



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



E. T. S. DE INGENIEROS DE  
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

# TESIS DOCTORAL

---

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS A LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS CON INCORPORACIÓN DE LOS ESFUERZOS DEBIDOS A LA TURBULENCIA

POR

JAIME MIGUEL FE MARQUÉS

DIRIGIDA POR

FERMÍN NAVARRINA MARTÍNEZ

JERÓNIMO PUERTAS AGUDO

A CORUÑA - MARZO 2005



a mis padres





# Agradecimientos

Cuando un trabajo tiene un desarrollo a lo largo del tiempo tan extenso como lo ha tenido éste, es inevitable que sean muchas las personas que han colaborado en mayor o menor medida y es de justicia mencionarlas. Existe, por otro lado, el peligro -cuando se citan tantos nombres- de omitir involuntariamente a alguno. Trataré de conseguir lo uno, sin caer en lo otro.

Agradecimiento, en primer lugar, a Jerónimo Puertas y Fermín Navarrina, sin los que este barco no habría llegado a buen puerto: por sus ideas y su tiempo, por su optimismo y su disponibilidad. También por sus correcciones, que han contribuido enormemente a mejorar el documento.

Gracias a Elena Vázquez. Su trabajo fue el punto de partida y sus aclaraciones y consejos han sido determinantes para la realización de éste.

Durante estos años he compartido esfuerzos, conversaciones e intereses con distintos doctorandos. No puedo menos que acordarme de Juanjo Bonillo y Pablo Vellando, de Luis Cea y Enrique Peña, de Luis Pena -graciñas, Luis, pola tua axuda coas escalas de peixes- y de Luis Cueto y sus inestimables sugerencias. Luis, ha sido un placer compartir contigo este último año y una satisfacción haber contribuido a que usaras los volúmenes finitos.

Gracias por su apoyo a mis compañeros y amigos de la Escuela de Caminos, especialmente a Manuel Casteleiro, Ignasi Colominas (y su experiencia con el T<sub>E</sub>X), Moncho Martul, Gonzalo Mosqueira, Isabel Martínez, Xabier Domínguez, Héctor Díaz, Luis Fuentes, Raquel López y Raquel Taboada. A Javier Gómez Calviño, por las muchas horas de clase que le debo, en aquel cuatrimestre sabático. A José Luis Añón por su ilimitada capacidad de resolver problemas, tanto de *hardware* como de *software* (como de lo que sea).

Mi gratitud también a los que han colaborado a pesar de la distancia: a Joaquín Peiró, Tito Toro, Thomas Wenka, Rui Ferreira, João Leal, Antonio Huerta, Ismail Celik, Rubén Juanes, Ramón Codina y Pilar Brufau.

Gracias, cómo no, a mi familia y amigos, bastantes de ellos ya citados.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado con los siguientes proyectos:

- Desarrollo de un sistema global de cálculo avanzado y diseño de redes de tierra de subestaciones eléctricas. Proyecto CICYT cofinanciado con fondos FEDER, 1FD97-0108.
- Diseño óptimo asistido por ordenador de torres y líneas de alta tensión. Proyecto CICYT, TIC98-0290.
- Optimización de los circuitos hidráulicos y de los procesos en instalaciones de tratamiento físico-químico de agua. Aplicación a la planta de efluentes líquidos de As Pontes. Proyecto cofinanciado con fondos FEDER, 1FD97-0053.
- Criterios para el diseño de escalas de peces de hendidura vertical. Proyecto CICYT, HID99-0297.
- Modelos numéricos avanzados para las ecuaciones de flujo y transporte de contaminantes: técnicas de estabilización y métodos de seguimiento de partículas. Xunta de Galicia, PGIDT01PXI11802PR.
- Diseño óptimo total (topología, forma y dimensiones) en Ingeniería Civil y Mecánica. M<sup>o</sup> de Ciencia y Tecnología, DPI2002-00297.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| Agradecimientos  | v         |
| Índice de figuras  | xI        |
| Índice de tablas   | xv        |
| Resumen  | 1         |
| <b>1. Planteamiento del trabajo realizado</b>                  | <b>5</b>  |
| 1.1. Estudio del movimiento de un fluido . . . . .             | 5         |
| 1.2. Número de dimensiones del modelo . . . . .                | 6         |
| 1.3. Técnicas de discretización . . . . .                      | 7         |
| 1.4. Sistemas de ecuaciones hiperbólicas . . . . .             | 8         |
| 1.5. Las ecuaciones de aguas someras . . . . .                 | 8         |
| 1.6. El problema planteado . . . . .                           | 9         |
| <b>2. Consideraciones previas</b>                              | <b>13</b> |
| 2.1. Introducción . . . . .                                    | 13        |
| 2.2. El problema de Riemann . . . . .                          | 13        |
| 2.3. Variables conservativas y leyes de conservación . . . . . | 15        |
| 2.4. Esquemas descentrados . . . . .                           | 17        |
| 2.5. Difusión o viscosidad numérica . . . . .                  | 20        |
| 2.6. Esquemas conservativos . . . . .                          | 21        |
| 2.7. Sistemas lineales hiperbólicos . . . . .                  | 26        |
| 2.8. Esquemas descentrados para sistemas lineales . . . . .    | 27        |
| 2.9. Definición de términos hidráulicos en 1D . . . . .        | 29        |
| <b>3. Ecuaciones del flujo turbulento</b>                      | <b>35</b> |
| 3.1. Flujo turbulento . . . . .                                | 35        |
| 3.2. Valor promedio y fluctuación . . . . .                    | 37        |
| 3.3. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .                     | 39        |
| 3.4. Ecuaciones de Reynolds en 3D . . . . .                    | 40        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 3.5.      | Ecuaciones de Reynolds en 2D . . . . .                         | 44        |
| 3.5.1.    | Campo de aplicación e hipótesis realizadas . . . . .           | 44        |
| 3.5.2.    | Ecuación de continuidad . . . . .                              | 45        |
| 3.5.3.    | Ecuación dinámica . . . . .                                    | 46        |
| 3.6.      | El sistema de ecuaciones de aguas someras . . . . .            | 51        |
| <b>4.</b> | <b>El modelo simplificado</b>                                  | <b>55</b> |
| 4.1.      | El método de volúmenes finitos . . . . .                       | 55        |
| 4.1.1.    | Volumen finito de tipo celda . . . . .                         | 55        |
| 4.1.2.    | Volumen finito de tipo vértice . . . . .                       | 56        |
| 4.1.3.    | Volumen finito de tipo arista . . . . .                        | 56        |
| 4.2.      | Descripción de los volúmenes finitos empleados . . . . .       | 56        |
| 4.3.      | Descripción del problema . . . . .                             | 58        |
| 4.4.      | Integración y discretización de las ecuaciones . . . . .       | 59        |
| 4.4.1.    | Discretización de la derivada temporal . . . . .               | 60        |
| 4.4.2.    | Integración del término de flujo y el término fuente . . . . . | 61        |
| 4.4.3.    | Definición del flujo discreto . . . . .                        | 61        |
| 4.4.4.    | Regularización de autovalores . . . . .                        | 64        |
| 4.4.5.    | Definición de la fuente discreta . . . . .                     | 64        |
| 4.4.6.    | Discretización de las condiciones de contorno . . . . .        | 65        |
| 4.4.7.    | Obtención del paso temporal . . . . .                          | 66        |
| 4.5.      | Algoritmo . . . . .  | 66        |
| <b>5.</b> | <b>Validación del modelo simplificado</b>                      | <b>69</b> |
| 5.1.      | Planteamiento general . . . . .                                | 69        |
| 5.1.1.    | Tipos de condiciones de contorno . . . . .                     | 69        |
| 5.1.2.    | Condición de contorno en la pared de un canal . . . . .        | 70        |
| 5.2.      | Problemas unidimensionales . . . . .                           | 73        |
| 5.2.1.    | Fondo irregular con líquido en reposo . . . . .                | 73        |
| 5.2.2.    | Canal recto con pendiente y rozamiento . . . . .               | 76        |
| 5.2.3.    | Canal con obstáculo en el fondo. Cambio de régimen . . . . .   | 79        |
| 5.2.4.    | Rotura de presa . . . . .                                      | 81        |
| 5.2.5.    | Rotura de presa con reflexión . . . . .                        | 82        |
| 5.3.      | Problemas bidimensionales . . . . .                            | 86        |
| 5.3.1.    | Decantador con salida múltiple . . . . .                       | 86        |
| 5.3.2.    | Rotura de presa parcial asimétrica . . . . .                   | 90        |
| 5.3.3.    | Escala de peces . . . . .                                      | 93        |
| <b>6.</b> | <b>Discretizaciones de la derivada temporal</b>                | <b>99</b> |
| 6.1.      | Método de Euler hacia adelante . . . . .                       | 99        |
| 6.2.      | Método predictor-corrector de Adams-Moulton . . . . .          | 100       |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 6.2.1.    | Descripción . . . . .  | 100        |
| 6.2.2.    | Obtención de los primeros valores de $\varphi$ . . . . .         | 101        |
| 6.3.      | Método de Runge-Kutta . . . . .                                  | 101        |
| 6.4.      | Comparación de los resultados obtenidos . . . . .                | 102        |
| <b>7.</b> | <b>El término fuente turbulento</b>                              | <b>107</b> |
| 7.1.      | Sumando turbulento del término fuente . . . . .                  | 107        |
| 7.2.      | Las ecuaciones de aguas someras con término turbulento . . . . . | 107        |
| 7.3.      | Discretización en las celdas interiores . . . . .                | 108        |
| 7.3.1.    | A partir de las derivadas direccionales . . . . .                | 110        |
| 7.3.2.    | A partir de los valores promedio en las celdas . . . . .         | 111        |
| 7.4.      | Discretización en las celdas frontera . . . . .                  | 113        |
| 7.5.      | Descentrado del término turbulento . . . . .                     | 113        |
| 7.6.      | Algoritmo . . . . .  | 114        |
| <b>8.</b> | <b>Obtención de la viscosidad turbulenta</b>                     | <b>117</b> |
| 8.1.      | Modelos de turbulencia . . . . .                                 | 117        |
| 8.1.1.    | Modelos de 0 ecuaciones . . . . .                                | 117        |
| 8.1.2.    | Modelos de 1 ecuación . . . . .                                  | 118        |
| 8.1.3.    | Modelos de 2 ecuaciones . . . . .                                | 119        |
| 8.1.4.    | Modelos de tensiones de Reynolds . . . . .                       | 120        |
| 8.2.      | El modelo $k - \varepsilon$ promediado en la vertical . . . . .  | 121        |
| 8.3.      | Las ecuaciones $k - \varepsilon$ en forma conservativa . . . . . | 126        |
| 8.4.      | Las ecuaciones $q - r$ en forma conservativa . . . . .           | 127        |
| 8.5.      | Discretización . . . . .   | 128        |
| 8.5.1.    | Derivada temporal . . . . .                                      | 129        |
| 8.5.2.    | Término de flujo . . . . .                                       | 129        |
| 8.5.3.    | Término fuente . . . . .   | 132        |
| 8.5.4.    | Algoritmo . . . . .  | 135        |
| 8.6.      | Condiciones de contorno . . . . .                                | 135        |
| 8.6.1.    | Pared . . . . .  | 135        |
| 8.6.2.    | Entrada de flujo . . . . .                                       | 142        |
| 8.6.3.    | Salida de flujo . . . . .  | 142        |
| 8.6.4.    | Resumen . . . . .  | 143        |
| 8.7.      | Cálculo del paso temporal . . . . .                              | 143        |
| <b>9.</b> | <b>Validación de ambos modelos</b>                               | <b>145</b> |
| 9.1.      | El modelo hidrodinámico . . . . .                                | 145        |
| 9.1.1.    | Flujo en una cavidad. Primeros resultados . . . . .              | 145        |
| 9.1.2.    | Reducción de la viscosidad numérica . . . . .                    | 147        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 9.1.3.     | Comparación de formulaciones y discretizaciones del término turbulento . . . . . | 159        |
| 9.1.4.     | Descentrado del término turbulento . . . . .                                     | 165        |
| 9.1.5.     | Métodos de Runge-Kutta y Adams-Moulton. . . . .                                  | 165        |
| 9.1.6.     | Fondo no horizontal . . . . .  | 167        |
| 9.2.       | El modelo de turbulencia . . . . .   | 169        |
| 9.2.1.     | Medida de las magnitudes turbulentas . . . . .                                   | 169        |
| 9.2.2.     | Descripción del dominio . . . . .  | 170        |
| 9.2.3.     | Campo de velocidades . . . . .   | 170        |
| 9.2.4.     | Medición de la energía cinética turbulenta . . . . .                             | 179        |
| 9.2.5.     | El término difusivo $k - \varepsilon$ . . . . .                                  | 185        |
| 9.2.6.     | Coeficiente de descentrado . . . . .   | 185        |
| 9.2.7.     | Distancia de la malla a la pared . . . . .                                       | 188        |
| 9.2.8.     | Comparación de valores medidos y calculados . . . . .                            | 188        |
| 9.3.       | Funcionamiento conjunto . . . . .  | 195        |
| 9.3.1.     | Separación de los dos procesos . . . . .   | 195        |
| 9.3.2.     | Descripción del problema . . . . .   | 196        |
| 9.3.3.     | Condición de contorno en la pared . . . . .                                      | 196        |
| 9.3.4.     | Disminución del número de ciclos necesario . . . . .                             | 199        |
| 9.3.5.     | Resultados obtenidos . . . . .   | 203        |
| <b>10.</b> | <b>Conclusiones y futuros desarrollos</b>  | <b>207</b> |
| 10.1.      | Conclusiones . . . . .   | 207        |
| 10.2.      | Futuros desarrollos . . . . .  | 209        |
| <b>11.</b> | <b>Anejos</b>  | <b>213</b> |
| 11.1.      | Descripción de los programas desarrollados . . . . .                             | 213        |
| 11.2.      | Promedio en la vertical de términos en $(\bar{u}, \bar{v})$ . . . . .            | 215        |
| 11.3.      | Integral de superficie del gradiente . . . . .                                   | 216        |
|            | <b>Bibliografía</b>  | <b>219</b> |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Tipos de curvas de remanso (de Chadwick <i>et al.</i> [17]). . . . .  | 32 |
| 4.1. Construcción de los volúmenes finitos. . . . .                        | 57 |
| 4.2. Representación de las variables $H$ y $h$ . . . . .                   | 59 |
| 5.1. Sección de un canal rectangular de paredes verticales. . . . .        | 71 |
| 5.2. Superficie mojada lateral en una celda de pared. . . . .              | 72 |
| 5.3. Fondo irregular. Calados. . . . .                                     | 74 |
| 5.4. Fondo irregular. Velocidades. . . . .                                 | 74 |
| 5.5. Calados sin descentrado de la pendiente. . . . .                      | 75 |
| 5.6. Velocidades sin descentrado de la pendiente. . . . .                  | 75 |
| 5.7. Curva de remanso M1. Calado aguas abajo $h > h_n$ . . . . .           | 77 |
| 5.8. Curva de remanso M2. Calado aguas abajo $h < h_n$ . . . . .           | 77 |
| 5.9. Curva de remanso S2. Calado aguas arriba $h > h_n$ . . . . .          | 78 |
| 5.10. Curva de remanso S3. Calado aguas arriba $h < h_n$ . . . . .         | 78 |
| 5.11. Paso sobre obstáculo en régimen lento. . . . .                       | 80 |
| 5.12. Cambio de régimen con resalto hidráulico. . . . .                    | 80 |
| 5.13. Cambio de régimen sin resalto hidráulico. . . . .                    | 81 |
| 5.14. Rotura de presa sobre fondo mojado. $t = 25$ s. . . . .              | 83 |
| 5.15. Rotura de presa sobre fondo seco. $t = 15$ s. . . . .                | 83 |
| 5.16. Rotura de presa con reflexión 1. . . . .                             | 84 |
| 5.17. Rotura de presa con reflexión 2. . . . .                             | 85 |
| 5.18. Canal de As Pontes. Malla utilizada. . . . .                         | 87 |
| 5.19. Canal de As Pontes. Campo de velocidades. . . . .                    | 88 |
| 5.20. Canal de As Pontes. Ampliación del campo de velocidades. . . . .     | 88 |
| 5.21. Canal de As Pontes. Velocidades en la sección $x = 0.51$ m. . . . .  | 89 |
| 5.22. Canal de As Pontes. Calados sobre el escalón. Decantador 1. . . . .  | 89 |
| 5.23. Rotura de presa. $H_1/H_0 = 2$ . $t = 7.1$ s. . . . .                | 90 |
| 5.24. Rotura de presa. $H_1/H_0 = 2$ . Velocidades en $t = 7.1$ s. . . . . | 91 |
| 5.25. Rotura de presa. $H_0 = 0$ . $t = 7.1$ s. . . . .                    | 91 |
| 5.26. Rotura de presa. Malla utilizada. . . . .                            | 92 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.27. Escala de peces. Malla utilizada. . . . .                             | 92  |
| 5.28. Escala de peces. Campo de velocidades. . . . .                        | 94  |
| 5.29. Escala de peces. Módulo de la velocidad. . . . .                      | 94  |
| 5.30. Escala de peces. Calados. . . . .                                     | 94  |
| 5.31. Escala de peces, piscina 1. Campo de velocidades calculado. . . . .   | 95  |
| 5.32. Escala de peces, piscina 1. Campo de velocidades medido. . . . .      | 95  |
| 5.33. Escala de peces, piscina 1. Módulo de la velocidad calculado. . . . . | 96  |
| 5.34. Escala de peces, piscina 1. Módulo de la velocidad medido. . . . .    | 96  |
| 5.35. Escala de peces, piscina 1. Calado calculado. . . . .                 | 97  |
| 5.36. Escala de peces, piscina 1. Calado medido. . . . .                    | 97  |
| 6.1. Canal en doble T. Malla utilizada. . . . .                             | 103 |
| 6.2. Líneas de corriente. . . . .   | 103 |
| 6.3. Sección $x = 2.3 \text{ m}$ . Componente $u$ en abscisas. . . . .      | 104 |
| 6.4. Sección $y = 2.5 \text{ m}$ . Componente $v$ en ordenadas. . . . .     | 104 |
| 7.1. Volúmenes finitos utilizados. . . . .                                  | 109 |
| 8.1. Relación entre distancia y velocidad adimensionales. . . . .           | 137 |
| 8.2. Velocidad en la capa límite. Ley de la pared (de Wilcox [89]). . . . . | 139 |
| 9.1. Flujo en una cavidad. Malla utilizada. . . . .                         | 146 |
| 9.2. Líneas de corriente con $\nu = 0$ . . . . .                            | 148 |
| 9.3. Líneas de corriente con $\nu = 0.0025$ . . . . .                       | 148 |
| 9.4. Líneas de corriente con $\nu = 0.01$ . . . . .                         | 149 |
| 9.5. Sección central para distintas viscosidades. . . . .                   | 149 |
| 9.6. $\nu = 0.01$ . Sección central para distintos $c_d$ . . . . .          | 151 |
| 9.7. $\nu = 0.0025$ . Sección central para distintos $c_d$ . . . . .        | 152 |
| 9.8. $\nu = 0.001$ . Sección central para distintos $c_d$ . . . . .         | 152 |
| 9.9. Detalle de la figura 9.6. . . . .                                      | 153 |
| 9.10. Detalle de la figura 9.7. . . . .                                     | 153 |
| 9.11. $c_d = 0.03$ . Sección central para distintas viscosidades . . . . .  | 154 |
| 9.12. $\nu = 0.01$ ( $Re = 100$ ). Líneas de corriente. . . . .             | 154 |
| 9.13. $\nu = 0.0025$ ( $Re = 400$ ). Líneas de corriente. . . . .           | 155 |
| 9.14. $\nu = 0.001$ ( $Re = 1000$ ). Líneas de corriente. . . . .           | 155 |
| 9.15. $\nu = 0.0001$ ( $Re = 10000$ ). Líneas de corriente. . . . .         | 157 |
| 9.16. $c_d = 0.03$ . Sección central para $\nu = 0.01 - 0.0001$ . . . . .   | 157 |
| 9.17. $c_d = 0.015$ , $\nu = 0.0025$ . Malla 41 x 41. . . . .               | 158 |
| 9.18. $c_d = 0.010$ , $\nu = 0.0025$ . Malla 81 x 81. . . . .               | 158 |
| 9.19. Caso LA2. Líneas de corriente. . . . .                                | 162 |
| 9.20. Caso LC2. Líneas de corriente. . . . .                                | 162 |
| 9.21. Sección central. Comparación de formulas y discretizaciones. . . . .  | 163 |



9.22. Remolino principal. Evolución de la posición del centro. . . . . 163

9.23. Remolino izquierdo. Evolución de la posición del centro. . . . . 164

9.24. Remolino derecho. Evolución de la posición del centro. . . . . 164

9.25.  $\nu = 0.001$ . Líneas de  $c$ . con descentrado del término turbulento. 165

9.26. Escala de peces. Diseño tipo I. Cotas en  $mm$ . . . . . 171

9.27. Escala de peces. Diseño tipo II. Cotas en  $mm$ . . . . . 171

9.28. Escala de peces. Malla utilizada. . . . . 172

9.29. Puntos de medida de velocidades. Distancias en  $cm$ . . . . . 172

9.30.  $Q = 34.1$   $l/s$ . Módulo de la velocidad. Conjunto. . . . . 174

9.31.  $Q = 34.1$   $l/s$ . Líneas de corriente. Conjunto. . . . . 175

9.32.  $Q = 34.1$   $l/s$ . Módulo de la velocidad. Piscina 7. . . . . 176

9.33.  $Q = 34.1$   $l/s$ . Líneas de corriente. Piscina 7. . . . . 176

9.34.  $Q = 45.8$   $l/s$ . Módulo de la velocidad. Piscina 7. . . . . 177

9.35.  $Q = 45.8$   $l/s$ . Líneas de corriente. Piscina 7. . . . . 177

9.36.  $Q = 54.0$   $l/s$ . Módulo de la velocidad. Piscina 7. . . . . 178

9.37.  $Q = 54.0$   $l/s$ . Líneas de corriente. Piscina 7. . . . . 178

9.38.  $Q = 34.1$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 5$   $cm$ . . . . . 180

9.39.  $Q = 34.1$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 10$   $cm$ . . . . . 180

9.40.  $Q = 34.1$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 16$   $cm$ . . . . . 181

9.41.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 7$   $cm$ . . . . . 181

9.42.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 17$   $cm$ . . . . . 182

9.43.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 27$   $cm$ . . . . . 182

9.44.  $Q = 54.0$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 5$   $cm$ . . . . . 183

9.45.  $Q = 54.0$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 15$   $cm$ . . . . . 183

9.46.  $Q = 54.0$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 25$   $cm$ . . . . . 184

9.47.  $Q = 54.0$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 31$   $cm$ . . . . . 184

9.48.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 1.0$ . . . . . 186

9.49.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 0.9$ . . . . . 186

9.50.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 0.8$ . . . . . 187

9.51.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 0.7$ . . . . . 187

9.52.  $Q = 34.1$   $l/s$ . E. C. T.  $k$  medida (promedio en la vertical). . . . . 189

9.53.  $Q = 34.1$   $l/s$ . E. C. T.  $k$  calculada. . . . . 189

9.54.  $Q = 34.1$   $l/s$ . Tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$ . . . . . 190

9.55.  $Q = 34.1$   $l/s$ . Viscosidad  $\nu_t$ . . . . . 190

9.56.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$  medida (promedio en la vertical). . . . . 191

9.57.  $Q = 45.8$   $l/s$ . E. C. T.  $k$  calculada. . . . . 191

9.58.  $Q = 45.8$   $l/s$ . Tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$ . . . . . 192

9.59.  $Q = 45.8$   $l/s$ . Viscosidad  $\nu_t$ . . . . . 192

9.60.  $Q = 54.0$   $l/s$ . E. C. T.  $k$  medida (promedio en la vertical). . . . . 193

9.61.  $Q = 54.0$   $l/s$ . E. C. T.  $k$  calculada. . . . . 193

9.62.  $Q = 54.0$   $l/s$ . Tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$ . . . . . 194

|   |     |
|---|-----|
| 9.63. $Q = 54.0 \text{ l/s}$ . Viscosidad $\nu_t$ . . . . .                       | 194 |
| 9.64. Ensanchamiento lateral. Malla utilizada. . . . .                            | 196 |
| 9.65. Valores de $u$ en la sección $x = 2.025 \text{ m}$ . $c_d = 1$ . . . . .    | 197 |
| 9.66. Valores de $u$ en la sección $x = 2.025 \text{ m}$ . $c_d = 0.15$ . . . . . | 198 |
| 9.67. Módulo de la velocidad. $c_d = 0.15$ . $I_p = 2$ . . . . .                  | 198 |
| 9.68. Módulo de la velocidad. $c_d = 0.15$ . $I_p = 3$ . . . . .                  | 198 |
| 9.69. Proceso oscilatorio. Ciclo 2. Valores de $\nu_t$ . . . . .                  | 199 |
| 9.70. Proceso oscilatorio. Ciclo 2. Módulo de la velocidad. . . . .               | 200 |
| 9.71. Proceso oscilatorio. Ciclo 3. Valores de $\nu_t$ . . . . .                  | 200 |
| 9.72. Proceso oscilatorio. Ciclo 18. Valores de $\nu_t$ . . . . .                 | 200 |
| 9.73. Proceso oscilatorio. Ciclo 19. Valores de $\nu_t$ . . . . .                 | 200 |
| 9.74. Proceso oscilatorio. Ciclo 18. Módulo de la velocidad. . . . .              | 201 |
| 9.75. Proceso oscilatorio. Ciclo 19. Módulo de la velocidad. . . . .              | 201 |
| 9.76. Proceso convergente. Ciclo 2. Valores de $\nu_t$ . . . . .                  | 201 |
| 9.77. Proceso convergente. Ciclo 3. Valores de $\nu_t$ . . . . .                  | 201 |
| 9.78. Proceso convergente. Ciclo 4. Valores de $\nu_t$ . . . . .                  | 202 |
| 9.79. Proceso convergente. Ciclo 2. Módulo de la velocidad. . . . .               | 202 |
| 9.80. Proceso convergente. Ciclo 3. Módulo de la velocidad. . . . .               | 202 |
| 9.81. Proceso convergente. Ciclo 4. Módulo de la velocidad. . . . .               | 202 |
| 9.82. Valores finales de $\nu_t$ . Ciclo 6. $n = 0.015$ . . . . .                 | 204 |
| 9.83. Valores finales de $\nu_t$ . Ciclo 6. $n = 0.020$ . . . . .                 | 204 |
| 9.84. Valores finales de $\nu_t$ . Ciclo 6. $n = 0.025$ . . . . .                 | 204 |
| 9.85. Valores finales del módulo de la velocidad. $n = 0.015$ . . . . .           | 205 |
| 9.86. Valores finales del módulo de la velocidad. $n = 0.020$ . . . . .           | 205 |
| 9.87. Valores finales del módulo de la velocidad. $n = 0.025$ . . . . .           | 205 |
| 11.1. Conexión entre los programas desarrollados . . . . .                        | 214 |

# Índice de tablas

|   |     |
|---|-----|
| 5.1. Comparación de condiciones de pared. Caudales en $l/s$ . . . . . | 87  |
| 8.1. Coeficientes constantes. Modelo $k - \varepsilon$ . . . . .      | 125 |
| 9.1. Coordenadas del centro del remolino principal. . . . .           | 156 |
| 9.2. Coordenadas del centro de los remolinos secundarios. . . . .     | 156 |
| 9.3. Coordenadas de centros para $Re = 5000 - 10000$ . . . . .        | 156 |
| 9.4. Posición de centros según $Re$ (de Sahin & Owens [72]). . . . .  | 163 |
| 9.5. Coordenadas de centros en los 4 casos. $Re = 1000$ . . . . .     | 164 |
| 9.6. Comparación de condiciones de pared. Caudales en $l/s$ . . . . . | 197 |
| 9.7. Evolución por ciclos. . . . .                                    | 203 |



# Resumen

El objeto de este trabajo es la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras en dos dimensiones, tomando en consideración los esfuerzos debidos a la turbulencia.

Para lograr lo anterior se ha elaborado un modelo constituido por un módulo hidrodinámico y otro de turbulencia que trabajan conjuntamente. Para la discretización se ha utilizado el método de volúmenes finitos, obtenidos a partir de una malla triangular. El modelo de turbulencia elegido ha sido el  $k - \varepsilon$  promediado en la vertical.

En el capítulo **1**, con el fin de centrar el problema planteado, se pasa brevemente revista a diversos posibles enfoques del estudio del movimiento de un fluido y al número de dimensiones que interesa considerar en distintos casos; se consideran las técnicas de discretización espacial más frecuentes, haciendo hincapié en la sencillez y utilidad del método de volúmenes finitos, que es el empleado en este trabajo; se introducen luego los sistemas hiperbólicos, uno de los cuales es el sistema de ecuaciones de aguas someras, cuyo estudio ha despertado un creciente interés en los últimos años por el gran número de aplicaciones que posee.

A continuación (capítulo **2**), con objeto de introducir la terminología habitual y algunas de las técnicas que se emplearán, se repasan algunos términos de uso frecuente en este tipo de modelos: variables conservativas, formas conservativa y no conservativa de las leyes de conservación, esquemas descentrados y difusión numérica, etc. Se definen también algunos términos de uso habitual en hidráulica de canales que se utilizan en los capítulos dedicados a la validación de los modelos.

En el capítulo siguiente se deducen con detalle las ecuaciones bidimensionales de aguas someras con término turbulento. Para ello se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes, obteniendo a partir de ellas, mediante un promedio temporal, las ecuaciones de Reynolds. Aplicando a éstas una integración en la vertical y admitiendo diversas hipótesis simplificativas, se llega a las ecuaciones de aguas someras en 2D, con tres posibles expresiones para el término turbulento.

El capítulo 4 describe la aplicación del método de volúmenes finitos para la obtención del modelo hidrodinámico; en una primera aproximación no se tiene en cuenta el sumando turbulento del término fuente, lo que da lugar al modelo hidrodinámico que se denomina **simplificado**.

El modelo simplificado se valida en el capítulo 5, aplicándolo a la resolución de distintos problemas. Antes de mostrar los resultados obtenidos se describen las condiciones de contorno que se van a utilizar. Los problemas resueltos son uni y bidimensionales. En dos de estos últimos -decantador con salida múltiple y escala de peces- se realiza una comparación con medidas experimentales.

El sumando derivada temporal de las ecuaciones de aguas someras se ha discretizado en el capítulo 4 por el método de Euler hacia adelante. En el capítulo 6 se describe con más detalle esta discretización, así como otras dos discretizaciones alternativas, en las que se emplean los métodos de Adams-Moulton y Runge-Kutta. Se aplican las tres al mismo problema y se comparan resultados y tiempos de cálculo.

En la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras, habitualmente no se tiene en cuenta el sumando turbulento, modelando en cambio la pérdida de energía producida por él a través de fórmulas empíricas. Uno de los puntos en que se ha centrado el presente estudio es el efecto de la introducción del término turbulento en el modelo, con el fin de reproducir con más precisión las pérdidas locales de energía debidas a la turbulencia. El capítulo 7, está dedicado a la discretización de este término. Se emplean dos métodos distintos en las celdas interiores y sólo uno en las fronteras.

Para generar adecuadamente los valores de la viscosidad de remolino en cada punto se requiere un modelo de turbulencia. El capítulo 8 comienza con una breve descripción de los principales modelos existentes. Luego se describe con más detalle el elegido para este trabajo, que es el  $k - \varepsilon$  promediado en la vertical. Tras discretizar las ecuaciones se analizan las condiciones de contorno empleadas, con más detenimiento las relativas al caso de pared sólida.

El capítulo 9 tiene tres partes y en él se muestran los resultados obtenidos con el modelo completo, formado por los módulos hidrodinámico y de turbulencia.

En la primera parte, se comprueba la necesidad de reducir la difusión numérica introducida por el tipo de discretización empleado y se propone la utilización de un coeficiente de descentrado en el término de flujo. Una vez logrado este objetivo, se comparan dos de las formulaciones del término turbulento, obtenidas en el capítulo 3, y los dos métodos de discretización del mismo, descritos en el capítulo 7. Se estudia también la conveniencia del descentrado de este término y la aceleración del proceso lograda con el uso

de los métodos de Adams-Moulton y Runge-Kutta (introducidos en el capítulo 6). En esta parte se emplea para las comparaciones el problema conocido como *cavity flow*.

En la segunda parte, los resultados del modelo de turbulencia obtenidos en la escala de peces se comparan con medidas experimentales. Para ello se calcula primero el campo de velocidades en tres supuestos de caudal. A continuación se muestran las medidas experimentales de energía cinética turbulenta obtenidas a distintas distancias de la solera, constatando la elevada dispersión de los resultados. Esto aconseja utilizar los valores promedio de los obtenidos a distintas profundidades, para la comparación con los resultados numéricos. Se muestra la influencia de un coeficiente de descentrado, similar al utilizado en la primera parte del capítulo. Por último se exponen los valores calculados por el modelo de turbulencia para la energía cinética turbulenta, la tasa de disipación turbulenta y la viscosidad de remolino, para los tres caudales considerados.

Para terminar el capítulo 9, se presenta el funcionamiento del modelo completo por ciclos, cada uno de ellos compuesto de dos fases, hidráulica y  $k - \varepsilon$ . Se utiliza para ello un canal con cambio brusco en la sección (conocido en la literatura como *backward step*). Tras realizar una comparación de condiciones de contorno en pared sólida, se estudia la manera de acelerar la convergencia del proceso y se muestran los resultados de velocidades y viscosidades obtenidos para tres valores del coeficiente de rozamiento.

En el capítulo 10 se exponen las conclusiones y los futuros desarrollos.





# Capítulo 1

## Planteamiento del trabajo realizado

### 1.1. Estudio del movimiento de un fluido

El movimiento de un fluido viscoso en tres dimensiones viene descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes, que constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sin solución analítica. A la hora de resolver numéricamente estas ecuaciones caben distintos enfoques [27, 68].

El primero y más ambicioso consiste en la simulación numérica directa (*Direct Numerical Simulation*) que resuelve todos los movimientos del fluido. Esto obliga al empleo de un tamaño de malla tan fino al menos como los menores remolinos presentes, lo que puede llevar, en un problema de tamaño medio, a un número de nodos de cálculo del orden de  $10^9$ . Por otra parte la frecuencia de los sucesos más rápidos puede ser de unos  $10\text{ kHz}$ . lo que impone un paso temporal no mayor de  $100\ \mu\text{s}$  para tratarlo adecuadamente. Estas exigencias hacen de hecho inabordable la aplicación del DNS en los casos de interés práctico.

Un segundo enfoque, menos costoso, consiste en simular únicamente los remolinos grandes (*Large Eddy Simulation*) modelizando el efecto de los de menor dimensión, que no pueden ser resueltos con una determinada malla. El proceso puede describirse como un “filtrado” de las ecuaciones, tras el cual el campo de velocidades contiene sólo las componentes de mayor tamaño. Este proceso introduce unos términos de tensión que representan la interacción entre ambas escalas de movimiento y tienen un efecto disipativo. Para calcular el efecto de estas tensiones existen distintos modelos conocidos en la literatura como SGS (*subgrid scale models*). El LES está basado en los trabajos de Smagorinsky [73].

En las aplicaciones ingenieriles, normalmente no hay necesidad de conocer todos los detalles de un flujo, sino solo algunas propiedades: el caudal que circula por un canal, la distribución de velocidades en una sección o la concentración de una sustancia en un determinado volumen.

Para estos casos existe una tercera aproximación mucho menos costosa que las anteriores y que produce resultados suficientemente ajustados a los requerimientos de precisión: son las ecuaciones de Reynolds, que se obtienen mediante el promedio temporal de las de Navier-Stokes (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*). La aproximación RANS ha sido la elegida para el presente trabajo. Las ecuaciones de Reynolds se presentan en el capítulo 3.

El promedio temporal de las variables produce -de modo similar al caso LES- unos términos de tensión, conocidos como tensiones de Reynolds. El cálculo de estas tensiones puede realizarse mediante la estimación de una viscosidad turbulenta, para lo que se necesita un modelo de turbulencia. Los modelos de turbulencia propuestos para este tipo de problemas se presentan en el capítulo 8.

## 1.2. Número de dimensiones del modelo

Los modelos citados en el apartado anterior tienen en cuenta el movimiento de las partículas del fluido en las tres direcciones espaciales. En el caso de fluidos en superficie libre, por ejemplo ríos o canales, esta superficie representa una frontera más junto con el fondo y el contorno lateral.

Este planteamiento es adecuado para la representación de la realidad tridimensional, pero el grado de complejidad de los modelos 3D puede resultar inabordable incluso para dominios relativamente sencillos.

En el extremo opuesto se encuentran los modelos en una dimensión. Para determinados fenómenos, como el movimiento del fluido en una tubería, resultan suficientes. La superficie libre, si la hay, estará determinada por el valor de la variable calado ( $h$ ). Las ecuaciones aplicadas a estos casos se simplifican enormemente, lo que conlleva un gran ahorro en tiempo de cálculo y almacenamiento de información. El problema radica ahora en que, en la mayor parte de los casos, estos modelos se separan mucho de la realidad que se trata de representar pues no permiten tomar en consideración, por ejemplo, el efecto de un cambio de dirección o una sección asimétrica.

Sin embargo, existe un gran número de fenómenos en los que el movimiento del fluido ocurre fundamentalmente en dos dimensiones, por ejemplo cuando el desplazamiento de las partículas es prácticamente paralelo al fondo. Esto hace de los modelos 2D una opción interesante pues suponen un ahorro muy considerable, en comparación con los 3D, y permiten una aproximación

a la realidad mucho mayor que la conseguida con los modelos 1D. En **3.5** se obtienen las ecuaciones para el modelo bidimensional desarrollado, a partir de las de Reynolds en tres dimensiones.

### 1.3. Técnicas de discretización

En lo que se refiere a la discretización espacial, la mayor parte de los modelos empleados en fluidos siguen una de estas tres técnicas: diferencias finitas, volúmenes finitos o elementos finitos.

El método de diferencias finitas es el de más antigua utilización, aunque su popularidad ha decaído, debido quizá a su poca flexibilidad desde el punto de vista geométrico. Suele aplicarse a mallas estructuradas. Su implementación es sencilla, por lo que permite desarrollar con facilidad nuevos esquemas numéricos (especialmente en 1D) que pueden ser generalizados a varias dimensiones y utilizados en las formulaciones de volúmenes finitos.

La formulación en volúmenes finitos es hoy día ampliamente utilizada en dinámica de fluidos computacional, siendo su uso mayoritario en el campo de las ecuaciones de aguas someras [3], así como en modelos 3D [90]. Se aplica tanto a mallas estructuradas como no estructuradas y la forma de los volúmenes elementales puede ser muy variada. Su flexibilidad y sencillez conceptual explican la aceptación que posee. Ha sido utilizado en programas comerciales [22]. En una dimensión es equivalente al método de diferencias finitas y, dependiendo de la malla usada y del tipo de discretización, puede serlo también en mayor número de dimensiones. En **4.1** se profundiza algo más en las características de este método y se describen distintos tipos de volúmenes finitos, además de los empleados en el presente trabajo.

La ventaja principal del método de los elementos finitos proviene de su riguroso fundamento matemático que permite una estimación del error a posteriori. Conceptualmente resulta más difícil que el de volúmenes finitos y se aprecia con menor facilidad que en éste el sentido físico del proceso seguido, aunque su flexibilidad para adaptarse a cualquier geometría es similar. Es utilizado por distintos autores [20, 23, 61] y aplicado a diversos programas comerciales [9, 64].

Existen trabajos [39, 92] dedicados a comparar ambos métodos, en los que se pone de manifiesto que el de volúmenes finitos comparte las bases teóricas del de elementos finitos, ya que se trata de un caso particular de la formulación de residuos ponderados. Sin embargo, el tipo de ponderación utilizado por el primero (constante en los volúmenes) permite sacar partido de algunas propiedades de conservación, al tiempo que se plantean los algoritmos de resolución de forma muy ventajosa.

## 1.4. Sistemas de ecuaciones hiperbólicas

Los sistemas de ecuaciones hiperbólicas, de los que se habla en **2.7**, han sido estudiados por un gran número de autores a lo largo de las últimas décadas. En una primera fase, los estudios se centraron en el caso de sistemas homogéneos y desde los años 80 se ha puesto más interés en los problemas con término fuente, de mayor aplicación práctica.

Las aplicaciones se han orientado inicialmente a los fluidos compresibles, consiguiendo notables resultados en aerodinámica. Pueden citarse -entre otros muchos- los trabajos de Harten, Lax y Van Leer [33], Hughes y Tezduyar [37], Löhner, Morgan y Zienkiewicz [45] y Godlewski y Raviart [32], así como los de Roe [70] y LeVeque y Yee [43].

La fuerte analogía existente entre las ecuaciones de los flujos compresible e incompresible ha permitido aplicar a las ecuaciones de aguas someras técnicas análogas, por ejemplo Glaister [31], utilizando diferencias finitas, o Alcrudo y García-Navarro [2], con volúmenes finitos. Donea y Huerta [23] aplican el método de los elementos finitos, en problemas permanentes y no permanentes, tanto a fluidos compresibles como incompresibles.

Una importante contribución en este campo -entre los autores que trabajan con volúmenes finitos- es la de Vázquez Cendón [83] de cuyo trabajo es deudor el presente en bastantes aspectos. Vázquez analiza la discretización del término fuente e introduce un método general de discretización descentrada -descrito brevemente en **4.4.5**-, que aplica al término fuente geométrico de las ecuaciones de aguas someras uni y bidimensionales.

## 1.5. Las ecuaciones de aguas someras

El comportamiento de un fluido viscoso está gobernado por las Ecuaciones de Navier Stokes. Estas ecuaciones fueron deducidas en 1821 por Claude Navier y años más tarde, de modo independiente, por George Stokes en 1845.

Las ecuaciones de Navier Stokes forman un sistema hiperbólico de leyes de conservación no lineales y, debido a su complejidad, no poseen solución analítica. Esto ha hecho recomendable la obtención a partir de ellas, imponiendo diversas hipótesis simplificativas, del sistema de ecuaciones en dos dimensiones conocido como ecuaciones de aguas someras o de Saint Venant.

Estas ecuaciones describen el comportamiento de un fluido en zonas poco profundas. A pesar de las fuertes hipótesis empleadas en su obtención, al resolverlas se obtienen resultados muy próximos a la realidad, incluso en casos en que no se cumplen algunas de esas hipótesis. En particular, la versión para flujos unidimensionales de estas ecuaciones simplificadas es de uso habitual

en el estudio del flujo en canales abiertos.

Entre los muchos problemas a los que se aplican se pueden mencionar:

- Flujo en canales y ríos.
- Flujos de marea.
- Corrientes marinas.
- Avance de un frente de onda.

Pese a su notable simplificación respecto a las de Navier Stokes, ni siquiera las ecuaciones unidimensionales de Saint Venant tienen solución analítica sino que han de resolverse por métodos aproximados. Isaacson *et al.* [38] mencionan el método empleado por Massau en 1889 para la integración gráfica de ecuaciones en derivadas parciales, como medio de cálculo del flujo en canales abiertos; citan asimismo el trabajo pionero de Thomas (1937), que utilizó las diferencias finitas para el estudio de la propagación de avenidas.

El aumento, en las últimas décadas, de la potencia de las herramientas de cálculo ha permitido una creciente utilización de las ecuaciones de aguas someras bidimensionales. También para estas ecuaciones se utilizan las diferencias finitas [48], si bien, como ya se ha mencionado, de modo decreciente.

A partir de los años 70 del pasado siglo se ha comenzado a aplicar el método de los elementos finitos a las ecuaciones de aguas someras: Zienkiewicz y Heinrich [91], Peraire [60], Paillere *et al.* [56] y Quecedo y Pastor [63] son algunos de los autores que han trabajado en esta línea.

En paralelo al auge de este método, ha crecido la utilización del de volúmenes finitos, que ha sido aplicado por Alcrudo y García-Navarro [2], Anastasiou y Chan [4], Minghan y Causon [51] y Brufau *et al.* [11] entre muchos otros.

Además de su utilidad en sí mismo, el cálculo del campo de velocidades en un determinado dominio permite plantearse problemas de gran interés práctico, como son

- Arrastre de sedimentos [57, 58].
- Evolución de la concentración salina en una ría [53].
- Dispersión de contaminantes [8].

## 1.6. El problema planteado

Así pues, el objeto de este trabajo es la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras en dos dimensiones, tomando en consideración el término turbulento.

Para lograr lo anterior se ha elaborado un modelo constituido por un módulo hidrodinámico y otro de turbulencia que trabajan conjuntamente. Para la discretización se ha utilizado el método de volúmenes finitos, obtenidos a partir de una malla triangular. El modelo de turbulencia elegido ha sido el  $k - \varepsilon$  promediado en la vertical.







# Capítulo 2

## Consideraciones previas

### 2.1. Introducción

En la literatura técnica sobre la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras es frecuente comenzar desarrollando un modelo 1D. Este modelo se puede validar aplicándolo a problemas para los que existe solución analítica. Posteriormente las técnicas utilizadas se extienden y adaptan al caso 2D.

Los modelos 1D han sido ampliamente estudiados. Pueden consultarse [1, 60, 81, 83] entre muchos otros trabajos. En nuestro caso se ha visto preferible comenzar a trabajar directamente con un modelo 2D. Se da primero un breve repaso -no exhaustivo- a algunos conceptos con el único objeto de introducir la terminología habitual y algunas de las técnicas que se van a emplear. Se utilizan para ello ecuaciones sencillas en 1D, como la ecuación del transporte. Al final del capítulo se definen algunos términos de uso habitual en hidráulica de canales.

### 2.2. El problema de Riemann

Para comenzar se analiza el problema de Riemann por la importancia que tiene en el método de Godunov (ver **2.6**), del que deriva el utilizado en este trabajo para la integración de las ecuaciones de aguas someras.

La siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales es conocida como la **ecuación del transporte** (o ecuación de convección lineal)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad u = u(x, t), \quad a = \text{constante.} \quad (2.1)$$

El problema de Cauchy o del valor inicial consiste en resolver (2.1) con

la condición inicial

$$u(x, 0) = u^0(x). \quad (2.2)$$

Como puede fácilmente comprobarse, la solución de esta ecuación viene dada por

$$u(x, t) = u^0(x - at), \quad \forall x \in R, \forall t \geq 0, \quad (2.3)$$

lo cual se puede interpretar diciendo que la función  $u$  se traslada en el tiempo, a lo largo del eje  $x$ , a velocidad  $a$  sin deformarse.

Los puntos del plano  $x, t$  en los que ocurre lo anterior se llaman curvas características. Su ecuación viene dada por

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (2.4)$$

y en ellas la solución  $u$  de la ecuación permanece constante. En efecto, si  $u$  es solución de la ecuación, su derivada total cumple

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

**El problema de Riemann** es un caso particular del anterior caracterizado por la condición inicial

$$u(x, 0) = u^0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

La discontinuidad inicial en  $x = 0$  se propaga a una distancia  $d = at$  en el tiempo  $t$ . La curva característica  $x = at$  separa, -en el plano  $x, t$ - los puntos en los que la solución vale  $u_L$  de aquellos en que vale  $u_R$ . El problema de Riemann -que puede expresarse abreviadamente como  $RP(U_L, U_R)$ - tiene como solución

$$u(x, t) = u^0(x - at) = \begin{cases} u_L & \text{si } x - at < 0, \\ u_R & \text{si } x - at > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Si, por ejemplo,  $a > 0$ , la onda se trasladará hacia la derecha. La solución de la ecuación es  $u_L$  en todos los puntos que ya han sido alcanzados por la onda, que son los que están a la izquierda del punto  $x = at$  al cabo de un tiempo  $t$ . La curva característica representa, pues, los pares  $(x, t)$  correspondientes al avance de la onda.

## 2.3. Variables conservativas y leyes de conservación

**Variables conservativas.** Existe cierta libertad al elegir las variables que han de describir el flujo en estudio. Una posible elección consiste en tomar las variables “primitivas” o “físicas”: la densidad  $\rho$ , la presión  $p$  y las tres componentes de la velocidad,  $u, v, w$ . Pueden también utilizarse las variables llamadas “conservativas”, que resultan de aplicar las leyes fundamentales de conservación (de la masa, del momento lineal o cantidad de movimiento, de la energía). Estas variables son, por ejemplo: la densidad  $\rho$ , las tres componentes de la cantidad de movimiento por unidad de volumen  $\rho u, \rho v, \rho w$  y la energía total por unidad de volumen. Para ecuaciones que gobiernan el flujo en superficie libre en una o dos dimensiones, como las de aguas someras, las variables conservativas más usadas son  $h, hu$  y  $hv$ , siendo  $h$  el calado y  $u$  y  $v$  las componentes de la velocidad.

**Leyes de conservación.** Son sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que expresan la conservación de  $m$  cantidades  $u_1, \dots, u_m$ . Si se obtienen a partir de un volumen de control fijo en el espacio, que es atravesado por el fluido en movimiento, se dice que están escritas en **forma conservativa**; esta es la forma que más se asemeja a un balance de flujos de masa y cantidad de movimiento [10, pg. 19]. Si el volumen de control se desplaza con el fluido, de manera que contiene siempre las mismas partículas, se obtiene la **forma no conservativa** [5, pg. 16]. Una ley de conservación en forma conservativa se escribe

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}). \quad (2.8)$$

$\mathbf{U}$  se denomina vector de variables y  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  vector de funciones de flujo. Al expresar las leyes de conservación en forma diferencial, se asume que las soluciones satisfacen los correspondientes requisitos necesarios de regularidad.

Un ejemplo de leyes de conservación son las ecuaciones de aguas someras, en las que

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} h \\ hu \end{array} \right\}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{array}{c} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

o, denotando a  $hu$  por  $q$ ,

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} h \\ q \end{array} \right\}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \left\{ \begin{array}{c} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{array} \right\}. \quad (2.10)$$

**Forma integral.** Estas leyes de conservación pueden expresarse también en forma integral, como se ve con más detalle en el punto 2.6. Una razón a

favor de la utilización de la forma integral es que la obtención de las ecuaciones se basa en principios físicos de conservación, expresados generalmente como relaciones integrales. Por otro lado la formulación integral requiere menos condiciones de derivabilidad en las soluciones, lo que permite obtener soluciones discontinuas. Las soluciones de la forma integral son conocidas como **soluciones débiles**.

**Forma no conservativa.** Aplicando la regla de la cadena a un sistema de leyes de conservación se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz jacobiana

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

La formulación no conservativa (2.11) es equivalente a la conservativa (2.8), y tiene la misma solución, siempre que esta solución sea suficientemente regular. De lo contrario la derivación realizada que ha conducido a (2.11) no será válida. Por ejemplo, si la solución es discontinua -caso de una onda de choque-, se obtienen resultados erróneos.

Considérese como ejemplo el sistema de ecuaciones dado por (2.8)-(2.9). Derivando se obtiene

$$\begin{aligned} h_t + h_x u + h u_x &= 0, \\ h_t u + h u_t + h_x u^2 + 2h u u_x + g h h_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Introduciendo la primera ecuación en la segunda y simplificando queda

$$\begin{aligned} h_t + h_x u + h u_x &= 0, \\ u_t + u u_x + g h_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

que se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} h u \\ \frac{1}{2} u^2 + g h \end{pmatrix}_x = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

La expresión anterior representa un sistema de leyes de conservación en forma conservativa que establece la conservación de las variables  $h$  y  $u$ , en lugar de las iniciales  $h$  y  $hu$ . Sin embargo se demuestra [79, pg. 112] que, aplicando (2.15) al avance de una onda de choque, se obtiene una solución distinta a la obtenida a partir de (2.8)-(2.9). La formulación (2.15), a la que se ha llegado suponiendo ciertas condiciones, no es válida para soluciones discontinuas.

## 2.4. Esquemas descentrados

Se considera de nuevo la ecuación del transporte (2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t).$$

A partir del desarrollo en serie de Taylor pueden obtenerse distintas discretizaciones para esta ecuación. Por ejemplo, si  $i$  es el índice espacial y  $n$  el temporal,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (2.16)$$

y la derivada temporal se puede aproximar como

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_i^n \Delta t + O(\Delta t^2), \quad (2.17)$$

que es una discretización de primer orden hacia delante. Asimismo

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n \Delta x^3 + O(\Delta x^4), \quad (2.18)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n \Delta x^3 + O(\Delta x^4), \quad (2.19)$$

y restando estas dos ecuaciones se obtiene una discretización centrada en el espacio de segundo orden

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n \Delta x^2 + O(\Delta x^3). \quad (2.20)$$

Entonces la ecuación (2.1) discretizada se puede escribir como

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.21)$$

resultando el siguiente algoritmo numérico

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n). \quad (2.22)$$

Este esquema, de primer orden en el tiempo y de segundo en el espacio, se conoce como **esquema explícito de Euler** y se puede demostrar que es incondicionalmente inestable [79, pg. 163].

Con objeto de remediar la falta de estabilidad observada en el esquema anterior, se discretiza espacialmente de modo **descentrado**, obteniendo dos opciones

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}, \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}, \quad (2.24)$$

de las que sólo una da buenos resultados, dependiendo del signo de la velocidad de propagación de la onda  $a$ . Si  $a > 0$ , la opción (2.23) junto con (2.17) arroja como resultado

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mu_c(u_i^n - u_{i-1}^n), \quad (2.25)$$

siendo

$$\mu_c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}, \quad (2.26)$$

El esquema (2.25) es estable [79, pg. 164] con la condición

$$0 \leq \mu_c \leq 1. \quad (2.27)$$

El parámetro  $\mu_c$  se denomina **número de Courant**, número de Courant-Friedrichs-Lewy o número CFL. Puede considerarse como el cociente de dos longitudes: la recorrida por la onda en un tiempo  $\Delta t$  y el tamaño de malla  $\Delta x$ . Como  $a$  es dato y  $\Delta x$  viene normalmente fijado por el grado de precisión deseado, sólo se puede variar  $\Delta t$  para satisfacer la condición de estabilidad.

El esquema (2.25) es conocido como **esquema *upwind* de primer orden**. Se debe a Courant, Isaacson y Rees, por lo que se llama también **esquema CIR**. El nombre *upwind* hace referencia a que en la discretización espacial se usan puntos de la malla del lado del que viene la información. El CIR tiene la desventaja -común a todos los métodos de primer orden- de ser muy difusivo, por lo que las discontinuidades en la solución tienden a extenderse y los valores extremos a recortarse.

Si para  $a > 0$  se introducen (2.17) y (2.24) en la ecuación del transporte (2.1), el esquema *downwind* resultante

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mu_c(u_{i+1}^n - u_i^n), \quad (2.28)$$

es incondicionalmente inestable. Es decir, para obtener un esquema descentrado útil debe tenerse en cuenta el signo de  $a$  en la discretización espacial.

Otro esquema de primer orden es el de **Lax-Friedrichs**, que se caracteriza por sustituir el término  $u_i^n$  de (2.22) por

$$\frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n), \quad (2.29)$$

es decir, la media de los valores en los dos nodos vecinos. El esquema resultante

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \mu_c)u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \mu_c)u_{i+1}^n \quad (2.30)$$

es estable con la condición (2.27) [79, pg. 168].

Como último ejemplo se deduce el esquema de **Lax-Wendroff**. Para ellos se despeja en (2.1) la derivada temporal

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Derivando respecto de  $t$ , suponiendo que se cumplen las condiciones de la propiedad de Schwarz, y aplicando dos veces (2.31), resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.32)$$

Entonces, a partir del desarrollo de Taylor (2.16),

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta t + \frac{1}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta t^2 + O(\Delta t^3). \quad (2.33)$$

La derivada primera espacial se discretiza como en (2.20)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.34)$$

Para la derivada segunda se observa que, sumando (2.18) y (2.19) en vez de restarlas, se obtiene una discretización de la derivada segunda, centrada en el espacio y de segundo orden

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (2.35)$$

Introduciendo ambas discretizaciones en (2.33) resulta el esquema de segundo orden en el tiempo y en el espacio

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\mu_c}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\mu_c^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = \\ &= u_{i-1}^n \frac{\mu_c}{2} (\mu_c + 1) + u_i^n (1 - \mu_c^2) + u_{i+1}^n \frac{\mu_c}{2} (\mu_c - 1). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Toro [79, pg. 169] hace una deducción menos convencional de este esquema. Lo obtiene discretizando hacia adelante la derivada temporal y tomando, para la derivada espacial, una media ponderada de las aproximaciones *upwind* y *downwind* de (2.23) y (2.24), es decir

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n = \frac{(1 + \mu_c) u_i^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{(1 - \mu_c) u_{i+1}^n - u_i^n}{2 \Delta x}. \quad (2.37)$$

Este esquema -de segundo orden en espacio y tiempo- resulta estable con la condición (2.27), a pesar de ser de primer orden las aproximaciones efectuadas para llegar a él y ser incondicionalmente inestable uno de los términos de la discretización de la derivada espacial utilizados. Lo anterior sirve al autor citado como ejemplo de que la precisión de un esquema no siempre se deduce de la precisión de las aproximaciones en diferencias finitas de las derivadas parciales implicadas.

## 2.5. Difusión o viscosidad numérica

En el apartado anterior se ha mencionado la difusión numérica, término que se aclara brevemente a continuación. Para ello se considera la ecuación

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0. \quad (2.38)$$

Si se le aplica la discretización descentrada (2.23), en la que se prescinde del índice temporal, resulta

$$a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = a \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.39)$$

Por otra parte, a partir del desarrollo de Taylor (2.19)

$$u_{i-1} = u_i - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i \Delta x^2 + O(\Delta x^3), \quad (2.40)$$

de donde, multiplicando por  $a$  y reagrupando, se obtiene

$$a \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i - \frac{1}{2} a \Delta x \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x^2). \quad (2.41)$$

Es decir, la expresión

$$a \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}, \quad (2.42)$$



que representa una discretización de primer orden de (2.38), es al mismo tiempo una discretización de segundo orden de la ecuación

$$a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.43)$$

que contiene un término difusivo de coeficiente  $a\Delta x/2$ .

Así pues al discretizar *upwind* la ecuación (2.38) se está introduciendo una **difusión** denominada **numérica**. El coeficiente que cuantifica esta difusión (también llamada **viscosidad numérica**) depende del tamaño de malla, por lo que si  $\Delta x$  es suficientemente pequeño, con el consiguiente incremento del tiempo de cálculo, el efecto difusivo tiende a desaparecer. Puede verse un estudio más completo de este fenómeno en [5, pg. 200]

## 2.6. Esquemas conservativos

Se considera la ecuación de conservación escalar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t), \quad f = f(u) \quad (2.44)$$

que coincide con (2.1) si  $f(u) = au$ , siendo  $a$  constante. Una forma de discretizarla, para tener en cuenta soluciones débiles, consiste en integrarla en  $x$  y en  $t$ , transformandola en una forma integral. Se toman como dominios espacial y temporal los intervalos

$$I_i = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] = \left[ x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2} \right], \quad (2.45)$$

$$I_n = [t_n, t_{n+1}] = [n\Delta t, (n+1)\Delta t].$$

Entonces, la integral de la ecuación (2.44)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right] dx dt = 0, \quad (2.46)$$

resulta

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Se puede expresar (2.47) diciendo que la “cantidad” de  $u$  contenida en el intervalo (o celda)  $I_i$ , sólo cambia en el tiempo  $\Delta t$  debido al valor del flujo  $f$  en los extremos del mismo (bordes de la celda).

Se define  $u_i^n$  como el valor promedio de la función  $u(x, t)$  en el intervalo  $I_i$ , en el instante de tiempo  $t_n = n\Delta t$ , es decir

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx, \quad (2.48)$$

quedando (2.47) convertida en

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) \Delta x + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))] dt = 0. \quad (2.49)$$

Si en (2.49) se aproxima el término integral por medio de los valores  $f_{i\pm\frac{1}{2}}^n$

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)) dt, \quad (2.50)$$

se puede escribir

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-\frac{1}{2}}^n - f_{i+\frac{1}{2}}^n). \quad (2.51)$$

Los valores  $f_{i\pm\frac{1}{2}}^n$ , que se conocen como **flujos numéricos**, representan sendas aproximaciones del promedio temporal del flujo físico en los bordes de la celda. Según el modo de obtención de estos valores resultan distintos esquemas. Los flujos numéricos se calculan en la práctica en función de las variables en las celdas contiguas a la  $I_i$ , mediante una expresión del tipo

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n = \phi(u_{i-m}^n, u_{i-m+1}^n, \dots, u_{i+l}^n), \quad (2.52)$$

siendo  $m$  y  $l$  dos enteros no negativos.

Un **esquema conservativo** para la ley de conservación escalar (2.44) es un método numérico de la forma (2.51) tal que cumple (2.52) [79, pg. 171].

Para que el esquema sea **consistente** (represente fielmente la ecuación diferencial cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$ ),  $\phi$  debe cumplir [44, pg. 126]

$$\phi(v, v, \dots, v) = f(v); \quad (2.53)$$

es decir, el flujo numérico, que trata de aproximar el flujo físico en un cierto estado, a partir de los valores del flujo en estados próximos, debe ser exactamente igual a  $f(v)$  cuando los estados próximos coinciden con  $v$ . Se denomina estado a un determinado valor del conjunto de las variables.

Los esquemas conservativos son la base de los métodos en volúmenes finitos, que parten de las ecuaciones de conservación en forma integral para obtener algoritmos numéricos. El interés de estos esquemas se encuentra en que, según el **Teorema de Lax-Wendroff** [32, pg. 168], si un esquema conservativo consistente converge, el resultado es una solución débil de la ecuación. En cambio, como ha sido mostrado recientemente por Hou y Le Floch [79, pg. 170], los esquemas no conservativos pueden no converger a la solución correcta si en ella está presente una onda de choque.

Algunos ejemplos de esquemas conservativos son los de Godunov, Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff.

**Godunov** realizó con éxito la primera extensión conservativa del esquema CIR a sistemas no lineales de leyes de conservación. El método *upwind* de primer orden de Godunov es un esquema conservativo de la forma (2.51), en el que los flujos numéricos en las fronteras de las celdas  $f_{i\pm\frac{1}{2}}$  se calculan utilizando soluciones de problemas de Riemann locales. Se expone a continuación una interpretación del método de Godunov [79, pg. 175].

Se asume que, en cada escalón de tiempo  $t_n$ , la variable  $u$  es constante a trozos, tomando en cada celda  $I_i$  el valor dado por (2.48). En cada frontera de  $I_i$  hay, pues, un par de estados constantes:  $(u_{i-1}, u_i)$  en la frontera izquierda y  $(u_i, u_{i+1})$  en la frontera derecha, cada uno de los cuales puede ser considerado como un problema de Riemann local, con origen en  $x = 0$ ,  $t = 0$ . Así, en la frontera izquierda,  $x_{i-\frac{1}{2}}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) &= \begin{cases} u_{i-1}^n & x < 0, \\ u_i^n & x > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.54)$$

y en la frontera derecha,  $x_{i+\frac{1}{2}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) &= \begin{cases} u_i^n & x < 0, \\ u_{i+1}^n & x > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Sea  $\tilde{u}(x, t)$  la solución combinada de  $RP(u_{i-1}^n, u_i^n)$  y  $RP(u_i^n, u_{i+1}^n)$  en  $I_i$ . Puesto que  $\tilde{u}(x, t)$  es la solución exacta de la ley de conservación (2.44) se introduce en la forma integral (2.47), con dominios espacial y temporal respectivamente

$$I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}], \quad I_n = [0, \Delta t], \quad (2.56)$$

obteniendo

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{u}(x, \Delta t) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{u}(x, 0) dx - \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt + \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = 0. \quad (2.57)$$

Definiendo ahora, como en (2.48)

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{u}(x, 0) dx, \quad (2.58)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{u}(x, \Delta t) dx,$$

queda el esquema conservativo (2.51)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{i-\frac{1}{2}}^n - f_{i+\frac{1}{2}}^n \right), \quad (2.59)$$

donde

$$f_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (2.60)$$

El integrando de (2.60) depende de la solución exacta del problema de Riemann, en cada extremo del intervalo, a lo largo del eje de tiempos (en coordenadas locales). Esto se representa como

$$\tilde{u}(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t) = u_{i\pm\frac{1}{2}}(0), \quad (2.61)$$

con lo que

$$f_{i\pm\frac{1}{2}} = f(u_{i\pm\frac{1}{2}}(0)). \quad (2.62)$$

En el caso de que  $f(u) = au$ ,  $a > 0$ , resulta

$$f_{i-\frac{1}{2}} = au_{i-1}^n, \quad f_{i+\frac{1}{2}} = au_i^n \quad (2.63)$$

(si se hubiera tomado  $a < 0$  el resultado sería  $au_i^n$  para la frontera izquierda y  $au_{i+1}^n$  para la derecha). Al sustituir en (2.59), se llega a

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (au_{i-1}^n - au_i^n) = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad (2.64)$$

es decir el esquema CIR (2.25).

Así pues, el método de Godunov consiste en considerar el problema que hay que resolver como una sucesión de estados, constantes en cada volumen finito. En cada escalón de tiempo se resuelve un problema de Riemann en la frontera de cada celda, tomando como flujos en dichas fronteras las soluciones exactas de cada problema local. Estas soluciones exactas deben ser calculadas en función de la ecuación de que se trate, si esta no es lineal; en [79, pg. 176] pueden verse, por ejemplo, las soluciones exactas del problema de Riemann en el caso de la ecuación cuasi-lineal de Burger. Por último se realiza el promediado espacial de las variables dependientes en cada celda.

Con el fin de simplificar el proceso, disminuyendo así el tiempo de cálculo, distintos autores [33, 69, 82] han recurrido a esquemas denominados resolventes aproximados de Riemann, de los que puede consultarse una amplia relación en [79]. Estos esquemas han sido extendidos más tarde [2, 31, 81, 83] al caso de flujos en superficie libre con muy buenos resultados. Si bien es cierto que en estos esquemas se reemplaza la solución exacta del problema de Riemann por una aproximada, la información proporcionada por la solución exacta se pierde parcialmente, en todo caso, debido al promediado espacial en cada celda, lo que hace poco significativo el error cometido en la aproximación [14].

En el esquema conservativo de **Lax-Friedrichs** se toman, para los flujos en los extremos, los valores

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1+\mu_c}{2\mu_c} f(u_i^n) + \frac{\mu_c-1}{2\mu_c} f(u_{i+1}^n), \\ f_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1+\mu_c}{2\mu_c} f(u_{i-1}^n) + \frac{\mu_c-1}{2\mu_c} f(u_i^n), \end{aligned} \tag{2.65}$$

donde  $\mu_c$  toma el valor dado por (2.26). haciendo  $f(u) = au$  y sustituyendo (2.65) en la ecuación conservativa (2.51) se obtiene el esquema en diferencias de Lax-Friedrichs (2.30).

Por último, el esquema conservativo de **Lax-Wendroff** utiliza, para  $f_{i\pm\frac{1}{2}}$ , las expresiones

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1+\mu_c}{2} f(u_i^n) + \frac{1-\mu_c}{2} f(u_{i+1}^n), \\ f_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{1+\mu_c}{2} f(u_{i-1}^n) + \frac{1-\mu_c}{2} f(u_i^n), \end{aligned} \tag{2.66}$$

que, al ser sustituidas en (2.51) con  $f(u) = au$ , dan como resultado el esquema en diferencias de Lax-Wendroff (2.36).

## 2.7. Sistemas lineales hiperbólicos

Se considera ahora un sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U} = \{u_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.67)$$

siendo  $\mathbf{U}$  el vector de variables y  $\mathbf{A}_{m \times m}$  una matriz constante.

El sistema se llama **hiperbólico** si  $\mathbf{A}$  es diagonalizable, es decir si tiene  $m$  autovalores reales  $\lambda_i$  y  $m$  autovectores linealmente independientes  $\mathbf{k}^i$ . Será estrictamente hiperbólico si los  $m$  autovalores son distintos [79, pg. 45]. Llamando  $\mathbf{\Lambda}$  a la matriz diagonal de los autovalores y  $\mathbf{X}$  a la matriz cuyas columnas son los autovectores  $\mathbf{k}^i$ , se cumple

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.68)$$

La existencia de  $\mathbf{X}^{-1}$  permite definir un nuevo vector de variables

$$\mathbf{V} = \{v_j\}_{j=1,2,\dots,m} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{U}, \quad (2.69)$$

que se llaman variables características. Utilizando la relación (2.68) y haciendo el cambio

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}\mathbf{V} \quad (2.70)$$

resulta, de (2.67),

$$\mathbf{X}\mathbf{V}_t + \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{V}_x = \mathbf{X}\mathbf{V}_t + \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}_x = \mathbf{X}(\mathbf{V}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}_x) = \mathbf{0}, \quad (2.71)$$

de donde

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}_x = \mathbf{0}. \quad (2.72)$$

Se ha obtenido así la forma canónica o característica del sistema, que resulta ser un sistema desacoplado, cada una de cuyas ecuaciones involucra sólo a una variable,

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.73)$$

Con lo anterior se ha hecho un cambio de base a la de autovectores  $\mathbf{k}^i$ . Las  $\{v_j\}$  son las nuevas componentes del vector de variables en dicha base. La ventaja del cambio realizado es que el sistema de ecuaciones (2.67) se ha convertido en uno desacoplado en que cada ecuación adopta la forma de la ecuación 1D del transporte.

Una vez resuelto el sistema (2.73) pueden obtenerse los valores  $\mathbf{U}$  sin más que usar (2.70).

## 2.8. Esquemas descentrados para sistemas lineales

Como se acaba de ver, el sistema lineal hiperbólico (2.67)

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = \mathbf{0}$$

puede desacoplarse, convirtiéndose en  $m$  ecuaciones (2.73), cada una de las cuales involucra a una sola variable. Ahora bien, el esquema conservativo descentrado estudiado para el caso escalar (2.44) sólo puede ser aplicado a este sistema si todos los autovalores tienen el mismo signo. En un caso general, con autovalores de ambos signos, al elegir el sentido hacia el que hay que descentrar, se hará *upwind* para los positivos y *downwind* para los negativos. El modo práctico de llevar esto a cabo es descomponer la matriz  $\mathbf{A}$  en dos, una de ellas con autovalores positivos o nulos y la otra con autovalores negativos o nulos.

**Esquema CIR.** Llamando

$$\lambda_j^+ = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } \lambda_j \geq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda_j < 0, \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\lambda_j^- = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } \lambda_j \leq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda_j > 0, \end{cases} \quad (2.75)$$

el esquema CIR (2.25), aplicado a un sistema lineal hiperbólico desacoplado (en forma canónica) queda

$$\{v_j\}_i^{n+1} = \{v_j\}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_j^+ (\{v_j\}_i^n - \{v_j\}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_j^- (\{v_j\}_{i+1}^n - \{v_j\}_i^n), \\ j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.76)$$

Sea  $\mathbf{\Lambda}$  la matriz diagonal de los autovalores  $\lambda_j$ ,  $\mathbf{\Lambda}^+$  la de los  $\lambda_j^+$ ,  $\mathbf{\Lambda}^-$  la de los  $\lambda_j^-$  y  $|\mathbf{\Lambda}|$  la de los valores absolutos  $|\lambda_j|$ . Se cumple

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-, \quad (2.77)$$

$$|\mathbf{\Lambda}| = \mathbf{\Lambda}^+ - \mathbf{\Lambda}^-. \quad (2.78)$$

Si se define

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^+\mathbf{X}^{-1}, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^-\mathbf{X}^{-1}, \quad (2.80)$$

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{X}|\mathbf{\Lambda}|\mathbf{X}^{-1}, \quad (2.81)$$

resulta

$$\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- = \mathbf{A}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^- = \mathbf{X} |\mathbf{A}| \mathbf{X}^{-1} = |\mathbf{A}|. \quad (2.83)$$

Se puede entonces escribir el esquema CIR en forma vectorial, bien en términos de las variables características

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A}^+ (\mathbf{V}_i^n - \mathbf{V}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A}^- (\mathbf{V}_{i+1}^n - \mathbf{V}_i^n), \quad (2.84)$$

o bien en términos de las variables de partida

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A}^+ (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A}^- (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n). \quad (2.85)$$

Las técnicas de descomposición de flujo utilizan expresiones del tipo de (2.85).

**Método de Godunov.** Se considera de nuevo el sistema lineal hiperbólico (2.67), escrito ahora en forma conservativa,

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}\mathbf{U}. \quad (2.86)$$

El esquema de Godunov de primer orden descentrado utiliza la formula conservativa, análoga a la (2.59),

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n \right), \quad (2.87)$$

donde, análogamente a (2.62), los términos de flujo en las fronteras de la celda son

$$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}} = \mathbf{F} \left( \mathbf{U}_{i\pm\frac{1}{2}}(0) \right), \quad (2.88)$$

siendo  $\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}}(0)$  y  $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0)$  las soluciones de los Problemas de Riemann  $RP(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)$  y  $RP(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)$  respectivamente.

Los flujos numéricos en los extremos del intervalo se calculan a partir de los valores de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{U}$  en los puntos anterior y posterior obteniéndose las expresiones [79, pg. 185]

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n) - \frac{1}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n), \quad (2.89)$$

$$\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i-1}^n + \mathbf{F}_i^n) - \frac{1}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n), \quad (2.90)$$

donde  $|\mathbf{A}|$  toma el valor dado por (2.81).

Es decir, el valor resultante para los vectores flujo en las fronteras es la semisuma de los valores en los puntos  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ , con un término de descentrado.

Los  $Q$ -esquemas, que se introducen en 4.4, utilizan expresiones del tipo de (2.89) y (2.90).



## 2.9. Definición de términos hidráulicos en 1D

A continuación se definen algunos términos hidráulicos. No se pretende en absoluto hacer un resumen de hidráulica de canales, sino tan sólo facilitar la comprensión, a quién no esté familiarizado con el tema, de algunos términos de los que se hace uso en el capítulo 5. Estas cuestiones están tratadas con detenimiento en diversos textos [17, 18, 62]. Algunos de los conceptos se refieren al caso particular de canales rectangulares.

Se dice que un fluido se mueve en **régimen permanente** si los parámetros que lo describen son independientes del tiempo en cada punto. El régimen es **no permanente** o **variable** en caso contrario. Si dichos parámetros no dependen de la posición, el flujo es **uniforme** y si lo hacen se llama **no uniforme** o **variado**.

Un parámetro adimensional de importancia en el estudio de canales es el **número de Froude**. Este número se obtiene como cociente entre la velocidad del fluido y la de las ondas de perturbación gravitatoria que se transmiten por él

$$Fr = \frac{v}{c}. \quad (2.91)$$

La **celeridad** de las ondas de gravedad vale

$$c = \sqrt{gy_m}, \quad (2.92)$$

siendo  $y_m$  el **calado medio**, que se obtiene dividiendo el área de la sección mojada entre el ancho de la misma

$$y_m = \frac{A}{B}. \quad (2.93)$$

En el caso de canales rectangulares se puede definir el caudal por unidad de ancho o **caudal unitario**

$$q = \frac{Q}{B}, \quad (2.94)$$

que, teniendo en cuenta la relación  $Q = vA$ , puede expresarse también como producto de la velocidad por el calado medio

$$q = \frac{vA}{B} = v y_m. \quad (2.95)$$

Si  $Fr < 1$ , la velocidad de las partículas del fluido es inferior a la de transmisión por él de una onda, por lo que una perturbación que tenga lugar en un punto  $P$  del canal influye en los puntos que se encuentran aguas arriba de  $P$ . El régimen del flujo en este caso se denomina **lento** o subcrítico.

Si  $Fr > 1$ , al ser  $v > c$ , la perturbación no se transmitirá hacia aguas arriba. El régimen se conoce como **rápido** o supercrítico.

En el caso límite  $Fr = 1$ , se tiene un régimen **crítico**. En este caso, a partir de (2.91)-(2.93), se cumple

$$c = v \implies \sqrt{g \frac{A(y_c)}{B(y_c)}} = \frac{Q(y_c)}{A(y_c)}, \quad (2.96)$$

de donde puede obtenerse el **calado crítico**  $y_c$ .

Para un canal rectangular de caudal unitario  $q$ , la expresión (2.96) se simplifica y el calado crítico es el cociente entre  $q$  y la celeridad, con lo que

$$y_c = \frac{q}{\sqrt{gy_c}} \implies y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3}. \quad (2.97)$$

**Calado normal** es el que se forma en un canal cuando se alcanza el régimen permanente y uniforme. Depende de diversas características del canal, como son el caudal, la pendiente y el rozamiento. Se obtiene este calado a partir de la relación

$$S_0 = S_f, \quad (2.98)$$

donde  $S_0$  es la pendiente geométrica y  $S_f$  la de fricción. Utilizando la expresión de Manning [87, pg. 666] para la pendiente de fricción, resulta

$$S_0 = \frac{n^2 v^2}{R_h^{4/3}}, \quad (2.99)$$

siendo  $n$  el coeficiente de Manning y  $R_h$  el **radio hidráulico** (ver 5.1.2). En un canal rectangular y suficientemente ancho como para despreciar el efecto de sus paredes, el radio hidráulico es aproximadamente igual al calado y, a partir de (2.99), se puede escribir

$$y_n = \frac{n^{0.6} q^{0.6}}{S_0^{0.3}}. \quad (2.100)$$

**Tipos de pendientes.** Dado un canal por el que circula un determinado caudal, según la relación entre los valores del calado normal y el crítico, la pendiente se denomina:

- **Moderada** (M), si el calado normal es superior al crítico,  $y_n > y_c$ .
- **Pronunciada** (S), si el calado normal es inferior al crítico,  $y_n < y_c$ .
- **Crítica** (C), si ambos calados son iguales,  $y_n = y_c$ .

En los tres tipos anteriores se asume que la pendiente geométrica es positiva (la cota del fondo decrece). Los dos tipos restantes se denominan

- **Horizontal** (H), si la pendiente geométrica es nula,  $S_0 = 0$ .
- **Adversa** (A), si la pendiente geométrica es negativa,  $S_0 < 0$  (la cota del fondo crece).

Para cada tipo de pendiente, si se fija el calado en una determinada sección, a partir de ese punto la superficie del fluido adopta un determinado perfil llamado **curva de remanso**. El flujo en las curvas de remanso se denomina permanente gradualmente variado. La ecuación que rige estas curvas (siempre que el flujo se mantenga en régimen lento o rápido) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}. \quad (2.101)$$

Si la pendiente es moderada ( $y_c < y_n$ ), según la posición relativa que ocupa el valor del calado fijado  $y_{cc}$ , se obtienen tres tipos de curvas:

$$\text{Tipo M1 : } y_c < y_n < y_{cc}, \quad (2.102)$$

$$\text{Tipo M2 : } y_c < y_{cc} < y_n, \quad (2.103)$$

$$\text{Tipo M3 : } y_{cc} < y_c < y_n. \quad (2.104)$$

En el caso de régimen rápido las condiciones de contorno sólo afectan al flujo aguas abajo del punto donde se imponen, por lo que suelen imponerse en la primera sección del canal. Según los valores relativos de  $y_c, y_n$  e  $y_{cc}$  se obtienen las curvas de remanso

$$\text{Tipo S1 : } y_n < y_c < y_{cc}, \quad (2.105)$$

$$\text{Tipo S2 : } y_n < y_{cc} < y_c, \quad (2.106)$$

$$\text{Tipo S3 : } y_{cc} < y_n < y_c. \quad (2.107)$$

Si la pendiente del fondo es nula, el calado normal -que resulta de (2.99)- no está definido. Las posibles curvas son:

$$\text{Tipo H2 : } y_c < y_{cc}, \quad (2.108)$$

$$\text{Tipo H3 : } y_{cc} < y_c. \quad (2.109)$$

En el caso de pendiente adversa, el calado normal tampoco está definido y las posibles curvas son:

$$\text{Tipo A2 : } y_c < y_{cc}, \quad (2.110)$$

$$\text{Tipo A3 : } y_{cc} < y_c. \quad (2.111)$$

En la figura 2.1 reproducida de [17, pg. 159] se muestran las distintas curvas mencionadas.

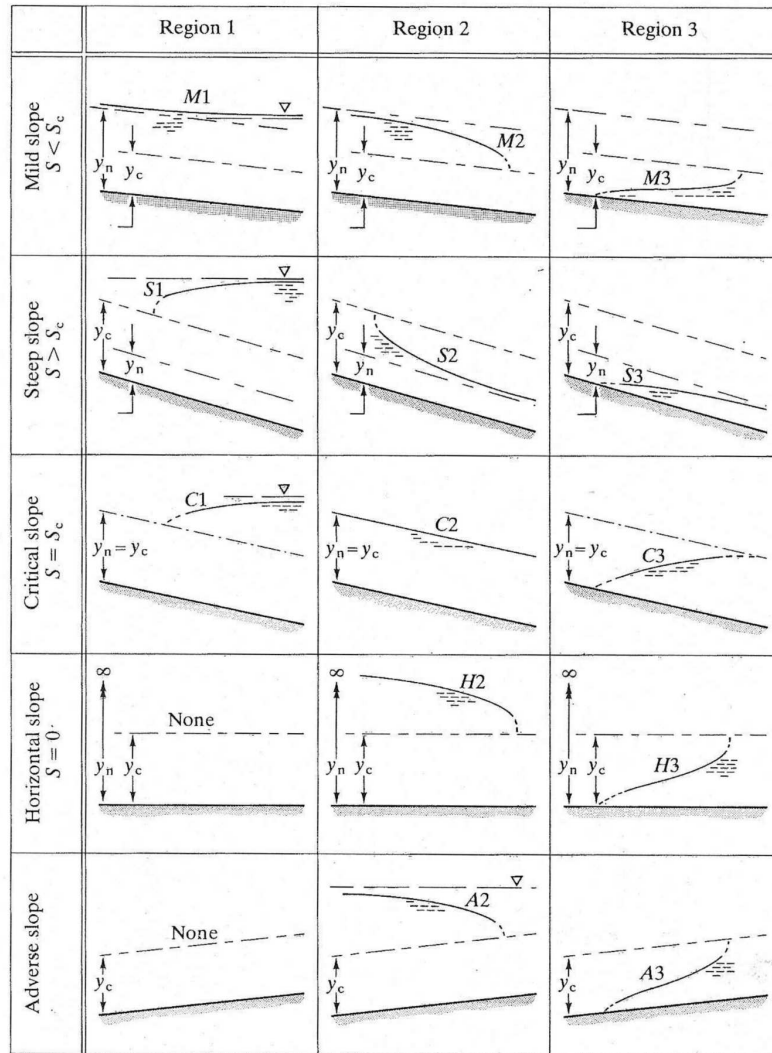


Figura 2.1: Tipos de curvas de remanso (de Chadwick *et al.* [17]).

**Cambios de régimen.** En todas las curvas de remanso descritas se produce una variación gradual del flujo. El calado en todos los puntos de la curva toma un valor que es, o bien mayor, o bien menor que  $y_c$ . Un cambio de régimen es el fenómeno que se produce cuando el flujo cambia de lento a rápido o viceversa.

El primer caso puede deberse a que la pendiente pasa de moderada a pronunciada, lo que influye en el flujo, que cambia de lento a rápido. El calado normal producido por la pendiente moderada es superior al crítico, mientras el producido por la pronunciada es inferior. Se producen entonces unas curvas del tipo M2 y S2, con un paso de la una a la otra en el punto de cambio de pendiente, en el que el calado será crítico.

El segundo caso, cambio de régimen rápido a lento, se da cuando un fluido en régimen rápido se encuentra bruscamente con un calado superior al crítico, correspondiente por lo tanto a un régimen lento. Se produce entonces un cambio de régimen con gran pérdida de energía, que se denomina **resalto hidráulico**. Una vez que las variables del movimiento se estabilizan en el tiempo, el flujo en un resalto se considera permanente rápidamente variado.



# Capítulo 3

## Ecuaciones del flujo turbulento

### 3.1. Flujo turbulento

La importancia de las fuerzas de inercia con respecto a las viscosas en un determinado flujo viene dada por el número adimensional de Reynolds, que se calcula como cociente entre ambas fuerzas.

Como se ve en **3.4**, las tensiones viscosas dependen de la variación respecto al tiempo de la deformación angular de los elementos de fluido, lo cual se expresa en su forma más elemental como

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.1)$$

siendo  $u$  la velocidad del fluido,  $y$  la distancia en la dirección perpendicular a la del movimiento y  $\mu$  la viscosidad dinámica, constante para cada fluido a una determinada temperatura.

Para un volumen unidad, la resultante de las fuerzas de fricción debidas a la viscosidad vale  $\partial\tau/\partial y$  [74, pg. 6], lo que, junto con (3.1), da como resultado

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.2)$$

Por otro lado las fuerzas de inercia en una dimensión valen

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.3)$$

de modo que el número de Reynolds puede calcularse como

$$Re = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}. \quad (3.4)$$

En la fórmula anterior, las derivadas espaciales de  $u$  en numerador y denominador tienen dimensiones de  $V/L$  y  $V/L^2$  respectivamente, de donde se obtiene la expresión habitual de  $Re$

$$Re = \frac{\rho V^2/L}{\mu V/L^2} = \frac{VL}{\nu}. \quad (3.5)$$

$V$  y  $L$  son la velocidad y longitud características del flujo en cuestión y  $\nu$ , cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad, se conoce como viscosidad cinemática. Se observa experimentalmente que para valores inferiores al llamado número de Reynolds crítico las capas adyacentes de fluido deslizan unas sobre otras de modo ordenado, lo cual constituye el **régimen laminar**. En un régimen laminar, si las condiciones de contorno no varían con el tiempo, el flujo es permanente (ver **2.9**).

Para valores de  $Re$  superiores al crítico el comportamiento del flujo cambia, tornándose aleatorio y caótico. El movimiento se vuelve no permanente, incluso con condiciones de contorno constantes. Es lo que se denomina **régimen turbulento**.

El número de Reynolds crítico no está exactamente determinado. Reynolds obtuvo los números 2000 y 12000 como valores inferior y superior respectivamente en el caso de tubos, tomando como  $L$  el diámetro y como  $V$  la velocidad media. Para tubos suele considerarse que el flujo es laminar por debajo de 2000, con una zona de transición entre 2000 y 4000 [77, pg. 223]. Para flujos en superficie libre, se utiliza el radio hidráulico (ver **5.1.2**) como longitud característica por lo que los valores críticos resultan menores: laminar por debajo de 500 y turbulento por encima de 2000 [71, pg. 7].

La naturaleza aleatoria del flujo turbulento y la elevada frecuencia con la que varían las diversas magnitudes dificulta enormemente en la práctica los cálculos basados en una descripción completa del movimiento de todas las partículas del fluido. Sean  $u, v, w$  las componentes de la velocidad y  $p$  la presión. Se puede descomponer una magnitud (por ejemplo la primera componente de la velocidad  $u$ ) en la suma de su valor promedio turbulento ( $\bar{u}$ ) y su fluctuación turbulenta ( $u'$ ). Se caracteriza entonces un flujo turbulento por los valores promedio ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$ ) y las propiedades estadísticas de sus fluctuaciones ( $u', v', w', p'$ ).

Incluso en flujos donde las velocidades y presiones promedio varían sólo en una o dos dimensiones espaciales, las fluctuaciones turbulentas tienen siempre un carácter tridimensional. Si se logra visualizar un flujo turbulento se encuentran porciones de fluido en rotación, que se llaman remolinos turbulentos. Estos presentan un amplio espectro de tamaños siendo el de los remolinos mayores comparable a las dimensiones del dominio. Las fuerzas



de inercia predominan en los remolinos de mayor tamaño, mientras que su efecto es despreciable frente al de las fuerzas viscosas en los más pequeños.

La energía necesaria para mantener el movimiento de los remolinos de mayor tamaño procede del flujo medio. Por otra parte, los remolinos menores obtienen energía principalmente de otros mayores y más débilmente del flujo medio. De esta manera la energía cinética se va transmitiendo a remolinos cada vez más pequeños, a través de un proceso en cascada, hasta que es disipada por las fuerzas viscosas. Esta disipación produce las pérdidas de energía adicionales relacionadas con los flujos turbulentos.

Los remolinos de mayor tamaño tienen un comportamiento altamente anisótropo y dependiente del flujo medio, debido a su fuerte interacción con éste. Sin embargo, durante el proceso en cascada, la acción difusiva de la viscosidad va disminuyendo esta direccionalidad por lo que, para números de Reynolds suficientemente altos, el comportamiento de los remolinos más pequeños puede considerarse isótropo.

## 3.2. Valor promedio y fluctuación

Como se ha mencionado en el apartado anterior, una magnitud  $\varphi$ , que en general depende del tiempo, se descompone en la suma de su valor promedio turbulento más una componente de fluctuación en torno a dicho valor

$$\varphi(t) = \overline{\varphi(t)} + \varphi'(t). \quad (3.6)$$

Aunque no aparezca explícitamente en la expresión de las magnitudes  $\varphi$  y  $\overline{\varphi}$ , ambas son función de las coordenadas del punto considerado  $(x, y, z)$ .

El promedio temporal de  $\varphi(t)$ , para un punto dado, se puede definir de diversos modos. Para flujos permanentes Ferziger y Peric [27, pg. 266] utilizan la expresión

$$\overline{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt, \quad (3.7)$$

mientras que, para flujos no permanentes,

$$\overline{\varphi(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(t). \quad (3.8)$$

En el segundo caso el promedio se calcula a partir de los valores obtenidos en un número  $N$  de mediciones del fenómeno, en las que todas las variables controladas sean idénticas.  $N$  debe ser suficientemente alto para eliminar los efectos de las fluctuaciones.

Para los casos que se van a estudiar, de flujo no permanente, parece más adecuada la expresión [46, pg. 278]

$$\overline{\varphi(t)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \varphi(\theta) d\theta, \quad (3.9)$$

donde el  $\Delta t$  tomado debe ser superior a la escala temporal de la turbulencia e inferior a la escala temporal del flujo promedio. Por ejemplo, en un estuario se puede considerar que el período de oscilación turbulenta de la velocidad es inferior a un segundo, mientras que el de la marea es de unas 12 horas. Tras realizar el promedio temporal (3.9), el flujo medio seguirá oscilando bajo los efectos de la marea. En lo sucesivo no se indicará explícitamente la dependencia del tiempo para estas magnitudes.

Teniendo en cuenta que la operación promedio temporal es una integración, resulta

$$\overline{\varphi'} = \overline{(\varphi - \overline{\varphi})} = \overline{\varphi} - \overline{(\overline{\varphi})} = 0. \quad (3.10)$$

También se pueden hallar fácilmente las siguientes relaciones [86, pg. 50]

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} &= \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s}, & \overline{\int \varphi ds} &= \int \overline{\varphi} ds, \\ \overline{\varphi + \psi} &= \overline{\varphi} + \overline{\psi}, & \overline{\varphi \psi} &= \overline{\varphi} \overline{\psi} + \overline{\varphi' \psi'}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En el caso de una magnitud escalar  $\varphi = \overline{\varphi} + \varphi'$  y otra vectorial  $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{a}} + \mathbf{a}'$ , se tiene

$$\overline{\varphi \mathbf{a}} = \overline{\varphi} \overline{\mathbf{a}} + \overline{\varphi' \mathbf{a}'}, \quad (3.12)$$

y, considerando que las operaciones divergencia y gradiente se reducen a la derivación y que el operador laplaciano equivale a la divergencia del gradiente

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla, \quad (3.13)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \cdot \mathbf{a}} &= \nabla \cdot \overline{\mathbf{a}}, & \overline{\nabla \varphi} &= \nabla \overline{\varphi}, \\ \overline{\nabla \cdot \varphi \mathbf{a}} &= \nabla \cdot \overline{\varphi \mathbf{a}} = \nabla \cdot \overline{\varphi} \overline{\mathbf{a}} + \nabla \cdot \overline{\varphi' \mathbf{a}'}, \\ \overline{\Delta \varphi} &= \nabla \cdot \nabla \overline{\varphi} = \nabla \cdot \nabla \overline{\varphi} = \nabla \cdot \nabla \overline{\varphi} = \Delta \overline{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones que se van a integrar en este trabajo son las de aguas someras, teniendo en cuenta el efecto del término turbulento. Para su deducción se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes, que gobiernan el comportamiento de un fluido viscoso en 3 dimensiones.

Los fluidos que se van a estudiar son incompresibles, es decir su densidad es independiente de la presión. En estos fluidos la masa por unidad de volumen puede variar, por ejemplo por efecto de la temperatura, pero se considera constante respecto a la posición y el tiempo.

Sea un sistema cartesiano  $x, y, z$ , con  $z$  positivo hacia arriba. Llamando  $u, v$  y  $w$  a las componentes del vector velocidad  $\mathbf{u}$ , según las direcciones  $x, y, z$ , estas ecuaciones se expresan como:

**Ecuación de continuidad**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.15)$$

**Ecuación dinámica** (conservación de la cantidad de movimiento)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (3.16)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \quad (3.17)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w. \quad (3.18)$$

El vector  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$  es la fuerza por unidad de masa;  $p$  es la presión;  $\rho$  es la densidad;  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  es la viscosidad cinemática;  $\mu$  es la viscosidad dinámica.

Sumando a cada una de las tres ecuaciones dinámicas la ecuación de continuidad multiplicada por  $u, v$  y  $w$  respectivamente y utilizando el operador  $\nabla$  para la divergencia y  $\nabla^2$  para el laplaciano, el sistema toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u\mathbf{u} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot v\mathbf{u} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot w\mathbf{u} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w. \quad (3.22)$$

### 3.4. Ecuaciones de Reynolds en 3D

Se van a obtener ahora las ecuaciones que gobiernan el movimiento en régimen turbulento de un fluido incompresible.

En las ecuaciones de Navier-Stokes los valores de las componentes de la velocidad  $(u, v, w)$  y los de la presión  $p$  dependen del tiempo. Se sustituye en (3.19)-(3.22) la velocidad y la presión por sus valores promedio más los términos de fluctuación

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p' \quad (3.23)$$

y se calcula el promedio temporal de cada ecuación, aplicando las relaciones (3.11)-(3.14). Se obtiene

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{u' \mathbf{u}'} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{v' \mathbf{u}'} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \overline{w' \mathbf{u}'} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w}. \quad (3.27)$$

Se observa que las ecuaciones resultantes poseen los mismos términos que las de partida (3.19)-(3.22) con la adición de unos nuevos, que se sitúan en el segundo miembro y se desarrollan, obteniendo así las **ecuaciones de Reynolds en 3D**:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left[ \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right], \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \left[ \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right], \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w} - \left[ \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right]. \quad (3.31)$$

Las ecuaciones (3.29)-(3.31) se pueden escribir abreviadamente, utilizando el convenio de Einstein:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u}_i \bar{\mathbf{u}} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

Los productos cruzados de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad multiplicados por la densidad tienen dimensiones de fuerza/superficie y se denominan Tensiones de Reynolds:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\overline{\rho u'^2}, & \tau_{yy} &= -\overline{\rho v'^2}, & \tau_{zz} &= -\overline{\rho w'^2}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\overline{\rho u'v'}, & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\overline{\rho u'w'}, & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\overline{\rho v'w'}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La ley de viscosidad de Newton establece que las tensiones viscosas son proporcionales a la tasa o velocidad de deformación angular de los elementos de fluido lo que, para un fluido incompresible, se expresa en notación de subíndices como

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.34)$$

Boussinesq propuso en 1877 una relación análoga entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y las tensiones de Reynolds:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.35)$$

El coeficiente de proporcionalidad  $\mu_t$  se denomina viscosidad dinámica turbulenta o de remolino y  $k$  es la energía cinética turbulenta por unidad de masa [86, pg. 67]

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}). \quad (3.36)$$

Por otra parte la energía cinética media será

$$K = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2). \quad (3.37)$$

Si se calcula el promedio temporal  $k_i$  de la energía cinética instantánea se obtiene, teniendo en cuenta (3.10),

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{1}{2} \overline{(u^2 + v^2 + w^2)} = \frac{1}{2} \left( \overline{(\bar{u} + u')^2} + \overline{(\bar{v} + v')^2} + \overline{(\bar{w} + w')^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \overline{\bar{u}^2 + u'^2 + 2\bar{u}u'} + \overline{\bar{v}^2 + v'^2 + 2\bar{v}v'} + \overline{\bar{w}^2 + w'^2 + 2\bar{w}w'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = K + k, \end{aligned} \quad (3.38)$$

es decir, la suma de las energías cinéticas media y turbulenta.

Es conveniente notar que el coeficiente  $\mu_t$  empleado en (3.35) puede en general depender de la dirección considerada, siendo realmente un tensor

de viscosidad turbulenta. En este estudio se supondrá del mismo valor para todas las direcciones del espacio.

El término  $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$  es una tensión normal y hace que la fórmula sea válida para las tensiones  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$ . En efecto, aplicando (3.35) a los casos  $i = j$  y llamando  $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$  a la viscosidad cinemática turbulenta se obtiene

$$\begin{aligned} -\overline{u'^2} &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3}k, \\ -\overline{v'^2} &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3}k, \\ -\overline{w'^2} &= \nu_t \left( 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \frac{2}{3}k, \end{aligned} \quad (3.39)$$

por lo que, sumando las tres expresiones y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (3.28), se comprueba que se verifica (3.36). De no incluir en (3.35) el término  $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$  la  $k$  resultaría nula siendo, como es, la suma de tres términos positivos. Se ha asignado así, a cada una de las tres tensiones normales de Reynolds, una tercera parte de la cantidad  $2\rho k$ . Esto supone asumir una distribución isotrópica para estas tensiones normales, lo que no se corresponde con la realidad en bastantes tipos de flujos [86, pg. 64].

Se sustituye ahora la expresión de las tensiones de Reynolds (3.35) en las ecuaciones (3.29)-(3.31). La primera de ellas toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3}k \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Reordenando y agrupando los términos del segundo miembro se obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}. \quad (3.41)$$

Operando análogamente, las otras dos ecuaciones se convierten en

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}. \quad (3.43)$$

Al ser constante  $\nu$  para cada fluido se puede escribir  $\nu \nabla^2 \bar{u}_i$  como  $\nabla \cdot \nu \nabla \bar{u}_i$  y

agrupar la viscosidad molecular con la turbulenta. Resulta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}. \quad (3.46)$$

Con el fin de simplificar las expresiones se tiene en cuenta lo siguiente:

- Los términos que contienen las derivadas parciales de  $k$  respecto a  $x, y, z$  proceden de la derivación de las tensiones normales de Reynolds. Estas tensiones actúan, como la presión, perpendicularmente a las caras del volumen de control, por lo que se incluyen en los términos que contienen las derivadas de la presión [66, pg. 11].
- El valor de la viscosidad turbulenta  $\nu_t$  es normalmente muy superior al de  $\nu$ , por lo que se considera despreciable a la segunda frente a la primera.

Tras realizar en (3.44)-(3.46) las simplificaciones mencionadas y añadiendo la ecuación de continuidad (3.28) se obtiene:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}. \quad (3.50)$$

Estas expresiones son muy similares a las ecuaciones de Navier Stokes (3.19)-(3.22) con la diferencia de que los valores instantáneos de la velocidad y la presión han sido sustituidos por sus promedios temporales, la viscosidad por la viscosidad turbulenta y se ha añadido un nuevo sumando al término fuente de las tres últimas ecuaciones. Dicho sumando desaparece haciendo la hipótesis adicional de suponer que la variación espacial de  $\nu_t$  es muy pequeña. En efecto, en (3.48),

$$\nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \approx \nu_t \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} = \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right), \quad (3.51)$$

que, aplicando la propiedad de Schwarz de las derivadas segundas cruzadas y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, se convierte en

$$\nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z \partial x} \right) = \nu_t \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.52)$$

y lo mismo sucede en las otras dos ecuaciones. En la integración que sigue no se despreciará este término.

## 3.5. Ecuaciones de Reynolds en 2D

### 3.5.1. Campo de aplicación e hipótesis realizadas

En muchos flujos existentes en la naturaleza las dimensiones horizontales son claramente predominantes. Si además la variación en la vertical de las componentes horizontales de la velocidad es pequeña y apenas existen aceleraciones verticales, con frecuencia puede describirse satisfactoriamente el flujo por medio de unas ecuaciones en dos dimensiones, resultado de integrar en la vertical las ecuaciones 3D.

Se van entonces a deducir las ecuaciones de Reynolds para dos dimensiones a partir de (3.47)-(3.50). Se toma el plano  $x, y$  horizontal y el sentido ascendente del eje  $z$  como positivo. Se estudiarán flujos en superficie libre, turbulentos y no permanentes en los que la profundidad del fluido es pequeña en relación a las dimensiones horizontales. Para ello se realizan algunas **hipótesis**:

- a) La pendiente del fondo es pequeña; esto significa que el valor del calado medido en la dirección vertical y en la dirección perpendicular al fondo es prácticamente el mismo.
- b) La curvatura de las líneas de corriente es pequeña, por lo que la distribución de presiones puede considerarse hidrostática.
- c) El movimiento principal de las partículas ocurre en planos horizontales.
- d) La distribución en la vertical de las componentes en  $x$  e  $y$  de la velocidad,  $(\bar{u}, \bar{v})$ , es prácticamente uniforme. Esto permite, al integrar en la vertical, sustituir  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  por sus valores medios.
- e) Las fuerzas de masa que actúan son la gravedad en dirección vertical y la fuerza de Coriolis, en el plano horizontal, por lo que  $\mathbf{F} = (f\bar{v}, -f\bar{u}, -g)^T$ , siendo

$$f = 2\Omega \sin \phi, \quad (3.53)$$



donde  $\Omega$  es velocidad angular de la Tierra y  $\phi$  la latitud.

- f) La aceleración vertical de las partículas se considera despreciable frente a  $g$ .
- g) La pérdida de energía por fricción en los contornos, en flujo no permanente, puede evaluarse mediante fórmulas empíricas válidas para flujo permanente, como las de Chèzy o Manning.
- h) Se considera despreciable la variación de  $\nu_t$  con la profundidad.

### 3.5.2. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad (3.47) se expresa como

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (3.54)$$

Integrándola en  $z$  entre el fondo ( $z = z_b$ ) y la superficie libre ( $z = z_s$ ) queda

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz + \bar{w}(z_s) - \bar{w}(z_b) = 0. \quad (3.55)$$

Se aplica la regla de Leibnitz a los dos primeros sumandos de (3.55)

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad (3.56)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz - \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (3.57)$$

El tercer sumando  $\bar{w}(z_s)$ , velocidad en la dirección  $z$  de los puntos de la superficie, es la derivada total de  $z_s(x, y, t)$

$$\bar{w}(z_s) = \frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y}. \quad (3.58)$$

Análogamente, teniendo en cuenta que  $\frac{\partial z_b}{\partial t} = 0$ ,  $w(z_b)$  vale

$$\bar{w}(z_b) = \frac{dz_b}{dt} = \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (3.59)$$

Los promedios verticales de  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  se denotan por  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$

$$\hat{u} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz, \quad \hat{v} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz, \quad (3.60)$$

siendo  $h = z_s - z_b$  el calado. Como la cota del fondo no varía con respecto a  $t$ , se puede escribir

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial(z_b + h)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.61)$$

Por fin, sustituyendo (3.56)-(3.59) en (3.55), teniendo en cuenta (3.60) y (3.61) y simplificando, se obtiene el **promedio en la vertical de la ecuación de continuidad**.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \widehat{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \widehat{v}}{\partial y} = 0. \quad (3.62)$$

### 3.5.3. Ecuación dinámica

Teniendo en cuenta de nuevo (3.54) y aplicando la hipótesis e), las ecuaciones (3.48)-(3.50) se escriben en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = f \bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -f \bar{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}, \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}. \quad (3.65)$$

El primer miembro de (3.65) representa la aceleración vertical del fluido,  $\frac{d\bar{w}}{dt}$ , que las hipótesis c) y f) permiten considerar despreciable. Por el mismo motivo, en el segundo miembro se desprecia el gradiente de la componente vertical de la velocidad  $\nabla \bar{w}$ , así como la derivada respecto a  $z$  del vector velocidad  $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}$ , de modo que (3.65) se convierte en

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0. \quad (3.66)$$

Se integra la ecuación anterior en  $z$ , entre la superficie libre  $z_s$  y un  $z$  genérico. Tomando como nula la presión atmosférica, resulta

$$\bar{p} = \rho g(z_s - z), \quad (3.67)$$

expresión que, derivada respecto a  $x$  e  $y$ , da

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.68)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -g \frac{\partial z_s}{\partial y}. \quad (3.69)$$

Ahora, multiplicando la ecuación de continuidad (3.54) por  $\bar{u}$ , sumándola a (3.63) y teniendo en cuenta (3.68), resulta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} = f\bar{v} - g\frac{\partial z_s}{\partial x} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}. \quad (3.70)$$

Análogamente multiplicando (3.54) por  $\bar{v}$ , sumándola a (3.64) y teniendo en cuenta (3.69), resulta

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z} = -f\bar{u} - g\frac{\partial z_s}{\partial y} + \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (3.71)$$

Se integra ahora la ecuación (3.70) en la vertical. Para ello, se aplica la regla de Leibnitz a su primer miembro, obteniendo

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right) dz = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz - \bar{u}^2(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}^2(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz - \bar{u}(z_s)\bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{u}(z_b)\bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} + \bar{u}(z_s)\bar{w}(z_s) - \bar{u}(z_b)\bar{w}(z_b), \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde el término  $\bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t}$  es nulo. Sustituyendo (3.58) y (3.59) en (3.72) y simplificando, esta ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right) dz = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Para integrar  $\bar{u}^2$  y  $\bar{u}\bar{v}$  se tiene en cuenta la hipótesis d) y se sustituye  $(\bar{u}, \bar{v})$  por sus valores promedio  $(\widehat{\bar{u}}, \widehat{\bar{v}})$  definidos en (3.60). Como la distribución de estas variables no es exactamente uniforme, los valores promedio temporal  $(\bar{u}, \bar{v})$ , se están descomponiendo en

$$\bar{u} = \widehat{\bar{u}} + \bar{u}'', \quad \bar{v} = \widehat{\bar{v}} + \bar{v}'', \quad (3.74)$$

lo que da lugar a la aparición de unos términos adicionales que se pueden considerar tensiones efectivas de un tipo distinto a las de Reynolds (3.33) [60, pg. 6.14], pero con un significado físico similar [52]. En algunos casos su

contribución puede llegar a ser considerable [1, pg. 12]. En el presente trabajo no se consideran estos términos. Una aproximación a su estudio puede verse en el anejo **11.2**.

Así pues se toma

$$\int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz = \widehat{u}^2 h, \quad \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} \bar{v} dz = \widehat{u} \widehat{v} h, \quad (3.75)$$

con lo que (3.73) queda como

$$\int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u} \bar{w})}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial(\widehat{u} h)}{\partial t} + \frac{\partial(\widehat{u}^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\widehat{u} \widehat{v} h)}{\partial y}. \quad (3.76)$$

Se integran ahora en  $z$  los dos primeros sumandos del segundo miembro de (3.70). La cota de la superficie libre no varía respecto a  $z$ , con lo que

$$\int_{z_b}^{z_s} \left( f \bar{v} - g \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) dz = f \widehat{v} h - g \frac{\partial z_s}{\partial x} h = f \widehat{v} h - gh \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (3.77)$$

Para integrar los dos sumandos restantes de (3.70) se desarrollan y reagrupan en tres términos, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left( \nabla \cdot \nu_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz &= \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz}_{D_1} + \\ &\underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] dz}_{D_2} + \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] dz}_{D_3}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Los términos  $D_1$  y  $D_2$  se calculan aplicando la regla de Leibnitz

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz - 2 \left[ \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + 2 \left[ \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) dz \\ &\quad - \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Se supone que  $\nu_t$  no varía con la profundidad (hipótesis h)) y se aproxima a  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  por sus valores promedio  $\widehat{u}$  y  $\widehat{v}$ . De este modo las expresiones entre corchetes de (3.79) coinciden, así como las de (3.80). Teniendo en cuenta que la lámina de agua es aproximadamente paralela al fondo, por lo que

$$\frac{\partial z_s}{\partial x} \approx \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_s}{\partial y} \approx \frac{\partial z_b}{\partial y}, \quad (3.81)$$

se puede escribir

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} \right), \quad (3.82)$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \left( \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \right) \right). \quad (3.83)$$

Se calcula ahora  $D_3$

$$D_3 = \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right]_{z=z_s} - \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right]_{z=z_b} \quad (3.84)$$

donde se desprecia el primer sumando de cada término (hipótesis c)). Escribiendo la viscosidad cinemática en función de la dinámica se obtiene

$$D_3 = \frac{\mu_t}{\rho} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial z}(z_s) - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial z}(z_b) \right) = \frac{1}{\rho} (\tau_{s_x} - \tau_{b_x}). \quad (3.85)$$

Los términos  $\tau_{s_x}$  y  $\tau_{b_x}$  son las componentes en la dirección  $x$  de la tensión tangencial que actúa sobre la superficie libre y el fondo respectivamente.

Así pues, la integral de los sumandos en derivadas segundas de (3.70) se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \left( \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \right) \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{s_x} - \tau_{b_x}), \quad (3.86)$$

y la ecuación (3.70), integrada en  $z$ , se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\widehat{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\widehat{u}^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(\widehat{u}\widehat{v}h)}{\partial y} &= f\widehat{v}h - gh \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \left( \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \right) \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{s_x} - \tau_{b_x}). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Procediendo de la misma manera con (3.71) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\widehat{v}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\widehat{u}\widehat{v}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\widehat{v}^2 h)}{\partial y} = & -f\widehat{u}h - gh \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \left( \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_t h \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{s_y} - \tau_{b_y}). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Se realizan ahora las siguientes modificaciones a (3.87) y (3.88):

- a) Se eliminan los símbolos  $\widehat{\phantom{x}}$ , con lo que las variables  $u$  y  $v$  representan en lo sucesivo el promedio en la vertical de la media temporal de las componentes de la velocidad.
- b) Las tensiones tangenciales en la superficie  $\tau_{s_x}$ ,  $\tau_{s_y}$ , debidas al viento, se suelen despreciar a no ser que el tamaño de la superficie sometida a la acción del viento sea muy grande. Para estos casos existen diversas expresiones [9, pg. 118] que suelen tomar la forma

$$\frac{\tau_{s_x}}{\rho} = kW^2 \cos \theta_x, \quad \frac{\tau_{s_y}}{\rho} = kW^2 \cos \theta_y, \quad (3.89)$$

siendo  $W$  la velocidad del viento,  $k$  un coeficiente empírico y  $(\theta_x, \theta_y)$  los ángulos que la dirección del viento forma con los ejes. En algún caso el exponente de  $W$  es distinto de 2 y se obtiene de forma experimental.

- c) Se denomina pendiente geométrica  $S_0$  según  $x$  o  $y$  a la derivada cambiada de signo de la cota del fondo respecto a  $x$  o  $y$ ; es decir, positiva si el fondo desciende en el sentido de las  $x, y$  crecientes y negativa en caso contrario

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}. \quad (3.90)$$

- d) Las tensiones en el fondo  $\tau_{b_x}$  y  $\tau_{b_y}$  se evalúan por medio de la fórmula de Chèzy que da, para las tensiones según  $x$  e  $y$  [18, pg. 353]

$$\tau_{b_x} = \rho g \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2}, \quad \tau_{b_y} = \rho g \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2}. \quad (3.91)$$

El coeficiente  $C$  de Chèzy depende del coeficiente de Manning  $n$  según la relación [87, pg. 665]

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n}, \quad (3.92)$$

con lo que se obtiene

$$\tau_{b_x} = \rho g \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{1/3}}, \quad \tau_{b_y} = \rho g \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{1/3}}. \quad (3.93)$$

$R_h$  es el radio hidráulico, que suele tomarse igual a  $h$  (ver 5.1.2).

e) Se define la pendiente de fricción según  $x$  o  $y$  como

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}. \quad (3.94)$$

f) Se engloba bajo el nombre de término turbulento  $S_t$  a las siguientes expresiones

$$S_{t1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right), \quad (3.95)$$

$$S_{t2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (3.96)$$

g) Se pasan al primer miembro los términos que contienen las derivadas parciales de  $h$ .

Tras aplicar estas modificaciones en (3.87) y (3.88) se obtiene el promedio en la vertical de las ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial(huv)}{\partial y} \\ = fvh + \frac{\tau_{sx}}{\rho} + gh(S_{0x} - S_{fx}) + S_{t1}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) \\ = -fuh + \frac{\tau_{sy}}{\rho} + gh(S_{0y} - S_{fy}) + S_{t2}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

### 3.6. El sistema de ecuaciones de aguas someras

Si se añade a las ecuaciones anteriores la ecuación de continuidad (3.62) y se disponen en forma matricial se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \mathbf{G}, \quad (3.99)$$

siendo el vector de variables

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

los términos  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

y el término fuente

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ fvh + \frac{\tau_{sx}}{\rho} + gh(S_{0x} - S_{fx}) + S_{t1} \\ -fuh + \frac{\tau_{sy}}{\rho} + gh(S_{0y} - S_{fy}) + S_{t2} \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

La variable  $h$  representa el calado medido verticalmente,  $u$  y  $v$  son los promedios en la vertical de las medias temporales de las componentes horizontales de la velocidad,  $f$  es el coeficiente de Coriolis (3.53) y los valores de  $\tau_s, S_0, S_f$  y  $S_t$  se encuentran en (3.89)-(3.96).

Las expresiones (3.99)-(3.102) se conocen como ecuaciones de aguas someras en forma conservativa. Con frecuencia no se tienen en cuenta los términos de Coriolis y tensión de viento, ni el término turbulento. Cuando aparece este último, toma formas distintas según los autores. Así, en [61] se emplean las expresiones (3.95)-(3.96) que se acaban de obtener y en [25] unas muy similares a estas.

La formulación utilizada en [4, 64] es

$$S_{t1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.103)$$

$$S_{t2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (3.104)$$

que resulta de no considerar el último sumando en (3.48)-(3.50). Haciendo la simplificación adicional de considerar despreciable la variación de  $\nu_t h$  respecto a  $x$  e  $y$ , se obtiene la formulación de [9, 85]

$$S_{t1} = \nu_t h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.105)$$

$$S_{t2} = \nu_t h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3.106)$$

En el capítulo 9 se comparan los resultados obtenidos con dos expresiones distintas: las (3.95)-(3.96) y las (3.103)-(3.104).







# Capítulo 4

## El modelo simplificado

### 4.1. El método de volúmenes finitos

El empleo del método de volúmenes finitos en la dinámica de fluidos computacional es relativamente reciente. Según Hirsch [35, pg. 237] fue introducido por McDonald en 1971 e independientemente por Mc Cormack y Paullay en 1972 para la resolución de las ecuaciones de Euler en 2D. En 1973 Rizzi e Inouye lo extendieron a flujos tridimensionales. Eymard *et al.* [24] atribuyen su introducción, diez años antes, a Tichonov y Samarskii para la resolución de las ecuaciones de convección difusión. En [24, pg. 9] se menciona una amplia lista de trabajos dedicados al análisis matemático del método.

En este método se suele partir de una discretización previa del dominio de cálculo en elementos, normalmente triángulos o cuadriláteros, a partir de los cuales se construye la nueva malla de celdas o volúmenes finitos. En cada uno de estos volúmenes se realiza la discretización de la forma integral de las ecuaciones, que expresan leyes de conservación y que, mediante la aplicación del teorema de la divergencia se simplifican notablemente. Las expresiones resultantes establecen la exacta conservación de propiedades relevantes del flujo en cada celda. Los términos de las ecuaciones se sustituyen por aproximaciones del tipo diferencias finitas, obteniendo ecuaciones algebraicas que se resuelven por un proceso iterativo. Se describen brevemente a continuación algunos de los tipos de volúmenes finitos más comúnmente empleados [5, 32].

#### 4.1.1. Volumen finito de tipo celda

Los volúmenes finitos de tipo celda (*cell centered*) [32, pg. 366] coinciden con las celdas de la malla inicial y los valores de las variables dependientes se almacenan en los centros de celda (centros de los cuadriláteros o baricentros

de los triángulos). Este método tiene la ventaja de utilizar la malla previa y el inconveniente de que los nodos a los que se asignan los valores medios o representativos de las variables en las celdas no coinciden con los nodos de la malla original.

### 4.1.2. Volumen finito de tipo vértice

En el caso de los volúmenes de tipo vértice (*cell vertex*) [32, pg. 368] los nodos de la malla de volúmenes finitos son los vértices de la malla inicial y en torno a cada uno de ellos, se construyen las nuevas celdas. Al revés que en el caso anterior, en éste se utilizan los vértices de la primera malla, a los que se asignan los valores de las variables en cada celda. En este método resulta más sencilla la aplicación de condiciones de contorno, pues se conoce el valor de las variables en los nodos frontera. El inconveniente estriba en que se ha de construir una malla nueva (malla dual).

### 4.1.3. Volumen finito de tipo arista

Como se describe en [83, pg. 87], se parte de una malla formada por triángulos, cada uno de los cuales se divide en tres, uniendo cada vértice con el baricentro. A continuación se unen estos subtriángulos por pares de modo que cada volumen finito está formado por los dos subtriángulos que poseen en común una arista de la malla inicial. El centro del volumen finito es el punto medio de la arista. Este método tiene la ventaja de que evita los problemas derivados del cálculo de la perpendicular a las aristas frontera en los puntos angulosos del contorno, en donde habría dos perpendiculares, pues dichos puntos nunca son nodos de la malla. Pero no se utilizan los nodos ni las celdas iniciales.

## 4.2. Descripción de los volúmenes finitos empleados

Se parte de una malla previa formada por triángulos que, por su sencillez y flexibilidad, son los más utilizados para este tipo de problemas y se procede como sigue. Dado el nodo  $I$ , se toman los baricentros de los triángulos que tienen a  $I$  como vértice común y los puntos medios de las aristas que confluyen en él. La frontera del volumen finito  $C_i$  se obtiene uniendo un baricentro de triángulo con los puntos medios de las aristas de ese triángulo que coinciden en  $I$ ; estos, con el siguiente baricentro de triángulo y así sucesivamente hasta

cerrar el polígono. Así pues, la frontera de  $C_i$ , que se denota por  $\Gamma_i$ , se compone de medianas de triángulos, como puede apreciarse en la figura 4.1.

Una variante de este método consiste en unir directamente centros de triángulo (sin pasar por el punto medio de la arista común); otra en trazar la perpendicular por cada punto medio de arista, hasta que se corte con la perpendicular por el punto medio de la arista siguiente.

Una vez construída la nueva malla de volúmenes finitos, se prescinde de la primitiva, por lo que, en lo sucesivo, al hablar de celdas se hace mención de los volúmenes finitos construídos, no de los triángulos iniciales.

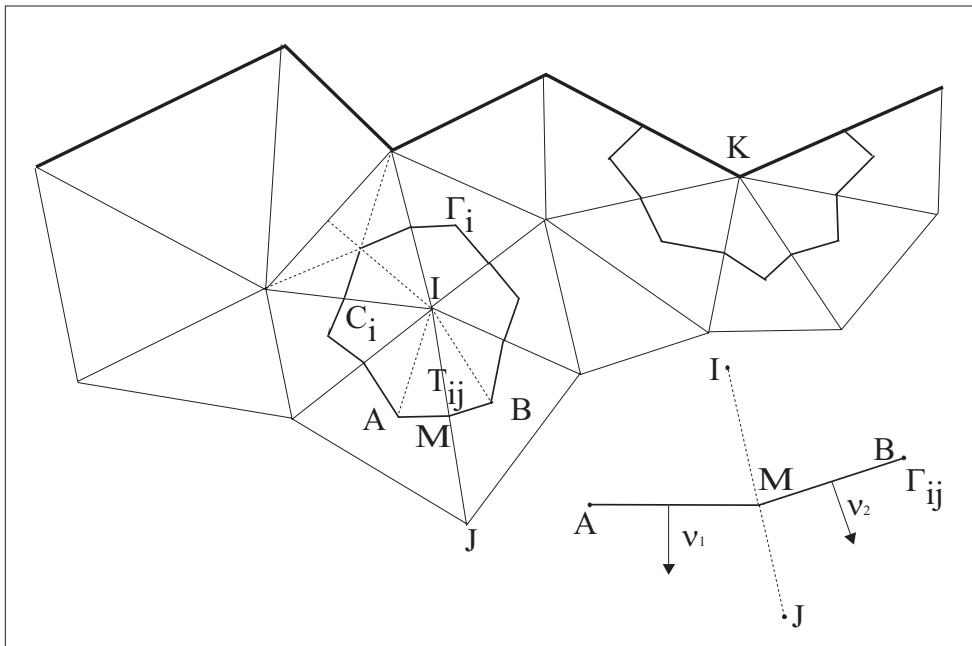


Figura 4.1: Construcción de los volúmenes finitos.

Dadas dos celdas  $C_i$  y  $C_j$ , se llama  $\Gamma_{ij}$  a la parte de frontera común a ambas.  $\Gamma_{ij}$  es la unión de los segmentos  $AM$  y  $MB$ , siendo  $A$  y  $B$  los baricentros de los triángulos de lado común  $IJ$  y  $M$  el punto medio de dicho lado. El conjunto de todos los nodos vecinos al  $I$  se denota por  $\mathcal{K}_i$ .

$\boldsymbol{\eta}_{ij}$  es el vector normal a  $\Gamma_{ij}$ , dirigido hacia el exterior de la celda  $C_i$ . Tiene distinto valor en  $AM$  y en  $MB$ .

$$\boldsymbol{\eta}_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{\nu}_1 & \text{en el segmento } AM, \\ \boldsymbol{\nu}_2 & \text{en el segmento } MB. \end{cases} \quad (4.1)$$

El módulo de  $\boldsymbol{\eta}_{ij}$  coincide con la longitud de la arista correspondiente. El vector  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}$  es el unitario de la misma dirección y sentido, cuyas componentes

se representan por  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{ij}}{\|\boldsymbol{\eta}_{ij}\|} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T. \quad (4.2)$$

Se denomina subcelda  $T_{ij}$  a la unión de los dos subtriángulos de lados  $AM$  y  $MB$  y vértice común  $I$ . Cada uno de estos subtriángulos tiene como área

$$A_{ij_1} = \frac{\|\nu_1\|d_{ij_{AM}}}{2}, \quad A_{ij_2} = \frac{\|\nu_2\|d_{ij_{MB}}}{2}, \quad (4.3)$$

donde  $d_{ij}$  representa la altura de cada uno.

### 4.3. Descripción del problema

A continuación se aplica el método de volúmenes finitos a las ecuaciones de aguas someras, cuya expresión general en forma conservativa se ha deducido en el capítulo anterior. Cuando estas ecuaciones se aplican a dominios no muy extensos no tiene apenas importancia el término de Coriolis. También suele despreciarse la influencia del viento, aunque en algunos casos, como estuarios de cierta magnitud, puede ser aconsejable su uso. Por último, no suele tomarse en consideración el término turbulento, cuyo efecto entonces se evalúa mediante el término de fricción con el fondo.

Eliminando del término fuente los sumandos mencionados, las ecuaciones (3.99)-(3.102) se reducen a

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \mathbf{G}, \quad (4.4)$$

siendo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Las pendientes geométricas, definidas en función de la cota geométrica  $z_b$  por (3.90), se van a expresar en función de  $H$ , que representa la distancia al fondo desde un nivel de referencia fijo, con sentido positivo hacia abajo. De esta

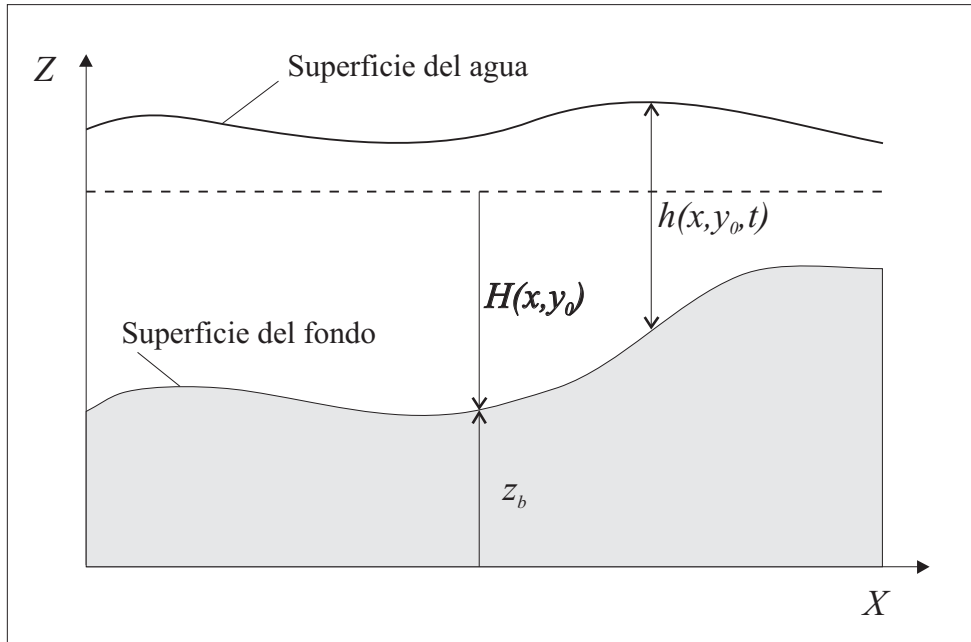


Figura 4.2: Representación de las variables  $H$  y  $h$ .

manera las pendientes resultan positivas si el fondo desciende y negativas en caso contrario.

$$S_{0x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad S_{0y} = \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (4.7)$$

Las pendientes de fricción son

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad (4.8)$$

siendo  $n$  el coeficiente de Manning,  $h$  el calado y  $u$  y  $v$  las componentes horizontales de la velocidad. Las variables conservativas  $hu$ ,  $hv$  representan los caudales unitarios, o caudales por unidad de ancho, en un canal rectangular. En la figura 4.2 se representa una sección del dominio por un plano vertical  $y = y_0$ .

## 4.4. Integración y discretización de las ecuaciones

Utilizando la notación simbólica

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{U}), \mathbf{F}_2(\mathbf{U})), \quad (4.9)$$

el sistema de ecuaciones (4.4) se puede escribir en forma más compacta

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = \mathbf{G}, \quad (4.10)$$

siendo  $\nabla$  el operador  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$  y  $\nabla \cdot \mathcal{F}$  la divergencia de  $\mathcal{F}$ .

El dominio de cálculo se considera dividido en un conjunto de volúmenes finitos  $C_i$ , del tipo definido en 4.2 y se calcula la integral de superficie en cada uno de ellos, obteniendo

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA + \iint_{C_i} \nabla \cdot \mathcal{F} dA = \iint_{C_i} \mathbf{G} dA. \quad (4.11)$$

Se aplica el teorema de la divergencia al segundo sumando (término de flujo), convirtiendo la integral de superficie en otra de línea sobre  $\Gamma_i$ , frontera de la celda  $C_i$

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA + \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \iint_{C_i} \mathbf{G} dA, \quad (4.12)$$

Si se pasa el segundo sumando al otro lado y se introduce el signo menos en la integral, queda

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA = \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot (-\tilde{\boldsymbol{\eta}}) dl + \iint_{C_i} \mathbf{G} dA. \quad (4.13)$$

Puede interpretarse esta ecuación diciendo que en un dominio arbitrario, en particular en cada uno de los volúmenes finitos, la tasa de variación de las variables conservativas contenidas en  $\mathbf{U}$  viene dada por la forma integral del flujo del vector  $\mathcal{F}$  normal a la frontera del dominio (cambiado de signo) más la “cantidad” de  $\mathbf{U}$  generada en el dominio [60, pg. 6.20]. Es decir, la variación de  $\mathbf{U}$  en el tiempo se debe al flujo neto de  $\mathcal{F}$  hacia dentro de la celda más la variación producida debido al término fuente.

#### 4.4.1. Discretización de la derivada temporal

La solución de la ecuación (4.4) se aproxima por medio de unos valores  $\mathbf{U}_i^n$ , constantes para cada celda  $C_i$  y cada instante de tiempo  $t_n$ , que se asignan al nodo  $I$  correspondiente a la celda.

La derivada temporal se discretiza mediante el método de Euler hacia adelante

$$\left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right|_{C_i, t_n} \approx \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t}. \quad (4.14)$$



Entonces la ecuación (4.12) se convierte en

$$\iint_{C_i} \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} dA + \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \iint_{C_i} \mathbf{G} dA. \quad (4.15)$$

En el primer sumando, tanto  $\mathbf{U}_i^{n+1}$  y  $\mathbf{U}_i^n$  como  $\Delta t$  toman valores constantes en la celda, por lo que pueden salir de la integral, resultando

$$\iint_{C_i} \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} dA = \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i. \quad (4.16)$$

#### 4.4.2. Integración del término de flujo y el término fuente

En el segundo sumando de (4.15) se descompone la integral sobre el contorno de la celda en un sumatorio de integrales a lo largo de cada una de las aristas  $\Gamma_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$

$$\int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl. \quad (4.17)$$

La integral de superficie del término fuente se descompone a su vez en una suma de integrales sobre las subceldas  $T_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$

$$\iint_{C_i} \mathbf{G} dA = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA. \quad (4.18)$$

Así, (4.15) se convierte en

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA. \quad (4.19)$$

#### 4.4.3. Definición del flujo discreto

Se va a expresar ahora el sumatorio (4.17) en función de los valores de las variables en el nodo  $I$  y los  $N_j$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$ , utilizando un esquema descentrado para asegurar la estabilidad (ver 2.4).

El producto escalar de  $\mathcal{F}$  por  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  se llama flujo en 2D a través de un segmento de longitud unidad y vale

$$\mathbf{Z} = \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\alpha} \mathbf{F}_1 + \tilde{\beta} \mathbf{F}_2, \quad (4.20)$$

siendo  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  las componentes del vector unitario normal a la arista definido en (4.2).

Para discretizar el flujo existen propuestas de diferentes autores, algunas de las cuales están recogidas en [33] y en [44, pg. 124]. En este caso se utiliza el  $Q$ -esquema de Van Leer [82], en la forma propuesta en [7, 83].

Los  $Q$ -esquemas son una familia de esquemas descentrados *upwind*, en los que el flujo numérico se obtiene de la siguiente forma

$$\phi(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{U}_i^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) + \mathbf{Z}(\mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}(\mathbf{U}_Q^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})| (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n), \quad (4.21)$$

donde  $\mathbf{U}_i^n$  y  $\mathbf{U}_j^n$  representan los valores del vector de variables en los puntos  $I$  y  $J$ ;  $\mathbf{Q}$  es la matriz jacobiana del flujo

$$\mathbf{Q} = \frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{U}} = \tilde{\alpha} \frac{d\mathbf{F}_1}{d\mathbf{U}} + \tilde{\beta} \frac{d\mathbf{F}_2}{d\mathbf{U}}; \quad (4.22)$$

la matriz  $|\mathbf{Q}|$  se obtiene como

$$|\mathbf{Q}| = \mathbf{X} |\boldsymbol{\Lambda}| \mathbf{X}^{-1}, \quad (4.23)$$

siendo  $|\boldsymbol{\Lambda}|$  la matriz diagonal de los valores absolutos de los autovalores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{X}$  la matriz cuyas columnas son los autovectores de  $\mathbf{Q}$ ; en el  $Q$ -esquema de Van Leer,  $|\mathbf{Q}|$  se evalúa en el estado intermedio

$$\mathbf{U}_Q^n = \frac{\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_j^n}{2}. \quad (4.24)$$

Entonces, la expresión (4.21) que discretiza el flujo en 2D en un punto intermedio entre  $I$  y  $J$  se obtiene como la semisuma de los flujos en ambos puntos más un término de descentrado.

Obsérvese que, en (4.22), las derivadas de  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  respecto al vector de variables  $\mathbf{U}$  son los factores que aparecen al escribir la ecuación (4.4) en la forma no conservativa

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{F}_1}{d\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{d\mathbf{F}_2}{d\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{G}. \quad (4.25)$$

Es importante observar que las ecuaciones de aguas someras constituyen un sistema estrictamente hiperbólico (ver **2.7**); es decir, que la matriz jacobiana del flujo tiene tres autovalores distintos y tres autovectores linealmente

independientes, por lo que siempre existirá  $\mathbf{X}^{-1}$ . En efecto

$$\frac{d\mathbf{F}_1}{d\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\frac{d\mathbf{F}_2}{d\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

por lo que, aplicando (4.22), resulta

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\alpha}(-u^2 + gh) + \tilde{\beta}(-uv) & 2\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v & \tilde{\beta}u \\ \tilde{\alpha}(-uv) + \tilde{\beta}(-v^2 + gh) & \tilde{\alpha}v & \tilde{\alpha}u + 2\tilde{\beta}v \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Llamando  $c$  a la celeridad de la onda

$$c = \sqrt{gh}, \quad (4.29)$$

los autovalores de la matriz jacobiana son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v, \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + c, \\ \lambda_3 &= \lambda_1 - c, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con lo que se pueden calcular las matrices

$$|\mathbf{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3| \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\tilde{\beta}c & u + \tilde{\alpha}c & u - \tilde{\alpha}c \\ \tilde{\alpha}c & v + \tilde{\beta}c & v - \tilde{\beta}c \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 2\tilde{\beta}u - 2\tilde{\alpha}v & -2\tilde{\beta} & 2\tilde{\alpha} \\ c - \tilde{\alpha}u - \tilde{\beta}v & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ c + \tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v & -\tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Así pues, el segundo miembro de (4.17) se discretiza como

$$\sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} \, dl \approx \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n, \quad (4.34)$$

siendo  $\phi_{ij}^n$  el flujo unitario discreto

$$\phi_{ij}^n = \frac{(\tilde{\alpha}\mathbf{F}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{F}_2)_i^n + (\tilde{\alpha}\mathbf{F}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{F}_2)_j^n}{2} - \frac{1}{2}(\mathbf{X}|\Lambda|\mathbf{X}^{-1})_{U_Q^n}(\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n). \quad (4.35)$$

#### 4.4.4. Regularización de autovalores

Si alguno de los autovalores (4.30) de  $\mathbf{Q}$  se anula, el término de descentrado, que es el que garantiza que no se produzcan oscilaciones, disminuye considerablemente. Para evitar este problema se utiliza para los valores absolutos de los autovalores la regularización parabólica de Harten [34]

$$|\lambda|_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{(|\lambda|)^2}{\varepsilon} + \varepsilon \right), & \text{si } |\lambda| < \varepsilon, \\ |\lambda|, & \text{si } |\lambda| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (4.36)$$

donde  $\varepsilon$  es un pequeño parámetro, que puede elegirse en cada caso. Con esta regularización, si el valor de  $|\lambda|$  es superior a  $\varepsilon$  no se modifica. De lo contrario  $|\lambda|$  alcanza un valor mínimo  $|\lambda|_\varepsilon = \varepsilon/2$ . Puede verse una comparación de resultados, usando o no la regularización, en [83, pg. 62].

#### 4.4.5. Definición de la fuente discreta

La conveniencia del descentrado del término fuente ha sido analizada por Vázquez Cendón [83]. En el trabajo citado se estudia la discretización del término fuente en las ecuaciones de aguas someras en 1D, en problemas con sección transversal constante (rectangular) y profundidad variable, concluyendo con claridad a favor del descentrado de la parte del término fuente que contiene la pendiente geométrica. La autora propone, para el caso 2D, una extensión de la expresión descentrada 1D, comprobando que da buenos resultados. En un trabajo posterior [84] se descentra, en el caso 1D, también la parte de fricción del término fuente. Por otra parte, en [10] se trata la fricción de modo centrado. En el presente trabajo se han probado ambas opciones, obteniendo resultados muy similares, por lo que se ha optado por descentrar la parte del término fuente que contiene la pendiente geométrica y calcular la pendiente de fricción en el centro de cada celda.

De acuerdo con lo anterior, la fuente discreta bidimensional en cada subcelda  $T_{ij}$  se define como

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{X}(\mathbf{I} - |\Lambda|\Lambda^{-1})\mathbf{X}^{-1}\widehat{\mathbf{G}}_0 + \widehat{\mathbf{G}}_f, \quad (4.37)$$

donde  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}^{-1}$ ,  $|\Lambda|$  y  $\Lambda^{-1}$  dependen de  $(\mathbf{U}_Q^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})$ ,

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}), \quad (4.38)$$

$$\widehat{\mathbf{G}}_0 = \widehat{\mathbf{G}}_0(N_i, N_j, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) \quad (4.39)$$

y

$$\widehat{\mathbf{G}}_f = \widehat{\mathbf{G}}_f(\mathbf{U}_i^n). \quad (4.40)$$

Las matrices  $|\boldsymbol{\Lambda}|$ ,  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}^{-1}$  vienen dadas respectivamente por (4.31), (4.32) y (4.33).  $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$  vale

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

$\widehat{\mathbf{G}}_0$  aproxima la parte del término fuente que contiene la pendiente geométrica

$$\widehat{\mathbf{G}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \frac{H_j - H_i}{d_{ij}} \tilde{\alpha} \\ g \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \frac{H_j - H_i}{d_{ij}} \tilde{\beta} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

y  $\widehat{\mathbf{G}}_f$  aproxima la parte del término fuente que contiene la fricción, evaluada en el centro de cada celda

$$\widehat{\mathbf{G}}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_i^n (-S_{fx})_i^n \\ gh_i^n (-S_{fy})_i^n \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  y  $d_{ij}$  toman los valores definidos por las expresiones (4.2) y (4.3) y las pendientes de fricción vienen dadas por (4.8). El sumatorio de la expresión (4.18) se expresa entonces en función de la fuente discreta como

$$\sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} dA \approx \sum_{j \in \mathcal{K}_i} A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n, \quad (4.44)$$

donde  $A_{ij}$  toma las expresiones dadas en (4.3) para cada uno de los subtriángulos que componen la subcelda  $T_{ij}$  y  $\boldsymbol{\psi}_{ij}^n$  se calcula a partir de (4.37).

#### 4.4.6. Discretización de las condiciones de contorno

Tanto para la discretización del término de flujo en el borde de la celda como para la del término fuente en cada subcelda, se utilizan los valores de

las variables en el nodo  $I$  y en el nodo vecino  $J$ . En el caso de los nodos que forman parte de la frontera, de cada uno de los cuales parten dos aristas, no existen nodos vecinos al otro lado de la arista (figura 4.1). El sistema que se sigue es suponer -para estas aristas- que el nodo vecino es el mismo nodo  $I$ , lo cual equivale a no descentrar el flujo (pues el término de descentrado se anula). Por otro lado, uno de los factores de cada sumando de la fuente discreta es el área del subtriángulo correspondiente. Como las aristas tienen área nula, parece lógico no considerar aportaciones de la fuente en las aristas frontera.

#### 4.4.7. Obtención del paso temporal

Existen distintas expresiones para el cálculo del paso temporal que asegure la estabilidad.

Para el caso unidimensional, tomando un número de Courant (CFL) igual a 1, la condición utilizada en [36, pg. 283] es

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x)_i}{\max(|u| + c)_i}, \quad (4.45)$$

siendo  $(\Delta x)_i$  el ancho de celda,  $u$  la velocidad y  $c$  la celeridad.

Para el caso 2D y una malla cuadrangular estructurada, en [1, pg. 233] se propone

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{D_{ij}}{2(\sqrt{u^2 + v^2} + c)_{ij}} \right), \quad (4.46)$$

siendo  $D_{ij}$  las distancias entre el nodo  $I$  y sus cuatro vecinos.

En el presente trabajo se utiliza la expresión (4.46), donde el subíndice  $j$  representa a todos los nodos vecinos al nodo  $I$ . En casos de fuerte pendiente se producen inestabilidades, lo que ha obligado al uso de un coeficiente corrector de 0.8, obtenido por tanteo.

### 4.5. Algoritmo

Se ha obtenido, pues, una discretización hacia adelante de la derivada temporal y otras dos de los términos flujo y fuente, que se evalúan en el instante  $t_n$ . De esta manera (4.19) pasa a tomar la forma

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n, \quad (4.47)$$

de donde

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{A_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{K}_i} A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n - \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n \right). \quad (4.48)$$

La expresión anterior proporciona un método iterativo explícito en tiempo que permite calcular el valor del vector de variables  $\mathbf{U}$  en cada nodo  $I$  y en cada instante, a partir de los valores de las variables en el instante anterior, en el mismo nodo  $I$  y en los  $N_j$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$  que lo circundan.





# Capítulo 5

## Validación del modelo simplificado

### 5.1. Planteamiento general

Existen gran cantidad de problemas unidimensionales que poseen solución exacta y han sido objeto de múltiples comparaciones. Por ello se realiza la validación del modelo hidrodinámico simplificado en dos fases. En primer lugar se analizan los resultados obtenidos en algunos casos en los que, por la simetría del dominio y de las condiciones de contorno impuestas, el comportamiento del fluido pueda considerarse casi unidimensional. En segundo lugar se describen diversos ejemplos en 2D, algunos de los cuales se comparan con resultados experimentales.

#### 5.1.1. Tipos de condiciones de contorno

Las condiciones de contorno generales que se emplean habitualmente para el flujo en un canal son de tipo Dirichlet, es decir se fijan los valores de algunas de las variables en ciertos puntos.

- Sección aguas arriba.
  - En régimen lento: caudales.
  - En régimen rápido: caudales y calado.
- Sección aguas abajo.
  - En régimen lento: calado.
  - En régimen rápido: ninguna.

- Paredes laterales: En los canales donde se trata de simular un flujo unidimensional se impone la condición de deslizamiento (*slip condition*), es decir, se anula la componente de la velocidad perpendicular a la pared, impidiendo así que el fluido la atraviese. Esto significa considerar la sección suficientemente ancha como para despreciar la fricción en las paredes. La condición de contorno en flujos bidimensionales se trata en el apartado siguiente.

### 5.1.2. Condición de contorno en la pared de un canal

En flujos bidimensionales el efecto de las paredes del canal no es despreciable. Para tenerlo en cuenta se va a utilizar, para las celdas del contorno, un valor del radio hidráulico distinto del empleado para las celdas interiores.

En un flujo unidimensional, la pendiente de fricción se calcula, en función de la velocidad  $v$ , por la fórmula de Manning

$$S_f = \frac{n^2 v^2}{R_h^{4/3}}. \quad (5.1)$$

El radio hidráulico  $R_h$  se obtiene como cociente entre el área de la sección transversal del canal y el perímetro mojado. Si la sección transversal es rectangular resulta

$$R_h = \frac{A}{B + 2h}, \quad (5.2)$$

siendo  $A$  la sección,  $B$  el ancho del canal y  $h$  el calado. Si se desprecia la fricción en las paredes o se considera el valor del calado muy inferior a la anchura del canal,  $R_h$  vale aproximadamente  $h$ .

En un problema bidimensional se debe considerar el valor de  $R_h$  elemento a elemento [8, pg. 52]. Descomponiendo la sección en  $n$  elementos (figura 5.1), resulta

$$R_{hi} = \frac{A_i}{b_i} = h_i \quad (5.3)$$

para los elementos interiores y

$$R_{h1} = \frac{A_1}{b_1 + h}, \quad R_{hn} = \frac{A_n}{b_n + h} \quad (5.4)$$

para los de los extremos.

En el modelo que se está considerando las celdas son irregulares, lo que dificulta la elección del ancho  $B_i$ . Se toma entonces, como valor de  $R_h$  en cada una, el cociente entre volumen de fluido y área mojada. Para celdas rectangulares, con dos lados paralelos a los cajeros del canal, el valor de  $R_h$

obtenido por ambos métodos coincide, tanto en celdas interiores (5.3) como en las de pared (5.4). Con celdas irregulares (figura 5.2), el volumen de fluido es el del prisma de base la celda y el área mojada es la suma de la de la celda y la lateral (rayada). De este modo, en las celdas interiores el radio hidráulico vale  $h$  y, en las situadas en la pared,

$$R_h = \frac{S_B h}{S_B + S_L} = \frac{h}{1 + \frac{S_L}{S_B}}, \quad (5.5)$$

siendo  $S_B$  el área de la celda y  $S_L$  la lateral. Se disminuye así el radio hidráulico según la importancia relativa de la superficie lateral respecto a la de la celda, incrementando de este modo el término de fricción  $S_f$ . En las anteriores consideraciones se ha supuesto que el coeficiente de rozamiento es el mismo para fondo y paredes. En [10, pg. 141] se tiene en cuenta el efecto de las paredes utilizando para ellas un coeficiente de rozamiento distinto, si el caso lo requiere.

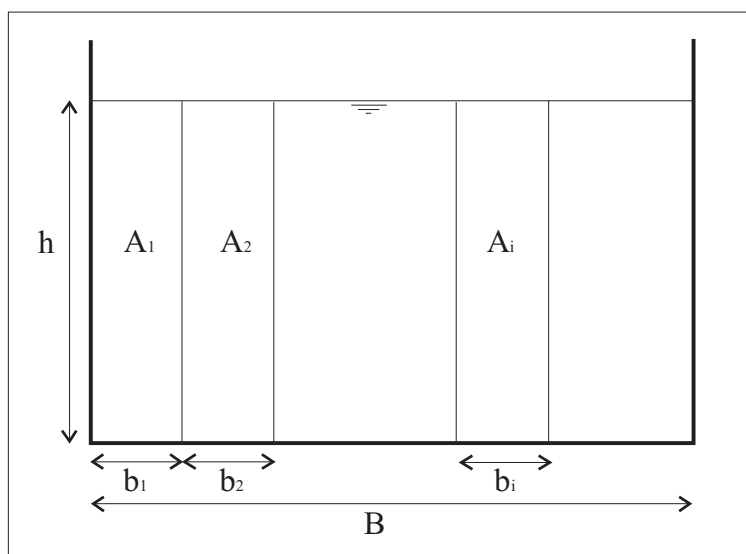


Figura 5.1: Sección de un canal rectangular de paredes verticales.

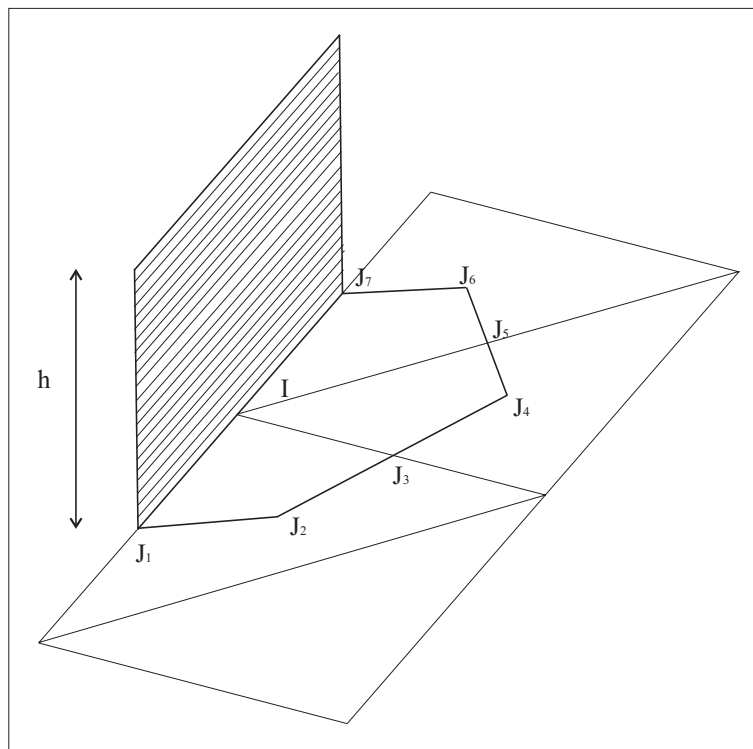


Figura 5.2: Superficie mojada lateral en una celda de pared.

## 5.2. Problemas unidimensionales

En todos ellos se ha elegido como dominio un canal recto de sección rectangular con una malla simétrica. Las condiciones de contorno impuestas son también simétricas respecto al eje del canal. Se representan los calados a lo largo de una sección longitudinal.

### 5.2.1. Fondo irregular con líquido en reposo

El objetivo de este caso es comprobar la eficacia de la discretización descentrada de la pendiente geométrica (4.4.5) que se ha realizado. El dominio de cálculo es un recinto rectangular de  $1 \times 7 \text{ m}^2$  y profundidad variable. Las secciones transversales de la superficie del fondo son rectas horizontales. Durante el proceso no entra ni sale fluido del recinto. Se considera un coeficiente de rozamiento nulo.

Considerando el dominio de cálculo como un tramo de canal, las condiciones de contorno son:

- Aguas arriba (izquierda): caudales unitarios nulos,  $hu = hv = 0$ .
- Aguas abajo: calado constante  $h_{cc} = 4 \text{ m}$ .
- Paredes laterales: condición de deslizamiento.

Como condiciones iniciales se toma:

- Velocidad nula en todos los puntos (fluido en reposo).
- Calado más cota del fondo igual a  $4 \text{ m}$ . (superficie libre horizontal).

Las figuras 5.3 y 5.4 corresponden a una discretización del término fuente con descentrado de la pendiente geométrica. Se observa que las condiciones iniciales se mantienen inalteradas. En cambio, en las figuras 5.5 y 5.6, debido al inadecuado tratamiento de la pendiente la superficie no se mantiene horizontal ni en reposo.

Se ha resuelto este caso también con una única condición de contorno de deslizamiento en todo el perímetro del recinto, sin fijar el calado en la sección aguas abajo (condición de contorno insuficiente para un canal). Los resultados que se obtienen son los mismos de las figuras 5.3 y 5.4, siempre y cuando se descentre la pendiente geométrica del modo indicado.

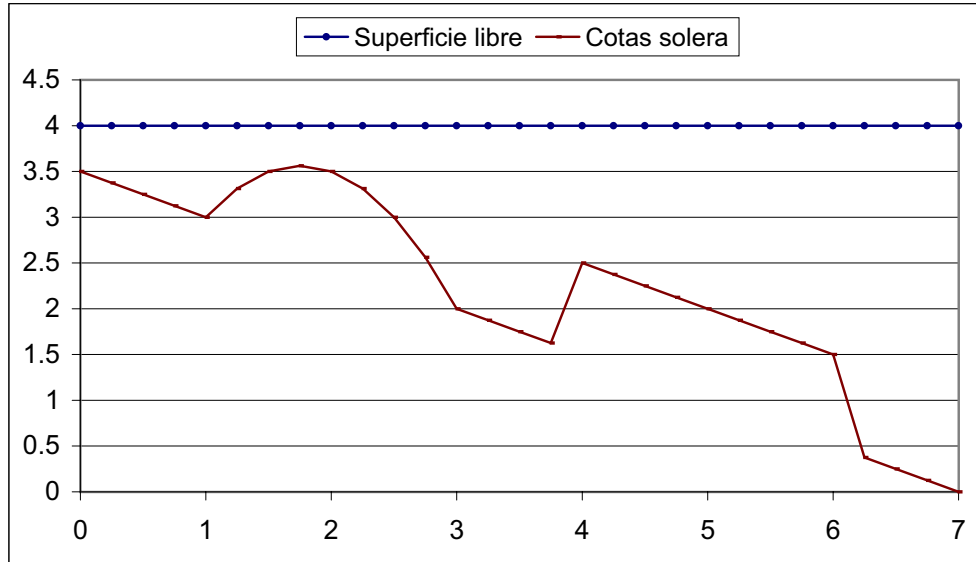


Figura 5.3: Fondo irregular. Calados.

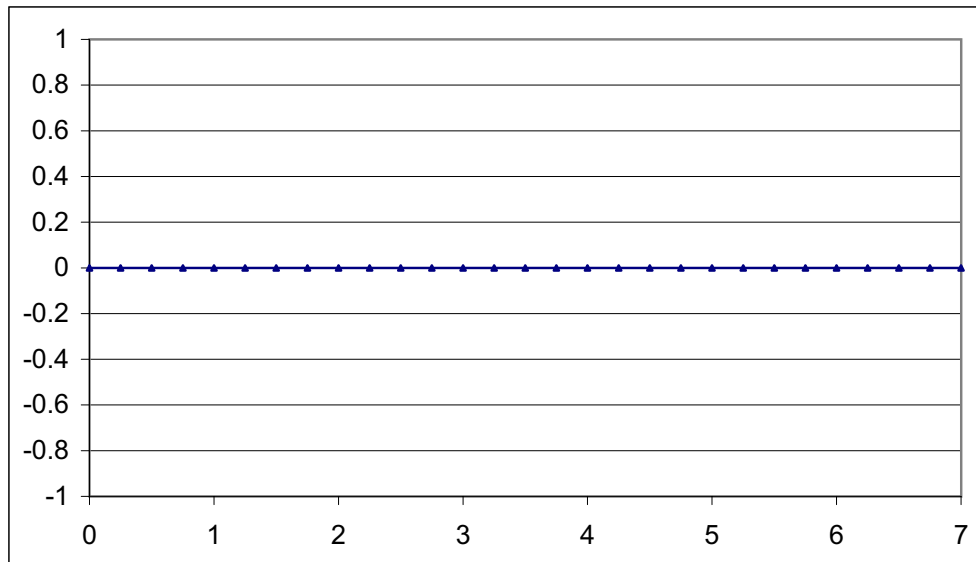


Figura 5.4: Fondo irregular. Velocidades.

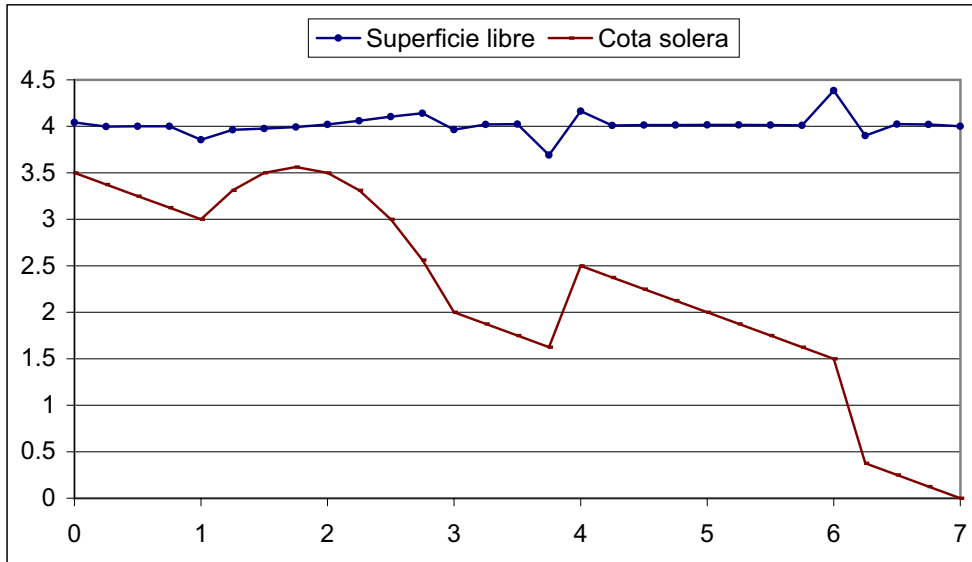


Figura 5.5: Calados sin descentrado de la pendiente.

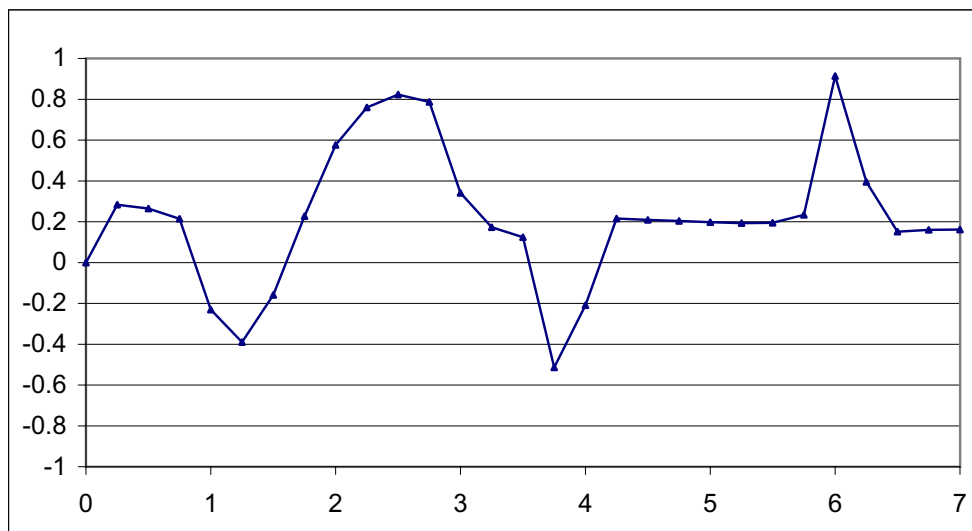


Figura 5.6: Velocidades sin descentrado de la pendiente.

### 5.2.2. Canal recto con pendiente y rozamiento

Se pretende a continuación comprobar que el modelo interpreta adecuadamente la fricción del fondo, dada por la fórmula de Manning, en el caso de canales rectos de pendiente constante. Los cálculos se realizan para un canal de 3 m de anchura por 1000 m de longitud. La malla está formada por triángulos rectángulos cuyos catetos tienen 1 m de longitud, con un total de 3003 nodos. El caudal unitario de entrada es  $q = 4 \text{ m}^2/\text{s}$ , con lo que el calado crítico vale:

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = 1.18 \text{ m}. \quad (5.6)$$

En las paredes del canal se ha aplicado la condición de deslizamiento. Se simula un régimen lento y otro rápido.

- a) Régimen lento: La pendiente vale  $S_0 = 0.001$  y el coeficiente de Manning  $n = 0.015$ , correspondiente a hormigón [19, pg. 109]. El calado normal es

$$y_n = \frac{n^{0.6} q^{0.6}}{S_0^{0.3}} = 1.47 \text{ m}, \quad (5.7)$$

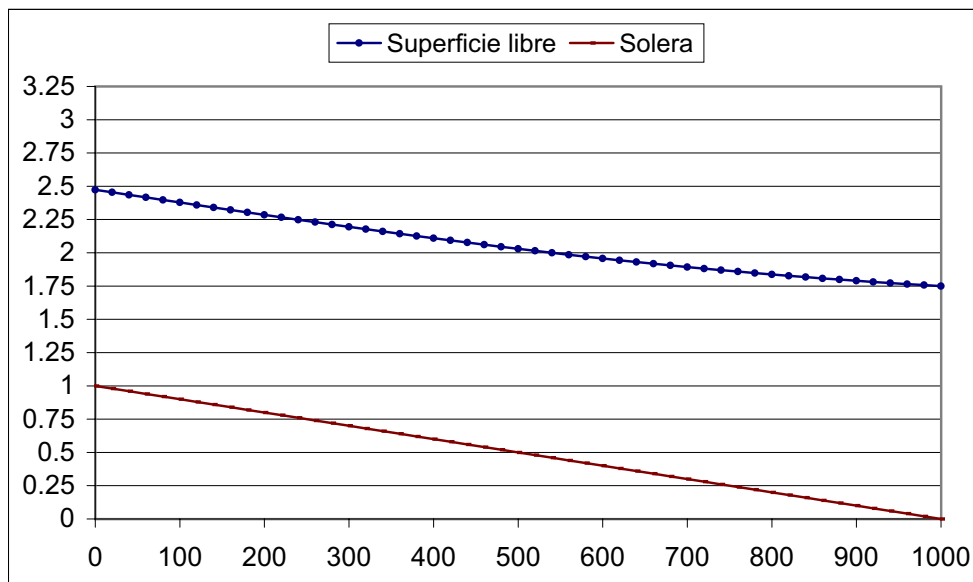
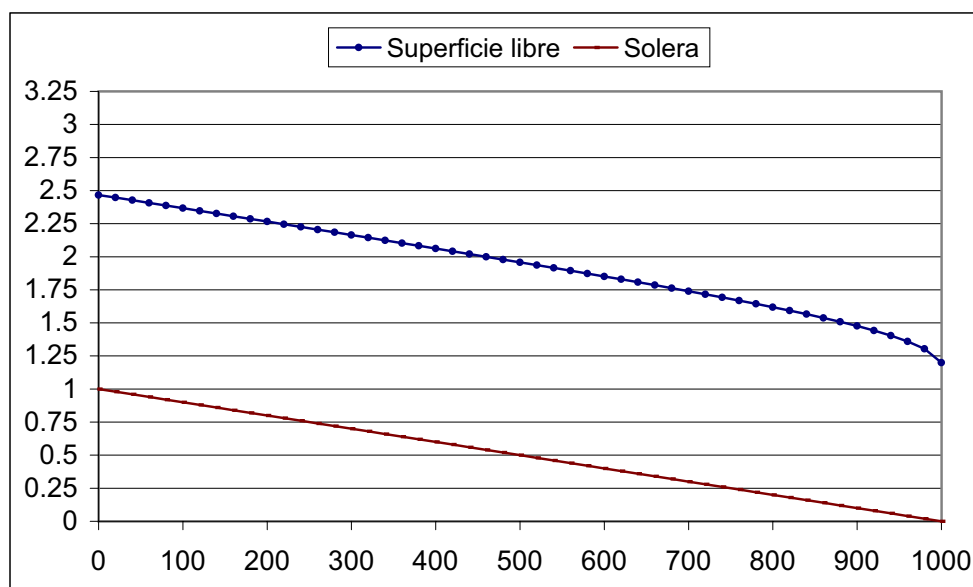
que resulta mayor que  $y_c$ . Al tratarse de un régimen lento se impone el caudal en la sección de entrada y el calado en la de salida. Se resuelven dos casos: el primero con un calado impuesto de 1.75 m, superior a  $y_n$ ; en el segundo el calado impuesto ha sido 1.20 m, inferior a  $y_n$ . En ambos casos las condiciones iniciales son caudal nulo y calado constante igual al fijado por la condición de contorno. Resultan dos curvas de remanso tipo M1 y M2 que pueden verse en las figuras 5.7 y 5.8. En ambos casos el calado se acerca gradualmente hasta su valor normal.

- b) Régimen rápido: Los valores elegidos son  $S_0 = 0.002$  y  $n = 0.01$  que corresponde a vidrio. En este caso, el calado normal resulta

$$y_n = \frac{n^{0.6} q^{0.6}}{S_0^{0.3}} = 0.94 \text{ m}, \quad (5.8)$$

valor menor que el crítico. Todas las condiciones de contorno se imponen en la sección de entrada; en el primer caso se fija un calado de 1.15 m, superior a  $y_n$  y en el segundo de 0.70 m, inferior. Las condiciones iniciales son caudal en todos los puntos igual al fijado en la entrada y calado constante igual al fijado por la condición de contorno. Las dos curvas de remanso obtenidas son del tipo S2 y S3 (figuras 5.9 y 5.10). También en estos dos casos el calado se acerca gradualmente hasta su valor normal.



Figura 5.7: Curva de remanso M1. Calado aguas abajo  $h > h_n$ .Figura 5.8: Curva de remanso M2. Calado aguas abajo  $h < h_n$ .

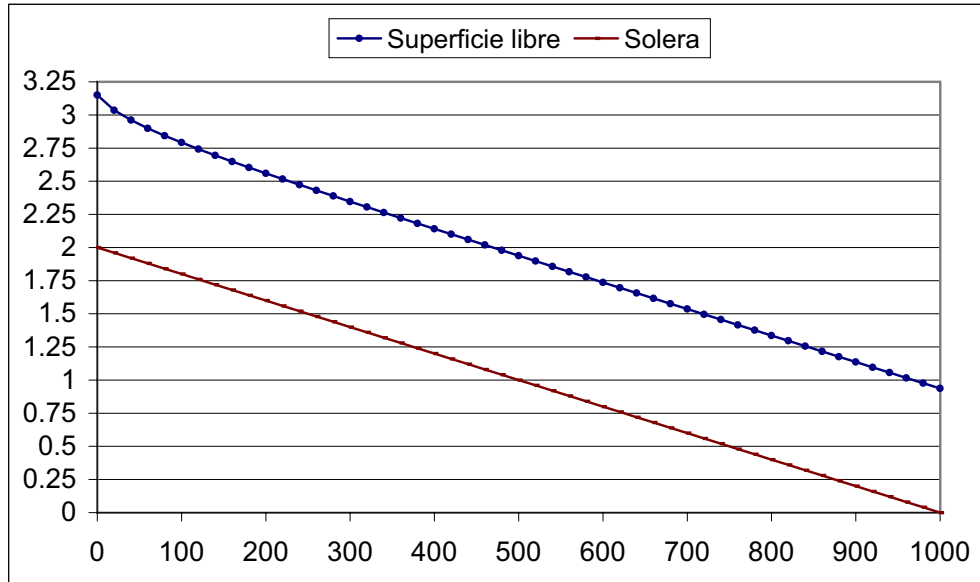


Figura 5.9: Curva de remanso S2. Calado aguas arriba  $h > h_n$ .

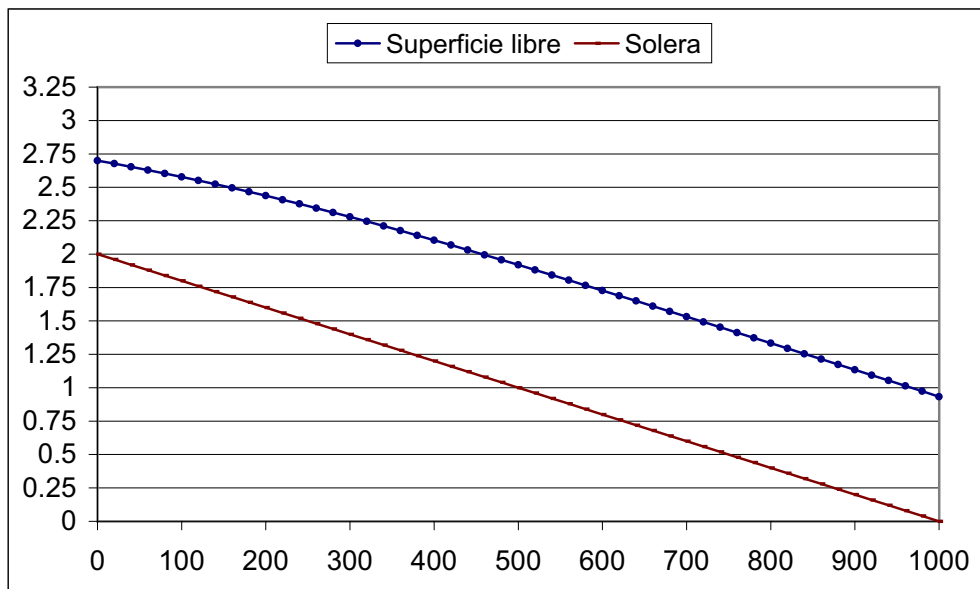


Figura 5.10: Curva de remanso S3. Calado aguas arriba  $h < h_n$ .

### 5.2.3. Canal con obstáculo en el fondo. Cambio de régimen

Se pretende ahora mostrar el funcionamiento del modelo cuando las condiciones producen un cambio de régimen. Para ello se estudia el flujo sobre un obstáculo en régimen permanente. Se considera un canal de 25 m de largo por 1 m de ancho, con un obstáculo de sección parabólica en el fondo. La malla está formada por triángulos rectángulos de catetos de longitud 0.25 m, lo que arroja un total de 505 nodos. Las cotas del fondo vienen dadas por

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{si } 8 < x < 12, \\ 0 & \text{en el resto del dominio.} \end{cases} \quad (5.9)$$

El coeficiente de Manning considerado vale  $n = 0.01$ . En las paredes del canal se aplica la condición de deslizamiento.

Se analizan tres casos:

- Flujo subcrítico. El caudal unitario vale  $q = 4.42 \text{ m}^2/\text{s}$  y el calado fijado aguas abajo 2 m. El régimen es lento en todo el canal. En consecuencia debe producirse una disminución de calados al pasar el fluido por encima del obstáculo [18, pg. 35]. El resultado se representa en la figura 5.11.
- Flujo transcrito con resalto hidráulico. El caudal unitario vale  $q = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$  y el calado aguas abajo 0.33 m. Debido al obstáculo se produce un cambio de régimen -de lento a rápido- sobre éste; a continuación, debido al calado -superior al crítico- impuesto aguas abajo, se produce un segundo cambio de régimen, de rápido a lento, por medio de un resalto hidráulico. El resultado puede verse en la figura 5.12.
- Flujo transcrito sin resalto hidráulico. El caudal unitario vale  $q = 1.53 \text{ m}^2/\text{s}$  y el calado aguas abajo se fija en 0.66 m, sólo mientras el régimen es lento. Como en el caso anterior, el movimiento del fluido comienza en régimen lento. En un determinado momento cambia el régimen al pasar por encima del obstáculo. Al eliminarse la condición de calado aguas abajo el fluido no recupera el régimen lento. El resultado se muestra en la figura 5.13.

Las condiciones iniciales son las mismas en los tres casos: caudal nulo y superficie libre horizontal correspondiente al calado fijado aguas abajo.

Los resultados obtenidos en los dos primeros casos coinciden con los de [84]. En el tercero, en cambio, la superficie libre tras el paso del obstáculo no resulta horizontal debido a que se ha tomado para el coeficiente de Manning un valor no nulo. Por ello la curva de remanso que se obtiene es del tipo H3, con calados crecientes [17, pg. 159].

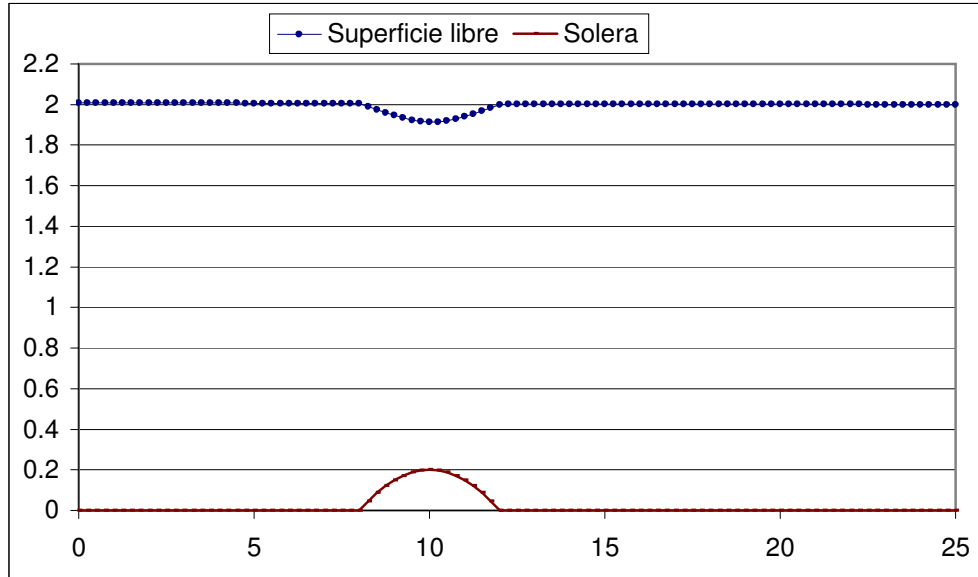


Figura 5.11: Paso sobre obstáculo en régimen lento.

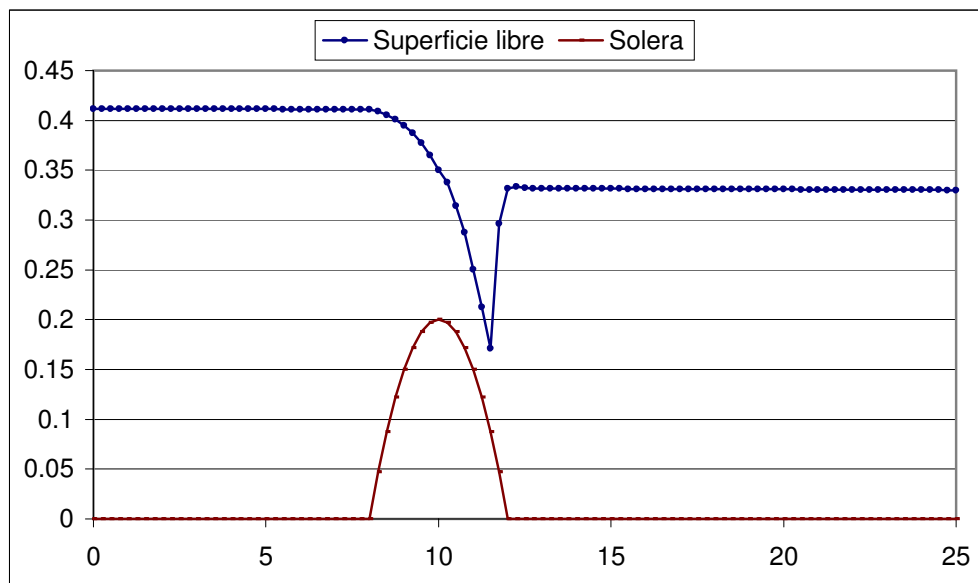


Figura 5.12: Cambio de régimen con resalto hidráulico.

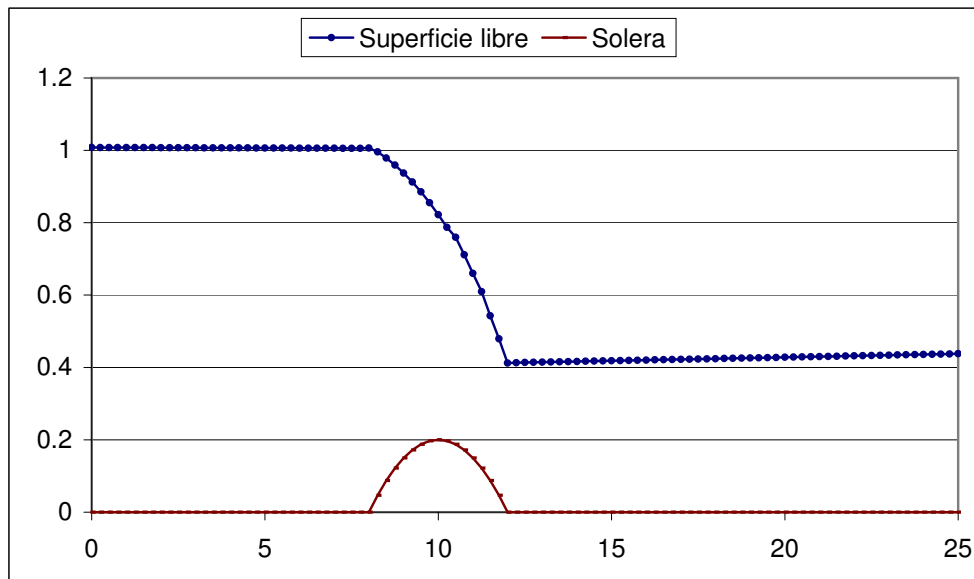


Figura 5.13: Cambio de régimen sin resalto hidráulico.

#### 5.2.4. Rotura de presa

En esta sección se muestra la capacidad del modelo de simular el avance de un frente de onda por medio del llamado test de rotura de presa. Este es un ejemplo de aplicación muy frecuente en la literatura. Se parte de un fluido en reposo con dos calados distintos a ambos lados de una compuerta imaginaria. En el instante  $t = 0$  se elimina la compuerta y se permite al fluido evolucionar libremente, observando el avance del frente de onda producido. Se impone la condición de deslizamiento en todo el contorno.

El recinto elegido es un canal de  $4 \times 200 \text{ m}^2$ . Los triángulos rectángulos que forman la malla tienen los catetos de  $1 \text{ m}$  de longitud con un total de 1005 nodos. El fondo es plano y el rozamiento se considera nulo. La compuerta se encuentra en el punto medio del canal. El cálculo se realiza con fondo mojado y seco, es decir, con las condiciones iniciales siguientes:

- Fondo mojado
  - Calado aguas arriba de la presa:  $H_1 = 1 \text{ m}$ .
  - Calado aguas abajo de la presa:  $H_0 = 0.1 \text{ m}$ .
- Fondo seco
  - Calado aguas arriba de la presa:  $H_1 = 1 \text{ m}$ .
  - Calado aguas abajo de la presa:  $H_0 = 0.0 \text{ m}$ .

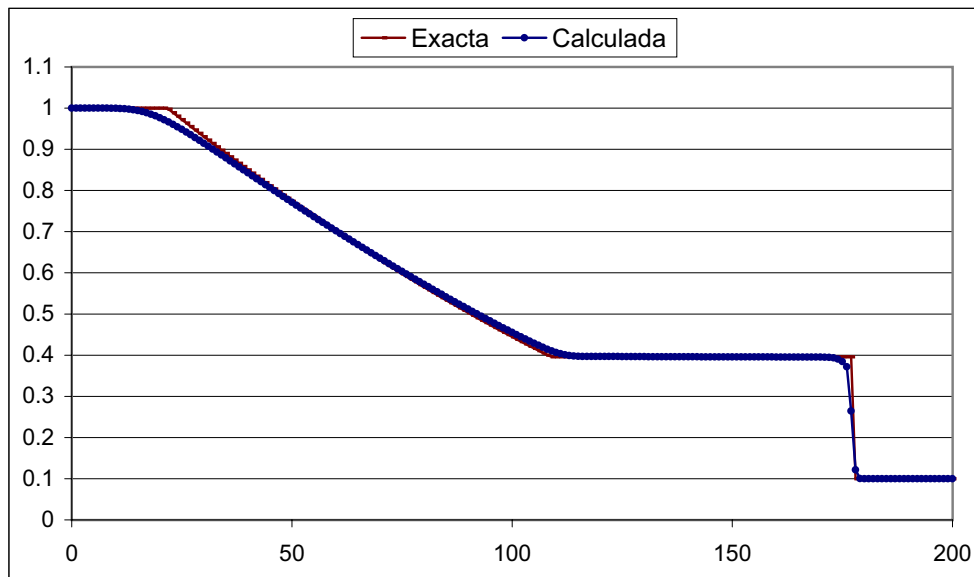
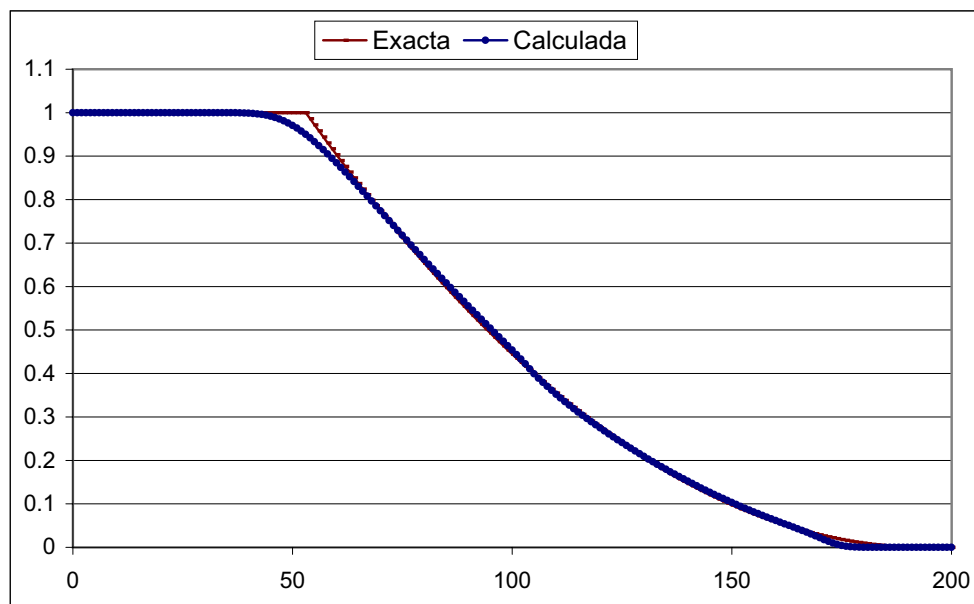
En el primer caso se representan los calados en el instante  $t = 25 \text{ s}$ . Se observa en la figura 5.14 la “captura” por parte del modelo de la discontinuidad que supone el frente. En el segundo problema, con fondo seco, se representan en la figura 5.15 los calados en el instante  $t = 15 \text{ s}$ .

En ambos casos el resultado se aproxima bastante bien a la solución exacta para 1D, obtenida de [80]. Las soluciones analíticas pueden verse en [83, pg. 60] y la obtención de las mismas en [76, pgs. 308 y 333]. Existe una comparación de resultados del problema con fondo mojado en [13].

### 5.2.5. Rotura de presa con reflexión

Para terminar con los problemas unidimensionales, se estudia otro caso de rotura de presa en un tramo de canal de  $1 \times 50 \text{ m}^2$ , también con fondo plano y rozamiento nulo. Los catetos de los triángulos de la malla miden  $0.25 \text{ m}$  con un total de 1005 nodos. Se trata, pues, de un recinto a escala  $1/4$  del anterior y, como en ese caso, la compuerta se encuentra en el punto medio del canal. Las condiciones de contorno aplicadas son: de deslizamiento en las paredes laterales y de caudal unitario nulo en las secciones inicial y final del canal.

Una vez eliminada la compuerta, la onda comienza a desplazarse sobre fondo seco, pero ahora se le permite evolucionar indefinidamente. Tras alcanzar el límite del recinto tiene lugar una reflexión y el frente comienza a trasladarse en sentido contrario, ahora sobre fondo mojado. Este vaivén se repite una y otra vez disminuyendo en cada ciclo la altura del frente. Se considera que numéricamente se ha alcanzado el estado estacionario cuando la diferencia en valor absoluto entre los valores de las variables  $h, u$  y  $v$  en todo el dominio, en dos iteraciones consecutivas, no excede de  $10^{-6}$ . Esta condición no se cumple hasta los 7477 segundos, si bien a partir de los 3140 segundos la representación de la superficie libre es una recta horizontal, con la escala utilizada en la figura 5.17.

Figura 5.14: Rotura de presa sobre fondo mojado.  $t = 25$  s.Figura 5.15: Rotura de presa sobre fondo seco.  $t = 15$  s.

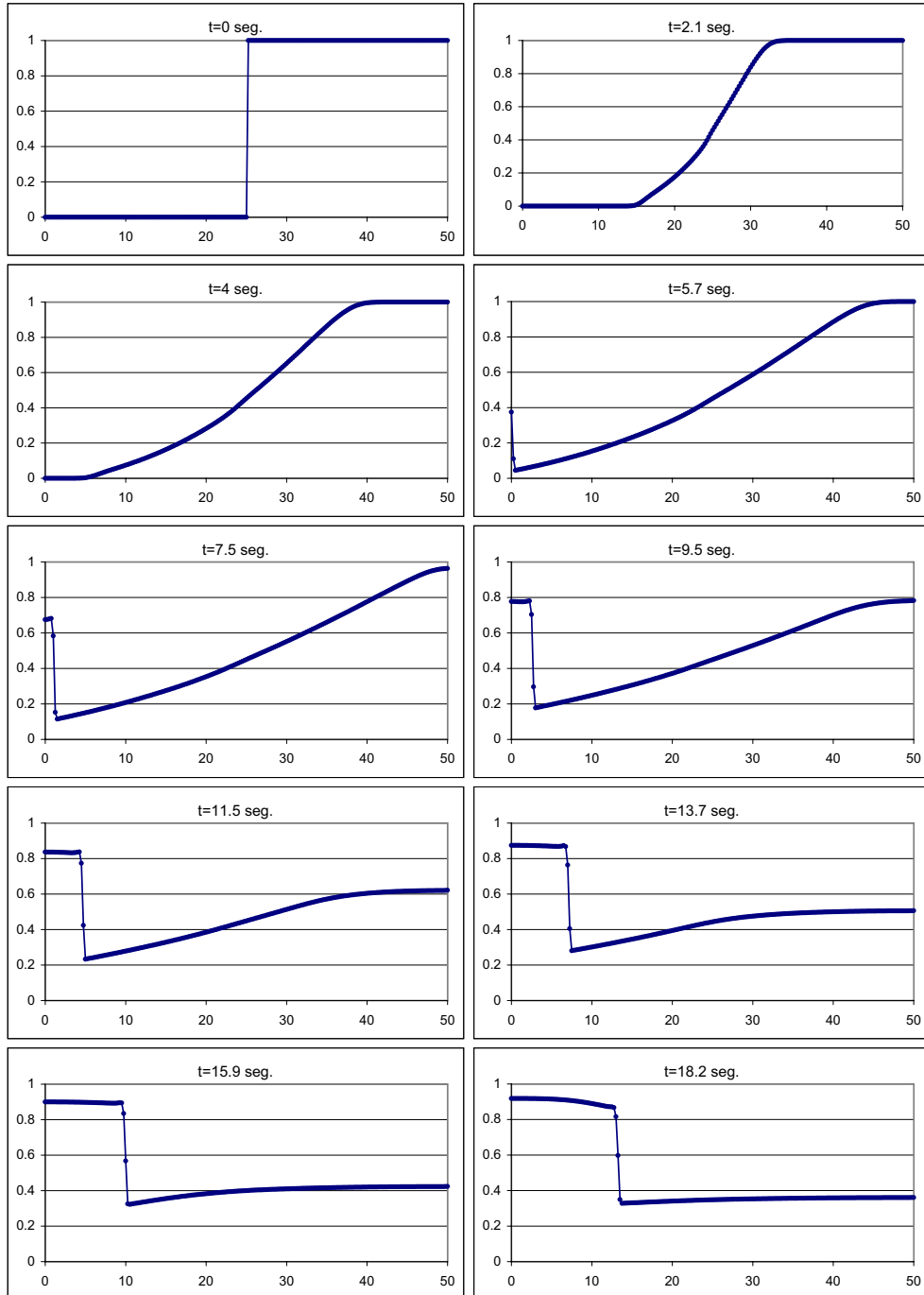


Figura 5.16: Rotura de presa con reflexión 1.



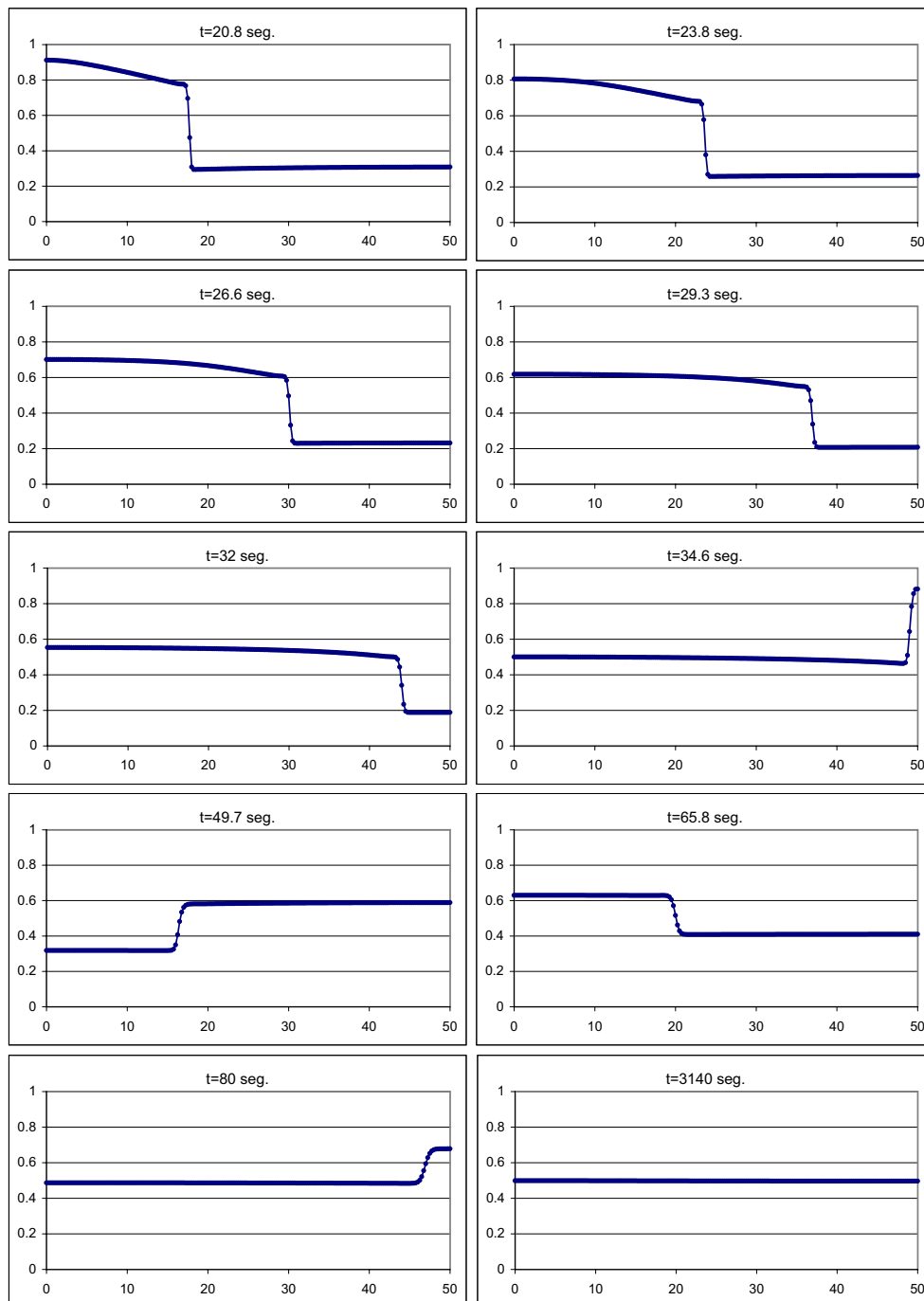


Figura 5.17: Rotura de presa con reflexión 2.

## 5.3. Problemas bidimensionales

### 5.3.1. Decantador con salida múltiple

El ejemplo resuelto simula un canal de  $0.5\text{ m}$  de ancho por unos  $3.5\text{ m}$  de largo que, tras una curva, se divide en tres ramas con el fin de suministrar agua a tres decantadores, que se numeran 1, 2 y 3 en sentido horario. En cada una de las tres salidas existe un escalón en el suelo de  $0.123\text{ m}$  de alto. Este canal se construyó en el laboratorio de Hidráulica de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de A Coruña para obtener resultados experimentales y constituye una reproducción a escala del que se encuentra en la central térmica de As Pontes. La malla de triángulos utilizada, generada por un mallador comercial [9], posee 3423 nodos. Los triángulos tienen unos  $3\text{ cm}$  de lado por término medio.

Los datos del problema son un caudal de entrada de  $42.4\text{ l/s}$  y un calado fijado en las tres salidas de  $0.1\text{ m}$ . Las condiciones iniciales en todos los puntos son líquido en reposo y calado inicial fijado por la condición de contorno aguas abajo (es decir,  $0.223\text{ m}$  para los puntos situados antes del escalón y  $0.10\text{ m}$  para los puntos situados después). El régimen permanente se alcanza para  $t = 40\text{ s}$ .

Con el fin de validar la expresión propuesta en **5.1.2** para el radio hidráulico, que tiene en cuenta la fricción en las paredes del canal, se consideran tres condiciones de contorno en las paredes laterales:

- a) No deslizamiento: Velocidad nula en los nodos del contorno.
- b) Deslizamiento: Se anula la componente de la velocidad perpendicular al contorno.
- c) Rozamiento: Velocidad perpendicular al contorno nula y cálculo del radio hidráulico en los nodos del contorno según la expresión (5.5).

Con respecto a la condición a) hay que decir que responde estrictamente a la realidad física del problema, pues las partículas en contacto con la pared son detenidas por ésta, transmitiendo el efecto de frenado a las partículas contiguas. Sin embargo, para que esta condición de velocidad nula en la pared no distorsione excesivamente el campo de velocidades, se debería disponer de una malla muy fina, lo que haría muy costoso el problema desde el punto de vista computacional.

Una vez obtenido el campo de velocidades y calados en las tres condiciones de pared mencionadas, se calculan los caudales que salen por cada decantador. Los resultados, junto con las medidas de laboratorio, se exponen en la Tabla 5.1. También se reflejan -para cada caso- la suma de los caudales

Tabla 5.1: Comparación de condiciones de pared. Caudales en  $l/s$ .

|            | Caudales medidos | Caudales calculados |               |            |
|------------|------------------|---------------------|---------------|------------|
|            |                  | No deslizam.        | Deslizamiento | Rozamiento |
| Decant. 1  | 13.27            | 16.24               | 13.51         | 13.66      |
| Decant. 2  | 14.84            | 15.14               | 14.98         | 15.08      |
| Decant. 3  | 14.24            | 10.83               | 13.25         | 13.69      |
| Suma $Q_i$ | 42.35            | 42.21               | 41.74         | 42.43      |
| $\sigma$   | 0.0              | 2.616               | 0.594         | 0.413      |

de los tres decantadores y la desviación  $\sigma$  de los valores calculados respecto a los experimentales

$$\sigma = \sqrt{\sum_{n=1}^3 \frac{(Q_{ci} - Q_{ei})^2}{3}}. \quad (5.10)$$

Se puede apreciar que los valores obtenidos con la hipótesis c) son los que mejor se ajustan a los experimentales.

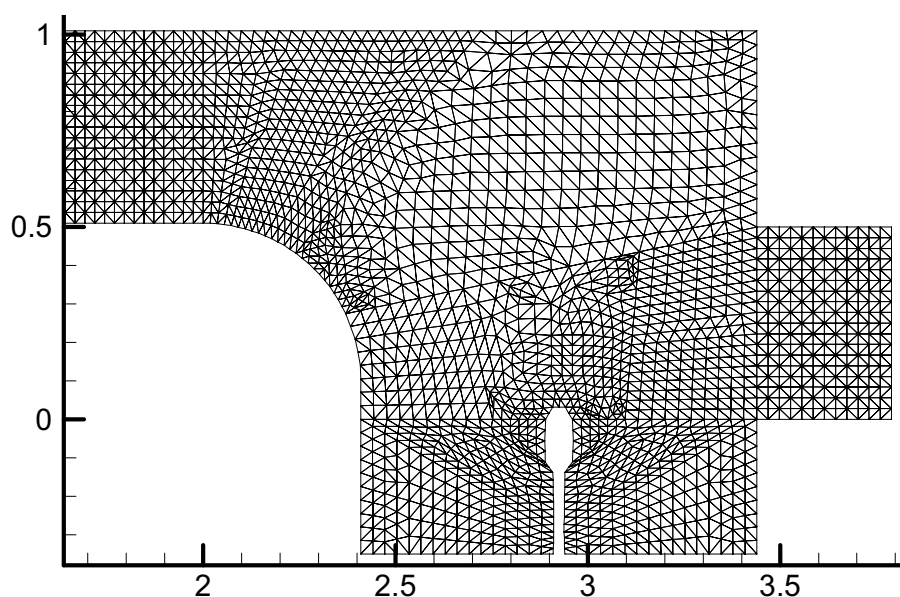


Figura 5.18: Canal de As Pontes. Malla utilizada.

En la figura 5.18 puede verse la malla de triángulos utilizada (eliminando parte de la zona recta del canal) y en la 5.19 el campo de velocidades resultante. En la figura 5.20 se amplía una parte del dominio.

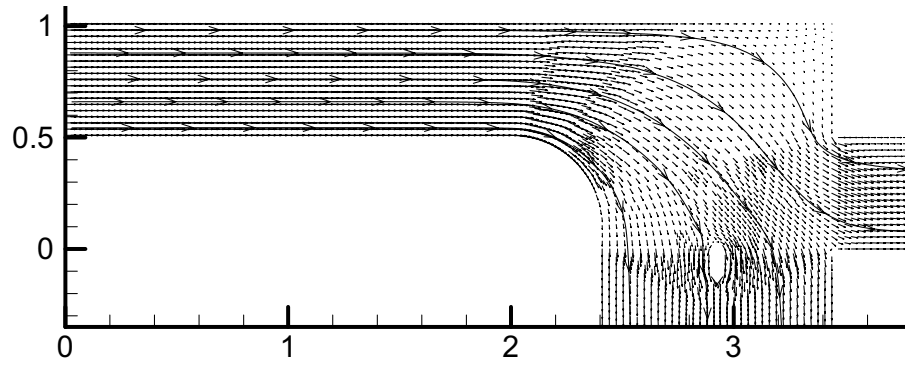


Figura 5.19: Canal de As Pontes. Campo de velocidades.

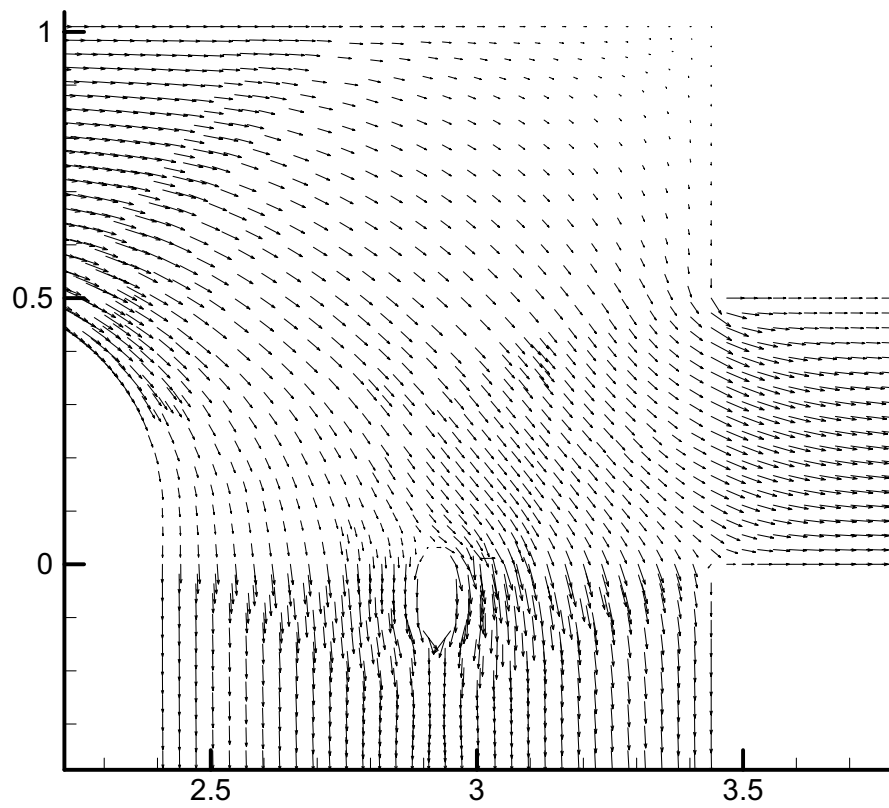


Figura 5.20: Canal de As Pontes. Ampliación del campo de velocidades.

La figura 5.21 representa las velocidades en  $m/s$  en una sección transversal, a  $0.51 m$  de la entrada. Como consecuencia de la condición impuesta, la velocidad adopta un perfil aparentemente parabólico, si bien los valores en los bordes son sólo ligeramente inferiores a los del centro de la sección. Por último, en la figura 5.22 se muestran los calados sobre el escalón en la sección longitudinal central del decantador 1. Se observa que el calado sobre el escalón queda bien resuelto, a pesar de lo brusco del salto.

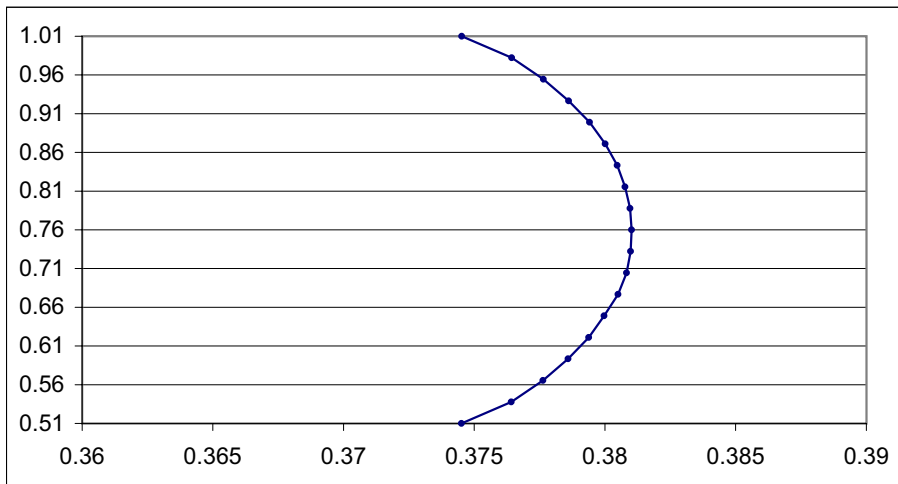


Figura 5.21: Canal de As Pontes. Velocidades en la sección  $x = 0.51 m$ .

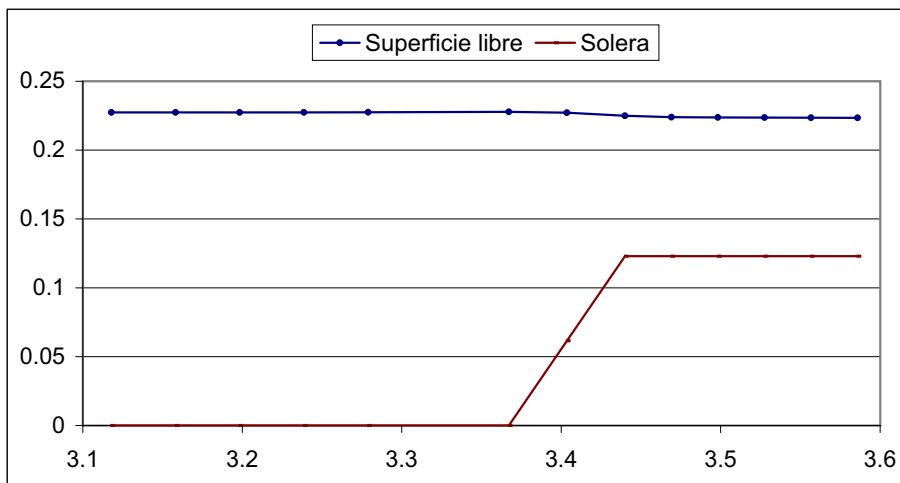


Figura 5.22: Canal de As Pontes. Calados sobre el escalón. Decantador 1.

### 5.3.2. Rotura de presa parcial asimétrica

Se considera de nuevo el caso de rotura de presa, esta vez con un problema marcadamente bidimensional. El recinto es ahora cuadrado, dividido en dos partes por medio de una pared. Como en el caso resuelto en [18, pg. 370] la brecha en la pared es parcial y asimétrica. El dominio tiene unas dimensiones de  $200 \times 200 \text{ m}^2$  con nodos cada  $5 \text{ m}$ , con un total de 1656 nodos de cálculo. El rozamiento en el suelo se considera nulo y la condición en todo el contorno es de deslizamiento.

Se resuelven dos casos con las siguientes condiciones iniciales de calado:

- Calado aguas arriba  $H_1 = 10 \text{ m}$  y aguas abajo  $H_0 = 5 \text{ m}$ .
- Calado aguas arriba  $H_1 = 5 \text{ m}$  y aguas abajo  $H_0 = 0 \text{ m}$ .

En las dos hipótesis consideradas se obtienen buenos resultados. En la figura 5.23 se aprecia un frente de onda que, tras un tiempo de  $t = 7.1 \text{ s}$  alcanza el borde derecho del contorno. En la figura 5.24 se representa el campo de velocidades. El frente de onda de la figura 5.25 es claramente distinto del anterior, debido a la condición de suelo seco. Por último (figura 5.26) se muestra la malla utilizada en ambos casos.

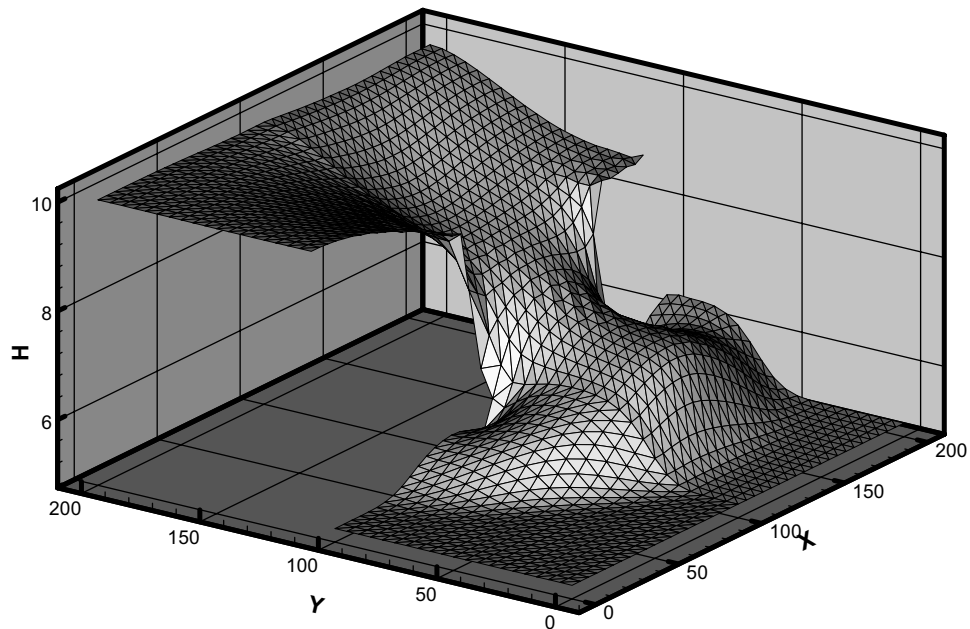


Figura 5.23: Rotura de presa.  $H_1/H_0 = 2$ .  $t = 7.1 \text{ s}$ .

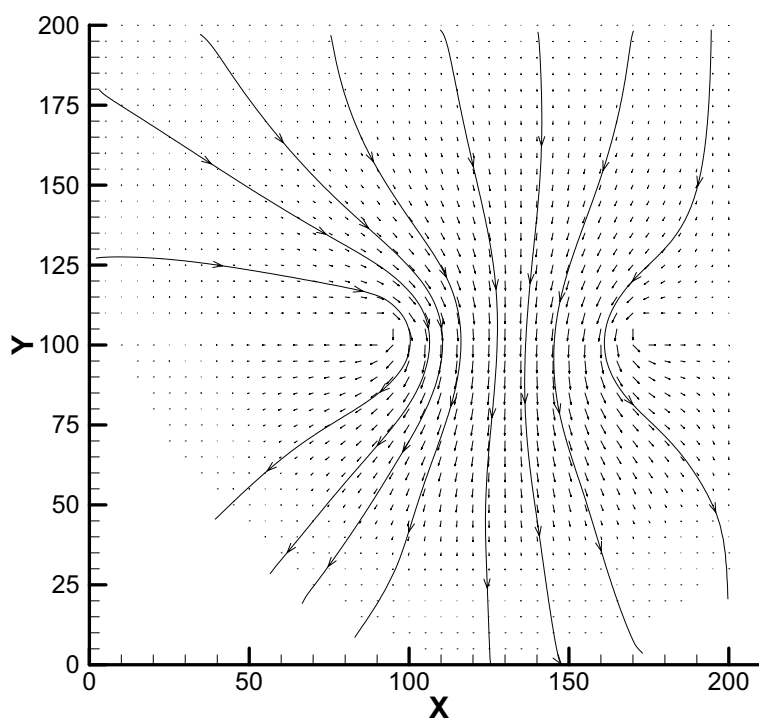


Figura 5.24: Rotura de presa.  $H_1/H_0 = 2$ . Velocidades en  $t = 7.1$  s.

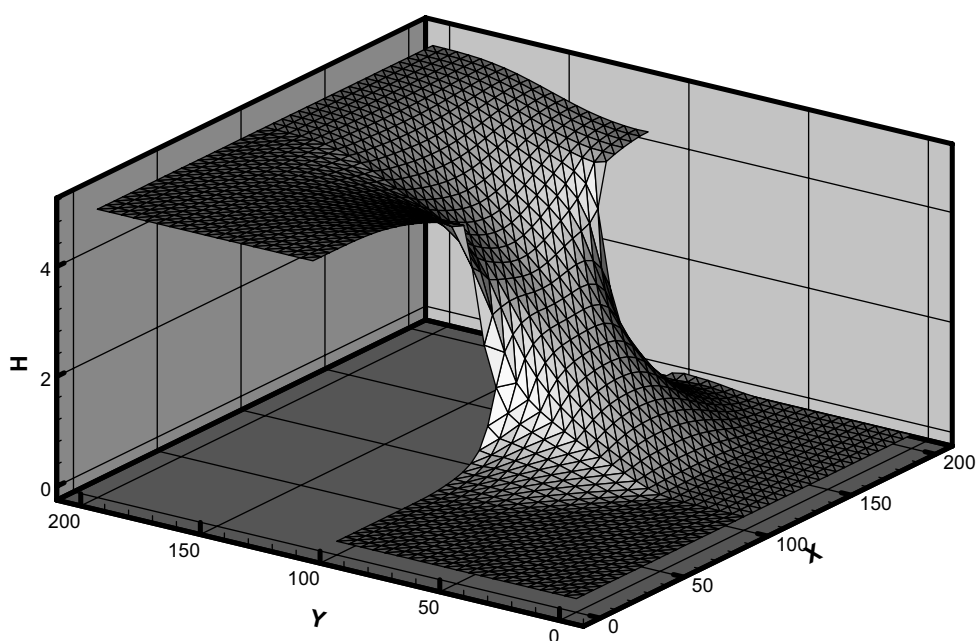


Figura 5.25: Rotura de presa.  $H_0 = 0$ .  $t = 7.1$  s.

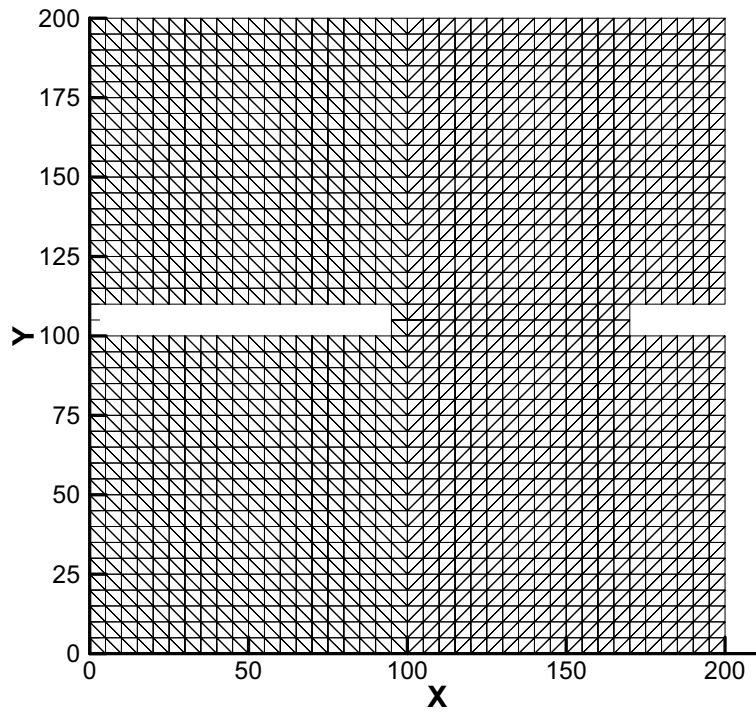


Figura 5.26: Rotura de presa. Malla utilizada.

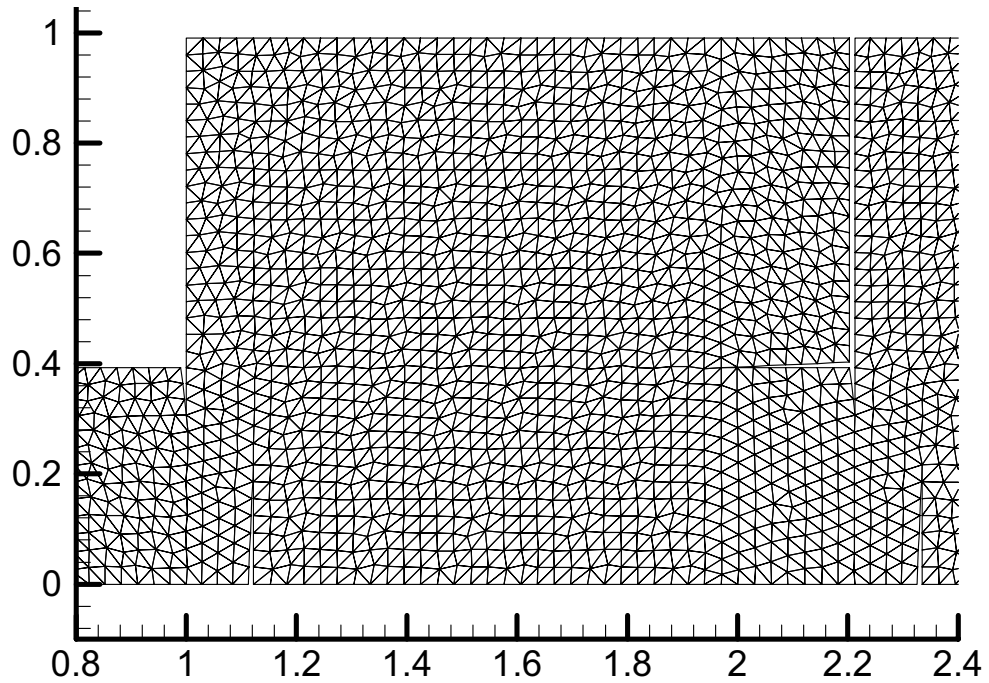


Figura 5.27: Escala de peces. Malla utilizada.



### 5.3.3. Escala de peces

Una presa, por pequeña que sea, representa una barrera para el libre movimiento de los peces por el cauce de un río, lo cual tiene particular importancia en el caso de las especies que necesitan remontar la corriente para desovar. Para solucionar este problema suelen disponerse escalas de peces lateralmente en los azudes. La pendiente de estas escalas suele ser muy superior a la del cauce natural, lo que produciría una excesiva velocidad del agua. Una manera de reducir esta velocidad es por medio de deflectores que obligan al líquido a realizar cambios bruscos de dirección. Se genera así una gran disipación de energía y se crean zonas de muy pequeña velocidad, en las que los peces pueden descansar durante la subida.

En el Centro de Innovación Tecnológica en Edificación e Ingeniería Civil (CITEEC), de la Universidad de A Coruña, se han realizado medidas de calados y velocidades con dos diseños de escala para distintos caudales y pendientes [78]. La instalación experimental consta de 9 piscinas, cuatro de cada tipo con una intermedia de transición, y se describe en **9.2.2**. En todos los casos, actuando sobre el nivel del agua en la salida, se ha conseguido un flujo prácticamente igual en todas las piscinas del mismo tipo. Las medidas experimentales, para los distintos caudales y pendientes analizados, se han realizado en la piscina nº 7, la tercera empezando por el final. Debido a ello se toma como dominio de cálculo un conjunto de tres piscinas, numeradas de la 1 a la 3 en el sentido de la corriente, con el fin de comparar los valores de las variables en la número 1 con los resultados experimentales.

Los cálculos se realizan para una pendiente del 5.7% y un caudal de 24.6 l/s. Se toma un coeficiente de Manning de 0.015. A pesar de la fuerte pendiente y debido a la acción de los deflectores, el régimen es lento. La condición de contorno de calado se impone en la sección de salida de la piscina 3, fijando en cada punto de la sección el calado obtenido de las mediciones. La condición de contorno en las paredes es la descrita en **5.1.2**.

En la figura 5.27 puede verse la malla utilizada. En las figuras 5.28 a 5.30 se representan los vectores velocidad, los módulos de la velocidad y los calados, respectivamente. En las seis figuras siguientes se realiza una comparación entre los valores obtenidos para la primera de las piscinas y los valores medidos. En la figura 5.31 se observa que el remolino superior obtenido coincide con el que resulta de las medidas, mientras que el inferior queda algo desplazado hacia arriba y hacia la izquierda respecto del medido. Los módulos de las velocidades calculadas en la corriente principal (figura 5.33) se aproximan bastante bien a los de las medidas, si bien en los remolinos resultan algo inferiores. Por último, los calados calculados (figura 5.35) son satisfactorios en la zona central y ligeramente distintos en los extremos.

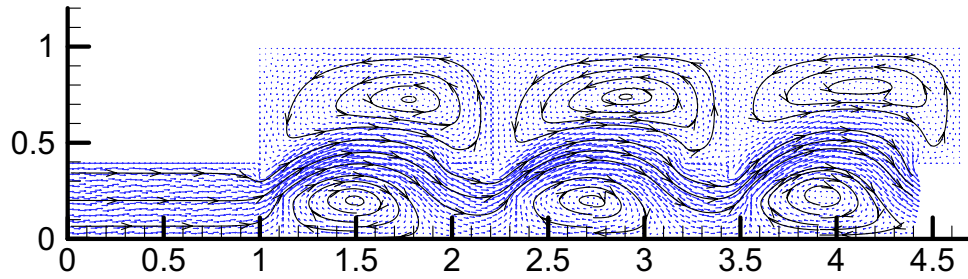


Figura 5.28: Escala de peces. Campo de velocidades.

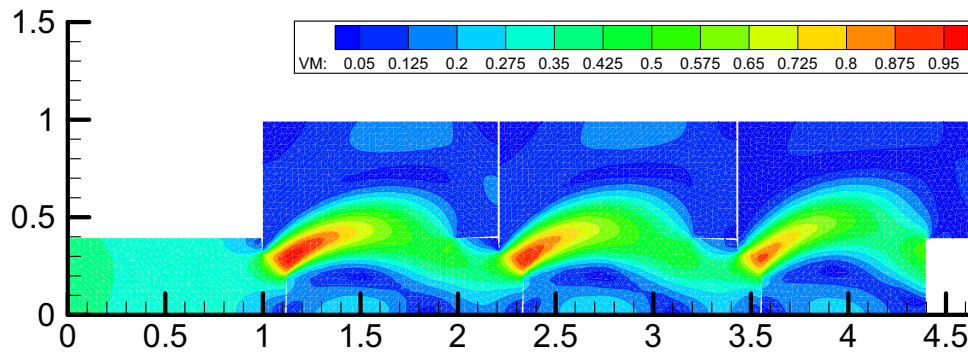


Figura 5.29: Escala de peces. Módulo de la velocidad.

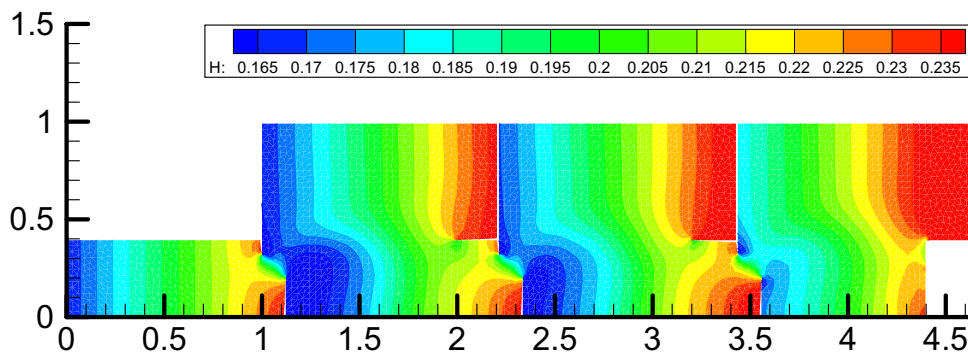


Figura 5.30: Escala de peces. Calados.

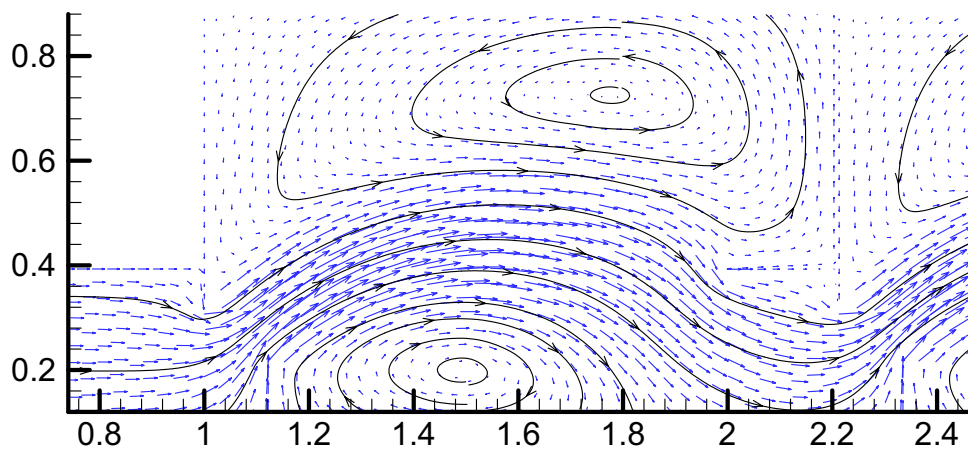


Figura 5.31: Escala de peces, piscina 1. Campo de velocidades calculado.

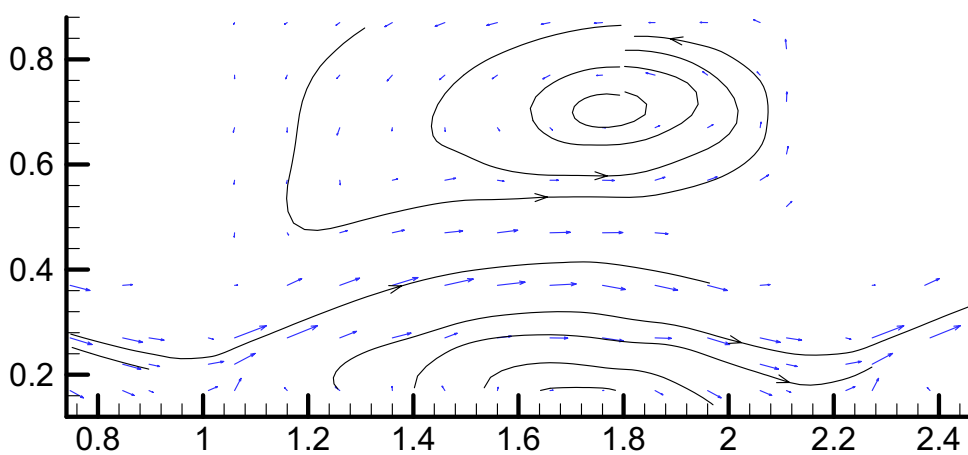


Figura 5.32: Escala de peces, piscina 1. Campo de velocidades medido.

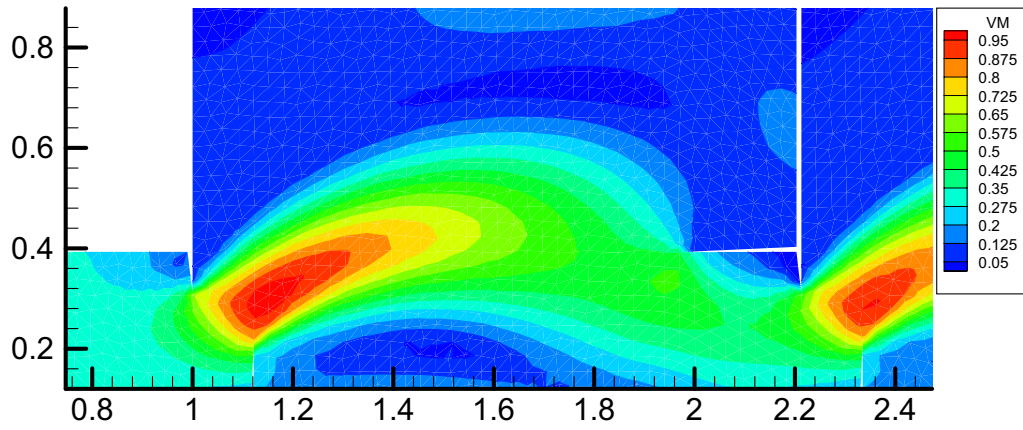


Figura 5.33: Escala de peces, piscina 1. Módulo de la velocidad calculado.

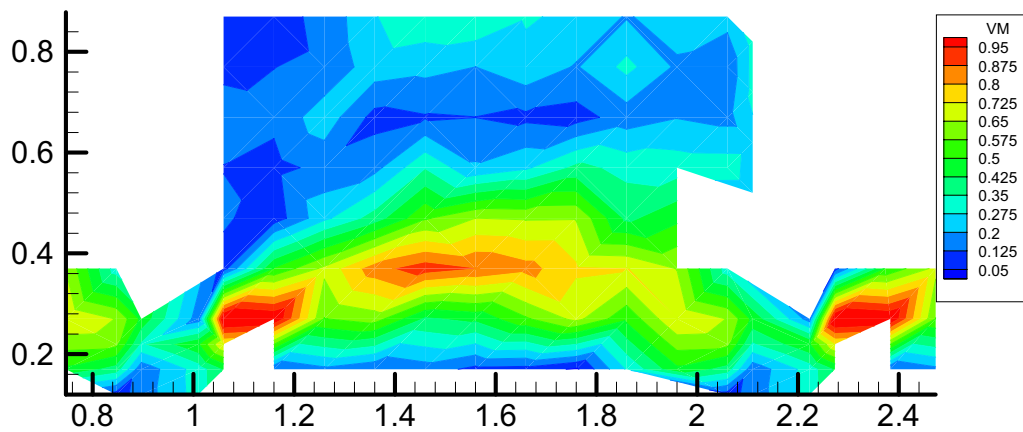


Figura 5.34: Escala de peces, piscina 1. Módulo de la velocidad medido.

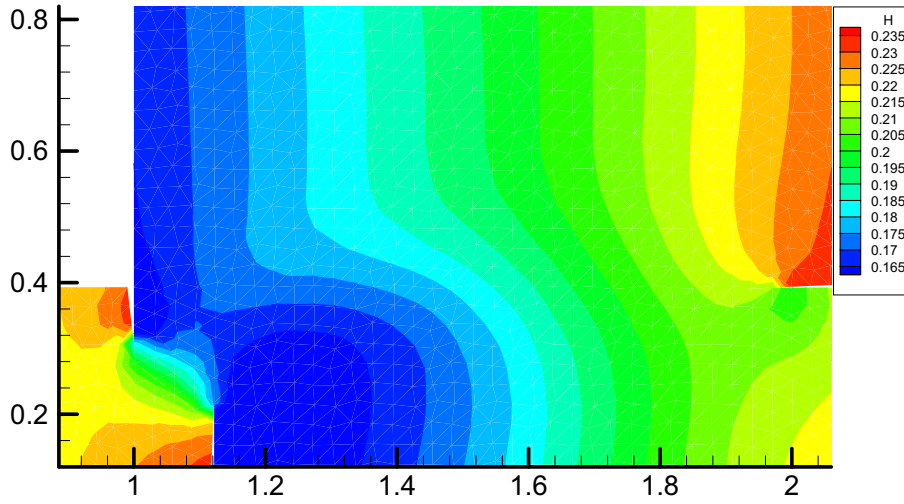


Figura 5.35: Escala de peces, piscina 1. Calado calculado.

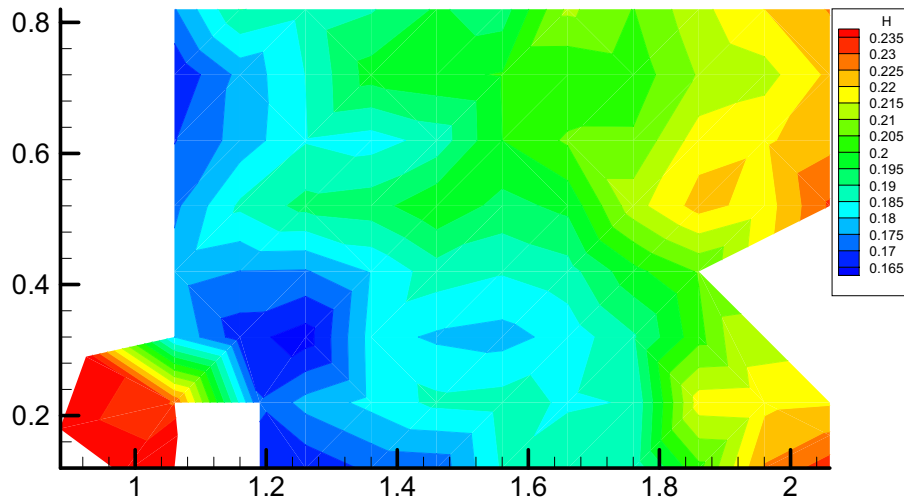


Figura 5.36: Escala de peces, piscina 1. Calado medido.



# Capítulo 6

## Discretizaciones de la derivada temporal

El método utilizado en la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras -descrito en el capítulo 4- es de primer orden en el espacio y en el tiempo y en él la derivada temporal se ha discretizado por el método de Euler hacia adelante. Se han realizado además otras dos discretizaciones de la derivada temporal, de mayor orden de precisión, con el fin de comprobar si se produce alguna variación en los resultados o se obtienen menores tiempos de cálculo. En el presente capítulo se describen brevemente las tres discretizaciones de la derivada temporal analizadas, así como los resultados obtenidos al aplicarlas a un mismo problema. Como se ve más adelante (9.1.5), si se reduce la difusión numérica se obtienen unas conclusiones muy distintas a las de este capítulo.

Las cuestiones a las que aquí se hace referencia están tratados con detenimiento en distintos textos, por ejemplo [15, 75].

### 6.1. Método de Euler hacia adelante

El sistema formado por las ecuaciones de aguas someras, escrito en la forma abreviada (4.4) queda

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \mathbf{G}. \quad (6.1)$$

Si se despeja la derivada temporal y se denomina  $\boldsymbol{\varphi}$  al conjunto de los términos restantes, queda

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \boldsymbol{\varphi}, \quad (6.2)$$

donde la función  $\varphi$  depende de las variables  $x$ ,  $y$  y  $t$ .

En la discretización realizada en 4.4.1, la derivada temporal del vector de variables  $\mathbf{U}$  se aproxima como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}. \quad (6.3)$$

Sea  $\varphi^n$  el valor de  $\varphi$  en el instante  $t_n$ , obtenido a partir de  $\mathbf{U}^n$

$$\varphi^n = \varphi(t^n, \mathbf{U}^n). \quad (6.4)$$

Entonces, a partir de (6.2) y (6.3) se puede despejar  $\mathbf{U}^{n+1}$  en función de  $\mathbf{U}^n$ , obteniendo

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \varphi^n. \quad (6.5)$$

Este método se conoce como de Euler hacia adelante y es de primer orden en tiempo. Esto significa que, al aproximar la derivada temporal en el instante  $t_n$  por su expresión discretizada, se comete un error de truncamiento  $\theta$ , que es función del paso temporal  $\Delta t$  utilizado.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \theta(\Delta t). \quad (6.6)$$

El método de Euler es muy sencillo de programar y da en general buenos resultados, como se comprueba en el capítulo 5, siempre que el valor del paso temporal utilizado sea lo suficientemente pequeño. De lo contrario, además de la falta de precisión introducida, aparecen inestabilidades que obligan a detener el proceso.

## 6.2. Método predictor-corrector de Adams-Moulton

### 6.2.1. Descripción

Los métodos predictor-corrector buscan mejorar la aproximación utilizando valores en un número mayor de instantes que el inmediatamente anterior. Se aplican en dos fases.

En la primera (fase predictora) se realiza una estimación del valor de  $\mathbf{U}^{n+1}$  a partir de los valores de  $\varphi$  en los instantes anteriores

$$\mathbf{U}_p^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t f(\varphi^n, \varphi^{n-1} \dots). \quad (6.7)$$

En la segunda (fase correctora), se calcula  $\varphi^{n+1}$  a partir de  $\mathbf{U}_p^{n+1}$  y se introduce en una expresión en la que intervienen también valores de  $\varphi$  en



instantes de tiempo anteriores, de la que resulta el valor corregido  $\mathbf{U}_c^{n+1}$ . Frecuentemente en la fase correctora se realiza una iteración para mejorar la calidad de la aproximación obtenida.

El método elegido en este caso ha sido el de Adams-Moulton de 4° orden. La fórmula predictora es

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}_n + \frac{\Delta t}{24}(55\boldsymbol{\varphi}_n - 59\boldsymbol{\varphi}_{n-1} + 37\boldsymbol{\varphi}_{n-2} - 9\boldsymbol{\varphi}_{n-3}), \quad (6.8)$$

y la correctora

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}_n + \frac{\Delta t}{24}(9\boldsymbol{\varphi}_{n+1} + 19\boldsymbol{\varphi}_n - 5\boldsymbol{\varphi}_{n-1} + \boldsymbol{\varphi}_{n-2}). \quad (6.9)$$

### 6.2.2. Obtención de los primeros valores de $\boldsymbol{\varphi}$

En la fase predictora se utilizan en cada paso los valores de  $\boldsymbol{\varphi}$  en los tres instantes anteriores. Ello obliga a disponer de los valores de  $\boldsymbol{\varphi}$  en tres instantes sucesivos, además del inicial, antes de poder aplicar la expresión predictora por primera vez. Para solucionar el problema se puede recurrir al método de Euler en las tres primeras iteraciones, hasta obtener los cuatro valores necesarios. Con el fin de introducir el mínimo error en los cálculos, se ha descompuesto cada uno de estos tres pasos en 100 escalones de paso temporal  $\Delta t/100$  s.

## 6.3. Método de Runge-Kutta

Los métodos predictor-corrector hacen intervenir en el cálculo los valores de  $\boldsymbol{\varphi}$  en distintos instantes de tiempo, por lo que se conocen como métodos de intervalo múltiple. Los métodos de Runge-Kutta utilizan un único intervalo temporal, por lo que forman parte de los métodos de intervalo simple. La mejora en la calidad de la aproximación se obtiene obteniendo varios valores de  $\boldsymbol{\varphi}$  en puntos intermedios del intervalo temporal, cada uno a partir de los anteriores y calculando luego una media ponderada de todos ellos.

También aquí el método elegido ha sido de 4° orden. Su fórmula es

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \boldsymbol{\Phi}(t^n, \mathbf{U}^n), \quad (6.10)$$

siendo

$$\boldsymbol{\Phi}(t^n, \mathbf{U}^n) = \frac{\mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}{6}, \quad (6.11)$$

y

$$\mathbf{k}_0 = \boldsymbol{\varphi}(t^n, \mathbf{U}^n), \quad (6.12)$$

$$\mathbf{k}_1 = \boldsymbol{\varphi}\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{U}^n + \mathbf{k}_0 \frac{\Delta t}{2}\right), \quad (6.13)$$

$$\mathbf{k}_2 = \boldsymbol{\varphi}\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{U}^n + \mathbf{k}_1 \frac{\Delta t}{2}\right), \quad (6.14)$$

$$\mathbf{k}_3 = \boldsymbol{\varphi}(t^n + \Delta t, \mathbf{U}^n + \mathbf{k}_2 \Delta t). \quad (6.15)$$

Es decir, a partir del valor de  $\mathbf{U}$  en un instante  $t_n$  se calcula una primera estimación del valor de  $\boldsymbol{\varphi}$  que se denota por  $\mathbf{k}_0$ . Con  $\mathbf{k}_0$  y un paso temporal de valor  $\Delta t/2$ , se obtiene  $\mathbf{U}_1^n = \mathbf{U}^n + \mathbf{k}_0 \frac{\Delta t}{2}$  y, a partir de él,  $\mathbf{k}_1$ , que es una aproximación de  $\boldsymbol{\varphi}$  en el punto medio del intervalo temporal  $[t_n, t_{n+1}]$ .

Con  $\mathbf{k}_1$ , y de nuevo con un paso temporal  $\Delta t/2$ , se obtiene  $\mathbf{U}_2^n$  y con él el tercer valor de  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\mathbf{k}_2$ .

La tercera aproximación de  $\mathbf{U}$  y -a partir de ella- la de  $\boldsymbol{\varphi}$ , se calculan en  $t = t^{n+1}$ .

A partir de los cuatro valores estimados para  $\boldsymbol{\varphi}$  se calcula una media ponderada  $\Phi$ , con la que se obtiene el valor definitivo para  $\mathbf{U}^{n+1}$ .

## 6.4. Comparación de los resultados obtenidos

Con el fin de apreciar las ventajas de discretizar la derivada temporal por los métodos descritos, se aplican los tres al mismo problema. El caso elegido es un recinto en forma de “doble T” de  $4 \times 3 \text{ m}^2$ . El líquido describe un recorrido sinuoso, produciéndose recirculación en dos cavidades, así como un despegue de las líneas de corriente respecto de la pared en dos puntos. Los triángulos de la malla tienen los catetos de  $5 \text{ cm}$  de longitud (figura 6.1). La condición de contorno en la pared sólida ha sido la de rozamiento (ver **5.3.1**) y el coeficiente de Manning utilizado  $n = 0.014$ .

Con los tres métodos se ha iterado hasta alcanzar régimen permanente, obteniéndose prácticamente el mismo campo de velocidades con los tres métodos: las diferencias entre los valores de  $u, v$  en los distintos casos son del orden de  $10^{-5} \text{ m/s}$ . En la figura 6.2 se representan líneas de corriente. Para poder apreciar mejor las posibles diferencias se muestran también dos secciones: la primera, realizada por la abscisa  $x = 2.3 \text{ m}$  (figura 6.3) y la segunda por la ordenada  $y = 2.5 \text{ m}$  (figura 6.4). Se aprecia una coincidencia total de resultados en ambas figuras.

En cuanto al número de iteraciones necesarias para alcanzar régimen permanente y el tiempo de cálculo empleado, sí se han apreciado diferencias, que no han supuesto ahorro respecto del método de Euler.

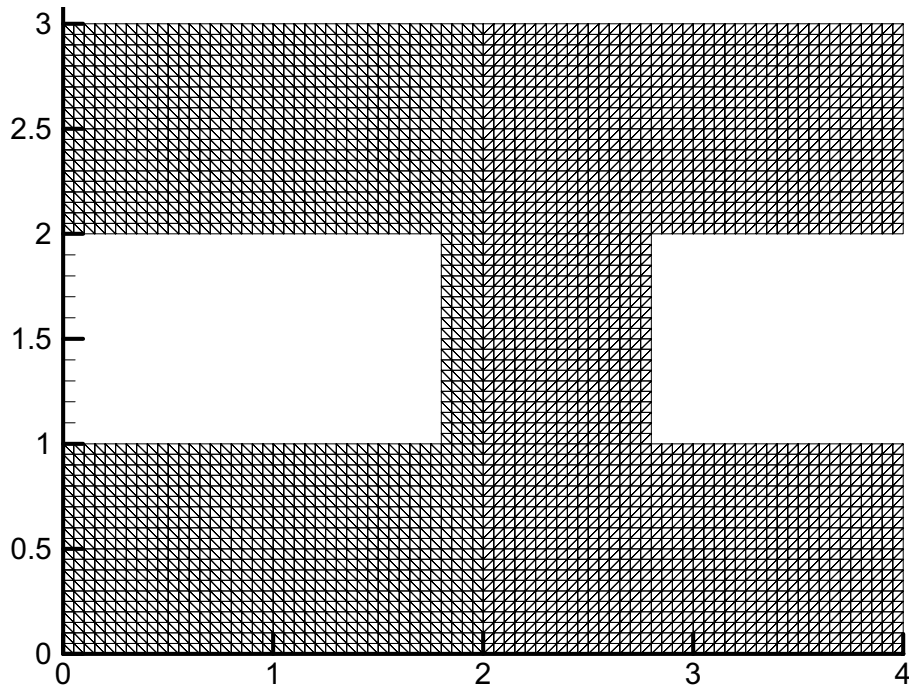


Figura 6.1: Canal en doble T. Malla utilizada.

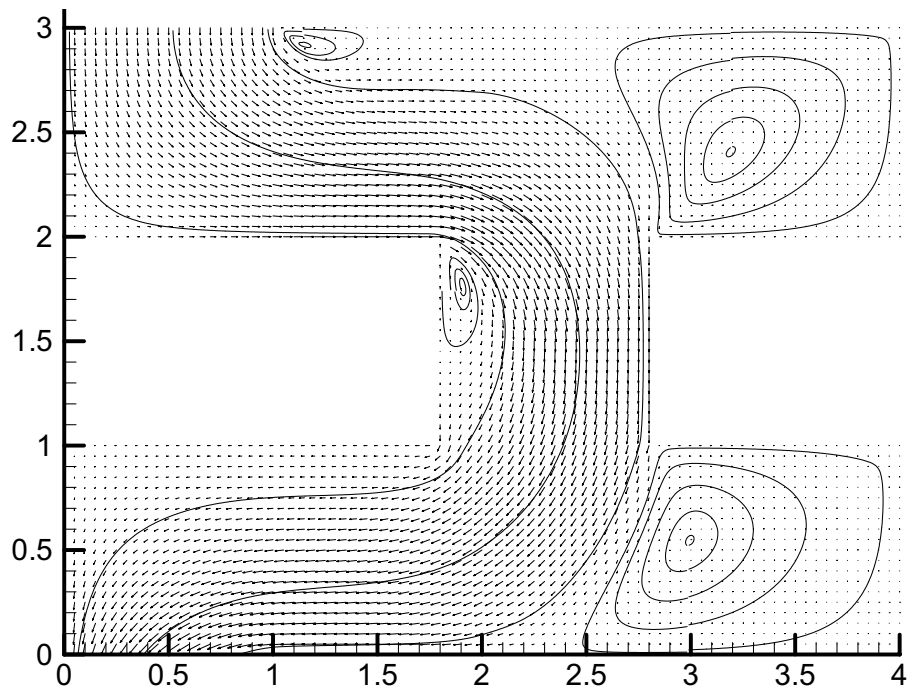


Figura 6.2: Líneas de corriente.

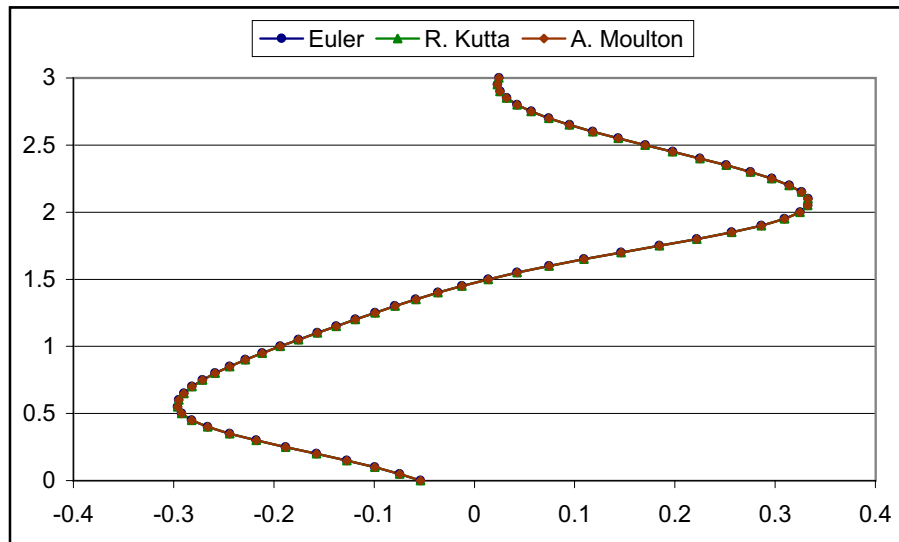


Figura 6.3: Sección  $x = 2.3 \text{ m}$ . Componente  $u$  en abscisas.

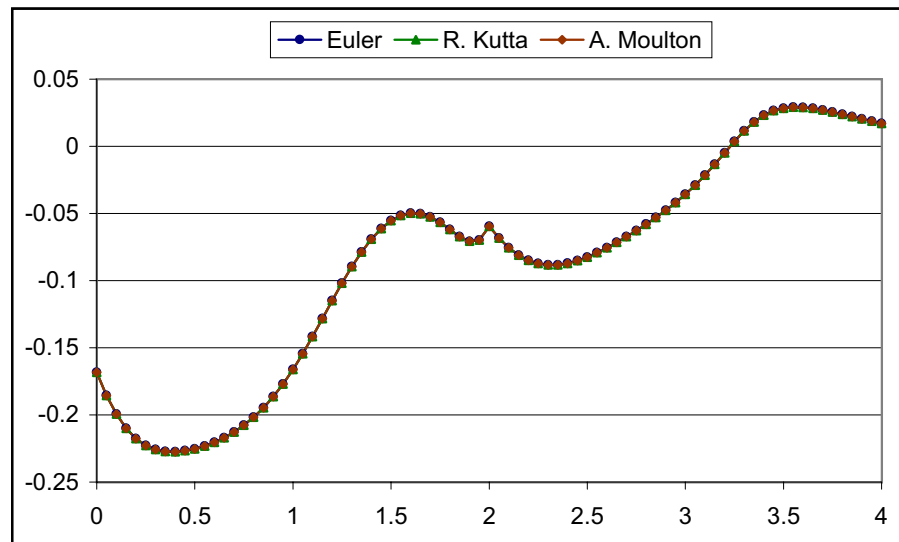


Figura 6.4: Sección  $y = 2.5 \text{ m}$ . Componente  $v$  en ordenadas.

Para considerar que se ha alcanzado régimen permanente el programa mide el valor de los incrementos de las distintas variables en todos los nodos, en cada escalón de tiempo, y lo compara con una cierta tolerancia  $\varepsilon$ . Se considera que se ha alcanzado régimen permanente cuando todos los incrementos medidos son menores que  $\varepsilon$ . Al utilizar el método de Euler se toma un valor  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

El incremento de tiempo admisible con el método de Adams-Moulton ha resultado ser 1.8 veces el del método de Euler y con el de Runge-Kutta 2.2 veces. De esta manera la variación de las variables con estos métodos en cada escalón de tiempo es superior a la que resulta del método de Euler. Por ello, si la relación entre el  $\Delta t$  admisible para estos métodos y el de Euler es  $k$ , el valor que se empleará para la tolerancia en ellos será  $k \cdot 10^{-6}$ . Así, al detener el proceso, la variación por unidad de tiempo de las variables con respecto al valor en el escalón anterior será aproximadamente la misma.

Con ambos métodos se alcanza el régimen permanente en un número de iteraciones menor. Por otra parte, cada paso temporal por el método de Runge-Kutta dura, en tiempo de cálculo, aproximadamente cuatro veces el de Euler. Por el método de Adams-Moulton la relación es más variable pues depende del número de iteraciones de la fase correctora. En este caso el número de iteraciones de esta fase ha oscilado generalmente entre 6 y 8 y el cociente de duraciones ha sido de 6.5.

Así pues, la comparación arroja los resultados siguientes:

- Iteraciones por el método de Euler: 10331.
- Iteraciones por el método de Adams-Moulton: 5127.
- Iteraciones por el método de Runge-Kutta: 4194.

Los porcentajes aproximados de tiempo de cálculo resultan:

- Runge-Kutta/Euler:  $\%T_c = \frac{4194 \cdot 4}{10331} 100 = 162 \%$ .
- Adams-Moulton/Euler:  $\%T_c = \frac{5127 \cdot 6.5}{10331} 100 = 323 \%$ .
- Runge-Kutta/Adams-Moulton:  $\%T_c = \frac{4194 \cdot 4}{5127 \cdot 6.5} 100 = 50 \%$ .

lo cual significa que no se ha observado mejoría con ninguno de los dos métodos. En **9.1.5** se ve un caso en que, en otras condiciones, sí se obtiene con ambos un ahorro computacional.



# Capítulo 7

## El término fuente turbulento

### 7.1. Sumando turbulento del término fuente

En el capítulo 3, se deducen las ecuaciones de aguas someras haciendo notar que habitualmente no se toman en consideración los términos que contienen derivadas segundas de  $u, v$  respecto a  $x, y$ , incorporándose su efecto al de la pendiente de fricción. Como se indica en la introducción a esta memoria, al resolver estas ecuaciones se obtienen resultados muy próximos a la realidad, siempre que se cumplan determinadas hipótesis. No debe olvidarse, sin embargo, que prescindir de los sumandos en los que aparece la viscosidad cinemática turbulenta, supone ignorar unas pérdidas de energía localizadas, función de las variaciones de  $u$  y  $v$ , que pueden tener importancia en la descripción de fenómenos de naturaleza bidimensional.

En este capítulo se discretizan dichos términos con el fin de incluirlos en el modelo hidrodinámico.

### 7.2. Las ecuaciones de aguas someras con término turbulento

Se reproducen las ecuaciones (3.99)-(3.102), en las que se eliminan los términos debidos a la aceleración de Coriolis y la fricción del viento

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = \mathbf{G}, \quad (7.1)$$

siendo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + S_{t1} \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + S_{t2} \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

donde  $h$  representa el calado medido verticalmente,  $u$  y  $v$  son los promedios en la vertical de las medias temporales de las componentes horizontales de la velocidad, los valores de  $S_0$  y  $S_f$  se encuentran en (3.90) y (3.94) y los de  $S_t$ , que se reproducen a continuación, son

$$S_{t1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right), \quad (7.4)$$

$$S_{t2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7.5)$$

A la hora de tomar en consideración el término turbulento es lógico plantearse cual es su lugar más adecuado en las ecuaciones. Existen dos opciones: la primera es añadirlo al término convectivo, agrupando el primer sumando con la derivada de  $\mathbf{F}_1$  respecto a  $x$  y el segundo con la de  $\mathbf{F}_2$  respecto a  $y$ ; la segunda, situarlo en el término fuente. Se ha optado por ésta última por dos motivos:

1. Su significado físico es el de un consumo de energía debido a las tensiones turbulentas. Su naturaleza es disipativa, no convectiva, por lo que parece más adecuado añadirlo al término fuente, donde está situado el término que evalúa las pérdidas de energía por fricción con el fondo y las paredes, que al término convectivo.
2. El sistema de ecuaciones es hiperbólico, es decir, la matriz jacobiana del flujo (4.4.3) posee tres autovalores reales. De añadir a  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  unos términos en derivadas, no pueden obtenerse los autovalores en su expresión general, lo que complica el análisis del carácter hiperbólico del sistema.

### 7.3. Discretización en las celdas interiores

Se utilizan los volúmenes finitos ya conocidos que, para mayor claridad, se representan de nuevo en la figura 7.1.

Se trata ahora de discretizar la integral de superficie, extendida a cada celda  $C_i$ , de los sumandos turbulentos (7.4) y (7.5) del término fuente. Estas



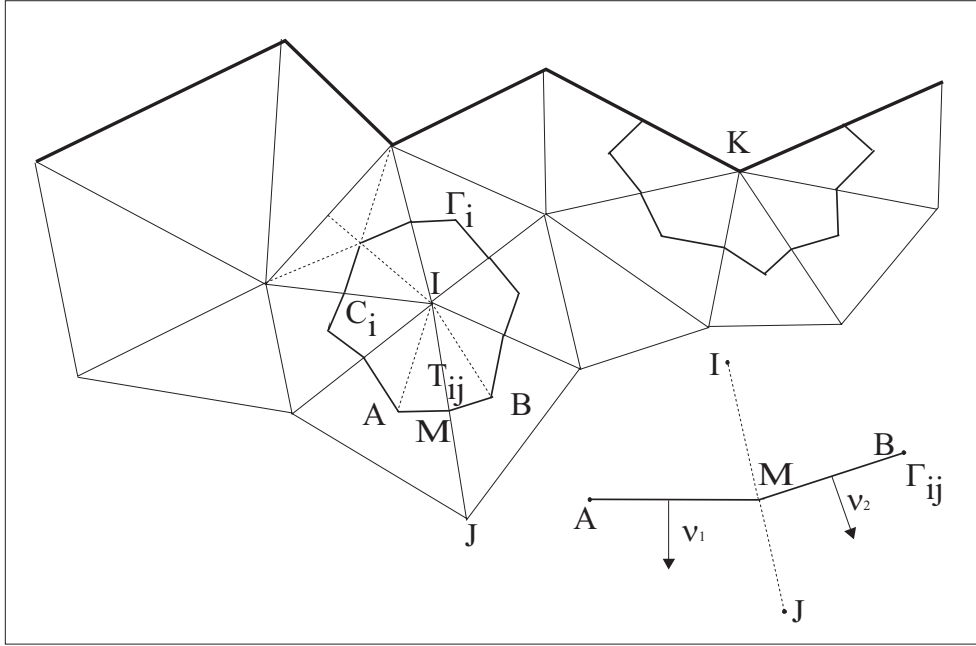


Figura 7.1: Volúmenes finitos utilizados.

integrales pueden expresarse como

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \iint_{C_i} S_{t1} dA \\ \iint_{C_i} S_{t2} dA \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \iint_{C_i} \nabla \cdot \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x}, \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) dA \\ \iint_{C_i} \nabla \cdot \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right], 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA \end{array} \right\}. \quad (7.6)$$

Se aplica el teorema de la divergencia a cada celda, como en (4.12), y se descomponen las integrales sobre la frontera  $\Gamma_i$  en un sumatorio de integrales a lo largo de cada una de las aristas  $\Gamma_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$ . Se obtiene así

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x}, \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) \cdot (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) dl \\ \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right], 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) dl \end{array} \right\}. \quad (7.7)$$

En la expresión (7.7) aparecen las derivadas parciales de las variables  $u$  y  $v$  respecto a  $x$  e  $y$ , cuyos valores hay que calcular en las aristas de las celdas. Estas derivadas se pueden obtener de dos maneras: a partir de las derivadas direccionales de  $u$  y  $v$  respecto a la dirección perpendicular a la arista o bien a partir de los valores promedio de  $\nabla u$  y  $\nabla v$  en las celdas contiguas. En los dos próximos apartados se obtiene la discretización del término fuente turbulento en ambos supuestos.

### 7.3.1. A partir de las derivadas direccionales

Sean dos direcciones cualesquiera  $s$  y  $t$ , perpendiculares entre sí, de vectores unitarios  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{t}$ . Calculando las derivadas de  $u$  según las direcciones  $s$  y  $t$  a partir de las derivadas parciales respecto a  $x$  e  $y$  resulta

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \nabla u \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial u}{\partial x} s_1 + \frac{\partial u}{\partial y} s_2, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla u \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial u}{\partial x} t_1 + \frac{\partial u}{\partial y} t_2. \quad (7.9)$$

Las ecuaciones (7.8) y (7.9) pueden escribirse matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (7.10)$$

de donde, despejando las derivadas parciales,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{Bmatrix}. \quad (7.11)$$

Los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{t}$  son unitarios y perpendiculares entre sí, por lo que

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Ahora se toma como dirección  $s$  la perpendicular a la arista, dada por el vector unitario  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T$ . Admitiendo que  $u$  no varía en la dirección de la arista, se considera nula la derivada direccional según  $t$ . Así pues

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \\ \tilde{\beta} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \tilde{\beta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (7.13)$$

y análogamente

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\alpha} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \tilde{\beta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{array} \right\}. \quad (7.14)$$

Estas derivadas direccionales se discretizan como

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{u_j - u_i}{2d_{ij}}, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{v_j - v_i}{2d_{ij}}. \quad (7.16)$$

siendo  $2d_{ij}$  la longitud de la proyección del segmento  $\overline{IJ}$  sobre la dirección  $\eta$ .

En 4.4.5 se define una fuente discreta, que multiplicada por el área de cada subcelda, aproxima la integral de superficie de los términos fuente geométrico y de fricción (4.44). Aquí se procede análogamente, teniendo en cuenta que la integral es de línea. Por tanto, la integral discretizada del término fuente turbulento por unidad de longitud de arista, en el instante  $t_n$ , toma la forma

$$\widehat{\mathbf{G}}_t = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\nu_{ti} + \nu_{tj}}{2} \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \left[ 2 \frac{u_j^n - u_i^n}{2d_{ij}} \tilde{\alpha}^2 + \frac{v_j^n - v_i^n}{2d_{ij}} \tilde{\alpha} \tilde{\beta} + \frac{u_j^n - u_i^n}{2d_{ij}} \tilde{\beta}^2 \right] \\ \frac{\nu_{ti} + \nu_{tj}}{2} \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \left[ \frac{v_j^n - v_i^n}{2d_{ij}} \tilde{\alpha}^2 + \frac{u_j^n - u_i^n}{2d_{ij}} \tilde{\alpha} \tilde{\beta} + 2 \frac{v_j^n - v_i^n}{2d_{ij}} \tilde{\beta}^2 \right] \end{array} \right\}. \quad (7.17)$$

donde se ha supuesto que los valores de  $\nu_t$  son distintos en general en cada punto, pero constantes a lo largo del tiempo.

### 7.3.2. A partir de los valores promedio en las celdas

Las derivadas parciales de  $u$  y  $v$ , en cada arista  $\Gamma_{ij}$  pueden también obtenerse como componentes del gradiente de estas magnitudes en dicha arista. Para ello se procede de la forma siguiente.

Para aproximar el valor del gradiente de una magnitud escalar  $m$  en  $\Gamma_{ij}$  se toma la semisuma de sus valores promedio en cada una de las celdas  $C_i$  y  $C_j$ , de arista común  $\Gamma_{ij}$ . Por su parte, el promedio del gradiente de  $m$  en una celda  $C_i$  se calcula como

$$\overline{\nabla m}_i = \frac{1}{A_i} \iint_{C_i} \nabla m \, dA. \quad (7.18)$$

A su vez, la integral de superficie de  $\nabla m$  en la celda  $C_i$  resulta de la siguiente relación, que se demuestra en el anejo **11.3**.

$$\iint_{C_i} \nabla m dA = \int_{\Gamma_i} m \mathbf{n} dl, \quad (7.19)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario a cada arista.

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{n} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\alpha} \mathbf{i} + \tilde{\beta} \mathbf{j} \quad (7.20)$$

y

$$\overline{\nabla m}_i = \left( \frac{\partial \overline{m}}{\partial x} \right)_i \mathbf{i} + \left( \frac{\partial \overline{m}}{\partial y} \right)_i \mathbf{j}, \quad (7.21)$$

donde  $\mathbf{i}$  es el unitario en la dirección del eje  $x$  e  $i$  el índice de la celda, se pueden obtener directamente los promedios de las derivadas parciales de  $m$  en  $C_i$

$$\left( \frac{\partial \overline{m}}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} m \tilde{\alpha} dl = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} m \tilde{\alpha} dl, \quad (7.22)$$

$$\left( \frac{\partial \overline{m}}{\partial y} \right)_i = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} m \tilde{\beta} dl = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} m \tilde{\beta} dl. \quad (7.23)$$

Es decir, para cada arista  $\Gamma_{ij}$ , se estiman primero los valores de  $u$  y  $v$  en ella como semisuma de los valores en los nodos  $I$  y  $J$ . Luego se obtienen los promedios de las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  en cada celda, a partir de los valores en las aristas, mediante las expresiones

$$\left( \frac{\partial \overline{m}}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \frac{m_i + m_j}{2} \tilde{\alpha} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\|, \quad m = u, v, \quad (7.24)$$

$$\left( \frac{\partial \overline{m}}{\partial y} \right)_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \frac{m_i + m_j}{2} \tilde{\beta} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\|, \quad m = u, v, \quad (7.25)$$

siendo  $\mathcal{K}_i$  el conjunto de todos los nodos que rodean al  $I$ . Una vez obtenidos los valores en  $C_i$  y  $C_j$ , se calcula su semisuma en  $\Gamma_{ij}$ .

Expresando abreviadamente los promedios de las derivadas parciales de  $u$  en las celdas  $C_i$  y  $C_j$ , en el instante  $t_n$ , como

$$u_{xi}^n = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,t_n}, \quad u_{xj}^n = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j,t_n}, \quad (7.26)$$

$$u_{yi}^n = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,t_n}, \quad u_{yj}^n = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{j,t_n}, \quad (7.27)$$

y haciendo lo mismo para  $v$ , la integral discretizada del término fuente turbulento por unidad de longitud de arista, en el instante  $t_n$ , es ahora

$$\widehat{\mathbf{G}}_{\mathbf{t}} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\nu_{ti} + \nu_{tj}}{2} \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \left( 2 \frac{u_{xi}^n + u_{xj}^n}{2} \tilde{\alpha} + \frac{v_{xi}^n + v_{xj}^n}{2} \tilde{\beta} + \frac{u_{yi}^n + u_{yj}^n}{2} \tilde{\beta} \right) \\ \frac{\nu_{ti} + \nu_{tj}}{2} \frac{h_i^n + h_j^n}{2} \left( \frac{v_{xi}^n + v_{xj}^n}{2} \tilde{\alpha} + \frac{u_{yi}^n + u_{yj}^n}{2} \tilde{\alpha} + 2 \frac{v_{yi}^n + v_{yj}^n}{2} \tilde{\beta} \right) \end{array} \right\}. \quad (7.28)$$

donde se ha supuesto que los valores de  $\nu_t$  son distintos en general en cada punto, pero constantes a lo largo del tiempo.

Por fin, la integral de superficie en  $C_i$  del sumando turbulento del término fuente (7.6) se aproxima como

$$\sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} \mathbf{G} \, dA \approx \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\psi}_{\nu_{ij}}^n, \quad (7.29)$$

siendo  $\boldsymbol{\psi}_{\nu_{ij}}^n$  la fuente turbulenta discretizada que toma una de las dos expresiones (7.17) o (7.28).

## 7.4. Discretización en las celdas frontera

En la figura 7.1 se aprecia que los nodos frontera dan lugar a volúmenes finitos en los que dos de los lados forman parte de la frontera; en esas aristas no se pueden discretizar las derivadas de  $u$  y  $v$  respecto a la dirección  $\eta$  perpendicular a la arista, como en las demás (7.17), por no disponer del nodo vecino. Por ello, en las celdas correspondientes a nodos frontera el término fuente turbulento se calcula a partir de los valores promedio de las derivadas parciales en las celdas (sin la alternativa de hacerlo a partir de las derivadas direccionales). En el cálculo de los valores promedio de las derivadas en cada celda, por medio de los sumatorios (7.24) y (7.25), en el sumando correspondiente a la arista frontera se repite el valor de la variable en el nodo  $I$ .

## 7.5. Descentrado del término turbulento

En (4.21) se utiliza el descentrado *upwind* de Van Leer para el término de flujo, pues ello contribuye a la estabilidad. En (4.37) se aplica también

un descentrado al término fuente geométrico pero no al término de fricción. En el caso del sumando turbulento que se está analizando deben tenerse en cuenta algunas consideraciones.

En un término convectivo, como es el de flujo, parece lógico conceder mayor importancia a la información que nos llega en el sentido de la corriente. En un término difusivo, que gobierna un fenómeno de distinta naturaleza, el descentrado parece tener menos sentido.

Por otra parte, el efecto del término fuente turbulento es de disipación de energía, de muy distinto tipo al del término geométrico (que se descentra) y más parecido al del término de fricción (que no se descentra).

No obstante los anteriores razonamientos, se ha probado la opción de aplicar en  $\boldsymbol{\psi}_{vij}$  un factor de descentrado, utilizando para éste la misma forma de (4.37) y resultando entonces para la fuente turbulenta discretizada la expresión

$$\boldsymbol{\psi}_{vij} = \mathbf{X}(\mathbf{I} - |\boldsymbol{\Lambda}| \boldsymbol{\Lambda}^{-1})\mathbf{X}^{-1}\widehat{\mathbf{G}}_t. \quad (7.30)$$

Los resultados, que se muestran en 9.1.4, confirman la conveniencia de no descentrar.

## 7.6. Algoritmo

El algoritmo (4.48), con la inclusión del sumando turbulento, se convierte en

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{A_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{K}_i} (A_{ij} \boldsymbol{\psi}_{ij}^n + \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\psi}_{vij}^n) - \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{ij}^n \right). \quad (7.31)$$







# Capítulo 8

## Obtención de la viscosidad turbulenta

### 8.1. Modelos de turbulencia

La relación de Boussinesq (3.35), utilizada en 3.4 para la deducción de las ecuaciones de Reynolds, hace necesario el cálculo de la viscosidad cinemática de remolino  $\nu_t$  para poder estimar el efecto de las tensiones de Reynolds. Para ello, a lo largo del pasado siglo se han desarrollado distintos modelos, de los que puede verse una amplia relación en [89], que se pueden agrupar en las categorías siguientes, según el número de ecuaciones diferenciales necesarias para caracterizar el estado de turbulencia.

#### 8.1.1. Modelos de 0 ecuaciones

En estos modelos no se toma en consideración el transporte que realiza el flujo de las magnitudes que caracterizan la turbulencia, asumiendo que ésta se disipa donde se genera. La viscosidad de remolino se obtiene experimentalmente, mediante fórmulas empíricas o relacionándola con la distribución de la velocidad media [66, pg. 12].

#### Viscosidad de remolino constante

Una primera opción consiste en fijar un valor constante para  $\nu_t$  en todo el dominio. Este valor se obtiene de distintos modos, por ejemplo por medio de experimentos de inyección de trazador, o empleando el método de prueba-error, ajustando los resultados del modelo numérico al campo de velocidades, cuando se dispone de medidas experimentales.

No puede propiamente considerarse un modelo de turbulencia, pues es demasiado grosero para describir apropiadamente el comportamiento del flujo. Se utiliza a veces para grandes masas de agua, donde los términos turbulentos tienen poca importancia, con excepción de la turbulencia generada por el fondo (que puede tenerse en cuenta a través de la fórmula de Manning). En algunos modelos se utiliza exclusivamente para mejorar la estabilidad numérica.

### **Modelos basados en la longitud de mezcla**

El primer modelo que describe la distribución de  $\nu_t$ , por tanto el primer modelo de turbulencia propiamente dicho, se debe a Prandtl y utiliza el concepto de longitud de mezcla. Esta magnitud pretende representar la distancia media recorrida por las partículas del fluido, sin que se modifique su cantidad de movimiento [74, pg. 537], en una clara analogía a la teoría de gases.

Prandtl asume que la viscosidad turbulenta es proporcional al producto de la escala de longitudes por la de velocidades

$$\nu_t \propto LV. \quad (8.1)$$

Tomando para  $L$  la longitud de mezcla  $l_m$ , para  $V$  la fluctuación media de la velocidad supuesta isótropa y estimando la fluctuación media como el producto de  $l_m$  por el gradiente de velocidad, resulta

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad (8.2)$$

siendo  $U$  el módulo de la velocidad paralela a la superficie rugosa e  $y$  la distancia a la misma. Para calcular la longitud de mezcla  $l_m$  existen diversas fórmulas algebraicas [86, pg. 66].

Existen otros modelos basados en el mismo principio, como los de Balwin-Lomax y Cebeci-Smith, que consideran la existencia de dos capas, con distinta expresión para  $\nu_t$  en cada una de ellas [89, pg. 74]. Estos modelos son ampliamente utilizados para cálculos aerodinámicos en la industria aeroespacial.

Los modelos de este tipo son válidos en los casos en que se pueda describir la distribución de la longitud de mezcla por medio de fórmulas empíricas. Resultan muy poco adecuados para flujos con separación de la pared y zonas de recirculación.

### **8.1.2. Modelos de 1 ecuación**

Para subsanar las limitaciones mencionadas, se desarrollaron modelos que tienen en cuenta el transporte de las magnitudes turbulentas. Estos modelos

se basan en la fórmula de Kolmogorov-Prandtl

$$\nu_t = c'_\mu k^{1/2} L, \quad (8.3)$$

donde  $L$  es la escala de longitud y  $\sqrt{k}$  la de velocidad. La energía cinética turbulenta  $k$ , definida en 3.4 como

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}), \quad (8.4)$$

se obtiene de una ecuación diferencial, donde también aparece el término  $L$ , que debe ser determinado empíricamente.

Una de las limitaciones del método es la falta de capacidad para adaptar la escala  $L$  cuando el flujo cambia bruscamente, debido a una variación de las condiciones geométricas. Recientemente han aparecido algunos, como el de Spalart-Almaras [89, pg. 111], en los que la viscosidad de remolino es la variable de la única ecuación diferencial. En ella aparece como escala de longitud la distancia a la pared. Este modelo ha sido utilizado con éxito en aplicaciones aeroespaciales.

### 8.1.3. Modelos de 2 ecuaciones

En la búsqueda de un modelo de aplicación más universal, deben tenerse en cuenta los efectos de transporte para las escalas de velocidad y longitud por separado. Para ello distintos autores, de alguno de los cuales se hará una breve mención, han propuesto la utilización de una ecuación de transporte para otra magnitud turbulenta relacionada con  $L$ .

#### El modelo $k - \omega$

Kolmogorov (1942) señaló la necesidad de calcular la que denominó “tasa de disipación de energía por unidad de volumen y tiempo”  $\omega$ . Las unidades de  $\omega$  son  $s^{-1}$ , por lo que esta tasa de disipación específica se relaciona con  $L$  por medio de la expresión

$$\omega \sim \frac{k^{1/2}}{L}, \quad (8.5)$$

que, junto con (8.1), permite obtener

$$\nu_t \sim \frac{k}{\omega}. \quad (8.6)$$

A partir de esta idea se han desarrollado distintos modelos  $k - \omega$ : Saffman (1970), Spalding (1972), Wilcox (1988), Speziale (1990), etc.

**El modelo  $k - \varepsilon$** 

Chou (1945) propuso calcular la tasa de disipación de energía cinética turbulenta por unidad de tiempo (o tasa de disipación turbulenta)  $\varepsilon$

$$\varepsilon \sim \frac{k^{3/2}}{L}. \quad (8.7)$$

Con números altos de  $Re$  la tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$  viene dada por

$$\varepsilon = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (8.8)$$

cuya deducción a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes puede verse en [16]. El análisis dimensional muestra que la relación de esta variable con la escala de longitud  $L$  es

$$\varepsilon \sim \frac{k^{3/2}}{L}, \quad (8.9)$$

lo que, aplicando de nuevo (8.1), permite obtener

$$\nu_t \sim \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (8.10)$$

De los diversos modelos  $k - \varepsilon$  desarrollados ocupa un lugar central el debido a Jones y Launder (1972), conocido como  $k - \varepsilon$  *standard* cuyos coeficientes fueron ajustados poco después por Launder y Sharma (1974).

El modelo  $k - \varepsilon$  es el más extendido y se utiliza en prácticamente todos los programas comerciales para estudio de fluidos [68].

**Otros modelos de 2 ecuaciones**

Rotta (1951) sugirió el uso de una ecuación para la propia escala de longitud  $y$ , más adelante (1968), para el producto de la escala de longitud por  $k$ . Zeierman y Wolfshtein (1986) introdujeron una ecuación para el producto de  $k$  por el “tiempo de disipación turbulenta”  $\tau$  (equivalente al inverso de  $\omega$ ) y Speziale, Abid y Anderson (1990) han propuesto una ecuación para  $\tau$ .

Los modelos resultantes de estas propuestas han tenido menos aceptación que los  $k - \omega$  y  $k - \varepsilon$  mencionados anteriormente.

**8.1.4. Modelos de tensiones de Reynolds**

Para terminar esta breve clasificación se menciona otro tipo de modelos (*Reynolds Stress Models*), en los que no se hace uso del concepto de viscosidad

turbulenta, sino que se resuelven unas ecuaciones de transporte para obtener las tensiones de Reynolds directamente.

Estos modelos son más adecuados para campos de tensiones complejos, así como para la simulación del transporte de la turbulencia y la toma en consideración de los estados anteriores (efectos históricos) y de la anisotropía de la turbulencia. La resolución numérica de las ecuaciones es difícil y puede causar problemas de convergencia. Los modelos son más exigentes en lo que se refiere a las condiciones de contorno.

Uno de los primeros modelos de tensiones de Reynolds es el de Launder, Reece y Rodi (1975). Aunque existen propuestas de distintos autores, la complejidad de estos modelos, con un número de ecuaciones mucho más elevado, ha dado lugar a un número muy inferior de aplicaciones prácticas que los de 0, 1 y 2 ecuaciones.

Con ciertas hipótesis simplificadoras referentes a los términos de transporte convectivo y difusivo se ha intentado reducir las ecuaciones diferenciales de estos modelos a ecuaciones algebraicas, dando lugar a los modelos ASM (*Algebraic Stress Models*), que tienen puntos en común con los modelos de 1 y 2 ecuaciones [68].

## 8.2. El modelo $k - \varepsilon$ promediado en la vertical

Las ecuaciones de aguas someras con inclusión de los términos turbulentos han sido obtenidas en **3**. integrando en la vertical las ecuaciones de Reynolds 3D sin tomar en consideración la variación de la viscosidad turbulenta con la profundidad.

En estas ecuaciones aparece un valor de  $\nu_t$  para cada punto, que representa por tanto la viscosidad turbulenta de toda una columna vertical. Para la determinación de esta viscosidad se necesita un modelo de turbulencia. Teniendo en cuenta que el modelo  $k - \varepsilon$  *standard* mencionado en la sección anterior es tridimensional, se ha visto preferible el empleo del  $k - \varepsilon$  promediado en la vertical.

El modelo  $k - \varepsilon$  promediado en la vertical es una adaptación, obtenida en los años 70 por Rastogi y Rodi [65], a partir del modelo tridimensional de Launder y Spalding [41]. Ha sido utilizado también por [49, 67], si bien las ecuaciones empleadas por ellos difieren ligeramente de las presentadas en [65].

Más recientemente ha sido aplicado por [26, 8, 64, 52]. En estos últimos casos se considera en las ecuaciones el sumando con la derivada temporal de las variables turbulentas el cual, una vez discretizado, permite conocer la evolución de estas variables en el tiempo.

El modelo se obtiene integrando según el eje  $z$  las ecuaciones que definen los parámetros  $k$  y  $\varepsilon$ , energía cinética turbulenta y tasa de disipación turbulenta respectivamente. Sus autores asumen que el estado de turbulencia promediado en la vertical puede caracterizarse por los parámetros  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\varepsilon}$  que se relacionan con el promedio en la vertical de las tensiones turbulentas a través de las siguientes expresiones, la primera de ellas debida a Boussinesq,

$$\frac{\tilde{\tau}_{ij}}{\rho} = \tilde{\nu}_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \tilde{k} \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \quad (8.11)$$

$$\tilde{\nu}_t = c_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}}. \quad (8.12)$$

Las variables hidráulicas  $u_1$  y  $u_2$ , que corresponden a  $u$  y  $v$ , representan promedios en  $z$  de la media temporal de las componentes horizontales de la velocidad y se obtienen en **3.5.3**. Las dimensiones de las magnitudes turbulentas  $\tilde{\nu}_t$ ,  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\varepsilon}$  son

$$\begin{aligned} [\tilde{\nu}_t] &= L^2 T^{-1}, \\ [\tilde{k}] &= L^2 T^{-2}, \\ [\tilde{\varepsilon}] &= L^2 T^{-3}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

La viscosidad cinemática  $\tilde{\nu}_t$  no es exactamente una magnitud promediada en la vertical, en el sentido de la definición matemática (3.60). Más bien se entiende como una viscosidad que, multiplicada por las derivadas espaciales de  $u$  y  $v$  en (8.11), da como resultado las tensiones turbulentas promediadas en altura. Los valores de  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\varepsilon}$  se determinan a partir de las ecuaciones de transporte siguientes

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} \right) + P_h + P_{kV} - \tilde{\varepsilon}, \quad (8.14)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t}}_{(I)} + \underbrace{u \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y}}_{(II)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right)}_{(III)} + \underbrace{c_{1\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} P_h}_{(IV)} + \underbrace{P_{\varepsilon V}}_{(V)} - \underbrace{c_{2\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}}_{(VI)}, \quad (8.15)$$

donde

$$P_h = \tilde{\nu}_t \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (8.16)$$

es la producción de  $\tilde{k}$  debida a la interacción de las tensiones turbulentas con los gradientes de las componentes horizontales de la velocidad  $u$  y  $v$ .

Los términos fuente  $P_{kV}$  y  $P_{\varepsilon V}$  son las producciones de  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\varepsilon}$  debidas a los gradientes verticales de la velocidad y contienen todos los sumandos que se originan en la integración por la no uniformidad de los perfiles verticales. La contribución principal a  $P_{kV}$  y  $P_{\varepsilon V}$  proviene de los significativos gradientes de la velocidad cerca del fondo que, por interacción con las tensiones turbulentas tangenciales, relativamente grandes en esta región, produce energía turbulenta. Esta energía se añade a la producción  $P_h$ , debida a los gradientes horizontales, y depende fuertemente de la rugosidad del fondo.

En el modelo bidimensional que se está analizando la velocidad varía sólo en horizontal, por lo que los sumandos  $I - VI$  pueden interpretarse físicamente del siguiente modo

$$\left\{ \begin{array}{c} I \\ \text{Variación} \\ \text{temporal} \\ \text{de } \tilde{k} \text{ ó } \tilde{\varepsilon} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} II \\ \text{Transporte} \\ \text{por} \\ \text{Convección} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} III \\ \text{Transporte} \\ \text{por} \\ \text{difusión} \end{array} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{array}{c} IV \\ \text{Generación} \\ \text{por gradiente} \\ \text{de velocidades} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} V \\ \text{Generación} \\ \text{por tensiones} \\ \text{del fondo} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} VI \\ \text{Destrucción} \\ \text{de energía} \\ \text{turbulenta} \end{array} \right\}, \quad (8.17)$$

observando que la suma de  $I$  y  $II$ , derivada parcial temporal + transporte por convección, representa la derivada total temporal.

Rastogi y Rodi [65] relacionan  $P_{kV}$  y  $P_{\varepsilon V}$  con la tensión en el fondo por medio de la velocidad de fricción  $U^*$  por medio de las expresiones

$$P_{kV} = c_k \frac{U^{*3}}{h}, \quad (8.18)$$

$$P_{\varepsilon V} = c_\varepsilon \frac{U^{*4}}{h^2}. \quad (8.19)$$

Esta velocidad de fricción puede obtenerse por diversos métodos, como se describe en [55]. Si se calcula a partir del módulo de la tensión tangencial en el fondo, en régimen permanente, utilizando la expresión de Manning para dicha tensión y llamando  $U$  al módulo de la componente horizontal de la velocidad,  $U = \sqrt{u^2 + v^2}$ , se obtiene

$$U^* = \sqrt{\frac{|\tau_b|}{\rho}} = \sqrt{\frac{g n^2 U^2}{h^{1/3}}} = \frac{\sqrt{g} n U}{h^{1/6}}. \quad (8.20)$$

Los valores de las constantes empíricas  $c_k$  y  $c_\varepsilon$  se determinaron [65] a partir de la tasa de disipación de energía y la inyección de trazador, resultando

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{c_f}}, \quad (8.21)$$

$$c_\varepsilon = c_{\varepsilon\Gamma} \frac{c_{2\varepsilon}}{c_f^{3/4}} \sqrt{c_\mu}. \quad (8.22)$$

El coeficiente de fricción  $c_f$  puede obtenerse a partir de  $U^*$  y  $U$ . Si se utiliza para  $U^*$  la expresión (8.20), se obtiene

$$c_f = \frac{U^{*2}}{U^2} = \frac{g n^2}{h^{1/3}}. \quad (8.23)$$

Para el coeficiente  $c_{\varepsilon\Gamma}$ , en [65] se toma el valor 3.6 para el caso de canales anchos de laboratorio. En general, este coeficiente vale [52, 54, 67]

$$c_{\varepsilon\Gamma} = \frac{1}{(e^* \sigma_t)^{1/2}}, \quad (8.24)$$

siendo  $\sigma_t$  el número de Prandtl-Schmidt y  $e^*$  la difusividad adimensional

$$e^* = \frac{\tilde{\nu}_t}{U^* h \sigma_t}. \quad (8.25)$$

Para  $\sigma_t$ , Nezu y Nakagawa [54, pg. 139] proponen tomar un valor comprendido entre 0.5 y 0.7 mientras que  $e^*$  ha de ser determinado a partir de experimentos de inyección de trazador.

Segun Fischer *et al.* [29, pg. 112] en canales rectos y de sección rectangular  $e^*$  toma valores entre 0.1 y 0.2; en corrientes naturales, con curvas suaves y paredes laterales con irregularidades moderadas, aumenta hasta 0.4 – 0.8; si las curvas son fuertes o los cambios de geometría bruscos se han obtenido valores muy superiores: en el río Missouri, con curvas de hasta 180°, se han observado valores de  $e^*$  de hasta 10. En la estimación de estos valores de la difusividad se asume que el error cometido puede ser de  $\pm 50\%$ , lo cual da idea de la dificultad para elegir adecuadamente este parámetro. Para cuantificar lo que se entiende por curvas suaves, Fischer *et al.* sugieren utilizar la condición

$$\alpha = \frac{BU}{RU^*} \leq 2, \quad (8.26)$$

siendo  $B$  la anchura del río,  $R$  el radio de la curva,  $U$  la velocidad media de la corriente y  $U^*$  la de fricción. El valor mencionado  $e^* = 10$ , para el río Missouri, se obtuvo con un valor de  $\alpha$  igual a 5. En los casos presentados en



esta memoria, con cambios bruscos de dirección, pero con superficies lisas, se han utilizado valores de  $e^* = 0.3 - 0.6$ .

Otra utilidad práctica del adecuado ajuste de la difusividad adimensional  $e^*$  es la siguiente, mencionada por Minh *et al.* [52]. En las ecuaciones de aguas someras que estos autores utilizan, figuran en el término fuente unos sumandos  $D_{xx}$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{yx}$  y  $D_{yy}$  denominados términos de dispersión. Estos términos aparecen al descomponer las variables en su valor promediado en altura más la desviación y luego integrar en la vertical las ecuaciones y, como se dice en **3.5.3**, no han sido tomados en consideración en este trabajo.

Sin embargo, afirman Minh *et al.* citando a [30], los términos de dispersión pueden ser cuantitativamente de la misma importancia que las tensiones turbulentas cuando existen flujos secundarios. Una forma de tener en cuenta el efecto de estos flujos en un modelo 2D es aumentar la viscosidad turbulenta, lo cual se consigue incrementando el valor del coeficiente  $e^*$ . El valor que debe dársele depende del problema y no dan más información al respecto.

Los restantes coeficientes, que se recogen en la tabla 8.1, tienen valor constante [66, pg. 29].

Tabla 8.1: Coeficientes constantes. Modelo  $k - \varepsilon$ .

| $c_\mu$ | $c_{1\varepsilon}$ | $c_{2\varepsilon}$ | $\sigma_k$ | $\sigma_\varepsilon$ |
|---------|--------------------|--------------------|------------|----------------------|
| 0.09    | 1.44               | 1.92               | 1.0        | 1.3                  |

Por otra parte, según [54, pg. 138], los valores de  $\sigma_k$  y  $\sigma_\varepsilon$  fueron obtenidos inicialmente por [41] tomando para la constante universal de Von Karman el valor  $\kappa = 0.435$ . Por ello proponen para ambas constantes el valor 1.2, si se toma para  $\kappa$  su valor habitual de 0.41, propuesta que se ha tenido en cuenta en este trabajo.

Por último cabe señalar que para el cálculo iterativo de las variables  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\varepsilon}$  se supone conocido el campo de velocidades y calados y que en lo sucesivo, al referirse a  $\tilde{v}_t$ ,  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\varepsilon}$ , se omiten los símbolos  $\sim$ .

### 8.3. Las ecuaciones $k - \varepsilon$ en forma conservativa

Se reproducen a continuación, con la simplificación de notación introducida, las ecuaciones (8.14)-(8.15)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_h + P_{kV} - \varepsilon, \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_h + P_{\varepsilon V} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (8.28)$$

que se van a expresar en forma conservativa. Para ello se usa la ecuación de continuidad en 2D (3.62).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (8.29)$$

Multiplicando (8.27) por  $h$  y sumándole (8.29) multiplicada por  $k$  resulta

$$\frac{\partial(hk)}{\partial t} + \frac{\partial(hku)}{\partial x} + \frac{\partial(hkv)}{\partial y} = hS'_1, \quad (8.30)$$

donde se ha agrupado el término fuente de (8.27) bajo el nombre  $S'_1$ . Procediendo de igual modo con (8.28) se obtiene

$$\frac{\partial(h\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(h\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(h\varepsilon v)}{\partial y} = hS'_2. \quad (8.31)$$

Las ecuaciones (8.30)-(8.31) forman un sistema de leyes de conservación con término fuente, en forma conservativa, que puede escribirse matricialmente como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial y} = \mathbf{S}, \quad (8.32)$$

siendo

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} hk \\ h\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} hku \\ h\varepsilon u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} hkv \\ h\varepsilon v \end{pmatrix}, \quad (8.33)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h S'_1 \\ h S'_2 \end{pmatrix}. \quad (8.34)$$

Durante el proceso iterativo en que se va a calcular el valor de  $\nu_t$  se suponen fijas las variables hidráulicas  $h$ ,  $u$  y  $v$ . Por ello se hace una modificación en el término  $P_h$  del término fuente con el fin de separar la viscosidad de remolino, que varía en cada iteración, de las derivadas espaciales de  $u$  y  $v$ ,

que permanecen constantes durante todo el proceso. Para ello se define un nuevo coeficiente

$$P_{hs} = \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (8.35)$$

de modo que

$$P_h = \nu_t P_{hs}. \quad (8.36)$$

Teniendo en cuenta ahora la relación (8.12), el término fuente desarrollado queda

$$S_1 = h \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_t P_{hs} + P_{kV} - \varepsilon \right], \quad (8.37)$$

$$S_2 = h \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{1\varepsilon} c_\mu k P_{hs} + P_{\varepsilon V} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \right]. \quad (8.38)$$

## 8.4. Las ecuaciones $q - r$ en forma conservativa

Tanto la energía cinética turbulenta como su disipación por unidad de tiempo son magnitudes no negativas. Si las ecuaciones (8.27)-(8.28) se discretizan directamente puede ocurrir que al principio del proceso, o en un momento dado del mismo,  $k$  o  $\varepsilon$  tomen un valor menor que cero, lo cual podría producir problemas numéricos, aparte de representar un valor no físico para estas variables. Una manera de evitar estos problemas es realizar el cambio de variable propuesto por [28]

$$k = q^2, \quad (8.39)$$

$$\varepsilon = r^2. \quad (8.40)$$

Se efectúa este cambio en (8.27) y se repiten las operaciones realizadas en 8.3. Primero se deriva la variable  $q^2$  en el miembro de la izquierda y operando se obtiene

$$2q \left( \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) = S'_1, \quad (8.41)$$

de donde

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{S'_1}{2q}. \quad (8.42)$$

Si se multiplica (8.42) por  $h$  y se le suma (8.29) multiplicada por  $q$ , resulta

$$\frac{\partial(hq)}{\partial t} + \frac{\partial(hqu)}{\partial x} + \frac{\partial(hqv)}{\partial y} = \frac{hS'_1}{2q}. \quad (8.43)$$

Procediendo de igual modo con (8.28) se llega a

$$\frac{\partial(hr)}{\partial t} + \frac{\partial(hru)}{\partial x} + \frac{\partial(hrv)}{\partial y} = \frac{hS'_2}{2r}. \quad (8.44)$$

En (8.43) y (8.44),  $S'_1$  y  $S'_2$  tienen el mismo valor que en **8.3** y, teniendo en cuenta (8.35), el sistema de ecuaciones mantiene la forma (8.32)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial y} = \mathbf{S},$$

pero ahora

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} hq \\ hr \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} hqu \\ hru \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} hqv \\ hrv \end{pmatrix}, \quad (8.45)$$

y las componentes del término fuente son

$$S_1 = \frac{h}{2q} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial q^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial q^2}{\partial y} \right) + \nu_t P_{hs} + P_{kV} - r^2 \right], \quad (8.46)$$

$$S_2 = \frac{h}{2r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial r^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial r^2}{\partial y} \right) + c_{1\varepsilon} c_\mu q^2 P_{hs} + P_{\varepsilon V} - c_{2\varepsilon} \frac{r^4}{q^2} \right], \quad (8.47)$$

análogas a las anteriores (8.37)-(8.38), sustituyendo  $k$  y  $\varepsilon$  por  $q^2$  y  $r^2$  y multiplicando las componentes del término fuente por  $\frac{1}{2q}$  y  $\frac{1}{2r}$ , respectivamente.

## 8.5. Discretización

Las ecuaciones  $k - \varepsilon$  en forma conservativa se discretizan con el mismo método utilizado con las de aguas someras en el capítulo 4.4. La ecuación matricial (8.32) puede expresarse, utilizando el operador  $\nabla$ , como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathbf{S}, \quad (8.48)$$

siendo

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = (\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2). \quad (8.49)$$

Integrando (8.48) en cada celda  $C_i$  y aplicando el teorema de la divergencia al segundo sumando, resulta

$$\iint_{C_i} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} dA + \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \iint_{C_i} \mathbf{S} dA. \quad (8.50)$$

A continuación se analizan los distintos términos de (8.50).

### 8.5.1. Derivada temporal

La derivada temporal se discretiza mediante el método de Euler hacia adelante

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \right|_{C_i, t_n} \approx \frac{\boldsymbol{\gamma}_i^{n+1} - \boldsymbol{\gamma}_i^n}{\Delta t}, \quad (8.51)$$

con lo que el primer sumando de la ecuación (8.50) se convierte en

$$\iint_{C_i} \frac{\boldsymbol{\gamma}_i^{n+1} - \boldsymbol{\gamma}_i^n}{\Delta t} dA. \quad (8.52)$$

Tanto  $\boldsymbol{\gamma}_i^{n+1}$  y  $\boldsymbol{\gamma}_i^n$  como  $\Delta t$  son constantes en el volumen finito, por lo que salen de la integral, resultando

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}_i^{n+1} - \boldsymbol{\gamma}_i^n}{\Delta t} A_i. \quad (8.53)$$

### 8.5.2. Término de flujo

En el segundo sumando de (8.50) la integral de línea se descompone en un sumatorio de integrales a lo largo de cada una de las aristas  $\Gamma_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$

$$\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl. \quad (8.54)$$

Cada arista del contorno  $\Gamma_{ij}$  de la celda se representa por el vector normal

$$\boldsymbol{\eta}_{ij} = \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij} = \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^T, \quad (8.55)$$

por lo que el flujo de  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  a través de una arista de longitud unidad será

$$\mathbf{Z}_\nu = (\tilde{\alpha} \mathbf{H}_1 + \tilde{\beta} \mathbf{H}_2). \quad (8.56)$$

El flujo se descentra *upwind*, como en 4.4.3.

$$\phi_\nu(\boldsymbol{\gamma}_i^n, \boldsymbol{\gamma}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) = \frac{\mathbf{Z}_\nu(\boldsymbol{\gamma}_i^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) + \mathbf{Z}_\nu(\boldsymbol{\gamma}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}_\nu(\mathbf{U}_Q, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})| (\boldsymbol{\gamma}_j^n - \boldsymbol{\gamma}_i^n), \quad (8.57)$$

donde  $\boldsymbol{\gamma}_i^n$  y  $\boldsymbol{\gamma}_j^n$  representan los valores del vector de variables en los puntos  $I$  y  $J$  y  $\mathbf{Q}_\nu$  es la matriz jacobiana del flujo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\nu &= \frac{d\mathbf{Z}_\nu}{d\boldsymbol{\gamma}} = \tilde{\alpha} \frac{d\mathbf{H}_1}{d\boldsymbol{\gamma}} + \tilde{\beta} \frac{d\mathbf{H}_2}{d\boldsymbol{\gamma}} = \\ &\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

$\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  son valores geométricos fijos y  $u$  y  $v$  dependen de la hidráulica, que es fija durante el proceso  $k - \varepsilon$ . Para simplificar la notación, se denota por  $\lambda$  al producto escalar del vector velocidad por el unitario  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$

$$\lambda = \tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v. \quad (8.59)$$

El valor  $\lambda$  representa entonces la componente del vector velocidad perpendicular a la arista. Será positivo si el fluido sale de la celda, negativo si entra y nulo si el vector velocidad es paralelo a la arista. Con este cambio de notación, las matrices  $\mathbf{Q}_\nu$  y  $|\mathbf{Q}|_\nu$  quedan

$$\mathbf{Q}_\nu = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (8.60)$$

$$|\mathbf{Q}|_\nu = \begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix}. \quad (8.61)$$

La matriz  $|\mathbf{Q}|_\nu$ , que depende exclusivamente de las componentes de la velocidad y de  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , se evalúa -como en (4.24)- en el estado intermedio

$$\mathbf{U}_Q = \frac{\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_j}{2}. \quad (8.62)$$

Se observa que, al ser  $\mathbf{Q}_\nu$  diagonal, coincide con su matriz diagonal de autovalores y no es preciso utilizar la descomposición (4.23).

El segundo término de (8.50) se discretiza como en (4.34)

$$\sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{vij}^n, \quad (8.63)$$

siendo  $\boldsymbol{\phi}_{vij}^n$  el flujo unitario discreto

$$\boldsymbol{\phi}_{vij}^n = \frac{(\tilde{\alpha}\mathbf{H}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{H}_2)_i^n + (\tilde{\alpha}\mathbf{H}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{H}_2)_j^n}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{Q}|_{\nu U_Q} (\boldsymbol{\gamma}_j^n - \boldsymbol{\gamma}_i^n). \quad (8.64)$$

Se ha planteado el descentrado del flujo de esta manera para actuar en consonancia con el método seguido en 4.4.3 y porque de este modo resulta más sencilla la modificación del sumando de descentrado, que se analiza en 9.1.2. No obstante, es interesante observar lo siguiente.

Se está calculando el flujo de  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  a través de la arista situada entre  $I$  y  $J$ , a partir de los valores del flujo en los nodos  $I$  y  $J$ . En las expresiones del flujo aparecen tanto las variables turbulentas  $k$  y  $\varepsilon$  como las hidráulicas  $h$ ,  $u$  y  $v$ .

Si se da a estas últimas, tanto al calcular el flujo en  $I$  como en  $J$ , su valor en el estado intermedio  $\mathbf{U}_Q$

$$u_Q = \frac{(hu)_i + (hu)_j}{h_i + h_j}, \quad (8.65)$$

$$v_Q = \frac{(hv)_i + (hv)_j}{h_i + h_j}, \quad (8.66)$$

resulta, prescindiendo del índice temporal para las variables turbulentas,

$$\mathbf{Z}_{\nu i} = (\tilde{\alpha}\mathbf{H}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{H}_2)_i = \left\{ \begin{array}{c} hk(\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v)_Q \\ h\varepsilon(\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v)_Q \end{array} \right\}_i = \left\{ \begin{array}{c} (hk)_i\lambda_Q \\ (h\varepsilon)_i\lambda_Q \end{array} \right\}, \quad (8.67)$$

$$\mathbf{Z}_{\nu j} = (\tilde{\alpha}\mathbf{H}_1 + \tilde{\beta}\mathbf{H}_2)_j = \left\{ \begin{array}{c} hk(\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v)_Q \\ h\varepsilon(\tilde{\alpha}u + \tilde{\beta}v)_Q \end{array} \right\}_j = \left\{ \begin{array}{c} (hk)_j\lambda_Q \\ (h\varepsilon)_j\lambda_Q \end{array} \right\}, \quad (8.68)$$

de donde

$$\phi_{\nu ij} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} (hk)_i\lambda_Q + (hk)_j\lambda_Q \\ (h\varepsilon)_i\lambda_Q + (h\varepsilon)_j\lambda_Q \end{array} \right\} - \frac{1}{2} |\lambda_Q| \left\{ \begin{array}{c} (hk)_j - (hk)_i \\ (h\varepsilon)_j - (h\varepsilon)_i \end{array} \right\}. \quad (8.69)$$

Ahora, si

$$\lambda_Q > 0 \implies |\lambda_Q| = \lambda_Q, \quad (8.70)$$

entonces

$$\phi_{\nu ij} = \left\{ \begin{array}{c} (hk)_i\lambda_Q \\ (h\varepsilon)_i\lambda_Q \end{array} \right\} = \phi_{\nu i}, \quad (8.71)$$

mientras que si

$$\lambda_Q < 0 \implies |\lambda_Q| = -\lambda_Q, \quad (8.72)$$

entonces

$$\phi_{\nu ij} = \left\{ \begin{array}{c} (hk)_j\lambda_Q \\ (h\varepsilon)_j\lambda_Q \end{array} \right\} = \phi_{\nu j}. \quad (8.73)$$

En el caso de que

$$\lambda_Q = 0 \implies \phi_{\nu ij} = 0. \quad (8.74)$$

Este resultado permite una interpretación muy gráfica del descentrado *upwind* que se está describiendo. Si el fluido entra en la celda, el valor de las variables  $(hk, h\varepsilon)$  en la arista es el valor en el nodo  $J$  del que viene la corriente. Si el fluido sale resulta el valor en el nodo  $I$  de la propia celda.

### 8.5.3. Término fuente

Se procede ahora a discretizar el término fuente de (8.50). Previamente, de modo análogo a lo hecho en el apartado anterior, se define el estado intermedio  $\gamma_Q^n$  para las variables turbulentas como el promedio de sus valores en los puntos  $I$  y  $J$

$$k_Q^n = \frac{h_i k_i^n + h_j k_j^n}{h_i + h_j}, \quad (8.75)$$

$$\varepsilon_Q^n = \frac{h_i \varepsilon_i^n + h_j \varepsilon_j^n}{h_i + h_j}, \quad (8.76)$$

$$\nu_{tQ}^n = \frac{\nu_{ti}^n + \nu_{tj}^n}{2}. \quad (8.77)$$

Teniendo en cuenta la diversidad de sumandos que componen  $\mathbf{S}$ , se procede a descomponerlo en dos partes  $\mathbf{S}_L$  y  $\mathbf{S}_R$ , que se van a integrar y discretizar por separado

$$\mathbf{S}_L = \left\{ \begin{array}{l} h \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + h \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \\ h \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + h \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \end{array} \right\}, \quad (8.78)$$

$$\mathbf{S}_R = \left\{ \begin{array}{l} h (\nu_t P_{hs} + P_{kV} - \varepsilon) \\ h \left( c_{1\varepsilon} c_{\mu k} P_{hs} + P_{\varepsilon V} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \right) \end{array} \right\}. \quad (8.79)$$

#### a) Término $\mathbf{S}_L$

Para discretizar la integral de  $\mathbf{S}_L$ , el calado  $h$  se aproxima en  $C_i$  por su valor en el nodo  $I$ , con lo que puede salir de la integral. Se aplica el teorema de la divergencia y se descomponen las integrales sobre  $\Gamma_i$  en una suma de integrales a lo largo de cada una de las aristas  $\Gamma_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$ . Abreviando la expresión de  $\mathbf{S}_L$  por medio del operador  $\nabla$  se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{C_i} \mathbf{S}_L dA &\approx \left\{ \begin{array}{l} h_i \iint_{C_i} \nabla \cdot \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) dA \\ h_i \iint_{C_i} \nabla \cdot \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) dA \end{array} \right\} = \\ &\left\{ \begin{array}{l} h_i \int_{\Gamma_i} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl \\ h_i \int_{\Gamma_i} \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} h_i \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl \\ h_i \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} dl \end{array} \right\}. \quad (8.80) \end{aligned}$$



Para calcular las derivadas parciales de  $k$  y  $\varepsilon$  respecto a  $x$  e  $y$  en las aristas de las celdas que aparecen en (8.80) se puede proceder de dos maneras, como en **7.3**: a partir de las derivadas direccionales de  $k$  y  $\varepsilon$  respecto a la dirección perpendicular a la arista o bien a partir de los valores promedio de  $\nabla k$  y  $\nabla \varepsilon$  en las celdas contiguas.

### a.1) A partir de las derivadas direccionales

Los productos escalares de los gradientes de  $k$  y  $\varepsilon$  por el vector unitario  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  se convierten en derivadas direccionales

$$\nabla k \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial k}{\partial \eta}, \quad (8.81)$$

$$\nabla \varepsilon \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}, \quad (8.82)$$

que se discretizan como en (7.15)-(7.16)

$$\frac{\partial k}{\partial \eta} = \frac{k_j - k_i}{2d_{ij}}, \quad (8.83)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{2d_{ij}}, \quad (8.84)$$

siendo  $2d_{ij}$  la longitud de la proyección, sobre la dirección  $\eta$ , del segmento que une los nodos  $I$  y  $J$ . Los valores de  $\nu_t$  se particularizan en  $\boldsymbol{\gamma}_Q^n$ .

Entonces, llamando  $\widehat{\mathbf{S}}_{Lij}^n$  a la integral discretizada, del término fuente difusivo por unidad de longitud de arista, correspondiente a  $\Gamma_{ij}$  y al instante  $t_n$ , se concluye

$$\widehat{\mathbf{S}}_{Lij}^n = \left\{ \begin{array}{l} h_i \frac{\nu_{ti}^n + \nu_{tj}^n}{2\sigma_k} \frac{k_j^n - k_i^n}{2d_{ij}} \\ h_i \frac{\nu_{ti}^n + \nu_{tj}^n}{2\sigma_\varepsilon} \frac{\varepsilon_j^n - \varepsilon_i^n}{2d_{ij}} \end{array} \right\}. \quad (8.85)$$

### a.2) A partir de los valores promedio en las celdas

Las derivadas parciales de  $k$  y  $\varepsilon$  en la arista se obtienen como semisuma de los valores promedio de esas derivadas parciales en las celdas contiguas (ver **7.3.2**). Estas derivadas parciales promediadas se obtienen a partir de las expresiones (7.24) y (7.25). Llamando

$$k_{xi}^n = \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)_{i,t_n}, \quad k_{xj}^n = \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)_{j,t_n}, \quad (8.86)$$

$$k_{yi}^n = \left( \frac{\partial k}{\partial y} \right)_{i,t_n}, \quad k_{yj}^n = \left( \frac{\partial k}{\partial y} \right)_{j,t_n}, \quad (8.87)$$

y haciendo lo mismo para  $\varepsilon$ , la integral discretizada del término difusivo por unidad de longitud de arista, correspondiente a  $\Gamma_{ij}$ , se escribe ahora como

$$\widehat{\mathbf{S}}_{Lij}^n = \left\{ \begin{array}{l} h_i \frac{\nu_{ti}^n + \nu_{tj}^n}{2\sigma_k} \left( \frac{k_{xi}^n + k_{xj}^n}{2} \tilde{\alpha} + \frac{k_{yi}^n + k_{yj}^n}{2} \tilde{\beta} \right) \\ h_i \frac{\nu_{ti}^n + \nu_{tj}^n}{2\sigma_\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon_{xi}^n + \varepsilon_{xj}^n}{2} \tilde{\alpha} + \frac{\varepsilon_{yi}^n + \varepsilon_{yj}^n}{2} \tilde{\beta} \right) \end{array} \right\}. \quad (8.88)$$

### b) Término $\mathbf{S}_R$

Se analiza ahora la integral del término  $\mathbf{S}_R$ , descomponiéndola en un sumatorio de integrales en las distintas subceldas que forman  $C_i$ .

$$\iint_{C_i} \mathbf{S}_R dA = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} h (\nu_t P_{hs} + P_{kV} - \varepsilon) dA \\ \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \iint_{T_{ij}} h \left( c_{1\varepsilon} c_\mu k P_{hs} + P_{\varepsilon V} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \right) dA \end{array} \right\}, \quad (8.89)$$

Cada sumando correspondiente a una subcelda  $T_{ij}$  consta de tres partes, que se tratan como sigue:

- La primera contiene el producto de  $\nu_t$  o  $k$  por el término  $P_{hs}$ , cuya expresión viene dada por (8.35). Los valores de las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  respecto a  $x$  e  $y$  son los calculados en **7.3.1**. Durante el proceso  $k - \varepsilon$  el valor de  $P_{hs}$  en cada subcelda no varía, por lo que en cada iteración se actualizan sólo los valores de  $\nu_t$  y  $k$ , asignándoles su valor en  $\boldsymbol{\gamma}_Q^n$  (8.77).
- Los términos  $P_{kV}$  y  $P_{\varepsilon V}$ , dados por (8.18) y (8.19), dependen sólo de  $U^*$  y  $h$  por lo que se calculan en el estado  $\mathbf{U}_Q$  para cada subcelda y se mantienen constantes durante todo el proceso  $k - \varepsilon$ .
- Para discretizar los términos de destrucción de energía turbulenta, que se actualizan en cada iteración, se toman los valores de las variables turbulentas en  $\boldsymbol{\gamma}_Q^n$ .

Como se ha hecho con  $\mathbf{S}_L$ , se aproxima  $h$  en  $C_i$  por su valor en el nodo  $I$ . Entonces, llamando  $\widehat{\mathbf{S}}_{Rij}^n$  a la integral discretizada del término  $S_R$  por unidad de superficie, correspondiente a la subcelda  $T_{ij}$  y al instante  $t_n$ , resulta la expresión siguiente

$$\widehat{\mathbf{S}}_{Rij}^n = \left\{ \begin{array}{l} h_i \left( \nu_{tQ}^n (P_{hs})_{ij} + (P_{kV})_Q - \varepsilon_{UQ}^n \right) \\ h_i \left( c_{1\varepsilon} c_\mu k_Q^n (P_{hs})_{ij} + (P_{\varepsilon V})_{UQ} - c_{2\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{k} \right)_Q^n \right) \end{array} \right\}. \quad (8.90)$$

Por fin, la integral de superficie en  $C_i$  del término fuente de (8.50) se aproxima como

$$\iint_{C_i} \mathbf{S} dA \approx \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \left( \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \widehat{\mathbf{S}}_{Lij}^n + A_{ij} \widehat{\mathbf{S}}_{Rij}^n \right), \quad (8.91)$$

donde  $\widehat{\mathbf{S}}_{Lij}^n$  toma una de las dos expresiones (8.85) o (8.88).

#### 8.5.4. Algoritmo

Así pues se ha obtenido una discretización hacia adelante de la derivada temporal y otras dos, de los términos flujo y fuente, que se evalúan en el instante  $t_n$ . De esta manera la ecuación (8.50) discretizada toma la forma

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}_i^{n+1} - \boldsymbol{\gamma}_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{vij}^n = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \left( \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \widehat{\mathbf{S}}_{Lij}^n + A_{ij} \widehat{\mathbf{S}}_{Rij}^n \right), \quad (8.92)$$

de donde

$$\boldsymbol{\gamma}_i^{n+1} = \boldsymbol{\gamma}_i^n + \frac{\Delta t}{A_i} \left( \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \left( \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \widehat{\mathbf{S}}_{Lij}^n + A_{ij} \widehat{\mathbf{S}}_{Rij}^n \right) - \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \|\boldsymbol{\eta}_{ij}\| \boldsymbol{\phi}_{vij}^n \right). \quad (8.93)$$

La expresión anterior proporciona un método iterativo explícito en tiempo que permite calcular el valor del vector de variables  $\boldsymbol{\gamma}$  en cada nodo  $N_i$  y en cada instante, a partir de los valores de las variables en el instante anterior, en el mismo nodo  $N_i$  y en los  $N_j$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$  que lo circundan.

## 8.6. Condiciones de contorno

### 8.6.1. Pared

Antes de describir las distintas condiciones de contorno que se utilizan en el modelo de turbulencia, se analiza brevemente el comportamiento del flujo en las proximidades de una pared. Un estudio completo puede verse en [74].

#### Fluidos reales y capa límite

Si el dominio que contiene a un fluido está limitado por un contorno sólido, en las proximidades del mismo la viscosidad juega un papel importante. En esta zona se produce un fuerte descenso de la velocidad de las partículas, hasta alcanzar el valor nulo en aquellas que se encuentran en contacto con

la pared. Prandtl, en 1904, denominó a esta zona capa límite o capa de fricción. El concepto de capa límite implica que, en un flujo con alto número de Reynolds, se pueden distinguir dos partes: una exterior, donde el efecto de la viscosidad es despreciable y una delgada capa, donde la viscosidad sí debe ser tomada en cuenta. El espesor de esta capa, menor cuanto mayor es  $Re$ , no está claramente definido, pues la velocidad varía de forma continua. Suele definirse, un tanto arbitrariamente, como espesor  $\delta$  de la capa límite, la distancia a la que la velocidad alcanza el 99 % del valor en la zona exterior

$$U|_{y=\delta} = 0.99 U_{max}, \quad (8.94)$$

siendo  $U$  el módulo de la velocidad paralela a la pared e  $y$  la distancia perpendicular a ella.

La capa límite posee características distintas en fluidos en régimen laminar y turbulento. Se analiza este segundo caso.

### La capa límite turbulenta

Si se observa el movimiento de un fluido en un canal, en la zona próxima al centro el número de Reynolds será alto (con  $U = L = 1$  y  $\nu = 10^{-6}$ , viscosidad cinemática del agua, resulta  $Re = 10^6$ ) y el régimen, turbulento. Esto significa que las fuerzas de inercia son en esa zona muy superiores a las viscosas. Sin embargo, debido a la viscosidad del fluido y a la rugosidad del contorno sólido, las partículas en contacto directo con éste estarán en reposo, con lo que el número de Reynolds en la pared será nulo.

Tomando como escala de longitudes la distancia  $y$  perpendicular a la pared, para valores de  $y$  muy pequeños el número de Reynolds también lo será, lo que indica la mayor importancia relativa de las fuerzas viscosas. Existe una zona pues, próxima a la pared, en la que la velocidad del fluido depende fundamentalmente de la distancia  $y$  a la misma, la densidad  $\rho$ , la viscosidad  $\mu$  y la fricción en la pared  $\tau_w$ . Al irse alejando de la pared, ésta sigue ejerciendo un efecto de frenado, pero la viscosidad va tomando un papel menos importante.

La tensión cortante en el fluido va disminuyendo al aumentar la distancia. Su valor en la pared se conoce como tensión de fricción  $\tau_w$ ,

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (8.95)$$

Muy cerca de la pared, se pueden considerar como escalas de velocidad y longitud las magnitudes  $U^*$  y  $\delta_\nu$  [6]. La primera es la velocidad de fricción y se define como

$$U^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (8.96)$$

La escala de longitudes viscosa  $\delta_\nu$  es

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{U^*}. \quad (8.97)$$

El número de Reynolds que resulta de estas magnitudes,  $U^*\delta_\nu/\nu$ , tiene valor unidad. A partir de  $U^*$  y  $\delta_\nu$  se pueden definir la velocidad y distancia a la pared adimensionales

$$U^+ = \frac{U}{U^*}, \quad (8.98)$$

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{yU^*}{\nu}. \quad (8.99)$$

$y^+$  puede considerarse un número de Reynolds local. Su valor determinará la importancia relativa de la viscosidad y la turbulencia.

En la figura 8.1 se representa aproximadamente la relación típica entre las magnitudes adimensionales  $y^+$  y  $U^+$  en una capa límite turbulenta. Para valores pequeños de  $y^+$ , puede considerarse lineal.

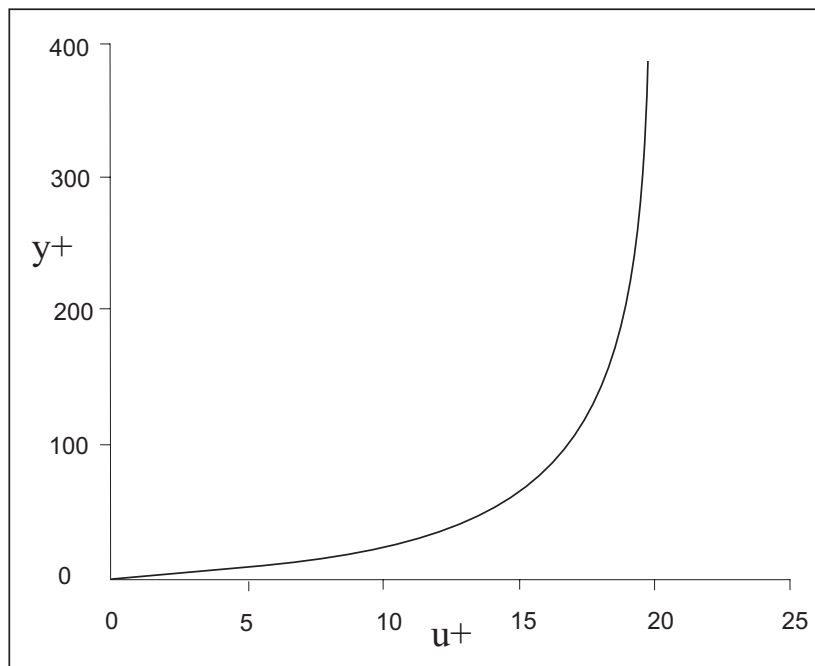


Figura 8.1: Relación entre distancia y velocidad adimensionales.

En la capa límite se distinguen dos regiones [86, pg. 59]:

### 1. Región interior

Su espesor está entre  $0.1\delta - 0.2\delta$  y en ella la velocidad crece hasta un valor de aproximadamente  $0.8U_e$ , mientras que la tensión cortante se mantiene casi constante. En esta región pueden considerarse tres subcapas:

- 1.1 Subcapa laminar o lineal. Es muy delgada ( $y^+ < 5$ ) y dominada totalmente por las tensiones viscosas, por lo que la tensión se considera constante e igual a la fricción en la pared  $\tau_w$ . A partir de esta igualdad se obtiene una relación lineal entre la velocidad y la distancia adimensionales

$$U^+ = y^+. \quad (8.100)$$

- 1.2 Subcapa intermedia ( $5 < y^+ < 30$ ). En ella las tensiones viscosas y las turbulentas son de similar magnitud.

- 1.3 Subcapa logarítmica ( $y^+ > 30$ ). Predominan las tensiones turbulentas sobre las viscosas. La tensión cortante disminuye lentamente al aumentar la distancia. A partir de consideraciones dimensionales y medidas experimentales se obtiene un perfil de velocidades logarítmico, válido para cualquier flujo [89, pg. 15],

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \quad (8.101)$$

o bien, introduciendo la constante en el logaritmo,

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+), \quad (8.102)$$

siendo la constante de Von Karman  $\kappa = 0.41$ .  $B$  varía entre 5.0 y 5.5 según los autores [54, 86].

Tanto la expresión (8.100) como las (8.101) o (8.102) se conocen como ley de la pared.

### 2. Región exterior

Esta región está libre de esfuerzos viscosos y dominada por las fuerzas de inercia. La escala de longitudes adecuada en ella es  $\delta$  y el perfil de velocidades se aleja ligeramente de la ley logarítmica, particularmente en presencia de gradientes de presión [6].

La diferencia entre la velocidad adimensional en esta zona y la que se obtendría de la ley logarítmica se puede expresar por medio de una función  $f$ , que depende de  $y/\delta$ ,

$$U^+ - U_{log}^+ = f\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (8.103)$$

Una de las formas más conocidas para  $f$  es la debida a Coles [89, pg. 18]

$$f\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{2\Pi}{\kappa} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right), \quad (8.104)$$

en la que  $\Pi$  es el parámetro de estela de Coles. En el caso de flujo en canales, con un gradiente de presión nulo,  $\Pi = 0$ , por lo que  $U^+ = U_{log}^+$ ; teniendo en cuenta (8.99)

$$y^+ = \frac{y}{\delta} \frac{\delta U^*}{\nu}, \quad (8.105)$$

resulta

$$\frac{U_{max} - U}{U^*} = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta} + A, \quad (8.106)$$

siendo  $A$  una constante, que se anula si se admite que para  $y = \delta$  se alcanza la máxima velocidad. La expresión (8.106) se conoce como ley de defecto de velocidad.

La ley logarítmica (8.101) permite conectar las leyes lineal (8.100) y de defecto de velocidad (8.106) y de hecho es válida hasta una distancia de la pared de  $y = 0.3\delta$ , más allá del final de la región interior [6].

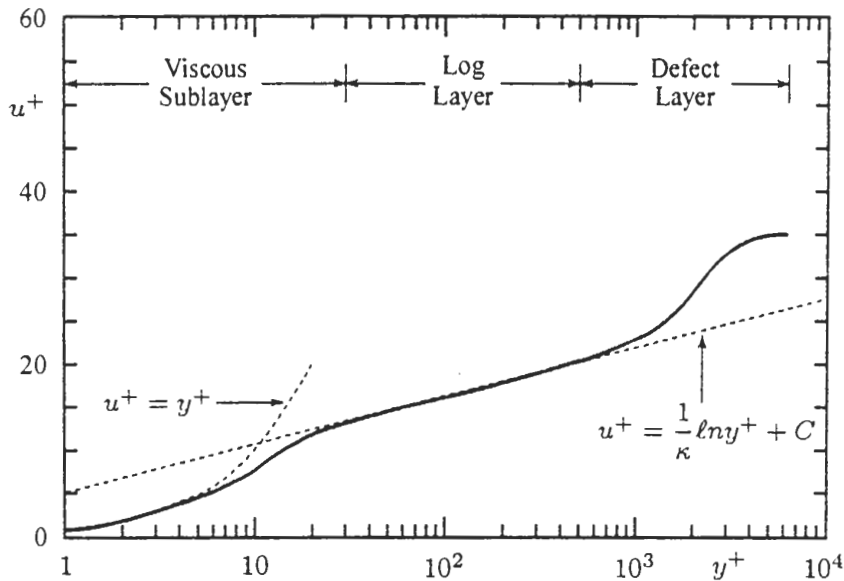


Figura 8.2: Velocidad en la capa límite. Ley de la pared (de Wilcox [89]).

En la figura 8.2, reproducida de [89, pg. 15], se representa un perfil típico de velocidad en una capa límite turbulenta, con las abscisas en escala logarítmica. Se aprecian las regiones en que se divide la capa límite, con las

leyes que gobiernan el flujo en cada una. Puede observarse que las velocidades corresponden muy exactamente con la ley de la pared hasta  $y^+ = 5$  y desde  $y^+ = 30$  hasta  $y^+ = 500$ .

Existe, por otra parte, una fórmula única para toda la región interior, debida a Spalding [88, pg. 415], que se ajusta muy bien a las expresiones (8.100) y (8.101) en sus respectivos intervalos de validez. Su expresión es

$$y^+ = U^+ + e^{-\kappa B} \left[ e^{\kappa U^+} - 1 - \kappa U^+ - \frac{(\kappa U^+)^2}{2} - \frac{(\kappa U^+)^3}{6} \right]. \quad (8.107)$$

En los cálculos realizados con el modelo de turbulencia que se muestran en el capítulo 9 se ha utilizado esta ley.

### Planteamiento de las condiciones de contorno en paredes

Las condiciones de contorno que se van a adoptar son bastante comunes en la literatura [8, 21, 54, 66, 86].

Como se acaba de ver, la presencia de una frontera sólida produce una condición de contorno de no deslizamiento, es decir, la velocidad del fluido se anula en los puntos de la pared. Inmediatamente a continuación de ella existe una zona en el flujo denominada subcapa laminar. Si las condiciones de contorno se especifican en la misma pared debe realizarse la integración de las ecuaciones  $k - \varepsilon$  en dicha subcapa, lo cual ofrece dificultades: por una parte, debido a los fuertes gradientes de velocidad existentes en esa zona, deberían situarse en ella un número considerable de nodos, con el correspondiente coste de cálculo; por otro lado, el modelo  $k - \varepsilon$  es un modelo de turbulencia para números de Reynolds altos, inadecuado para una zona dominada por esfuerzos viscosos. Por ello suele recurrirse a situar los nodos frontera fuera de la subcapa laminar, imponiendo una condición de contorno tipo Dirichlet para  $k$  y  $\varepsilon$ .

En la región interior las tensiones de Reynolds son casi constantes; en esta zona la producción y disipación de turbulencia están prácticamente en equilibrio. Lo anterior, unido a que la tensión cortante es prácticamente igual a la fricción en la pared y a las relaciones (8.18) y (8.19), conduce a [66, pg. 45]

$$k = \frac{U^{*2}}{\sqrt{c_\mu}}, \quad (8.108)$$

$$\varepsilon = \frac{U^{*3}}{\kappa y}, \quad (8.109)$$

Puede verse una deducción de las anteriores expresiones en [16].



Los nodos frontera en los que se aplican estos valores de  $k$  y  $\varepsilon$  deben encontrarse a una distancia de la pared tal que las hipótesis realizadas sean correctas. El rango admitido varía notablemente según los autores [40, 46, 54]. Se ha optado por utilizar los valores propuestos en [86, pg. 73], que parecen estar más de acuerdo con la figura 8.2. Así pues, se toma

$$30 < y^+ < 500. \quad (8.110)$$

### Cálculo de la velocidad de fricción

Se describe a continuación el modo con el que se ha estimado el valor de  $U^*$  en cada punto de la frontera.

Usando para  $y^+$  y  $U^+$  las expresiones (8.98) y (8.99), la ley logarítmica (8.102) se escribe como

$$\frac{U}{U^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{EyU^*}{\nu} \right) \quad (8.111)$$

o, lo que es lo mismo,

$$U^* = \frac{U\kappa}{\ln \left( \frac{EyU^*}{\nu} \right)}. \quad (8.112)$$

La ecuación (8.112) proporciona un modo de obtener  $U^*$  iterativamente, una vez fijados la distancia  $y$  y la velocidad  $U$  del fluido a esa distancia. Estos valores de  $y$  y  $U$  deben elegirse adecuadamente para que la  $y^+$  resultante a partir de  $U^*$  esté comprendida en el intervalo de validez de la ley logarítmica, lo cual influye en la calidad de los resultados, de lo que puede verse un ejemplo en [21].

En los casos que se exponen en **9.2** se ha tomado para  $U$  el valor del módulo de la velocidad en el contorno y estimado en cada caso el valor de  $y$ , obteniendo valores entre  $0.45 \Delta$  y  $0.7 \Delta$ , siendo  $\Delta$  el tamaño medio de la malla en la frontera. A título de ejemplo, Falconer [26] utiliza  $0.5 \Delta$ .

En el caso de utilizar la fórmula de Spalding (8.107) para la ley de la pared, se sigue el mismo procedimiento.

Calculada la  $U^*$ , pueden obtenerse los valores de  $k$  y  $\varepsilon$  en la pared (8.108) y (8.109). También puede utilizarse para el cálculo del rozamiento en los nodos frontera debido al efecto de la pared, según la expresión de [21]

$$\boldsymbol{\tau} = -\rho U^{*2} \mathbf{t}, \quad (8.113)$$

siendo  $\boldsymbol{\tau}$  la tensión en la pared y  $\mathbf{t}$  el vector unitario tangente al contorno. Esta condición de contorno se utiliza en **9.3.3** comparándola con las empleadas en **5.3.1**.

### 8.6.2. Entrada de flujo

La cantidad de turbulencia del flujo que entra en el dominio dependerá de los procesos a que haya estado sometido el fluido antes de entrar: canal recto o sinuoso, estrechamientos o ensanchamientos bruscos, etc. La condición de contorno más adecuada para una entrada es de tipo Dirichlet, es decir valores de  $k$  y  $\varepsilon$  en el contorno.

Debido a la fuerte dependencia que estos valores tienen del tipo de entrada lo más adecuado sería la obtención experimental de los de  $k$  y la estimación de los de  $\varepsilon$  a partir de las medidas de otras cantidades turbulentas. Esto no siempre es posible, aunque afortunadamente la influencia de estos valores en los resultados es pequeña [42], particularmente en canales sinuosos en los que se genera gran cantidad de turbulencia en el interior del dominio. En canales rectos, donde la turbulencia procede únicamente de la fricción con el contorno, los valores que se prescriban pueden tener mayor influencia.

Nezu y Nakagawa [54, pg. 54 y 77] proponen unas expresiones para la distribución vertical de  $k$  y  $\varepsilon$  en puntos de un canal suficientemente lejos de las paredes

$$k(z) = 4.78 U^{*2} e^{-\frac{2z}{h}}, \quad (8.114)$$

$$\varepsilon(z) = E_1 \frac{U^{*3}}{h} \sqrt{\frac{h}{z}} e^{-\frac{3z}{h}}, \quad (8.115)$$

donde  $E_1$  toma un valor de 9.8, para  $Re$  comprendido entre  $10^4 - 10^5$ . Promediando en la vertical la primera de las expresiones se llega a

$$k = \frac{1}{h} \int_0^h k(z) dz = 4.78 U^{*2} \frac{e^2 - 1}{2e^2} = 2.06655 U^{*2}. \quad (8.116)$$

La integral de  $\varepsilon$ , que no tiene primitiva y debe obtenerse numéricamente, da como resultado

$$\varepsilon = \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon(z) dz = \frac{E_1 U^{*3}}{h} \int_0^h \frac{e^{-3z/h}}{h\sqrt{z/h}} dz = 1.008687 \frac{E_1 U^{*3}}{h}. \quad (8.117)$$

Estas expresiones pueden usarse también para calcular el valor de las variables turbulentas al inicio del proceso, a menos que se disponga de otros más adecuados, o de resultados de un cálculo anterior.

### 8.6.3. Salida de flujo

En las partes del contorno en que se produce la salida del flujo, siempre que no exista una gran generación de turbulencia en una zona cercana,

se considera que predomina el transporte por convección, por lo que puede aplicarse una condición de contorno tipo Neumann, es decir

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \nabla k \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (8.118)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (8.119)$$

siendo  $n$  la dirección normal exterior a la frontera y  $\mathbf{n}$  su vector unitario.

### 8.6.4. Resumen

Como recapitulación de lo anterior, en el cálculo de la viscosidad de remolino con el modelo de turbulencia se aplican las siguientes condiciones de contorno:

- Pared sólida: Condición de contorno tipo Dirichlet

$$k = \frac{U^{*2}}{\sqrt{c_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{U^{*3}}{\kappa y}. \quad (8.120)$$

- Entrada de flujo: Condición de contorno tipo Dirichlet

$$k = 2.06655 U^{*2}, \quad \varepsilon = 1.008687 \frac{E_1 U^{*3}}{h}. \quad (8.121)$$

- Salida de flujo: Condición de contorno tipo Neumann

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0. \quad (8.122)$$

## 8.7. Cálculo del paso temporal

En el proceso hidráulico el  $\Delta t$  se calcula en cada paso, pues la condición para obtenerlo depende de los valores de  $u$  y  $v$  que varían en cada iteración. En el proceso  $k - \varepsilon$  la hidráulica es fija, por lo que se calcula una sola vez.

Para la estimación del paso temporal se utiliza la misma expresión que en el proceso hidráulico (4.46), multiplicada por un coeficiente  $\alpha$

$$\Delta t \leq \alpha \cdot \min \left( \frac{D_{ij}}{2(\sqrt{u^2 + v^2} + c_{ij})} \right), \quad (8.123)$$

siendo  $D_{ij}$  las distancias entre el nodo  $I$  y sus vecinos  $N_j$   $j \in \mathcal{K}_i$ . El valor de  $\alpha$  varía según los casos. Por ejemplo, en el cálculo de la escala de peces, que se analiza en 9.2, su valor ha sido de 0.8.



# Capítulo 9

## Validación de ambos modelos

El presente capítulo tiene tres partes. La primera se dedica fundamentalmente al análisis de la introducción del término turbulento en las ecuaciones. A continuación se comparan los resultados del modelo de turbulencia con medidas experimentales. Por último se muestra el funcionamiento del modelo completo, con sus módulos hidrodinámico y de turbulencia.

### 9.1. El modelo hidrodinámico

Como se indica en **3.6**, al utilizar las ecuaciones de aguas someras para predecir un flujo es frecuente prescindir del sumando turbulento. Se admite en este caso que las pérdidas de energía por turbulencia quedan suficientemente cuantificadas gracias al efecto de la pendiente de fricción  $S_f$ , evaluada de modo habitual por la fórmula de Manning.

El primero de los objetivos del capítulo se centra en el modelo hidrodinámico con término turbulento. El modelo simplificado, sin término turbulento, se ha validado en el capítulo **5**, por lo que ahora se comprueba la utilidad de incorporar este término a las ecuaciones, siempre y cuando se reduzca la viscosidad numérica introducida por el descentrado. Se comparan luego dos expresiones para dicho término y dos discretizaciones del mismo. Para terminar se realiza un estudio de los tiempos de cálculo resultantes del empleo de distintas discretizaciones de la derivada temporal.

#### 9.1.1. Flujo en una cavidad. Primeros resultados

Se utiliza el problema conocido como flujo en una cavidad (*cavity flow*). El *cavity flow* es banco habitual de pruebas de las ecuaciones de Navier Stokes con número de Reynolds no superior a 10000, valor por encima del

cual la solución estacionaria deja de ser estable [85]. No se han encontrado en la bibliografía resultados experimentales pero existen abundantes resultados numéricos y numerosas comparaciones entre ellos. Se toman como referencia los trabajos de Donnea y Huerta (2003) [23] y Sahin y Owens (2003) [72].

Las ecuaciones de aguas someras proceden de las de Navier Stokes, pero tienen diferencias respecto a ellas: la integración en la vertical, la ausencia de la variable presión, sustituida por el calado  $h$ , y las hipótesis simplificativas enumeradas en 3.5.1. Pese a ello -como se verá- el análisis de los resultados de este test va a ser de utilidad para conseguir el objetivo propuesto.

El problema consiste en determinar el campo de velocidades en un recinto cuadrado de dimensiones  $1 \times 1 \text{ m}^2$ . Se emplea una malla de cálculo de  $81 \times 81$  nodos. Los elementos son triángulos rectángulos isósceles, cuyos catetos miden  $1.25 \text{ cm}$ . La parte central de la malla se representa en la figura 9.1.

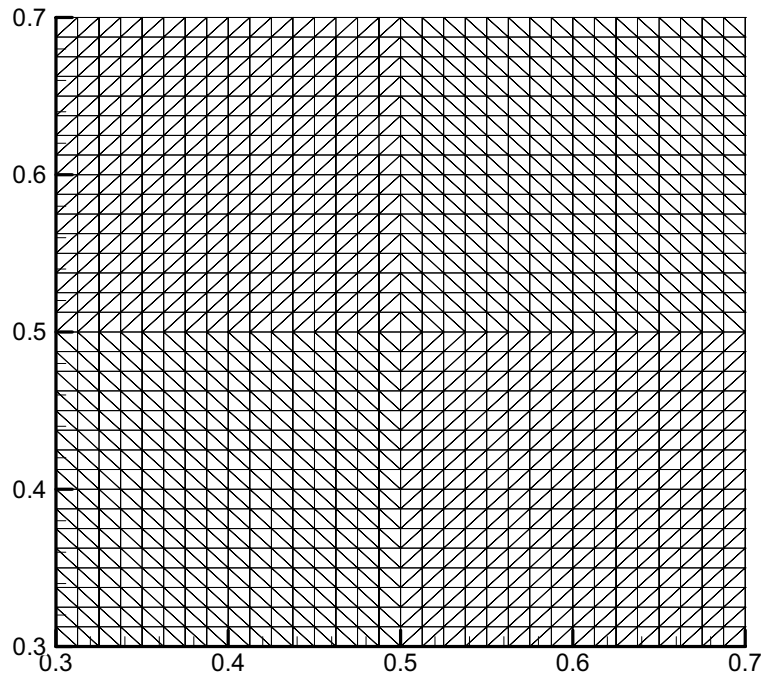


Figura 9.1: Flujo en una cavidad. Malla utilizada.

Las condiciones de contorno, de tipo Dirichlet, son: velocidad en el lado superior (incluidos los extremos) tangente al contorno y de valor unidad; velocidad nula en los otros tres lados (condición de no-deslizamiento). Suelen representarse los valores de la componente de la velocidad según el eje  $x$ , por la sección  $x = 0.5 \text{ m}$ . Las variables conservativas que se utilizan en este modelo son el calado  $h$  y los productos  $hu$  y  $hv$ . Por ello, para poder

imponer una condición de contorno  $u = 1 \text{ m/s}$ , se fijan, en el lado superior del cuadrado, la variable  $hu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$  y el calado  $h = 1 \text{ m}$ .

Los resultados dependerán del número de Reynolds  $Re$  utilizado. Tomando para las escalas de velocidad y longitud los valores  $V = 1$  y  $L = 1$ , resulta para  $Re$  el valor

$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{1}{\nu}, \quad (9.1)$$

lo que va a permitir, variando el valor de la viscosidad impuesta, simular los diferentes números de Reynolds para los que se desea probar el modelo.

Se resuelve en primer lugar un ejemplo sin viscosidad y otros dos con valores de  $\nu$  de  $0.0025$  y  $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ , que corresponderían a números de Reynolds de  $400$  y  $100$  respectivamente. En las figuras 9.2 a 9.4 pueden verse la representación de las líneas de corriente y en la 9.5 la comparación de las componentes  $u$  de la velocidad en  $x = 0.5$ .

Se observa que la diferencia entre los tres casos es muy inferior a la esperada. La causa de este resultado se encuentra sin duda en la elevada difusión numérica inherente a los métodos de primer orden, que hace poco relevante la imposición de una viscosidad de  $0.01$ .

### 9.1.2. Reducción de la viscosidad numérica

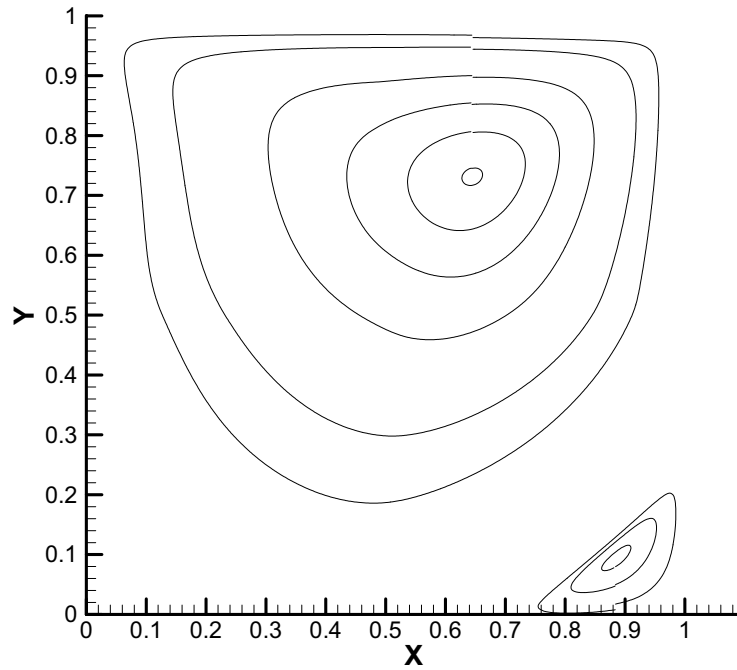
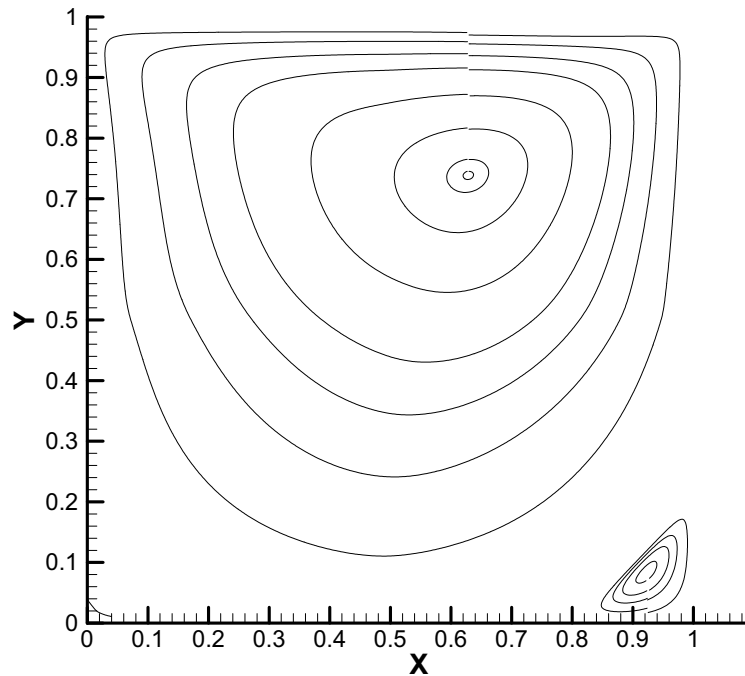
Para el cálculo en 4.4.3 de los valores del flujo discreto en el contorno de cada celda, se ha recurrido a los  $Q$ -esquemas de Van Leer. Como es sabido y se analiza en 2.5, el descentrado *upwind* estabiliza el esquema a costa de introducir una cierta cantidad de difusión numérica.

Una manera [12] de hacer menos difusivo el esquema es reducir todo lo posible el término de descentrado, siempre que se mantenga la estabilidad. Esto puede hacerse por medio de un coeficiente de descentrado  $c_d$ , de modo que la expresión (4.21) se convierte en

$$\phi_{ij}^n = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{U}_i^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij}) + \mathbf{Z}(\mathbf{U}_j^n, \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{ij})}{2} - c_d \frac{1}{2} |\mathbf{Q}|_{U_Q^n} (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_i^n), \quad 0 \leq c_d \leq 1. \quad (9.2)$$

Si  $c_d = 0$  se trata de un esquema centrado. Si  $c_d = 1$  la reducción del descentrado es nula.

Lin *et al.* [47] (citados por [12]) han utilizado con éxito valores de  $c_d = 0.1$  en cálculos acústicos. En el modelo LES descrito en [12], se han necesitado valores menores ( $0.03$ - $0.05$ ), para obtener buenos resultados. Esto tiene un coste computacional pues, como afirma este autor y se comprueba al final de este apartado, el mínimo valor de  $c_d$  necesario para la estabilidad disminuye con el tamaño de malla.

Figura 9.2: Líneas de corriente con  $\nu = 0$ .Figura 9.3: Líneas de corriente con  $\nu = 0.0025$ .



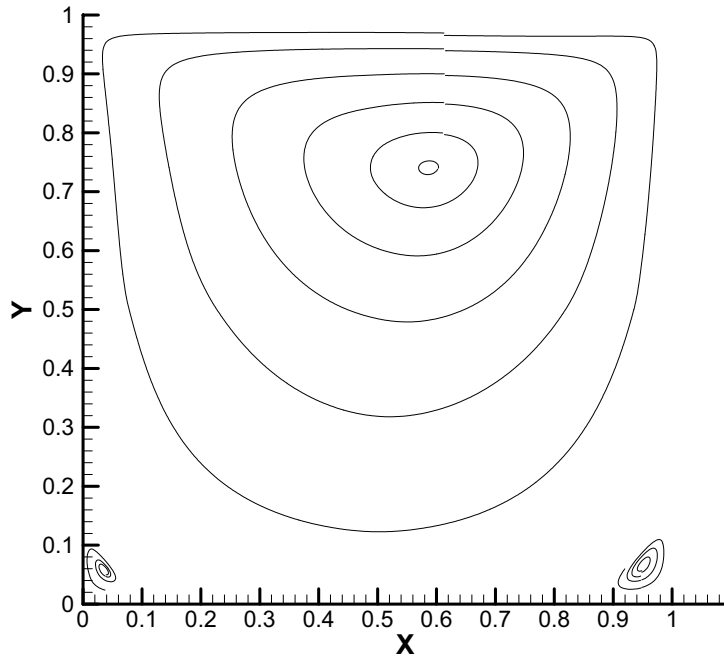


Figura 9.4: Líneas de corriente con  $\nu = 0.01$ .

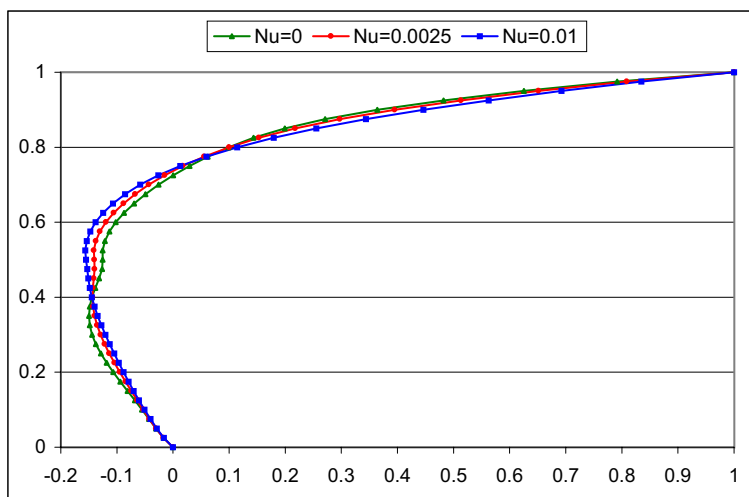


Figura 9.5: Sección central para distintas viscosidades.

### Obtención del valor óptimo de $c_d$ .

Para hallarlo se prueban tres valores distintos del coeficiente (0.01, 0.03, 0.05) en el cálculo del campo de velocidades, para unos valores de la viscosidad de 0.01, 0.0025 y 0.001, correspondientes a unos números de Reynolds de 100, 400 y 1000 respectivamente.

Para cada valor de la viscosidad, se obtienen unas líneas de corriente muy similares para los tres valores  $c_d$ , pero completamente distintas de las representadas en las figuras 9.3 y 9.4. En las figuras 9.6-9.8 se representan las secciones centrales, para cada valor de la viscosidad y cuatro valores de  $c_d$ : 0.01, 0.03, 0.05 y 1. En el caso de  $\nu = 0.001$  no se representa el menor de los valores del coeficiente pues se producen inestabilidades que obligan a detener el proceso.

Para apreciar mejor las inestabilidades que -sin impedir alcanzar régimen permanente- aparecen con el valor  $c_d = 0.01$ , se amplía una zona de la sección: figuras 9.9 y 9.10.

De las comparaciones anteriores se concluye que el valor más adecuado de  $c_d$ , con la malla de 81 x 81 nodos, es 0.03. Para este valor se muestran las velocidades en la sección central, con los tres valores de  $\nu$  (figura 9.11) y las líneas de corriente en cada caso (figuras 9.12-9.14).

### Comparación de las posiciones de los centros.

Las tablas que vienen a continuación se han obtenido de [23] y [72]. En la primera de ellas (9.1) se comparan las coordenadas del centro del remolino principal con las obtenidas por distintos autores.

- Para  $Re = 100$  los resultados del presente modelo quedan en posición intermedia entre los demás.
- Para  $Re = 400$  el centro del remolino se desplaza ligeramente hacia arriba y a la derecha, en comparación con la mayor parte de los resultados de referencia.
- Para  $Re = 1000$  el centro del remolino se encuentra encima y a la derecha de los demás resultados, aunque muy ligeramente.

Por otro lado, observando las figuras 9.12-9.14 se ve que al aumentar la viscosidad el centro del remolino se desplaza hacia arriba y hacia la derecha. Esto ayuda a interpretar el hecho mencionado de que el centro del remolino se desplace hacia arriba y a la derecha con respecto a los valores de comparación al disminuir  $\nu$ : la viscosidad numérica introducida por el descentrado (aunque muy reducida por el uso de  $c_d$ ) es fija, por lo que su importancia relativa va aumentando al disminuir la  $\nu$  impuesta; es decir, el comportamiento va siendo más difusivo.

En la tabla 9.2 figuran las coordenadas de los centros de los remolinos secundarios, que se comparan con los resultados de [72], obtenidos con una malla de  $257 \times 257$  nodos, progresivamente más fina al acercarse a los bordes. Teniendo en cuenta que la malla que se está utilizando es regular y más gruesa, la aproximación se considera muy satisfactoria.

Se ha realizado el cálculo también para el valor  $\nu = 0.0001$ , correspondiente a  $Re = 10000$ . El centro del remolino principal se encuentra aceptablemente próximo al valor de referencia (tabla 9.3) pero las líneas de corriente y la ubicación de los centros de los remolinos secundarios están más próximos a los valores obtenidos por [72] para  $Re = 5000$  por el motivo ya expuesto de la viscosidad numérica remanente. En la representación de las líneas de corriente (figura 9.15) se aprecia que comienza a formarse, sin llegar a hacerlo del todo, el remolino superior izquierdo propio de estos números de Reynolds. En la siguiente figura (9.16) pueden verse los valores de  $u$  en la sección central para valores de  $\nu = 0.01, 0.001$  y  $0.0001$ .

Por último, se comprueba en un caso práctico la afirmación hecha al principio de este apartado: el mínimo valor de  $c_d$  necesario para la estabilidad disminuye con el tamaño de malla. En la figura 9.17 se representan las líneas de corriente obtenidas en una malla de  $41 \times 41$  nodos con un  $c_d = 0.015$  y una  $\nu = 0.025$ . En la siguiente (figura 9.18) la malla utilizada ha sido de  $81 \times 81$  nodos con un  $c_d = 0.01$  y la misma viscosidad. Se aprecia a simple vista que en el segundo caso los tres remolinos se forman mejor y las líneas de corriente prácticamente no sufren las inestabilidades del primero, a pesar de haber sido calculadas con un valor menor del coeficiente.

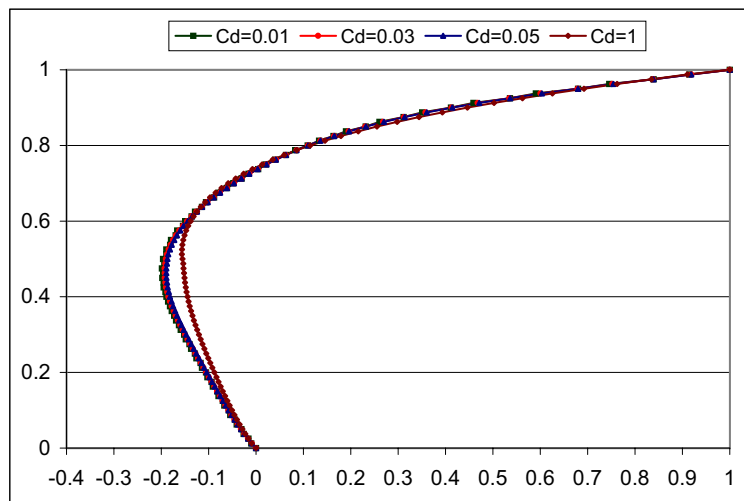


Figura 9.6:  $\nu = 0.01$ . Sección central para distintos  $c_d$ .

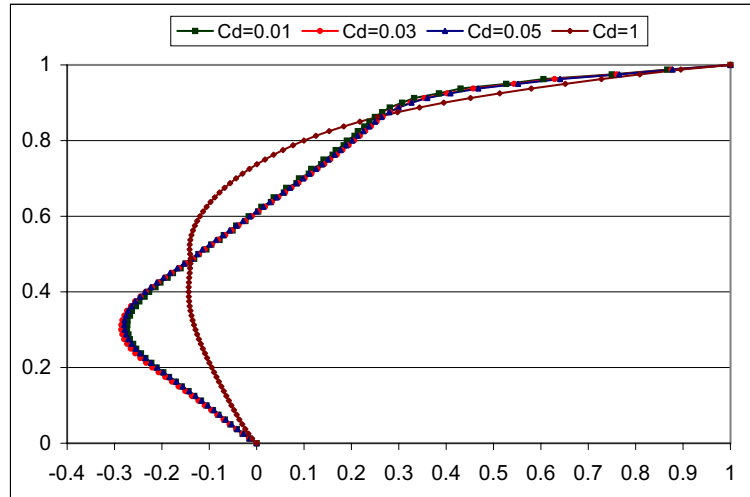


Figura 9.7:  $\nu = 0.0025$ . Sección central para distintos  $c_d$ .

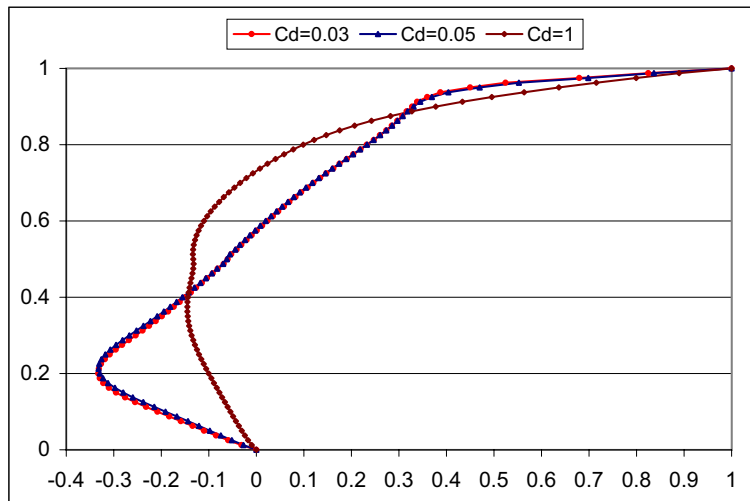


Figura 9.8:  $\nu = 0.001$ . Sección central para distintos  $c_d$ .

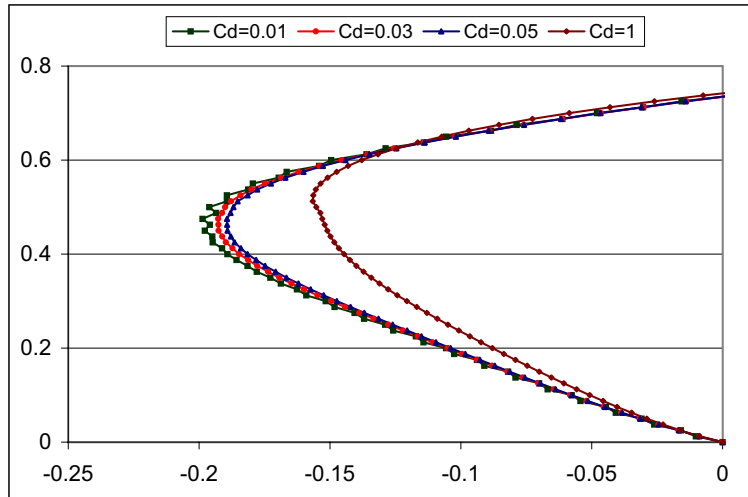


Figura 9.9: Detalle de la figura 9.6.

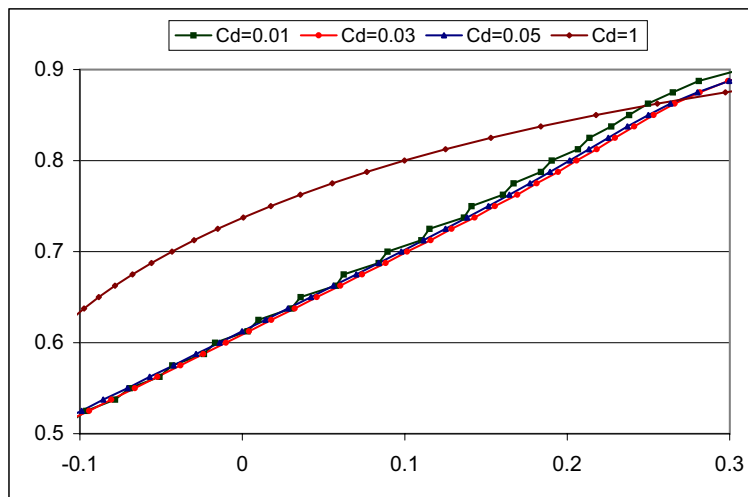


Figura 9.10: Detalle de la figura 9.7.

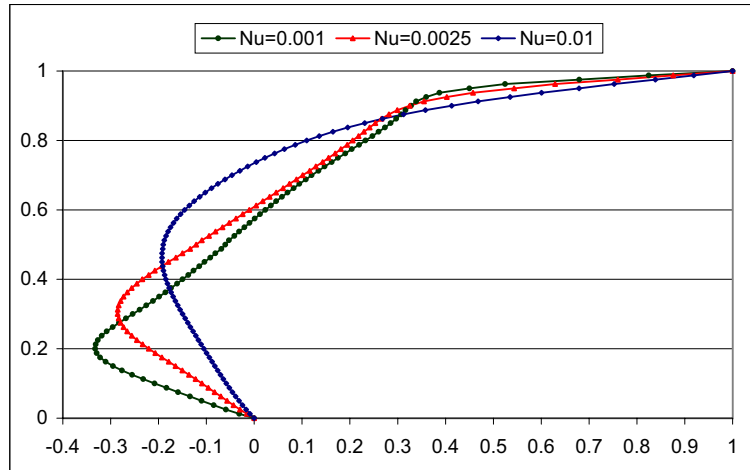


Figura 9.11:  $c_d = 0.03$ . Sección central para distintas viscosidades

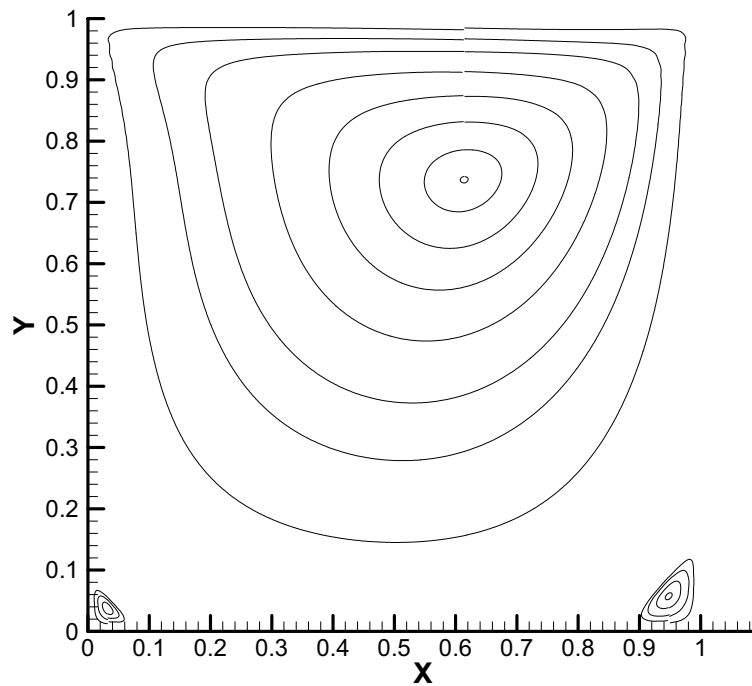


Figura 9.12:  $\nu = 0.01$  ( $Re = 100$ ). Líneas de corriente.

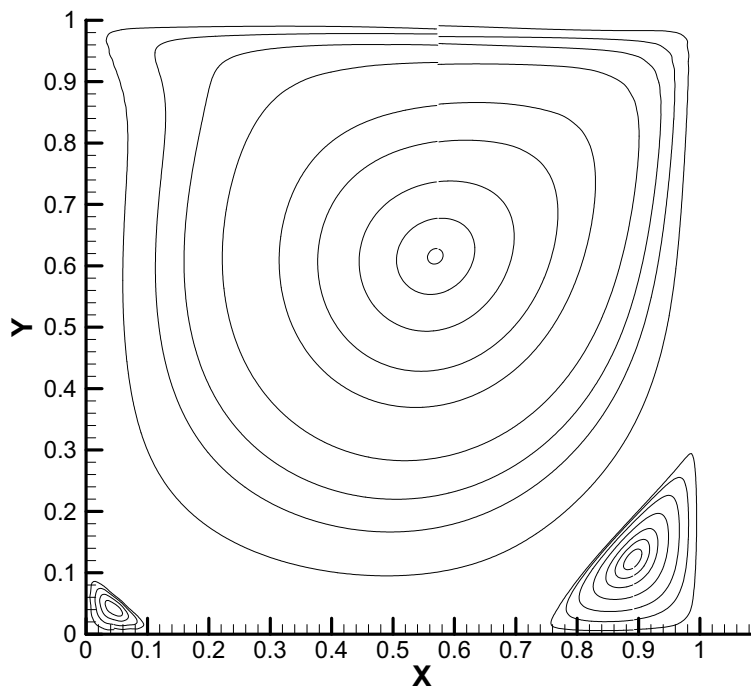
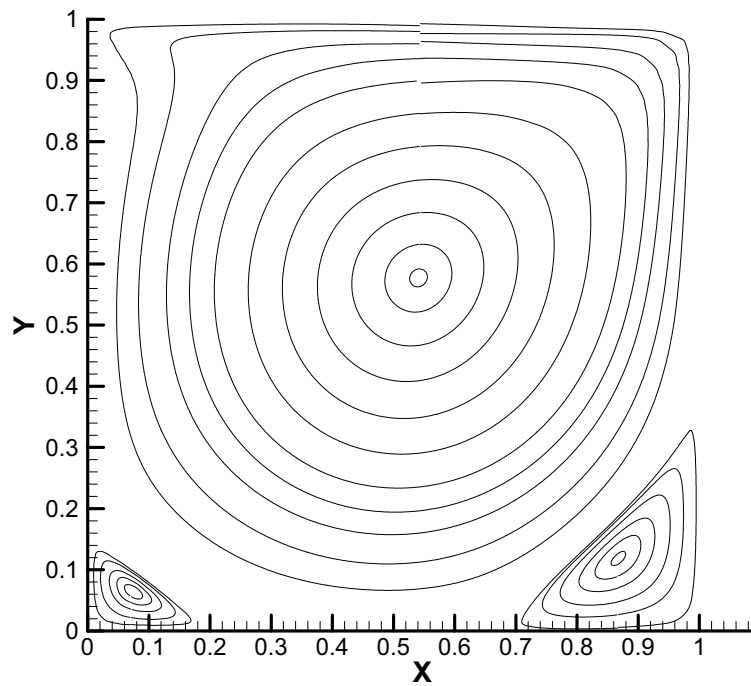
Figura 9.13:  $\nu = 0.0025$  ( $Re = 400$ ). Líneas de corriente.Figura 9.14:  $\nu = 0.001$  ( $Re = 1000$ ). Líneas de corriente.

Tabla 9.1: Coordenadas del centro del remolino principal.

| Nº Reynolds                      | Referencia             | $x_c$  | $y_c$  |
|----------------------------------|------------------------|--------|--------|
| $Re = 100$<br>( $\nu = 0.01$ )   | Burggraff (1966)       | 0.62   | 0.74   |
|                                  | Tuann & Olson (1978)   | 0.61   | 0.722  |
|                                  | Donnea & Huerta (2002) | 0.62   | 0.74   |
|                                  | Sahin & Owens (2003)   | 0.6189 | 0.7400 |
|                                  | Actual                 | 0.615  | 0.737  |
| $Re = 400$<br>( $\nu = 0.0025$ ) | Burggraff (1966)       | 0.560  | 0.620  |
|                                  | Ozawa (1975)           | 0.559  | 0.614  |
|                                  | Tuann & Olson (1978)   | 0.506  | 0.583  |
|                                  | Donnea & Huerta (2002) | 0.568  | 0.606  |
|                                  | Sahin & Owens (2003)   | 0.5536 | 0.6075 |
| Actual                           | 0.569                  | 0.615  |        |
| $Re = 1000$<br>( $\nu = 0.001$ ) | Ozawa (1975)           | 0.533  | 0.569  |
|                                  | Goda (1979)            | 0.538  | 0.575  |
|                                  | Donnea & Huerta (2002) | 0.540  | 0.573  |
|                                  | Sahin & Owens (2003)   | 0.5335 | 0.5639 |
|                                  | Actual                 | 0.541  | 0.577  |

Tabla 9.2: Coordenadas del centro de los remolinos secundarios.

| Nº Reynolds                      | Referencia           | Izquierdo |        | Derecho |        |
|----------------------------------|----------------------|-----------|--------|---------|--------|
|                                  |                      | $x_c$     | $y_c$  | $x_c$   | $y_c$  |
| $Re = 100$<br>( $\nu = 0.01$ )   | Sahin & Owens (2003) | 0.0332    | 0.0352 | 0.9424  | 0.0610 |
|                                  | Actual               | 0.032     | 0.037  | 0.948   | 0.057  |
| $Re = 400$<br>( $\nu = 0.0025$ ) | Sahin & Owens (2003) | 0.0508    | 0.0461 | 0.8835  | 0.1203 |
|                                  | Actual               | 0.045     | 0.042  | 0.892   | 0.122  |
| $Re = 1000$<br>( $\nu = 0.001$ ) | Sahin & Owens (2003) | 0.0826    | 0.0776 | 0.8658  | 0.1119 |
|                                  | Actual               | 0.075     | 0.064  | 0.868   | 0.118  |

Tabla 9.3: Coordenadas de centros para  $Re = 5000 - 10000$ .

| Nº Reynolds                        | Referencia | Central |        | Izquierdo |        | Derecho |        |
|------------------------------------|------------|---------|--------|-----------|--------|---------|--------|
|                                    |            | $x_c$   | $y_c$  | $x_c$     | $y_c$  | $x_c$   | $y_c$  |
| $Re = 5000$                        | Sahin & O. | 0.5134  | 0.5376 | 0.0720    | 0.1382 | 0.8081  | 0.0741 |
| $Re = 10000$<br>( $\nu = 0.0001$ ) | Sahin & O. | 0.5134  | 0.5289 | 0.0598    | 0.1624 | 0.7796  | 0.0610 |
|                                    | Actual     | 0.523   | 0.5325 | 0.082     | 0.132  | 0.809   | 0.080  |



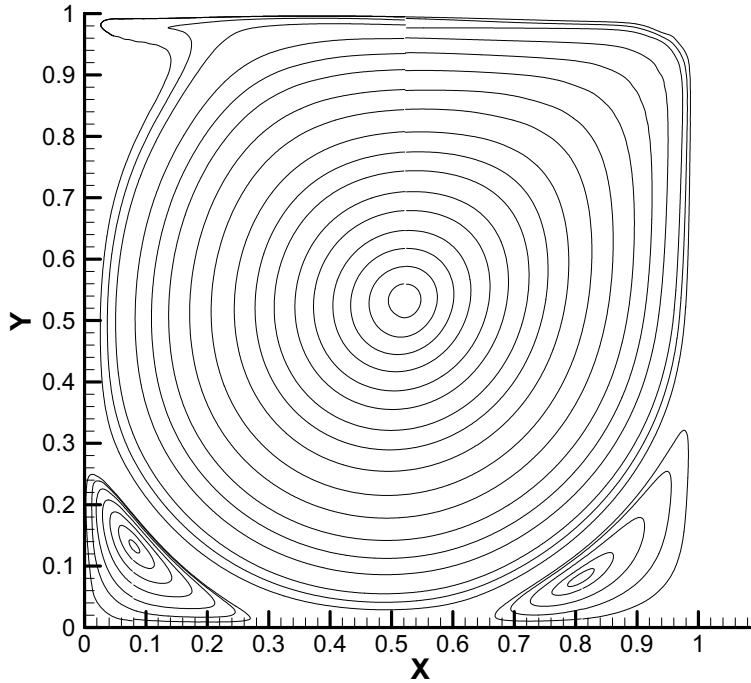


Figura 9.15:  $\nu = 0.0001$  ( $Re = 10000$ ). Líneas de corriente.

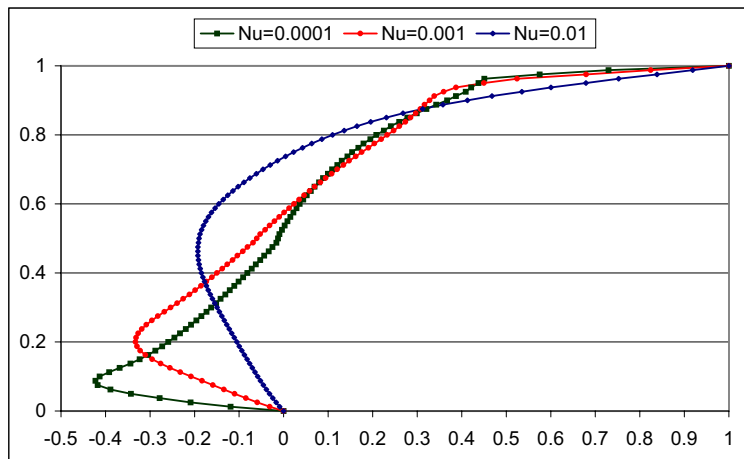
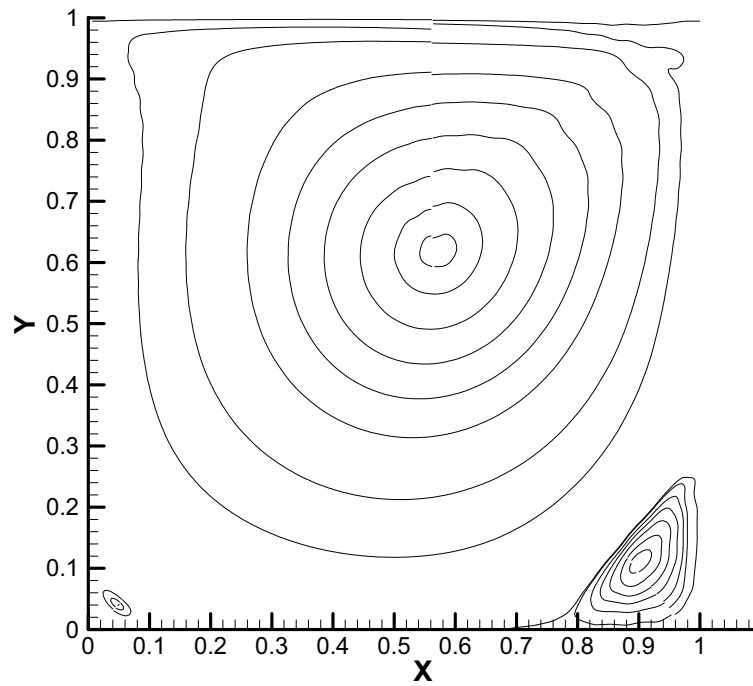
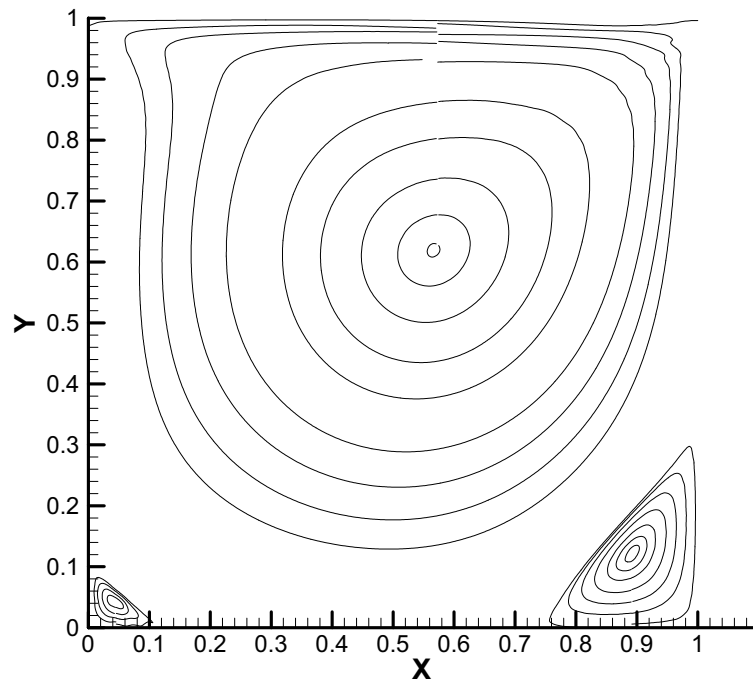


Figura 9.16:  $c_d = 0.03$ . Sección central para  $\nu = 0.01 - 0.0001$

Figura 9.17:  $c_d = 0.015$ ,  $\nu = 0.0025$ . Malla 41 x 41.Figura 9.18:  $c_d = 0.010$ ,  $\nu = 0.0025$ . Malla 81 x 81.

### 9.1.3. Comparación de formulaciones y discretizaciones del término turbulento

En el punto anterior se ha demostrado que la incorporación del término turbulento a las ecuaciones de aguas someras permite obtener campos de velocidades muy similares a los que producen las ecuaciones de Navier Stokes para distribuciones uniformes de la viscosidad. Haciendo uso de ello se comparan a continuación dos formulaciones del término turbulento y dos discretizaciones de cada una de ellas.

La primera de las formulaciones consideradas es la más completa, en el sentido de que para su obtención se emplean menos hipótesis simplificativas. Se ha deducido en **3.5.3** y viene dada por

$$S_{t1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right), \quad (9.3)$$

$$S_{t2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (9.4)$$

La segunda formulación, presentada en **3.6**, toma la forma

$$S_{t1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (9.5)$$

$$S_{t2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (9.6)$$

De las dos discretizaciones, la primera -obtenida por medio de las derivadas direccionales- se describe en **7.3.1** y la segunda -utilizando los valores promedio en cada celda- en **7.3.2**.

Así pues, combinando estas opciones, se han probado 4 casos:

- a) LC1: Expresión más completa del término turbulento, discretizada utilizando los valores promedio en cada celda. Con esta combinación se han obtenido los resultados que se muestran en las figuras (9.2) a (9.18).
- b) LC2: La expresión anterior, discretizada por medio de las derivadas direccionales.
- c) LA1: Expresión simplificada del término turbulento, discretizada utilizando los valores promedio en cada celda.
- d) LA2: La expresión anterior, discretizada por medio de las derivadas direccionales.

Para la comparación se utilizan los valores de viscosidad  $\nu = 0.001$  y coeficiente de descentrado  $c_d = 0.03$ . El caso LC1 ha sido calculado ya y se representa en la figura 9.14. Las líneas de corriente en el caso LA1 no se representan pues las ligeras diferencias numéricas con el caso LC1 existentes no se aprecian a simple vista. Los casos LA2 y LC2 pueden verse en las figuras 9.19 y 9.20. Se representan también (figura 9.21) los valores de la componente  $u$  de la velocidad en la sección central del dominio.

Analizando estas figuras se observa lo siguiente:

- LC1-LA1: Si se discretiza utilizando los valores promedio apenas hay diferencia entre los resultados de las dos formulaciones del término turbulento.
- LC2-LA2: Si la discretización se realiza por medio de las derivadas direccionales existen diferencias apreciables a simple vista. En el caso LC2 el centro del remolino principal se encuentra ligeramente encima y a la derecha del de LA2.
- LA1-LA2: Para la formulación simplificada las diferencias entre las dos discretizaciones son pequeñas.
- LC1-LC2: Para la expresión más completa las diferencias entre las dos discretizaciones son bastante más apreciables. El centro del remolino principal en el caso LC2 se encuentra encima y a la derecha de la posición en el caso LC1.
- Perfil de velocidades: se deduce de la figura 9.21 que el más correcto se da en los casos LC1-LA1 y con LA2 se obtiene la velocidad máxima negativa. LC2 presenta el perfil de peor calidad.

Con el fin de cuantificar las pequeñas diferencias observadas y utilizar también los remolinos secundarios para la comparación, se representan gráficamente los valores obtenidos por [72] de las posiciones de los centros de los remolinos, para distintos valores del número de Reynolds  $Re$ . Han sido obtenidos, como ya se ha indicado, con una malla de  $257 \times 257$  nodos, más fina cerca de los bordes. En la tabla 9.4 se encuentran las coordenadas de los tres remolinos para siete valores de  $Re$ . En las figuras 9.22-9.24 se aprecia gráficamente la evolución de las coordenadas  $x$  e  $y$  de los centros con el número de Reynolds en escala logarítmica.

En la figura 9.22 se observa que al crecer  $Re$  disminuyen tanto  $x$  como  $y$ ; es decir, con menos viscosidad el centro del remolino principal se desplaza hacia abajo y a la izquierda.

En la siguiente figura (9.23) se aprecia que la coordenada  $y$  crece con  $Re$ , mientras que  $x$  no sigue una tendencia clara: posee un máximo aproximadamente en  $Re = 1000$ . Puede afirmarse que, con valores crecientes de  $Re$ , el centro del remolino izquierdo sube o que un aumento de la coordenada  $y$  manifiesta un comportamiento menos difusivo.

En la figura 9.24 se observa que la  $x$  sigue una tendencia decreciente, mientras que la  $y$  muestra una tendencia decreciente a partir de  $Re = 400$ . Se puede afirmar que, con valores crecientes de  $Re$ , el centro del remolino derecho se aleja de ese borde y que, a partir de  $Re = 400$ , desciende.

En la tabla 9.5 se representan las coordenadas de los centros de los remolinos en los 4 casos que se están comparando, todos ellos para  $Re = 1000$ , junto con el valor de referencia [72]. El estudio de los centros de los tres remolinos muestra que

1. Los mejores resultados se obtienen en los casos LC1 y LA1 pues, en estos casos
  - a) Las dos coordenadas del remolino principal alcanzan el valor menor y más cercano al valor de referencia
  - b) En el remolino izquierdo la coordenada  $y$  es mayor y ambas coordenadas se aproximan más al valor de referencia.
  - c) En el remolino derecho la coordenada  $y$  es menor y ambas coordenadas están más cerca del valor de referencia.
2. Se obtienen mejores resultados con LA1 que con LA2 por los mismos razonamientos que en 1.
3. Se obtienen mejores resultados con LC1 que con LC2 por los mismos razonamientos que en 1.
4. Se obtienen mejores resultados con LA2 que con LC2 por los mismos razonamientos que en 1.

Se concluye que la discretización realizada utilizando los valores promedio parece más adecuada que la otra por obtenerse valores más próximos al de referencia y ser algo menos difusiva. Con ella, además, no existe apenas diferencia -en el ejemplo resuelto- entre los resultados de utilizar las dos formulaciones del término fuente turbulento. Se observa también que el uso del término turbulento en su formulación más completa, no mejora los resultados -en el ejemplo analizado- respecto a la formulación simplificada; los iguala si se utiliza la discretización por valores promedio.

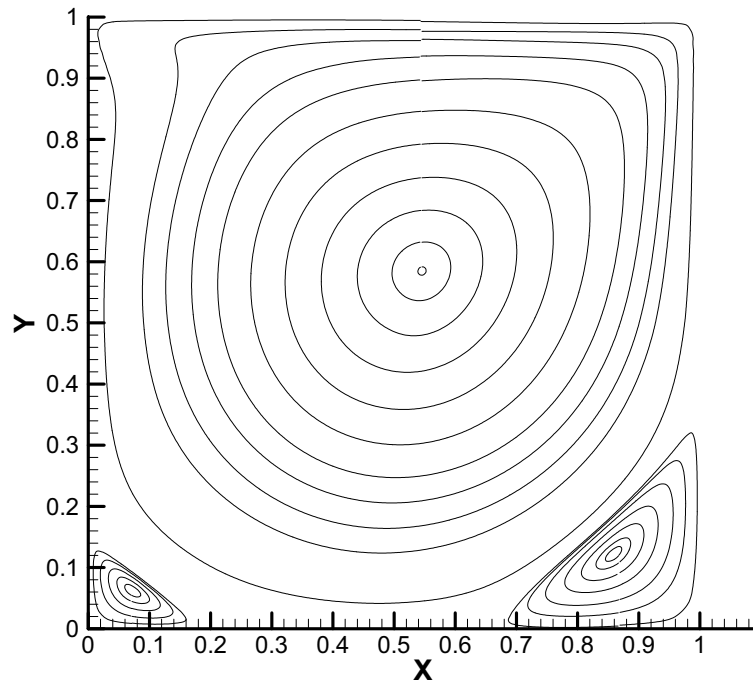


Figura 9.19: Caso LA2. Líneas de corriente.

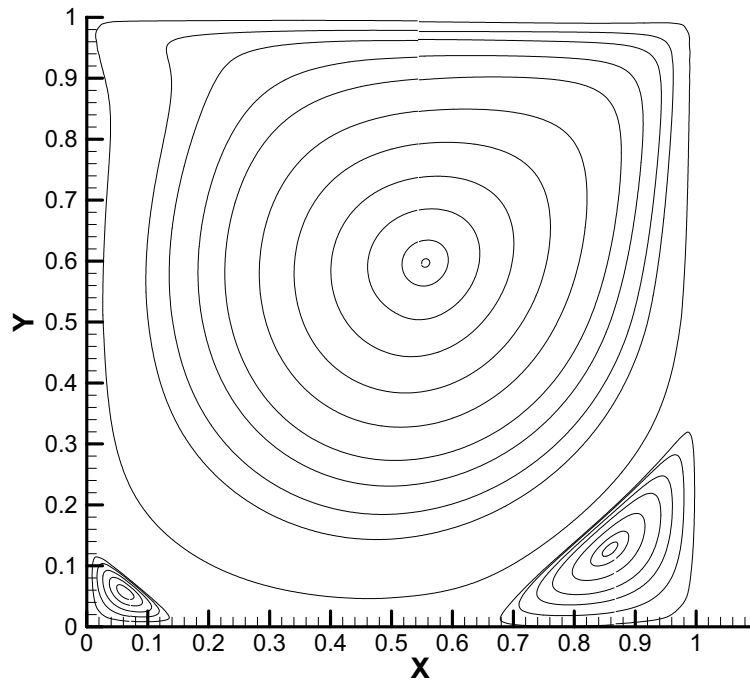


Figura 9.20: Caso LC2. Líneas de corriente.

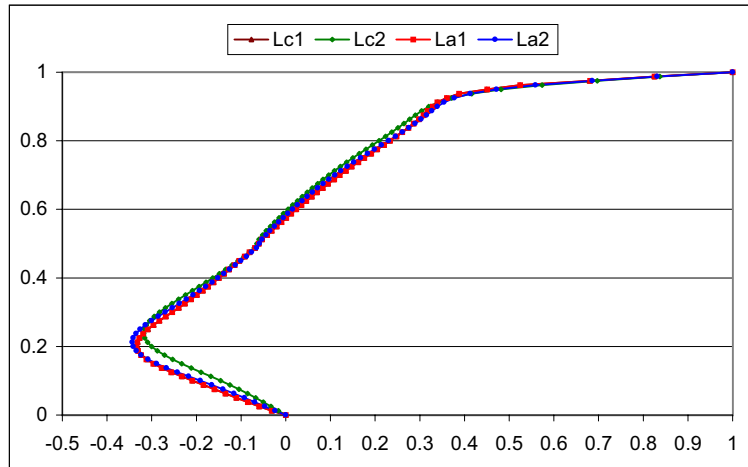


Figura 9.21: Sección central. Comparación de formulas y discretizaciones.

Tabla 9.4: Posición de centros según  $Re$  (de Sahin & Owens [72]).

| Nº Reynolds  | Central |        | Izquierdo |        | Derecho |        |
|--------------|---------|--------|-----------|--------|---------|--------|
|              | $x_c$   | $y_c$  | $x_c$     | $y_c$  | $x_c$   | $y_c$  |
| $Re = 100$   | 0.6189  | 0.7400 | 0.0332    | 0.0352 | 0.9424  | 0.0610 |
| $Re = 400$   | 0.5536  | 0.6075 | 0.0508    | 0.0461 | 0.8835  | 0.1203 |
| $Re = 1000$  | 0.5335  | 0.5639 | 0.0826    | 0.0776 | 0.8658  | 0.1119 |
| $Re = 3200$  | 0.5201  | 0.5376 | 0.0799    | 0.1203 | 0.8259  | 0.0847 |
| $Re = 5000$  | 0.5134  | 0.5376 | 0.0720    | 0.1382 | 0.8081  | 0.0741 |
| $Re = 7500$  | 0.5134  | 0.5289 | 0.0645    | 0.1525 | 0.7894  | 0.0642 |
| $Re = 10000$ | 0.5134  | 0.5289 | 0.0598    | 0.1624 | 0.7796  | 0.0610 |

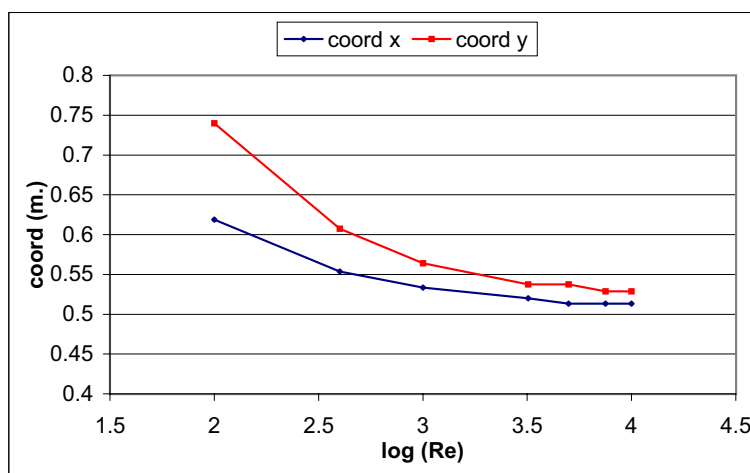


Figura 9.22: Remolino principal. Evolución de la posición del centro.

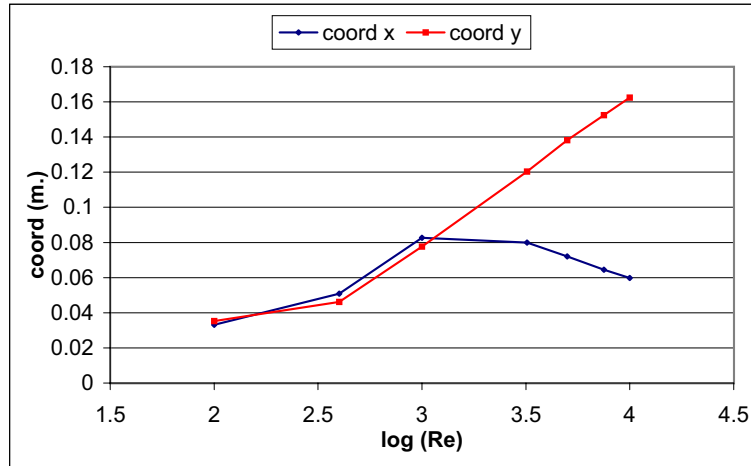


Figura 9.23: Remolino izquierdo. Evolución de la posición del centro.

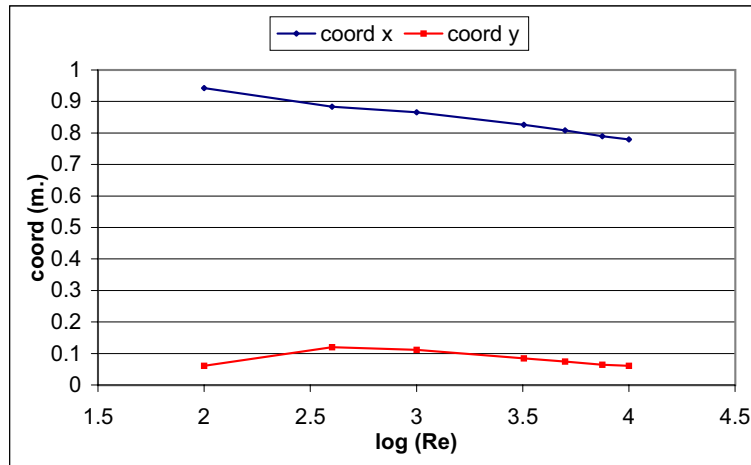


Figura 9.24: Remolino derecho. Evolución de la posición del centro.

Tabla 9.5: Coordenadas de centros en los 4 casos.  $Re = 1000$ .

|               | Central |        | Izquierdo |        | Derecho |        |
|---------------|---------|--------|-----------|--------|---------|--------|
|               | $x_c$   | $y_c$  | $x_c$     | $y_c$  | $x_c$   | $y_c$  |
| Sahin & Owens | 0.5335  | 0.5639 | 0.0826    | 0.0776 | 0.8658  | 0.1119 |
| LC1/LA1       | 0.541   | 0.577  | 0.075     | 0.064  | 0.868   | 0.118  |
| LA2           | 0.547   | 0.585  | 0.072     | 0.062  | 0.859   | 0.122  |
| LC2           | 0.556   | 0.597  | 0.063     | 0.056  | 0.859   | 0.127  |



### 9.1.4. Descentrado del término turbulento

Como se adelanta en 7.5, se comprueba ahora la no conveniencia de descentrar el término turbulento. Se han resuelto dos casos. En el primero, con un valor de  $\nu = 0.01$ , se producen inestabilidades que obligan a detener el cálculo. Con un valor menor para la viscosidad,  $\nu = 0.001$ , se obtienen unas líneas de corriente (figura 9.25) que pueden compararse con las obtenidas sin descentrar (figura 9.14).

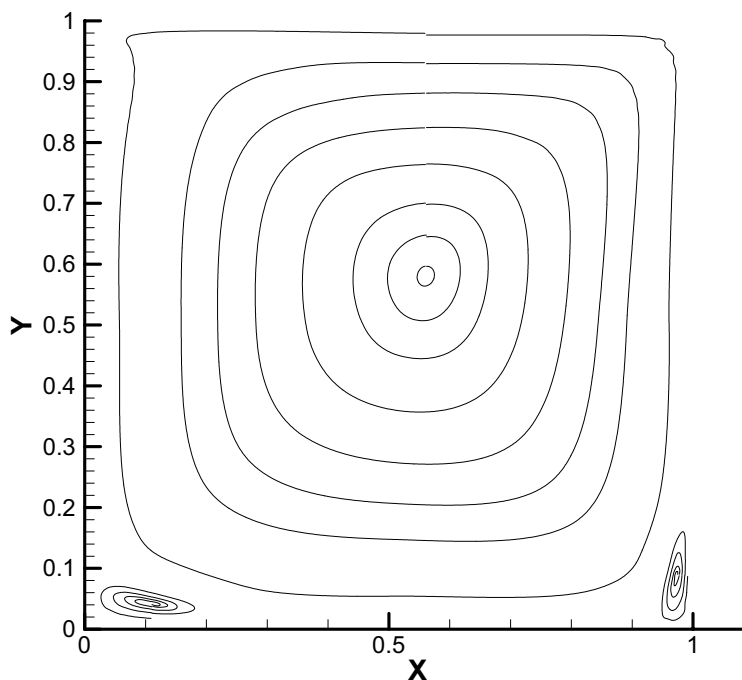


Figura 9.25:  $\nu = 0.001$ . Líneas de c. con descentrado del término turbulento.

### 9.1.5. Métodos de Runge-Kutta y Adams-Moulton.

En el capítulo 6 se describen dos modos de discretizar la derivada temporal alternativos al de Euler, los métodos de Adams-Moulton y Runge-Kutta. En dicho capítulo se ha realizado una comparación concluyendo que arrojan los mismos resultados, sin suponer ningún ahorro computacional.

Sin embargo, al disminuir la viscosidad numérica por medio del coeficiente de descentrado, sí se aprecian diferencias en tiempo de cálculo. Estas diferencias dependen del método empleado (mayor ahorro con el de Runge-Kutta), de la viscosidad impuesta (a menor viscosidad, mayor ahorro) y del coeficiente de descentrado (con menor  $c_d$ , menor viscosidad numérica).

Como se dice en **6.4**, se considera que se ha alcanzado régimen permanente cuando el incremento de las distintas variables en todos los nodos, en un determinado escalón de tiempo, es menor que una cierta tolerancia  $\varepsilon$ . Al utilizar el método de Euler se toma para  $\varepsilon$  el valor  $10^{-6}$ .

El paso temporal admisible con el método de Adams-Moulton ha resultado ser unas 9 veces el del método de Euler y con el de Runge-Kutta unas 25 veces. Por ello, para la tolerancia  $\varepsilon$  en cada uno de estos métodos se emplea el valor  $k \cdot 10^{-6}$ , siendo  $k$  la relación entre los  $\Delta t$  admisibles.

Con ambos métodos se alcanza el régimen permanente en un número de iteraciones considerablemente menor que con el método de Euler. Por otra parte, cada paso temporal por el método de Runge-Kutta dura, en tiempo de cálculo, unas cuatro veces el de Euler. En el método de Adams-Moulton este tiempo depende del número de iteraciones de la fase correctora, que en este caso ha sido generalmente sólo una, con lo que la relación de duraciones de cada iteración ha resultado aproximadamente 2.

A continuación se muestran dos ejemplos del ahorro de tiempo logrado, calculados con una malla de 41 x 41 nodos y distintos valores para la viscosidad y el coeficiente de descentrado. Los valores admisibles del incremento de  $t$  han sido para este caso

$$\begin{aligned}\Delta t_{EU} &\approx 6 \cdot 10^{-4} s, \\ \Delta t_{AM} &\approx 5.4 \cdot 10^{-3} s, \\ \Delta t_{RK} &\approx 1.5 \cdot 10^{-2} s.\end{aligned}$$

Se observa que el ahorro conseguido por ambos métodos respecto al de Euler difiere apreciablemente en los dos casos, pero el porcentaje de tiempo de cálculo de un método respecto al otro se mantiene constante.

1)  $\nu = 0.01$ ,  $c_d = 0.05$ .

- Iteraciones por el método de Euler: 12965.
- Iteraciones por el método de Runge-Kutta: 518.
- Iteraciones por el método de Adams-Moulton: 1439.

Los porcentajes aproximados de tiempo de cálculo resultan:

- Runge-Kutta/Euler:  $\%T_c = \frac{518 \cdot 4}{12965} 100 = 15.98 \%$ .
- Adams-Moulton/Euler:  $\%T_c = \frac{1439 \cdot 2}{12965} 100 = 22.20 \%$ .
- Runge-Kutta/Adams-Moulton:  $\%T_c = \frac{518 \cdot 4}{1439 \cdot 2} 100 = 71.99 \%$ .

2)  $\nu = 0.0001$ ,  $c_d = 0.06$ .

- Iteraciones por el método de Euler: 81755.
- Iteraciones por el método de Runge-Kutta: 2172.
- Iteraciones por el método de Adams-Moulton: 6033.

Los porcentajes aproximados de tiempo de cálculo resultan:

- Runge-Kutta/Euler:  $\%T_c = \frac{2172 \cdot 4}{81755} 100 = 10.62 \%$ .
- Adams-Moulton/Euler:  $\%T_c = \frac{6033 \cdot 2}{81755} 100 = 14.76 \%$ .
- Runge-Kutta/Adams-Moulton:  $\%T_c = \frac{2172 \cdot 4}{6033 \cdot 2} 100 = 72.00 \%$ .

Por último es interesante notar algo relativo al método de Adams-Moulton que refuerza la idea de que su rendimiento mejora con la disminución de la viscosidad numérica. En la aplicación del método descrita en **6.4** el número de iteraciones de la fase correctora era no inferior a 6, lo que lo hacía más costoso computacionalmente que el de Euler. Ahora, con una viscosidad numérica muy inferior, es suficiente una iteración correctora en la mayor parte de los pasos temporales.

### 9.1.6. Fondo no horizontal

En los apartados anteriores se ha aplicado un método para reducir la viscosidad numérica que ha permitido realizar comparaciones entre distintas formulaciones y discretizaciones del término turbulento. Estas comparaciones se han realizado con fondo horizontal. Al intentar aplicar el mismo método con fondo no horizontal, se producen oscilaciones que arruinan completamente los cálculos. Se considera que la causa es la que se expone a continuación.

La discretización que utilizada en **4.4.5** para el término fuente geométrico, tomada de Vázquez [83, pg. 100], verifica de forma exacta la *propiedad de conservación*, condición propuesta por dicha autora para evitar la propagación de ondas espúreas. El cumplimiento de esta propiedad exige que el esquema calcule exactamente la solución estacionaria de las ecuaciones que puede denominarse “fluido en reposo”, es decir

$$u = v = 0, \quad (9.7)$$

$$h = H. \quad (9.8)$$

En este caso, de velocidad nula y superficie libre horizontal, el sistema de ecuaciones se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}gh^2 \right) = gh \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}gh^2 \right) = gh \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (9.10)$$

La discretización del término de flujo y el término fuente debe ser hecha de forma que verifique exactamente el estado estacionario, cosa que se consigue con la discretización empleada. Al introducir un coeficiente de descentrado se modifica el término de flujo, lo que evita que se cumpla la *propiedad de conservación*. Por el motivo apuntado sólo ha sido posible reducir la viscosidad numérica, por la aplicación del coeficiente de descentrado, en el caso de fondo horizontal.

## 9.2. El modelo de turbulencia

### 9.2.1. Medida de las magnitudes turbulentas

Las magnitudes hidráulicas (velocidades y calados) resultan fáciles de medir y pueden estimarse aproximadamente a simple vista. Mayor dificultad se encuentra con las turbulentas, en particular con la tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$  y la viscosidad turbulenta  $\nu_t$ . La primera de ellas se define por medio de una expresión nada intuitiva (8.8) y la segunda a partir del coeficiente de proporcionalidad  $\mu_t$  de (3.35).

Se presentan en **5.3.3** algunos resultados obtenidos con el modelo hidrodinámico simplificado en una escala de peces y su comparación con las medidas realizadas [78] en el Centro de Innovación Tecnológica e Ingeniería Civil (CITEEC) de la Universidad de A Coruña. Posteriormente al trabajo mencionado se ha desarrollado, también en el CITEEC, otra tesis doctoral [59] dedicada en parte a la evaluación experimental de la energía cinética turbulenta en escalas de peces. Se emplea este segundo trabajo para validar los resultados obtenidos con el modelo de turbulencia.

Las medidas experimentales que se van a utilizar han sido obtenidas con velocímetros MicroADV (Micro Acoustic Doppler Velocimeter) de SONTEK, basados en el efecto Doppler, que producen una escasa distorsión del campo de velocidades. Estos aparatos poseen una alta precisión de medida ( $10^{-3}$  m/s) y realizan entre 80 y 250 mediciones por segundo. Los valores de salida tienen una frecuencia máxima de 50 Hz, por lo que cada valor de salida se obtiene como promedio entre varias mediciones [59, pg. 3.13]. El sistema proporciona las tres velocidades medias  $u, v, w$  y las tres desviaciones típicas  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  cuyos cuadrados (varianza) son los valores utilizados para los promedios temporales de los cuadrados de los términos de fluctuación  $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$ . De este modo la medida experimental de la energía cinética turbulenta se obtiene como [59, pg. 4.40].

$$k = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2), \quad (9.11)$$

si se tienen en cuenta las tres dimensiones, o

$$k = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2), \quad (9.12)$$

si se consideran sólo dos.

El modelo que se trata de validar es bidimensional, por lo que ha parecido más coherente con las hipótesis realizadas en su obtención tener en cuenta, para el cálculo de la  $k$  experimental, sólo las componentes en  $x$  y en  $y$  de la fluctuación de la velocidad.

### 9.2.2. Descripción del dominio

La instalación experimental consta de 8 piscinas de dos tipos distintos (figuras 9.26 y 9.27) dispuestas una a continuación de otra, primero las cuatro del tipo II y luego las cuatro del tipo I. Entre ambos grupos hay una piscina de transición, que comparte elementos de ambos. Existen también, al principio y al final, unas zona de entrada y salida.

En la comparación a que se hace referencia en el apartado anterior, ha sido suficiente el uso de un dominio de cálculo formado por tres piscinas para lograr una buena aproximación pues, como se dice en **5.3.3**, las características del flujo en las distintas piscinas del mismo tipo son prácticamente las mismas.

En el caso que se va a tratar a continuación, tras unos tanteos previos se ha observado que los niveles de energía cinética turbulenta varían notablemente, no sólo entre piscinas de distinto tipo sino también entre distintas piscinas del mismo. Esto no es de extrañar pues es conocido que en el nivel de turbulencia existente en un punto influyen, no sólo las características del flujo en ese punto, sino también el transporte de turbulencia por el fluido.

En definitiva, aunque las medidas de que se dispone se refieren sólo a una de las piscinas, se ha optado por crear una malla de toda la instalación, aunque reduciendo la zona de entrada y eliminando la de salida para poder imponer con más facilidad las condiciones de contorno.

Las medidas se han realizado en la piscina nº 7, la tercera empezando por el final. En las figuras 9.28 puede verse una parte de la malla utilizada, que consta de 14340 nodos de cálculo y 27304 elementos triangulares, de unos 3 cm de lado. En la figura 9.29 se muestra la localización de los puntos de medida de las velocidades. Las cifras indican distancias al extremo superior izquierdo de la piscina.

### 9.2.3. Campo de velocidades

El primer paso ha sido obtener el campo de velocidades en tres supuestos de caudal: 34.1, 45.8 y 54 l/s. Se ha utilizado para ello el modelo hidrodinámico simplificado, esto es sin término turbulento y sin reducción de la viscosidad numérica. En **5.3.3** se han comparado los resultados numéricos con los medidos para un caudal de 24.6 l/s obteniendo una buena aproximación. Por ello se aceptan los valores calculados por el modelo para estos tres nuevos caudales. Las condiciones de contorno de caudal y calado, al tratarse de régimen lento, se han impuesto en ambos extremos del dominio: las de caudal en el extremo aguas arriba y la de calado en el extremo aguas abajo. Esta última se ha obtenido de las medidas experimentales.

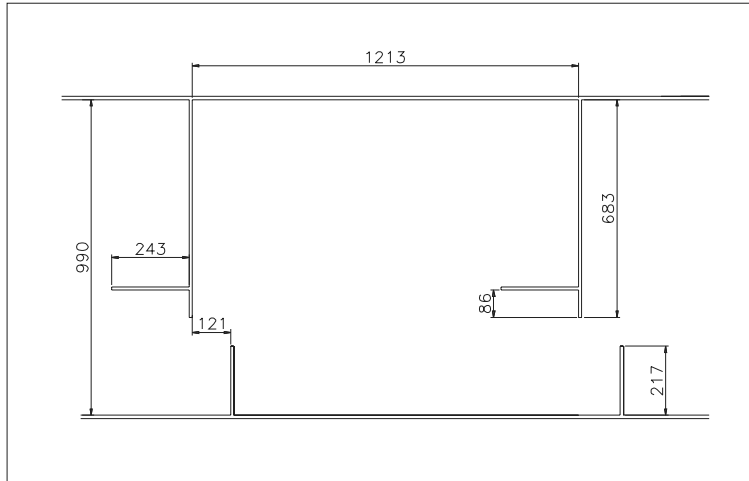


Figura 9.26: Escala de peces. Diseño tipo I. Cotas en *mm*.

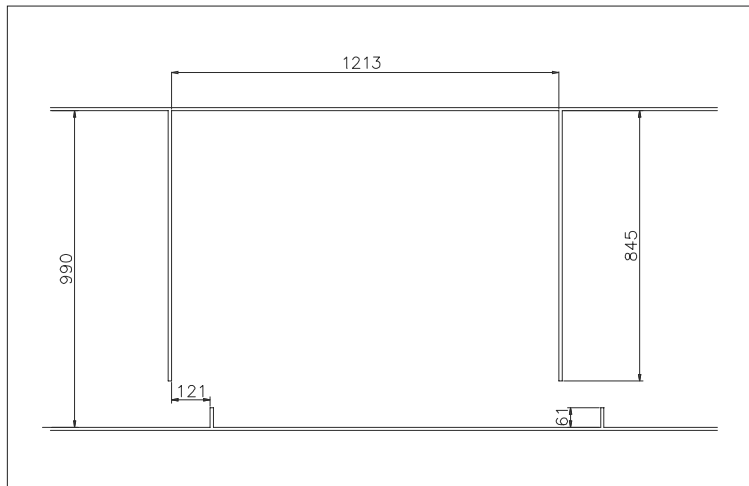


Figura 9.27: Escala de peces. Diseño tipo II. Cotas en *mm*.

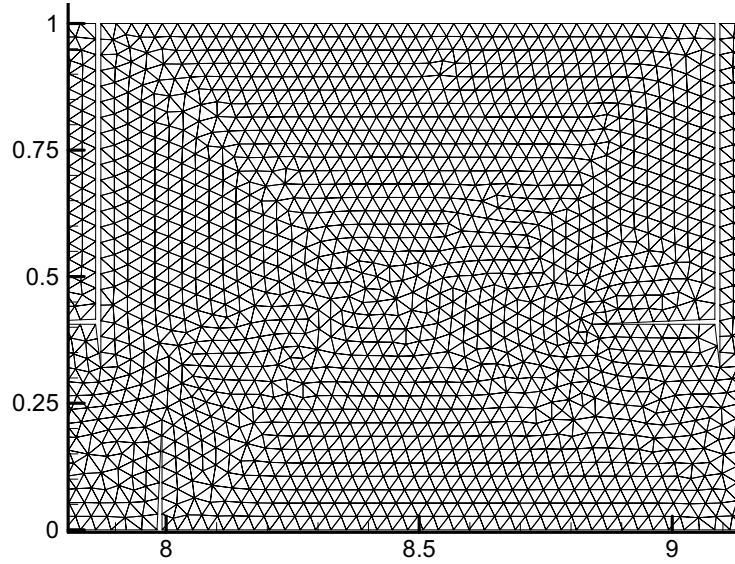


Figura 9.28: Escala de peces. Malla utilizada.

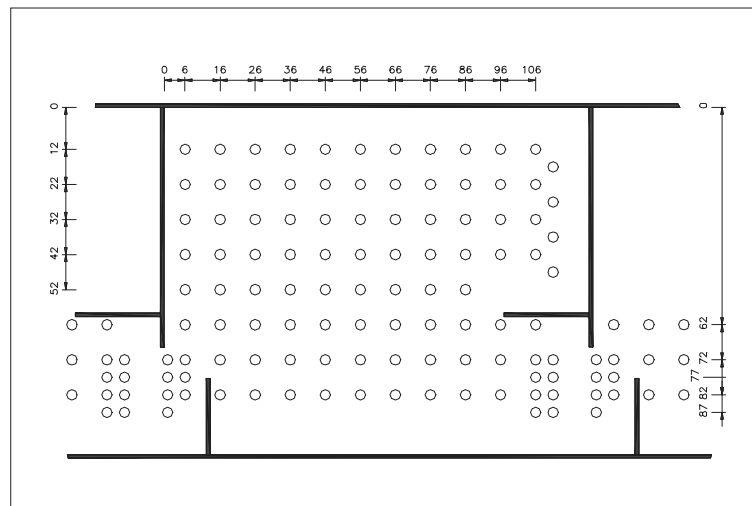


Figura 9.29: Puntos de medida de velocidades. Distancias en *cm*.



Estas condiciones de contorno son

- $q = 34.1 \text{ l/s} : h_{cc} = 0.286 \text{ m}$ .
- $q = 45.8 \text{ l/s} : h_{cc} = 0.409 \text{ m}$ .
- $q = 54.0 \text{ l/s} : h_{cc} = 0.469 \text{ m}$ .

En la pared se utiliza la condición de rozamiento, que se describe en **5.1.2**.

En la figura 9.30 se representan el módulo de la velocidad y en la 9.31 las líneas de corriente, para el menor de los caudales. En las figuras 9.32-9.37 pueden verse, para cada hipótesis de caudal, los módulos de las velocidades y las líneas de corriente en la piscina nº 7.

Se aprecian en los resultados numéricos dos fenómenos observados experimentalmente [78, pg. 124]. Al aumentar el caudal aumenta ligeramente el tamaño del remolino inferior, así como la curvatura de la línea de corriente principal. Por otra parte, la posición del centro del vórtice superior se va desplazando hacia la izquierda al aumentar el caudal, sin variar significativamente en la dirección del eje  $y$ .

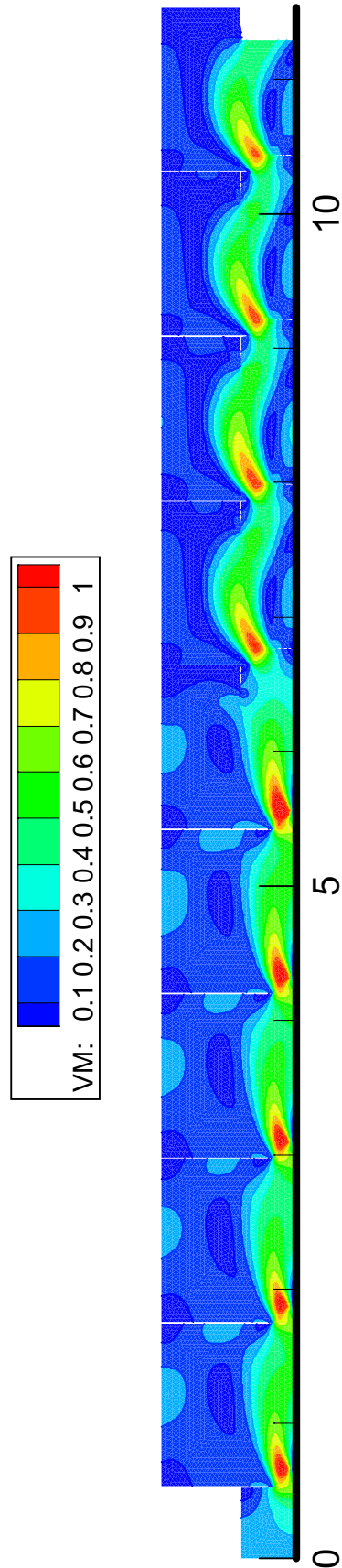


Figura 9.30:  $Q = 34.1$  l/s. Módulo de la velocidad. Conjunto.

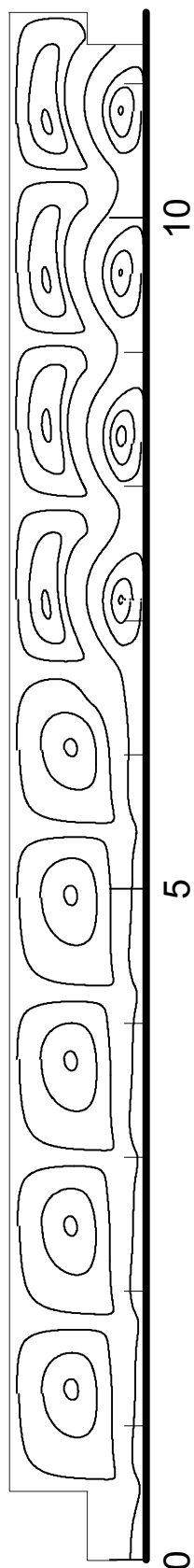


Figura 9.31:  $Q = 34.1$  l/s. Líneas de corriente. Conjunto.

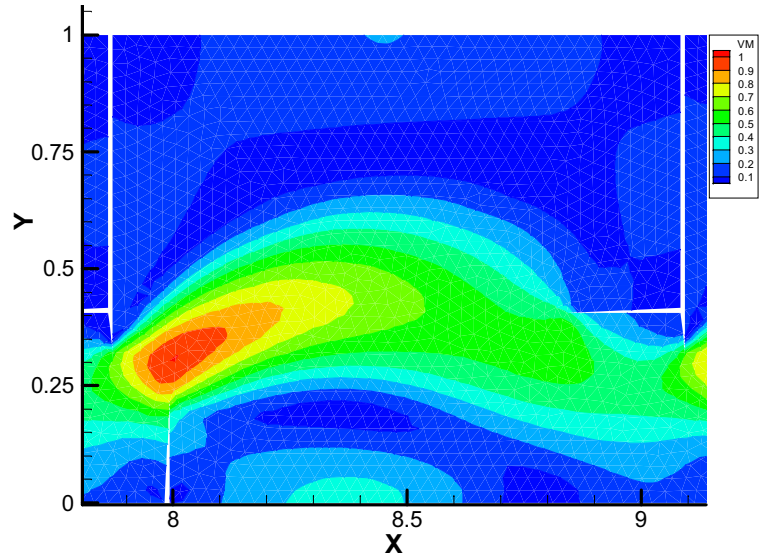


Figura 9.32:  $Q = 34.1$  l/s. Módulo de la velocidad. Piscina 7.

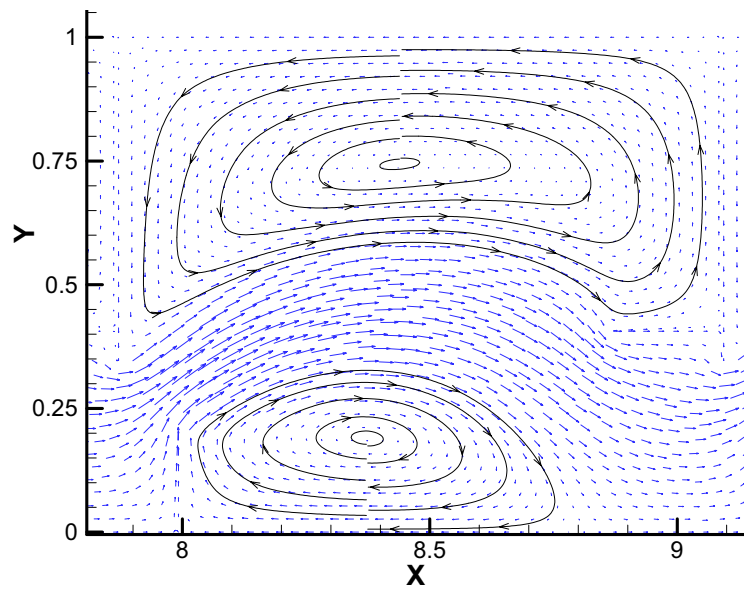


Figura 9.33:  $Q = 34.1$  l/s. Líneas de corriente. Piscina 7.

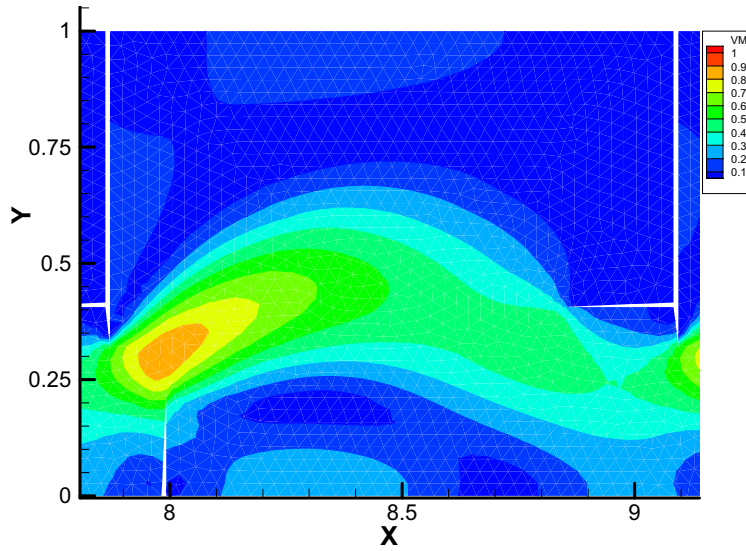


Figura 9.34:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . Módulo de la velocidad. Piscina 7.

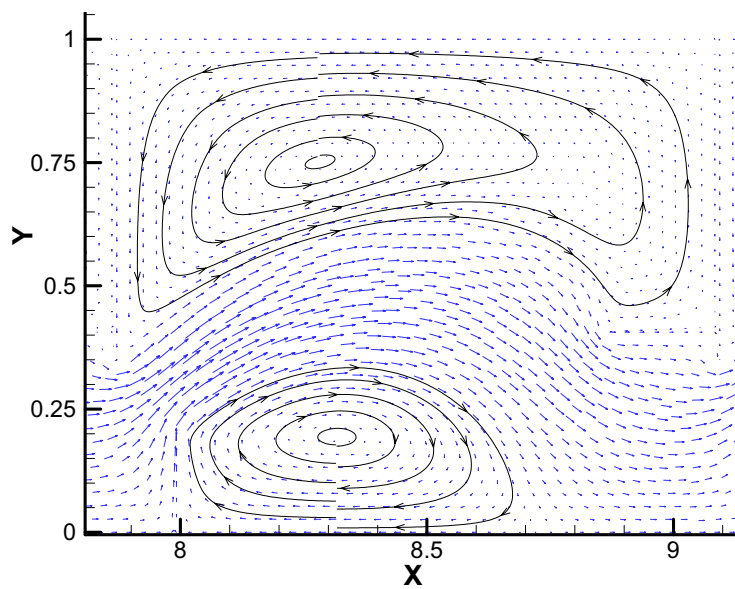


Figura 9.35:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . Líneas de corriente. Piscina 7.

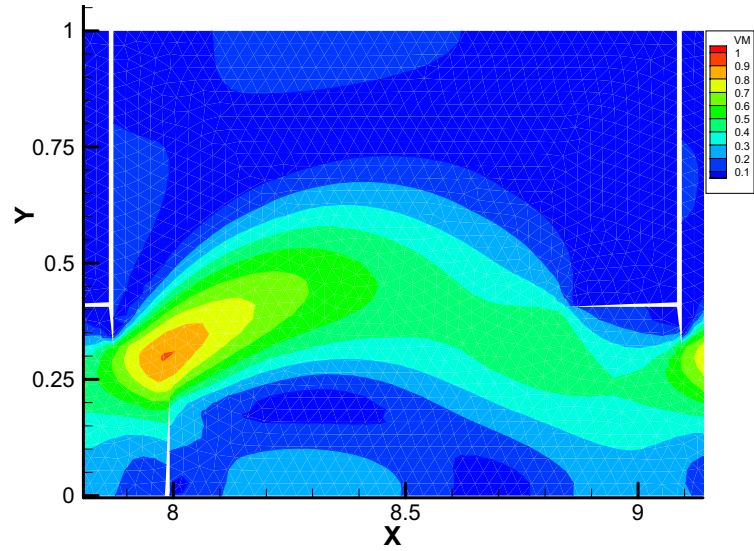


Figura 9.36:  $Q = 54.0$  l/s. Módulo de la velocidad. Piscina 7.

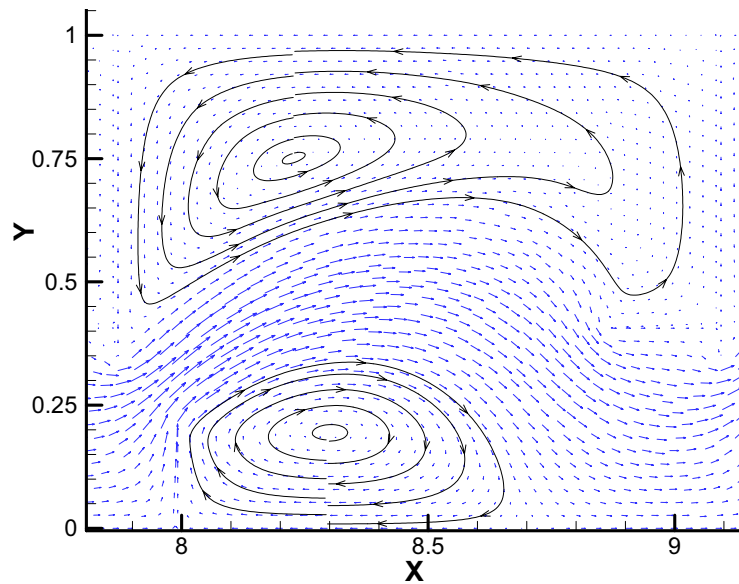


Figura 9.37:  $Q = 54.0$  l/s. Líneas de corriente. Piscina 7.

### 9.2.4. Medición de la energía cinética turbulenta

En el estudio experimental hidrodinámico realizado por [78] sobre estas escalas de peces se concluye que la profundidad a la que se realizan las mediciones tiene poca influencia sobre la velocidad y que la componente vertical de ésta toma un valor despreciable: es prácticamente nula en la línea de corriente principal y sólo en las zonas de recirculación, donde los valores de la velocidad son muy pequeños, alcanza una cierta importancia relativa. En resumen, el fenómeno puede considerarse prácticamente bidimensional.

Sin embargo, del estudio de [59] no puede concluirse lo mismo respecto de la  $k$ . En efecto, dependiendo del punto de medida considerado, se encuentran valores máximos de  $k$  cerca de la solera, a una profundidad intermedia o cerca de la superficie, con predominio de estos últimos. Para mostrar este fenómeno se representan, en las figuras 9.38-9.47, los valores medidos de la energía cinética turbulenta para los tres caudales y a las distintas distancias a la solera que se relacionan a continuación:

- $q = 34.1 \text{ l/s}$ ; 5, 10 y 16 *cm*.
- $q = 45.8 \text{ l/s}$ ; 7, 17 y 27 *cm*.
- $q = 54.0 \text{ l/s}$ ; 5, 15, 25 y 31 *cm*.

De la observación de estas figuras pueden deducirse algunas consecuencias:

- La complejidad que posee el fenómeno de la turbulencia.
- La notable variación de la energía cinética turbulenta con la profundidad y lo poco representativo que sería elegir una sólo de esas medidas.
- La dificultad que entraña el modelado de estas magnitudes turbulentas, de las que ni siquiera existe un único valor experimental para cada punto de medida.

En vista de esta dispersión de resultados, y puesto que el modelo que se trata de validar es bidimensional, se ha optado por realizar la comparación de los resultados numéricos con los promedios verticales de estas medidas.

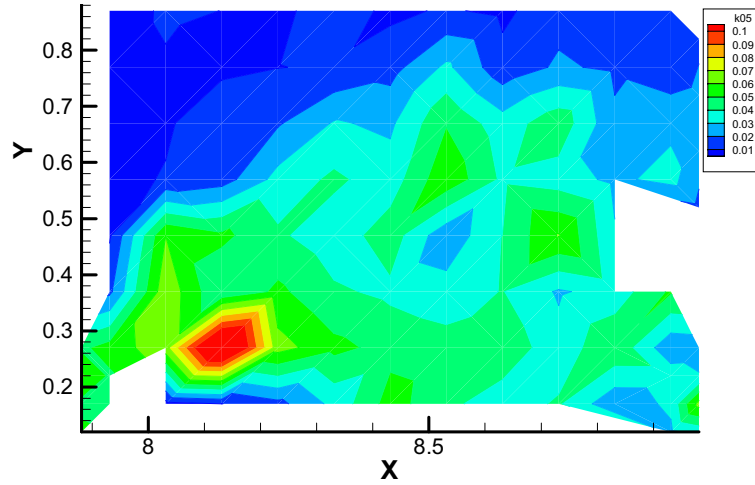


Figura 9.38:  $Q = 34.1$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 5$  cm.

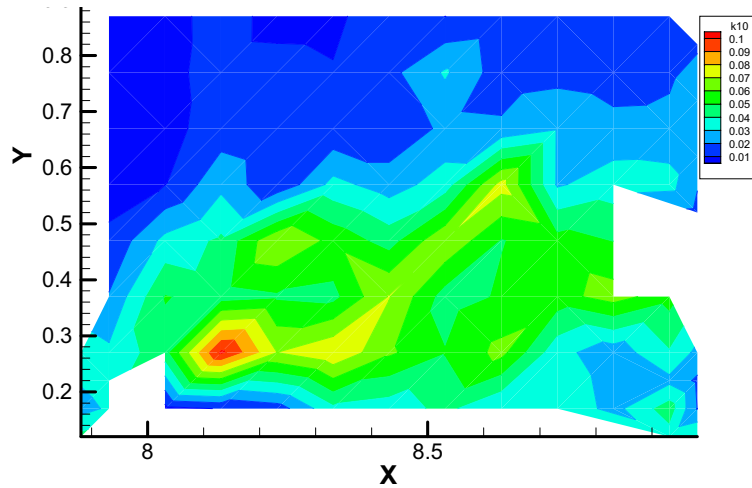


Figura 9.39:  $Q = 34.1$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 10$  cm.



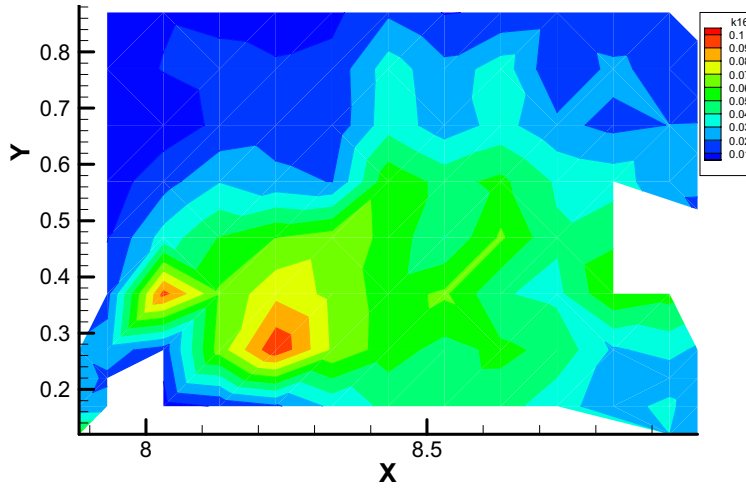


Figura 9.40:  $Q = 34.1$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 16$  cm.

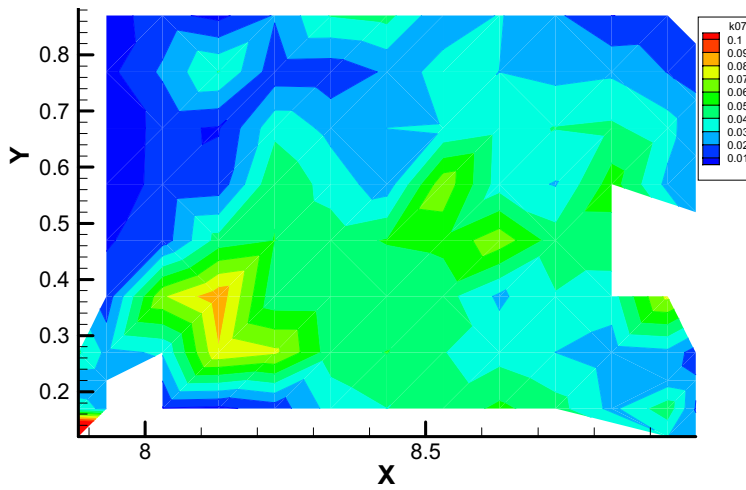


Figura 9.41:  $Q = 45.8$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 7$  cm.

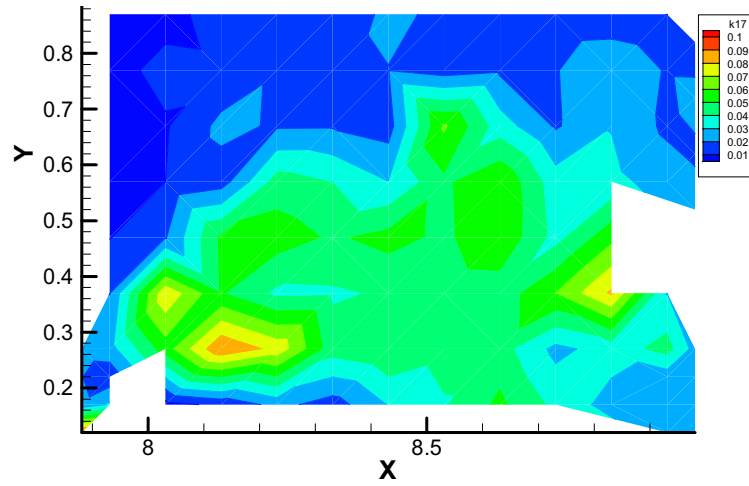


Figura 9.42:  $Q = 45.8$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 17$  cm.

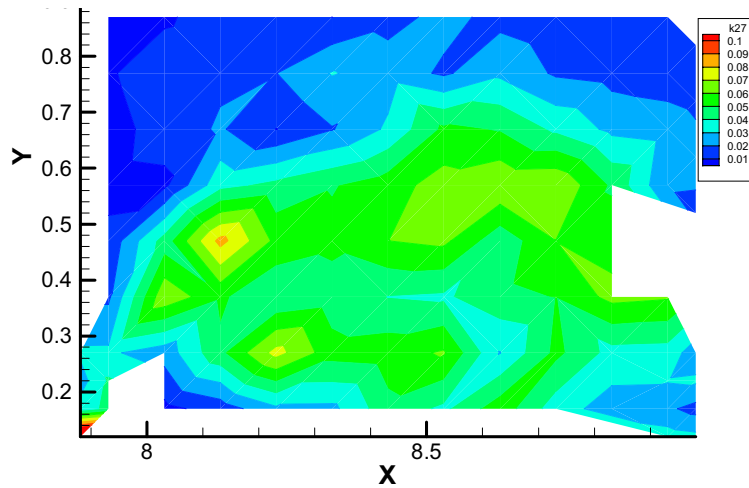


Figura 9.43:  $Q = 45.8$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 27$  cm.

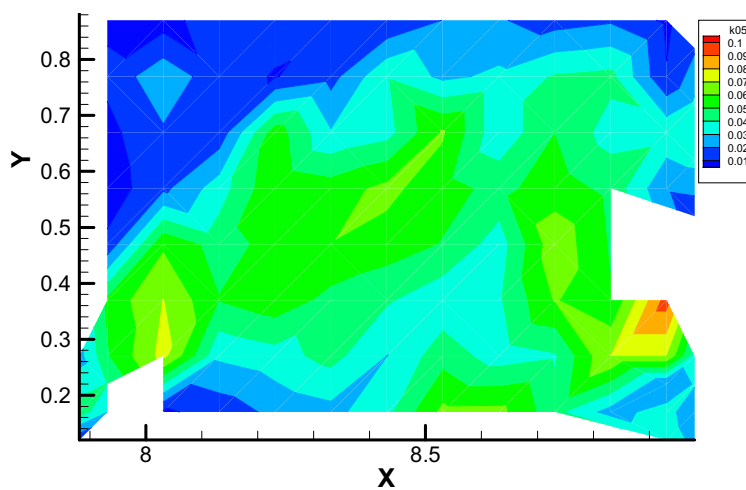


Figura 9.44:  $Q = 54.0$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 5$  cm.

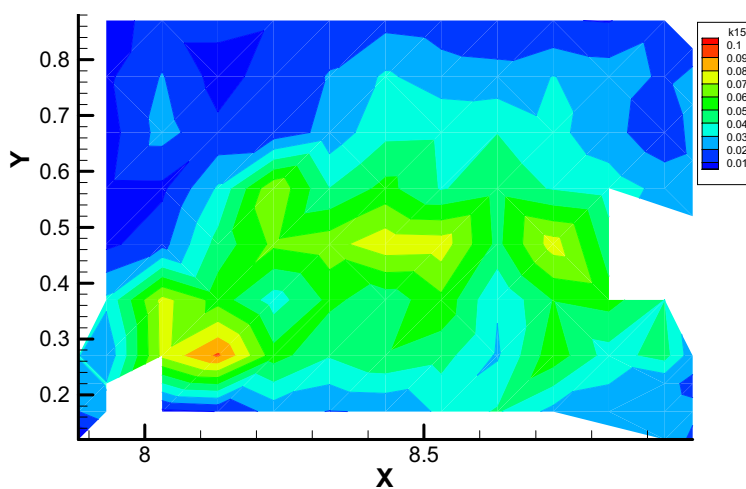


Figura 9.45:  $Q = 54.0$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 15$  cm.

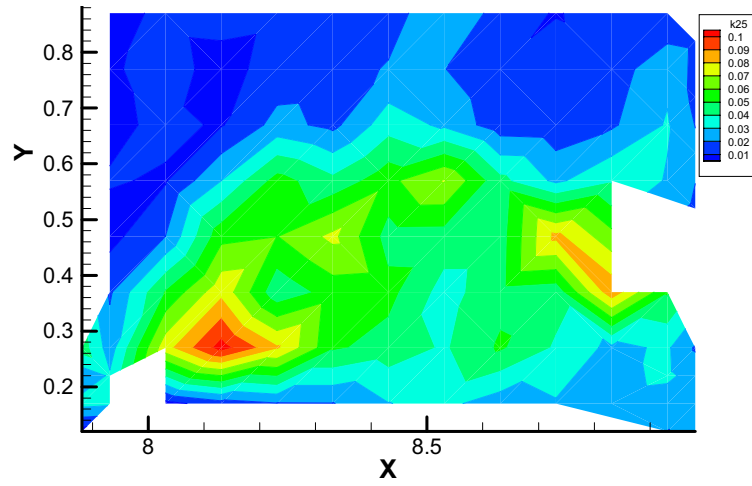


Figura 9.46:  $Q = 54.0$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 25$  cm.

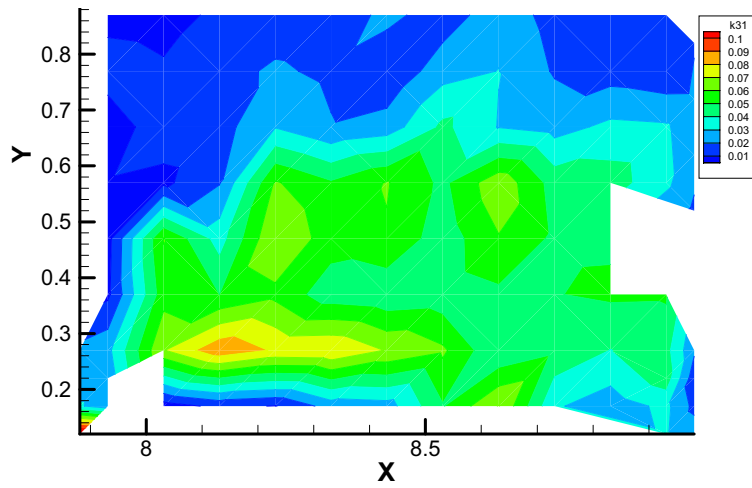


Figura 9.47:  $Q = 54.0$  l/s. E. C. T.  $k$ . Valores medidos.  $z = 31$  cm.

### 9.2.5. El término difusivo $k - \varepsilon$

Al principio de este capítulo (9.1.3) se han comparado los resultados obtenidos con dos discretizaciones distintas del término difusivo de las ecuaciones de aguas someras, obteniéndose mayor calidad en aquellos en se que utilizan los valores promedio de las derivadas en las celdas. Por ello, para el sumando difusivo del término fuente del modelo  $k - \varepsilon$  se emplea este mismo tipo de discretización.

### 9.2.6. Coeficiente de descentrado

En el modelo hidrodinámico ha dado buenos resultados, en presencia de términos en derivadas de segundo orden, la disminución de la viscosidad numérica inherente al descentrado *upwind* (9.1.2). En la discretización de las ecuaciones  $k - \varepsilon$ , en cuyo término fuente existen también derivadas segundas, se ha utilizado este mismo tipo de descentrado (8.5.2), por lo que se aplica también un coeficiente análogo  $c_{dv}$ , de valor comprendido entre 0 y 1. Es decir, la expresión del término de flujo turbulento (8.69) se convierte en

$$\phi_{vij} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} (hk)_i \lambda_Q + (hk)_j \lambda_Q \\ (h\varepsilon)_i \lambda_Q + (h\varepsilon)_j \lambda_Q \end{array} \right\} - c_{dv} \frac{1}{2} |\lambda_Q| \left\{ \begin{array}{l} (hk)_j - (hk)_i \\ (h\varepsilon)_j - (h\varepsilon)_i \end{array} \right\}. \quad (9.13)$$

Como se observa en las figuras 9.48-9.51, correspondientes a un mismo caudal y cuatro valores distintos de  $c_{dv}$ , los resultados varían obteniéndose niveles de  $k$  mayores al disminuir el coeficiente. Para cada caudal se ha estimado el mínimo valor de  $c_{dv}$  para el que el proceso de cálculo no se vuelve inestable. Estos valores -muy similares entre sí- han sido:

- $q = 34.1 \text{ l/s}$ ,  $c_{dv} = 0.65$ .
- $q = 45.8 \text{ l/s}$ ,  $c_{dv} = 0.64$ .
- $q = 54.0 \text{ l/s}$ ,  $c_{dv} = 0.67$ .

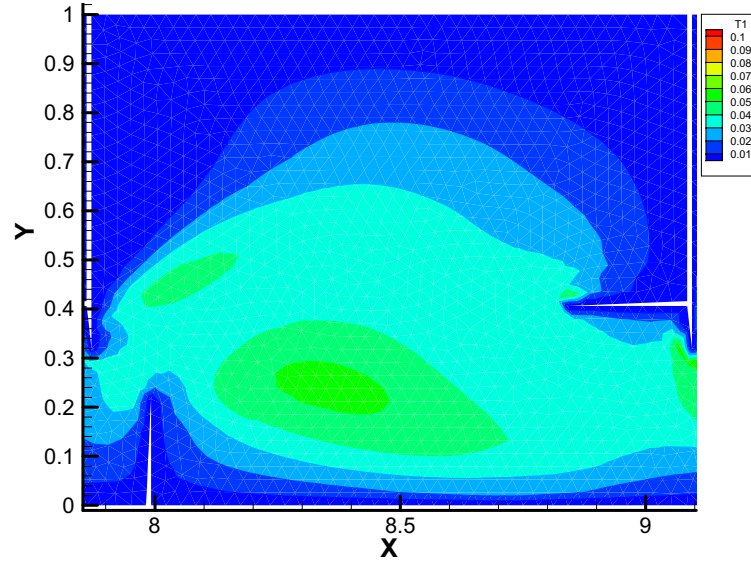


Figura 9.48:  $Q = 45.8$  l/s. E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 1.0$ .

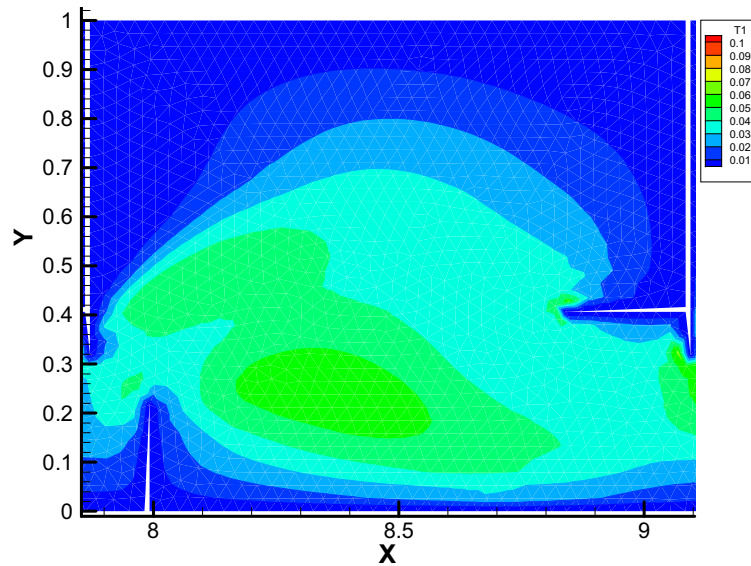


Figura 9.49:  $Q = 45.8$  l/s. E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 0.9$ .

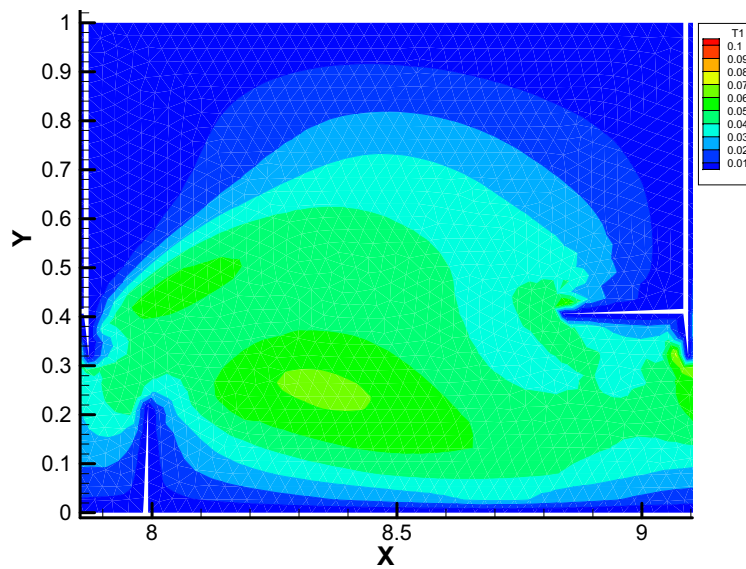


Figura 9.50:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 0.8$ .

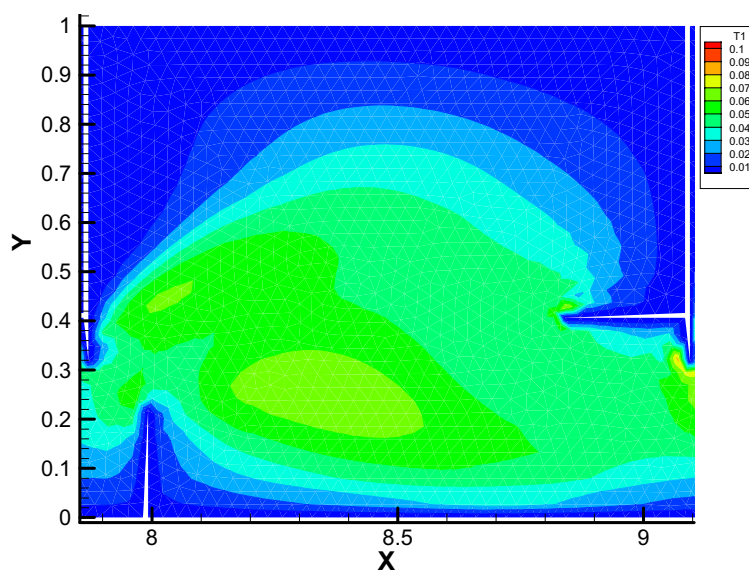


Figura 9.51:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . E. C. T.  $k$ . Coef. de descentrado  $c_{dv} = 0.7$ .

### 9.2.7. Distancia de la malla a la pared

Para determinar el valor más adecuado para la distancia  $y$  a la pared (ver 8.6.1) se calcula, antes de iniciar el proceso, el número de nodos que quedan dentro de rango con distintos valores de  $y$ , utilizando el valor que produce un mayor número de ellos. Se ha observado que la elección de un valor inadecuado para  $y$  puede, no sólo disminuir la calidad de los resultados obtenidos, sino incluso influir negativamente en la estabilidad del proceso.

### 9.2.8. Comparación de valores medidos y calculados

Las figuras 9.52 a 9.63 muestran, para cada uno de los caudales estudiados:

- Valores experimentales de  $k$  (promedios en la vertical).
- Valores de  $k$  y  $\varepsilon$  obtenidos numéricamente.
- Valores de  $\nu_t$  calculados a partir de los valores numéricos de  $k$  y  $\varepsilon$ .

De la observación de estas figuras se puede concluir lo siguiente:

- a) El modelo predice con aceptable aproximación la distinción en zonas de energía cinética turbulenta baja y media/alta. En particular, la línea que separa las zonas de  $k \leq 0.04$  y  $k > 0.04$  está situada con mucha exactitud. Se observa una ligera difusión en los resultados.
- b) En el caso  $Q = 34.1$  l/s los valores numéricos son claramente superiores a los experimentales (unos  $0.02$  m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>). Se identifican las dos zonas de turbulencia media/alta y alta, cerca del chorro de entrada, de las medidas experimentales, pero desplazadas hacia aguas abajo.
- c) Para  $Q = 45.8$  l/s se obtienen los mejores resultados. Se predicen muy adecuadamente los niveles y con bastante aproximación la posición de los mismos.
- d) Con el caudal  $Q = 54$  l/s los resultados están algo por debajo de los experimentales (unos  $0.01$  m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>). También aquí se aprecian dos zonas de nivel más alto de  $k$  si bien la posición no es del todo correcta.

En conjunto, y teniendo en cuenta lo apuntado en 9.2.4 los resultados se consideran satisfactorios.



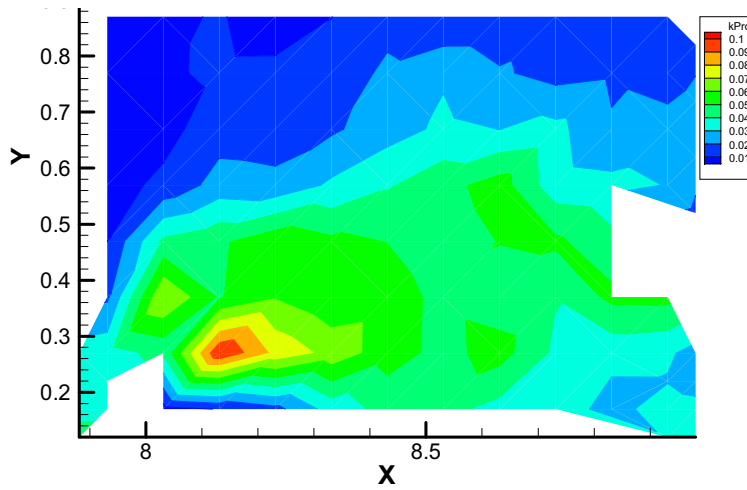


Figura 9.52:  $Q = 34.1$  l/s. E. C. T.  $k$  medida (promedio en la vertical).

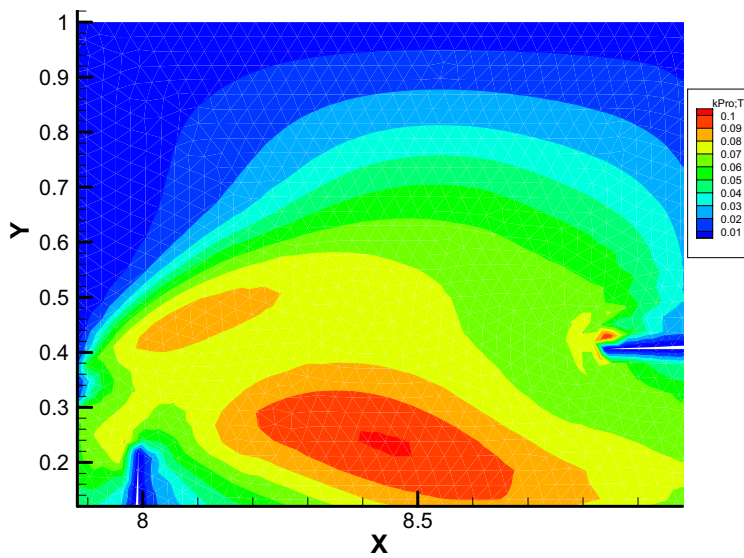


Figura 9.53:  $Q = 34.1$  l/s. E. C. T.  $k$  calculada.

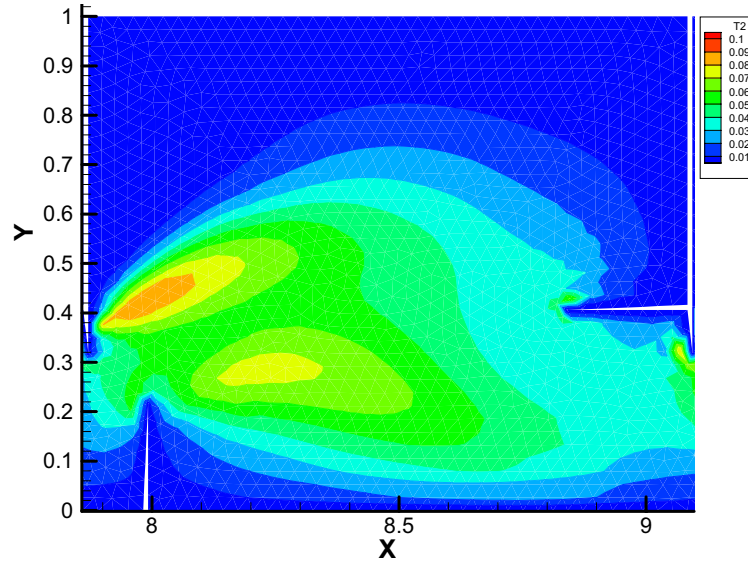


Figura 9.54:  $Q = 34.1 \text{ l/s}$ . Tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$ .

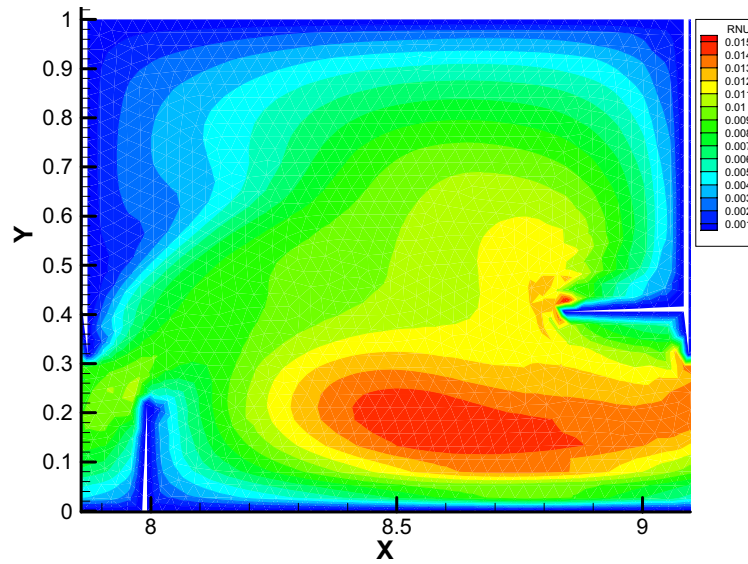


Figura 9.55:  $Q = 34.1 \text{ l/s}$ . Viscosidad  $\nu_t$ .

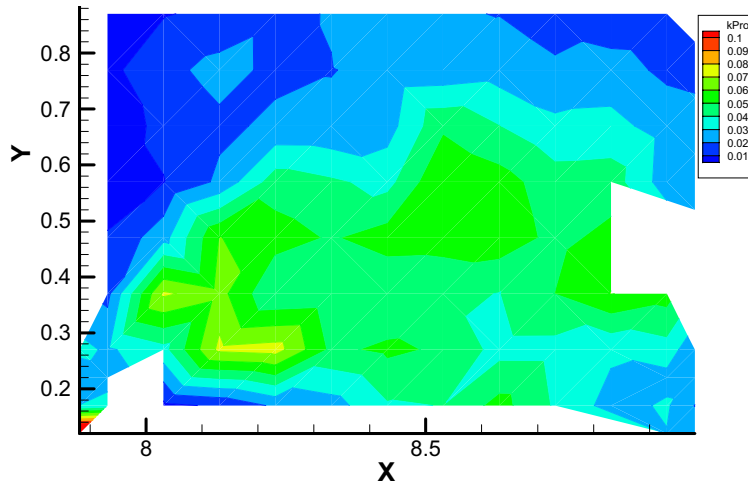


Figura 9.56:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . E. C. T.  $k$  medida (promedio en la vertical).

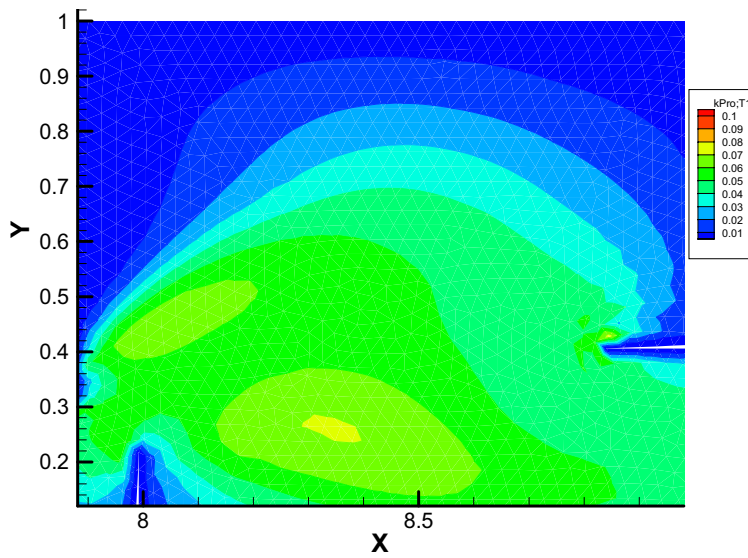


Figura 9.57:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . E. C. T.  $k$  calculada.

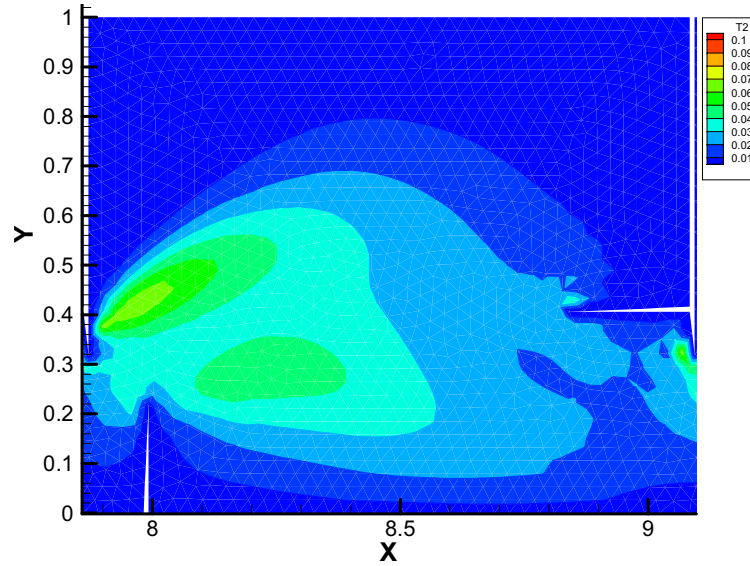


Figura 9.58:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . Tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$ .

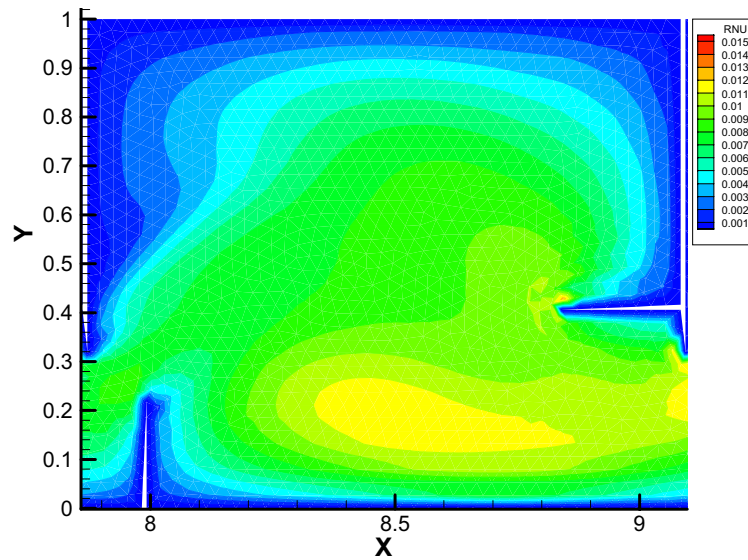


Figura 9.59:  $Q = 45.8 \text{ l/s}$ . Viscosidad  $\nu_t$ .

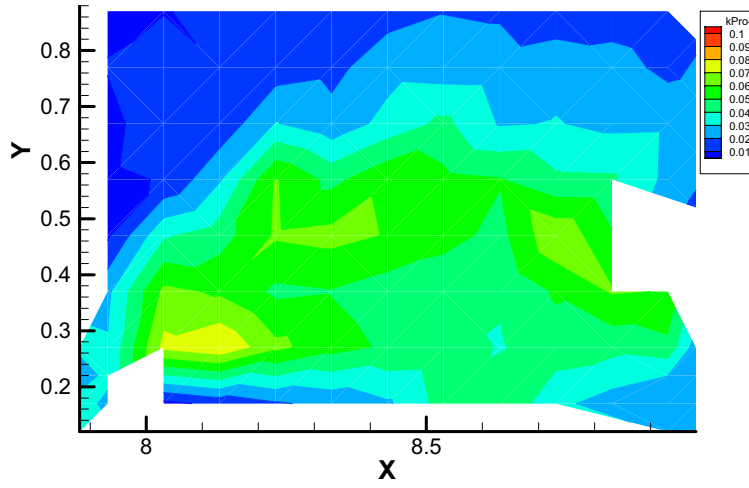


Figura 9.60:  $Q = 54.0$  l/s. E. C. T.  $k$  medida (promedio en la vertical).

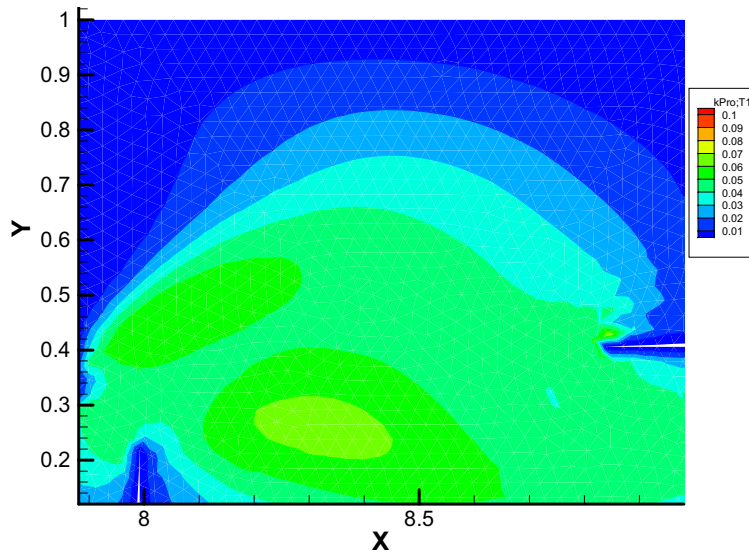
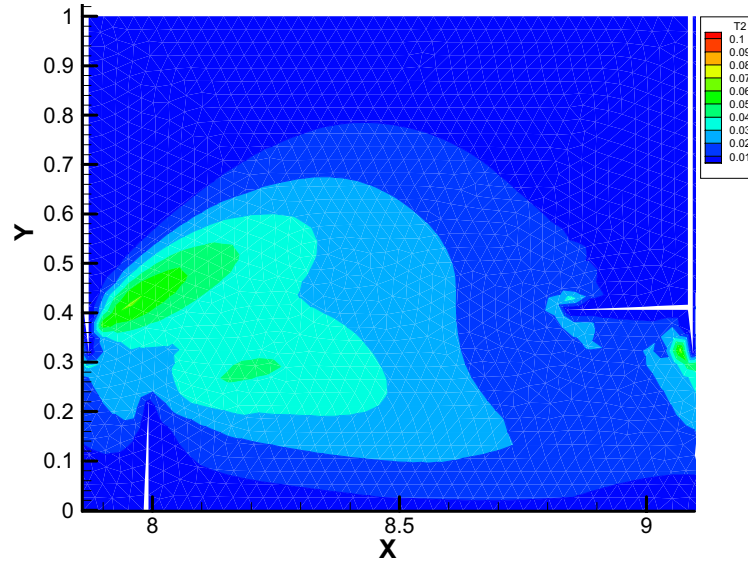
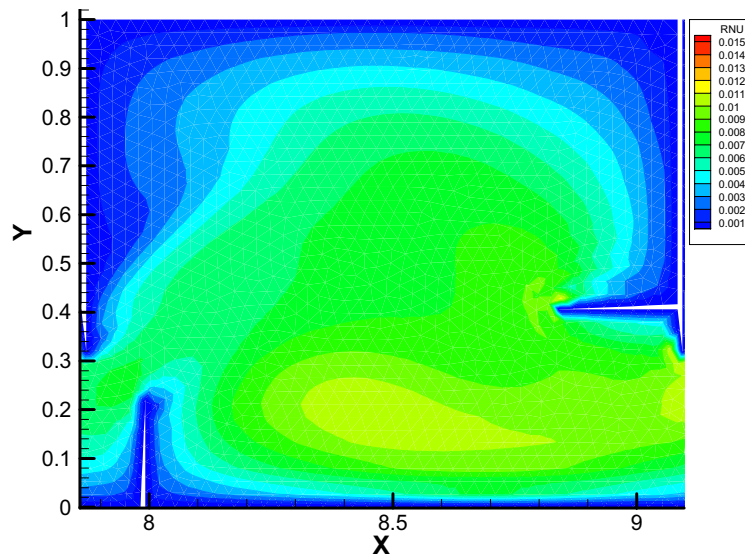


Figura 9.61:  $Q = 54.0$  l/s. E. C. T.  $k$  calculada.

Figura 9.62:  $Q = 54.0 \text{ l/s}$ . Tasa de disipación turbulenta  $\varepsilon$ .Figura 9.63:  $Q = 54.0 \text{ l/s}$ . Viscosidad  $\nu_t$ .

### 9.3. Funcionamiento conjunto

La validación del modelo descrito en esta memoria se ha realizado por fases. En el capítulo 5 se ha validado el modelo simplificado. En la primera parte de este capítulo (9.1) se han analizado los resultados de la introducción del término turbulento en las ecuaciones de aguas someras, utilizando el mismo valor de la viscosidad cinemática en todo el dominio y comparando los resultados con los esperados para los correspondientes números de Reynolds. A continuación (9.2) se ha aplicado el modelo de turbulencia a un campo de velocidades obtenido con el modelo simplificado para obtener los valores de la energía cinética turbulenta  $k$ , que se han comparado con valores experimentales.

La reducción de la viscosidad numérica es necesaria para poder apreciar el efecto de la viscosidad turbulenta. Como se explica en 9.1.6, esta reducción se ha logrado sólo para el caso de fondo horizontal. Por ello, al no disponer de medidas en instalaciones con fondo horizontal, en esta sección se muestra el funcionamiento del modelo completo con sus módulos hidrodinámico y de turbulencia, pero sin comparación con medidas experimentales.

#### 9.3.1. Separación de los dos procesos

Tanto las ecuaciones de aguas someras como el sistema de ecuaciones  $k - \varepsilon$  promediado en la vertical están formados por ecuaciones de transporte, por lo que tienen la misma estructura, pero difieren notablemente entre sí. Se trata de distintos fenómenos, con distintas escalas de tiempo y diferentes variables. Además las ecuaciones  $k - \varepsilon$  poseen un buen número de coeficientes empíricos, alguno de ellos dependiente del problema considerado.

Por estos motivos se ha optado por desacoplar el cálculo, procediendo por ciclos, como se sugiere en [27, pg. 269]: Con unos valores iniciales de la viscosidad se calcula el campo de velocidades y calados (proceso hidráulico). Luego, a partir de los valores de  $u$ ,  $v$  y  $h$  en cada punto, se obtiene la distribución de valores de  $\nu_t$  por medio de las ecuaciones  $k - \varepsilon$  (proceso  $k - \varepsilon$ ). A continuación, se vuelve a calcular el campo de velocidades y calados y así sucesivamente. Cada uno de los procesos se detiene cuando la diferencia entre las variables en todos los puntos es menor que una cierta tolerancia. Esta tolerancia es menor en el proceso  $k - \varepsilon$  por serlo los valores de las variables involucradas en él. Se ha tomado  $10^{-6}$  para el proceso hidráulico y  $10^{-8}$  para el  $k - \varepsilon$ . Se llama ciclo a cada par de procesos ( $k - \varepsilon$ /hidráulico). El primer ciclo está constituido sólo por el proceso hidráulico pues los valores de la viscosidad en cada punto serán dados (normalmente iguales en todo el dominio).

### 9.3.2. Descripción del problema

Para la realización de estos cálculos se ha elegido un canal con un cambio brusco en la anchura de la sección, conocido en la literatura como *backward step*. La relación de anchos es de 1:1.94, con unas dimensiones para el primer tramo de  $3.29 \times 1 \text{ m}^2$  [85]. La longitud total es de  $30 \text{ m}$ . El dominio está formado por 3889 nodos y 7264 elementos. En la figura 9.64 se observa la malla en el primer tercio del canal.

Como condición de contorno se ha impuesto, en la sección de entrada, una velocidad de módulo unidad, normal al contorno. Con el fin de asegurar dicho valor para la velocidad, se han tomado en la sección de entrada los valores  $h = 1$ ,  $hu = 1$ ,  $hv = 0$ . En la sección de salida se ha fijado un calado  $h = 1 \text{ m}$ . Se utiliza un coeficiente de rozamiento de  $n = 0.015$ . En el primer ciclo, se toma un valor  $\nu_t = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$  para todo el dominio.

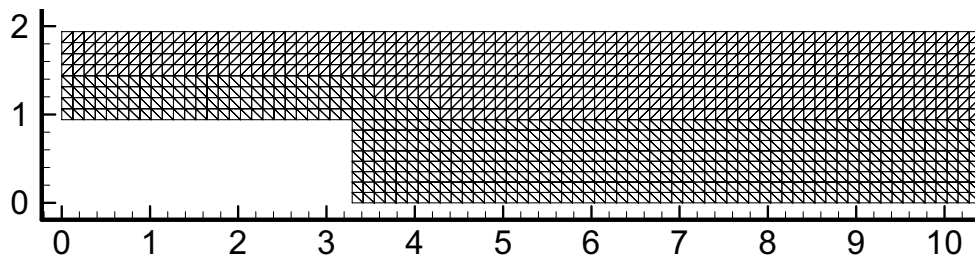


Figura 9.64: Ensanchamiento lateral. Malla utilizada.

### 9.3.3. Condición de contorno en la pared

Se caracterizan por un índice de pared  $I_p$  las distintas condiciones de contorno en pared que se han ido mencionando hasta el momento.

La condición de no deslizamiento ( $I_p = 0$ ) es la empleada habitualmente en el estudio del flujo en una cavidad (9.1.1).

La condición de deslizamiento ( $I_p = 1$ ), descrita en 5.1.1, se demuestra útil para el estudio de problemas de carácter unidimensional.

La condición de rozamiento ( $I_p = 2$ ) ha dado mejores resultados que las dos primeras en flujos en 2D como se muestra en 5.3.1.

Un cuarto tipo de condición ( $I_p = 3$ ), mencionado en 8.6.1, se va ahora a comparar con las anteriores.

En el estudio del decantador con salida múltiple (5.3.1) se observa que la distribución de caudales por los tres decantadores varía según la condición de contorno empleada en la pared, obteniéndose resultados más próximos a los experimentales con la condición  $I_p = 2$ . En la tabla 9.6 se reproduce la tabla 5.1, añadiéndole los valores calculados con la nueva condición. Se aprecia una



clara mejoría en la distribución de caudales, con la consiguiente disminución del valor de  $\sigma$  (5.10), si se utiliza la condición  $I_p = 3$ .

Por otro lado, en el canal con ensanchamiento lateral, se ha calculado el campo de velocidades con las dos condiciones de pared,  $I_p = 2$  e  $I_p = 3$ , en dos supuestos de coeficiente de descentrado,  $c_d = 1$  y  $c_d = 0.15$ . En las figuras 9.65 y 9.66 se muestran los valores de la componente  $u$  de la velocidad (en  $m/s$ ) en los nodos de la sección  $x = 2.025 m$ . Se aprecia en ambas, aunque mucho más marcadamente en el caso de  $c_d = 0.15$ , que la condición  $I_p = 3$  produce un perfil de velocidades más parecido al parabólico.

En las figuras 9.67 y 9.68 puede verse la representación del módulo de la velocidad en todo el dominio en el caso  $c_d = 0.15$ . También aquí parece más adecuado el resultado obtenido con el valor de  $I_p = 3$ , que produce menores valores del módulo de la velocidad en el contorno.

En lo que sigue se utilizan los valores de  $I_p = 3$  y de  $c_d = 0.15$ .

Tabla 9.6: Comparación de condiciones de pared. Caudales en  $l/s$ .

|            | Caudales medidos | Caudales calculados |           |           |           |
|------------|------------------|---------------------|-----------|-----------|-----------|
|            |                  | $I_p = 0$           | $I_p = 1$ | $I_p = 2$ | $I_p = 3$ |
| Decant. 1  | 13.27            | 16.24               | 13.51     | 13.66     | 13.68     |
| Decant. 2  | 14.84            | 15.14               | 14.98     | 15.08     | 14.77     |
| Decant. 3  | 14.24            | 10.83               | 13.25     | 13.69     | 13.90     |
| Suma $Q_i$ | 42.35            | 42.21               | 41.74     | 42.43     | 42.35     |
| $\sigma$   | 0.0              | 2.616               | 0.594     | 0.413     | 0.310     |

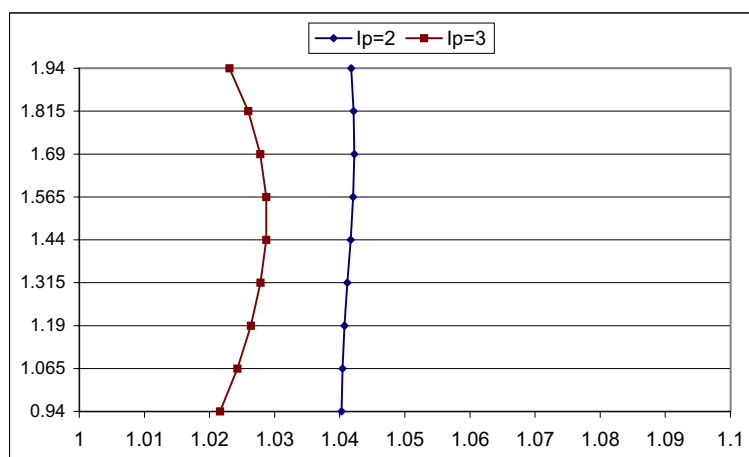


Figura 9.65: Valores de  $u$  en la sección  $x = 2.025 m$ .  $c_d = 1$ .

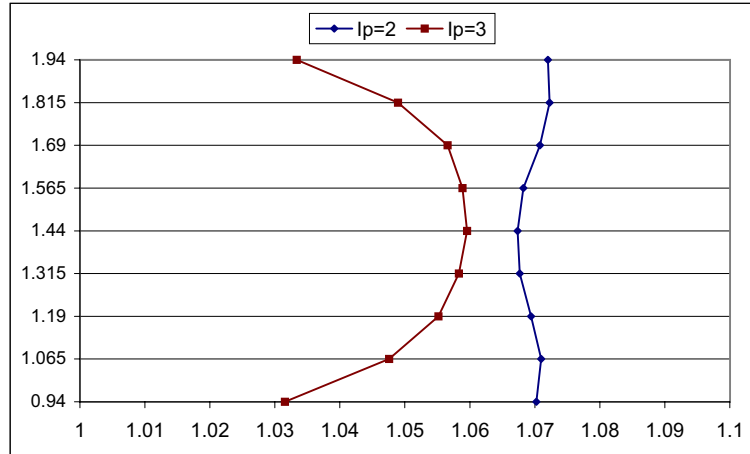


Figura 9.66: Valores de  $u$  en la sección  $x = 2.025$  m.  $c_d = 0.15$ .

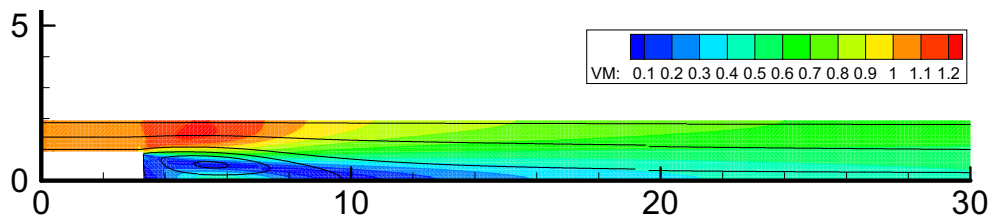


Figura 9.67: Módulo de la velocidad.  $c_d = 0.15$ .  $I_p = 2$ .

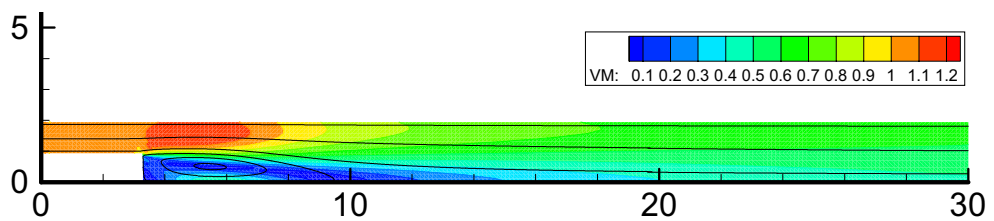


Figura 9.68: Módulo de la velocidad.  $c_d = 0.15$ .  $I_p = 3$ .

### 9.3.4. Disminución del número de ciclos necesario

Al proceder según lo dicho en **9.3.1** aparece una dificultad. Al fijar un valor pequeño de  $\nu_t$  para el cálculo de la hidráulica en el ciclo 1, las velocidades obtenidas resultan notablemente elevadas (figura 9.68). La viscosidad calculada en el ciclo 2 a partir de la hidráulica anterior es consiguientemente alta (figura 9.69) por lo que las velocidades de este ciclo disminuyen notablemente (figura 9.70). Debido a ello, en el ciclo 3 la viscosidad calculada alcanza un valor muy pequeño (figura 9.71), lo que permite que las velocidades en ese ciclo vuelvan a aumentar y así sucesivamente.

En definitiva, se producen unas oscilaciones en los niveles de viscosidad y velocidad que sólo muy lentamente van evolucionando hacia una situación final de equilibrio.

En las figuras 9.72 a 9.75 se pueden ver las distribuciones de viscosidad y del módulo de la velocidad en los ciclos 18 y 19. Se observa que la convergencia del proceso hacia el régimen permanente es muy lenta.

Se ha probado a aumentar la viscosidad fijada inicialmente pero no es fácil acertar con un valor uniforme adecuado; si se impone un valor excesivo las velocidades obtenidas son pequeñas e igualmente se producen oscilaciones.

Para solucionar el problema ha dado muy buen resultado limitar el número de iteraciones de la fase  $k - \varepsilon$ . En los primeros ciclos no se llega a alcanzar régimen permanente en el proceso  $k - \varepsilon$  y los valores de viscosidad alcanzados son mucho menores que si no se limita el número, pero distribuidos adecuadamente. De este modo el campo de velocidades resultante se acerca más al resultado final.

En las figuras 9.76 a 9.81 se aprecia la rápida convergencia del proceso en los cuatro primeros ciclos. Tras el ciclo seis no se aprecian diferencias a simple vista en los niveles de  $\nu_t$  ni en el campo de velocidades.

En la tabla 9.7 se muestra la evolución del número de iteraciones, así como la de la máxima variación de las variables al acabar cada fase  $k - \varepsilon$ , cuando se aplica esta limitación del número de iteraciones.

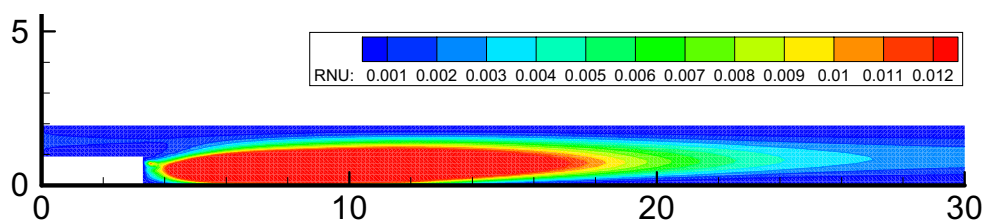


Figura 9.69: Proceso oscilatorio. Ciclo 2. Valores de  $\nu_t$ .

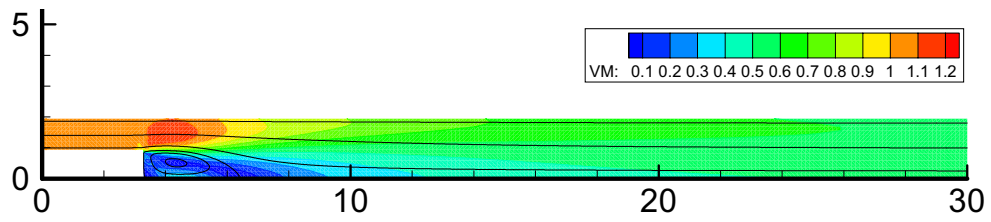


Figura 9.70: Proceso oscilatorio. Ciclo 2. Módulo de la velocidad.

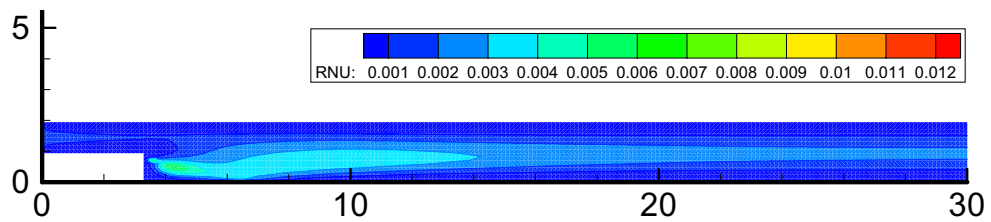


Figura 9.71: Proceso oscilatorio. Ciclo 3. Valores de  $\nu_t$ .

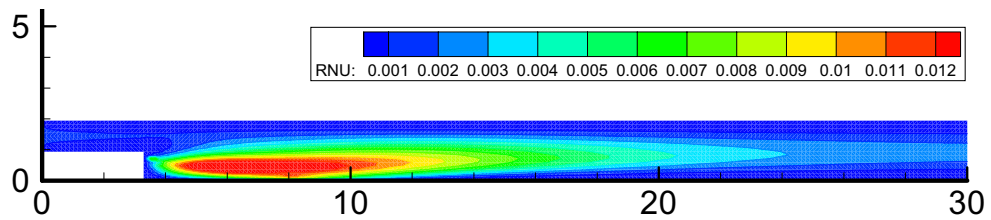


Figura 9.72: Proceso oscilatorio. Ciclo 18. Valores de  $\nu_t$ .

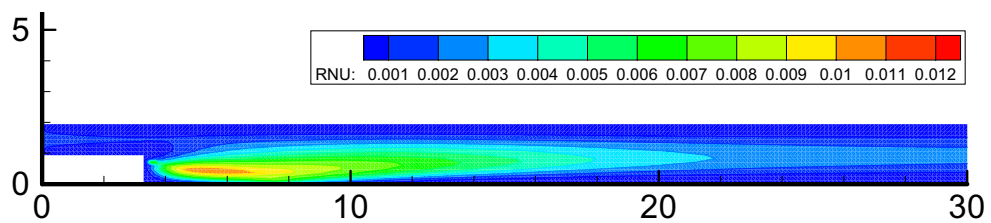


Figura 9.73: Proceso oscilatorio. Ciclo 19. Valores de  $\nu_t$ .

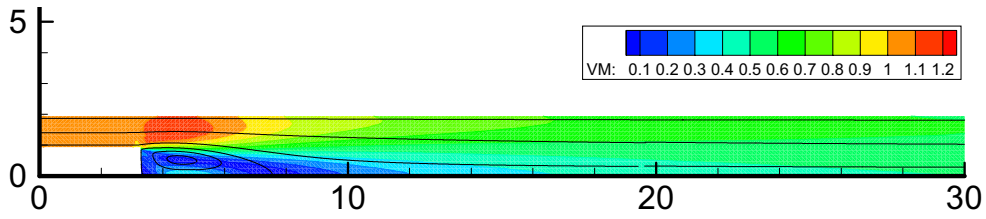


Figura 9.74: Proceso oscilatorio. Ciclo 18. Módulo de la velocidad.

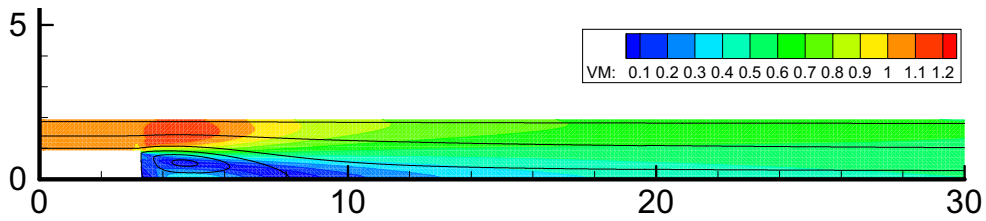


Figura 9.75: Proceso oscilatorio. Ciclo 19. Módulo de la velocidad.

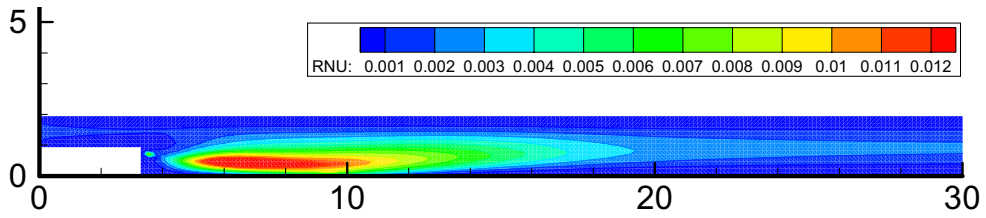


Figura 9.76: Proceso convergente. Ciclo 2. Valores de  $\nu_t$ .

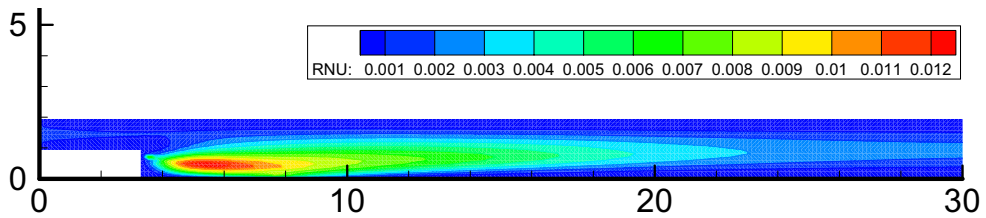


Figura 9.77: Proceso convergente. Ciclo 3. Valores de  $\nu_t$ .

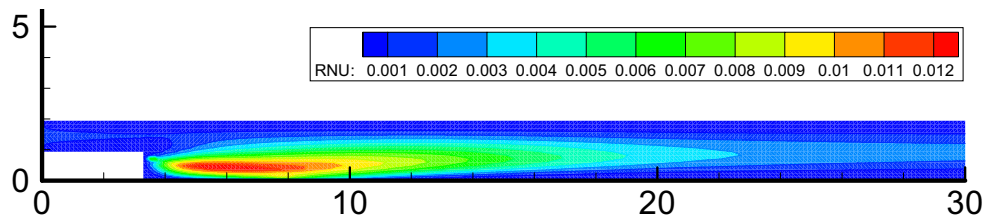


Figura 9.78: Proceso convergente. Ciclo 4. Valores de  $\nu_t$ .

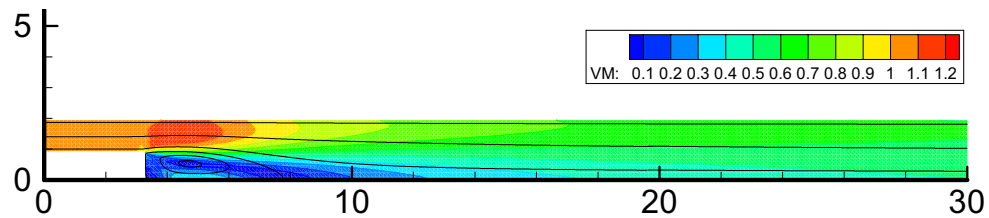


Figura 9.79: Proceso convergente. Ciclo 2. Módulo de la velocidad.

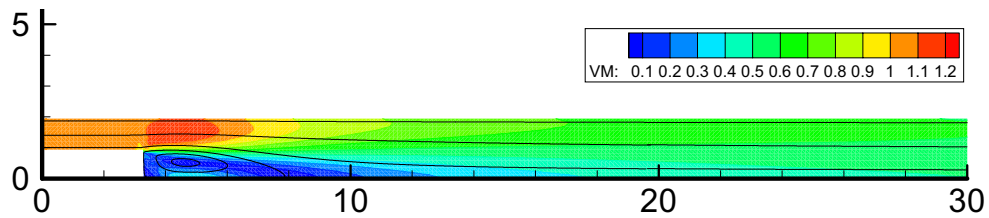


Figura 9.80: Proceso convergente. Ciclo 3. Módulo de la velocidad.

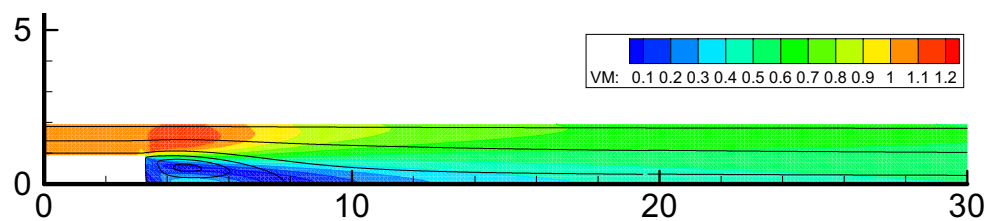


Figura 9.81: Proceso convergente. Ciclo 4. Módulo de la velocidad.

Tabla 9.7: Evolución por ciclos.

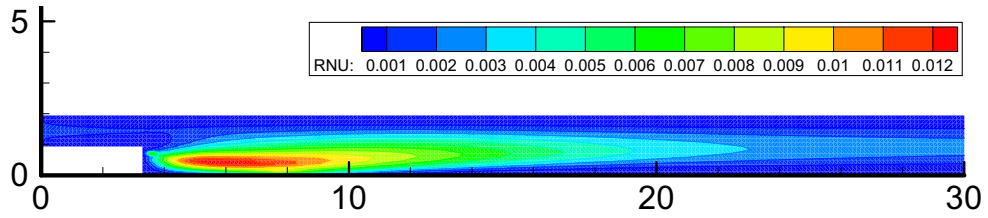
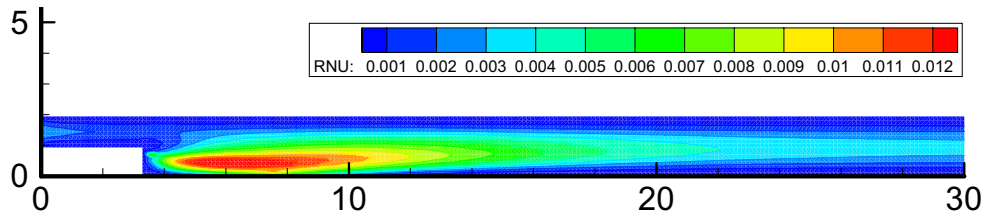
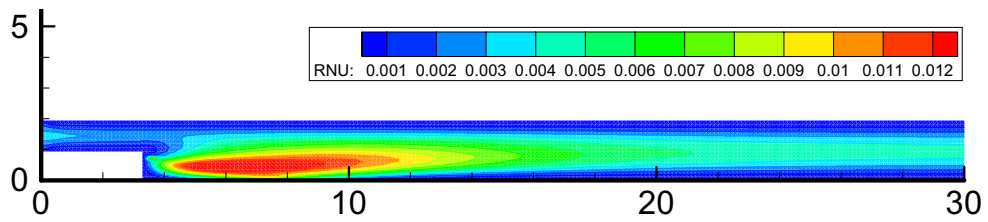
| Ciclo | Fase              | Nº iteraciones | Reg. Perm. | $\Delta$ variable    |
|-------|-------------------|----------------|------------|----------------------|
| 1     | Hidráulica        | 1854           | Si         |                      |
| 2     | $k - \varepsilon$ | 2000           | No         | $9.55 \cdot 10^{-6}$ |
|       | Hidráulica        | 967            | Si         |                      |
| 3     | $k - \varepsilon$ | 2000           | No         | $1.61 \cdot 10^{-6}$ |
|       | Hidráulica        | 790            | Si         |                      |
| 4     | $k - \varepsilon$ | 2000           | No         | $3.43 \cdot 10^{-7}$ |
|       | Hidráulica        | 313            | Si         |                      |
| 5     | $k - \varepsilon$ | 2000           | No         | $7.09 \cdot 10^{-8}$ |
|       | Hidráulica        | 83             | Si         |                      |
| 6     | $k - \varepsilon$ | 2000           | No         | $1.05 \cdot 10^{-8}$ |
|       | Hidráulica        | 12             | Si         |                      |
| 7     | $k - \varepsilon$ | 778            | Si         |                      |
|       | Hidráulica        | 14             | Si         |                      |
| 8     | $k - \varepsilon$ | 658            | Si         |                      |
|       | Hidráulica        | 14             | Si         |                      |
| 9     | $k - \varepsilon$ | 484            | Si         |                      |
|       | Hidráulica        | 15             | Si         |                      |

### 9.3.5. Resultados obtenidos

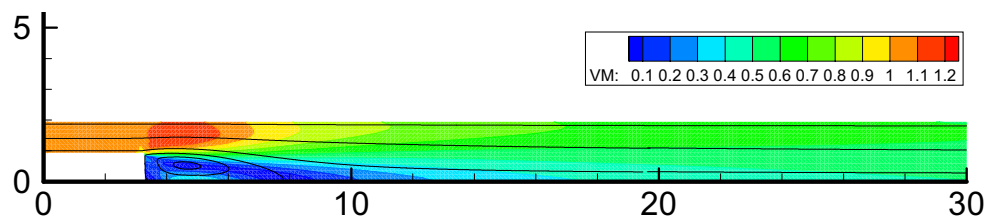
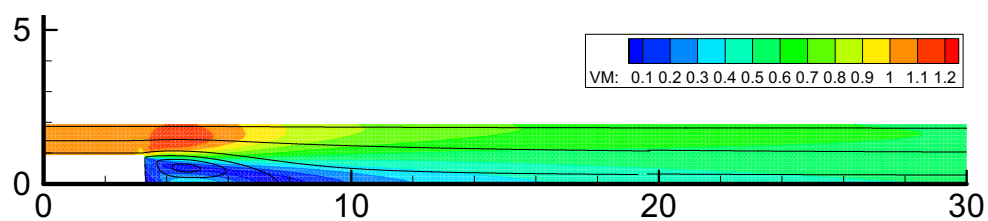
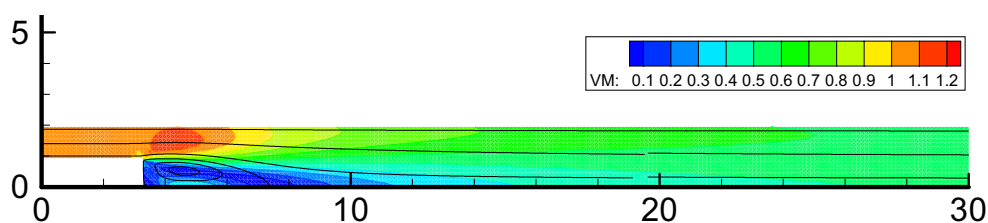
Para terminar, se han obtenido las viscosidades y campos de velocidades en los tres siguientes supuestos de coeficiente de rozamiento:

- $n = 0.015$ .
- $n = 0.020$ .
- $n = 0.025$ .

Se representan en las figuras 9.82 a 9.87 los valores de la viscosidad y módulo de la velocidad tras el ciclo 6, a partir del cual no se aprecian diferencias a simple vista. Se observa un incremento con  $n$  de los niveles alcanzados de viscosidad, así como un lógico descenso del nivel de velocidad.

Figura 9.82: Valores finales de  $\nu_t$ . Ciclo 6.  $n = 0.015$ .Figura 9.83: Valores finales de  $\nu_t$ . Ciclo 6.  $n = 0.020$ .Figura 9.84: Valores finales de  $\nu_t$ . Ciclo 6.  $n = 0.025$ .



Figura 9.85: Valores finales del módulo de la velocidad.  $n = 0.015$ .Figura 9.86: Valores finales del módulo de la velocidad.  $n = 0.020$ .Figura 9.87: Valores finales del módulo de la velocidad.  $n = 0.025$ .



# Capítulo 10

## Conclusiones y futuros desarrollos

### 10.1. Conclusiones

A lo largo del trabajo que se describe en la memoria se ha elaborado un modelo numérico en volúmenes finitos constituido por un módulo hidrodinámico y otro de turbulencia que trabajan conjuntamente.

El módulo hidrodinámico resuelve numéricamente las ecuaciones bidimensionales de aguas someras con término turbulento, de las que se realiza una detallada deducción en el capítulo 3, incluyendo la obtención de tres de las expresiones del término turbulento más comunes en la literatura técnica. Este módulo realiza la discretización de la derivada temporal por tres posibles métodos: Euler hacia adelante, Adams-Moulton y Runge-Kutta. Admite cuatro tipos de condición de contorno en pared sólida: deslizamiento, no-deslizamiento, rozamiento y velocidad de fricción en la pared. Admite asimismo la condición inicial de suelo seco en una parte del dominio. Para el término fuente turbulento permite emplear dos expresiones distintas y dos modos de discretización en cada caso. La viscosidad utilizada puede ser: constante para todo el dominio; distinta para cada punto, pero constante en el tiempo, o con distintos valores en ciclos sucesivos, calculada por el módulo de turbulencia.

El módulo de turbulencia ha sido elaborado a partir de la forma conservativa de las ecuaciones  $k - \varepsilon$  promediadas en la vertical. Se ha implementado también usando las variables turbulentas  $q - r$ , si bien no se muestran resultados de ello en la memoria. La condición de contorno de pared sólida admite el uso de dos tipos de ley: la logarítmica y la debida a Spalding.

En los capítulos 5 y 9 se comprueba el buen funcionamiento de los dos

módulos por separado, así como su correcto funcionamiento conjunto.

Existen muchos y muy variados modelos hidrodinámicos de aguas someras y diversos modelos de turbulencia en elementos finitos y diferencias finitas. Sin embargo, la implementación en un único código de un modelo hidrodinámico de aguas someras 2D junto con otro de turbulencia  $k - \varepsilon$ , mediante el uso de volúmenes finitos, es muy poco frecuente en la literatura. El autor conoce tan sólo el modelo de Minh *et al.*, citado en la bibliografía, y de cuyo funcionamiento apenas dan referencias sus autores.

Pueden resaltarse las siguientes conclusiones:

- a) Se ha aplicado una nueva condición de contorno para pared sólida (condición de rozamiento) en **5.1.2**. Esta condición utiliza la definición del radio hidráulico para evaluar el diferente efecto de fricción que los nodos de la pared producen, respecto a los nodos interiores del dominio. La condición de rozamiento se ha comparado con las clásicas de deslizamiento y no-deslizamiento, comprobando en **5.3.1** su mejor funcionamiento en problemas bidimensionales.
- b) La derivada temporal se ha discretizado de tres maneras distintas cuyos resultados y rendimiento computacional se han comparado en **6.4** y **9.1.5**. Los resultados obtenidos han sido los mismos por los tres métodos. El método que ha producido menores tiempos de cálculo ha sido el de Runge-Kutta, seguido por el predictor-corrector de Adams-Moulton y con el de Euler en tercer lugar, siempre y cuando la viscosidad numérica introducida por el modelo sea pequeña. De lo contrario no se aprecia mejoría.
- c) Para reducir la difusión numérica producida por la discretización descentrada *upwind*, se ha introducido un coeficiente de descentrado en **9.1.2**, con el que se han obtenido buenos resultados en el caso de fondo plano. Esta reducción ha permitido realizar las comparaciones a las que se alude en los puntos **b)** y **d)**. Asimismo se ha mostrado que el tamaño de malla utilizado ejerce una considerable influencia en el mínimo valor de  $c_d$  necesario para la estabilidad.
- d) De las formulaciones deducidas para el término turbulento, se han discretizado dos en el capítulo **7**, de dos modos distintos cada una: utilizando valores promedio y por derivadas direccionales. Las cuatro opciones resultantes se han comparado en **9.1.3**, entre sí y con valores de referencia. Se concluye que la discretización realizada utilizando los valores promedio parece más adecuada que la otra por producir resultados más próximos a los de referencia y ser algo menos difusiva. Con

esta discretización no hay apenas diferencia -en el caso resuelto- entre los resultados de utilizar las dos formulaciones.

Otra conclusión alcanzada referente a este término, que se justifica en **9.1.4**, es la conveniencia de no aplicarle el factor de descentrado que se utiliza, con buenos resultados, para la pendiente geométrica.

- e) Se ha mostrado, en **9.1.2** y **9.1.3**, que las ecuaciones de aguas someras con término turbulento son totalmente válidas para la simulación de flujos con bajo número de Reynolds.
- f) En el modelo de turbulencia se ha utilizado un coeficiente de descentrado para el término de flujo, análogo al introducido en **c**), que ha dado buenos resultados, si bien no se alcanzan valores tan pequeños como en el modelo hidrodinámico. Por ello la reducción de viscosidad numérica obtenida es menor y el resultado algo difusivo. El funcionamiento del modelo ha sido comprobado en **9.2** por comparación con resultados experimentales y puede considerarse satisfactorio.
- g) En **9.3** se ha mostrado el buen funcionamiento conjunto de los dos modelos, hidrodinámico y de turbulencia. En **9.3.3** se ha utilizado una cuarta condición de contorno, a partir de la velocidad de fricción en la pared, que ha producido mejores resultados que las tres mencionadas en **a**). Se expone también en **9.3.4** un modo práctico de acelerar el proceso.
- h) Por último se ha observado, a lo largo del capítulo **9**, que el método de volúmenes finitos, aplicado a sistemas de ecuaciones con términos viscosos da buenos resultados.

## 10.2. Futuros desarrollos

A la vista de los resultados obtenidos hasta el momento, se proponen los siguientes:

- a) El modelo se comporta bien en el caso, resuelto en **5.2.4**, de avance de un frente de onda sobre suelo seco horizontal. Un primer punto de interés consiste en la aplicación al modelo hidrodinámico de condiciones de contorno tipo marea lo que está relacionado con el avance sobre suelo seco con pendiente adversa. Se pretende estudiar también la extensión a todo el dominio de condiciones de rozamiento en la que se tiene en cuenta la ley logarítmica, cuya aplicación a la frontera ha dado buen resultado.

- b) El modo en que se ha reducido la viscosidad numérica del modelo hidrodinámico disminuye notablemente su estabilidad. Se pretende continuar la búsqueda de fórmulas que permitan esta reducción. Se valorará también la conveniencia de pasar a uno de orden superior, que eliminaría los problemas causados por el descentrado *upwind* de primer orden, a costa de un aumento en la complejidad del modelo.
- c) La discretización en triángulos tiene la ventaja de la adaptabilidad a dominios irregulares, pero produce algunos problemas de discretización. Por ello se estudiará la utilización de volúmenes finitos obtenidos a partir de mallas formadas por cuadriláteros, así como mallas mixtas, con triángulos y cuadriláteros.
- d) Los resultados del módulo hidrodinámico son muy satisfactorios, habida cuenta de que se trata de un modelo de primer orden. Los del módulo de turbulencia -considerando la complejidad del fenómeno estudiado y la dispersión de los resultados experimentales- se consideran satisfactorios, pero no poseen la misma calidad. Se propone continuar el trabajo de mejora del modelo de turbulencia, analizando también en este caso la conveniencia de pasar a uno de orden superior.







# Capítulo 11

## Anejos

### 11.1. Descripción de los programas desarrollados

Para la realización de los cálculos se han desarrollado distintos programas. Los dos principales son Mallavolf.for y Calculo.for. El primero genera la malla de volúmenes finitos centrados en los vértices de la malla de triángulos previa. El segundo realiza diversos cálculos geométricos, tras lo cual lleva a cabo el proceso iterativo con sus distintas fases.

Para generar la malla de volúmenes finitos, Mallavolf.for utiliza el fichero Datos.dat, que contiene las matrices de coordenadas de los puntos de la malla de triángulos y las conectividades entre los mismos. Para dominios sencillos compuestos por rectángulos se ha elaborado el mallador Preproceso.for. Para dominios irregulares se utiliza un mallador comercial [9]. El resultado es el archivo Mallas.dat.

Calculo.for necesita, además, el archivo Datoscal.dat, que es producido por el programa Datoscal.for. Este programa utiliza el archivo Nodfron.dat (que contiene los nodos frontera del dominio), generados por Mallavolf.for y el DatosZ<sub>0</sub>.dat (con las cotas del fondo), generado por Preproceso.for. Datoscal.for genera el archivo de datos de los distintos casos descritos en la memoria:

- Canal rectangular.
- Cambio de régimen.
- Canal de As Pontes.
- Rotura de presa en 1D y 2D.

- Escala de peces.
- Doble T.
- Flujo en una cavidad.
- Canal con ensanchamiento lateral

Se acompaña un cuadro resumen para aclarar las conexiones entre los distintos programas y archivos de datos.

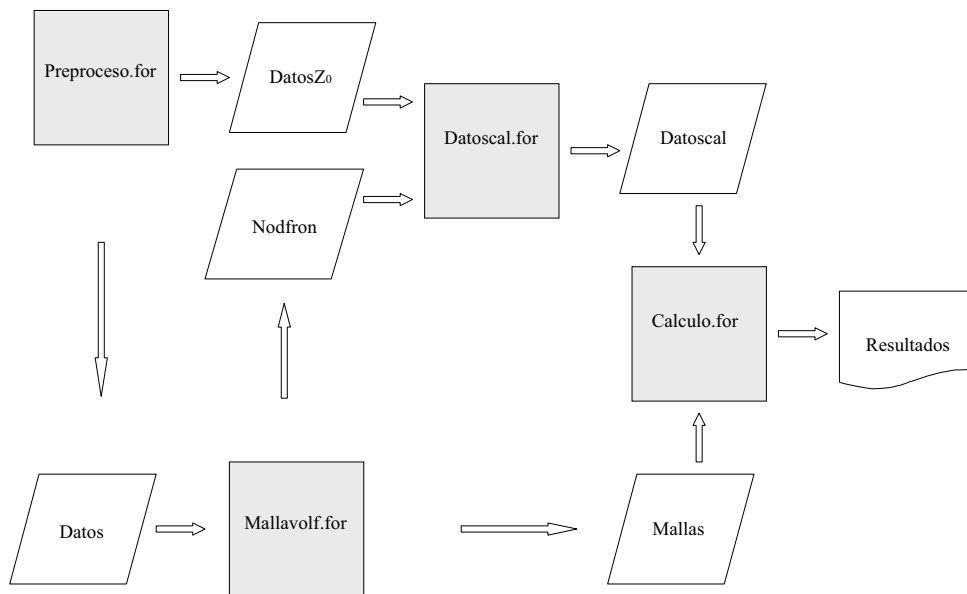


Figura 11.1: Conexión entre los programas desarrollados

## 11.2. Promedio en la vertical de términos en $(\bar{u}, \bar{v})$

Para integrar  $\bar{u}^2$  y  $\bar{u}\bar{v}$  se tiene en cuenta (3.60) y se define

$$\bar{u}'' = \bar{u} - \hat{u}, \quad \bar{v}'' = \bar{v} - \hat{v}, \quad (11.1)$$

con lo que se cumple

$$\int_{z_b}^{z_s} \bar{u}'' dz = \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \int_{z_b}^{z_s} \hat{u} dz = 0, \quad (11.2)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \bar{v}'' dz = \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz - \int_{z_b}^{z_s} \hat{v} dz = 0. \quad (11.3)$$

Entonces,  $\bar{u}^2$  se convierte en  $(\hat{u} + \bar{u}'')^2$ , con lo que

$$\int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz = \int_{z_b}^{z_s} \hat{u}^2 dz + 2\hat{u} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}'' dz + \int_{z_b}^{z_s} (\bar{u}'')^2 dz = \hat{u}^2 h + \int_{z_b}^{z_s} (\bar{u}'')^2 dz. \quad (11.4)$$

Asimismo

$$\int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz = \int_{z_b}^{z_s} (\hat{u} + \bar{u}'')(\hat{v} + \bar{v}'') dz = \hat{u}\hat{v}h + \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}''\bar{v}'' dz. \quad (11.5)$$

Si la variación en la vertical de  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  es pequeña, como se está suponiendo, los sumandos  $\int_{z_b}^{z_s} (\bar{u}'')^2 dz$  y  $\int_{z_b}^{z_s} \bar{u}''\bar{v}'' dz$  pueden despreciarse. Esta simplificación equivale a tomar el coeficiente de Boussinesq  $\beta = 1$ . Este coeficiente se define como

$$\beta = \frac{\int V^2 dA}{V_m^2 A}, \quad (11.6)$$

siendo  $V$  la velocidad en cada punto de la sección y  $V_m$  la velocidad media

$$V_m = \frac{\int V dA}{A}. \quad (11.7)$$

Para flujo turbulento en canales aproximadamente rectos de sección trapezoidal su valor es próximo a la unidad [18, pg. 13].

### 11.3. Integral de superficie del gradiente

Según el teorema de Green [50, pg. 470]

$$\iint_{C_i} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_i} F dx + G dy, \quad (11.8)$$

donde  $G$  y  $F$  son funciones de derivada continua y el recorrido de  $\Gamma_i$  se realiza en sentido antihorario.

Si se sustituye  $G$  por  $m$  y  $F$  por 0, se obtiene

$$\iint_{C_i} \frac{\partial m}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma_i} m dy \quad (11.9)$$

y, sustituyendo en cambio  $G$  por 0 y  $F$  por  $m$ , se llega a

$$\iint_{C_i} \frac{\partial m}{\partial y} dx dy = - \int_{\Gamma_i} m dx. \quad (11.10)$$

Multiplicando (11.9) por el vector unitario  $\mathbf{i}$ , (11.10) por  $\mathbf{j}$  y sumando, resulta

$$\iint_{C_i} \nabla m dx dy = \int_{\Gamma_i} m (dy \mathbf{i} - dx \mathbf{j}). \quad (11.11)$$

Si en el segundo miembro de (11.11) se multiplica y divide por el módulo del vector  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , se obtiene

$$\iint_{C_i} \nabla m dx dy = \int_{\Gamma_i} m \mathbf{n} dl, \quad (11.12)$$

siendo el vector

$$\mathbf{n} = \frac{dy \mathbf{i} - dx \mathbf{j}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad (11.13)$$

el unitario normal a la curva con sentido hacia afuera.





# Bibliografía

- [1] Alcrudo, F. (1992), *Esquemas de alta resolución de variación total decreciente para el estudio de flujos discontinuos de superficie libre*, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.
- [2] Alcrudo, F. & García-Navarro, P. (1993), *A high resolution Godunov type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 16, 489-505.
- [3] Alcrudo, F. (2002), *A state of the art review on mathematical model of flood propagation*, Proceedings of the 1st IMPACT project workshop, HR Wallingford, UK, 16-17 May, 2002. CD-ROM (also in [www.impact-project.net](http://www.impact-project.net)).
- [4] Anastasiou, A. & Chan, C.T. (1997), *Solution of the shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 24, 1225-1245.
- [5] Anderson, J.D.; Degrez, G.; Dick, E. & Grundmann, R. (1996), *Computational fluid dynamics. An introduction*, Wendt, J.F. (ed.), Springer, Berlin.
- [6] Apsley, David (2002), *Boundary-layer theory*, Manchester Centre for Civil & Construction Engineering.  
[http://www.it.iitb.ac.in/vweb/engr/civil/computation\\_mechanics/personalpages.umist.ac.uk/staff/david.d.apsley/lectures/turbbl/](http://www.it.iitb.ac.in/vweb/engr/civil/computation_mechanics/personalpages.umist.ac.uk/staff/david.d.apsley/lectures/turbbl/)
- [7] Bermúdez, A.; Dervieux, A.; Desideri, J. & Vázquez, M.E. (1998), *Upwind schemes for the two dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 155, 49-72.
- [8] Bonillo, J.J. (2000), *Un modelo de transporte de sustancias solubles para flujos turbulentos en lámina libre*, Tesis doctoral, Universidad de A Coruña.

- [9] Brigham Young University (1996), *User's guide to RMA2 version 4.3* Salt Lake City, EEUU.
- [10] Brufau, P. (2000), *Simulación bidimensional de flujos hidrodinámicos transitorios en geometrías irregulares*, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.
- [11] Brufau, P.; Vázquez-Cendón, M.E. & García-Navarro, P. (2002), *A numerical model for the flooding and drying of irregular domains*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 39, 247–275.
- [12] Bui, T. (1999), *A parallel, finite-volume algorithm for large-eddy simulation of turbulent flows*, NASA/TM-1999-206570, Dryden Flight Research Center, Edwards, California.
- [13] Burguete, J. & G<sup>a</sup> Navarro, P. (2000), *An upwind conservative treatment of source terms in shallow water equations*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Barcelona.
- [14] Caleffi, V. (2003), *Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels*, Journal of Hydraulic Research, 41 , 2, 167-177.
- [15] Carnahan, B.; Luther, H.A. & Wilkes, J.O. (1979), *Cálculo numérico. Métodos. Aplicaciones*, Ed. Rueda, Madrid.
- [16] Celik, I. (1999), *Overview of turbulence modeling for industrial applications*, West Virginia University.  
<http://www.asme.org/education/prodev/cdseries/course13.htm>
- [17] Chadwick, A.J. & Morfett, J.C. (1986), *Hydraulics in civil engineering*, Harper Collins Academic, London.
- [18] Chaudhry, M.H. (1993), *Open channel flow*, Prentice Hall, New Jersey.
- [19] Chow, V.T. (1994), *Hidráulica de canales abiertos*, Mc Graw-Hill, Santafé de Bogotá.
- [20] Codina, R. (1998), *A comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 156, 185-210.



- [21] Codina, R. & Soto, O. (1999), *Finite element implementation of two-equation and algebraic stress turbulence models for steady incompressible flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 30, 309-333.
- [22] DHI Software (2001), *MIKE 21: A modelling system for estuaries, coastal waters and seas*, Danish Hydraulic Institute Water and Environment, Horsholm, Denmark.
- [23] Donea, J. & Huerta, A. (2003), *Finite element methods for flow problems*, John Wiley & Sons, Chichester, England.
- [24] Eymard, R.; Gallouët, T. & Herbin, R. (1997), *Finite volume methods*, Prepublication n0 97-19 of LAMP, umr 6632, Marseille. To appear in Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds.
- [25] Falconer, R.A. (1986), *A two-dimensional mathematical model study of the nitrate level in an natural inland basin*, Proceedings of the International Conference on water quality modelling in the inland natural environment 325-334, BHRA Fluid Engineering, Bournemouth.
- [26] Falconer, R.A. (1992), *Modelling tidal flows in an inland's wake using a two-equation turbulence model*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Water, Maritime and Energy 96, 43-53.
- [27] Ferziger, J. & Peric, M., (1996), *Computational methods for fluid dynamics*, Springer, Berlin.
- [28] Finnie, J.I. & Jeppson, R.W., *Solving turbulent flows using finite elements*, Journal of Hydraulic Engineering 117, 11, 1513-1530.
- [29] Fischer, H.; List, E.; Koh, R.; Imberger, J. & Brooks, N. (1979), *Mixing in inland and coastal waters*, Academic Press, New York.
- [30] Flokstra, C. (1976), *Generation of two-dimensional horizontal secondary currents*, Report S163, part II, Delft hydraulics laboratory.
- [31] Glaister, P. (1988), *Approximate Riemann solutions of the shallow water equations*, Journal of Hydraulic Research 26, 3, 293-306.
- [32] Godlewski, E & Raviart, P. (1996), *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer, Berlin.

- [33] Harten, A.; Lax, P. & Van Leer, B. (1983), *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Rev. 25, 35-61 (recogido en *Upwind and high-resolution schemes*, Springer, Berlin 1997)
- [34] Harten, A. (1984), *On a class of high resolution total-variation-stable finite difference schemes*, SIAM Journal of Numerical Analysis 21, 1.
- [35] Hirsch, C. (2000), *Numerical computation of internal and external flows (Volume I. Fundamentals of numerical discretization)*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [36] Hirsch, C. (2000), *Numerical computation of internal and external flows (Volume II. Computational methods for inviscid and viscous flows)*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [37] Hughes, T.J.R. & Tezduyar, T.E. (1984), *Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 45, 217-284.
- [38] Isaacson, E., Stoker, J. J. & Troesch, A. (1958), *Numerical solution of flow problems in rivers*, Journal of the Hydraulic Division 84, HY5, 1810/1-1810/18.
- [39] Idelsohn, S.R. & Oñate, E. (1993), *Finite volumes and finite elements: two good friends*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 37, 19, 3323-3341.
- [40] Jaeger, M. & Dhatt, G. (1992), *An extended  $k - \varepsilon$  finite element model*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 14, 1325-1345.
- [41] Launder, B.E. & Spalding, D.B. (1974), *The numerical computation of turbulent flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3, 269-289.
- [42] Leschziner, M. & Rodi, W. (1979), *Calculations of strongly curved open channel flow*, Journal of the Hydraulics Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, vol. 105, HY10, 1297-1314.
- [43] LeVeque, R.J. & Yee, H.C. (1990), *A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms*, Journal of Computational Physics 86, 187-210.

- [44] LeVeque, R.J. (1992), *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser, Berlin.
- [45] Löhner, R., Morgan, K. & Zienkiewicz, O.C. (1984), *The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids. 4, 1043-1063.
- [46] López Peña, F. (2000), *Mecánica de fluidos*, Servicio de publicaciones, Universidad de A Coruña.
- [47] Lin, S.; Chen, Y. & Shih, S. (1997), *Numerical study of MUSCL schemes for computational aeroacoustics*, AIAA-97-0023, January 1997.
- [48] Liska, R. & Wendroff, B. (1999), *Two-dimensional shallow water equations by composite schemes*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 30, 461-479.
- [49] McGuirk, J.J. & Rodi, W. (1978), *A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open-channel flow*, Journal of Fluid Mechanics 86, part 4, 761-781.
- [50] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. (1998), *Cálculo vectorial*, Addison Wesley Longman, Méjico.
- [51] Mingham, C.G. & Causon, D.M. (1998), *High-resolution finite-volume method for shallow water flows*, Journal of Hydraulic Engineering 124, 6, 604-614.
- [52] Minh, B.; Wenka, T. & Rodi, W. (2004), *Numerical modelling of bed deformation in laboratory channels*, Journal of Hydraulic Engineering, 130, 9, 894-904.
- [53] Navarrina, F.; Casteleiro, M.; Colominas, I.; Cueto-Felgueroso, L.; Fe, J.; Gómez, H. y Soage, A. (2004), *Simulación numérica del comportamiento hidrodinámico y de la evolución de la salinidad en rías y en estuarios: una herramienta eficaz para la predicción del impacto de las obras públicas*, Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería, Universidad de A Coruña.
- [54] Nezu, I. & Nakagawa, H. (1993), *Turbulence in open-channel flows*, IAHR monograph, Balkema, Rotterdam.
- [55] Nezu, I.; Kadota, A. & Nakagawa, H. (1997), *Turbulence structure in unsteady depth-varying open-channel flows*, Journal of Hydraulic Engineering 123, 9, 752-763.

- [56] Paillere, H.; Degrez, G. & Deconinck, H. (1998), *Multidimensional upwind schemes for the shallow water equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 26, 987-1000.
- [57] Peña, E.; Fe, J.; Puertas, J. y Sánchez-Tembleque, F. (2002), *A 2D numerical model using finite volume method for sediment transport in rivers*, River Flow 2002, Lovain-le-Neuve.
- [58] Peña, E. (2002), *Estudio numérico y experimental del transporte de sedimentos en cauces aluviales*, Tesis doctoral, Universidad de A Coruña.
- [59] Pena, L. (2004), *Estudio hidráulico en modelo de escalas de peixes de fenda vertical e de fenda profunda aliñadas. Aproximación á avaliación experimental da enerxía cinética turbulenta.*, Tesis doctoral, Universidad de A Coruña.
- [60] Peraire, J. (1986), *A finite element method for convection dominated flows*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea.
- [61] Peraire, J.; Zienkiewicz, O.C. & Morgan, K. (1986), *Shallow water problems: a general explicit formulation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 22, 547-574.
- [62] Puertas, J. y Sánchez, M. (2001), *Hidráulica*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid.
- [63] Quecedo, M. & Pastor, M. (2003), *Finite element modelling of free surface flows on inclined and curved beds*, Journal of Computational Physics 189, 45-62
- [64] Rameshwaran, P. & Shiono, K. (2002), *Predictions of velocity and boundary shear stress in compound meandering channel*, River Flow 2002, Lovain-le-Neuve.
- [65] Rastogi, A. & Rodi, W. (1978), *Predictions of heat and mass transfer in open channels*, Journal of the Hydraulics Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 104, HY3, 397-418.
- [66] Rodi, W. (1993), *Turbulence models and their application in hydraulics. A state-of-the-art review*, IAHR monograph (3rd. ed.), Balkema, Rotterdam.
- [67] Rodi, W.; Pavlovic, N. & Srivatsa, S.K. (1981), *Prediction of flow and pollutant spreading in rivers*, Transport models for inland and coastal waters, 63-111, Academic Press.

- [68] Rodi, W. (2000), *Simulation of turbulence in practical flow calculations*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Barcelona.
- [69] Roe, P.L. (1981), *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*, Journal of Computational Physics, 43, 357-372.
- [70] Roe, P.L. (1986), *Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*, Proceedings Conference Hyperbolic Problems, 41-51, Carasso, Raviart, Serre (eds.), Springer.
- [71] Rutherford, J.C. (1994), *River mixing*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [72] Sahin, M. & Owens, R.G. (2003), *A novel fully implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem-Part I: High Reynolds number flow calculations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 42, 52-77.
- [73] Smagorinsky, J. (1963), *General circulation experiments with the primitive equations, part I: the basic experiment*, Monthly Weather Review 91, 99-164.
- [74] Schlichting, H. & Gersten, K. (2000), *Boundary-layer theory*, Springer, Berlin.
- [75] Stoer, J. & Burlish, R. (1980), *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, New York.
- [76] Stoker, J.J. (1992), *Water waves. The mathematical theory with applications*, John Wiley & Sons, New York.
- [77] Streeter, V. & Wylie, B. (1988), *Mecánica de los fluidos*, McGraw-Hill, Méjico.
- [78] Teijeiro, T. (2001), *Criterios de diseño de escalas de peces de hendidura vertical*, Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.
- [79] Toro, E.F. (1997), *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*, Springer, Berlin.
- [80] Toro, E.F. (2000), *Numerica. A library of source codes for teaching, research and applications*, Numeritek Ltd., Cheshire.
- [81] Toro, E.F. (2001), *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, John Wiley & Sons, Chichester.

- [82] Van Leer, B. (1977), *Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow*, Journal of Computational Physics 23, 263-275.
- [83] Vázquez Cendón, M.E. (1994), *Estudio de esquemas descentrados para su aplicación a las leyes de conservación hiperbólicas con términos fuente*, Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.
- [84] Vázquez Cendón, M.E. (1999), *Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry*, Journal of Computational Physics 148, 497-526.
- [85] Vellando, P.; Puertas, J. & Colominas, I. (2002), *SUPG stabilized finite element resolution of the Navier-Stokes equations. Applications to water treatment engineering*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 191, 5899-5922.
- [86] Versteeg, H. & Malalasekera, W. (1995), *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*, Addison Wesley Longman, Harlow.
- [87] White, F. (1999), *Fluid mechanics*, Mc Graw-Hill, Boston.
- [88] White, F. (1991), *Viscous fluid flow*, Mc Graw-Hill, New York.
- [89] Wilcox, D. (2002), *Turbulence modelling for CFD*, DCW Industries, Inc., La Cañada, California.
- [90] Wright, N. (2001), *Conveyance implications for 2-D and 3-D modelling. Scoping study for reducing uncertainty in river flow conveyance*, HR Wallingford.
- [91] Zienkiewicz, O.C. & Heinrich, J.C. (1979), *A unified treatment of steady-state shallow water and two dimensional Navier-Stokes equations. Finite element penalty function approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 17/18, 673-698.
- [92] Zienkiewicz, O.C. & Oñate, E. (1990), *Finite volumes vs. finite elements. Is there really a choice?*, CIMNE, Barcelona.