



Universidade de Vigo



Máster en Ingeniería Matemática
2011/2013

Trabajo Fin de Máster

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN DE CÁLCULO DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Patricia Martínez Villar

Director/a: Andrés Prieto Aneiros

Empresa: CTAG



Fecha presentación: 22/07/2013

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Contextualización	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Metodología y herramientas	3
2. Respuesta en frecuencia de sistemas vibratorios de múltiples grados de libertad	5
2.1. Respuesta en frecuencia	5
2.2. Ecuación del movimiento para sistemas de un grado de libertad. Conceptos fundamentales.	6
2.3. Ecuación del movimiento para sistemas de múltiples grados de libertad. Modos propios de vibración.	10
2.4. Masa modal y rigidez modal	12
2.5. Modos normalizados por la matriz de masa	12
2.6. Análisis modal de la respuesta en frecuencia	13
3. Problemas estructurales	17
3.1. Modelo de Euler-Bernoulli de viga sometida a flexión.	18
3.2. Formulación variacional del problema dinámico de la viga en voladizo utilizando el modelo de Bernoulli-Euler	21
3.3. Método de los elementos finitos	23
4. Implementación	25
4.1. Nastran y DMAP	25
4.1.1. Introducción	25
4.1.2. Archivo de entrada de Nastran	26
4.1.3. Conjuntos de grados de libertad	28
4.1.4. Secuencias de solución	31
4.1.5. Archivos de salida de NASTRAN y declaraciones DIAG	32
4.1.6. Bloques de datos DMAP	33
4.1.7. Entradas para el análisis de respuesta en frecuencia	34
4.2. Descripción de la aplicación desarrollada	37
5. Simulaciones numéricas	43
5.1. Aproximación modal	43
5.2. Validación	45
5.2.1. Fuerza constante en el extremo	46

5.2.2.	Fuerza de amplitud variable con la frecuencia	47
5.2.3.	Dos fuerzas desfasadas.	49
5.2.4.	Dos fuerzas desfasadas en función de la frecuencia	52
5.2.5.	Dos fuerzas, una de ellas con retardo temporal.	55
6.	Conclusiones	59
6.1.	Conclusiones generales	59
6.2.	NASTRAN y DMAP	59
6.3.	Aplicación de cálculo de respuesta en frecuencia	60

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contextualización

La vibración se puede entender como el movimiento oscilatorio de un sistema mecánico (como es el caso de una estructura elástica) alrededor de una posición de equilibrio. Este tipo de fenómenos físicos se producen en cierto grado en casi cualquier tipo de maquinaria industrial. Aunque elevados niveles de vibración a veces son útiles, por ejemplo, en transportadores vibratorios o tamices, las vibraciones son generalmente indeseables, ya que a menudo dan lugar a ruidos excesivos, desgastes mecánicos, fatigas estructurales o posibles fallos sistémicos [12].

Para tratar de analizar el comportamiento vibratorio de cualquier sistema mecánico, es habitual utilizar herramientas matemáticas tales como el análisis modal. Puesto que cualquier estructura elástica tendrá modos preferidos en los que vibrará, el estudio de cada modo de vibración resulta fundamental para conocer el patrón de ruido y vibraciones del sistema mecánico. En el caso particular de una estructura elástica, si las cargas que soporta la estructura coinciden parcialmente con la distribución espacial y la frecuencia del modo de vibración, se podrían producir peligrosos fenómenos de resonancia en el sistema. De hecho, cuando un sistema mecánico entra en resonancia, el modo de respuesta estructural sólo se verá limitado por la amortiguación del modo (parte imaginaria del valor modal asociado).

Para evitar estos fenómenos de resonancia no deseados, es posible modificar la posición de algunos modos estructurales a frecuencias distintas de sus frecuencias de resonancia, o bien cambiando el diseño de la estructura o bien incluyendo elementos disipativos que aumenten la amortiguación de alguno de los modos de vibración. Por lo tanto, para evitar la vibración excesiva y sus problemas asociados en cualquier sistema mecánico, es importante asegurar que la frecuencia de excitación a la que trabaja el sistema mecánico no coincide con las frecuencias de resonancia estructurales y, de este modo, evitar vibraciones indeseadas.

Para condensar la información del comportamiento dinámico de un sistema mecánico es habitual utilizar la representación gráfica de una magnitud física (escalar o vectorial) en función de la frecuencia a la que trabaja el sistema: la Función de Respuesta de Frecuencia, o por sus siglas en inglés, “Frequency Response Function” (FRF). Este tipo de funciones proporcionan una medida fundamental que aísla las propiedades dinámicas inherentes de una estructura mecánica [21]. Así, por ejemplo con una FRF se puede describir la vibración producida por una carga sobre la estructura midiendo el cociente del módulo de las fuerzas en dos puntos diferentes del sistema (en un punto se considera la fuerza externa aplicada y en el otro punto la fuerza inercial asociada a la aceleración de la estructura). Evidentemente,

si las medidas se realizan en n puntos, las FRFs asociadas a cada punto se podrían disponer en cada uno de los coeficientes de una matriz de tamaño $n \times n$.

De hecho, suponiendo que este tipo de funciones se calcula a partir de una simulación numérica mediante elementos finitos, una FRF se puede entender como la relación, en función de la frecuencia, de un cociente entre el valor de un grado de libertad, o por sus siglas en inglés, “Degree Of Freedom” (DOF) de salida (aproximación numérica de alguna magnitud física del sistema vibratorio) y un dato del problema conocido de antemano en el modelo. Dependiendo de si el valor de entrada en el problema numérico se corresponde con un desplazamiento, velocidad, o aceleración, la interpretación física del cociente asociado a la expresión de la FRF cambiará, aunque sus valores siempre dependerán de la frecuencia nominal a la que trabajan las cargas en el sistema mecánico.

El análisis modal es una de las técnicas que se pueden emplear para calcular de forma eficiente la respuesta en frecuencia de un sistema. Desde un punto de vista matemático, con el análisis modal se intenta desacoplar la ecuación estructural del movimiento por medio de una manipulación adecuada que involucra a los modos de vibración, de forma que se puedan resolver las ecuaciones del movimiento de forma desacoplada. La respuesta en frecuencia de la estructura se puede entonces encontrar sumando las respectivas respuestas modales ponderadas con respecto a su grado de participación en el movimiento de la estructura.

Con las herramientas de análisis modal disponibles en la actualidad y con ayuda de la simulación numérica por medio del método de elementos finitos, a menudo es posible predecir en la etapa de diseño el comportamiento dinámico de un sistema mecánico y los posibles problemas de vibración [12]. De hecho, los códigos de propósito general de elementos finitos, tales como NASTRAN [6], están programados para resolver la ecuación matricial obtenida por el método de los elementos finitos con la que se caracteriza el movimiento de una estructura, pudiéndose calcular los modos propios de vibración y la respuesta en frecuencia de un sistema mecánico.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto consiste en desarrollar una aplicación interactiva sencilla, dedicada al cálculo de la respuesta en frecuencia de un sistema mecánico a partir del cálculo de los modos propios de vibración de una estructura previamente calculada mediante un método de elementos finitos (implementado en NASTRAN).

La utilidad de esta aplicación se fundamenta en el bajo coste computacional que supondrá reaprovechar el cálculo de los modos de resonancia de la estructura sin recalcularse la solución aproximada del problema discretizado completo con NASTRAN. Más precisamente, para obtener la respuesta en frecuencia con una nueva configuración de cargas y tener en cuenta las mismas magnitudes físicas en cualquier otro punto de la estructura, no será necesario resolver el problema matricial obtenido con elementos finitos.

Más concretamente, el algoritmo computacional a implementar en la aplicación consiste en: (a) partir de la discretización mediante elementos finitos de un problema de elasticidad lineal en el que previamente se han calculado los modos de vibración de la estructura en un intervalo de frecuencia definido por el usuario, (b) calcular la aproximación modal del sistema mecánico global con los modos calculados y, finalmente, (c) obtener la FRF deseada tanto con diferentes cargas, como utilizando diferentes magnitudes físicas o diferentes puntos de medida, sin necesidad de recalcularse la base modal, es decir, sin resolver el problema lineal

asociado a la discretización en elementos finitos.

En la parte inicial (objetivo (a)), donde se han usado las librerías del paquete comercial NASTRAN, el objetivo fundamental consiste en el estudio del lenguaje de medio nivel NASTRAN DMAP, la estructura del formato de salida de vectores de DOF y las matrices de discretización asociadas al método de elementos finitos. Es de especial importancia documentar en detalle los procedimientos para extraer matrices y vectores a ficheros (con o sin formato) legibles por otras aplicaciones.

El segundo bloque (objetivos (b) y (c)) se ha centrado en la implementación de un método simple de reducción modal, con el que se ha sido capaz de calcular la respuesta en frecuencia no sólo en casos donde el problema de vibración estructural involucre un problema cuadrático de autovalores/autovectores sino que también se ha sido capaz de manejar problemas con amortiguamiento (mediante mecanismos internos de amortiguación del propio material elástico).

1.3. Metodología y herramientas

En la primera parte del proyecto, que involucra el uso de librerías de simulación numérica de elementos finitos con el paquete comercial NASTRAN, se han utilizado tanto sus librerías como los recursos de programación disponibles a través del lenguaje de medio nivel NASTRAN DMAP, que emplea el núcleo de cálculo de este paquete comercial. En ambos casos se ha revisado la documentación de ambos paquetes [8, 20].

En la segunda parte del proyecto, una vez calculada una aproximación mediante elementos finitos de una secuencia finita de modos de vibración del sistema estructural, se ha implementado en el lenguaje de alto nivel MATLAB tanto las operaciones matriz-vector como las operaciones vector-vector que involucra el método de reducción modal (véase, por ejemplo, [15]). Una vez hecha esta implementación, también se ha programado en el mismo lenguaje de programación el cálculo de la respuesta en frecuencia del sistema.

Para validar la implementación de todos los cálculos modales realizados y comprobar la correcta programación de la respuesta en frecuencia, se han realizado una serie de tests académicos en una dimensión que involucran vigas elásticas. En concreto, para el caso unidimensional se ha utilizado un problema con una viga (modelada mediante las ecuaciones de Bernoulli-Euler) que responde a un modelo de elasticidad lineal, donde las cargas están soportadas sobre un extremo libre mientras que el otro extremo permanece empotrado (condiciones que se corresponden con una viga en voladizo).

Este tipo de test han permitido validar las operaciones matriz-vector entre la matriz modal y el vector de cargas para obtener el vector de fuerzas modales y la representación modal de la solución del sistema lineal para obtener la respuesta en frecuencia asociada a una configuración de cargas conocida.

Capítulo 2

Respuesta en frecuencia de sistemas vibratorios de múltiples grados de libertad

2.1. Respuesta en frecuencia

Para condensar la información del comportamiento dinámico de un sistema mecánico es habitual utilizar la representación gráfica de una magnitud física (respuesta) en función de la frecuencia a la que trabaja el sistema [21]. Esta magnitud podría ser la del desplazamiento, velocidad o aceleración del sistema cuando se aplica una fuerza determinada.

Para sistemas de un grado de libertad puede obtenerse por tanto la respuesta como una serie de valores del desplazamiento, por ejemplo, para cada uno de los valores de la frecuencia dentro de un rango determinado. Para sistemas de múltiples grados de libertad, podría considerarse la respuesta de cada uno de estos grados de libertad en función de la frecuencia.

La fuerza y la respuesta son normalmente expresadas como funciones del tiempo; sin embargo, si se consideran soluciones de tipo armónico para la ecuación del movimiento, se introduce de forma inmediata una relación con la frecuencia, expresando las soluciones armónicas mediante relaciones de números complejos. De esta forma, las funciones respuesta contienen componentes de magnitud y fase (véase Sección 2.2).

Una manera de representar la respuesta del sistema es representar, para un grado de libertad, la magnitud en escala logarítmica y la frecuencia en un eje con escala lineal, componiendo una gráfica semilogarítmica similar a la mostrada en la Figura 2.1. Para determinadas frecuencias, próximas a las denominadas de resonancia, la magnitud es máxima y solamente está limitada por el amortiguamiento del sistema.

En general, los modelos más grandes pueden ser resueltos de manera más eficiente mediante el método modal porque la solución numérica es la solución de un sistema más pequeño de ecuaciones no acopladas. El método modal es particularmente ventajoso si se calcularon las frecuencias naturales y las formas de los modos durante una etapa anterior del análisis. Utilizar el enfoque modal para resolver las ecuaciones desacopladas es muy eficiente, incluso para un gran número de frecuencias de excitación. Por otro lado, la mayor parte del esfuerzo en un análisis de respuesta de frecuencia modal es el cálculo de los modos. Para sistemas grandes con un gran número de modos, esta operación puede ser tan costosa como una solución directa. Para modelos pequeños con unas pocas frecuencias de excitación, el método directo

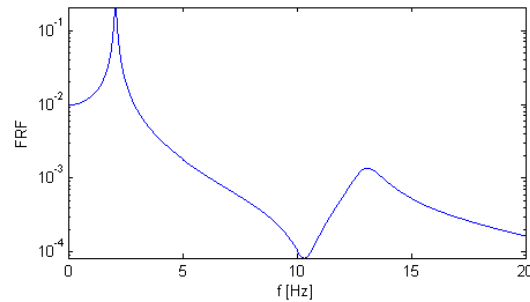


Figura 2.1: Gráfica semilogarítmica que representa la magnitud física de la respuesta en frecuencia (FRF) frente a la frecuencia f (en Herzios [Hz]).

puede ser el más eficiente ya que resuelve las ecuaciones sin primero calcular los modos. El método directo es más preciso que el método modal ya que el método directo no involucra un truncamiento de modos, que consiste en no considerar los modos de las frecuencias por encima de las frecuencias del análisis que se consideran al calcular la respuesta en frecuencia.

El método modal utiliza un pequeño número de formas modales de la estructura para reducir el tamaño del sistema, desacoplar las ecuaciones del movimiento y hacer la solución numérica más eficiente.

2.2. Ecuación del movimiento para sistemas de un grado de libertad. Conceptos fundamentales.

De forma general, un sistema mecánico sometido a oscilaciones puede considerarse compuesto de elementos inerciales, elementos de rigidez y elementos disipativos o de amortiguación. Como modelo más simple de este tipo de sistemas puede considerarse un conjunto masa-muelle con amortiguamiento viscoso.

La ecuación que rige el movimiento de un sistema oscilatorio de un solo grado de libertad $x(t)$ en torno a la posición de equilibrio se puede expresar como

$$\underbrace{m \frac{d^2 x}{dt^2}}_{\text{inercia}} + \underbrace{c \frac{dx}{dt}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{kx}_{\text{rigidez}} = \underbrace{f(t)}_{\text{fuerzas externas}}, \quad (2.1)$$

donde m es la masa del sistema, c es el coeficiente de amortiguamiento y k es la rigidez del sistema, que para el modelo masa-muelle tendría la magnitud de la constante de recuperación elástica del muelle dada por la ley de Hooke, $F = -kx$. Todas las constantes, m , c , y k son positivas.

Comunmente se emplean cuatro tipos de amortiguamiento a la hora de modelar sistemas oscilatorios: amortiguamiento viscoso, amortiguamiento de Coulomb o de fricción seca, amortiguamiento fluido, y amortiguamiento material, también llamado estructural, o sólido o histerético. En el amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad. Los otros modelos se pueden relacionar con el amortiguamiento viscoso a través de una cantidad llamada amortiguamiento viscoso equivalente, c_{eq} , que sería el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso c requerido para disipar la misma cantidad de energía por período de oscilación [2].

Empleando la notación de Newton en la que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, la ecuación del movimiento (2.1) puede escribirse como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f. \quad (2.2)$$

Esta es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de orden dos, con coeficientes constantes y completa. La solución general de este tipo de ecuaciones viene dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

donde $x_h(t)$ es la solución general de la EDO homogénea y $x_p(t)$ una solución particular de la EDO completa. La EDO homogénea tiene el segundo término igual a cero,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0,$$

y describe el movimiento de las oscilaciones libres (no forzadas) amortiguadas. Si se divide esta ecuación por m y se definen las cantidades

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \alpha = \frac{c}{2m} > 0,$$

se puede escribir la ecuación (2.2) como

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_n^2x = 0. \quad (2.3)$$

En el caso de que no exista amortiguamiento se tendría una vibración libre no amortiguada, que representa la forma en la que el sistema vibra de forma natural en ausencia de excitación, y satisface la EDO $\ddot{x} + \omega_n^2x = 0$, cuya solución general se obtiene a partir de las raíces de su polinomio característico de forma inmediata, representando un movimiento armónico simple: $x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$, con A la amplitud del movimiento, ω_n la frecuencia angular y ϕ la fase. Esta frecuencia angular ω_n se conoce como frecuencia angular natural del sistema, y la cantidad $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ se conoce como frecuencia natural, y tiene unidades de Hercios ($\text{Hz} = \text{s}^{-1}$).

Para resolver la EDO (2.3) se pueden utilizar las raíces del polinomio característico o bien buscar soluciones de tipo armónico. Las soluciones de tipo armónico se pueden expresar como

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi), \quad (2.4)$$

con A la amplitud del movimiento, ω la frecuencia angular y ϕ la fase. Esta expresión (2.4) se puede reescribir también como la parte real de un cierto número complejo $\tilde{A}e^{-i\omega t}$, siendo \tilde{A} a su vez un número complejo cuya forma polar sea $Ae^{i\phi}$, ya que (siguiendo [1]) se obtiene

$$x(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t}) = \text{Re}(Ae^{i\phi}e^{-i\omega t}) = \text{Re}(Ae^{i(\phi-\omega t)}) = A \cos(\omega t - \phi).$$

Se tiene entonces que el módulo de \tilde{A} es la amplitud A de la solución, mientras que el argumento de \tilde{A} es la fase ϕ , por lo que que \tilde{A} se suele denominar amplitud compleja o fasor. Si se considera una solución armónica de la forma $x(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$, de la EDO homogénea, debe cumplirse que

$$(\omega^2 - 2\alpha\omega + \omega_n^2)\tilde{A}e^{-i\omega t} = 0,$$

para algún número complejo ω .

Si se quiere una solución no nula ($\tilde{A} \neq 0$), debe verificarse

$$(\omega^2 - 2\alpha\omega + \omega_n^2) = 0.$$

Se llega así a una expresión del polinomio característico de la EDO en la variable ω . Las raíces de este polinomio son

$$\omega = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = \alpha \pm i\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \alpha \pm i\omega_d,$$

donde $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$ es un número real si y sólo si $\omega_n \geq \alpha$, por lo que se deben distinguir dos casos según las raíces del polinomio característico sean reales o complejas:

(a) Si $\omega_n > \alpha$, la raíz ω es compleja, y la solución general de la EDO homogénea es de la forma

$$x_h(t) = \operatorname{Re}(\tilde{A}e^{-(\alpha \pm i\omega_d)t}) = e^{-\alpha t} \operatorname{Re}(\tilde{A}e^{\mp i\omega_d t}) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t \mp \phi).$$

Para un problema de valor inicial, las constantes A y ϕ pueden determinarse a partir de unas condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. La función que se obtiene no es periódica, pero el tiempo entre dos cortes de la función con el eje temporal es constante e igual a $T_d = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi}{\omega_d}$, que se conoce como período de oscilación. Además, la amplitud decae exponencialmente proporcionalmente a $e^{-\alpha t}$. En este caso se dice que el sistema está subamortiguado.

(b) Si $\omega_n \leq \alpha$, ω es real y en este caso la solución no oscila, sino que decrece exponencialmente. Aquí se pueden distinguir los casos en los que $\omega_n = \alpha$ y $\omega_n < \alpha$.

(b1) Si $\omega_n = \alpha$, el polinomio característico tiene una única solución de multiplicidad dos, y se dice que el amortiguamiento es crítico. La solución general es de la forma $x_h(t) = Ae^{-\alpha t}$. En este caso el coeficiente de amortiguamiento tiene el valor $c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$, y se conoce como amortiguamiento crítico, c_c .

(b2) Si $\omega_n < \alpha$, se dice que el sistema está sobreamortiguado, y la solución general es de la forma

$$x_h(t) = Ae^{-\alpha t + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}t} + Be^{-\alpha t - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}t}.$$

Los sistemas amortiguados se pueden clasificar también según el factor de amortiguamiento o ratio de amortiguamiento, que relaciona el amortiguamiento del sistema con el valor del amortiguamiento crítico,

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c\omega_n}{2k},$$

siendo esta una cantidad adimensional. Cuando $c = c_c$, $\zeta = 1$, y el sistema está críticamente amortiguado. Los sistemas en los que $0 < \zeta < 1$ son sistemas subamortiguados, y aquellos en los que $\zeta > 1$ son sistemas sobreamortiguados (véase [2]).

Con lo visto anteriormente se tendría la solución de la homogénea $x_h(x)$ y se busca ahora una solución particular $x_p(x)$ de la ecuación completa (2.2). Para calcular una solución particular de una EDO de coeficientes constantes se puede emplear el método de los coeficientes indeterminados en el caso de que la función del segundo término pueda ser descrita mediante polinomios, exponenciales o funciones trigonométricas. Por tanto, en el caso en que f sea armónica, es decir, de la forma $f(t) = \operatorname{Re}(\tilde{F}e^{-i\omega t}) = F \cos(\omega t - \phi_F)$, se buscan soluciones particulares de la forma $x(t) = \operatorname{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$. Sustituyendo en la ecuación (2.2), se tiene

$$(-\omega^2 m - i\omega c + k)\tilde{A}e^{-i\omega t} = \tilde{F}e^{-i\omega t}.$$

Como \tilde{F} es no nulo, los factores del primer miembro son distintos de cero y se deduce que

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{F}}{-\omega^2 m - i\omega c + k}.$$

Entonces la solución particular buscada es

$$x_p(t) = \operatorname{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{\tilde{F}}{-\omega^2 m - i\omega c + k}e^{-i\omega t}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\frac{F}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2 - i2\alpha\omega}e^{i\phi_F}e^{-i\omega t}\right).$$

Por tanto, la solución general de la ecuación del movimiento vibratorio forzado amortiguado, en el caso particular de un sistema subamortiguado ($\alpha < \omega_n$), vendría dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t \mp \phi) + \operatorname{Re}\left(\frac{\frac{F}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2 - i2\alpha\omega}e^{i\phi_F}e^{-i\omega t}\right),$$

donde A y ϕ se determinarían a partir de las condiciones iniciales. Aun sin determinar estas constantes, puede verse en esta expresión que la solución general de la EDO homogénea tiene influencia en el movimiento durante un cierto tiempo transitorio mientras que la solución particular de la EDO completa definiría el movimiento en el régimen estacionario, en el que el sistema termina vibrando con la frecuencia de la fuerza impulsora.

Para introducir el concepto de resonancia, se consideran las oscilaciones forzadas no amortiguadas cuando la frecuencia de la fuerza de excitación es igual a la frecuencia natural. La ecuación del movimiento tiene la expresión

$$m\ddot{x} + kx = f.$$

Se busca de nuevo una solución de esta ecuación como la suma de la solución general de la EDO homogénea más una solución particular de la EDO completa. La ecuación homogénea corresponde a la de las oscilaciones libres no amortiguadas, cuya solución ya se ha visto que tiene la expresión $x_h(t) = B \cos(\omega_n t - \phi)$. Para encontrar una solución particular de la EDO completa se aplica el método de los coeficientes indeterminados, que indica que la solución debe ser de la forma $x_p(t) = \operatorname{Re}(\tilde{A}te^{-i\omega_n t})$, ya que la expresión de $f(t)$ se puede obtener a partir de la solución de la ecuación homogénea. Sustituyendo la expresión de $x_p(t)$ en la ecuación, se tiene

$$m\tilde{A}(2i\omega_n - \omega_n^2 t)e^{-i\omega_n t} + k\tilde{A}te^{-i\omega_n t} = \tilde{F}e^{-i\omega_n t},$$

de donde resulta

$$\tilde{A} = -\frac{\tilde{F}}{2i\omega_n m}.$$

De modo que

$$x_p(t) = \operatorname{Re}\left(-\frac{\tilde{F}}{2i\omega_n m}te^{-i\omega_n t}\right) = \frac{Ft}{2\omega_n m} \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi_F).$$

Entonces,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = B \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{Ft}{2\omega_n m} \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi_F).$$

Aquí puede verse que la amplitud del desplazamiento se hace infinita cuando t tiende a infinito, debido al factor de t en el numerador del segundo sumando. A este fenómeno se le conoce como resonancia, y a la frecuencia angular natural ω_n se la denomina también frecuencia angular de resonancia del sistema.

2.3. Ecuación del movimiento para sistemas de múltiples grados de libertad. Modos propios de vibración.

Cuando un sistema mecánico responde a un modelo lineal con N grados de libertad, se necesitan N ecuaciones diferenciales para obtener un problema bien planteado con el que determinar el movimiento. Si se disponen en forma matricial, la ecuación del movimiento toma la forma general

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}, \quad (2.5)$$

donde la matriz de masa es $[M]$, la matriz de rigidez es $[K]$ y la matriz de amortiguamiento es $[C]$, todas ellas tienen tamaño $N \times N$. Las fuerzas $\{f(t)\}$, los desplazamientos $\{x(t)\}$, las velocidades $\{\dot{x}(t)\}$ y las aceleraciones $\{\ddot{x}(t)\}$ son vectores $N \times 1$. A lo largo de este trabajo, se supondrá que las matrices $[M]$ y $[K]$ son simétricas y, en general, tendrán coeficientes no diagonales no nulos, por lo que la ecuación (2.5) representa un sistema de ecuaciones acoplado.

Al igual que en el caso de sistemas con un grado de libertad, la respuesta del sistema se puede calcular como suma de la solución general homogénea y una solución particular. Para determinar la respuesta forzada se puede aplicar por ejemplo el método antes descrito en la sección anterior a cualquier sistema sujeto a excitaciones periódicas (siempre y cuando el término de fuerzas se pueda escribir, por ejemplo, como combinación lineal de funciones trigonométricas). Esto supone la resolución de un sistema algebraico de gran tamaño cuando N es grande, lo que puede resultar muy costoso computacionalmente.

Un método más eficiente, cuando el sistema no está amortiguado o tiene amortiguamiento asociado a las matrices de masa o rigidez, es el análisis modal. Este método está basado en el uso de los autovectores o modos propios del sistema, que son las formas en las que el sistema vibra libremente cuando carece de amortiguamiento. La ecuación que rige este tipo de movimiento es

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\}. \quad (2.6)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes, cuya solución se asume de la siguiente forma:

$$\{x(t)\} = \text{Re}(\{X\}e^{-i\omega t}),$$

donde $\{X\}$ es un vector de constantes complejas (alguna de ellas no nula) que se denomina forma (o faser) del modo, y ω es la frecuencia angular de vibración. Las frecuencias ω que forman parte de la solución de la ecuación homogénea (2.6) se denominan frecuencias angulares naturales o frecuencias de resonancia.

Introduciendo la expresión de la solución en la ecuación diferencial y dividiendo por $e^{-i\omega t}$, se llega a la siguiente expresión para la solución no trivial $\{X\}$:

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = \{0\}. \quad (2.7)$$

Suponiendo que la matriz de masa es no singular, al multiplicar (2.7) por la izquierda por $[M]^{-1}$, puede verse que se trata de un problema de autovalores,

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \omega^2\{X\},$$

donde ω^2 es un autovalor de la matriz $[M]^{-1}[K]$ y $\{X\}$ su autovector asociado. Su polinomio característico sería un polinomio de grado N en la variable $\lambda = \omega^2$. Evidentemente, si la matriz $[M]^{-1}[K]$ fuese diagonalizable se tendrían N autovalores y autovectores.

Proposición 1. Sean $[M]$ y $[K]$ matrices cuadradas de tamaño $N \times N$ de coeficientes reales. Si $[M]$ es simétrica y definida positiva y $[K]$ es simétrica, el problema de autovalores $([K] + \lambda[M])\{X\} = 0$ está bien planteado en el sentido de que existen N autovalores y autovectores asociados al problema (2.7), es decir $[M]^{-1}[K]$ es diagonalizable.

Demostración. Véase [14] □

Para sistemas lineales asociados al sistema mecánico, las matrices $[M]$ y $[K]$ son simétricas, y dado que $[M]$ es la matriz de masa del sistema también es definida positiva, por lo que el problema de autovalores está bien planteado, según la Proposición 1. En sistemas pequeños, los autovalores se pueden calcular a partir del polinomio característico, y los autovectores se pueden obtener resolviendo un sistema lineal una vez conocidos los autovalores. Para grandes sistemas lineales, esta forma de proceder es inabordable, y se utilizan métodos iterativos para resolver el problema de autovalores (véase por ejemplo [13]).

Proposición 2. Sea $([K] + \lambda[M])\{X\} = 0$ un problema de autovalores bien planteado (en el sentido de la Proposición 1). Si $[K]$ y $[M]$ son reales y simétricas entonces los autovalores λ también son reales.

Demostración. Véase [14] □

Gracias a la Proposición 2, se puede entonces calcular las frecuencias naturales del sistema como las raíces cuadradas positivas de los autovalores del problema, y las formas modales son los autovectores correspondientes. Habitualmente, las frecuencias naturales del sistema se listan ordenadas de menor a mayor:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N,$$

y los autovectores correspondientes $\{X\}_1, \{X\}_2, \dots, \{X\}_N$ pueden disponerse en columna componiendo la llamada matriz modal $[\Phi]$ del sistema. Algunas propiedades interesantes de las formas modales se enumeran a continuación (véase [2]).

Proposición 3. (Ortogonalidad de los modos) Si $[M]$ y $[K]$ son matrices simétricas, $[M]$ es definida positiva y $(\{\omega_i\}, \{X\}_i)$, $i = 1, \dots, N$ son los pares autovalor-autovector del problema (2.7), se cumple que

$$\begin{aligned} \{X\}_l^T [M] \{X\}_m &= \delta_{lm} \\ \{X\}_l^T [K] \{X\}_m &= \omega_l^2 \delta_{lm}, \quad l, m = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

donde δ_{lm} es la delta de Kronecker.

Demostración. Véase [2] □

A partir de esta proposición es fácil deducir que los modos son ortogonales con respecto al producto interior inducido por la matriz $[M]$. Evidentemente, se debe notar que si $\{X\}$ es un autovector del problema (2.7), cualquier múltiplo de él también lo es. Además, teniendo en cuenta la Proposición 3, es claro que los autovectores del problema (2.7) son linealmente independientes.

2.4. Masa modal y rigidez modal

A partir de la información contenida en los autovalores y autovectores se puede reducir de forma aproximada la dimensión del sistema lineal a resolver, introduciendo las matrices de masa y rigidez modal.

Puesto que para cada autovalor y cada autovector se tiene (véase [2])

$$\omega_j^2 [M] \{X\}_j = [K] \{X\}_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

al multiplicar por $\{X\}_j^T$ la anterior ecuación por la derecha se obtiene

$$\omega_j^2 \{X\}_j^T [M] \{X\}_j = \{X\}_j^T [K] \{X\}_j.$$

La matriz diagonal $[M_D]$ se introduce como

$$(M_D)_{jj} = \{X\}_j^T [M] \{X\}_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

y es llamada matriz de masa modal. De la misma forma, la matriz diagonal $[K_D]$, cuyos coeficientes son

$$(K_D)_{jj} = \{X\}_j^T [K] \{X\}_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

se denomina matriz de rigidez modal. Para $j = 1, \dots, N$, utilizando la Proposición 3 se tiene que

$$\omega_j^2 = \frac{(K_D)_{jj}}{(M_D)_{jj}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Teniendo en cuenta la matriz modal del sistema $[\Phi]$ y la definición de las masas modales, resulta

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [M_D]. \quad (2.8)$$

De forma similar, la matriz de rigidez modal se escribe como

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [K_D]. \quad (2.9)$$

Entonces, si se disponen los autovalores ordenados en una matriz cuadrada diagonal $[\omega_D^2]$, se puede deducir a partir de (2.8) y (2.9) (utilizando la propiedad de ortogonalidad de los modos) que

$$[\omega_D^2] = [M_D]^{-1} [K_D]. \quad (2.10)$$

2.5. Modos normalizados por la matriz de masa

Como se ha comentado, el múltiplo de un autovector es también un autovector, por lo que es posible encontrar autovectores que cumplan que cada uno de los coeficientes diagonales de la matriz de masa modal asociada a cada modo sea igual a la unidad, es decir,

$$(M_D)_{jj} = \{X\}_j^T [M] \{X\}_j = 1, \quad j = 1, \dots, N.$$

En ese caso, se dice que los modos están normalizados por la matriz de masa, y pueden ser referidos como modos ortonormales. Una vez hecha esta normalización, la matriz de masa modal es igual a la identidad,

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I],$$

y por tanto, según (2.10),

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\omega_D^2].$$

Desde un punto de vista de la simulación de un sistema mecánico, puesto que los autovectores constituyen una base del espacio vectorial de los desplazamientos del sistema (son N vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de dimensión N), cualquier vector de este espacio se puede expresar como una combinación lineal de los modos propios del sistema,

$$\{X\} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \{X\}_j, \quad (2.11)$$

donde α_j son las coordenadas de $\{X\}$ en la base formada por los autovectores. Estas propiedades constituyen la base del análisis modal de sistemas de múltiples grados de libertad.

2.6. Análisis modal de la respuesta en frecuencia

La ecuación del movimiento de vibración forzada amortiguada con excitación armónica tiene la forma

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \text{Re}(\{P(\omega)\}e^{-i\omega t}) = \{f(t)\}. \quad (2.12)$$

Tanto la carga $\{f(t)\} = \text{Re}(\{P(\omega)\}e^{-i\omega t})$ en (2.12) como el vector solución $\{x(t)\} = \text{Re}(\{X(\omega)\}e^{-i\omega t})$ se representan mediante vectores complejos, $\{P(\omega)\}$ y $\{X(\omega)\}$ respectivamente.

En general, la ecuación (2.12) representa un sistema de ecuaciones acopladas. Una manera de resolverlo es desacoplar las ecuaciones mediante una transformación adecuada. Una transformación conveniente es la que viene dada por la matriz modal $[\Phi]$, compuesta por los autovectores del sistema, que tiene la propiedad de diagonalizar las matrices de masa $[M]$ y rigidez $[K]$. Como se ha visto en la Sección 2.3, resulta por tanto que las matrices modales de masa y rigidez son matrices diagonales.

Entonces, si se asume que la solución tiene la forma $\{x(t)\} = \text{Re}(\{X(\omega)\}e^{-i\omega t})$, se transforman las variables de las coordenadas físicas $\{X(\omega)\}$ a las coordenadas modales $\{\alpha(\omega)\}$ asumiendo que

$$\{X(\omega)\} = [\Phi]\{\alpha(\omega)\}. \quad (2.13)$$

Una vez que las coordenadas modales individuales han sido calculadas, las respuestas físicas se pueden recuperar como la combinación modal de las respuestas modales empleando la ecuación (2.13). Si no se considera de momento el amortiguamiento, a partir de (2.12) se tiene la ecuación no amortiguada para el movimiento armónico

$$-\omega^2 [M]\{X(\omega)\} + [K]\{X(\omega)\} = \{P(\omega)\}, \quad (2.14)$$

a la frecuencia forzada ω . Sustituyendo las coordenadas físicas $\{X(\omega)\}$ por las coordenadas modales $\{\alpha(\omega)\}$ se obtiene

$$-\omega^2 [M][\Phi]\{\alpha(\omega)\} + [K][\Phi]\{\alpha(\omega)\} = \{P(\omega)\}. \quad (2.15)$$

En este punto, las ecuaciones todavía están acopladas (existen coeficientes no diagonales no nulos en (2.15)). Para desacoplar las ecuaciones, se multiplica (2.15) por la izquierda por $[\Phi]^T$, con lo que resulta

$$-\omega^2[\Phi]^T[M][\Phi]\{\alpha(\omega)\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\alpha(\omega)\} = [\Phi]^T\{P(\omega)\},$$

donde recordemos $[\Phi]^T[M][\Phi]$ es la matriz de masa modal, $[\Phi]^T[K][\Phi]$ es la matriz de rigidez modal, y $[\Phi]^T\{P(\omega)\}$ es el vector de fuerza modal.

Por la propiedad de ortogonalidad de las formas modales (véase Proposición 3), se tiene que las matrices de masa y de rigidez modales son matrices diagonales. Por tanto, en esta forma las ecuaciones modales del movimiento están desacopladas, y se pueden escribir como un conjunto de sistemas de un solo grado de libertad de la forma

$$-\omega^2 m_j \alpha_j(\omega) + k_j \alpha_j(\omega) = p_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

donde m_j es la j -ésima masa modal, k_j es la j -ésima rigidez modal, y p_j es la j -ésima fuerza modal. Si además la matriz modal se ha normalizado por la matriz de masa, se tiene que $m_j = 1$ y $k_j = \omega_j^2$, y así las coordenadas modales se pueden calcular como

$$\alpha_j = \frac{p_j}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

El denominador de la expresión (2.16) puede alcanzar un valor próximo a cero para autovalores ω_j^2 cerca de la frecuencia ω^2 y es suficientemente grande para la mayoría de autovalores ω_j^2 que están lejos de ω^2 (véase [16]). Por tanto, para una frecuencia ω^2 dada, solamente un número pequeño de autovalores y autovectores tienen una influencia importante en el cálculo de coordenadas α_j (cuya contribución sea no despreciable en la solución). Si se asume que las componentes de la fuerza modal $p_j = \{X\}_j^T \{P\}$ son del mismo orden, se estima el error relativo ϵ_r al despreciar la componente j -ésima en (2.11) como

$$\epsilon_r \cong \frac{\min_{k=1, \dots, N} |\omega_k^2 - \omega^2|}{|\omega_j^2 - \omega^2|}.$$

Esto sugiere que los autovalores lejos de ω se pueden despreciar. Por tanto, una aproximación $\{\tilde{X}(\omega)\}$ truncada puede representar de forma precisa el valor exacto de la solución $\{X(\omega)\}$. La solución truncada es entonces

$$\{X(\omega)\} \approx \{\tilde{X}(\omega)\} = \sum_{j=1}^n \{X\}_j \frac{p_j}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad \text{con } n < N,$$

donde la suma se hace sobre los n autovalores ω_j^2 más próximos a ω^2 .

Cuando la respuesta en frecuencia se va a calcular para un rango de frecuencias tal que $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$, en la representación se utilizan todos los autovalores y autovectores asociados tales que los autovalores pertenecen a $[\omega_l, \omega_r]$, donde $\omega_l \ll \omega_{min}$ y $\omega_r \gg \omega_{max}$. Cuando $\omega_{min} = 0$ se suele usar $\omega_l = 0$, y ω_{max} se escoge entre 1,5 y 3 veces ω_{max} para problemas de análisis estructural [16]. Esto hace que el número de autovectores y autovalores que se utilizan en la aproximación sea menor que el número de grados de libertad del sistema, en ocasiones mucho menor, dependiendo del rango de las frecuencias de interés. De esta forma, para las

aproximaciones modales truncadas se utilizarán matrices de menor tamaño, y así la matriz modal del sistema $[\Phi]$ pasa de ser una matriz $N \times N$ a ser considerada una matriz $N \times n$ con $n \ll N$. Abusando de la notación y a pesar de que la matriz modal del sistema y su versión truncada son diferentes, por simplicidad, se usará la misma notación.

Cuando se tiene un sistema con amortiguamiento sin fuerzas exteriores y se asume una solución de la forma $\{x(t)\} = \text{Re}(\{X(\omega)\}e^{-i\omega t})$, el problema de autovalores toma la forma

$$([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])\{X(\omega)\} = \{0\}. \quad (2.17)$$

El problema cuadrático de autovalores (2.17) no produce, en general, N autovectores ortogonales. Si se supone que el amortiguamiento es de tipo modal, sin embargo, es una situación diferente. En este caso, los autovectores de las ecuaciones correspondiente al problema de autovalores sin amortiguamiento (2.7) y con amortiguamiento (2.17) son los mismos: si existe $\{X\} \neq \{0\}$ tal que $[K]\{X\}_j = \omega_j^2[M]\{X\}_j$, entonces existe un $\mu \in \mathbb{C}$ tal que (véase [16]):

$$[K]\{X\}_j + i\mu_j C\{X\} - \mu_j^2[M]\{X\}_j = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

La parte real de μ_j es la frecuencia propia ω_j y la parte imaginaria es el llamado factor de amortiguamiento modal asociado al j -ésimo modo. Además, también se tiene que

$$[\Phi]^T C [\Phi] = [C_D],$$

siendo $[C_D]$ una matriz diagonal con coeficientes b_1, \dots, b_N . Para cada autovalor ω_j^2 y autovector $\{X\}_j$ del problema sin amortiguamiento (2.7), existen dos autovalores μ_j^+ y μ_j^- que son las dos raíces de la ecuación

$$\omega_j^2 + i\mu_j b_j - \mu_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Un sistema con amortiguamiento modal es por tanto una colección de N modos desacoplados donde cada modo tiene asociado dos autovalores. A pesar de este hecho, las ecuaciones modales de movimiento permanecen desacopladas y tienen la forma

$$-\omega^2 \alpha_j(\omega) + i\omega b_j \alpha_j(\omega) + \omega_j^2 \alpha_j(\omega) = p_j(\omega),$$

para cada modo, $j = 1, \dots, N$. Por tanto, cada respuesta modal se calcula usando

$$\alpha_j(\omega) = \frac{p_j(\omega)}{-\omega^2 + i\omega b_j + \omega_j^2}. \quad (2.18)$$

Como se ha descrito anteriormente, el truncamiento modal se puede utilizar también en problemas con amortiguamiento modal. La solución truncada $\{\tilde{X}(\omega)\}$ viene dada por

$$\{X(\omega)\} \approx \{\tilde{X}(\omega)\} = \sum_{j=1}^n \{X\}_j \frac{p_j}{\omega_j^2 + i\omega b_j - \omega^2},$$

donde la suma se hace sobre los términos donde las cantidades $|\omega_j^2 + i\omega b_j - \omega^2|$ sean menores. Si ωb_j son valores pequeños comparados con $\omega_j^2 - \omega^2$, los términos seleccionados en la aproximación son normalmente los mismos términos que en el truncamiento modal no amortiguado.

Se debe destacar que el amortiguamiento de tipo Rayleigh (véase [16]) es un caso de amortiguamiento modal. Este tipo de amortiguamiento frecuentemente se utiliza para modelar

el amortiguamiento estructural. Se supone que $[C] = \gamma[K] + \delta[M]$, donde γ y δ son dos constantes.

En este caso, los elementos diagonales de la matriz de amortiguamiento modal $[C_D] = [\Phi]^T[C][\Phi]$ se pueden obtener a partir de la siguiente relación (véase [2]):

$$[C_D] = [\Phi]^T[C][\Phi] = [\Phi]^T(\gamma[K] + \delta[M])[\Phi] = \gamma[\Phi]^T[K][\Phi] + \delta[\Phi]^T[M][\Phi].$$

Si los autovectores están normalizados por la matriz de masa, $[\Phi]^T[M][\Phi] = [I]$ y $[\Phi]^T[K][\Phi] = [\omega_D^2]$, entonces es fácil deducir que

$$b_j = \gamma\omega_j^2 + \delta, \quad j = 1, \dots, N.$$

Por último se debe señalar que en problemas de vibraciones en Mecánica es habitual (véase [2]) definir la razón de amortiguamiento modal como

$$\zeta_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\omega_j} \gamma \omega_j \right), \quad j = 1, \dots, N,$$

y expresar los amortiguamientos modales en función de esta como $b_j = 2\zeta_j\omega_j$, para $j = 1, \dots, N$.

Capítulo 3

Problemas estructurales

En esta sección se describe el modelo matemático de la elastodinámica lineal empleado en el caso de estudio de una viga compuesta por un material elástico sometida a un movimiento de vibración armónico. De forma general, el problema de la elastodinámica lineal se puede formular de la siguiente manera: encontrar el vector de desplazamientos \mathbf{u} y tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}))) = \mathbf{f} & \text{en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{en } \Gamma_N, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{en } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) & \text{en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) & \text{en } \mathcal{B}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

siendo \mathcal{B} el dominio que ocupa el sólido en ausencia de fuerzas aplicadas, y Γ_N un subdominio de la frontera de \mathcal{B} sobre el que se aplica una densidad de fuerzas superficiales \mathbf{g} , Γ_D un subdominio de tal forma que $\partial\mathcal{B} = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, donde se impone un campo de desplazamientos conocido \mathbf{u}_0 . Además, \mathbf{f} representa la densidad de las fuerzas de volumen a las que está sometido el sólido, \mathbf{n} es el vector normal a la superficie del sólido, y ρ es la densidad de masa del material.

La primera ecuación en (3.1) es la ecuación de equilibrio de la elastodinámica lineal tridimensional, y la segunda y tercera expresan las condiciones de contorno del problema. La cuarta es la ley constitutiva del material, una expresión de la ley de Hooke que relaciona linealmente el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ para los materiales elásticos. Este tipo de materiales suelen caracterizarse dando el valor del módulo de Young E y el módulo de Poisson ν . Por último, se expresa el tensor de deformación como la parte simétrica del gradiente del desplazamiento (véase [18] para más detalles).

Si se consideran soluciones armónicas para fuerzas de tipo armónico, se puede suponer que la dependencia con respecto al tiempo de cada uno de los términos de la ecuación del movimiento es periódica y, como se ha visto en apartados anteriores, de la forma: $\mathbf{u} = \text{Re}(\mathbf{U}e^{-i\omega t})$, $\boldsymbol{\sigma} = \text{Re}(\boldsymbol{\Sigma}e^{-i\omega t})$, $\mathbf{f} = \text{Re}(\mathbf{F}e^{-i\omega t})$. Entonces, la ecuación del movimiento se puede escribir

$$-\omega^2 \rho \mathbf{U} e^{-i\omega t} - \text{Div}(\boldsymbol{\Sigma}) e^{-i\omega t} = \mathbf{F} e^{-i\omega t}.$$

Al dividir por $e^{-i\omega t}$, resulta

$$-\omega^2 \rho \mathbf{U} - \text{Div}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{F},$$

de modo que se expresa la ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia en lugar de en el dominio del tiempo, lo que es útil en los problemas de vibraciones.

De los modelos tridimensionales pueden derivarse modelos unidimensionales cuando una de las dimensiones del sólido es considerablemente más grande que las otras dos. En el caso del presente trabajo se considerará un modelo de viga. Para las vigas sometidas a flexión se puede emplear el modelo de Bernouilli-Euler o el modelo de Timoshenko (para más detalles véase [3]). Ambos modelos tienen en común que consideran que las secciones planas permanecen planas después de la deformación. Aunque el modelo de Timoshenko es más preciso que el de Bernouilli-Euler cuando la razón entre la longitud de la viga y las otras dimensiones de la viga se hace más pequeña (vigas más gruesas), en este trabajo se describirá el modelo de Bernouilli-Euler. Al igual que en el modelo de Timoshenko, donde la rotación flexional se introduce como una variable independiente no asociada a los desplazamientos, en la descripción del modelo de Bernouilli-Euler para una viga sometida a flexión también se ha escrito en términos de desplazamientos y rotaciones.

La aplicación desarrollada para el cálculo de la respuesta en frecuencia se ha probado en un caso sencillo de viga empotrada en un extremo, utilizando los modelos implementados en NASTRAN empleando elementos de tipo *bar*. En la documentación de NASTRAN (vease [11]) se indica que este tipo de elemento sigue el modelo clásico en el que la sección plana permanece plana después de la deformación, aunque no se especifica cuál de los dos modelos utiliza, por lo que por simplicidad se ha asumido que emplea el modelo de Bernouilli-Euler. A continuación se describe el modelo de Bernouilli-Euler de una viga sometida a flexión.

3.1. Modelo de Euler-Bernouilli de viga sometida a flexión.

En esta sección se seguirá el desarrollo del documento [18] para la obtención de las ecuaciones del modelo. Se considera una viga de longitud L cuyo eje se extiende a lo largo de un segmento recto que tiene por extremos $(0, 0, 0)$ y $(L, 0, 0)$, cuya sección transversal viene dada por un dominio plano Ω de área A . Por simplicidad, se considera la viga como un sólido tridimensional sometido a fuerzas superficiales constantes de densidad \mathbf{g} que actúan únicamente en el extremo libre de la viga $\Gamma_N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in \Omega, x = L\}$, siendo la densidad de fuerzas volúmicas nula. La carga total por unidad de longitud $\mathbf{q}(x)$, medida en unidades de fuerza por unidad de longitud es:

$$\mathbf{q}(x) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} dA = A\mathbf{g}\delta_L(x),$$

siendo $\delta_L(x)$ la delta de Dirac con soporte en el punto $x = L$.

En el modelo de Bernouilli-Euler descrito en el presente trabajo se han hecho las siguientes suposiciones:

- (a) Se supone que la sección transversal plana permanece plana después de la deformación.
- (b) La viga es recta de sección constante y de doble simetría en todo el dominio.
- (c) Se supone la presencia de un estado uniaxial de tensiones solamente en la dirección del eje, lo que implica existencia de tensión pura.
- (d) El material elástico es homogéneo, isótropo y verifica la ley de Hooke.

En consecuencia, una sección plana en la coordenada x que es inicialmente normal al eje neutral x permanece plana y normal después de la deformación. Así, un punto de la sección que se encuentre en el eje de la viga tendrá coordenadas $(x, 0, 0)^T$ antes de la deformación, y sus

coordenadas pasarán a ser $(x, u_{y_0}(x), u_{z_0}(x))^T$ una vez deformada. Este hecho permite escribir una parametrización de la viga deformada. Otro punto cualquiera de la sección de coordenadas $(x, y, z)^T$ antes de la deformación tendrá coordenadas $(x + u_x(x, y, z), y + u_{y_0}(x), z + u_{z_0}(x))^T$ después de la deformación, de modo que todos los puntos de la sección sufren la misma deformación en las coordenadas y y z bajo el campo de desplazamientos de la forma

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (u_x(x, y, z), u_{y_0}(x), u_{z_0}(x))^T.$$

La expresión del desplazamiento u_x se puede obtener obligando a que la sección transversal deformada permanezca normal al vector tangente del campo de desplazamientos $(x, u_{y_0}(x), u_{z_0}(x))$, esto es:

$$(u_x(x, y, z), y, z)^T \cdot \left(1, \frac{\partial u_{y_0}}{\partial x}(x), \frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(x)\right)^T = 0,$$

y en consecuencia

$$u_x(x, y, z) = -y \frac{\partial u_{y_0}}{\partial x}(x) - z \frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(x).$$

Por lo tanto, el campo de desplazamientos queda de la forma:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left(-y \frac{\partial u_{y_0}}{\partial x}(x) - z \frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(x), u_{y_0}(x), u_{z_0}(x)\right)^T.$$

A partir de la ecuación anterior se puede interpretar que la rotación que sufre la sección en el modelo de Bernoulli está ligada a la manera de flexionarse de la viga, ya que la rotación sólida local (ver [18]) sería:

$$\frac{1}{2} \text{rot}(\mathbf{u}) = \left(0, -\frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(x), \frac{\partial u_{y_0}}{\partial x}(x)\right)^T.$$

Se debe notar que la rotación es la misma en todos los puntos de la sección, ya que su expresión sólo depende de la variable x . La magnitud del vector obtenido es el ángulo local de rotación y su dirección es el eje local de rotación. Por tanto, se pueden expresar los ángulos de rotación como

$$\begin{aligned} \theta_y &= -\frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(x), \\ \theta_z &= \frac{\partial u_{y_0}}{\partial x}(x), \end{aligned}$$

Empleando la ecuación deformación-desplazamiento, se deduce que todas las componentes del tensor de deformaciones son nulas salvo la primera, que tiene la expresión:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(x) - z \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x).$$

Usando la ley de Hooke se obtiene la tensión axial como

$$\sigma_{xx} = -E \left(y \frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(x) + z \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x) \right),$$

donde E es el módulo de Young del material elástico.

La tensión resultante puede calcularse tomando el momento de las fuerzas que actúan sobre una sección transversal, esto es,

$$\mathbf{M} = (0, y, z)^T \times (\sigma_{xx}, 0, 0)^T = (0, z\sigma_{xx}, -y\sigma_{xx})^T.$$

A partir de su resultante se obtienen los momentos flectores en las direcciones y y z . En el caso de la dirección y ,

$$M_y(x) = \int_{\Omega} z\sigma_{xx}dA = \int_{\Omega} -zE \left(y \frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(x) + z \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x) \right) dA = -EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x),$$

donde I_y es el momento de inercia de la sección transversal Ω con respecto al eje y ,

$$I_y = \int_{\Omega} z^2 dA.$$

De forma análoga se obtiene la componente M_z como:

$$M_z(x) = EI_z \frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(x),$$

donde I_z es el momento de inercia de la sección con respecto al eje z dado por,

$$I_z = \int_{\Omega} y^2 dA.$$

Por tanto, bajo las hipótesis (a)-(d), las ecuaciones de equilibrio (primera ecuación en (3.1)), para el caso particular de la viga, vienen descritas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 u_{y_0}(x) + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2}(x) &= q_y(x) & x \in (0, L), \\ -\rho\omega^2 u_{z_0}(x) - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}(x) &= q_z(x) & x \in (0, L), \end{aligned}$$

donde $q_y(x)$ y $q_z(x)$ son las componentes y, z de la fuerza por unidad de longitud. En función del desplazamiento y las rotaciones, se puede expresar como:

$$-\rho\omega^2 u_{y_0}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(x) \right) - q_y(x) = 0, \quad \theta_y = -\frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(x), \quad (3.2)$$

$$-\rho\omega^2 u_{z_0}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x) \right) - q_z(x) = 0, \quad \theta_z = \frac{\partial u_{y_0}}{\partial x}(x). \quad (3.3)$$

Proposición 4. En el modelo de Bernoulli-Euler (3.2)-(3.3) para una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, si q_y es nula, entonces $u_{y_0}(x)$ es nulo.

Demostración. En efecto, si $q_y(x) = 0$, $x \in (0, L)$, del modelo (3.2)-(3.3) se tiene que

$$-\rho\omega^2 u_{y_0}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(x) \right) = 0.$$

Si EI_z es una constante distinta de cero, la anterior ecuación es equivalente a

$$-\rho\omega^2 u_{y_0}(x) + EI_z \frac{\partial^4 u_{y_0}}{\partial x^4}(x) = 0.$$

Esta es una ecuaci3n diferencial ordinaria lineal con coeficientes constantes y homogénea, cuyo polinomio característico es

$$-\rho\omega^2 + EI_z\lambda^4 = 0,$$

cuyas raíces son

$$\lambda = \pm \sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}, \pm i \sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}.$$

Por lo tanto, la soluci3n general es

$$u_{y_0}(x) = Ae^{\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}x} + Be^{-\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}x} + Ce^{+i\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}x} + De^{-i\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}x},$$

donde A, B, C y D son constantes arbitrarias.

Para determinar estas constantes se aplican las condiciones de contorno de viga empotrada y extremo libre.

Puesto que el extremo izquierdo est1 empotrado, tanto el desplazamiento como las rotaciones son nulos. Por tanto, $u_{y_0}(0) = 0$ y $(\partial u_{y_0}/\partial x)(0) = 0$.

$$u_{y_0}(0) = 0 \Rightarrow A + B + C + D = 0. \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_{y_0}}{\partial x}(0) = 0 \Rightarrow A\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}} - B\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}} + Ci\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}} - Di\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}} = 0. \quad (3.5)$$

En el extremo libre, tanto el momento como el esfuerzo cortante son nulos. Por tanto, $\frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(L) = 0$ y $\frac{\partial^3 u_{y_0}}{\partial x^3}(L) = 0$.

$$\frac{\partial^2 u_{y_0}}{\partial x^2}(L) = 0 \Rightarrow A\sqrt[2]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}e^{\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} - B\sqrt[2]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}e^{-\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} - C\sqrt[2]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}e^{i\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} - D\sqrt[2]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}e^{-i\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} = 0. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u_{y_0}}{\partial x^3}(L) = 0 \Rightarrow & A\left(\frac{\rho\omega}{EI_z}\right)^{\frac{3}{4}}e^{\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} - B\left(\frac{\rho\omega}{EI_z}\right)^{\frac{3}{4}}e^{-\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} - Ci\left(\frac{\rho\omega}{EI_z}\right)^{\frac{3}{4}}e^{i\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} \\ & - Di\left(\frac{\rho\omega}{EI_z}\right)^{\frac{3}{4}}e^{-i\sqrt[4]{\frac{\rho\omega}{EI_z}}L} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Al resolver el sistema formado por las ecuaciones (3.4)-(3.7) es f1cil ver que el segundo miembro es nulo y comprobar que la matriz es no singular. De ello se deduce que s3lo puede ser $A = B = C = D = 0$, y por tanto $u_{y_0}(x) = 0$. \square

En consecuencia, una carga vertical en la direcci3n z producir1 1nicamente un desplazamiento vertical en la direcci3n z , y la 1nica rotaci3n no nula ser1 la asociada a la direcci3n del eje y .

3.2. Formulaci3n variacional del problema dinámico de la viga en voladizo utilizando el modelo de Bernoulli-Euler

Con la ecuaci3n diferencial y propiedades de regularidad se garantiza la existencia de soluci3n. Añadiendo las condiciones de contorno adecuadas se obtiene, en general, la unicidad de soluci3n. A esta formulaci3n se la conoce como la formulaci3n fuerte del problema.

Cualquier solución de la formulación fuerte del problema que verifique las condiciones de contorno será solución de la formulación débil o formulación variacional del problema. El contrario también es cierto si se verifica que la solución débil es lo suficientemente regular como para deshacer los pasos dados en la obtención de la formulación débil.

A continuación se obtiene la formulación débil del problema de vibración de una viga en voladizo, esto es, empotrada en un extremo y con el otro extremo libre, sometida a una fuerza puntual en el extremo libre.

Empleando el modelo de Bernoulli-Euler, la componente z del desplazamiento está gobernada por

$$-\omega^2 \rho u_{z_0} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2} \right) = -F \delta_L,$$

siendo F el módulo de la fuerza aplicada en el extremo, δ_L la delta de Dirac soportada en $x = L$, ω la frecuencia angular y ρ la densidad de masa.

La expresión anterior se completa con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u_{z_0}(0) &= 0, & \frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(L) &= 0, & \frac{\partial^3 u_{z_0}}{\partial x^3}(L) &= 0. \end{aligned}$$

En lo que sigue en este problema solamente se considerará la componente u_{z_0} como incógnita, ya que se supondrá que la componente y de la fuerza, q_y , es nula y por tanto la componente y del desplazamiento, u_{y_0} , es nula (como se ha visto en la Proposición 4).

Multiplicando entonces (3.3) por una función test v regular que verifique las condiciones de contorno $v(0) = 0$, $(\partial v / \partial x)(0) = 0$ e integrando en toda la longitud de la viga se obtiene

$$-\omega^2 \int_0^L \rho u_{z_0}(x) v(x) dx + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2} \right) (x) v(x) dx = -F v(L).$$

Aplicando el teorema de Green (integración por partes) a la segunda integral, resulta

$$-\omega^2 \int_0^L \rho u_{z_0}(x) v(x) dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2} \right) (x) \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2} \right) (x) v(x) \right]_{x=0}^{x=L} = -F v(L).$$

Aplicando de nuevo el teorema de Green a la segunda integral, se tiene

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int_0^L \rho u_{z_0}(x) v(x) dx + \int_0^L EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) dx - \left[EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x) \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2} \right) (x) v(x) \right]_{x=0}^{x=L} = -F v(L). \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones de contorno y que $v(0) = 0$ y $(\partial v / \partial x)(0) = 0$, resulta

$$-\omega^2 \int_0^L \rho u_{z_0}(x) v(x) dx + \int_0^L EI_y \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) dx = -F v(L).$$

Si el material es homogéneo, la densidad de masa ρ y el módulo de Young E son constantes, y la sección transversal no varía de forma, la anterior ecuación se puede escribir:

$$-\omega^2 \rho \int_0^L u_{z_0}(x) v(x) dx + EI_y \int_0^L \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) dx = -F v(L),$$

lo que constituye la ecuación de la formulación débil del problema.

3.3. Método de los elementos finitos

De forma muy general, en el método de los elementos finitos (véase [19]), un dominio dado se puede entender como un conjunto de subdominios geoméricamente simples sobre los que se construirán los llamados elementos finitos. Es sobre cada uno de estos subdominios donde la ecuación que rige el sistema mecánico se aproxima por alguno de los métodos variacionales tradicionales. El conjunto de estos subdominios se denomina malla de elementos finitos. Aplicando este método, se pasa de un problema en derivadas parciales en un dominio continuo de geometría arbitraria a un sistema algebraico más sencillo de resolver. Típicamente, la incógnita del problema u se aproxima empleando la idea básica de que cualquier función u suficientemente regular se puede representar como combinación lineal de funciones conocidas ϕ_j (funciones de base) con coeficientes indeterminados c_j :

$$u \approx u_h = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j,$$

siendo N el número de grados de libertad del problema de elementos finitos. Las relaciones algebraicas entre los coeficientes c_i se obtienen satisfaciendo las ecuaciones variacionales sobre cada elemento. Las funciones de la aproximación ϕ_j suelen seleccionarse como polinomios, y se obtienen usando conceptos de la teoría de la interpolación.

En el caso unidimensional de una viga homogénea de sección transversal constante, el dominio se puede discretizar en varios elementos finitos, que para este modelo serán segmentos de la misma longitud, cada uno de los cuales se encuentra entre dos vértices de la malla.

El método de los elementos finitos hace uso de la formulación débil del problema, que se puede interpretar a partir del principio de los trabajos virtuales: el trabajo global realizado por las tensiones internas para un campo de desplazamientos virtuales v es igual al trabajo global realizado por las fuerzas externas para ese mismo campo de desplazamientos virtuales (véase [19] para más detalles).

La formulación débil obtenida para el modelo de viga requiere que la incógnita y las funciones test sean continuas y con derivada primera también continua. Esta propiedad también debe ser satisfecha por las funciones de base del método de elementos finitos. Por tanto, si se escogen funciones de base polinómicas, deberían ser polinomios de orden dos al menos. En el caso de vigas, uno de los elementos finitos que satisface estos requerimientos y que tiene sus grados de libertad soportados sobre los vértices de la malla es el elemento de tipo Hermite cúbico, ya que sus funciones de base tienen su derivada primera continua. Cada elemento se caracteriza en este caso por cuatro funciones de base elementales, de la forma:

$$\phi_1^e(\hat{x}) = 1 - 3 \left(\frac{\hat{x}}{h_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{\hat{x}}{h_e} \right)^3,$$

$$\phi_2^e(\hat{x}) = -x \left(1 - \frac{\hat{x}}{h_e} \right)^2,$$

$$\phi_3^e(\hat{x}) = 3 \left(\frac{\hat{x}}{h_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{\hat{x}}{h_e} \right)^3,$$

$$\phi_4^e(\hat{x}) = -\hat{x} \left[\left(\frac{\hat{x}}{h_e} \right)^2 - \frac{\hat{x}}{h_e} \right],$$

siendo h_e la longitud del elemento de referencia y \hat{x} variando entre 0 y h_e .

Para obtener el modelo de elementos finitos, se asume una aproximación por elementos finitos de forma que sobre cada segmento T

$$u_h|_T(x) = \sum_{j=1}^4 U_j \phi_j^e(F_T^e(x)),$$

siendo F_T^e la aplicación afín que lleva a cada segmento T en el elemento de referencia $[0, h^e]$.

La matriz de rigidez elemental asociada al modelo de viga es una matriz 4×4 en la que cada elemento se obtiene a partir de la formulación variacional según la expresión,

$$K_{jk}^e = EI_y \int_0^{h_e} \frac{d^2 \phi_j^e}{dx^2}(\hat{x}) \frac{d^2 \phi_k^e}{dx^2}(\hat{x}) d\hat{x} \quad j, k = 1, 2, 3, 4,$$

resultando

$$[K^e] = \frac{2EI_y}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix}.$$

Por su parte, la matriz de masa elemental asociada al modelo de viga es una matriz 4×4 en la que cada elemento se obtiene a partir de la formulación variacional según la expresión,

$$M_{jk}^e = \rho \int_0^{h_e} \phi_j^e(\hat{x}) \phi_k^e(\hat{x}) d\hat{x} \quad j, k = 1, 2, 3, 4,$$

resultando

$$[M^e] = \frac{\rho h_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22h_e & 54 & 13h_e \\ -22h_e & 4h_e^2 & -13h_e & -3h_e^2 \\ 54 & -13h_e & 156 & 22h_e \\ 13h_e & -3h_e^2 & 22h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la carga elemental tiene la expresión dada por el segundo miembro de la formulación variacional, es decir, $Q_4^e = -F$, sólo para el último elemento, y $Q_j^e = 0$ en todos los demás casos.

Las matrices globales de dimensión $N \times N$ y el vector segundo miembro del método se obtienen ensamblando las matrices y cargas elementales. A la hora de realizar este ensamblaje hay que tener en cuenta que se debe emplear la matriz de conectividades de los nodos de la malla. Las matrices globales se construyen a partir de las contribuciones de todas las matrices elementales ensambladas en sus nodos correspondientes. De esta forma, se obtiene la ecuación global

$$([K] - \omega^2[M])\{U\} = \{Q\},$$

que se puede interpretar como un problema de autovalores generalizado.

Capítulo 4

Implementación

Se ha desarrollado una aplicación empleando MATLAB que calcula la respuesta en frecuencia de un sistema mediante aproximación modal, como alternativa a la resolución directa o modal con NASTRAN.

La aplicación recibe como entrada una matriz con los modos propios de vibración del sistema, una matriz con datos de las frecuencias naturales correspondientes a los modos propios y la matriz de masa del sistema obtenida al aplicar el método de los elementos finitos al problema mecánico. Estas matrices se obtienen de la ejecución de una secuencia de solución de NASTRAN en un archivo independiente como paso previo a la ejecución de la aplicación. Además, los parámetros de entrada de la aplicación, que definen las condiciones del análisis, se indican de manera análoga a como se haría en un archivo de entrada de NASTRAN. Por todo ello, se ha realizado un estudio de la documentación de NASTRAN y del lenguaje de programación DMAP, con el fin de poder extraer las matrices necesarias para la ejecución de la aplicación.

4.1. Nastran y DMAP

4.1.1. Introducción

MSC.NASTRAN es una aplicación de análisis de elementos finitos de propósito general escrito principalmente en FORTRAN, compuesto de un gran número de bloques funcionales llamados módulos. Un módulo es un conjunto de subrutinas FORTRAN diseñadas para realizar una tarea específica: procesamiento de la geometría del modelo, ensamblado de matrices, aplicación de las restricciones, cálculo de magnitudes de salida, interacción con la base de datos, impresión de la solución, etc. Los módulos son controlados por un lenguaje interno llamado “Direct Matrix Abstraction Program” (DMAP).

Cada tipo de análisis disponible en NASTRAN se denomina secuencia de solución, y cada secuencia de solución es una colección de comandos de DMAP preempaquetados. Algunas de las secuencias de solución disponibles en NASTRAN son: análisis estático, análisis térmico, análisis modal, análisis de respuesta en frecuencia, etc.

NASTRAN recibe como entrada un archivo de extensión *.bdf* o *.dat* en el que se indica la información necesaria para crear un modelo de elementos finitos, como pueden ser el tipo de elementos finitos, los nodos, las cargas, las condiciones de contorno, o las propiedades del material; también se indica en este archivo la secuencia de solución y las soluciones deseadas, así como parámetros para el cálculo o postprocesado si son necesarios. Como salida, se crean

dos archivos de texto, uno con la extensión *.f06* con los resultados numéricos solicitados y otro *.f04* con datos de la ejecución.

Es habitual utilizar alguna aplicación como preprocesador de NASTRAN, que permita definir el modelo de forma gráfica y genere el archivo de entrada de NASTRAN, y también algún postprocesador que permita visualizar los resultados de forma gráfica; por ejemplo, MSC.PATRAN puede emplearse como preprocesador y postprocesador de NASTRAN.

En general, las secuencias de solución se ejecutan sin que el usuario necesite indicar nada más, pero es posible que un usuario pueda modificar externamente una secuencia de solución empleando el lenguaje DMAP en el archivo de entrada (por ejemplo, si desea obtener algún resultado intermedio).

4.1.2. Archivo de entrada de Nastran

Como se ha indicado en la Sección 4.1.1, NASTRAN recibe como entrada un archivo de extensión *.bdf* o *.dat* en el que se indica la información necesaria para resolver un problema empleando el método de los elementos finitos. La entrada MSC.NASTRAN requiere registros de 80 caracteres (o columnas) de longitud [7]. El archivo de entrada se compone de cinco secciones, que deben ser ensambladas en la secuencia que se muestra en la Figura 4.1. Los

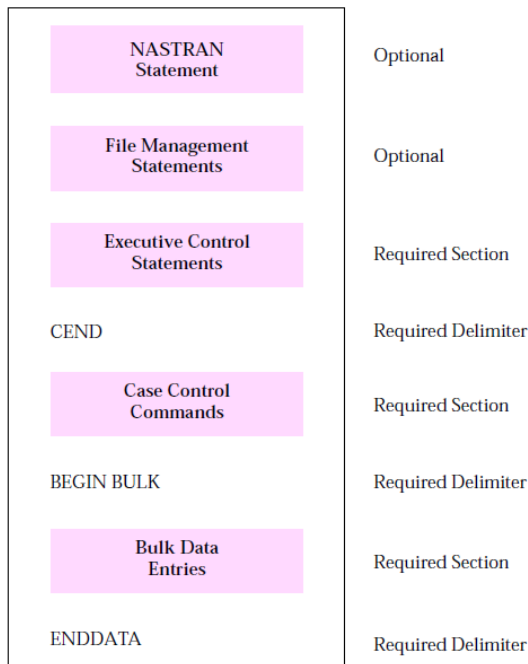


Figura 4.1: Estructura del fichero de entrada de MSC.Nastran. *Fuente: Nastran Reference Manual [7]*

registros de las primeras cuatro secciones se introducen en formato de campo libre y sólo las columnas 1 a 72 se utilizan para datos. NASTRAN tiene tres posibles formatos de campo diferentes: formato de campo libre, en el que los campos de datos están separados por comas, formato de campo pequeño, que consta de diez campos de ocho caracteres cada uno, y formato de campo grande, que consta de diez campos, y en el que los campos de datos tienen dieciséis caracteres cada uno. Toda la información en las columnas 73 a 80 será considerada como

comentarios y no será utilizado por el programa. Si el último carácter de un registro es una coma, entonces el registro se continúa en el siguiente registro.

En primer lugar, la declaración **NASTRAN** es opcional y se utiliza en circunstancias especiales (véase “NASTRAN Command and NASTRAN Statement” en MSC.Nastran Quick Reference Guide [9]). A continuación, la Sección de Gestión de Archivos (FMS, File Management Section) es opcional y por lo general sigue a la declaración **Nastran**. Esta sección termina con la especificación de una sentencia de control de ejecución y está pensada principalmente para la determinación e inicialización de conjuntos de bases de datos (DBsets) y de archivos FORTRAN. La inicialización de archivos FORTRAN incluye la especificación de sus nombres de archivo, números de unidad FORTRAN y atributos FORTRAN. En la mayoría de los problemas que utilizan secuencias de solución NASTRAN, no son necesarias sentencias para la gestión del archivo de salida porque se ejecuta una Sección de Gestión de Archivos por defecto al comienzo de cada ejecución. La Sección de Gestión de Archivos por defecto se describe en la sección “Database Concepts” en [7]. Las declaraciones de gestión de archivos se describen en detalle en la sección “File Management Statements” en MSC.Nastran Quick Reference Guide [9].

La Sección de Control de Ejecución comienza con la primera declaración de control de ejecución y termina con el delimitador **CEND**. En esta sección se identifica el trabajo a realizar y el tipo de solución requerida. También se declaran las condiciones generales en las que el trabajo debe ser ejecutado, tales como el tiempo máximo permitido y el tipo de diagnóstico del sistema deseados. Si el trabajo ha de ser ejecutado con una secuencia de la solución, se declara en esta sección la secuencia de solución junto con cualquier modificación de la secuencia de la solución que se desee introducir. Si se utiliza el lenguaje interno DMAP (acrónimo del inglés “Direct Matrix Abstraction Program”), la secuencia completa DMAP debe aparecer en esta Sección de Control de Ejecución. La mayoría de las sentencias de control de ejecución son independientes del orden. Excepciones son las sentencias **COMPILE**, **COMPILER**, **ALTER**, **ENDALTER**, y **LINK**. La sentencia **LINK** debe aparecer después de todas las sentencias **COMPILE**. La sentencia **COMPILER** (o las equivalentes **DIAGs**) debe aparecer antes de todas las sentencias de compilación **COMPILE**. Esta sentencia establece el control de impresión por defecto para sentencias posteriores de compilación **COMPILE**. Las sentencias de control de ejecución y ejemplos de su uso se describen en detalle en la sección “Executive Control Statements” en MSC.Nastran Quick Reference Guide [9].

La Sección de Control de Casos sigue a **CEND** y termina con el delimitador **BEGIN BULK**. Esta sección define la estructura de subcasos para el problema, define los conjuntos de datos (sets), selecciona las cargas y restricciones, y establece las opciones de salida ya sea para impresión (“printing”), volcado a fichero (“punching”) o representación gráfica (“plotting”). Una discusión general de las funciones de la Sección de Control de Casos y una descripción detallada de los comandos utilizados a lo largo de este trabajo se describen en la sección “Case Control Commands” en MSC.Nastran Quick Reference Guide [9]. Los requisitos especiales de control de casos para cada secuencia de la solución se discuten en la sección “Restart Procedures” en MSC.Nastran Reference Manual [7].

La Sección de Datos (“Bulk Data Section”) sigue a **BEGIN BULK** y termina con el delimitador **ENDDATA**. Contiene todos los detalles del modelo y las condiciones de la solución. **BEGIN BULK** y **ENDDATA** deben estar presentes incluso aunque no se introduzcan datos nuevos en el problema o si todos los datos vienen de una fuente alternativa, como una entrada generada por el usuario. La entrada **BEGIN BULK** está en formato de campo libre, y el delimitador **ENDDATA** debe comenzar en la columna 1 o la columna 2.

El archivo de entrada puede estar formado por la inserción de otros archivos, mediante la sentencia `INCLUDE`. Esto puede ser especificado en cualquiera de las cinco partes del archivo de entrada. Téngase en cuenta, sin embargo, que los datos referenciados por la sentencia `INCLUDE` deben ser adecuados para la sección del archivo de entrada en la que se incluyen.

Por último, pueden insertarse comentarios en cualquiera de las partes del archivo de entrada. Los comentarios se identifican por un signo de dólar (\$) en cualquier columna seguido de cualesquiera caracteres hasta la columna 80. Las columnas comprendidas entre la 2 y la 72 pueden contener cualquier texto.

4.1.3. Conjuntos de grados de libertad

Las matrices asociadas al método de elementos finitos están inicialmente en NASTRAN compuestas en términos de todos los nodos de la malla.

Se supondrá a lo largo de este trabajo que estas matrices de elementos finitos son generadas con seis grados de libertad para cada punto de la cuadrícula geométrica (recuérdese que como en el caso del modelo de la viga se supone que cada vértice de la malla soporta seis grados de libertad: tres asociados a desplazamientos y tres asociados a rotaciones). Estos grados de libertad se dividen en conjuntos (*sets*), en base a las entradas del usuario. Los conjuntos se utilizan para eliminar sucesivamente variables durante el proceso de solución. Cada grado de libertad es un miembro de un conjunto mutuamente excluyente. Los nombres de los conjuntos tienen las definiciones que se listan en la Tabla 4.1. Aunque los conjuntos `sb` y `sg` pueden tener grados de libertad comunes, estos conjuntos no se utilizan explícitamente en las secuencias de solución usadas en este trabajo. Sin embargo, aquellos usuarios que utilicen estos conjuntos en sus propios DMAPs deben evitar especificaciones redundantes cuando se utilicen estos conjuntos para operaciones de particionado o unión de matrices o vectores.

Cada grado de libertad es también un miembro de uno o más conjuntos combinados llamados “superconjuntos” o “supersets” (véase Figura 4.2). Los supersets tienen las definiciones

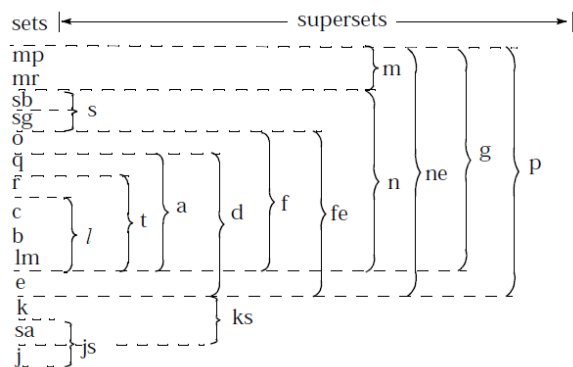


Figura 4.2: Esquema de los *supersets* usados por el núcleo de cálculo de NASTRAN. Fuente: *MSC.Nastran Reference Manual* [7]

que se muestran en la Tabla 4.2.

Los nombres de los sets son de interés en la medida en que forman parte de los nombres de las matrices que emplea NASTRAN durante el proceso de solución. Por ejemplo, para el estudio del análisis estático de una estructura se ha seguido el proceso de obtención de la solución propuesto en [11]. A grandes rasgos, en una aplicación típica el `g`-set se puede considerar el

Nombre	Definición
mp	Grados de libertad eliminados por restricciones multipunto.
mr	Grados de libertad eliminado por retriicciones multipunto creadas por los elementos rígidos utilizando el método LGELIM en el comando de control de casos RIGID.
sb	Grados de libertad eliminados por restricciones de un solo punto que son incluidos en los cambios de condición de frontera y por la característica AUTOSPC.
sg	Grados de libertad eliminados por restricciones de un solo punto que se especifican en el campo de PS en las entradas de datos GRID Bulk Data entries.
o	Grados de libertad omitidos por partición de la matriz estructural.
q	Grados de libertad generalizados asignados a los modos de componentes y vectores residuales.
r	Grados de libertad de referencia para determinar el movimiento del cuerpo libre.
c	Grados de libertad que son libres durante el cálculo de la componente modal o la reducción dinámica.
b	Grados de libertad fijados durante el análisis de componente modal o la reducción dinámica.
lm	Grados de libertad correspondientes a multiplicadores de Lagrange creados por los elementos rígidos que utilizan el método LAGR en el comando de control de casos RIGID.
e	Grados de libertad adicionales introducidos en el análisis dinámico.
sa	Grados de libertad aerodinámicos permanentemente limitados.
k	Conjunto de puntos de una malla aerodinámica para las fuerzas y desplazamientos en una malla aerodinámica.
j	Conjunto de puntos de colocación de una malla aerodinámica (la interpretación física exacta es dependiente de la teoría aerodinámica).

Tabla 4.1: Listado de definiciones de *sets* mutuamente excluyentes usados en las particiones que NASTRAN utiliza sobre los grados de libertad de la discretización del método de elementos finitos [7].

set de nivel más alto. La expresión matemática del equilibrio estático se puede expresar en forma matricial como

$$[K]_{gg}\{u\}_g = \{P\}_g,$$

donde $[K]_{gg}$ es la matriz de rigidez global, $\{u\}_g$ es el vector de desplazamientos y $\{P\}_g$ es el vector de cargas aplicadas asociados a los grados de libertad pertenecientes al g-set. En este trabajo se ha supuesto que el número de los coeficientes en $\{u\}_g$ y $\{P\}_g$ es seis veces el número de vértices de la malla, y $[K]_{gg}$ es una matriz real y simétrica. El g-set está asociado a un conjunto de ecuaciones estructurales sin restricciones, los cuales podrían formar un sistema lineal singular debido a los movimientos rígidos de la estructura, por lo que el sistema no podría ser resuelto. Como solución, el g-set se particiona en el m-set y el n-set. El n-set contiene los DOF asociados a las ecuaciones linealmente independientes, mientras que en el

Nombre	Definición
$s = sb \cup sg$	Todos los grados de libertad eliminados por las restricciones de un solo punto.
$l = b \cup c \cup lm$	Los grados de libertad estructurales que quedan después de que los grados de libertad de referencia son retirados.
$t = l \cup r$	El conjunto total de grados de libertad de fronteras físicas para super-elementos.
$a = t \cup q$	Grados de libertad utilizados en la solución de problemas de autovalores.
$d = a \cup e$	Grados de libertad utilizados en el análisis dinámico por el método directo.
$f = a \cup o$	Grados de libertad estructurales sin restricciones.
$fe = f \cup e$	Grados de libertad estructurales libres y grados de libertad adicionales.
$n = f \cup s$	Todos los grados de libertad estructurales no restringidos por restricciones multipunto.
$ne = n \cup e$	Todos los grados de libertad estructurales no restringidos por restricciones multipunto y grados de libertad adicionales.
$m = mp \cup mr$	Todos los grados de libertad eliminados por restricciones múltiples.
$g = n \cup m$	Todos los grados de libertad estructurales incluyendo grados de libertad escalares.
$p = g \cup e$	Todos los grados de libertad físicos.
$ks = k \cup sa$	La unión del k y el s-set reutilizado.
$js = j \cup sa$	La unión del j y el s-set reutilizado.
$fr = o \cup l$	Conjunto estáticamente independiente exceptuando los apoyos estáticamente determinados ($fr = r \setminus q \setminus r$).
$v = o \cup c \cup r$	El conjunto de grados de libertad libre para vibrar en la reducción dinámica.

Tabla 4.2: Listado de definiciones de los *supersets* usados por el núcleo de cálculo de NAS-TRAN [7].

m-set quedan los restantes DOF del g-set. Sobre los DOF del n-set se aplican las restricciones para realizar un nuevo particionado, que involucra el s-set y el f-set. El f-set incluye todos los DOF libres del sistema. Si las restricciones están bien especificadas, el sistema de ecuaciones representado por el f-set es el que finalmente se resuelve en el caso estático. El f-set se puede aún particionar en el o-set y el a-set en una operación conocida como condensación estática o reducción Guyan (para más detalles, véase [11] y [10]). Por defecto, todos los grados de libertad del f-set se trasladan al a-set y en ese caso el o-set es nulo. En ciertas circunstancias, se pueden colocar algunos DOF del a-set en un set de referencia llamado r-set. En ese caso, los DOF restantes se disponen en el l-set. La solución estática se obtendrá entonces a partir del l-set en un nuevo sistema lineal,

$$[K]_l \{u\}_l = \{P\}_l.$$

4.1.4. Secuencias de solución

Como se ha indicado en la Sección 4.1.1, NASTRAN se compone de un gran número de bloques de código llamados módulos. Un módulo es una colección de subrutinas FORTRAN diseñadas para realizar una tarea específica: procesamiento de la geometría del modelo, ensamblado de matrices, aplicación de las restricciones, resolución de matrices, cálculo de magnitudes de salida, interacción con la base de datos, impresión de la solución, etc. Los módulos son controlados por el lenguaje interno llamado DMAP. Cada tipo de análisis disponible en Nastran se llama una secuencia de solución, y cada secuencia de solución es una colección de cientos o miles de comandos de DMAP preempaquetados. Una secuencia de solución se selecciona mediante un comando de control de ejecución SQL.

Una vez que una secuencia de solución es elegida, su particular conjunto de comandos DMAP envía instrucciones a los módulos que se necesitan para llevar a cabo la solución requerida. Todo esto ocurre automáticamente sin implementación adicional alguna por parte del usuario más allá de la elección de una secuencia de solución. Un diagrama de flujo de una secuencia de solución estructurada se muestra en la Figura 4.3.

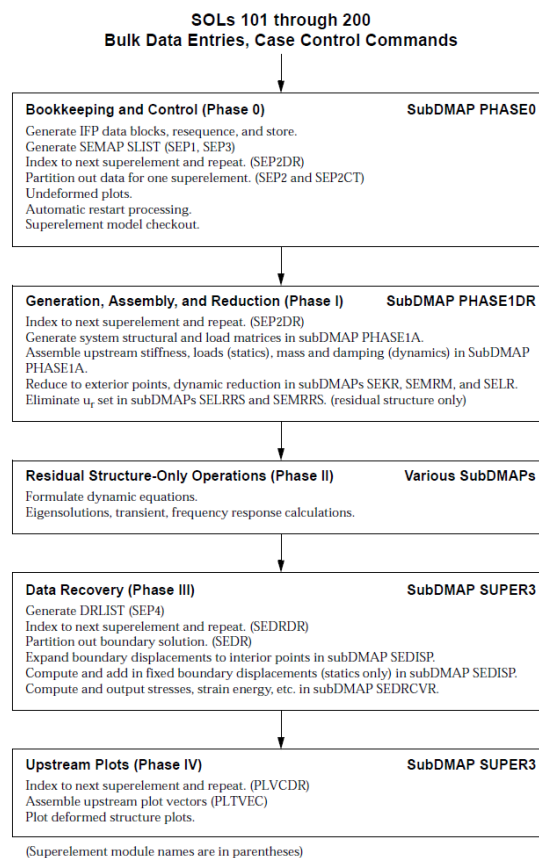


Figura 4.3: Diagrama de Flujo de Secuencia de Solución Estructurada. *Fuente: Nastran Reference Manual [7]*

Hay dos tipos de soluciones en la actualidad en NASTRAN. El tipo principal se denomina secuencia de solución. Se llaman con números que van desde 100 a 200. Las secuencias de

solución utilizan la característica de SubDMAP, que permite romper una gran colección de declaraciones DMAP en estructuras de datos más manejables, similares a subrutinas en otros lenguajes de programación. El otro tipo, de menor importancia, se denomina formato rígido (Rigid Format). Se les llama con números SOL que van del 1 al 15. Los formatos rígidos se basan en el tipo de solución disponible antes de la versión 66 de NASTRAN, y son más limitados que las secuencias de solución antes citadas. Por ejemplo, el análisis estático es solicitado por el comando SOL 101, el análisis modal por SOL 103 y el análisis de respuesta en frecuencia por SOL 111.

Cada secuencia de solución tiene además un nombre, que se puede utilizar con `COMPILE` para modificar la secuencia de solución. Por ejemplo, el nombre de la secuencia de solución que realiza el análisis estático es `SESTATIC`, el del análisis modal es `SEMODES` y el del análisis de respuesta en frecuencia es `SEMFREQ`. Una tabla con los nombres y números de las secuencias de solución disponibles en NASTRAN se puede encontrar en [9].

Los listados DMAP para cualquiera de las secuencias de solución se pueden obtener mediante la especificación de una declaración `COMPILER LIST` en la Sección de Control de Ejecución. Una descripción del procesamiento de los datos y operaciones de matrices para las secuencias de solución se incluye en la sección “Summary of Solution Sequence Operations” en [7]. Los módulos DMAP que son de uso general (operaciones de matrices y módulos de utilidad) se describen junto con ejemplos de su uso en la sección “General Operations” en [7].

Si un usuario desea modificar una secuencia DMAP de alguna manera, puede utilizar la función `ALTER` descrita en *MSC.Nastran DMAP Programmer’s Guide* [20]. Los usos típicos están enfocados a programar una salida `EXIT` antes de finalizar la ejecución con el objetivo de comprobar salidas intermedias, programar la impresión de una tabla o matriz para fines de diagnóstico, y para borrar o añadir un módulo funcional a la secuencia DMAP. El usuario debe estar familiarizado con las reglas de programación en DMAP, como se describe en [20], y poder realizar modificaciones a una secuencia de solución dada.

Cualquiera de las matrices o tablas que son construidas por los módulos funcionales se pueden imprimir mediante el uso de módulos de utilidades seleccionados (descritos en *MSC.Nastran DMAP Programmer’s Guide*, [20]). Estos módulos de utilidades pueden ser programados en cualquier punto de una secuencia de solución utilizando la función `ALTER`. En general, deben programarse inmediatamente después de que el módulo funcional que genera la tabla o la matriz sea impreso. Además, es conveniente que se compruebe la secuencia de llamada en el módulo de utilidad, con el fin de estar seguro de que todos los datos de entrada requeridos han sido generados con anterioridad a ese paso de la ejecución.

4.1.5. Archivos de salida de NASTRAN y declaraciones DIAG

Aunque la mayor parte de la salida de la secuencia de la solución es opcional y solicitada en la Sección de Control de Casos (“Case Control Section”), algunas de las salidas de la impresión son automáticas o están bajo el control de declaraciones `DIAG` en la Sección de Control de Ejecución. Las declaraciones `DIAG` se invocan mediante un número que indica la salida solicitada y que está comprendido entre 1 y 64. Por ejemplo, `DIAG 14` imprime la secuencia de solución. La salida disponible para cada secuencia de solución se describe en la sección “Summary of Solution Sequence Operations” en [7].

NASTRAN genera los archivos de salida de tipo *f04* y *f06*. La tabla de Resumen de Ejecución en el archivo *f04* incluye el modelo del fabricante del equipo, el sistema operativo, la versión NASTRAN, la fecha de creación del sistema, la fecha de ejecución del problema, las asignaciones

de archivos NASTRAN, y un resumen de la ejecución: hora del día, el tiempo transcurrido, segundos I/O, tipo de CPU, mensajes del módulo de ejecución, características de las matrices (si se ha especificado `DIAG 8`), etc. La salida estándar guardada en el archivo *f06* almacena los resultados de NASTRAN, es decir, los desplazamientos, tensiones, etc., si se indica `PRINT` al indicar la solución solicitada, por ejemplo con `DISPLACEMENTS(PRINT)=ALL`. Además también se almacena el listado de la secuencia de solución si se ha solicitado mediante una declaración `COMPILER LIST` en la Sección de Control de Ejecución.

Adicionalmente podría generarse un archivo *.pch* donde se vuelque la solución si se indica `PUNCH` al indicar la solución solicitada, por ejemplo con `DISPLACEMENTS(PUNCH)=ALL`, o donde se vuelque la secuencia de solución si se solicita con `COMPILER DECK` en la Sección de Control de Casos.

Algunas declaraciones `DIAG` de interés que se han utilizado en la realización de este proyecto se listan en la Tabla 4.3. Una lista completa de las declaraciones `DIAG` puede encontrarse en [9].

DIAG	Acción
8	Imprime registros de características de matrices (“matrix trailers”) a medida que se generan las matrices en la tabla resumen de ejecución (archivo <i>.f04</i>).
14	Imprime la secuencia de solución (archivo <i>.f06</i>), equivalente a la sentencia <code>COMPILER LIST</code> .
15	Imprime registros de características de tablas (“table trailers”).
17	Vuelca la secuencia de solución (archivo <i>.pch</i>), equivalente a la sentencia <code>COMPILER DECK</code> .

Tabla 4.3: Algunas declaraciones `DIAG` de interés, utilizadas a lo largo de este proyecto.

4.1.6. Bloques de datos DMAP

El documento de referencia que se seguirá en toda la sección de bloques de datos es “DMAP Programmer’s Guide” [20], donde se podrá encontrar toda la información referida en esta parte con más detalle.

En general, los nombres de las tablas y matrices incluyen los nombres de los sets de grados de libertad que las componen, en filas y columnas. Algunas matrices se denominan también según nombres de pseudo-sets de DOFs. Así, en ocasiones el a-set se puede descomponer en el w-set y el x-set, y por ejemplo en el módulo `XREAD` que modifica las matrices de entrada en problemas de autovalores, se trabaja con las matrices `KXX` y `MXX` (véase [7] para más detalles). Otros nombres de pseudo-sets son el `J` para DOFs interiores en superelementos (subestructuras en las que se pueden dividir las estructuras mecánicas complejas), y el `H` para DOFs modales, por ejemplo `PHF` sería un ordenamiento en f-set de los modos normales (por ejemplo, en la matriz Φ introducida en la Sección 2.3).

En la Tabla 4.4 se mencionan algunas de las convenciones utilizadas a la hora de poner nombres a los bloques de datos en NASTRAN. Una relación más completa se puede encontrar en el Glosario al final de [20].

Existen también algunos nombres inconsistentes con estas convenciones, por ejemplo contruidos con `..PHI..` como `PHIDH`, que debería ser `PHDH`, como se recoge en la documentación mencionada.

Nomenclatura	Descripción
K__	Matriz de rigidez.
M__	Matriz de masa.
B__	Matriz de amortiguamiento viscoso.
PH__	Matriz de autovectores de modos normales.
__U__	Vector solución estática o dinámica (excepto en el problema de autovalores).
P__	Vector de cargas estáticas y dinámicas.
__LAMA	Tabla resumen de autovalores.
O____	Tablas de salida de solución.
O__ES__	Tabla de tensiones de elementos (STRESS=n).
O__GPS__	Tabla de tensiones de nodos (GPSTRESS=n).

Tabla 4.4: Nomenclatura y descripción de las convenciones utilizadas para denotar matrices y tablas en NASTRAN.

4.1.7. Entradas para el análisis de respuesta en frecuencia

En la aplicación desarrollada en este proyecto, se definirán las frecuencias, el amortiguamiento y las cargas dinámicas del problema usando un formato de definición de datos análogo a las entradas del archivo de NASTRAN, con el fin de facilitar el uso de la aplicación a un usuario habitual de NASTRAN. Por completitud en la memoria, este formato se describe a continuación. De forma general, las entradas de la sección de datos del archivo de entrada de NASTRAN se componen de una palabra clave que indica el tipo de dato del que se trata, un número de identificación y los valores de los parámetros que correspondan (para más detalles, véase [9]).

Frecuencias

Una cuestión importante cuando se lleva a cabo un análisis de respuesta en frecuencia es la selección de las frecuencias a las cuales se va a calcular la solución, ya que cada frecuencia especificada resulta en una solución independiente, y la función de respuesta en frecuencia cerca de las frecuencias de resonancia presenta variaciones muy acusadas.

Existen seis entradas de la sección de datos que se pueden utilizar para seleccionar las frecuencias de la carga: *FREQ*, *FREQ1*, *FREQ2*, *FREQ3*, *FREQ4* y *FREQ5*. Una consideración a tener en cuenta es que es posible utilizar más de una entrada de frecuencias en el análisis, si se selecciona en la sección de control de casos. A continuación se indica el formato de cada entrada, enumerando los parámetros requeridos en cada caso.

FREQ Define valores discretos de frecuencias. Su formato se indica en la Tabla 4.5, donde

<i>FREQ</i>	SID	F1	F2	F3	F4	F5	etc.
-------------	-----	----	----	----	----	----	------

Tabla 4.5: Formato de la entrada de datos *FREQ* de NASTRAN.

SID es el identificador de la entrada *FREQ*, y F1, F2, etc. son los valores de las frecuencias.

FREQ1 Define una frecuencia inicial F1, un incremento de frecuencia DF y un número de incrementos deseados, NDF. Su formato se indica en la Tabla 4.6. Con estos parámetros

FREQ1	SID	F1	DF	NDF
-------	-----	----	----	-----

Tabla 4.6: Formato de la entrada de datos *FREQ1* de NASTRAN.

se calcularán $NDF+1$ valores de frecuencias según la expresión $f_i = F1+DF(i-1)$, $i = 1, \dots, (NDF + 1)$.

FREQ2 Define una frecuencia inicial F1, una frecuencia final F2 y un número de intervalos logarítmicamente espaciados, NF. Su formato se indica en la Tabla 4.7. Con estos

FREQ2	SID	F1	F2	NF
-------	-----	----	----	----

Tabla 4.7: Formato de la entrada de datos *FREQ2* de NASTRAN.

parámetros se calcularán $NF+1$ valores de frecuencias según la expresión $f_i = F1e^{(i-1)d}$, con $d = \frac{1}{NF} \ln \frac{F2}{F1}$, $i = 1, \dots, (NF + 1)$.

FREQ3 Especifica el número de frecuencias entre dos frecuencias modales para un rango dado. Su formato se indica en la Tabla 4.8, donde SID es el identificador de la entrada

FREQ3	SID	F1	F2	TYPE	NEF	CLUSTER
-------	-----	----	----	------	-----	---------

Tabla 4.8: Formato de la entrada de datos *FREQ3* de NASTRAN.

FREQ3, F1 es el límite inferior del rango de frecuencias, F2 es el límite superior del rango de frecuencias, TYPE puede tomar los valores LINEAR o LOG especificando si los valores de las frecuencias están lineal o logarítmicamente separados, NEF indica el número de frecuencias de excitación entre cada subintervalo (definidos por F1, F2 y los valores modales) y CLUSTER especifica la agrupación de los valores de las frecuencias de excitación de los subintervalos. Esta última opción se utiliza para obtener una solución mejor cerca de las frecuencias modales. Entonces, las frecuencias en cada subintervalo definido por las frecuencias modales vienen dadas por

$$\hat{f} = \frac{1}{2}(\hat{f}_1 + \hat{f}_2) + \frac{1}{2}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)|\zeta|^{\frac{1}{C}} \text{sign}(\zeta),$$

donde $\zeta = -1 + \frac{2(k-1)}{NEF-1}$, $k = 1, \dots, NEF$ es una coordenada paramétrica entre 1 y -1, \hat{f}_1 es el límite inferior del subintervalo, \hat{f}_2 es el límite superior del subintervalo, \hat{f} es la frecuencia o el logaritmo de la frecuencia, según el valor de TYPE, y C es el valor (mayor que uno) especificado por CLUSTER.

FREQ4 Define las frecuencias usando subintervalos alrededor de cada frecuencia modal dentro de un rango. Su formato se indica en la Tabla 4.9, donde SID es el identificador de la entrada *FREQ4*, F1 es el límite inferior del rango de frecuencias modales, F2 es el

<i>FREQ4</i>	SID	F1	F2	FSPD	NFM
--------------	-----	----	----	------	-----

Tabla 4.9: Formato de la entrada de datos *FREQ4* de NASTRAN.

límite superior del rango de frecuencias modales, FSPD es el tanto por uno que define el intervalo alrededor de cada frecuencia modal y NFM es el número de frecuencias equiespaciadas dentro de cada subintervalo. Por ejemplo, si \hat{f} es una frecuencia modal y r es el valor de FSPD su subintervalo asociado sería $(\hat{f} - r\hat{f}, \hat{f} + r\hat{f})$.

FREQ5 Especifica un rango de frecuencias a partir de razones de las frecuencias naturales dentro del rango especificado. Su formato se indica en la Tabla 4.10, donde SID es el

<i>FREQ5</i>	SID	F1	F2	FR1	FR2	FR3	etc.
--------------	-----	----	----	-----	-----	-----	------

Tabla 4.10: Formato de la entrada de datos *FREQ5* de NASTRAN.

identificador de la entrada *FREQ5*, F1 es el límite inferior del rango de frecuencias, F2 es el límite superior del rango de frecuencias y FR1, FR2, etc. son las razones (tanto por uno) de las frecuencias naturales en el rango dado. Así, si las frecuencias modales son $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_M$ y las razones son r_1, \dots, r_N , se consideran todas las frecuencias de la forma $r_j \hat{f}_k$, $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, M$ que pertenezcan al intervalo (F1, F2).

Amortiguamiento modal

Los coeficientes de amortiguamiento modal se definen en NASTRAN por medio de la entrada de datos *TABDMP1*. Su formato se indica en la Tabla 4.11, donde TID es el identificador de

<i>TABDMP1</i>	TID	TYPE					
	f_1	g_1	f_2	g_2	f_3	g_3	etc.

Tabla 4.11: Formato de la entrada de datos *TABDMP1* de NASTRAN.

la entrada *TABDMP1*, TYPE indica las unidades del amortiguamiento, f_i son las frecuencias naturales y g_i son los valores del amortiguamiento. Si no se dan todos los pares frecuencia-valor, los valores intermedios se interpolarán linealmente. El parámetro TYPE puede tener los valores “G” (amortiguamiento estructural), “CRIT” (amortiguamiento crítico) o “Q” (factor de calidad). Internamente, los valores se consideran como relativos al amortiguamiento crítico (véase (4.1)), y son transformados a estos según las expresiones que relacionan estos valores en la resonancia, ecuaciones (4.1)-(4.3),

$$\zeta_i = \frac{b_i}{b_{ci}} = \frac{G_i}{2}, \quad (4.1)$$

$$b_{ci} = 2m_i\omega_i, \quad (4.2)$$

$$Q_i = \frac{1}{2\zeta_i} = \frac{1}{G_i}, \quad (4.3)$$

donde los subíndices corresponden al modo i -ésimo, ζ_i es el factor de amortiguamiento, b_i es el coeficiente de amortiguamiento, b_{ci} es el coeficiente de amortiguamiento crítico, G es el amortiguamiento estructural, ω_i es la frecuencia angular natural, m_i es la masa modal, y Q_i es el factor de calidad.

Cargas dinámicas

Las cargas dinámicas generalmente varían con el tiempo o la frecuencia. Además, pueden ser aplicadas con distintas fases o retardos temporales en distintas partes de la estructura. Debido a la gran variedad de condiciones de carga dinámica, las opciones de entrada también son numerosas. En lo que se refiere al archivo de entrada de NASTRAN, esto se traduce en que una sola entrada no es suficiente para definir una carga dependiente de la frecuencia, sino que son necesarias varias entradas de distintos tipos. No obstante, la definición base de una carga se da como una entrada de tipo RLOAD1 o de tipo RLOAD2. Dado que sería relativamente fácil dar una equivalencia para las cargas definidas según ambas entradas, solamente se considerará la entrada RLOAD2, que se ha tomado como referencia en la aplicación desarrollada. La diferencia fundamental consiste en que la entrada RLOAD1 define las partes real e imaginaria de la carga, mientras que la entrada RLOAD2 define su magnitud y fase.

RLOAD2 Define una carga dinámica de la forma $\{P(f)\} = \{AB(f)e^{i\{\phi(f)+\theta-2\pi f\tau\}}\}$. Su formato se indica en la Tabla 4.12, donde SID es el identificador, EXITEID es el iden-

<i>FREQ4</i>	SID	EXITEID	DELAYR	DPHASER	TB	TP	TYPE
--------------	-----	---------	--------	---------	----	----	------

Tabla 4.12: Formato de la entrada de datos *RLOAD2* de NASTRAN.

tificador de una entrada DAREA, FBALOAD o SPCD que define el valor constante A . Por ejemplo, una entrada DAREA sería una entrada para una carga estática, y en ella se indica también la zona de aplicación de la carga. En la aplicación desarrollada, esta información se retiene en dos variables, *nodoE* que indica los nodos de aplicación y F , que representa un valor de magnitud no dependiente de la frecuencia. DELAYR es el valor del retardo temporal τ . DPHASER es el valor del ángulo de fase θ en grados. Se podrían definir valores variables con la frecuencia en NASTRAN tanto para τ como para θ , pero en la aplicación sólo se consideran constantes para esos parámetros. TB es el identificador de la entrada TABLEi que define la función (dependiente de la frecuencia) $B(f)$, y TP es el identificador de la entrada TABLEi que define $\phi(f)$. Las entradas TABLEi, $i = 1, \dots, 4$ definen funciones interpolantes a partir de una tabla de valores dependiente de la frecuencia. La forma como lo hace cada tipo de entrada varía ligeramente (véase [9]), pero en la aplicación se considerará que los valores intermedios a aquellos incluidos en la tabla se calculan mediante interpolación lineal y aquellos fuera del rango de frecuencias de la tabla mediante extrapolación lineal.

4.2. Descripción de la aplicación desarrollada

En este proyecto se ha desarrollado una aplicación MATLAB que implementa el método de aproximación modal para la obtención de la respuesta en frecuencia en problemas de vibración en estructuras elásticas. Esta aplicación toma como datos de entrada los modos propios

de vibración del sistema obtenidos a partir de una ejecución previa con MSC.NASTRAN y crea a partir de ellos una serie de matrices que quedan disponibles en el espacio de trabajo de MATLAB. La aplicación requiere también como entrada la definición de fuerzas de excitación, amortiguamientos y frecuencias con un formato similar a las entradas NASTRAN (véase Sección 4.1.7), así como la especificación de los vértices donde se requiere la visualización de la respuesta en frecuencia. Los resultados obtenidos se pueden visualizar en una gráfica o volcar a un archivo.

El código fuente de la aplicación se divide en varios archivos. En primer lugar existe un programa principal denominado *calculofrf.m*, al que se debe invocar desde MATLAB para ejecutar la aplicación. Además, existen varias funciones que realizan funciones auxiliares dentro del código, y que se invocan desde el programa principal.

Para el correcto funcionamiento de la aplicación deben definirse una serie de parámetros de entrada, a partir de los cuales se obtendrán los datos necesarios para la resolución del problema y que definen el sistema y las condiciones de trabajo. Estos parámetros deben estar incluidos en un archivo llamado *datosfrf.m* en el mismo directorio de la aplicación. El archivo *datosfrf.m* tiene una estructura definida que no se debe modificar, ya que en él se inicializan las variables que la aplicación necesita para su ejecución. Lo que se modificará en este archivo serán los valores de estas variables, que definirán las condiciones del problema en cada caso. En la Tabla 4.13 se indican los parámetros de entrada de la aplicación. Varios de estos parámetros son opciones de definición del problema o de caracterización de otros datos de entrada, y determinan el flujo de la aplicación en algunos puntos, por lo que deben escogerse de entre varios valores predefinidos. Estos valores predefinidos (véase Tabla 4.13) se tratan como constantes en la aplicación y se incluyen como comentario en el archivo *datosfrf.m* para facilitar su uso.

Parámetro	Tipo	Definición	Valores
Fname	Cadena de texto	Nombre del archivo que contiene los datos de matrices (autovalores y autovectores) obtenido con OUTPUT4 desde una ejecución de NASTRAN.	Ejemplo: 'matrices.out4'
PARFREC	Celda o vector de celdas	Lista de parámetros que definen las frecuencias de forma análoga a como se obtienen a partir de una entrada FREQ <i>i</i> de NASTRAN.	Ejemplo: {'FREQ1', 0, 0.05, 400}; {'FREQ3', 0, 20, 'LINEAR', 10, 2}}
PARDAMP	Celda	Lista de parámetros para calcular el amortiguamiento modal como porcentaje del crítico (en tanto por uno) de forma análoga a como se obtienen a partir de una entrada TABDMP1 de NASTRAN.	Ejemplo: {'CRIT', 0, 0.02, 10, 0.02, 10.01, 0.05, 25, 0.05}
nodoE	Entero o vector de enteros	Número de los nodos donde se aplica la fuerza externa.	Ejemplo: [6, 11]

Parámetro	Tipo	Definición	Valores
tipo_exc	Entero	Tipo de excitación: fuerza, aceleracion, velocidad o desplazamiento.	EXC_FUERZA EXC_ACCELERACION EXC_VELOCIDAD EXC_DESPLAZAMIENTO
F	Vector o matriz de reales	Fuerza [Fx Fy Fz] (vector fila o columna de vectores fila, para cada nodoE).	Ejemplo: [0 2 0]
Ace	Vector o matriz de reales	Aceleracion [Ax Ay Az] (vector fila o columna de vectores fila, para cada nodoE). Ejemplo: Ace=[0 2 0];	
Vel	Vector o matriz de reales	Velocidad [Vx Vy Vz] (vector fila o columna de vectores fila, para cada nodoE).	Ejemplo: [0 2 0]
Bf	Vector o matriz de reales (Opcional)	Vector de pares frecuencia-valor que define $B(f)$: $f_1, b_1, f_2, b_2, \dots$. Vector fila o columna de vectores fila, para cada nodoE.	Ejemplo: [0.0, 1, 10, 2, 20, 1]. Por defecto: [0.0]
PHIf	Vector o matriz de reales (Opcional)	Vector de pares frecuencia-valor en grados que define $\phi(f)$: $f_1, \phi_1, f_2, \phi_2, \dots$. Vector fila o columna de vectores fila, para cada nodoE.	Ejemplo: [0.0, 30, 10, 30, 10.01, 60, 20, 60]. Por defecto: [0.0]
THETA	Real o vector de reales (Opcional)	Ángulo de fase θ en grados como vector de constantes para cada nodoE.	Ejemplo: [45,0]. Por defecto: [0.0]
TAU	Real o vector de reales (Opcional)	Retardo temporal τ como vector de constantes para cada nodoE.	Ejemplo: [0,0.1]
nodoR	Entero o vector de enteros	Número de los nodos donde se obtiene la respuesta.	Ejemplo: [6,11]
tipo_res	Entero	Tipo de respuesta: desplazamiento, aceleracion o velocidad.	RES_DESPLAZAMIENTO RES_ACCELERACION RES_VELOCIDAD
dato_res	Entero	Dato de la respuesta: magnitud, componente X, componente Y, componente Z.	DAT_MAGNITUD DAT_COMPONENTE_X DAT_COMPONENTE_Y DAT_COMPONENTE_Z
tipo_sal	Entero	Tipo de salida: como figura o como archivo.	SAL_FIGURA SAL_ARCHIVO

Parámetro	Tipo	Definición	Valores
Fsalida	Cadena de texto	Nombre del archivo con los datos de salida.	Ejemplo: 'salidafrf.dat'

Tabla 4.13: Parámetros de entrada de la aplicación

En primer lugar, la aplicación incorpora los datos del archivo de *datosfrf.m* y comprueba que tiene todos los datos requeridos. A continuación, se importan las matrices con la información modal obtenidas de una ejecución previa de NASTRAN, y se comprueba que las variables obtenidas son correctas. La aplicación espera que estas matrices se almacenen con un nombre concreto, que la función general que obtiene estas matrices asigna a partir de los datos del archivo de NASTRAN. Por tanto, las matrices que se obtengan de NASTRAN deben tener los nombres correctos. Si no se encuentran, la aplicación imprime un aviso por pantalla y detiene la ejecución.

A continuación se obtiene el vector de frecuencias y los amortiguamientos. Si el rango de frecuencias de interés es más pequeño que el rango de frecuencias naturales del que se dispone, se hace una selección de las frecuencias naturales dentro del rango de interés.

La carga podría depender de la frecuencia, según los parámetros que la definen. En un punto previo al bucle de frecuencias, se calculan los términos de la carga que no dependen de la frecuencia, para completar este cálculo dentro del bucle si es que existe tal dependencia. Si la carga no depende de la frecuencia, se calculan los términos de la fuerza modal antes del bucle de frecuencias. De otro modo, es necesario hacer este cálculo para cada frecuencia, una vez obtenido el valor de la carga, lo que supondría un coste computacional añadido.

Para cada frecuencia, se calcula la solución por el método de la aproximación modal, empleando una combinación lineal de modos cuyos coeficientes vienen dados por la expresión (2.18).

Finalmente, se construye una gráfica semilogarítmica mostrando la respuesta en frecuencia obtenida, o bien se guardan los resultados en un archivo. Como resumen y para ilustrar el procedimiento implementado, un diagrama de flujo general de la aplicación se muestra en la Figura 4.4.

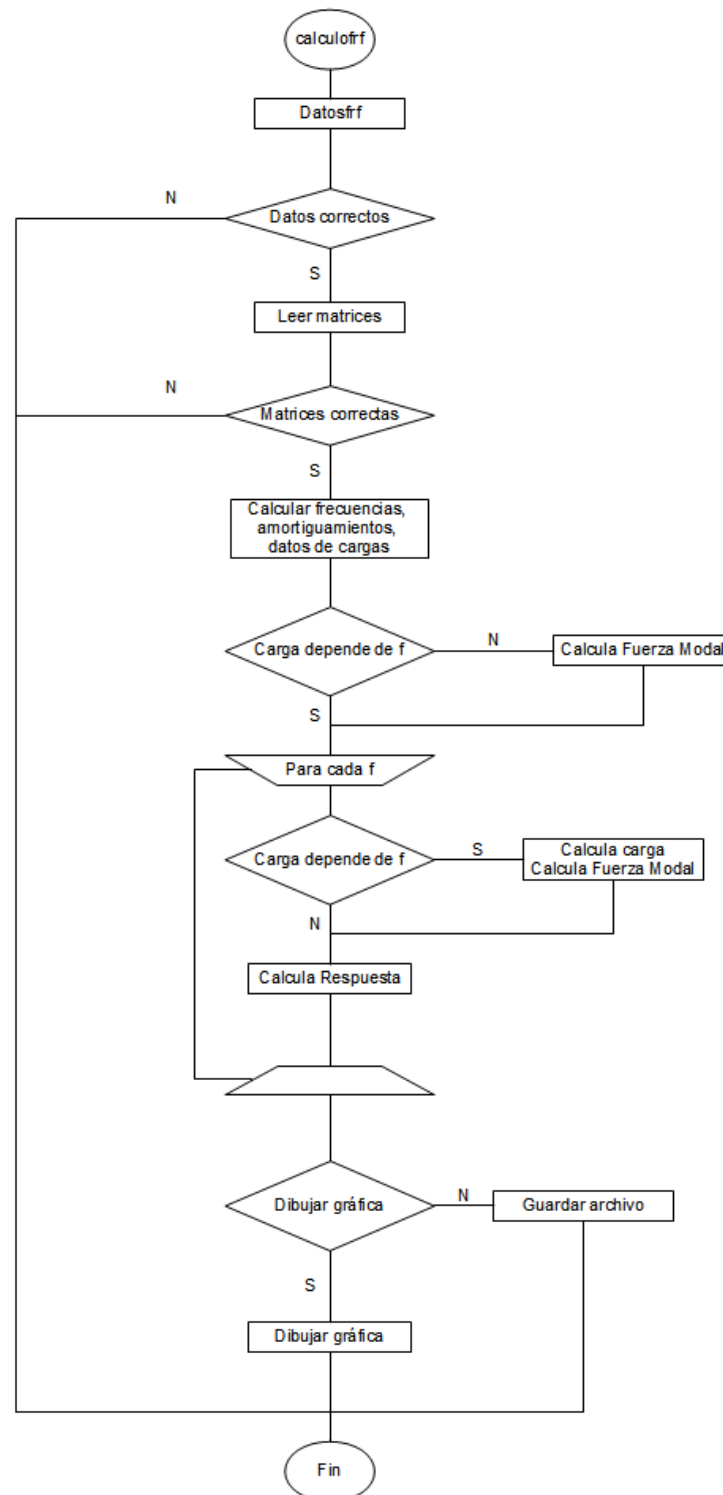


Figura 4.4: Diagrama de flujo general de la aplicación *calculofrf*, desarrollada en MATLAB para calcular la respuesta en frecuencia.

Capítulo 5

Simulaciones numéricas

5.1. Aproximación modal

En primer lugar se ha realizado una simulación numérica que permite verificar la precisión de la aproximación modal en relación a la resolución del sistema completo, para un problema sin amortiguamiento.

La simulación numérica se ha realizado en base al caso de estudio descrito en “Linear Static Analysis of a Cantilever Beam Using Beam Library (SI Units)” [4]. En este ejemplo, se ha considerado una viga horizontal en voladizo de longitud 5 m, de sección rectangular hueca (véase la Figura 5.1), con un extremo fijo y el otro libre, y con una carga puntual vertical aplicada en el extremo libre. Se debe hacer notar que el caso de estudio considerado incluye las restricciones de extremo empotrado y movimiento de la viga en el plano XY (mediante condición `permanent_constraint`) de la misma forma a como se hace en [5].

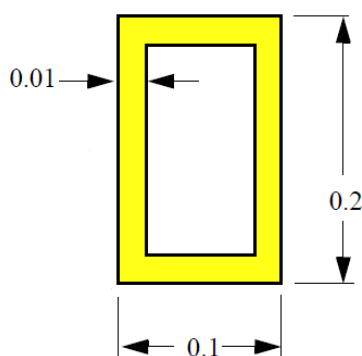


Figura 5.1: Sección transversal rectangular hueca (resaltada en amarillo) de la viga en voladizo de dimensiones: altura 0.2 m, ancho 0.1 m y espesor 0.01 m.

Como carga, se ha considerado una carga puntual vertical hacia abajo de 1000 N aplicada en el extremo libre (véase la Figura 5.2) y una discretización que involucra una malla de 10 elementos del mismo tamaño.

Los constantes físicas que dependen de la geometría de la sección transversal de la viga y del material del que están formado son los siguientes: módulo de Young 7.1×10^{10} N/m², coeficiente de Poisson 0.3, densidad de masa 2.65×10^4 kg/m³ y área de la sección transversal 5.6×10^{-3} m². Además, los módulos de inercia de segunda orden asociados a las direcciones

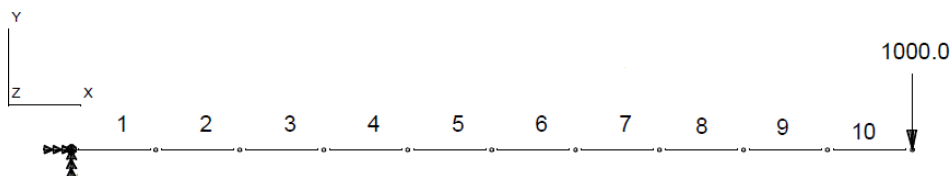


Figura 5.2: Malla uniforme formada por 10 elementos de la viga en voladizo (las flechas en el extremo izquierdo de la viga representan que los grados de libertad asociados a los desplazamientos y las rotaciones están bloqueados a un valor nulo). Fuente: “*Linear Static Analysis of a Cantilever Beam Using Beam Library (SI Units)*” [4]

coordenadas yy , zz y yz son respectivamente $2.780 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $8.990 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, y $2.090 \times 10^{-5} \text{ m}^4$.

La respuesta en frecuencia que se ha considerado en esta simulación numérica es el valor cuadrático medio de la solución para una frecuencia dada. Por simplicidad, la aproximación modal utilizada en esta simulación se ha obtenido únicamente con los tres primeros modos propios de vibración. En la primera aproximación se han utilizado los tres modos (véase la gráfica izquierda de la Figura 5.3), mientras que en una segunda aproximación se han utilizado únicamente el primer y el tercer modo (véase la gráfica derecha de la Figura 5.3). En ambos casos se ha comparado gráficamente la respuesta en frecuencia obtenida al resolver el problema completo resolviendo el sistema lineal completo.

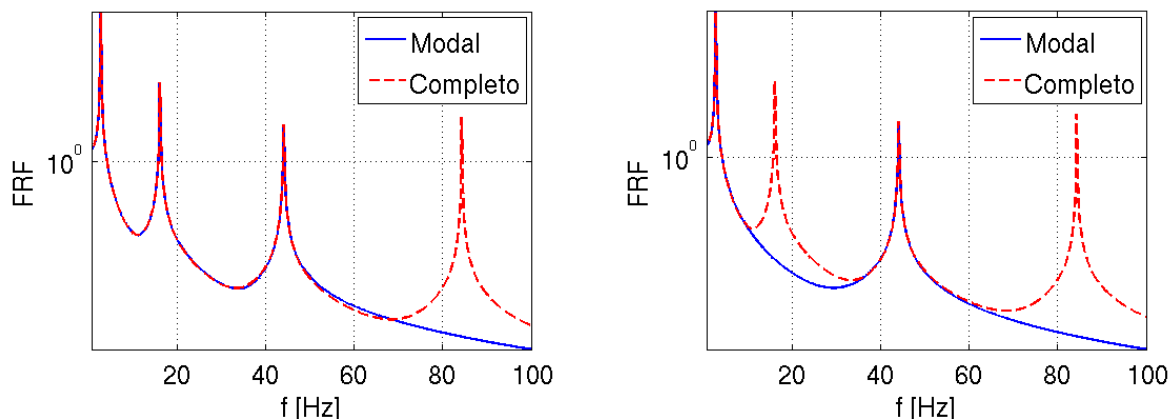


Figura 5.3: Respuesta en frecuencia para el problema dinámico de una viga en voladizo usando el sistema de grados de libertad completo y una aproximación modal que utiliza los tres primeros modos (izquierda) o solamente el primer y tercer modo (derecha).

Al escribir el problema cuadrático (2.14) como un problema de autovalores generalizado donde los autovalores λ se corresponden a los valores de los cuadrados de las frecuencias angulares, es decir, $\lambda = \omega^2 = (2\pi f)^2$, puesto que los autovalores obtenidos fueron 261.97, 10064.89, 76329.59, las frecuencias propias correspondientes en Herzios tienen los valores 2.57, 15.96 y 43.97. Como resultado de la simulación numérica, se obtiene la respuesta en frecuencia aproximando la solución del problema de elementos finitos mediante la aproximación modal descrita en la Sección 2.6 (donde se utilizaban los autovalores y autovectores obtenidos en el análisis modal).

En la Figura 5.3 se ha representado gráficamente la respuesta en frecuencia para un rango de frecuencias que va desde 0.5 Hz hasta 100 Hz. Se puede observar en el caso de utilizar los tres primeros modos que hasta aproximadamente los 50 Hz, frecuencia cercana a la correspondiente al último modo considerado, el modelo aproximado se acerca mucho al modelo completo, pero a partir de esta frecuencia los valores del modelo aproximado caen y no deben ser tenidos en cuenta, debido a que no se consideran los autovalores para frecuencias superiores. De forma análoga, si el segundo modo es descartado en la aproximación modal, los resultados obtenidos para la respuesta en frecuencia sólo son precisos en un entorno de frecuencias alrededor de las frecuencias asociadas a los modos considerados en la aproximación modal.

5.2. Validación

Se han realizado varias pruebas tomando como base el ejemplo que figura en el manual de NASTRAN del análisis dinámico, “MSC.Nastran. Dynamic Analysis User’s Guide” [10], correspondiente al ejemplo de viga en voladizo, incluido en la sección que trata el análisis de respuesta en frecuencia, el cual incluye también un archivo de entrada de NASTRAN (llamado *bd04bar.dat*).

El caso del ejemplo es una viga en voladizo de aluminio de 3m de longitud, de sección circular maciza de radio 0.014m. El área es de $6.158 \times 10^{-4} \text{m}^2$, los momentos de inercia asociados a las direcciones transversales son $3.0 \times 10^{-8} \text{m}^4$, y el momento polar $6.0 \times 10^{-8} \text{m}^4$. Las características del material elástico son módulo de Young igual a $7.1 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ y coeficiente de Poisson de 0.33. La densidad de masa es de 2703kg/m^3 .

Una vez incluidos estos valores en el archivo *bd04bar.dat*, se ha creado una base de datos de MSC.PATRAN, para posteriormente visualizar las gráficas con los resultados de las funciones de respuesta en frecuencia. Previamente, es necesario modificar la extensión del archivo a *.bdf*, obteniendo *bd04bar.bdf*. Entonces, se crea con PATRAN una nueva base de datos, y se importan los datos del modelo con el archivo, con la secuencia de órdenes desde la interfaz gráfica: **Analysis** - Action: Read Input File - Object: Model Data; **Select Input Data...** (seleccionar *bd04bar.bdf*) ; **Apply** .

Como primer paso se ha realizado un análisis modal, con el fin de obtener las matrices de autovalores y autovectores y la matriz de masa. Para ello se define un caso en MSC.PATRAN en el que solamente se consideran las restricciones y no las fuerzas, y se ha configurado el análisis modal con MSC.PATRAN según los datos del ejemplo. De esta manera, se visualizará la respuesta para frecuencias entre 0 y 20Hz. En el ejemplo se calculan modos hasta 500Hz. Dado que es necesario escribir las matrices en un archivo, se modificará el archivo de entrada de MSC.NASTRAN con esta finalidad, y por tanto sólo se especifica en MSC.PATRAN que se genere el archivo de entrada de MSC.NASTRAN sin realizar el análisis, mediante la secuencia de menús: **Analysis** , Action: Analyze; Object: Entire Model; Method: Analysis Deck; **Solution Type...** Normal modes; **Subcases...** (Se seleccionan los parámetros del subcaso); **Subcase select...** (se escoge el caso del análisis modal); **Apply**.

Así se genera un archivo *.bdf* de entrada de MSC.NASTRAN para el análisis modal del modelo. Este archivo se modifica de forma que al ejecutar MSC.NASTRAN y utilizar este archivo se obtengan los modos y la matriz de masa en un archivo de nombre *matrices.asc*, el cual se utilizará en la aplicación para realizar la aproximación modal en MATLAB.

El análisis de respuesta en frecuencia requiere la especificación de un conjunto de valores

de frecuencias en las que se realizará el análisis y un conjunto de valores con el que determinar el amortiguamiento modal. En todos los ejemplos presentes en las siguientes secciones, se consideran para las frecuencias 401 valores equiespaciados de 0 a 20 Hz. La entrada de NASTRAN para especificar esto es la siguiente:

```
FREQ1    1      0.    .05    400
```

Para especificar los amortiguamientos modales, se ha considerado un 2% del amortiguamiento modal crítico entre 0 y 10Hz y un 5% por encima de 10Hz. La entrada de NASTRAN que describe este amortiguamiento viene dada por

```
TABDMP1  1      CRIT
          0.    .02    10.    .02    10.01  .05    25.    .05
          ENDT
```

Debe hacerse notar que en el intervalo entre 10Hz y 10.01Hz, se obtendrán valores intermedios (interpolación lineal) entre 0.02 y 0.05.

En las siguientes secciones se describen varios test de validación en los que se modifica el caso de carga, comparándose los resultados obtenidos con MSC.NASTRAN (y visualizados con MSC.PATRAN) con aquellos obtenidos con la aplicación desarrollada en este trabajo.

5.2.1. Fuerza constante en el extremo

En el primer test considerado, se ha aplicado una fuerza de $2N$ paralela al eje y en el extremo libre de la viga (que corresponde con el nodo 11 de la discretización). El archivo de configuración utilizado por la aplicación desarrollada se lista a continuación:

```
%% ARCHIVO DE MATRICES (AUTOVALORES,AUTOVECTORES,MASA), salida de OUTPUT4 %%
Fname = 'matrices.out4';

%% FRECUENCIAS %%
% Parametros para calcular las frecuencias (Entrada FREQi)
PARFREC = {'FREQ1', 0, 0.05, 400}; % cell array

%% AMORTIGUAMIENTO %%
% Amortiguamiento modal como porcentaje del critico (en tanto por uno)
PARDAMP = {'CRIT', 0,0.02,10,0.02,10.01,0.05,25,0.05};

%% Excitacion %%
% Nodo excitacion (entero o vector de enteros)
nodoE = 11;

% Tipo de excitacion: fuerza, aceleracion, velocidad o desplazamiento
tipo_exc = EXC_FUERZA;

switch tipo_exc
    case EXC_FUERZA,
        % Fuerza traslacional [Fx Fy Fz]
```

```

        F = [0 2 0];
        ...
end

%% RESPUESTA %%
% nodo de la respuesta (entero o vector de enteros)
nodoR = 11;

% Tipo de respuesta: desplazamiento, aceleracion o velocidad
tipo_res = RES_DESPLAZAMIENTO;

% Dato de la respuesta: magnitud, componente X, componente Y, componente Z
dato_res = DAT_MAGNITUD;

%% SALIDA %%
tipo_sal = SAL_FIGURA;

```

Con el propósito de comparar las funciones de respuesta en frecuencia (FRF) obtenidas con MSC.PATRAN y las obtenidas con la aplicación desarrollada, se muestran ambos resultados en las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 cuando la magnitud física de interés es el desplazamiento, la velocidad o la aceleración, respectivamente.

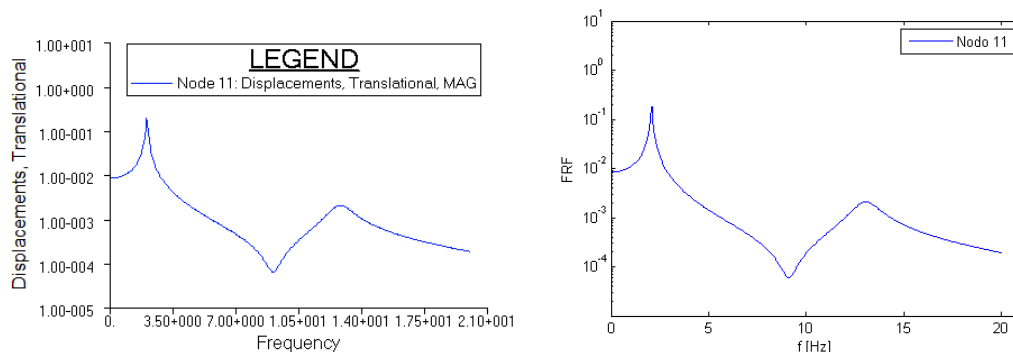


Figura 5.4: Magnitud del desplazamiento, fuerza constante en la dirección y aplicada en el extremo de la viga. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

5.2.2. Fuerza de amplitud variable con la frecuencia

En este segundo test se ha aplicado una fuerza de $2N$ paralela al eje y en el extremo libre de la viga (que corresponde al nodo 11 de la malla). A la fuerza se le aplica un factor que depende de la frecuencia de forma lineal, correspondiendo éste a una recta creciente de 1 a 2 entre 0 y 10Hz, y a una recta decreciente de 2 a 1 entre 10 y 20Hz. El archivo de configuración que se ha utilizado en este test es el siguiente:

```

%% ARCHIVO DE MATRICES (AUTOVALORES,AUTOVECTORES,MASA), salida de OUTPUT4 %%
Fname = 'matrices.out4';

```

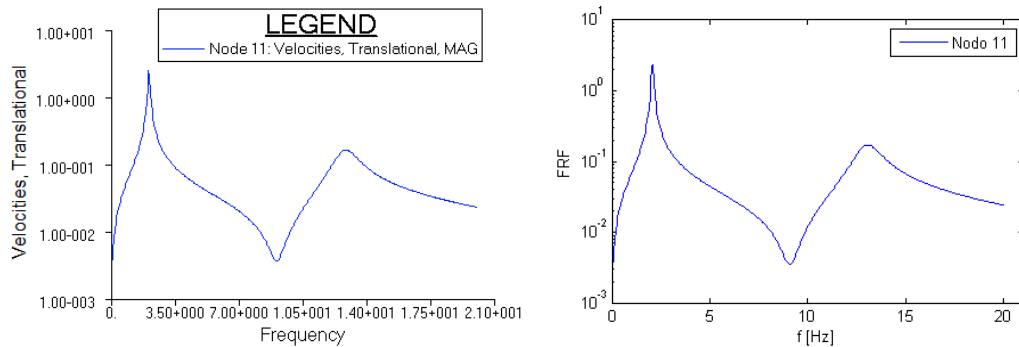


Figura 5.5: Magnitud de la velocidad, fuerza constante en la dirección y aplicada en el extremo de la viga. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

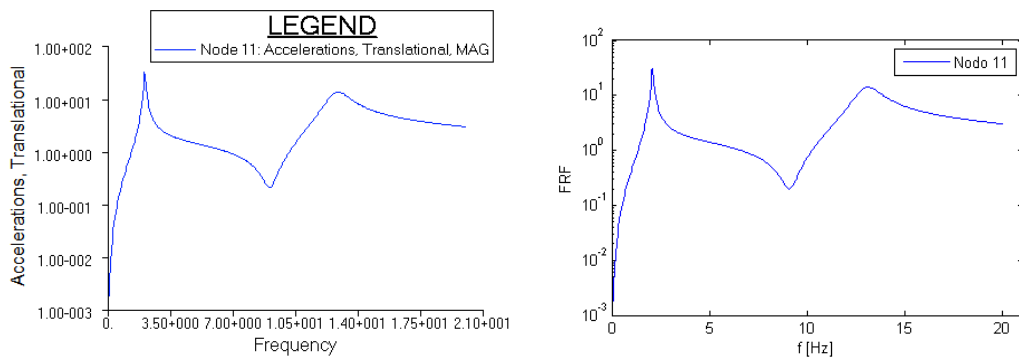


Figura 5.6: Magnitud de la aceleración, fuerza constante en la dirección y aplicada en el extremo de la viga. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

```
%% FRECUENCIAS %%
% Parametros para calcular las frecuencias (Entrada FREQi)
PARFREC = {'FREQ1', 0, 0.05, 400}; % cell array

%% AMORTIGUAMIENTO %%
% Amortiguamiento modal como porcentaje del critico (en tanto por uno)
PARDAMP = {'CRIT', 0,0.02,10,0.02,10.01,0.05,25,0.05};

%% Excitacion %%
% Nodo excitacion (entero o vector de enteros)
nodoE = 11;

% Tipo de excitacion: fuerza, aceleracion, velocidad o desplazamiento
tipo_exc = EXC_FUERZA;

switch tipo_exc
```

```

case EXC_FUERZA,
    % Fuerza traslacional [Fx Fy Fz]
    F = [0 2 0];
    ...
end
% B(f) como vector de pares frecuencia-valor: f1,b1,f2,b2,...
% (vector fila o columna de vectores fila, para cada nodoE)
Bf = [0.0,1,10,2,20,1];

%% RESPUESTA %%
% nodo de la respuesta (entero o vector de enteros)
nodoR = 11;

% Tipo de respuesta: desplazamiento, aceleracion o velocidad
tipo_res = RES_DESPLAZAMIENTO;

% Dato de la respuesta: magnitud, componente X, componente Y, componente Z
dato_res = DAT_MAGNITUD;

%% SALIDA %%
tipo_sal = SAL_FIGURA;

```

Al comparar las FRF obtenidas con MSC.PATRAN y las obtenidas con la aplicación desarrollada (Figuras 5.7, 5.8 y 5.9), al igual que en el test anterior, los resultados obtenidos en ambos casos son coincidentes.

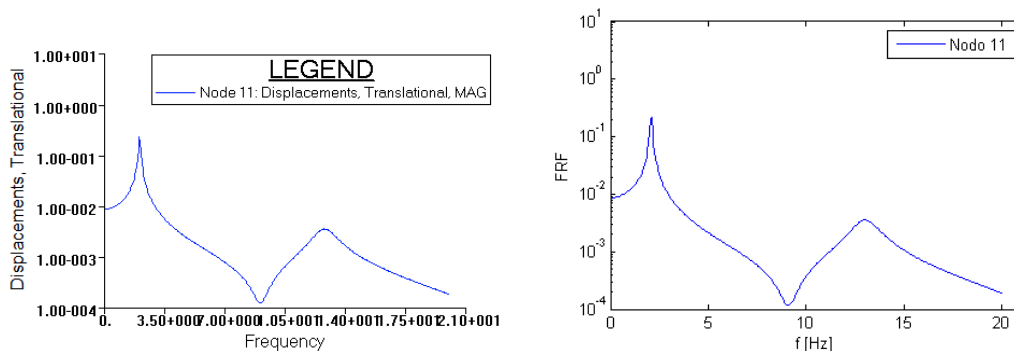


Figura 5.7: Magnitud del desplazamiento, fuerza variable con la frecuencia en la dirección y aplicada en el extremo de la viga. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

5.2.3. Dos fuerzas desfasadas.

Se considera el caso descrito en el ejemplo del manual [10]: dos fuerzas aplicadas, una primera F_1 en el nodo 6 y otra F_2 en el nodo 11, paralelas al eje y . La fuerza F_1 aplicada en el nodo 6 está desfasada 45° , y la fuerza F_2 tiene magnitud doble que F_1 . Por tanto, se pueden expresar las fuerzas como $F_1 = B(f)e^{i\theta}$ y $F_2 = 2B(f)$, con $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $B(f)$ una función lineal a

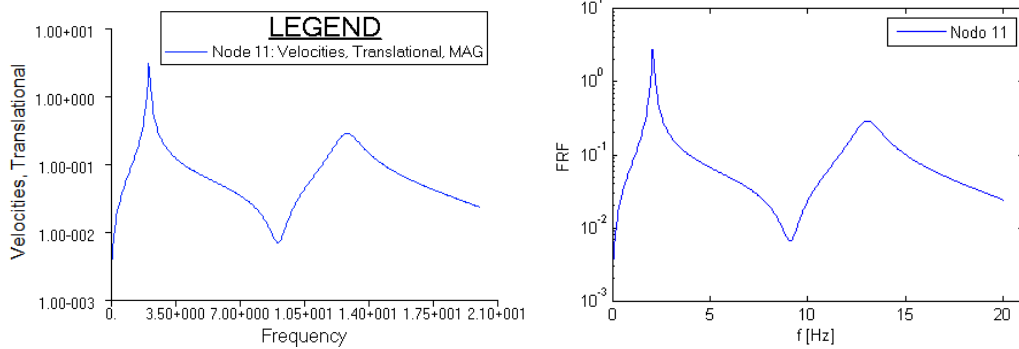


Figura 5.8: Magnitud de la velocidad, fuerza variable con la frecuencia en la dirección y aplicada en el extremo de la viga. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

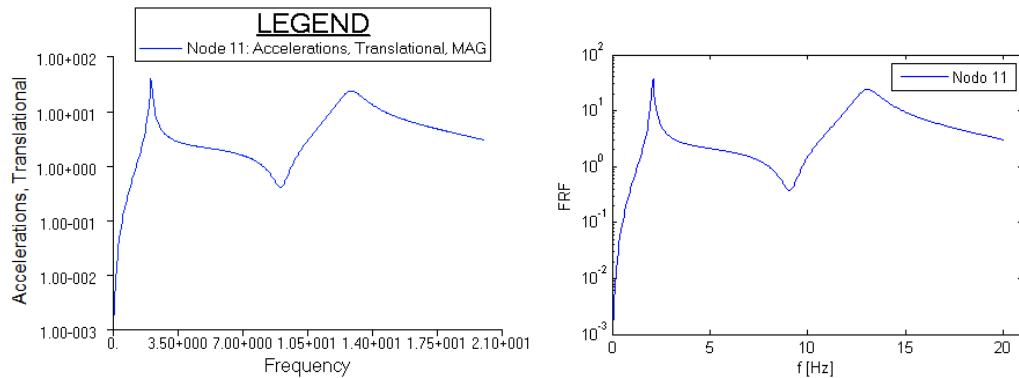


Figura 5.9: Magnitud de la aceleración, fuerza variable con la frecuencia en la dirección y aplicada en el extremo de la viga. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

trozos que se define por los valores puntuales: $B(0) = 1$, $B(5) = 3$, $B(15) = 3$, $B(20) = 1$. La variación de la magnitud de la fuerza aplicada en el nodo 6 con la frecuencia se representa en la Figura 5.10.

En este test de validación, el archivo de datos de la aplicación ha sido el siguiente:

```
%% ARCHIVO DE MATRICES (AUTOVALORES,AUTOVECTORES,MASA), salida de OUTPUT4 %%
Fname = 'matrices.out4';
```

```
%% FRECUENCIAS %%
% Parametros para calcular las frecuencias (Entrada FREQi)
PARFREC = {'FREQ1', 0, 0.05, 400}; % cell array
```

```
%% AMORTIGUAMIENTO %%
% Amortiguamiento modal como porcentaje del critico (en tanto por uno)
PARDAMP = {'CRIT', 0,0.02,10,0.02,10.01,0.05,25,0.05};
```

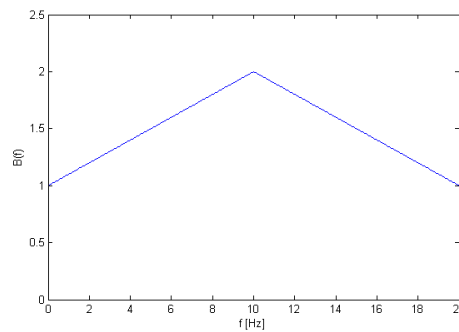


Figura 5.10: Magnitud de la fuerza aplicada $B(f)$, con relación a la frecuencia en el intervalo $(0,20)$ Hz.

```

%% Excitacion %%
% Nodo excitacion (entero o vector de enteros)
nodoE = [6,11];

% Tipo de excitacion: fuerza, aceleracion, velocidad o desplazamiento
tipo_exc = EXC_FUERZA;

switch tipo_exc
    case EXC_FUERZA,
        % Fuerza traslacional [Fx Fy Fz]
        F = [0 1 0;
            0 2 0];
        (...)
end

% B(f) como vector de pares frecuencia-valor: f1,b1,f2,b2,...
% (vector fila o columna de vectores fila, para cada nodoE)
Bf = [0.0,1,5,3,15,3,20,1,25,1;
      0.0,1,5,3,15,3,20,1,25,1];

% Angulo de fase theta en grados como vector de constantes para cada nodoE
% (numero o vector de numeros, para cada nodoE)
THETA = [45,0];

%% RESPUESTA %%
% nodo de la respuesta (entero o vector de enteros)
nodoR = 11;

% Tipo de respuesta: desplazamiento, aceleracion o velocidad
tipo_res = RES_DESPLAZAMIENTO;

% Dato de la respuesta: magnitud, componente X, componente Y, componente Z

```

```
dato_res = DAT_MAGNITUD;
```

```
%% SALIDA %%
```

```
tipo_sal = SAL_FIGURA;
```

Al comparar las gráficas obtenidas con MSC.PATRAN y las obtenidas con la aplicación desarrollada (en las Figuras 5.11, 5.12 y 5.13 para el nodo 11, y en las Figuras 5.14, 5.15 y 5.16 para el nodo 6), se puede observar que los resultados son similares en ambos casos.

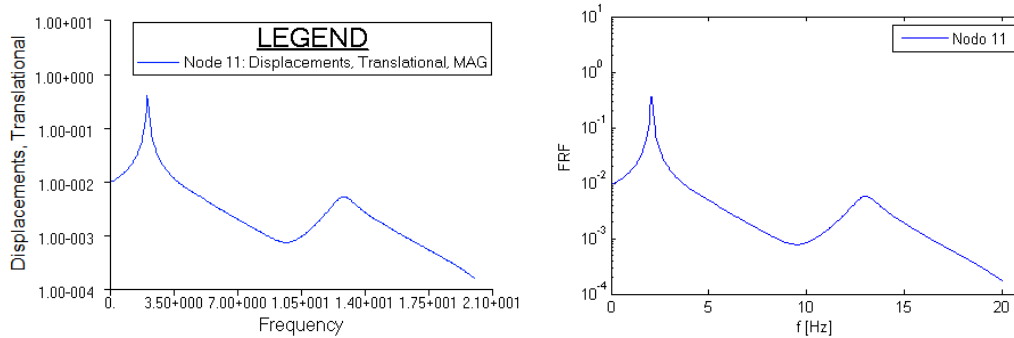


Figura 5.11: Magnitud del desplazamiento en el nodo 11, dos fuerzas desfasadas 45° . Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

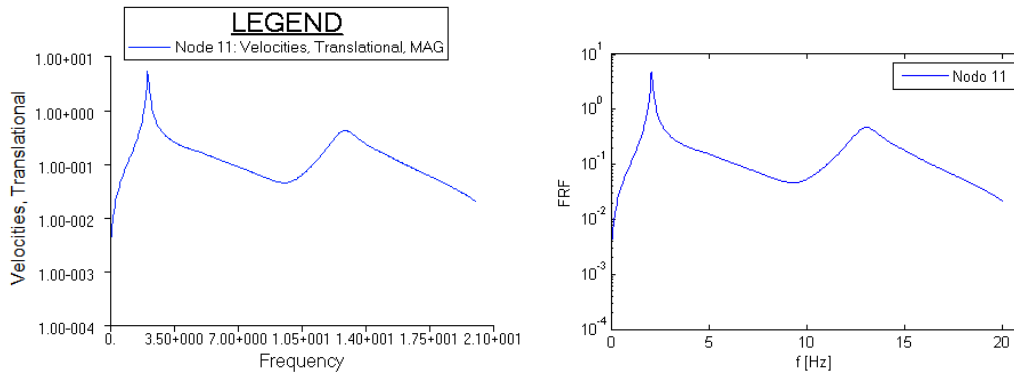


Figura 5.12: Magnitud de la velocidad en el nodo 11, dos fuerzas desfasadas 45° . Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

5.2.4. Dos fuerzas desfasadas en función de la frecuencia

En este caso se han considerado dos fuerzas aplicadas, una primera F_1 en el nodo 6 y otra F_2 en el nodo 11, paralelas al eje y . La fuerza F_1 aplicada en el nodo 6 está desfasada, $\phi(f)$, en función de la frecuencia f [Hz] que se aproxima mediante una interpolación lineal a trozos, que se define mediante la información: $\phi(0) = 30$, $\phi(10) = 30$, $\phi(10,01) = 60$, $\phi(20) = 60$. Por tanto, los puntos intermedios se calculan mediante interpolación lineal. Puesto que la fuerza F_1 tiene magnitud unidad y F_2 tiene magnitud 2, entonces se pueden expresar las dos fuerzas como $F_1 = 1e^{i\phi(f)}$, y $F_2 = 2$.

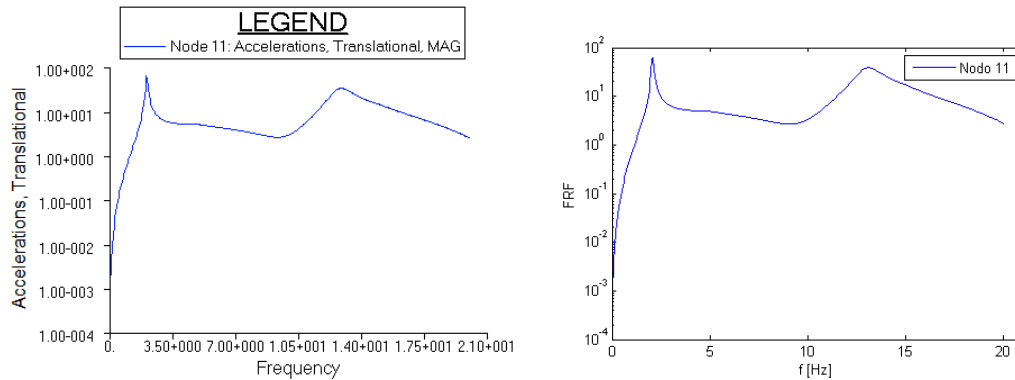


Figura 5.13: Magnitud de la aceleración en el nodo 11, dos fuerzas desfasadas 45°. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

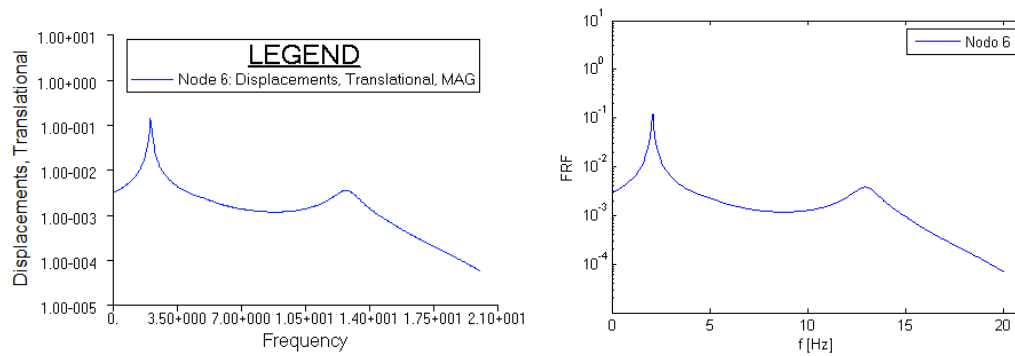


Figura 5.14: Magnitud del desplazamiento en el nodo 6, dos fuerzas desfasadas 45°. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

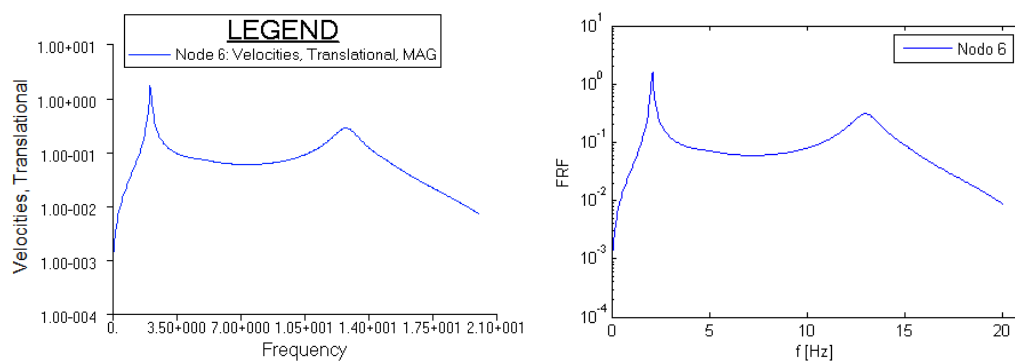


Figura 5.15: Magnitud de la velocidad en el nodo 6, dos fuerzas desfasadas 45°. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

La variación de la fase de la fuerza aplicada en el nodo 6 con la frecuencia se representa en la Figura 5.17. El archivo de datos de la aplicación que incluye este caso de simulación se lista a continuación:

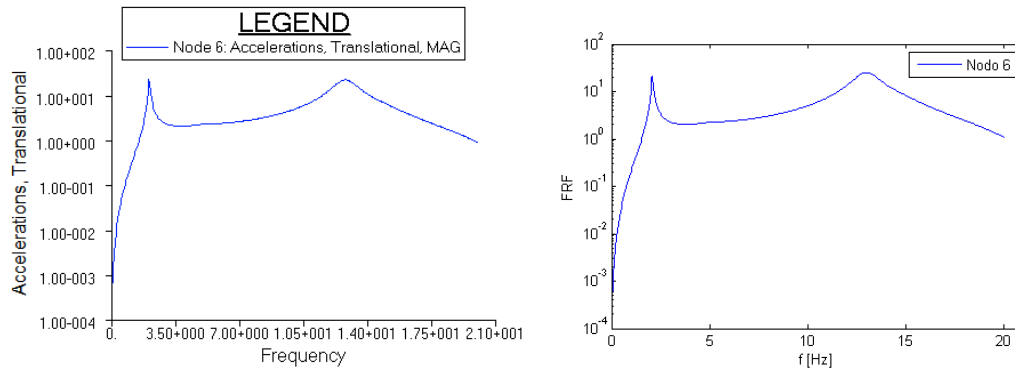


Figura 5.16: Magnitud de la aceleración en el nodo 6, dos fuerzas desfasadas 45°. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

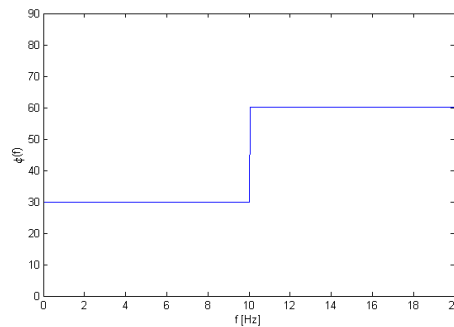


Figura 5.17: Fase de la fuerza aplicada en el nodo 6, F_1 , con relación a la frecuencia en el intervalo (0,20) Hz.

```
%% ARCHIVO DE MATRICES (AUTOVALORES,AUTOVECTORES,MASA), salida de OUTPUT4 %%
Fname = 'matrices.out4';
```

```
%% FRECUENCIAS %%
PARFREC = {'FREQ1', 0, 0.05, 400}; % cell array
```

```
%% AMORTIGUAMIENTO %%
PARDAMP = {'CRIT', 0,0.02,10,0.02,10.01,0.05,25,0.05};
```

```
%% Excitacion %%
% Nodo excitacion (entero o vector de enteros)
nodoE = [6,11];
```

```
% Tipo de excitacion: fuerza, aceleracion, velocidad o desplazamiento
tipo_exc = EXC_FUERZA;
```

```
switch tipo_exc
    case EXC_FUERZA,
```

```

    % Fuerza traslacional [Fx Fy Fz]
    F = [0 1 0;
         0 2 0];
    (...)
end

% phi(f) como vector de pares frecuencia-valor en grados: f1,phi1,f2,phi2,...
PHIf = [0.0,30,10,30,10.01,60,20,60;
        0.0,0,10,0,10.01,0,20,0];

%% RESPUESTA %%
% nodo de la respuesta (entero o vector de enteros)
nodoR = [6 11];

% Tipo de respuesta: desplazamiento, aceleracion o velocidad
tipo_res = RES_DESPLAZAMIENTO;

% Dato de la respuesta: magnitud, componente X, componente Y, componente Z
dato_res = DAT_MAGNITUD;

%% SALIDA %%
tipo_sal = SAL_FIGURA;

```

De nuevo, se han comparado las gráficas obtenidas con MSC.PATRAN y las obtenidas con la aplicación desarrollada en las Figuras 5.18, 5.19 y 5.20, obteniéndose resultados similares con las dos aplicaciones en cualquiera de los dos nodos.

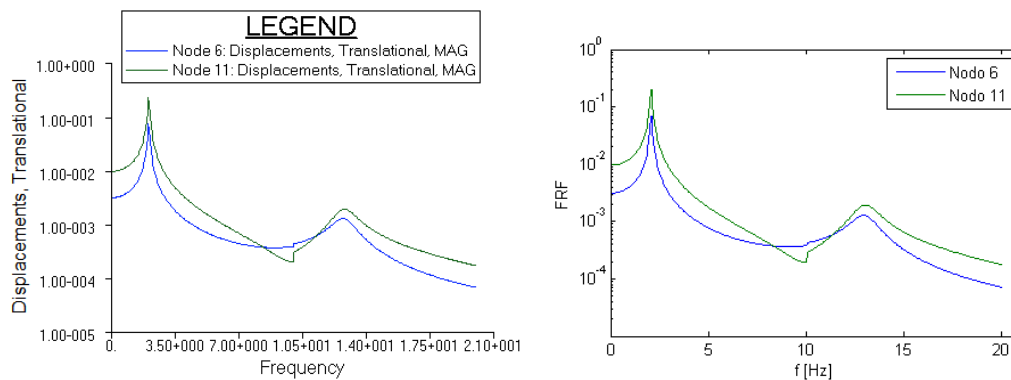


Figura 5.18: Magnitud del desplazamiento en los nodos 6 y 11 en un test con dos fuerzas desfasadas en función de la frecuencia. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

5.2.5. Dos fuerzas, una de ellas con retardo temporal.

En este último test, se ha analizado el problema en el que se aplican dos fuerzas, una primera F_1 en el nodo 6 y otra F_2 en el nodo 11, paralelas al eje y . La fuerza F_1 aplicada en

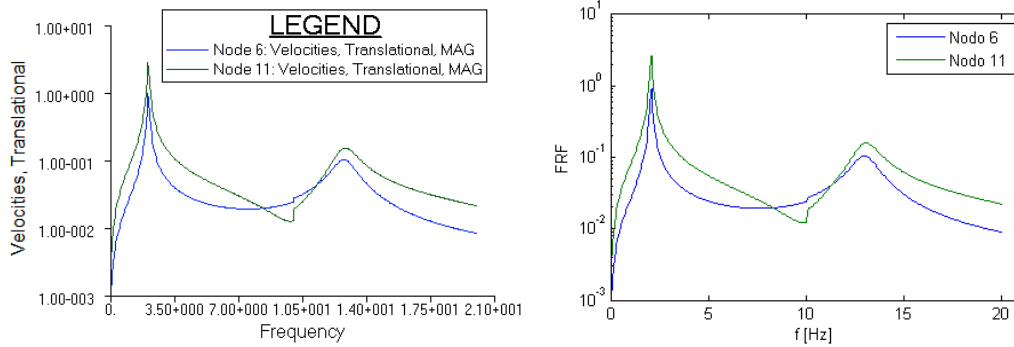


Figura 5.19: Magnitud de la velocidad en los nodos 6 y 11 en un test con dos fuerzas desfasadas en función de la frecuencia. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

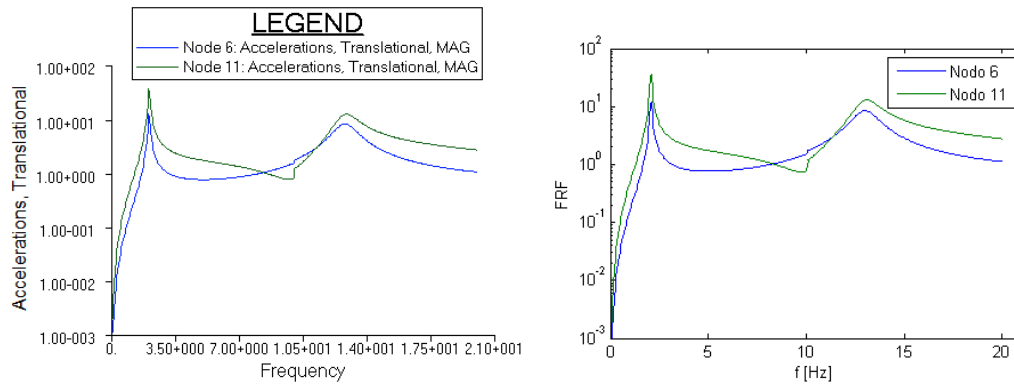


Figura 5.20: Magnitud de la aceleración en los nodos 6 y 11 en un test con dos fuerzas desfasadas en función de la frecuencia. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

el nodo 6 tiene un retardo temporal de $\tau = 0,1$ s y magnitud unidad, mientras que la fuerza F_2 tiene magnitud 2. Por tanto, las fuerzas se pueden expresar como $F_1 = 1e^{-i2\pi f\tau}$, y $F_2 = 2$.

El archivo de datos de la aplicación que se ha utilizado para realizar la simulación en este test se incluye a continuación:

```
%% ARCHIVO DE MATRICES (AUTOVALORES,AUTOVECTORES,MASA), salida de OUTPUT4 %%
Fname = 'matrices.out4';
```

```
%% FRECUENCIAS %%
PARFREC = {'FREQ1', 0, 0.05, 400}; % cell array
```

```
%% AMORTIGUAMIENTO %%
PARDAMP = {'CRIT', 0,0.02,10,0.02,10.01,0.05,25,0.05};
```

```
%% Excitacion %%
% Nodo excitacion (entero o vector de enteros)
```

```

nodoE = [6,11];

% Tipo de excitacion: fuerza, aceleracion, velocidad o desplazamiento
tipo_exc = EXC_FUERZA;

switch tipo_exc
    case EXC_FUERZA,
        % Fuerza traslacional [Fx Fy Fz]
        F = [0 1 0;
            0 2 0];
    (...)
end

% Retardo temporal tau como vector de constantes para cada nodoE
% (numero o vector de numeros, para cada nodoE)
TAU = [0.1,0];

%% RESPUESTA %%
% nodo de la respuesta (entero o vector de enteros)
nodoR = [6 11];

% Tipo de respuesta: desplazamiento, aceleracion o velocidad
tipo_res = RES_DESPLAZAMIENTO;

% Dato de la respuesta: magnitud, componente X, componente Y, componente Z
dato_res = DAT_MAGNITUD;

%% SALIDA %%
tipo_sal = SAL_FIGURA;

```

En este último caso de validación, al comparar las gráficas obtenidas con MSC.PATRAN y las obtenidas con la aplicación desarrollada, Figuras 5.21, 5.22 y 5.23, de nuevo se obtienen gráficas similares para las FRF.

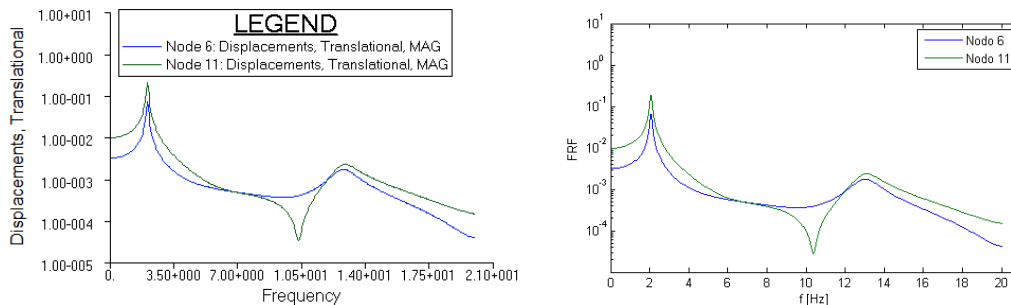


Figura 5.21: Magnitud del desplazamiento en los nodos 6 y 11 en un test con dos fuerzas aplicadas, una de ellas con retardo temporal $\tau = 0,1s$. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

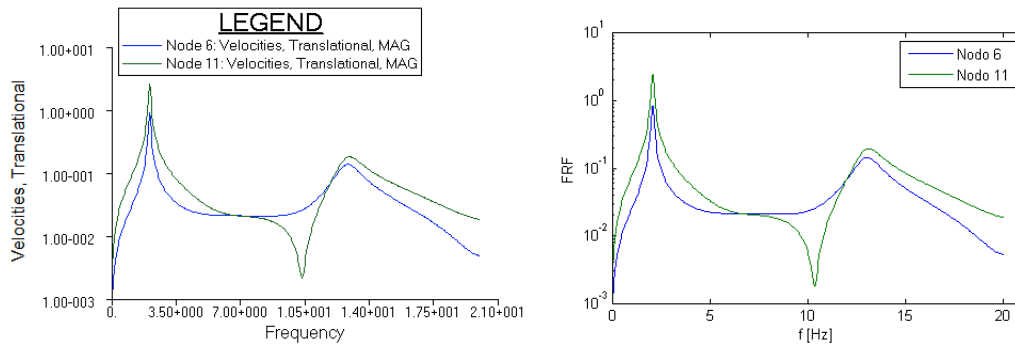


Figura 5.22: Magnitud de la velocidad en los nodos 6 y 11 en un test con dos fuerzas aplicadas, una de ellas con retardo temporal $\tau = 0,1s$. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

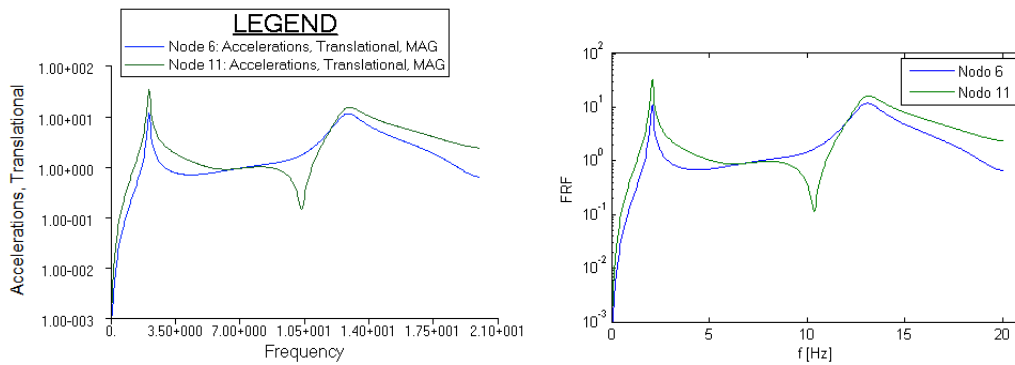


Figura 5.23: Magnitud de la aceleración en los nodos 6 y 11 en un test con dos fuerzas aplicadas, una de ellas con retardo temporal $\tau = 0,1s$. Izquierda: FRF obtenida con MSC.PATRAN. Derecha: FRF obtenida con la aplicación desarrollada.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones generales

En el presente trabajo se ha realizado un estudio de la documentación de la aplicación comercial MSC.NASTRAN y su lenguaje interno DMAP, lo que ha permitido insertar nuevo código al ejecutado por defecto en MSC.NASTRAN. Este nuevo código ha servido para volcar varias matrices a un archivo y calcular los autovalores y autovectores que definen los modos propios de vibración de una estructura elástica, que MSC.NASTRAN obtiene mediante la resolución por un método de elementos finitos.

Asimismo, se ha estudiado la obtención de las tensiones de una estructura en los nodos de la malla. Al insertar nuevo código DMAP, ha sido posible volcar dichas tensiones a un fichero con un ordenamiento de los datos conocido.

En la segunda parte del proyecto, se ha desarrollado una aplicación en MATLAB que implementa el método de aproximación modal para la obtención de la respuesta en frecuencia (FRF) en problemas de vibración en estructuras elásticas. Esta aplicación toma como datos de entrada los modos propios de vibración del sistema obtenidos a partir de MSC.NASTRAN. La aplicación requiere también como entrada la definición de fuerzas de excitación, amortiguamientos y frecuencias. Esta aplicación permite que los resultados obtenidos se puedan visualizar en una gráfica o escribir en un archivo. Para validar la implementación de esta aplicación se han realizado varios casos de prueba y se han contrastado con las gráficas de resultados postprocesadas con PATRAN (tras la resolución con NASTRAN), y se ha comprobado que los resultados obtenidos son muy similares.

6.2. NASTRAN y DMAP

La documentación de NASTRAN es extensa, y puede resultar algo confusa para un usuario inexperto. Aunque el funcionamiento general de las secuencias de solución se detalla en la documentación con una descripción general de lo que hacen los módulos principales, no se encuentran referenciados en la documentación todos los subDMAPs que los componen. Debido a ello puede resultar difícil encontrar el paso de ejecución en el que se utiliza una tabla o matriz determinada para poder imprimirla. A la vista de la experiencia adquirida en este trabajo, es claro que cuanto mejor se conozca el modo en que NASTRAN implementa el método de los elementos finitos y las técnicas de resolución de problemas lineales más fácil será la modificación e inserción de código DMAP.

6.3. Aplicación de cálculo de respuesta en frecuencia

Durante el desarrollo de la aplicación de respuesta en frecuencia se ha comprobado que el análisis modal es una técnica aproximada que se ajusta de forma precisa a la solución en el entorno de las frecuencias modales consideradas. Lejos de éstas, los resultados obtenidos en términos de las FRF pierden su precisión y no deben ser tenidos en cuenta. Por tanto, es importante definir bien el rango de frecuencias de interés del problema y ajustar los modos calculados en el problema mecánico a ese intervalo.

En el análisis de la respuesta en frecuencia, el cálculo de las frecuencias naturales y modos propios es un proceso costoso computacionalmente, por lo que realizarlo una única vez empleando NASTRAN, y una vez hecho esto, resolver problemas con distos valores de carga y distintos puntos de respuesta, usando una aproximación modal truncada de la solución del problema completo, supone un ahorro computacional importante.

Bibliografía

- [1] A. Bermúdez, L. M. Hervella-Nieto, A. Prieto. Notas del curso “Modelos Matemáticos en Acústica”. Master en Ingeniería Matemática. 2013.
- [2] B. Balachandran, E. B. Magrab. *Vibraciones*. Cengage Learning Editores, México, 2008.
- [3] J. R. Barber. *Elasticity. Solid Mechanics and its applications*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [4] MSC Software Corporation. Linear Static Analysis of a Cantilever Beam Using Beam Library (SI Units). Accesible desde <http://goo.gl/IQ0QN>.
- [5] MSC Software Corporation. Modal Analysis of a Beam (SI Units). Accesible desde <http://goo.gl/15deR>.
- [6] MSC Software Corporation. MSC.Nastran. Getting Started. Accesible desde <http://goo.gl/4yxfS>, 2001.
- [7] MSC Software Corporation. MSC.Nastran. Reference Manual. Accesible desde <http://goo.gl/4yxfS>, 2004.
- [8] MSC Software Corporation. MSC.Nastran. Release Guide. Accesible desde <http://goo.gl/4yxfS>, 2005.
- [9] MSC Software Corporation. MSC.Nastran. Quick Reference Guide. Accesible desde <http://goo.gl/4yxfS>, 2011.
- [10] MSC Software Corporation. MSC.Nastran. Dynamic Analysis User’s Guide, 2012.
- [11] MSC Software Corporation. MSC.Nastran. Linear Static Analysis User’s Guide. Accesible desde <http://goo.gl/4yxfS>, 2012.
- [12] D. A. Bies, C. H. Hansen. *Engeneering Noise Control. Theory and Practice*. Spon Press, New York, 2009.
- [13] J.W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [14] G. H. Golub, C. F. van Loan. *Matrix computations*. The Hopkins University, London, 1996.
- [15] S. Gordon. Solving dynamic problems outside of NASTRAN. In *Finite Element Modeling Continuous Improvement*. NASA, 2002.

- [16] F. Magoulès, editor. *Computational Methods for Acoustics Problems*. Saxe-Coburg Publications, Stirlingshire, Scotland, 2008.
- [17] P. Quintela. Notas del curso “Modelos Matemáticos en Mecánica de Sólidos”. Master en Ingeniería Matemática. 2011.
- [18] J. N. Reddy. *An introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, 2006.
- [19] M. Reymond. MD Nastran DMAP Programmer’s Guide. Accesible desde <http://google.com/search?q=MD+Nastran+DMAP+Programmer's+Guide>, 2011.
- [20] T. D. Rossing, editor. *Springer Handbook of Acustics*. Springer, New York, 2007.