

*La enseñanza del álgebra lineal  
utilizando modelización y calculadora gráfica.  
Un estudio con profesores en formación*

*JOSÉ ORTIZ*

Universidad de Carabobo. Venezuela

*LUIS RICO*

*ENRIQUE CASTRO*

Universidad de Granada. España

*Resumen:*

*Abstract:*

*Se persigue determinar el conocimiento didáctico, derivado de la implementación de un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización matemática. En el estudio participaron diez profesores de matemáticas de secundaria en formación y se realizó desde una aproximación cualitativa. Los resultados revelan cambios y avances en el conocimiento didáctico de los participantes evidenciado en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico con la incorporación del proceso de modelización matemática y la calculadora gráfica.*

*It is persecuted to determine the didactic knowledge, derivative of the implementation of a formation program integrated, through linear algebra, the use of the graphic calculator and the mathematical modelling. Ten preservice mathematics teachers of secondary school participated in the study, and it was made from a qualitative approach. The results reveal changes and advances in the didactic knowledge of the participants demonstrated in the design of didactics activities of algebraic content with the incorporation of the process of mathematical modelización and the graphic calculator.*

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de esta investigación persigue analizar el conocimiento didáctico derivado de la implementación de un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y analizar el conocimiento didáctico de los futuros profesores derivado de la implementación del programa. A efecto del análisis curricular se partió de una estructura teórica soportada en las cuatro dimensiones siguientes: concep-

tual, cognitiva, formativa y social (Rico, 1997a, 1997b). Por otra parte, dicha teoría considera que el conocimiento didáctico de los tópicos matemáticos debe fundamentarse en los sistemas de representación (Janvier, 1987, Duval, 1995), la modelización (Niss, Blum & Huntley, 1991; Houston, Blum, Huntley & Neill, 1997; Ortiz, 2002), los errores y dificultades (Borassi, 1987), la fenomenología (Freudenthal, 1983), la historia de las matemáticas (Fauvel, 1991) y los materiales y recursos. Este estudio se llevó a cabo en el contexto de la Universidad de Granada, España, dentro de los planes de formación vigentes en el curso 2001-2002.

En esta investigación se ha optado por la utilización de la calculadora gráfica (CG) TI-92, la cual se incorpora como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El contenido matemático involucrado fue el álgebra lineal, el cual propicia una riqueza de aplicaciones importantes en la modelización de situaciones del mundo real, tal como lo plantean Harel (1998), Brunner, Coskey & Sheehan (1998) y Dorier (2000), entre otros.

El haber escogido el álgebra lineal se apoya en el currículo diseñado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (1992). Ese documento establece que en el núcleo de Álgebra para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se debe contemplar la resolución de ecuaciones lineales y sistemas de dos ecuaciones mediante métodos diversos. Asimismo, se deben considerar aplicaciones de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos y de la vida real. Dentro de la diversidad de situaciones que se resuelven con tratamiento algebraico, se destaca la importancia de aquellas cuya formulación implica la búsqueda de uno o dos datos.

La pertinencia de la investigación procede del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada, tomando en consideración que en la actualidad en dicho programa se aprecia escaso tratamiento de las nuevas tecnologías y la modelización matemática. Para realizar el estudio se implementó un programa que integra la modelización, la calculadora gráfica y el álgebra lineal en la elaboración de actividades didácticas.

Las cuestiones formuladas fueron las siguientes:

¿Qué conocimiento didáctico desarrollan los profesores en formación mediante el manejo e incorporación de la calculadora gráfica en tareas escolares, y de qué manera lo integran en su conocimiento profesional?

¿Cuáles son los criterios que manejan los profesores en formación para el uso de la modelización matemática y de qué manera recurren a ella?

¿Qué potencialidades didácticas brinda el álgebra lineal para el establecimiento de vínculos y relaciones entre la calculadora y la modelización matemática, en la formación inicial del profesor?

## METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló con diez sujetos, los cuales siguieron durante 30 horas (10 sesiones) la implementación de un programa de formación, mediante un curso-taller, cuyo diseño se sustentaba sobre la modelización y la calculadora gráfica como recurso en un contexto matemático de álgebra lineal. Los sujetos del estudio fueron profesores de matemáticas en formación, los cuales participaron de forma voluntaria, con base en criterios de ser potencial profesor de matemáticas y no estar en ejercicio docente.

Este trabajo se enmarca dentro de la metodología de estudio de caso. El foco de la investigación se centra en las producciones de los sujetos participantes en la implementación del programa.

En el estudio se consideran las producciones de los participantes en relación con el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza del álgebra lineal, el manejo instrumental de la calculadora gráfica y su articulación con la modelización; así como, el empleo de estos organizadores para planificar tareas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, el conocimiento didáctico del profesor en formación.

El análisis de las producciones se efectuó tomando como criterio la identificación de tres momentos claves en el desarrollo del curso-taller: la primera sesión, la cuarta sesión y la décima sesión. Todo ello contrastado con las producciones de las demás sesiones del curso-taller.

Los aspectos que se consideraron para el análisis fueron: respecto a la modelización se identificó el desarrollo de habilidades para resolver problemas abiertos, la discusión y reflexión sobre los abordajes de las situaciones problema, la valoración crítica de cada parte de la actividad desarrollada, habilidades de comunicación oral y escrita y habilidades para trabajar en grupo, aspectos sugeridos por Galbraith, Haines and Izard (1998). Respecto al apoyo de la CG, como recurso didáctico, se analizó la utilización de los diversos sistemas de representación y sus conexiones entre ellos, con los conceptos matemáticos y con las situaciones planteadas en el diseño de actividades didácticas. También se tomó en cuenta el aprovechamiento de las posibilidades de cálculo, experimentación, visualización y contraste de resultados posibles de efectuar con el uso de la CG, de acuerdo a lo planteado por Kutzler (2000).

## RESULTADOS

### *Estado de los profesores en formación en el momento inicial*

El estado inicial de los futuros profesores se puede sintetizar en los siguientes aspectos generales:

1. Poseen una sólida formación disciplinar
2. Están abiertos al empleo de la CG por parte del profesor de matemáticas, sin embargo mantienen una posición moderada sobre el uso de la misma por parte de los alumnos.
3. Tienen relativa habilidad para proponer situaciones del entorno del alumno.

4. Conservan el esquema de conducción de la clase dominada por el profesor.
5. Poca iniciativa al momento de proponer actividades de evaluación.

### ***Estado de los profesores en formación (PF) en el momento intermedio***

El objetivo de la cuarta sesión fue modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales.

Una de las situaciones problema propuestas en la cuarta sesión de implementación del programa fue la siguiente, relacionada con el ingreso laboral:

*Ricardo tiene dos trabajos de tiempo parcial; en uno le pagan 7 euros por hora y en el otro 5 euros por hora. Debe ganar, cuando menos, 140 euros semanales para sufragar sus gastos escolares. Determinar las diversas formas en que puede programar el tiempo para alcanzar su meta.*

### ***Resolución directa sin usar CG***

En este caso los profesores en formación identificados como PF4 y PF7 resolvieron el problema con pocos detalles. El participante PF4 consideró las variables  $x$  e  $y$  que denotan el número de horas en el trabajo que paga 7€ la hora y el número de horas en el trabajo que paga 5€ la hora respectivamente. Luego definió las funciones  $T_1$  y  $T_2$  por

$$T_1(x)=7x \text{ y } T_2(y)=5y$$

y formuló el modelo de la situación planteada definido por la desigualdad

$$T_1(x)+T_2(y)\geq 140.$$

No se observó la consideración de condiciones o restricciones en la construcción del modelo. Tampoco se explicaron los detalles y la necesidad de introducir las funciones lineales  $T_1$  y  $T_2$ . Finalmente no se resuelve el problema sino que se planteó la desigualdad

$$y > \frac{-7(x-20)}{5}$$

y se afirmó tener “siempre partes del semiplano superior”. Obviamente no se vislumbró una clarificación de los procedimientos señalados. Se podría decir que el diseño de la actividad no se estructuró para ser comprendido por alumnos de secundaria.

### ***Resolución directa utilizando CG***

En este caso tenemos el uso de la CG pero sin introducción previa a la visualización de la misma; es decir, se dejó que la CG “explicara” por sí misma. No se hizo interpretación ni se apreció su incorporación al proceso de modelización. Un ejemplo de este caso lo representan las producciones de los participantes PF5 y PF9. En lo correspondiente a PF5 planteó las inecuaciones

$$140 < 7x + 5y, \quad x + y < 40,$$

definió las funciones

$$y = \frac{140 - 7x}{5} \equiv y3(x),$$

$$y = 40 - x \equiv y4(x)$$

y finalmente hizo la representación (figura 1), sin dar detalles ni interpretaciones respecto a la situación problema.

El participante PF9 definió la función ingreso de Ricardo por

$$i(t_1, t_2) = 7t_1 + 5t_2$$

donde  $t_1$  ≡ tiempo en trabajo 1;  $t_2$  ≡ tiempo en trabajo 2.

Luego escribió y presentó

$$i(t_1, t_2) \geq 140$$

y en la calculadora hizo la representación mostrada en la figura 2.

En esta última producción se notó dominio técnico de la CG en la graficación de funciones pero no se aprovechó para hacer conclusiones acerca de las soluciones, lo cual pudo haber conducido a tomar en cuenta nuevas condiciones y el ajuste del modelo.

Figura 1

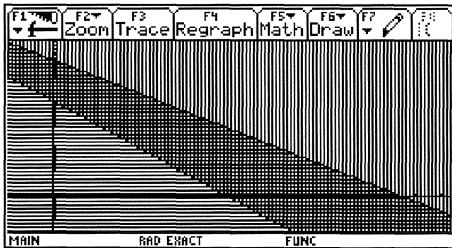
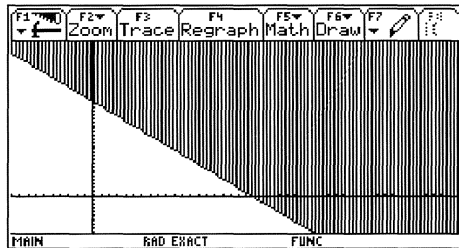


Figura 2



**Resolución detallada utilizando CG**

En este caso los profesores en formación intentaron explicar los detalles de sus razonamientos. Además incorporaron la CG en sus producciones y abordaron el proceso de modelización. Utilizaron la CG para despejar variables, tal como se observa en la figura 3. También se empleó la CG para realizar tablas como la mostrada en la figura 4, construida con la función

$$y(x) = \frac{-7(x - 20)}{5}$$

En el contexto algebraico definieron las variables a utilizar en la construcción del modelo, introdujeron ecuaciones e inecuaciones en dos variables y la interpretación de sus soluciones. Respecto del estudio de la situación problema se encontró que la mayoría de participantes en esta categoría resolvieron casos particulares.

Figura 3

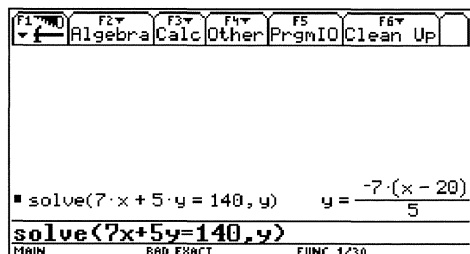
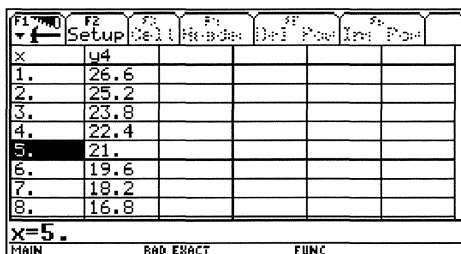


Figura 4



### ***Desempeño de los profesores en formación (PF) en el momento final***

El objetivo de la última sesión, fue diseñar una actividad didáctica de contenido algebraico para desarrollarla con alumnos de secundaria, según se muestra a continuación:

*Supongamos un profesor de secundaria que necesita elaborar una actividad didáctica con la que mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales. Para satisfacer este propósito te pedimos que describas (o propongas) una situación problema del mundo real que cumpla esa asignación.*

*Asumiendo que el profesor conoce el proceso de modelización y que utilizará la calculadora gráfica con sus estudiantes:*

*Enuncia al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica;*

*Ordena la secuencia de las actividades (guión) a seguir por el profesor, para lograr su objetivo;*

*Sugiere al menos dos aspectos a evaluar (en los alumnos) e indica cómo los llevarías a cabo.*

Es importante destacar que el enunciado de esta actividad fue idéntico al propuesto en la parte B de la sesión inicial.

En la primera cuestión, los profesores en formación, plantearon situaciones de la vida cotidiana, familiar, empresarial, comercial y del ámbito bélico. En general, los profesores en formación acudieron a diferentes ámbitos de interés para plantear las situaciones problema.

En cuanto a la segunda cuestión, las preguntas expuestas por los participantes podrían contribuir a desarrollar procesos de modelización donde se desarrollaran habilidades de comunicación oral y escrita, así como la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos.

Respecto a la tercera cuestión, en líneas generales los profesores en formación consideraron la secuencia siguiente: 1. Organizar los alumnos en grupos pequeños, 2. Planteamiento de la situación problema, 3. Formulación (y selección) del problema, 4. Identificación de variables, 5. Establecimiento de relaciones entre las variables (puede utilizarse la CG), 6. Construcción del modelo, 7. Representar el modelo utilizando varios sistemas de representación (con el apoyo de la CG), 8. Resolución del problema (matemático), 9. Interpretación de la (o las) solución (o soluciones), 10. Formulación de nuevas preguntas y 11. Planteamiento de nuevas situaciones a manera de ejemplo

Las propuestas de la cuarta cuestión, referida a la evaluación, sugieren que los profesores en formación consideraron la evaluación como búsqueda de información para el profesor. Para que este último lograra construir un marco general de sus alumnos y tomar decisiones en relación con las estrategias de enseñanza y el aprendizaje. Faltó considerar explícitamente la evaluación como fuente para contribuir a fortalecer en los alumnos sus capacidades intelectuales y aprovechar las posibles ventajas que le ofrece el contexto escolar.

## LOGROS Y HALLAZGOS

Los profesores en formación plantearon situaciones del mundo real ajustadas a los niveles de la educación secundaria y cercanas al entorno del alumno. En cuanto al organizador materiales y recursos, se evidenció un dominio en el manejo técnico y didáctico de la CG, y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el profesor como para el alumno. Se reveló una postura ante la enseñanza de las matemáticas que colocaba al alumno en un plano de sujeto activo, donde éste podría experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el profesor. Los profesores en formación recurrieron a diferentes sistemas de representación y sus interconexiones, lo cual reveló la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploraron formas de explicar el álgebra a los alumnos como mecanismos para favorecer la comprensión de la situación problema. Se puso en evidencia la aplicación del proceso de modelización, integrado a la CG, en todas sus fases para el diseño de la actividad didáctica de contenido algebraico solicitada, remarcándose el énfasis que mantuvieron en el uso de preguntas abiertas.

Las producciones de los participantes estuvieron referidas a: 1. La aplicación sistemática de la modelización en la resolución de problemas del mundo real, 2. El uso de la experimentación para la resolución de problemas, 3. La utilización de la calculadora gráfica en los momentos de abstracción y resolución correspondientes al proceso de modelización y 4. La utilización de las potencialidades de la calculadora gráfica con fines didácticos.

Respecto a la modelización, los profesores en formación propusieron problemas abiertos con el propósito de contribuir al desarrollo de la autonomía intelectual de los alumnos.

Por otra parte, respecto a la secuencia, en el momento inicial sólo se enfatiza en plantear la situación problema, formular el modelo, resolver, plantear otros ejemplos simi-

lares y comprobar resultados con la CG; mientras que en el momento final se considera el trabajo en grupo por parte de los alumnos, el planteamiento de situaciones y la selección y formulación de problemas, la construcción y representación múltiple del modelo (con el apoyo de la CG), interpretación de las soluciones y la formulación de nuevas preguntas. Esto revela avances en el conocimiento didáctico de los profesores en formación generados en la implementación del programa.

En lo relativo a la importancia del álgebra lineal para la enseñanza, los profesores en formación plantearon contextos que permitieran utilizar los conceptos algebraicos para la aplicación de la modelización y el reconocimiento de diferentes formas de enseñanza.

## REFERENCIAS

- BORASSI, R. (1987) Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the learning of mathematics*, 7, 2-9.
- BRUNNER, A.; COSKEY, K. & SHEEHAN, S. (1998) Algebra and Technology. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics. Yearbook*. Reston: NCTM.
- Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (1992) *Boletín Oficial N° 56* (anexo II), Junio, 20. Sevilla: Autor.
- DORIER, J. (Ed.) (2000) *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- DUVAL, R. (1995) *Semiosis et pensée humaine*. Paris: Peter Lang.
- FAUVEL, J. (Ed.) (1991) Special Issue on History in Mathematics Education. *For the learning of mathematics*, 11 (2).
- FREUDENTHAL, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- GALBRAITH, P.; HAINES, C. & IZARD, J. (1998) How do Students' Attitudes to mathematics Influence the Modelling Activity? En P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I.D. Huntley (Eds.), *Mathematical Modelling. Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*. Chichester, UK: Horwood Publishing.
- HAREL, G. (1998) Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (or Vice Versa). *The American Mathematical Monthly*, 6. 497-507
- HOUSTON S.K.; BLUM, W.; HUNTLEY, I. & NEIL, N.T. (1997) *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Chichester: Albion Mathematics and Applications Series
- JANVIER, C. (Ed.) (1987) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.



- KUTZLER, B. (2000) The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*. 7 (1), 5-24.
- NISS, M.; BLUM, W. & HUNTLEY, I.(1991) *Teaching and Mathematical Modelling and Applications*. Chichester: Ellis Horwood limited
- ORTIZ, J. (2002) *Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación* (Tesis Doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.
- RICO, L. (1997a) Los organizadores del currículo de matemáticas. In L.Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.
- (1997b). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. In L.Rico (Ed), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis