40	10.397,70	10.445,50

Fuente: www.bolsamadrid.es

ANEXO VI. Soluciones extraídas de Solver.

A) Modelo de Markowitz.

CARTERA A		Xs	Xr	Xj
		0	0,97752014	0,022480865
Min			0,00010848	
		FÓRMULA		IGUALDAD
Res. 1			0,001	0,000901062
Res. 2			1,000001	1

CARTERA B		Xp	Xg	Xt
		0	0,42203723	0,577963773

Min 0,00017342

	FÓRMULA	IGUALDAD
Res. 1	0,00090106	0,000901062
Res. 2	1,000001	1

B) Modelo de Sharpe.

CARTERA A	Xs	Xr	Xj	Xn+1
	0,0272017	0,972798302	0	0,81499132
Al cuadrado	0,00073993	0,946336537	0	0,66421084

Min 1,296705176

	FÓRMULA	IGUALDAD
Res. 1	0,001	0,00090106
Res. 2	0,814991315	0,81499132
Res. 3	1	1

	SABADELL	RESPSOL	JAZZTEL
RE	2,13682914	1,368485419	3,40767033
RS	0,00018397	7,39739E-05	8,4837E-05

CARTERA B	Xp	Xg	Xt	Xn+1
	0,07401373	0,234575035	0,69141124	0,90794153
Al cuadrado	0,00547803	0,055025447	0,4780495	0,82435782

Min 0,828818066

	FÓRMULA	IGUALDAD
Res. 1	0,000901062	0,00090106
Res. 2	0,907941529	0,90794153
Res. 3	1	1

	GAS		
	POPULAR	NATURAL	TELEFÓNICA
RE	2,03592055	2,741621806	1,39464961
RS	0,00038485	5,38724E-05	8,9976E-05

C) CAPM

	Riesgo	Rendimiento
IBEX-35	0,00011489	0,000901062
BONO ALEMÁN		3,58904E-05

MERCADO	COMBINACIONES			CARTERA	
	x (IBEX-35)	x (B-10)	Varianza	Desviación Típica	Media
A	0	1	0	0	3,58904E-05
B	0,25	0,75	7,18092E-06	0,002679723	0,000252183
C	0,5	0,5	2,87237E-05	0,005359446	0,000468476
D	0,75	0,25	6,46282E-05	0,008039169	0,000684769
E	1	0	0,000114895	0,010718892	0,000901062
F	1,5	-0,5	0,000258513	0,016078339	0,001333647

ISH (M) 0,0807146

	Riesgo	Rendimiento
CARTERA A	0,00010917	0,000901062
CARTERA B	0,0001794	0,000901062

CARTERA A	COMBINACIONES			CARTERA	
	x (A)	x (B-10)	Varianza	Desviación Típica	Media
A	0	1	0	0	3,58904E-05
B	0,25	0,75	6,82324E-06	0,002612133	0,000252183
C	0,5	0,5	2,7293E-05	0,005224266	0,000468476
D	0,75	0,25	6,14091E-05	0,007836398	0,000684769
E	1	0	0,000109172	0,010448531	0,000901062
F	1,5	-0,5	0,000245637	0,015672797	0,001333648

ISH (A) 0,07901216

CARTERA B	COMBINACIONES			CARTERA	
	x (B)	x (B-10)	Varianza	Desviación Típica	Media
A	0	1	0	0	3,58904E-05
B	0,25	0,75	1,12125E-05	0,003348506	0,000252183
C	0,5	0,5	4,485E-05	0,006697013	0,000468476
D	0,75	0,25	0,000100912	0,010045519	0,000684769
E	1	0	0,0001794	0,013394026	0,000901062
F	1,5	-0,5	0,00040365	0,020091038	0,001333647

ISH (B) 0,06459381

D) APT**COEF. CORRELACIÓN**

0,670567376

t	FACTORES		F2t*	I1t=F1t	I2t=et*
	F1	F2			
02/01/2014	0,871957331	0,254069383	0,24023348	0,871957331	-0,0138359
03/01/2014	0,022188176	2,89212E-17	-0,10550748	0,022188176	-0,10550748
06/01/2014	0,153082144	7,06717E-09	-0,05225137	0,153082144	-0,05225137
07/01/2014	0,904997709	0,368531657	0,25367644	0,904997709	-0,11485522
08/01/2014	0,070859431	3,19137E-12	-0,08570487	0,070859431	-0,08570487
09/01/2014	0,742947128	0,051236456	0,1877438	0,742947128	0,13650734
10/01/2014	0,189597164	6,00231E-08	-0,0373947	0,189597164	-0,03739476
13/01/2014	0,229792293	4,10539E-07	-0,02104072	0,229792293	-0,02104113
14/01/2014	0,964536743	0,696927759	0,27790076	0,964536743	-0,419027
15/01/2014	0,344285914	2,33987E-05	0,02554267	0,344285914	0,02551928
16/01/2014	0,296747933	5,29513E-06	0,00620115	0,296747933	0,00619586
17/01/2014	0,54821536	0,002451952	0,10851434	0,54821536	0,10606239
20/01/2014	0,4495235	0,000336918	0,06836012	0,4495235	0,0680232
21/01/2014	0,715499818	0,035163757	0,17657646	0,715499818	0,1414127
22/01/2014	0,928149134	0,474436004	0,26309593	0,928149134	-0,21134007
23/01/2014	0,638998189	0,011350011	0,14545066	0,638998189	0,13410065
24/01/2014	0,271815398	2,20161E-06	-0,00394301	0,271815398	-0,00394521
27/01/2014	0,006964536	2,68486E-22	-0,11170144	0,006964536	-0,11170144
28/01/2014	0,060805099	6,90876E-13	-0,08979563	0,060805099	-0,08979563
29/01/2014	0,978733929	0,806578121	0,28367709	0,978733929	-0,52290103
30/01/2014	0,61076876	0,007223841	0,1339651	0,61076876	0,12674126
31/01/2014	0,698446876	0,027627004	0,16963822	0,698446876	0,14201122
03/02/2014	0,952821392	0,616758285	0,2731342	0,952821392	-0,34362408
04/02/2014	0,58471512	0,004671359	0,1233648	0,58471512	0,11869344
05/02/2014	0,637902662	0,011156916	0,14500493	0,637902662	0,13384801
06/02/2014	0,21796013	2,41975E-07	-0,02585481	0,21796013	-0,02585505
07/02/2014	0,919717713	0,433057442	0,25966549	0,919717713	-0,17339195
10/02/2014	0,43751579	0,000257002	0,06347461	0,43751579	0,06321761
11/02/2014	0,197782217	9,15951E-08	-0,03406449	0,197782217	-0,03406458
12/02/2014	0,434236991	0,000238379	0,06214058	0,434236991	0,0619022
13/02/2014	0,893222911	0,323294666	0,24888569	0,893222911	-0,07440898
14/02/2014	0,62598486	0,009239284	0,140156	0,62598486	0,13091671
17/02/2014	0,232462967	4,60827E-07	-0,01995412	0,232462967	-0,01995458

t	FACTORES		F2t*	I1t=F1t	I2t=et*
	F1	F2			
18/02/2014	0,467160829	0,000495067	0,07553612	0,467160829	0,07504106
19/02/2014	0,288921746	4,05324E-06	0,00301696	0,288921746	0,0030129
20/02/2014	0,633766273	0,01045421	0,14332198	0,633766273	0,13286777
21/02/2014	0,151059572	6,18703E-09	-0,05307428	0,151059572	-0,05307428
24/02/2014	0,633385844	0,010391627	0,14316719	0,633385844	0,13277557
25/02/2014	0,141813077	3,28975E-09	-0,05683635	0,141813077	-0,05683635
26/02/2014	0,058277496	4,51865E-13	-0,09082402	0,058277496	-0,09082402
27/02/2014	0,209210323	1,60632E-07	-0,0294148	0,209210323	-0,02941496
28/02/2014	0,874229718	0,260768817	0,24115803	0,874229718	-0,01961078
03/03/2014	0,818088785	0,134277854	0,21831628	0,818088785	0,08403842
04/03/2014	0,220802179	2,75444E-07	-0,02469848	0,220802179	-0,02469876
05/03/2014	0,738373125	0,048168022	0,1858828	0,738373125	0,13771478
06/03/2014	0,159569629	1,07029E-08	-0,04961184	0,159569629	-0,04961185
07/03/2014	0,490453894	0,000805345	0,08501325	0,490453894	0,0842079
10/03/2014	0,202832108	1,1786E-07	-0,03200987	0,202832108	-0,03200999
11/03/2014	0,104332503	1,52826E-10	-0,07208587	0,104332503	-0,07208587
12/03/2014	0,74995762	0,056281702	0,19059612	0,74995762	0,13431442
13/03/2014	0,048314781	6,93107E-14	-0,09487749	0,048314781	-0,09487749
14/03/2014	0,134562081	1,94638E-09	-0,05978652	0,134562081	-0,05978652
17/03/2014	0,546315975	0,002368312	0,10774155	0,546315975	0,10537324
18/03/2014	0,489056555	0,000782692	0,08444472	0,489056555	0,08366203
19/03/2014	0,923823335	0,45278213	0,26133592	0,923823335	-0,19144621
20/03/2014	0,509926873	0,001188718	0,09293611	0,509926873	0,09174739
21/03/2014	0,556816811	0,002864992	0,11201397	0,556816811	0,10914898
24/03/2014	0,144538533	3,97957E-09	-0,05572746	0,144538533	-0,05572746
25/03/2014	0,772480232	0,07566129	0,19975977	0,772480232	0,12409848
26/03/2014	0,778992236	0,082287012	0,20240928	0,778992236	0,12012226
27/03/2014	0,481372129	0,000668051	0,0813182	0,481372129	0,08065015
28/03/2014	0,320845149	1,15599E-05	0,01600546	0,320845149	0,0159939
31/03/2014	0,02876234	3,87474E-16	-0,10283269	0,02876234	-0,10283269
01/04/2014	0,952931231	0,617469633	0,27317889	0,952931231	-0,34429074
02/04/2014	0,650142397	0,013492266	0,14998484	0,650142397	0,13649258
03/04/2014	0,076622802	6,97558E-12	-0,08335996	0,076622802	-0,08335996
04/04/2014	0,702958772	0,029464464	0,17147395	0,702958772	0,14200949
07/04/2014	0,1783134	3,24967E-08	-0,04198566	0,1783134	-0,04198569
08/04/2014	0,843319858	0,181937939	0,22858191	0,843319858	0,04664397
09/04/2014	0,404099746	0,000116114	0,0498788	0,404099746	0,04976269
10/04/2014	0,193535706	7,37244E-08	-0,03579224	0,193535706	-0,03579232
11/04/2014	0,429277374	0,00021251	0,06012269	0,429277374	0,05991018
14/04/2014	0,474532984	0,000578981	0,07853559	0,474532984	0,07795661
15/04/2014	0,268967876	1,98155E-06	-0,00510157	0,268967876	-0,00510355
16/04/2014	0,035274202	2,98244E-15	-0,10018324	0,035274202	-0,10018324

t	FACTORES		F2t*	I1t=F1t	I2t=et*
	F1	F2			
17/04/2014	0,478588416	0,000630408	0,0801856	0,478588416	0,0795552
22/04/2014	0,674528185	0,019498491	0,15990655	0,674528185	0,14040806
23/04/2014	0,387431221	7,61985E-05	0,04309697	0,387431221	0,04302077
24/04/2014	0,446753493	0,000316723	0,0672331	0,446753493	0,06691638
25/04/2014	0,570464696	0,003649957	0,11756681	0,570464696	0,11391685
28/04/2014	0,381340153	6,50317E-05	0,04061873	0,381340153	0,0405537
29/04/2014	0,806588073	0,116551525	0,21363704	0,806588073	0,09708552
30/04/2014	0,806588073	0,116551525	0,21363704	0,806588073	0,09708552

		EMR	B1	B2
CARTERA A	SABADELL	0,00371976	-0,00053944	-0,01360057
	REPSOL	0,000923949	-0,00124593	0,00191936
	JAZZTEL	0,004306821	0,00082451	-0,00216312
CARTERA B	POPULAR	0,002668824	0,00478291	-0,05081526
	GAS NATURAL	0,001385102	-0,0023126	-0,00916922
	TELEFÓNICA	0,000547607	-1,2147E-05	-0,00233392

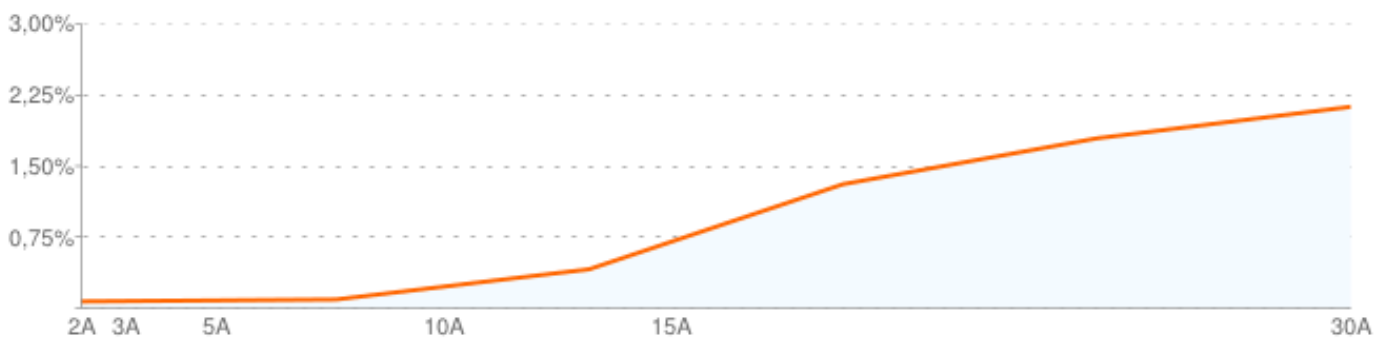
		I2	I1	I0
	Cartera A	-0,116195469	1,40477205	0,00289722
	Cartera B	-0,061644551	-0,1808931	0,00040154

ANEXO VII. Cotizaciones del Bono Alemán a 10 años.

resumen [noticias](#)

Precio	Variación	Fecha
1,31	+1,46% ▲ +0,02	29-May-14

Curva del bono alemán



DATOS COMPARATIVOS DE LA CURVA DEL BONO ALEMAN

Tipo	Último (29/05)	Anterior (28/05)	Variación	Variación %
Bono alemán 2 años	0,07%	0,00%	+0	+13,05%
Bono alemán 3 años	0,09%	0,00%	+0	+12,77%
Bono alemán 5 años	0,41%	0,00%	+0	+2,79%
Bono alemán 10 años	1,31%	0,00%	+0	+1,46%
Bono alemán 15 años	1,79%	0,00%	+0	+1,16%
Bono alemán 30 años	2,13%	0,00%	+0	+1,14%

Fuente: www.eleconomista.es