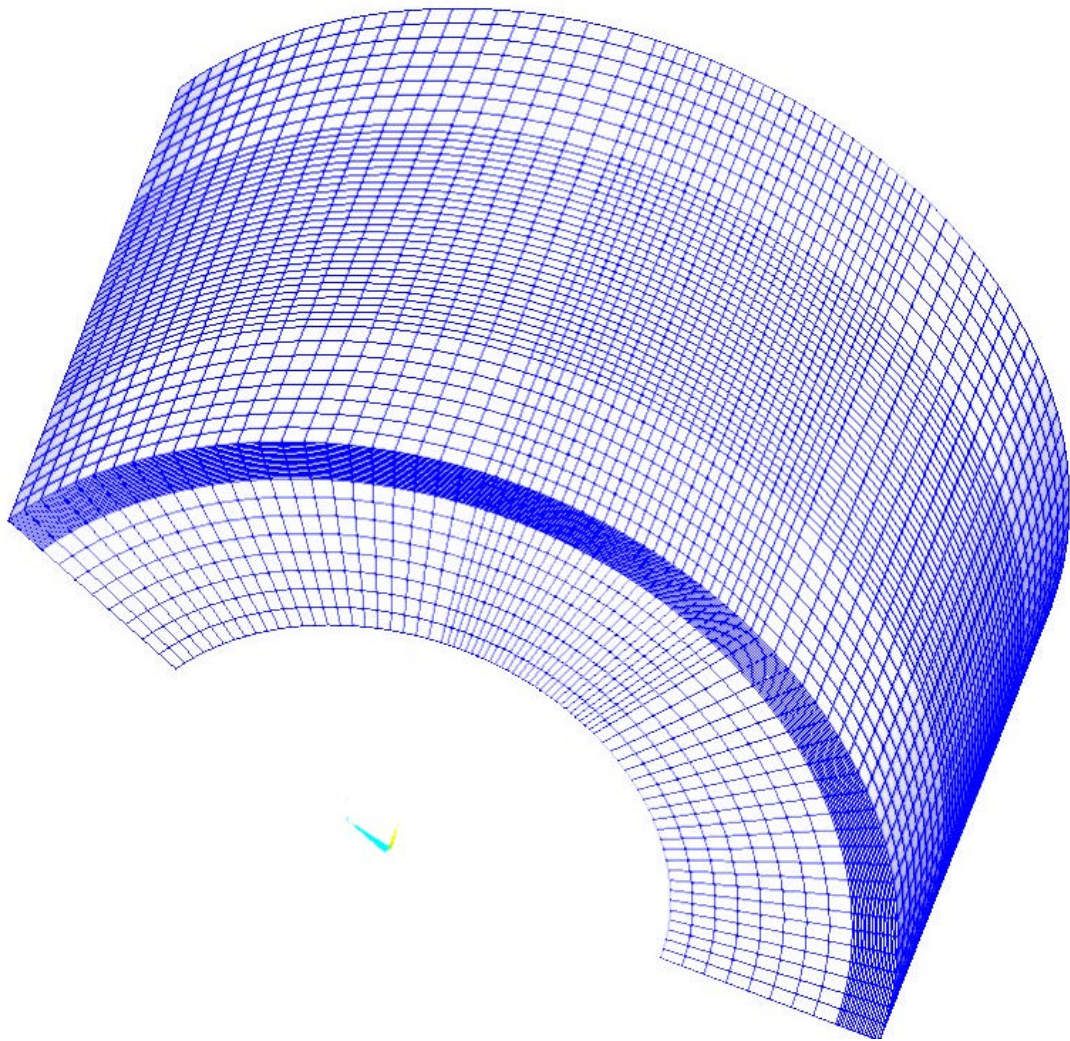


# *Simulación numérica de procesos de tratamiento térmico superficial de aceros con láser de potencia.*

*Emilio Saavedra Otero*



*Dirección:*

*Dr. D. Alberto Ramil Rego*

*Dr. D. Armando J. Yáñez Casal*



---

## **Contidos**

Limiar	5
1. Obxectivos	7
2. Introdución	11
2.1. Fontes láser	13
2.1.1. Principios básicos	13
2.1.2. Propiedades da emisión láser	20
2.1.3. Tipos de láseres	24
2.2. Interacción láser-materia	35
2.2.1. Absorción da radiación láser	35
2.2.2. Quecemento	37
2.2.3. Fusión	38
2.2.4. Plasma	38
2.3. Procesado de materiais con láser	41
2.3.1. Tratamentos superficiais: tempero, recargamento, refusión e limpeza	41
2.3.2. Marcado	44
2.3.3. Perforado	45
2.3.4. Corte	47
2.3.5. Soldadura	48
3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais	53
3.1. Transmisión da calor	55
3.1.1. Conducción	55
3.1.2. Radiación	56
3.1.3. Convección	58
3.2. Modelos analíticos do campo da temperatura	61
3.2.1. Fluxo estacionario	62
3.2.2. Fluxo dependente do tempo	65
3.3. Modelos numéricos: elementos finitos (FEM)	71
3.3.1. Descrición xeral	71
3.3.1.1. Discretización espacial	74
3.3.1.2. Criterio de converxencia	76
3.3.2. Particularización á análise térmico	77

---

3.3.3.	Discretización temporal	80
3.3.4.	Cambios de estado e de fase	82
3.4.	Transformacións metalúrxicas no sistema ferro-carbono	87
4.	Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser	93
4.1.	Modelos analíticos	95
4.1.1.	Método das imaxes	95
4.1.1.1.	Xeometría plana: placas	95
4.1.1.2.	Xeometría cilíndrica: tubos	98
4.1.1.3.	Caracterización do método das imaxes	98
4.1.2.	Aplicación do método das imaxes	112
4.1.2.1.	Feixe rectangular estacionario	112
4.1.2.2.	Modo TEM <sub>01</sub> * en movemento	114
4.1.3.	Análise dimensional	116
4.2.	Modelo de elementos finitos	123
4.2.1.	Mallado	124
4.2.2.	Xeometrías	124
4.2.3.	Discretización do feixe	125
4.2.4.	Erros introducidos coa discretización	128
4.3.	Modelo de transformacións metalúrxicas dos aceiros ao carbono	151
4.3.1.	Transformacións de fase	151
4.3.2.	Endurecemento	156
5.	Avaliación experimental	159
5.1.	Deseño dos experimentos	161
5.1.1.	Instrumentación	161
5.1.2.	Tomas de datos	164
5.1.3.	Dispositivo experimental	165
5.1.3.1.	Determinación da absortividade do aceiro	166
5.2.	Endurecemento superficial	169
5.2.1.	Xeometría Plana	170
5.2.2.	Xeometría cilíndrica	186
6.	Conclusións	201
	Epílogo	205
	Anexo	211

---

## *Limiar*

Na Historia da Humanidade hai dous feitos que, ao meu entender, son os principais alicerces do nivel científico-tecnolóxico que hoxe en día dispomos. O primeiro deles hai que situalo na época clásica (s. VI a.C.), e sería a busca por parte da escola pitagórica dunha ferramenta para explorar o universo. Esta indagación foi o xermolo dunha incipiente linguaxe matemática xunto á súa aplicación ás observacións cotiás. O segundo, pero non por isto menos importante, a Declaración dos Dereitos do Home e do Cidadán (París, 1789) que recoñecía na educación un instrumento de loita contra o asoballamento das persoas. A sabia conxugación entre o acceso universal ao ensino e o uso dunha metodoloxía científica rigorosa sustenta, en grande medida, o actual progreso tecnolóxico.

No meu caso a oportunidade de iniciar e profundizar na aprendizaxe débollela aos meus pais, primeiramente por me inculcar a importancia do estudo, mais tamén por me dar a oportunidade de facer unha carreira, algo que eu ben sei custoulles bastantes sacrificios e privacións. É por isto que esta Tese está dedicada, cun profundo agarimo, aos meus pais, D<sup>a</sup>. Carmen Otero Allegue e D. Emilio Saavedra Losada.

Non quería acabar esta presentación sen manifestar que este traballo de investigación non foi unha labor unipersoal, pola contra, foi posible pola achega desinteresada dos meus compañeiros. Desexo expresar o meu agradecemento a D. Alberto Ramil Rego polas súas intelixentes e oportunas correccións, así como as contribucións de: D. Armando J. Yáñez Casal, D. J. Carlos Álvarez Feal, Dna. Josefa Sanesteban Raposo, D. José Manuel Amado Paz, Dna. María José Tobar Vidal, Dna. Ana Jesús López Díaz, D. Ginés Nicolás Costa e D. Félix Ledo Pernas; tamén cómpreme recoñecer a labor de D. José Luís Ocaña Moreno na fundación deste grupo de investigación. A disponibilidad dos superordenadores HPC 4500 e HPC 320, así como da licencia do programa ANSYS<sup>TM</sup>, foi por conta do Centro de Supercomputación de Galicia (CESGA), que ten o meu recoñecemento e gratitude. Por último, quedo en débeda coa miña dona Begoña Simal González polos seus alentos, consellos e correccións literarias.



# *Capítulo 1*

## *Objetivos*





---

## *1. Obxectivos*

A alta potencia do láser de CO<sub>2</sub> convérteo nunha ferramenta idónea para o tratamento de algúns materiais na enxeñaría, o tempero do aceiro é un bo exemplo. Ao quedar sobre a probeta moi localizada a rexión iluminada, os resultados da distorsión térmica son menores que cos métodos convencionais. Asemade, a axeitada calidade das propiedades metalúrxicas dependerá en grande medida dunha boa relación entre os parámetros do tratamento: potencia, anchura do “spot” e velocidade de varrido.

A combinación entre os modelos matemáticos e as técnicas experimentais no procesamento con láser conforman unha ferramenta coa que é posible minimizar custes e predecir a natureza dos sistemas tratados.

Mesmamente, a simulación numérica permite estimar cuantitativamente a composición das fases, a dureza e a profundidade de penetración do tratamento. Na bibliografía aparecen moitos modelos matemáticos desenvolvidos para calcular o campo de temperaturas, no procesado con láser, baixo algunhas condicións específicas tal como xeometrías semiinfinitas, propiedades térmicas constantes, etc... Co emprego dos elementos finitos (FEM) preténdese salvar estas limitacións.

O propósito deste traballo é o de desenvolver un modelo baseado en solucións tanto analíticas como numéricas que nós permita predecir o comportamento dun material cando este é sometido a un tratamento de tempero cun láser de potencia.

Esta Tese quedou dividida en cinco partes: unha introducción, un estudio teórico do tratamento térmico de materiais, o desenvolvemento dun modelo matemático propio, a descrición e análise de dúas experiencias de tratamento dun aceiro e a extracción dunhas conclusións.

- Principiaremos cunha introducción dos principios físicos nos que se basea o funcionamento dos láseres para, de seguido, estudar como interacciona a radiación coa materia. Continuando coa descrición dos distintos tipos de procesados que se poden efectuar cun láser.

- A intención do terceiro capítulo será a de cimentar as bases teóricas do tratamento térmico de materiais. Así daremos conta das formas que ten a calor de se transmitir e das solucións analíticas da ecuación da calor para catro situacións diferenciadas: fluxo estacionario e transitorio con e sen velocidade relativa fonte-material. Aparecerá tamén unha introducción aos elementos finitos e a súa particularización na análise térmica. Remataremos cunha introducción sobre as transformacións metalúrxicas.
- No cuarto apartado describirase un modelo propio de tratamento térmico con láser, que se dividiu en tres partes: dúas solucións analíticas (método das imaxes e análise adimensional), un modelo de elementos finitos e un proceso numérico para o cálculo das transformacións metalúrxicas.
- No quinto parágrafo describirase o procedemento experimental seguido para levar a cabo o tratamento con láser do tempero dun aceiro hipoeutectoide, xunto coa exposición e análise dos distintos resultados.
- Remataremos este traballo enumerando unhas conclusións.

# ***Capítulo 2***

## ***Introducción***

### *2.1. Fuentes láser*

#### *2.1.1. Principios básicos*

#### *2.1.2. Propiedades da emisión láser*

#### *2.1.3. Tipos de láseres*

### *2.2. Interacción láser-materia*

#### *2.2.1. Absorción da radiación láser*

#### *2.2.2. Quecemento*

#### *2.2.3. Fusión*

#### *2.2.4. Plasma*

### *2.3. Procesado de materiais con láser*

#### *2.3.1. Tratamentos superficiais: tempero, recargamento, refusión e limpeza*

#### *2.3.2. Marcado*

#### *2.3.3. Perforado*

#### *2.3.4. Corte*

#### *2.3.5. Soldadura*

*Denantes de meterse a fondo no tema principal desta Tese consideramos moi oportuno facer unha pequena presentación sobre os láseres e as súas aplicacións. En concreto búscase introducir ao lector nos principios básicos da emisión estimulada de radiación así como nas súas propiedades máis salientables (monocromaticidade, coherencia espacial e temporal,...). Mesmamente, por mor de concretar, estableceremos un criterio de clasificación dos tipos de láseres e describiremos algunhas das súas características e funcionamento.*

*Na segunda parte deste capítulo trataremos a interacción láser-materia. Partindo do estudio de como é absorbida a radiación na superficie dun material e adoitando como vector descritivo o paulatino aumento da potencia depositada examinaremos os mecanismos físicos que explican o quecemento dunha substancia, a fusión e a formación de plasma.*

*Para rematar este capítulo faremos unha lene descrición das principais aplicacións industriais dos láseres de potencia: tratamentos superficiais, marcado, perforado, corte e soldadura.*

---

## 2.1 Fontes Láser

### 2.1.1 Principios Básicos

A luz, asemade das súas características ondulatorias,  $c = \lambda \nu$  onde  $\lambda$  representan a lonxitude de onda e  $\nu$  a frecuencia, ten o comportamento dunha partícula. Cada un destes corpúsculos, fotóns, transporta unha enerxía igual á constante de Planck ( $h = 6.6 \times 10^{-34}$  J s) multiplicada pola frecuencia da onda,  $E = h\nu$ . Namentres que nalgúns experimentos, por exemplo de interferencia, ponse de manifesto a súa natureza ondulatoria, pola contra noutros, como a absorción da luz por sistemas atómicos, evidénciase a súa esencia corpuscular.

#### *Emisión espontánea e estimulada*

A radiación electromagnética ao interaccionar cos átomos pode aumentar ou diminuír a súa enerxía en cantidade proporcional á frecuencia incidente, distinguíndose tres maneiras na que esta variación se produce: absorción, fluorescencia e emisión estimulada.

No proceso de absorción a onda electromagnética é captada por un átomo, molécula ou partícula incrementando o seu nivel enerxético nunha cantidade,  $\Delta E = h\nu$ . A fluorescencia consiste nunha perda espontánea de enerxía dalgunha destas entidades, que se manifesta na emisión dun cuanto de frecuencia  $\nu = \Delta E/h$ . Por último, cabe a posibilidade de que a interacción entre un fotón de frecuencia  $\nu$  e un átomo provoque que este último descenda de nivel emitindo outro fotón da mesma frecuencia que a do incidente, fenómeno que se coñece como emisión estimulada (*Ready, 1997*).

As regras que rexen estas transformacións son proporcionais ao número de átomos ou moléculas presentes no nivel en consideración (ecuacións logarítmicas), e están cuantificadas polos coeficientes de Einstein. Se representamos con  $u(\nu)$  a densidade de enerxía por unidade de volume no intervalo de frecuencias que vai dende  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ , o número de absorcións por unidade de volume e de tempo entre dous niveis  $E_i$  e  $E_j$ , con  $E_j > E_i$  é (*Thyagarajan, 1981*), (*Davis, 1996*):

$$\frac{dN_{ij}}{dt} = -N_i B_{ij} u(\mathbf{n}) \quad [2.1]$$

Onde  $N_i$  é o número de partículas por unidade de volume no nivel  $E_i$ . O número de emisións estimuladas e fluorescentes entre os niveis  $E_j$  e  $E_i$  será:

$$\frac{dN_{ji}}{dt} = -N_j B_{ji} u(\mathbf{n}) - N_j A_{ji} \quad [2.2]$$

As cantidades  $B_{ij}$ ,  $A_{ji}$  e  $B_{ji}$  son coñecidas como coeficientes de Einstein, tendo como dimensións  $M^{-1}L$ ,  $T^{-1}$  e  $M^{-1}L$ , respectivamente. Nun hipotético equilibrio no transvase entre os dous niveis cumpriríase,

$$\begin{aligned} \frac{dN_{ij}}{dt} &= \frac{dN_{ji}}{dt} \\ N_i B_{ij} u(\mathbf{n}) &= N_j A_{ji} + N_j B_{ji} u(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad [2.3]$$

Despexando a densidade de enerxía

$$u(\mathbf{n}) = \frac{A_{ji}}{\frac{N_i}{N_j} B_{ij} - B_{ji}} \quad [2.4]$$

Se consideramos que os átomos, moléculas ou partículas se comportan como un gas de partículas con estados non dexenerados e que seguen a estatística de Maxwell-Boltzman,

$$\begin{aligned} N_i &\propto \exp\left\{-\frac{E_i}{k_B T}\right\} \\ \frac{N_i}{N_j} &= \exp\left\{-\frac{E_i - E_j}{k_B T}\right\} \end{aligned} \quad [2.5]$$

Incorporando a ecuación [2.5] na [2.4] obtemos unha nova expresión para a densidade de enerxía:

$$u(\mathbf{n}) = \frac{A_{ji}}{B_{ij} \exp\left(\frac{h\mathbf{n}}{k_B T}\right) - B_{ji}} \quad [2.6]$$

Por último facendo as transformacións oportunas e comparando coa lei de Planck de radiación do corpo negro,

$$\left. \begin{aligned} u(\mathbf{n}) &= \frac{u(\mathbf{w})d\mathbf{w}}{d\mathbf{n}} = \frac{8\rho h\mathbf{n}^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\mathbf{n}}{k_B T}\right) - 1} \\ u(\mathbf{n}) &= \frac{A_{ji}/B_{ji}}{\frac{B_{ij}}{B_{ji}} \exp\left(\frac{h\mathbf{n}}{k_B T}\right) - 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B_{ij} = B_{ji} \\ \frac{A_{ji}}{B_{ji}} = \frac{8\rho h\mathbf{n}^3}{c^3} \end{cases} \quad [2.7]$$

O primeiro destes resultados establece que a probabilidade de que un átomo, molécula ou partícula nun estado inferior, de entre un par de estados de enerxía, absorba radiación e salte ao estado superior é exactamente igual á probabilidade de que un átomo, molécula ou partícula no estado superior sexa estimulado a irradiar enerxía e descenda ao estado inferior. O segundo dos resultados da unha relación fundamental entre a emisión espontánea de radiación e a estimulada (*Marshall, 1972*).

### *Medio activo*

Aínda que o esquema de dous niveis enerxéticos é moi sinxelo, ten aplicacións limitadas a contados casos de láseres (excímeros, KrF\*...), empregándose máis comunmente sistemas de tres ou catro estados.

O funcionamento dun láser de tres niveis (por exemplo o de rubí) con  $E_1 < E_2 < E_3$  consta de tres etapas:

## 2. Introducción

---

1. Bombeo de átomos, moléculas ou partículas dende o estado fundamental ( $E_1$ ) ata o nivel máis excitado ( $E_3$ ).
2. Transición non radioactiva ata o nivel  $E_2$ . A perda de enerxía ( $E_3 - E_2$ ) manifestarase como unha translación, vibración ou rotación, ou de se tratar cun sólido, traducirase nun incremento da a enerxía de rede (*Thyagarajan, 1981*).
3. Por último producirase a transición entre o segundo e o primeiro nivel, emitindo un fotón de frecuencia  $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$

O cambio de poboación que experimentan os tres niveis é:

$$\begin{aligned}\frac{dN_3}{dt} &= w_p N_1 - w_p N_3 - A_{32} N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} &= w_l N_1 - w_l N_2 + A_{32} N_3 - A_{21} N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} &= w_p N_3 - w_p N_1 + w_l N_2 - w_l N_1 + A_{21} N_2\end{aligned}\quad [2.8]$$

onde o factor  $w_p$  é proporcional ao coeficiente de Einstein  $B_{13}$  e á densidade de enerxía bombeada. Da mesma maneira,  $w_l$  é proporcional a  $B_{12}$  e á densidade de enerxía necesaria para o bombeo entre os niveis 1 e 2. Nunha situación de equilibrio estacionario,

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0 \quad [2.9]$$

Da avaliación da diferenza  $\frac{N_2 - N_1}{N}$ , sendo  $N = N_1 + N_2 + N_3$ , dedúcese que para acadar unha inversión de poboación, é decer,  $N_2 - N_1 > 0$ , é condición necesaria que  $A_{32} > A_{21}$ . Asemade o límite para se dar esta situación, queda establecido por:

$$w_p = \frac{A_{32} A_{21}}{A_{32} - A_{21}} \quad [2.10]$$



Este esquema presenta o inconveniente de que a acumulación de átomos, moléculas ou partículas no segundo nivel, fenómeno ó que se denomina inversión de poboación, e o conseguinte decaemento vese, obstaculizada pola alta ocupación do estado fundamental, precisándose un bombeo intenso dende este ao nivel alto (*Ready, 1997*).

A diferencia co anterior, no láser de catro niveis, a emisión do fotón prodúcese na transición entre as enerxías intermedias, evitando así a acumulación de átomos, moléculas ou partículas no nivel tres, onde se produce a inversión de poboación. Con este sistema facilítase a migración entre o estado fundamental e o máis excitado. Neste esquema de funcionamento están os láseres máis representativos: o de dióxido de carbono, o helio-neon e o Nd:YAG. O seu funcionamento consta das seguintes catro etapas:

1. Bombeo de átomos, moléculas ou partículas dende o estado fundamental ( $E_1$ ) ata o nivel máis excitado ( $E_4$ ).
2. Decaemento non radioactivo ata o nivel  $E_3$ . A perda de enerxía ( $E_4 - E_3$ ) manifestarase como unha translación, vibración ou rotación, ou de se tratar dun sólido, incrementando a enerxía de rede (*Thyagarajan, 1981*).
3. Transición entre o terceiro e o segundo nivel emitindo un fotón de frecuencia  
$$\mathbf{n} = \frac{E_3 - E_2}{h}$$
4. Decaemento non radioactivo entre o nivel  $E_2$  e o fundamental. Mesmamente que no apartado dous, a perda de enerxía ( $E_2 - E_1$ ) manifestarase como unha translación, vibración ou rotación, ou de se tratar dun sólido, incrementando a enerxía de rede (*Thyagarajan, 1981*).

O cambio de poboación nun sistema de catro niveis virá dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_4}{dt} &= w_p N_1 - w_p N_4 - A_{43} N_4 - A_{42} N_4 - A_{41} N_4 \\
 \frac{dN_3}{dt} &= w_l N_2 - w_l N_3 + A_{43} N_4 - A_{32} N_3 - A_{31} N_3 \\
 \frac{dN_2}{dt} &= w_l N_3 - w_l N_2 + A_{42} N_4 + A_{32} N_3 - A_{21} N_2 \\
 \frac{dN_1}{dt} &= w_p N_4 - w_p N_1 + A_{41} N_4 + A_{31} N_3 + A_{21} N_2
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Comparando a poboación dos estados tres e dous, asumindo como condicións  $A_{43} \gg A_{42}$ ,  $A_{43} \gg A_{41}$ ,  $A_{21} \gg A_{32}$  e  $w_l \approx 0$ , Thyagarajan chega á seguinte expresión:

$$\frac{N_3 - N_2}{N} \approx \frac{w_p / A_{32}}{1 + w_p / A_{32}}
 \tag{2.12}$$

A conclusión é que a diferenza  $N_3 - N_2$  é sempre positiva, polo que é máis doado conseguir a inversión da poboación que no caso de tres niveis, algo que se comprobou experimentalmente (Thyagarajan, 1981).

### Bombeo

Para acadar a necesaria inversión de poboación cómpre o uso dun mecanismo que promociione os átomos, moléculas ou partículas dende o estado fundamental a un excitado. Os distintos métodos de bombeo empregados (óptico, excitación por colisión de electróns, transferencia de enerxía por resonancia...), pódense clasificar en dous tipos: directo e por transferencia (Silfvast, 1996).

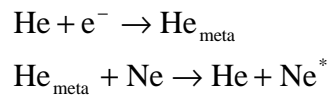
Excitación por bombeo directo: consistente no uso dun fluxo excitante que eleva os átomos, moléculas ou partículas directamente a un nivel enerxético superior. Dous exemplos de seu serían:

- Bombeo óptico, empregado nos láseres de rubí e Nd:YAG, implica o emprego dunha fonte auxiliar de luz que é absorbida polo medio activo. Dependendo da estrutura da fonte o láser será pulsado ou continuo.

- Uso dun chorro de electróns, que ao ser inxectados e bater, excita o medio activo ata o nivel desexado, precisándose correspondencia entre o espectro de velocidades dos electróns incidentes e a sección eficaz dos albos.

As desvantaxes máis salientables destes métodos son por unha banda a necesidade dunha fonte apropiada que aporte exactamente a diferenza de enerxía entre os niveis implicados, e pola outra a posibilidade de que a transición ocorra en niveis que non son de interese para a amplificación (*Silfvast, 1996*).

Excitación por bombeo indirecto ou por transferencia: en esencia consiste na adición de compoñentes neutros para a emisión láser, que por transferencia enerxética permiten acadar a necesaria inversión de poboación no medio activo. Así no caso dos láseres de He:Ne, mediante un fluxo electrónico unha das compoñentes, o He, elévase ata o primeiro estado excitado. Por colisión electrónica transferirase a enerxía entre niveis parellos do medio activo situándose este nun estado resoante. (*Marshall, 1972*) (*Silfvast, 1996*).



Entre as súas principais vantaxes está o emprego dun interludio,  $\text{He}_{\text{meta}}$ , entre o estado fundamental e o excitado que evita a saturación e produce unha selección efectiva, ao aumentar a probabilidade de bombeo. No seu detrimento cabe dicir que é posible acadar un valor de saturación dependente da densidade da especie neutra, no que o fluxo electrónico da mesma maneira que excita tamén decae.

### *Resoador óptico*

Por último, ao lugar xeométrico onde está confinada a onda que vai experimentar a súa amplificación referirémonos como cavidade resoante ou resoador (*Bachs, 1988*). Polo xeral, este está formado por un medio activo limitado por espellos enfrontados, co seu eixo perpendicular á dirección de propagación da radiación. Para extraer a luz un deles será semitransparente. A xeometría da cavidade, máis longa nunha dirección que noutra,

permite compensar as perdas por atenuación coa amplificación da onda no medio activo. Para a cavidade cúmprese a ecuación:

$$i \frac{l}{2} = hD \quad [2.13]$$

onde  $i$  representa un enteiro grande ( $\approx 10^5$ ),  $D$  é a distancia entre espellos e  $h$  o índice de refracción. O resoador ten frecuencias propias de resonancia que interaccionan coas frecuencias do medio activo (Davis, 1996). As combinacións entre  $l$  e  $h$  que fan que se produza unha fluorescencia denomínaselles modos (Ready, 1997).

### 2.1.2 Propiedades da Emisión Láser

Hai un conxunto de propiedades que caracterizan a utilidade dos láseres e os distinguen das fontes de radiación convencionais. Entre as máis salientables están a monocromaticidade, a direccionalidade, o brillo, a coherencia e a polarización.

#### Monocromaticidade

A limitada anchura espectral da radiación láser débese ao casamento entre a curva de ganancia do material láser e as resonancias da cavidade (Davis, 1996). Así cando, debido a un salto cuántico, a radiación electromagnética é emitida cunha intensidade, por exemplo para unha distribución gaussiana

$$I_0 \propto \exp \left\{ - \ln 2 \left[ 2 \frac{\mathbf{n} - \mathbf{n}_0}{\Delta \mathbf{n}} \right]^2 \right\} \quad [2.14]$$

Onde  $\Delta \mathbf{n}$  representa a anchura das liñas espectrais debida ao corremento Doppler sendo proporcional á temperatura e á masa destas partículas

$$\Delta \mathbf{n} = 2\mathbf{n}_0 \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{Mc^2}} \quad [2.15]$$

Ao producírense a amplificación polo medio activo conséguese que a anchura espectral diminúa, despois dunha interacción, a distribución [Ec. 1.14] transformárase na [Ec. 1.16], facendo a radiación máis monocromática,  $\Delta n' = \Delta n / \sqrt{2}$  (Davis, 1996).

$$I = I_0^2 \propto \exp \left\{ -\ln 2 \left[ 2 \frac{n - n_0}{\Delta n / \sqrt{2}} \right]^2 \right\} \quad [2.16]$$

Por outro lado hai que ter en conta a contribución de frecuencias que fan os modos propios ( $n_i$ ) de resonancia da cavidade láser. De [2.13],

$$n_i = i \frac{c}{2hD} \quad [2.17]$$

Os métodos para acadar unha emisión monocromática pódese dividir en tres grupos xenéricos. O primeiro actúa sobre a curva de ganancia, o segundo selecciona os modos resoantes, e o último filtra a radiación resultante.

- Actuación sobre a curva de ganancia. Co uso de gases a alta presión como medios activos, auméntase o número de interaccións fotón-partícula, conseguindo unha liña espectral moi estreita.
- Selección dun modo resoante. Empregando unha cavidade resoante o suficientemente pequena, esta conterà unha única resonancia. Desta maneira no casamento coa curva de ganancia producirase unha única frecuencia. Este tipo de cavidade limita seriamente a potencia extraída, polo que se emprega como semente para outras cavidades máis longas (distribución en serie).
- Filtro das lonxitudes de onda. Mediante a colocación dun elemento óptico (etalón Fabry-Perot, interferómetro de Fox-Smith, película absorbente) que permita seleccionar a frecuencia desexada variando as súas propiedades físicas ou xeométricas.

## 2. Introducción

---

### *Direccionalidade*

Quizais a calidade máis notable da radiación emitida por un láser sexa a súa alta colimación, o que permite focalizala facilmente nunha área moi pequena (Ready, 1997). Esta propiedade é froito da rigorosa selección que se produce dentro da cavidade resoante ao se atenuaren todos os fotóns que non teñan a súa dirección de propagación aliñada co eixo dos espellos.

Como queira que a distribución do campo dentro do resoador non está formada por ondas planas, cando se propaga vese afectado pola difracción (Davis, 1996) (Silfvast, 1996) (Thyagarajan, 1981). A resultas disto aparecerá unha pequena diverxencia,  $J$ , dependente da estrutura espacial do feixe e das súas propiedades ópticas (lonxitude de onda e mínima anchura do “spot”,  $w_0 = E_{máx}/e$ ) (Ready, 2001). Algúns autores interpretan este ángulo  $\vartheta$  como unha medida da calidade óptica do láser (Ready, 2001) (Silfvast, 1996).

Unha táboa bastante completa de definicións de ángulos de diverxencia está representada no texto de Ready e Farson onde se pode apreciar, asemade das dependencias anteriormente citadas, tamén o confuso da súa definición ao considerar unha superficie, que ben podería ter forma irregular, e unha cantidade de enerxía depositada nela (Ready, 2001). Así, por exemplo:

<i>Expresión</i>	<i>Descrición</i>
$J = \frac{2I}{D}$	Diverxencia para un modo TEM <sub>00</sub> con fronte de onda plana que incide sobre unha área cadrada de lado D, e que contén o 81 % da enerxía total.
$J = 2.44 \frac{I}{D}$	Diverxencia para un modo TEM <sub>00</sub> con fronte de onda plana que incide sobre unha área circular de diámetro D, e que contén o 84.5 % da enerxía total.
$J = \frac{2I}{pw_0}$	Diverxencia do TEM <sub>00</sub> no campo afastado sendo $w_0$ o mínimo tamaño do “spot”, e contendo o 86.5 % da enerxía.

### *Brillo*

A alta radianza é o atributo que posibilita aplicacións do láser, por exemplo ao procesado de materiais. A definición desta propiedade varía segundo a aplicación.

Os láseres ao emitiren no interior dun pequeno ángulo sólido (direccionalidade) amosan un brillo moi alto, pero este pode verse afectado pola presenza de varios modos electromagnéticos. Polo xeral ao aumentar a potencia incrementarase o número de modos, co que ao se compensar as dúas propiedades, o brillo permanece constante. Asemade, o brillo non se pode aumentar por medios ópticos (*Ready, 1997*).

### *Coherencia*

A interacción entre o campo electromagnético de dúas ondas explícase mediante os fenómenos físicos da difracción e a interferencia (*Ready, 1997*) (*Ready, 2001*). A propiedade da coherencia dará a medida do grao de casamento entre unha ou máis ondas relacionando as fases de dous puntos.

Esta propiedade, relativa ao láser clasifícase en dúas categorías: coherencia temporal ou lonxitudinal, e coherencia espacial ou transversal (*Davis, 1996*) (*Ready, 2001*) (*Silfvast, 1996*).

- i. A lonxitude de coherencia temporal ( $L_c$ ) implica unha relación de fase entre as amplitudes do campo radiante en dous puntos que se sitúan na dirección de propagación da onda. Defínese como:

$$L_c = c T_c = \frac{c}{\Delta n} \quad [2.18]$$

$L_c$  representa a distancia máxima que a luz se propaga sen interferencias entre modos. Obsérvase que canto maior sexa esta lonxitude máis monocromático será o feixe. Asemade,  $T_c$  caracteriza o período de tempo que a radiación é coherente. Ready destaca que a presenza de varios modos lonxitudinais, reduce a lonxitude de coherencia  $L_c$  (*Ready, 1997*).

- ii. O significado físico da coherencia espacial ( $L_w$ ), é o do a máxima distancia, medida no plano normal ao vector de onda, dentro da cal o feixe non interfere consigo mesmo. Con este enunciado da propiedade estase relacionando a coherencia espacial coa diverxencia do feixe.

$$L_w = 2.44 f \frac{\lambda}{D} = f J_r \quad [2.19.a]$$

$$L_w = 2 f \frac{\lambda}{D} = f J_c \quad [2.19.b]$$

A primeira das expresións [2.19.a] amosa a lonxitude de coherencia espacial  $L_w$  para o caso dunha sección transversal rectangular e [2.19.b] para unha circular.  $f$  representa a distancia entre a fonte e o plano de observación e  $D$  a anchura en [2.19.a] ou o diámetro, no caso de [2.19.b], desa sección.

### *Polarización*

O campo electromagnético das ondas vibra transversalmente á dirección de propagación. Un feixe luminoso estará polarizado cando teña orientado o vector de campo eléctrico global.

A polarización afecta ao casamento entre a enerxía do láser e o material iluminado. O coeficiente de reflexión para un láser polarizado depende da orientación do vector de polarización relativo á superficie do metal. Así, o axuste óptimo entre a luz e a superficie metálica ocorre cando o vector de polarización da radiación incidente é perpendicular á superficie. Isto pode dar lugar, no caso dun corte, á inclinación das superficies segadas cara o valor da máxima polarización (*Duley, 1983*).

### **2.1.3 Tipos de Láseres**

A bibliografía consultada manifesta unha ampla gama de criterios para a clasificación dos láseres. Por exemplo, Silfvast distíngueos segundo a densidade do medio activo: baixa densidade para os gases, e alta densidade para o estado sólido, coloides, e semicondutores (*Silfvast, 1996*). Dorronsoro establece as lindes de separación cos



rangos de lonxitude de onda (*Dorronsoro, 1995*). Ready e Farson centrándose na serie dos láseres comerciais separan entre continuos e pulsados (Ready, 2001). Davis, sen un paradigma aparente, límitase a describir un conxunto: láseres de gas, moleculares, sintonizables e de semicondutores (*Davis, 1996*). Por último, algúns dos autores xa mencionados fan unha catalogación en función do medio activo (*Dorronsoro, 1995*) (*Ready, 1997*) (*Ready, 2001*).

### *i. Láseres de gases*

A característica que define estes resoadores é o uso dun gas, ou unha mestura deles, como medio activo, asemade teñen en común unha baixa absorción de radiación. Nestas circunstancias o bombeo óptico é moi ineficaz, sendo excepción o cesio e o láseres moleculares. Outras calidades son:

- a diferenza dos láseres de estado sólido, o medio activo pode acadar un volume grande,
- o medio é homoxéneo,
- cabe a posibilidade de arrefriar o gas.

En función do medio activo pode establecerse unha subclasificación: láseres de gases neutros, de gases ionizados, moleculares, excímeros e de vapores metálicos.

#### *1. Láseres de gases neutros*

Os medios activos están compostos por mesturas de gases neutros que emiten radiación debido ás transicións electrónicas entre niveis enerxéticos. Por exemplo, no caso do He:Ne, unha descarga eleva os átomos de helio ata un estado excitado, transferindo por colisión a súa enerxía ao neon. As propiedades da radiación producida son:

## 2. Introducción

---

He:Ne	
Lonxitudes de onda, $\lambda$ :	632.8 nm
Potencia:	0.5 – 35 mW
Modo:	95% TEM <sub>00</sub>
Diámetro:	0.5 – 1.5 mm
Diverxencia:	1 – 2 mrad
Aplicacións:	Lectores, alineadores, etc...

### 2. Láseres de gases ionizados

Teñen por gas amplificador a un plasma que é atravesado por unha corrente de descarga. Os materiais soportes do medio activo deben ser resistentes ás altas temperaturas. Algúns representantes son: Ar, Kr, He:Cd

Ar	
Lonxitudes de onda, $\lambda$ :	514.5, 488.5, 501.7 nm
Potencia:	7 – 25 W
Modo:	TEM <sub>00</sub>
Diámetro:	0.5 – 1.5 mm
Diverxencia:	0.5 – 2 mrad

### 3. Láseres moleculares

A diferenza dos anteriores que empregan transicións electrónicas para o proceso de amplificación, neste tipo de láseres a radiación emana do decaemento dos estados de vibración e/ou rotación ao fundamental (sendo posible ter simultaneamente as tres emisións). Tomaremos como paradigma ao láser de dióxido de carbono (2-5% CO<sub>2</sub>, 10-60% N<sub>2</sub> e 40-90% He). Facendo uso dunha descarga eléctrica, DC ou AC a alta frecuencia, elévase ata un estado excitado ao nitróxeno, que por medio de transferencia indirecta comunica a súa enerxía ao dióxido de carbono, que admite tres estados excitados vibracionais. Outros exemplos son: láser de nitróxeno, de monóxido de carbono, de óxido nitroso e nítrico, auga e/ou cianuro de hidróxeno.

CO <sub>2</sub> (continuo)	
Lonxitudes de onda, $\lambda$ :	10.6, 9.6 nm
Potencia:	3– 3000 W
Modo:	TEM <sub>00</sub> , TEM <sub>01</sub> *
Diámetro:	6 – 20 mm
Diverxencia:	1 – 3 mrad
Aplicacións:	Corte, soldadura, etc ...

#### 4. Láseres de excímeros

Un excímero (abreviatura de dímero excitado) é unha molécula formada por un átomo dun gas nobre (Ar, Kr e Xe) e por un halóxeno (F e Cl). O proceso radioactivo para o cripton está esquematizado na ecuación,



Empréganse dous métodos de excitación, que dan lugar a canda súa arquitectura. Por descarga eléctrica, quen de producir ata 100 W, e por feixe de electróns, que produce pulsos moi enerxéticos, razón pola que é usado, por exemplo, na investigación da fusión. Nas dúas situacións a corrente de carga debe ser moi elevada e transferida a alta velocidade ( $10^{12} \text{ As}^{-1}$ ), producíndose unha ganancia tamén elevada. Algúns exemplos serían: KrF, ArF, XeCl e XeF.

KrF*	
Lonxitudes de onda, $\lambda$ :	249 nm
Potencia:	150 W
Modo:	multimodo
Diámetro:	10 – 30 mm
Diverxencia:	1 – 3 mrad
Aplicacións:	Medicina, fotolitografía, etc...

### 5. Láseres de vapor metálico

Trátase de láseres iónicos para os que a transición láser ocorre entre estados iónicos de elementos metálicos ou semiconductores. Para o proceso de excitación empréganse colisións de helio ou neon. Son exemplos os vapores de: cobre, ouro, cadmio, selenio, telurio, iodo, argon, cinc, chumbo, estaño, mercurio e prata

$\text{Cu}_v$	
Lonxitudes de onda, $\lambda$ :	511, 578 nm
Potencia:	20 – 100 W
Modo:	$\text{TEM}_{00}$
Diámetro:	20 – 25 mm
Diverxencia:	4 – 8 mrad
Aplicacións:	Procesado de materiais

### ii Láseres de estado sólido

A calidade que permite clasificar un láser neste apartado é a presentación do medio activo en forma de sólido transparente ou translúcido. A meirande parte deles radian ao se producir un decaemento entre estados electrónicos, mais existen excepcións, como o láser de alexandrita ( $\text{Cr}^{3+}:\text{BeAl}_2\text{O}_4$ ) con emisións debido á transición entre un estado vibracional e o fundamental. O método de bombeo é sempre óptico con lámpadas de xenon ou cripton, ou facendo uso doutros resoadores. Unha característica relevante que condiciona o deseño tecnolóxico e a conductividade térmica do sólido. Tamén é común a todos os amplificadores a emisión de un ou varios modos transversais electromagnéticos. Dous dos máis representativos, por causas dispares, son o láser de rubí e o neodimio-yag.

#### 1. Rubí

Foi o primeiro láser. O seu medio activo é un cristal de óxido de aluminio dopado nun 0.05% con cromo ( $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Emite por medio de transicións electrónicas nun sistema de tres niveis. O método de bombeo é cunha lámpada “flash” que emite lonxitudes de onda de 694.3 nm.

## 2. Nd:YAG

O medio activo está formado por un granate de itrio dopado con neodimio ( $\text{Nd:Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ). Entre as súas características máis salientables están: a estabilidade, a isotropía, unha alta conductividade térmica e asemade pódese puír acadando óptimas propiedades ópticas. O proceso de amplificación significa como un láser de catro niveis. Os métodos de bombeo empregados condicionan o modo de radiación, así, unha iluminación con “flash” de Xe ou Kr emite en forma de pulso, namentres que para obter un modo continuo usase un arco dos mesmos elementos. A lonxitude de onda é próxima a 1064 nm. A alta conductividade térmica do cristal permite a disipación da enerxía que non procede do proceso de emisión estimulada, en forma de fonóns.

Unha das calidades deste tipo de láser é que o feixe producido pode conducirse a través dunha fibra óptica. De aí que o campo de aplicacións destas fontes sexa moi amplo dentro do procesado de materiais, aplicacións científicas e/ou médicas.

## 3. Outros láseres de estado sólido

Hai un bo número de medios activos semellantes na súa composición ao neodimio-yag. Mencionaremos algúns deles e as súas características diferenciadoras.

- Neodimio-vidro. É unha excepción dentro dos láseres de estado sólido, xa que ten a vantaxe de poder fabricalo na forma, tamaño e calidade óptica que se precise.
- Nd:YLF ( $\text{Nd:YLiF}_4$ ). Trátase dun cristal de tetrafluoruro de litio e itrio dopado con neodimio.
- Alexandrita. ( $\text{Cr}^{3+}:\text{BeAl}_2\text{O}_4$ ). Por outras razóns tamén é unha excepción neste grupo. Como xa se mencionou emite radiación pola transición entre un estado vibracional e o fundamental e presenta lonxitudes de onda entre 700 e 820 nm.
- Zafiro dopado con titanio ( $\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$ ). Emite nun rango moi amplo, entre 660 e 1880 nm.

## 2. Introducción

---

A lista esténdese cunha variedade ampla de cristais, algún deles dopados con terras raras: Cr:LiSAF (Cr:LiSrAlF), Cr:LiCAF (Cr:LiCaAlF), Nd:YVO<sub>4</sub>, Tm:YAG, Ho:YAG, Er:YAG...

### *iii Láseres de semiconductores*

Os láseres de semiconductores considérase un grupo diferenciado dos láseres de estado sólido polas súas aplicacións e o seu menor tamaño. Como característica común comparten o funcionamento en modo continuo e con bombeo eléctrico.

Cando os átomos sitúanse moi próximos uns dos outros os niveis de enerxía dexeneran nunha banda. Unha banda de valencia é o nivel enerxético máis alto ocupado por un conxunto de electróns. Ao seguinte nivel accesible denomínase banda de conducción. Entre elas media un “gap” de enerxía, de tal maneira que, se un fotón incide sobre a banda de valencia, cunha enerxía maior que o salto, un electrón promocionará o seu estado ata a banda de conducción, deixando un oco libre. Analogamente un electrón na banda de conducción pode decaer cara a banda de valencia emitindo un fotón con enerxía igual á separación entre bandas.

Un semiconductor tipo N caracterízase por ter electróns libres, pola contra nun tipo P a conductividade procede, maiormente, da mobilidade das cargas positivas. É factible modificar o estado electrónico dun material coa dopaxe axeitada. Así o arseniuro de galio, que é neutro, dopado con silicio ou xermanio transformárase nun semiconductor tipo N, namentres que se os aditivos son o cinc ou o cadmio converterase en tipo P.

O medio activo nun láser semiconductor está constituído por un díodo, unión P-N, onde a banda de valencia do semiconductor tipo N está moi próxima á banda de conducción do tipo P. Ao se lle aplicar unha voltaxe  $V$  polarizada na unión, producírase unha emigración de electróns dende a rexión N á P. Cando os electróns na banda de conducción P caen á banda de valencia N emiten fotóns cunha enerxía igual ao salto que separa as dúas bandas. A radiación emitida presenta ángulos de diverxencia diferentes para a dirección paralela á unión P-N, eixo lento (8° FWHM), e para a perpendicular, eixo rápido (35° FWHM) (*Ready, 2001*),

$$I = \frac{c}{n} = \frac{hc}{eV} \quad [2.20]$$

Os láseres de díodo poden clasificarse en homounión ou heterounión.

- Na homounión está presente o mesmo material para o semiconductor tipo N e para o P.
- A heterounión fórmase pola alternancia de distintos semicondutores e, como vantaxes, hai que salientar a maior ganancia óptica e o feito de que a diferenza nos índices de refracción produza un efecto de guía de ondas.

Algúns exemplos de láseres semicondutores e as súas lonxitudes de onda son (*Ready, 1997*):

<i>Semiconductor</i>	<i>λ</i> (nm)
$\text{Al}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}$	780 – 880
$\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_{1-y}\text{P}_y$	1150 – 1650
$\text{Al}_x\text{Ga}_y\text{In}_{1-x-y}\text{P}$	630 – 680
$\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}$	980
$\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}$	8000 – 12500
PbSe	8000
$\text{Pb}_{1-x}\text{Eu}_x\text{Se}$	3500- 8000

Aínda que a súa aplicación máis estendida está dentro das comunicacións con fibras ópticas, a súa sinxeleza e versatilidade permitiu a súa incorporación en tecnoloxías domésticas como os lectores, de discos compactos ou códigos de barras, ou nas impresoras. A día de hoxe existen agrupacións de diodos cos que se conseguen aplicacións de potencia (corte, soldadura, etc.).

#### *iv. Outros*

Hai algunhas variedades de láseres que non se enmarcan dentro dos anteriores apartados: láseres de coloides, de electróns libres, de raios X, ultravioleta... . De entre todos eles describiremos unicamente dous.

## 2. Introducción

---

### 1. Láseres de coloides

Estes láseres empregan solucións líquidas de baixa concentración de complexos orgánicos coloides moi extensos, por exemplo  $C_{26}H_{27}N_2O_3Cl$ . O método de bombeo pódese efectuar tanto con “flash” como con outros láseres sendo o mecanismo de amplificación unha transición vibracional. Unha das características identificativas destes resoadores é a posibilidade de sintonizar a lonxitude de onda cun rango de 400 a 900 nanómetros (320 a 1200 nm segundo outros autores). O seu rendemento está entre un 20 e un 40%.

Este tipo de láseres ten aplicacións en espectroscopía, disociación molecular, separación de isótopos e reaccións químicas.

### 2. Láseres de electróns libres

Neste tipo de resoadores non existe un medio activo que precise dunha inversión de poboación, constando, unicamente, dun feixe de electróns relativistas (a súa velocidade é próxima á da luz) que transforman en parte, ou totalmente, a súa enerxía cinética en fotóns. Os procesos físicos que interveñen son dous:

- “Bremsstrahlung” ou emisión espontánea de radiación de freado,
- Radiación Cerenkov, emitida ao pasar os electróns por un medio e superar a velocidade da luz nel.

As vantaxes destes láseres están no rango ilimitado de lonxitudes de onda e a ausencia de deterioro do medio activo.



**Bibliografía**

- Bachs, L., J. Cuesta, N. Carles (1988); *Aplicaciones industriales del láser*; Productica.
- Davis, C. C. (1996); *Lasers and electro-optics*; Cambridge.
- Dorronsoró, M. (1995); *La tecnología láser. Fundamentos, aplicaciones y tendencias*; McGraw-Hill.
- Duley, W.W. (1983); *Laser processing and analysis of materials*; Plenum.
- Marshall, S.L. (1972); *Láser: tecnología y aplicaciones*; Reverté.
- Ready, J.F.(1997); *Industrial applications of laser, 2<sup>nd</sup> Ed.*; Academic Press.
- Ready, J.F. & D.F. Farson (2001); *LIA handbook of laser materials processing. Laser*; Institute of America. Magnolia Publishing, Inc.
- Silfvast, W.T.(1996); *Laser fundamentals*. Cambridge University Press.
- Thyagarajan, K., A.K. Ghatak (1981); *Lasers. Theory and applications*; Plenum Press.



---

## 2.2 Interacción láser-materia

### 2.2.1 Absorción da radiación láser

Cando a radiación emitida por un láser acada un material, unha parte dela pérdese por reflexión, outra cantidade é absorbida na superficie e unha última porción da onda luminosa, transmítese cara dentro. Se  $R$  e  $n$  representan, respectivamente, a reflectividade e o índice de refracción da substancia, entón a fracción de luz que non se reflicte é:

$$\mathbf{e} = 1 - R = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad [2.21]$$

A  $\mathbf{e}$ , que na súa expresión máis xeral é complexa,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$  denomínaselle función dieléctrica (*von Allmen, 1995*) (*Duley, 1983*). A porción de radiación electromagnética que penetra no material atenuase segundo a ecuación de Beer-Lambert,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} \\ I &= I_0 \exp\{-\mathbf{a} z\} \end{aligned} \quad [2.22]$$

sendo  $\mathbf{a}$  o coeficiente de absorción e  $I$  a intensidade da radiación que incide na superficie. Este coeficiente é unha función de variables tales como a natureza da propia superficie (nivel de oxidación, temperatura superficial...), da intensidade da luz (densidade de potencia, ángulo de incidencia, posición focal relativa ao material...), e da lonxitude de onda (*Frewin, 1999*) (*Steen, 1998*).

A radiación que incide sobre un material actúa modificando as propiedades ópticas do substrato, sendo tres os mecanismos físicos responsables destas variacións (*von Allmen, 1995*):

- Quecemento e alteración da densidade e características electrónicas.
- Liberación de portadores de carga.

- Distorsión non lineal dos orbitais electrónicos ou moleculares.

Cabe subliñar que algún autor fai unha clasificación destes procesos físicos en función da intensidade subministrada ao material. Por exemplo, para Bamberger primeiramente aparecería un aumento de temperatura e de seguida a fusión, a vaporización e a formación de plasma (*Bamberger, 1999*).

A radiación láser actúa de distintas maneiras segundo o tipo de material que ilumine. A resposta óptica nun metal está dominada pola presenza dos electróns libres con enerxía próxima ao nivel de Fermi. A función dieléctrica ten a forma

$$\mathbf{e} = 1 + \mathbf{w}_0^2 \frac{-\mathbf{t}_e^2 + i\mathbf{t}_e/\mathbf{w}}{1 + \mathbf{w}^2 \mathbf{t}_e^2} \quad [2.23]$$

onde  $\mathbf{t}_e$  representa o tempo medio entre colisións e  $\mathbf{w}_0$  a frecuencia de plasma electrónico (*von Allmen, 1995*). Duley describe a dependencia coa temperatura desta función no caso particular dun aceiro iluminado cun láser de dióxido de carbono (*Duley, 1983*):

$$\mathbf{e}(10.6 \mu\text{m}) = 11.2[\mathbf{r}(1 + \mathbf{g}T)]^{1/2} - 62.9[\mathbf{r}(1 + \mathbf{g}T)] + 174[\mathbf{r}(1 + \mathbf{g}T)]^{3/2} \quad [2.24]$$

onde  $\mathbf{r}$  representa a resistividade do material a unha temperatura de 20 °C, e  $\mathbf{g}$  é o coeficiente de variación da resistividade coa temperatura.

Nas substancias non-metálicas os electróns, ligados a un núcleo, oscilan arredor dun punto. A función dieléctrica é o resultado de superpoñer a vibración atómica e o campo eléctrico da onda incidente.

$$\mathbf{e} = 1 + \frac{N_e e^2}{m_e \mathbf{e}_0} f_{osc} \frac{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_0^2 + i\Gamma \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_0^2)^2 - \Gamma^2 \mathbf{w}^2} \quad [2.25]$$

onde  $f_{osc}$  representa a forza de oscilación,  $\Gamma$  o amortecemento,  $w_0$  a frecuencia dos electróns ligados e  $w$  a frecuencia da onda incidente. Para un fonón a expresión da función dieléctrica é igual a [2.25] substituíndo a masa e o amortecemento propio do fonón (von Allmen, 1995).

Unha situación excepcional dáse cando a irradiación á que se somete un non-metal é suficiente para xerar portadores de carga libres das súas ligaduras. Estes, ao chocar coa rede liberan a outros portadores producindo unha avalancha.

### 2.2.2 Quecemento

Cando un fotón incide sobre unha substancia e a súa frecuencia non coincide coa de resonancia das partículas que forman o material, é absorbido aumentando, ben a enerxía cinética no caso de partículas libres, ben a enerxía de excitación, de se tratar dun corpúsculo ligado mediante un enlace.

O mecanismo físico que aumenta a temperatura dun corpo transcorre por tres estadios ou etapas. Primeiramente transformárase a enerxía da luz incidente en movemento dos corpúsculos que constitúen o material. Na segunda fase evidénciase un grande número de choques entre as partículas, con tempos medios entre colisións incluso máis pequenos que o dun pulso láser, e como consecuencia producírase a equipartición da enerxía. A terceira xeira consiste no fluxo da calor entre rexións de distinta temperatura.

Na bibliografía sobre a materia aparecen descritos varios métodos para medir a transformación da radiación en calor. Steen clasifícaos en tres (Steen, 1998):

- Método calorimétrico. Consiste na irradiación dunha probeta e a conseguinte medición da temperatura que será unha función, entre outros, da potencia do láser, do ángulo de incidencia, da duración da iluminación, da temperatura inicial do material...
- Método analítico. Como o seu nome indica, trátase da resolución da ecuación de transferencia calorífica.

- Solución inversa. Unha vez medida a distribución de temperaturas, empregarase como dato de entrada nun programa numérico que estimará a enerxía inicial posta en xogo. Canto máis se aproxime este resultado aos parámetros do proceso, coñecidos con anterioridade, máis exacta será a medición da enerxía que casa coa substancia.

### 2.2.3 Fusión

Se a enerxía coa que se irradia unha substancia  $I_0$  acada un valor o suficientemente alto, debilitará as unións entre as partículas. Neste intre formarase nas proximidades da rexión con valor da temperatura igual ao de fusión  $T_m$  unha zona con material líquido. Se o aporte de enerxía é continuado o límite do fundente expansionarase cunha velocidade relativa ao substrato

$$v_m = \frac{e I_0}{l_m + r c T_m} \exp \left\{ -\frac{v_m A}{a} \right\} \quad [2.26]$$

onde  $l_m$  é o calor latente de fusión partido pola densidade,  $r$  a densidade,  $c$  a capacidade calorífica,  $A$  a profundidade da colada e  $a$  o coeficiente de difusión (Steen, 1998) (Duley, 1983).

A fusión dunha parte da superficie, unha vez fría, deixa unha traza en forma de ondulacións froito da interferencia entre a luz do láser e a radiación dispersa. Incluso ao interferir os propios campos dispersos entre si, prodúcense engurras, de modo que o modelo resultante compórtase como unha serie de Fourier das frecuencias espaciais. Asemade, unha vez que estas ondas quedan impresas poden perpetuarse solapándose as devanceiras coas descendentes. No caso dos líquidos estas deformacións provocan tensións superficiais que expulsan o fluído cara rexións máis frías (von Allmen, 1995).

### 2.2.4 Plasma

Ao aumentar progresivamente a temperatura dun gas, acadarase un valor para o que a enerxía térmica superará as forzas que mantén ligado o electrón ao núcleo atómico.

Neste intre a substancia formada por ións e electróns non é nin sólido, nin líquido, nin gas, senón que se trata dun plasma (*Dendy, 1993*).

O plasma xoga un papel importante no casamento da enerxía aportada polo feixe láser e os metais tratados. Autores como von Allmen, Bamberger, Duley ou Stümer clasifican en tres os réximes de intensidade incidente (*von Allmen, 1995*) (*Bamberger, 1999*) (*Duley, 1983*):

- Entre  $10^3 - 10^6$  W/cm<sup>2</sup>. Con valores baixos da intensidade fórmase un vapor metálico tenue e transparente. Gradualmente, segundo aumenta o fluxo, o gas evoluciona cara a sobreesaturación, aparecendo pequenas pingas que absorben e dispersan a radiación. A nube gaséoa ten un índice de refracción distinto do entorno, o que provoca a distorsión da fronte de onda.
- Entre  $10^7 - 10^{10}$  W/cm<sup>2</sup>. A formación do plasma esténdese con velocidade supersónica, protexendo a superficie ao absorber unha porción substancial da enerxía incidente. Ao mesmo tempo, este plasma emite radiación que é absorbida máis eficientemente ca do láser. A produción de plasma segue a ecuación de Saha (*Steen, 1998*).

$$\ln\left(\frac{N_i}{N_0}\right)^2 = -5040\left[\frac{V_i}{T}\right] + 1.5\ln(T + 15.385) \quad [2.27]$$

onde  $N_0$  é a densidade de átomos,  $N_i$  a densidade de ionización,  $V_i$  o potencial de ionización e  $T$  a temperatura absoluta.

- Máis de  $10^9$  W/cm<sup>2</sup>. O plasma, ao acadar altas temperaturas, vólvese transparente, permitindo deste modo que o metal estea sometido tanto á radiación incidente como ao do plasma. Aparecen réximes turbulentos.

No tratamento de semicondutores a presenza de plasma afecta á forza de ligadura electróns-rede, alterando a frecuencia do fonón emitido, que é sensiblemente menor. Isto incrementa o número de fonóns que se poden excitar, o que desestabiliza á rede. Tamén pode observarse a formación de microplasma en illantes (*von Allmen, 1995*).

**Bibliografía**

- Von Allmen, M., A. Blatter (1995); *Laser-beam interactions with materials*, 2<sup>nd</sup> Ed.; Springer.
- Bamberger, M. (1999); *On energy coupling between laser radiation and materials*; Lasers in Engineering, Vol. 9, pp. 139-156.
- Dendy, R. (1993); *Plasma physics*; Cambridge.
- Duley, W.W. (1983); *Laser processing and analysis of materials*; Plenum.
- Frewin, M.R., D.A. Scott (1999); *Finite element model of pulsed laser welding*; Welding Research Supplement. January, pp. 15-22.
- Steen, W.M. (1998); *Laser material processing*, 2<sup>nd</sup> Ed.; Springer.
- Thyagarajan, K., A.K. Ghatak (1981); *Lasers. Theory and applications*; Plenum Press.



---

## **2.3 Procesado de materiais con láser**

O láser compite con outras ferramentas pola súa rapidez, flexibilidade e calidade nos mecanizados: as distorsións producidas sobre o material que se manufactura son moi pequenas, o que reduce o proceso de acabado da peza tratada (Koai, 1993) (Steen, 1998).

### **2.3.1 Tratamentos superficiais: tempero, recargamento, refusión e limpeza**

Os tratamentos superficiais con láser permiten variar dunha maneira eficaz a estrutura, a composición e as propiedades das capas máis externas dos materiais. Isto ten unha grande importancia se temos en consideración que os novos materiais metálicos, necesarios para o desenvolvemento tecnolóxico, precisan dun compromiso entre unhas propiedades xerais e outras específicas na superficie (Ceballos, 1998). A familia de procesos que engloban estes tratamentos comprende o tempero, a recarga, a refusión e a limpeza.

Non existe un criterio para decidir cal é o tipo de láser máis apropiado para cada proceso. Quizais o de uso máis estendido na industria sexa o resoador de CO<sub>2</sub>, dada a súa boa eficiencia, aínda que tamén compite a facilidade de transmitir o feixe vía unha fibra óptica que aporta o Nd:YAG (Ready, 2001).

#### *Tempero*

É ben coñecido dende a antigüidade que os metais poden endurecer ao ser tratados primeiramente con calor para, posteriormente, ser arrefriados rapidamente. Quizais o caso mellor comprendido, e o de uso máis estendido, é o tempero do aceiro. A mutación metalúrxica dáse cando a ferrita –cristal dominante neste metal a temperatura ambiente– que posúe unha estrutura de rede cúbica centrada no corpo BCC, pola acción da calor transfórmase en austenita, FCC, e se o arrefriamento é o suficientemente rápido, muda a martensita, BCT.

O beneficio máis salientable do procesado con láser consiste en que permite tratar unicamente unha parte moi localizada dunha superficie, alterando a súa microestrutura

ata lle aportar propiedades diferenciadas das do resto do volume. Así, o exterior da peza pode acadar resistencia á corrosión, á fatiga ou ao deterioro, namentres que o resto do material permanece coas propiedades orixinarias (*Labudovic, 1999*) (*Steen, 1998*). Outra calidade proveitosa é a rapidez dos ciclos térmicos e a conseguinte limitación da difusión do carbono, de aí que a profundidade do tratamento sexa moi reducida e o tempero sexa uniformemente (*von Allmen, 1995*). Este tratamento manexa variables adicionais ás do procesado con láser, como son a absortividade, a lonxitude de onda e o control da intensidade (*Koai, 1993*).

Outras características que fan do láser unha ferramenta atractiva para aplicacións de tempero son (*Duley, 1983*) (*Steen, 1998*):

- Os tratamentos fan uso de pouco fluxo enerxético, minimizando o deterioro da peza tratada.
- Os ciclos térmicos son rápidos, o que mingúa a oxidación.
- Creación dun único patrón.
- Pódese aplicar sobre unha grande variedade de pezas pequenas e estreitas.
- O rango de uso inclúe composicións complexas.

Por último, cabe recordar que para acadar o tempero de áreas extensas empréganse varios métodos. Unha oscilación rápida do feixe na dirección perpendicular ao seu movemento iluminaría unha área en forma de banda. Outros mecanismos son: a desfocalización do feixe e o emprego dun espello integrador (*von Allmen, 1995*) (*Steen, 1998*).

### *Recargamento*

A operación do recargamento consiste en ligar un aporte sobre un substrato, sen que haxa disolución. Este material de recubrimento, que pode presentarse en forma de tiras

ou en pos, ten como función tanto a ampliación da vida media da peza tratada, como o aumento da súa resistencia ao deterioro.

Esquemáticamente podemos decer que o proceso de recargamento consta de dúas etapas: fusión da superficie do material base e aplicación do recubrimento.

O recargamento con láser aporta, entre outros: unha maior ligadura entre o material agregado e o substrato, a formación poros máis pequenos e homoxeneidade no recubrimento. Por último, hai que salientar que o emprego do láser para o recargamento evita traballar cunha atmosfera específica, como é o caso da proxección con plasma (*Ready, 2001*).

### *Refusión*

Empregada como unha operación adicional ao recargamento, o tratamento da refusión consiste na aplicación dun novo fluxo calorífico ao substrato recuberto, ata acadar a fusión do material de aporte. Conséguese así diminuír a porosidade, homoxeneizando a ligadura no seno do material de recubrimento.

No proceso de refusión hai dous parámetros adicionais aos tratamentos con láser que determinarán a estrutura resultante: a composición da colada e a velocidade de propagación da interfase sólido-líquido.

### *Limpeza*

Co termo de limpeza con láser un pode referirse a dúas operacións distintas: por unha banda estaría a remoción dun recubrimento –consistente na eliminación dunha capa superficial que cubre un substrato-, e pola outra, a descontaminación dunha área –que se fundamenta na eliminación das impurezas dunha substancia (*Ready, 2001*).

Os mecanismos físicos responsables da remoción clasifícanse en tres categorías: vaporización explosiva, excitación acústica e fotodescomposición (*Ready, 2001*) (*Park, 1994*)

## 2. *Introducción*

---

- A vaporización explosiva, é o resultado da actuación de pulsos curtos e intensos sobre unha película estreita do material que se quere eliminar. O fluxo enerxético destes pulsos non debería acadar valores de fusión do substrato.
- A excitación acústica prodúcese como consecuencia dunha rápida expansión e contracción térmica na superficie. Tanto a amplitude da vibración como a frecuencia temporal son moi pequenas, o que da lugar a unha aceleración moi forte, aproximadamente da orde de  $10^{10}$  cm/s<sup>2</sup>, causando na súa vez a proxección das partículas cara fóra da superficie.
- A fotodescomposición baséase na absorción selectiva da radiación. Se o substrato e o recubrimento teñen distintas absorvidades para a irradiación láser, a iluminación cun feixe pode dissociar as ligaduras que unen as partículas do agregado.

Son varios os métodos empregados para levar a cabo unha limpeza con láser (*Dahotre, 1998*) (*Gaspar, 2000*):

- Evaporación selectiva.
- Remoción con ondas de choque.
- Limpeza en seco.
- Limpeza húmida, por expansión térmica do vapor.
- Limpeza como resultado das diferencias térmicas.

### 2.3.2 *Marcado*

O marcado con láser é un proceso superficial pero, a diferenza dos anteriores, cómpre perforar levemente. A enerxía depositada por un pulso láser debe evaporar unha porción da superficie; unha vez resolidificada, quedará patente un sinal con forma de cráter

pouco profundo. Combinando axeitadamente as marcas formarase a composición desexada. Igual que no anterior apartado os láseres que máis aparecen neste tratamento son os de CO<sub>2</sub> e de Nd:YAG.

Existen varias técnicas de marcado.

- O marcado con matriz basease na descomposición en puntos da imaxe que se desexa imprimir.
- A gravación vectorial, en lugar de empregar pulsos láser, faino en continuo, construíndo a imaxe por medio de liñas.
- A proxección con máscara fai uso dunha pantalla onde está recortada unha silueta. Ao interpoñer esta máscara entre o láser e a peza iluminada, quedará rexistrado o perfil da figura.

Entre as vantaxes que se conseguen ao empregar un láser para o marcado están:

- Alta resolución nas figuras.
- Procesado rápido e sen contacto.
- Fácil xeración de secuencias de marcas.

Non obstante existen desvantaxes. Cabe destacar, que non é posible aportar color ás marcas (*Ready, 2001*).

### **2.3.3 Perforado**

Hai unha característica particular que distingue o perforado dos outros procesos aquí tratados: execútase sen que haxa velocidade relativa feixe-peza.

O método de perforar unha substancia cun láser é bastante simple: o material sólido iluminado absorberá enerxía ata que é vaporizado. Para certos materiais non-metálicos, como os polímeros, a absorción dos fotóns pode romper as ligaduras entre moléculas. A este fenómeno denomínaselle fotofragmentación (*Ready 2001*).

No perforado de substancias metálicas con láser empréganse pulsos curtos, pero con intensidade suficiente como para transformar en vapor un fragmento da superficie; repetindo o proceso sobre a mesma área vaporizada conséguese un burato. A forma do furado dependerá das inhomoxeneidades que presente o substrato na súa composición. Amais disto, todos os buracos teñen forma cóncava, é decer, o seu diámetro é maior na entrada, estreitando segundo gana fondo, ata acadar o límite de profundidade. Este fenómeno explícase polas reflexións do feixe contra as paredes do propio furado (*Ready, 1997*) (*von Allmen, 1995*).

Para a obtención de furados con diámetros moito maiores que o do feixe, emprégase a técnica do trepanado, consistente no corte do perímetro dunha área.

As características máis salientables que debe ter un láser para poder furar un material son por unha banda emitir pulsos (curtos mellor que longos) e pola outra unha alta irradianza (*Ready, 2001*). Na Industria o máis empregado é o resoador de Nd:YAG (con duracións do pulso de entre 0.5-10 ms e potencia da orde de quilowatts). Tamén merece mención o láser de CO<sub>2</sub> pulsado.

O perforado con láser ofrece un conxunto de vantaxes e inconvenientes. Entre as primeiras destacan (*Ready, 1997*):

- Trátase dun proceso que é facilmente automatizable.
- Non hai desgaste de ferramenta.
- É compatible cunha grande variedade de materiais.

- Ao non haber contacto por un lado, redúcese a posibilidade de ruptura da peza e polo outro non se produce contaminación do material.
- A zona afectada nos arredores do furado é moi pequena.

Mesmamente conta con certas desvantaxes como:

- Unha profundidade de penetración limitada, que é consecuencia da cantidade de enerxía dispoñible para cada pulso,
- escasa calidade do furado, xa que aparecen defectos como engurras nas súas paredes ou o desprazamento do seu centro,
- Frecuente formación dun cráter arredor da entrada do buraco a partir do material recondensado. A eliminación deste sedimento requirirá dun postprocesado.

### 2.3.4 Corte

Esta operación consiste en separar dunha peza un ou varios segmentos. A enerxía que deposita o láser debe ser suficiente para fundir o material iluminado e expulsalo, formando unha canle. É normal que a remoción de material se faga por medio dunha corrente de gas.

Os diversos procesos de corte con láser defínense de acordo coa transformación física dominante. En sentido crecente do consumo de enerxía estarían: corte por oxidación, corte por fusión e corte por vaporización (*Ready, 2001*).

- Oxicorte. Neste método hai aporte de osíxeno coaxialmente co feixe láser, con un dobre cometido, por un lado queimar a substancia que está sendo iluminada, e polo outro baleirar a canle. Debido á presenza en exceso de osíxeno consúmese menos enerxía que nos restantes métodos.

- Corte por fusión. A inxección dun gas inerte - os máis comúns son o nitróxeno e o argón - permite evacuar o volume de material fundido. Este gas de aporte ten como función secundaria a de protexer o corte contra a oxidación.
- Corte por vaporización. Trátase do método máis custoso dende o punto de vista enerxético. A formación da canle débese exclusivamente á evaporación da masa que cubre o futuro perfil de corte.

No caso de materiais non-metálicos tamén existe a posibilidade de que a iluminación con láser degrade os enlaces intermoleculares, o que provocaría unha fractura.

Un parámetro que inflúe na calidade do corte é a polarización. No caso de radiación láser con polarización lineal, conséguese un corte óptimo cando a polarización é paralela á dirección de movemento do feixe láser (*Ready, 1997*).

A aplicación máis estendida deste tratamento consiste no corte de láminas metálicas con láser de CO<sub>2</sub>. Este tipo de resoador ten ao seu favor unha boa eficiencia, as altas potencias que se poden acadar e o bo control que se pode establecer tanto en continuo como en modo pulsado. Para aplicacións de grande precisión empréganse os láseres de Nd:YAG (*Ready, 2001*).

### **2.3.5 Soldadura**

Na soldadura con láser o feixe luminoso debe aportar a suficiente densidade de potencia como para fundir unha porción de material; unha vez cortado o abastecemento enerxético, a substancia fundente resolidificará formando un cordón de soldadura.

Tres son os métodos de soldadura con láser (*Ready, 2001*):

- Modo conducción. Para baixas densidades de potencia, o metal fundido formará unha poza, pero sen chegar a xerarse un furado.



- Modo penetración. Para fluxos enerxéticos intermedios, formárase unha colada na superficie, que irá gañando volume ao profundizar o fundente.
- Modo “keyhole”. Cando se ilumina unha substancia cunha potencia menor de 1 kW e unha focal suficientemente pequena, fundirase a área irradiada, e por efecto das diferencias na tensión superficial, esta área deformarase ata crear un furado no seno da colada. As paredes deste burato, denominado “keyhole”, modificarán a traxectoria do raio cara o seu interior, provocando que gane en profundidade. Ao mesmo tempo producírase un equilibrio entre a enerxía absorbida polas paredes de material fundente e a dissipada por conduction.

Para tratamentos de soldadura non ten relevancia a lonxitude de onda da luz emitida, mais si a potencia do láser. Tradicionalmente dous son os tipos de láseres de uso máis estendido: Nd:YAG (con potencias de ata 6 kW) e CO<sub>2</sub> (con potencia, en continuo, de ata 50 kW) (*Ready, 2001*).

### **Bibliografía**

- von Allmen, M., A. Blatter (1995); *Laser-beam interactions with materials 2<sup>nd</sup> Ed.*; Springer.
- Bamberger, M. (1999); *On energy coupling between laser radiation and materials*; Lasers in Engineering, Vol. 9, ppp. 139-156.
- Callister, W.D.; *Ciencia e ingeniería de los materiales*; Ed. Reverté.
- Ceballos-Ruano, J.S., et al. (1998); *Tratamiento térmico superficial del acero U8 mediante láser de Nd:YAG*; Rev. Metal, Vol. 34(2), pp. 140-143.
- Chen, C.C., C.J. Tao, L.T. Shyu (1996); *Eutectoid temperature of carbon steel during laser surface hardening*; J. Mater. REs. Vol. 11, No. 2, pp.458-468.
- Dahotre, N.B. (1998); *Lasers in surface engineering*; ASM International.
- Duley, W.W. (1983); *Laser processing and analysis of materials*; Plenum.
- Frewin, M.R., D.A. Scott (1999); *Finite element model of pulsed laser welding*; Welding Research Supplement. January, pp. 15-22.
- Gaspar, P. et. al. (2000); *A study of the effect of wavelength on Q-switched Nd:YAG laser cleaning of eighteenth-century Portuguese tiles*; Studies in Conservation 45 pp. 189-200.
- Koai, K., R. Damaschek, H.W. Bergmann (1993); *Heat transfer in laser hardening of rotating cylinders*; HTD-Vol. 259, pp. 1-9.
- Labudovic, M., D. Hu, R.Kovacevic (1999); *Three-dimensional finite element modelling of laser surface modification*; Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 214. Part. B, pp. 683-692.
- Nicolás, G. (1997); *Étude des mécanismes d'ablation et des modifications induites sur matériaux céramiques par rayonnement laser UV*; Tèse Doutoral, Université de Provence.
- Park, H.K. et al. (1994); *Practical excimer laser-assisted cleaning of solid surfaces*; ALT '94 International Conference. SPIE Vol. 249, pp. 22-31.
- Ready, J.F. (1997); *Industrial applications of lasers 2<sup>nd</sup> Ed.*; Academic Press.
- Ready, J.F. (2001); *LIA handbook of laser materials processing*; Laser Institute of America. Magnolia Publishing, Inc.
- Rozzi, J.C., F.P. Incropera, Y.C. Shin (1998); *Transient thermal response of a rotating cylindrical silicon nitride workpiece subjected to a translating laser heat source*; Journal of Heat Transfer Vol. 120, pp. 907-915.

- Steen, W.M.(1998); *Laser material processing 2<sup>nd</sup> Ed.*; Springer.
- Tayal, M., K. Mukherjee (1994); *Thermal and microstructural analysis for laser surface hardening of steel*; J. Appl. Phys. Vol. 75(8), pp. 3855-3861.
- Thyagarajan, K., A.K. Ghatak (1981); *Lasers. Theory and applications*; Plenum Press.
- Vander Voort, G. F. (1991); *Atlas of time-temperature diagrams for irons and steels.*; Ed. ASM International.
- Wei, M.Y., C. Chen (1994); *Predicting case depth in tempered steels hardened via laser processing*; Mat. Sci. Tech., Vol. 10 pp. 69-73.
- Yilbas, B.S. (1997); *Laser heating process and experimental validation*; Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.40, No. 5, pp. 1131-1143.
- Zubair, S.M., M.A. Chaudhry (1996); *Heat conduction in a semi-infinite solid due to time-dependent laser source*; Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 39 No. 14 pp. 3067-3074.



# *Capítulo 3*

## *Estudio teórico do tratamento térmico de materiais*

### *3.1. Transmisión da calor*

#### *3.1.1. Conducción*

#### *3.1.2. Radiación*

#### *3.1.3. Convección*

### *3.2. Modelos analíticos do campo da temperatura*

#### *3.2.1. Fluxo estacionario*

#### *3.2.2. Fluxo dependente do tempo*

### *3.3. Modelos numéricos: elementos finitos (FEM)*

#### *3.3.1. Descripción xeral*

##### *3.3.1.1. Discretización espacial*

##### *3.3.1.2. Criterio de converxencia*

#### *3.3.2. Particularización a análise térmica*

#### *3.3.3. Discretización temporal*

#### *3.3.4. Transformacións de fase*

### *3.4. Transformacións metalúrxicas no sistema ferro-carbono*

*Neste capítulo estudiaremos as tres posibles formas que ten a calor de se transmitir (conducción, convección e radiación) para posteriormente construímos a ecuación que equilibra os fluxos térmicos. Empregando a función de Green resolveremos analiticamente a mencionada ecuación en catro situacións ben distintas: fluxo estacionario e fluxo dependente do tempo con e sen movemento relativo material-fonte. En todos os casos o intervalo de integración será infinito.*

*Como unha alternativa de resolución, co gallo de tratar con xeometrías complexas, introduciremos o método dos elementos finitos e analizaremos algunha das súas características: discretizacións espaciais e temporais, criterio de converxencia e incorporación das transformacións de fases.*

*Por último trataremos as transformacións metalúrxicas dos aceiros prestándolle unha especial atención á descrición aos diagramas de transformacións isotérmicas.*

---

### 3.1 Transmisión da calor

Tres son os métodos de transferencia calorífica: conduction, convección e radiación.

#### 3.1.1 Conducción

Fourier estableceu empiricamente a relación que goberna a conduction calorífica: o fluxo calorífico que atravesa un elemento infinitesimal de área nun sentido é proporcional ao gradiente de temperatura que hai nesa dirección. De forma matemática:

$$q_n'' = -\mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial n} \quad [3.1]$$

sendo  $T$  a distribución de temperaturas,  $n$  o vector que marca a dirección na que se toma o gradiente, e  $\mathbf{k}$  a conductividade térmica. A presenza do signo negativo está xustificada para asegurar que a transferencia calorífica flúa dende as rexións quentes cara as frías. A conductividade térmica, lonxe de ser unha constante, varía coa temperatura, a presión e a composición química. É común na natureza atopar materiais con anisotropías na súa conductividade; para estas substancias  $\mathbf{k}$  está representada por un tensor (*Rajadhyaksha, 2000*).

Se a substancia é isotrópica, a expresión [3.1] pode substituírse por:

$$q_n'' = -k \nabla T \quad [3.2]$$

O transporte da enerxía nos sólidos débese tanto ao movemento migratorio dos electróns libres, como ás ondas vibracionais da rede (*Incropera, 1999*) (*Touloukian, 1970*). Cada unha destas actividades aporta un sumando á expresión da conductividade, así:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_r \quad [3.3]$$

Namentres que  $k_e$  a compoñente electrónica, é inversamente proporcional á resistencia eléctrica,  $k_r$  depende da frecuencia da interacción átomo-rede. Así, por exemplo, nos metais puros predomina a compoñente electrónica  $k \approx k_e$ , sen embargo, nos sólidos non-metálicos atopamos coa compoñente  $k \approx k_r$ . Unha situación ben diferente ten lugar no caso dos sólidos non-metálicos cristalinos, satisfacéndose que  $k_r \gg k_e$ .

#### 3.1.2 Radiación

Todas as substancias emiten enerxía en forma de radiación electromagnética como consecuencia da súa temperatura. A ecuación que describe á enerxía radiada por unidade de volume no intervalo  $[n, n + dn]$  para un corpo negro, coñécese como lei de Planck:

$$E_{nB}(n, T) = \frac{8\pi h n^3}{c^3} \frac{1}{e^{hc/1kT} - 1} \quad [3.4]$$

onde  $h = 6.6256 \times 10^{-34}$  J s é a constante de Planck,  $c = 3 \times 10^{10}$  m s<sup>-1</sup>, a velocidade da luz no baleiro e  $T$  a temperatura absoluta. Verifícase que esta expresión acada o seu valor máximo cando se cumpre que:

$$l T = 2.8978 \times 10^{-3} \text{ m K} \quad [3.5]$$

o que se coñece como lei de desprazamento de Wien. Integrando a distribución da enerxía [3.4] sobre todo o espectro chégase á lei de Stefan-Boltzmann,

$$E_B(T) = s T^4 \quad [3.6]$$

sendo  $s = 7.5643 \times 10^{-16}$  Jm<sup>-3</sup>K<sup>-4</sup>.

A definición de intensidade de radiación queda establecida como a fracción da enerxía radiada que se propaga ao través dunha área infinitesimal  $dA$  nunha dirección, confinada



no interior dun pequeno ángulo sólido  $d\Omega$ , cunha lonxitude de onda entre  $\lambda$  e  $\lambda + \Delta\lambda$  no intervalo de tempo  $dt$  (Rohsenow, 1998).

$$I_\lambda = \lim_{(dA, d\Omega, d\lambda, dt) \rightarrow 0} \frac{dE_\lambda}{dA d\Omega d\lambda dt} \quad [3.7]$$

A relación existente entre a intensidade dunha substancia e a do corpo negro, para unha mesma lonxitude de onda, dirección  $(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  e temperatura, toma o nome de emisividade (Rohsenow, 1998) (White, 1988).

$$e_{\lambda qf}(\lambda, \mathbf{q}, \mathbf{f}, T) = \frac{I_\lambda(\lambda, \mathbf{q}, \mathbf{f}, T)}{I_{\lambda B}(\lambda, T)} \quad [3.8]$$

Outras propiedades son:

- A absorptividade  $a$  define a fracción da enerxía que é absorbida ao incidir nunha superficie.
- A reflectividade  $R$  é a parte da enerxía que reflicte un plano.
- Por último, a transmisividade  $T$  é a porción da enerxía que se propaga cara ao interior dunha substancia.

Existen correspondencias entre estas propiedades. Así para unha mesma lonxitude de onda e dirección,

$$a_\lambda + R_\lambda + T_\lambda = 1 \quad [3.9]$$

Para corpos opacos  $T_\lambda = 0$ , esta ecuación muda a:

$$a_\lambda + R_\lambda = 1 \quad [3.10]$$

Pódese demostrar que a emisividade espectral é igual á absortividade para a mesma lonxitude de onda e para unha dirección dada. Este enunciado coñécese como lei de Kirchhoff (*Rohsenow, 1998*) (*White, 1988*).

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 \quad [3.11]$$

Por último, cabe decer que este conxunto de propiedades son moi sensibles ás alteracións ou contaminantes que teña a superficie.

#### 3.1.3 Convección

Ao proceso de transferencia calorífica no que un fluído intercambia enerxía pola acción combinada da conducción, a radiación e o seu propio movemento macroscópico denomínaselle convección (*Kakaç, 1995*).

Cando un fluído descorre cerca dun sólido, obsérvase experimentalmente que as partículas adxacentes á superficie están pegadas. Isto explícase pola presenza dunha forza viscosa que actúa retardando o movemento do fluído. Pero segundo nos afastamos da superficie, a velocidade relativa tende asintoticamente cara un certo valor, o que tería a velocidade do fluído sen perturbación. A codia no que se altera o libre movemento do fluído recibe o nome de capa límite.

Son dous os mecanismos físicos que contribúen á convección:

- No interior da capa límite, onde as velocidades achéganse a cero, domina o movemento aleatorio das partículas constitutivas do fluído.
- Na mesma medida que o fluxo avanza paralelo á superficie ata finalmente saír da capa límite crece a achega do movemento macroscópico (*Incropera, 1999*).

O proceso de transferencia convectiva da calor pode ser forzada con axuda de medios externos que regulen o fluxo de fluído. Nas situacións onde o fluxo está inducido polas

diferencias de densidades a consecuencia das distintas temperaturas, a convección será natural ou libre.

A ecuación que goberna estas evolucións é a lei de arrefriamento de Newton:

$$q'' = \frac{q}{A} = h(T_{\text{superficie}} - T_{\text{fluido}}) \quad [3.12]$$

onde  $q$  ten unidades de potencia, e  $h$  é unha función complexa que depende das condicións do fluxo, das propiedades termofísicas do fluído (viscosidade, coeficiente de conduction, calor específico, densidade...) e da xeometría e dimensións da superficie (Kakaç, 1995). Nalgunhas situacións especiais  $h$  depende do incremento de temperatura, así por exemplo, de se producir condensación,  $h = h(\Delta T^2)$ . A expresión da lei de arrefriamento de Newton é aplicable, aínda que restrictivamente (Rohsenow, 1998). Substituíndo a ecuación [3.1] en [3.12] obtense a expresión

$$h = -\frac{\mathbf{k}(\partial T/\partial n)_s}{T_s - T_f} \quad [3.13]$$

Cando o fluxo acada velocidades altas próximas á do son, ou incluso superiores, na expresión de Newton substitúese o termo correspondente á temperatura do fluído pola temperatura adiabática da parede (a temperatura que tería a superficie en ausencia de transferencia de calor) (Rohsenow, 1998):

$$q'' = \frac{q}{A} = h(T_{\text{superficie}} - T_{\text{adiabática}}) \quad [3.14]$$

$$T_{\text{adiabática}} = T_{\text{fluido}} + r \frac{v^2}{2c}$$

Sendo  $v$  a velocidade do fluído relativa á superficie e  $c$  a súa capacidade calorífica. É doado ver que se  $v$  é pequena a ecuación [3.14] convértese na [3.12]

**Bibliografía**

- Carslaw, H.S., J.C. Jaeger (1992); *Conduction of heat in solids*, 2<sup>nd</sup> Ed.; Oxford.
- Holman, J.P.(1997); *Heat Transfer*, 8<sup>th</sup> Ed.; McGraw-Hill.
- Incropera, F.P., D.P. De Weitt (1999); *Fundamentos de transferencia de calor*, 4<sup>a</sup> Ed.; John Wiley & Sons.
- Kakaç, S., Y. Yener (1995); *Convective heat transfer*, 2<sup>nd</sup> Ed.; CRC.
- Rajadhyaksha, S.M., P. Michaleris (2000); *Optimization of thermal process using an Eulerian formulation and application in laser surface hardening*; Int. J. Numer. Meth. Engng. 47:1807-1823.
- Rohsenow, W.M., J.P. Hartnolt, Y.J. Cho (1998); *Handbook of heat transfer*, 3<sup>rd</sup> Ed.; McGraw-Hill.
- Touloukian, V.S. et al. (1970); *Thermophysical properties of matter, Vol. 1. Thermal conductivity*; Purdue University.
- White, F.M. (1988); *Heat and mass transfer*; Addison-Wesley.

---

### 3.2 Modelos analíticos do campo de temperaturas

O obxecto deste apartado é o de describir un conxunto de métodos analíticos que nos permitan obter o campo de temperatura  $T(\mathbf{r}, t)$  para a ecuación de transferencia calorífica. O noso propósito é dobre:

- por unha banda ter un método de cálculo que rapidamente permita facer unha estimación óptima dos parámetros do proceso de tratamento superficial con láser,
- e pola outra, conseguir unha primeira aproximación do campo de temperaturas  $T(\mathbf{r}, t)$  co gallo de calibrar o método dos elementos finitos.

Comecemos enunciando o Primeiro Principio da Termodinámica:

$$\Delta U = \sum_i Q_i - \sum_i W_i \quad [3.15]$$

En todas as aplicacións que imos estudar desprezaremos o termo do traballo aproximando a variación de enerxía interna como:

$$\Delta U \approx \sum_i Q_i \quad [3.16]$$

O sumatorio da calor incluírá as contribucións debidas á conduction, convección, radiación e ás fontes. Entón o balance das enerxías queda

$$\int \int_{t \text{ Vol}} \mathbf{r} c \frac{dT}{dt} dVol dt = \int \int_{t S} k \tilde{N} T dS dt + \int \int_{t S} h \Delta T dS dt + \int \int_{t S} \mathbf{se} (T^4 - T_0^4) dS dt + \int \int_{t \text{ Vol}} f(\mathbf{r}, t) dVol dt \quad [3.17]$$

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

onde  $\mathbf{r}$  representa a densidade,  $c$  a capacidade calorífica e  $\mathbf{k}$  a conductividade térmica. Desenvolvendo a derivada convectiva na enerxía interna e aplicando o teorema da diverxencia ao termo de conduction

$$\int \int_{t \text{ Vol}} \left[ \mathbf{r}c \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{r}c\mathbf{v}\tilde{\mathbf{N}}T - \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{N}}T) \right] dVol dt = \int \int_{t S} h\Delta T dS dt + \int \int_{t S} \mathbf{se}(T^4 - T_0^4) dS dt + \int \int_{t \text{ Vol}} f(\mathbf{r},t) dVol dt \quad [3.18]$$

$\mathbf{v}$ , que aparece coa derivada convectiva, representa a velocidade dun elemento de volume diferencial do entorno xeométrico de integración (Fig. 3.1). Se menosprezamos as contribucións tanto da convección como da radiación térmica, a ecuación da conduction calorífica quédanos

$$\mathbf{r}(\mathbf{r},T)c(\mathbf{r},T)\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{r}(\mathbf{r},T)c(\mathbf{r},T)\mathbf{v}\tilde{\mathbf{N}}T(\mathbf{r},t) + \tilde{\mathbf{N}}(-\mathbf{k}(\mathbf{r},T)\tilde{\mathbf{N}}T(\mathbf{r},t)) = f(\mathbf{r},t) \quad [3.19]$$

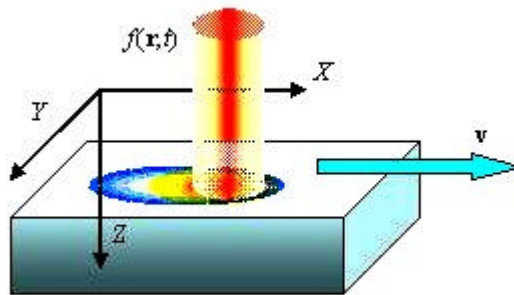


Fig. 3.1 A fonte térmica  $f(\mathbf{r},t)$  incide na peza material, que se move con velocidade  $\mathbf{v}$  relativa á fonte.

#### 3.2.1 Fluxo estacionario

O fluxo estacionario acádase cando a distribución de temperaturas deixa de depender do tempo (Kou, 1983) (Rajadhyaksha, 2000),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad [3.20]$$

A aplicación desta condición na ecuación [3.19] ábrenos dúas posibilidades, que o fluxo sexa estacionario coa presenza dunha fonte en movemento respecto do material, ou que sexa estacionario sen esta.

*Fluxo estacionario sen movemento do material*

Nesta situación a lei da conservación da enerxía (ec. [3.19]), en tres dimensións, queda reducida a dous termos,

$$\tilde{\mathbf{N}}(-\mathbf{k}\tilde{\mathbf{N}}T) = f(\mathbf{r}) \quad [3.21]$$

onde  $f(\mathbf{r})$  representa á distribución espacial das fontes, con unidades de enerxía dividida polo tempo e o volume. Se supoñemos que a conductividade térmica  $k$  é constante e independente das coordenadas xeométricas, [3.21] transfórmase en,

$$-\nabla^2 T = \frac{f(\mathbf{r})}{k} \quad [3.22]$$

expresión que se coñece como ecuación de Poisson. Buscamos resolver esta ecuación na súa forma xeral, é decer, en ausencia de condicións de contorno. O emprego das funcións de Green permítenos resolver a ecuación de Poisson a partir da solución da homoxénea, a ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 T = 0 \quad [3.23]$$

Sexa  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  a función de Green que resolve [3.23]. Dita función defínese por medio do enunciado

$$-\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad [3.24]$$

sendo  $\mathbf{r}=(x, y, z)$  as coordenadas dun punto e  $\mathbf{r}'=(x', y', z')$ , o vector de posición dunha fonte puntual.  $G$  representa á función de Green que resolve ao operador diferencial, e describe a distribución de temperaturas no punto  $\mathbf{r}$ , debida a unha fonte puntual de intensidade unitaria, situada na posición  $\mathbf{r}'$ , que actúa nun medio infinito cunha temperatura inicial de cero graos (Carslaw, 1992) (Weisstein, 1999). Esta función é invariante baixo translacións espaciais, entón manifestará unha dependencia coa distancia de separación  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ . A expresión de  $G$  é ben coñecida (Carslaw, 1992),

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad [3.25]$$

A solución á ecuación de Poisson ven dada por:

$$T(\mathbf{r}) = T_0 + \frac{1}{k} \int f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad [3.26]$$

onde  $\mathbf{r}'$  representa ao vector de posición da fonte  $f(\mathbf{r}')$  e  $T_0$  a temperatura inicial do material.

#### *Fluxo estacionario con movemento de material*

A expresión da conservación da enerxía, ecuación [3.19], para unha situación de fluxo estacionario cando se ten movemento de material, é:

$$\mathbf{r}c\nabla T + \nabla(-k\nabla T) = f(\mathbf{r}) \quad [3.27]$$

Si supoñemos que as propiedades do material son constantes e independentes da temperatura a anterior relación transfórmase en,

$$\frac{\mathbf{v}}{a}\nabla T - \nabla^2 T = \frac{f(\mathbf{r})}{k} \quad [3.28]$$



Ao coeficiente  $\mathbf{a} = \mathbf{k} / \rho c$  denomínaselle difusividade térmica.

Representemos con  $G$  a unha función de Green que resolve o caso no que a fonte sexa puntual, é decer,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é solución da ecuación

$$\mathbf{v} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{a} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad [3.29]$$

A expresión da función de Green é coñecida, véxase, por exemplo, (Dowden, 2001)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi \mathbf{a} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp \left\{ \frac{|\mathbf{v}|}{2\mathbf{a}} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{V}} - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] \right\} \quad [3.30]$$

onde  $\hat{\mathbf{V}}$  é un vector unitario na dirección do movemento da fonte puntual. Se a velocidade é cero chégase á expresión [3.25].

A ecuación [3.30] pode xeneralizarse para fontes extensas integrado a función  $f(\mathbf{r})$  sobre toda a superficie. Podemos calcular o campo de temperaturas aplicando:

$$T(\mathbf{r}) = T_0 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{k}} \int f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad [3.31]$$

### 3.2.2 Fluxo dependente do tempo

Dúas son as posibilidades que estudiaremos neste apartado, por unha banda buscaremos o campo de temperaturas para unha fonte en repouso relativo ao material, e pola outra investigaremos a distribución de temperatura cando hai movemento relativo entre a fonte e a substancia quentada.

#### *Material sen movemento*

Calcularemos a solución á ecuación da calor para a conducción [3.19], no caso de que haxa un fluxo non-estacionario sen a presenza do termo de convección forzada.

$$\mathbf{r}c \frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{\mathbf{N}}(-\mathbf{k}\tilde{\mathbf{N}}T) = f(\mathbf{r}, t) \quad [3.32]$$

A función  $f(\mathbf{r}, t)$  representa ás fontes que actúan sobre o volume. Se as propiedades son constantes e independentes da temperatura, a ecuación transformarase en,

$$\frac{1}{\mathbf{a}} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T = \frac{f(\mathbf{r}, t)}{\mathbf{k}} \quad [3.33]$$

Sexa  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$  unha función que cumpra:

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial t} - \mathbf{a}\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \mathbf{d}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \quad [3.34]$$

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$  representa a contribución dunha fonte puntual situada na posición  $\mathbf{r}'$  no tempo  $t'$  sobre un punto de vector de posición  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$ . Podemos descompoñer  $G$  en tres factores (*Geissler*):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = G_x(x, x', t, t') G_y(y, y', t, t') G_z(z, z', t, t') \quad [3.35]$$

O contido de cada un destes termos dedúcese da resolución da ecuación [3.20] particularizada para unha dimensión espacial. Así cada termo ten a forma

$$\begin{aligned} G_x(x, x', t, t') &= \frac{1}{\sqrt{4\mathbf{p}\mathbf{a}(t-t')}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\mathbf{a}(t-t')}\right\} \\ G_y(y, y', t, t') &= \frac{1}{\sqrt{4\mathbf{p}\mathbf{a}(t-t')}} \exp\left\{-\frac{(y-y')^2}{4\mathbf{a}(t-t')}\right\} \\ G_z(z, z', t, t') &= \frac{1}{\sqrt{4\mathbf{p}\mathbf{a}(t-t')}} \exp\left\{-\frac{(z-z')^2}{4\mathbf{a}(t-t')}\right\} \end{aligned} \quad [3.36]$$

e o propagador global queda como sigue,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = (4\mathbf{pa}(t-t'))^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4\mathbf{a}(t-t')}\right\} \quad [3.37]$$

Estas expresións son válidas unicamente para  $t > t'$ . No caso contrario a función de Green toma valor cero.

Por último, a solución á ecuación [3.33] na súa expresión máis xeral obtense da seguinte integral:

$$T(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} T_0 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{k}} \int f(\mathbf{r}', t) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') d^3\mathbf{r}' dt' & t > 0 \\ T_0 & t \leq 0 \end{cases} \quad [3.38]$$

É doado comprobar que se a fonte é constante para un tempo infinito obtense a solución estacionaria [3.25]. Podemos acadar un resultado particularmente útil baixo un conxunto de hipóteses :

- O medio é plano e semiinfinito ( $z > 0$ ).
- Unicamente hai fluxo calorífico no plano  $z = 0$ , aínda que este pode depender do tempo e a posición  $(x, y, 0)$ .
- A temperatura inicial é uniforme (por simplicidade considerarémola nula).

Así a distribución de temperaturas é:

$$T(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{k}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y', t') e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}{4\mathbf{a}(t-t')}} [4\mathbf{pa}(t-t')]^{\frac{3}{2}} dx' dy' dt' & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad [3.39]$$

*Material en movemento*

A ecuación que queremos resolver é:

$$\mathbf{rc} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{rcv}\tilde{\mathbf{N}}T + \tilde{\mathbf{N}}(-\mathbf{k}\tilde{\mathbf{N}}T) = f(\mathbf{r}, t) \quad [3.40]$$

Nos supostos de que as propiedades do material sexan constantes e independentes da temperatura, a ecuación queda

$$\frac{1}{\mathbf{a}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{N}}T - \tilde{\mathbf{N}}^2 T = \frac{f(\mathbf{r}, t)}{\mathbf{a}} \quad [3.41]$$

Sexa  $G$  unha función solución da ecuación:

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial t} + \mathbf{v}\tilde{\mathbf{N}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') - \mathbf{a}\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \mathbf{d}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \quad [3.42]$$

$G$  é unha función de Green, representa a solución da ecuación [3.42] para unha fonte puntual. A súa forma é (Dowden, 2001):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{1}{8pa\sqrt{ap}(t-t')^3} \exp \left\{ \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2a} - \frac{|\mathbf{v}|^2 (t-t')}{4a} - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [3.43]$$

A solución para unha fonte extensa pódese deducir a partir desta expresión. O campo de temperaturas baixo as mesmas hipóteses que a ecuación [3.39] queda:

$$T(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \frac{2a}{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t'=0}^t \frac{f(\mathbf{r}', t')}{8pa\sqrt{ap}(t-t')^3} e^{\frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2a} - \frac{|\mathbf{v}|^2 (t-t')}{4a} - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4a(t-t')}} dt' dx' dy' & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad [3.44]$$

**Bibliografía**

- Álvarez, C. et al. (2001); *Real time control and monitoring of laser hardening process: applications to cylindrical workpieces*; Laser Assisted net Shape Engineering 3. Proceeding of the LANE 2001. Surface & Heat Treatment. 223-234.
- von Allmen, M., A. Blatter (1995); *Laser-beam interactions with materials 2<sup>nd</sup> Ed.*; Springer.
- Bailer-Jones, C.A.L., H.K.D.H. Bhadeshia, D.J.C. MacKay (1999); *Gaussian process modeling of austenite formation in steel*; Materials Science Technology, Vol. 15, pp. 287-294.
- Carslaw, H.S., J.C. Jaeger (1992); *Conduction of heat in solids 2<sup>nd</sup> Ed.*; Oxford Science Publications.
- Dowden, J.M. (2001); *The mathematics of thermal modelling*; Chapman & Hall/CRC
- Duley, W.W. (1983); *Laser processing and analysis of materials*; Plenum.
- Festa, R., O. Manca, V. Naso (1990); *Simplified thermal models in laser and electron beam surface hardening*; J. Heat Mass Transfer, Vol. 33. No. 11, pp. 2511-2518.
- Galantucci, L.M., L. Tricarico (1990); *Un Modello statistico per la previsione dei profili di durezza in acciai da bonifica e da tempra superficiale sottoposti a saldatura ed a trattamento termico*; La Metallurgia Italiana, Vol. 82, No. 10, pp. 969-979.
- Gu, B.W., et al. (1994); *Three dimensional numerical model for laser transformation hardening of metals*; Mat. Sci. Tech., Vol 10, pp. 425-430.
- Kou, S., D.K. Sun, Y.P. Le (1983); *A Fundamentals study of laser transformation hardening*; Metallurgical Transactions A, Vol. 14<sup>a</sup>, pp. 643-653.
- Marya, M, S.K. Marya (1997); *Prediction & optimization of laser transformation hardening*; Laser Assisted Net Shape Engineering Proceedings of the LANE'97; Eds. M. Geiger, F. Vollertsen, Meisenbach Bamberg 1997.
- Ohmura, E., K. Inoue (1991); *Theoretical analysis of laser transformation hardening process of hypoeutectoid steel based on kinetics*; JSME International Journal, Vol. 34, No. 4, pp. 421-429.
- Rajadhyaksha, S.M., P. Michaleris (2000); *Optimization of thermal process using an Eulerian formulation and application in laser surface hardening*; Int. J. Numer. Meth. Engng. 47:1807-1823.
- Silfvast, W.T. (1996); *Laser Fundamentals*; Cambridge University Press.

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

---

Weinberg, H.F. (1992); *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*; Reverté.

Weisstein, E.W. (1999); *CRC concise encyclopaedia of mathematics*; Chapman & Hall / CRC.

Zimba, J., et al. (1999); *Three-dimensional diffusion model for austenitisation of ferritic spheroidal graphite irons*; *Materials Science and Technology*, Vol 15, pp. 1024-1030.

Zubair, S.M., M.A. Chaudhry (1996); *Heat Conduction in a Semi-Infinite Solid Due to Time-Dependent Laser Source*; *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 39 No. 14 pp. 3067-3074.

---

### 3.3 Modelos numéricos: elementos finitos (FEM)

Contra as primeiras opinións que situaban ás técnicas numéricas como ferramentas exclusivamente predictivas, asociadas no caso da Enxeñería Industrial a métodos de produción asistidos por ordenador -CAD, CAE e CAM- (Bathe, 1996), o método dos elementos finitos destaca pola súa capacidade de análise en situacións complexas, incluso no ámbito da investigación. Son un exemplo os artigos: (Álvarez, 2001) (Brown, 1992) (Chen, 2000) (Dai, 2001) (Deus) (Frewin, 1999) (Galantucci, 1997) (Koai, 1993) (Labudovic, 2000) (Ocaña, 1998) (Saavedra, 2000) (Wang, 1992) e (Yáñez, 2001)

#### 3.3.1 Descrición xeral

O método dos elementos finitos ten a súa orixe nos anos cincuenta, cando os enxeñeiros adaptan a análise variacional aplicada aos medios continuos ás estruturas discretizadas con elementos. Sen embargo, pronto se decataron da potencialidade deste método en aplicacións moi variadas: análise térmico, estudio de dinámica de fluídos, campos electromagnético... (Bathe, 1996) (Thomé, 1997).

Na bibliografía consultada non existe unha única descrición matemática do método dos elementos finitos, nin no canto da súa orixe, nin no da súa formulación. Algúns autores sosteñen que o modelo evoluciona dos principios variacionais, entendendo ao algoritmo dos residuos ponderados como un máis (Lewis, 1996) (Prenter, 1989), namentres que outros defenden que a súa xénese está na fórmula de Garlekin (Comini, 1994) (Zienkewicz, 1983) (Thomé, 1997). Os máis deles non distinguen entre o método dos elementos finitos e o de Garlekin (Comini, 1994) (Lewis, 1996) (Thomé, 1997) (Zienkewicz, 1983). Dúas opinións excepcionais son as de P. M. Prenter, que equipara o algoritmo de Rayleigh-Ritz ao método dos elementos finitos (Prenter, 1989), e a de K-J. Bathe, que usa o principio dos traballos virtuais <sup>1</sup> para describir o modelo (Bathe, 1996). Por último H. Huang e A. Usmani describen un método dos elementos finitos compoñendo unha compilación de tres procesos: a formula variacional de

---

<sup>1</sup> Este autor, ao abordar o estudio da converxencia do método, mantén que "... the application of the principle of virtual work is identical to using the stationarity condition of the total potential of the system" (px. 234). A ambigüedade reside, non tanto no que di como onde o di.

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

---

Rayleigh-Ritz, o recubrimento do entorno de integración con intervalos compactos e interconectados polos nodos e a aplicación do algoritmo de residuos ponderados (Huang, 1994).

#### *Métodos variacionais e métodos de residuos*

Os métodos variacionais son o modo de expresar as leis físicas, asemade dunha forma de investigar ás súas solucións en espazos finitos  $\Omega$  (Dautray, 1988).

Tomando como punto de partida a ecuación

$$\mathcal{L}\phi = p \quad [3.45]$$

onde  $\mathcal{L}$  representa un operador que ao actuar sobre a función  $\phi$  dá como resultado  $p$ , a súa formulación variacional ten a estrutura:

$$\Pi(\phi, \lambda) = \int_{\Omega} \lambda(\mathcal{L}\phi - p) d\Omega \quad [3.46]$$

onde  $\lambda$  representa unha función multiplicadora. Un método variacional consiste nun algoritmo numérico que permite atopar unha función de aproximación  $\phi_N$  que debe cumprir (Prenter, 1989)

$$\|\mathcal{L}\phi_N - p\| + \|\phi_N - \phi\| \rightarrow 0 \quad [3.47]$$

Se  $\Pi(\phi, \lambda)$  é simétrico e definido positivo, o extremo  $\delta\Pi$  describirá a un mínimo.

A formulación dos residuos ponderados constrúese a partir da apropiada selección do multiplicador  $\lambda$  na ecuación: (Bathe, 1996) (Zienkiewicz, 1983)

$$\int_{\Omega} \lambda(\mathcal{L}\phi_N - p) d\Omega = 0 \quad \forall \lambda \quad [3.48]$$



Por último hai que salientar que a vantaxe que presentan calquera das dúas formulacións consiste en que se reduce a dimensión das derivadas que describen o problema inicial (Bathe, 1996).

#### *Método dos elementos finitos*

As veces non existe unha formulación variacional para un determinado problema físico, como no caso da ecuación da conducción calorífica. Unha alternativa consiste no emprego dunha composición de tres métodos (Huang, 1994) (Zienkiewicz, 1983):

- Aproximación de Rayleigh-Ritz.
- Discretización do espacio en elementos.
- Método de residuos de Garlekin.

Retomemos, unha vez máis, a ecuación [3.45]. A aproximación de Rayleigh-Ritz consiste en substituír a función  $\phi$  por outra  $\phi_N$  solución da expresión variacional [3.48]:

$$\phi_N = \sum_{i=1}^e a_i N_i \quad [3.49]$$

de tal maneira que aparecerá un residuo

$$R = \mathcal{L}\phi_N - p \quad [3.50]$$

Dividamos agora o dominio  $\Omega$  en  $e$  intervalos (bolas en  $\mathbb{R}^n$ ), de maneira que quede totalmente recuberto sen que se haxa solapamentos. Asemade, agruparemos os polinomios  $a_i N_i$  por conxuntos, de maneira que describirán o comportamento das funcións  $\phi_N$  localmente en cada intervalo. As estruturas matemáticas así construídas reciben o nome de elementos.

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

---

Deste modo aplicase o método de residuos, non sobre o dominio  $\Omega$ , mais si sobre cada un dos dominios  $\Omega_i$  que o recobren:

$$\sum_{i=1}^e \int_{\Omega_i} \lambda(\mathcal{L}\phi_N - p) d\Omega_i = 0 \quad [3.51]$$

O algoritmo de Garlekin consiste en tomar os multiplicadores iguais aos polinomios de aproximación:

$$\lambda = N_i \quad [3.52]$$

Esto conduce a una formulación matricial da ecuación [3.45]:

$$[\mathbf{K}]_{e \times e} [\mathbf{A}]_e = [\mathbf{P}]_e \quad [3.53]$$

Onde  $[\mathbf{K}]_{e \times e}$  representa unha matriz cadrada de rango  $e^2$  que recibe o nome de matriz de estrutura,  $[\mathbf{A}]_e$  representa o vector dos coeficientes da aproximación [3.49] e  $[\mathbf{P}]_e$  é un vector de dimensión  $e$ . Os seus coeficientes teñen a forma:

$$\begin{aligned} p_i &= \int_{\Omega_i} N_i p d\Omega_i \\ k_{ij} &= \int_{\Omega_i} N_i \{L(a_j N_j)\} d\Omega_i \end{aligned} \quad [3.54]$$

#### 3.3.1.1 Discretización espacial

Por discretización espacial enténdese a reticulación do espacio de integración  $\Omega$ , en elementos. A dimensión da malla contribúe á exactitude coa que se obtén a solución, isto é, canto máis pequeno sexa o tamaño dos elementos, maior será a precisión do resultado numérico. O prezo que hai que pagar ao aumentar o número de elementos, e consecuentemente o de nodos, é un maior consumo de memoria e de tempo de procesamento (*Huang, 1994*) (*Lewis, 1996*) (*Saavedra, 2000*).

Vamos a estudar as tres posibilidades na configuración da rede en  $\mathbb{R}^3$  empregadas nas publicacións de investigación, coa condición de que haxa compatibilidade entre elementos, é decer, que a unión entre dous retículos fágase por medio dos nodos da periferia (*Fig. 3.2*):

- Mallado homoxéneo e isotrópico. Nesta situación na que  $\Omega$  queda recuberto por cubos de lado  $h$ , o erro da aproximación ten a forma (*Bathe, 1996*):

$$\|\phi_N - \phi\| \leq Ch^k \quad [3.55]$$

onde  $\phi$  e  $\phi_N$  representan, respectivamente, a solución exacta e aproximada de [3.45]. O parámetro  $C$  é unha constante que depende das propiedades do material e  $k$  proporciona a orde de converxencia.

- Mallado homoxéneo non-isotrópico. O que se pretende é completar o espazo de integración con paralelepípedos que teñan unicamente dúas dimensións iguais, conseguindo así unha maior densidade da rede nunha das direccións. Nesta situación o erro é (*Johson, 1978*):

$$\|\phi_N - \phi\| \propto \left(\frac{h}{\rho}\right)^k \quad [3.56]$$

Aquí  $h$  é a dimensión maior dunha retícula e  $\rho$  representa o diámetro da maior esfera inscrita no elemento. Ao cociente entre estas lonxitudes denomínaselle relación de aspecto.

- Mallado adaptativo. Este modelo de reticulación optimiza os parámetros da rede en función dunha análise local do erro, calculado a partir do gradiente do resultado. A rede evoluciona coas sucesivas simulacións, refinando a malla en cada proceso a partir da distribución dos erros na solución anterior. A rede resultante é moi irregular (pola súa flexibilidade na adaptación ás formas xeométricas, xa que emprega prismas con base triangular de distintos tamaños),

e máis densa alí onde o erro é maior (Huang, 1994) (Lewis, 1996) (Zienkiewicz, 1983).

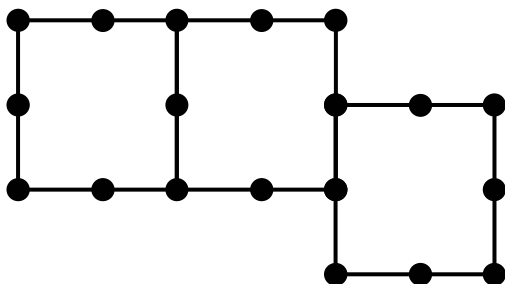


Fig. 3.2 (a) A conexión compatible entre elementos faise mediante os nodos.

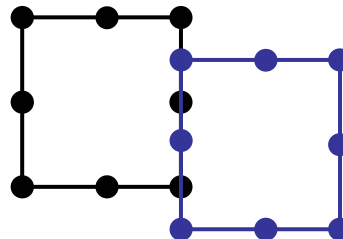


Fig. 3.2 (b) Exemplo de conexión incompatible entre elementos

### 3.3.1.2 Criterio de converxencia

Unha vez que temos un modelo matemático dun problema físico, que desexamos ou necesitamos resolver numericamente, precisamos dun criterio que indique cando un resultado se pode considerar unha solución. A converxencia do método dos elementos finitos queda definida pola ecuación [3.45]. Agora ben, posto que a solución exacta é descoñecida, precísase dun procedemento que permita obviar esta ignorancia.

Tomemos as variables conxugadas  $Q_i(t)$ , enerxía térmica do nodo  $i$ -ésimo no tempo  $t$ , e  $\phi_i(t)$ , distribución de temperatura dese punto para o mesmo instante. Sobre un sistema de coordenadas plano representaremos os pares  $(\phi_{i-1}, Q_{i-1})$  e  $(\phi_i, Q_i)$  (Fig. 3.3). Queremos discernir se o resultado numérico  $\phi_{i+1}^n(t)$  pode ser considerado como unha solución para o nodo  $i+1$ -ésimo (Abaqus, 1997).

O procedemento é como segue:

- A partir dos puntos predecesores  $(\phi_{i-1}, Q_{i-1})$  e  $(\phi_i, Q_i)$  calcúlase unha recta sobre a que estará a posible solución teórica.

- Por proxección estimaranse os puntos de corte entre esta recta e as coordenadas do valor numérico do resultado  $\phi_{i+1}^t$  e  $Q_{i+1}^t$ .
- Por último, compararanse os valores teóricos e os numéricos. Se as diferencias  $\Delta\phi_{i+1}$  e  $\Delta Q_{i+1}$  son máis pequenas que unha certa tolerancia, valor que impón o programador, entón considerarase que o algoritmo acadou a solución para o elemento  $i+1$ -ésimo.
- Este proceso repítese para cada un dos nodos da discretización.

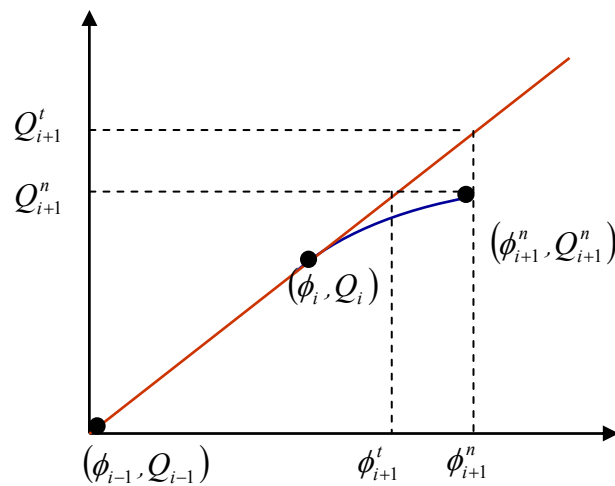


Fig. 3.3 Sobre un plano de coordenadas  $\phi$ ,  $Q$  represéntanse as solucións teóricas (en vermello) e numéricas (en azul) para o nodo  $i+1$ .

### 3.3.2 Particularización á análise térmica

Unha vez sentadas as bases aplicaremos o método dos elementos finitos á ecuación da calor nas seguintes condicións:

- Non haberá perdas enerxéticas nin por convección, nin por radiación.
- Conservarase a masa.

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

---

- Non existirá movemento do medio material.
- O fluxo calorífico dependerá do tempo.
- As propiedades do material son función da temperatura.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(-\kappa \nabla T) = f(\mathbf{r}, t) \quad \text{en } V \quad [3.57]$$

Asemade teremos en conta a presenza dunha condición de contorno tipo Newman:

$$-\kappa \nabla T \cdot \hat{s} = q \quad \text{en } S \quad [3.58]$$

O vector unitario  $\hat{s}$  é normal á superficie  $S$ , e con sentido positivo cando apunta cara fóra. Este conxunto de dúas ecuacións enuncia a formulación forte do problema.

Apliquemos entón, o método enumerado no apartado 3.3.1.

*Primeiro paso: aproximación de Rayleigh-Ritz.*

Escolleremos unha solución aproximada en forma de distribución de temperatura:

$$T_N(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y, z) \theta_i(t) \quad [3.59]$$

Buscaremos minimizar os residuos:

$$\begin{aligned} R_V &= \int_V \left[ \rho c \frac{\partial T_N}{\partial t} - \nabla(\kappa \nabla T_N) - f(\mathbf{r}, t) \right] dV \\ R_S &= \int_S (\kappa \nabla T_N \cdot \hat{s} + q) dS \end{aligned} \quad [3.60]$$

*Segundo paso: discretización do espazo en elementos*

Construiremos a reticulación da xeometría, asociando os polinomios de aproximación en conxuntos, nominalmente elementos, nun número  $e \leq m$ . Á suma de todos os polinomios  $N_i(x, y, z)$  pertencentes a un mesmo elemento, denomínaselle función de estrutura, e ás variables  $\theta_i(t)$  temperaturas nodais.

*Terceiro paso: método de residuos de Garlekin*

Aplicando o método dos residuos ponderados para minimizar [3.60]

$$\int_V W \left[ \rho c \frac{\partial T_N}{\partial t} - \nabla(\kappa \nabla T_N) - f(\mathbf{r}, t) \right] dV + \int_S W (\kappa \nabla T_N \cdot \hat{s} + q) dS = 0 \quad \forall W \quad [3.61]$$

O método de Garlekin escolle como multiplicador á función de estrutura:

$$W = N_j \quad [3.62]$$

de modo que ao introducir a anterior expresión,

$$\int_V N_j \left[ \rho c \frac{\partial T_N}{\partial t} - \nabla(\kappa \nabla T_N) - f(\mathbf{r}, t) \right] dV + \int_S N_j (\kappa \nabla T_N \cdot \hat{s} + q) dS = 0 \quad [3.63]$$

Esta ecuación coñécese como formulación feble do problema da conducción calorífica.

A aplicación da identidade de Green

$$-N_j \nabla(\kappa \nabla T_N) = (\nabla N_j) \cdot \kappa \nabla T_N - \nabla(N_j \kappa \nabla T_N) \quad [3.64]$$

permítenos chegar a

$$\int_V N_j \rho c \frac{\partial T_N}{\partial t} dV + \int_V \nabla N_j \kappa \nabla T_N dV - \int_V N_j f(\mathbf{r}, t) dV + \int_S N_j q dS = 0 \quad [3.65]$$

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

A vantaxe que aporta o método de Garlekin consiste en que partindo dunha expresión con derivadas segundas, conseguimos simplificala ata que esta dependencia redúcese ás derivadas primeiras. O seguinte paso a dar consiste en substituír  $T_N$  pola súa expresión.

Obtemos entón:

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \int_V \left[ N_j \rho c N_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \nabla N_j \mathbf{k} \nabla N_i \theta_i - N_j f(\mathbf{r}, t) \right] dV + \int_S N_j q dS \right\} = 0 \quad [3.66]$$

Esta ecuación ten a estrutura matricial:

$$\mathbf{A}\dot{\Theta} + \mathbf{B}\Theta - \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0 \quad [3.67]$$

de compoñentes:

$$\begin{aligned} A_{ji} &= \int_V N_j \rho c N_i dV = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} N_j^e \rho c N_i^e dV_e \\ B_{ji} &= \int_V \nabla N_j \mathbf{k} \nabla N_i dV = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \nabla N_j^e \mathbf{k} \nabla N_i^e dV_e \\ C_j &= \int_V N_j f(\mathbf{r}, t) dV = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} N_j^e f(\mathbf{r}, t) dV_e \\ D_j &= \int_S N_j q dS = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{S_e} N_j^e q dS_e \end{aligned} \quad [3.68]$$

Asemade  $\Theta$  e  $\dot{\Theta}$  representan aos vectores das temperaturas nodais e das súas derivadas temporais.

#### 3.3.3 Discretización temporal

Existe unha ampla variedade de algoritmos que nos permitirían inserir a dependencia temporal na ecuación [3.67]. Destacamos algúns deles: Houbolt, Wilson, Euler, Crank-Nicholson, etc. Aquí unicamente describiremos o método de Newmark, empregado por ANSYS<sup>TM</sup>, por ser este o programa que usamos na nosa labor de investigación.



Con  $\theta_i(t)$  e  $\dot{\theta}_i(t)$  expresaremos a temperatura do nodo  $i$  no tempo  $t$  e a súa derivada temporal. O método de integración de Newmark, ou regra do trapecio, enúnciase con a expresión (Bathe, 1996) (Huang, 1994)

$$\frac{\dot{\theta}_i(t+\Delta t)+\dot{\theta}_i(t)}{2}=\frac{\theta_i(t+\Delta t)-\theta_i(t)}{\Delta t} \quad [3.69]$$

onde  $\Delta t$  representa o tamaño da discretización temporal. O significado deste paso de tempo é o seguinte: os fundamentos do método variacional só permiten a solución estacionaria dunha ecuación obrigando a que o tempo opere como un parámetro, é decer, resolveremos unha ecuación para cada instante  $t$ ; a evolución temporal construírse a partir da distribución de temperaturas nodais en  $t$ ,  $\theta(t)$ , inseríndoa como unha condición de contorno ao resolver a ecuación no instante  $t+\Delta t$ .

Con estas premisas buscamos a solución á ecuación [3.67] para o instante  $t+\Delta t$ , isto é,

$$\mathbf{A}\dot{\Theta}(t+\Delta t)+\mathbf{B}\Theta(t+\Delta t)-\mathbf{C}(t+\Delta t)+\mathbf{D}(t+\Delta t)=0 \quad [3.70]$$

onde supoñemos que os vectores  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  poden depender do tempo. Ao aplicar a regra do trapecio e reordenar os termos para separar as dúas dependencias temporais obtemos,

$$\left[\frac{2}{\Delta t}\mathbf{A}+\mathbf{B}\right]\Theta(t+\Delta t)-\mathbf{C}(t+\Delta t)+\mathbf{D}(t+\Delta t)=\mathbf{A}\left[\frac{2}{\Delta t}\Theta(t)+\dot{\Theta}(t)\right] \quad [3.71]$$

ecuación que determina a distribución da temperatura no instante  $t+\Delta t$  a partir da distribución da temperatura, e da súa derivada, no tempo  $t$ .

Existen limitacións ao tamaño da discretizacións  $\Delta t$  que dependen da morfoloxía da ecuación que define o problema físico. Estas restriccións maniféstanse por medio de relacións adimensionais, que no caso da ecuación da conducción calorífica liga a extensión do paso temporal ao tamaño da discretización espacial mediante o número de Fourier,

$$Fo = \frac{\rho c}{K} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad [3.72]$$

Por último, hai que ter en conta un valor mínimo de operatividade desta, ou outra, relación que introduce o programa numérico. No caso do código ANSYS<sup>TM</sup> o mínimo número de Fourier permitido é de 5.4.

#### 3.3.4 Cambios de estado y de fase

Nos tratamentos térmicos dos materiais prodúcese unha grande variedade de transformacións de fase. Salientaremos as dúas de maior importancia no caso do endurecemento do aceiro.

Por unha banda están os procesos de crecemento martensítico, que dependen dun conxunto amplo de variables: temperatura, gradiente de temperatura, velocidade de arrefriamento, etc... . Este tipo de metamorfose é complicada de tratar dentro dun algoritmo de elementos finitos. En calquera caso a enerxía posta en xogo na transformación é moi pequena comparada, por exemplo, co calor latente de fusión (*Brown, 1992*).

O outro tipo de cambio de fase no que nos fixaremos é a transición sólido-líquido-sólido. A completa comprensión deste fenómeno implica a varios procesos, dos cales o máis salientable é a transferencia calorífica.

A forma máis cómoda de inserir os cambios de fase nun modelo de elementos finitos é mediante a calor específica efectiva. Esta tomará valores diferentes en cada rango de temperatura (*Huang, 1994*) (*Lewis, 1996*):

$$\begin{aligned} c_{ef} &= \rho c & T < T_S \\ c_{ef} &= \rho c + \frac{L}{T_L - T_S} & T_L < T < T_S \\ c_{ef} &= \rho c & T > T_L \end{aligned} \quad [3.73]$$

onde tanto a densidade como a calor específica son función da temperatura. A dispersión da calor latente entre un rango estreito de temperaturas, dificulta a converxencia do método de elementos finitos.

**Bibliografía**

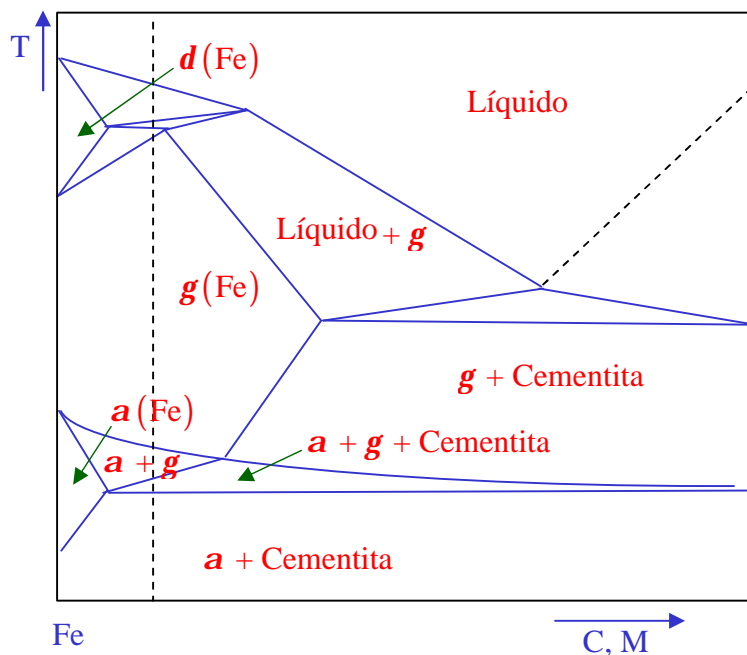
- Abaqus/Standard User's Manual. Vol I. Versión 5.7* (1997); Hibbit, Karlsson & Sorensen.
- Álvarez, C. et al. (2001); *Real time control and monitoring of laser hardening process: applications to cylindrical workpieces*; Laser Assisted net Shape Engineering 3. Proceeding of the LANE 2001. Surface & Heat Treatment. 223-234.
- Ansys user's manual 5.0. Theory* (1994); Swanson Analysis Systems, Inc.
- Bathe, J-K. (1996); *Finite element procedures*; Prentice Hall.
- Brown, S., H. Song (1992); *Finite element simulation of welding of large structures*; Journal of Engineering for Industry, November, Vol. 114, pp. 441-451.
- Chen, D.H., Z.M. Zhang (2000); *Thermal analysis of the volume absorber in pulsed excimer laser calorimeters*; Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3061-3072.
- Comini, G. et al. (1994); *Finite element analysis in heat transfer*; Taylor & Francis.
- Dai, K., L. Shaw (2001); *Thermal and stress modelling of multi-material laser processing*; Acta Materialia , 49 , 4171-4181.
- Dautray, R, J.L. Lions (1988); *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5*; Springer-Verlag.
- Deus, A.M., J. Mazumder; *Two-dimensional thermo-mechanical finite element model for laser cladding*.
- Dowden , J.M. (2001); *The mathematics of thermal modeling*; Chapman & Hall / CRC.
- Eriksson, K. et al. (1996); *Computational differential equations*; Cambridge University Press.
- Frewin, M.R., D.A. Scott (1999); *Finite element model of pulsed laser welding*; Welding Research Supplement, January , pp. 15-s / 16-s.
- Galantucci, L.M., A. Gravina, L. Tricarico (1997); *Laser heat treatment using various overlapping degrees of the beam passes: a FEM transient analysis*; laser assisted net shape Eng. 2, Pro. LANE'97, pp. 659-698.
- Huang, H.C., A.S. Usmani (1994); *Finite element analysis for heat transfer*; Springer-Verlag.
- Johnson, C. (1978); *Numerical solution of partial differential equations by finite element method*; Cambrigde University Press.

- Koai, K. et al. (1993); *Heat transfer in laser hardening of rotating cylinders*; HTD-Vol. 159, Transport Phenomena in Nonconventional Manufacturing and Material Processing ASME 1993.
- Krasnov, M.L. et al. (1992); *Cálculo variacional*; Mir.
- Labudovic, M. et al (2000); *Three-dimensional finite element modelling of laser surface modification*; Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 214 Part B, pp. 683-692.
- Lawrent'ev, M.A. (1963); *Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations*; Dover.
- Lewis, R.W. et al. (1996); *The finite element method in heat transfer analysis*; John Wiley & Sons.
- Marsden, J.E., T.S. Ratin (1994); *Introduction to mechanics and symmetry*; Springer-Verlag.
- Ocaña, J.L. et al. (1998); *A 3D model for the predictive assessment of laser surface treatments*; Proc. of the 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Welding and Melting by Electron and Laser Beams, Vol. 1, pp. 93-100.
- Prenter, P.M. (1989); *Spline and variational methods*; Wiley Classic Library.
- Rey, J. (1988); *Los problemas lineales de la Física*; CSIC.
- Saavedra, E. Et al. (2000); *Predicción de la evolución de la temperatura durante el tratamiento térmico de materiales metálicos por láser*; Anales de la Ingeniería Mecánica. Año 13, Vol. 3, diciembre 2000, pp. 1759-1764.
- Thomé, V. (1997); *Galerkin finite element methods for parabolic problems*; Springer.
- Wang, K.F., S. Chandraseka, H.T.Y. Yang (1992); *Finite-element simulation of induction heat treatment*; JMEPEG, Vol. 1, pp. 97-112.
- Woodhouse, N.M.J. (1990); *Introducción a la mecánica analítica*; Alianza Universidad Textos.
- Yáñez, A. et al. (2001); *Modelling of temperature evolution on metals during laser hardening process*; Applied Surface Science 186 (2002) 611-616.
- Zienkiewicz, O.C., K. Morgan (1983); *Finite elements and approximation*; John Wiley & Sons.



### 3.4 Transformacións metalúrxicas no sistema ferro-carbono

No tratamento térmico dos aceiros pódense producir unha ampla variedade de alteracións na morfoloxía do material e/ou na súa estrutura interna, isto é o que se coñece como transformacións de fase. Para describir estes procesos úsanse gráficas que representan a temperatura fronte á composición en carbono e outros metais e que reciben o nome de diagramas de transformacións no equilibrio. En *Fig. 3.4* vese o esquema dunha destas gráficas para o sistema multicompoñente Fe-C-M, onde M simboliza calquera combinación de Mn, Si, Ni, Cr, Mo, Cu, V, W, e Nb. (*Victor, 1998*).



*Fig. 3.4* Esquema dun diagrama de fases no equilibrio do sistema Fe-C-M. A liña vertical separa os aceiros en hipoeutectoides e hipereutectoides

O valor da concentración de carbono divide o diagrama 3.4 en dúas partes:  $C < 2\%$  para os aceiros e  $C > 2\%$  para os ferros fundidos. O primeiro tramo aínda pode subdividirse en outros dous: os aceiros que conteñen menos do 0.8% denomínanse hipoeutectoides, en tanto que os que están do 0.8 ao 2 % reciben o nome de hipereutectoides. Neste traballo centrarémonos nos aceiros hipoeutectoides.

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

---

A figura 3.4 amosa que fases están presentes nun equilibrio para diferentes combinacións de temperatura e de concentración de carbono. Algunhas son:

- A ferrita é unha solución sólida constituída polas fases **a** ou **d** do ferro e trazas de carbono. É moi branda pero dúctil e maleable.
- A austenita é unha disolución sólida de carbono na fase **g** do ferro tamén moi branda, dúctil e tenaz. Nalgunhas ocasións aparece a temperatura ambiente.
- A cementita ( $\text{Fe}_3\text{C}$ ) ten unha estrutura cristalina ortorómbica o que lle dá unha configuración cunha dureza elevada pero moi fráxil. Esta fase metaestable ao descompoñerse produce grafito.
- A perlita é unha mestura eutectoide que consiste en placas alternas de cementita e ferrita. Tamén é metaestable.

As transformacións entre distintas fases quedan delimitadas por temperaturas que marcan o inicio e a conclusión da metamorfose. Estas temperaturas representadas en condicións de equilibrio como liñas sinxelas, desdóbranse durante un quentamento ou durante un arrefriamento Algunhas destas temperaturas son:

- $T_{Ac1}$  ou temperatura eutectoide. É a mínima temperatura que é necesario acadar durante o quentamento do aceiro para que comece a formación de austenita.
- $T_{Ac3}$ . Considérase como a temperatura, no período de quentamento, na que a formación de austenita está completa.
- $T_{Ar3}$ . Durante o arrefriamento marca o inicio da formación da ferrita ou ferrita + cementita a partir da austenita.
- $T_{Ar1}$  ou temperatura de transformación completa. Delimita o valor da temperatura para o que se completou a conversión austenita  $\rightarrow$  ferrita ou austenita  $\rightarrow$  cementita.



#### *Diagramas de transformación*

Baixo a designación do termo tempero englobase un conxunto de transformacións de fase que implican tanto ao quecemento como ao arrefriamento do material. Os aspectos cinéticos destas modificacións na estrutura interna do material son moi importantes á hora de explicar a presenza da fase martensítica na aliaxe tratada.

Os diagramas de transformación describen, en función do tempo, os cambios que ocorren durante o proceso. Durante a formación da martensita a partir da ferrita, perlita ou da martensita revenida diminúe o volume da probeta quentada, existe logo unha relación entre a presenza das fase do metal, o volume de gran e a dilatación da mostra. Catro son os tipos de diagramas, aínda que poden quedar englobados en dous grupos:

- Diagramas de transformacións isotérmicas. Estes diagramas amosan o que lle ocorre ao aceiro cando mantén a súa temperatura constante durante un período prolongado de tempo. Dentro deste grupo distinguiremos:
  - IT (Isothermal Transformation). Permiten coñecer en que instante comeza ou finaliza a formación da austenita, sendo moi útiles en tratamentos térmicos rápidos como o tempero con láser.
  - TTT (Time Temperature Transformation). Tomando como punto de partida unha temperatura cun valor superior ao de  $T_{Ac3}$  arrefríase o aceiro ata un valor desexado. Sobre un sistema de referencia temperatura-tempo descríbense as curvas da fracción isovolúmica transformada a partir da austenita (gráficas que teñen perfil de C). Nos dous extremos represéntanse as conversións austenita  $\rightarrow$  perlita (altas temperaturas) e austenita  $\rightarrow$  bainita (baixas temperaturas). Na gráficas 3.5 vese un exemplo,  $M_s$  representa a temperatura de inicio da formación de martensita.

### 3. Estudio teórico do tratamento térmico de materiais

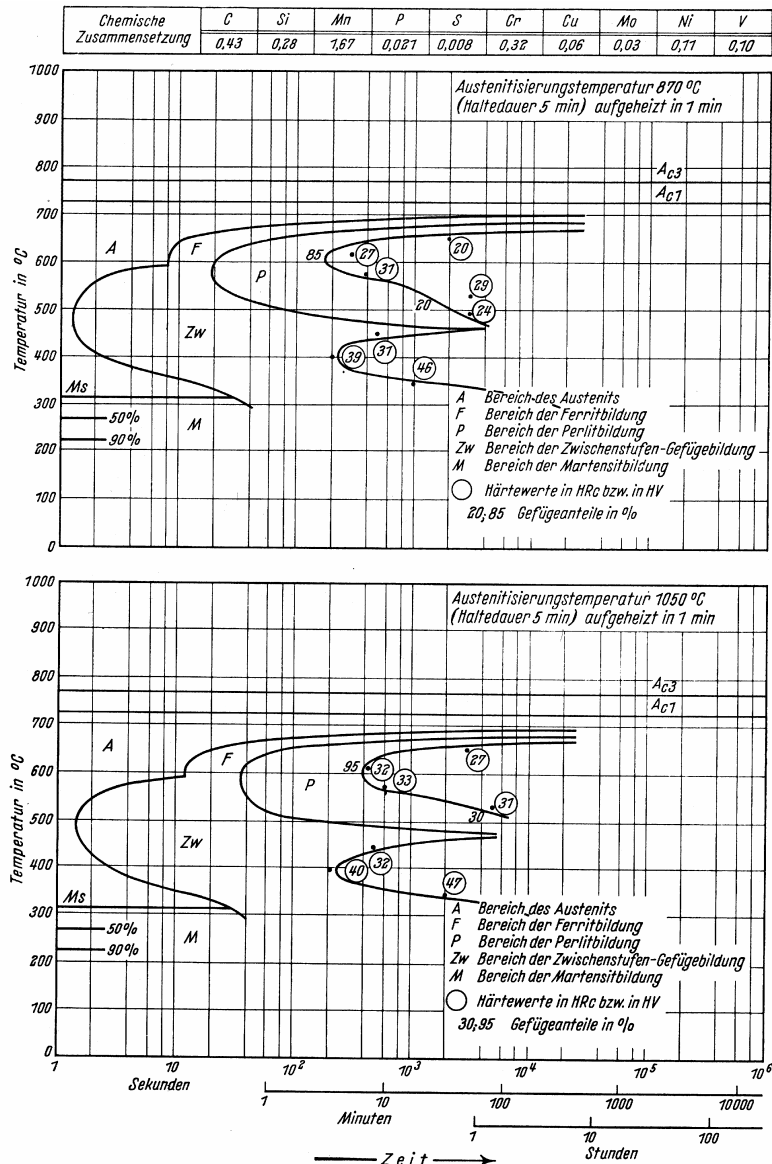


Fig. 3.5 Exemplo de diagramas de transformación austenita → perlita (para temperaturas entre  $A_{c1}$  e  $600^{\circ}\text{C}$ ) e austenita → bainita (para temperaturas entre  $600^{\circ}\text{C}$  e  $M_s$ ) (ASM, 1991).

- Diagramas de quentamento e arrefriamento continuo. Nos casos prácticos de tratamentos térmicos case que non se atopan situacións nas que se manteña constante a temperatura. Unha alternativa aos diagramas de transformacións isoterma consiste en quentar ou arrefriar continuamente a mostra estudada e medir a dilatación para sucesivos valores da temperatura dando lugar a dous tipos de representacións gráficas:

- CHT (Continuous Heating Transformation). Diagramas de transformación por quentamento continuo.

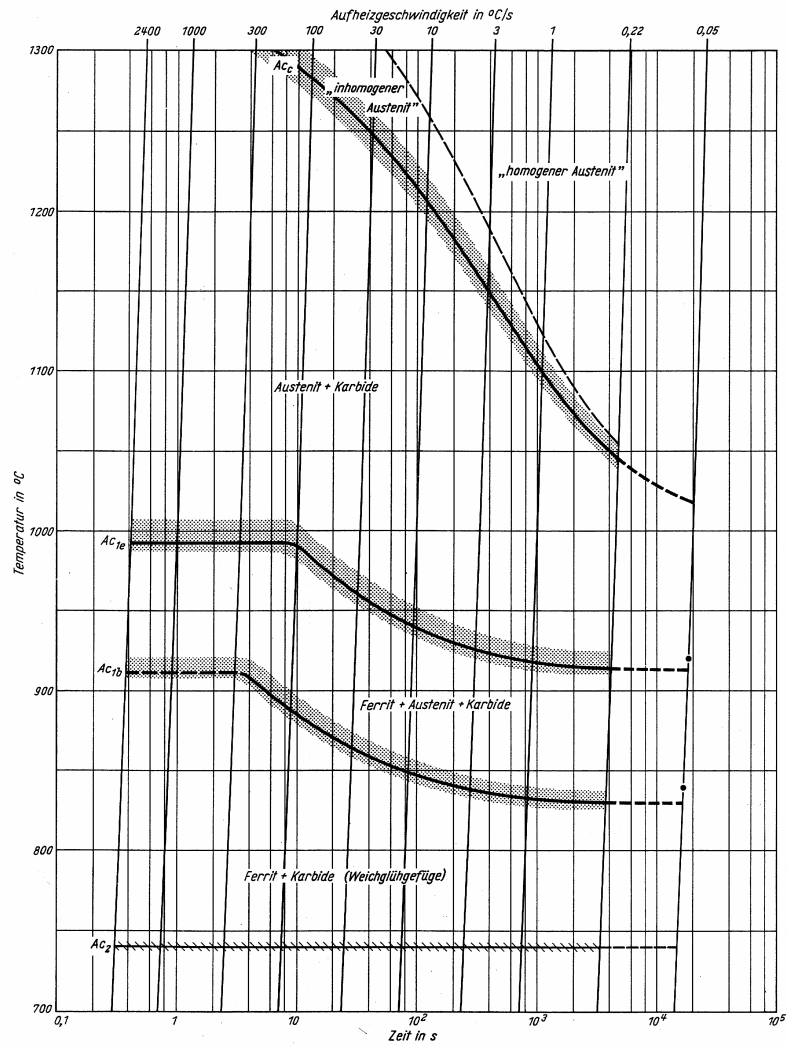


Fig. 3.6 Exemplo de diagrama CHT para o aceiro X38CrMoV 5 1 (ASM, 1991)

- CCT (Continuous Cooling Transformation). Diagramas de transformación por arrefriamento continuo.

Para rematar con este apartado cómpre puntualizar que estes diagramas son moi sensibles á composición exacta da aliaxe (ASM, 1991).

**Bibliografía**

ASM Handbook, (1991); *Heat treating*; ASM International, Volume 4.

Caballero, F.G. et al. (2001); *Modelización del proceso de austenización de un acero eutectoide*; Rev. Metal. Madrid 37 pp. 573-581.

Callister, W.D. (2000); *Ciencia e ingeniería de los materiales*; Editorial Reverté, S.A.

Stüdeman, H. (1980); *Tratamientos térmicos de los aceros*; URMO, S.A. de Ediciones.

Victor Li, M. et al. (1998); *A computational model for the prediction of steel hardenability*; Metallurgical and Materials Transactions B, Vol. 29B, pp. 661-672.

# ***Capítulo 4***

## ***Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser***

### *4.1. Modelos analíticos*

#### *4.1.1. Método das imaxes*

##### *4.1.1.1. Xeometría plana: placas*

##### *4.1.1.2. Xeometría cilíndrica: tubos*

##### *4.1.1.3. Caracterización do método das imaxes*

#### *4.1.2. Aplicación do método das imaxes*

##### *4.1.2.1. Feixe rectangular estacionario*

##### *4.1.2.2. Modo $TEM_{01}$ \* en movemento*

#### *4.1.3. Análise dimensional*

### *4.2. Modelos de elementos finitos*

#### *4.2.1. Malladol*

#### *4.2.2. Xeometrías*

#### *4.2.3. Discretización do feixe*

#### *4.2.4. Erros introducido coa discretización*

### *4.3. Transformacións metalúrxicas*

*Neste capítulo estudiaremos dous métodos analíticos que servirán tanto para a busca dos parámetros do proceso de tempero como para aportar solucións que sirvan de referencia á hora de calibrar os resultados obtidos numericamente. Estes dous modelos serán o método das imaxes (que fai uso da condición de perpendicularidade nas isothermas nas lindes da xeometría) e a análise adimensional.*

*Para facer fronte ás nosas necesidades de investigación constrúuse un programa que, a modo de intérprete, facilita aplicar a técnica dos elementos finitos e permite estudar e controlar os erros do modelo. Con esta ferramenta fíxose un estudio sobre a influencia das distintas discretizacións xeométricas sobre o erro do resultado.*

*Por último estudiaremos como se traducir os ciclos térmicos obtidos coa simulación en diagramas de fases, primeiro, e posteriormente en mapas de dureza.*

---

## 4.1 Modelos analíticos

Neste apartado partindo das solucións atopadas facendo uso da función de Green buscaremos:

- Limitar os propagadores sobre contornos infinitos a medios finitos, pero con condicións de simetrías nos lindes (método das imaxes).
- Aplicar este procedemento para obter dúas solucións concretas do campo de temperaturas sobre unha placa: feixe estacionario rectangular uniforme e modo TEM<sub>01</sub>\*.
- Reducir o número de cálculos e facilitar a elección dos parámetros do proceso de tempero por medio da análise dimensional.

### 4.1.1 Método das imaxes

O método das imaxes permite construír a función de Green para substancias materiais con lindes xeométricas. Centrarémonos en dúas xeometrías: plana e cilíndrica

#### 4.1.1.1 Xeometría plana: placas

Principiaremos co estudio dunha fonte puntual estacionaria que actúa sobre un medio material plano e infinito nas direccións  $X$  e  $Y$ , pero restrinxido por  $z = h$  e  $z = 0$ . Nestas circunstancias o plano  $z = h$  é unha adiabática, o que é igual que decer que as isothermas son normais á superficie.

$$q_z(z = h) = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad [4.1]$$

Agora ben, a definición da función de Green permite establecer que a relación anterior é equivalente a:

$$\left. \frac{\partial G_z}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad [4.2]$$

Ademais a implantación da fonte aporta outra condición sobre o plano  $z = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial G_z(z)}{\partial z} \right|_{z=0^+} = 0 \quad [4.3]$$

Pódese conseguir que se cumpra a condición [4.2] engadindo unha fonte ficticia (imaxe) en  $z = 2h$ ,

$$G_z = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \left[ \exp \left\{ -\frac{z^2}{4a(t-t')} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(z-2h)^2}{4a(t-t')} \right\} \right] \quad [4.4]$$

Agora ben, para restablecer o cumprimento do requisito [4.3] cómpre introducir unha nova imaxe en  $z = -2h$ ,

$$G_z = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \left[ \exp \left\{ -\frac{z^2}{4a(t-t')} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(z-2h)^2}{4a(t-t')} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(z+2h)^2}{4a(t-t')} \right\} \right] \quad [4.5]$$

Esta continua adición de termos conduce a unha solución en forma de serie,

$$G_z = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(z+2nh)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.6]$$

Se queremos limitar as dimensións  $x$  e  $y$  procederemos de maneira semellante. Supoñamos que a orixe de coordenadas está no centro da peza, o termo  $G_y$  da función de Green:



$$G_y = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{(y-y')^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.7]$$

Se o medio está limitado por  $y = \pm b$  as condicións de contorno son análogas a [4.2]:

$$\left. \frac{\partial G_y}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad \left. \frac{\partial G_y}{\partial y} \right|_{y=-b} = 0 \quad [4.8]$$

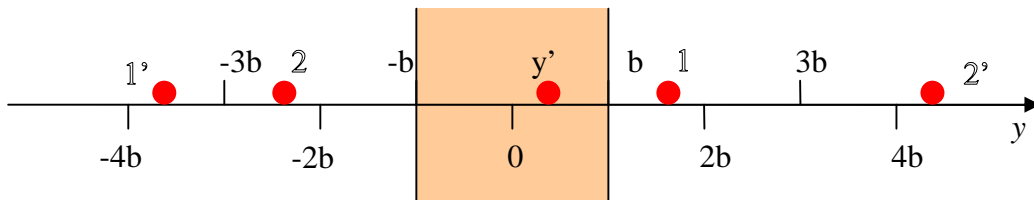


Fig. 4.1 Fonte orixinaria en  $y'$  e simétricas (1 e 2) respecto a  $\pm b$ . A fonte 1' é simétrica de 1 respecto a  $-b$ , e a 2', a simétrica de 2 respecto a  $b$ .

Para que se cumpran simultaneamente as dúas condicións introduciremos fontes imaxes simétricas respecto aos planos  $y = \pm b$ , como amosa a figura. A contribución de todas as fontes conforma unha serie:

$$G_y = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( y - [(-1)^n y' + 2nb] \right)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.9]$$

Da mesma maneira, se os bordos da peza na dirección do eixo  $X$  sitúanse nos planos  $x = \pm a$  a contribución tanto da fonte como das súas imaxes é:

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( x - [(-1)^n x' + 2na] \right)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.10]$$

#### 4.1.1.2 Xeometría cilíndrica: tubos

Para construír unha aproximación á función de Green dun cilindro oco, de espesor  $h$  pequeno comparado co seu radio  $R$ , podemos facer uso do anterior procedemento (Álvarez, 2001). Fixando a lonxitude do cilindro en  $2pR$ , construímos unha peza plana limitada por  $x = \pm pR$ ,  $y = \pm b$ ,  $z = h$  e  $z = 0$ . Para seguir aplicando a solución da xeometría plana cómprenos cumprir dúas condicións:

- Debe existir unha periodicidade no campo de temperaturas  $T(x, y, z, t) = T(x + 2pR, y, z, t)$ .
- Debe existir continuidade entre o fluxo emerxente dun plano e o fluxo entrante no plano consecutivo.

A función que satisface estas circunstancias é:

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( x - \left[ (-1)^n x' + 2npR \right] \right)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.11]$$

#### 4.1.1.3 Caracterización do método das imaxes

##### *Converxencia da serie*

A aplicación do método das imaxes implica a manipulación dunha suma de infinitos termos. Afortunadamente non todos os sumandos contribúen por igual. Para ter unha idea do comportamento destas series faremos un estudio doutra comparable ás anteriores:

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{(n-n_0)^2}{4at/a^2} \right) \quad [4.12]$$

A aplicación do método da integral indícanos que en cada instante  $t$  a serie converxe a:

$$H \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(n-n_0)^2}{4at/a^2}\right) dn = \frac{2\sqrt{apt}}{a} \quad [4.13]$$

É decer, en cada instante  $t$  a serie compórtase como unha gaussiana de anchura

$$w = \frac{\sqrt{8at}}{a} \quad [4.14]$$

Así, en  $H$ , o número de sumandos que debemos considerar dependerá do criterio que se adoite. Para que a contribución do sumatorio sexa do 95% de  $H$  debemos escoller unha cantidade de termos igual ao enteiro máis próximo a  $2w+1$ . Se estimamos necesario o 99.5% de  $H$ , o límite debe estenderse ata o enteiro impar máis próximo a  $3w$ . A modo de resume:

$H$	Extensión de $H$
$0.95 H$	$\sum_{n=-\sqrt{8at}/a}^{\sqrt{8at}/a} \exp\left(-\frac{(n-n_0)^2}{4at}\right)$
$0.995 H$	$\sum_{n=-1.5\sqrt{8at}/a}^{1.5\sqrt{8at}/a} \exp\left(-\frac{(n-n_0)^2}{4at}\right)$

[4.15]

Como exemplo podemos considerar o caso no que  $t=1$ ,  $a=1/4$ ,  $n_0=0$  e  $a=1$ . Con estes valores a anchura da gaussiana será de  $w=\sqrt{2}$ . Para que a serie englobe máis do 99.5% da suma o número de termos debe ser de 5, dende -2 a 2. Na táboa 4.2, onde están representados algúns dos termos desta serie e a súa contribución, pódese verificar o anteriormente exposto. Unha representación gráfica (Fig. 4.3) permítenos comprobar que  $H$ , ademais de converxer, en esencia está constituída polos termos máis próximos ao valor central  $n=0$ .

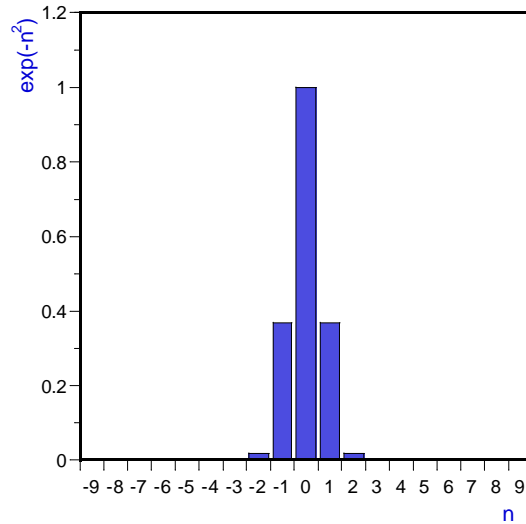
As conclusións que se tiran deste exemplo son tres:

- o número de termos da serie a considerar, aos que podemos denominar reflexións, aumenta segundo crece o tempo [ec. 2.14].

#### 4. Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

- A cantidade de imaxes que se deben empregar é inversamente proporcional ao tamaño xeométrico do intervalo de integración  $[-a, a]$ .
- Non todos os sumandos contribúen por igual.

n	H	%
-3	0.0001	0.01
-2	0.0184	1.03
-1	0.3863	20.75
0	1.3863	56.41
1	1.7542	20.75
2	1.7725	1.03
3	1.7726	0.01
4	1.7726	$7.10 \cdot 10^{-6}$



Tab. 4.2 Serie H e o peso específico de cada termo.

Fig. 4.3 Valor dos termos da serie H.

#### Caracterización do método das imaxes: anchura e área

Supoñamos unha fonte puntual situada en  $(x', 0, 0)$  nunha peza infinita nas direccións Z e Y pero limitada polos planos  $x = \pm a$ . A función de Green é:

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( x - \left[ (-1)^n x' + 2n_x a \right] \right)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.16]$$

Parémonos a estudar o significado desta función. A exponencial que aparece representa en cada intre unha gaussiana de anchura

$$w = \frac{\sqrt{8a(t-t')}}{a} \quad [4.17]$$

Como pode observarse esta dimensión, que é unha calidade da función normal, depende do tempo e do tamaño da peza.

O outro elemento que chama a nosa atención é o divisor que hai diante do sumatorio. Para identificalo substituiremos a suma por unha integral estendida a todas as imaxes

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( x - [(-1)^n x' + 2n_x a] \right)^2}{4a(t-t')} \right\} dn_x \quad [4.18]$$

É evidente, entón, que o termo

$$A_x = \frac{\sqrt{pa(t-t')}}{a} \quad [4.19]$$

representa a área da integral. De aquí dedúcense dúas cousas:

1. Ao ser  $A_x$  unha área que depende dunha raíz cadrada, o resultado das operacións coas magnitudes que están dentro da raíz debe ser maior que cero. A resultas disto o tempo asociado ao punto onde se mide a temperatura debe ser maior que o asociado á fonte.

$$t > t' \quad [4.20]$$

Este resultado non debe sorprendernos xa que está implícito na definición da función de Green  $G_x(x, x', t, t')$ .

2. Como a área  $A_x$ , para cada valor de  $t-t'$  é constante, canto máis grandes (pequenas) sexan as dimensións da probeta menor (maior) será  $A_x$  co que o número de imaxes será menor (maior).

Como queira que tanto a área como a anchura dependen da diferenza  $t-t'$ , canto maior (menor) sexa esta, maior (menor) será o número de imaxes que contribúen significativamente na expresión [4.16].

#### 4. Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

---

Estes dous enunciados establecen un principio que poderíamos chamar de mínima causalidade: aínda que a distribución de temperaturas que se deduce da aplicación do método das imaxes aparece simultaneamente en todos os puntos do espacio cando a fonte comeza a actuar, non ten sentido estudar os casos onde  $t \leq t'$ . Hai que salientar que a este resultado chégase sen definir unha velocidade de propagación da calor.

*Caracterización do método das imaxes: contribución de cada termo*

Retomemos a expresión do propagador para unha fonte puntual [4.16]. Ao introduciren a constante de normalización dentro do sumatorio, os cocientes que obtemos cuantifican a contribución de cada termo na serie. Como paradigma de comportamento fixémonos no sumando central ( $n=0$ ) e calculemos o seu límite cando  $(t-t') \rightarrow \infty$ , se  $x \neq x'$ , é decer, vamos estudar como evoluciona este termo segundo nos afastamos temporalmente da influencia da fonte

$$\lim_{(t-t') \rightarrow \infty} G_x \Big|_{n_x=0} = \lim_{\substack{(t-t') \rightarrow \infty \\ n_x=0}} \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')} \right\} = 0 \quad [4.21]$$

Tamén vemos que, tomando  $t-t' = cte$ , os demais termos da serie tenden cara cero

$$\lim_{n_x \rightarrow \infty} G_x \Big|_{t-t'=cte} = \lim_{\substack{n_x \rightarrow \infty \\ t-t'=cte}} \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{\left( x - \left[ (-1)^n x' + 2n_x a \right] \right)^2}{4a(t-t')} \right\} = 0 \quad [4.22]$$

Estes resultados significa que segundo  $(t-t') \rightarrow \infty$  o valor dos sumandos diminúe. Na gráfica 4.4 vese a evolución do termo central [4.21] co tempo. Acádase o máximo cando  $t-t' = (x-x')^2 / 2a$

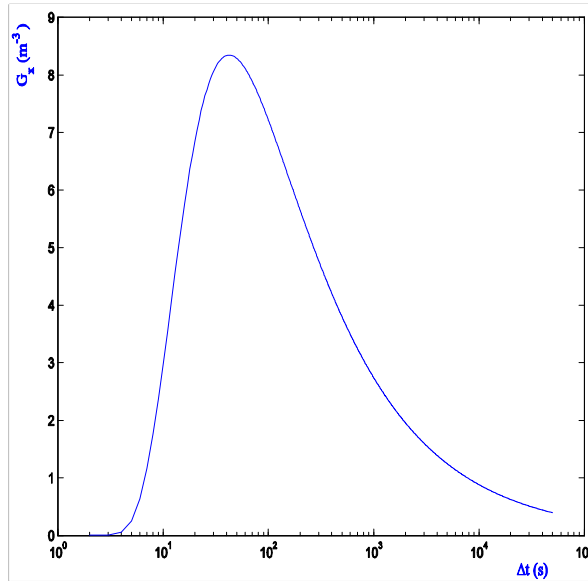


Fig. 4.4 Evolución do termo central da serie ( $n = 0$ ) co tempo. Esta curva está construída tomando  $a = 1.02 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $x-x' = 29 \text{ mm}$ .

Agora ben, xa que tanto a área como a anchura da gaussiana aumentan co tempo, no límite  $(t-t') \rightarrow \infty$  a serie estaría formada por infinitos termos con valor case nulo pero que en conxunto definirían unha superficie de medida infinita. Por exemplo, para o caso no que a fonte  $f$  sexa constante, caendo na conta de que a exponencial crece máis axiña que a constante  $\sqrt{4pa(t-t')}$ , a temperatura tenderá cara

$$\lim_{(t-t') \rightarrow \infty} T \Big|_{f=cte} \rightarrow \infty \quad [4.23]$$

*Estudio sobre o número de imaxes necesarias:  $n$  grade*

Vamos centrarnos agora no estudio do número das imaxes que temos que usar. Primeiramente hai que definir que significa que  $n$  sexa grande.

A máxima separación na dirección  $X$  que pode haber entre a fonte e o punto no que calculamos a temperatura é a distancia entre os bordos

$$\text{abs}(x-x') \Big|_{\text{max}} = 2a \quad [4.24]$$

Substituíndo esta expresión na función de Green nese eixo

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(2a-2n_x a)^2}{4a(t-t')}\right\} \quad [4.25]$$

Ao desenvolver o numerador da exponencial

$$(2a-2n_x a)^2 = (2a)^2 + 2n_x a[2n_x a - 4a] \quad [4.26]$$

Vese doadamente que a partir de  $n_x = |\pm 3|$  comezan a dominar os termos asociados ás imaxes. É decer, podemos considerar que o número de imaxes é grande cando  $-3 \geq n_x \geq 3$ .

Apliquemos isto. Para un grande número de reflexións podemos aproximar a expresión do propagador [4.16] na dirección X por:

$$G_x \approx \frac{1}{\sqrt{4pa(t-t')}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(2n_x a)^2}{4a(t-t')}\right\} \quad [4.27]$$

Recortando a serie en  $N_x$  termos a función de Green queda

$$G_x \approx \frac{\sum_{n_x=-N_x}^{N_x} \exp\left\{-\frac{(2n_x a)^2}{4a(t-t')}\right\}}{\sqrt{4pa(t-t')}} \approx \frac{\int_{-N_x}^{N_x} \exp\left\{-\frac{(2n_x a)^2}{4a(t-t')}\right\} dn_x}{2a \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(n_x a)^2}{4a(t-t')}\right\} dn_x} \quad [4.28]$$

$$G_x \approx \frac{1}{2a} \operatorname{erf}\left(\frac{N_x}{\sqrt{a(t-t')/a}}\right)$$

A función erro é coñecida e está tabulada (*Carslaw, 1992*). Algúns valores de  $N_x / \left[\sqrt{a(t-t')/a}\right]$  pódense ver na seguinte táboa



$\mathbf{x} = N_x / \left[ \sqrt{\mathbf{a}(t-t')/a} \right]$	$\text{erf}(\mathbf{x})$
1	0.842701
2	0.995322
3	0.999978

[4.29]

Para unha placa de dimensións  $2a \times 2b \times h$  a función de Green, con un número grande de reflexións, pódese aproximar por

$$G \approx \frac{1}{[4pa(t-t')]^{\frac{3}{2}}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(2n_x a)^2 + (2n_y b)^2 + (2n_z h)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.30]$$

Seguindo o mesmo procedemento que en [4.28] obtemos como resultado

$$G \approx \frac{1}{2a2b2h} \text{erf} \left( \frac{N_x}{\sqrt{\mathbf{a}(t-t')/a}} \right) \text{erf} \left( \frac{N_y}{\sqrt{\mathbf{a}(t-t')/b}} \right) \text{erf} \left( \frac{N_z}{\sqrt{\mathbf{a}(t-t')/h}} \right) \quad [4.31]$$

Concluimos entón que tamén inflúen as dimensións da peza (intervalo de integración) no número de imaxes: canto maior sexa o seu volume, menor será o número de reflexións necesarias.

Asemade o tempo  $t$  actúa de forma dinámica sobre os  $N_i$ : en cada intre é necesario un número determinado de imaxes. Para demostrar esta afirmación vamos traballar coa expresión [4.31] escollendo unha precisión do 99.99% ( $\mathbf{x} = 3$ ).

$$N_x = \frac{3}{a} \sqrt{\mathbf{a}(t-t')} \quad [4.32]$$

De aquí dedúcese que o número de imaxes necesario para  $t_1$  será  $N_1$ . Para un intre  $t_2 > t_1$  precisaranse  $N_2 > N_1$  reflexións. Así, se quixeramos representar a curva de evolución da temperatura fronte ao tempo deberíamos calcular para cada  $t_i$  o número  $N_i$ . Asemade,

#### 4. Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

---

nun instante  $t$  o número de reflexións é inversamente proporcional ás dimensións do entorno de integración  $a$ .

Levando o número de imaxes ás expresións da área e da anchura en función do tempo, chegamos a

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\sqrt{p}}{3} N_x \\ w_x &= \frac{\sqrt{2}}{3} N_x \end{aligned} \quad [4.33]$$

Para un intervalo concreto  $t-t'$ , tanto a área como a anchura da gaussiana son proporcionais ao número de imaxes.

Outro resultado vai confirmarnos a tendencia da contribución das fontes. Para un número grande de reflexións a expresión [4.22], o límite da función de Green, podémola aproximar por

$$\lim_{n_x \rightarrow \infty} G_x \Big|_{t-t'=cte} \approx \lim_{\substack{n_x \rightarrow \infty \\ t-t'=cte}} \frac{1}{\sqrt{4pa}(t-t')} \exp \left\{ -\frac{(2n_x a)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.34]$$

Ao substituír o valor do número de imaxes [4.32], considerando unha precisión do 99.99%, obtemos

$$\lim_{n_x \rightarrow \infty} G_x \Big|_{t-t'=cte} \approx \frac{e^{-9}}{\sqrt{4p} a N_x / 3} \approx 0 \quad [4.35]$$

O numerador confirma que para un grande número de imaxes os termos tenden cara o valor cero. Pola contra o denominador, que representa a contribución total, faise grande, é decer, a serie estaría composta dun número moi extenso de reflexións que independentemente teñen unha contribución case nula mais en conxunto a súa contribución é moi importante.

*Erro da aproximación*

Por último, para un número grande de reflexións o erro cometido ao recortar a serie será

$$e = 1 - \frac{1}{2V} \operatorname{erf} \left( \frac{N_x}{\sqrt{a(t-t')/a}} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{N_y}{\sqrt{a(t-t')/b}} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{N_z}{\sqrt{a(t-t')/h}} \right) \quad [4.36]$$

Onde  $V = 2a \times 2b \times h$  representa o volume sobre o que se integra a función de Green

*Fontes en movemento (1): velocidade perpendicular ás imaxes*

Nestes dous apartados construiremos e analizaremos os propagadores en sendas situacións nas que introduciremos fontes puntuais que se moven con velocidade  $v$  relativa á peza.

Consideremos primeiramente o caso dunha fonte puntual que con velocidade constante ilumina un medio infinito na dirección de movemento, pero limitado por  $x = \pm a$  no eixo perpendicular (Fig. 4.5). A función de Green con imaxes asociada a este problema é:

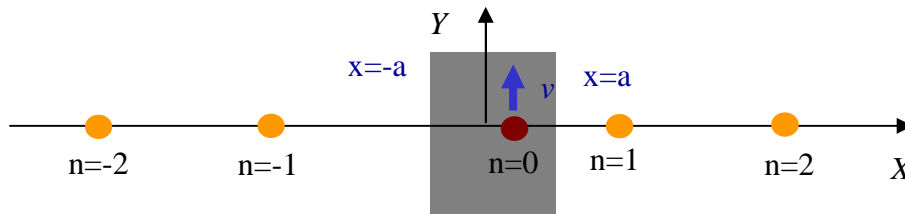


Fig. 4.5 A fonte (en vermello) móvese perpendicularmente ás imaxes (en amarelo).

$$G = \frac{1}{(4pa(t-t'))^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( x - [(-1)^n x' + 2na] \right)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.37]$$

Tomando como dirección de movemento o eixo  $Y$  a segunda coordenada transfórmase segundo  $y' \rightarrow y' + vt'$ . Asemade buscaremos a temperatura nun punto sobre o plano  $z = 0$ . Baixo estas condicións a función de Green queda

$$G = \frac{1}{(4pa(t-t'))^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( x - [(-1)^n x' + 2na] \right)^2 + (y - [y' + vt'])^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.38]$$

Ao igual que fixeramos anteriormente estudiaremos, por paradigmático, a evolución co tempo do termo central,  $n = 0$ . Consideraremos dúas situacións, unha na que un punto quedará fixo respecto á fonte e outra na que o punto se move solidariamente con ela.

Neste primeiro caso examinaremos como evoluciona a función de Green segundo aumenta a distancia temporal  $t - t'$  para un punto fixo de coordenadas  $(a/4, \pm a/4, 0)$  (Fig. 4.5).

$$G|_{n=0} = \frac{1}{(4pa(t-t'))^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(a/4)^2 + (\pm a/4 - vt')^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.39]$$

Mantendo fixo o tempo de acción da fonte  $t'$ , este propagador ten un máximo en

$$t = t' + \frac{(a/4)^2 + (\pm a/4 - vt')^2}{6a} \quad [4.40]$$

Na gráfica 4.6 represéntanse a evolución co tempo  $t$  de tres funcións de Green do termo central,  $G(n = 0)$ , fixando  $t' = 1$  s. Tomando como referencia a expresión [4.39] cando a velocidade da fonte é nula (curva central), obsérvase que para un punto  $(a/4, a/4, 0)$  situado no sentido de movemento da fonte o valor do propagador é moito maior que para as coordenadas  $(a/4, -a/4, 0)$  que quedan cara atrás dela, (curvas en azul e verde respectivamente).

As curvas (Fig. 4.6) están construídas cunha velocidade típica dun tratamento de tempero. Ao manexar un número de Peclet ( $Pe = 56.91$ ) moito maior que a unidade dominarán os efectos do movemento da fonte sobre a difusión da calor. Da ecuación [4.40] dedúcese que para velocidades suficientemente baixas como para que o número

de Peclet sexa menor que un non existen diferencias entre os máximos, tanto se o punto está diante da fonte, como se está detrás.

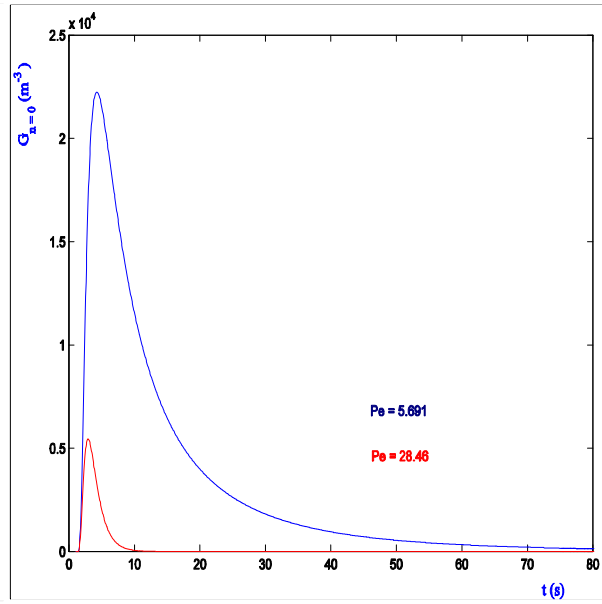
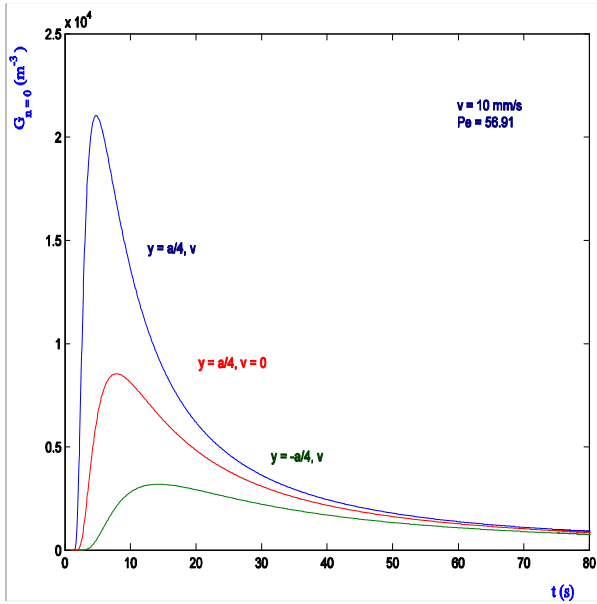


Fig. 4.6 Evolución temporal do termo  $G(n = 0)$  para un punto diante da fonte (azul), outro detrás (verde) e cando a fonte está quieta (vermello)

Fig. 4.7 Evolución temporal do termo  $G(n = 0)$  para dous números de Peclet

A gráfica (2.8) representa a evolución co tempo da expresión [4.39] para un punto que se move con velocidade  $v$ . Obsérvase que cando a difusividade térmica fai patente o seu dominio sobre a translación da fonte ( $Pe = 5.691$ ) a contribución do propagador é moito maior que no caso de rexer a velocidade sobre a difusividade ( $Pe = 28.46$ ).

*Fontes en movemento (2): velocidade paralela ás imaxes*

Supoñamos que nas mesmas condicións que o anterior caso a fonte móvese na dirección do eixo  $X$  ( $x' \rightarrow x' + vt'$ ). Escollendo as coordenadas  $(x, 0, 0)$  como o punto onde queremos medir a temperatura, a expresión da función de Green quédanos,

$$G = \frac{1}{(4pa(t-t'))^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\left( x - \left[ (-1)^n (x' + vt') + 2na \right] \right)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.41]$$

#### 4. Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

Para facilitar o seu estudio podemos desdobrar esta ecuación en dous sumandos, por unha banda estarían tanto a fonte orixinaria como as imaxes con cardinal par movéndose coa mesma velocidade

$$G_{par} = \frac{1}{(4pa(t-t'))^{3/2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x - [x' + vt' + 4ia])^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.42]$$

E pola outra, todas as imaxes con índice impar que se trasladan con velocidade antiparalela á da fonte

$$G_{impar} = \frac{1}{(4pa(t-t'))^{3/2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x + x' + vt' - 2[2i+1]a)^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.43]$$

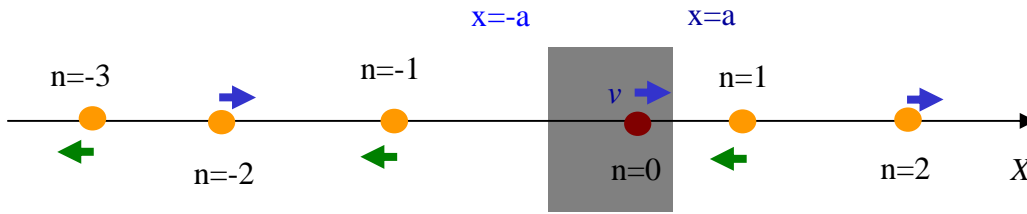


Fig. 4.8 A fonte movéndose na dirección X.

De xeito que a función de Green expresarase como:

$$G_x = G_{par} + G_{impar} \quad [4.44]$$

De novo nos concentraremos no termo central da serie,

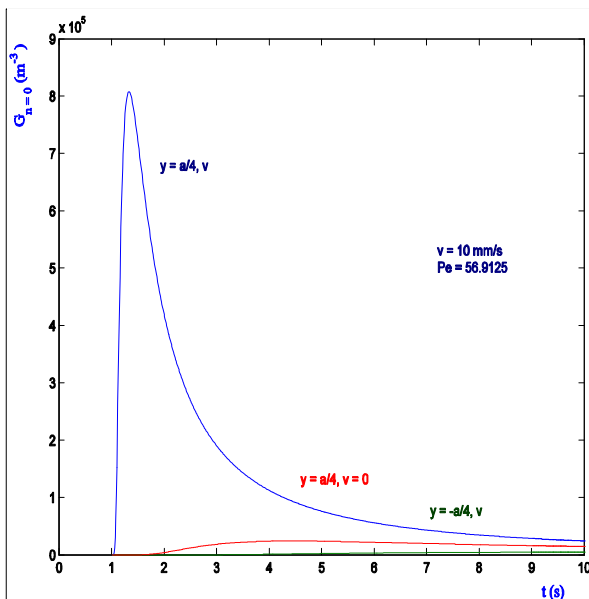
$$G_{par} \Big|_{i=0} = \frac{1}{(4pa(t-t'))^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(x - [x' + vt'])^2}{4a(t-t')} \right\} \quad [4.45]$$

Mantendo fixo o tempo de acción da fonte  $t'$ , esta función ten un máximo en

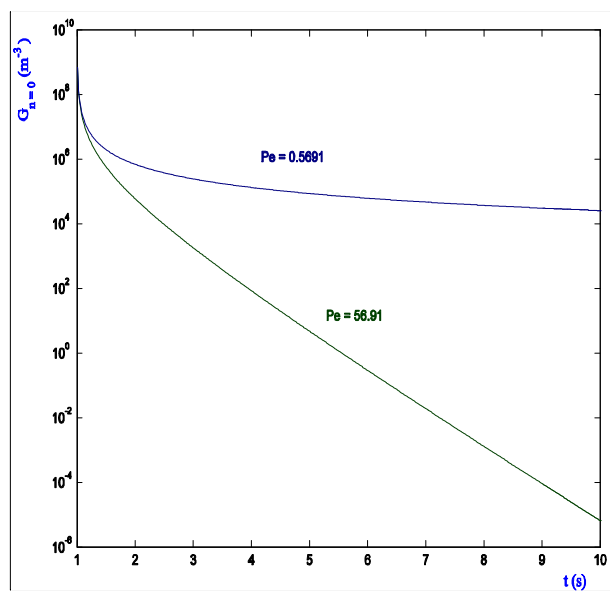
$$t = t' + \frac{(x - vt')^2}{6a} \quad [4.46]$$

O estudio da contribución que fai o propagador [4.45] en función do tempo sobre un punto que situamos diante da fonte indícanos que, a diferenza da situación na que a fonte se trasladaba perpendicularmente ás imaxes, a influencia é moito maior que se o punto se situara detrás da fonte (*Fig. 4.9*).

A gráfica (*Fig. 4.10*) representa a evolución temporal de [4.45], fixando a acción da fonte durante  $t' = 1$  s, para un punto que se move solidariamente coa fonte ( $x = vt$ ). Para tempos pequenos a contribución da función de Green é moi grande pero non infinita (lémbrese que se debe cumprir  $t > t'$ ), para logo caer abruptamente. As curvas están tiradas para dous valores do número de Peclet. Hai que salientar que segundo vai aumentado o valor de Pe, segundo aumenta o dominio da velocidade da fonte sobre a conducción, crece a pendente, en termos de valor absoluto.



*Fig. 4.9 Evolución temporal do termo  $G(n = 0)$  para un punto diante da fonte (azul), outro detrás (verde) e cando a fonte está quieta (vermello)*



*Fig. 4.10 Evolución temporal do termo  $G(n = 0)$  para dous números de Peclet*

#### 4.1.2 Aplicación do método das imaxes

Neste apartado aplicaremos o método das imaxes ao tratamento dunha placa de aceiro de dimensións  $2a \times 2b \times h$  en dúas situacións:

- Iluminada cun feixe rectangular estacionario de dimensións  $2a \times 2b$ .
- Iluminada cun modo TEM<sub>01\*</sub> que se move, no plano  $z = 0$  con velocidade  $v$ .

##### 4.1.2.1 Feixe rectangular estacionario

A distribución de temperaturas para tempos maiores que cero, será

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{k}} \int_{S', t'} f(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') dx' dy' dt' \quad [4.47]$$

A fonte está descrita pola ecuación,

$$f(\mathbf{r}', t') = \begin{cases} \frac{P_0}{4ab} & |x'| \leq a, |y'| \leq b, z' = 0 \\ 0 & \text{en outro caso} \end{cases} \quad [4.48]$$

Onde se considerou que o centro da fonte está situado na orixe de coordenadas. A función de Green é igual a

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = [4\mathbf{pa}(t-t')]^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}{4\mathbf{a}(t-t')} \right\} \quad [4.49]$$

Entón, a distribución de temperaturas resultante para un espacio de integración infinito:

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{k}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') dx' dy' dt' \quad [4.50]$$



*Método das imaxes*

Ao impoñer os límites xeométricos facendo uso do método das imaxes, a distribución de temperaturas muda a:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{k}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \int_0^t \int \int f_{im}(\mathbf{r}') G_{im}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') dx' dy' dt' \quad [4.51]$$

sendo

$$f_{im}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{P_0}{4ab} & |x' - 2n_x a| \leq a, |y' - 2n_y b| \leq b, z = 2n_z h \\ 0 & \text{en outro caso} \end{cases} \quad [4.52]$$

$$G_{im}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = [4\mathbf{pa}(t-t')]^{-3/2} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-2n_z h)^2}{4\mathbf{a}(t-t')}\right\}$$

Para cada unha das imaxes hai que integrar entre as lindes xeométricas onde está definida a fonte. A expresión da temperatura queda:

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{1}{2\mathbf{k}} \int_0^{4at} \int_{(2n_y-1)b}^{(2n_y+1)b} \int_{(2n_x-1)a}^{(2n_x+1)a} f_{im} G_{im} dx' dy' du \quad [4.53]$$

A estratexia que imos empregar con [4.53] consiste en resolver analiticamente as integrais espaciais deixando que a integración temporal sexa determinada por métodos numéricos. Resolvendo as dúas integrais espaciais, a distribución de temperatura queda,

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \frac{P_0}{8ab\mathbf{k}} \frac{1}{4\sqrt{\mathbf{p}}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \int_0^{4at} u^{1/2} L_{im} \exp\left\{-\frac{(z-2n_z h)^2}{u}\right\} du \quad [4.54]$$

sendo  $u = 4\mathbf{a}(t-t')$  e

$$L_{im} = \left[ \operatorname{erf} \left\{ \frac{x - (2n_x - 1)a}{\sqrt{u}} \right\} - \operatorname{erf} \left\{ \frac{x - (2n_x + 1)a}{\sqrt{u}} \right\} \right] \times \left[ \operatorname{erf} \left\{ \frac{y - (2n_y - 1)b}{\sqrt{u}} \right\} - \operatorname{erf} \left\{ \frac{y - (2n_y + 1)b}{\sqrt{u}} \right\} \right] \quad [4.55]$$

#### 4.1.2.2 Modo TEM<sub>01\*</sub> en movemento

Partimos outra vez da ecuación [4.47] para a distribución de temperaturas. Tomando como fonte, de potencia unitaria, un modo TEM<sub>01\*</sub> con centro en  $(x'_0, y'_0, 0)$ , (Silfvast, 1996)

$$f(\mathbf{r}', t') = 4 \frac{(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2}{\rho \mathbf{w}^4} \exp \left\{ -2 \frac{(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2}{\mathbf{w}^2} \right\} \quad [4.56]$$

e a función de Green:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = [4\rho \mathbf{a}(t - t')]^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}{4\mathbf{a}(t - t')} \right\} \quad [4.57]$$

Por outra banda, se a fonte desprázase cun vector de velocidade constante  $(v'_x, v'_y, 0)$  sobre o plano  $z = 0$  entón

$$\begin{aligned} x' - x'_0 &\rightarrow x' - (x'_0 + v'_x t') \\ y' - y'_0 &\rightarrow y' - (y'_0 + v'_y t') \\ z' &\rightarrow 0 \\ t' &\rightarrow t' \end{aligned} \quad [4.58]$$

#### Método das imaxes

Para impoñer as condicións de contorno debidas aos límites xeométricos precisamos implementar o método das imaxes. Agora a expresión da temperatura [4.47] convértese en

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{2\mathbf{a}}{\mathbf{k}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \int_0^t \int \int f_{im}(\mathbf{r}', t') G_{im}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') dx' dy' dt' \quad [4.59]$$

onde a fonte e o propagador toman as expresións:

$$f_{im}(\mathbf{r}', t') = \begin{cases} 4 \frac{(x' - X'_0)^2 + (y' - Y'_0)^2}{\mathbf{p}\mathbf{w}^4} e^{-2\frac{(x' - X'_0)^2 + (y' - Y'_0)^2}{\mathbf{w}^2}} & \begin{cases} |x' - 2n_x a| \leq a, \\ |y' - 2n_y b| \leq b, \\ z' = 2n_z h \end{cases} \\ 0 & \text{en outro caso} \end{cases} \quad [4.60]$$

$$G_{im}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = [\mathbf{p}u]^{-3/2} \exp\left\{-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + Z^2}{u}\right\}$$

con

$$\begin{aligned} X'_0 &= (-1)^{n_x} (x'_0 + v_x t') + 2n_x a \\ Y'_0 &= (-1)^{n_y} (y'_0 + v_y t') + 2n_y b \\ Z &= z - 2n_z h \\ u &= 4\mathbf{a}(t - t') \end{aligned} \quad [4.61]$$

O resultado de integrar nas variables  $x'$  e  $y'$  é:

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \frac{1}{2\mathbf{k}} \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \int_0^{4at} F(u) du \quad [4.62]$$

sendo

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{4}{\mathbf{p}\mathbf{w}^4} [\mathbf{p}u]^{-3/2} \exp\left\{-2\frac{(x - X'_0)^2 + (y - Y'_0)^2}{\mathbf{w}^2 + 2u} - \frac{Z^2}{u}\right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{\mathbf{p}}{C_1} \left[ (C_2 - X'_0)^2 + (C_3 - Y'_0)^2 + \frac{1}{C_1} \right] L_x L_y - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{p}}{C_1}} [L_x M_y + L_y M_x] \right\} \end{aligned} \quad [4.63]$$

con

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\mathbf{w}^2 + 2u}{\mathbf{w}^2 u} \\
 C_2 &= \frac{\mathbf{w}^2 x + 2uX'_0}{\mathbf{w}^2 + 2u} \\
 C_3 &= \frac{\mathbf{w}^2 y + 2uY'_0}{\mathbf{w}^2 + 2u} \\
 L_x &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \sqrt{C_1} \left[ (2n_x + 1)a - C_2 \right] \right) - \operatorname{erf} \left( \sqrt{C_1} \left[ (2n_x - 1)a - C_2 \right] \right) \right\} \\
 L_y &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left( \sqrt{C_1} \left[ (2n_y + 1)b - C_3 \right] \right) - \operatorname{erf} \left( \sqrt{C_1} \left[ (2n_y - 1)b - C_3 \right] \right) \right\} \\
 M_x &= \left( (2n_x + 1)a + C_2 - 2X'_0 \right) e^{-C_1((2n_x + 1)a - C_2)^2} + \\
 &\quad + \left( (2n_x - 1)a - C_2 + 2X'_0 \right) e^{-C_1((2n_x - 1)a + C_2)^2} \\
 M_y &= \left( (2n_y + 1)b + C_3 - 2Y'_0 \right) e^{-C_1((2n_y + 1)b - C_3)^2} + \\
 &\quad + \left( (2n_y - 1)b - C_3 + 2Y'_0 \right) e^{-C_1((2n_y - 1)b + C_3)^2}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

#### 4.1.3 Análise dimensional

Unha ferramenta complementaria ao método das imaxes é a utilización de números adimensionais para resolver [4.47]. As vantaxes que agardamos son, por unha banda, a xeralización da busca dos parámetros, e pola outra, unha maior rapidez nos cálculos. Comprobemos isto.

A distribución de temperaturas para calquera punto xerada por un feixe láser TEM<sub>01</sub>\* sobre unha peza o suficientemente grande como para depreciar os efectos de bordo e que se despraza con velocidade constante na dirección OX:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \frac{P_0}{2\mathbf{k}} \int_0^{4\mathbf{a}t} F(u) du \tag{4.65}$$

sendo  $P_0 = \text{cte}$  a potencia,  $u = 4\mathbf{a}(t - t')$ , e

$$F(u) = \frac{4 \left\{ \mathbf{w}^2 \left[ \left( x + \frac{vu}{4\mathbf{a}} \right)^2 + y^2 \right] + u \left[ \mathbf{w}^2 + 2u \right] \right\}}{\mathbf{p} \sqrt{\mathbf{p}u} (\mathbf{w}^2 + 2u)^3} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{2 \left[ \left( x + \frac{vu}{4\mathbf{a}} \right)^2 + y^2 \right]}{\mathbf{w}^2 + 2u} - \frac{z^2}{u} \right\} \quad [4.66]$$

As variables  $x$  e  $y$  son as coordenadas cartesianas da distribución,  $\mathbf{w}$  representa a anchura da distribución e  $\mathbf{a}$  a difusividade térmica. Tomando como unidade de lonxitude  $r_0 = \mathbf{w}/\sqrt{2}$  pódense definir un conxunto de variables adimensionais:

$$X = \frac{x}{r_0}; \quad Y = \frac{y}{r_0}; \quad Z = \frac{z}{r_0}$$

$$\mathbf{q} = \frac{T - T_0}{P_0/2\mathbf{p}\mathbf{k}r_0} \quad [4.67]$$

$$Pe = \frac{vr_0}{2\mathbf{a}}$$

$$U = \frac{u}{r_0^2}; \quad U_0 = \frac{4\mathbf{a}t}{r_0^2}$$

Co que substituíndo en [4.65] e en [4.66]

$$\mathbf{q}(X, Y, Z, U_0) = \int_0^{U_0} F(U) dU \quad [4.68]$$

$$F(U) = \frac{\left( X + \frac{UPe}{2} \right)^2 + Y^2 + U(U+1)}{\sqrt{\mathbf{p}U} (U+1)^3} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{\left( X + \frac{UPe}{2} \right)^2 + Y^2}{1+U} - \frac{Z^2}{U} \right\} \quad [4.69]$$

#### 4. Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

Unha vez feita a integración numérica de [4.68] a temperatura adimensional  $q$  dependerá unicamente do tempo  $U_0$ , da posición  $(X, Y, Z)$  e do número de Peclet.

Para determinar o valor máximo da temperatura tomamos un intervalo de integración o suficientemente amplo como para que se alcance o estado estacionario. Coñecendo que este máximo acádase na liña  $(X, 0, 0)$  que é percorrida polo centro do feixe, a temperatura [4.68] unicamente terá dependencias coa coordenada adimensional  $X$  (referida ao centro do feixe) e co número de Peclet. Nestas circunstancias (Tian, 1994) pódense construír dúas curvas que relacionen  $Pe$  coa máxima temperatura (Fig. 4.11) e coa posición onde se acada esta (Fig. 4.12). Estas gráficas serán universais, isto é, independentes das características particulares de cada proceso.

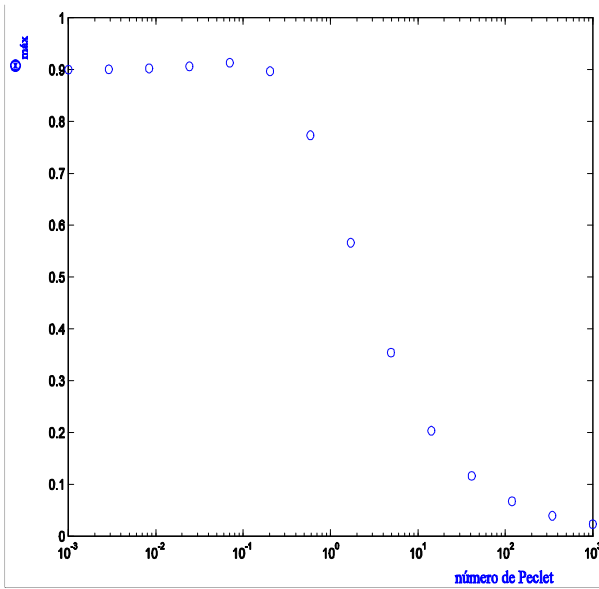


Fig. 4.11 Temperatura máxima adimensional fronte ao número de Peclet para un feixe  $TEM_{01}$ \*

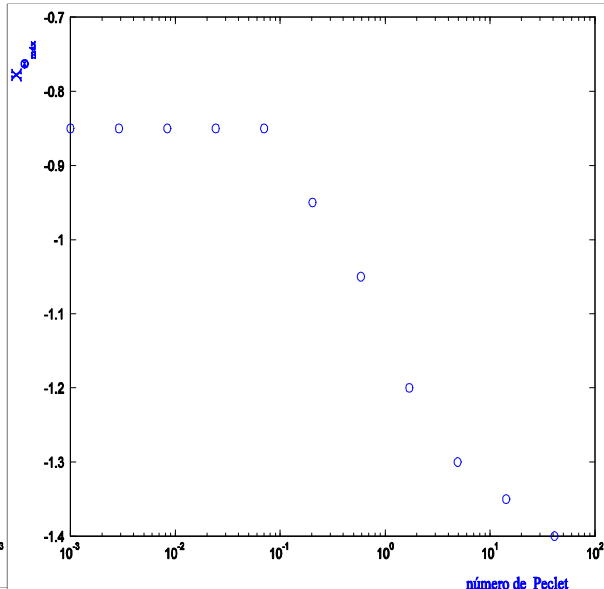


Fig. 4.12 Posición da temperatura máxima na dirección  $X$  fronte ao número de Peclet.

Para establecer os parámetros dun proceso concreto hai que tomar algunhas decisións previas:

- A potencia elixida debe deixar marxe para subila se así fora oportuno (a máxima potencia subministrada polo resoador RS 2000 M é de 2000 W).
- A anchura do feixe debe permitir temperar unha rexión ampla.

- As propiedades do material débense tomar para unha temperatura que supere amplamente a  $T_{Ac3}$ .

Con estas consideracións, interpolando sobre as curvas  $(Pe, q_{\max})$  e  $(Pe, X_{q_{\max}})$  sácase a temperatura máxima e a súa coordenada  $X$  para un valor desexado da velocidade. Co mesmo valor de  $Pe$  interpolando a temperatura (ec. [4.68]) para distintos valores de  $(X, Y, 0)$  e de  $(X, 0, Z)$ , pódense atopar os valores máximos de  $Y$  e  $Z$ , respectivamente, nos que se acada  $T_{Ac3}$ . Só quedaría repoñer as unidades. Este método pode xeneralizarse para obter, en pouco tempo, mapas de temperaturas e a profundidade das isothermas.

A selección dos parámetros do proceso debe ter en consideración as oscilacións dos seus valores durante o tratamento no laboratorio. Así, experimentalmente, a potencia está definida cun erro do 1%, a velocidade cun 3.01% e un 0.15% para a altura na que se mantén o cabezal. Como o ángulo  $f$  de dispersión do feixe permanece constante, o erro con que está definida a anchura do modo TEM<sub>01\*</sub> tamén queda establecido nun 0.15%

$$w = \frac{h}{\tan f} \Rightarrow \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} \quad [4.70]$$

A este valor haberá que sumarlle a falla de paralelismo entre a superficie da probeta e o plano transversal ao feixe, así o erro total da anchura do modo é do 5.4%.

O coñecemento da influencia de pequenas variacións nestas variables sobre a temperatura máxima facilita a súa elección. Pódese demostrar que a máxima temperatura que se acada sobre un material, a correspondente ao estado estacionario, é unha función de:

$$T_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2p} \frac{P_0}{kw} f \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{wvrc}{k} \right) \quad [4.71]$$

#### 4. Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

sendo  $v$  a velocidade relativa entre o feixe e o material e  $P_0$  a potencia depositada. A gráfica 4.13 representa o efecto que teñen no erro relativo da temperatura máxima (en tanto por un) pequenas variacións tanto nos parámetros do proceso como nas propiedades do material. En este exemplo obsérvase que unha pequena alteración na anchura do feixe, a potencia ou o coeficiente de absorción modifica sensiblemente o valor da temperatura. Pola contra para que se faga sentir a influencia da velocidade relativa ou das propiedades térmicas do material sobre a temperatura máxima hai que ir a grandes variacións nestas magnitudes.

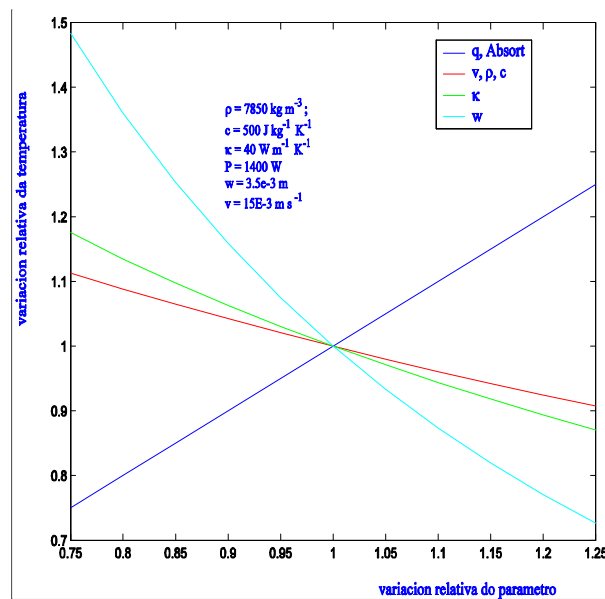


Fig. 4.13 Oscilación relativa da temperatura máxima con pequenas variacións dos parámetros.



**Bibliografía**

- Álvarez, C. et al. (2001); *Real time control and monitoring of laser hardening process: applications to cylindrical workpieces*; Laser Assisted net Shape Engineering 3. Proceeding of the LANE 2001. Surface & Heat Treatment. 223-234.
- von Allmen, M., A. Blatter (1995); *Laser-beam interactions with materials 2<sup>nd</sup> Ed.*; Springer.
- Bailer-Jones, C.A.L., H.K.D.H. Bhadeshia, D.J.C. MacKay (1999); *Gaussian process modeling of austenite formation in steel*; Materials Science Technology, Vol. 15, pp. 287-294.
- Carslaw, H.S., J.C. Jaeger (1992); *Conduction of heat in solids 2<sup>nd</sup> Ed.*; Oxford Science Publications.
- Dowden, J.M. (2001); *The mathematics of thermal modelling*; Chapman & Hall/CRC
- Duley, W.W. (1983); *Laser processing and analysis of materials*; Plenum.
- Festa, R., O. Manca, V. Naso (1990); *Simplified thermal models in laser and electron beam surface hardening*; J. Heat Mass Transfer, Vol. 33. No. 11, pp. 2511-2518.
- Galantucci, L.M., L. Tricarico (1990); *Un Modello statistico per la previsione dei profili di durezza in acciai da bonifica e da tempra superficiale sottoposti a saldatura ed a trattamento termico*; La Metallurgia Italiana, Vol. 82, No. 10, pp. 969-979.
- Gu, B.W., et al. (1994); *Three dimensional numerical model for laser transformation hardening of metals*; Mat. Sci. Tech., Vol 10, pp. 425-430.
- Kou, S., D.K. Sun, Y.P. Le (1983); *A Fundamentals study of laser transformation hardening*; Metallurgical Transactions A, Vol. 14<sup>a</sup>, pp. 643-653.
- Marya, M, S.K. Marya (1997); *Prediction & optimization of laser transformation hardening*; Laser Assisted Net Shape Engineering Proceedings of the LANE'97; Eds. M. Geiger, F. Vollertsen, Meisenbach Bamberg 1997.
- Ohmura, E., K. Inoue (1991); *Theoretical analysis of laser transformation hardening process of hypoeutectoid steel based on kinetics*; JSME International Journal, Vol. 34, No. 4, pp. 421-429.
- Rajadhyaksha, S.M., P. Michaleris (2000); *Optimization of thermal process using an Eulerian formulation and application in laser surface hardening*; Int. J. Numer. Meth. Engng. 47:1807-1823.
- Silfvast, W.T. (1996); *Laser Fundamentals*; Cambridge University Press.

#### 4. Desenvolvimento dun modelo de tratamento térmico con láser

---

Tian, X., F.E. Kennedy (1994); *Maximum and average flash temperatures in sliding contacts*; Journal of Tribology, January, Vol. 116, pp. 167-174.

Weinberg, H.F. (1992); *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*; Reverté.

Weisstein, E.W. (1999); *CRC concise encyclopaedia of mathematics*; Chapman & Hall / CRC.

Zimba, J., et al. (1999); *Three-dimensional diffusion model for austenitisation of ferritic spheroidal graphite irons*; *Materials Science and Technology*, Vol 15, pp. 1024-1030.

Zubair, S.M., M.A. Chaudhry (1996); *Heat Conduction in a Semi-Infinite Solid Due to Time-Dependent Laser Source*; *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 39 No. 14 pp. 3067-3074.

---

## 4.2 Modelo de elementos finitos

Para a modelización co método dos elementos finitos escribiuse un código en Fortran 77 (*laser*) que serve de enlace entre o usuario e ANSYS<sup>TM</sup>. Este programa desenvolvido polo autor facilita a simulación dos tratamentos térmicos ao construír, a partir duns poucos datos, un modelo numérico (malla e cargas). Entre as súas características están:

- Permite elixir entre un proceso estacionario ou un transitorio
- Dá a posibilidade de traballar con tres tipos de xeometrías (ortoédrica, un arco de cilindro ou un cilindro completo) e de seleccionar as dimensións e distribución da malla.
- Admite iluminar a superficie da probeta con un modo TEM<sub>00</sub> ou TEM<sub>01\*</sub>, con un feixe rectangular ou prescindir da fonte.
- Permite reducir o tamaño do arquivo de saída elixindo os nodos dos que se gardará a súa historia térmica.

O esquema do seu funcionamento é como sigue (*Fig. 4.14*).

- 1º O programa le de dous arquivos ou máis<sup>1</sup> o conxunto de parámetros do proceso, dimensións da discretización da malla tanto espacial como temporal e propiedades do material.
- 2º A execución do código dá como resultado unha asemblea de datos organizados en ficheiros e escritos en APDL (ANSYS<sup>TM</sup> Parametric Design Language).
- 3º Execución de ANSYS<sup>TM</sup>.
- 4º Filtrado do arquivo de saída.

---

<sup>1</sup> Ver o Anexo I

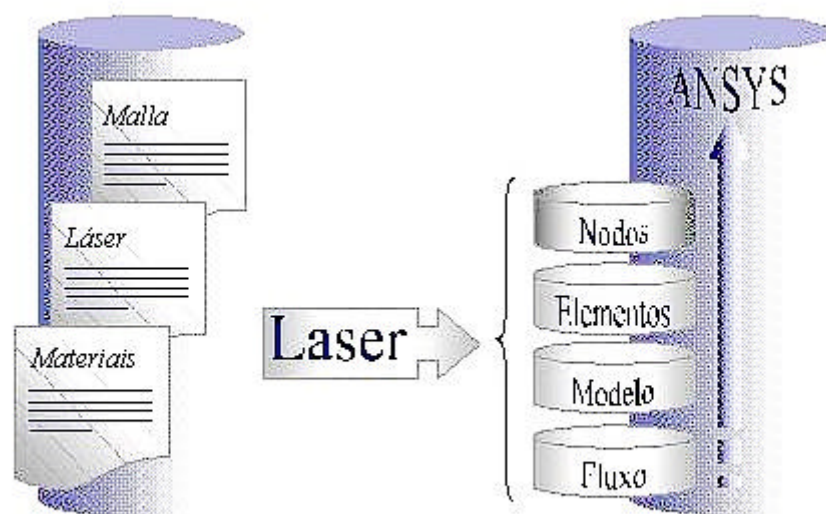


Fig. 4.14 O programa *laser*, logo de ler os datos de entrada, devolve un conxunto de arquivos escritos en APDL.

### 4.2.1 Mallado

O código *laser* xera mallas compostas de elementos definidos con 8 nodos distribuídos sobre os vértices dun ortoédrido. A única variante que admite é un elemento cóncavo, tamén de 8 nodos, para crear xeometrías con curvatura. Esta regularidade na rede permite atopar doadamente relacións entre o tamaño da malla e o erro que introduce o modelo.

Un dos puntos fortes deste código está na rapidez en construír a rede e nas múltiples posibilidades á hora de distribuíla. Por exemplo, a superficie pódese reticular con nove discretizacións diferentes e o espesor admite dúas redes con distinta dimensión de mallado.

### 4.2.2 Xeometrías

Para o seu modelado elixíronse formas que se consideran representativas: un paralelepípedo con ángulos rectos para a simulación de placas e un cilindro oco. Tamén cabe a posibilidade de modelar un arco do cilindro oco, o que pode permitir aforrar un

número considerable de nodos. Para facer uso doutras xeometrías pagaríase un prezo en forma dunha maior complexidade do algoritmo de mallado.

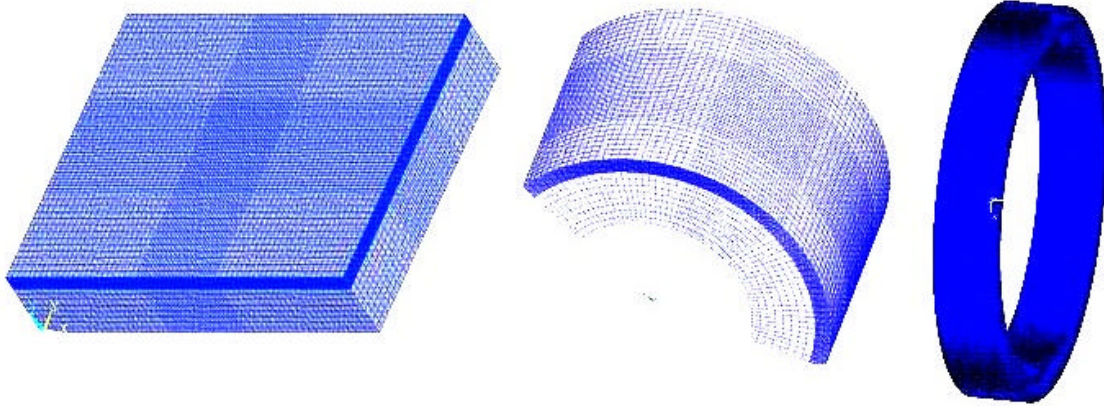


Fig. 4.15 O programa *laser* traballa con tres xeometrías: ortoédrica, un arco ou un cilindro oco.

#### 4.2.3 Discretización do feixe

Como xa mencionamos o programa *laser* permite simular tres tipos de feixe. A continuación describírase como se discretiza un deles, o que corresponde ao láser de CO<sub>2</sub> RS 2000 SM do grupo LAIL da UDC.

A estrutura transversal dun feixe que emite no modo TEM<sub>01\*</sub> ten por ecuación:

$$TEM_{01*} = E_0 \left( \frac{\sqrt{2[(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2]}}{w} \right) \exp \left\{ -\frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{w^2} \right\} \quad [4.72]$$

onde  $E_0$  representa a amplitude do campo eléctrico. Se  $P_0$  é a potencia, a súa distribución ten a forma

$$dP = P_0 \frac{4}{\pi w^2} \frac{[(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2]}{w^2} \exp \left\{ -2 \frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{w^2} \right\} dx dy \quad [4.73]$$

A discretización desta expresión faise integrando nun rectángulo de lados  $dx$  e  $dy$ ,

$$\Delta P = \int_x^{x+d_x} \int_y^{y+d_y} dP \, dx \, dy = P_0 \frac{1}{4} \left[ AB + \frac{1}{\sqrt{p}} (CB + AD) \right] \quad [4.74]$$

onde os coeficientes A, B, C, e D teñen a forma:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{erf} \left( \frac{x + \mathbf{d}_x - x_c}{w/\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - x_c}{w/\sqrt{2}} \right) \\ B &= \operatorname{erf} \left( \frac{y + \mathbf{d}_y - y_c}{w/\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y - y_c}{w/\sqrt{2}} \right) \\ C &= \frac{x - x_c}{w/\sqrt{2}} \exp \left\{ - \left( \frac{x - x_c}{w/\sqrt{2}} \right)^2 \right\} - \frac{x + \mathbf{d}_x - x_c}{w/\sqrt{2}} \exp \left\{ - \left( \frac{x + \mathbf{d}_x - x_c}{w/\sqrt{2}} \right)^2 \right\} \\ D &= \frac{y - y_c}{w/\sqrt{2}} \exp \left\{ - \left( \frac{y - y_c}{w/\sqrt{2}} \right)^2 \right\} - \frac{y + \mathbf{d}_y - y_c}{w/\sqrt{2}} \exp \left\{ - \left( \frac{y + \mathbf{d}_y - y_c}{w/\sqrt{2}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad [4.75]$$

Se o feixe ten un desprazamento respecto da malla este cálculo debe repetirse para cada paso de tempo. Unha representación gráfica deste modo vese en:

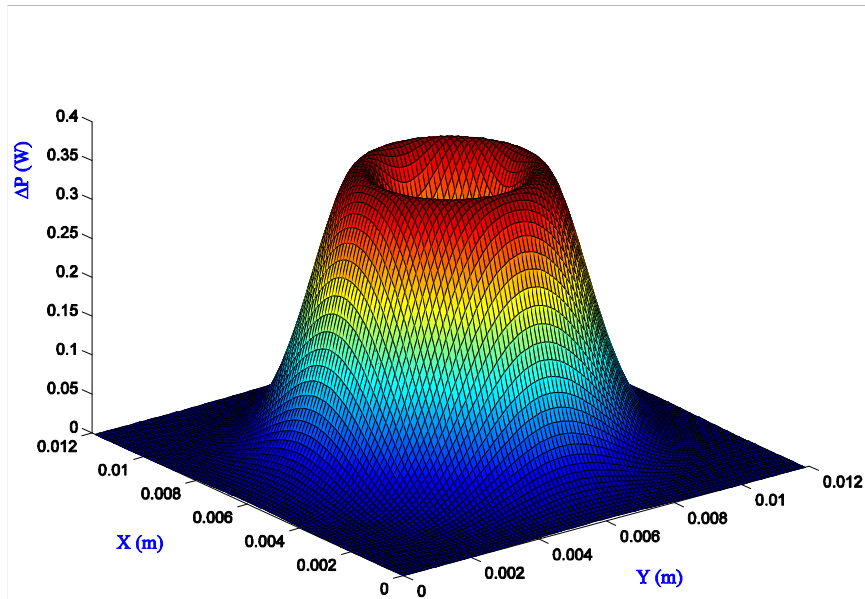


Fig. 4.16 Distribución transversal da potencia do modo  $TEM_{01}^*$ .

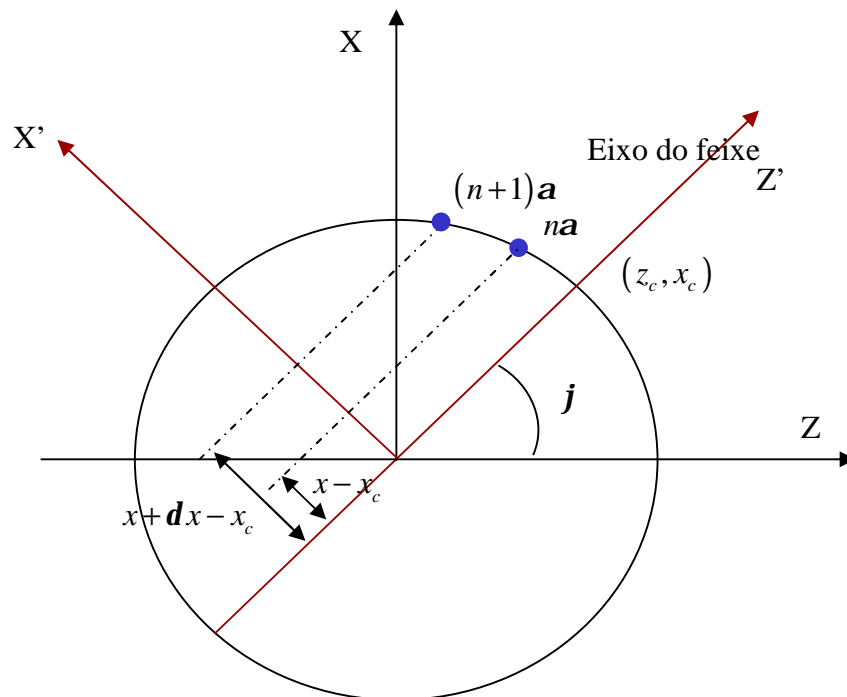
*Sobre unha xeometría cilíndrica*

Para aplicar a distribución de potencia do feixe sobre a superficie exterior dun cilindro ou un arco primeiramente houbo que transformar as coordenadas cartesianas en cilíndricas. Se  $r_{ext}$  representa o radio exterior do cilindro e  $n$  a lonxitude do arco en unidades do tamaño da malla:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow r_{ext} \sin na \\ y &\rightarrow y \\ z &\rightarrow r_{ext} \cos na \end{aligned} \quad [4.76]$$

O ángulo  $a$  está relacionado co tamaño da rede  $\Delta x$  mediante:

$$a = 2 \arcsin \left\{ \frac{\Delta x}{2r_{ext}} \right\} \quad [4.77]$$



*Fig. 4.17 Esquema da rotación do eixo de simetría Z' do feixe.*

Con posterioridade orientouse mediante un xiro o sistema de referencia local do feixe,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{j} & 0 & -\sin \mathbf{j} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \mathbf{j} & 0 & \cos \mathbf{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad [4.78]$$

onde  $\mathbf{j}$  mide a posición angular do centro do feixe tal como amosa a figura 4.17.

Con estas regras, para obter  $\Delta P$  no intervalo de integración desexado, basta aplicar as seguintes transformacións sobre [4.75]:

$$\begin{aligned} x + \mathbf{d}_x - x_c &\rightarrow r_{ext} \sin[(n+1)\mathbf{a}] \cos \mathbf{j} - r_{ext} \cos[(n+1)\mathbf{a}] \sin \mathbf{j} \\ x - x_c &\rightarrow r_{ext} \sin[n\mathbf{a}] \cos \mathbf{j} - r_{ext} \cos[n\mathbf{a}] \sin \mathbf{j} \\ x_c &\rightarrow r_{ext} \sin \mathbf{j} \end{aligned} \quad [4.79]$$

Sendo  $n$  un número enteiro maior ou igual que cero.

#### 4.2.4 Erros introducidos coa discretización

O uso do método dos elementos finitos non é garante de exactitude dos resultados. O estudio da malla permitiranos, por unha banda o seu refinamento, e pola outra, a mellora na exactitude da solución. Mesmamente, durante as simulacións haberá que adoitar decisións de compromiso entre os erros dos resultados e o consumo de tempo-memoria para a execución do código (*Saavedra, 2000*).

Namentres J.C. Rozzi e S. Kou avalían o código comparando os resultados coas solucións exactas da ecuación do calor para medios infinitos ou semiinfinitos, outros autores, J.C. Álvarez, E. Saavedra e A. Yáñez, empregan como contraste as solucións, tamén exactas, aportadas polo método das imaxes (*Álvarez, 2001*) (*Kou, 1983*) (*Rozzi, 1998*) (*Saavedra, 2000*) (*Yáñez, 2001*).

Na resolución dun modelo de elementos finitos aparecen múltiples dependencias que limitan a exactitude do método. Para estimar algúns destes erros, os que atinxen á dimensión da malla, tanto espacial coma temporal, compararemos os resultados coa solución analítica exacta acadada co método das imaxes.

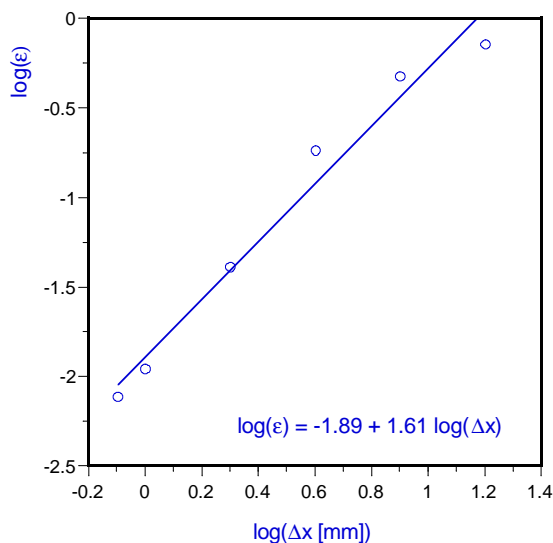


*Influencia da discretización espacial*

Xa foi tratada a relación existente entre o erro que aporta o algoritmo dos elementos finitos e o tamaño da rede, ecuación [3.55] (*Bathe, 1996*). Para demostrar esta afinidade comparáronse a solución analítica e a numérica, no seguinte experimento:

- A fonte de 1000 W emitiu durante 1 segundo, cubrindo unha superficie de  $32 \times 32 \text{ mm}^2$ .
- A probeta dun material coas súas propiedades térmicas constantes ( $\mathbf{r} = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c = 460.8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\mathbf{k} = 24.9 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ), de dimensións  $32 \times 32 \times 16 \text{ mm}^3$ , partía dunha temperatura inicial de 300 K.
- A xeometría da peza, ortoédrica, cubriuse homoxeneamente con elementos cúbicos.
- O tamaño do paso temporal foi de 0.0144 s o que corresponde a un número de Fourier de  $Fo = 10$  [3.72], para a malla máis fina.
- O erro da temperatura foi obtido comparando coa solución do método das imaxes pasado un segundo dende o acendido da fonte no centro da cara iluminada.

A análise dos resultados (*Fig. 4.18*) permítenos verificar a relación xa coñecida (*Bathe, 1996*): o emprego dunha malla máis densa consegue diminuír o erro da solución numérica, sendo a orden de converxencia de 1.61. Evidentemente este aumento no número de elementos repercutirá tanto no consumo de memoria, como no de tempo de execución do código.



Nodos	$\Delta x$ [mm]	$\Delta T$ [K]
18	16	83.247
75	8	55.237
405	4	21.287
2601	2	4.757
18513	1	1.277
35301	0.8	0.887

Fig. 4.18 Erro relativo da temperatura  $\epsilon$  fronte ao tamaño da malla  $\Delta x$ . A orde de converxencia é de 1.61.

#### Influencia da discretización temporal

Este apartado ten por obxecto sacar á luz a influencia da discretización temporal na exactitude da solución. Continuamos coa mesma fonte e probeta que no anterior experimento, pero desta vez estableceremos un valor fixo para o tamaño das retículas (4 mm de aresta).

Ao modificar a extensión do paso de tempo, diminuíndoo, obsérvase que aumenta a precisión do resultado, sendo a orde de converxencia de 0.016 (Fig. 4.19). Sen embargo, ao igual que sucedía na análise anterior, págase un prezo en forma de gasto de CPU. É importante destacar que por embaixo de 0.005 s a penas conséguese reducir o erro.

#### Influencia dunha malla anisótropa

En todas as simulacións de procesos con láser a incidencia do feixe define unha dirección privilexiada, (o eixo  $z$  nos nosos experimentos). Esta singularidade xustifica un estudio máis detallado do efecto que producen sobre o erro as variacións do tamaño da rede, unicamente nesa orientación.

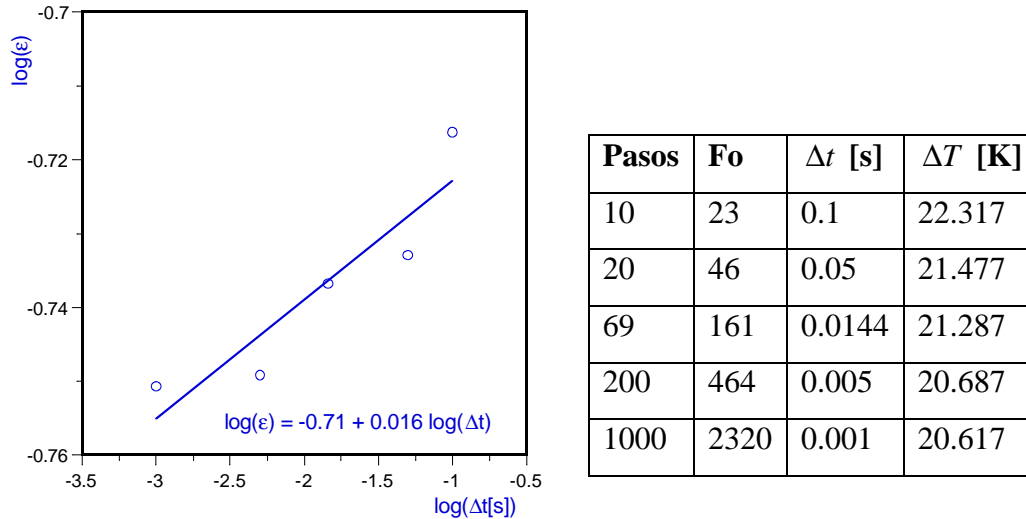


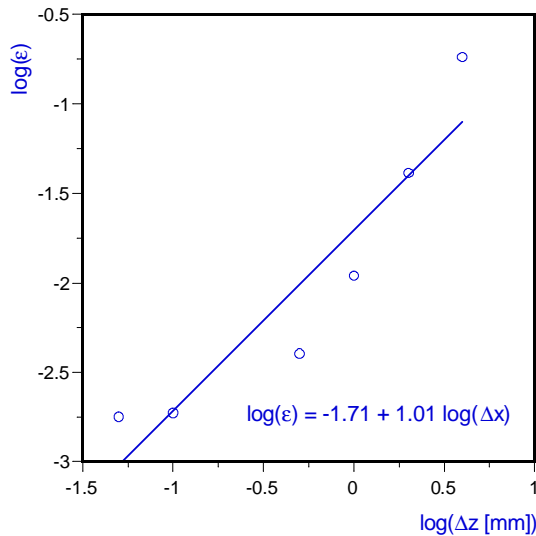
Fig. 4.18 Erro relativo da temperatura  $\epsilon$  fronte ao tamaño do paso temporal  $\Delta t$ . A orde de converxencia é de 0.016

Autores como J.K. Bathe e C. Johnson nos seus traballos deducen a existencia dunha conexión entre o erro absoluto da solución nodal e a relación de aspecto, magnitude xa definida en [3.56]. Así o erro absoluto da temperatura  $\Delta T$ , segundo estes autores, é proporcional ao tamaño dos elementos  $h$  e á mencionada relación de aspecto  $r_a$  (Bathe, 1996) (Johnson, 1978).

$$\Delta T \propto r_a h^k \quad [4.80]$$

Continuando coas mesmas condicións experimentais do primeiro estudio, agás claro está, no que se refire ao tamaño da rede, distinguiremos dúas posibilidades:

- Variación das dimensións na dirección  $z$ . Mantendo fixas as dimensións da malla superficial  $\Delta x = \Delta y = 4$  mm varíase o espaciado en  $z$  entre 4 e 0.05 mm. A comparanza entre as prediccións teóricas e os resultados numéricos amosan que é posible, partindo dunha malla grosa, mellorar a calidade da solución numérica diminuindo unicamente a dimensión  $z$  dos elementos. Para este modelo de malla a orde de converxencia é de 1.01 (Fig. 4.20).



Nº nodos	$\Delta z$ [mm]	$\Delta T$ [K]
405	4	21.287
729	2	4.754
1377	1	1.2770
2673	0.5	0.4670
13041	0.1	0.2170
26001	0.05	0.2070

Fig. 4.20 Erro relativo da temperatura fronte á dimensión en  $z$  ( $\Delta x = \Delta y = 4$  mm). A orden de converxencia é de 1.01

Na mesma gráfica 4.20 obsérvase que a partir de valores de tamaño de malla de 0.1 mm acádase unha saturación no valor do erro relativo o que indica que superando este límite unicamente conseguiremos diminuír a incerteza aumentando grandemente o consumo de tempo-memoria da CPU.

- Alteración nas direccións perpendiculares a  $z$ . Mantendo fixo o valor de  $\Delta z = 4$  mm variáronse as dimensións superficiais  $\Delta x = \Delta y$  entre 4 e 0.5 mm. A resultas das nosas simulacións conclúese que a variación do tamaño da retícula nas orientacións transversais á propagación do feixe non ten efecto algún sobre a precisión con que se obtén a temperatura, como cabería esperar para unha fonte uniforme (Fig. 4.21).

A comparanza entre as dúas análises permítenos afirmar que anque nos dous estudos os elementos presentan anisotropías, no segundo caso non existe subordinación entre a relación de aspecto e o erro absoluto da temperatura.

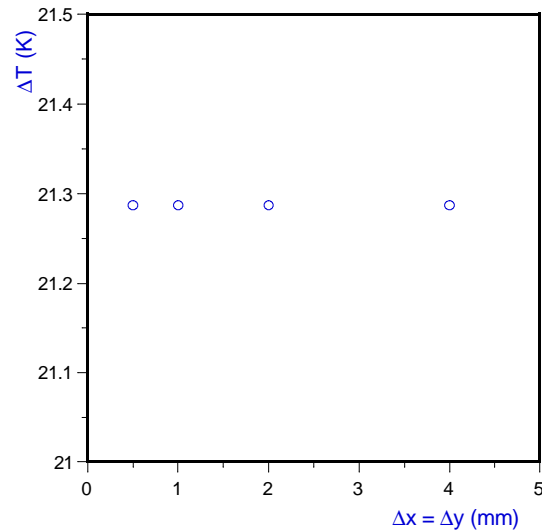


Fig. 4.21 Erro absoluto da temperatura  $\Delta T$ , frente ao tamanho da malha superficial ( $\Delta z = 4$  mm).

#### Influencia do espaçamento variable en mallas mixtas

Unha possibilidade de economizar CPU consiste no emprego dunha malha composta de celas de distintos tamaños (Fig. 4.22). Esta rede estaría distribuída de maneira que a densidade máis alta de elementos situaríase inmediatamente debaixo da superficie iluminada polo láser, namentres que a zona máis afastada ocuparíase cos retículos de maior tamaño. Preténdese así aportar máis exactitude alí onde se espera un maior gradiente de temperatura e minimizar o número de elementos na zona distante. Este modelo de mallado garda, nas súas pretensións, certas similitudes co mallado adaptativo, pero a diferenza deste, as dimensións dos elementos permanecen fixas durante a simulación.

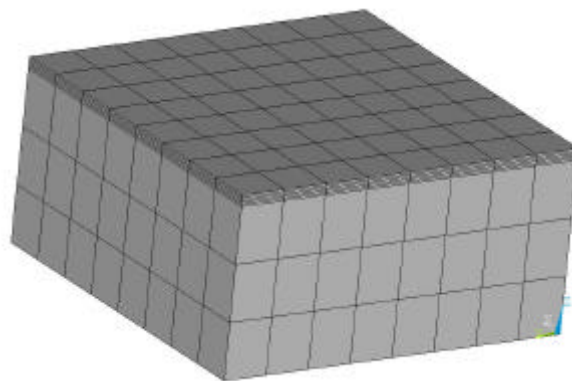


Fig. 4.22 Exemplo de malha mixta. A maior densidade de elementos está próxima á superficie.

## 4.2 Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

Seguindo coas condicións iniciais do experimento, fixando a malla superficial en 4 mm, analizaremos dúas situacións:

- Variación da malla próxima á superficie. Conservando invariante o tamaño da rede distante obsérvase que o erro relativo da temperatura é sensible á dimensión, na dirección  $z$ , da malla próxima á superficie. En (Fig. 4.23) representáanse dúas eleccións do tamaño da malla distantes (1 e 4 mm) sendo as ordes de converxencia de 0.45 e 0.75, o que demostra que este efecto é maior para unha malla lonxana grosa.
- Modificación da rede distante da superficie. Se desta vez, queda fixa a malla próxima en 1 mm, pódese comprobar na figura (Fig. 4.24) que a mellora na precisión da temperatura diminúe respecto aos anteriores estudos, (a pendente da recta é 0.15).

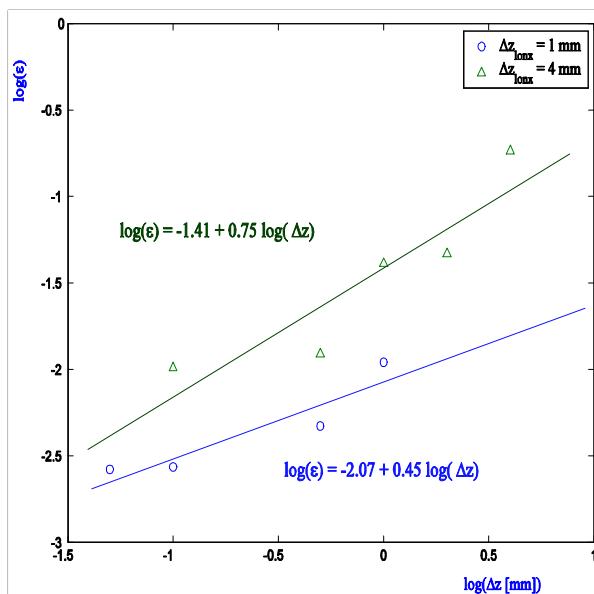


Fig. 4.23 Erro relativo da temperatura, fronte ao tamaño da rede próxima á superficie. As ordes de converxencia son de 0.45 e 0.75

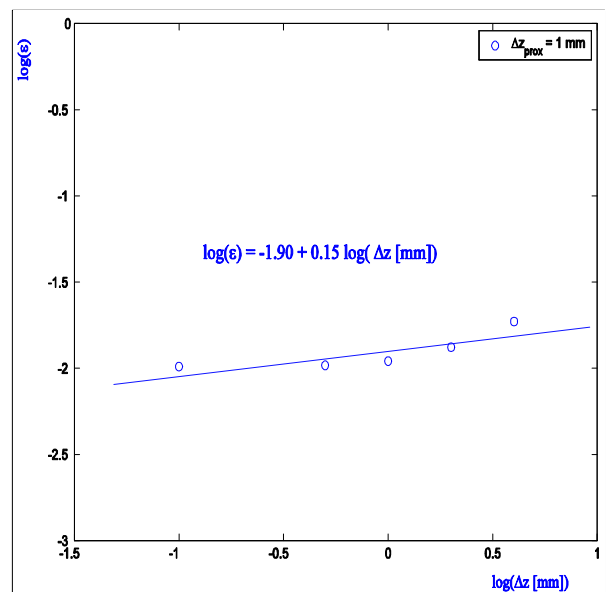


Fig. 4.24 Erro relativo da temperatura, fronte ao tamaño en  $z$ , da malla distante. A orde de converxencia é de 0.15

Os tres resultados que aquí describimos amosan a presenza dun valor de saturación no erro relativo. Por último, hai que subliñar que o proveito destas mallas tirarase da diminución do número de nodos e, polo tanto, do consumo de CPU, como veremos posteriormente.

*Influencia do mallado adaptativo*

Unha forma de minimizar o número de variables que definen un modelo de elementos finitos consiste en mallar máis densamente alí onde se necesite máis precisión.

Nas mesmas condicións que nos anteriores apartados reticulouse unha xeometría ortoédrica cunha malla cadrada superficial de 4 milímetros de aresta. Como malla adaptativa empregáronse dez celas de 0.2 mm na dirección do eixo Z (paralelo ao feixe) e para o resto empregáronse elementos de 2 mm de altura. Esta rexión máis densamente discretizada foi, en sucesivos experimentos, desprazándose en Z dende a veciñanza da superficie ata os 6 mm de profundidade.

Na seguinte táboa representáanse os resultados das simulacións. Nas columnas que van dende a segunda á quinta están compiladas as temperaturas acadadas dende a superficie ata os 10 mm de profundidade nas cinco simulacións a intervalos de 2 milímetros. Na última columna descríbese a solución teórica a distintas profundidades.

<b>z (mm)</b>	<b>T<sub>1</sub> (K)</b>	<b>T<sub>2</sub> (K)</b>	<b>T<sub>3</sub> (K)</b>	<b>T<sub>4</sub> (K)</b>	<b>T<sub>5</sub> (K)</b>	<b>T<sub>teór.</sub> (K)</b>
0.0	413.33	412.92	411.39	411.10	411.07	416.10
2.0	351.19	352.29	350.92	350.48	350.44	354.14
4.0	319.89	319.12	320.39	319.61	319.47	320.85
6.0	306.57	306.17	306.14	306.89	306.50	306.50
8.0	301.89	301.73	301.70	301.72	302.03	301.61
10.0	300.48	300.43	300.43	300.42	300.51	300.31

Con fondo gris quérense agrupar as temperaturas que corresponden á rexión máis densamente mallada. Por exemplo, no experimento T<sub>1</sub> os dous primeiros milímetros está máis densamente mallados que os restantes. No segundo é a rexión comprendida entre 2 e 4 mm a que concentra máis elementos.

A análise horizontal dos datos (*Fig. 4.25*) amósanos que o erro relativo da temperatura faise menor segundo a rexión máis densamente mallada achégase á zona de maior gradiente.

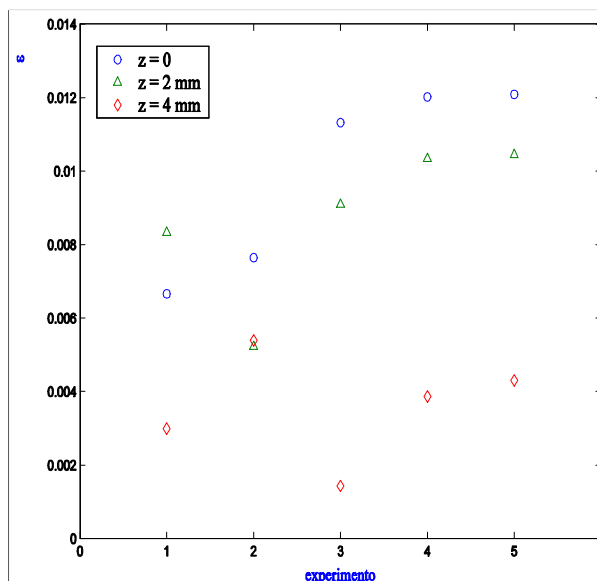


Fig. 4.25 Erro relativo da temperatura a distintas profundidades en 5 experimentos. O menor erro aparece na rexión máis densamente mallada.

#### Malla mixta formada por cubos e trapecios

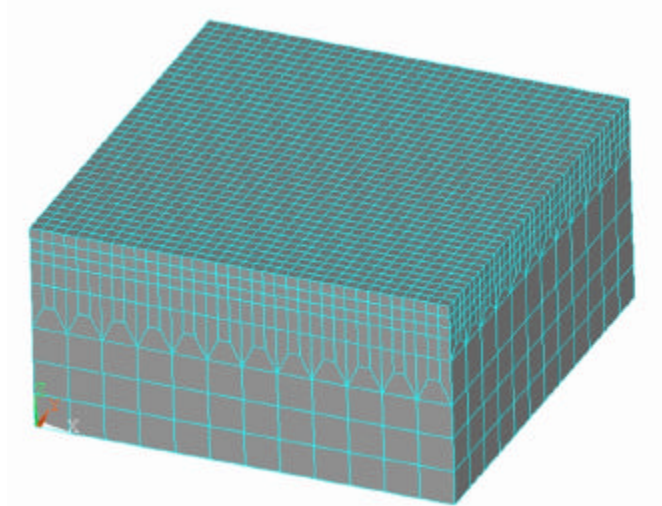
Unha estrutura que permite aforrar un grande número de nodos consiste en mesturar elementos cúbicos con outros trapezoidais a modo de transición cara outras celas, tamén cúbicas, de maiores dimensións (Galantucci, 1997). Este tipo de malla permitiría a conversión de 9 cubos (cada un deles de lado  $D$ ) nun único retículo de aresta 3D incorporando dúas transicións alternas, primeiramente nunha dirección e logo na perpendicular (Fig. 4.26).

É complexo, como viñemos facendo neste apartado, atopar unha dependencia entre o erro relativo da temperatura e unha variable xeométrica da malla. Esta dificultade estriba na presenza de varias dimensións no reticulado da probeta. Como unha alternativa que permitise o estudo da influencia do mallado comparáronse os resultados de dúas simulacións, unha cunha rede uniforme e outra como a da Fig. 4.26 baixo as mesmas condicións que no primeiro apartado, agás que:

- A superficie da probeta foi iluminada cun feixe de modo  $TEM_{01}$ \* de  $w = 8$  mm de anchura.



- O lado dos cubos pequenos quedou en 0.889 mm e o dos grandes en 2.667 mm.
- O tempo discretizouse en intervalos de 0.0151 s.



*Fig. 4.26 O emprego de trapecios permite, en dúas transicións, pasar de un elemento cúbico de lado  $D$  a outro de aresta  $3D$ .*

En [4.81] vese unha comparanza entre as simulacións das dúas mallas. Fixámonos en tres magnitudes: o tempo de CPU consumido, o número de nodos e a temperatura máxima dun punto situado no centro da superficie iluminada.

	<b>Malla uniforme</b>	<b>Malla con transicións</b>
<b>Tempo (s)</b>	674.505	202.765
<b>Nº. Nodos</b>	26011	7833
<b>Temperatura (K)</b>	335.41	335.13

[4.81]

A conclusión é clara: o uso dunha malla destas características non afecta á precisión do resultado (que é de  $e = 1.2\%$ ) pero produce un aforro significativo de tempo e memoria na execución da simulación.

Por último, cabe subliñar que, aínda que ten que haber unha relación entre as dimensións superficiais da malla orixe (a máis densa) e destino (a máis grosa), non é necesario manter esta multiplicidade entre as alturas. Por exemplo, sería válido conectar unha rede uniforme composta de elementos de  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  con retículos

$3 \times 3 \times 7 \text{ mm}^3$ . Isto permitiría reticular probetas cun número aceptable de nodos cunha boa combinación de transicións trapezoidais entre elementos e unha elección apropiada das súas dimensións na dirección Z. Esta vantaxe será tanto máis satisfactoria canto maiores sexan as dimensións da xeometría, pola contra, terá como desvantaxe a complicación do código empregado para xerar este tipo de malla.

### *Influencia do ángulo de deformación: xeometría cilíndrica*

Nas situacións en que se precisa tratar cunha xeometría curva, como o son aros e cilindros, ao lle aplicar unha reticulación homoxénea os elementos diminúen progresivamente de volume segundo afastan da superficie e, con bo criterio, é de supoñer que esta curvatura influirá na distribución de temperaturas.

Para manifestar esta posible relación comparáronse as solucións teórica [4.82] e numérica en función do radio, cando un cilindro ten as súas paredes externa e interna sometidas a temperatura constante (*Myers, 1998*).

$$T_{teor}(r) = T_{int} + \frac{T_{ext} - T_{int}}{\lg(r_{ext}/r_{int})} \lg(r/r_{int}) \quad [4.82]$$

Co gallo de avaliar o erro introducido pola curvatura da xeometría modelizáronse arcos de cilindros de 32 mm tanto de lonxitude como de anchura, 8 mm de grosor e radio variable. A xeometría foi reticulada uniformemente con elementos de 2 mm de aresta de modo que o seu volume minguaban progresivamente segundo se afastaban da superficie exterior (*Fig. 4.27*). As paredes externa ( $r_{ext}$ ) e interna ( $r_{int}$ ) permaneceron a temperatura constante de 800 e 300 K respectivamente comparándose os valores da temperatura na metade da vertical sobre o centro.

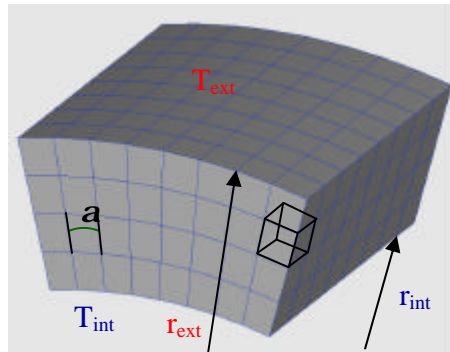


Fig. 4.27 Exemplo de mallado dun arco. O ángulo  $\mathbf{a}$  queda definido entre dous radios consecutivos.

Na gráfica (Fig. 4.28) represéntase a relación existente entre o erro absoluto da temperatura e o ángulo  $\mathbf{a}$  que forman dous radios consecutivos:

$$\mathbf{a} = 2 \arcsin \left( \frac{\Delta x}{2r_{ext}} \right) \quad [4.83]$$

A conclusión que se extrae é que o ángulo de concavidade dos elementos ten unha influencia pequena nos resultados da simulación.

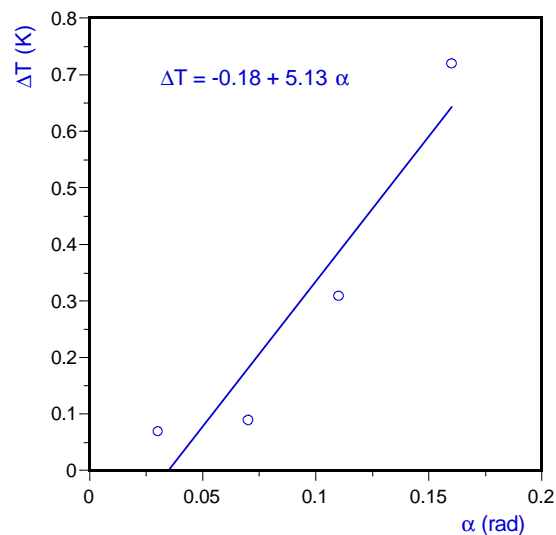


Fig. 4.28 Erro absoluto da temperatura  $\Delta T$  fronte ao ángulo  $\mathbf{a}$ .

### *Influencia da discretización do feixe*

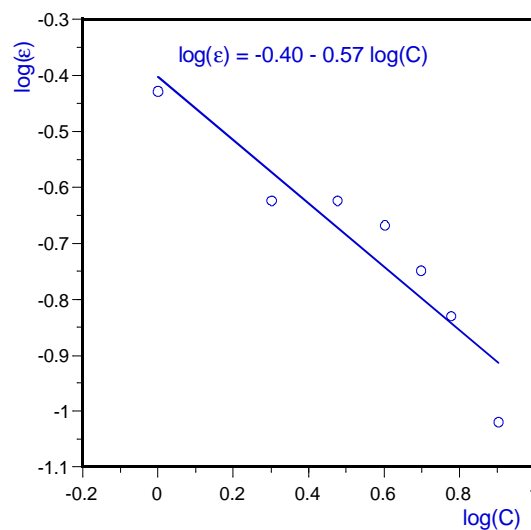
A simulación do feixe láser faise sobre unha superficie reticulada sobre a que, como xa estudiamos, as variacións na rede superficial non teñen influencia na precisión da temperatura. Agora ben, este resultado cúmprese en áreas uniformemente iluminadas; nas situacións reais a distribución transversal do feixe non é deste tipo.

Para estudar a influencia no erro da discretización do láser fíxose unha análise de varias distribucións  $TEM_{01}^*$  de diferente ancho. Nas mesmas condicións que no primeiro apartado, reticulouse a cela con dimensión fixa  $L=1\text{ mm}$  pero cunha potencia de 200 W.

Na gráfica (Fig. 4.29) quérese representar o erro relativo da temperatura no centro da cara iluminada fronte ao cociente entre a anchura  $w$  do modo  $TEM_{01}^*$  e a dimensión  $L$  do elemento empregado para a súa reticulación.

$$C = \frac{w}{L} \quad [4.84]$$

O dito cociente define a calidade da discretización da sección transversal do feixe. A orde de converxencia obtida foi de 0.57.



*Fig. 4.29 Erro relativo da temperatura, fronte á calidade de discretización do feixe  $C$ . A orde de converxencia é de 0.57*

*Influencia da discretización superficial sobre o movemento da fonte*

Nos tratamentos térmicos con láseres é habitual intentar acadar o estado estacionario desprazando a fonte respecto da peza. Nesta translación a morfoloxía da fonte sofre as alteracións introducidas para adaptarse á discretización da malla.

Unha probeta ortoédrica de  $64 \times 32 \times 16 \text{ mm}^3$  e as mesmas propiedades que nos anteriores apartados, foi iluminada cunha fonte rectangular de  $8 \times 32 \text{ mm}^2$  de 200 W que se desprazou cunha velocidade de  $10 \text{ mm s}^{-1}$  dende un extremo da peza ao contrario (o tempo da simulación foi de 6.4 s). En 4.30a, que representa a temperatura máxima fronte ao tempo, vese que como consecuencia deste movemento aparecen pequenas oscilacións na temperatura do estado estacionario. Unha ampliación da rexión central permítenos identificar dúas frecuencias na fluctuación da temperatura (Fig. 4.30b).

En 4.30c está representada a solución analítica para este mesmo caso. Obsérvase claramente que non aparece a oscilación de baixa frecuencia, logo esta debe ser consecuencia do proceso de cálculo de ANSYS<sup>TM</sup>.

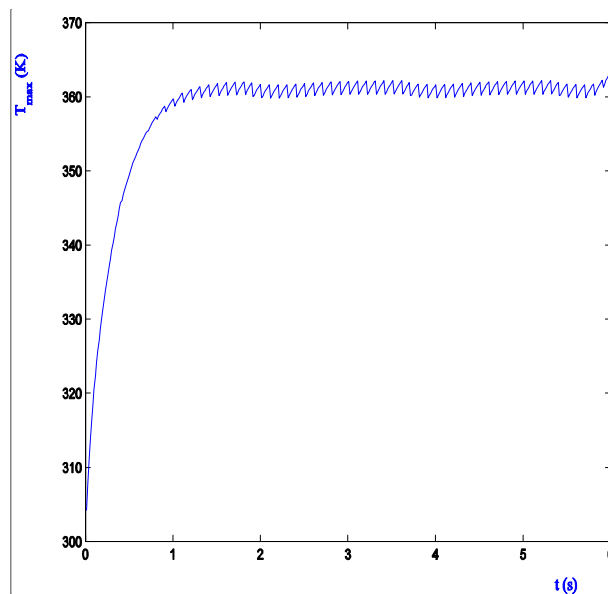


Fig4.30 (a) Temperatura máxima fronte ao tempo. O estado estacionario acádase a 360 K.

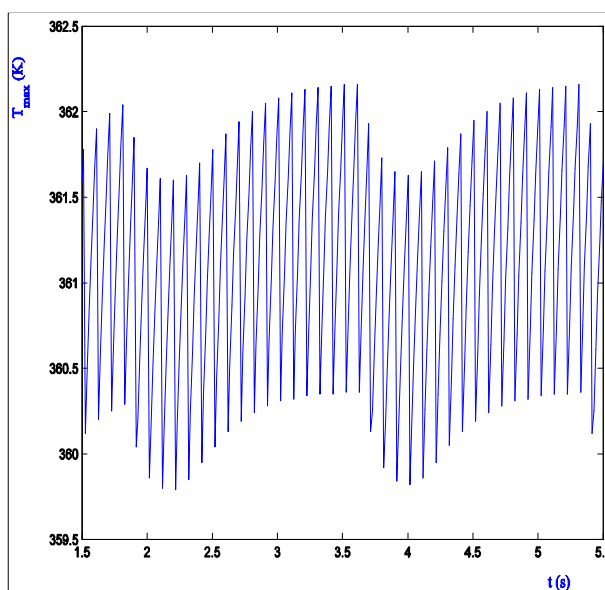


Fig. 4.30 (b) Unha ampliación da rexión central permite identificar unha oscilación de baixa e outra de alta frecuencia.

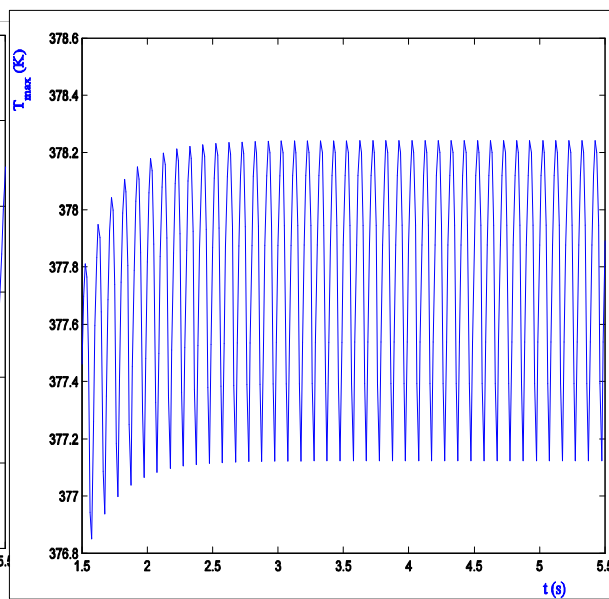


Fig. 4.30 (c) Solución analítica do modelo. Non aparece a oscilación de baixa frecuencia.

As oscilacións de baixa frecuencia teñen a súa orixe na técnica empregada para resolver o modelo de elementos finitos, o gradiente conxugado de Jacobi: o proceso iníciase cunha semente de iteración tomada ao chou, unha vez calculada a distribución de temperaturas para o primeiro paso temporal emprégase esta como semente no seguinte incremento de tempo e así sucesivamente ata que a solución sitúase fóra do criterio de tolerancia da temperatura e do fluxo calorífico, neste intre vólvese a elixir ao azar unha nova semente repetindo o procedemento.

Para estudar a relación existente entre estas oscilacións e o tamaño da malla escolleuse un modelo de similares propiedades aos dos anteriores apartados:

- A xeometría da peza ( $64 \times 32 \times 16 \text{ mm}^3$ ) discretizouse homoxeneamente con elementos cúbicos de 1 mm de aresta (unha metade) e outros de tamaño variable. A función da primeira malla consistiu unicamente en servir de referente unha vez acadado o estado estacionario. O tamaño do paso temporal fixouse en 0.0125 s.
- A fonte de 200 W cubriu unha superficie de  $8 \times 32 \text{ mm}^2$  movéndose na dirección paralela ao eixo X cunha velocidade de  $20 \text{ mm s}^{-1}$  percorrendo na súa totalidade a lonxitude da probeta.

Para analizar os resultados, primeiramente separáronse as oscilacións de alta e baixa frecuencia e unha vez filtradas estudiáronse o período e a amplitude da fluctuación de alta frecuencia. Foron realizados os seguintes ensaios:

$\Delta x$ (mm)	Período (s)	Amplitude (K)
0.8	0.04	1.38
1	0.05	1.69
2	0.0982	4.10
4	0.1958	5.60

Isto permítenos chegar ás seguintes conclusións:

- Como se pode ver na gráfica 4.31, existe unha relación entre o tamaño da malla, o período da oscilación de alta frecuencia e a velocidade de desprazamento da fonte.
- O período de oscilación de alta frecuencia é:

$$P = \frac{\Delta x}{v} \quad [4.85]$$

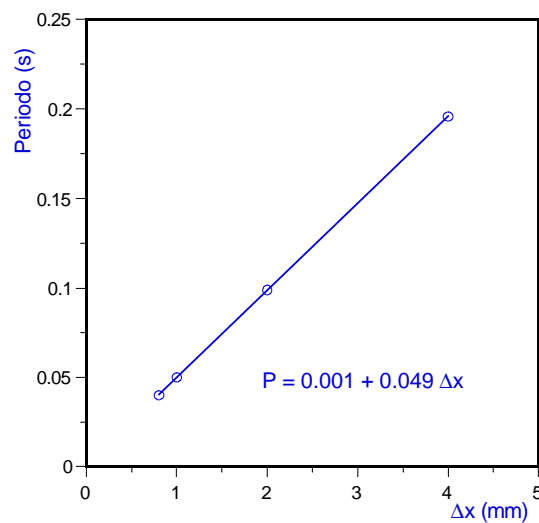


Fig. 4.31 Período fronte ao tamaño da malla. A pendente coincide coa inversa da velocidade.

## 4.2 Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser

- A amplitude da oscilación da alta frecuencia é proporcional ao tamaño do elemento na dirección do movemento (Fig. 4.32)

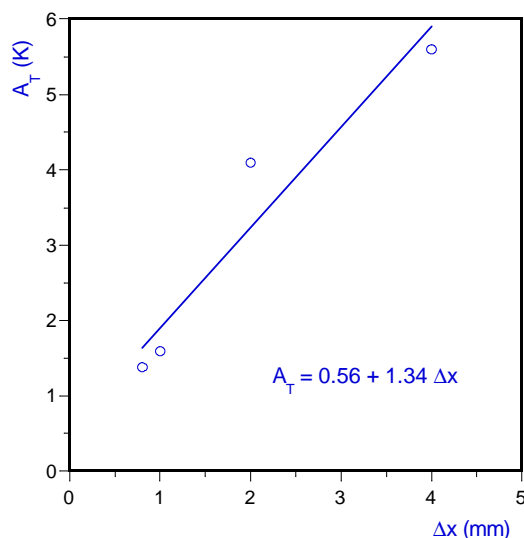


Fig. 4.32 Amplitude da oscilación fronte ao tamaño da malla.

Cómpre subliñar que estas conclusións teñen o seu rango de validez nos valores do número de Fourier  $Fo \geq 5.4^2$  (para relacións menores que 5.4 aparecen fluctuacións moi irregulares) e do número de Peclet  $Pe > 1$ . Por exemplo, seguindo co mesmo experimento pero variando a velocidade e mantendo o tamaño da malla en 1 mm realizáronse as seguintes experiencias:

$v$ (mm s-1)	Período (s)	Amplitude (K)	Peclet
25	0.0399	1.60	3.62
20	0.0499	1.79	2.90
15	0.067	2.01	2.10
10	0.01	2.23	1.45
5	0.2	0.38	0.72

A figura 4.33 representa a amplitude da oscilación fronte á velocidade. Vese claramente que todos os puntos están sobre unha recta agás o correspondente a un número de Peclet por embaixo da unidade.

<sup>2</sup> ANSYS™ ten como límite de fiabilidade o número de Fourier de 5.4



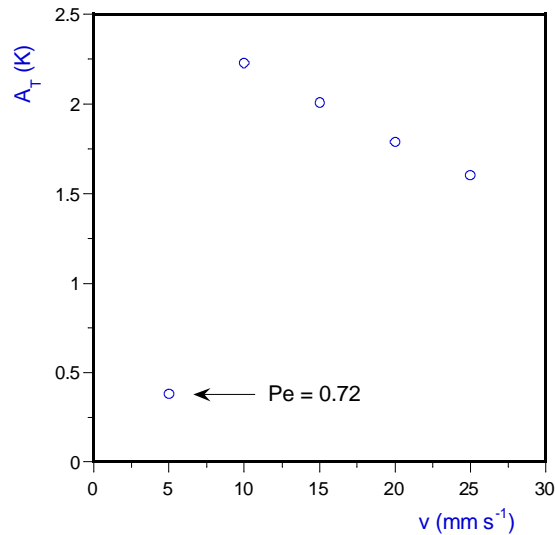


Fig. 4.33 Amplitude da oscilación fronte á velocidade. O número de Peclet condiciona a relación entre as dúas magnitudes.

#### Criterio de contraste

Convén, unha vez realizado do anterior estudio, chegar ao enunciado dun criterio que permita optimizar as dimensións do modelo numérico en función tanto do consumo de tempo-memoria de procesamento do ordenador, como da exactitude dos resultados. Na seguinte táboa vese un resumo de todas as ordes de converxencia.

<i>Tipo de malla</i>	<i>Orde de Cvx.</i>
<i>Malla cúbica</i>	<i>1.61</i>
<i>Malla anisótropa</i>	<i>1.01</i>
<i>Malla mixta próxima</i>	<i>0.45, 0.75</i>
<i>Discretización do feixe</i>	<i>0.57</i>
<i>Malla mixta distante</i>	<i>0.15</i>
<i>Paso temporal</i>	<i>0.016</i>

[4.86]

A comparanza entre as distintas ordes de converxencia obtidas indícanos que coa elección dunha malla cúbica auméntase a precisión na solución máis axiña que con calquera das outras posibilidades.

Así mesmo obsérvase que o impacto do tamaño do paso de tempo sobre a exactitude da solución ten escasa relevancia respecto ás outras ordes de converxencia. Non obstante,

cómpre lembrar que existe unha relación entre este e o tamaño da malla, como queda reflexado na ecuación [3.72].

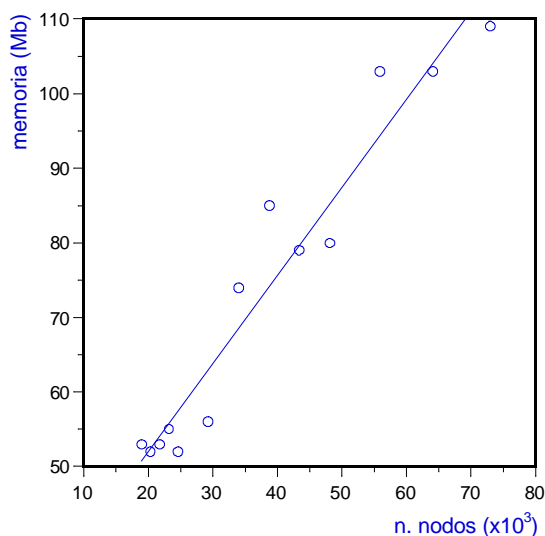


Fig. 4.34 Consumo de memoria de procesamento en función do número de nodos. Os cálculos están realizados na máquina Sun HPC 4500 do CESGA.

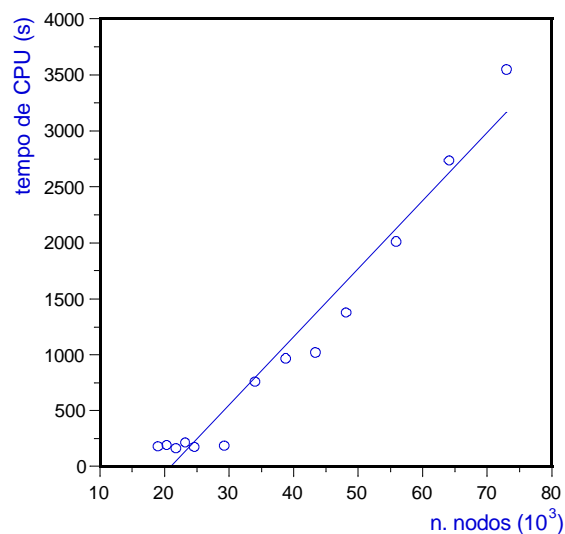


Fig. 4.35 Tempo de execución do código ANSYS<sup>TM</sup> en función do número de nodos.

Segundo os resultados compilados en [4.86], calquera das tres variacións da malla (cúbica, anisótropa ou mixta) producirían un efecto comparable na precisión da solución, acadándose un menor erro no caso dunha malla cúbica. A análise do consumo de memoria (Fig. 4.34) e de tempo (Fig. 4.35) de procesamento no computador HPC 4500 do CESGA permítenos discriminar entre as tres posibilidades.

Para establecer un criterio de contraste empregaremos un exemplo. Baixo as mesmas condicións de iluminación (unha fonte uniforme recubriendo toda a superficie da probeta) e idénticas propiedades materiais reticulouse unha probeta de material, de dimensións  $32 \times 32 \times 16 \text{ mm}^3$ , con tres mallas diferentes: cúbica, anisótropa e mixta. Elixíronse os resultados de maneira que o erro relativo da temperatura fose o máis parecido nos tres casos,  $e \leq 0.5\%$ . Na seguinte táboa cuantifícanse as tres mallas.

<i>Malla</i>	<i>Elemento patrón</i>	<i>N. nodos</i>
<i>Cúbica</i>	0.8×0.8×0.8 $mm^3$	35301
<i>Anisótropa</i>	8×8×0.5 $mm^3$	825
<i>Mixta próxima</i>	4×4×0.1 $mm^3$	325
<i>Mixta distante</i>	4×4×5 $mm^3$	

[4.87]

Da relación entre o número de nodos e a o consumo de CPU, tiramos a seguinte conclusión: o uso de redes mixtas optimiza o modelo de elementos finitos ao minimizar o tempo e a memoria de procesamento do ordenador. Así e todo de non facer un bo uso desta malla poderíamos obter uns resultados moi imprecisos ou un consumo excesivo de CPU, o que inhabilitaría o modelo.

**Bibliografía**

- Álvarez, J.C. et al.. (2001); *Real Time Control and Monitoring of Laser Hardening Process: Application to Cylindrical Workpieces* ; Proceedings of the LANE 2001 (Ed. M. Geiger y A. Otto. Meisenbach) Bamberg.
- Bathe, K-J. (1996); *Finite element procedures*; Prentice Hall.
- Ceballos-Ruano, J.S. et al. (1998); *Tratamiento térmico superficial del acero U8 mediante láser de Nd:YAG*; Rev. Metal. Madrid, 34(2), 1998, 140-143.
- Doane, D.V., J.S. Kirkaldy (1977); *Hardenability with applications to steel*; Proceedings of a Symposium held at the Sheraton-Chicago Hotel. October 1977, pp. 518-545.
- Festa, R. et al. (1993); *Thermal design and experimental analysis of laser and electron beam hardening*; J. Eng. for Industry, Vol. 115, pp. 309-314.
- Gaspar, P. et al. (2000); *A study of the effect of wavelength on q-switched Nd:YAG laser cleaning of eighteenth-century Portuguese tiles*; Studies in Conservation 45 (2000) 189-200.
- Galantucci, L.M. et al.. (1997); *Laser heat treatment using variou overlapping degrees of the beam passes: a FEM transiente analysis*; Laser Assisted Net shape Engineering 2, Proceedings of the LANE'97, Meisenbach Bamberg.
- Inoue, T., K. Arimoto (1997); *Development and implementation of CAE system "HEARTS" for heat treatment simulation baser on metallo-thermo-mechanics*; J. Mat. Eng. Perf., Vol. 6(1), pp. 51-60.
- Johnson, C. (1978); *Numerical solution of partial differential equations by finite element method*; Cambridge University Press.
- Kopel, A., W. Reitz (1999); *Laser surface treatment*; Advanced Materials & Processes, pp. 39-41.
- Kou, S. et al. (1983); *A fundamental study of laser transformation hardening*; Metallurgical Transactions A, vol. 14A, April 1983 pp. 643-653.
- Laroudie, F., C. Tassin, M. Pons (1995); *Hardening of 316L stainless steel by laser surface alloying*; J.M.S. Vol. 30, pp. 3652-3657.
- Melander, M. (1985); *A computational and experimental investigation of induction and laser hardening*; Tese Doutoral.
- Myers, G.E. (1998); *Analytical methods in conduction heat transfer, 2<sup>nd</sup> Ed.*. AMCHT

- Rozzi, J.C. et al. (1998); *Transient thermal response of rotating cylindrical silicon nitride workpieces subjected to a translating laser heat sources, part II: parametric effects an assessment of a simplified model*; J.H.T., November 1998, vol. 120 pp. 907-915.
- Saavedra, E. Et al. (2000); *Predicción de la evolución de la temperatura durante el tratamiento térmico de materiales metálicos por láser*; Anales de la Ingeniería Mecánica. Año 13, Vol. 3, diciembre 2000, pp. 1759-1764.
- Shiue, R.K., C. Chen (1992); *Laser transformation hardening of tempered 4340 steel*; Metallurgical Transactions A, Vol. 23 A, pp. 163-170.
- Wang, J-T., Hwang, C-C. (2000); *The influence of temperature and surface conditions on surface absorptivity in laser surface treatment*; Journal of Applied Physics, Vol. 87, No. 7, pp. 3245-3253.
- Yang, L.J. et al. (1990); *The effects of overlapping runs in the laser-transformation hardening of tool-steel specimens*; Journal of Materials Processing Technology, 23 (1990) 133-147 Elsevie
- Yáñez, A. et al. (2001); *Modelling of temperature evolution on metals during laser hardening process*; Applied Surface Science 186 (2002) 611-616.



---

### 4.3 Modelo de transformacións metalúrxicas dos aceiros ao carbono

Neste apartado presentarase un método para, a partir da distribución de temperaturas sobre un aceiro, cuantificar a composición das fases e a dureza do tratamento de tempero.

#### 4.3.1 Transformacións de fase

O modelo para as transformacións de fase baséase nos diagramas de transformación isotérmicos e nas ecuacións de Johnson-Mehl-Avrami e Koistinen-Marburger. A primeira destas ecuacións aplícase ás transformacións controladas pola difusión do carbono, tanto no proceso de formación da austenita durante o quentamento da peza como na descomposición da austenita en ferrita, cementita, perlita e bainita. Pola contra, a ecuación de Koistinen-Marburger emprégase para calcular a transformación martensítica durante o arrefriamento.

Nos procesos dominados pola difusión, a fracción volúmica da fase  $k$  formada cando o material mantense un tempo  $t$  á temperatura  $T$  ven dada por

$$y_k(t) = 1 - \exp\{-b_k t^{n_k}\} \quad [4.88]$$

onde  $b_k$  e  $n_k$  son parámetros dependentes da temperatura.

Para cuantificar as transformacións das fases modelamos a curva de temperatura-tempo mediante unha serie de chanzos, é decer, pequenos pasos de tempo isoterms conectados entre si por cambios de temperatura sobre as liñas de conversión de fase constante, como se amosa na figura 4.36.

En cada un destes pasos isotérmicos a determinación da porcentaxe de fase formada calcúlase como se describe a continuación:

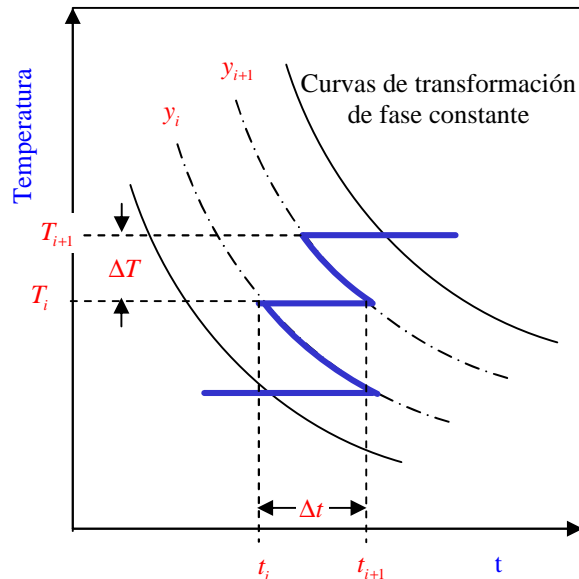


Fig. 4.36 Esquema de aplicación do método. As coordenadas inicial e final conéctanse por medio de pasos isotermos e outros a fracción volúmica constante.

Determináanse as constantes  $n_k$  e  $b_k$  á temperatura  $T_i$  a partir dos tempos e fraccións volúmicas de comezo  $(t_s, y_s)$  e remate  $(t_f, y_f)$  dunha transformación sendo moi común considerar o inicio cando a porcentaxe da nova fase acada o 1% e o 99% para a fin, aínda que se poden empregar outras porcentaxes (ASM, 1991).

$$n_k = \frac{\log \left[ \frac{(1 - y_s)}{(1 - y_f)} \right]}{\log \left[ \frac{t_s(T)}{t_f(T)} \right]} \quad [4.89]$$

$$b_k = \frac{-\ln(1 - y_s)}{[t_s(T)]^{n_k}}$$

En cada un destes pasos isotermos o cálculo da porcentaxe da fase formada está determinada pola ecuación

$$y_{k,i} = 1 - \exp \left\{ -b_k (t'_i + \Delta t_i)^{n_k} \right\} \quad [4.90]$$

onde o tempo  $t'_i$  calcúlase a partir de [4.88] para a concentración do paso  $i-1$ :



$$t'_i = \left\{ \left[ -\ln(1 - y_{i-1}) \right] / b_k \right\}^{1/n_k} \quad [4.91]$$

Nos ciclos térmicos distinguiremos dúas etapas: quentamento e arrefriamento.

- Durante a etapa de quentamento aplícase o anterior método sobre o diagrama ITh (Fig. 4.37) introducindo a modificación de Ericson (Sanesteban, 2002):

$$y_{k,i} = y_k \Big|_{\max} \left[ 1 - \exp\{-b_k t_i^{n_k}\} \right] \quad [4.92]$$

onde a constante  $y_k \Big|_{\max}$  representa a máxima fracción volúmica do constituinte k que se pode formar a unha temperatura. A presenza deste termo leva implícito o principio de aditividade: a composición final dunha fase será a suma das fraccións parciais de cada transformación (Archambault, 1997).

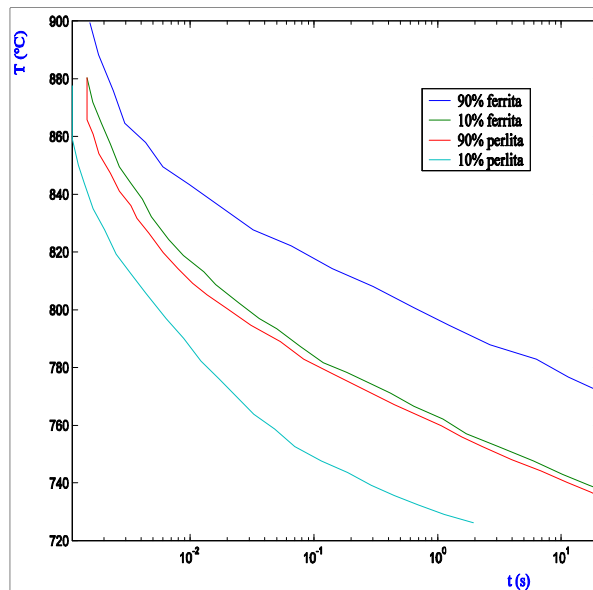
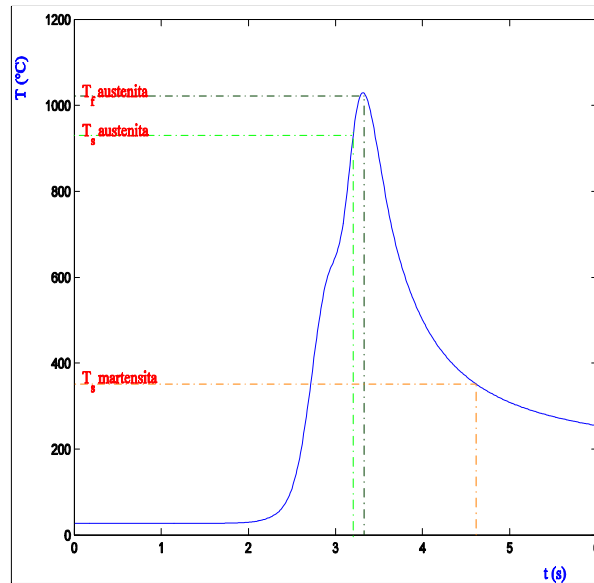


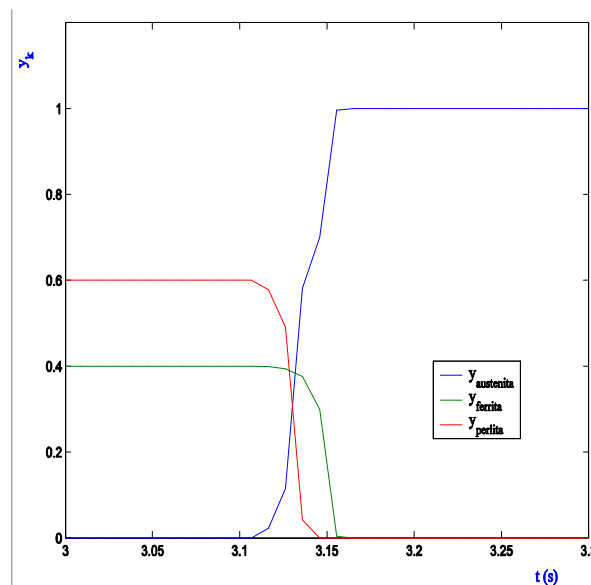
Fig. 4.37 Diagramas ITh para o aceiro F114.

En 4.38 represéntase o ciclo térmico correspondente a 0.7 mm de profundidade dunha probeta cilíndrica (radios interior e exterior igual a 12.5 e 20.5 mm) de aceiro F114 producidos por unha fonte de 969 W con velocidade relativa de  $10 \text{ mm s}^{-1}$  e estrutura transversal de TEM<sub>01</sub>\* de 3 mm anchura.

#### 4. Desenvolvemento dun modelo de tratamento térmico con láser



Na seguinte gráfica (Fig. 4.39) vese un exemplo da aplicación deste método.



- Durante a etapa de arrefriamento modifícase o modelo empregado para incorporar a nucleación previa ao crecemento por difusión. No proceso de

descomposición da austenita en perlita ou bainita distínguense dúas etapas: xerminación e crecemento.

A xerminación modelízase co principio de aditividade de Scheil (ASM, 1991) (Braz, 1985) (Sanesteban, 2002). Para cada paso calcúlase a relación entre a lonxitude do intervalo temporal e o tempo necesario para que se forme o 1% dunha compoñente nunha transformación isoterma:

$$\sum_i \frac{\Delta t_i}{t(T_i)} \quad [4.93]$$

onde  $\Delta t_i$  representa o paso temporal e  $t(T_i)$  é o tempo de incubación da transformación isotérmica á temperatura  $T_i$ . Cando esta suma acada a unidade o período de xerminación queda finalizado dando comezo unha nova etapa.

Durante a fase de crecemento as transformacións austenita  $\rightarrow$  ferrita, austenita  $\rightarrow$  perlita e austenita  $\rightarrow$  bainita cuantifícanse coa ecuación:

$$y_{k,i} = y_{aus} y_k |_{\max} \left[ 1 - \exp\{-b_k t_i^{n_k}\} \right] \quad [4.94]$$

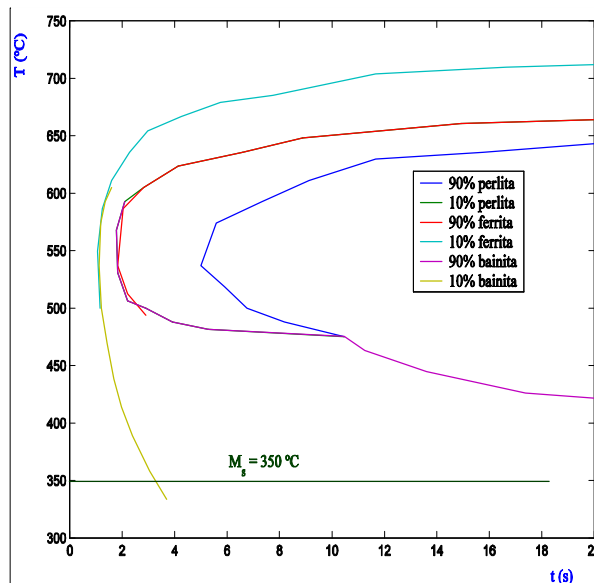


Fig. 4.40 Diagrama TTT de arrefriamento isoterma para o aceiro F114.

O termo  $y_{aus}$  representa a porcentaxe de austenita formada no quecemento.

Unha vez cuantificadas as transformacións por difusión a fracción en volume da martensita formada dependerá unicamente da temperatura acadada por embaixo de  $M_s$  (temperatura de comezo da formación da martensita) e virá dada pola ecuación de Koistinen-Marburger:

$$y_{martensita} = y_{aus} \left[ 1 - \exp\{-g(M_s - T_{fin})\} \right] \quad [4.95]$$

onde  $g$  é un coeficiente que toma o valor 0.011 para aliaxes Fe-C cun contido entre o 0.37% e o 1.1% de C e  $T_{fin}$  representa a temperatura final do proceso. Na gráfica 4.41 obtida a partir do ciclo térmico Fig. 4.38 vese un resultado desta aplicación.

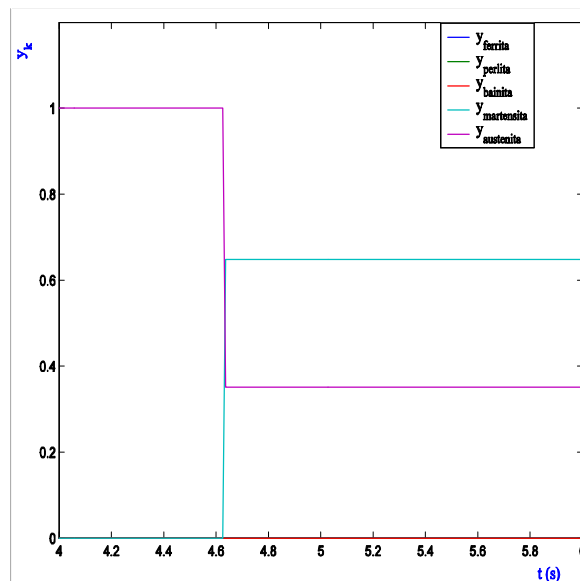


Fig. 4.41 Fracción volúmica das distintas fases fronte ao tempo durante o arrefriamento do aceiro F114.

#### 4.3.2 Endurecemento

Unha vez determinada a concentración das distintas fases correspondentes a cada ciclo térmico pode estimarse a dureza acadada en cada punto da peza. Para isto empregaremos un conxunto de ecuacións empíricas que relacionan a dureza en

Vickers ( $H_v$ ) coa composición do material, a fracción das fases presentes e a velocidade de arrefriamento. Por exemplo, para a martensita, a bainita e a fase ferrita+perlita: (Doane, 1977) (Victor, 1998)

$$\begin{aligned}Hv_m &= 127 + 949C + 11Mn + 21\log(v_{fr}) \\Hv_b &= -323 + 185C + 153Mn + (89 + 53C - 22Mn)\log(v_{fr}) \\Hv_{f+p} &= 42 + 223C + 30Mn + 10\log(v_{fr})\end{aligned}\quad [4.96]$$

De modo que a dureza en cada punto da peza é:

$$Hv = X_m Hv_m + X_b Hv_b + (X_f + X_p) Hv_{f+p} \quad [4.97]$$

onde  $H_v$  representa a dureza en Vickers e  $Hv_i$  a das distintas fases,  $X_i$  representa a composición en tanto por un de cada unha das fases,  $C$  e  $Mn$  son o tanto por cen de carbono e manganeso presentes no aceiro e, por último,  $v_{fr}$  representa a velocidade media de arrefriamento cando a temperatura baixa de 750 a 650 °C, medida en grados centígrados por hora. A dispersión ( $2s$ ) de  $H_v$  é de 13 Vickers para valores da velocidade de arrefriamento entre 814 e  $1.5 \times 10^5$  grados centígrados por hora (Doane, 1997).

**Bibliografía**

- Álvarez<sup>1</sup>, J.C., et al (2001); *Real time control and monitoring of laser hardening process application to cylindrical workpieces*; Proceeding of the LANE 2001, Ed. M. Geiger & A. Otto, Meisenbach.
- Archambault, P. et al. (1997); *Inverse resolution of the heat-transfer equation with internal heat source: application to the quenching of steels with phase transformations*; JMEPEG, 6:240-246.
- ASM Handbook (1991); *Volume 4, Heat treating*; ASM International.
- Braz, F.M. et al. (1985); *Mathematical model coupled phase transformation and temperature evolution during quenching of steels*; Materials Science and Technology, Vol. 1, pp. 838-844.
- Doane, D.V., J.S. Kirkaldy (1977); *Hardenability with applications to steel*; Proceedings of a Symposium held at the Sheraton-Chicago Hotel. October 1977, pp. 518-545.
- Farias, D. (1991); *Traitement thermique laser de l'acier XC42 et modélisation des transformations de phases en cycles thermiques rapides au chauffage et au refroidissement*; Thèse de doctorat, I.N.P.L., Nancy.
- Melander, M., J. Nicolov (1985); *Heating and cooling transformation diagrams for the rapid heat treatment of two alloy steels*; American Society for Metals, Vol. 4, No. 1, June 1985.
- Sanesteban, J. (2002); *Desarrollo de un modelo numérico para la predicción del endurecimiento superficial de aceros procesados con láser*; Trabajo presentado a la comisión de doctorado del Departamento de Enxeñaría Industrial II.
- Victor, M. et al. (1998); *A computational model for the prediction of steel hardenability*; Metallurgical and Materials Transactions B. Vol. 29B, June 1998, pp. 661-672.
- Wang, K.F., S. Chandrasekar, H.T.Y. Yang (1997); *Experimental and computational study of the quenching of carbon steel*; JMSE, Vol. 119, pp257-265

# *Capítulo 5*

## *Avaliación experimental*

### *5.1. Deseño dos experimentos*

#### *5.1.1. Instrumentación*

#### *5.1.2. Tomas de datos*

#### *5.1.3. Dispositivo experimental*

##### *5.1.3.1. Determinación da absortividade do aceiro*

### *5.2. Endurecemento superficial*

#### *5.2.1. Xeometría Plana*

#### *5.2.2. Xeometría cilíndrica*

*Este penúltimo capítulo ten como obxecto o de presentar ao lector tanto os medios dispoñibles para a realización desta Tese como os resultados do modelo.*

*Comezaremos facendo referencia ao material de laboratorio e informático empregado na investigación e unha vez feito isto describiremos a montaxe experimental usada no tempero do aceiro F114. A calibración dun pirómetro e a obtención do coeficiente de absorción da superficie do material merecerá un tratamento máis en detalle.*

*O último apartado estará dedicado integramente á presentación dos resultados de endurecemento de dúas probetas de aceiro F114, unha con forma de placa e a outra coa estrutura dun arco dun cilindro.*



---

## 5.1 Deseño dos experimentos

No noso laboratorio o deseño dos experimentos do tratamento térmico superficial de aceiros con láser consta de catro etapas:

- Obtención, mediante el método de los números adimensionais, dos valores máis axeitados para os parámetros do procesado con láser (potencia, velocidade relativa feixe-material e tamaño do modo TEM<sub>01\*</sub>).
- Simulación co código de elementos finitos ANSYS<sup>TM</sup> tendo en consideración a dependencia coa temperatura das propiedades do material.
- Tratamento da probeta cun láser de CO<sub>2</sub> láser de alta potencia.
- A análise de resultados faise en dúas xeiras.
  - Estudio experimental. Consta dunha preparación inicial da probeta (corte dunha mostra, embutido e pulido), para despois, facendo uso dun microdurómetro, medir a dureza da zona tratada.
  - Comparación coa predicción teórica da distribución da dureza. Mediante un modelo numérico baseado en aproximar as transformacións de fase por medio de pasos isothermos e outros de transformacións constante e as fórmulas de Kirkaldy, constrúese un mapa de durezas coa distribución de temperatura proporcionada polo método dos elementos finitos (Doane, 1997) (Inoue, 1997) (Melander, 1985) (Wang, 2000).

### 5.1.1 Instrumentación

Neste apartado faremos unha descrición da instrumentación empregada nos nosos laboratorios.

## 5. Avaliación experimental

---

Para a estimación dos parámetros do tratamento úsanse varios programas que aplican o método das imaxes ou os números adimensionais, escritos na linguaxe Matlab v. 6, soportado nun ordenador escalar paralelo Sun Microsystem HPC 4500 propiedade do Centro de Supercomputación de Galicia (CESGA). Algunhas das súas características técnicas resúmense de seguido:

<b>SUN HPC 4500</b>	
Arquitectura:	Shared Memory Processor
Número de procesadores:	12
Tipo de procesadores:	Ultra SPARC-2 400 MHz
Potencia de cálculo:	9.6 Gflops (pico)
Memoria:	4 GB SDRAM
Disco:	36 GB
Sistema operativo:	SUN Solaris 2.6

[5.1]

Para a modelización co método dos elementos finitos escribiuse un código escrito en Fortran 77 (*laser*) que serve de enlace entre o usuario e o programa ANSYS<sup>TM</sup> soportado tamén, na máquina Compaq HPC 320 do CESGA.

<b>COMPAQ HPC 3200</b>	
Arquitectura:	Cluster of 8 SMP servers
Número de procesadores:	32
Tipo de procesadores:	Alpha EV68 1 GHz
Potencia de cálculo:	64 Gflops (pico)
Memoria:	80 GB
Disco:	2 tB
Sistema operativo:	Tru64

[5.2]

Para o tratamento con láser o equipamento empregado consta de:

- un resoador Rofin Sinar modelo RS 2000 SM que emite un feixe linealmente polarizado (que muda a polarización circular ao se reflectir nun espello  $I/4$ ),

<b>RS 2000 SM</b>	
Lonxitude de onda:	10.6 $\mu\text{m}$
Excitación:	Corrente continua
Potencia máx:	2000 W $\pm$ 2 %
Diverxencia do feixe:	$\leq$ 1.5 mrad
Modo transversal:	TEM <sub>01</sub> *
Polarización:	Lineal $\rightarrow$ circular
Duración do pulso:	100 $\mu\text{s}$ - CW

[5.3]

- un cabezal de saída que pode montar, alternativamente, dúas lentes ( $f_1$  ou  $f_2$ ), cun sistema de achega de gas para protexer o tratamento,

<b>Lentes</b>	
Material:	Seleniuro de zinc (ZnSe)
Diámetro:	38.1 mm
Focal <sub>1</sub> :	127 mm
Focal <sub>2</sub> :	190.5 mm

[5.4]

<b>Gas de protección</b>	
Composición:	N <sub>2</sub> , Ar ou He
Presión:	$\geq$ 10 <sup>5</sup> Pa

[5.5]

- unha mesa de coordenadas con tres graos de liberdade, dous horizontais e un vertical, e un torno que, excepcionalmente, aporta un grao extra.

<b>Mesa de coordenadas</b>	
Eixes:	2 horizontais 1 vertical (cabezal)
Precisión na posición:	$\leq$ 0.1 mm
Velocidade máx.:	105 mm/min

[5.6]

- e un pirómetro.

<b>Pirómetro</b>	
Rango de temperatura:	723 – 2123 K
Precisión:	1 %
Rango de lonxitudes de onda:	2 – 2.5 $\mu\text{m}$
Focal da lente:	650 mm
Diámetro da área rexistrada:	1.5 mm
Emisividade da superficie:	0 – 0.99 (intervalos de 0.01)

[5.7]

Para a análise do tratamento, empregamos:

<b>Cortadora:</b>	Struers Labotom - 3
<b>Embutidora:</b>	Struers Labopol - 3
<b>Pulidora:</b>	Struers Labopol - 1
<b>Microdurómetro:</b>	Shimadzu HMV -2 Series

[5.8]

Por último, para a investigación teórica da distribución da dureza emprégase un programa escrito en MatLab v. 6 executado no HPC 320 do CESGA, [5.2].

### 5.1.2 Toma de datos

No experimento hai tres estadios que xeran medidas, que son rexistradas para a súa análise posterior:

- A aplicación do método das imaxes xera un arquivo de ternas posición-tempo-temperatura en formato texto.
- A execución do código ANSYS<sup>TM</sup> da como resultado a distribución de temperaturas fronte ao tempo do conxunto de nodos seleccionados. Unha vez tratados conséguense os ciclos térmicos dos distintos puntos.
- O pirómetro está conectado a unha tarxeta de lectura instalada nun ordenador persoal tipo PC, esta placa ten os seguintes parámetros

National Instruments	
Caudal:	5 $10^5$ rexistros p. s.
Período:	20 ms

[5.9]

### 5.1.3. Dispositivo experimental

A montaxe experimental para o tratamento dunha xeometría plana esquematízase no gráfico 5.1. O feixe láser, que incide perpendicularmente á superficie  $XY$ , ten unha velocidade relativa á peza no sentido do semieixe  $OX^+$ . As posicións do pirómetro, en vermello, e do fotodetector, en verde, permiten coñecer e controlar, se así fora o caso, a máxima temperatura sobre a superficie do aceiro. A fiestra azul permite, mediante un sistema de guiado con láser, dirixir o pirómetro cara a coordenada onde se espera a máxima temperatura (Álvarez<sup>2</sup>, 2001).

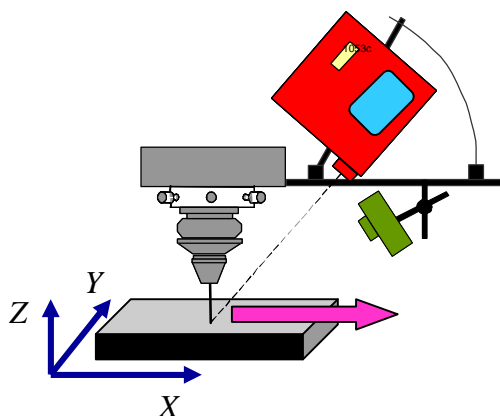
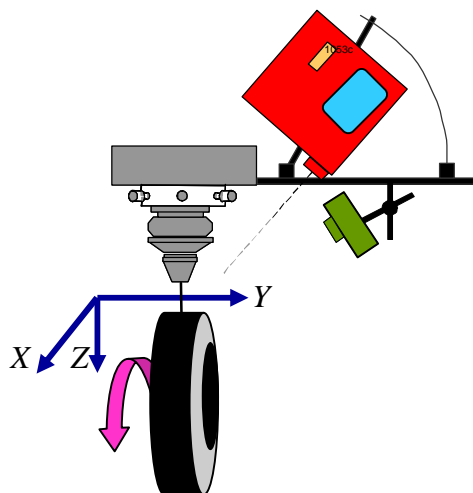


Fig. 5.1 Esquema da montaxe. O pirómetro en vermello e o fotodetector en verde, permiten unha lectura in situ da temperatura superficial.

No gráfico 5.2 represéntase a montaxe para o tratamento dun aro. O feixe láser, que incide perpendicularmente á superficie exterior do aro, ten unha velocidade relativa á peza constante no sentido do vector director  $\hat{i}$ .



*Fig. 5.2 Esquema da montaxe. O pirómetro (en vermello) e o fotodetector (en verde) permiten unha lectura in situ da temperatura superficial.*

### 5.1.3.1. Determinación da absorptividade do aceiro

Para obter unhas boas medidas co pirómetro hai que ter en consideración tres aspectos da súa montaxe e manexo: selección da dirección de enfoque, corrección da emisividade e determinación do coeficiente de absorción.

- O sistema empregado para apuntar o pirómetro (Álvarez<sup>2</sup>, 2001) está formado por un láser que, ao iluminar polo interior a través do visor azul ata acadar a superficie da probeta, proxecta un punto que servirá de guía onde focalizar as medidas (Figs. 5.1 e 5.2). A coordenada que se selecciona para medir a temperatura é  $X_{máx}$ , obtida cun método analítico.
- Para corrixir a emisividade elíxense os parámetros do proceso ata acadar a fusión na superficie, usando a temperatura de cambio de fase para calibrar o pirómetro.
- O método de determinación do coeficiente de absorción da superficie do material tamén emprega o cambio de fase sólido-líquido como referencia. O procedemento consiste en elevar a temperatura do aceiro mediante un aporte continuo de fluxo calorífico pero mantendo a potencia constante (con velocidade

relativa igual a  $10 \text{ mm s}^{-1}$ ) namentres que o pirómetro rexistrará a historia térmica dun punto. A magnitude que relacionaremos co coeficiente de absorción vai ser o tempo transcorrido dende o comezo da iluminación ata que se inicia a fusión ( $t_f$ ). Unha vez determinado experimentalmente este valor de  $t_f$  realizaranse simulacións con elementos finitos para distintos valores da potencia ata obter un tempo  $t'_f$  semellante ao medido experimentalmente. Para reforzar a visualización do cambio de fase na simulación numérica suponse un coeficiente de absorción da fase líquida moi alto, do 90%. A relación entre ambas magnitudes da potencia, a experimental e a calculada, daranos o valor do coeficiente de absorción.

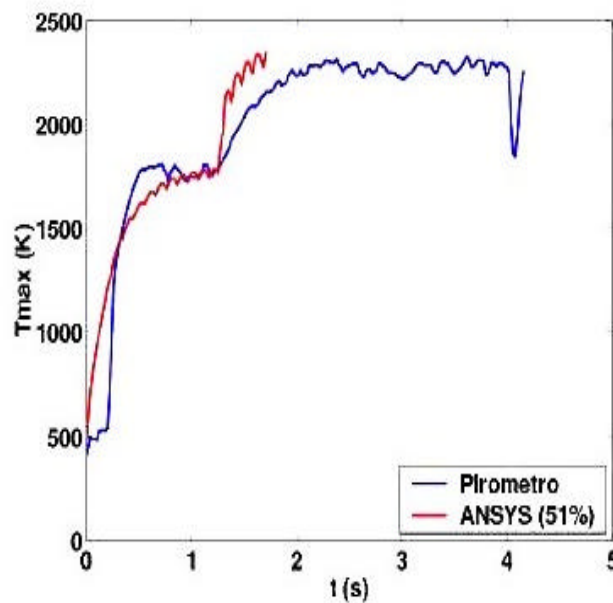


Fig. 5.3 Representación da temperatura máxima fronte ao tempo. Para  $t_f = 1.2 \text{ s}$  o coeficiente de absorción é do 51%.

Para aumentar o coeficiente de absorción da superficie esta foi pintada de negro, obtendo así un  $t_f = 1.2 \text{ s}$  e un coeficiente de absorción do  $51 \pm 2\%$ .

**Bibliografía**

- Álvarez<sup>1</sup>, J.C. et al.. (2001); *Real Time Control and Monitoring of Laser Hardening Process: Application to Cylindrical Workpieces* ; Proceedings of the LANE 2001 (Ed. M. Geiger y A. Otto. Meisenbach) Bamberg.
- Álvarez<sup>2</sup>, J.C., et al (2001); *Sistema de puntería para pirómetro*; Patente P200101029, España (23-04-01).
- Ceballos-Ruano, J.S. et al. (1998); *Tratamiento térmico superficial del acero U8 mediante láser de Nd:YAG*; Rev. Metal. Madrid, 34(2), 1998, 140-143.
- Doane, D.V., J.S. Kirkaldy (1977); *Hardenability with applications to steel*; Proceedings of a Symposium held at the Sheraton-Chicago Hotel. October 1977, pp. 518-545.
- Festa, R. et al. (1993); *Thermal design and experimental analysis of laser and electron beam hardening*; J. Eng. for Industry, Vol. 115, pp. 309-314.
- Inoue, T., K. Arimoto (1997); *Development and implementation of CAE system "HEARTS" for heat treatment simulation baser on metallo-thermo-mechanics*; J. Mat. Eng. Perf., Vol. 6(1), pp. 51-60.
- Kopel, A., W. Reitz (1999); *Laser surface treatment*; Advanced Materials & Processes, pp. 39-41.
- Laroudie, F., C. Tassin, M. Pons (1995); *Hardening of 316L stainless steel by laser surface alloying*; J.M.S. Vol. 30, pp. 3652-3657.
- Melander, M. (1985); *A computational and experimental investigation of induction and laser hardening*; Tese Doutoral.
- Shiue, R.K., C. Chen (1992); *Laser transformation hardening of tempered 4340 steel*; Metallurgical Transactions A, Vol. 23 A, pp. 163-170.
- Wang, J-T., Hwang, C-C. (2000); *The influence of temperature and surface conditions on surface absorptivity in laser surface treatment*; Journal of Applied Physics, Vol. 87, No. 7, pp. 3245-3253.



---

## 5.2 Endurecemento superficial

Neste apartado describiremos o noso proceder no tempero con láser e analizaremos os resultados obtidos durante a simulación e tratamento de dúas probetas de aceiro con xeometrías plana e cilíndrica. Os nosos obxectivos son:

- Concentrar o tratamento na superficie dunha probeta de aceiro F114.
- Soster a temperatura máxima o máis próxima posible á de fusión (1723 K) pero sen que se produza este cambio de fase.
- Estender o máis posible a rexión contida no interior da isoterma  $A_{c3}$ , 1162.9 K (temperatura á que comeza a transformación da ferrita en austenita).
- Pechar o ciclo térmico cun descenso rápido da temperatura para que cristalice a maior cantidade de martensita.

A metodoloxía que vamos seguir consta de cinco etapas:

- Primeiramente, considerando as propiedades térmicas do material como constantes, empregaremos un método analítico para a busca dos parámetros do proceso: velocidade relativa feixe-probeta, potencia e anchura do “spot”.
- Co método dos elementos finitos obteremos os ciclos térmicos dun conxunto de puntos. Aplicando as oportunas relacións deducirase a distribución das fases e as curvas de isodureza.
- Realización no laboratorio do tratamento co láser.
- Medición da dureza na zona afectada.
- Por último, estableceremos unha comparanza entre os resultados experimentais e os cálculos feitos co modelo.

### 5.2.1 *Xeometría plana*

Por xeometría plana entenderemos un volume definido por planos paralelos con ángulos interiores de  $90^\circ$  e a dimensión  $z$  máis pequena que as outras dúas.

#### *Busca dos parámetros do proceso*

No tempero dun material primeiramente cómpre establecer os parámetros que nos permitan realizar o proceso térmico descrito anteriormente. Empregaremos unha solución analítica para obter unha relación entre a potencia, velocidade relativa feixe-probeta, anchura do “spot”, dimensións da rexión acoutada pola isoterma  $T_{Ac3}$  e a temperatura máxima acadada.

Para establecer os parámetros do proceso hai que tomar algunhas decisións previas:

- A potencia elixida será de 1900 W, quedando marxe para subila se así fora oportuno (a máxima potencia subministrada polo resoador RS 2000 M é de 2000 W). Hai que subliñar que o coeficiente de absorción é do 51%.
- Unha anchura do feixe de  $\omega = 3$  mm permite ter unha ampla rexión temperada.
- As propiedades do aceiro F114 tomáronse para unha temperatura de 1500 K, que supera amplamente a  $T_{Ac3} = 1162.9$  K:  $\kappa = 34.4$  W m<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>,  $c = 615$  J kg<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup> e  $\rho = 7564.1$  kg m<sup>-3</sup> (*Smithells, 1992*).

Con estas consideracións obtemos un conxunto de resultados que relacionan a velocidade relativa, temperatura máxima e as coordenadas de esta (*Fig. 5.4*).

$T_{\text{fusión}} = 1723 \text{ K}$				
V (mm/s)	$T_{\text{máx}}$ (K)	$X_{\text{máx}}$ (mm)	$Y_{\text{Ac3}}$ (mm)	$Z_{\text{Ac3}}$ (mm)
0	2338.78	-1.803	4.690	2.937
5	1841.71	-2.277	3.087	0.983
10	1542.52	-2.494	2.291	0.396
15	1376.05	-2.613	1.064	0.105
20	1247.47	-2.705	0.000	0.000

Fig. 5.4 Casos particulares para distintos valores da velocidade.  $X_{\text{máx}}$  representa a coordenada X, referida ao centro do feixe, no que a temperatura é máxima.  $Y_{\text{Ac3}}$  e  $Z_{\text{Ac3}}$  son as anchuras máximas da isoterma  $T_{\text{Ac3}}$  nas direccións Y e Z

O método para seleccionar a velocidade é como sigue:

1. A máxima temperatura para as velocidades de 0 e 5 mm s<sup>-1</sup> supera a temperatura de fusión (1723 K) co que desestimamos estas dúas posibilidades.
2. Nos tres casos restantes, a maior extensión da rexión temperada dáse para unha velocidade de 10 mm s<sup>-1</sup>.

A variable  $X_{\text{máx}}$  non ten incidencia na selección. Esta coordenada que está referida ao centro do feixe, sendo positiva no sentido de avance do láser e negativa en caso contrario, resultará importante para determinar o punto cara onde debe apuntar o pirómetro na fase experimental deste estudo. A modo de resume, o noso modelo queda definido por:

<b>Dimensións:</b>	60×40×10 mm <sup>3</sup>
<b>Potencia:</b>	1900 W
<b>Coef. absorción:</b>	51 %
<b>Vel. relativa:</b>	10 mm s <sup>-1</sup>
<b>Anchura do modo (<math>\omega</math>):</b>	3 mm
<b>Temperatura inicial:</b>	300 K

Fig. 5.5 Dimensións da probeta de aceiro F114 e parámetros considerados para o proceso de tempero.

Para rematar este apartado, débese advertir que o conxunto de dimensións e parámetros ata aquí deducidos terán validez tanto co método dos elementos finitos como no estudo experimental (Fig. 5.6). Neste punto pódense seguir camiños paralelos que converxerían

## 5. Avaliación experimental

---

no intre de comparar e avaliar os resultados, ou de así preferilo, entrar nun proceso de constantes interaccións entre os dous métodos, experimental e numérico.



*Fig. 5.6 Os datos obtidos con métodos analíticos úsanse tanto cos elementos finitos como no laboratorio*

### *Aplicación do método dos elementos finitos*

Como xa estudiamos a configuración do tamaño e distribución das discretizacións espacial e temporal son críticas para conseguir un baixo erro no resultado co método dos elementos finitos. Baseándonos nas análises feitas no apartado 4.2.4 escolleuse un tipo de mallado anisótropo, de dimensións  $1 \times 1 \times 0.1 \text{ mm}^3$  nas proximidades da superficie iluminada (especulamos cun máximo de 2 mm de profundidade de tempero) e  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  na rexión afastada, o que nos permite aforrar nodos. Para ter unha boa calidade de discretización do feixe construíuse unha malla máis densa na parte central da superficie. Na gráfica 5.7 está representada a localización do mallado e a rexión que seleccionamos para o seu estudio e en 5.8 pódense ver as dimensións dos distintos tipos de malla.

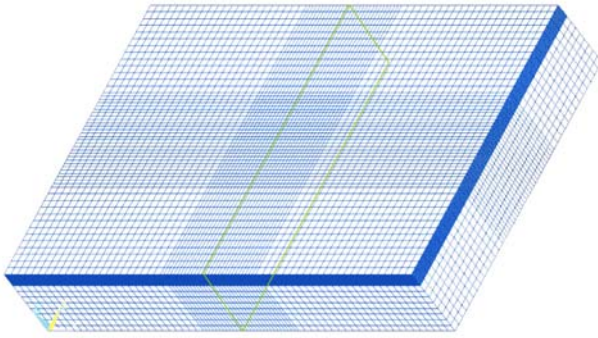


Fig. 5.7 Situación da malla. En verde destaca a sección seleccionada para o seu ulterior estudio.

Mallado	Dimensións
Próximo:	$1 \times 1 \times 0.1 \text{ mm}^3$
Lonxano:	$1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$
Feixe:	$0.5 \times 0.5 \text{ mm}^2$
Temporal	$9.8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

Fig. 5.8 Dimensións das distintas mallas.

Para avaliar en conxunto o erro global cometido fíxose unha comparanza entre a solución aportada por un método analítico e os elementos finitos. Escollendo os parámetros da táboa 5.5 (agás a velocidade que se tomou nula) e considerando como constantes as propiedades  $\kappa = 24.9 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $c = 460.8 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  e  $\rho = 7850 \text{ kg m}^{-3}$  o erro relativo da temperatura no centro da superficie iluminada ao cabo de 1 segundo foi de 0.01%. O mesmo modelo empregouse para calcular o erro introducido pola discretización do feixe en movemento. Para unha velocidade de  $10 \text{ mm s}^{-1}$  aparece unha oscilación, que na rexión de malla máis densa, introduce un erro do 0.3% na máxima temperatura (hai que salientar que o número de Fourier nesta zona é de 3.7). Asemade, posto que o método de cálculo é iterativo existe un erro debido á converxencia da aproximación (ver o apartado 3.3.1.2) que neste estudio foi establecido en 1%, tanto para as variacións na temperatura como no fluxo calorífico.

En total o modelo numérico consta de 119.625 nodos distribuídos por 111.888 elementos. O método de resolución empregado foi o do gradiente conxugado de Jacobi.

Para o tratamento o centro do feixe láser situouse inicialmente na metade da aresta  $Y$  de modo que a súa velocidade  $v$  na dirección  $OX^+$  levouno ata o medio do borde paralelo (Fig. 5.9).

O material empregado para construír a probeta é un aceiro martensítico con denominacións, entre outras, AISI 1045, F114, 06A42 ou EN 8. A súa composición é de

## 5. Avaliación experimental

0.42% de carbono, 0.64% de manganeso e 98.94% de ferro (Smithells, 1992). As gráficas 5.10 amosan a dependencia coa temperatura das tres propiedades térmicas: densidade, capacidade calorífica e conductividade térmica.

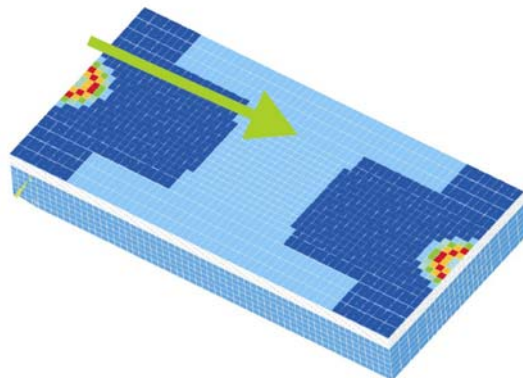


Fig. 5.9 O láser comezou na metade do eixe Y movéndose paralelamente a X ata acadar o borde da peza

Hai que subliñar que nas tres representacións gráficas (Fig. 5.10) a presenza do punto correspondente a unha temperatura de 2000 K, que é ficticio, xustifícase como unha necesidade para que o programa de elementos finitos mantéña a precisión desexada fóra do rango no que están definidas as propiedades térmicas.

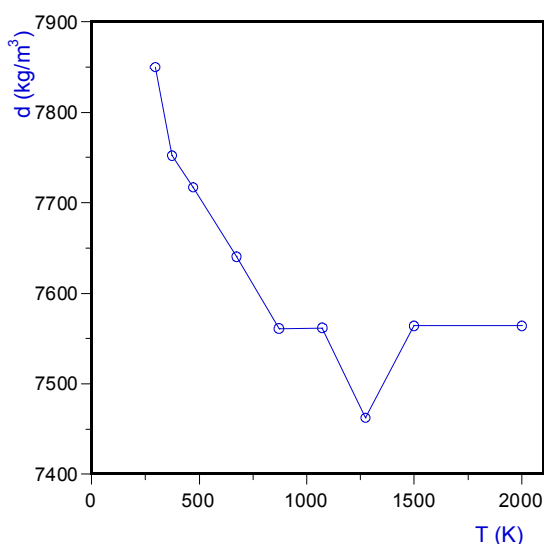


Fig. 5.10 (a) Densidade do aceiro AISI 1000 en función da temperatura.

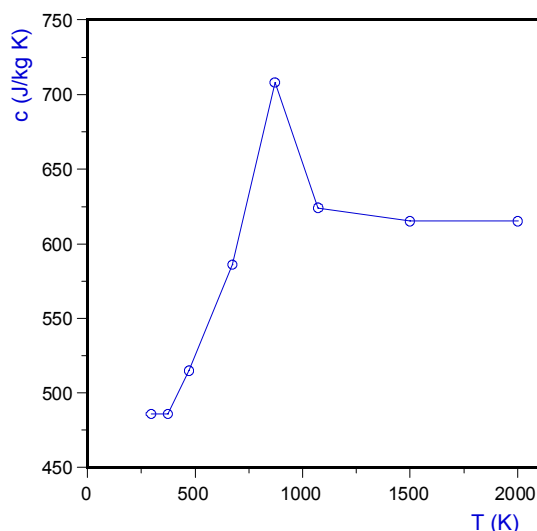


Fig. 5.10 (b) Capacidade calorífica do aceiro AISI 1000 en función da temperatura.

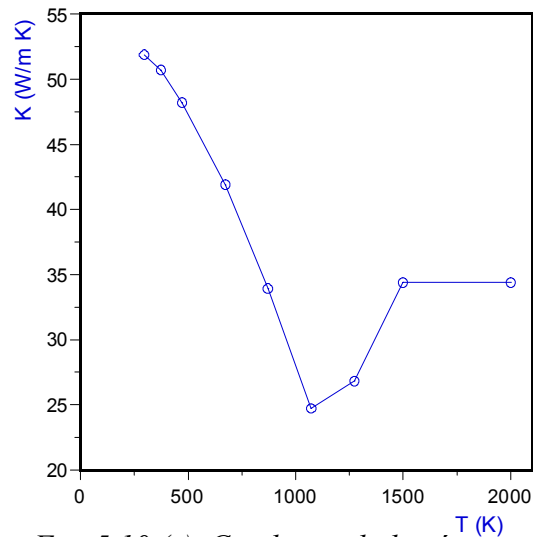


Fig. 5.10 (c) Condutividade térmica do aço AISI 1000 en función da temperatura.

Na figura 5.11 vese como evolucionan as temperaturas  $T_{Ac1}$  (inicio da transformación da perlita en austenita) e  $T_{Ac3}$  (inicio da transformación da ferrita en austenita) coa velocidade de quecemento do material (Farias, 1991) (Sanesteban, 2002).

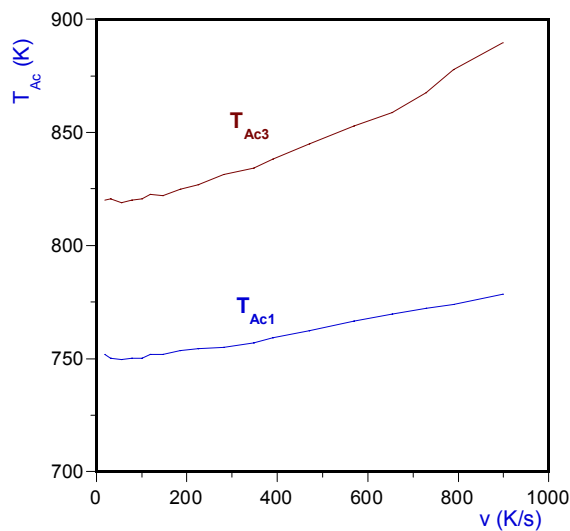


Fig. 5.11 Temperaturas de transformación de fase  $T_{Ac1}$  e  $T_{Ac3}$  en función da velocidade de quecemento.

## 5. Avaliación experimental

### Resultados dos cálculos e das medidas

Para o seu estudio elixiuse unha sección de  $40 \times 10 \text{ mm}^2$  sobre o plano  $x = 30 \text{ mm}$ . Ao ser perpendicular á dirección de movemento do feixe, da análise do tratamento sacarase información tanto da anchura do tempero como da súa profundidade. A selección do plano na metade da dimensión  $X$  é un garante, primeiro, de que se acada o réxime estacionario e, segundo, de que non aparecen efectos de bordo (Fig. 5.12).

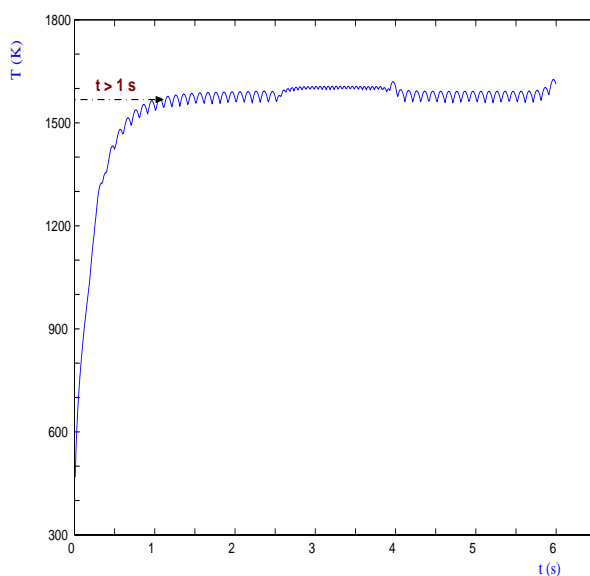


Fig. 5.12 Máxima temperatura fronte ao tempo. O estado estacionario acádase en tempos lixeiramente superiores a 1 s.

As oscilacións da temperatura máxima estacionaria (nos nodos) aparecen polo efecto que ten a malla sobre a discretización do feixe en movemento. Para a rexión reticulada con malla grosa o período destas fluctuacións é de 0.1 s e 0.05 s na discretización fina.

As seguintes figuras están obtidas co programa de elementos finitos ANSYS<sup>TM</sup>. En 5.13 e 5.14 representáanse os planos  $XY$  (a superficie iluminada) e  $XZ$  ( $y = 20 \text{ mm}$ ) despois do tratamento. En vermello e para catro tempos diferentes (1.96, 3, 3.92 e 4.9 segundos) representáanse as zonas que superaron a temperatura  $T_{Ac3}$ ; as liñas negras delimitan a extensión que define a superposición destas rexións.



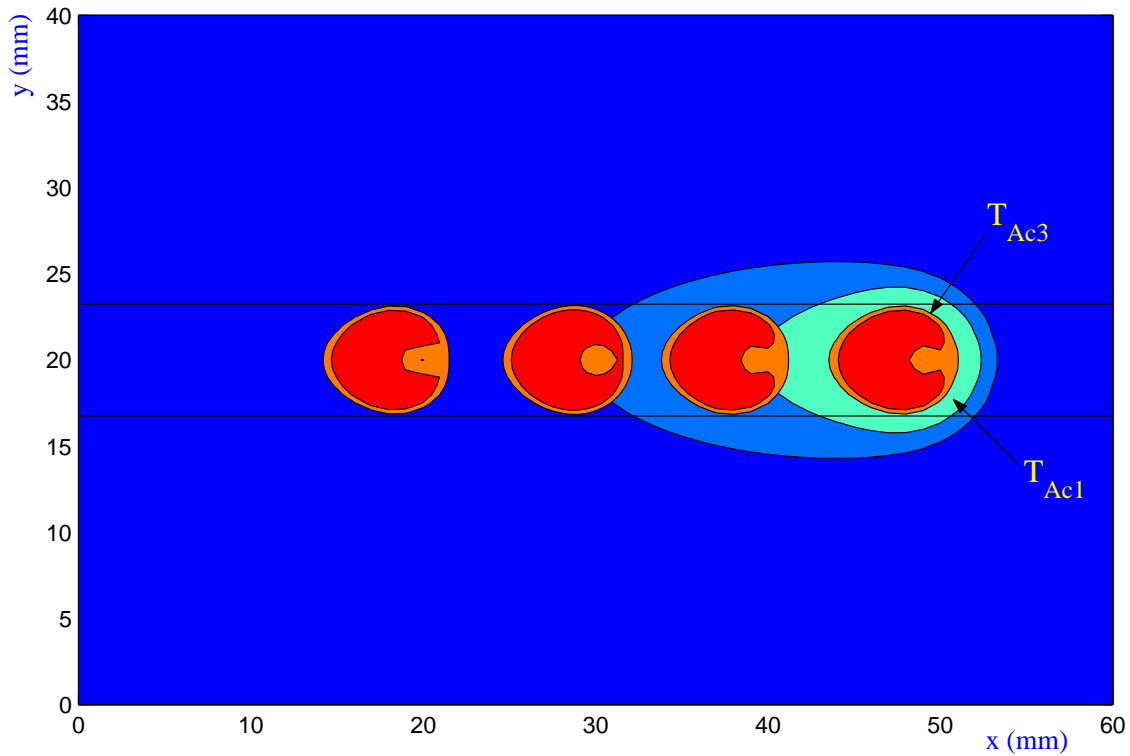


Fig. 5.13 Istotermas no plano XY para catro instantes. As liñas rectas delimitan a rexión que hipoteticamente será temperada.

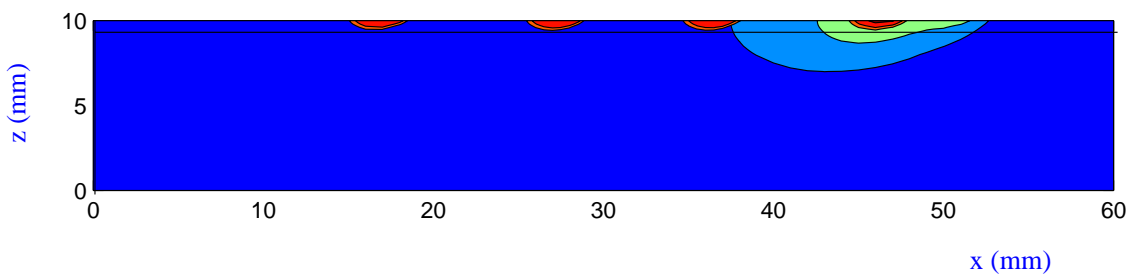
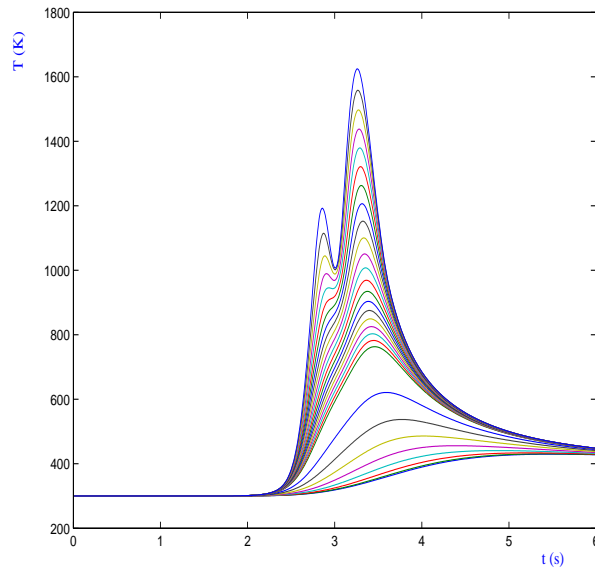


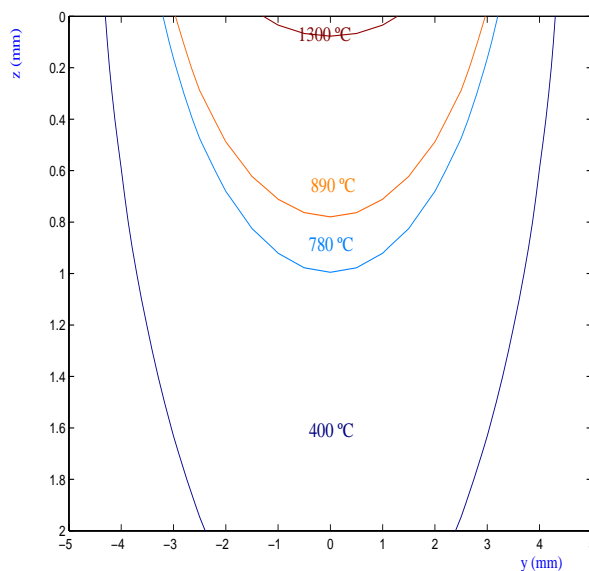
Fig. 5.14 Istotermas no plano XZ para catro instantes. A liña recta delimita a máxima profundidade que hipoteticamente será temperada.

En 5.15 vese como evoluciona a temperaturas co tempo na vertical do centro da superficie iluminada a intervalos de 0.1 (os dous primeiros milímetros) e 1 mm na dirección Z.



*Fig. 5.15 Distribución das temperaturas sobre o centro da probeta a distintas profundidades.*

Nas gráficas 5.16 represéntanse: (a) os mapas de máximas temperaturas sobre un fragmento da sección da probeta, (b) e (c) os perfís da temperatura máxima na superficie e no centro da probeta respectivamente. Nestas figuras a orixe de coordenadas situouse sobre o centro do feixe.



*Fig. 5.16 (a) Mapa de temperaturas na sección estudada.*

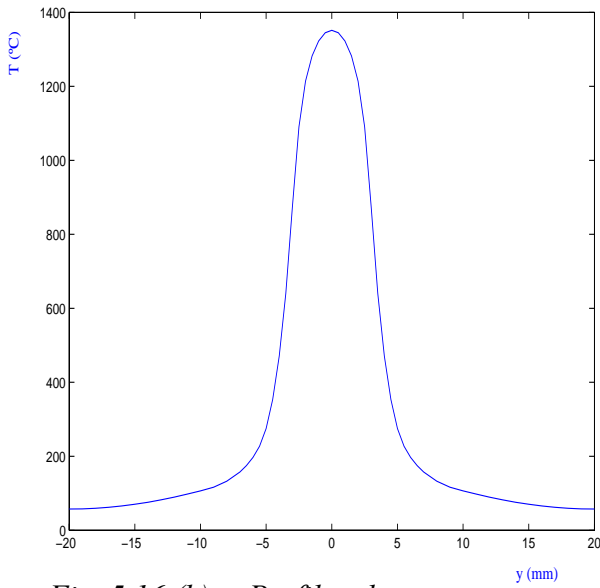


Fig. 5.16 (b) Perfil da temperatura máxima na superficie da probeta.

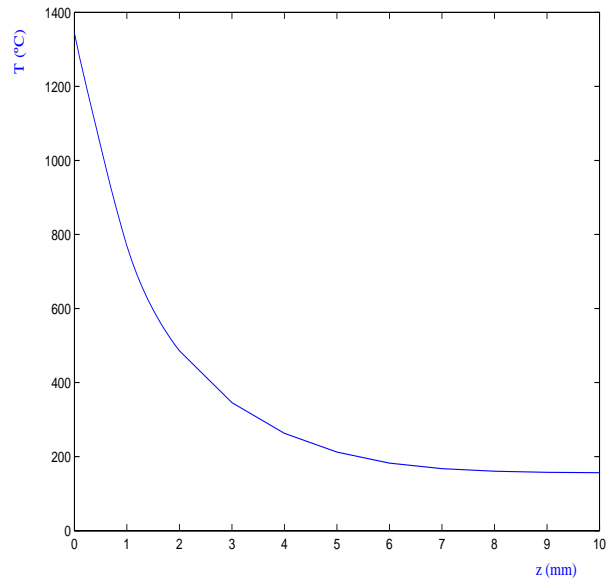


Fig. 5.16 (c) Perfil da temperatura máxima no centro da probeta fronte á profundidade.

As figuras 5.17 amosan: (a) un mapa da concentración de austenita ao final do quentamento, (b) e (c) os perfis da concentración na superficie e no centro da xeometría.

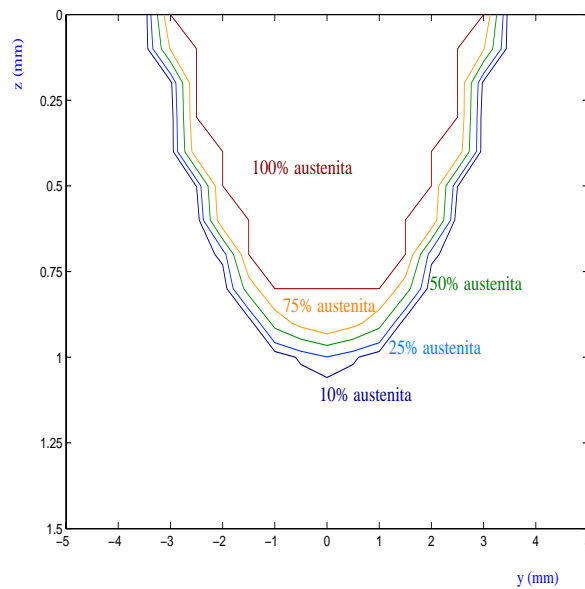


Fig. 5.17 (a) Distribución da concentración de austenita ao final do quentamento

## 5. Avaliación experimental

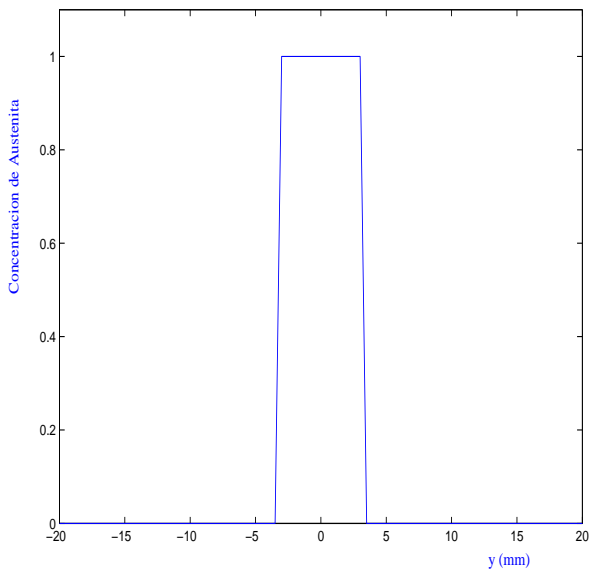


Fig. 5.17 (b) Perfil da concentración de austenita na superficie da probeta.

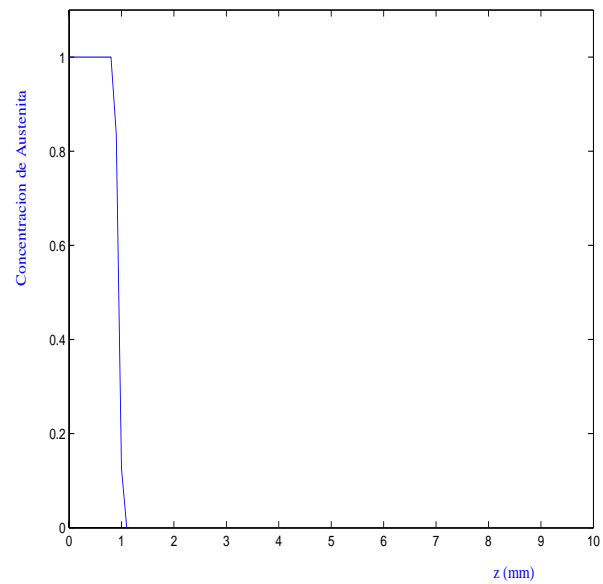


Fig. 5.17 (c) Perfil da concentración de austenita no centro da probeta.

O seguinte paso a dar consiste na consecución dun mapa de distribución da martensita a partir dos ciclos térmicos. Un mapa e os perfís da concentración están representados nas gráficas 5.18 (a), (b) e (c). As distintas liñas separan rexións co mesmo grao de composición: a liña vermella escura contén o 90% de martensita, a laranxa o 75% e así ata a liña azul mariño cunha composición do 10%. Para completar o proceso de formación da martensita estimouse cun simple cálculo que a temperatura final da mostra foi de 367 K (desprezando as perdas por convección, radiación e o efecto do ambiente).

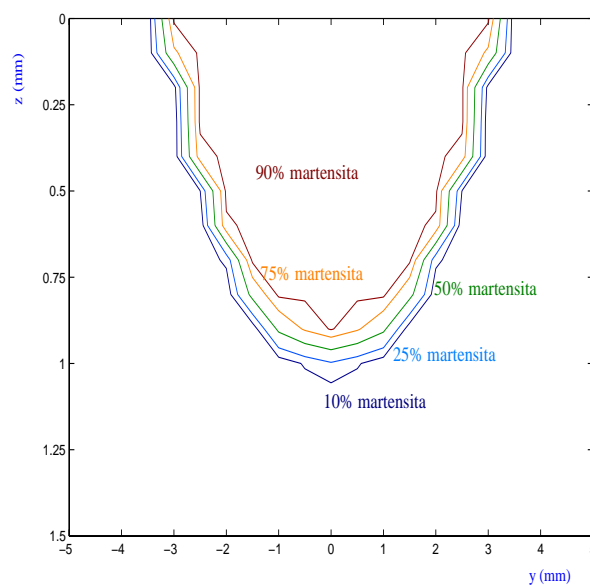


Fig. 5.18 (a) Mapa da concentración de martensita nunha sección. As liñas están distribuídas entre a vermella (90% de martensita) e a azul (10%).

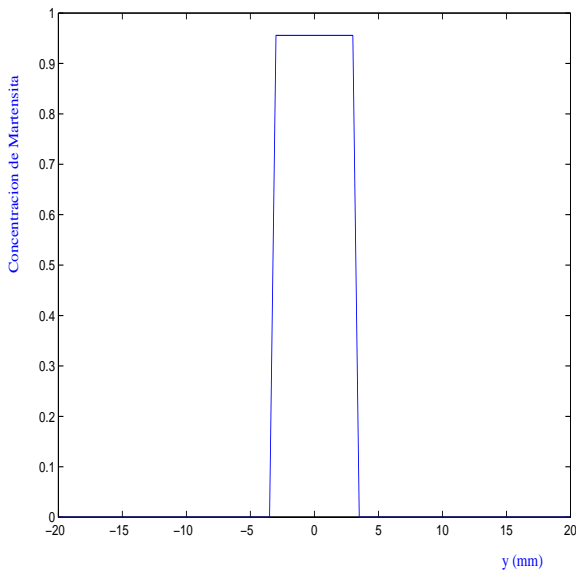


Fig. 5.18 (b) Perfil da concentración de martensita na superficie da probeta.

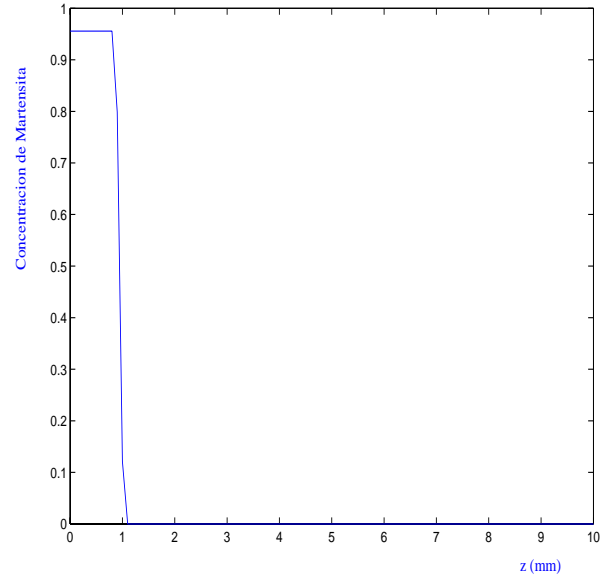


Fig. 5.18 (c) Perfil da concentración de martensita fronte á profundidade no centro da probeta.

Na gráfica 5.19 (a) pódese ver o mapa de dureza resultante de aplicarlle estas relacións ao mapa de concentracións das fases para unha metade da sección temperada. As curvas que separan rexións de igual dureza van de 400 Hv, en vermello, a 300 Hv, en azul mariño. Apréciase que as dimensións da zona tratada, que consideramos aquela rexión que ten unha dureza igual ou maior de 300 Hv, son de aproximadamente 6.8 mm de ancho e 1.06 mm de profundidade. A máxima dureza é de 820 Hv.

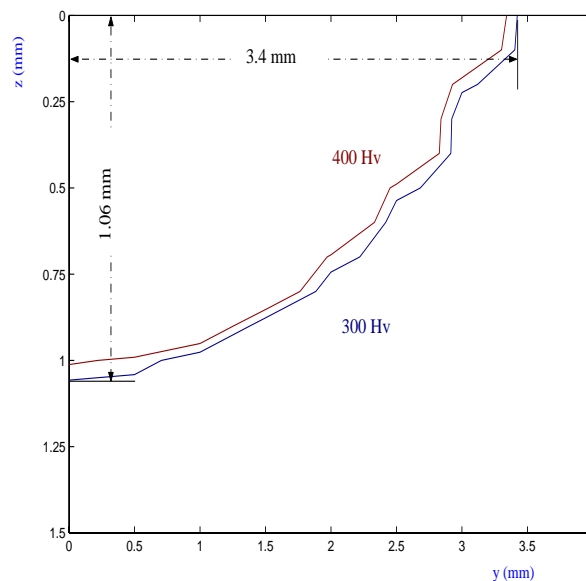


Fig. 5.19 (a) Mapa de durezas dunha metade da sección tratada. A dureza do material base está entre 200 e 250 Hv.

## 5. Avaliación experimental

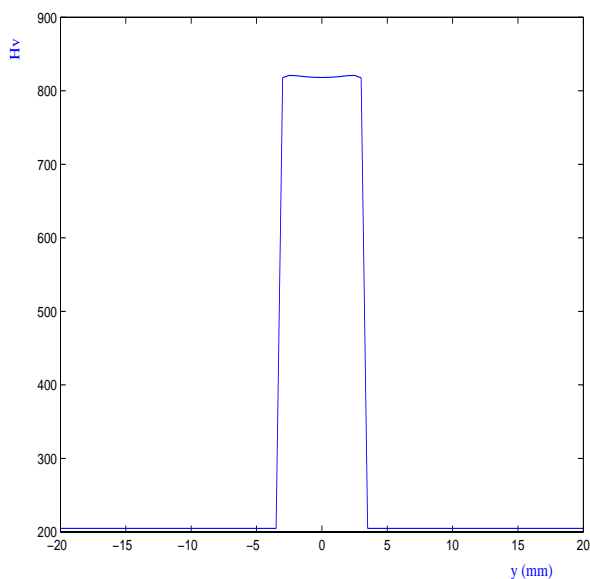


Fig. 5.19 (b) Perfil da dureza na superficie da probeta.

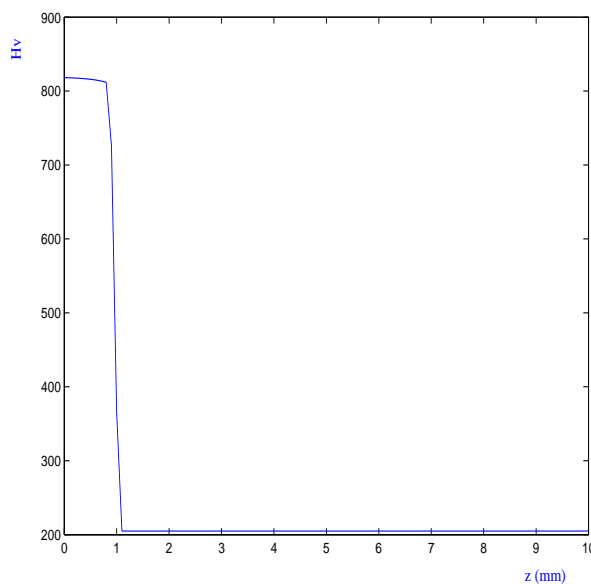


Fig. 5.19 (c) Perfil da dureza no centro da probeta.

O uso da análise dimensional feita no apartado 4.1.3 permitíranos estimar a incerteza dos cálculos.

En [5.10] agrúpanse os erros introducidos pola malla (0.01%), a discretización da velocidade (0.3%) e os debidos ás oscilacións experimentais nos tres parámetros do proceso: velocidade, potencia e anchura do feixe. Convén especificar que no caso da potencia a incerteza experimental está no 1%, así que se tomou o erro do coeficiente de absorción (2%). O erro total calculouse como a raíz cadrada da suma dos cadrados.

Malla:	0.01% $T_{\max}$
Discretización da velocidade:	0.3% $T_{\max}$
Velocidade: $\pm 3\%$	1% $T_{\max}$
Potencia (coef. abs.): $\pm 2\%$	2% $T_{\max}$
Anchura ( $\omega$ ): $\pm 5.4\%$	7.4% $T_{\max}$
<b>Total</b>	<b>8% <math>T_{\max}</math></b>

[5.10]

Asumiremos que para pequenas variacións dos parámetros os ciclos térmicos poderán se amplificar e diminuír proporcionalmente ao valor do erro total da temperatura máxima. Aplicaremos estes cambios aos ciclos térmicos e ao cálculo da distribución das fases e da dureza. Asemade será necesario adaptar as dimensións da xeometría ampliándoa nun factor 1.054 no caso de que a temperatura máxima sexa  $0.92 T_{\max}$  ou comprimíndoa un

0.946 cando a temperatura sexa  $1.08 T_{\max}$ . Así o erro da anchura calculada é de  $\pm 0.3$  mm e o da profundidade de  $\pm 0.09$  mm.

Os resultados das medicións experimentais represéntanse na táboa (en horizontal a profundidade e en vertical a anchura):

<b>mm</b>	<b>0.1</b>	<b>0.2</b>	<b>0.3</b>	<b>0.4</b>	<b>0.5</b>	<b>0.6</b>	<b>0.7</b>	<b>0.8</b>	<b>0.9</b>	<b>1.</b>
<b>0.1</b>	735	801	791	578	471	454	610	262	209	216
<b>0.2</b>	548	591	500	708	490	578	417	287	234	215
<b>0.3</b>	631	646	638	638	717	743	531	296	246	236
<b>0.4</b>	735	610	684	660	743	500	653	287	239	233
<b>0.5</b>	653	526	591	437	554	610	388	262	214	212
<b>0.6</b>	772	638	624	584	735	441	399	305	205	214
<b>0.7</b>	753	692	772	510	610	653	708	285	251	236
<b>0.8</b>	717	762	735	610	429	572	368	291	236	238
<b>0.9</b>	700	653	476	391	421	375	445	228	215	212
<b>1.</b>	684	604	772	762	429	700	388	255	218	222
<b>1.1</b>	762	668	708	449	700	317	480	239	239	218
<b>1.2</b>	772	762	572	726	312	350	218	221	239	205
<b>1.3</b>	692	684	505	624	454	371	631	231	238	209
<b>1.4</b>	717	572	554	624	490	490	320	241	225	225
<b>1.5</b>	684	676	476	537	467	668	371	222	236	225
<b>1.6</b>	726	692	441	520	660	317	238	225	236	212
<b>1.7</b>	743	762	717	437	500	572	233	236	216	216
<b>1.8</b>	801	668	708	560	753	261	227	224	211	228
<b>1.9</b>	624	684	772	676	365	402	231	221	209	209
<b>2</b>	726	604	762	542	356	251	225	218	208	214
<b>2.1</b>	692	822	653	429	515	239	214	227	221	209
<b>2.2</b>	505	449	531	433	341	222	212	198	221	219
<b>2.3</b>	684	421	735	395	239	219	215	207	212	201
<b>2.4</b>	700	676	505	347	228	222	204	209	201	227
<b>2.5</b>	485	684	490	227	241	228	236	227	224	208
<b>2.6</b>	726	449	425	205	204	205	203	201	194	203
<b>2.7</b>	726	604	262	215	228	208	219	211	224	203
<b>2.8</b>	490	445	218	221	227	208	196	225	194	216
<b>2.9</b>	333	239	231	233	227	208	211	231	190	207
<b>3.</b>	230	231	225	222	222	212	224	207	208	216

*Tab. 5.20 Resultados das medidas experimentais. En horizontal a variación coa profundidade e en vertical coa anchura.*

## 5. Avaliación experimental

Na fotografía 5.21 vese o resultado do tratamento no laboratorio. A liña vermella separa a predicción obtida co modelo.

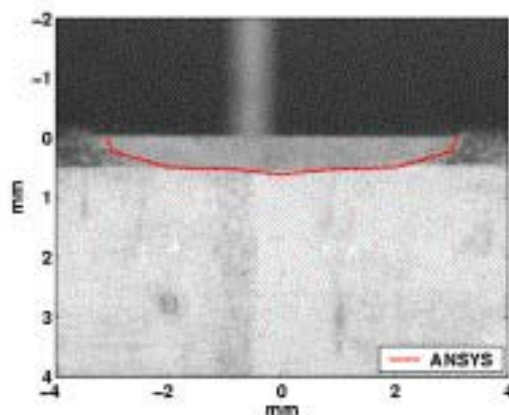


Fig. 5.21 Fotografía dun fragmento da rexión tratada.

A dureza do material base está entre 200-250 Hv sendo o máximo valor acadado de 801 Hv. O mapa de durezas 5.22 (a) presenta unhas dimensións de 5.8 mm de ancho na superficie e 0.8 mm de profundidade máxima para o valor de 300 Hv. En 5.22 (b) e (c) pódense ver os perfís de dureza na superficie e no centro da probeta nos que se observan fluctuacións dun punto a outro de, aproximadamente, 100 Hv arredor dun valor medio.

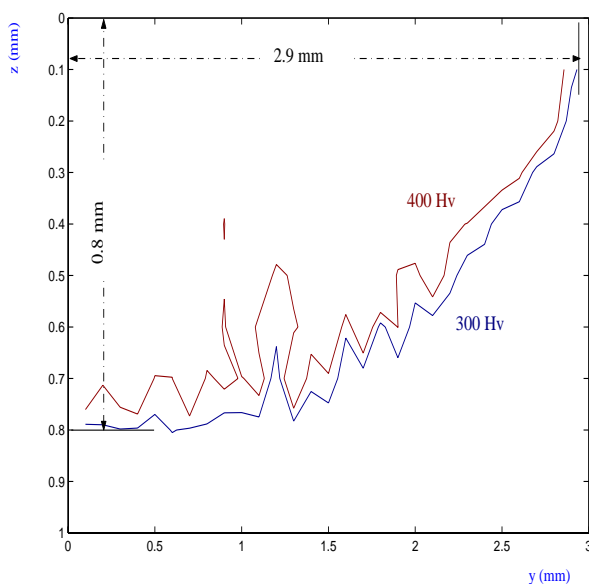


Fig. 5.22 (a) Mapa de dureza e dimensións dunha metade da probeta obtido experimentalmente.



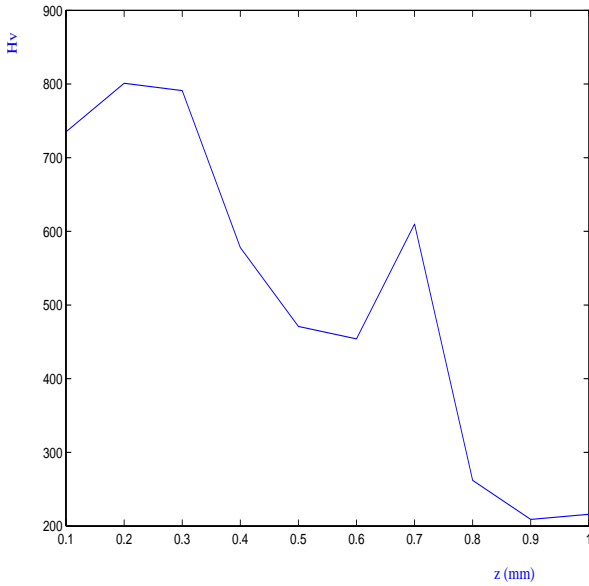


Fig. 5.22 (b) Perfil da dureza no centro da peza.

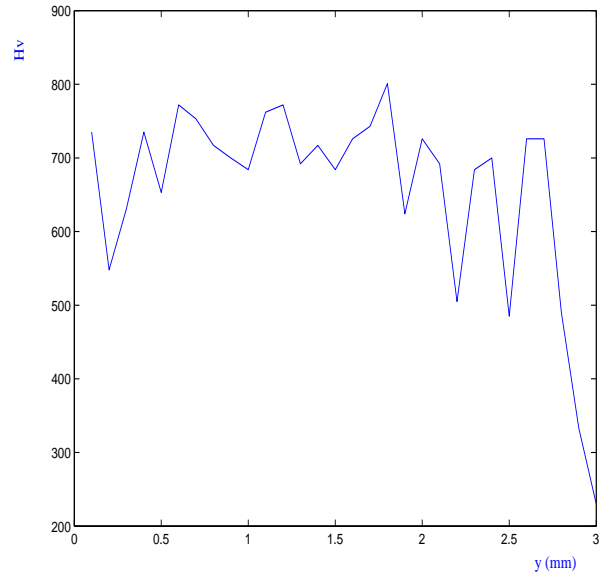


Fig. 5.22 (b) Perfil da dureza na superficie dunha metade da peza.

*Comparanza entre os cálculos e as medidas*

De seguido preséntase a compilación dos resultados obtidos, tanto numérica como experimentalmente.

	Calculado	Medido	Diferencia
Ancho máx.	$6.8 \pm 0.3$ mm	5.8 mm	1. mm
Profundidade máx.	$1.06 \pm 0.09$ mm	0.8 mm	0.26 mm

[5.11]

A análise destes datos indícanos que o modelo ten un bo funcionamento para a predicción tanto da anchura máxima como da profundidade do tratamento. De entre estas dúas comparanzas a mellor estimación é a do ancho cun erro relativo do 17%, namentres que a penetración do tempero aproxímase nun 32 %. Hai que salientar a presenza de fortes oscilacións nos perfís experimentais das curvas de isodureza 300 Hv e 400 Hv que supoñemos que son debidos a fortes variacións locais das propiedades do aceiro.

En 5.23 vese unha representación gráfica do perfil de dureza en diferentes anchuras a partir do centro da probeta (curva 0). A análise da diverxencia entre as curvas de dureza calculada e a medida, aporta información cualitativa do rango de aplicabilidade do modelo. A diferenza dos outros dous parámetros, que son estimacións da extensión dunha rexión, o perfil de dureza tírase dunha medición puntual; logo na súa

## 5. Avaliación experimental

determinación son relevantes as imperfeccións microscópicas locais (máculas de martensita revenida, dislocacións na rede cristalina,...), inhomoxeneidades que non se consideran no modelo de elementos finitos.

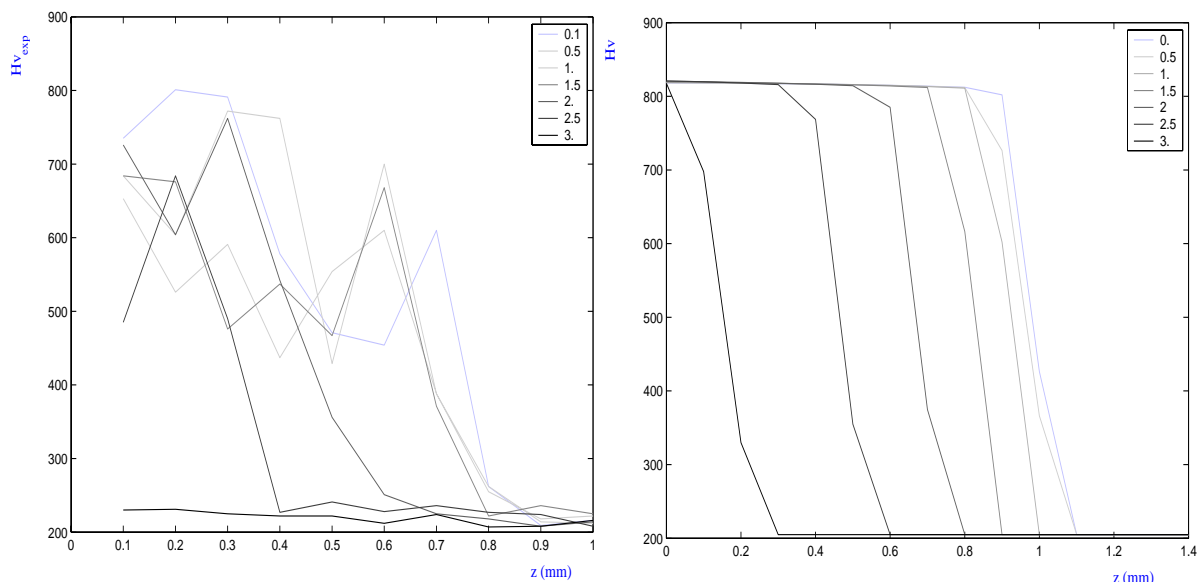


Fig. 5.23 Dureza medida e calculada fronte á profundidade.

### 5.2.2 Xeometría cilíndrica

Por xeometría cilíndrica entenderemos unha peza cilíndrica cun oco, tamén cilíndrico, situado na dirección do eixo de simetría.

*Busca dos parámetros do proceso*

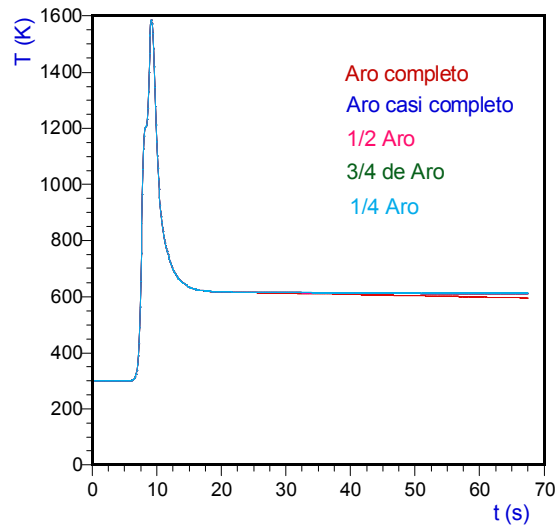
Aplicando o mesmo proceder que no anterior apartado e posto que os resultados calculáronse con independencia das dimensións da probeta, os parámetros seleccionados para o tempero serán exactamente os mesmos. Na figura 5.24 pódense consultar tanto as dimensións da probeta, como os parámetros do proceso elixidos.

<b>Potencia:</b>	1700 W
<b>Coef. absorción:</b>	57 %
<b>Vel. relativa:</b>	10 mm s <sup>-1</sup>
<b>Anchura do modo (<math>\omega</math>):</b>	3 mm
<b>Temperatura inicial:</b>	300 K

Fig. 5.24 Parámetros do proceso.

*Aplicación do método dos elementos finitos*

Estudios previos realizados demostráronnos que os resultados das simulacións con elementos finitos son independentes do tamaño do arco do cilindro que consideremos, sempre e cando este sexa o suficientemente extenso como para evitar os efectos do bordo. Na gráfica 5.25 represéntanse os ciclos térmicos dun punto coas mesmas coordenadas en cinco xeometrías diferentes.



*Fig. 5.25 Ciclos térmicos para a mesma coordenada en cinco simulacións diferentes.*

Conclúese entón, que nas simulacións podemos substituír un cilindro por un arco sen que se produzan erros apreciables pero co efecto beneficioso de diminuír o número de elementos do modelo. Así construímos unha probeta de dimensións:

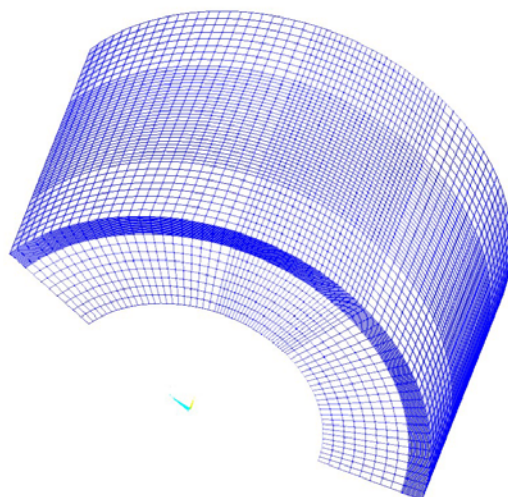
<b>Dimensións</b>	
<b>Radio interior:</b>	12.5 mm
<b>Radio Exterior:</b>	20.5 mm
<b>Lonxitude exterior:</b>	60 mm
<b>Ancho:</b>	30 mm
<b>Grosor:</b>	8 mm

*Fig. 5.26 Dimensións da probeta*

## 5. Avaliación experimental

---

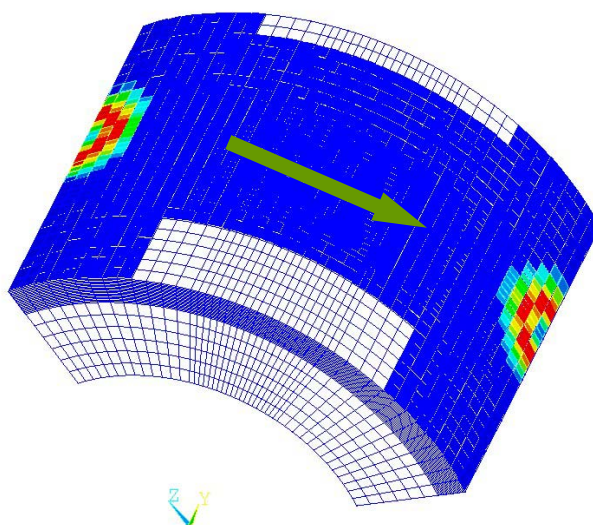
Escolleuse o mesmo modelo de rede que no anterior apartado (ver en *Fig. 5.8* os erros que introducen cada unha das distintas redes). Na gráfica 5.27 pódese ver a localización do mallado. Como a curvatura dos elementos non introduce ningún erro significativo a incerteza global que aporta a malla é idéntica ao anterior caso, 0.01% (ver o apartado 4.2.4).



*Fig. 5.27 A malla fíxose máis densa no centro e nas proximidades da superficie.*

En total, o modelo consta de 91.125 nodos e 84.656 elementos e o método de resolución empregado foi o do gradiente conxugado de Jacobi.

Ao igual que no anterior tratamento o feixe comezou co seu centro na metade da aresta en  $Y$  desprazándose con velocidade  $v$  na dirección  $OX^+$  ata acadar o bordo paralelo.



*Fig. 5.28 O feixe moveuse con velocidade  $v$  dende a metade da aresta  $Y$  ata acadar o outro bordo.*

O material empregado é o mesmo que no anterior apartado, aceiro F114.

### Resultados dos cálculos e das medidas

Aquí tamén se tomou para a súa análise unha sección paralela ao eixo de simetría do aro ( $30 \times 8 \text{ mm}^2$ ). Nas gráficas 5.29 e 5.30 apréciase o resultado da simulación numérica con elementos finitos. As liñas negras delimitan a rexión que hipoteticamente quedará afectada polo endurecemento.

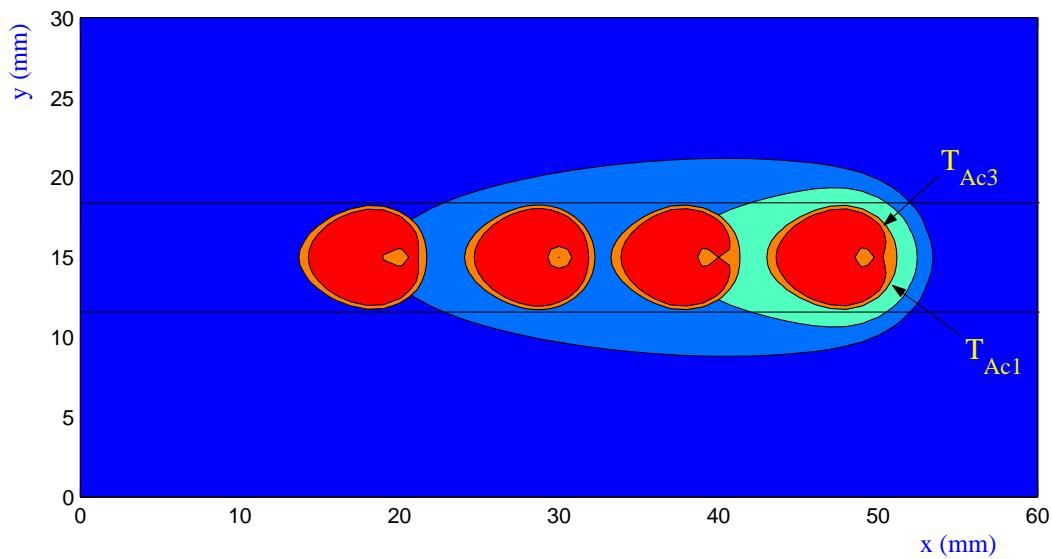


Fig. 5.29 Distribución de isoterma no plano XY

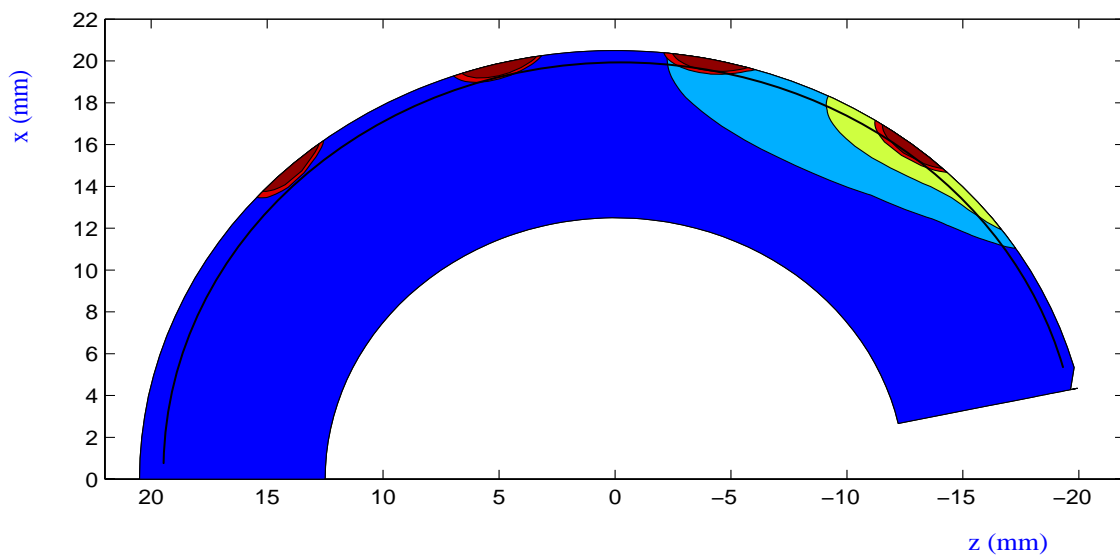


Fig. 5.30 Distribución de isoterma no plano XZ.

## 5. Avaliación experimental

A figura 5.31, obtida co programa de elementos finitos ANSYS<sup>TM</sup>, representa como evoluciona a temperaturas co tempo durante o tratamento. Nesta gráfica as distintas curvas están tomadas a intervalos de 0.1 (os 2 primeiros milímetros) e 1 mm na dirección  $z$ , no centro da superficie iluminada.

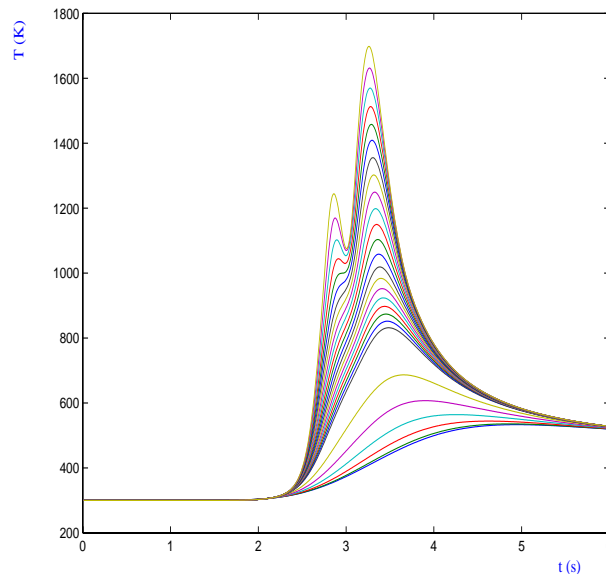


Fig. 5.31 Distribución da temperatura en función do tempo sobre o centro da probeta. As curvas están tomadas a intervalos de 0.1 (as vinte primeiras) e 1 mm.

En 5.32 (a) represéntanse un fragmento dun mapa de temperatura na sección da probeta seleccionada para o seu estudio, a orixe de coordenadas situouse na vertical do centro do feixe. En 5.32 (b) e (c) aparecen os perfís da temperatura máxima.

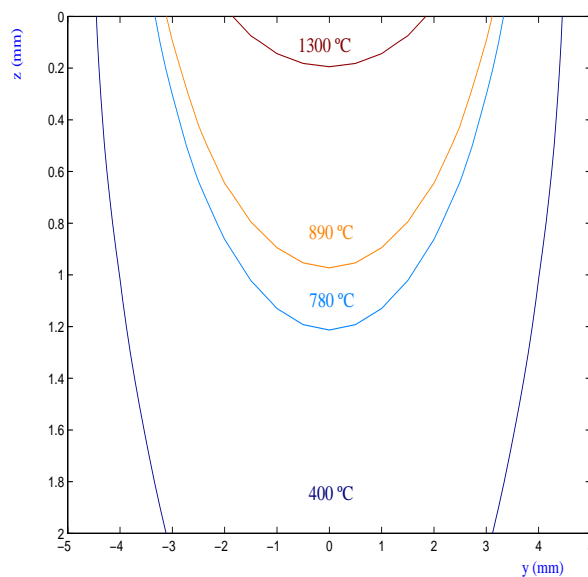


Fig. 5.32 (a) Mapa de temperaturas.

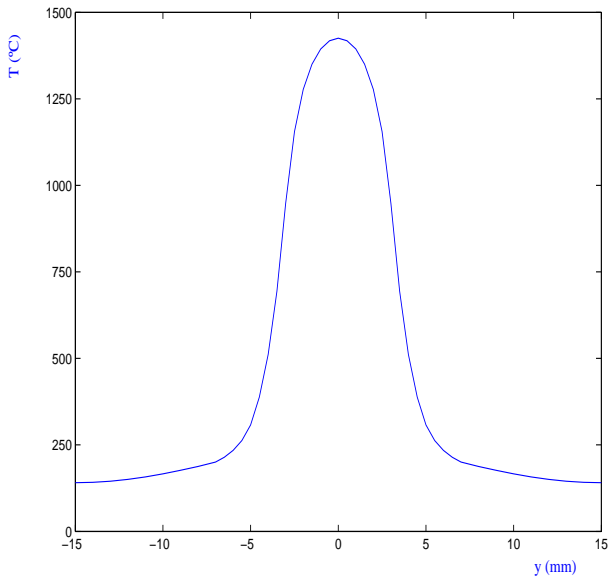


Fig. 5.32 (b) Perfil da temperatura na superficie da probeta.

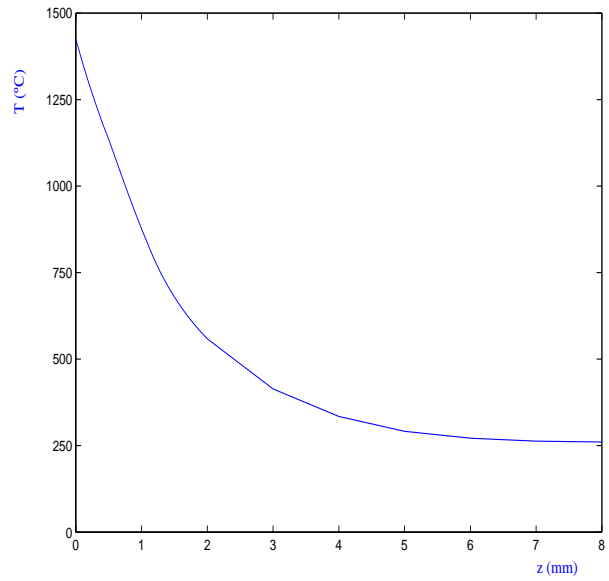


Fig. 5.32 (c) Perfil da temperatura no centro da probeta.

Nas gráficas 5.33 vese como queda distribuída a fase austenítica durante o quentamento.

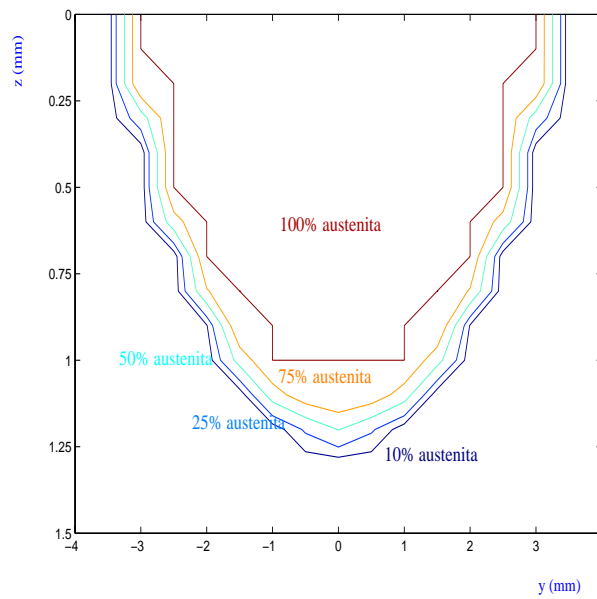


Fig. 5.33 (a) Mapa de concentración da fase austenita. As liñas unen puntos coa mesma porcentaxe.

## 5. Avaliación experimental

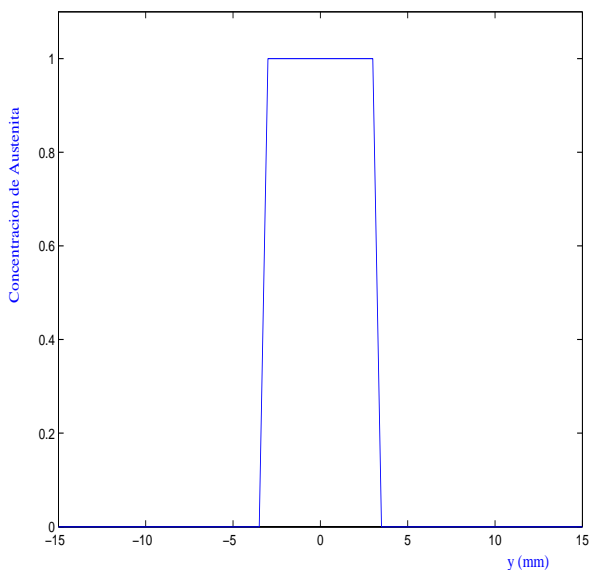


Fig. 5.33 (b) Perfil da concentración de austenita na superficie.

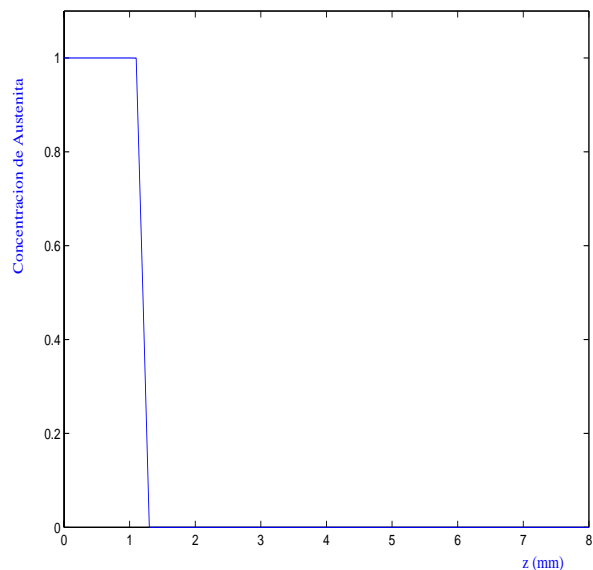


Fig. 5.33 (c) Perfil da concentración de austenita no centro da probeta.

Un mapa de distribución da martensita que se corresponde cun fragmento da sección tratada ( $10 \times 2 \text{ mm}^2$ ) está representado na gráfica 5.34 (a). As liñas separan rexións con distinta composición de martensita: dende o 90% en vermello ata o 10% en azul. En 5.34 (b) e (c) vense os perfís da concentración de martensita tanto na superficie como no centro da probeta. Para completar o proceso de formación da martensita estimouse cun simple cálculo que a temperatura final da mostra foi de 411.7 K (desprezando as perdas por convección, radiación e o efecto do ambiente).

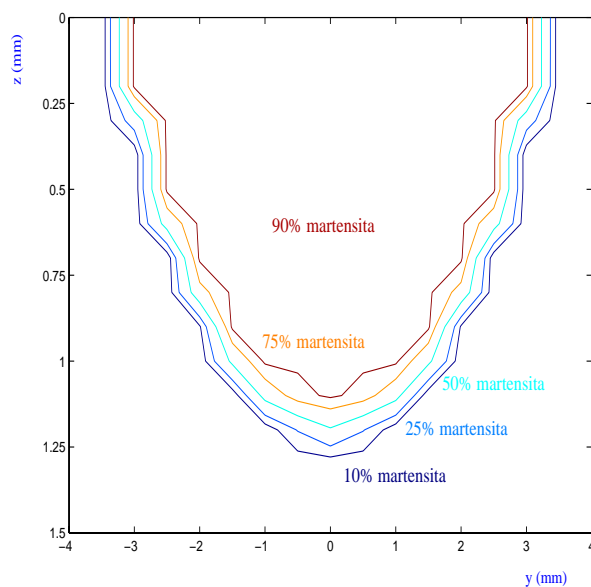


Fig. 5.34 (a) Mapa de concentración da fase martensítica. As liñas separan rexións que conteñen distintas porcentaxes de martensita.



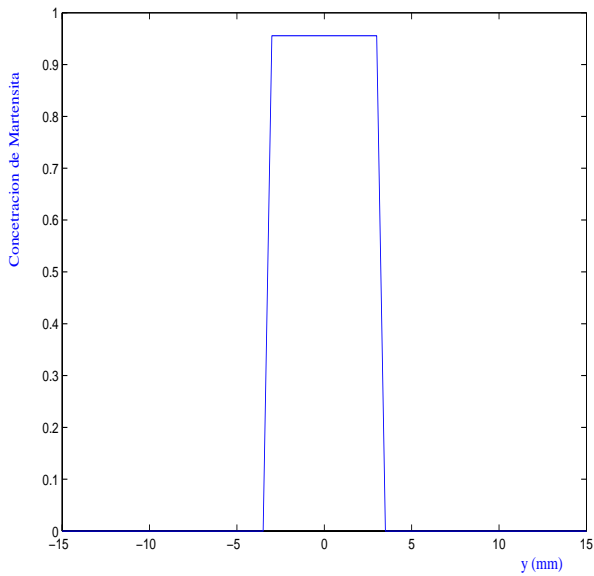


Fig. 5.34 (b) Perfil da concentración de martensita na superficie.

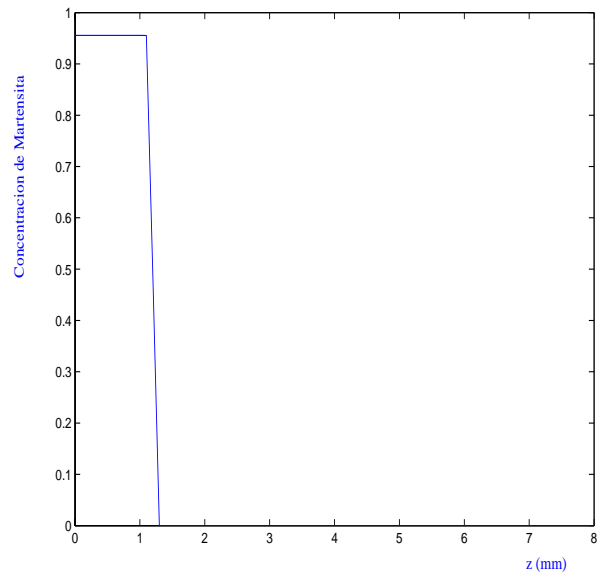


Fig. 5.34 (c) Perfil da concentración de martensita no centro da probeta.

Nas gráficas 5.35 pódense ver un mapa de dureza resultante e os perfís na superficie e no centro da xeometría. Apréciase que as dimensións da zona tratada, a que ten unha dureza igual ou maior de 300 Hv, son de aproximadamente 6.8 mm de ancho e 1.25 mm de profundidade. A máxima dureza acádase na superficie cun valor de 793 Hv.

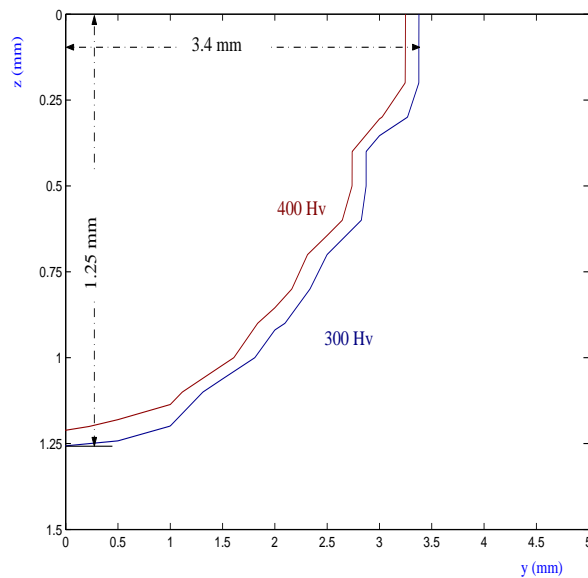


Fig. 5.35 (a) Curvas de isodureza, separadas a intervalos de 100 Hv, dunha metade da sección tratada.

## 5. Avaliação experimental

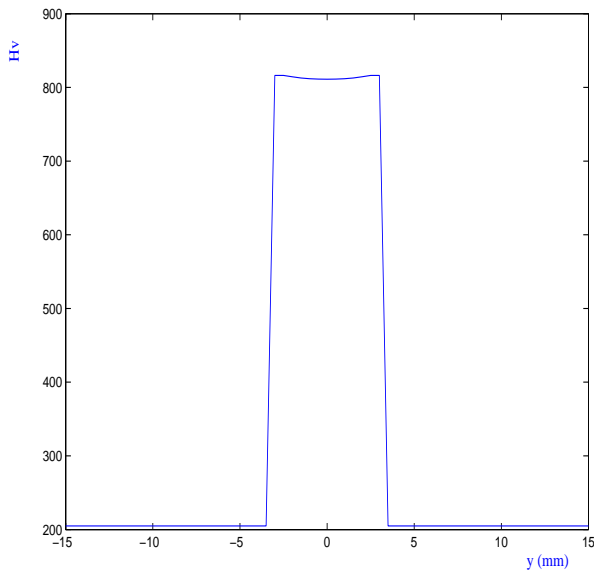


Fig. 5.35 (c) Perfil da dureza calculada na superfície.

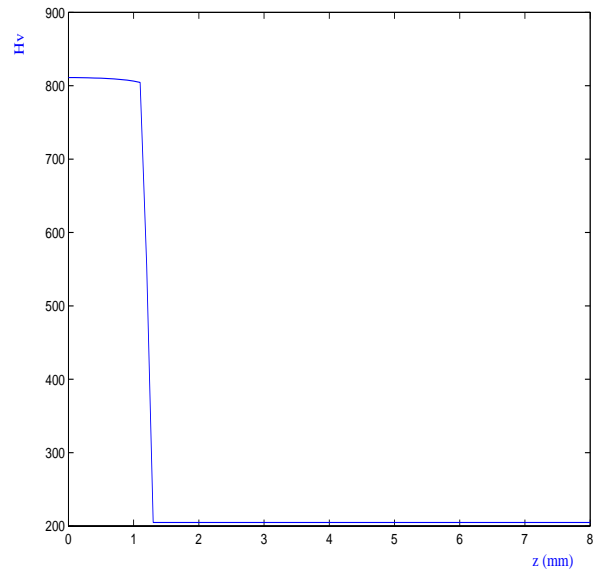


Fig. 5.35 (b) Perfil da dureza calculada no centro da superfície.

Os resultados das medições experimentais representam-se na táboa 5.36.

mm	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.	1.1	1.2	1.3
0	781	744	753	753	709	781	653	646	653	505	378	231	228
0.1	762	772	781	700	772	762	668	717	646	543	381	236	233
0.2	753	744	791	668	762	753	661	638	610	661	372	241	235
0.3	801	781	801	735	709	832	631	548	610	572	375	236	225
0.4	772	781	791	692	726	772	676	684	661	481	375	227	224
0.5	753	726	735	661	753	709	684	624	610	500	336	230	227
0.6	772	744	735	661	717	735	781	604	597	515	336	235	222
0.7	762	762	762	709	735	692	638	490	572	454	296	227	215
0.8	717	822	781	791	854	744	762	638	631	445	278	231	227
0.9	717	762	811	762	752	668	638	597	646	381	261	230	224
1.	735	753	772	676	735	692	653	566	490	429	239	228	231
1.1	726	772	822	726	811	709	709	610	543	368	225	233	228
1.2	744	726	772	700	717	653	646	526	560	388	214	231	225
1.3	709	753	726	653	822	653	646	526	467	333	230	245	239
1.4	735	762	735	692	717	653	566	566	510	248	224	230	224
1.5	726	781	684	692	843	653	624	604	385	238	224	238	228
1.6	709	726	709	744	781	560	684	566	409	239	221	224	233
1.7	684	781	822	717	866	510	753	531	300	236	219	243	250
1.8	735	700	624	668	717	495	560	454	238	231	225	230	228
1.9	753	753	781	726	753	554	624	490	278	236	219	236	238
2.	772	772	617	624	753	515	709	283	221	222	235	231	233
2.1	753	822	692	791	762	495	445	235	222	225	219	231	233
2.2	700	791	624	772	692	476	372	228	225	235	225	224	231
2.3	762	791	684	653	653	445	263	225	224	238	221	227	235

mm	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.	1.1	1.2	1.3
2.4	735	753	554	709	617	330	238	224	227	235	225	227	238
2.5	684	762	684	791	526	255	239	227	227	224	235	243	238
2.6	762	717	700	726	362	224	230	231	224	236	230	231	231
2.7	676	735	458	425	276	221	236	216	224	236	216	231	225
2.8	676	811	495	362	236	218	238	241	231	243	236	236	231
2.9	653	661	449	241	236	214	233	233	214	238	236	235	261
3.	554	433	263	233	221	241	236	214	233	235	225	224	231
3.1	490	353	239	235	222	225	219	231	233	233	263	233	221
3.2	259	245	225	224	238	221	227	214	233	233	214	238	233

Tab. 5.36 Resultados das medidas experimentais. En horizontal a variación coa profundidade e en vertical coa anchura.

O mapa de durezas na metade da sección presenta unhas dimensións de 6.4 mm de ancho na superficie e 1.15 mm de profundidade máxima (Fig. 5.37 (a)). O valor máximo acadado é de 856.5 Hv. En 5.37 (b) e (c) aprécianse os perfís horizontal e vertical da dureza. Obsérvase que as fluctuacións da dureza arredor dun valor medio oscilan unicamente 50 Hv, o que contrasta cos 100 Hv da xeometría plana.

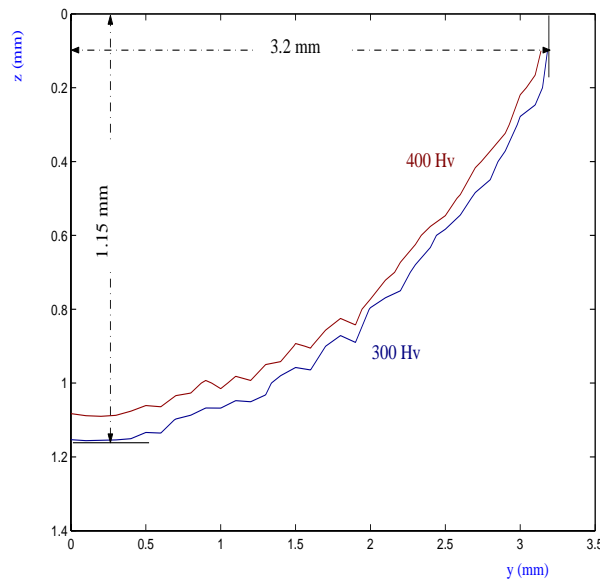


Fig. 5.37 (a) Mapa de dureza e dimensións dunha metade da probeta obtido experimentalmente.

## 5. Avaliación experimental

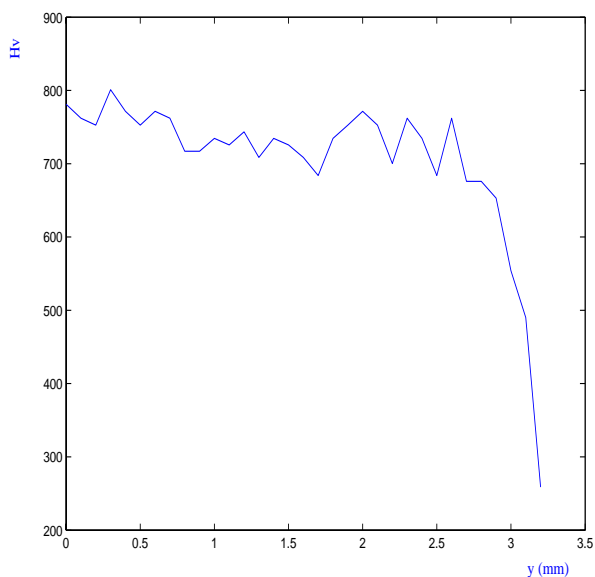


Fig. 5.37 (b) Perfil da dureza na superficie da probeta

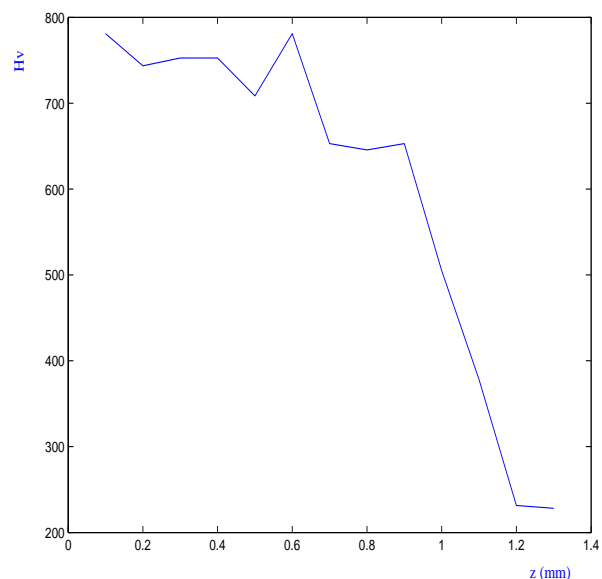


Fig. 5.37 (c) Perfil da dureza no centro da probeta.

### Comparanza entre os cálculos e as medidas

De seguido preséntase a compilación dos resultados obtidos, tanto numérica como experimentalmente.

	Calculado	Medido	Diferencia
Ancho máx.	$6.8 \pm 0.4$ mm	6.4 mm	0.4 mm
Profundidade máx.	$1.25 \pm 0.09$ mm	1.15 mm	0.1 mm

[5.12]

Á vista dos resultados, volvemos sacar en conclusión o bo funcionamento predictivo do modelo de elementos finitos, que neste caso aínda supera as prediccións para a xeometría ortoédrica (o erro do ancho é de 6% e o da profundidade de 9%), sendo menores as fluctuacións nos valores experimentais da dureza.

Volve aparecer unha, neste caso, menor diferenza entre o perfil de dureza medida e a calculada (Fig. 5.37), o que atribuímos ás irregularidades propias da composición do material: os cilindros de aceiro moldéanse a partir dunha barra sometida a presión por medio de rolos, namentres que as placas foron obtidas a partir dunha sección interna destas barras.

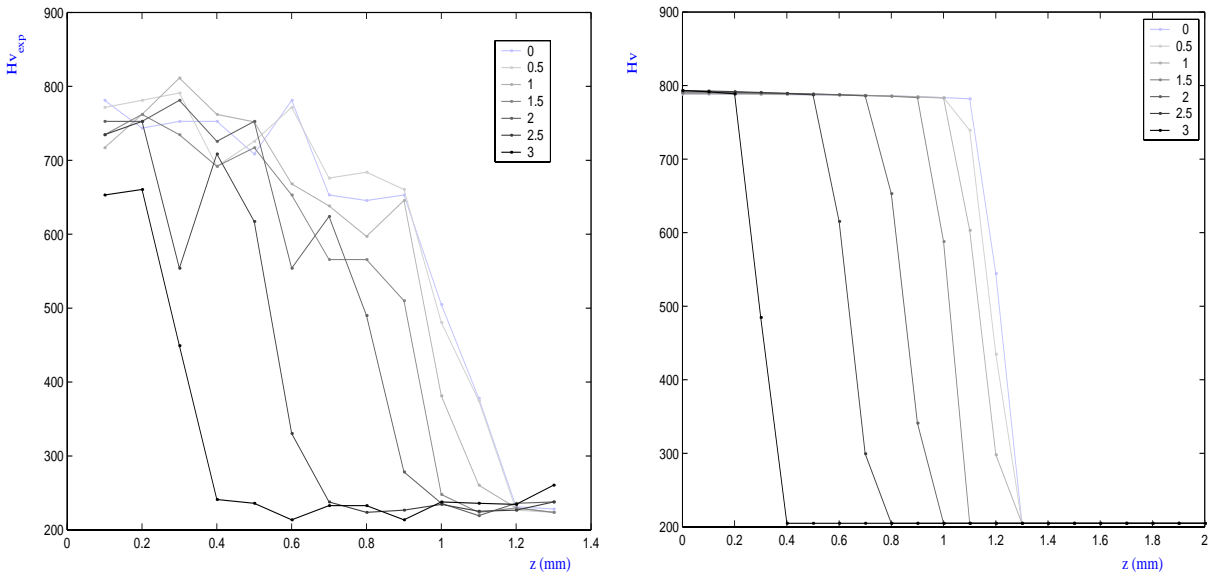


Fig. 5.37 Dureza medida e calculada fronte á profundidade.

Unha das razóns desta maior exactitude está na curvatura da xeometría que focaliza a calor suavizando as velocidades de arrefriamento (Fig. 5.38) e consecuentemente aumenta a difusión do carbono. Unha comparanza entre as dimensións da rexión temperada calculada e medida permite confirmar isto.

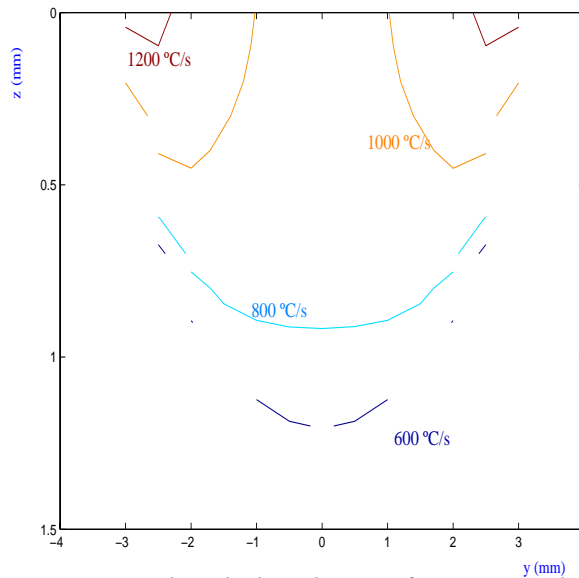


Fig. 5.38 Velocidades de arrefriamento obtidas con ANSYS<sup>TM</sup> para a sección estudiada.

	Placa	Cilindro
Ratio ancho máx. calculado/medido	$\frac{6.8}{6} = 1.17$	$\frac{6.8}{6.4} = 1.06$
Ratio profundidade máx. calculado/medido	$\frac{1.06}{0.8} = 1.25$	$\frac{1.25}{1.15} = 1.08$

[5.13]

## *5. Avaliación experimental*

---

Obsérvase que namentres para a xeometría cilíndrica mantense a relación de proporcionalidade debida a unha diminución isotrópica do volume da fase martensítica, para a placa a diferenza do comportamento do material nas dúas direccións é moi diferente.

**Bibliografía**

- Álvarez<sup>1</sup>, J.C., et al (2001); *Real time control and monitoring of laser hardening process application to cylindrical workpieces*; Proceeding of the LANE 2001, Ed. M. Geiger & A. Otto, Meisenbach.
- Álvarez<sup>2</sup>, J.C., et al (2001); *Sistema de puntería para pirómetro*; Patente P200101029, España (23-04-01).
- Atlas Zur Wärmebehandlung der Stähle*, Band 1, Ed. Stahleisen mbH., Düsseldorf, 1954/58.
- Braz, F.M. et al. (1985); *Mathematical model coupled phase transformation and temperature evolution during quenching of steels*; Materials Science and Technology, Vol. 1, pp. 838-844.
- Doane, D.V., J.S. Kirkaldy (1977); *Hardenability with applications to steel*; Proceedings of a Symposium held at the Sheraton-Chicago Hotel. October 1977, pp. 518-545.
- Farias, D. (1991); *Traitement thermique laser de l'acier XC42 et modélisation des transformations de phases en cycles thermiques rapides au chauffage et au refroidissement*; Thèse de doctorat, I.N.P.L., Nancy.
- Melander, M., J. Nicolov (1985); *Heating and cooling transformation diagrams for the rapid heat treatment of two alloy steels*; American Society for Metals, Vol. 4, No. 1, June 1985.
- Sanesteban, J. (2002); *Desarrollo de un modelo numérico para la predicción del endurecimiento superficial de aceros procesados con láser*; Trabajo presentado a la comisión de doctorado del Departamento de Ingeniería Industrial II.
- Smithells, C.J. (1992); *Smithells metals reference book (7<sup>th</sup> ed)*; Ed. E.A. Brandes & G.B. Brooks, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Victor, M. et al. (1998); *A computational model for the prediction of steel hardenability*; Metallurgical and Materials Transactions B. Vol. 29B, June 1998, pp. 661-672.
- Wang, K.F., S. Chandrasekar, H.T.Y. Yang (1997); *Experimental and computational study of the quenching of carbon steel*; JMSE, Vol. 119, pp257-265





# *Capítulo 6*

## *Conclusiones*



---

## 6. Conclusións

- A focalización da enerxía dun láser nunha área pequena dun material permite restrinxir as transformacións metalúrxicas ás zonas desexadas, sen alterar outras propiedades. Isto amosa a extraordinaria idoneidade do láser para realizar tratamentos térmicos superficiais localizados. Agora ben, esta alta concentración enerxética fai que a elección dos parámetros do proceso sexa crítica para acadar un bo resultado no tempero dos aceiros.
- Os métodos analíticos aportan rapidez na estimación dos parámetros do procesado con láser. Máis concretamente:
  - A caracterización e aplicación do método das imaxes á ecuación da calor nas xeometrías planas e cilíndricas subministrounos unha ferramenta potente para simular situacións onde as propiedades térmicas do material non teñan dependencia coa temperatura. Os resultados aportados foron empregados como patrón de calibración do modelo de elementos finitos.
  - A adimensionalización da ecuación da calor permitiunos obter unhas relacións moi simples entre a temperatura máxima acadada nunha mostra, a posición deste máximo e os parámetros do proceso. O estudio destes datos proporcionou o establecemento dun criterio de selección dos parámetros máis axeitados para cada proceso. Mesmamente esta análise dimensional constituíuse como un excelente instrumento para determinar o erro debido ás incertezas experimentais.
- Para facilitar a aplicación do método dos elementos finitos con ANSYS<sup>TM</sup> na simulación de tratamentos térmicos superficiais con láser desenvolveuse un programa escrito en Fortran 77 (*laser*). As grandes vantaxes deste programa están por unha banda na celeridade da súa aplicación, e pola outra en que permite, moi doadamente, introducir modificacións no modelo. Este código posibilita elixir entre tres xeometrías reticuladas cunha malla uniforme (o que propicia o control dos erros debidos á discretización) e traballar con varios tipos de feixe (TEM00, TEM01\* e rectangular).

- O estudio dos erros que introducen as distintas configuracións da malla, así como a discretización do feixe e seu movemento favoreceu a consecución dun criterio de elección do mellor tipo de reticulación segundo as nosas necesidades e así optimizar o consumo tanto de memoria como de tempo de CPU.
- A discretización dos diagramas ITH e TTT en pasos isotérmicos e a transformación constante e o emprego dun código numérico permitiunos describir as transformacións de fase presentes durante o tratamento así como a dureza resultante.
- Os resultados obtidos no tratamento de dúas xeometrías indican o bo funcionamento do modelo na determinación da anchura e a profundidade da rexión temperada. Cómpre salientar que a mellor estimación obtense no caso do endurecemento dunha probeta cilíndrica.

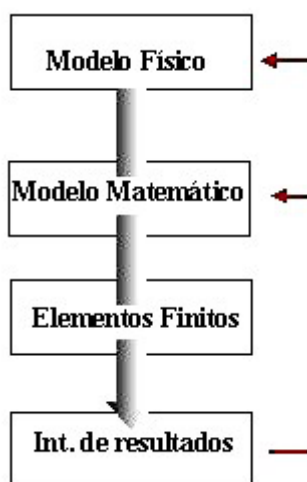
## *Epílogo*



---

## Epílogo

Autores como Bathe (páxinas 3 e 226), Bokota (p. 1384), Buchmayr (p. 129), Denis (p. 317) e Fernandes (p. 839) estruturan as simulacións numéricas como unha xerarquía (Bathe, 1996) (Bokota, 1996) (Buchmayr, 1990) (Denis, 1992) (Fernandes, 1985). Principian coa formulación dun problema físico e a súa expresión matemática, seguindo coa simulación numérica e finalizan coa interpretación dos resultados xerados pola aplicación dos elementos finitos. Na Fig e.1 pódese ver o esquema empregado por Bathe.



*Fig. e.1 Esquema vertical proposto por Bathe. O ciclo péchase ao interpretar os resultados.*

A experiencia acumulada neste traballo lévannos a considerar máis oportuno outro tipo de guiión máis complexo e que definimos cos seguinte elementos:

- i. Nunha simulación numérica diferenciamos entre resultado e solución<sup>1</sup>. O primeiro é froito de realizar unha operación matemática, namentres que o segundo será a interpretación do resultado tomando como referencia o valor do seu erro. Noutras palabras, entre as atribucións do investigador está a de fixar o erro admisible dun resultado.

---

<sup>1</sup> O Dicionario Cumio da Lingua galega, 2ª edición (2000), define estes termos do seguinte modo:

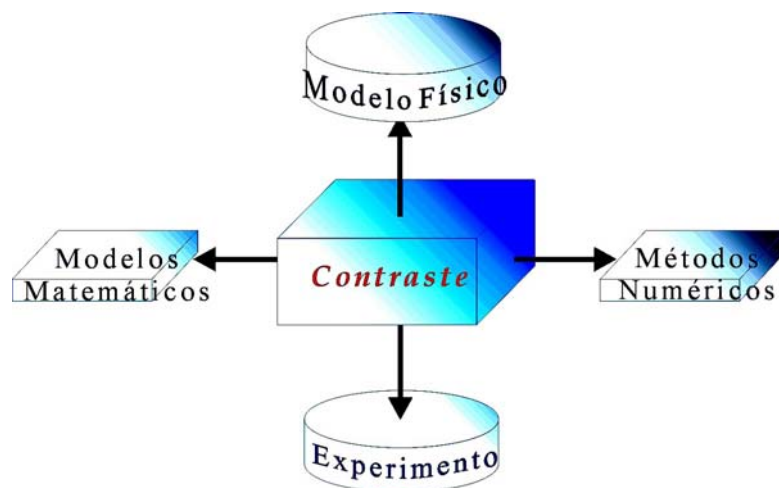
**Resultado** Efecto e consecuencia dun feito, operación, deliberación, etc.

**Solución**<sup>2</sup>

1. Desenlace dun asunto, dunha obra literaria, etc.

2. Cantidad que satisfai as condicións dun problema ou unha ecuación.

- ii. Proponemos un contraste continuo entre resultados segundo se van producindo ata acadar, coa precisión desexada, unha solución. Substituímos entón a estrutura vertical descendente por outra que permita a interacción entre todos os niveis da investigación. O nexo de unión intersticial será a avaliación de resultados (*Fig. e.2*). É evidente que dentro desta distribución poden aparecer relacións xerárquicas, como a establecida entre a formulación matemática e o modelo numérico.



*Fig. e.2 Na nosa opinión é máis axeitado ter un método de avaliación de resultados que actúe en todos os niveis.*

- iii. Nunha simulación cabe a posibilidade de empregar varios métodos numéricos. A súa función sería multipolar: illadamente usaríanse para predecir o valor dalgunhas magnitudes, ou, conxugados, poderían contribuir a contrastar os erros producidos.
- iv. A *Fig. e.1* parece indicar que, para J-K. Bathe, a finalidade das simulacións numéricas é a substitución da experimentación no laboratorio. Nós, pola contra, consideramos que as distintas tarefas de investigación complementáanse e, nalgunhas situacións, poden chegar a substituírse.



**Bibliografía**

Bathe, J-K. (1996); *Finite element procedures*; Prentice Hall.

Bokota, A., S. Iskierka (1996); *Effect of phase transformation on stress states in surface layer of laser hardened steel*; ISIJ International, Vol. 36, No. 11, pp 1383-1391.

Buchmayr B. & J.S. Kirkaldy (1990); *Modelling of the temperature field, transformation behaviour, hardness and mechanical response of low alloy steels during cooling from the austenite region*; J. Heat Treat 8:127-136.

Denis, S. et al. (1992); *Mathematical model coupling phase transformations and temperature evolutions in steels*; ISIJ International, Vol. 32, No. 3, p. 316-325.

Fernandes, F.M.B. et al. (1985); *Mathematical model coupling phase transformations and temperature evolution during quenching of steels*; Materials Science and Technology. October 1985 Vol. 1, pp. 838-844.



---

## Anexo I

Arquivo de entrada *laser.in*

```
C_>Formatos:a10,e10.4,i10
*-> itrans = 1, simula un transitorio,
*-> itrans = 0, simula un estacionario.
*-> irad = 1, simula as perdidias por radiacion.
itrans =      1
irad  =      0

c
C_> Dimensioes e caracteristicas da malla
c
*-> Dimensioes da malla, en metros:
deltax = 0.1000E-02  5.0E-04
deltay = 0.1000E-02  5.0E-04
deltaz = 0.1000E-02  1.0E-04

*-> Numero de incrementos: OX, OY, OZ
* A modificacion destes parametros implica alteracions
* graves dentro da dimensioes de determinadas variables.
iend(x) =      23      28      23
jend(y) =      8       8       8
kend(z) =      6       6       20

c
C_> Cilindro
c
*-> Variable loxica: se esta a 1
* activa o desenho do cilindro.
Completo =      0
Arco     =      1
*-> Radios interior e exterior do cilindro.
*-> O radio interior e' igual o' radio
* exterior menos a parte maiada (kend*delta).
rad int. = 12.5e-3

c
C_> Caracteristicas do Laser
c
*-> Posicion inicial do feixe
* paralelepipedo: xc0, yc0 (m)
* cilindro ou arco: phi0 (rad)
xc0, yc0 = 0.e-3  15.e-3
phi0     = 0.0e+0

*-> Tamanho da gaussiana, en metros:
sigma = 1.50e-3
```

*laser.in* (continuación)

\*-> Velocidade do laser, OX+, OY+ en metros/s:  
vbm = 10.00e-3 0.000e-0

\*-> Potencia do laser, en Watts:  
potencia = 0.969e+3

\*-> Absortividade  
abs = 1.00e+0

c \_\_\_\_\_  
C\_> Temperatura inicial en Kelvin.  
c \_\_\_\_\_  
temp.ini = 3.00e+2

c \_\_\_\_\_  
C\_> Radiacion o' contorno.  
c \_\_\_\_\_  
\*-> emisividade a 212 K (??)  
emis = 0.066

\*-> Cte. de Stefan Boltzman ( $Wm^{-2}K^{-4}$ )  
cte. S-B = 5.6697e-8

c \_\_\_\_\_  
C\_> Bucle temporal  
c \_\_\_\_\_

\*-> N. de veces que pasa o laser, e que enfria  
\*-> Incremento temporal (s), e pasos de quencemento

\*\_> e enfriamento:  
n pasada      1      0  
helice (m)    0.  
inc. tempo    9.8e-3  
nlaser        612  
inc. tempo    8.8e-3  
nenfriam.     0

C\_> O Numero de Fourier e' 10.  
C\_> Simulacions feitas con ANSYS

Arquivo de entrada *mat.in*

01 \_\_\_\_\_ Aceiro Inoxidable Forxado Martensitico \_\_\_\_\_

02 CONDUCTIVIDADE

03

04 Deno: Aceiro Inox 84200; F114 060A42 EN 8 (\*)

05 Comp: 0.42 %C; 0.64 %Mn

06

07 Ref: Smithells Metals Reference Book

08 E.A. Brandes &amp; G.B. Brook (BH)

09 Signatura: CM.M 37

10

11 \_\_\_\_\_

12 CALOR ESPECIFICO A PRESION CONSTANTE

13

14 Deno: Aceiro Inox 84200; F114 060A42 EN 8 (\*\*)

15 Comp: 0.42 %C; 0.64 %Mn

16

17 Ref: Smithells Metals Reference Book

18 E.A. Brandes &amp; G.B. Brook (BH)

19 Signatura: CM.M 37

20

21 \_\_\_\_\_

22 DENSIDADE

23

24 Deno: Aceiro Inox 84200; F114 060A42 EN 8 (\*\*\*)

25 Comp: 0.42 %C; 0.64 %Mn

26

27 Ref: Smithells Metals Reference Book

28 E.A. Brandes &amp; G.B. Brook (BH)

29 Signatura: CM.M 379

30

31 \_\_\_\_\_

32

33 Temperatura de Austenizacion: 1253. - 1338. K

34 Temperatura de Fusion: 1723. - 1783. K

35 Temperatura de recocido: 923. 1033. K

36 Temperatura de temple: Tac1 1253. K

37 Tac3 1338. K

38

39 NOTA: Os valores das propiedades para as temperaturas

40 de 1500 e 2000 K son FICTICIOS. Acabado Tanxencial.

41 \_\_\_\_\_

mat.in (continuación)

i3 i3 i3					
9 8 9<- numero de pares (T,K)*, (T,Cp)**, (T,d)***					
Temp.(K)	K(W/mK)	Temp.(K)	Cp(J/kgK)	Temp.(K)	d(kg/m^3)
e12.4	e12.4	e12.4	e12.4	e12.4	e12.4
298.0e+0	51.9e+0	298.0e+0	4.860e+2	298.0e+0	7.8500e+3
373.0e+0	50.7e+0	373.0e+0	4.860e+2	373.0e+0	7.7527e+3
473.0e+0	48.2e+0	473.0e+0	5.150e+2	473.0e+0	7.7171e+3
673.0e+0	41.9e+0	673.0e+0	5.860e+2	673.0e+0	7.6405e+3
873.0e+0	33.9e+0	873.0e+0	7.080e+2	873.0e+0	7.5613e+3
1073.0e+0	24.7e+0	1073.0e+0	6.240e+2	1073.0e+0	7.5618e+3
1273.0e+0	26.8e+0	1500.0e+0	6.150e+2	1273.0e+0	7.4627e+3
1500.0e+0	34.4e+0	2000.0e+0	6.150e+2	1500.0e+0	7.5641e+3
2000.0e+0	34.4e+0			2000.0e+0	7.5641e+3

- A**  
 absorción 13,35  
 absortividade 57,166  
 adimensionals, método 116  
 adimensionais, variables 117  
 apuntador, sistema 166  
 arco de cilindro, aproximación 187  
 Avrami, ecuación de 151
- B**  
 Beer-Lamber, ecuación 35  
 bombeo 18  
 brillo 23
- C**  
 calidade de discretización 140  
 capa límite 58  
 ciclos térmicos 154,178,190  
 coeficiente de absorción, determinación 166  
 coeficientes de Einstein 14,16  
 coherencia 23  
 coherencia espacial 24  
 coherencia lonxitudinal 24  
 coherencia temporal 23  
 colimación (ver direccionalidade)  
 comparanza entre cálculos e medidas 185,196  
 conducción, ecuación de 55  
 corpo negro, lei de radiación 15,56  
 CPU 146  
 criterio de contraste 145
- D**  
 diagramas IT 89  
 diagramas TTT 89  
 difusividade térmica 65  
 direccionalidade 22  
 Doppler, efecto 20
- E**  
 emisión estimulada 13  
 emisividade, 57  
 emisividade, corrección 166  
 erro da aproximación 107  
 erro debido á discretización do feixe 140  
 erro debido á discretización do feixe en  
 movemento 141  
 erro debido á discretización espacial 129  
 erro debido á discretización temporal 130  
 erro debido a mallas mixtas 133  
 erro debido a mallas mixtas de cubos e  
 trapecios 136  
 erro debido a pequenas variacións nos  
 parámetros 119,120  
 erro debido a unha malla adaptativa 135  
 erro debido a unha malla anisótropa 130  
 erro debido ao ángulo de deformación 138  
 experimentación no laboratorio 165
- F**  
 feixe rectangular estacionario 112  
 fluorescencia 13  
 fluxo estacionario 62  
 fluxo estacionario con movemento de material  
 64  
 fluxo estacionario sen movemento de material  
 63  
 fluxo transitorio con movemento de material 68  
 fluxo transitorio sen movemento de material 65  
 Fourier, lei de 55  
 Fourier, número de 81,82  
 función dieléctrica 35,36
- G**  
 Garlekin, método 74,79  
 Green, función 63-68  
 Green, identidade 79
- H**  
 Hildenwall e Ericson, modificacións de 153
- I**  
 inversión de poboación 16,17
- J**  
 Johnson-Mehl, ecuación 151
- K**  
 keyhole 49  
 Kirchhoff, lei de 58  
 Kirkaldy, ecuacións 157
- L**  
 Laplace, ecuación de 63  
 láser de catro niveis 17,18  
 láser de dous niveis 13-15  
 láser de tres niveis 15,16  
 laser, programa 123-128  
 láseres de coloides 32  
 láseres de electróns libres 32  
 láseres de estado sólido 28  
 láseres de excímeros 27  
 láseres de gas 25  
 láseres de gases ionizados 26  
 láseres de gases neutros 25  
 láseres de Nd:YAG 29  
 láseres de rubí 28  
 láseres de semiconductores 30  
 láseres de vapor metálico 28  
 láseres moleculares 26  
 limpeza 43  
 liñas espectrais (ver Doppler)
- M**  
 mallado adaptativo 75,135  
 mallado homoxéneo anisótropo 130

*mallado homoxéneo e isotropo* 129  
*mapa de austenita* 179,191  
*mapa de durezas* 181,184,193,195  
*mapa de martensita* 180,192  
*material, propiedades* 174,175  
*matriz de estructura* 74  
*Maxwell-Boltzman, estatística* 14  
*medio activo* 15  
*método das imaxes sobre xeometrías cilíndricas*  
98  
*método das imaxes sobre xeometrías planas* 95  
*método das imaxes: anchura* 100  
*método das imaxes: área* 100  
*método das imaxes: contribución dos termos*  
102  
*método das imaxes: converxencia* 98  
*método das imaxes: erro* 107  
*método das imaxes: fontes con movemento*  
*paralelo* 109  
*método das imaxes: fontes con movemento*  
*perpendicular* 107  
*método das imaxes: número de termos* 103  
*método dos elementos finitos* 73  
*modo TEM01\** 114,125  
*modo TEM01\*, discretización* 125  
*modo TEM01\*, xiro* 127  
*monocromaticidade* 20

**N**  
*Newman, condicións de contorno tipo* 78  
*Newmark, método de* 80,81  
*Newton, lei de arrefriamento de* 59

**P**  
*parámetros, busca* 170,186  
*Peclét, número de* 108,111,117  
*Planck, lei de* 15,56  
*plasma* 38  
*Poisson, ecuación de* 63  
*polarización* 24  
*Primeiro Principio* 61  
*propagador (ver Green, función)*

**R**  
*Rayleigh-Ritz, algoritmo de* 73  
*recargamento* 42  
*reflectividade* 57  
*refusión* 43  
*regra do trapecio (ver Newmark, método de)*  
*relación de aspecto* 75  
*residuos, métodos de* 79  
*resoador óptico* 19  
*resoador óptico, modos propios* 20  
*resultados dos cálculos e das medidas* 185,196  
*réxime estacionario* 63

## S

*Stefan-Boltzmann, lei de* 56

## T

*temperatura máxima, cálculo* 118

*tempero* 41

*transmisividade* 57

## V

*variacionais, métodos* 72

*velocidade da colada* 38

*Vien, desprazamento de* 56

## X

*xeometría cilíndrica* 186

*xeometría plana* 170